

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia



TESIS DOCTORAL

**NUEVOS DISEÑOS DE ANTENAS PEQUEÑAS DE
HILO MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS Y
GEOMETRÍA PREFRACTAL**

*Francisco Javier García Ruiz
Granada, 18 de marzo de 2005*

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia



TESIS DOCTORAL

**NUEVOS DISEÑOS DE ANTENAS PEQUEÑAS DE
HILO MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS Y
GEOMETRÍA PREFRACTAL**

Memoria presentada por Francisco Javier García Ruiz para optar
al grado de Doctor por la Universidad de Granada.

Granada, 18 de marzo de 2005.

D^a. Amelia Rubio Bretones, Doctora en Ciencias Físicas, Catedrática de Electromagnetismo del Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

y

D. Mario Fernández Pantoja, Doctor en Ingeniería Electrónica, Profesor Titular del Área de Electromagnetismo del Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

CERTIFICAN

Que el trabajo de investigación que se presenta en esta Memoria, titulado NUEVOS DISEÑOS DE ANTENAS PEQUEÑAS DE HILO MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS Y GEOMETRÍA PREFRACTAL, ha sido realizado en este Departamento por el Ingeniero de Telecomunicación D. Francisco Javier García Ruiz bajo nuestra dirección, y constituye su Tesis Doctoral.

Con esta fecha autorizamos su presentación ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada.

Granada, dieciocho de marzo de dos mil cinco.

Fdo. Amelia Rubio Bretones

Fdo. Mario Fernández Pantoja

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR EL
PROGRAMA DE BECAS FPI DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y
CIENCIA Y POR LOS PROYECTOS IST-2001-33055 (FRACTALCOMS),
TEC-2004-06217-C02-01, Y TEC-2004-04866-C04-03

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, desearía mostrar mi más sincera gratitud a los profesores D^a. Amelia Rubio Bretones y D. Mario Fernández Pantoja, por su constante apoyo y su excelente labor de dirección a lo largo de todo el proceso de esta Tesis.

También me gustaría agradecerle a D. Bernardo García Olmedo, D. Rafael Gómez Martín y D. Salvador González García su dedicación y colaboración en cuanto les ha sido posible.

Afortunadamente, el Grupo de Electromagnetismo de Granada destaca por su calidad humana. A ello contribuyen también mis compañeros de dichas (y desdichas): Fali (Dr. D. Rafael Godoy Rubio), Carlos y Javi. Muchas gracias.

Pero esta Tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de mi familia: mis padres, mis hermanos, mis abuelos, mis tíos, mis primos (especialmente Olga y Marta, aunque ellas no lo sepan)... todos me apoyaron durante estos años y me hicieron la vida más fácil. Muchas gracias por creer en mí. También le debo dar las gracias por su apoyo a mi familia política, y especialmente a Manuel por sus sonrisas.

Tengo mucho que agradecer a mis amigos, a todos. Por soportar mi ausencia durante los últimos meses, y por animarme en momentos duros.

Y, por supuesto, a Mila. Aunque a ti va dedicada la Tesis, también quiero darte las gracias por aguantarme. Que tiene su mérito.

*A Mila,
mi inspiración*

-Adiós -dijo el zorro-. Éste es mi secreto. Es muy sencillo: sólo se ve bien con el corazón. Lo esencial es invisible a los ojos.

*Antoine de Saint-Exupery
El Principito*

Índice

1. Justificación y precedentes	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	4
1.3. Contenido y organización de la memoria	5
2. MoMTD para el análisis en el dominio del tiempo de antenas formadas por hilos delgados conductores	9
2.1. Introducción	9
2.2. El método de los momentos.	10
2.3. Ecuación EFIE en el dominio del tiempo para hilos delgados. .	11
2.3.1. El principio de equivalencia físico	11
2.3.2. La ecuación EFIE-DT	13
2.3.3. Particularización de la EFIE para estructuras de hilo delgado	15
2.4. Solución de la EFIE-TD para hilos delgados: programa DOTIG5.	18
2.4.1. Aproximación poligonal del hilo delgado	18
2.4.2. Elección de las funciones base y peso	19
2.4.3. Expresión discretizada de la EFIE para hilos delgados .	21
2.4.4. Ecuación matricial resultante	25
2.4.5. Introducción de un plano de tierra	27
2.4.6. Simulación de estructuras con uniones	28
3. Método híbrido ADI-FDTD-MoMTD para el análisis de estructuras de hilo frente a cuerpos inhomogéneos	35
3.1. Introducción.	35
3.2. El método FDTD	37
3.2.1. Introducción a FDTD	37
3.2.2. Fundamentos de FDTD	39

3.2.3.	Implementación de fuentes de corriente en FDTD	42
3.3.	El método ADI-FDTD	43
3.3.1.	Fundamentos de ADI-FDTD	43
3.3.2.	Implementación de fuentes de corriente en ADI-FDTD	44
3.4.	Los métodos híbridos FDTD-MoMTD y ADI-FDTD-MoMTD	45
4.	Análisis de antenas prefrales en el dominio del tiempo	51
4.1.	Introducción	51
4.2.	Geometría fractal.	53
4.2.1.	Definición de fractal	53
4.2.2.	Estudio de la dimensión de <i>Hausdorff-Besicovitch</i> . . .	54
4.3.	La antena prefactal de Koch: el efecto <i>shortcut</i>	57
4.3.1.	Geometría de la antena prefactal de Koch	57
4.3.2.	Comportamiento en frecuencia	60
4.3.3.	Análisis en el dominio del tiempo del prefactal de Koch	64
4.3.4.	Estudio espectral de la corriente en la antena prefactal de Koch	73
4.3.5.	<i>Shortcuts</i> en estructuras no prefrales	78
4.4.	Antena tipo árbol <i>quasi-fractal</i> : efecto de las uniones	82
4.5.	Antena prefactal de Hilbert: orientación de las corrientes en segmentos paralelos	86
4.5.1.	Características de la antena prefactal de Hilbert . . .	87
4.5.2.	Efecto de la orientación de las corrientes en segmentos paralelos	91
4.6.	Comparación entre las antenas prefrales contenidas en un plano	98
4.7.	Antenas prefrales no contenidas en un plano	100
4.7.1.	Antena tipo árbol fractal tridimensional	100
4.7.2.	Antena de Hilbert tridimensional	102
5.	Diseño de antenas pequeñas con algoritmos genéticos	105
5.1.	Introducción.	105
5.2.	Resolución de problemas de optimación mediante algoritmos genéticos.	107
5.2.1.	Introducción	107
5.2.2.	Resolución de problemas de optimación monoobjetivo mediante GA	108

5.2.3. Algoritmo genético multiobjetivo	111
5.3. Comparación de las antenas prefractales tipo Koch con otras antenas pequeñas de geometría euclídea diseñadas con GA . .	115
5.3.1. Diseño mediante algoritmos genéticos	115
5.3.2. Resultados	118
5.4. Diseño de antenas inscritas en un semicírculo	127
5.5. Antenas optimizadas genéticamente incluyendo lazos.	131
5.5.1. Diseño de las antenas	132
5.5.2. Resultados	134
6. Interacción entre antenas pequeñas de terminales móviles y la cabeza humana	139
6.1. Introducción	139
6.1.1. Enfoques del problema	140
6.1.2. Normativas y métodos de estimación del SAR	141
6.2. Modelado computacional de la cabeza humana	143
6.3. Efecto de la presencia de la cabeza sobre el comportamiento de las antenas	147
6.4. Cálculo del SAR	149
6.4.1. Cálculo del SAR de antenas pequeñas optimadas mediante GA	152
Conclusiones	157
Apéndices	159
A. Elección de los puntos campo	159
A.1. Introducción	159
A.2. Estudio del efecto de la variación del punto campo	160
A.3. Modificación de las funciones peso	162
B. Desarrollos numéricos asociados al análisis de estructuras de hilo delgado	165
B.1. Introducción	165
B.2. Cálculo de las matrices de estructura	165
B.2.1. Cálculo de la función auxiliar F	165
B.2.2. Cálculo de la función auxiliar G	168
B.2.3. Cálculo analítico de las integrales en cada subsegmento	168
B.3. Cálculo de los campos cercanos	170

B.3.1. Cálculo del campo eléctrico cercano	170
B.3.2. Cálculo del campo magnético cercano	172
B.4. Cálculo de las ecuaciones adicionales en uniones con segmentación no uniforme	173
C. El factor de calidad Q	177
C.1. Definición	177
C.2. Expresión analítica para el cálculo del factor de calidad Q . .	178
D. Algoritmo para el cálculo de la Tasa de Absorción Específica (SAR)	185
Bibliografía	193

CAPÍTULO 1

Justificación y precedentes

1.1. Introducción

El desarrollo de esta Tesis es paralelo al del proyecto europeo de investigación titulado '*Exploring the limits of Fractals Electrodynamics for the future telecommunication technologies*', *Fractalcoms* [1], cuyo principal objetivo ha sido la exploración de los límites fundamentales y tecnológicos de las antenas pequeñas basadas en la geometría fractal, introducida por Mandelbrot en su libro '*The fractal geometry of nature*' en 1984 [2].

La relación entre el tamaño de una antena y sus prestaciones es una limitación fundamental teórica que ya fue establecida en 1947 por Wheeler [3], quien usando un modelo circuital de la antena demostró que el producto de su ancho de banda por su eficiencia está directamente relacionado con el volumen ocupado por la misma. Posteriormente, Chu [4] generalizó el trabajo de Wheeler, estudiando la relación de dicho volumen con el factor de calidad Q , definido como el cociente entre la energía almacenada en los campos electromagnéticos cercanos y la energía radiada por la antena. Chu demostró que el mínimo valor de Q alcanzable por una antena varía aproximadamente de forma inversa con el cubo de su tamaño eléctrico (definido como kh , siendo k el número de ondas de la antena en su resonancia y h el radio de la menor esfera que circunscribe a la antena y su imagen). Otros autores [5–7] han alcanzado expresiones más precisas que la de Chu, si bien sus resultados son idénticos para tamaños eléctricos muy pequeños ($kh \ll 1$). Harrington [8],

en 1960, extendió el trabajo de Wheeler y Chu para incluir el efecto de las pérdidas, demostrando que la miniaturización de antenas conlleva también una reducción en la eficiencia y la ganancia de las mismas. Por otra parte, y como apunta Hansen [9], se puede conseguir disminuir el factor Q para antenas pequeñas a costa de disminuir también su eficiencia. Así, por ejemplo, Wolf et al. [10] presentaron sensores electromagnéticos de muy baja frecuencia y pequeño tamaño para comunicaciones submarinas.

De entre las posibles aplicaciones de las antenas pequeñas, definidas de acuerdo a Wheeler [11] como aquellas que cumplen la relación $kh < 1$, se pueden destacar el diseño de antenas a muy baja frecuencia (VLF) [11, 12], donde la elevada longitud de onda (de orden kilométrico) exige el uso de antenas de tamaño mucho menor a la misma por motivos tanto tecnológicos como económicos, y el uso de antenas para dispositivos móviles [13], donde el tamaño y el peso de los terminales dependen en parte de los de sus antenas, lo que ha aumentado en los últimos años el interés en encontrar mejores antenas pequeñas.

Muchos investigadores han tratado de encontrar dispositivos que consigan la máxima aproximación posible al límite teórico de antena pequeña. Por ejemplo, Fenwick [14] propuso doblar los hilos para disminuir el tamaño de la estructura, demostrando que la orientación de las corrientes en hilos próximos afectaba al grado de miniaturización alcanzado. Goubau [15] presentó un diseño bastante eficiente, tridimensional, basado en el uso de estructuras con lazos cerrados y carga capacitiva. Actualmente, grupos de trabajo de todo el mundo siguen buscando soluciones a problemas concretos de miniaturización, usando para ello diversas técnicas: cargando las antenas con elementos concentrados pasivos [16], usando materiales de alta constante dieléctrica o conductores [13], planos de tierra y cortocircuitos [13], lazos con múltiples vueltas [17], optimizando la geometría [18–20], etc. Técnicas de optimización mediante algoritmos genéticos [21–23] también han sido usadas con éxito para el diseño de antenas pequeñas.

A mediados de la década de los noventa, grupos de investigación de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) [24] y de la Universidad de Boston [25] presentaron de forma casi simultánea la potencialidad de las antenas basadas en geometría fractal para su uso como antenas pequeñas, basándose en la propiedad de los fractales conocida como '*rellenado del espacio*'. Estas antenas, que se denominarán en adelante prefractales, son el resultado de truncar el proceso de formación de un fractal tras un cierto número de iteraciones de su función generadora (IFS - *Iterated function system*). Dado que la longitud total de algunas curvas fractales aumenta conforme lo hace

el número de iteraciones, a priori se pueden conseguir antenas de longitud arbitrariamente elevada, lo que de acuerdo con Hansen [9] puede acarrear una mejora en las características del radiador y por tanto una aproximación a los límites teóricos de antena pequeña. Basándose en esta idea, varios grupos de investigación han trabajado durante los últimos años en el diseño de antenas pequeñas usando geometría prefractal [26–28].

Sin embargo, ya desde los primeros pasos del desarrollo de las antenas pequeñas prefractales, se comprobó que aunque al aumentar el número de iteraciones el factor de calidad Q disminuye, lo hace cada vez en una proporción menor hasta que se estanca y no se aproxima más al límite teórico de Chu [26]. Por otra parte, debido a la acumulación de campo eléctrico en pequeñas regiones que se produce en las antenas prefractales, y al aumento de las pérdidas por efecto Joule, su eficiencia disminuye [1]. Trabajos más recientes [29–34] han demostrado la existencia de antenas de geometría euclídea que consiguen mejores características que ciertas estructuras prefractales.

Parte del objetivo del proyecto *Fractalcoms* ha consistido en el estudio de los límites en las prestaciones de las antenas prefractales. Dentro de este contexto, la labor del Grupo de Electromagnetismo de Granada, y en concreto de esta Tesis, ha estado enfocada al análisis en el dominio del tiempo de antenas pequeñas de hilo con geometría prefractal, así como otras de geometrías más convencionales (tipo zigzag, *meander*, etc.), u optimizadas mediante algoritmos genéticos, que han sido usadas para la comparación con aquéllas. Se ha optado por antenas de hilo porque son fácilmente implementables, tanto con hilos como con tiras metálicas (*strips*) sobre sustratos dieléctricos, y porque las conclusiones alcanzadas son extensibles a otros tipos de antenas.

La simulación numérica es fundamental para la comprobación del comportamiento de distintas estructuras prefractales de interés potencial, dado que permite su estudio más allá de los límites tecnológicos. El análisis de las antenas se ha realizado en esta Tesis mediante simulaciones en el dominio del tiempo, que tienen la ventaja de facilitar la visualización de la evolución temporal de las magnitudes electromagnéticas implicadas en el proceso de radiación [35]. Además, el uso de técnicas en el dominio del tiempo permite el uso de ventanas temporales, pudiéndose estudiar por separado las contribuciones de los distintos centros de radiación de una antena [36].

1.2. Objetivos

Como se ha comentado el objetivo de la Tesis es el desarrollo de métodos numéricos en el dominio del tiempo y su aplicación al estudio de antenas pequeñas de hilo basadas en geometría prefractal y en otros tipos de geometrías convencionales y optimizadas mediante algoritmos genéticos. Así pues, los objetivos concretos de esta Tesis se pueden dividir en dos grupos:

1. El primer bloque de objetivos consiste en la extensión de los métodos numéricos necesarios para el análisis de las estructuras de hilo radiantes, tanto en vacío, utilizando el Método de los Momentos en el Dominio del Tiempo (MoMTD) [36,37] y más concretamente el programa DOTIG5 [38], como en presencia de cuerpos inhomogéneos, usando un método híbrido [39,40] que combina el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo Implícito de Direcciones Alternantes (ADI-FDTD) [41,42] con MoMTD. Algunas de las extensiones a realizar sobre el programa DOTIG5 consisten en [43]:
 - a) Permitir el uso de segmentación no uniforme en el modelado de los hilos.
 - b) Aprovechar la simetría de los problemas permitiendo la introducción de planos de tierra.
 - c) Posibilitar la simulación de estructuras con uniones entre hilos con segmentación no uniforme en cada uno de ellos mediante el método de los segmentos solapados [44].
 - d) Programar algoritmos de postproceso adecuados que permitan la visualización de corrientes y campos electromagnéticos en las proximidades de la antena.

Al método híbrido ADI-FDTD-MoMTD se le añadirán todas estas extensiones del código DOTIG5 (excepto el plano de tierra).

2. El segundo bloque trata del análisis y diseño de antenas pequeñas basadas en geometría prefractal, así como otras basadas en geometrías euclídeas y optimizadas con algoritmos genéticos, tanto en vacío como en presencia de cuerpos inhomogéneos. Los objetivos concretos dentro de este bloque son los siguientes:

- a) Análisis de antenas prefractales en el dominio del tiempo y visualización de posibles efectos que limiten el comportamiento de las estructuras [43, 45, 46].
- b) Comparación de estructuras prefractales con otras de geometría convencional no optimizadas y análisis de los resultados obtenidos [47, 48].
- c) Comparación entre distintas antenas prefractales [43].
- d) Optimización de estructuras prefractales y no prefractales mediante algoritmos genéticos. [49–52].
- e) Estudio del comportamiento de antenas pequeñas prefractales y no prefractales en presencia de cuerpos inhomogéneos. Concretamente en presencia de la cabeza humana [53–57].
- f) Desarrollo de un algoritmo para el cálculo de la tasa de absorción específica (SAR) en el cuerpo humano compatible con las últimas normativas de IEEE [57, 58], y aplicación al estudio del SAR originado por antenas pequeñas de hilo [59].

1.3. Contenido y organización de la memoria

De acuerdo con los objetivos de la Tesis, la memoria ha sido dividida en dos bloques claramente diferenciados. En el primero de ellos, se presentan los métodos numéricos de simulación electromagnética y las extensiones realizadas a lo largo de la elaboración de la Tesis. En el segundo, dichos métodos se aplican al análisis de antenas pequeñas basadas en geometría prefractal y optimizadas con algoritmos genéticos.

La memoria consta de seis capítulos, incluyendo el presente de introducción donde se han presentado los objetivos y el marco bibliográfico de esta investigación. En cuanto a los restantes:

- En el segundo capítulo se presenta el programa DOTIG5, basado en la aplicación del método de los momentos en el dominio del tiempo (MoMTD) para el análisis de estructuras de hilo. Se describen los fundamentos de MoMTD, partiendo de la ecuación integral del campo eléctrico (EFIE), desarrollando la corriente en funciones base bidimensionales (espaciales y temporales) lagrangianas de tercer orden, y obteniendo el sistema de ecuaciones cuya solución es la corriente en los

hilos que componen la antena. Se ha extendido el código para permitir la simulación de estructuras con tierra y con un número arbitrario de uniones, así como la existencia de segmentación no uniforme. Los desarrollos numéricos han sido incluidos en apéndices para permitir una lectura más cómoda del capítulo. También ha sido incluido en un apéndice un estudio acerca de la elección de los puntos campo en el método.

- En el tercer capítulo se hace una descripción de las herramientas híbridas FDTD-MoMTD y ADI-FDTD-MoMTD. Dado que las aplicaciones de esta memoria involucran problemas en los que la antena no radia en vacío, sino en presencia de cuerpos inhomogéneos, se describe la hibridación de los métodos FDTD y ADI-FDTD con MoMTD a fin de tratar con precisión tanto el problema inhomogéneo como las antenas.
- En el cuarto capítulo se analizan algunas antenas prefractales usando MoMTD. Se realiza el estudio sobre las antenas tipo Koch, árbol y Hilbert, observándose dos fenómenos que pueden afectar a sus características como antenas pequeñas: por una parte, la energía radiada por el segmento de alimentación se acopla a otras partes de la estructura, en el fenómeno que se ha denominado '*shortcut*'; por otra, la variación existente en la frecuencia de resonancia dependiendo de si la geometría de la antena presenta tramos con corrientes en el mismo sentido o en sentidos opuestos. Se comprueba que, en general, se debe alcanzar un compromiso entre las distintas características que definen el comportamiento de una antena.
- En el quinto capítulo se presentan nuevos diseños de antenas pequeñas optimizadas mediante algoritmos genéticos multiobjetivo (MGA). En la primera parte del capítulo se presenta el concepto de algoritmo genético multiobjetivo. Posteriormente, se emplea un método MGA para el diseño de antenas optimizadas de geometría prefractal y euclídea, comprobando cómo las últimas tienen en general mejor comportamiento.
- En el sexto y último capítulo se estudia el comportamiento frente a un modelo de cabeza humana de algunas de las antenas previamente optimizadas. Se usa para ello la técnica híbrida ADI-FDTD-MoMTD presentada en el tercer capítulo, estudiándose tanto el efecto que la presencia del cuerpo inhomogéneo tiene sobre el comportamiento de la

antena, como la absorción de potencia producida en dicho cuerpo debida a la radiación electromagnética. Para esto último, se ha calculado la tasa de absorción específica (SAR) en la cabeza, desarrollando un algoritmo que cumple las últimas recomendaciones de IEEE, y que se presenta en el apéndice D.

CAPÍTULO 2

MoMTD para el análisis en el dominio del tiempo de antenas formadas por hilos delgados conductores

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta el método de los momentos (MoM - *Method of Moments*) [60, 61] y su aplicación a la solución de la ecuación integral del campo eléctrico en el dominio del tiempo (EFIE-TD - *Electric Field Integral Equation - Time Domain*) para el caso de antenas formadas por hilos delgados conductores. En primer lugar, el apartado 2.2 se dedica a la descripción del método de los momentos o de los residuos pesados para la resolución en general de ecuaciones funcionales mediante la proyección de sus soluciones en un subespacio funcional dado. En el apartado 2.3 se formula la ecuación EFIE-TD a partir de la aplicación del principio de equivalencia físico. Por último, en el apartado 2.4, se presentan los algoritmos utilizados para su solución mediante el programa de ordenador DOTIG5 [38, 62, 63], así como las modificaciones específicas que en esta Tesis se han llevado a cabo, para aprovechar la simetría generada por un plano de tierra y permitir la simulación de estructuras de hilos de geometría arbitraria con uniones.

2.2. El método de los momentos.

El método de los momentos, también llamado método de los residuos pesados, de las proyecciones o de Petrov-Galerkin, es un método general de solución de ecuaciones funcionales mediante su reducción a ecuaciones matriciales que pueden ser tratadas utilizando el álgebra lineal. Este tipo de procedimientos fue descrito por primera vez por Galerkin, en 1915 [64]. Sin embargo, no se hicieron populares hasta la aparición de los computadores de alta velocidad, debido a la gran cantidad de cálculo necesario para su ejecución [61]. A partir de 1960, muchos investigadores comenzaron a resolver ecuaciones propias del Electromagnetismo mediante métodos numéricos [65–68], entre los que se encontraba el método de los momentos [60, 61].

La mayoría de las soluciones de ecuaciones funcionales pueden interpretarse en términos de proyecciones sobre algún subespacio de un espacio funcional. Evidentemente, en cálculos numéricos, dicho subespacio debe ser de dimensión finita. Al concepto general de la solución de las ecuaciones usando dicha proyección sobre un subespacio funcional es a lo que se le conoce como método de los momentos, de las proyecciones o de los residuos pesados.

El punto de partida del método de los momentos es la ecuación funcional

$$Lf = g \quad (2.1)$$

donde L es un operador lineal, g una función conocida, y f una función incógnita a determinar. La función f se puede representar como combinación lineal de un conjunto de funciones $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ en el dominio de L :

$$f = \sum_j \alpha_j f_j \quad (2.2)$$

Los coeficientes α_j son escalares a determinar y a las funciones f_j se las denomina funciones base. Sustituyendo (2.2) en (2.1), y haciendo uso de la linealidad de L , se obtiene la expresión

$$\sum_j \alpha_j Lf_j \simeq g \quad (2.3)$$

donde la aproximación en la igualdad viene dada por el número finito de funciones base usado en la práctica para la descomposición de f .

Por otro lado, se definen las funciones peso, $\{w_1, w_2, w_3, \dots\}$, en el dominio de L . Dichas funciones tienen como objeto la minimización del error

cometido en la expresión (2.3), mediante la aplicación de un producto interno con cada uno de sus términos:

$$\sum_j \alpha_j \langle w_i, Lf_j \rangle = \langle w_i, g \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

En el caso particular de que las funciones base y peso sean idénticas, al método de los momentos se le suele denominar método de *Galerkin*.

El conjunto de ecuaciones dado por (2.4) se puede escribir de forma matricial, como:

$$\tilde{A}\vec{\alpha} = \vec{g} \quad (2.5)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= [\alpha_j], & \tilde{A} &= [a_{i,j}], & \vec{g} &= [g_j] \\ a_{i,j} &= \langle w_i, Lf_j \rangle \\ g_i &= \langle w_i, g \rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si la matriz \tilde{A} es no singular, se pueden calcular los coeficientes α_j de la solución algebraica de (2.5) y por tanto, posteriormente, la función incógnita mediante la expresión (2.2). Esta solución puede ser aproximada o exacta dependiendo de la elección de las funciones base y peso, aunque en general no suele existir un conjunto finito de funciones base que garanticen la exactitud de la solución, por lo que en esta Tesis se considerará la elección de funciones base y peso encaminada a la minimización del error dado al utilizar la ecuación (2.3).

2.3. Ecuación EFIE en el dominio del tiempo para hilos delgados.

2.3.1. El principio de equivalencia físico

Consideremos el caso de un conjunto de fuentes externas radiando en presencia de un cuerpo conductor eléctrico perfecto (PEC - *Perfect Electric Conductor*) de superficie S como el que se muestra en la figura 2.1. El campo incidente (\vec{E}^i, \vec{H}^i) se define como aquél que generarían las fuentes externas en ausencia del objeto conductor, y el campo dispersado (\vec{E}^s, \vec{H}^s) por dicho objeto como:

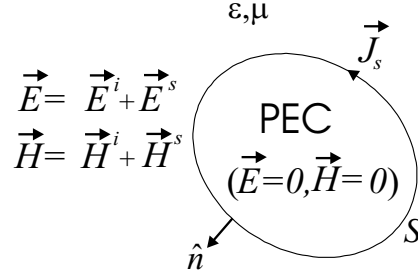


Figura 2.1: Problema general de dispersión.

$$\begin{aligned}\vec{E}^s &= \vec{E} - \vec{E}^i \\ \vec{H}^s &= \vec{H} - \vec{H}^i\end{aligned}\quad (2.7)$$

donde (\vec{E}, \vec{H}) es el campo electromagnético total en la región exterior a S y las fuentes del campo dispersado vienen dadas por la densidad de corriente \vec{J}_s inducida en la superficie del conductor eléctrico perfecto, que cumple

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad (2.8)$$

siendo \hat{n} el vector normal a la superficie del conductor.

El principio de equivalencia físico [69] reemplaza el problema original de la figura 2.1 por el problema equivalente de la figura 2.2 para el cálculo de los campos dispersados en la región exterior a S , donde las densidades de corriente eléctrica y magnética equivalentes \vec{J}_s^e y \vec{M}_s^e vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{M}_s^e &= -\hat{n} \times \vec{E} = -\hat{n} \times (\vec{E}^i + \vec{E}^s) = 0 \\ \vec{J}_s^e &= \hat{n} \times \vec{H} = \hat{n} \times (\vec{H}^i + \vec{H}^s) = \vec{J}_s\end{aligned}\quad (2.9)$$

Así pues, el objeto conductor de la figura 2.1 ha sido sustituido por las corrientes equivalentes dadas en (2.9), que radian en un medio homogéneo de características electromagnéticas (ε, μ) iguales a las del medio exterior a S . La solución del problema equivalente de la figura 2.2 proporcionará los valores de los campos dispersados, y el campo total se calculará a partir de (2.7) suponiendo conocido el campo incidente.

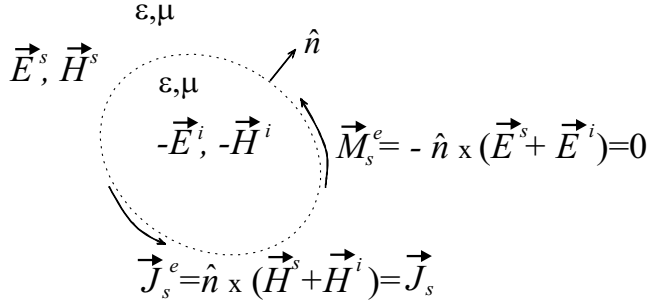


Figura 2.2: Problema general de dispersión.

La principal utilidad de este teorema de equivalencia físico radica en que, una vez conocida la corriente eléctrica a lo largo de la superficie del cuerpo dispersor, se pueden utilizar, para el cálculo de los campos, las ecuaciones de radiación en medios homogéneos e isotrópos, puesto que en el problema equivalente de la figura 2.2 las fuentes equivalentes radian en un espacio homogéneo.

Ahora bien, la densidad de corriente eléctrica superficial \vec{J}_s^e , que coincide con la inducida en la superficie S por los campos incidentes, es a priori tan desconocida como los propios campos dispersados que se pretenden calcular, puesto que para obtenerla es necesario conocer el campo total. De todas formas, el principio es útil para el cálculo de los campos cuando sea posible realizar aproximaciones adecuadas de la densidad de corriente \vec{J}_s . Por ejemplo, esto ocurre con la aplicación del método de los momentos, que realiza la expansión de \vec{J}_s en términos de funciones base conocidas de acuerdo a (2.2) y que se aplica para la resolución de la ecuación integral del campo eléctrico (EFIE) como se describe en el próximo apartado.

2.3.2. La ecuación EFIE-DT

Considerando el problema equivalente de la figura 2.2, el campo eléctrico dispersado se puede expresar en función de los potenciales como:

$$\vec{E}^s(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla\phi(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

donde tanto el potencial vector \vec{A} como el potencial escalar ϕ se pueden escribir en función de la densidad de corriente \vec{J}_s^e . Para simplificar la notación,

dado que la corriente equivalente en la superficie del conductor coincide con la corriente superficial real, se denominará simplemente \vec{J}_s . Así, los potenciales vector y escalar se expresan como:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t')}{R} dS' \quad (2.11)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dS'$$

siendo \vec{r}' el vector de posición del punto fuente¹, situado en la superficie S ; \vec{r} el vector de posición del punto en el que se está calculando el campo, y que en consecuencia se denominará punto campo; R el módulo del vector distancia $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$; $t' = t - \frac{R}{c}$ el tiempo retardado, para tener en cuenta la causalidad del sistema; y por último μ y ϵ la permeabilidad y permitividad del medio donde está inmerso el conductor. Se puede ver en la figura 2.3 el sistema de coordenadas utilizado.

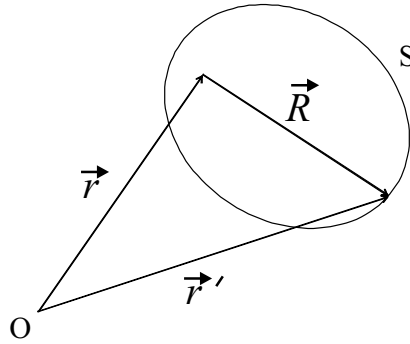


Figura 2.3: Sistema de coordenadas utilizado para la obtención de la ecuación EFIE.

La sustitución de las ecuaciones (2.11) en (2.10) da lugar a

$$\vec{E}^s(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}', t')}{R} dS' \right) - \nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dS' \right) \quad (2.12)$$

¹A lo largo de esta memoria se reservará siempre la notación prima (') a las variables espacio-temporales correspondientes a las fuentes.

Utilizando la ecuación (2.12) e imponiendo al campo eléctrico total \vec{E} la condición de contorno de que su componente tangencial sea cero en cualquier posición \vec{r} sobre la superficie se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\vec{E}^i(\vec{r}, t) \right)_{tang} &= \left(\frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\partial \vec{J}_s(\vec{r}', t')}{R} dS' \right)_{tang} \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \nabla \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dS' \right)_{tang} \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde la notación $(\)_{tang}$ indica la componente tangencial a la superficie S .

La ecuación (2.13) es la denominada EFIE-TD, de cuya solución se pueden obtener las corrientes inducidas en el conductor por el campo electromagnético incidente.

Una expresión alternativa a (2.13) se obtiene usando la versión integral de la ecuación de continuidad, considerando la nulidad de las distintas variables para $t \leq 0$, junto con la expresión

$$\nabla \left(\frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} \right) = -\rho(\vec{r}', t') \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{R}}{R^2 c} \cdot \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \quad (2.14)$$

con lo que resulta

$$\begin{aligned} \left(\vec{E}^i(\vec{r}, t) \right)_{tang} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial \vec{J}_s(\vec{r}', t')}{\partial t} dS' \right)_{tang} \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{\vec{R}}{R^3} \left(\int_0^{t'} [\nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}', \tau)] d\tau \right) dS' \right)_{tang} \\ &+ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S'} \frac{\vec{R}}{cR^2} [\nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}', t')]_{t'} dS' \right)_{tang} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La ecuación anterior es una ecuación funcional similar a la de la expresión (2.1), siendo la única incógnita a determinar el vector \vec{J} , por lo que su solución se puede obtener siguiendo los pasos descritos en dicho apartado.

2.3.3. Particularización de la EFIE para estructuras de hilo delgado

Se define un hilo delgado como aquél cuyo radio es mucho menor que su longitud [70] y que la longitud de onda mínima contenida en la señal

de excitación [71]. En este apartado se describirá la aproximación de hilo delgado, que tiene como objetivo evitar los siguientes inconvenientes que surgirían si se aplicara directamente la ecuación integral (2.15) a geometrías de hilo [62]:

1. Las incógnitas $\vec{J}_s(\vec{r}', t')$ estarían distribuidas a lo largo de toda la superficie del hilo conductor, lo que conllevaría un alto coste computacional para evaluar las integrales de superficie.
2. Dichas incógnitas serían vectores orientados de forma arbitraria en cualquier dirección.
3. La aplicación de la condición de contorno sobre puntos situados en la superficie del conductor originaría la aparición de singularidades en el núcleo de la ecuación integral.

Realmente por aproximación de hilo delgado se entienden un conjunto de aproximaciones que dan lugar a una expresión de la solución más sencilla [72]. Un estudio acerca de la validez de la aproximación de hilo delgado se puede encontrar en [73, 74]. Concretamente, dichas aproximaciones son:

1. Aproximaciones en la densidad de corriente superficial $\vec{J}_s(\vec{r}', t')$ que tienen como resultado una reducción en la complejidad de las incógnitas. Se puede considerar que la corriente en la superficie del hilo, S' , no presenta dependencia azimutal, de forma que cualquier integral a lo largo de la superficie se puede aproximar a una integral de línea a lo largo del eje del hilo, C' :

$$\int_{S'} \vec{f} ds' \cong 2\pi a \int_{C'} \vec{f} ds' \quad (2.16)$$

siendo a el radio del hilo. Además se supone que las incógnitas no son vectores de dirección arbitraria sino que tienen la dirección del hilo, lo cual simplifica la resolución de las integrales asociadas al método numérico.

2. La intensidad de corriente se supone localizada en el eje del hilo, pero la condición de contorno (2.15) se sigue aplicando sobre la superficie del conductor, por lo que se elimina la singularidad asociada al núcleo de la ecuación integral.

3. Por último, se fuerza a cero la corriente en los puntos situados en el extremo del conductor.

Teniendo en cuenta las aproximaciones anteriores, para el caso de una geometría de hilo delgado como la que se muestra en la figura 2.4, la ecuación (2.15) se modifica, tomando la forma

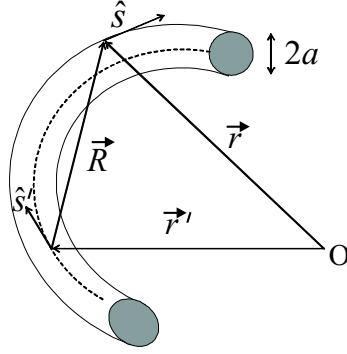


Figura 2.4: Geometría del hilo delgado.

$$\begin{aligned}
 \left(\vec{E}^i(\vec{r}, t) \right)_{tang} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{C'} \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial}{\partial t} \vec{I}(\vec{r}', t') ds' \right)_{tang} \\
 &+ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{C'} \frac{\vec{R}}{R^3} \left(\int_0^{t'} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{I}(\vec{r}', \tau) d\tau \right) ds' \right)_{tang} \quad (2.17) \\
 &+ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{C'} \frac{\vec{R}}{cR^2} \frac{\partial}{\partial r'} \vec{I}(\vec{r}', t') ds' \right)_{tang}
 \end{aligned}$$

donde la incógnita a calcular es ahora la intensidad de corriente, definida como:

$$\vec{I}(\vec{r}', t') = 2\pi a \vec{J}_s(\vec{r}', t') \quad (2.18)$$

La ecuación (2.17) es la ecuación EFIE-TD para hilos delgados que se resolverá en apartados sucesivos usando el método de los momentos en el dominio del tiempo [36].

2.4. Solución de la EFIE-TD para hilos delgados: programa DOTIG5.

La expresión (2.17) es formalmente idéntica a (2.1), siendo f la intensidad $\vec{I}(\vec{r}', t')^2$, L el operador integro diferencial definido a la derecha de la igualdad de (2.17), y g la componente tangencial del campo eléctrico incidente. Por tanto, se puede resolver mediante el método de los momentos, como se explicó en el primer apartado de este capítulo, transformando la ecuación integral en un sistema de ecuaciones cuya solución es la corriente eléctrica en el eje del hilo delgado.

En este apartado se presentan brevemente los fundamentos del programa DOTIG5, desarrollado en el Grupo de Electromagnetismo de Granada [38, 62], y se detallan las extensiones concretas realizadas en esta memoria. DOTIG5 está basado en la solución de la ecuación EFIE-TD para hilos delgados mediante el método de los momentos en el dominio del tiempo. Partiendo de (2.17), se definen las funciones base y peso utilizadas y se desarrolla la ecuación EFIE hasta obtener, en cada instante temporal, una ecuación matricial, cuya solución proporciona el valor de la intensidad de corriente en el hilo en ese instante en función de su valor en instantes anteriores.

2.4.1. Aproximación poligonal del hilo delgado

El primer paso a seguir para la aplicación del MoM a estructuras de hilo delgado es el modelado de su contorno. Habitualmente, este modelado se realiza en la bibliografía con segmentos rectilíneos [60], si bien algunos autores han presentado modelos alternativos que tienen en cuenta, para el caso de hilos curvos, la posibilidad de introducir segmentos curvilíneos [75]. Aunque esta última solución da lugar a un modelado más preciso de las geometrías curvas, reduciendo el número de segmentos necesarios para aproximarlas, conlleva una complejidad mucho mayor en los desarrollos matemáticos asociados al proceso de solución, particularmente en el desarrollo de las integrales de línea. Por ello, en esta memoria se ha optado por aproximar el conductor mediante una poligonal formada por N_S segmentos rectos de longitud Δ_i , como se puede ver en la figura 2.5.

Con esta aproximación, las integrales de línea de la expresión (2.17) se

²Notar que ahora la función incógnita depende de dos variables que además están relacionadas, lo que aumenta la complejidad de las ecuaciones y de los algoritmos para resolverlas.

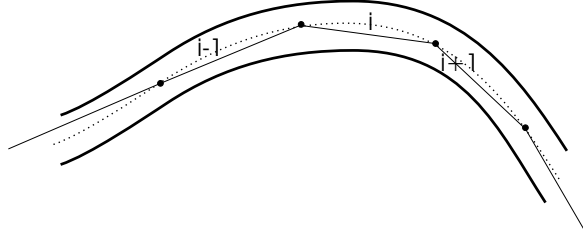


Figura 2.5: Aproximación del contorno del hilo por segmentos rectilíneos.

pueden dividir en N_S integrales rectilíneas, cuyo dominio de aplicación coincide con cada uno de los segmentos en los que se ha dividido el hilo, y por tanto se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 \hat{s} \cdot \vec{E}^i(\vec{r}, t) &= \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \int_{\Delta_i} \frac{\hat{s}' \partial I(s', t')}{c^2 R \partial t'} ds' \\
 &+ \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \int_{\Delta_i} \frac{\vec{R}}{R^3} \left(\int_0^{t'} \frac{\partial I(s', \tau)}{\partial s'} d\tau \right) ds' \quad (2.19) \\
 &+ \frac{\hat{s}}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \int_{\Delta_i} \frac{\vec{R}}{cR^2} \frac{\partial I(s', t')}{\partial s'} ds'
 \end{aligned}$$

siendo s' y s las distancias espaciales medidas sobre el eje del hilo, con respecto a uno de sus extremos, de los puntos fuente y campo, respectivamente, y \hat{s}' y \hat{s} los correspondientes vectores unitarios tangentes al hilo en dichos puntos fuente y campo.

2.4.2. Elección de las funciones base y peso

Como ya se comentó en el primer apartado de este capítulo, el método de los momentos requiere la aproximación de la función incógnita, en este caso $I(s', t')$, mediante una serie de funciones matemáticas conocidas, sobre las que realizar las operaciones dadas por el operador integro-diferencial L . En el caso de la estructura de hilo delgado, y teniendo en cuenta la arbitrariedad de su geometría, resulta más apropiado [76] el uso de bases subseccionales, definidas en parte de la estructura [62, 77], que el de funciones base definidas en todo el dominio [78, 79].

En concreto en esta memoria se han elegido funciones base tipo subseccionales de interpolación lagrangiana definidas en cada uno de los segmentos en que se divide la estructura con ayuda de funciones pulso. Así, la corriente $I(s', t')$ se expresa utilizando las funciones pulso como:

$$I(s', t') = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{N_T} I_{ij}(s' - s_i, t' - t_j) U(s' - s_i) V(t' - t_j) \quad (2.20)$$

donde s_i es la distancia medida sobre el eje del hilo desde un origen del mismo hasta el centro del segmento espacial fuente i , y t_j es el valor temporal correspondiente al centro del intervalo temporal j . Las funciones pulso definen los intervalos espacio-temporales y se expresan como:

$$U(s' - s_i) = U(s_i'') = \begin{cases} 1 & |s_i''| \leq \Delta_i/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$V(t' - t_j) = V(t_j'') = \begin{cases} 1 & |t_j''| \leq \Delta t/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La dependencia elegida de $I(s_i'', t_j'')$ con las variables espacial y temporal ha sido una función interpolación lagrangiana bidimensional y de orden tres en cada dimensión, que toma la forma:

$$I_{ij}(s_i'', t_j'') = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} B_i^{l,m} I_{i+l, j+m} \quad (2.22)$$

donde $I_{i,j} = I_{ij}(s_i'' = 0, t_j'' = 0)$ es la corriente en el centro del intervalo espacio-temporal, y el polinomio de interpolación es

$$B_i^{l,m} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^1 \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s_i'' + s_i - s_{i+p}}{s_{i+l} - s_{i+p}} \frac{t_j'' - q\Delta t}{(m - q)\Delta t} \quad (2.23)$$

Para evitar interpolaciones con instantes futuros, el valor de n puede ser -1 o -2 , de forma que como se verá posteriormente al calcular el efecto de un determinado punto fuente sobre un cierto punto campo, en un intervalo temporal dado, los valores $I_{i,j}$ utilizados son siempre conocidos.

En cuanto a las funciones peso, se ha optado por el método de adaptación por puntos o *point-matching*, en el cual las funciones peso elegidas son deltas

de Dirac en los dominios espacial ($\delta(s - s_u)$, con $u = 1 \dots N_S$) y temporal ($\delta(t - t_v)$, con $v = 1 \dots N_T$) lo que supone forzar a que se cumpla la ecuación EFIE en un número discreto de puntos ($s = s_u$) que se denominan puntos campo, e intervalos temporales ($t = t_v$). Además, para evitar singularidades los puntos s_u se eligen sobre la superficie del hilo en lugar de sobre el eje.

La elección de estas funciones peso proporciona un compromiso entre la sencillez de los desarrollos y la precisión de los resultados obtenidos [77]. Su principal inconveniente, como se muestra en [80], es que en los puntos espaciales situados en la superficie y más alejados del centro del intervalo se puede llegar a cometer un error notable en el cumplimiento de la ecuación (2.19) y por tanto de la condición de contorno. Por otra parte, el uso de métodos que conducen a un promedio en el cumplimiento de la condición de contorno, como el de Galerkin, resultan en una formulación matemática mucho más compleja y un incremento en el tiempo de computación que, en el caso de estructuras de hilo delgado, no aporta una mejora substancial en la exactitud de las soluciones.

2.4.3. Expresión discretizada de la EFIE para hilos delgados

Si se introduce el desarrollo de la corriente en sumatorias de las funciones base espacio-temporales, definidas en (2.20) y (2.22), en la ecuación EFIE (2.19), se puede escribir ésta como:

$$\begin{aligned} \hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(\vec{r}_u, t_v) &= \frac{\hat{s}_u}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \int_{\Delta_i} \frac{\hat{s}_i}{c^2 R_{iu}} \frac{\partial I_{ij}(s''_i, t''_j)}{\partial t''_j} ds''_i \\ &+ \frac{\hat{s}_u}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \int_{\Delta_i} \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \left(\int_0^{t''_j} \left[\frac{\partial I_{ij}(s''_i, \tau)}{\partial s''_i} \right] d\tau \right) ds''_i \quad (2.24) \\ &+ \frac{\hat{s}_u}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \int_{\Delta_i} \frac{\vec{R}_{iu}}{c R_{iu}^2} \left[\frac{\partial I_{ij}(s''_i, t''_j)}{\partial s''_i} \right]_{t''_j} ds''_i \end{aligned}$$

donde el vector \vec{R}_{iu} une el punto fuente y el punto campo, y se define como $\vec{R}_{iu} = \vec{r}_u - \vec{r}_i - s''_i \hat{s}_i$, como se aprecia en la representación de las coordenadas locales utilizadas en la figura 2.6, y \hat{s}_i y \hat{s}_u son los vectores unitarios tangentes al hilo en los segmentos fuente y campo, respectivamente. El cumplimiento de dicha ecuación se fuerza en un conjunto discreto de puntos campo \vec{r}_u ,

con $u = 1 \dots N_S$, y en un conjunto de instantes temporales $t_v = v \cdot \Delta t$, con $v = 1 \dots N_T$. Más detalles sobre la elección de los puntos campo se encuentran en el apéndice A.

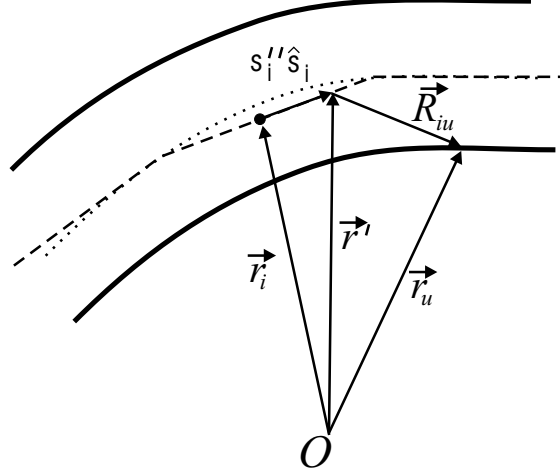


Figura 2.6: Coordenadas locales.

El valor del tiempo retardado t_j'' es también función de la coordenada posición del punto fuente s_i'' y viene determinado a partir del principio de causalidad por:

$$t_j'' = t_v - t_j - \frac{R_{iu}(s_i'')}{c} \quad (2.25)$$

En el caso de que se use segmentación no uniforme para modelar el hilo, la interacción entre un segmento fuente y un punto campo puede tener lugar en distintos intervalos temporales t_j , lo que de no tenerse en cuenta puede provocar errores en la solución. Para evitarlos se ha considerado en el desarrollo del algoritmo una subdivisión de los segmentos fuente de forma que a todos los puntos de cada subintervalo les correspondan tiempos de retardo localizados dentro del mismo intervalo temporal [38].

En la figura 2.7 se puede ver como ejemplo la subdivisión del segmento fuente i cuando se trata de calcular su efecto sobre un cierto punto campo \vec{r}_u . Consideremos una serie de esferas concéntricas centradas en el punto \vec{r}_u y con radio $c(2n+1)\frac{\Delta t}{2}$, $n = 0, 1, \dots$. Se consideran todos los valores de n tales que el segmento i queda en parte contenido en la corona esférica definida

entre las esferas $n - 1$ y n . Para dichos valores de n se marcan los cortes de las distintas esferas con el segmento i y se divide el mismo en sub-segmentos que unen dichas marcas. Se denominará $N_{h(i)}$ al número de divisiones que, para un punto campo, se hacen del segmento fuente i , que en el ejemplo de la figura es igual a cuatro.

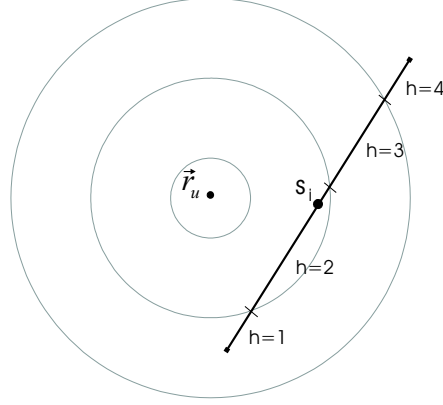


Figura 2.7: Subdivisión de los segmentos.

Teniendo en cuenta la subdivisión de los segmentos fuente, la ecuación (2.24) queda:

$$\begin{aligned}
\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(\vec{r}_u, t_v) &= \frac{\hat{s}_u}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \int_{\Delta_{h(i)}} \frac{\hat{s}_i}{c^2 R_{iu}} \frac{\partial I_{ij}(s_i'', t_{j(h)}'')}{\partial t_{j(h)}''} ds_i'' \\
&+ \frac{\hat{s}_u}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \int_{\Delta_{h(i)}} \frac{\vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \left(\int_0^{t_{j(h)}''} \left[\frac{\partial I_{ij}(s_i'', \tau)}{\partial s_i''} \right] d\tau \right) ds_i'' \\
&+ \frac{\hat{s}_u}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \int_{\Delta_{h(i)}} \frac{\vec{R}_{iu}}{cR_{iu}^2} \left[\frac{\partial I_{ij}(s_i'', t_{j(h)}'')}{\partial s_i''} \right]_{t_{j(h)}''} ds_i''
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde se ha denominado $t_{j(h)}''$ al tiempo retardado respecto al intervalo temporal del subsegmento h .

Aplicando los esquemas de subdivisión sobre el segundo término de la derecha en (2.26), se puede escribir éste como:

$$\begin{aligned}
q_{i,j(h)} &= - \int_0^{t''_{j(h)}} \frac{\partial I(s''_i, \tau)}{\partial s''_i} d\tau = \\
&= - \sum_{s=1}^{j(h)-1} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \frac{\partial I(s''_i, \tau)}{\partial s''_i} d\tau - \int_{-\Delta t/2}^{t''_{j(h)}} \frac{\partial I(s''_i, \tau)}{\partial s''_i} d\tau \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.27) en (2.26), y haciendo uso de la expresión (2.22), se puede reescribir la ecuación EFIE discretizada:

$$\begin{aligned}
\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(\vec{r}_u, t_v) &= \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \int_{\Delta_{h(i)}} \frac{\vec{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{R_{iu}^3} \sum_{s=1}^{v-r_{i(h)u}-1} \sum_{l=-1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \int_s B_i^{l,m} \Big|_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} I_{i+l,s+m} ds''_i + \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \int_{\Delta_{h(i)}} \sum_{l=-1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \left(\begin{array}{l} \frac{\hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}} {}_t B_i^{l,m} + \\ c \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^2} {}_s B_i^{l,m} + \\ c^2 \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^3} \int_s B_i^{l,m} \Big|_{-\Delta t/2}^{t''_{j(h)}} \end{array} \right) I_{i+l,j(h)+m} ds''_i \quad (2.28)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la notación:

$$\begin{aligned}
{}_t B_i^{l,m} &= \frac{\partial}{\partial t''_{j(h)}} B_i^{l,m} \\
{}_s B_i^{l,m} &= \frac{\partial}{\partial s''_i} B_i^{l,m} \\
\int_s B_i^{l,m} \Big|_a^b &= \frac{\partial}{\partial s''_i} \int_a^b B_i^{l,m} dt'' \quad (2.29)
\end{aligned}$$

y se ha definido el valor $r_{i(h)u}$ como el entero más cercano al cociente $R_{iu}(s''_i)/(c\Delta t)$. Se puede reescribir por tanto (2.25) como:

$$r_{i(h)u} = v - j = \frac{t''_{j(h)}}{\Delta t} + \frac{R_{i(h)u}(s''_i)}{c\Delta t} \quad (2.30)$$

Si se definen las variables auxiliares

$$F_{i,h,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon\mathcal{C}^2} \int_{\Delta_{h(i)}} \left(\frac{\hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}} t B_i^{l,m} + c \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^2} s B_i^{l,m} \right) ds''_i + c^2 \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^3} \int_s B_i^{l,m} \Big|_{\Delta t/2}^{t''_j(h)} ds''_i \quad (2.31)$$

$$G_{i,h,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon\mathcal{C}^2} \int_{\Delta_{h(i)}} \left(c^2 \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^3} \int_s B_i^{l,m} \Big|_{\Delta t/2}^{\Delta t/2} \right) ds''_i$$

que se denominan matrices de estructura, cuyo desarrollo se detalla en el Apéndice B, la ecuación (2.28) se convierte en:

$$\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ F_{i,h,u,l,m} I_{i+l, v-r_{i(h)u}+m} + G_{i,h,u,l,m} \sum_{s=1}^{v-r_{i(h)u}-1} I_{i+l, s+m} \right\} \quad (2.32)$$

o alternativamente, reorganizando la sumatoria en s de los valores de la corriente en instantes anteriores:

$$\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ F_{i,h,u,l,m} I_{i+l, v-r_{i(h)u}+m} + G_{i,h,u,l,m} Y_{i+l, v-r_{i(h)u}-1+m} \right\} \quad (2.33)$$

2.4.4. Ecuación matricial resultante

A partir de la ecuación (2.33) se despejan los términos en los que aparecen valores actuales ($t = t_v$) de las corrientes, resultando:

$$\sum_{i=1}^{N_s} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{p=0}^1 \delta(r_{(i-l)(h)u} - p) F_{i,h,u,l,m} I_{i,v} = \hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v) - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \left(\sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i(h)u}}}^{n+2} F_{i,h,u,l,m} I_{i+l, v-r_{i(h)u}+m} \right) + \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,h,u,l,m} Y_{i+l, v-r_{i(h)u}-1+m} \quad (2.34)$$

que se puede expresar en la forma:

$$\sum_{i=1}^{N_S} Z_{u,i} I_{i,v} = E_{u,v}^I + E_{u,v}^S, \quad u \in \{1 \dots N_S\} \quad (2.35)$$

donde $Z_{u,i}$ es el término (u, i) de la matriz de impedancias del método de los momentos, $E_{u,v}^I$ es el campo incidente en la antena, y $E_{u,v}^S$ es la componente debida al campo dispersado (*scattered*) por la estructura que incide sobre cada segmento campo u ; sin más que comparar las ecuaciones (2.34) con (2.35) se pueden expresar dichos términos como:

$$E_{u,v}^I = \hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v)$$

$$Z_{u,i} = \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_{h(i)}} \sum_{p=0}^1 \delta(r_{(i-l)(h)u} - p) F_{i,h,u,l,m} I_{i,v} \quad (2.36)$$

$$E_{u,v}^S = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i(h)u}}}^{n+2} F_{i,h,u,l,m} I_{i+l,v-r_{i(h)u}+m} \quad (2.37)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} G_{i,h,u,l,m} Y_{i+l,v-r_{i(h)u}-1+m}$$

La ecuación (2.35) es la ecuación matricial que resulta de la aplicación del método propuesto y a partir de la cual se puede obtener, en cada intervalo temporal, la corriente $I_{i,v}$, mediante un proceso escalonado en el tiempo en el cual el valor de la corriente en cada instante temporal se obtiene en función de los valores en instantes anteriores.

El método presentado supone conocido el campo eléctrico incidente en la estructura, $E_{u,v}^I$. Dicho campo eléctrico puede ser debido a fuentes externas al objeto conductor, con lo cual se trataría de un problema de dispersión electromagnética, o contenidas en su estructura, con lo que sería un problema de radiación. Es este último un caso particular del de dispersión, en el que se debe aplicar un modelo al campo eléctrico de excitación de la antena. Concretamente, en esta Tesis se ha usado para la excitación de las antenas el modelo ideal de fuente tipo *delta-gap* [80, 81].

2.4.5. Introducción de un plano de tierra

El efecto de un plano de tierra formado por un conductor perfecto es importante en el caso práctico de las antenas monopolo que se analizarán en capítulos posteriores de la Tesis. Dicho plano aísla el equipo y cableado de la antena, de forma que ésta no se vea afectada.

En general, la tierra es un medio con pérdidas ($\sigma \neq 0$) cuya conductividad aumenta con la frecuencia. Por tanto, se puede decir que actúa como un muy buen conductor a partir de cierta frecuencia, dependiendo principalmente de su contenido en humedad. Una aproximación habitual es suponer que la tierra es un conductor eléctrico perfecto (PEC), y de extensión infinita.

Para analizar el comportamiento de un elemento radiante cerca de un plano conductor eléctrico perfecto e infinito, se hace uso del método de las imágenes [69], en el que se sustituye el plano de tierra por un conjunto de fuentes virtuales (imágenes) que, junto con las fuentes originales, forman un sistema equivalente al sistema real en el semiespacio que contiene dichas fuentes.

Si la estructura original de hilo que se muestra en la figura 2.8a se divide en N_S segmentos espaciales, el número total de segmentos de la estructura y su imagen (ver figura 2.8b) será $2N_S$, que será el número de incógnitas a resolver en el sistema de ecuaciones (2.35), que se reescribiría como:

$$\sum_{i=1}^{2N_S} Z_{u,i} I_{i,v} = E_{u,v}^I + E_{u,v}^S, \quad u \in \{1 \dots 2N_S\} \quad (2.38)$$

Pero, utilizando la teoría de imágenes, se sabe que las corrientes imagen ($I_{N_S+1}, \dots, I_{2N_S}$) son iguales en módulo a las originales (I_1, \dots, I_{N_S}), por lo que sólo es necesario el cálculo de la mitad de las ecuaciones del sistema anterior, que por tanto puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{N_S} Z'_{u,i} I_{i,v} = E_{u,v}^I + E'_{u,v}{}^S, \quad u \in \{1 \dots N_S\} \quad (2.39)$$

donde $Z'_{u,i} = Z_{u,i} + Z_{u,imagen(i)}$, y de la misma forma $E'_{u,v}{}^S$ es suma del campo dispersado por los segmentos fuente originales y sus imágenes, lo que conlleva que las matrices de estructura, definidas en (2.31), deban estar definidas para segmentos fuente $i = 1, \dots, 2N_S$, con el consiguiente coste de memoria. Aun así, el uso de la teoría de imágenes mediante la implementación computacional de (2.39) en lugar de (2.38) da lugar a una reducción de la memoria

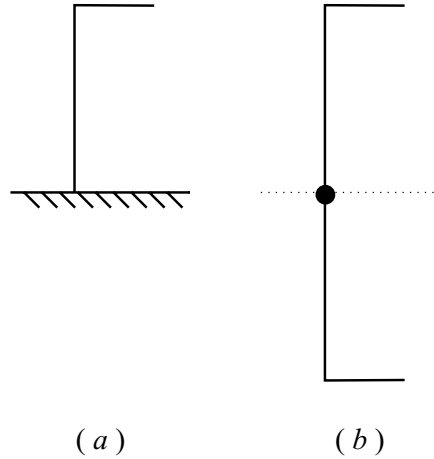


Figura 2.8: Estructuras con tierra. (a): Antena en configuración de monopolo con plano de tierra. (b): Antena y su imagen.

usada a aproximadamente la mitad, mientras que el tiempo computacional se reduce aproximadamente a la cuarta parte.

2.4.6. Simulación de estructuras con uniones

En los apartados anteriores se han considerado estructuras formadas por un único hilo y se ha forzado en el extremo de dicho hilo la condición de contorno de intensidad cero, tal y como exige la aproximación de hilo delgado para hilos aislados; esta condición se ha impuesto modificando la función base de interpolación en los segmentos extremo del hilo, tal y como se describe en [62]. Sin embargo, en el caso de que en las estructuras existan uniones de varios hilos³ esta condición deja de ser válida, por lo que deben ser tratadas de forma diferente. En [44,62] se abordó su análisis trasladando a DT un método empleado con éxito por algunos autores en DF [37, 82], y que consiste en la sustitución de la configuración original dada por la figura 2.9a por la de la figura 2.9b, en la que cada hilo se solapa en un segmento con el adyacente. De esta forma, los hilos no terminan en una unión sino en un solapamiento, y su extremo se puede tratar como una unión hilo-espacio libre idéntica a la de los hilos sin uniones. En esta memoria se extiende el método presentado en [44] para incluir el caso de segmentación no uniforme, donde el segmento

³En esta Tesis se entenderá por unión aquella que se produzca entre al menos tres hilos.

solapado deberá ser de igual longitud al segmento sobre el que se solapa, independientemente del tamaño del segmento más próximo de su propio hilo.

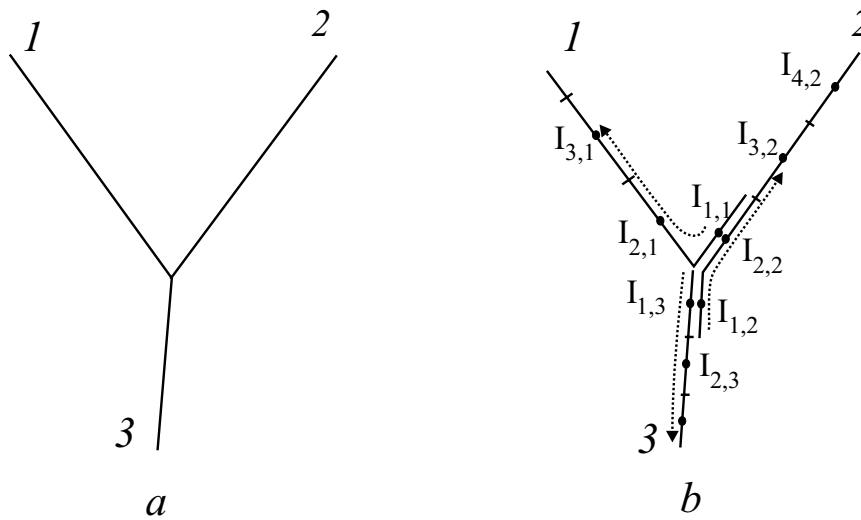


Figura 2.9: Modelado de la unión. *a*: Estructura original. *b*: Tratamiento mediante segmentos solapados. En punteado se representa el sentido considerado positivo para las corrientes en cada hilo de la unión.

La intensidad de corriente en cada zona de solapamiento será, de acuerdo con el convenio de signos mostrado en la figura 2.9*b*, la diferencia entre la de los dos segmentos que se solapan.

Para la correcta simulación de las uniones, se deben cumplir las siguientes condiciones [62, 82, 83]:

1. La ley de Kirchoff⁴, que establece que la suma de las corrientes que entran a la unión es igual a la suma de las que salen. Es fácil comprobar que tal y como se han elegido los solapamientos la ley de Kirchoff se cumple de forma inherente.
2. La conservación de la componente tangencial del campo eléctrico en la unión, que se puede demostrar [62, 83] que es equivalente, en el caso de hilos delgados, a

⁴Si las dimensiones de la unión son pequeñas comparadas con la longitud de onda los campos cercanos a la unión serán cuasiestáticos y puede aplicarse la ley de Kirchoff.

$$\frac{\partial I_1(s)}{\partial s'_1} = \frac{\partial I_2(s)}{\partial s'_2} = \dots = \frac{\partial I_{NH}(s)}{\partial s'_{NH}} \quad (2.40)$$

que establece la continuidad de la derivada espacial de la intensidad de corriente en la unión.

Para incluir el efecto de las uniones en el método numérico, se han seguido los mismos pasos que en [62]. En primer lugar, la función base lagrangiana debe modificarse para puntos cercanos a la unión, como sigue:

$${}_k I_{i,j}(s''_i, t''_j) = \sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=n}^{n+2} {}_k B_{i,j}^{l,m} ({}_k I_{i+l,j+m} - g_{i,k,l} {}_{k-1} I_{1,j+m}) \quad (2.41)$$

donde se ha usado la notación ${}_k I_{i,j}$ para designar a la corriente en el i -ésimo segmento del hilo k . La numeración del hilo hace referencia a su orden en la unión, de forma que el hilo k es el hilo k -ésimo de la misma. La función de interpolación se define ahora como:

$${}_k B_{i,j}^{l,m} = \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^1 \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{s''_{i,k} + s_{i,k} - s_{i+p,k}}{s_{i+l,k} - s_{i+p,k}} \frac{t''_j - q\Delta t}{(m-q)\Delta t} \quad (2.42)$$

donde $s_{i,k}$ es la distancia del centro del i -ésimo segmento al extremo del hilo k , y $s''_{i,k}$ es la distancia de un determinado punto del hilo k al centro del segmento al que pertenece. Por su parte, la variable auxiliar $g_{i,k,l}$ se definen como:

$$g_{i,k,l} = \begin{cases} 1 & si \begin{cases} k \neq 1, k \neq NH, i = 3 \text{ y } l = -1 \\ o \\ k = NH, i = 2, l = -1 \end{cases} \\ 0 & en \text{ el resto de los casos} \end{cases} \quad (2.43)$$

Se ha considerado que ${}_k I_{0,j} = 0, \forall k \text{ y } j$.

La nueva interpolación definida en (2.41) se representa en la figura 2.10. Se puede comprobar cómo la corriente en todos los segmentos se calcula mediante interpolación con sus dos inmediatos vecinos, excepto en el caso de aquéllos pintados en negrita en la figura 2.10, en los que cuando $l = -1$ se interpola con la intensidad de corriente diferencia de los dos intervalos solapados que indica la flecha.

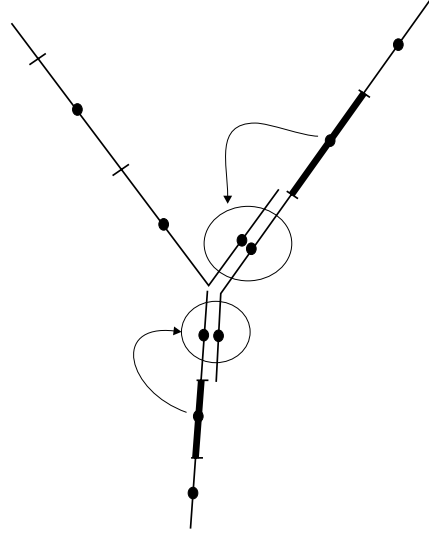


Figura 2.10: Modificación de las funciones base en segmentos próximos a la unión.

Al igual que se hizo en el caso de estructuras sin uniones, se sustituye (2.41) en (2.28), utilizando las mismas definiciones usadas previamente para las matrices de estructura (ver apéndice B), y notación similar a la empleada en la corriente para distinguir el número de segmentos de los diferentes hilos, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{p=0}^1 \delta(r_{(i-l)(h),k,u} - p) \begin{matrix} k \\ F_{i,h,u,l,m} \end{matrix} \begin{pmatrix} k I_{i,v} - g_{i,k,l} \\ k-1 I_{1,v} \end{pmatrix} = \\
& \hat{S}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v) \\
& - \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i(h),k,u}}}^{n+2} \begin{matrix} k \\ F_{i,h,u,l,m} \end{matrix} \begin{pmatrix} k I_{i+l,v-r_{i(h),k,u}+m}^- \\ g_{i,k,l} \quad k-1 I_{1,v-r_{i(h),k,u}+m} \end{pmatrix} \\
& + \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \begin{matrix} k \\ G_{i,h,u,l,m} \end{matrix} \begin{pmatrix} k Y_{i+l,v-r_{i(h),k,u}-1+m}^- \\ g_{i,k,l} \quad k-1 Y_{1,v-r_{i(h),k,u}-1+m} \end{pmatrix} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

O bien expresado en forma matricial como:

$$\sum_{i=1}^{N_S} Z_{u,i} I_{i,v} = E_{u,v}^I + E_{u,v}^S, \quad u \in \{1 \dots N_S\} \quad (2.45)$$

siendo en este caso

$$\begin{aligned} E_{u,v}^I &= \hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_v) \\ Z_{u,i} &= \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{p=0}^1 \delta(r_{(i-l)(h),k,u} - p) \quad {}_k F_{i,h,u,l,m} \left(\begin{matrix} {}_k I_{i,v}^- \\ g_{i,k,l} \quad {}_{k-1} I_{1,v} \end{matrix} \right) \\ E_{u,v}^S &= \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{\substack{m=n \\ m \neq r_{i(h),k,u}}}^{n+2} {}_k F_{i,h,u,l,m} \left(\begin{matrix} {}_k I_{i+l,v-r_{i(h),k,u}+m}^- \\ g_{i,k,l} \quad {}_{k-1} I_{1,v-r_{i(h),k,u}+m} \end{matrix} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{NH} \sum_{i=1}^{N_s(k)} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{l=1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} {}_k G_{i,h,u,l,m} \left(\begin{matrix} {}_k Y_{i+l,v-r_{i(h),k,u}-1+m}^- \\ g_{i,k,l} \quad {}_{k-1} Y_{1,v-r_{i(h),k,u}-1+m} \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dado que la matriz Z sólo depende de las características geométricas de la estructura, y que son iguales campo incidente y dispersado en dos segmentos solapados, las ecuaciones (2.44) en ambos serán iguales. Por tanto existen $NH - 1$ incógnitas más que ecuaciones, por lo que se deben encontrar $NH - 1$ nuevas condiciones a aplicar. Este problema se ha resuelto, al igual que en [62], mediante la imposición de la condición (2.40), siendo I_i la intensidad de corriente del hilo i próxima a la unión y s'_i la variable longitud correspondiente a dicho hilo.

Para una unión de NH hilos, si se numera cada hilo comenzando por los segmentos solapados⁵, la ecuación (2.40) se puede expresar como:

$$\left. \frac{\partial I_{2,k}}{\partial s_2''} \right|_{s_2'' = -\Delta_k/2} - \left. \frac{\partial I_{1,k-1}}{\partial s_1''} \right|_{s_1'' = -\Delta_{k-1}/2} = \left. \frac{\partial I_{A,k+1}}{\partial s_A''} \right|_{s_A'' = -\Delta_{k+1}/2} - \left. \frac{\partial I_{1,k}}{\partial s_1''} \right|_{s_1'' = -\Delta_k/2} \quad (2.47)$$

donde se ha obviado la dependencia temporal de la corriente (siendo $I_{i,k} = {}_k I_{i,j}$), $I_{1,0} = 0$ y A se define de acuerdo a la figura 2.9 como:

$$A = \begin{cases} 2 & \text{si } k \neq NH - 1 \\ 1 & \text{si } k = NH - 1 \end{cases} \quad (2.48)$$

⁵Se ha utilizado este convenio por simplicidad en la notación.

Se ha considerado en (2.47) la posibilidad de que existan distintos tamaños de segmentos en cada uno de los hilos, definiendo Δ_k como el tamaño de segmento del hilo k en la unión, lo que constituye la principal diferencia del método programado respecto al presentado en [62]. En el apéndice B se desarrolla (2.47) hasta alcanzar la expresión cerrada que ha sido programada en el código DOTIG5.

Para comprobar la validez del estudio realizado, se han comparado los resultados obtenidos utilizando DOTIG5 con los de una versión anterior del código (DOTIG1) [62] que sólo admitía segmentación uniforme. La antena simulada es una antena en T, cuya geometría se puede ver en la figura 2.11. Se ha simulado la antena con ambos programas excitando con un pulso gaussiano cuya componente máxima en frecuencia es de 750 MHz , comprobando su idéntico comportamiento cuando los segmentos tienen igual longitud. Al variar en un 15 % el tamaño de los segmentos en uno de los hilos de la antena (marcado en la figura 2.11 en negrita), el código DOTIG5, que admite segmentación no uniforme en las uniones, da lugar a resultados similares a los obtenidos con segmentación uniforme, como se puede comprobar en la figura 2.12.

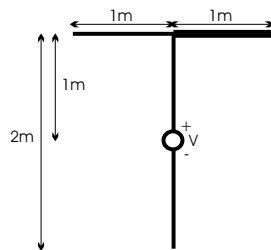


Figura 2.11: Geometría de la antena en T.

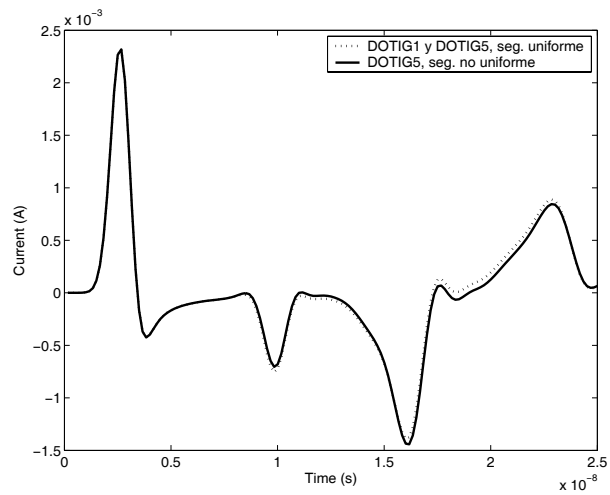


Figura 2.12: Comparación de los resultados obtenidos utilizando los códigos DOTIG1 y DOTIG5 para el análisis de la antena de la figura 2.11.

CAPÍTULO 3

Método híbrido ADI-FDTD-MoMTD para el análisis de estructuras de hilo frente a cuerpos inhomogéneos

3.1. Introducción.

Uno de los objetivos de esta Tesis es la simulación y comparación del comportamiento de distintas antenas pequeñas no sólo en vacío, sino también en presencia de algunos de los objetos con los que van a interactuar en su uso práctico. Por ejemplo, dado que uno de los principales usos de las antenas pequeñas en la actualidad es el de antenas de terminales móviles, es interesante estudiar los efectos de su interacción con la cabeza humana. En este capítulo se describen los métodos híbridos FDTD-MoMTD [39] y ADI-FDTD-MoMTD [40, 84], que serán utilizados en el capítulo 6 para el análisis de dicha interacción antena-cabeza, comentando las extensiones a los métodos que han sido fruto de la realización de esta Tesis.

El análisis de la interacción de ondas electromagnéticas transitorias con estructuras inhomogéneas es un problema complejo para el que no siempre existe un método numérico óptimo, capaz de simularlo de forma eficiente y precisa. Un ejemplo de este tipo de problemas es la radiación de antenas de

hilo arbitrariamente orientadas en presencia de cuerpos inhomogéneos. Una posible alternativa es utilizar técnicas denominadas híbridas que consisten en dividir el problema en varios subdominios cada uno de los cuales se simula con el método que mejor se adapta a sus características [39, 85–88]. Para considerar la interacción entre diferentes subdominios, se aplican algoritmos específicos basados generalmente en el principio de equivalencia [69] o en técnicas de interpolación.

Aunque las ecuaciones de Maxwell son la base para el estudio de todos los problemas electromagnéticos, dependiendo de cómo se manejan dichas ecuaciones se puede distinguir entre una formulación integral o diferencial del problema. La principal diferencia es el carácter local del operador diferencial en contraste con el carácter global de la función de Green del operador integral. De entre las técnicas basadas en la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell, la de las Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) es una de las más usadas, debido a su simplicidad, robustez y capacidad para analizar cuerpos inhomogéneos de propiedades electromagnéticas arbitrarias con alta precisión. Sin embargo, el método FDTD presenta problemas cuando se trata de simular antenas de hilo cuya orientación no sea paralela a la malla de simulación, es decir hilos de orientación arbitraria [87]. Por otro lado, las técnicas formuladas a partir de las ecuaciones integrales, como MoMTD [35, 36, 38], son la mejor opción en general para la simulación de estructuras de PEC, dado que el espacio computacional queda limitado a la superficie del objeto, y en particular para el análisis de geometrías de hilo delgado conductor. Por tanto, una posibilidad para estudiar la interacción de objetos inhomogéneos con estructuras de hilo formadas por PEC es el uso de un método híbrido en el dominio del tiempo que combine las virtudes de FDTD y de MoMTD [39, 89]. En concreto esa ha sido la técnica elegida en esta Tesis donde la versión del método MoMTD que se utilizará será la ya descrita en el capítulo 2, y la versión de FDTD se describe brevemente en este capítulo.

Otra limitación inherente al método FDTD convencional, que se denominará en esta Tesis FDTD explícito o simplemente FDTD, es que el incremento temporal utilizado no puede ser mayor al dado por el límite de estabilidad de Courant, y por tanto queda ligado al incremento espacial mínimo en que se haya dividido el dominio computacional. Esto significa que, cuando parte de una estructura necesita un mallado muy fino en su modelado pero las variaciones temporales son suaves, el criterio de Courant da lugar a un sobremuestreo en el tiempo que conlleva tiempos de computación que pueden ser innecesariamente altos. El método ADI-FDTD (*Alternating Direction Im-*

plicit Finite Difference Time Domain) [40–42], es una técnica implícita adecuada para la solución de este problema, puesto que elimina la restricción impuesta sobre el intervalo temporal por el criterio de Courant, lo que hace que se pueda realizar el modelado espacial independientemente del temporal, que se elige exclusivamente en función de la resolución temporal adecuada.

En los siguientes apartados se describirán brevemente las técnicas FDTD y ADI-FDTD, aunque sin entrar en demasiado detalle, pues existe una amplia bibliografía sobre ellas a la que se remite al lector [40,90]. Se hará hincapié en la formulación específica de dichos métodos cuando existen fuentes de corriente en el dominio del problema (que como se verá posteriormente son un elemento clave en la implementación de las técnicas híbridas). Posteriormente, se presentarán los fundamentos de las técnicas híbridas FDTD-MoMTD y ADI-FDTD-MoMTD.

3.2. El método FDTD

3.2.1. Introducción a FDTD

La aplicación de técnicas en diferencias finitas a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales data de hace casi un siglo [91], y fue Yee [92] quien las aplicó a las ecuaciones de Maxwell en 1966. El método FDTD se basa en la solución de las ecuaciones rotacionales de Maxwell en el dominio del tiempo mediante la aproximación de las derivadas por diferencias finitas. Dichas ecuaciones predicen la existencia de ondas electromagnéticas, originadas por un movimiento de cargas, y que se mantienen independientemente de la persistencia de éstas.

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \partial_t \vec{\mathcal{B}}, \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \partial_t \vec{\mathcal{D}} \quad (3.2)$$

Estas ecuaciones relacionan las densidades volúmicas de carga ρ y de corriente $\vec{\mathcal{J}}$ con cuatro vectores campo ¹: el vector desplazamiento eléctrico $\vec{\mathcal{D}}$, el vector de campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$, la densidad de flujo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ y el vector

¹Se ha introducido la notación caligráfica en lugar de la usada en el capítulo anterior para poder distinguir en éste entre campos numéricos y campos analíticos. Así, se usarán letras cursivas (\vec{E} , \vec{H}) para los campos numéricos, y letras caligráficas ($\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$) para los analíticos. Además, se ha introducido para las derivadas la notación $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, que se usará en adelante para la derivada respecto a cualquier variable.

de campo magnético $\vec{\mathcal{H}}$; vectores que están relacionados entre sí a través de las relaciones constitutivas dependientes de las características del material.

Las ecuaciones (3.2), junto con las relaciones constitutivas, y el conocimiento de los campos en un instante inicial (problema de valor inicial), componen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, que tiene solución única.

El método clásico FDTD emplea una aproximación centrada de segundo orden en las derivadas espaciales y temporales de las ecuaciones rotacionales de Maxwell, dando lugar a un nuevo problema electromagnético discreto [93, 94]. Se define una malla espacial cúbica cuya celda unidad es la mostrada en la figura 3.1; cada componente del campo se muestrea y evalúa en una posición espacial determinada. Los campos eléctrico y magnético se calculan con un retardo de medio intervalo de muestreo temporal. En cada celda, el material se modela por sus características electromagnéticas (permitividad y permeabilidad), definiéndose en las discontinuidades las condiciones de frontera necesarias. Como se verá posteriormente, los campos en cada instante temporal se obtienen de forma explícita, en función de los campos en instantes temporales anteriores.

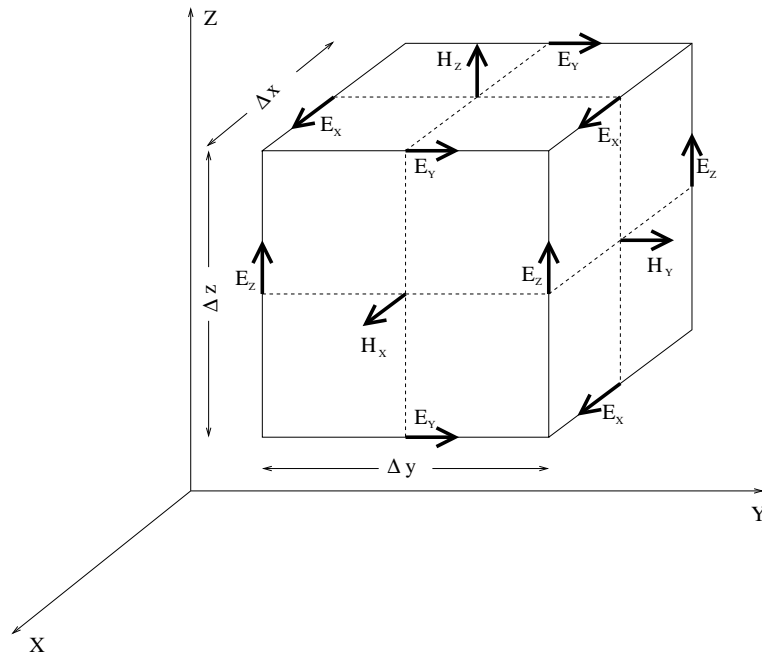


Figura 3.1: Celda de Yee.

El método FDTD, con sus múltiples variantes, es uno de los métodos de simulación electromagnética más utilizados, y ha encontrado aplicación en temas tan diversos como los de bioelectromagnetismo (detección de tumores [53], efectos biológicos de las ondas electromagnéticas [95,96] y cálculo de la tasa de absorción específica [96,97]), cálculo de sección recta radar (RCS) [98], análisis de circuitos de microondas [99], simulación de antenas y agrupaciones de antenas [100,101], etc.

En las siguientes secciones se describe brevemente la formulación del método FDTD, incluyendo la implementación de fuentes de corriente, que como se verá es necesaria para la implementación del método híbrido que combina FDTD con MoMTD.

3.2.2. Fundamentos de FDTD

Si se considera que las corrientes libres son óhmicas, siendo las corrientes eléctricas $\vec{J} = \sigma \vec{\mathcal{E}}$ y las magnéticas $\vec{J}^* = \sigma^* \vec{\mathcal{H}}$, con σ y σ^* las conductividades eléctrica y magnética, respectivamente, y que el medio es lineal, isótropo y no dispersivo ($\vec{D} = \varepsilon \vec{\mathcal{E}}$, $\vec{B} = \mu \vec{\mathcal{H}}$, con ε y μ la permitividad y permeabilidad del medio), las ecuaciones rotacionales de Maxwell se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_r \vec{\mathcal{H}} &= \sigma \vec{\mathcal{E}} + \varepsilon \partial_t \vec{\mathcal{E}} \\ -\tilde{\partial}_r \vec{\mathcal{E}} &= \sigma^* \vec{\mathcal{H}} + \mu \partial_t \vec{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

con

$$\tilde{\partial}_r = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La ecuación (3.3) se puede reescribir de forma compacta como:

$$\tilde{\mathcal{M}} \left(\partial_t \vec{\psi} \right) + \tilde{\mathcal{S}} \vec{\psi} = \tilde{\mathcal{R}} \vec{\psi} \quad (3.5)$$

siendo

$$\begin{aligned} \vec{\psi} &= (\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}})^T, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \tilde{0}_3 & \tilde{\partial}_r \\ -\tilde{\partial}_r & \tilde{0}_3 \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathcal{S}} &= \begin{pmatrix} \sigma \tilde{I}_3 & \tilde{0}_3 \\ \tilde{0}_3 & \sigma^* \tilde{I}_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \varepsilon \tilde{I}_3 & \tilde{0}_3 \\ \tilde{0}_3 & \mu \tilde{I}_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde \tilde{I}_n y \tilde{O}_n son las matrices identidad y nula de orden n , respectivamente.

Para escribir las ecuaciones correspondientes al algoritmo FDTD, se comienza definiendo los operadores de diferencia centrada y media como

$$\delta_v f(v) = \frac{f(v + \frac{\Delta v}{2}) - f(v - \frac{\Delta v}{2})}{\Delta v}, \quad a_v f(v) = \frac{f(v + \frac{\Delta v}{2}) + f(v - \frac{\Delta v}{2})}{2} \quad (3.7)$$

Se puede demostrar mediante el uso de series de Taylor que $\delta_v f(v)$ es una aproximación de segundo orden a $\partial_v f(v)$, y que $a_v f(v)$ es una aproximación de segundo orden al operador identidad $I f(v) = f(v)$.

A continuación se divide el espacio en un conjunto de puntos equiespaciados en cada dirección, múltiplos y semimúltiplos de Δx , Δy y Δz , y de forma similar se discretiza el tiempo en instantes múltiplos enteros y semienteros de un intervalo temporal Δt , con lo que se puede escribir el campo en cada posición espacio-temporal del mallado con la siguiente notación:

$$\psi_{i,j,k}^n \equiv \psi(x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z, t = n\Delta t) \quad (3.8)$$

Si se sustituyen en (3.3) las derivadas por el operador de diferencias centradas y se promedian en el tiempo los términos afectados por la conductividad se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_r \vec{H}_{i,j,k}^n &= \sigma_{i,j,k} a_t \vec{E}_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i,j,k} \delta_t \vec{E}_{i,j,k}^n \\ -\tilde{\delta}_r \vec{E}_{i,j,k}^n &= \sigma_{i,j,k}^* a_t \vec{H}_{i,j,k}^n + \mu_{i,j,k} \delta_t \vec{H}_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde el operador rotacional que aproxima a (3.4) viene dado por

$$\tilde{\delta}_r = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

con δ definido en (3.7). Los parámetros constitutivos ε , μ , σ , σ^* se consideran en cada punto del mallado espacial

$$\varepsilon_{i,j,k} \equiv \varepsilon(x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z) \quad (3.11)$$

En la práctica, para la resolución de las ecuaciones (3.9) no es necesario conocer las seis componentes del campo electromagnético en cada una de las posiciones del mallado espacial muestreado con $\Delta x/2$, $\Delta y/2$, $\Delta z/2$, sino que como ya se comentó basta con conocer cada componente en la posición de

la celda de Yee que le corresponda (ver figura 3.1). De la misma forma, basta con definir los campos eléctricos en múltiplos semienteros del incremento temporal Δt , y los campos magnéticos en múltiplos enteros, para obtener siguiendo un esquema de tipo 'salto de la rana' el algoritmo FDTD de solución escalonada en el tiempo ('marching on in time'):

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i,j,k}^{n+1/2} &= \frac{\varepsilon_{i,j,k} - \sigma_{i,j,k}\Delta t/2}{\varepsilon_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}\Delta t/2}\vec{E}_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}\Delta t/2}\tilde{\delta}_r\vec{H}_{i,j,k}^n \\ \vec{H}_{i,j,k}^{n+1} &= \frac{\mu_{i,j,k} - \sigma_{i,j,k}^*\Delta t/2}{\mu_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}^*\Delta t/2}\vec{H}_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}^*\Delta t/2}\tilde{\delta}_r\vec{E}_{i,j,k}^{n+1/2}\end{aligned}\quad (3.12)$$

con n entero, e i, j, k entero o semi-entero de acuerdo a la posición asociada a cada componente del campo en la celda de Yee.

Las ecuaciones (3.12) se pueden escribir de forma compacta como

$$\tilde{M}_{i,j,k}(\delta_t\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) + \tilde{S}_{i,j,k}(a_t\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) = \tilde{R}\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}\quad (3.13)$$

con

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}_{i,j,k}^n &= (\vec{E}_{i,j,k}^{n-1/2}, \vec{H}_{i,j,k}^n)^T, & \tilde{R} &= \begin{pmatrix} \tilde{0}_3 & \tilde{\delta}_r \\ -\tilde{\delta}_r & \tilde{0}_3 \end{pmatrix} \\ \tilde{S}_{i,j,k} &= \begin{pmatrix} \sigma_{i,j,k}\tilde{I}_3 & \tilde{0}_3 \\ \tilde{0}_3 & \sigma_{i,j,k}^*\tilde{I}_3 \end{pmatrix}, & \tilde{M}_{i,j,k} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{i,j,k}\tilde{I}_3 & \tilde{0}_3 \\ \tilde{0}_3 & \mu_{i,j,k}\tilde{I}_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.14)$$

siendo (3.14) la versión discretizada de (3.6) con las variables muestreadas en las posiciones dadas por el modelado espacio-temporal del problema.

Este algoritmo, una vez conocidas las condiciones iniciales muestreadas a partir de las analíticas, permite obtener los campos eléctrico y magnético en un instante temporal en función de valores previamente calculados.

En la bibliografía [102] se estudia la estabilidad del método FDTD, comprobándose que la condición necesaria para su estabilidad es el criterio de Courant

$$c\Delta t\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1\quad (3.15)$$

que relaciona el tamaño de la celda espacial de Yee con el intervalo temporal, lo que implica que tamaños de celda pequeños lleven asociados también bajos incrementos temporales, que en ciertos casos son innecesarios para conseguir una resolución temporal adecuada. Un ejemplo de este problema es la simulación a muy baja frecuencia de estructuras complejas con discretización milimétrica. El método ADI-FDTD, que se estudiará en apartados posteriores, solventa esta dificultad, al ser un método incondicionalmente estable y no estar sujeto al criterio de Courant.

3.2.3. Implementación de fuentes de corriente en FDTD

Dado que la técnica híbrida FDTD-MoMTD descrita en este capítulo está basada en el principio de equivalencia, que considera fuentes de corriente eléctrica y magnética equivalentes a una cierta estructura radiante, esta sección explica la forma de implementar fuentes en el esquema FDTD.

Las corrientes existentes en el espacio computacional pueden ser eléctricas, $\vec{\mathcal{J}}$, o magnéticas, $\vec{\mathcal{J}}^*$. Las ecuaciones rotacionales de Maxwell se escriben de forma compacta, incluyendo los términos de corriente, como:

$$\tilde{\mathcal{M}} \left(\partial_t \vec{\psi} \right) + \tilde{\mathcal{S}} \vec{\psi} + \vec{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{R}} \vec{\psi} \quad (3.16)$$

donde las matrices $\tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{\mathcal{S}}$, y $\tilde{\mathcal{R}}$ son las definidas en (3.6), y el vector $\vec{\mathcal{K}}$ es el vector de corrientes

$$\vec{\mathcal{K}} = (\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z, \mathcal{J}_x^*, \mathcal{J}_y^*, \mathcal{J}_z^*) \quad (3.17)$$

La aproximación mediante diferencias centradas de las derivadas temporales y espaciales en la ecuación (3.16), según el algoritmo de Yee [92], da lugar a

$$\tilde{M}_{i,j,k} (\delta_t \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) + \tilde{S}_{i,j,k} (a_t \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) + \vec{K}_{i,j,k}^{n+1/2} = \tilde{R} \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2} \quad (3.18)$$

donde las matrices $\tilde{M}_{i,j,k}$, $\tilde{S}_{i,j,k}$, \tilde{R} , y el vector de campos $\vec{\Psi}_{i,j,k}^n$ se definen como en (3.14), mientras que el vector $\vec{K}_{i,j,k}^n$ viene dado por:

$$\vec{K}_{i,j,k}^n = (J_{x \ i,j,k}^n, J_{y \ i,j,k}^n, J_{z \ i,j,k}^n, J_{x \ i,j,k}^{* \ n-1/2}, J_{y \ i,j,k}^{* \ n-1/2}, J_{z \ i,j,k}^{* \ n-1/2}) \quad (3.19)$$

Al igual que en el caso sin fuentes, el algoritmo descrito en la ecuación (3.18) calcula los campos en un instante a partir de los calculados en instantes anteriores y de las corrientes eléctricas y magnéticas de excitación del problema.

3.3. El método ADI-FDTD

3.3.1. Fundamentos de ADI-FDTD

El método ADI-FDTD se basa en una formulación implícita en el espacio del método FDTD, logrando estabilidad incondicional con un esfuerzo computacional añadido mínimo. Dado que conserva la distribución espacial de los campos de Yee, se puede aplicar a todos los problemas cuya resolución sea posible mediante FDTD.

Para la formulación del método ADI-FDTD, se comienza con la construcción de un esquema de Crank-Nicolson FDTD (CN-FDTD) mediante el promediado en el tiempo del término a la derecha de (3.13), dando lugar a

$$\tilde{M}_{i,j,k}(\delta_t \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) + \tilde{S}_{i,j,k}(a_t \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) = \tilde{R}(a_t \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1/2}) \quad (3.20)$$

siendo ahora $\vec{\Psi}_{i,j,k}^n = (\vec{E}_{i,j,k}^n, \vec{H}_{i,j,k}^n)$, lo que tras definir

$$\tilde{R}_T = (\tilde{M}_{i,j,k})^{-1}(\tilde{R} - \tilde{S}_{i,j,k}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_{i,j,k}}{\varepsilon_{i,j,k}} \tilde{I}_3 & \frac{1}{\varepsilon_{i,j,k}} \tilde{\delta}_r \\ -\frac{1}{\mu_{i,j,k}} \tilde{\delta}_r & -\frac{\sigma_{i,j,k}}{\mu_{i,j,k}} \tilde{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

da lugar a

$$\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n = \frac{\Delta t}{2} \tilde{R}_T(\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n) \quad (3.22)$$

La aplicación del esquema CN-FDTD (3.22) a problemas prácticos da lugar a requerimientos computacionales prohibitivos [103], puesto que supone la resolución de un sistema lineal de ecuaciones poco denso en cada intervalo temporal. Sin embargo, se puede factorizar el esquema anterior en un proceso de dos pasos [104], cada uno de los cuales sólo necesita la resolución de un sistema tridiagonal de ecuaciones, añadiendo un término de perturbación de segundo orden como sigue:

$$\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n + \underbrace{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \tilde{A}\tilde{B}(\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n)}_{\text{Perturbacion}} = \frac{\Delta t}{2} \tilde{R}_T(\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n) \quad (3.23)$$

Si los operadores \tilde{A} y \tilde{B} se eligen de forma que

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{R}_T \quad (3.24)$$

la ecuación 3.23 se puede reescribir como

$$\left(\tilde{I}_6 - \frac{\Delta t}{2} \tilde{A} \right) \left(\tilde{I}_6 - \frac{\Delta t}{2} \tilde{B} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} = \left(\tilde{I}_6 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{A} \right) \left(\tilde{I}_6 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{B} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^n \quad (3.25)$$

y se puede factorizar en un proceso de dos pasos:

$$\left(\tilde{I}_6 - \frac{\Delta t}{2} \tilde{A} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*} = \left(\tilde{I}_6 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{B} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^n \quad (3.26)$$

$$\left(\tilde{I}_6 - \frac{\Delta t}{2} \tilde{B} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} = \left(\tilde{I}_6 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{A} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*} \quad (3.27)$$

siendo $\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*}$ un vector auxiliar intermedio definido en el instante temporal n^* entre n y $n + 1$. En este capítulo no se entrará en los detalles de la determinación de las matrices \tilde{A} y \tilde{B} tales que cumplan la ecuación (3.24). Se puede encontrar más información en [105]. Una vez determinadas dichas matrices se pueden obtener los sistemas de ecuaciones tridiagonales que permiten el cálculo de $\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1}$ a partir de $\vec{\Psi}_{i,j,k}^n$, necesitando para ello la realización de un paso intermedio para obtener $\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*}$. Realmente, únicamente es necesario resolver el sistema tridiagonal para el cálculo de los campos eléctricos $\vec{E}_{i,j,k}^{n*}$ y $\vec{E}_{i,j,k}^{n+1}$, pues los campos magnéticos se obtienen a partir de éstos de forma explícita.

3.3.2. Implementación de fuentes de corriente en ADI-FDTD

La introducción de las fuentes de corriente en las ecuaciones rotacionales de Maxwell [84, 106] da lugar, al realizar la formulación del método ADI-FDTD, a la aparición de un término adicional en la ecuación (3.22)

$$\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n = \frac{\Delta t}{2} \tilde{R}_T (\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{\Psi}_{i,j,k}^n) - \Delta t \vec{K}_T^{n+1/2} \quad (3.28)$$

siendo

$$\vec{K}_T^n = \left(\tilde{M} \right)^{-1} \vec{K}_{i,j,k}^n = \left(\frac{J_x^n}{\varepsilon_{i,j,k}}, \frac{J_y^n}{\varepsilon_{i,j,k}}, \frac{J_z^n}{\varepsilon_{i,j,k}}, \frac{J_x^{*n-1/2}}{\mu_{i,j,k}}, \frac{J_y^{*n-1/2}}{\mu_{i,j,k}}, \frac{J_z^{*n-1/2}}{\mu_{i,j,k}} \right) \quad (3.29)$$

y \tilde{R}_T el definido en la ecuación (3.21). Si al igual que se hizo en ausencia de corrientes se introduce el término de perturbación de segundo orden, eligiendo \tilde{A} y \tilde{B} de forma que cumplan la ecuación (3.24), (3.28) puede ser factorizada en dos subpasos como sigue:

$$\left(\tilde{I}_6 - \frac{\Delta t}{2} \tilde{A} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*} = \left(\tilde{I}_6 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{B} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{2} \vec{K}_T^{n+1/2} \quad (3.30)$$

$$\left(\tilde{I}_6 - \frac{\Delta t}{2} \tilde{B} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n+1} = \left(\tilde{I}_6 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{A} \right) \vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*} - \frac{\Delta t}{2} \vec{K}_T^{n+1/2} \quad (3.31)$$

En la ecuación anterior nuevamente $\vec{\Psi}_{i,j,k}^{n*}$ es un vector intermedio auxiliar. Estas ecuaciones pueden igualmente simplificarse en un esquema tridiagonal implícito en el espacio que actualice el campo eléctrico en cada intervalo temporal, para posteriormente calcular el campo magnético de forma explícita.

3.4. Los métodos híbridos FDTD-MoMTD y ADI-FDTD-MoMTD

En esta sección se explica el algoritmo utilizado para la hibridación de los métodos basados en diferencias finitas, FDTD y ADI-FDTD, con el método MoMTD basado en la resolución de la ecuación integral del campo eléctrico presentado en el capítulo 2.

En concreto, la aportación de esta Tesis ha consistido en incluir en los programas basados en técnicas híbridas las extensiones llevadas a cabo en el método DOTIG5 descritas en el capítulo 2.

La hibridación se basa en el uso del principio de equivalencia [69]. Se considera una antena de hilo delgado de forma y orientación arbitrarias situada en la cercanía de un dispersor inhomogéneo (ver figura 3.2). La antena está rodeada de un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo y no dispersivo. El dominio computacional D (el área dentro de la superficie S_1) se

subdivide en dos problemas diferentes, como se puede ver en las figuras 3.3 y 3.4. El primer subproblema, que se resolverá mediante MoMTD, está formado por la antena de hilo del problema anterior situada en un medio infinito y homogéneo. El otro subproblema, en el que se aplicará el método de diferencias finitas FDTD o ADI-FDTD, corresponde al espacio computacional D una vez extraída la antena. La superficie S es la superficie ficticia en la que se implementa el teorema de equivalencia o superficie de Huygens y sirve para conectar las soluciones de los dos subdominios.

Para programar la interfaz entre los dos subproblemas se emplea un algoritmo de avance temporal que calcula la respuesta deseada teniendo en cuenta el principio de causalidad, tal y como se describe a continuación.

1. En primer lugar, se calculan las corrientes en la antena en un intervalo temporal t_n utilizando la implementación de MoMTD descrita en capítulos anteriores (programa DOTIG5). El campo incidente utilizado en la ecuación (2.33) es:

$$\hat{s}_u \cdot \vec{E}^i(s_u, t_n) = -V(s_u, t_n) \delta(s_u - s_f) + \hat{s}_u \cdot \vec{E}^F(s_u, t_n) \quad (3.32)$$

donde se considera un modelo de fuente de voltaje tipo *delta-gap*, en la que $V(s_u, t_n) \delta(s_u - s_f)$ es la tensión aplicada en la posición s_f del hilo, correspondiente a cada uno de los centros de los segmentos en los que éste queda dividido de acuerdo a lo estudiado en el capítulo 2. $\vec{E}^F(s_u, t_n)$ es cualquier otro campo incidente extra sobre el hilo debido a fuentes externas y que ha sido calculado previamente como se comentará en el punto 4.

2. Posteriormente, aplicando el principio de equivalencia, se sustituye la antena por corrientes ficticias equivalentes situadas en la superficie de Huygens, S. Los valores de dichas corrientes equivalentes se obtienen a partir de los campos eléctrico y magnético, $\vec{E}_M(\vec{r}, t)$ y $\vec{H}_M(\vec{r}, t)$, creados por la antena en la superficie S, mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{J}^n(\vec{r}_s) &= \frac{\hat{n} \times \vec{H}_M^n(\vec{r}_s)}{\Delta(\vec{r}_s)} \\ \vec{J}^{*n+1/2}(\vec{r}_s) &= -\frac{\hat{n} \times \vec{E}_M^{n+1/2}(\vec{r}_s)}{\Delta(\vec{r}_s)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

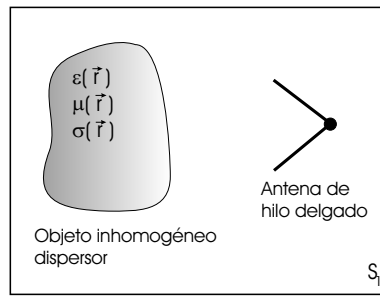


Figura 3.2: Problema original.

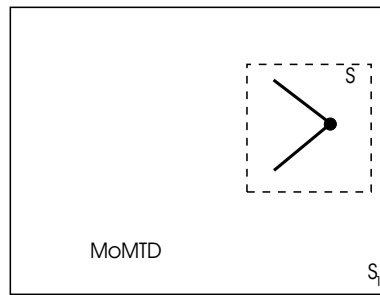


Figura 3.3: Subproblema a resolver con MoMTD.

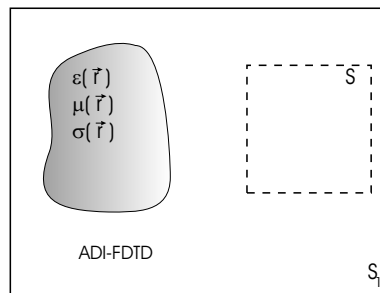


Figura 3.4: Subproblema a resolver con FDTD o ADI-FDTD.

donde $\Delta(\vec{r}_s)$ es el tamaño de la celda espacial en la dirección perpendicular a la superficie de Huygens en el punto \vec{r}_s . En cuanto a los campos $\vec{E}_M(\vec{r}, t)$ y $\vec{H}_M(\vec{r}, t)$, se obtienen a partir de las corrientes en la antena en instantes temporales anteriores, usando para ello las expresiones descritas en el apéndice B.

De acuerdo con el principio de equivalencia, las corrientes \vec{J} y \vec{J}^* así generadas, suponiendo la ausencia de objetos dispersores en el espacio computacional, producen idénticos campos a los debidos a la antena fuera de la caja de la superficie de Huygens, mientras que en el interior de la misma dan lugar a un campo nulo.

Las componentes de \vec{J} y \vec{J}^* se calculan en las posiciones de la celda de Yee de forma similar a como se hace con los campos \vec{E} y \vec{H} , lo que da lugar a 'dos' superficies de Huygens separadas por una distancia de media celda, como se puede ver en la figura 3.5, en la que se ha representado la parte de la superficie S paralela al plano XY. Esta forma de implementar el principio de equivalencia en FDTD fue introducido en [107] y no requiere el promediado de las magnitudes consideradas.

3. A continuación, se ejecuta el algoritmo FDTD o el ADI-FDTD, presentados respectivamente en las secciones 3.2 y 3.3, en todo el dominio computacional, con la antena aún eliminada, actualizando así los campos de n a $n + 1$.

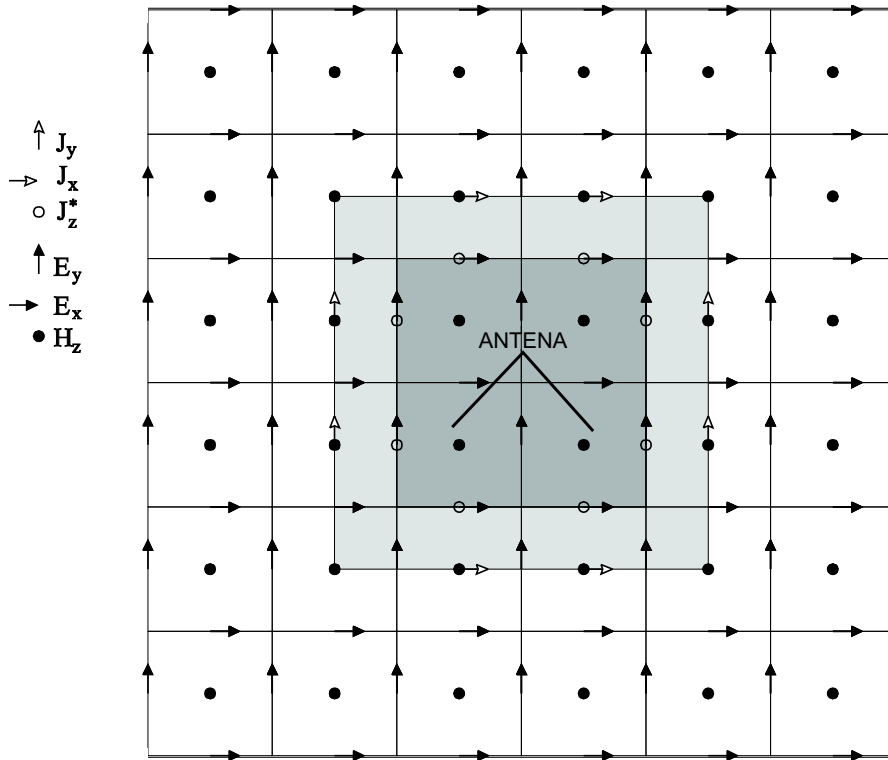


Figura 3.5: Superficie de Huygens. Plano XY

4. La aplicación del método de diferencias finitas en todo el espacio computacional da lugar a la aparición dentro de la superficie de Huygens de un campo no nulo, debido al objeto dispersor presente en el problema, que es el campo extra incidente $\vec{E}^F(\hat{s}_i, t_n)$ a considerar en la ecuación 3.32 como excitación del método de los momentos.

Como en general las posiciones del mallado espacial de FDTD no coinciden con los puntos campo del método de los momentos en los que se necesita el campo eléctrico extra incidente, ni tampoco coincide la discretización temporal, se procede a una interpolación espacial y temporal de los campos. Sin embargo, en caso de usar ADI-FDTD se puede aumentar el incremento temporal sin provocar inestabilidades, por lo que en la mayoría de los casos se puede usar idéntico intervalo temporal al necesitado en DOTIG5, evitando la interpolación temporal y por tanto acelerando el proceso.

5. El campo $\vec{E}^F(s_u, t_n)$ es considerado en el punto 1 para la solución de la ecuación integral, cerrando así el ciclo temporal.

Varios parámetros, como el tamaño de la superficie de Huygens situada alrededor de la antena, las dimensiones de la celda FDTD empleada para modelar el problema o la distancia de la caja de Huygens al dispersor inhomogéneo, influyen en la precisión de los resultados obtenidos mediante el método híbrido. Estos efectos están descritos en [89] para el método híbrido FDTD-MoMTD, demostrándose que el método da muy buenos resultados incluso cuando la superficie de Huygens está bastante cerca de la fuente de radiación. En el caso del método híbrido ADI-FDTD-MoMTD se ha observado una mayor limitación en la distancia mínima que debe separar la antena de la caja de Huygens, debiendo aumentarse para conseguir resultados correctos hasta el orden de $0,06\lambda_{min}$, donde λ_{min} es la longitud de onda correspondiente a la frecuencia máxima de excitación.

La aportación concreta de esta Tesis al desarrollo de los métodos híbridos ADI-FDTD-MoMTD y FDTD-MoMTD se encuentra en la implementación de las extensiones realizadas al código DOTIG5 previamente descritas en el capítulo 2 y su adaptación para la combinación con los algoritmos híbridos descritos en este capítulo. Estas modificaciones han sido esenciales para permitir el análisis de geometrías de hilo complejas (con uniones, segmentación no uniforme, cargas pasivas, etc.) frente a cuerpos inhomogéneos. En concreto ha posibilitado el análisis de las antenas de hilo con geometrías complicadas frente a un modelo de cabeza humana que se describirá en el capítulo 6, y la simulación de antenas de banda ultra-ancha para su aplicación en radares de penetración en tierra [108, 109] (GPR - *Ground Penetrating Radar*).

CAPÍTULO 4

Análisis de antenas prefractales en el dominio del tiempo

4.1. Introducción

Como ya se ha comentado en el capítulo de introducción, la miniaturización de antenas implica pérdidas de eficiencia, disminuciones de la resistencia de radiación y aumento del factor de calidad Q . Hansen [9] estableció que, para obtener resultados más cercanos a los valores mínimos alcanzables de Q predichos por el límite fundamental [3,4], el volumen esférico que engloba a la antena debe ser usado de forma más efectiva. Basándose en esta idea, se han presentado en la bibliografía algunas antenas prefractales como antenas pequeñas [24,26–28], tratando de hacer un mejor uso de la esfera que engloba a la antena mediante la introducción en ella de una mayor longitud de hilo.

Se denomina antena prefractal aquella cuya geometría resulta del truncamiento de la formación mediante funciones iterativas (IFS) de una geometría fractal determinada. Dado que el prefractal puede formarse mediante un número indefinido de iteraciones de su función generadora IFS, se pueden conseguir estructuras arbitrariamente complejas que, por tanto, podrían resultar en un buen aprovechamiento del espacio.

Algunos estudios preliminares realizados sobre la antena prefractal de Koch [24] han demostrado cómo el aumento del número de iteraciones de la función IFS para la formación de antenas prefractales da lugar a an-

tenas eléctricamente más pequeñas, tal y como cabía esperar de acuerdo con Hansen [9]. Sin embargo, se ha demostrado posteriormente [26] un estancamiento en dicha tendencia cuando la complejidad de la antena se hace mayor: conforme aumenta el número de iteraciones la reducción del tamaño eléctrico se estanca, acercándose a un valor límite a determinar en cada caso.

Uno de los objetivos de esta Tesis ha sido el estudio en el dominio del tiempo de algunas de las antenas prefractales presentadas en la bibliografía para su uso como antenas pequeñas, tratando de comprender los distintos fenómenos involucrados en su comportamiento así como el motivo por el que se produce el estancamiento comentado. Además se han estudiado de forma paralela otras estructuras de similares características y geometría euclídea, para tratar de corroborar o desmentir la optimalidad de las antenas prefractales sugerida en varios trabajos [24, 28].

Se ha hecho especial hincapié en el estudio de estructuras bidimensionales de hilo debido a que son de sencilla fabricación mediante el uso de técnicas estándar para el desarrollo de circuitos impresos, permiten una mayor simplicidad a la hora de comprender los fenómenos electromagnéticos existentes y, además, las conclusiones obtenidas son generalizables a estructuras tridimensionales.

En el apartado 4.2 se introducirá la teoría básica de la geometría fractal, así como el concepto de dimensión fractal, D . Dicho valor es uno de los parámetros más importantes para caracterizar cualquier geometría fractal, y ha sido usado por algunos autores para justificar distintos comportamientos de antenas prefractales [26, 110]. En los siguientes apartados se presentarán varias antenas prefractales en orden creciente de dimensión fractal, por lo que la primera antena estudiada será la basada en el fractal de Koch, cuya dimensión es $D = 1,26$; a continuación se presentará la antena tipo árbol fractal, cuya dimensión fractal varía en función del ángulo θ entre ramas; el último prefractal contenido en un plano estudiado será el de Hilbert, de dimensión fractal $D = 2$. Por último se presentarán algunos diseños basados en geometrías fractales que no están contenidos en el plano, y que por lo tanto se suelen denominar *tridimensionales*, si bien su dimensión fractal no tiene forzosamente que ser igual a 3. Concretamente se estudiarán las antenas prefractales tipo árbol 3D y Hilbert 3D.

4.2. Geometría fractal.

4.2.1. Definición de fractal

La teoría fractal fue desarrollada por Mandelbrot [2] a partir de los trabajos de varios matemáticos realizados a finales del siglo XIX y principios del XX [111–113], que descubrieron curvas, superficies o conjuntos de puntos cuya geometría no puede ser definida de forma adecuada mediante las herramientas proporcionadas por la geometría euclídea. Mandelbrot demostró que todos estos conjuntos tienen en común ciertas características, y que buena parte de los fenómenos físicos de la naturaleza pueden ser correctamente modelados mediante el uso de la que denominó teoría fractal, siendo 'fractal' un acrónimo de 'fractional dimension'.

No existe una definición cerrada de fractal, si bien se han realizado varios intentos a lo largo del desarrollo de la teoría fractal. Así, en su libro *The Fractal Geometry of Nature* [2] Mandelbrot ofreció inicialmente la siguiente definición:

Definición 1 *Un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch¹ estrictamente excede a su dimensión topológica.*

El propio Mandelbrot, posteriormente, modificó esta definición y propuso en su lugar la siguiente:

Definición 2 *Un fractal es una forma hecha de partes similares de alguna forma al total.*

Aún no se ha encontrado una caracterización definitiva de los fractales. El motivo es que la primera definición, aun siendo correcta y precisa, es demasiado restrictiva, al excluir ciertas estructuras fractales cuya dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* coincide con su dimensión topológica, y que son de aplicación práctica en la física. La segunda definición contiene la característica esencial del fractal: un fractal parece igual a cualquier escala. En la figura 4.1 se pueden ver algunos ejemplos de fractales, en los que se puede comprobar esta propiedad de autosimilitud.

¹La definición de dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* se introduce en la siguiente sección.

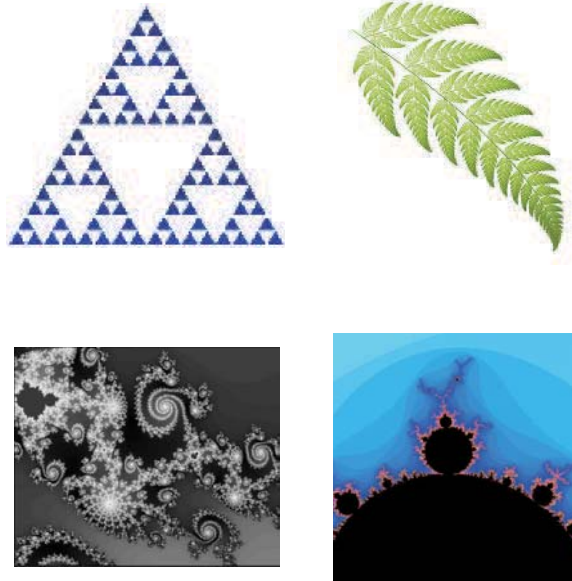


Figura 4.1: Geometría de algunos fractales.

4.2.2. Estudio de la dimensión de *Hausdorff-Besicovitch*

La dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* [114] es la principal característica de cualquier fractal, y por tanto se suele conocer también como *dimensión fractal*. Un fractal se puede considerar como un conjunto de puntos contenidos en el espacio. Consideremos en primer lugar, para la mejor comprensión del concepto de dimensión fractal, un conjunto de puntos que no forman una geometría fractal. Por ejemplo, el conjunto de puntos que forma una línea en el espacio ordinario euclídeo tiene una dimensión topológica $D_T = 1$, y como se verá más adelante una dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* D también igual a la unidad. Puesto que $D = D_T$, la línea no es un fractal según la primera definición de Mandelbrot. De forma similar, el conjunto de puntos que forman una superficie en el espacio tridimensional tiene una dimensión topológica $D_T = 2$, y $D = 2$, con lo que una superficie ordinaria no es un fractal por complicada que sea. Por último, una esfera tampoco sería un fractal al tener dimensiones $D_T = 3$ y $D = 3$.

Por otro lado, la medida de la *distancia* entre puntos del espacio es un concepto clave para la definición de la dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* y

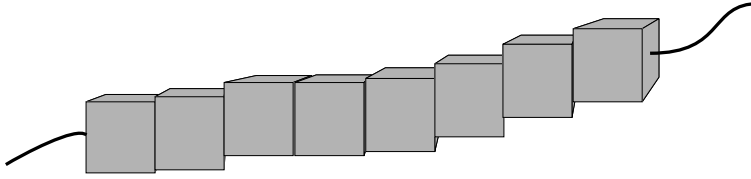


Figura 4.2: Medida del tamaño de un objeto mediante suma de cubos.

por tanto de la dimensión fractal D . Una forma simple de medir el tamaño de un conjunto de puntos \mathcal{S} es dividir el espacio en pequeños cubos de lado δ , como se muestra en la figura 4.2, o usando pequeñas esferas de diámetro δ . Si se centra una pequeña esfera en un punto del conjunto, todos los puntos que están a una distancia $r < \frac{1}{2}\delta$ del punto central quedan cubiertos por la esfera. Contando el número de esferas necesarios para cubrir todo el conjunto se puede hacer una estimación de su tamaño.

Se puede medir una curva contando el número de segmentos de longitud δ necesarios para cubrirla. Para una curva ordinaria de longitud L_0 el número de segmentos necesarios es $N(\delta) = L_0/\delta$, y su medida, L , se define como:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = L_0\delta^0 \quad (4.1)$$

En el límite, dicha medida se aproxima de forma asintótica a la longitud de la curva y es independiente de δ .

De forma análoga, se puede asociar un *área* al conjunto de puntos que definen una curva contando el número de cuadrados necesarios para cubrirla. Este número es nuevamente $N(\delta)$, y cada cuadrado tiene un área de δ^2 . Así pues, el área asociada viene dada por

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = L_0\delta^1 \quad (4.2)$$

O se puede asociar un *volumen*, V , a una línea como sigue:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = L_0\delta^2 \quad (4.3)$$

donde $N(\delta)$ es el número de cubos necesarios para cubrir dicha línea.

Sin embargo, para curvas ordinarias tanto A como V se hacen nulas en el límite, y la única medida significativa es la longitud L de la curva.

Si se considera un conjunto de puntos que forman una superficie, la medida habitual es el área A , que vendría dada por:

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = A_0\delta^0 \quad (4.4)$$

siendo $N(\delta)$ el número de cuadrados necesarios para cubrir la superficie. Así se encuentra que para una superficie ordinaria dicho número de cuadrados es, para valores límites de δ , A_0/δ^2 , siendo A_0 el área de la superficie. Si se asocia un volumen a la superficie formada por la suma de los volúmenes de cada uno de los cubos necesarios para cubrir la superficie se obtiene:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = A_0\delta^1 \quad (4.5)$$

Como se esperaba, dicho volumen se aproxima a cero conforme lo hace δ . Por otra parte, también se puede intentar asociar una *longitud* a una superficie. Formalmente se puede hacer realizando la medida siguiente:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = A_0\delta^{-1} \quad (4.6)$$

que se corresponde con la suma de la longitud de todos los segmentos de tamaño δ necesarios para cubrirla, y que diverge cuando δ tiende a cero. Así pues, la única medida lógica para una superficie es su área, pues tiene un valor real distinto de cero y de infinito.

Hasta ahora, para dar una medida del tamaño de un conjunto de puntos S , se ha elegido una función test $h(\delta) = \delta^d$ y se ha cubierto el conjunto para formar la medida $M_d = \sum h(\delta)$. En general se tiene que, conforme δ tiende a cero, la medida M_d es nula o infinita dependiendo de la elección de d , la *dimensión* de la medida ($d = 1$ para una longitud, $d = 2$ para una superficie, $d = 3$ para un volumen). La *dimensión Hausdorff-Besicovitch* D del conjunto S es la *dimensión crítica* para la cual la medida M_d cambia de cero a infinito:

$$M_d = \sum \delta^d = N(\delta)\delta^d \rightarrow \begin{cases} 0, & d > D \\ \infty, & d < D \end{cases} \quad (4.7)$$

Se denomina M_d a la medida de *dimensión* d del conjunto. El valor de M_d para $d = D$ suele ser finito aunque también podría ser cero o infinito; es la posición del salto en M_d en función de d lo realmente importante.

Existen multitud de conjuntos cuya *dimensión Hausdorff-Besicovitch* no es entera, o no se corresponde con su *dimensión topológica* D_T , entendida ésta como la *dimensión* de la estructura básica que forma el conjunto ($D_T = 1$ para líneas, $D_T = 2$ para superficies, $D_T = 3$ para volúmenes). A estos conjuntos se les llama fractales.

4.3. La antena prefractal de Koch: el efecto *shortcut*

De entre las antenas prefractales presentadas en la bibliografía como antenas pequeñas, probablemente la más estudiada es la antena de Koch [24, 26, 29, 33], que ha sido también propuesta como antena multibanda [110, 115]. Dicha antena está basada en el fractal homónimo, cuya geometría se presentará a continuación.

En este apartado se estudia el comportamiento electromagnético de la antena de Koch a *baja y alta frecuencia*², evidenciando tanto sus cualidades como sus limitaciones.

4.3.1. Geometría de la antena prefractal de Koch

El fractal de Koch, como otros muchos fractales, se puede generar mediante el uso de una función iterativa o IFS [116–118]. Un ejemplo de IFS consiste en un conjunto de transformaciones afines en un plano bidimensional, que en la iteración n vienen dadas por:

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax^{n-1} + B \quad (4.8)$$

donde $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$ son las coordenadas en un plano de un punto en la iteración $n - 1$, y a, b, c, d, e y f son las constantes que definen la transformación.

La matriz A de una transformación afín, al aplicarla sobre todos los puntos de un segmento recto, se puede escribir como:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \cos(\theta_1) & -r_2 \cos(\theta_2) \\ r_1 \cos(\theta_1) & r_2 \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

En el caso de que $r_1 = r_2 = r$, $0 < r < 1$ y $\theta_1 = \theta_2$, la operación se convierte en un giro de θ_1 radianes sobre la dirección del segmento, junto con una reducción en la escala de r . En cuanto al vector B de la expresión (4.8),

²Se entenderá como *baja frecuencia* cuando la excitación de la antena sea tal que sus máximas componentes frecuenciales sean del orden de $kh = 1$ (siendo k el número de ondas y h la dimensión máxima de la antena), y como *alta frecuencia* cuando la excitación sea tal que la anchura de los pulsos empleados en la alimentación sea del orden de las dimensiones de cada tramo de la antena simulada.

representa un desplazamiento respecto al origen, que sitúa en su posición adecuada al segmento obtenido.

Si se usa para la transformación afín la nomenclatura $w = [a, b, c, d, e, f]$, siendo estos valores los definidos en (4.8), se puede escribir de forma compacta la función iterativa de generación del fractal de Koch como un conjunto de cuatro transformaciones afines. Para cada uno de los segmentos, en cada iteración, basta generar cuatro nuevos segmentos dados por cada una de las transformaciones afines [26]:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= [1/3, 0, 0, 1/3, 0, 0] \\
 w_2 &= [1/3\cos(\pi/3), -1/3\sin(\pi/3), 1/3\sin(\pi/3), 1/3\sin(\pi/3), 1/3, 0] \\
 w_3 &= [1/3\cos(\pi/3), 1/3\sin(\pi/3), -1/3\sin(\pi/3), 1/3\sin(\pi/3), 1/2, 1/2\sqrt{3}] \\
 w_4 &= [1/3, 0, 0, 1/3, 2/3, 0]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

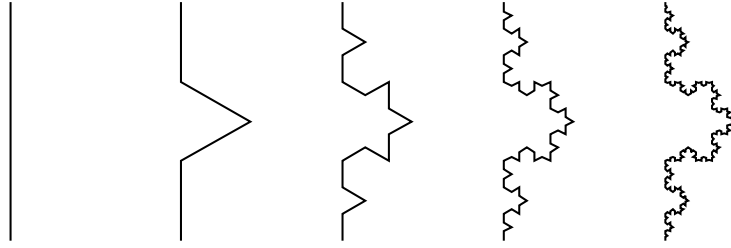


Figura 4.3: Generación del fractal de Koch.

En la figura 4.3 se pueden ver las primeras iteraciones del prefractal de Koch obtenido mediante la IFS anterior. A cada una de las iteraciones de la función generadora se la denominará prefractal de Koch de orden n (Kn), siendo n el número de iteraciones de la IFS aplicadas para su obtención. En consecuencia, se denomina antena prefractal de Koch de orden n a aquella cuya geometría corresponda a dicho prefractal. La configuración habitual para la antena prefractal de Koch es la de monopolo, tal y como se puede ver en la figura 4.4. La alimentación se realizaría en el punto que une el hilo y el plano de tierra, como es habitual. Se puede ver en dicha figura cómo conforme aumenta el número de iteraciones, N_{it} , lo hace también la longitud total de hilo de la antena, de acuerdo a la expresión:

$$L_h = h \left(\frac{4}{3} \right)^{N_{it}} \tag{4.11}$$

donde h es la longitud del monopolo de orden 0, correspondiente a un monopolo lineal.

Esta propiedad del fractal de Koch es una de las principales cualidades que presentan los fractales de cara al diseño de antenas pequeñas, al rellenar el espacio permitiendo una gran concentración de hilo en un espacio dado.

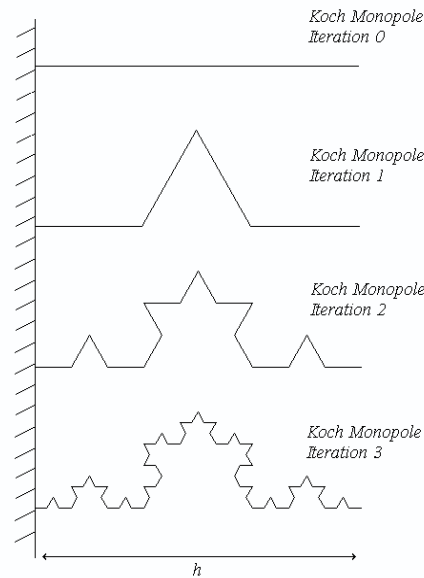


Figura 4.4: Geometría de la antena monopolo de Koch.

Otra propiedad interesante de los fractales para los diseñadores de antenas es la autosimilitud: determinadas partes de la estructura son extremadamente parecidas al total de la misma, especialmente cuando aumenta el número de iteraciones, lo que puede ser de utilidad en el diseño de antenas multibanda [110, 119, 120]. En la figura 4.5 se remarca, para el caso de la antena de Koch, la similitud existente entre distintas partes del fractal, lo que conlleva un parecido comportamiento en distintas bandas frecuenciales [110].

En esta Tesis se analiza el comportamiento de la antena prefractal de Koch como antena pequeña, si bien se han realizado también algunos estudios de su comportamiento a *alta frecuencia*, analizándose en concreto la variación de las componentes espectrales de la corriente a lo largo del hilo y extrayéndose conclusiones que podrían ser la base de futuros trabajos.

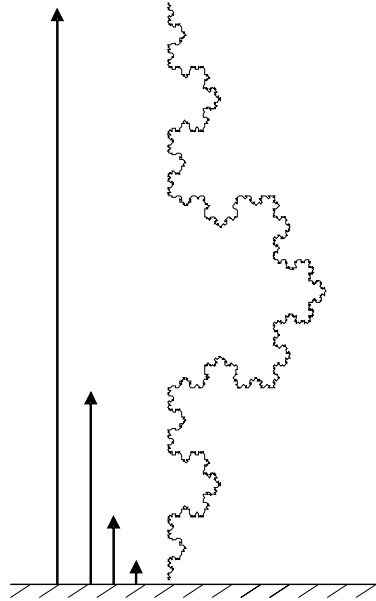


Figura 4.5: Autosimilitud en el fractal de Koch: la antena prefractal de Koch como antena multibanda.

4.3.2. Comportamiento en frecuencia

En principio, cualquier antena se puede usar como antena pequeña sin más que alimentarla a frecuencias que cumplan la condición $kh < 1$. Sin embargo, si la antena no es resonante a dicha frecuencia, se debe introducir un elemento reactivo que compense al de la antena para conseguir una impedancia de entrada real, aumentando la cantidad de energía almacenada por el dispositivo, lo que origina un deterioro de sus características radiantes. Por tanto es interesante obtener antenas que sean resonantes dentro del rango de antena pequeña, denominadas autorresonantes.

El estudio de la antena prefractal de Koch por parte de investigadores de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) dio lugar a una serie de trabajos en los que se demuestra que, conforme aumenta el orden de la antena prefractal, se reduce su frecuencia de resonancia, lo que da lugar a una antena autorresonante dentro del rango de antena pequeña [26]. Además, se consigue acercar la curva del factor de calidad al límite teórico conforme se aumenta el orden del prefractal.

En este apartado se presentan los resultados de la simulación de la antena prefractal de Koch en sus primeras iteraciones usando el código DOTIG5

basado en MoMTD presentado en el capítulo 2, comparados vía transformada de Fourier (FFT) con los obtenidos mediante el programa comercial NEC (*Numerical Electromagnetic Code*) [71], basado también en el MoM, en este caso en el dominio de la frecuencia.

Se ha elegido para el estudio un modelo de antena de hilo delgado, discretizada mediante una segmentación uniforme de forma que cumpla la aproximación de hilo delgado presentada en el capítulo 2. La altura de las antenas simuladas es $h = 6,22$ cm, siendo el tamaño del prefractal de 6 cm, y alimentándose mediante un segmento de altura 2,2 mm, correspondiente a la longitud del pin central del conector *SMA* con el que fueron alimentados los modelos fabricados por investigadores de la UPC [26]. El radio de las antenas modeladas es de 0,12 mm, coincidiendo con los datos utilizados en la referencia anterior. En la figura 4.6 se puede ver la comparación entre las impedancias de entrada y coeficientes de reflexión obtenidos mediante ambos métodos de simulación para las cuatro primeras iteraciones del prefractal.

Los resultados obtenidos son casi coincidentes para un número pequeño de iteraciones, si bien las diferencias aumentan conforme lo hace el orden del prefractal y con ello la complejidad de la estructura. Las causas podrían ser el distinto tratamiento de las uniones entre hilos, la elección del punto campo, o incluso la aproximación de hilo delgado, que va perdiendo validez a medida que aumenta el número de iteraciones. De todas formas, y para confirmar que la diferencia existente entre los dos métodos de simulación no es preocupante en cuanto a la fiabilidad de los resultados, se han comparado los datos anteriores con los obtenidos con otro método de simulación comercial, WIPL (*Electromagnetic Modeling of Composite Wire and Plate Structures*) [121]. En la figura 4.7 se pueden ver las impedancias de entrada obtenidas con los tres métodos de simulación para la antena *K3*, comprobando cómo la variación entre ellos es aproximadamente del mismo orden, lo que confirma la suposición de que son características inherentes al propio método de simulación las que dan lugar a dichas variaciones.

En la figura 4.6 se observa la disminución de la frecuencia de resonancia de la antena conforme aumenta el orden del prefractal, debida a la variación en la longitud de hilo dada por (4.11). Dado que la frecuencia de resonancia de una antena depende del tiempo que tarda la corriente de excitación en alcanzar el extremo del hilo y volver a su origen, conforme mayor sea la longitud del hilo, mayor será también este tiempo y por tanto menor su frecuencia de resonancia.

Por otra parte, y como ya se comentó en la introducción, la disminución de la frecuencia de resonancia acarrea un empeoramiento de las características

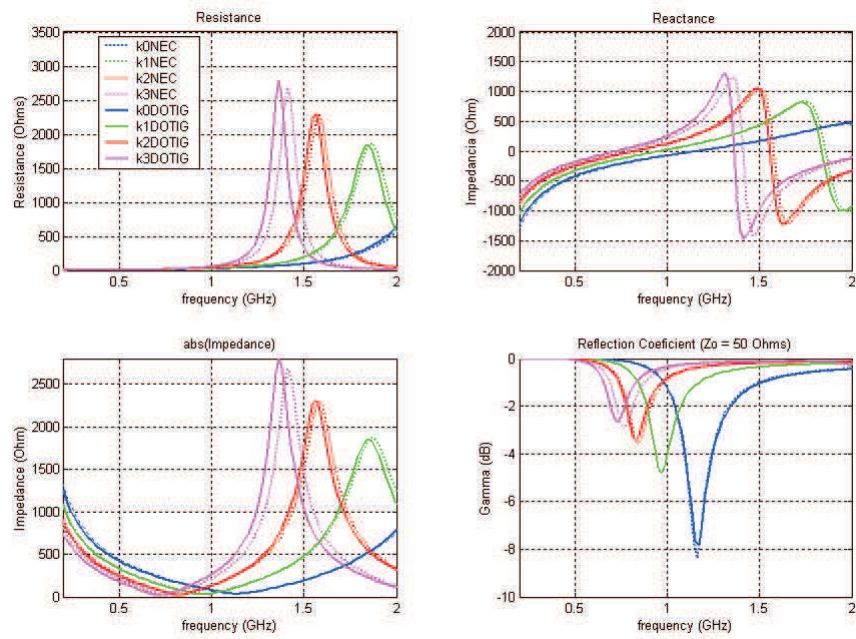


Figura 4.6: Impedancia de entrada y coeficiente de reflexión para las tres primeras iteraciones de la antena prefractal de Koch. Comparación de los resultados obtenidos con NEC y DOTIG5 (vía FFT).

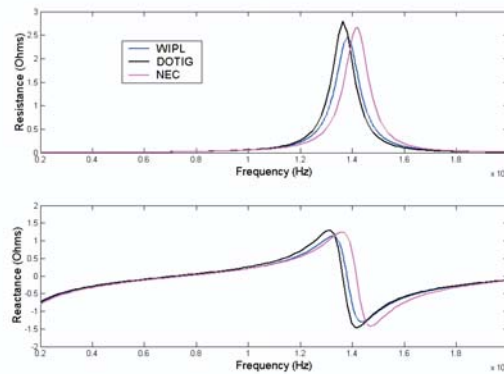


Figura 4.7: Comparación de la resistencia de entrada obtenida con DOTIG5, NEC y WIPL para la antena prefractal K_3 .

de radiación de las antenas, concretamente de su eficiencia y ancho de banda, por lo que no basta con reducir la frecuencia de resonancia de una antena para conseguir buenas antenas pequeñas. Una medida habitual para clasificar las antenas pequeñas es su factor de calidad Q , relacionado con el ancho de banda de uso de la antena, y que se estudia en el apéndice C. Una expresión extendida para su cálculo [26,27], cuya validez se comenta en dicho apéndice, es la siguiente:

$$Q(\omega) \simeq \frac{\omega}{2R_{in}} \left(\frac{\partial X_{in}}{\partial \omega} + \left| \frac{X_{in}}{\omega} \right| \right) \quad (4.12)$$

donde $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ es la impedancia de entrada a la frecuencia de uso de la antena.

Utilizando la expresión (4.12) se han comparado, a partir de los resultados obtenidos mediante las simulaciones, los factores de calidad de las antenas prefractales de Koch de distinto orden. Los resultados se muestran en la figura 4.8. Se puede observar cómo a medida que aumenta el número de iteraciones la curva del parámetro Q se aproxima al límite teórico Q_{min} , aunque dicha aproximación parece estancarse conforme aumenta el orden del prefractal.

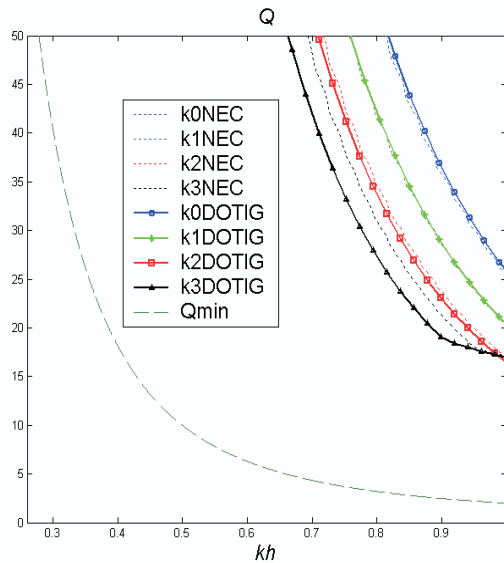


Figura 4.8: Parámetro de calidad Q de las tres primeras iteraciones del prefractal de Koch.

En la tabla 4.1 se presenta una recopilación de los parámetros más impor-

tantes de la antena de Koch simulada mediante el programa DOTIG5. En esta tabla se ha incluido el parámetro de la *longitud efectiva* (L_e) de cada antena, que corresponde a la longitud de una antena lineal con su misma frecuencia de resonancia. Este parámetro es útil para determinar la efectividad de una antena para aprovechar su longitud de hilo, L_h . Se puede comprobar cómo la relación entre ambas disminuye conforme aumenta el número de iteraciones, siguiendo una ley aproximadamente cuadrática ($(L_e/L_h)_n \approx (L_e/L_h)_{n-1}^2$). También es interesante notar cómo aunque las curvas del factor de calidad mostradas en la figura 4.8 se acercan al límite de antena pequeña a medida que aumenta el número de iteraciones, el valor de Q a la frecuencia de resonancia es mayor con dicho número de iteraciones.

Antena	f_0 (MHz)	R_{in} (Ω)	$Q(f_0)$	L_h (cm)	L_e (cm)	L_e/L_h
<i>K0</i>	1154.5	35.82	7.28	6.22	6.22	1
<i>K1</i>	964.5	25.03	10.82	8.22	7.45	0.91
<i>K2</i>	853.3	20.62	13.30	10.88	8.42	0.77
<i>K3</i>	809.4	21.25	16.24	14.44	8.87	0.61

Tabla 4.1: Parámetros de la antena prefractal K0-K3.

4.3.3. Análisis en el dominio del tiempo del prefractal de Koch

La principal ventaja del análisis en el dominio del tiempo frente al dominio de la frecuencia es que proporciona una mayor comprensión de los fenómenos físicos existentes. Así, si por ejemplo se representa la corriente en el segmento de alimentación a lo largo del tiempo, se pueden visualizar las múltiples reflexiones de la señal de alimentación que se producen en distintos puntos de la geometría de una antena de hilo. Se puede ver un ejemplo en la figura 4.9, en la que se representa, frente al tiempo, la corriente en el segmento de alimentación de la antena *K1* y de una antena lineal de igual longitud de hilo (8 cm). Ambas antenas han sido excitadas con un pulso gaussiano de frecuencia máxima 45 GHz³. Se puede comprobar cómo las esquinas en las

³La frecuencia máxima ha sido elegida de forma que la anchura espacial del pulso gaussiano (anchura temporal multiplicada por c) se corresponda con la mitad de la longitud de cada tramo rectilíneo de la antena *K1*, de forma que se puedan distinguir con nitidez pulsos transmitidos y reflejados. La frecuencia máxima, f_{max} , de una excitación gaussiana es aquella cuya amplitud es una décima parte de la amplitud a frecuencia cero.

que el hilo de la antena prefractal forma un ángulo más agudo dan lugar a una mayor reflexión de corriente; también se comprueba cómo el pulso reflejado en su extremo alcanza antes el segmento de alimentación que en el caso de la antena lineal, o lo que es lo mismo, su longitud efectiva es menor que su longitud de hilo, como ya se expuso en la tabla 4.1.

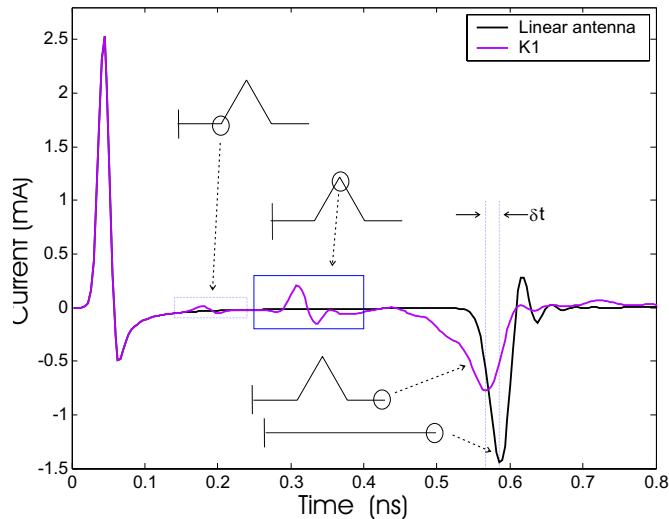


Figura 4.9: Corriente en el segmento de alimentación frente al tiempo en las antenas lineal y *K1*.

En la figura 4.10 se muestra el denominado diagrama espacio-temporal para la antena *K1*, excitada por un pulso gaussiano de las mismas características que en el ejemplo de la figura 4.9. En este tipo de diagramas se representa no sólo la corriente en el segmento de alimentación frente al tiempo, sino también en el resto de los segmentos de la antena. Se observan varios efectos que se enumeran a continuación:

1. En primer lugar, además de las reflexiones en el extremo del hilo, y como ya se hizo notar previamente, se producen reflexiones importantes justo en el centro del prefractal, donde el ángulo formado entre los hilos es mínimo. Este efecto se ha señalado con una flecha de color verde.
2. También se puede comprobar cómo el pulso que se mantiene en el hilo tras las múltiples reflexiones es cada vez más ancho, lo que confirma

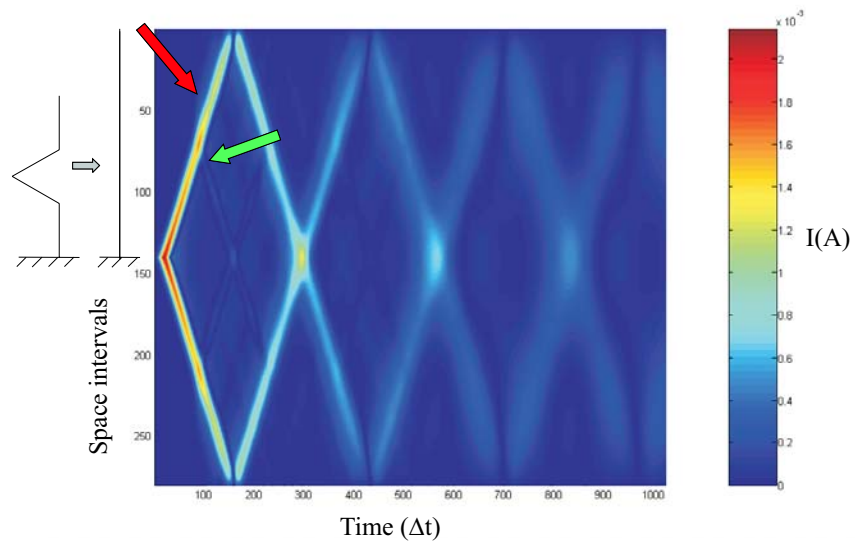


Figura 4.10: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena *K1*.

que las bajas frecuencias sufren una menor radiación a lo largo de la estructura. Es decir, que las altas frecuencias son las primeras en ser radiadas. Este fenómeno será constatado posteriormente mediante estudios espectrales.

3. Por último, aparece un efecto, marcado con una flecha de color rojo, denominado *shortcut* [43, 45]. Se puede ver un detalle en la figura 4.11, donde se representa la corriente en escala logarítmica para visualizar mejor dicho efecto. Se observa cómo en la zona señalada en rojo en la antena *K1* se produce una reabsorción de la energía radiada previamente por la estructura en su segmento de alimentación y otras esquinas de la estructura. Esta energía da lugar a una corriente que aparece *antes* de que este tramo de la antena sea alcanzado por el pulso de corriente que viaja a lo largo del hilo, cuya trayectoria se marca con una línea discontinua en la figura. Este *adelanto* de la corriente en el prefractal respecto al camino seguido a lo largo del hilo, o efecto *shortcut*, contribuye a que la corriente reflejada en el extremo del hilo llegue antes al segmento de alimentación en el caso de la antena *K1* que en una antena de hilo recto de igual longitud, como se comprobó en la figura 4.9. Un fenómeno similar fue ya descrito por Burrell [122] al estudiar

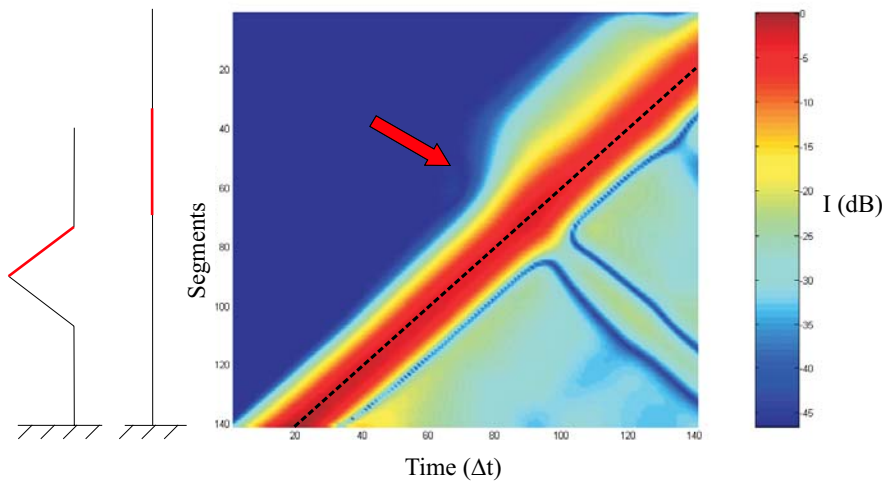


Figura 4.11: Detalle del diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena $K1$ (dB).

la corriente en el extremo de hilos doblados.

La figura 4.12 representa el campo cercano creado por la antena $K1$ en distintos intervalos temporales. Se observa cómo tanto el segmento de alimentación como las esquinas de la estructura son centros de radiación, que efectivamente producen el acoplamiento entre las distintas partes de la misma. Esta interacción entre los centros de radiación de la estructura y otros tramos de la misma puede ser por tanto el origen de la disminución de longitud efectiva observada en la tabla 4.1.

La figura 4.13 muestra el diagrama espacio-temporal de la corriente a lo largo del hilo para la antena $K2$, donde también pueden verse los tramos de la antena en los que se producen los *shortcut*. Todos estos tramos (2-3, 5-6, 8-9, 11-12 y 14-15) tienen en común su orientación, que es aproximadamente paralela al campo radiado por el segmento de alimentación.

Asimismo, si se analizan los tiempos en los que se produce la aparición de las corrientes inducidas, se puede comprobar cómo en todos los casos coinciden con los tiempos de propagación del campo eléctrico desde el punto de alimentación hasta el segmento donde se produce el *shortcut*. En la tabla 4.2 se presentan los tiempos en los que aparecen los *shortcuts* en las distin-

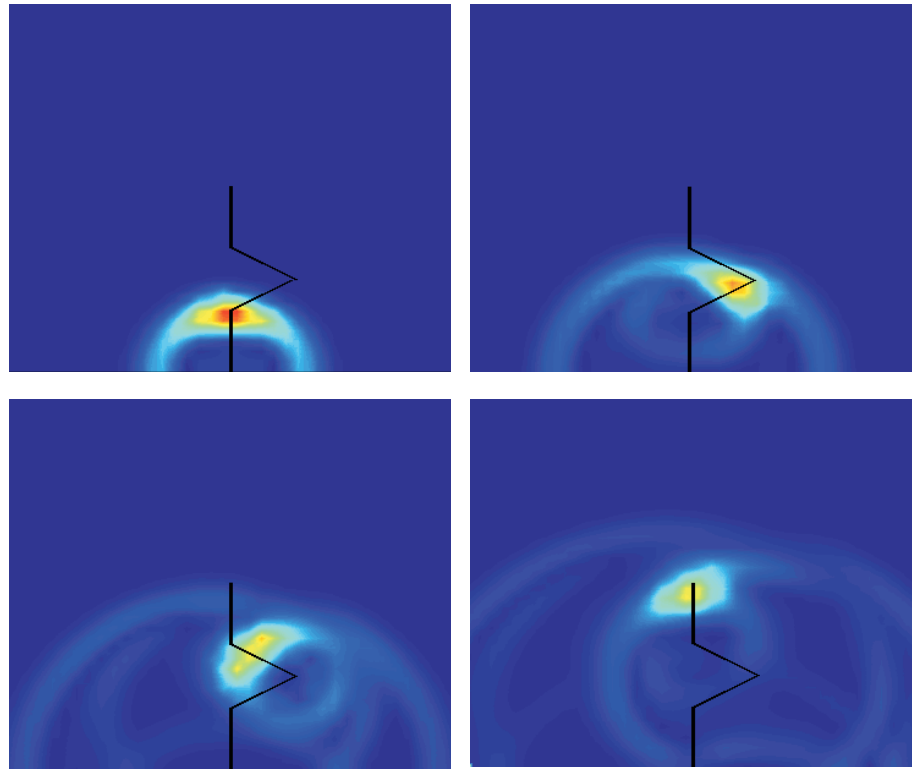


Figura 4.12: Mapas espaciales del campo eléctrico cercano en la antena *K1* en distintos instantes temporales. La antena fue excitada con una tensión gaussiana de frecuencia máxima 45 GHz.

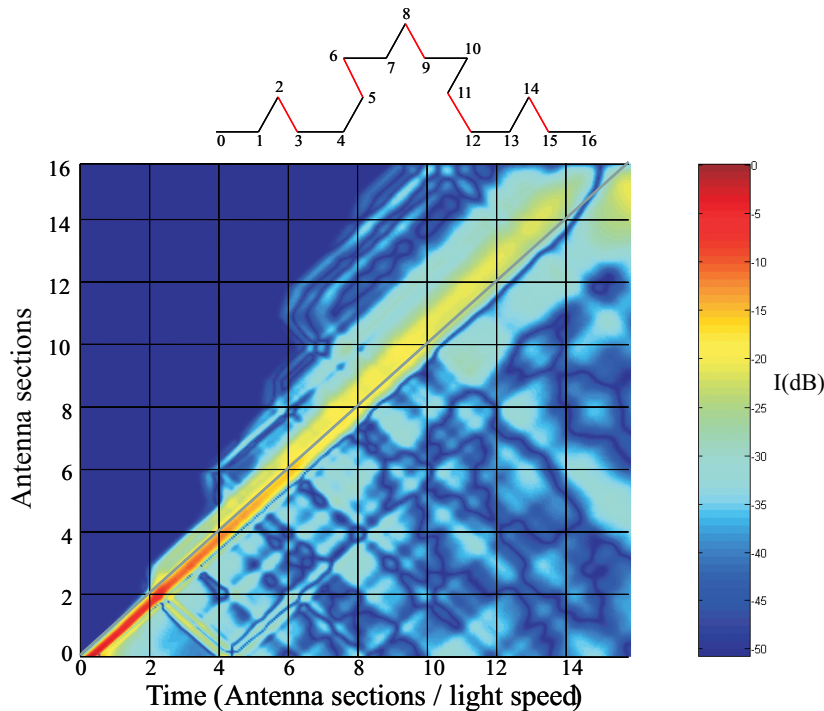


Figura 4.13: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena $K2$ (dB). Localización de los distintos *shortcut*.

tas secciones de la estructura. Los denominados teóricos son los obtenidos suponiendo que es en el segmento de alimentación donde se produce la radiación que se acopla en los distintos tramos, y los medidos son los obtenidos en la simulación. Se comprueba que los tiempos teóricos y medidos son aproximadamente iguales.

Con objeto de estudiar si los *shortcuts* pueden ser la causa de la disminución de la relación entre longitud efectiva y longitud de hilo observada cuando se aumenta el número de iteraciones (ver la tabla 4.1), se ha realizado un nuevo experimento numérico consistente en la variación del radio de los hilos que forman la antena. Es bien sabido que el aumento del radio de una antena lineal conlleva una disminución de su frecuencia de resonancia [69]; sin embargo, se ha comprobado que el aumento del radio en la antena prefractal de Koch tiene como efecto exactamente lo contrario, es decir, produce un aumento en la frecuencia de resonancia.

El aumento del radio de una estructura de hilo complicada, como la

Número de esquina	Tiempo llegada teórico (Δt)	Tiempo llegada medido (Δt)
3	2	2
6	3.46	3.5
9	5.29	5.3
12	6	6
15	8	8

Tabla 4.2: Tiempos de aparición de los *shortcut* en la antena *K2* suponiéndolos debidos a la radiación producida en el segmento de alimentación (teóricos) y medidos a partir de las simulaciones.

antena prefractal de Koch, tiene como principal inconveniente que pueden perderse detalles en sus esquinas. De hecho, se ha demostrado que la antena prefractal de Koch no puede resolverse geoméricamente si no se cumple la condición

$$d \leq \sqrt{3}l \quad (4.13)$$

siendo d el diámetro de la estructura y l la longitud de cada tramo rectilíneo de la antena. Dado que el incremento en el orden del prefractal da lugar a una disminución de la longitud de cada tramo, no se pueden fabricar estructuras de radio arbitrariamente grande para estudiar su comportamiento.

Además, desde el punto de vista numérico, al disminuir la longitud de cada sección del hilo, la razón entre la longitud de cada segmento Δs y el radio de la antena puede alcanzar valores tales que la aproximación de hilo delgado (estudiada en el capítulo 2) no sea válida [73]. Por otra parte, una disminución excesiva del radio puede dar lugar a inestabilidades en el núcleo de la ecuación integral EFIE a resolver mediante el método de los momentos⁴.

Una posible solución, tanto tecnológica como de simulación, para poder aumentar la anchura de los hilos, es el uso de una estructura de tipo *strip-wire* como la mostrada en la figura 4.14. Esta estructura, intermedia entre la versión impresa tipo *strip* y la versión de hilo, tiene la ventaja respecto a ambas de poder aumentar de forma indefinida su anchura sin modificar la forma del prefractal. De esta forma se ha podido estudiar el efecto de

⁴Es importante recordar que una de las principales aportaciones de la aproximación de hilo delgado es la eliminación de singularidades en el núcleo de la ecuación integral EFIE [123]. Un radio muy pequeño puede generar inestabilidades en el cálculo numérico de la ecuación integral al aproximar a la ecuación EFIE a dicha singularidad.

la variación del radio en la antena prefractal, usando para ello el método MoMTD para estructuras conductoras perfectas superficiales presentado en [38], que en esta Tesis ha sido modificado para aprovechar la simetría en las estructuras con tierra, al igual que se hizo en el caso de MoMTD para estructuras conductoras de hilo delgado.

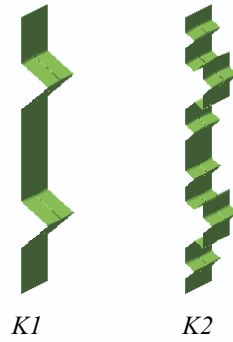


Figura 4.14: Geometría de las antenas $K1$ y $K2$ modeladas con *strip-wire*.

En primer lugar, y para validar las simulaciones mediante estructuras de tipo *strip-wire*, se ha comparado la corriente obtenida en el segmento de alimentación de la antena $K1$ modelada de esta forma, con la corriente obtenida en el caso de modelar la antena con un hilo delgado. Se ha supuesto una relación entre la anchura w de la tira del *strip-wire* y el diámetro d del hilo de $w = 2d$, de forma que la densidad de corriente que fluye por el hilo sea la misma en ambos casos [69]. En la figura 4.15 se puede ver dicha comparación, comprobando cómo los resultados son muy similares.

El principal inconveniente de la simulación de estructuras radiantes superficiales es el alto coste en tiempo de simulación en relación con el necesario para simular estructuras de hilo delgado. Para acelerar la obtención de resultados, se ha hecho uso de las técnicas de extrapolación de la señal mediante las herramientas de localización de polos Prony y Pencil [124]. Así, en la figura 4.16 se muestra la señal original obtenida de la simulación en el dominio del tiempo (a), la elección de los polos de la respuesta (b), y la señal continuada (c) para las antenas $K1$ y $K2$.

En la tabla 4.3 se comparan las frecuencias de resonancia obtenidas en ambas antenas para dos anchuras distintas del *strip-wire*, comprobándose cómo al doblar el radio aumenta la frecuencia de resonancia de las antenas. Este resultado parece confirmar las conclusiones obtenidas previamente,

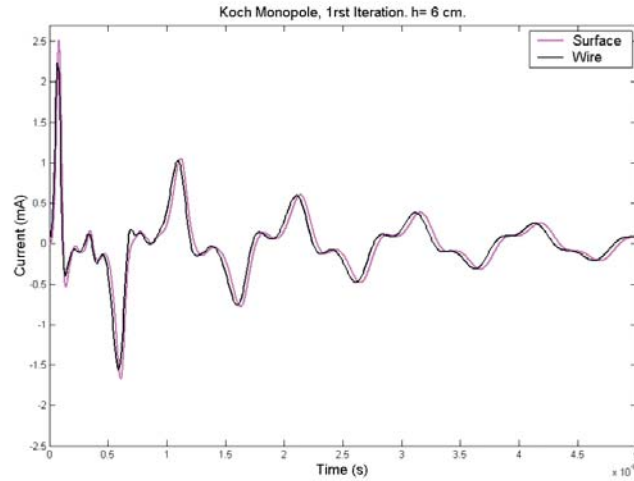


Figura 4.15: Comparación entre la corriente en el segmento de alimentación de la antena $K1$ modelada con hilos delgados y *strip-wire*.

puesto que el incremento en la anchura de las tiras da lugar a una mayor interacción con el campo radiado por el segmento de alimentación, lo que conlleva un aumento en la frecuencia de resonancia, o una disminución de la longitud efectiva de la estructura.

Anchura (mm)	f_0 $K1$ (MHz)	f_0 $K2$ (MHz)
1	992	849
2	997	897

Tabla 4.3: Frecuencia de resonancia para antenas $K1$ y $K2$ modeladas con *strip-wire* con distintas anchuras.

A la vista de los resultados presentados en esta sección, se concluye que a la hora de diseñar antenas pequeñas, y para evitar este tipo de acoplamientos, se debe minimizar la longitud de hilo paralela al campo eléctrico radiado por el segmento de alimentación.

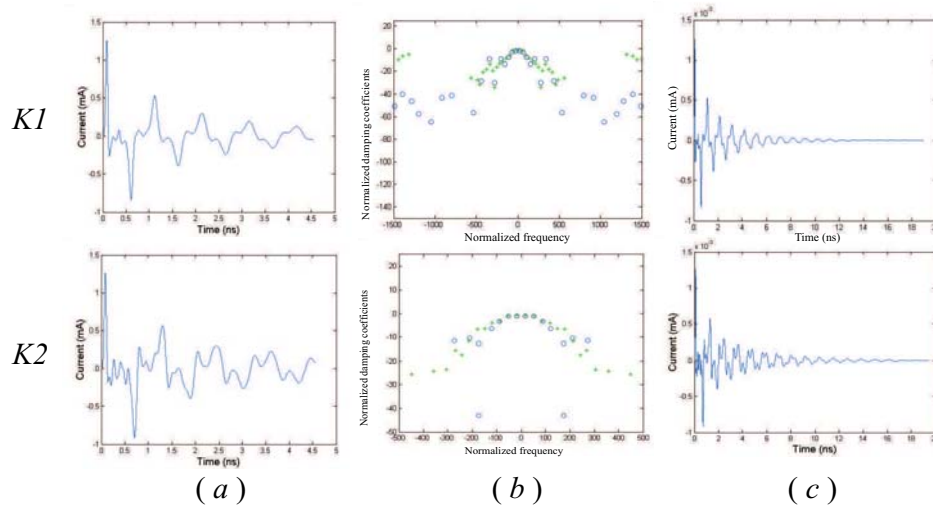


Figura 4.16: Aplicación de herramientas de localización de polos al cálculo de la respuesta de las antenas modeladas con *strip-wire*. (a): Señal original; (b): elección de polos de la respuesta; (c): Señal continuada.

4.3.4. Estudio espectral de la corriente en la antena prefractal de Koch

En esta sección se hará uso de una de las propiedades de la simulación en el dominio del tiempo, que es la posibilidad de separar efectos utilizando ventanas temporales o *'time gating'*.

Para determinar el efecto de las esquinas de una estructura tipo Koch, se ha realizado un experimento sencillo, que consiste en el análisis de la intensidad de corriente en las dos estructuras modificadas cuya configuración se puede ver en la figura 4.17b, cuando son alimentadas con un pulso gaussiano de *alta frecuencia*. Como se puede observar, se trata de simplificar la geometría de las antenas *K1* y *K2*, para evitar las reflexiones debidas a los detalles geométricos que quedan a la derecha de los puntos P_1 y P_2 . Además, haciendo uso de ventanas temporales se pueden eliminar también las reflexiones del final del hilo, con lo que de la diferencia entre las corrientes calculadas en los puntos P_1 y P_2 de las dos antenas modificadas pueden obtenerse conclusiones sobre el efecto de la primera esquina de la estructura en la antena *K2*. Dichas corrientes, una vez eliminadas las reflexiones de los extremos, se pueden ver en la figura 4.18. Asimismo se puede ver una com-

paración entre sus correspondientes espectros en la figura 4.19, obtenidos vía transformada de Fourier. Es interesante notar cómo en la antena $K2$ modificada se observa el efecto del *shortcut* en el dominio del tiempo, señalado mediante una flecha en la figura 4.18b, así como las múltiples reflexiones que se producen en las distintas esquinas de la estructura. Por otro lado, de la figura en el dominio de la frecuencia (fig. 4.19) se obtiene una conclusión también importante: la radiación producida por la forma básica no eliminada de la antena prefractal $K2$ no es relevante a baja frecuencia, pues se observa que las señales correspondientes al punto P_1 en $K1$ y al punto P_2 en $K2$ son casi idénticas, sino que su efecto es notable principalmente a altas frecuencias. Los picos existentes en el espectro de la antena $K2$ modificada son debidos a las múltiples reflexiones, así como al *shortcut* que, de acuerdo a lo estudiado hasta el momento, parece ser generado principalmente en el segmento de alimentación.

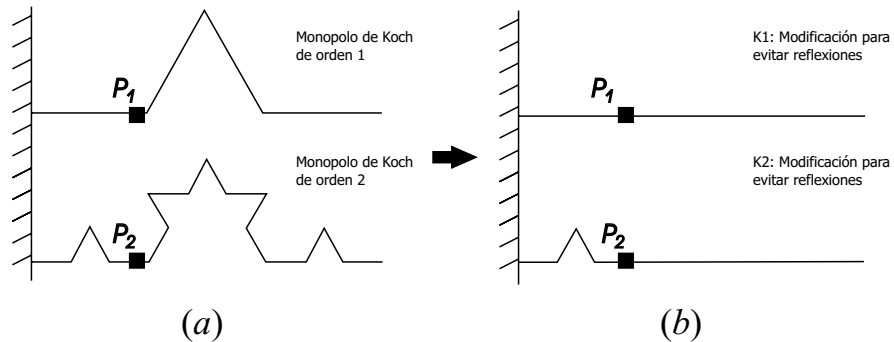


Figura 4.17: Geometría de las antenas $K1$ y $K2$ (a) y de las antenas modificadas para evitar reflexiones (b).

El análisis espectral anterior concuerda con la observación realizada en secciones anteriores acerca del ensanchamiento producido en los pulsos a lo largo del hilo, que se relacionó ya entonces con una rápida radiación de las altas frecuencias (ver figura 4.10). Aunque no es objetivo de esta Tesis el estudio a alta frecuencia de las antenas prefractales, esta temprana radiación de las altas frecuencias en la antena prefractal de Koch es una conclusión que cabe ser remarcada y podría ser utilizada en trabajos futuros.

En nuestro caso, y siguiendo la línea de otros autores que han señalado la antena prefractal de Koch como antena multibanda [110], se ha realizado un estudio preliminar de dicho comportamiento. Esto obliga a la simulación de

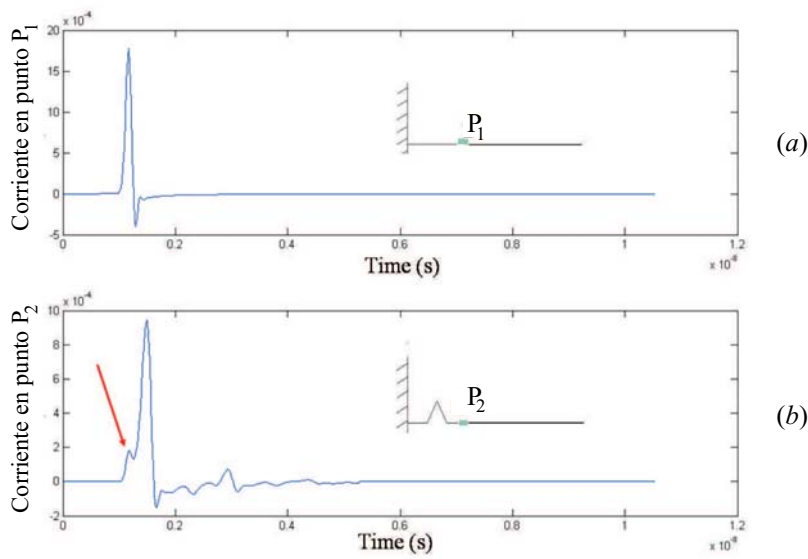


Figura 4.18: Corriente en función del tiempo en el punto P_1 de la antena $K1$ (a) y en el punto P_2 de la antena $K2$ (b), modificadas ambas antenas para evitar reflexiones.

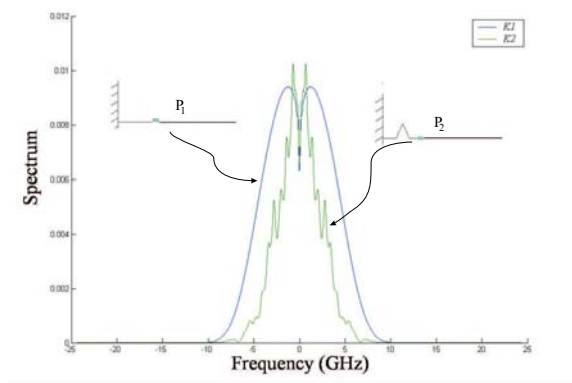


Figura 4.19: Comparación del espectro de la corriente en los puntos P_1 y P_2 de las antenas $K1$ y $K2$ modificadas para evitar reflexiones.

antenas de geometría complicada, como las antenas $K4$ o $K5$, a alta frecuencia, lo que supone un incremento del número de segmentos necesarios para modelar la antena debido al criterio de Nyquist, lo que conlleva un alto coste computacional, a veces inabordable. Sin embargo, dado que las componentes de alta frecuencia son radiadas en la parte más cercana a la alimentación de la estructura, y suponiendo un bajo nivel de reabsorción de energía (*short-cut*) en comparación con las componentes de señal transmitidas a lo largo del hilo, se han realizado dos modelos más burdos de la estructura prefractal, que se pueden ver en la figura 4.20. En la primera modificación simplemente se ha relajado la condición de Nyquist en la segunda mitad de la estructura, permitiendo el empleo de un número menor de segmentos, tal y como indica la figura 4.20a; concretamente se han considerado segmentos de longitud doble a la mínima necesaria para un buen modelado de acuerdo con las consideraciones numéricas del método utilizado para el cálculo (se indica con $NS=1$, mientras que $NS=2$ indica la segmentación correcta). En el segundo caso (figura 4.20b) se ha modificado de forma más drástica la geometría de la misma parte de la estructura, haciéndola similar a la del prefractal de orden inmediatamente menor.

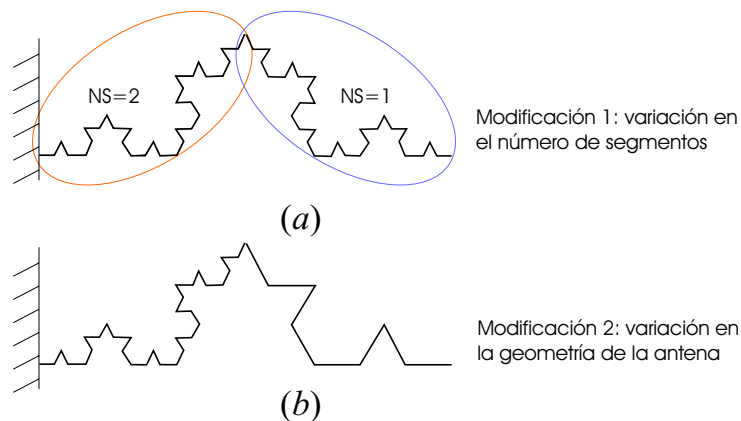


Figura 4.20: Modificaciones de la antena $K3$ para el análisis a alta frecuencia.

En la figura 4.21 se pueden ver los resultados obtenidos para la estructura original, modelada con un número de segmentos adecuado de acuerdo a la frecuencia máxima de simulación [38]⁵, las dos estructuras modificadas de la

⁵En este caso el número de segmentos por tramo es ' $NS = 2$ ' en toda la estructura.

figura 4.20, y una última no modificada pero modelada con segmentación uniforme a lo largo de toda la estructura considerando una frecuencia máxima igual a la mitad de la de excitación⁶. Se puede comprobar cómo a frecuencias relativamente bajas (hasta 6GHz), los tres modelos que sólo difieren en su segmentación dan lugar a resultados casi idénticos. A partir de estas frecuencias, usando la estructura con ' $NS = 1$ ' se obtienen resultados incorrectos, mientras que la primera modificación sigue comportándose de forma idéntica a la estructura original bien modelada. En cuanto a la segunda modificación, se observa cómo mientras en las primeras resonancias da lugar a resultados incorrectos (la corriente que se propaga a lo largo del hilo se refleja antes con lo que las frecuencias de resonancia aumentan), a partir de un cierto valor de alta frecuencia coincide exactamente con el modelo original y la primera modificación.

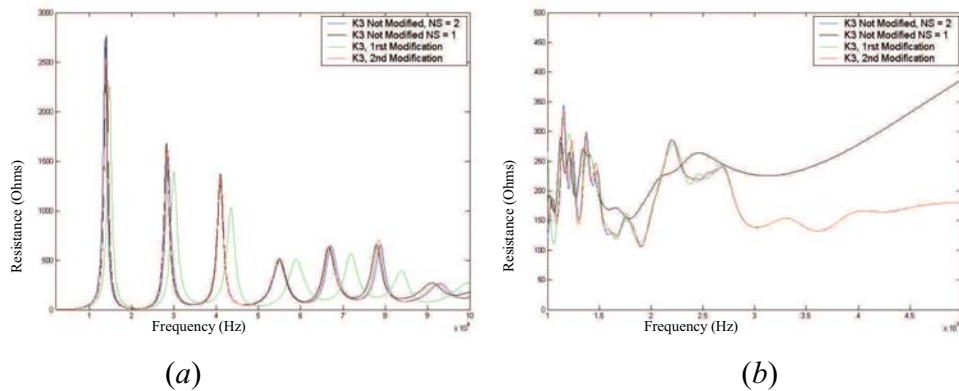


Figura 4.21: Comparación de la impedancia de entrada de la antena $K3$ y sus modificaciones para aprovechar la radiación de las componentes de alta frecuencia. (a): Intervalo de frecuencias [1,10] GHz. (b): Intervalo de frecuencias [10,50] GHz

Es lógico pensar que, dado que el aumento del número de iteraciones de la antena conlleva un estancamiento en su comportamiento a baja frecuencia, es posible encontrar estructuras alternativas a antenas prefractales muy complicadas, como $K6$ o $K7$, basadas en las de la figura 4.20, que den lugar a resultados muy similares a los de dichas antenas tanto a bajas frecuencias

⁶Por lo que el número de segmentos por tramo es ' $NS = 1$ ' en toda la estructura.

(debido a que varían poco) como a altas (porque se radian en segmentos cercanos al de alimentación). Esto podría simplificar el estudio de las posibles características multibanda de dichas antenas.

4.3.5. *Shortcuts* en estructuras no prefractales

A lo largo de la sección anterior se ha presentado la antena prefractal de Koch y se ha comprobado cómo la interacción mutua entre los distintos segmentos de la estructura (que se ha denominado *shortcut*) puede ser una de las causas de la disminución de la relación entre longitud efectiva y longitud de hilo de la antena conforme aumenta el número de iteraciones. A continuación se estudian algunas estructuras basadas en la geometría euclídea cuyo comportamiento también parece ser afectado por dichos *shortcuts*.

En la figura 4.22 se representan cuatro antenas que se han elegido para comparar su comportamiento con el de la antena *K2*. La longitud total de hilo de todas ellas es idéntica a la de la antena prefractal *K2* estudiada en la sección anterior, es decir 10.88 cm. La altura de las antenas es también de 6.22 cm, siendo 0.22 mm la longitud de su segmento de alimentación y 0.12 mm el radio de los hilos. En la tabla 4.4 se presentan las frecuencias de resonancia de las cuatro antenas, junto a la de la antena prefractal *K2*; las simulaciones han sido realizadas con el método DOTIG5, excitando las antenas en su base con pulsos gaussianos de *baja frecuencia*, concretamente en este caso con frecuencia máxima de 1 GHz.

Antena	f_0 (MHz)
<i>Meander ancha</i>	770.3
<i>Zigzag ancha</i>	845.6
<i>Meander estrecha</i>	837.8
<i>Zigzag estrecha</i>	995.0
<i>K2</i>	853.3

Tabla 4.4: Frecuencia de resonancia de antenas *meander* y *zigzag* con similares características a la antena prefractal *K2*.

En las figuras 4.23, 4.24, 4.25 y 4.26 se presentan los diagramas espacio-temporales correspondientes a la corriente inducida en cada uno de los monopolos de la figura 4.22. Se pueden observar los *shortcuts* que se producen en cada una de las cuatro antenas. Se ha marcado en cada gráfica, en verde, el camino que debería seguir la corriente en una antena lineal de la misma

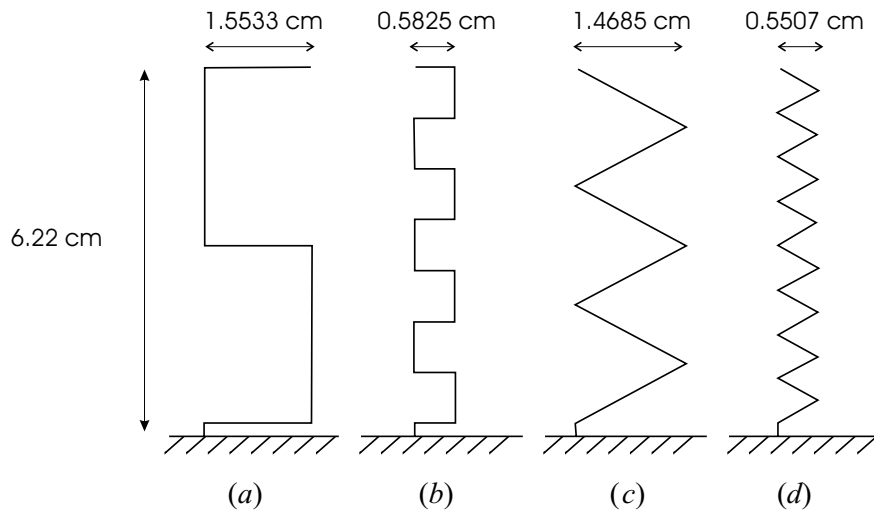


Figura 4.22: Antenas utilizadas para la comparación de características con la antena prefractal de Koch de orden dos. (a) *Meander* ancha; (b) *Meander* estrecha; (c) *Zigzag* ancha; (d) *Zigzag* estrecha.

longitud efectiva. En rojo, el camino que debería seguir la corriente conducida por el hilo en un hilo recto de igual longitud.

Observando y comparando las cuatro gráficas se puede comprobar cómo el instante en que aparecen los *shortcuts* en el extremo del hilo, marcado en las gráficas como t_1 , no coincide con el instante en el que alcanzaría el extremo del hilo la corriente en una antena lineal de longitud igual a su longitud efectiva (línea verde). De hecho, t_1 es casi idéntico en las cuatro antenas, siendo algo mayor en la antena *meander* ancha, aunque esto también se puede justificar al estar su extremo más lejos de la alimentación que en las demás antenas.

Se puede concluir que aunque la aparición de *shortcuts* en la estructura puede ser un factor limitante en su comportamiento como antena pequeña, no es el único a tener en cuenta, y probablemente tampoco el que más influye, como se comprobará posteriormente.

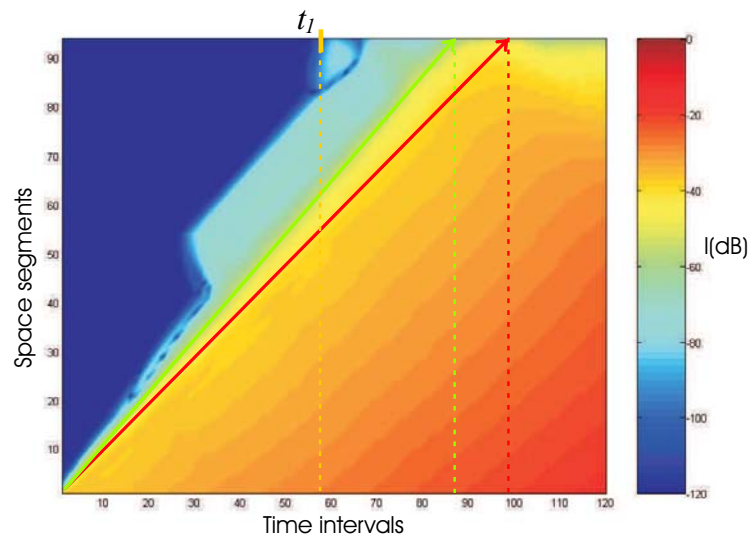


Figura 4.23: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena tipo *meander* ancha (dB).

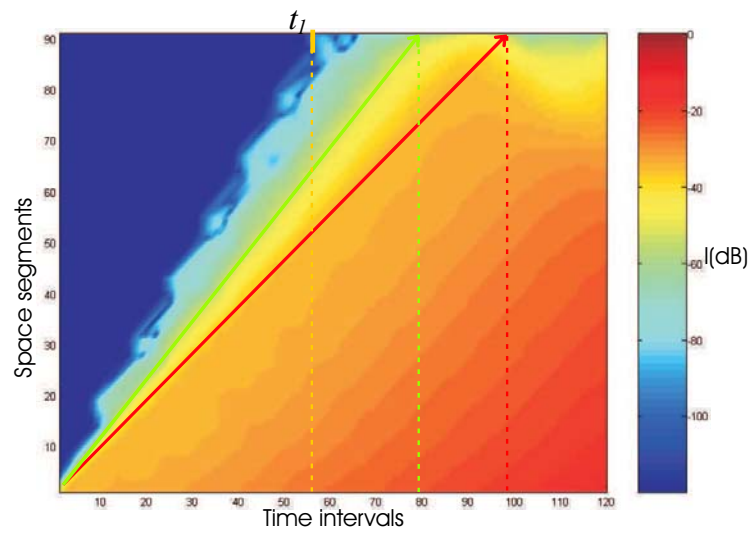


Figura 4.24: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena tipo *zigzag* ancha (dB).

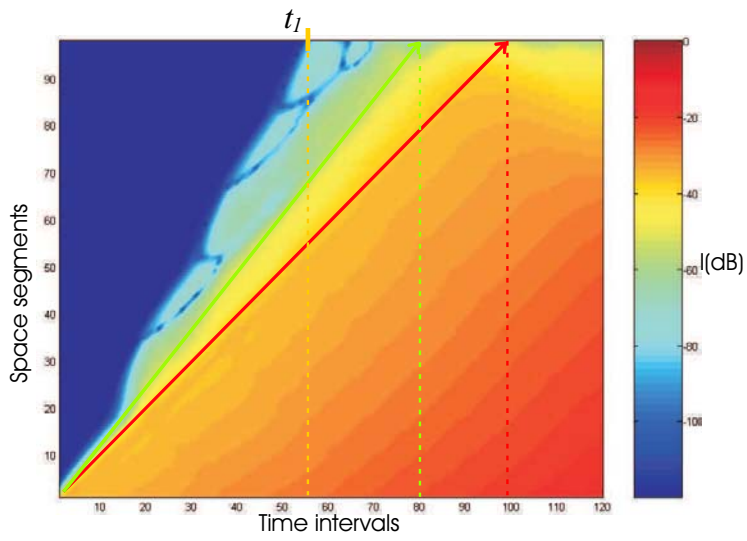


Figura 4.25: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena tipo *meander* estrecha (dB).

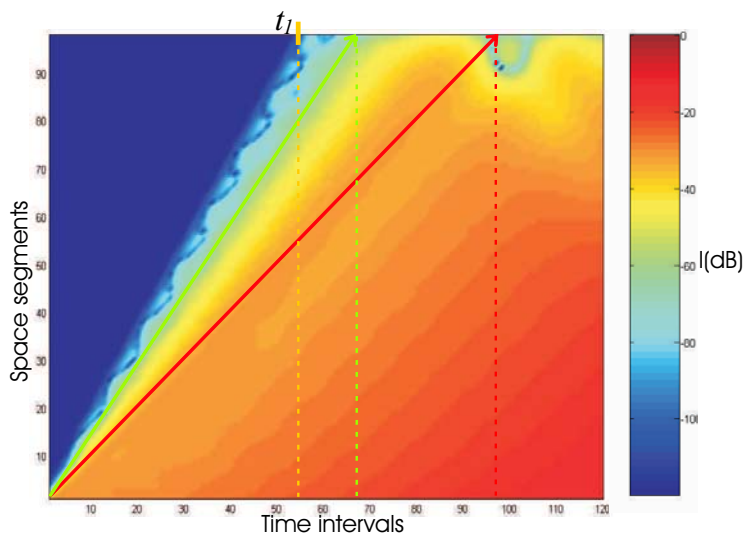


Figura 4.26: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena tipo *zigzag* estrecha (dB).

4.4. Antena tipo árbol *quasi-fractal*: efecto de las uniones

Las antenas con geometría tipo árbol fractal han sido presentadas en la bibliografía tanto para aplicaciones multibanda [119, 120] como para el diseño de antenas en miniatura [27, 125–127]. En realidad se trata de un caso particular de antenas con carga capacitiva en su extremo que, como se puede estudiar en la bibliografía [128], consiguen reducir la frecuencia de resonancia al no forzar un cero de corriente en un extremo final de hilo. Un ejemplo típico de antena con carga capacitiva es la antena de Goubau [15], si bien en este caso la carga capacitiva se consigue con una placa metálica.

En este apartado se estudiará un ejemplo sencillo, bidimensional, denominado árbol *quasi-fractal*, cuyo proceso de formación se puede ver en la figura 4.27.

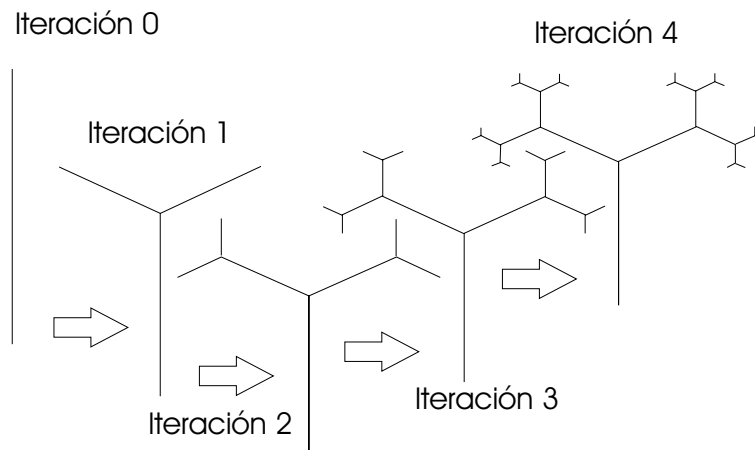


Figura 4.27: Generación del árbol *quasi-fractal*.

Existen dos parámetros fundamentales en la generación del prefRACTAL tipo árbol, que se pueden ver en la figura 4.28: el parámetro de escala s , que relaciona el tamaño de los segmentos en cada nivel del árbol, y el ángulo de formación θ , que determina el ángulo formado entre las dos ramas de un mismo nivel. Si se denomina $l_{n,k}$ a la longitud del segmento de nivel k de la iteración n , se puede escribir:

$$l_{n,k} = \frac{l_{n,k-1}}{s} \quad (4.14)$$

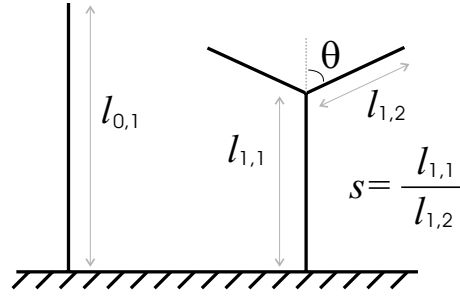


Figura 4.28: Definición de ángulo de formación θ y factor de escala s de la antena árbol *quasi-fractal*.

Asimismo, la distancia total desde el centro del prefractal hasta cada uno de los extremos es idéntica para todas las iteraciones, o lo que es lo mismo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} l_{n,k} = l_{0,1} \quad (4.15)$$

En la bibliografía se presentan algunos de los efectos que resultan de modificar el ángulo y escala de la estructura [127]. Dado que el objetivo de esta Tesis no es la caracterización del árbol en todas sus posibles configuraciones, se ha optado por emplear un valor fijo de ambos parámetros. Concretamente se ha usado un valor de escala $s = 2$, y un ángulo $\theta = \pi/3$.

En la figura 4.29 se puede ver la resistencia de entrada de la antena prefractal tipo árbol de orden 4, calculada con DOTIG5 y con NEC. Se puede comprobar cómo los resultados son casi idénticos para ambos métodos de simulación, resultado que sirve para validar el método utilizado para la simulación de uniones, presentado en el capítulo 2.

Se ha simulado la antena prefractal de distintos órdenes, comprobándose cómo a medida que aumenta el número de iteraciones en su formación disminuye la frecuencia de resonancia obtenida, tal y como se puede ver en la figura 4.30. Al igual que se hizo en el caso de la antena prefractal de Koch, se ha calculado mediante la expresión (4.12) el parámetro de calidad Q de las distintas antenas. En la figura 4.31 se puede ver el resultado obtenido. Es interesante notar cómo nuevamente el aumento del orden del prefractal da lugar a una disminución de la curva del parámetro Q , que parece estancarse conforme aumenta el número de iteraciones. Esto puede ser debido al aumento de las interacciones mutuas entre los distintos hilos en cada unión. También es posible que el aumento de los *shortcuts* debidos a la radiación

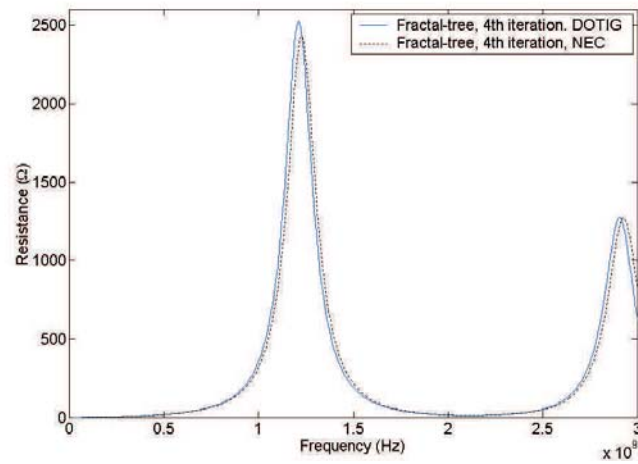


Figura 4.29: Resistencia de entrada de antena prefractal tipo árbol de orden 4 usando los métodos DOTIG5 y NEC.

del segmento de alimentación influya en el comportamiento del prefractal, si bien en este caso el estudio mediante diagramas espacio-temporales no resulta concluyente por la propia configuración de la estructura.

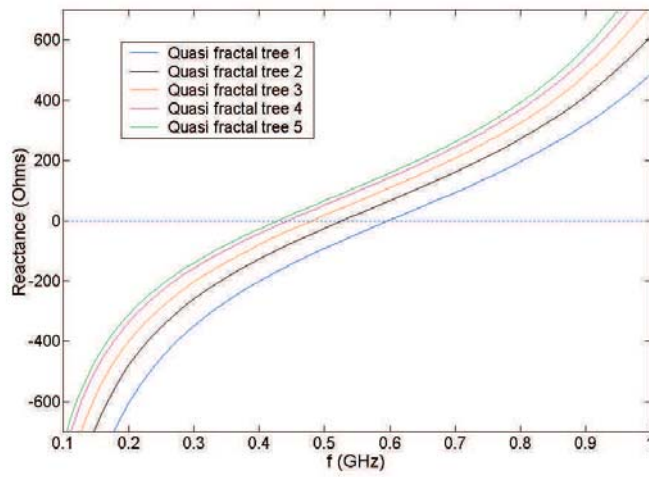


Figura 4.30: Reactancia de entrada de las antenas prefractales tipo árbol de órdenes 1-5.

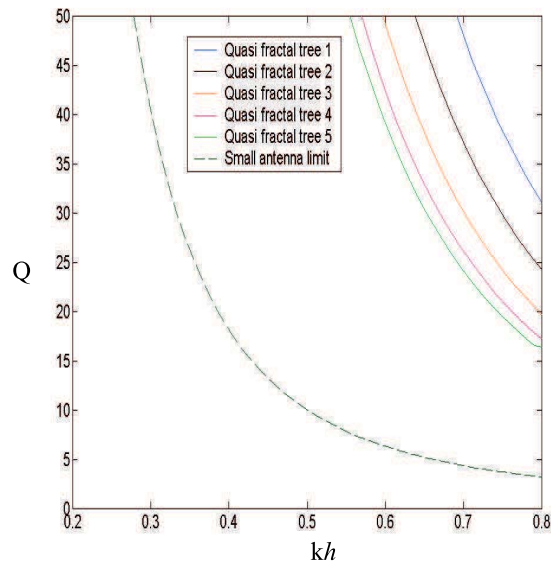


Figura 4.31: Factor de calidad de las antenas prefractales tipo árbol de órdenes 1-5.

4.5. Antena prefractal de Hilbert: orientación de las corrientes en segmentos paralelos

La antena prefractal de Hilbert, basada en el fractal del mismo nombre, ha sido propuesta en la bibliografía [28, 127], de forma reciente, como una antena pequeña que consigue altos niveles de miniaturización. Su principal característica es que rellena el espacio de forma muy densa, tanto más cuanto mayor sea el número de iteraciones realizadas para su formación. Esto es debido a que la dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* del fractal de Hilbert es dos, el máximo valor alcanzable por un fractal contenido en un plano.

En la figura 4.32 se puede ver el proceso de formación del fractal de Hilbert. Se puede comprobar que se parte de una estructura básica que, una vez escalada a la mitad, se cuadruplica y reorienta en cada iteración, utilizando segmentos extra para unir las distintas partes obtenidas.

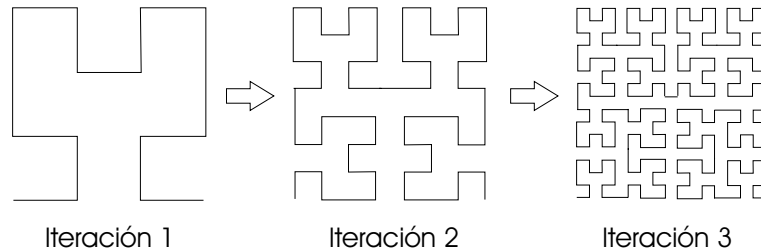


Figura 4.32: Generación mediante función iterativa del fractal de Hilbert.

La función iterativa IFS de generación del fractal de Hilbert se puede escribir de forma matemática, siguiendo la nomenclatura introducida en el apartado 4.3 para las transformaciones afines, como:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right] \\
 w_2 &= \left[-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\
 w_3 &= \left[\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\
 w_4 &= \left[-\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Al igual que se hizo en las antenas prefractales estudiadas previamente, la antena de Hilbert se crea a partir de la estructura resultante de truncar el

proceso de formación del fractal homónimo en un número dado de iteraciones, al que se llama orden de la antena. Para un cierto orden n de la antena, su longitud total de hilo viene dada por:

$$L_n = \frac{4^{n+1} - 1}{2^{n+1} - 1} l \quad (4.17)$$

siendo l el lado del cuadrado en el que se inscribe el prefractal. Es fácil comprobar que la longitud de hilo aproximadamente se duplica cuando se incrementa el orden del prefractal.

Cabe destacar que aunque en [28] se demostró que la antena prefractal de Hilbert consigue un alto nivel de miniaturización, posteriormente se ha constatado [31, 32] que su eficiencia disminuye de forma considerable con el aumento del orden del prefractal, principalmente debido a que lo hace su resistencia de radiación, a la vez que aumenta su resistencia de pérdidas óhmicas. También se ha demostrado [31] que ciertas antenas con forma espiral consiguen mejorar tanto la eficiencia como el nivel de miniaturización de la antena prefractal de Hilbert. En este apartado se presentarán las características fundamentales de la antena prefractal de Hilbert, y se tratará de relacionar su forma geométrica con sus parámetros de radiación.

4.5.1. Características de la antena prefractal de Hilbert

En trabajos previos sobre la antena prefractal de Hilbert se han usado distintas orientaciones para una misma estructura básica, algunas de las cuales se pueden ver en la figura 4.33 para la segunda iteración del prefractal. Tres de ellas (horizontal, vertical y rotada) son bastante parecidas entre sí, pues duplican la estructura del prefractal al hacer la imagen especular respecto al plano de tierra, y su única diferencia estriba en su orientación respecto al mismo. En cuanto a la otra disposición geométrica, denominada configuración original, es la que hace un mayor aprovechamiento del espacio, puesto que respeta la estructura original del prefractal.

De cualquier forma, la mayor parte de los fenómenos limitantes de la estructura no dependen tanto de la orientación de la estructura prefractal respecto al plano de tierra como de la orientación relativa de sus segmentos entre sí, por lo que las variaciones en la geometría no suponen sino un mayor o menor tamaño eléctrico de la antena en su resonancia al que no se le prestará demasiada atención en este estudio. Se refiere al lector al trabajo [129], en el que se encuentran detalles sobre el uso práctico de la antena prefractal de Hilbert.

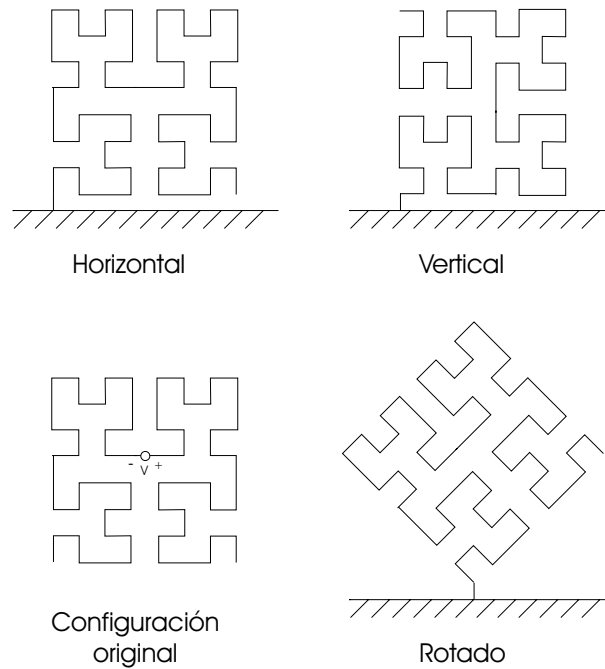


Figura 4.33: Distintas configuraciones de la antena basada en el prefractal de Hilbert.

Por tanto, en esta Tesis se ha elegido de forma arbitraria cualquiera de las geometrías de la figura 4.33, que será en cada caso mencionada.

Para el primer estudio efectuado sobre la antena prefractal de Hilbert se ha elegido la estructura denominada 'antena de Hilbert original'. Para acelerar el proceso computacional se ha hecho uso de la simetría existente en el fractal convirtiendo el plano de simetría de la estructura en un plano de tierra conductora efectiva perfecta, tal y como se puede ver en la figura 4.34. En la figura 4.35 se puede ver una comparación entre la impedancia de entrada de las antenas $H1$ y $H2$ ⁷, utilizando para ello los métodos numéricos DOTIG5 y NEC. Se ha supuesto un radio de los hilos $r = 0,1$ mm y una anchura del prefractal $l = 7$ cm, y en el caso de DOTIG5 se han excitado con un pulso gaussiano de frecuencia máxima adecuada para permitir la obtención de las primeras resonancias. Se puede comprobar que se trata, ya para la segunda iteración, de una estructura altamente resonante, lo que dificulta la localización de su frecuencia de resonancia en el dominio de la frecuencia.

⁷En adelante se denominará, por simplicidad, Hn al prefractal de Hilbert de orden n .

De hecho, al simular la antena $H3$ se observa cómo a la frecuencia de resonancia (calculada a partir de los datos en el dominio del tiempo extendidos mediante las herramientas de localización de polos Prony y Pencil [124] como 211.7 MHz) la resistencia de entrada es casi nula, haciéndose la estructura demasiado resonante para su uso práctico (ver figura 4.36). En concreto se ha obtenido usando el código NEC un valor de resistencia de entrada de $0,495 \Omega$, a una frecuencia de resonancia de 211.63 MHz. En la tabla 4.5 se pueden ver algunos de los parámetros correspondientes a las tres primeras iteraciones del prefractal de Hilbert original. Es importante notar cómo la reducción de la frecuencia de resonancia obtenida con cada iteración, aun siendo grande, dista mucho de la que se conseguiría con un hilo recto de igual longitud, al igual que sucedía en el prefractal de Koch.

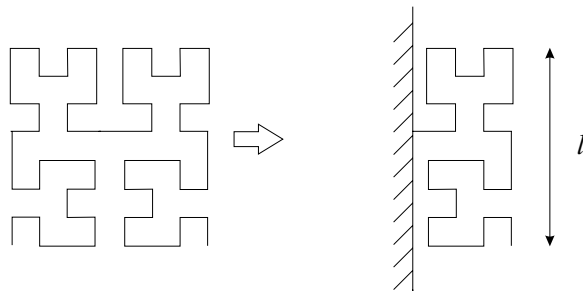


Figura 4.34: Aprovechamiento de la simetría del prefractal de Hilbert para su simulación computacional.

Antena	f_0 (MHz)	η (%)	L_h (cm)	L_e (cm)	L_e/L_h
$H1$	476	73.9	37.33	15.13	0.41
$H2$	313	33.3	64.0	23.02	0.36
$H3$	212	25.8	119.46	33.98	0.28

Tabla 4.5: Parámetros de las antenas $H1$, $H2$ y $H3$.

Es evidente que los valores de resistencia de entrada y eficiencia obtenidos para altos órdenes del prefractal hacen a la estructura inapropiada como elemento radiante, si bien sí podría ser interesante como resonador [1]. Además, aunque consigue una importante reducción en su frecuencia de resonancia respecto a la que tendría un hilo recto de igual dimensión, se demostrará en la

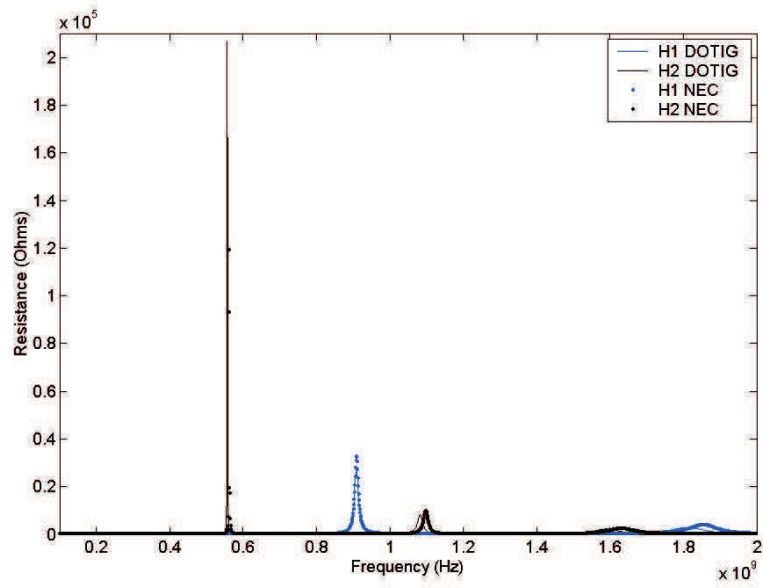


Figura 4.35: Comparación de la impedancia de entrada en las antenas $H1$ y $H2$, obtenidos con NEC y DOTIG5.

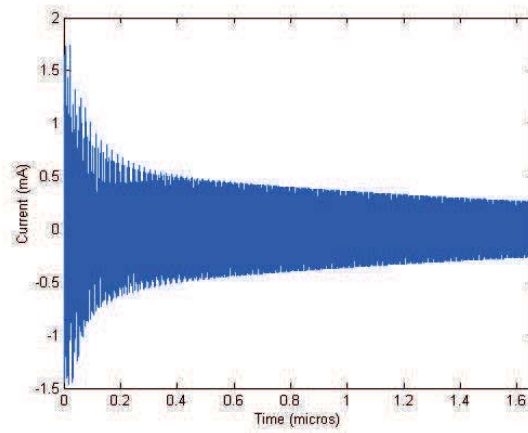


Figura 4.36: Corriente en el segmento de alimentación en la antena $H3$.

siguiente sección cómo otras estructuras más sencillas, basadas en geometrías de tipo euclídeo, consiguen mejorar también su capacidad de miniaturización.

4.5.2. Efecto de la orientación de las corrientes en segmentos paralelos

Como se ha comprobado en la sección anterior, y al igual que sucedía en los prefractales estudiados en apartados previos, al aumentar el número de iteraciones de la antena prefractal de Hilbert la relación entre sus longitudes efectiva y de hilo disminuye, dando lugar a una saturación en la reducción de frecuencia de resonancia alcanzable mediante un aumento del número de iteraciones.

En este apartado se han realizado algunos experimentos que demuestran que no sólo los *shortcuts* estudiados en el apartado 4.3 afectan a la frecuencia de resonancia de una determinada antena, sino también la orientación relativa de las corrientes en segmentos paralelos cercanos entre sí.

Fue Fenwick [14] quien, en 1965, observó que una forma de conseguir disminución significativa de la frecuencia de resonancia es orientar los hilos de forma que el sentido de la corriente en segmentos paralelos cercanos sea el mismo, de forma que se produzca una inductancia mutua positiva entre los hilos adyacentes. Si se estudia la orientación de los hilos en la antena prefractal de Hilbert (ver figura 4.37), se comprueba cómo las corrientes en segmentos paralelos cercanos tienen sentido inverso. Se denominará en adelante a estos segmentos *antiparalelos*, mientras que a aquellos cuyas corrientes tengan el mismo sentido se les denominará *paralelos*.

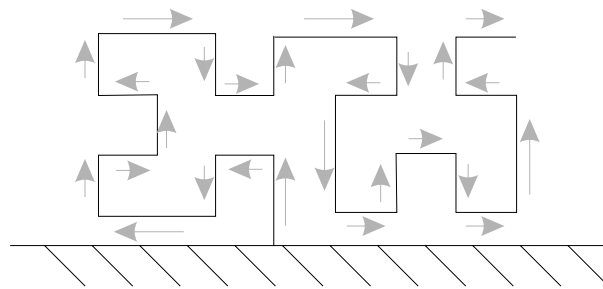


Figura 4.37: Orientación de la corriente en la antena prefractal de Hilbert.

En consecuencia, se puede pensar que una geometría tal que la orientación de sus hilos sea adecuada puede conseguir una mejor miniaturización que la

antena de Hilbert. Para corroborarlo, se han seleccionado las tres antenas de igual tamaño, longitud de hilo y similares características geométricas, que se muestran en la figura 4.38. Una de ellas es la antenna prefractal de Hilbert de orden dos, en su configuración rotada. En cuanto a las otras dos, se trata de dos variantes de antenna espiral, diseñadas de forma que las corrientes en sus ramas cercanas sean *paralelas* en la antenna espiral y *antiparalelas* en la espiral-*meander*. Además, ambas estructuras tienen características geométricas muy similares que hacen suponer que no existirá mucha variación en los *shortcuts* producidos en ambas. La anchura entre líneas paralelas es de 0.5 cm, y el lado del cuadrado en el que están inscritas las estructuras es de 15.7 cm, elegido para validar los resultados obtenidos con los de [28]; se ha añadido un segmento de 0.5 cm de alimentación, lo que determina una altura de las antenas $h=22.7$ cm. El radio de los hilos utilizados fue 0.5 mm.

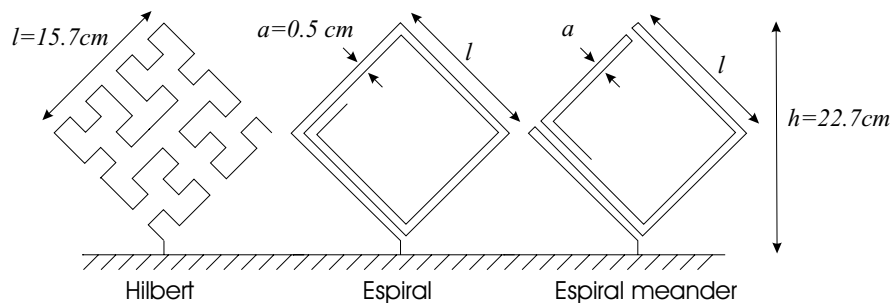


Figura 4.38: Antenas tipo espiral y espiral-*meander* para el estudio del efecto de las corrientes *paralelas* y *antiparalelas*.

En la tabla 4.6 se muestran los resultados obtenidos para las tres antenas de la figura 4.38. Se puede comprobar cómo la antena que tiene un mayor número de segmentos con orientación *paralela* es la que consigue una mayor miniaturización, es decir, una longitud efectiva mayor, de hecho casi igual a su longitud física. Sin embargo, esta reducción en la frecuencia de resonancia lleva acarreada una disminución en la resistencia de radiación que, inevitablemente, da lugar a una disminución de la eficiencia de radiación.

Es difícil juzgar el papel que los *shortcuts* pueden tener en esta diferencia existente entre las tres antenas. Como se puede comprobar en las figuras 4.39 y 4.40, en las que se representa el diagrama espacio-temporal de las corrientes en las dos antenas de tipo espiral excitadas con un pulso gaussiano de *baja frecuencia*, el tiempo de llegada de la corriente al extremo del hilo

Antena	f_0 (MHz)	R_{in} (Ω)	η (%)	L_h (cm)	L_e (cm)	L_e/L_h
<i>Hilbert</i>	89.54	3.57	79.31	141.80	80.45	0.567
<i>Espiral</i>	50.97	2.22	35.24	141.80	141.33	0.997
<i>Esp. meander</i>	96.22	3.84	72.16	141.80	74.86	0.528

Tabla 4.6: Parámetros de las antenas tipo de Hilbert, espiral y espiral-*meander*.

en las antenas espiral y espiral *meander* es muy similar, al igual que sucedía en la comparación entre las figuras 4.23, 4.24, 4.25 y 4.26. También es muy parecida la amplitud de los *shortcuts* producidos, si bien se ha comprobado que el sentido de la corriente acoplada varía dependiendo de la orientación del hilo, lo que sí podría ser una causa de la diferencia de comportamiento existente entre ambas antenas.

En vista de los datos presentados en la tabla 4.6 se puede decir que, para conseguir una buena miniaturización de las antenas, no es necesario únicamente reducir en lo posible el efecto de los *shortcuts*, sino también evitar la interacción de tramos con corrientes *antiparalelas*.

Este fenómeno se puede explicar mediante el uso de la teoría de líneas de transmisión: dos líneas paralelas cercanas con corrientes en sentido contrario forman una línea de transmisión, que no radia energía. De este modo, una estructura que tiene una gran cantidad de hilos orientados de forma *antiparalela* dará lugar a una escasa miniaturización, dado que dichos tramos de la antena se comportarán en la práctica como líneas de transmisión y no colaborarán en la longitud efectiva de radiación de la antena. Este fenómeno es tanto más notable cuanto más cercanos estén entre sí los hilos con corrientes *antiparalelas*.

Es interesante notar cómo, incluso en estructuras en las que se ha determinado el efecto limitante de los *shortcuts*, como por ejemplo las antenas presentadas en la figura 4.22, la frecuencia de resonancia obtenida también está relacionada con la distancia existente entre tramos con corrientes *antiparalelas*. De hecho, las antenas *meander* estrecha y zigzag ancha (ver figura 4.22), que tienen una frecuencia de resonancia casi idéntica y similares características de radiación, tienen la misma distancia media entre corrientes *antiparalelas*, una vez descompuesta la corriente en la antena tipo zigzag como la suma de dos componentes, una paralela al plano de masa y otra perpendicular al mismo, tal y como se muestra en la figura 4.41.

Una vez conocido el efecto que tienen las corrientes *paralelas* y *antiparale-*

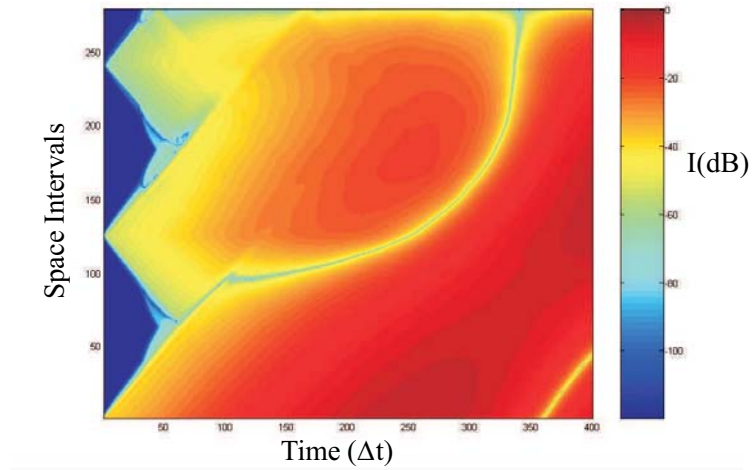


Figura 4.39: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena espiral en escala logarítmica.

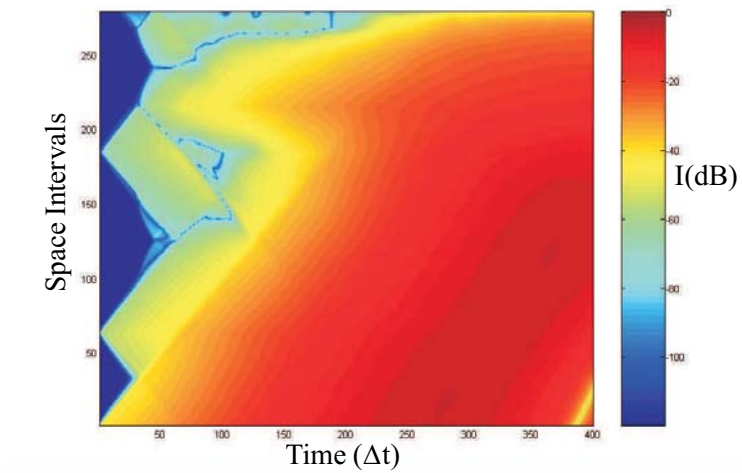


Figura 4.40: Diagrama espacio-temporal de la corriente en la antena espiral-meander en escala logarítmica.

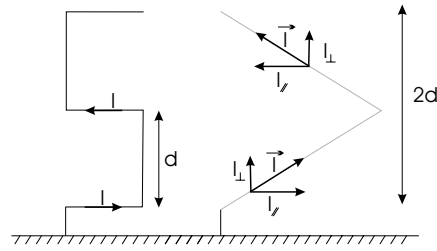


Figura 4.41: Descomposición de las corrientes en las antenas zigzag y *meander*.

las, éste puede ser usado para optimizar el diseño de antenas con alto grado de miniaturización. Como ejemplo, supóngase la estructura prefractal de Hilbert de la figura 4.42a, con una anchura del prefractal de $l = 7$ cm, y un radio $r = 0,1$ mm. En la figura 4.42b y c se muestran dos antenas de similares características, 4.42b la espiral y 4.42c la espiral bífida. En todas ellas se ha mantenido la distancia entre tramos paralelos o antiparalelos, el radio, el tamaño de la antena y la longitud total de hilo.

En la tabla 4.7 se muestra la frecuencia de resonancia, resistencia de entrada y eficiencia de cada una de las antenas, calculadas mediante el código NEC, comprobando cómo nuevamente es la antena tipo espiral la que consigue una mayor miniaturización de la antena, a costa de una reducción en la resistencia de entrada así como la eficiencia. Se han incluido en la tabla 4.7 los parámetros de la antena mostrada en la figura 4.43, resultante de eliminar tramos de la antena espiral hasta hacerla resonar a aproximadamente la misma frecuencia que la antena prefractal de Hilbert, tal y como se propone en [30], con lo que este nuevo modelo mejora la eficiencia de la antena prefractal al disminuir la resistencia de pérdidas.

Antena	f_0 (MHz)	R_{rad} (Ω)	R_{in} (Ω)	η (%)
<i>Hilbert</i>	351.12	0.87	1.14	75.11
<i>Espiral</i>	266.5	0.538	0.77	67.56
<i>Espiral reducida</i>	348.78	0.88	1.07	82.45
<i>Espiral bífida</i>	366.05	1.15	1.375	83.75

Tabla 4.7: Parámetros de las antenas tipo de Hilbert, espiral, espiral reducida y espiral bífida.

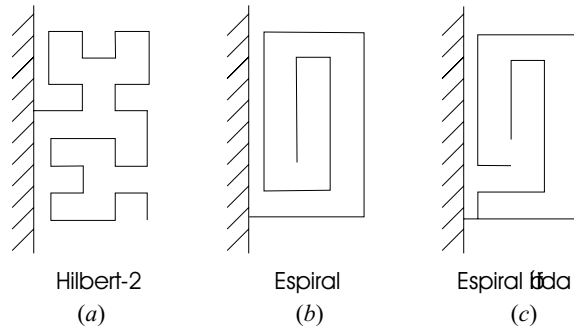


Figura 4.42: Geometría de las antenas *a*: *H2*, *b*: espiral y *c*: espiral bífida.

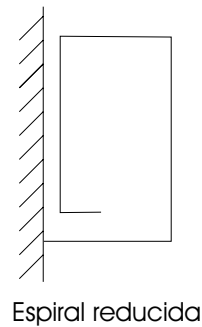


Figura 4.43: Geometría de antena espiral y antena espiral bífida.

Es interesante observar cómo la antena '*bífida*' no consigue una reducción tan importante de la frecuencia de resonancia pese a que su geometría es *paralela* casi en su totalidad, lo que se puede achacar al hecho de que en la unión la corriente en el hilo se divide entre las dos ramas, lo que provoca que la interacción entre segmentos paralelos sea menor que en el caso de la antena espiral. A cambio, consigue una mayor resistencia de entrada, así como una mejora en la eficiencia respecto a las otras dos antenas.

En la figura 4.44 se muestra una comparación entre los diagramas espacio-temporales de las antenas de Hilbert y espiral reducida, ambas con idéntica frecuencia de resonancia. Se observa que, en el extremo del hilo, la corriente inducida en la antena de Hilbert es en todo momento positiva (ver figura 4.44c), mientras que en la antena espiral es negativa en los primeros instantes (ver figura 4.44d), lo que puede motivar un retardo en el tiempo de llegada de los pulsos al extremo del hilo, reduciendo así la frecuencia de resonancia.

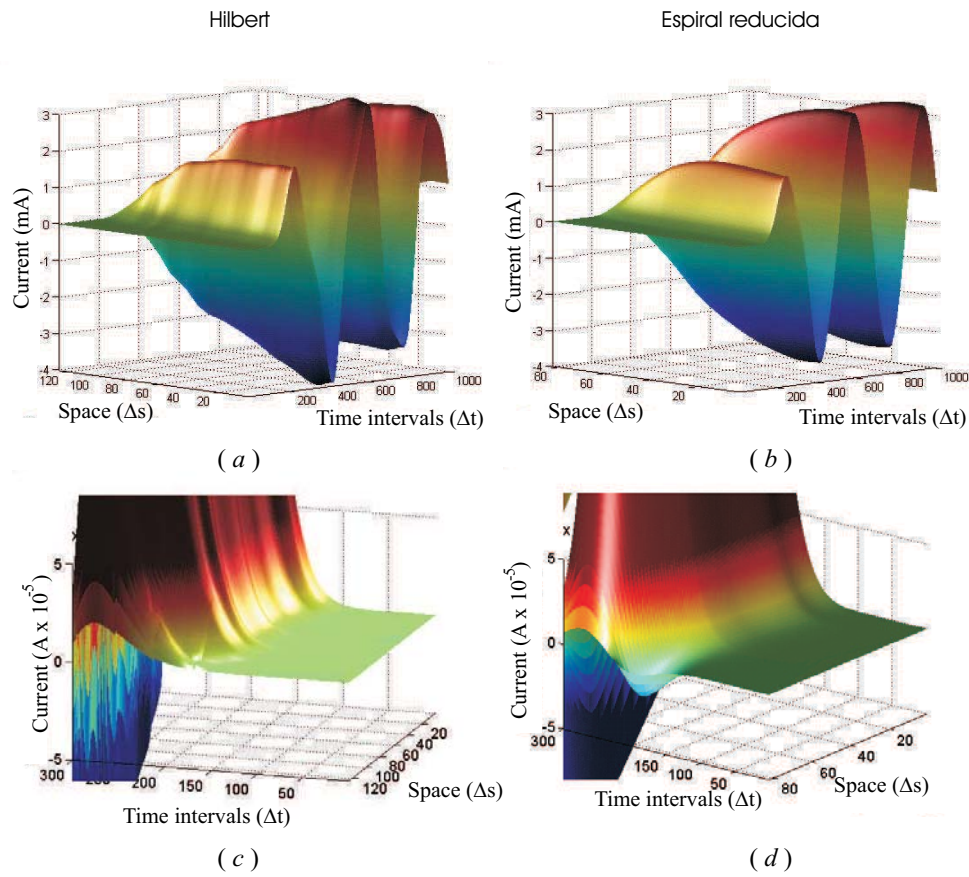


Figura 4.44: Comparación entre los diagramas espacio-temporales de la antena prefractal de Hilbert (*a* y *c*) y la antena espiral reducida (*b* y *d*). Las figuras *c* y *d* son una ampliación de las *a* y *b*, respectivamente.

4.6. Comparación entre las antenas prefractales contenidas en un plano

Para concluir el estudio de las antenas prefractales contenidas en un plano, típicamente conocidas como *bidimensionales*⁸, se han comparado los tres tipos de antenas estudiados en los apartados anteriores. Para ello se han escalado todas las antenas de forma que el radio de la esfera más pequeña que las encierra sea en todos los casos igual a 1 metro.

En la figura 4.45 se presenta la frecuencia de resonancia correspondiente a las primeras iteraciones de las antenas prefractales en función de su longitud de hilo, donde se ha considerado la suma de las longitudes de la estructura original y su imagen. Se observa que la tendencia en todos los casos es similar: el aumento de longitud de hilo da lugar a una reducción de la frecuencia de resonancia, si bien la curva parece tender a un valor asintótico. Además, conforme mayor es la dimensión fractal de las antenas, menor es la frecuencia de resonancia obtenida para una misma longitud de hilo. Esta conclusión, ya presentada en [26], no puede generalizarse a cualquier tipo de estructura prefractal. En los informes del proyecto europeo *Fractalcoms* [1] se demuestra que la dimensión fractal no es un factor determinante en la capacidad de miniaturización de las antenas prefractales.

De todas formas, sí es interesante notar que en las antenas comparadas existe una relación entre longitud de hilo y frecuencia de resonancia, lo que conlleva un compromiso entre frecuencia de resonancia y eficiencia de las antenas, dado que la resistencia de pérdidas óhmicas en la antena está directamente relacionada con su longitud.

En la figura 4.46 se puede ver la resistencia de radiación de las mismas antenas en función también de su longitud de hilo. Nuevamente existe una tendencia común, que determina una reducción de la resistencia de radiación conforme aumenta el número de iteraciones de cada uno de los prefractales, y con él la longitud de hilo. Este fenómeno implica también una reducción en la eficiencia de radiación de las antenas.

Comparando las figuras 4.45 y 4.46 se puede observar que la reducción de la frecuencia de resonancia lleva acarreada de forma implícita una reducción en la resistencia de radiación de las antenas. Por tanto, el diseño de antenas pequeñas, tal y como indican los límites teóricos [3, 4], requiere del compromiso entre todos los factores implicados.

⁸Notar que la bidimensionalidad tiene aquí un sentido euclídeo, puesto que los fractales tienen en general dimensión no entera, como se ha estudiado en el apartado 4.2.

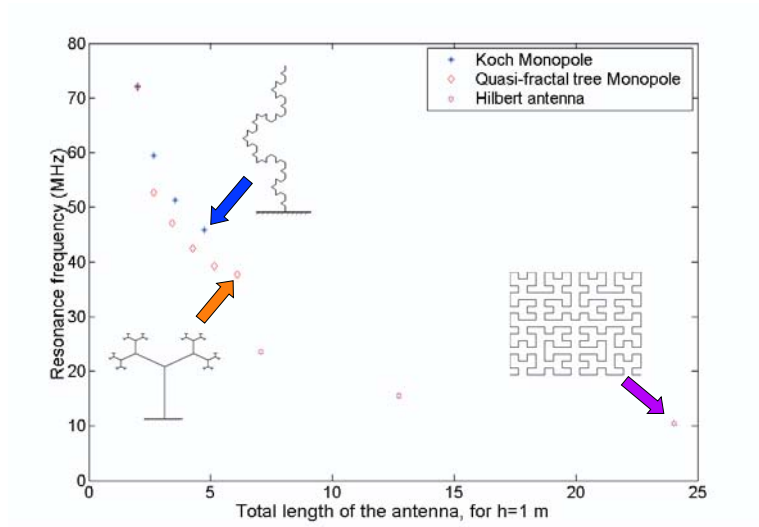


Figura 4.45: Frecuencia de resonancia en función de la longitud de hilo en antenas prefractales de Koch, Árbol y Hilbert.

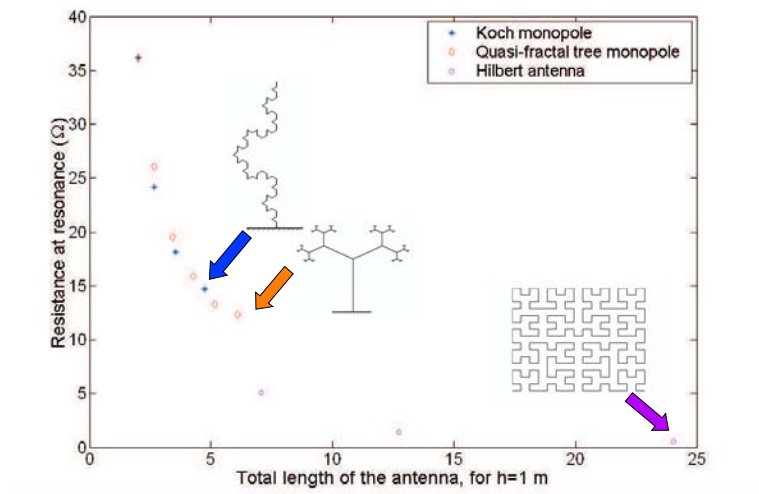


Figura 4.46: Resistencia de entrada en función de la longitud de hilo en antenas prefractales de Koch, árbol y Hilbert.

4.7. Antenas prefractales no contenidas en un plano

De acuerdo con la sugerencia de Hansen [9] de hacer un mejor aprovechamiento del espacio, se podría pensar que el uso de geometrías fractales de dimensión mayor que dos, o lo que es lo mismo, no contenidas en un plano, puede dar lugar a antenas que se aproximen más a los límites de antena pequeña, al ser capaces de aprovechar una mayor parte del volumen esférico de radio h .

En este apartado se estudian dos antenas que han sido ya estudiadas en la bibliografía: la antena tipo árbol fractal tridimensional⁹ y la antena de Hilbert tridimensional.

Como se comprobará, mientras que la antena tipo árbol sí consigue una cierta mejora respecto a los resultados obtenidos por las antenas prefractales contenidas en un plano, la antena prefractal de Hilbert 3D es una estructura altamente resonante de poca o nula utilidad como elemento radiante. Se concluye que es principalmente la topología de la antena la que juega un papel primordial en su comportamiento como antena pequeña, y no la capacidad de la antena de rellenar el espacio de forma muy densa, al igual que sucedía en el caso de las antenas contenidas en un plano. Esto evidencia que la introducción de una mayor longitud de hilo en la esfera que circunscribe a la antena no es la mejor solución para conseguir mejores antenas pequeñas.

4.7.1. Antena tipo árbol fractal tridimensional

El proceso de formación del árbol fractal tridimensional es muy similar al presentado para el caso del árbol bidimensional, aunque en este caso cada rama de nivel n , o rama madre, da lugar a m nuevas ramas de nivel $n-1$, o hijas, en cada iteración, cuya dirección depende de la de la rama madre. Para ello, se genera un sistema de coordenadas cuyo eje z' tiene la dirección y sentido de la rama madre, a partir del cual las ramas hijas se distribuyen con ángulos $\varphi' = \frac{2\pi}{m}$ y $\theta' = \theta_0$, siendo θ_0 , m y el factor de escala s los parámetros que definen el fractal. Se ha forzado a que una de las ramas hijas tenga igual ángulo φ que la rama madre, con lo cual la estructura queda determinada de forma unívoca.

⁹Denominada así en la bibliografía, si bien su dimensión de *Hausdorff-Besicovitch* no es tres de acuerdo a la definición de dimensión fractal presentada en la sección 4.2.

En este trabajo se ha utilizado un ejemplo de estructura tipo árbol prefractal tridimensional, con $\theta_0 = 60^\circ$, $m = 4$ y $s = 1/2$. El radio de la esfera que circunscribe la antena monopolo y su imagen es $h = 10$ cm. En la figura 4.47 se pueden ver las primeras iteraciones en la formación del fractal.

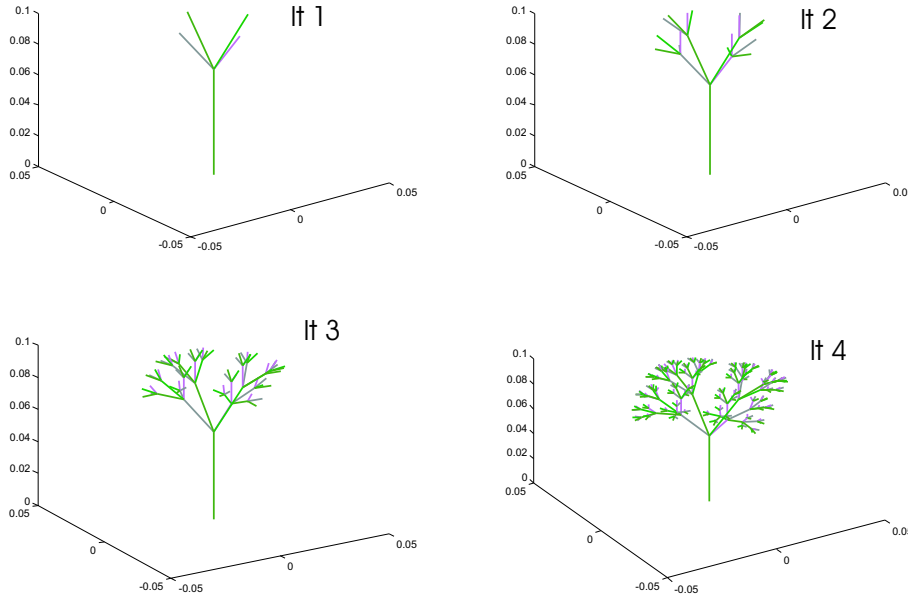


Figura 4.47: Geometría de la antena tipo árbol 'tridimensional'.

Se han simulado en el dominio del tiempo las primeras iteraciones de la antena monopolo prefractal basada en este árbol prefractal. Sin más que observar las tres figuras mostradas en 4.48, correspondientes a las corrientes en el segmento de alimentación de las tres primeras iteraciones de la antena tipo árbol cuando se alimenta con un pulso gaussiano de frecuencia máxima 3 GHz, se comprueba que su comportamiento es muy similar al obtenido para el caso bidimensional, esto es, frecuencia de resonancia y resistencia de entrada disminuyen simultáneamente en cada iteración.

Para poder comparar los resultados obtenidos con los mostrados en las figuras 4.45 y 4.46 para antenas contenidas en un plano, se ha escalado la antena tipo árbol tridimensional de forma que el radio de la esfera que la circunscribe sea también de $h = 1$ m. Los valores obtenidos, que se pueden ver en la tabla 4.8, demuestran que la resistencia de entrada, en todo caso, es mayor a las obtenidas en el resto de las antenas prefractales representadas en la figura 4.46, si bien el nivel de miniaturización no parece ser tan alto

como en ellas. Al igual que en las figuras 4.45 y 4.46, la longitud total de hilo L_h considera también la imagen debida al plano de tierra.

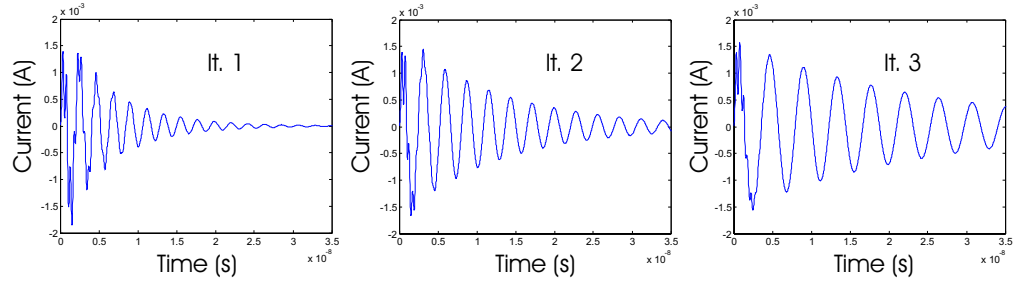


Figura 4.48: Corriente en los segmentos de alimentación de las tres primeras iteraciones de la antena monopolo tipo árbol 'tridimensional' de altura $h = 10$ cm y excitada con un pulso gaussiano de $f_{max} = 3$ GHz.

Antena	f_0 (MHz)	R_{rad} (Ω)	L_h (cm)
3D-Tree 1	49.9	25.13	4.1
3D-Tree 2	40.3	18.35	8.2
3D-Tree 3	34.6	14.74	16.3

Tabla 4.8: Frecuencia de resonancia y resistencia de entrada de las primeras iteraciones de la antena prefractal tipo árbol tridimensional con $h = 1$ m.

4.7.2. Antena de Hilbert tridimensional

Al igual que para el árbol tridimensional, se han simulado las primeras iteraciones de la antena prefractal de Hilbert-3D en el dominio del tiempo, comprobando cómo se trata de una antena aún más ineficiente que su contraparte bidimensional. En la figura 4.49 se puede ver la definición de la geometría, en sus dos primeras iteraciones, en la que se comprueba nuevamente cómo la orientación de las corrientes en segmentos paralelos cercanos es en su mayor parte *antiparalela*, lo que hace esperar que, al igual que sucedía en la antena bidimensional, no sea una estructura que consiga un buen nivel de miniaturización.

Se ha estudiado el comportamiento de dichas antenas en el dominio del tiempo cuando se excitan con un pulso gaussiano de frecuencia máxima 300

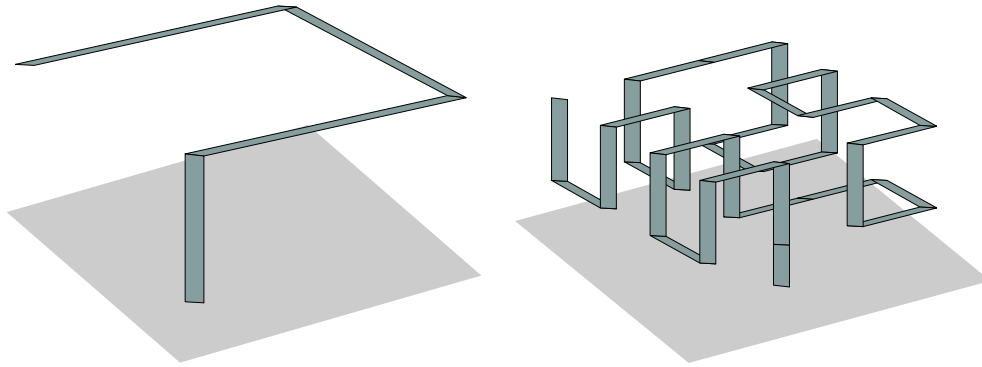


Figura 4.49: Geometría de la antena prefractal de Hilbert 3D en sus dos primeras iteraciones.

MHz, observándose cómo ya para el segundo orden del prefractal la estructura resulta ser demasiado resonante para su uso en la práctica como antena (ver figura 4.50). Aunque se han usado métodos de extracción de polos para calcular su frecuencia de resonancia, el cálculo de su resistencia de entrada en el dominio del tiempo vía FFT da lugar a un coste computacional demasiado elevado debido a la gran cantidad de muestras necesarias para su cálculo preciso. Por ello se ha usado el código comercial NEC, obteniéndose un valor de la resistencia de radiación de $0,14 \Omega$, lo que hace que su uso como antena no sea recomendable.

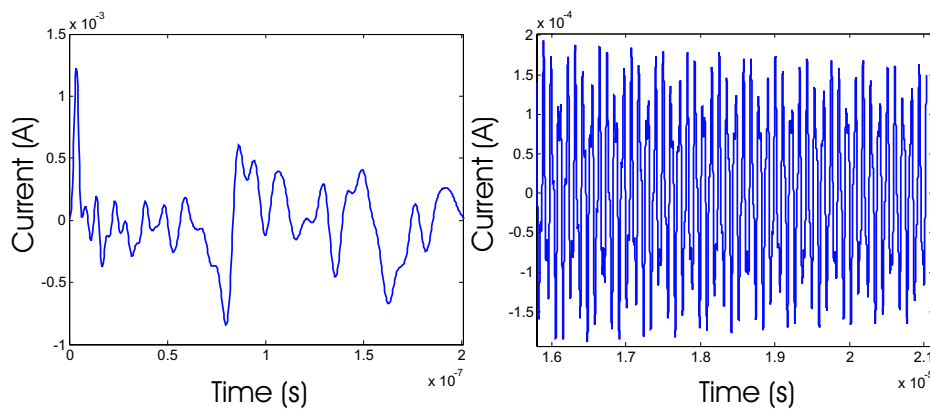


Figura 4.50: Dos intervalos temporales correspondientes a la corriente en el segmento de alimentación de la antena prefractal de Hilbert 3D de orden 2, con $h = 1$ m.

CAPÍTULO 5

Diseño de antenas pequeñas con algoritmos genéticos

5.1. Introducción.

Una de las cuestiones planteadas durante el desarrollo de esta Tesis es si las antenas pequeñas basadas en la geometría fractal mejoran las características de otras antenas pequeñas de geometría euclídea. En el capítulo anterior se han analizado varias antenas prefractales, observándose distintos efectos que pueden influir en su comportamiento como antenas pequeñas y comprobando que, en general, la complejidad de las geometrías y de los fenómenos físicos involucrados no permite una determinación totalmente precisa de reglas de diseño.

En concreto, se ha comprobado que la frecuencia de resonancia de las antenas prefractales de hilo disminuye conforme aumenta el número de iteraciones (supuesta una misma altura h de la antena), pero también que esta disminución en la frecuencia de resonancia lleva aparejado un empeoramiento de sus características radiantes, concretamente del factor de calidad Q y la eficiencia de radiación η . Además, la frecuencia de resonancia no disminuye al mismo ritmo que aumenta la longitud de hilo, o lo que es lo mismo, la longitud efectiva de la antena no crece al mismo ritmo que su longitud física con cada iteración (ver tabla 4.1).

Se han estudiado también dos de los efectos que parecen limitar el com-

portamiento de las antenas prefractales como antenas pequeñas, y que son los *shortcuts* y el efecto que se ha denominado de corrientes *paralelas* y *antiparalelas*. Se ha comprobado que una elección adecuada de la orientación de los hilos en las estructuras puede dar lugar a la máxima reducción de frecuencia de resonancia con un tamaño mínimo del hilo, pero acarreado una reducción de la eficiencia y el parámetro de calidad Q . Este resultado concuerda con los límites de antenas pequeñas presentados en el capítulo de introducción.

En consecuencia, la miniaturización de antenas requiere un compromiso entre todos los parámetros implicados que presentan efectos incluso contrapuestos, por lo que las técnicas de optimización pueden ser herramientas adecuadas para el diseño de dichas antenas. Entre estas técnicas, la de algoritmos genéticos (GA - *Genetic Algorithms*) [130] ha sido ya utilizada por varios autores con este propósito; por ejemplo Altshuler presenta en [22] una antena de hilo resonante con un ancho de banda máximo para un cierto tamaño de antena, y Choo et al. aplican en [23] una técnica GA multiobjetivo para diseñar antenas pequeñas de hilo teniendo en cuenta ancho de banda y eficiencia.

Las técnicas GA también han sido aplicadas al diseño de antenas prefractales. Por ejemplo en [131, 132] se presenta una antena $K2$ generalizada y optimizada mediante algoritmos genéticos, con tamaño compacto y bajo coeficiente de onda estacionaria (VSWR).

En esta Tesis se ha generalizado el trabajo de [131] para diseñar, usando GA multiobjetivo, tanto antenas prefractales optimizadas, como antenas no prefractales (de tipo zigzag, *meander*, etc.), buscando un conjunto de soluciones óptimas en términos de frecuencia de resonancia, ancho de banda y eficiencia. Como se verá a continuación, se ha demostrado que en general las antenas euclídeas optimizadas presentan un mejor comportamiento que las antenas prefractales. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en [29, 30, 132], si bien en nuestro caso no solamente se tiene en cuenta la frecuencia de resonancia, sino también otros parámetros característicos de las antenas, al poder usar para la optimización un método multiobjetivo.

La primera parte del capítulo está dedicada a proporcionar la terminología y conceptos necesarios para entender la resolución de problemas prácticos de optimización mediante herramientas de computación evolutiva. Concretamente, el apartado siguiente describe de forma breve la aplicación de las técnicas de GA para la resolución de problemas de optimización. En apartados posteriores se realizan distintos diseños de antenas orientados a la comparación entre estructuras prefractales y otras de geometría euclídea.

5.2. Resolución de problemas de optimación mediante algoritmos genéticos.

5.2.1. Introducción

Las técnicas de computación evolutiva proporcionan una optimación basada en algoritmos de aprendizaje automatizado. Su funcionamiento se basa en un conjunto de reglas inspiradas en los mecanismos de evolución de la naturaleza, tales como la transmisión genética y la adaptación a diferentes entornos de los sistemas biológicos.

Las principales diferencias de este tipo de algoritmos frente a los tradicionales de búsqueda de extremos son: el uso simultáneo de un conjunto de posibles soluciones del problema (denominado población); la utilización de unas funciones de adaptación que no requieren de condiciones matemáticas adicionales (por ejemplo, derivabilidad); el empleo de unas reglas de transición probabilística entre las diferentes poblaciones y, por último, la posible codificación de los parámetros a optimar en representaciones numéricas distintas de las originales (binaria, real, de punto fijo, etc.).

La existencia de estas distinciones no supone, sin embargo, que pueda afirmarse con rotundidad que la computación evolutiva supera en todos los casos a las técnicas clásicas de optimación. Así, el teorema NFL [133] afirma que no puede existir ninguna técnica de optimación que sea, en promedio, mejor que otra.

En la actualidad, la computación evolutiva es objeto de una intensa actividad investigadora. Es por ello que resulta difícil establecer una clasificación de los diferentes algoritmos que pueden encontrarse en la literatura. Tomando como referencia a [134, 135], se pueden clasificar las técnicas de computación evolutiva en cuatro grandes grupos: los algoritmos genéticos, la programación evolutiva [136], las estrategias de evolución [137] y la programación genética [138].

Si bien a priori cualquiera de ellas puede emplearse para el diseño de antenas prefractales optimizadas, se ha optado en esta Tesis por los algoritmos genéticos, puesto que se trata de una técnica cuya utilidad para resolver problemas electromagnéticos ha sido demostrada en diferentes trabajos [22, 23, 131, 139–141].

Los algoritmos genéticos se remontan a comienzos de la década de 1970, en los trabajos pioneros de Holland [142, 143]. En ellos, se establecen las bases de la metáfora de GA, considerando cada posible solución de un problema

como un individuo, y cada valor de dicha solución como un cromosoma. De esta forma, propuso que el proceso de optimación se realizase mediante una comparativa del grado de bondad entre una población de individuos, en lugar de optimar el comportamiento de un único individuo. Dicho grado de bondad se mide en función del valor de una cierta función de adaptación, que considere la aproximación de la respuesta del individuo a los objetivos deseados. Finalmente, y en un grado proporcional al valor de la función de adaptación, se van generando progresivamente, mediante el uso de operadores estocásticos, distintas poblaciones a partir de los cromosomas de los individuos de las generaciones anteriores.

De entre las numerosas aportaciones para la mejora del proceso de optimación, se destacan en esta introducción las realizadas por De Jong [144], quien propuso el establecimiento de unas funciones matemáticas denominadas funciones test, para comparar el comportamiento de los diferentes algoritmos que, bajo el patrón común de la metáfora de Holland, iban apareciendo en las distintas publicaciones. También resultan notables los trabajos de Goldberg [145, 146], pues fueron los primeros que aplicaron los algoritmos genéticos a problemas de ingeniería. Por último, se debe mencionar en este breve resumen el trabajo de Schaffer [147], quien propuso el primer algoritmo genético de optimación multiobjetivo (llamado VEGA, de *Vector Evaluated Genetic Algorithm*), esto es, de optimación simultánea de varias funciones de adaptación.

5.2.2. Resolución de problemas de optimación monoobjetivo mediante GA

En este apartado se presentará el algoritmo genético para problemas monoobjetivo (GA). Se trata de un caso particular de algoritmos genéticos en el cual existe únicamente una función de adaptación (también llamada función *fitness*).

El proceso de optimación mediante algoritmos genéticos es de tipo iterativo. Como ya se ha comentado, un conjunto de soluciones prueba va evolucionando, mediante la aplicación de una serie de operadores genéticos, hacia una solución óptima. A continuación se describe el proceso evolutivo, del que se puede ver un diagrama de flujo en la figura 5.1.

1. En primer lugar, el bloque denominado '*Creación de una población inicial*' tiene una doble funcionalidad. Por un lado, escoge de forma implícita la representación numérica en la que se van a codificar cada una

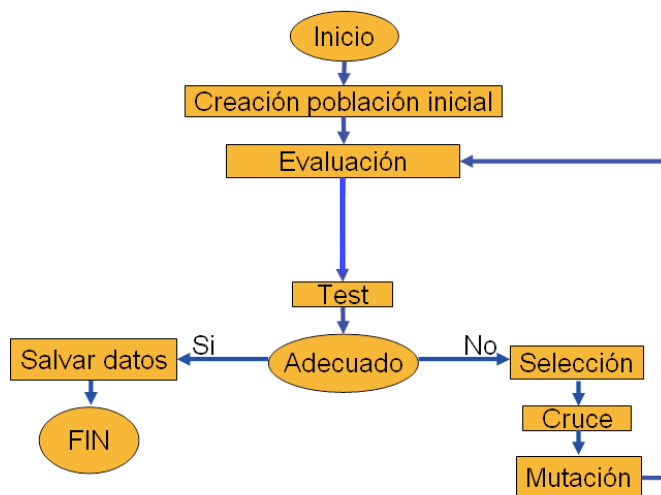


Figura 5.1: Diagrama de flujo del Algoritmo Genético Simple.

de las soluciones del problema o individuos. Las opciones más comunes en este caso son codificación real, codificación binaria y codificación entera de punto fijo [130]. Por otro lado, este bloque también rellena el conjunto de individuos de la población inicial. Dicho conjunto de individuos puede ser generado bien de forma aleatoria o bien mediante la introducción de individuos cuya solución se conozca a priori [130].

Para iniciar el bucle iterativo, se evalúa el grado de adaptación de dichos individuos según una función de adaptación establecida previamente (generalmente acotada entre 0 y 1).

2. A continuación se aplican un conjunto de operadores estocásticos para la generación de una nueva población de soluciones. En primer lugar se hace uso de un operador de selección, que asigna la probabilidad de que un individuo se escoga para el proceso de cruce. Dicha probabilidad es proporcional al valor de la función de adaptación para dicho individuo. Posteriormente, se aplica el operador de cruce, que genera un nuevo individuo a través del intercambio de los cromosomas de otros dos individuos que hayan superado el proceso de selección. Por último, y como parámetro de búsqueda aleatoria, se perturban ligeramente algunos de los cromosomas de algunos de los nuevos individuos generados.

3. En el siguiente paso, se evalúa la nueva población generada, y se decide si interrumpir el proceso de optimación. Dicha interrupción puede darse por varios motivos: por haber encontrado un valor de la función de adaptación previamente establecido como bueno; por haber alcanzado un número de iteraciones prefijado; por obtener poblaciones cuya diversidad genética sea escasa o, por último, por una petición de finalización externa.

Existen numerosas alteraciones posibles sobre esta estructura básica. Una de las más frecuentemente usadas es la introducción de un operador elitista, con objeto de acelerar la convergencia en la obtención de soluciones. Su función es la sustitución del peor individuo de la presente generación por el mejor de la pasada. De esta forma se consigue que la *fitness* del mejor individuo de la población sea una función no decreciente con el número de iteraciones, ya que es posible que debido a los operadores genéticos individuos óptimos desaparezcan de la población. En este sentido, cabe destacar que aunque no se utilice el operador elitista, el proceso de optimación sigue siendo válido, pues aún desapareciendo el mejor individuo de la población en una iteración, el promedio de la función de adaptación de los individuos de la siguiente generación sí aumenta, tal y como afirma el 'teorema de esquemas' [139]. Existen numerosas opciones en los operadores estocásticos que pueden usarse en la práctica y que se describen a continuación¹:

- Operador de selección: *Roulette wheel*. Se trata de un método de selección de individuos de una generación para su reproducción. Se otorga un peso a cada individuo de forma proporcional a su *fitness*, de forma que cada individuo se considera un número de veces proporcional a dicho peso. A continuación se seleccionan los P_n individuos a reproducir de forma aleatoria, por lo que un individuo con alto *fitness* tiene más probabilidad de tener varias copias de sí mismo en la siguiente generación que uno con *fitness* bajo. Esto da lugar a un problema en el caso de que exista un elemento con una *fitness* excepcionalmente superior a los demás. En este caso, esta solución hace casi imposible que en el proceso de selección se elija cualquier otro elemento, con la consecuente pérdida de diversidad genética, y el algoritmo convergería hacia soluciones subóptimas.

Para evitarlo, se usa el método de selección tipo *roulette wheel modificado*: el algoritmo anterior se modifica dando inicialmente a todos

¹Estos operadores permanecen invariables para problemas de optimación multiobjetivo, que son los que se plantean en esta Tesis y que se verán en el apartado siguiente.

los individuos una oportunidad para reproducirse, de forma aleatoria, calculando de esta forma un número de individuos $Q_n \leq P_n$, por lo que posteriormente habrá que seleccionar $P_n - Q_n$ nuevos individuos mediante el método *roulette wheel*.

- Operador de cruce: *single point crossover*. El operador de cruce es un operador estocástico, cuyo funcionamiento es bastante sencillo. Se eligen aleatoriamente dos individuos que hayan sido escogidos en la etapa de selección, y se calcula un número aleatorio x . Si se cumple $x \leq p_c$, siendo p_c la probabilidad de cruce, estos individuos tendrán descendientes y serán sustituidos por estos; en caso contrario permanecerán en la población. Los nuevos individuos se crean intercambiando las cadenas de bits de los progenitores en un punto elegido de forma aleatoria (ver fig. 5.2).

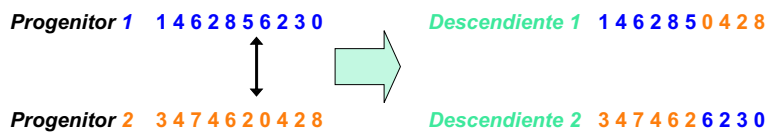


Figura 5.2: Cruce de un punto.

De esta forma se pueden conseguir individuos que combinen las mejores características de sus progenitores. En ciertas ocasiones el cruce dará lugar a individuos peores que sus ascendientes, en cuyo caso la descendencia no sobrevivirá muchas iteraciones.

- Operador mutación. El funcionamiento del operador mutación es muy similar a la mutación biológica. El efecto de la mutación es un pequeño cambio aleatorio en la carga cromosómica de un individuo. Dicha perturbación se realiza conforme a una probabilidad de mutación p_m , y su implementación numérica depende del tipo de codificación usado.

La mutación da lugar a la generación de diversidad en el espacio de soluciones prueba.

5.2.3. Algoritmo genético multiobjetivo

En los problemas de optimación multiobjetivo, se tienen que optimizar simultáneamente dos o más funciones matemáticas. En general, no existe una única solución a este tipo de problemas, sino que lo que se obtiene es un

conjunto de soluciones (el llamado conjunto óptimo de Pareto) que establecen un compromiso adecuado entre los valores de las funciones a optimizar. En la figura 5.3 se muestra un frente de Pareto típico, señalado con la línea discontinua, para el caso de dos funciones de optimización. Cada punto del frente representa el mejor valor la función f_2 que puede ser alcanzado para un valor dado de f_1 .

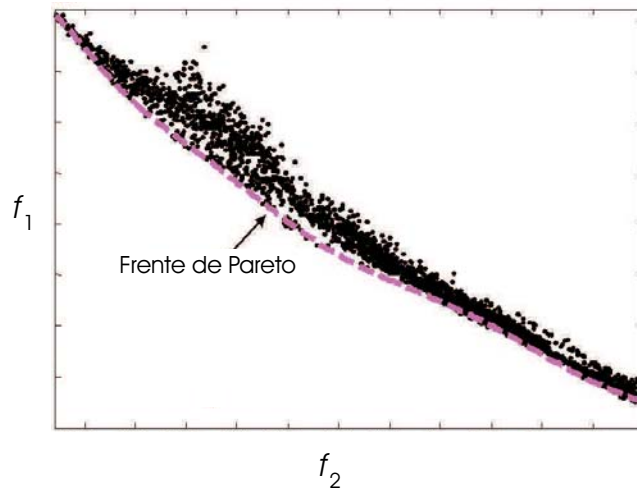


Figura 5.3: Frente de Pareto típico.

Los primeros intentos de resolver este tipo de problemas mediante GA se basaron en el promediado de las funciones de adaptación. Así, a partir de un conjunto de N funciones de adaptación f_i , $i = (1 \dots N)$, y estableciendo un conjunto de valores reales peso w_i , $i = (1 \dots N)$, se define una nueva función denominada *coste* mediante la ecuación:

$$coste = \sum_{i=1}^N w_i f_i \quad (5.1)$$

cuya optimización monoobjetivo ofrece una solución al problema.

El método anterior, que en algunas ocasiones puede considerarse suficiente, posee un serio inconveniente en la práctica. Al existir una única solución del problema lo que se obtiene como resultado es un único punto del conjunto óptimo de Pareto, siendo obviadas el resto de soluciones óptimas en

el momento que se establecen el conjunto de valores peso. Es más, los diferentes rangos de valores que pueden adquirir las funciones de adaptación (que, aunque estén definidas entre 0 y 1, no presentan una distribución uniforme de las soluciones en su intervalo de definición), hace que resulte en la práctica imposible el establecimiento a priori de la zona del frente de Pareto donde se obtendrá la solución del problema, por lo que puede que la solución final no resulte, en alguna de las funciones objetivo, suficientemente satisfactoria.

La alternativa al método anterior la constituye el denominado método de optimación de Pareto mediante algoritmos genéticos (Pareto-GA). Un algoritmo Pareto-GA obtiene como solución final una población con individuos pertenecientes al conjunto óptimo de Pareto. Existen diversos algoritmos de implementación del método de Pareto, entre los que se pueden destacar, por ser los más utilizados, el *Nondominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA) [148], el *Niched-Pareto Genetic Algorithm* (NPGA) [149], el *MultiObjective Genetic Algorithm* (MOGA) [150] y el *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA) [151]. El punto de partida común a todos ellos lo constituye la relación de dominancia entre dos soluciones. Según ella, un individuo A domina a un individuo B si A iguala o mejora los valores de B de las distintas funciones de adaptación (se exige, además, que A mejore estrictamente a B en al menos una de las funciones de adaptación). Teniendo en cuenta esto, se puede definir formalmente un conjunto óptimo de Pareto como aquellas soluciones que no están dominadas por ninguna otra solución. Una definición matemática formal de los conceptos anteriores puede encontrarse en [152].

Una vez encontrado el frente óptimo de Pareto, es posible seleccionar una solución basada en la observación de la forma de dicho frente, estableciendo un compromiso entre los valores de las diferentes funciones de adaptación. Es de destacar que dicho compromiso, al ser realizado a posteriori, resuelve el inconveniente anteriormente descrito del método de la función coste promedio. Por otro lado, también resulta necesario resaltar el hecho de que los métodos de optimación de Pareto son más costosos computacionalmente que los métodos de funciones coste promedio.

En esta Tesis se ha utilizado el NSGA, cuyo diagrama de flujo se puede ver en la figura 5.4. Se puede comprobar que las principales diferencias respecto al GA se encuentra en la aparición de unos operadores intermedios que establecen comparativas entre los diferentes individuos de la población.

El primero de los operadores es un operador clasificador de individuos. En él se establece una división clasista de los mismos. Los individuos de Clase 1 son aquellos que forman el frente de Pareto de la población de la iteración actual, es decir, aquellos que no son dominados por ningún otro individuo de

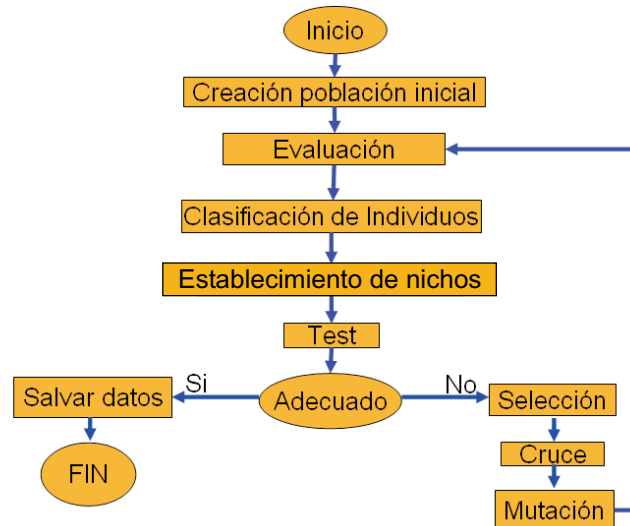


Figura 5.4: Diagrama de flujo del NSGA.

dicha población. Sobre los individuos restantes se vuelven a calcular aquellos que no son dominados por ningún otro de dicho subconjunto, a los que se denomina individuos de Clase 2, y así sucesivamente se va repitiendo el proceso hasta que todos los individuos de la población estén asignados a una clase n -ésima.

El segundo de los operadores que se aplica es un operador de asignación de nichos, que establece una medida cuantitativa de la diversidad en los individuos de la población, mediante la definición de una función matemática de proximidad o función *sharing* [49].

Con respecto a los operadores estocásticos, señalar que el operador selección usado es el método de selección por torneo. Consiste en que, de forma aleatoria, se eligen dos de los individuos; el que pertenezca a una clase menor es seleccionado para su reproducción. En caso de igualdad, se aplica la función *sharing* cuyo objetivo es aumentar la diversidad, de modo que se penaliza a aquel individuo tal que existan en la población más individuos con funciones *fitness* similares. Concretamente se ha utilizado en esta Tesis una función *sharing* triangular, en la que la penalización máxima se produce para el valor de *fitness* del propio individuo, disminuyendo de forma lineal hasta hacerse nula a una cierta distancia del mismo. La selección mediante torneo aplica la elección anterior tantas veces como individuos deba haber en la

siguiente generación, que posteriormente pasarán a mutar y cruzarse como ya se explicó en el caso de la técnica monoobjetivo. El hecho de haber cambiado el operador selección respecto de la optimización monoobjetivo se debe a que el operador de selección *roulette wheel modificado* combinado con los esquemas de clasificación por dominación conduce, para algunos problemas, a procedimientos no convergentes [139].

5.3. Comparación de las antenas prefractales tipo Koch con otras antenas pequeñas de geometría euclídea diseñadas con GA

Un ejemplo típico de antena prefractal bastante documentado en la bibliografía y cuyas características han sido estudiadas en profundidad en el dominio del tiempo en el capítulo 4 es la antena prefractal de Koch [26]. En este apartado se presenta el diseño, mediante el uso de la técnica GA multiobjetivo descrita en el apartado anterior, tanto de antenas prefractales tipo Koch generalizadas, como de otras de tipo zigzag y *meander*, comparándose las características de ambos tipos de diseño. La optimización se ha llevado a cabo en términos de frecuencia de resonancia, ancho de banda y eficiencia. Los resultados presentados en este apartado han sido publicados en [49].

5.3.1. Diseño mediante algoritmos genéticos

Para diseñar las antenas prefractales, se usa una función iterativa IFS a partir de la cual se generan los individuos de la población inicial del algoritmo genético. La figura 5.5 muestra un ejemplo del tipo de antenas que se pueden generar con la IFS usada en este trabajo, que da lugar a un prefractal de Koch generalizado [131]. En dicha figura se muestran los parámetros s_1 , s_2 , s_4 , s_5 , θ_2 y θ_4 , cuya combinación junto con el número de iteraciones define totalmente al prefractal, (figura 5.5a) así como el resultado tras la tercera iteración de la IFS (5.5b).

Los parámetros s_1 , s_2 , s_4 , s_5 , θ_2 y θ_4 , junto con el número de iteraciones, se han codificado como un cromosoma. En lugar de codificación binaria, la más usual en esta técnica, se ha elegido codificación decimal de punto fijo [130] para conseguir una mejor definición del espacio de búsqueda con un coste computacional mínimo.

Todas las antenas deben encajar en un rectángulo dado de dimensiones

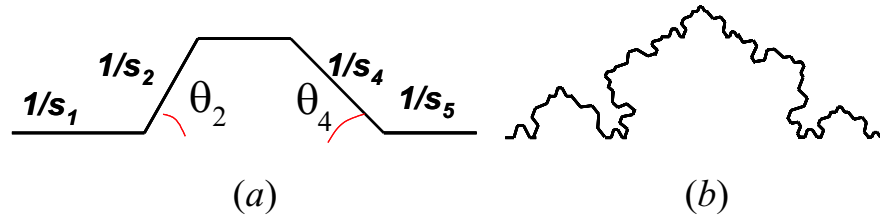


Figura 5.5: Generación mediante GA de una antena prefractal.

hxw , siendo w la anchura de una curva de Koch de altura h , y se debe evitar la existencia de cruces entre hilos. En concreto, se ha de tener especial cuidado con individuos con ángulos mayores que 90° , en los cuales la primera iteración puede ser válida, pero en las sucesivas se pueden producir cruces entre hilos. Por otra parte, es también necesario el cumplimiento de la condición

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_5} + \frac{1}{s_2} \cos(\theta_2) + \frac{1}{s_4} \cos(\theta_4) \leq h \quad (5.2)$$

para evitar los cruces. Por último, por la misma razón, se debe añadir una última condición de contorno, consistente en evitar que la máxima anchura w de la primera iteración del prefractal no sobrepase el tamaño mínimo de los hilos situados en su extremo ($w < \min(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_5})$).

De acuerdo con el proceso presentado en el apartado 5.2, se elige de forma aleatoria un conjunto de antenas monopolo, alimentadas en su base, y cuya impedancia de entrada y frecuencia de resonancia son calculadas con el código NEC [71]. Para medir la calidad de un determinado individuo y permitir al algoritmo evolucionar a la mejor solución, se han definido tres funciones *fitness*:

$$\begin{aligned} F_i^1 &= 1 - L_i \\ F_i^2 &= \frac{BW_i}{\Delta f} \\ F_i^3 &= 1 - \frac{f_{0,i}}{f_0^s} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde L_i es la longitud de hilo correspondiente a la antena i , BW_i es el ancho de banda 2:1 del coeficiente de reflexión de la antena SWR , Δf es el rango de frecuencias de interés, $f_{0,i}$ es la frecuencia de resonancia de la antena i , y f_0^s la frecuencia de resonancia de un monopolo recto de longitud h .

El objetivo del algoritmo es maximizar F^1 y por tanto minimizar las pérdidas óhmicas relacionadas con la longitud; F^2 y en consecuencia conseguir un ancho de banda máximo (mínimo Q); y F^3 para conseguir que para un tamaño dado de la antena su frecuencia de resonancia sea lo menor posible. Así, la maximización simultánea de los tres parámetros de (5.3) contribuye a obtener individuos con un factor Q mínimo junto a una eficiencia máxima, a la menor frecuencia de resonancia posible.

Para evitar la convergencia a individuos irrealizables, se deben introducir límites en la función *fitness* y una penalización [153] a aquellos individuos que, aunque se puedan construir, darían lugar a estructuras de orden superior no permitidas por presentar cruces entre hilos.

Tras aplicar los operadores del algoritmo genético de selección por torneo (*tournament selection*) y mutación con una distribución de probabilidad gaussiana, el algoritmo genético multiobjetivo origina una superficie de soluciones óptimas (frente de Pareto) de la que el diseñador debe elegir el individuo que mejor se adapta a sus requisitos.

En cuanto a las estructuras de geometría euclídea consideradas, en la figura 5.6 se puede ver cómo se han codificado para los algoritmos genéticos los distintos cromosomas que definen las estructuras tipo zigzag y *meander*. Cada una de las antenas está codificada usando codificación decimal de 14 genes. Al igual que en el caso de las antenas prefractales, se restringirán a ocupar un espacio de hxw .

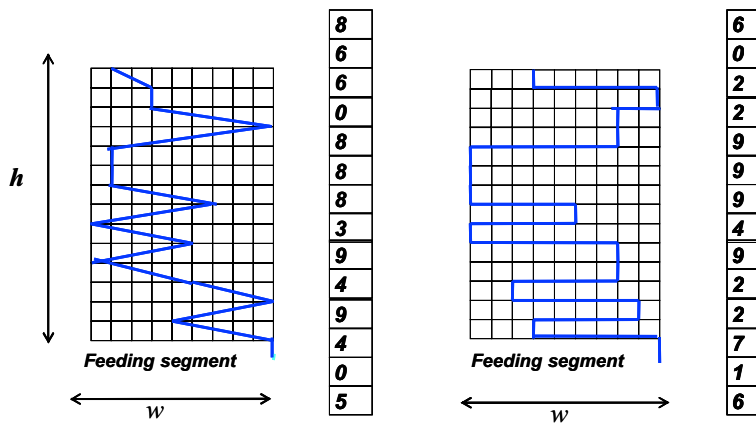


Figura 5.6: Generación mediante GA de antenas zigzag y *meander*.

5.3.2. Resultados

En primer lugar, se han diseñado varias antenas mediante algoritmos genéticos usando únicamente una de las funciones *fitness* de la ecuación (5.3) cada vez. En todos los casos, y para hacer posible la comparación con los resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior, se permite a las antenas tener una altura $h = 6,22$ cm, y anchura $w = 1,73$ cm. Las antenas prefRACTALES pueden ser hasta de segundo orden, y las euclídeas tienen 12 segmentos en el caso de la antena zigzag, y 24 en el caso de la *meander*.

La mejor solución en términos de la mínima longitud ha sido, como cabía esperar, el monopolo recto de longitud 6.22 cm. El mismo monopolo se obtiene como resultado al requerirle al algoritmo GA la obtención de antenas con el máximo ancho de banda. Ambos resultados son lógicos, y suponen un test para validar el código, comprobando cómo se encuentra la misma solución para las tres optimizaciones propuestas, es decir, considerando antenas tipo zigzag, *meander* o prefRACTALES tipo Koch.

Cuando la optimización se realiza en términos de la función *fitness* F^3 , buscando conseguir una frecuencia de resonancia mínima, se obtienen las antenas óptimas que se muestran en la figura 5.7, cuyos parámetros característicos se presentan en la tabla 5.1. Nuevamente el resultado es el esperado, pues en los tres casos se trata de las antenas permitidas con mayor longitud de hilo. Sin embargo, en este caso se puede observar uno de los compromisos que hay que alcanzar al diseñar antenas pequeñas, y que ya se comentó en el capítulo previo: la antena con menor frecuencia de resonancia (*meander*) es la que tiene ancho de banda más estrecho y más pérdidas, mientras que la antena con mayor frecuencia de resonancia (prefRACTAL) es la que tiene mayor ancho de banda y menor longitud total de hilo.

Antena	f_0 (MHz)	BW (MHz)	L_h (cm)
<i>Meander</i>	449.8	164.0	26.97
<i>Zigzag</i>	559.0	222.0	22.01
<i>Tipo Koch</i>	665.5	276.3	15.52

Tabla 5.1: Parámetros de las antenas *meander*, zigzag y tipo Koch optimizadas con función *fitness* F^3 .

Así pues, se trata claramente de un problema que necesita la optimización mediante algoritmos multiobjetivo, para buscar antenas que consigan un compromiso entre los distintos parámetros, y comparar diferentes diseños

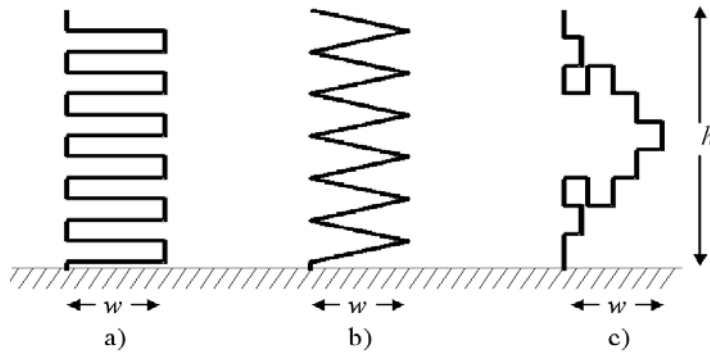


Figura 5.7: Antenas optimizadas GA con *fitness* F^3 .

bajo las mismas condiciones.

La figura 5.8 muestra la frecuencia de resonancia y longitud de las antenas tipo Koch obtenidas al aplicar la técnica multiobjetivo GA, considerando en la optimización las funciones *fitness* F^1 y F^3 . Conforme aumenta el número de iteraciones del algoritmo genético, la envolvente de las distintas soluciones evoluciona hacia un conjunto óptimo, el frente de Pareto, mostrado en la figura con una línea punteada. En la figura 5.9 se puede ver el frente de Pareto de las soluciones obtenidas tanto para las antenas tipo Koch como para las euclídeas. Se dibujan también los parámetros de la primera y segunda iteración del monopolo de Koch como referencia. Se puede ver que las geometrías euclídeas parecen comportarse mejor que los diseños prefractales al conseguir una frecuencia de resonancia menor en casi todas las longitudes de hilo simuladas. Únicamente para valores muy bajos de longitud, en las que no existen suficientes elementos para la comparación, todas las antenas presentan un comportamiento similar. Para longitudes mayores que 10,5 cm, las antenas tipo *meander* parecen ser las antenas eléctricamente más pequeñas, y por tanto la mejor solución. Además, se puede ver en la gráfica que las curvas correspondientes a las antenas tipo prefractal son cada vez peores en comparación con las antenas tipo *meander*, por lo que cabe esperar que este comportamiento se mantenga.

Para comparar el comportamiento de diferentes geometrías que presentan aproximadamente la misma frecuencia de resonancia f_0 , se han seleccionado varios individuos de la figura 5.9 (ver las líneas horizontales que marcan los individuos A-I), cuya geometría puede verse en la figura 5.10. Sus parámetros característicos correspondientes se pueden ver en la tabla 5.2, confirmando

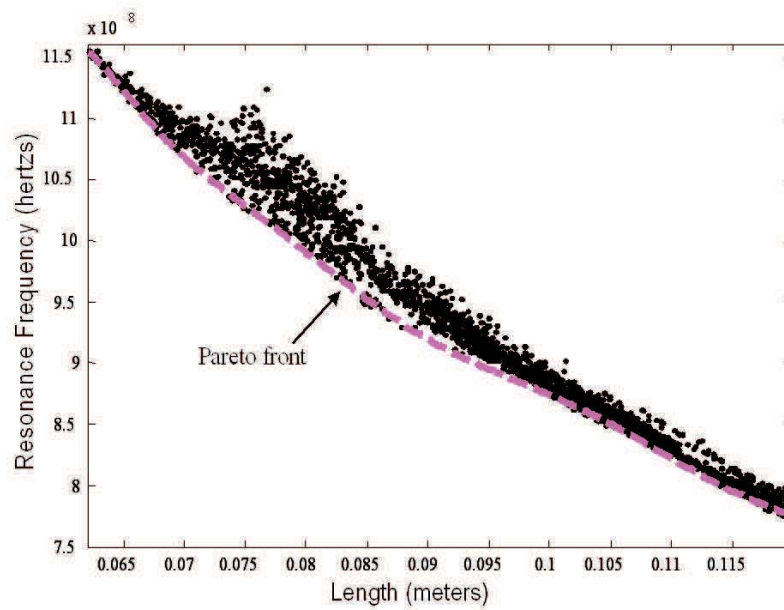


Figura 5.8: Formación del frente de Pareto de las antenas tipo Koch optimizadas mediante GA con funciones *fitness* F^1 y F^3 .

el mejor comportamiento de las antenas euclídeas.

A continuación, se considera la optimización simultánea del ancho de banda y la longitud de las antenas. La figura 5.11 muestra los frentes de Pareto correspondientes a las antenas prefractales de Koch, tipo zigzag y tipo *meander* al optimar los parámetros F^1 y F^2 . Se muestran también para comparar los resultados de las antenas prefractales $K1$ y $K2$. Nuevamente las antenas euclídeas muestran unos resultados mejores que las antenas prefractales pues, para una misma longitud, presentan un mayor ancho de banda. En este caso las antenas tipo zigzag son siempre las que presentan un mejor comportamiento.

Por último, las tres funciones *fitness* definidas en 5.3 son optimizadas al mismo tiempo, dando lugar a frentes de Pareto superficiales, como se muestran en la figura 5.12. Los cuadrados y cruces representan las antenas tipo zigzag y *meander*, respectivamente, mientras que las soluciones de las antenas prefractales se muestran como una superficie continua. De la figura, el diseñador puede elegir las antenas que más se adapten a sus necesidades. En

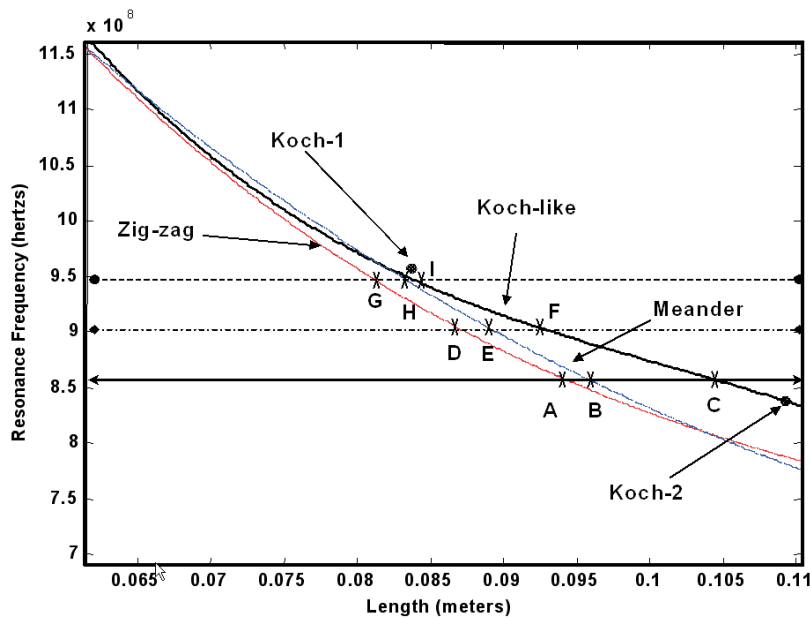


Figura 5.9: Frentes de Pareto de antenas tipo Koch, *meander* y zigzag optimizadas mediante GA términos de las funciones *fitness* F^1 y F^3 .

el caso de este estudio, se han elegido las tres antenas mostradas en la figura 5.13. Todas ellas tienen aproximadamente la misma longitud ($L \approx 10,22$ cm), y un radio de 0.1 mm. Sus frecuencias de resonancia f_0 , factor de calidad Q , ancho de banda BW y eficiencia η , calculados con NEC, se pueden ver en la tabla 5.3.

Para el caso de las antenas mostradas en la figura 5.13 se han obtenido resultados experimentales modelando las geometrías con tiras de cobre de 0.29 mm de anchura y 25 μm de anchura, impresas sobre un sustrato de fibra *FR4* de 0.25 mm de grosor. Los modelos manufacturados se pueden ver en la figura 5.14. Los datos han sido medidos con las técnicas descritas en [154], basadas en el método de *Wheeler Cap*: una tapadera casi cilíndrica de metal se usa para cubrir las antenas, siendo su tamaño lo suficientemente grande como para satisfacer el criterio de la radioesfera [155], o distancia mínima entre las antenas y las paredes de la cubierta metálica. También se ha comprobado que las frecuencias de resonancia de la cubierta estén fuera del rango de frecuencias de estudio de las antenas [156]. El método de Wheeler

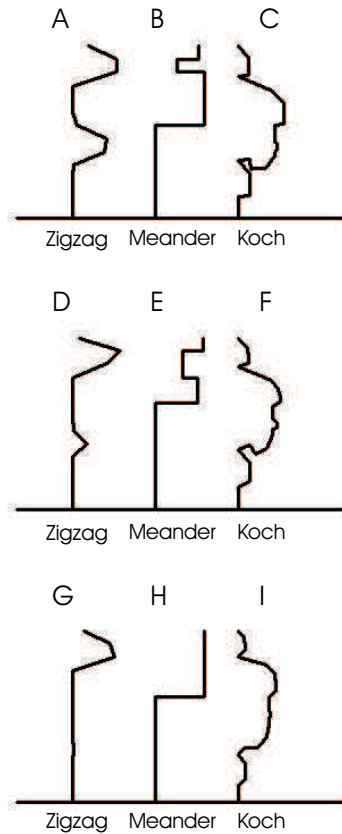


Figura 5.10: Geometría de las antenas *A-I* seleccionadas en la figura 5.9.

para la determinación de la eficiencia de radiación se basa en la medida de la resistencia de entrada de la antena cuando radia en su entorno habitual y cuando lo hace rodeada de una lámina metálica. La impedancia de entrada medida en su entorno habitual corresponde a la suma de la resistencia de radiación y la resistencia óhmica de la antena. Cuando se mide la resistencia de entrada de la antena con una cubierta adecuada que evite la radiación, la impedancia de entrada tiene en cuenta únicamente la resistencia debida a las pérdidas óhmicas de la antena. De estas dos medidas, y a partir de la propia definición de la eficiencia η , se obtienen de forma inmediata tanto dicha eficiencia como la resistencia de radiación.

Una vez que se conocen la resistencia y la reactancia de entrada de una antena en un determinado rango de frecuencias, se puede calcular el parámetro de calidad Q , usando para ello por ejemplo la expresión (C.18), cuya validez

Antena	f_0 (MHz)	BW (MHz)	L_h (cm)	R_{in} (Ω)
A	852.81	360.87	9.47	23.44
B	854.89	367.11	9.64	23.23
C	865.49	360.53	10.22	20.11
D	900.21	382.38	8.74	28.44
E	900.07	385.45	8.98	25.79
F	904.95	379.86	9.33	22.63
G	953.98	407.63	7.92	30.60
H	960.75	410.14	7.95	26.36
I	957.30	405.36	8.25	26.10

Tabla 5.2: Parámetros de las antenas A-I mostradas en la figura 5.10.

se estudia en el apéndice C . Para medir la impedancia de entrada de las antenas, con y sin la cubierta, se ha usado un analizador de redes vectorial calibrado dentro de una cámara anecoica. El desplazamiento entre el plano de referencia (calibrado) y el plano de tierra ha sido compensado usando el retardo eléctrico del analizador.

Los resultados obtenidos se pueden ver en la tabla 5.4, mostrando un acuerdo razonable con los resultados de las simulaciones, y confirmando el mejor comportamiento de las antenas euclídeas frente a la prefractal.

Antena	f_0 (MHz)	Q	η (%)	BW (MHz)
Tipo Koch	864.5	13.57	96.8	365.4
Meander	826.5	12.67	97.19	346.3
Zigzag	824	13.99	96.79	330.6

Tabla 5.3: Parámetros simulados de las antenas elegidas *meander*, zigzag y tipo Koch optimizadas con las tres funciones fitness definidas en la ecuación (5.3).

En consecuencia, se puede concluir que la antena prefractal de Koch no tiene una geometría óptima en ningún sentido al ser claramente superada por otras antenas en igualdad de condiciones. No se puede decir a partir de este resultado que exista siempre una antena euclídea mejor que cada antena prefractal, puesto que esta generalización carecería de fundamento, aunque en los siguientes apartados se comprobará cómo para otras antenas prefractales distintas al prefractal de Koch esta conclusión se repite.

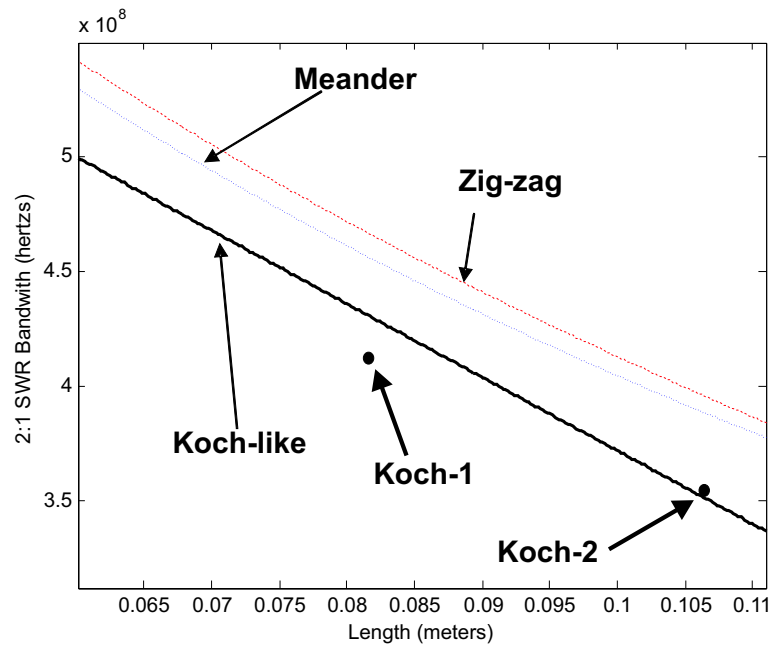


Figura 5.11: Frentes de Pareto de antenas tipo Koch, *meander* y *zigzag* optimizadas GA con funciones *fitness* F^1 y F^2 .

Antena	f_0 (MHz)	Q	η (%)
Tipo Koch	905	12.67	87.64
Meander	850	12.60	88.78
Zigzag	870	13.89	87.34

Tabla 5.4: Parámetros medidos de las antenas elegidas *meander*, *zigzag* y tipo Koch optimizadas con las tres funciones *fitness* definidas en la ecuación (5.3).

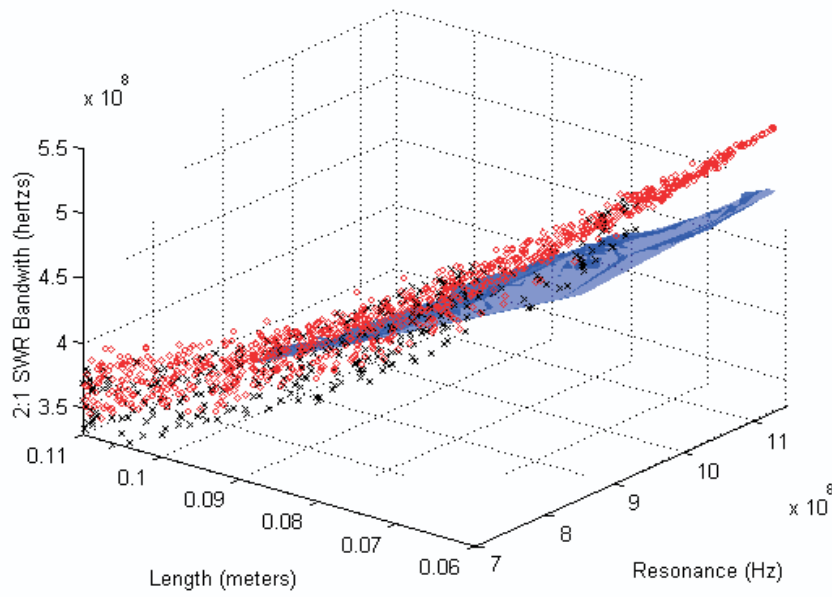


Figura 5.12: Frentes de Pareto tridimensionales de antenas tipo Koch, *meander* y zigzag optimizadas GA con funciones *fitness* F^1 , F^2 y F^3 .

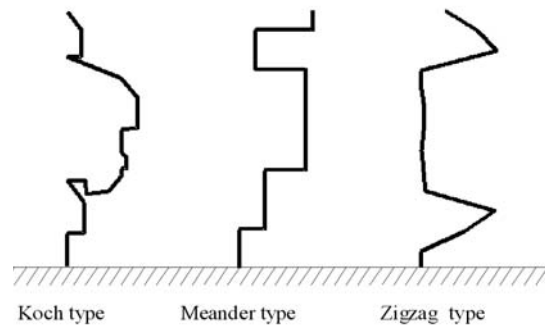


Figura 5.13: Antenas seleccionadas como ejemplo de los frentes de Pareto de la figura 5.12.

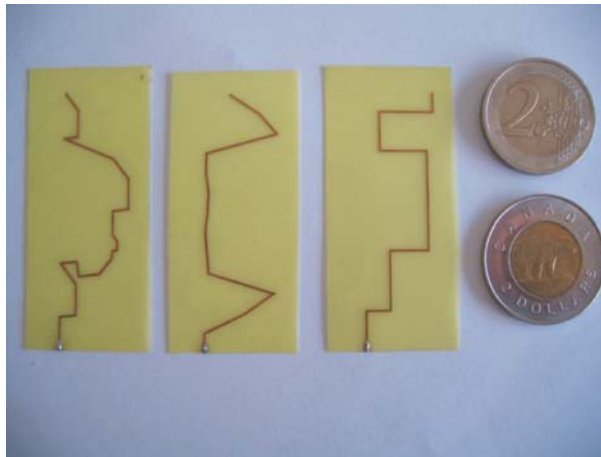


Figura 5.14: Modelos strip de las antenas optimizadas mostradas en la figura 5.13.

5.4. Diseño de antenas inscritas en un semicírculo

En el apartado anterior se han optimizado mediante GA antenas de tipo prefractal, así como otras antenas convencionales con geometría de tipo euclídeo (*meander* y *zigzag*). Dado que el objetivo ha sido la comparación entre antenas de tipo Koch y antenas no prefractales, el espacio de búsqueda ha sido restringido al rectángulo de dimensiones hxw ocupado por la antena prefractal de Koch de altura h , tal y como se definió en el capítulo 4. Sin embargo, y como se ha visto en dicho capítulo, otras estructuras prefractales más complicadas, por ejemplo la de Hilbert, hacen uso de una ocupación del espacio diferente para conseguir una menor frecuencia de resonancia. La figura 5.15 muestra algunas de las antenas prefractales con estas características, concretamente la antena de Hilbert en sus cuatro primeras iteraciones, así como dos distintas versiones de la antena de Peano [45].

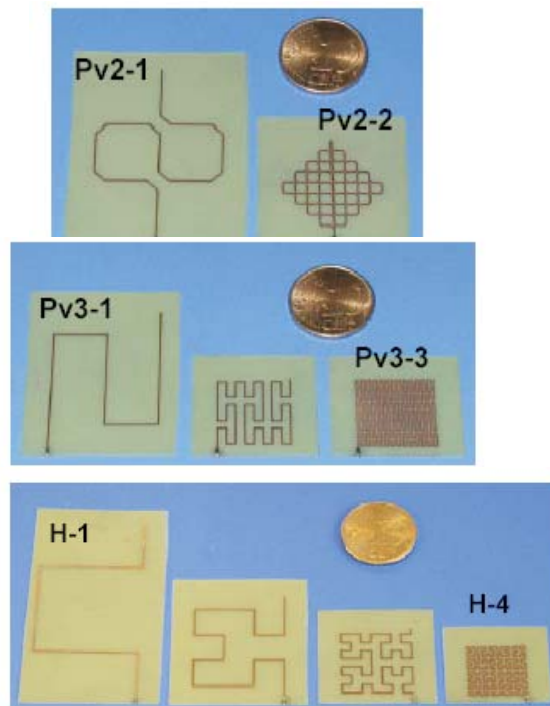


Figura 5.15: Modelos *strip* de antenas prefractales de dimensión 2 tipo Hilbert y Peano.

En este apartado se generaliza el resultado del anterior permitiendo a los algoritmos genéticos encontrar soluciones dentro de la circunferencia de radio h , tal y como se muestra en la figura 5.16, con idea de permitir la comparación de nuevos diseños tipo zigzag y *meander* con las antenas prefractales de la figura 5.15. La codificación de los individuos tipo zigzag y *meander* es similar a la utilizada en el apartado anterior, dividiendo la anchura total de cada meandro, definida por la circunferencia de radio h , en N partes, cuya anchura por tanto se reduce cuanto más alejado esté el meandro del segmento de alimentación. Se permite a la antena realizar un total de 12 meandros, lo que supone que la antena zigzag tendrá 12 segmentos de hilo, y la antena tipo *meander* 25. Se puede ver en la figura 5.17 un ejemplo de antena tipo zigzag y su codificación correspondiente.

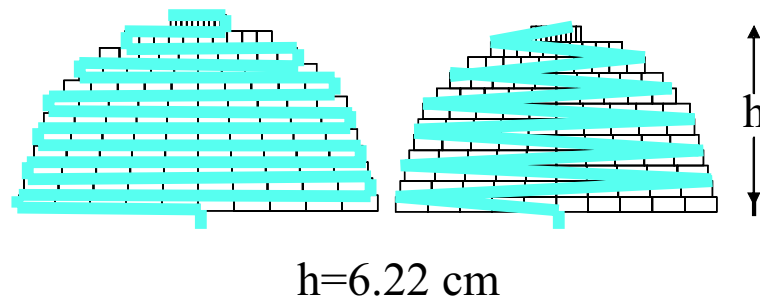


Figura 5.16: Generación mediante GA de antenas tipo *meander* y zigzag que ocupan la esfera de radio h .

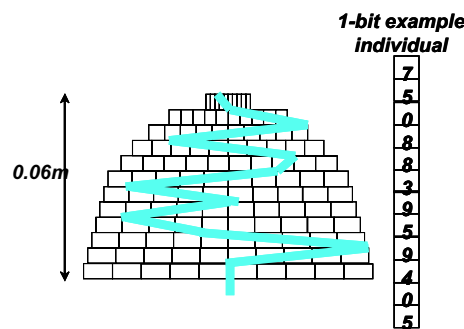


Figura 5.17: Ejemplo de antena optimizada mediante GA.

Para la obtención de los parámetros de cada individuo se ha empleado nuevamente el código numérico NEC, usando para el modelado hilos de con-

ductor no perfecto, concretamente de cobre. Las funciones *fitness* utilizadas han sido:

$$\begin{aligned} F_i^1 &= 1 - \frac{f_{0,i}}{f_0^s} \\ F_i^2 &= \eta_i \\ F_i^3 &= \frac{1}{Q_i} \end{aligned} \quad (5.4)$$

La primera de ellas, donde $f_{0,i}$ y f_0^s son la frecuencia de resonancia del elemento i y de un monopolo recto de longitud 1 cm, respectivamente, tiene como objetivo la maximización de la frecuencia de resonancia $f_{0,i}$ de la antena i . La función F_i^2 trata de maximizar su eficiencia. Por último la maximización de F_i^3 equivale a conseguir una antena cuyo parámetro de calidad Q sea mínimo, o lo que es lo mismo su ancho de banda máximo. El parámetro de calidad ha sido calculado utilizando la expresión (C.18).

Nuevamente, tras aplicar los operadores genéticos del método de torneo, cruce y mutación con distribución de probabilidad gaussiana, el algoritmo genético multiobjetivo proporciona una gráfica tridimensional con valores k_0h , η y Q correspondientes a cada individuo tras cada generación, siendo k_0 el número de ondas correspondiente a f_r . El proceso emplea probabilidades de un 80 % en el operador de cruce y de un 5 % en el operador de mutación.

Para comparar las características del mismo conjunto de individuos, dicho conjunto se elige proyectando en primer lugar la superficie de Pareto sobre el plano η - Q , para a continuación seleccionar los individuos con menor Q . La figura 5.18 presenta tanto la eficiencia como el factor Q de dicho conjunto en función de su tamaño eléctrico. Se puede comprobar cómo los diseños optimizados con GA son mejores tanto en su eficiencia como en su parámetro de calidad a las antenas prefractales de Hilbert y Peano.

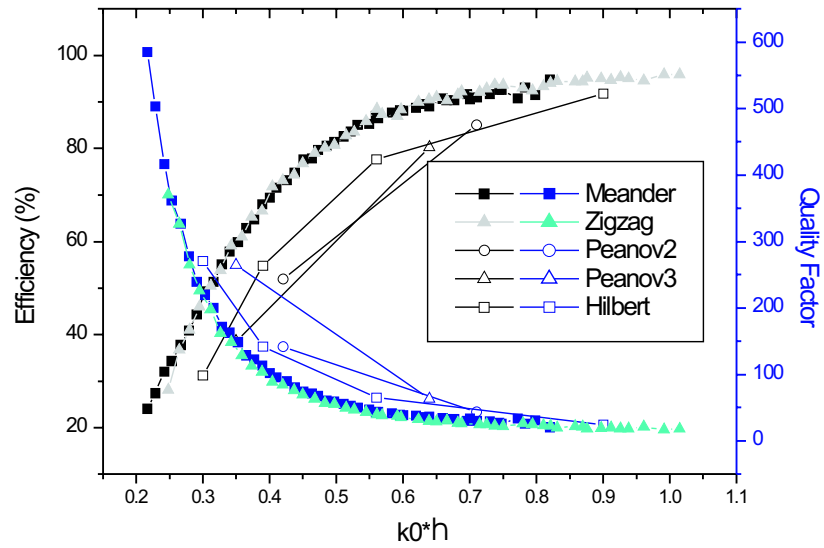


Figura 5.18: Eficiencia y factor Q para los individuos seleccionados del frente de Pareto y comparación con antenas prefractales de dimensión $D = 2$.

5.5. Antenas optimizadas genéticamente incluyendo lazos.

Todas las antenas estudiadas en los apartados anteriores tienen una característica común: la ausencia de bucles cerrados y uniones en su geometría. Por otro lado, en el proyecto europeo Fractalcoms [1] se han analizado antenas prefractales de hilo basadas en el fractal de Sierpinski (ver figura 5.19), denominadas antenas *Delta Wired Sierpinski*, *Y-Wired Sierpinski*, *Koch 1 Sierpinski* y *Sierpinski Arrowhead*, que contienen uniones y lazos cerrados. Dichas antenas tienen un tamaño tal que pueden inscribirse en el semicírculo de radio h considerado en los diseños de antenas en el apartado anterior y, por tanto, su comportamiento puede ser comparado en igualdad de condiciones con las geometrías obtenidas con GA. En la figura 5.20 se puede ver la comparación entre las antenas optimizadas con GA y las antenas de tipo Sierpinski de la figura 5.19. Se puede comprobar cómo en este caso las antenas prefractales que contienen lazos cerrados consiguen mejorar los resultados obtenidos por GA.

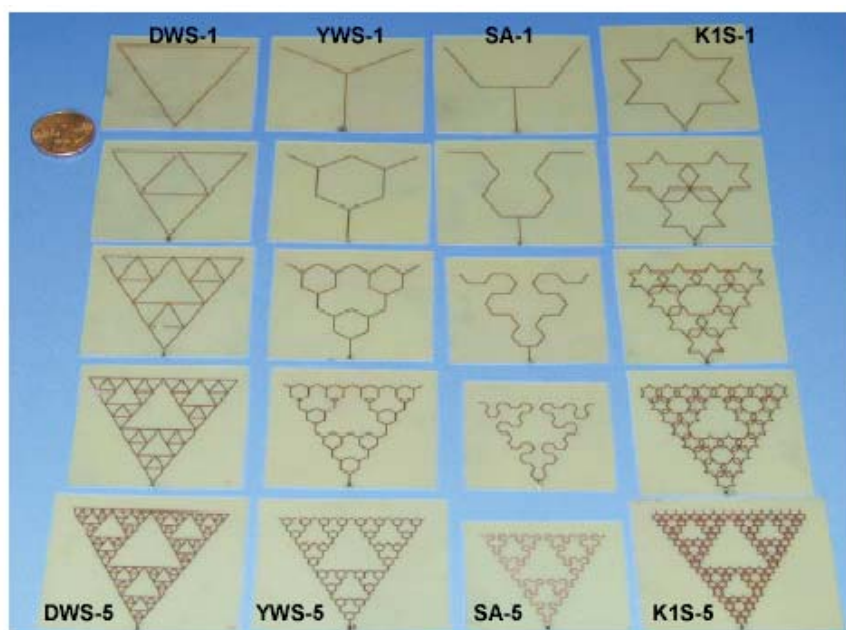


Figura 5.19: Modelos *strip* de antenas prefractales de hilo basadas en la geometría de Sierpinski.

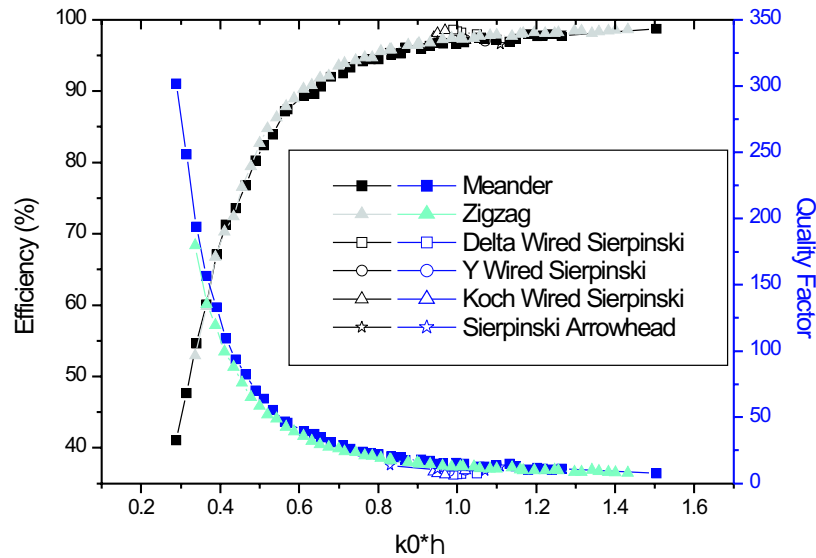


Figura 5.20: Comparación de antenas tipo *meander* y zigzag con antenas prefractales de tipo Sierpinski.

Con objeto de comprobar si es posible encontrar diseños con geometría euclídea que mejoren los resultados de las antenas prefractales tipo Sierpinski, se han considerado diseños euclídeos realizados con GA que sí pueden presentar en su geometría uniones y lazos cerrados [51,52], y que se presentan a continuación.

5.5.1. Diseño de las antenas

Con un proceso similar al descrito en apartados previos, el GA multiobjetivo ha sido usado para diseñar monopolos pequeños optimizados genéticamente buscando un mejor comportamiento que las antenas prefractales mostradas en la figura 5.19. Para ello, en vez de limitar la búsqueda a antenas con geometría tipo zigzag o *meander*, se ha permitido al algoritmo genético la posibilidad de generar estructuras incluyendo bucles cerrados. Dado que en este caso se pretende la comparación con las antenas tipo Sierpinski, la nueva familia de soluciones GA se ha formado a partir de un triángulo equilátero de altura $h = 6,22$ cm, usando las formas básicas mostradas a la derecha de la figura 5.21. El triángulo se divide en 16 subtriángulos equiláteros, cada

uno de los cuales es reemplazado de forma aleatoria por una de las formas básicas que aparecen a la derecha de la figura. En la figura 5.22 se puede ver un ejemplo de estructura formada aleatoriamente mediante el proceso anterior.

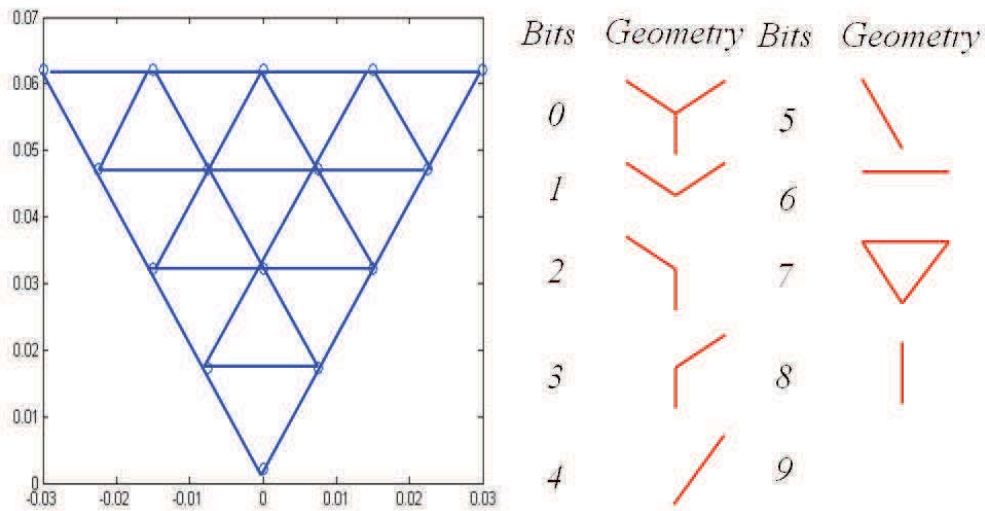


Figura 5.21: Generación de antenas optimizadas genéticamente que incluyen bucles.

Para generar las antenas optimizadas genéticamente, se elige un conjunto de antenas de forma aleatoria, constituyendo éste la población inicial del algoritmo, y se codifican en cromosomas utilizando codificación decimal de punto fijo. La población se compone de 20 individuos, cada uno de los cuales está formado por un conjunto de $N = 16$ genes. La figura 5.21 indica los genes asociados a cada una de las formas básicas utilizadas. Las antenas se forman con hilos de cobre de 0.1 mm de radio, y son alimentadas en su base. Su eficiencia, impedancia de entrada y frecuencia de resonancia se calculan utilizando nuevamente el código NEC. Como el objetivo es evolucionar hacia individuos *eléctricamente pequeños* con el factor Q más pequeño posible y la máxima eficiencia alcanzable η , se usan las mismas funciones *fitness* que en el apartado anterior, definidas en la ecuación (5.4).

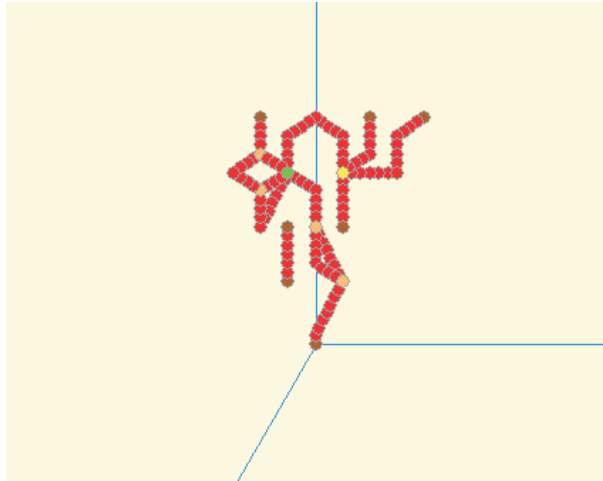


Figura 5.22: Ejemplo de geometría optimizada GA con bucles.

5.5.2. Resultados

Si se emplea el mismo tipo de representación de las figuras 5.18 y 5.20, seleccionando un conjunto de individuos a partir de una proyección del frente de Pareto en el plano η - Q , tras 7000 generaciones se obtiene la gráfica de la figura 5.23. Se observa que en este caso sí existen diseños con geometrías euclídeas que tienen un mejor comportamiento, tanto en su factor Q como en su eficiencia η , que las antenas de Sierpinski de igual tamaño eléctrico en su resonancia.

De entre las antenas diseñadas con GA, las cuatro mostradas en la figura 5.24 han sido seleccionadas para su construcción y comparación con las antenas de tipo Sierpinski de la figura 5.19. Es importante tener en cuenta que para las antenas prefractales sólo se ha considerado hasta la tercera iteración, de forma que la máxima longitud de hilo de los individuos GA coincida con la de los monopolos prefractales, y la comparación sea hecha bajo las mismas condiciones. Para facilitar las medidas, todas las antenas se han escalado a una misma altura, concretamente 56.9 mm de altura, y han sido impresas sobre un sustrato de fibra de vidrio de 0.25 mm de anchura usando técnicas estándar para la fabricación de placas de circuito impreso. La anchura de las tiras metálicas es de 0.3 mm, con un grosor de 35 μm . Las dimensiones del *strip* han sido elegidas de forma que la sección por la que la corriente fluye tenga la misma superficie que en el hilo original [157]. Una vez construidas, las antenas se montan sobre un plano conductor de 3 mm

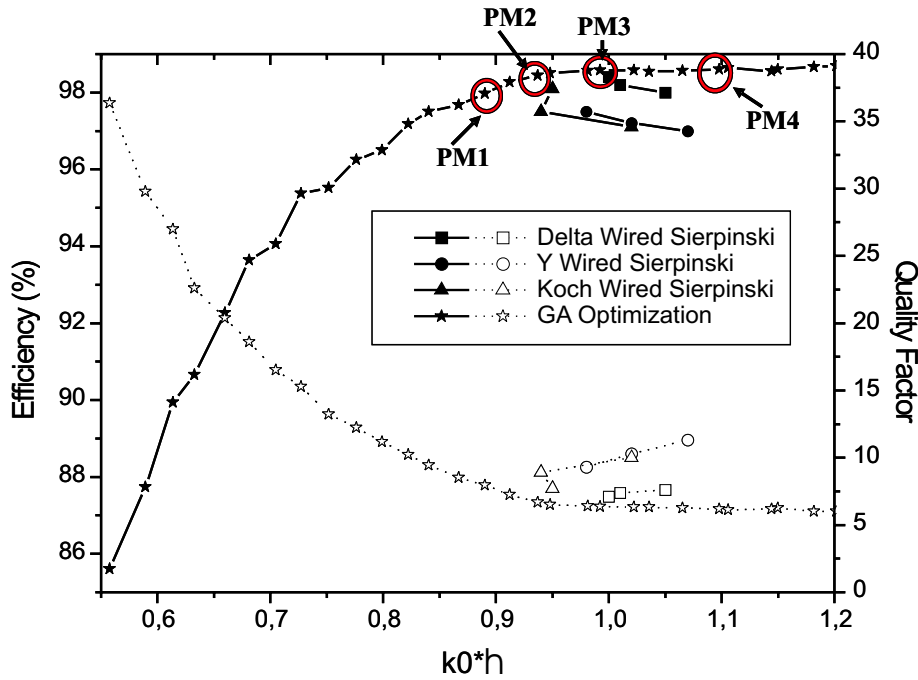


Figura 5.23: Eficiencia y factor Q para los individuos seleccionados del frente de Pareto y comparación con antenas de tipo Sierpinski.

de grosor de tamaño $80 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$, y son alimentadas en su base con un conector *SMA*. Las antenas se elevan 2.2 mm (la longitud del pin central del conector) del plano de tierra.

Se ha medido la eficiencia de radiación de las antenas mediante el método *Wheeler Cap* descrito en apartados anteriores. Las figuras 5.25 y 5.26 muestran, respectivamente, los valores de eficiencia y Q para las antenas diseñadas mediante GA que han sido elegidas, así como para las tipo Sierpinski de la figura 5.19, confirmando que las antenas no fractales se comportan mejor que los diseños prefractales. En la figura 5.26 se incluye como referencia el límite fundamental para el factor Q [4]. En ambas figuras se han incluido también los parámetros medidos de un monopolo, denominado PM5, construido mediante la eliminación en la antena PM4 del triángulo desconectado en su esquina superior derecha. Se puede ver que los elementos PM4 y PM5 se comportan de forma idéntica.

Las medidas de eficiencia, factor de calidad y tamaño eléctrico en la resonancia concuerdan de forma razonable con los valores esperados de las simula-

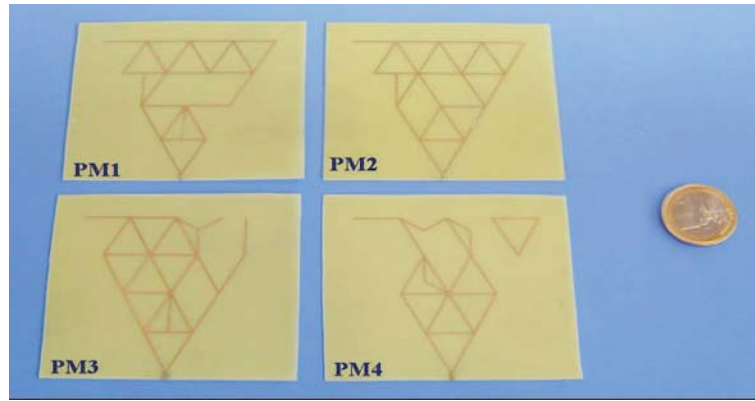


Figura 5.24: Modelos *strip* de las cuatro antenas optimizadas genéticamente con lazos.

ciones representadas en la figura 5.23, revelando, tanto las simulaciones como las medidas, la capacidad de los algoritmos genéticos para diseñar monopolos con mejor comportamiento que las antenas prefractales para tamaños eléctricos casi idénticos. Las pequeñas diferencias entre medidas y simulaciones se deben al factor de escala usado, así como a la presencia de un sustrato que soporte las tiras [158]. Ambos efectos reducen las frecuencias de resonancia medidas respecto a los valores simulados, a la vez que añaden pérdidas a las antenas.

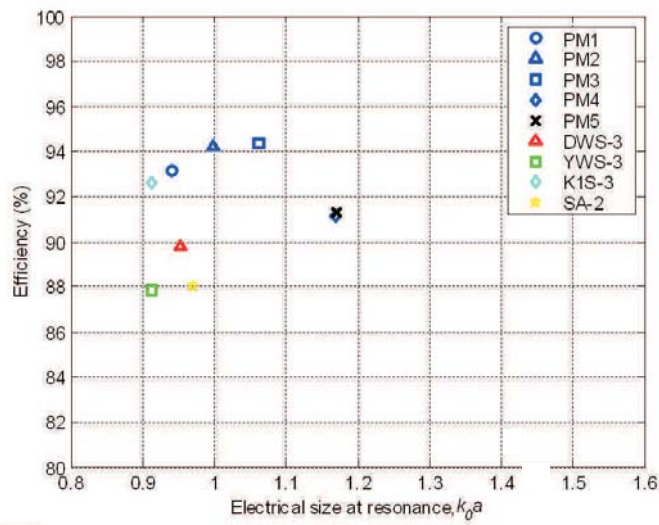


Figura 5.25: Eficiencia frente a tamaño eléctrico de los modelos construidos, mostrados en las figuras 5.19 y 5.24.

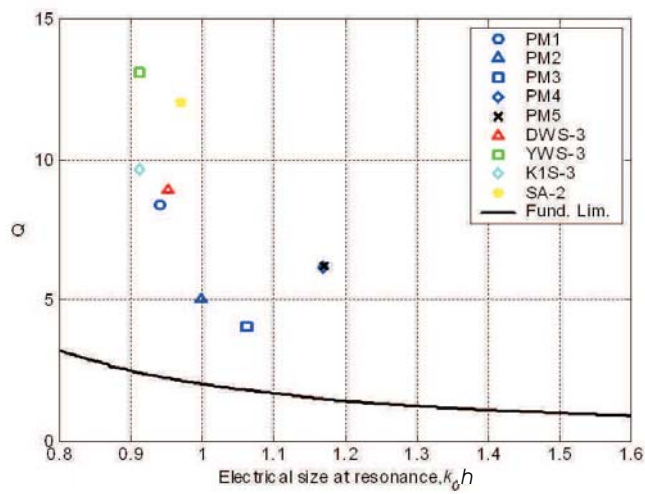


Figura 5.26: Parámetro de calidad Q frente a tamaño eléctrico de los modelos construidos, mostrados en las figuras 5.19 y 5.24.

CAPÍTULO 6

Interacción entre antenas pequeñas de terminales móviles y la cabeza humana

6.1. Introducción

En este capítulo se consideran algunas de las antenas diseñadas y optimadas en capítulos anteriores en una de sus posibles aplicaciones: como antenas de terminales móviles. En esta aplicación es frecuente que las antenas trabajen en posiciones cercanas a los tejidos biológicos de la cabeza. Como consecuencia, se produce una interacción electromagnética con los mismos que no es despreciable, y que es de interés estudiar con más detalle.

El método FDTD es el más usado en la bibliografía para el estudio numérico de la interacción entre las antenas y la cabeza, si bien este método no permite la simulación de una forma precisa de antenas de hilo delgado de orientación arbitraria [87]. Varios autores [159, 160] han solventado este problema empleando para el cálculo códigos híbridos MoMFD-FDTD [39, 84]. La ventaja de estos últimos es que combinan la potencia de FDTD para la simulación de cuerpos inhomogéneos con la del método de los momentos para la computación del comportamiento electromagnético de estructuras complejas de hilo conductor, por lo que se perfilan como la mejor alternativa al FDTD clásico para este tipo de estudios [39]. Dentro de este contexto, en

esta Tesis se ha hecho uso del programa híbrido ADI-FDTD-MoMTD presentado en el capítulo 3, utilizando MoMTD para modelar las antenas pequeñas optimizadas mediante algoritmos genéticos, cuya simulación en FDTD daría lugar a un coste computacional inabordable, y el método de diferencias finitas ADI-FDTD para el modelado de la cabeza humana. Se ha usado ADI-FDTD debido a la aparición en ocasiones de inestabilidades tardías que se producía en el método híbrido FDTD-MoMTD, y que se ha comprobado que se eliminan al usar el método híbrido ADI-FDTD-MoMTD.

En este capítulo, tras una breve introducción, en la que se comenta la forma de enfocar el problema y cómo han llevado a cabo estudios similares otros autores, se mostrarán los modelos de cabeza humana empleados, y posteriormente los distintos resultados obtenidos.

6.1.1. Enfoques del problema

Con la aparición de las comunicaciones móviles, ha surgido un notable interés en el estudio de la interacción entre las antenas de los terminales y el cuerpo humano. Dicho interés se divide en dos vertientes de origen claramente diferente:

- En primer lugar, en el diseño de antenas para transceptores móviles se debe tener en cuenta la interacción entre la antena y el tejido biológico que la rodea, dado que dicha interacción puede suponer una desadaptación de la antena a la frecuencia de uso, así como una importante pérdida de energía por disipación en el tejido.
- Por otra parte, la energía absorbida por el cuerpo humano es en potencia un factor de riesgo para la salud, tal y como se recoge en distintas normativas que se introducirán posteriormente, por lo que se hace necesario su estudio y control.

A pesar de que la motivación de ambas vertientes es bien distinta, su estudio tiene tantos puntos en común que en la mayoría de las ocasiones se puede realizar de forma simultánea. Esto es debido a que, en general, diseñar antenas cuyas características no se vean afectadas por la presencia de la cabeza humana es un problema casi equivalente a diseñar antenas que minimicen la absorción de energía en la misma.

De entre los efectos que tiene la presencia de la cabeza humana en las características de la antena, en la bibliografía se han documentado variaciones en la frecuencia de resonancia [161,162], aumento o reducción de la resistencia

de entrada a la frecuencia de resonancia, dependiendo del tipo de antena [161,163], modificaciones del diagrama de radiación [95,160,164–166], o una importante reducción (de hasta el 50 %) de la eficiencia de la antena [164,166]. Es evidente que el efecto de la cabeza sobre la antena no es despreciable, por lo que debe ser considerado desde las primeras etapas de diseño de cualquier antena que vaya a ser usada para esta aplicación.

Por otra parte, la aparición de numerosas normativas y recomendaciones [167,168] para el control de la radiación absorbida por los usuarios de terminales móviles hace necesario un mayor control por parte del diseñador. En dichas normativas se define la Tasa de Absorción Específica (SAR - *Specific Absorption Rate*) como la potencia media absorbida en cada tejido por unidad de masa. Existen abundantes trabajos centrados en el cálculo del SAR: se ha estudiado el efecto del modelo de cabeza empleado sobre el valor de SAR obtenido [169,170], la variación de la radiación absorbida por niños y adultos [96,171,172], o el uso de distintos tipos de antenas para la reducción del SAR [159,165]. En la siguiente sección se describirán algunos de los métodos de estimación del SAR empleados en dichos trabajos, así como el elegido en esta Tesis.

6.1.2. Normativas y métodos de estimación del SAR

De cara a la cuantificación de la interacción entre los tejidos y la radiación electromagnética, se define el SAR como la potencia media absorbida en cada punto del tejido por unidad de masa. Se mide por tanto en W/Kg , y se suele calcular utilizando la expresión:

$$SAR = \frac{\sigma E_i^2}{2\rho} \quad (6.1)$$

siendo E_i la amplitud del campo eléctrico en V/m , σ la conductividad del tejido en S/m , ρ su densidad en Kg/m^3 . Si toda la absorción de los tejidos se transforma en calor, (6.1) es equivalente a

$$SAR = c_i \frac{dT}{dt} \quad (6.2)$$

donde c_i es la capacidad calorífica del tejido en $J/(Kg K)$ y $\frac{dT}{dt}$ es la derivada temporal de la temperatura en el tejido, en K/s .

Aunque el objetivo final del cálculo del SAR es conocer el incremento de temperatura en los distintos tejidos de la cabeza humana, mediante la

expresión (6.2), para ello es necesario tener un modelo termodinámico muy complejo que considere no sólo el incremento de temperatura debido a la presencia de la radiación electromagnética, sino también la difusión del calor a lo largo de la cabeza, el efecto refrigerante del flujo sanguíneo, etc. [97]. Por tanto en esta Tesis se ha limitado el trabajo al cálculo del SAR y a la comparación de los valores obtenidos con los recomendados por los organismos de estandarización.

Como ya se ha comentado, existen distintas normativas que regulan los valores de SAR permitidos. En la tabla 6.1 se presenta un escueto resumen de las dos normativas más referenciadas en la bibliografía, en la que se observa que existen dos limitaciones fundamentales para el SAR: por una parte, el SAR promediado en todo el cuerpo (SAR_{WB} - *whole body*) no debe sobrepasar un cierto valor, típicamente $0.08 W/Kg$, lo que supone 1/50 veces el valor típicamente considerado como peligroso para la salud ($6 W/Kg$); por otra parte, el máximo SAR, promediado en un volumen cúbico de masa m_p determinada por cada normativa, que denominaremos SAR localizado (SAR_L), no debe superar un determinado valor, que se indica en la tabla 6.1 junto con el valor de m_p en el cual se promedia.

Organización	SAR_L (W/Kg)	Masa m_p (g)	SAR_{WB} (W/Kg)
ICNIRP	2	10	0.08
IEEE	1.6	1	0.08

Tabla 6.1: Comparación de los estándares de IEEE (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*) [167] y de ICNIRP (*International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection*) [168].

Si bien las características de radiación de la antena pueden ser medidas en circunstancias reales de uso, el cálculo del SAR, tal y como se ha definido en la expresión (6.1), exige el conocimiento del campo eléctrico en el interior de los tejidos, lo que evidentemente limita el uso práctico de este parámetro. Por tanto, una de las técnicas más habituales para estudiar el SAR de la cabeza humana debido a la radiación de terminales móviles es el uso de modelos. Dichos modelos pueden ser de dos tipos:

1. Modelos físicos (denominados *phantoms*). En ellos se pueden medir directamente los valores de campo eléctrico o temperatura, permitiendo además el empleo de terminales reales. Sin embargo, el modelo de cabeza humana suele ser bastante simple, por lo que la precisión de la

medida del SAR es pequeña. No obstante, son adecuados para conocer el efecto de la cabeza sobre las características del terminal.

2. Modelos numéricos. En este caso el modelo de cabeza humana puede ser tan complicado como lo permita el simulador o el computador sobre el que funcione. Su principal inconveniente, aparte de la dificultad de modelar tanto el terminal móvil como el cuerpo humano, es el alto coste computacional requerido por las simulaciones.

En el caso de simulación computacional, determinados métodos como FDTD y ADI-FDTD calculan de forma inherente los campos eléctricos en el interior del tejido, por lo que no supone apenas esfuerzo computacional adicional el cálculo del SAR en el tejido.

6.2. Modelado computacional de la cabeza humana

En la bibliografía se pueden encontrar básicamente dos tipos de modelos computacionales de cabeza: por una parte, están los modelos sencillos de cabeza esférica, normalmente formada por varias capas concéntricas que simulan las características de cerebro, hueso y piel [162,166]; por otra, modelos mucho más complicados basados en imágenes de resonancia magnética (MRI - *Magnetic Resonating Image*) [97,169].

Existe una cierta controversia respecto a la necesidad de un modelo de cabeza humana complejo [170]. Por una parte, el uso de modelos de cabeza sencillos (esférico, por ejemplo, o con pocos tipos de tejido) es más barato, al no exigir al investigador la medida u obtención de modelos complejos. Sin embargo, el coste computacional necesario para la resolución de un problema en FDTD depende únicamente de su tamaño, por lo que la simulación de un modelo más realista de cabeza humana no tiene por qué suponer un aumento de dicho coste. Por tanto, una vez que se tiene un modelo complejo de la cabeza, es lógico pensar que los resultados obtenidos van a ser más exactos que con el modelo sencillo, y en consecuencia conviene utilizarlo. De hecho, como se comprobará posteriormente en esta Tesis, dependiendo del modelo utilizado la distribución del SAR se modifica considerablemente. Así, en modelos muy sencillos es difícil extraer conclusiones de qué zonas son las más afectadas por la radiación.

En esta Tesis se han usado dos modelos de cabeza muy distintos entre sí, tratando así de comparar el comportamiento de las antenas pequeñas

en presencia de ambos modelos. Como se comprobará, la variación de las características de radiación de las antenas con el modelo de cabeza empleado no es del todo despreciable, lo que sugiere el uso del modelo disponible más parecido a una cabeza real.

El primero de estos modelos está formado por tres capas concéntricas (ver figura 6.1), que representan la piel, el hueso y el cerebro humano, cuyas características se pueden ver en la tabla 6.2. Tanto en este modelo como en el más complejo que se verá a continuación, dado que los medios que forman los tejidos humanos son no magnéticos, se ha fijado $\mu = \mu_0$. Los valores presentados en dicha tabla son muy similares a los utilizados por Wiart y Mittra [173], aunque difieren de los utilizados por otros autores [165]. El grosor de las capas de piel y hueso es de 1 cm cada una, y el diámetro total de la cabeza es de 20 cm. La resolución del modelo es de $2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ mm}^3$, lo que permite la simulación computacional hasta frecuencias típicas de la tecnología móvil GSM (concretamente 900 MHz) al tener una resolución espacial de aproximadamente $\lambda/18$ en el medio de menor longitud de onda [174].

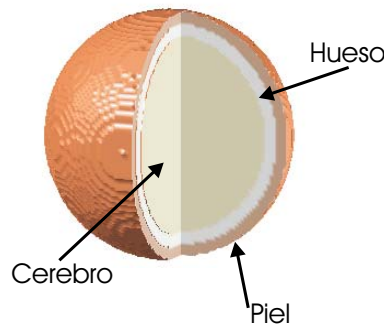


Figura 6.1: Modelo de cabeza esférica.

El segundo modelo empleado, que en adelante se denominará modelo de cabeza realista, está basado en una imagen MRI comercial, con una resolución de $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$. Las propiedades electromagnéticas de los tejidos han sido extraídas a partir de un modelo de Cole-Cole basado en los trabajos de Gabriel [175–177]. Concretamente, en la tabla 6.3 se detallan las propiedades físicas y eléctricas de dichos materiales a la frecuencia de 900 MHz, que será la utilizada en las simulaciones. Se muestran también algunas vistas tridimensionales del modelo en las figuras 6.2 y 6.3.

Es interesante notar que en el rango de resolución espacial usado, si se

desea obtener un error de dispersión del orden del 1 %, apenas existe ganancia en el coste computacional mediante el uso de ADI-FDTD respecto al de FDTD [105]. Sin embargo, en caso de permitir errores de dispersión mayores, se podrían obtener importantes ventajas computacionales mediante la simulación con ADI-FDTD.

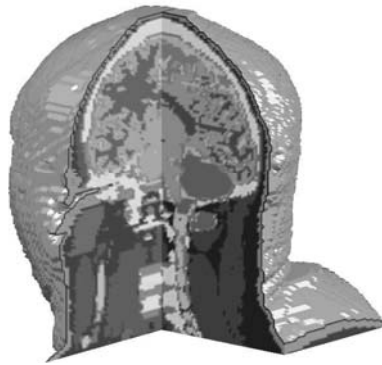


Figura 6.2: Vista posterior-lateral del modelo MRI.

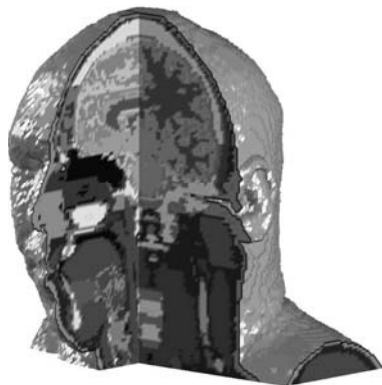


Figura 6.3: Vista frontal-lateral del modelo MRI.

Tejido	σ (S/m)	ϵ_r	ρ (Kg/m ³)
Piel	0.6	34.5	1100
Hueso	0.11	8	1850
Cerebro	1.23	55	1030

Tabla 6.2: Características físicas y eléctricas de los materiales del modelo de cabeza esférica.

Tejido	ϵ_r	σ (S/m)	ρ (Kg/m ³)
Aire interno	1	0	1.3
Cartílago	42.653	0.782	1097
Cerebelo	49.443	1.263	1038
Córnea	55.234	1.394	1076
Cristalino	46.573	0.793	1053
Dermis	41.405	0.866	1125
Dientes	12.454	0.143	2160
Fluido cerebroespinal	68.638	2.413	1007
Fluido corporal	68.902	1.636	1010
Glándulas	59.683	1.038	1050
Grasa	5.462	0.051	916
Hueso cortical	12.454	0.143	1990
Hueso esponjoso	20.789	0.340	1920
Humor acuoso	68.902	1.636	1009
Ligamentos	45.826	0.718	1220
Linfa	59.683	1.038	1040
Materia blanca	38.886	0.591	1038
Materia gris	52.725	0.942	1038
Médula ósea	5.504	0.040	1040
Membrana mucosa	46.040	0.845	1040
Músculo	55.032	0.943	1047
Nervio	32.530	0.574	1038
Retina	55.270	1.167	1026
Sangre	61.361	1.538	1058
Vaso sanguíneo	44.775	0.696	1040

Tabla 6.3: Características físicas y eléctricas de los materiales del modelo de cabeza realista.

6.3. Efecto de la presencia de la cabeza sobre el comportamiento de las antenas

Para estudiar el efecto que tiene la cabeza en las características de radiación de las antenas pequeñas, se han simulado las optimizadas mediante algoritmos genéticos en el apartado 5.3, cuya geometría se puede ver en la figura 5.14. Se han modificado sus tamaños para hacerlas resonar a aproximadamente 900 MHz, lo que conlleva un tamaño máximo $h = 6,22$ cm para la antena tipo Koch optimizada, y $h = 5,81$ cm para las tipo zigzag y *meander*.

El método FDTD-MoMTD exige una distancia mínima a la que se puede situar la antena de la cabeza [89]. Dado que no existe un estudio similar al referido para el caso del híbrido ADI-FDTD-MoMTD, se han situado las antenas a una distancia de 2 cm de la cabeza, superior al necesario en el método híbrido FDTD-MoMTD. Las antenas han sido alimentadas con una fuente de tensión tipo *delta-gap* que proporciona una excitación con dependencia temporal gaussiana, de frecuencia máxima 1 GHz.

Los resultados en frecuencia (resistencia de entrada, ancho de banda, etc.) se pueden obtener vía FFT a partir de las señales de tensión y de corriente en el segmento de alimentación de la antena.

En las tablas 6.4 y 6.5 se pueden ver las frecuencias de resonancia e impedancias de entrada a la frecuencia de resonancia de las tres antenas en presencia de los modelos de cabeza esférico y real, respectivamente. Como se puede comprobar en ambas tablas la antena tipo Koch es la más afectada de las tres en sus características de radiación debido a la presencia de la cabeza. La figura 6.4 muestra de forma gráfica el efecto de la cabeza realista sobre la impedancia de entrada de la antena tipo Koch. También se muestra en la figura 6.5 el efecto del modelo de cabeza realista sobre la antena tipo *meander*, observándose cómo la variación es mucho menor en este caso.

	Without Head		With Spherical Head		
	f_o (MHz)	Z_{in} (Ω)	f_o (MHz)	Z_{in} (Ω)	f_o var (%)
<i>Koch</i>	880.7	46.08	868.08	31.15	1.43
<i>Meander</i>	890.7	45.58	888.1	32.6	0.29
<i>Zigzag</i>	890.8	39.26	885.3	34.5	0.62

Tabla 6.4: Variación de la frecuencia de resonancia y la impedancia de radiación debido a la presencia del modelo de cabeza esférica.

	Without Head		With Real Head		
	f_o (MHz)	Z_{in} (Ω)	f_o (MHz)	Z_{in} (Ω)	f_o var (%)
<i>Koch</i>	880.7	46.08	852.8	28.57	3.17
<i>Meander</i>	890.7	45.58	879.5	26.70	1.25
<i>Zigzag</i>	890.8	39.26	876.9	30.77	1.56

Tabla 6.5: Variación de la frecuencia de resonancia y la impedancia de radiación debido a la presencia del modelo realista de cabeza.

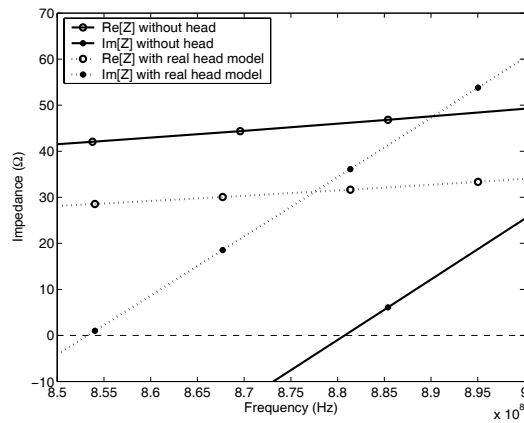


Figura 6.4: Comparación de la impedancia de entrada de la antena tipo Koch en función de la frecuencia debido a la presencia del modelo realista de cabeza.

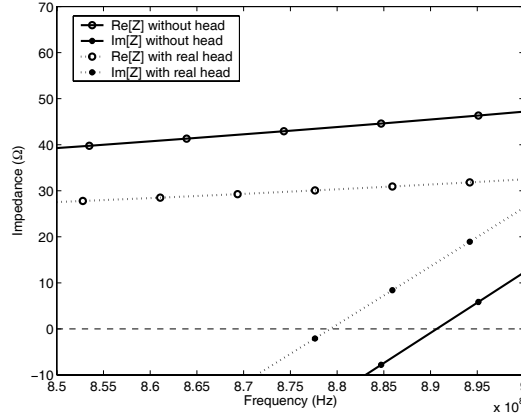


Figura 6.5: Comparación de la impedancia de entrada de la antena *meander* en función de la frecuencia debido a la presencia del modelo realista de cabeza.

Es interesante notar cómo la presencia de cualquiera de los dos modelos de cabeza tiene un efecto similar sobre las antenas a la de un recubrimiento dieléctrico de los hilos que las forman [158], efecto que también se observó en el capítulo anterior al medir las antenas sobre el sustrato *FR4*. La disminución de la resistencia de entrada, que al tratarse de hilos sin pérdidas corresponde únicamente a la resistencia de radiación, da lugar también a una disminución de la eficiencia de las antenas, concordando así este resultado con los obtenidos por [164, 166].

6.4. Cálculo del SAR

La figura 6.6 muestra la distribución espacial de los campos en la celda de Yee (i, j, k) . Para calcular el campo eléctrico en el centro $C_{i,j,k}$ de la celda, que se denominará campo eléctrico centrado, $\vec{E}_{i,j,k}^C = \hat{x}E_{X,(i,j,k)}^C + \hat{y}E_{Y,(i,j,k)}^C + \hat{z}E_{Z,(i,j,k)}^C$ ¹, y cuya posición está marcada en la figura con un punto, se ha realizado una interpolación espacial usando doce componentes [178].

Las antenas se excitan con un señal sinusoidal a la frecuencia f_o deseada, suavizada mediante una curva gaussiana para evitar la aparición de com-

¹Por simplicidad en la notación, los subíndices (i, j, k) son los índices computacionales de la celda (i, j, k) , por lo que se corresponden con valores enteros o semi-enteros de acuerdo a la posición asociada a cada componente del campo en la celda de Yee (Ver figura 6.6).

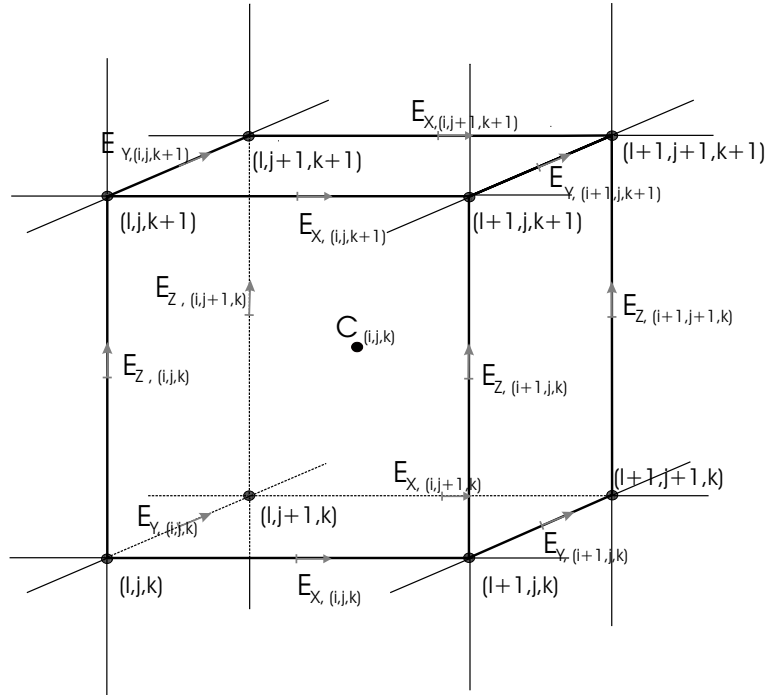


Figura 6.6: Cálculo del campo eléctrico centrado $\vec{E}_C^{i,j,k}$.

ponentes de alta frecuencia. El tiempo en el que se alcanza el estacionario se estima de forma automática, deteniendo el algoritmo cuando la variación relativa entre tres máximos consecutivos de la corriente en el segmento de excitación sea menor a $1/1000$. En la figura 6.7 se puede ver dicha corriente y el alcance del estacionario en la antena tipo Koch, donde ΔI_1 y ΔI_2 son las variaciones de corriente sufridas entre los últimos tres máximos, parándose la ejecución del algoritmo cuando $\frac{|\Delta I_1| + |\Delta I_2|}{I_2} < \frac{1}{1000}$, siendo I_2 el valor alcanzado por el máximo de corriente usado para el cálculo de ΔI_1 y de ΔI_2 .

De acuerdo a la expresión (6.1), para calcular el SAR es necesario conocer los valores de la amplitud del campo eléctrico en cada celda del modelo de cabeza. Para ello se ha calculado en cada una de dichas celdas los sucesivos máximos y mínimos locales de las tres componentes del campo eléctrico. Para evitar errores de discretización, se realiza una interpolación de tercer orden entre muestras temporales sucesivas para determinar dichos valores. Así, los últimos valores máximo y mínimo de cada componente de campo eléctrico son almacenados en memoria, de forma que cuando se alcanza el estacionario se pueda determinar la amplitud del campo eléctrico en cada celda mediante

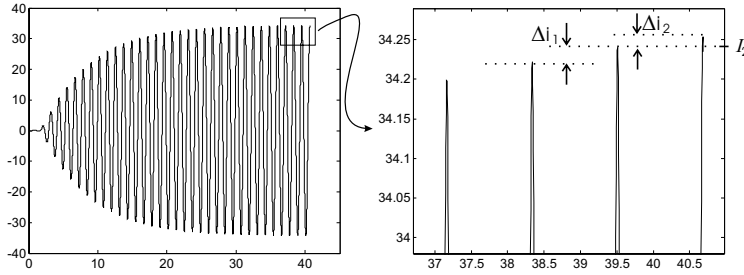


Figura 6.7: Corriente en el segmento de alimentación de la antena tipo Koch en presencia de la cabeza y alcance del estacionario.

la semisuma del máximo y el valor absoluto del mínimo. A partir del campo eléctrico se puede obtener la densidad de potencia media disipada en cada celda como:

$$\left[\frac{dP}{dV} \right]_{i,j,k} = \left[\frac{\sigma}{2} (|E_X|^2 + |E_Y|^2 + |E_Z|^2) \right]_{i,j,k} \quad (6.3)$$

con lo que integrando se alcanza la expresión:

$$[P]_{i,j,k} = \int_{V_{i,j,k}} \frac{\sigma}{2} (|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2) dv \simeq V_{i,j,k} \frac{\sigma_{i,j,k}}{2} (|E_{X,(i,j,k)}^C|^2 + |E_{Y,(i,j,k)}^C|^2 + |E_{Z,(i,j,k)}^C|^2) \quad (6.4)$$

En este trabajo, dado que no se ha podido realizar un cálculo del SAR_{HB} al no poderse simular (debido a los recursos computacionales necesarios) un modelo de cuerpo completo, se ha optado por estudiar el cumplimiento del máximo SAR_L en la zona más cercana a la posición de la antena, que se corresponde con la cabeza humana.

El cálculo del SAR_L correspondiente a la celda (i,j,k) exige la determinación de la región cúbica alrededor de dicha celda cuya masa sea igual a la masa de promediado deseada (1g. o 10g., según las recomendaciones IEEE y ICNIRP, respectivamente). En esta Tesis se hace uso del algoritmo de crecimiento de regiones presentado en [178], que se ha modificado de forma conveniente para el cumplimiento de las últimas recomendaciones de IEEE [179], que permite el cálculo del SAR en todas las celdas del modelado usado.

Aunque otros autores [180] han presentado algoritmos que contemplan algunas de las recomendaciones de [179], el algoritmo presentado en esta Tesis es el primero, hasta nuestro conocimiento, que cumple la recomendación [179] para el cálculo del SAR. Por su complejidad, y para facilitar la lectura del resto del capítulo, el algoritmo se describe en el apéndice D.

6.4.1. Cálculo del SAR de antenas pequeñas optimadas mediante GA

El algoritmo descrito en el apéndice D ha sido usado para calcular el SAR en el modelo de cabeza realista debido a las tres antenas estudiadas en el apartado 6.3. Se ha optado por usar una masa de promediado de un gramo, de acuerdo a la normativa de IEEE [167].

Los resultados obtenidos usando el modelo de cabeza realista se pueden ver en la tabla 6.6, en la que se muestra también el SAR_L cuando la antena transmisora es un dipolo $\lambda/2$ resonante a 900 MHz. La potencia de entrada de la antena a su frecuencia de resonancia es en todos los casos igual a 250 mW. Es interesante notar que para todas las antenas se obtienen valores de SAR_L por encima del límite establecido por el IEEE (ver tabla 6.1). Una de las posibles causas podría ser la acumulación de campo cercano existente en las antenas pequeñas, que da lugar a una mayor absorción de energía electromagnética por parte de la cabeza que en otros tipos de antenas.

Lineal	Tipo Koch	Meander	Zigzag
1.79	1.81	2.05	1.98

Tabla 6.6: Máximo SAR_L (W/Kg) para cada una de las cuatro antenas utilizadas.

Existen en la bibliografía trabajos de varios autores [160, 163] que han analizado problemas similares cuando la antena radiante es un dipolo $\lambda/2$. Los resultados difieren ligeramente porque, al haberse realizado este trabajo con la nueva recomendación del IEEE [179], se puede calcular el SAR en la parte más externa del cuerpo humano, dando lugar a valores de pico más elevados.

En las figuras 6.9, 6.10 y 6.11 se puede ver para cada una de las tres antenas estudiadas la distribución espacial del SAR_L en el corte horizontal de la cabeza más próximo a la alimentación de la antena, mostrado en la figura 6.8. Es muy interesante notar que apenas existen diferencias entre los tres

mapas de SAR_L obtenidos con las distintas antenas, a pesar de sus distintas geometrías, lo que podría indicar una mayor contribución a la radiación electromagnética por parte del segmento de alimentación que en el resto de la antena. Esto concuerda con las conclusiones alcanzadas previamente en esta Tesis [48, 57].

Se puede ver en la figura 6.12 otra vista en la que se puede apreciar mejor la distribución del SAR_L en la cabeza. La vista se ha elegido similar a la de la figura 6.2 para facilitar la identificación de los distintos tejidos en los que se producen variaciones del SAR_L debido a las distintas características del medio.

De dichas figuras se puede extraer información acerca de los tejidos que sufren una mayor absorción de energía electromagnética. Se puede comprobar que, en general, cuanto más lejos de la superficie se encuentra un tejido menor es su absorción, debido al decaimiento sufrido por los campos debido tanto al aumento de la distancia con la antena como a la absorción de los medios más próximos a la misma. Sin embargo, el SAR_L sufre de variaciones bruscas debidas a los distintos tipos de tejidos, siendo la más notable la sufrida al atravesar el hueso, que al ser un material de muy baja conductividad apenas produce absorción de energía (SAR muy pequeño). Como consecuencia, en las capas exteriores del cerebro se alcanzan valores no despreciables de SAR. En la figura 6.13 se puede ver como ejemplo el SAR en un corte próximo a la posición de la antena *meander*, en la que se puede ver el SAR obtenido en los distintos tejidos. Este efecto también se puede ver en el modelo de cabeza esférica, cuyo resultado se muestra en la figura 6.14.



Figura 6.8: Corte horizontal de la cabeza.

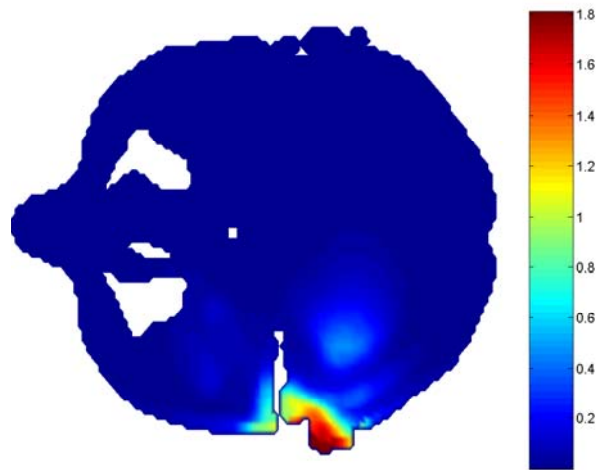


Figura 6.9: SAR obtenido en un plano próximo con antena tipo Koch en el corte horizontal de la cabeza más próximo a la alimentación de la antena.

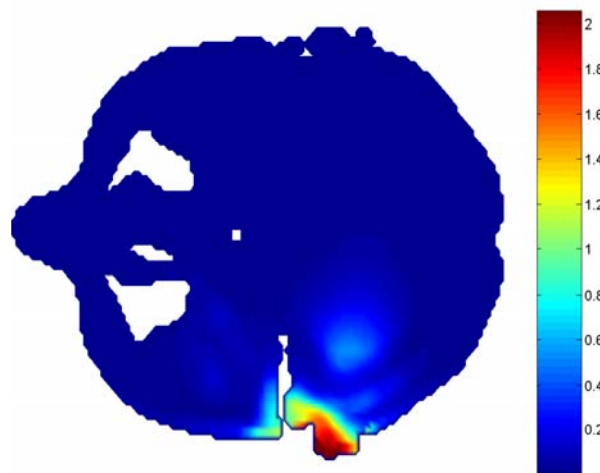


Figura 6.10: SAR obtenido en un plano próximo con antena *meander* en el corte horizontal de la cabeza más próximo a la alimentación de la antena.

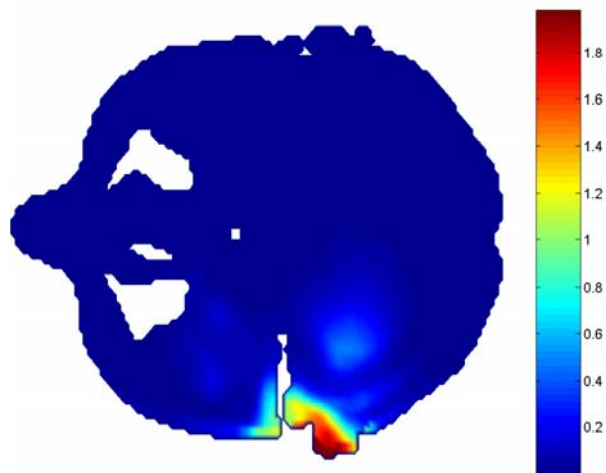


Figura 6.11: SAR obtenido en un plano próximo con antena zigzag en el corte horizontal de la cabeza más próximo a la alimentación de la antena.

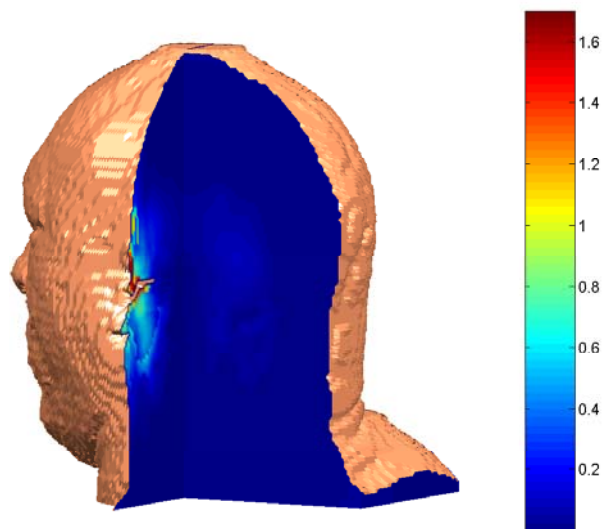


Figura 6.12: Vista tridimensional del SAR obtenido al usar la antena tipo *meander*.

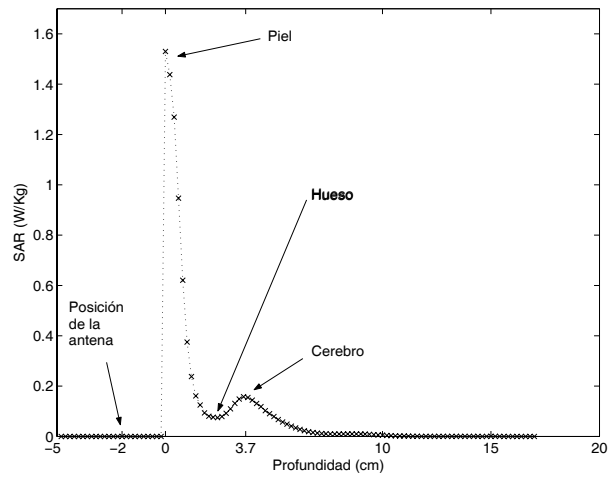


Figura 6.13: SAR en función de la profundidad en el modelo de cabeza realista, obtenido a partir de la figura 6.10 en un corte próximo a la posición de la antena.

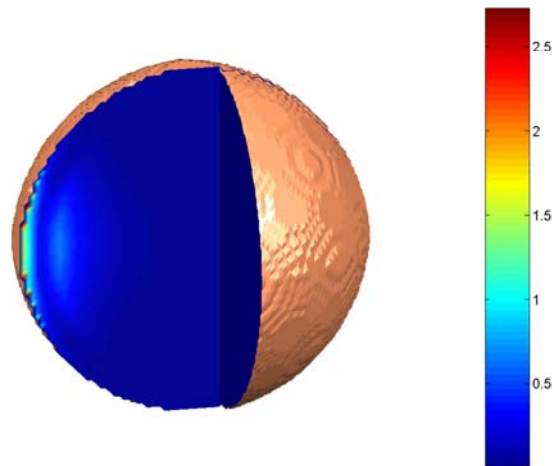


Figura 6.14: SAR obtenido en el modelo de cabeza esférico al usar la antena *meander*.

Conclusiones

Uno de los principales objetivos de esta Tesis ha sido la ampliación del conocimiento acerca del comportamiento de las antenas de hilo prefractales como antenas pequeñas, así como la determinación de algunas de sus limitaciones. Se ha enfocado la Tesis desde dos puntos de vista: la extensión de algoritmos para el análisis de dicha antenas y su posterior aplicación al estudio de sus características y al diseño de nuevas geometrías. En concreto, a lo largo de esta Memoria se han realizado las siguientes aportaciones:

- El código DOTIG5 para el análisis en el dominio del tiempo de estructuras de hilo delgado mediante el método de los momentos en el dominio del tiempo se ha extendido permitiendo la simulación de estructuras con segmentación no uniforme, aun en el caso de la existencia de uniones entre hilos. También se ha llevado a cabo el aprovechamiento de la simetría en problemas con plano de tierra.
- Los códigos híbridos FDTD-MoMTD y ADI-FDTD-MoMTD para el estudio de la interacción de estructuras de hilo delgado con cuerpos inhomogéneos han sido también extendidos para la simulación de estructuras de hilo con uniones, impedancias de carga y modelado con segmentación no uniforme.
- Se han determinado dos posibles efectos limitantes que pueden afectar a las características radiantes de las antenas pequeñas prefractales: los *shortcuts*, o interacciones entre segmentos alejados de la estructura, y el efecto de la orientación de las corrientes (*paralelas* y *antiparalelas*) en segmentos paralelos cercanos. No obstante, se ha comprobado cómo el efecto de los *shortcuts* no parece ser demasiado importante a bajas frecuencias, y en ese caso es debido principalmente a la energía radiada por el segmento de alimentación.

- Se ha demostrado también que, en general, estos efectos limitantes afectan a todo tipo de estructuras de hilo, y no únicamente a estructuras prefractales. Además, se ha comprobado cómo ciertas antenas de geometría euclídea mejoran el comportamiento de las antenas prefractales analizadas, lo que induce a pensar que es la topología de las antenas el principal factor a tener en cuenta en su diseño, y que la forma fractal no garantiza optimalidad. Por ejemplo, curvas como la de Koch o la de Hilbert han sido mejoradas en cuanto a grado de miniaturización por antenas de tipo *meander* o espiral.
- Se ha comprobado que existe un compromiso entre los distintos parámetros involucrados en la miniaturización de antenas, tal y como se desprende de los límites teóricos. Con objeto de alcanzar un compromiso adecuado entre dichos parámetros, se ha utilizado como técnica de diseño la optimización mediante algoritmos genéticos (GA), obteniéndose nuevos diseños tanto con geometrías prefractales como euclídeas. Asimismo, se ha determinado que, para todas las antenas prefractales estudiadas, se pueden encontrar antenas con geometría euclídea que mejoran sus características.
- Se ha estudiado la interacción entre algunas de las antenas pequeñas diseñadas mediante GA y la cabeza humana, comprobando cómo afecta ésta última a sus parámetros de radiación. Se ha verificado también que los resultados obtenidos dependen del modelo de cabeza humana empleado en las simulaciones.
- Por último, se ha desarrollado un nuevo algoritmo para el cálculo de la Tasa de Absorción Específica (SAR) en los tejidos que forman la cabeza humana, de acuerdo a las últimas normativas de IEEE. Dicho algoritmo se ha usado para estudiar el SAR debido a algunas de las antenas optimadas mediante GA, comprobando cómo si bien su valor máximo varía para cada antena, el mapa de SAR es muy similar para todas ellas, lo cual induce a pensar que es en el segmento de alimentación principalmente donde se produce la radiación de las bajas frecuencias.

APÉNDICE A

Elección de los puntos campo

A.1. Introducción

En el capítulo 2 se ha presentado el método de los momentos en el dominio del tiempo. En la expresión (2.28) se ha particularizado la EFIE para el caso de usar funciones base lagrangianas y funciones peso tipo delta de Dirac, es decir, se ha forzado el cumplimiento de la ecuación justo en el centro de los segmentos. Al punto en el que se fuerza la condición, que está situado en la superficie del hilo, se le ha denominado punto campo \vec{r}_u , y en el desarrollo anterior se ha supuesto único.

Sin embargo, la geometría de hilo delgado mostrada en la figura A.1 presenta infinitos puntos campo a elegir en el centro del segmento, sin más que variar el ángulo φ que los define. En el caso de que se esté simulando una antena recta, la elección de cada punto campo es indistinta, pues todos son equivalentes. Sin embargo, este no es el caso en estructuras con uniones o hilos doblados. En la figura A.2 se muestra el vector \vec{R}_{iu} para dos posibles puntos campo \vec{r}_{u1} y \vec{r}_{u2} en la cercanía de una curvatura del hilo, comprobándose cómo en este caso ambos vectores son distintos, tanto en módulo como en dirección. En este apéndice se comprobará cómo la elección del punto campo no siempre es un asunto trivial y da lugar a importantes diferencias entre distintos códigos numéricos.

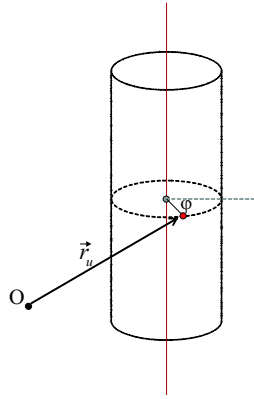
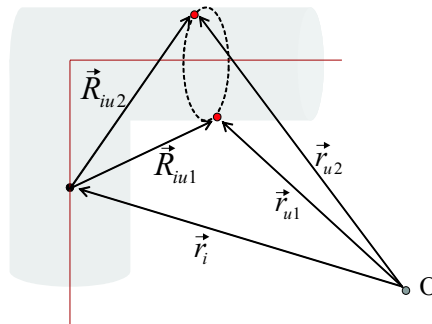


Figura A.1: Definición de los puntos campo.

Figura A.2: Variación del vector \vec{R}_{iu} al elegir distintos puntos campo.

A.2. Estudio del efecto de la variación del punto campo

Para comprobar cuál es el efecto que puede tener la elección de distintos puntos campo sobre la simulación de una determinada estructura, se ha considerado la geometría en forma de L presentada en la figura A.3a y se ha simulado considerando distintas elecciones del punto campo en el segmento más próximo al codo de la antena (mostrado con una flecha en la figura A.3a). En concreto se han tomado las posiciones marcadas con A, B, C y D en la figura A.3b.

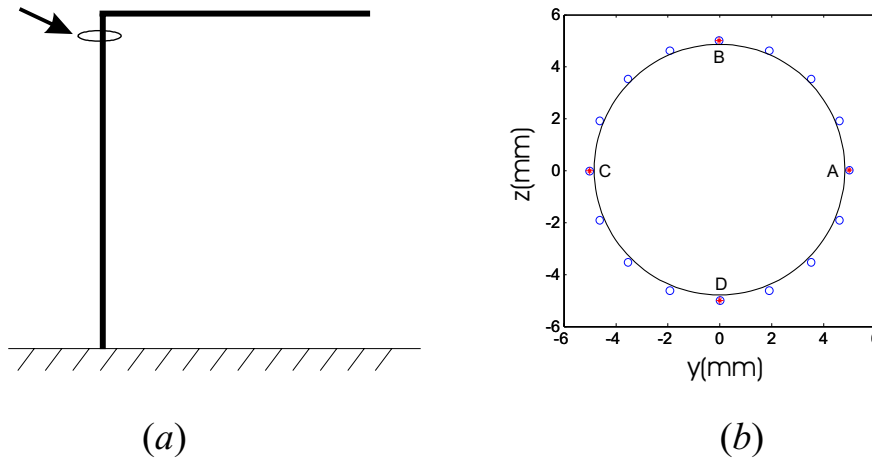


Figura A.3: *a*: Antena tipo L en la que se modifican los puntos campo. *b*: Puntos campo sobre los que se ha hecho el estudio; los marcados como *A*, *B*, *C* y *D* han sido elegidos para su representación.

En la figura A.4 se puede ver la comparación de la impedancia de entrada (resistencia y reactancia) obtenida con DOTIG5 al usar cada uno de los cuatro puntos marcados en la figura A.3*b*, junto a los resultados obtenidos al simular la misma estructura con los códigos comerciales NEC [71] y WIPL [121]. Es interesante apuntar que en NEC, para evitar este problema, no se determina el punto campo sino que se supone:

$$\left| \vec{R}_{iu} \right| = \sqrt{(x_u - x_i)^2 + (y_u - y_i)^2 + (z_u - z_i)^2 + a^2} \quad (\text{A.1})$$

o lo que es lo mismo:

1. Que la estructura está contenida en uno de los planos XY, YZ o XZ.
2. Que el punto campo está situado en la dirección perpendicular al plano en el que está contenida la antena.

Como se puede ver en la figura A.4 la elección de distintos puntos campo, aun siendo realizada sobre un único segmento, modifica el resultado de forma considerable, haciendo que en unos casos se aproxime más al obtenido con NEC y en otros casos al obtenido con WIPL.

A.3. Modificación de las funciones peso

Una técnica sencilla que permite obtener resultados más precisos es la modificación de la función peso. En realidad, se mantiene la función peso delta de Dirac, si bien se fuerza el *point-matching* no sólo sobre un punto campo sino sobre una circunferencia de radio a , orientada perpendicularmente al segmento (ver circunferencia punteada en la figura A.2). Dado que la realización del producto funcional definido en (2.4) supone una integración a lo largo de la circunferencia, que complicaría en exceso el desarrollo teórico y limitaría la velocidad de proceso del código, en esta Tesis se ha aproximado la integral realizando un promediado entre los distintos puntos campo. Así, se eligen una serie de puntos campo $\vec{r}_u^{(k)}$, variando de forma uniforme el ángulo φ a lo largo de la circunferencia. En cada uno de estos puntos campo se calculan las interacciones con los segmentos fuente, que serán posteriormente promediadas. Dado que las interacciones entre puntos fuente y puntos campo se calculan de forma previa al inicio del proceso escalonado en el tiempo, no existe un coste computacional añadido notable.

Se ha elegido para el análisis del método la estructura prefractal de Hilbert 3D de orden 1, con $h = 1m$, cuya forma se puede ver en la figura 4.49. Esta antena es muy interesante para este estudio puesto que, al tratarse de una estructura tridimensional, la elección de los puntos campo es crítica. En la figura A.5 se representa la admitancia de entrada de dicha estructura obtenida mediante los códigos DOTIG5 sin promediado de puntos campo, y DOTIG5 con promediado de puntos campo, así como los códigos comerciales NEC y WIPL. Se comprueba cómo el resultado varía de forma considerable al introducir el promediado de los puntos campo, aproximándose al obtenido por WIPL.

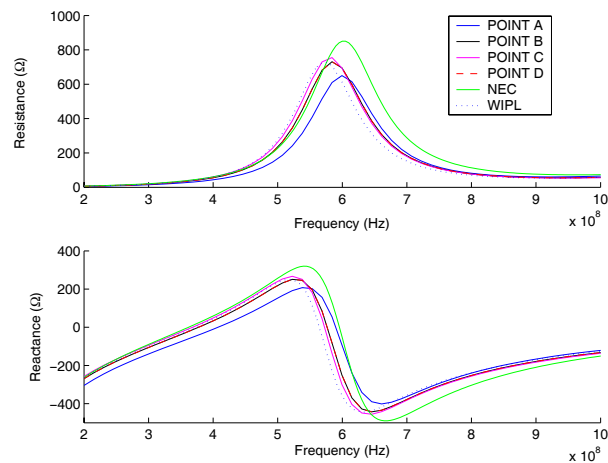


Figura A.4: Impedancia de entrada de la antena en L obtenida con DOTIG5 al elegir como punto campo del segmento más cercano a la unión el punto A, B, C o D. Se muestran también los resultados obtenidos con los códigos comerciales WIPL y NEC.

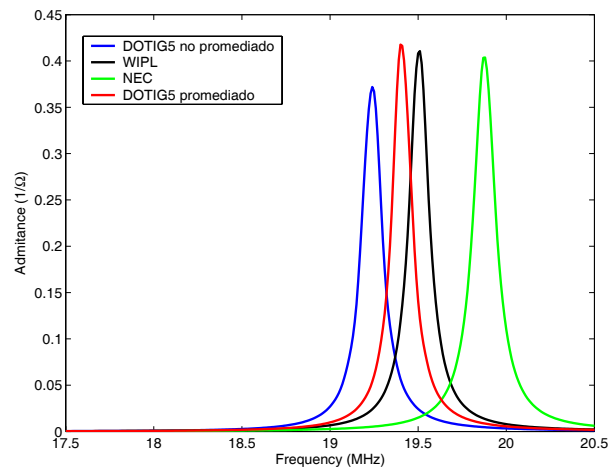


Figura A.5: Admitancia de entrada de la antena Hilbert 3D de orden 1 obtenida con NEC, WIPL, DOTIG5 y DOTIG5 con promediado de puntos campo.

APÉNDICE B

Desarrollos numéricos asociados al análisis de estructuras de hilo delgado

B.1. Introducción

En este apéndice se han incluido los detalles de la formulación de MoMTD para el análisis de estructuras con forma de hilo delgado, con objeto de facilitar la lectura del capítulo 2.

B.2. Cálculo de las matrices de estructura

Las matrices de estructura, que aparecen en el proceso de discretización de la ecuación EFIE para hilos delgados (ver expresión (2.31)), se calculan en esta Tesis usando un proceso similar al expuesto en [38, 62, 77], que permite su obtención analítica.

B.2.1. Cálculo de la función auxiliar F

La expresión de F , para el caso de segmentación desigual, es:

$$F_{i,h,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{\Delta_{h(i)}} \left(\frac{\hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}} {}_t B_i^{l,m} + c \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^2} {}_s B_i^{l,m} \right) ds_i'' \quad (B.1)$$

$$+ c^2 \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^3} \int_s B_i^{l,m} \Big|_{\Delta t/2}^{t''^{(h)}}$$

Siguiendo un razonamiento idéntico al empleado en [38], se puede escribir:

$$F_{i,h,u,l,m} = \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^3 \Psi_{i,h,u,l,m}^{(a,b)} I_{i,h,u}^{(a,b)} \quad (B.2)$$

donde el cálculo de las integrales de línea $I_{i,h,u}^{(a,b)}$ se detalla en el apartado B.2.3. Los coeficientes auxiliares Ψ corresponden a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \Psi_{i,h,u,l,m}^{(0,0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}} \left(\frac{2}{3} \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} SP_i^l - 2PP_i^l \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u \right) \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(0,1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \left(\frac{B_{iu}^m}{2} \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} SP_i^l - B_{iu}^m PP_i^l \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u \right) \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(0,2)} &= 0 \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(0,3)} &= \frac{\hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu}}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} (SP_i^l E_{iu}^m) \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(1,0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}} \left(\frac{4}{3} \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \frac{8}{3} SP_i^l \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u \right) \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(1,1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \left(B_{iu}^m \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} - \frac{3}{2} B_{iu}^m PP_i^l \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u \right) \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(1,2)} &= 0 \\ \Psi_{i,h,u,l,m}^{(1,3)} &= \frac{E_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \left(2 \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,h,u,l,m}^{(2,0)} &= -\frac{10}{3} \frac{\hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{4\pi\epsilon C^3 D_i^{(l,m)}} \\
\Psi_{i,h,u,l,m}^{(2,1)} &= -\frac{B_{iu}^m \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{4\pi\epsilon C^2 D_i^{(l,m)}} \\
\Psi_{i,h,u,l,m}^{(2,2)} &= 0 \\
\Psi_{i,h,u,l,m}^{(2,3)} &= -\frac{2E_{iu}^m \hat{s}_i \cdot \hat{s}_u}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

donde \hat{s}_i , \hat{s}_u y \vec{R}_{iu} son los definidos en el capítulo 2, y se usan las variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
D_i^{(l,m)} &= \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^1 (s_{i+l} - s_{i+p}) \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^n (m - q) \Delta t \\
SP_i^l &= \sum_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^1 (s_i - s_{i+p}) \\
PP_i^l &= \prod_{\substack{p=-1 \\ p \neq l}}^1 (s_i - s_{i+p}) \\
SQ^m &= \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q \Delta t \\
PQ^m &= \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} q \Delta t \\
B_{iu}^m &= (SQ^m - 2\Delta t r_{i(h)u}) \\
TN^m &= \frac{\Delta t^3}{24} + \frac{\Delta t^2}{8} SQ^m + \frac{\Delta t}{2} PQ^m \\
E_{iu}^m &= \frac{\Delta t^3}{3} r_{i(h)u}^3 - \frac{\Delta t^2}{2} r_{i(h)u}^2 SQ^m + \Delta t r_{i(h)u} PQ^m + TN^m
\end{aligned} \tag{B.4}$$

B.2.2. Cálculo de la función auxiliar G

La expresión de F , para el caso de segmentación desigual, es:

$$G_{i,h,u,l,m} = \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{\Delta_{h(i)}} \left(c^2 \frac{\vec{R}_{iu} \cdot \hat{s}_u}{R_{iu}^3} \int_s B_i^{l,m} \Big|_{\Delta t/2}^{\Delta t/2} \right) ds_i'' \quad (\text{B.5})$$

que, de forma similar a lo expuesto en el apartado anterior, puede ser escrita como:

$$G_{i,h,u,l,m} = \sum_{a=0}^2 \Gamma_{i,h,u,l,m}^{(a,3)} I_{i,h,u}^{(a,3)} \quad (\text{B.6})$$

El cálculo de las integrales de línea $I_{i,h,u}^{(a,3)}$ se aborda analíticamente y se presenta en el apartado B.2.3, siendo el valor de las funciones $\Gamma_{i,h,u,l,m}^{a,3}$ el siguiente:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,h,u,l,m}^{(0,3)} &= \frac{K^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} SP_i^l \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} \\ \Gamma_{i,h,u,l,m}^{(1,3)} &= \frac{K^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \left(2 \hat{s}_u \cdot \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{s}_u \cdot \hat{s}_i \right) \\ \Gamma_{i,h,u,l,m}^{(2,3)} &= \frac{K^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} (2 \hat{s}_u \cdot \hat{s}_i) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde se han usado las mismas variables auxiliares presentadas en (B.4) junto a una constante K^m que se define como:

$$K^m = \frac{\Delta t^3}{12} + \Delta t PQ^m \quad (\text{B.8})$$

B.2.3. Cálculo analítico de las integrales en cada sub-segmento

El cálculo de las matrices de estructura F y G presentado en las dos secciones anteriores requiere el conocimiento de las integrales de línea $I_{i,h,u}^{(a,b)}$ definidas como:

$$I_{i,h,u}^{(a,b)} = \int_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} \frac{s_i''^a}{\left(R_{iu}^2 - 2s_i'' \hat{s}_i \cdot \vec{R}_{iu} + s_i''^2\right)^{b/2}} ds_i'' \quad (\text{B.9})$$

siendo ΔI_{ihu} y ΔF_{ihu} los límites de la integral de línea del subsegmento h , definidos respecto del punto central del segmento. Haciendo uso de las constantes

$$\begin{aligned} g &= -2\hat{s}_i \cdot \vec{R}_{iu} \\ e &= R_{iu}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

y basándose en la referencia [77], se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{i,h,u}^{(0,0)} &= \Delta F_{ihu} - \Delta I_{ihu} \\ I_{i,h,u}^{(0,1)} &= \ln(2 R_{iu}(s_i'') + |2s_i'' + g|) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} \\ I_{i,h,u}^{(0,2)} &= \begin{cases} \frac{2}{(4e-g^2)^{1/2}} \arctan\left(\frac{2s_i''+g}{(4e-g^2)^{1/2}}\right) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} & si \quad g^2 \neq 4e \\ -\frac{2}{2s_i''+g} \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} & si \quad g^2 = 4e \end{cases} \\ I_{i,h,u}^{(0,3)} &= \begin{cases} \frac{4s_i''+2g}{(4e-g^2)R_{iu}(s_i'')} \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} & si \quad g^2 \neq 4e \\ \frac{1}{2} \text{signo}(g) \left(-\frac{1}{(s_i''+g/2)^2}\right) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} & si \quad g^2 = 4e \end{cases} \\ I_{i,h,u}^{(1,0)} &= \frac{\Delta F_{ihu}^2}{2} - \frac{\Delta I_{ihu}^2}{2} \\ I_{i,h,u}^{(1,1)} &= R_{iu}(s_i'') \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} - \frac{1}{2} g I_{i,h,u}^{(0,1)} \\ I_{i,h,u}^{(1,2)} &= \ln(R_{iu}(s_i'')) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} - \frac{1}{2} g I_{i,h,u}^{(0,2)} \\ I_{i,h,u}^{(1,3)} &= \begin{cases} -\frac{4e+2gs_i''}{(4e-g^2)R_{iu}(s_i'')} \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} & si \quad g^2 \neq 4e \\ \text{signo}(g) \left(-\frac{1}{s_i''+g/2} + \frac{g}{4(s_i''+g/2)^2}\right) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} & si \quad g^2 = 4e \end{cases} \\ I_{i,h,u}^{(2,0)} &= \frac{\Delta F_{ihu}^3}{3} - \frac{\Delta I_{ihu}^3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i,h,u}^{(2,1)} &= \left(R_i u(s_i'') \left(\frac{1}{2} s_i'' - \frac{3}{4} g \right) \right) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} - \frac{1}{8} (3g^2 - 4e) I_{i,h,u}^{(0,1)} \\
I_{i,h,u}^{(2,2)} &= (s_i'' - g \ln(R_i u(s_i''))) \Big|_{\Delta I_{ihu}}^{\Delta F_{ihu}} - \frac{1}{2} (g^2 - 2e) I_{i,h,u}^{(0,2)} \\
I_{i,h,u}^{(2,3)} &= I_{i,h,u}^{(0,1)} - g I_{i,h,u}^{(1,3)} - e I_{i,h,u}^{(0,3)}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

B.3. Cálculo de los campos cercanos

Tanto en la presentación de los resultados del capítulo 4 como en el método híbrido se ha hecho uso del cálculo del campo creado por la estructura de hilo delgado sobre un punto cualquiera del espacio. En este apartado se presentarán las expresiones empleadas para su cálculo.

B.3.1. Cálculo del campo eléctrico cercano

La expresión del campo eléctrico dispersado por un hilo delgado es:

$$\vec{E}^S(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{C(s')} \left(\frac{\vec{R}_i}{cR_i^2} \left[\frac{\partial I(s', t')}{\partial s'} \right]_{t'} - q(s', t') \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} + \frac{\dot{s}'}{c^2 R_i} \frac{\partial I(s', t')}{\partial t'} \right) ds' \tag{B.12}$$

cuyo rango de validez se extiende a cualquier punto del espacio que cumpla $|\vec{R}_i| \geq a$, siendo \vec{R}_i el vector distancia entre los puntos campo y fuente, y el resto de los parámetros los introducidos en el capítulo 2.

La discretización de la expresión anterior mediante el método de los momentos se realiza de forma idéntica a la de la ecuación EFIE, lo que lleva a la siguiente expresión para el campo dispersado:

$$\vec{E}^s(\vec{r}, t_v) = - \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{i=-1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \begin{aligned} &\vec{F}_{i,h,l,m} I_{i+l,v-r_{i(h)}+m} \\ &+ \vec{G}_{i,h,l,m} Y_{i+l,v-r_{i(h)}-1+m} \end{aligned} \right\} \tag{B.13}$$

donde $r_{i(h)}$ se define como el entero más cercano al cociente $\frac{R_i(s_i'')}{c\Delta t}$. Es interesante notar que en este caso las funciones auxiliares de estructura poseen una forma vectorial. Sus expresiones vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{i,h,l,m} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{\Delta_{h(i)}} \left(\frac{\hat{s}_i}{R_i} {}_t B_i^{l,m} + c \frac{\vec{R}_i}{R_i^2} {}_s B_i^{l,m} + c^2 \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \int {}_s B_i^{l,m} \Big|_{\Delta t/2}^{t''_{j(h)}} \right) \\
\vec{G}_{i,h,l,m} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2} \int_{\Delta_{h(i)}} \left(c^2 \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \int {}_s B_i^{l,m} \Big|_{\Delta t/2}^{\Delta t/2} \right)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

que se pueden escribir de forma simplificada como:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{i,h,u,l,m} &= \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^3 S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(a,b)} I_{i,h}^{(a,b)} \\
\vec{G}_{i,h,u,l,m} &= \sum_{a=0}^2 S \vec{\Gamma}_{i,h,l,m}^{(a,3)} I_{i,h}^{(a,3)}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Nuevamente las integrales se calculan de forma analítica mediante las expresiones (B.11), mientras que las funciones auxiliares, en este caso vectoriales, se calculan mediante las expresiones:

$$\begin{aligned}
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(0,0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}} \left(\frac{2}{3} \vec{R}_i S P_i^l - 2 P P_i^l \hat{s}_i \right) \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(0,1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \left(\frac{B_{iu}^m}{2} \vec{R}_i S P_i^l - B_{iu}^m P P_i^l \hat{s}_i \right) \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(0,2)} &= 0 \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(0,3)} &= \frac{\vec{R}_i}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} (S P_i^l E_{iu}^m) \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(1,0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}} \left(\frac{4}{3} \vec{R}_i - \frac{8}{3} S P_i^l \hat{s}_i \right) \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(1,1)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \left(B_{iu}^m \vec{R}_i - \frac{3}{2} B_{iu}^m P P_i^l \hat{s}_i \right) \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(1,2)} &= 0 \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(1,3)} &= \frac{E_{iu}^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \left(2 \vec{R}_i - S P_i^l \hat{s}_i \right) \\
S \vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(2,0)} &= -\frac{10}{3} \frac{\hat{s}_i}{4\pi\epsilon c^3 D_i^{(l,m)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S\vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(2,1)} &= -\frac{B_{iu}^m \hat{s}_i}{4\pi\epsilon c^2 D_i^{(l,m)}} \\
S\vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(2,2)} &= 0 \\
S\vec{\Psi}_{i,h,l,m}^{(2,3)} &= -\frac{2E_{iu}^m \hat{s}_i}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
S\vec{\Gamma}_{i,h,l,m}^{(0,3)} &= \frac{K^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} SP_i^l \vec{R}_{iu} \\
S\vec{\Gamma}_{i,h,l,m}^{(1,3)} &= \frac{K^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} \left(2 \vec{R}_{iu} - SP_i^l \hat{s}_i \right) \\
S\vec{\Gamma}_{i,h,l,m}^{(2,3)} &= \frac{K^m}{4\pi\epsilon D_i^{(l,m)}} (2 \hat{s}_i)
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Las constantes auxiliares se definen de forma idéntica a como se hizo en el apartado anterior para el cálculo de las matrices de estructura, sin más que sustituir $r_{i(h)u}$ por $r_{i(h)}$.

B.3.2. Cálculo del campo magnético cercano

El campo magnético creado por un hilo delgado se determina mediante la ecuación:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{C(s')} \left(\frac{\hat{s}'}{R_i^2} I(s', t') + \frac{\hat{s}'}{cR} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} I(s', t') \right) \times \frac{\vec{R}}{R} ds' \tag{B.18}$$

cuyo rango de validez comprende a todos aquellos puntos situados en la zona exterior al hilo ($|\vec{R}_i| \geq a$). De forma similar a como se hizo en los casos anteriores, la discretización del cómputo lleva a la expresión:

$$\vec{H}(\vec{r}, t_v) = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{h=1}^{N_{h(i)}} \sum_{i=-1}^1 \sum_{m=n}^{n+2} \left\{ \vec{M}_{i,h,l,m} I_{i+l,v-r_{i(h)}+m} \right\} \tag{B.19}$$

donde la función auxiliar de la estructura se define como

$$\vec{M}_{i,h,l,m} = \int_{\Delta h(i)} \left(\frac{\hat{s}'_i}{R_i^2} B_i^{(l,m)} \times \vec{R}_i + \frac{\hat{s}'_i}{cR_i} {}_t B_i^{(l,m)} \times \vec{R}_i \right) ds'' \tag{B.20}$$

y se calcula usando la expresión

$$\vec{M}_{i,h,l,m} = \sum_{a=0}^3 \sum_{b=1}^3 S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(a,b)} I_{i,h}^{(a,b)} \quad (\text{B.21})$$

donde las integrales vienen dadas nuevamente por las expresiones (B.11), y los términos auxiliares $S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(a,b)}$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(0,1)} &= -\frac{\hat{s}_i \times \vec{R}_i}{4\pi c^2 D_i^{(l,m)}} P P_i^l \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(0,2)} &= 0 \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(0,3)} &= \frac{\hat{s}_i \times \vec{R}_i}{4\pi D_i^{(l,m)}} A_i^m P P_i^l \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(1,1)} &= -\frac{\hat{s}_i \times \vec{R}_i}{4\pi c^2 D_i^{(l,m)}} S P_i^l \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(1,2)} &= 0 \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(1,3)} &= \frac{\hat{s}_i \times \vec{R}_i}{4\pi D_i^{(l,m)}} A_i^m S P_i^l \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(2,1)} &= -\frac{\hat{s}_i \times \vec{R}_i}{4\pi c^2 D_i^{(l,m)}} A_i^m \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(2,2)} &= 0 \\ S\vec{\Upsilon}_{i,h,l,m}^{(1,3)} &= \frac{\hat{s}_i \times \vec{R}_i}{4\pi D_i^{(l,m)}} A_i^m \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

donde todas las constantes han sido ya definidas excepto

$$A_i^m = P Q^m - S Q^m \cdot \Delta t \cdot r_{i(h)} + \Delta t^2 \cdot r_{i(h)}^2 \quad (\text{B.23})$$

B.4. Cálculo de las ecuaciones adicionales en uniones con segmentación no uniforme

Como se ha visto en el capítulo 2, se deben añadir $NH - 1$ ecuaciones adicionales en cada unión, resultantes de desarrollar en función de las variables computacionales la expresión

$$\left. \frac{\partial I_{2,k}}{\partial s_2''} \right|_{s_2'' = -\Delta_k/2} - \left. \frac{\partial I_{1,k-1}}{\partial s_1''} \right|_{s_1'' = \Delta_k/2} = \left. \frac{\partial I_{A,k+1}}{\partial s_A''} \right|_{s_A'' = -\Delta_{k+1}/2} - \left. \frac{\partial I_{1,k}}{\partial s_1''} \right|_{s_1'' = \Delta_{k+1}/2} \quad (\text{B.24})$$

Se ha sustituido en la expresión anterior la corriente por su desarrollo mediante la interpolación lagrangiana definida en (2.41). Tras derivar y reorganizar los términos, se han obtenido las siguientes $NH - 1$ ecuaciones adicionales:

$$\begin{aligned} k = 1 & \longrightarrow \begin{aligned} & A_1 \cdot I_{1,k} + A_2 \cdot I_{2,k} + A_3 \cdot I_{3,k} \\ & \quad - B_1 \cdot I_{1,NH} \\ & -C_1 \cdot I_{1,k+1} - C_2 \cdot I_{2,k+1} - C_3 \cdot I_{3,k+1} = 0 \end{aligned} \\ k = 2 : NH - 2 & \longrightarrow \begin{aligned} & A_1 \cdot I_{1,k} + A_2 \cdot I_{2,k} + A_3 \cdot I_{3,k} \\ & \quad - B_1 \cdot I_{1,k-1} - B_2 \cdot I_{2,k-1} \\ & -C_1 \cdot I_{1,k+1} - C_2 \cdot I_{2,k+1} - C_3 \cdot I_{3,k+1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.25}) \\ k = NH - 1 & \longrightarrow \begin{aligned} & A_1 \cdot I_{1,k} + A_2 \cdot I_{2,k} + A_3 \cdot I_{3,k} \\ & \quad - B_1 \cdot I_{1,k-1} - B_2 \cdot I_{2,k-1} \\ & \quad - C_1 \cdot I_{1,NH} = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

donde se ha obviado la dependencia temporal de los términos de corriente por simplicidad de la notación. Las variables auxiliares A, B y C se definen a continuación:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-8\Delta_k}{(\Delta_k + \Delta_{k+1})(3\Delta_k + \Delta_{k+1})} - \frac{3\Delta_{k+1} - \Delta_k}{\Delta_{k+1}(\Delta_k + \Delta_{k+1})} \\ A_2 &= \frac{8\Delta_{k+1}}{(\Delta_k + \Delta_{k+1})(\Delta_k + 3\Delta_{k+1})} - \frac{\Delta_{k+1} - 3\Delta_k}{\Delta_k(\Delta_k + \Delta_{k+1})} \\ A_3 &= \frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{\Delta_k(3\Delta_k + \Delta_{k+1})} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$B_1 = \begin{cases} -\frac{3\Delta_k - \Delta_{k-1}}{\Delta_k(\Delta_{k-1} + \Delta_k)} & \text{si } k \neq 1 \\ \frac{1}{NH} & \text{si } k = 1 \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

$$B_2 = \frac{8\Delta_k}{(\Delta_{k-1} + 3\Delta_k)(\Delta_{k-1} + \Delta_k)}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \begin{cases} \frac{-8\Delta_{k+1}}{(\Delta_{k+1}+\Delta_{k+2})(3\Delta_{k+1}+\Delta_{k+2})} & \text{si } k \neq NH - 1 \\ \frac{1}{NH} & \text{si } k = NH - 1 \end{cases} \\
C_2 &= -\frac{\Delta_{k+2} - 3\Delta_{k+1}}{\Delta_{k+1}(\Delta_{k+1} + \Delta_{k+2})} \\
C_3 &= \frac{\Delta_{k+2} - \Delta_{k+1}}{\Delta_{k+1}(3\Delta_{k+1} + \Delta_{k+2})}
\end{aligned} \tag{B.28}$$

APÉNDICE C

El factor de calidad Q

C.1. Definición

El factor de calidad Q de una red eléctrica se define como [5, 7]:

$$Q = \frac{\omega W}{P_d} \quad (\text{C.1})$$

donde ω es la frecuencia angular de resonancia, W es la energía media almacenada en la red, y P_d es la potencia disipada. En caso de trabajar con redes no resonantes, la potencia de entrada al sistema se define, en el dominio de la frecuencia, como:

$$P_{in} = P_d + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (\text{C.2})$$

siendo W_m y W_e las energías almacenadas medias en los campos magnético y eléctrico, respectivamente. Para hacer la red resonante y por tanto la impedancia de entrada resistiva, se debe añadir algún elemento que almacene energía, de forma que se anule la energía reactiva neta. En este caso, el factor de calidad de la red resultante viene dada por:

$$Q = \frac{2\omega W}{P_d} \quad (\text{C.3})$$

donde W es en este caso la mayor de las energías W_m y W_e de la red original, en módulo, y P_d la potencia disipada en la red original. Suponiendo que el

elemento reactivo introducido no tiene pérdidas, dicha P_d coincide con la potencia disipada en la nueva red.

Así pues, en el caso de una antena, se puede considerar que el parámetro definido por (C.3) es el factor de calidad Q de la antena a la frecuencia ω , sea ésta o no su frecuencia de resonancia, siempre que dicha antena se sintonice para ser resonante mediante elementos externos ideales.

C.2. Expresión analítica para el cálculo del factor de calidad Q

Durante los últimos años se ha dedicado un importante esfuerzo enfocado a la obtención de una expresión analítica para el cálculo del factor de calidad Q . En este apartado se presenta una de las expresiones habitualmente empleadas para tal fin [26, 27], apuntando las aproximaciones realizadas y mostrando cómo su rango de validez impide el estudio de ciertas antenas pequeñas, como por ejemplo los lazos de Koch.

Para obtener el parámetro Q , es necesario en primer lugar conocer una expresión que relacione la energía almacenada con la impedancia de entrada de la antena. Para ello, se seguirá el desarrollo teórico presentado por Harrington [67]. Supóngase en primer lugar que se tiene un sistema como el de la figura C.1, en el que se puede encontrar una superficie S tal que el campo sea nulo en toda ella excepto en su alimentación. En dicha alimentación se puede considerar que los campos eléctrico y magnético vienen dados por la expresión:

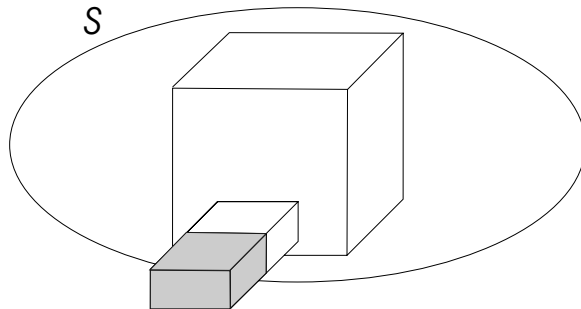


Figura C.1: Monopuerto y superficie S con campo nulo excepto en su alimentación (en gris).

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{e} \cdot V \\ \vec{H} &= \vec{h} \cdot I\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

donde V e I son la tensión y corriente modal en el plano de referencia, es decir en el plano donde la superficie S corta a la guía de entrada. Entonces se puede calcular la potencia de entrada P_{in} como:

$$P_{in} = - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) ds = -VI^* \oint_S (\vec{e} \times \vec{h}) ds = VI^* \quad (\text{C.5})$$

Así pues se tiene la potencia de entrada relacionada con la tensión y la corriente a la entrada del monopuerto, al igual que se tenía relacionada con la potencia disipada y las energías almacenadas eléctrica y magnética en la expresión (C.2). Se puede definir por tanto la impedancia de entrada Z como:

$$Z = \frac{V}{I} = R_{in} + jX_{in} = \frac{P_{in}}{|I|^2} = \frac{1}{|I|^2} [P_d + 2j\omega (W_m - W_e)] \quad (\text{C.6})$$

Suponiendo un monopuerto sin pérdidas, la potencia disipada es nula, por lo que la impedancia de entrada es imaginaria. Es importante tener en cuenta que esta suposición no contempla la posibilidad de que existan pérdidas de radiación de la antena, con su consiguiente resistencia de radiación.

Se supone un medio lineal, homogéneo e isótropo sin pérdidas, con lo que las ecuaciones de Maxwell se definen como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (\text{C.7})$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (\text{C.8})$$

Derivando las ecuaciones anteriores y multiplicándolas por los campos magnético y eléctrico, respectivamente, para posteriormente restarlas, se obtiene la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} \times \vec{E}^* - \frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega} \times \vec{H}^* \right) = j\varepsilon |\vec{E}|^2 + j\mu |\vec{H}|^2 \quad (\text{C.9})$$

La ecuación anterior es el punto de partida para la obtención de la energía almacenada por la antena. Si se integra dicha expresión en toda la región del

espacio contenida por la superficie S , el segundo término, teniendo en cuenta que se trata de valores eficaces de campo, se corresponde con:

$$\int_V \left(j\varepsilon |\vec{E}|^2 + j\mu |\vec{H}|^2 \right) dv = 2j (W_e + W_m) \quad (\text{C.10})$$

con lo que, aplicándole el teorema de la divergencia al primer término de (C.9) se obtiene:

$$\int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} \times \vec{E}^* - \frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega} \times \vec{H}^* \right) = 2j (W_e + W_m) \quad (\text{C.11})$$

Sustituyendo la expresión (C.4) en (C.11), se puede escribir la integral de superficie en función de la tensión y la corriente en el plano de referencia, con lo que queda:

$$I^* \frac{\partial V}{\partial \omega} + V^* \frac{\partial I}{\partial \omega} = 2j (W_e + W_m) \quad (\text{C.12})$$

Al no existir pérdidas, la impedancia de entrada se puede escribir como $Z = jX_{in}$ o también la admitancia de entrada como $Y = jB_{in}$, con lo que:

$$\frac{\partial X_{in}}{\partial \omega} = -\frac{j}{I} \frac{\partial V}{\partial \omega} \Big|_{I \text{ constante}} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial B_{in}}{\partial \omega} = -\frac{j}{V} \frac{\partial I}{\partial \omega} \Big|_{V \text{ constante}}$$

Así pues, suponiendo una alimentación constante en frecuencia bien en tensión, bien en corriente, se puede sustituir la expresión anterior en (C.12), haciendo uso también de (C.6) supuesta nula la potencia disipada, para obtener el sistema de ecuaciones con el que se calculan W_e y W_m como:

$$W_m = \frac{|V|^2}{4} \left(\frac{\partial B_{in}}{\partial \omega} - \frac{B_{in}}{\omega} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$W_e = \frac{|V|^2}{4} \left(\frac{\partial B_{in}}{\partial \omega} + \frac{B_{in}}{\omega} \right) \quad (\text{C.15})$$

Por tanto, se ha obtenido una expresión cerrada para el cálculo de las energías eléctrica y magnética almacenadas por los campos cercanos, suponiendo

un monopuerto sin pérdidas de ningún tipo, a partir de sus impedancias de entrada.

El desarrollo de la expresión del parámetro Q a partir de la expresión anterior se basa en la suposición de que ésta es válida aun en el caso de que exista una resistencia de radiación. En este caso, la potencia disipada se puede escribir como:

$$P_d = |I|^2 R_{in} = |V|^2 G_{in} \quad (C.16)$$

siendo G_{in} la conductancia de entrada. Sustituyendo (C.14) y (C.16) en (C.3) se obtiene la siguiente expresión:

$$Q(\omega) = \frac{\omega}{2G_{in}} \left(\frac{\partial B_{in}}{\partial \omega} + \left| \frac{B_{in}}{\omega} \right| \right) \quad (C.17)$$

o su equivalente con impedancias, más usado en bibliografía:

$$Q(\omega) = \frac{\omega}{2R_{in}} \left(\frac{\partial X_{in}}{\partial \omega} + \left| \frac{X_{in}}{\omega} \right| \right) \quad (C.18)$$

Un estudio detallado del proceso que se ha seguido para el cálculo de la anterior expresión lleva a la conclusión de que se ha cometido una incongruencia, dado que el cálculo de la energía almacenada por los campos eléctrico y magnético se ha realizado suponiendo la ausencia de pérdidas por radiación, mientras que el cálculo de la potencia disipada se ha realizado suponiendo su existencia [181]. Esta dificultad la han tratado de solventar algunos autores [182] mediante el uso de modelos circuitales bastante imprecisos de la antena, llegando a resultados incorrectos tales como que la pendiente de la reactancia de una antena debe ser siempre positiva. Otros estudios llevados a cabo más recientemente [181] usan un modelo de red de microondas que parece más adecuado para el cálculo de Q , si bien sus resultados son aún preliminares.

Durante el desarrollo de esta Tesis, y debido a la ausencia de mejores aproximaciones teóricas a la expresión del factor de calidad, se ha usado (C.18) en aquellos casos en que las pérdidas por radiación de la antena son pequeñas, puesto que en ese caso la expresión de la energía almacenada puede ser una buena aproximación [67]. Es importante notar que en el caso de antenas pequeñas, en general malos radiadores, dicha expresión suele ser una buena aproximación. Sin embargo, existen estructuras en las cuales el cálculo del factor de calidad ha supuesto un serio problema y ha tenido que ser descartado, como por ejemplo el caso del bucle fractal de Koch, que se muestra en la figura C.2. En la figura C.3 se puede ver el factor de calidad

obtenido mediante (C.18) para la antena prefractal de Koch tipo lazo de segundo orden en función de la frecuencia, comprobándose cómo el cálculo se deforma en las proximidades de las resonancias, dando lugar a valores de Q menores a la unidad.

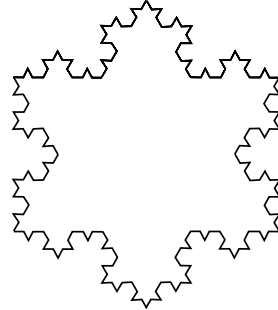


Figura C.2: Geometría de la antena tipo lazo fractal de Koch de tercer orden.

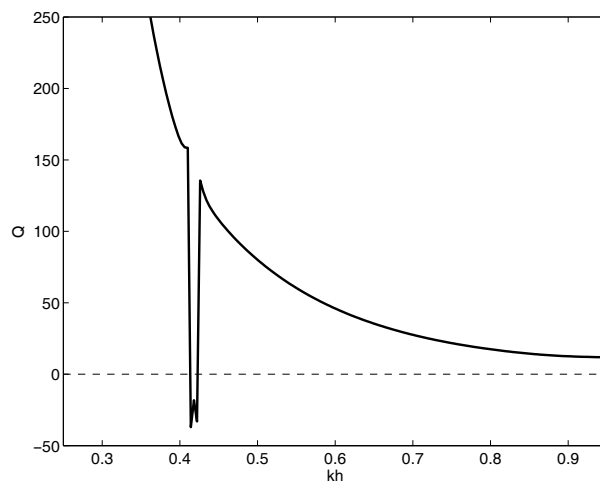


Figura C.3: factor de calidad Q de la antena tipo lazo fractal de Koch de segundo orden, obtenido con la aproximación (C.18).

Muy recientemente se ha presentado una nueva expresión para el factor de calidad Q [183,184]. Su principal ventaja con respecto a la anterior es que en su desarrollo se tiene en cuenta tanto la radiación de la antena como sus

pérdidas a la hora de estudiar la energía almacenada. La expresión presentada es la siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{\omega}{2R_{in}} \frac{\partial X_{in}}{\partial \omega} - \frac{2\omega}{|I_0|^2 R_{in}} |W_{\mathcal{L}}(\omega) + W_{\mathcal{R}}(\omega)| \quad (C.19)$$

donde el factor de calidad depende no sólo de la derivada frecuencial de la reactancia de entrada, sino también de los términos $W_{\mathcal{L}}(\omega)$ y $W_{\mathcal{R}}(\omega)$, que se definen a continuación. El primero de ellos tiene en cuenta la dispersión de energía en el hilo, y se puede calcular como [184]:

$$W_{\mathcal{L}}(\omega) = Im \int_{wire\ length} R(l) \frac{\partial I(l)}{\partial \omega} I^*(l) dl \quad (C.20)$$

siendo $R(l)$ la resistencia por unidad de longitud del hilo. En cuanto al otro, $W_{\mathcal{R}}(\omega)$, se trata de un término de dispersión de campo lejano dado por

$$W_{\mathcal{R}}(\omega) = \frac{1}{2Z_f} \int_{4\pi} Im \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \omega} \cdot \vec{F}^* \right) d\Omega \quad (C.21)$$

donde Z_f es la impedancia del espacio libre y \vec{F} el diagrama de radiación complejo de la antena.

En [183] se demuestra también que la expresión (C.19) se puede aproximar por:

$$Q(\omega) = \frac{\omega}{2R_{in}} \left| \frac{\partial Z_{in}}{\partial \omega} \right| \quad (C.22)$$

siendo

$$\left| \frac{\partial Z_{in}}{\partial \omega} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{in}}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_{in}}{\partial \omega} + \frac{|X_{in}|}{\omega} \right)^2} \quad (C.23)$$

La expresión (C.22) se ha usado para calcular el factor de calidad Q de la misma antena presentada en la figura C.2. El resultado obtenido se puede ver en la figura C.4 comparado con el obtenido mediante el uso de la expresión (C.18). Se puede comprobar que para frecuencias lejanas a las resonancias ambas expresiones dan lugar a resultados muy similares, mientras que para frecuencias próximas a ellas la expresión (C.18) da lugar a valores incorrectos del factor de calidad ($Q < 0$). Aunque el factor de calidad calculado con (C.22) sigue siendo inexacto en la primera resonancia de la antena (máximo de la admitancia), no es así en la segunda (máximo de la impedancia).

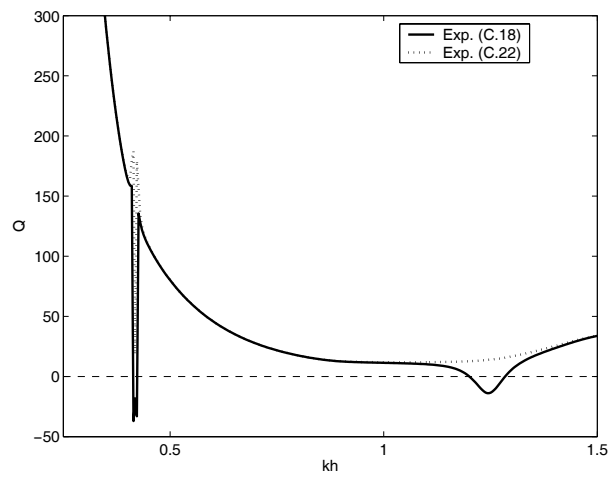


Figura C.4: Comparación entre el factor de calidad Q de la antena tipo lazo fractal de Koch obtenido con la aproximación (C.22) y el obtenido con la expresión (C.18).

APÉNDICE D

Algoritmo para el cálculo de la Tasa de Absorción Específica (SAR)

En el capítulo 6 se ha definido la Tasa de Absorción Específica (SAR) y se han descrito algunas de las normativas existentes que limitan su valor máximo permitido en el cuerpo humano. Para calcularlo, de acuerdo con dichas normativas, se hace necesaria la obtención de regiones cúbicas de una cierta masa de promediado m_p . En esta Tesis se hace uso del algoritmo de crecimiento de regiones presentado en [178] para el cálculo del SAR mediante FDTD, modificado de forma conveniente para el cumplimiento de las últimas recomendaciones de IEEE [179] y para permitir, al contrario que en [178], el cálculo del SAR en todas las celdas del modelado usado. A continuación se describe dicho algoritmo ¹:

1. Se elige un cubo teniendo como centro el mismo que el de la celda a la que se desea calcular el SAR, con un número de celdas tal que la masa del cubo sea mayor que la masa de promediado. La última capa del cubo se denomina *cubierta* del cubo, y al resto *núcleo*.
2. Dado que la masa del volumen obtenido tras el paso anterior es mayor

¹Aunque el algoritmo es generalizable a zonas discretizadas no uniformemente y con celdas no cúbicas, por simplicidad se describe para el caso de celdas cúbicas y uniformes.

a la masa de promediado, se debe determinar la fracción $f = \frac{\delta x}{\Delta x}$ de las celdas de la cubierta que deben formar parte del volumen de promediado, donde δx es el tamaño de la parte de celda que corresponde a dicho volumen, y Δx el tamaño de la celda FDTD.

Para ilustrar el cálculo de dicha fracción, se considera el ejemplo que se muestra en la figura D.1, donde se quiere calcular el valor de SAR en el centro de la celda de volumen Δx^3 dibujada en color rojo. Se supone que la región de promediado requerida debe tener $m_p = 1$ gramo y que la masa de la celda problema es $m_1 < 1$ gramo, por lo que se construye un volumen cúbico de $3 \times 3 \times 3$ celdas centrado en la posición de cálculo de SAR, y cuya masa es mayor que 1.05 gramos (límite superior recomendado por el IEEE para realizar el promediado). Esto conlleva la imposibilidad de cumplir la normativa de IEEE sin usar un modelo más fino de la cabeza, con la consiguiente pérdida de tiempo y quizás la imposibilidad de llevar a cabo la simulación computacional. Para evitarlo, se puede determinar la fracción f del volumen de la cubierta a añadir al núcleo para conseguir exactamente la masa $m_p = 1$ gramo. Así, el SAR se promedia en el volumen del núcleo más dicha fracción de corteza.

Para ello se incrementa en cada dimensión el tamaño del cubo inicial o núcleo, en rojo en la figura, en una longitud δx (ver flechas azules). Se obtiene como resultado un nuevo cubo formado por el núcleo unido a una serie de paralelepípedos correspondientes a los pedazos de cada una de las celdas de la cubierta. Dichos pedazos tienen distintas dimensiones según sea el tipo de celda que los incluye (celdas tipo 'cara', 'arista' o 'vértice'). En la figura se han representado en amarillo los paralelepípedos correspondientes a las celdas 'vértice' de la cubierta, en gris a las celdas 'cara' y en morado a las tipo 'arista'. Los trozos de celdas 'vértice' tienen una dimensión $\delta x \times \delta x \times \delta x$, por lo que su masa y volumen serán los correspondientes a la celda de la que forman parte multiplicados por el factor f^3 . El paralelepípedo correspondiente a una celda tipo arista tiene dimensiones $\Delta x \times \delta x \times \delta x$, por lo que su masa y volumen se relacionan con los de su celda original por el factor f^2 . Por último, el paralelepípedo resultante del crecimiento anterior en una celda lateral tiene dimensión $\Delta x \times \Delta x \times \delta x$, y su masa y volumen quedan relacionados con los de su celda por el factor f .

En consecuencia, la masa de la fracción f del volumen de cubierta a considerar viene dada por:

$$m_f = vf^3 + af^2 + cf \quad (\text{D.1})$$

siendo v la suma de las masas de las doce celdas que forman los vértices de la cubierta, a la de las ocho celdas de tipo arista, y c la de las seis celdas tipo 'cara', o en general la suma de todas las celdas en cada cara. Para determinar el valor de f se debe igualar m_f a la masa requerida para la capa externa (es decir, la masa de promediado menos la del núcleo).

3. A continuación se suman las potencias de las celdas que forman la región (núcleo más fracción f de corteza), usando para ello en cada celda la expresión (6.4). Al sumar las potencias disipadas en las celdas que forman parte de la cobertura de la región se debe tener en cuenta que el volumen de dichas celdas a usar en dicha expresión es el correspondiente a la fracción f de la celda, lo que supone un volumen $V_v = f^3V_{i,j,k}$ para las celdas vértice, $V_a = f^2V_{i,j,k}$ para las celdas arista, y $V_c = fV_{i,j,k}$.
4. El cálculo del SAR se completa dividiendo la potencia obtenida en el paso anterior entre la masa de promediado m_p .

En el algoritmo anterior se ha considerado que todas las celdas implicadas en el cálculo son celdas constituyentes del modelo de cuerpo humano. Sin embargo, en zonas externas de dicho modelo, la región obtenida a partir de este algoritmo puede tener un alto número de celdas de aire. Dichas celdas no contribuyen al SAR obtenido de forma directa, al ser su conductividad nula. Sin embargo, en la práctica obligan al promediado sobre regiones de tejido no cúbicas. En las primeras versiones de la normativa [167] no estaba considerada la existencia en el cubo de promediado de un elevado número de celdas de aire. Algunos autores [178] han optado por limitar el número de celdas de aire admisibles dentro del volumen. En otros trabajos [96], se ha evitado que el cubo de promediado se extienda más allá del volumen ocupado por el tejido, es decir, que al menos una celda de cada cara de dicho cubo no sea de aire, a la vez que se impide la existencia de un porcentaje elevado de celdas de aire. Evidentemente, el valor de SAR obtenido depende del tratamiento particular que se elija para los volúmenes que incluyan celdas de aire.

El IEEE, en su última recomendación [179], propone el uso de un número indefinido de celdas de aire en el cálculo, siempre que se evite la existencia de caras en el cubo de promediado formadas únicamente por aire. Ésta ha sido la opción utilizada en esta Tesis. En la figura D.2 se pueden ver, en un

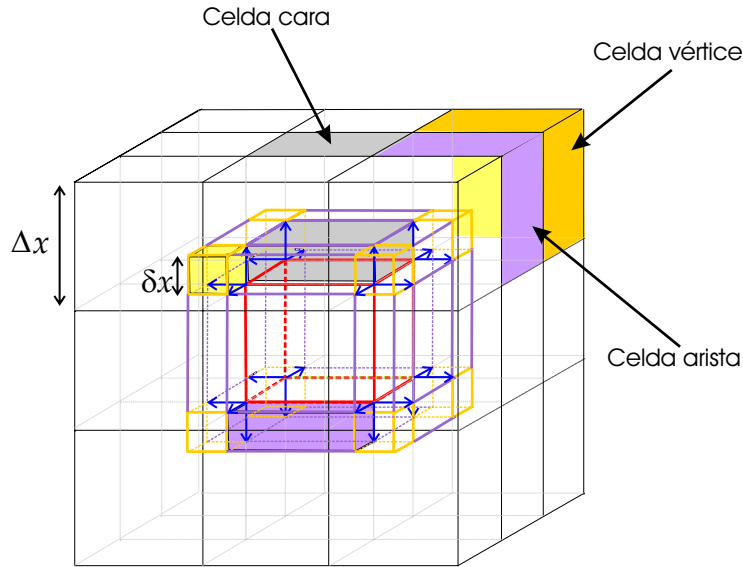


Figura D.1: Volumen tridimensional para el cálculo del SAR en la celda (i, j, k) .

problema bidimensional, dos posibles cubos de masa mayor a la de promediado resultantes para dos celdas $C1$ y $C2$. En la celda $C1$ se puede calcular el SAR, según la recomendación IEEE, puesto que todas las caras del cubo de promediado tienen al menos una celda con tejido. Sin embargo, la celda $C2$ tiene un SAR indeterminado al no poder construirse un cubo centrado en ella que tenga en todas sus caras al menos una celda de tejido.

Al finalizar el proceso de cálculo del SAR, existe un cierto número de celdas cuyo SAR queda indefinido. Para otorgarles un valor, es necesario que durante todo el proceso se habilite un marcado de todas las celdas que han sido usadas para el promediado del SAR en alguna otra celda (ver figura D.2). A todas las celdas marcadas como 'usadas' y con SAR indefinido, se les otorgará el valor máximo de SAR de entre todas las celdas que las hayan utilizado al promediar.

Únicamente aquellas posiciones que no hayan sido parte de ningún volumen de promediado quedan marcadas tras el algoritmo como 'no usadas'. Para estas celdas, y de acuerdo a la normativa de IEEE [179], se elige un nuevo volumen de promediado, alineando una de las caras del volumen de promediado en la celda en la que se pretende calcular el SAR (ver figura D.3). Evidentemente, dado que se puede comenzar fijando cualquiera de las seis

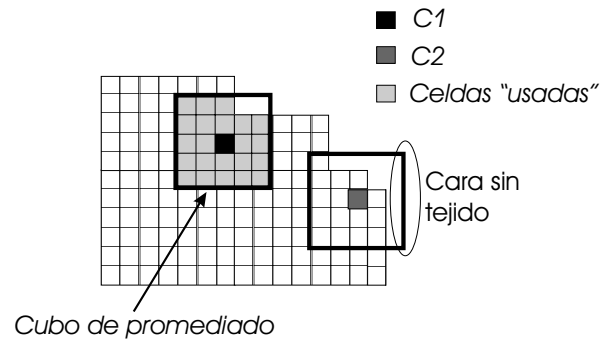


Figura D.2: Celdas en las que se puede calcular el SAR de forma directa ($C1$) y celdas ($C2$) en las que no es posible por tener el cubo de promediado una cara con todas sus celdas de aire.

caras del cubo, existen seis posibles cubos que se pueden obtener de dicho algoritmo, de los cuales se elige el que ocupe un menor volumen.

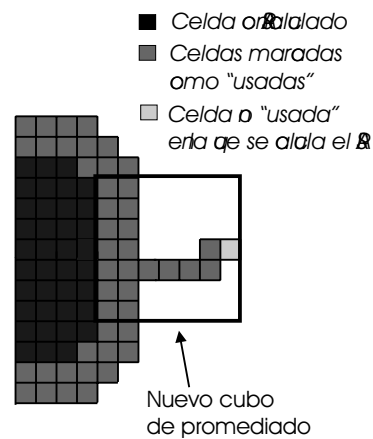


Figura D.3: Elección del cubo de promediado en celdas marcadas como 'no usadas'.

Al igual que en el caso del cálculo del SAR centrado en la celda (i,j,k) , es posible que la masa del volumen cúbico obtenido formado por un número entero de celdas sea mayor del marcado por la normativa. Para superar este problema, se ha desarrollado un algoritmo similar al presentado en [178], que consigue un volumen cúbico de masa exactamente igual a la masa de

promediado m_p , si bien en este caso teniendo en cuenta que la celda en la que se calcula el SAR no está centrada en el cubo sino en una de sus caras. En la figura D.4 se puede ver un ejemplo de región obtenida mediante la aplicación de este nuevo algoritmo. Se dibuja en rojo la celda en cuyo centro se está calculando el SAR, y se supone que su masa es menor que la masa de promediado. Si el volumen cúbico se extiende en una determinada dirección (llamémosla \hat{n}), se obtiene, para este ejemplo, un volumen de $3 \times 3 \times 3$ celdas cuya masa se supone que es nuevamente mayor que la marcada en las normativas, concretamente 1,05 gramos en caso de usar la recomendación de IEEE. Por tanto se debe calcular la fracción $f = \frac{\delta x}{\Delta x}$ de las celdas de la cubierta que forman el volumen de masa $m_f = m_p - m_n$, siendo m_n la masa del núcleo, dibujado en rojo en la figura D.4. Es interesante notar que en la dirección \hat{n} existen dos capas de celdas que, dependiendo del valor de f , darán lugar a volúmenes distintos a considerar en el promediado, ya que el vector que determina el crecimiento en esa dirección es de longitud $2\delta x$. Así, en el caso de que $f < 1/2$, únicamente se usan en el volumen celdas de la 'Capa 1', mientras que si $f > 1/2$ se usan también las celdas de la 'Capa 2'. En el caso presentado en la figura, por ejemplo, las celdas de la 'Capa 2' no han llegado a ser utilizadas en la región cúbica, puesto que el valor de f es menor a $1/2$.

En la figura D.4 se han dibujado en gris y violeta las celdas de la cubierta tipo cara y arista, respectivamente, surgidas al expandir el volumen inicial (en rojo) en direcciones perpendiculares a \hat{n} . El volumen de estos paralelepípedos se calcula de forma similar al ejemplo mostrado en la figura D.1. Sin embargo, en la dirección \hat{n} , los paralelepípedos correspondientes a cada celda de la cubierta tienen tamaños dependientes tanto de su posición en el cubo (cara, arista o vértice) como del valor de f . Se puede comprobar que la masa, m_f , del volumen cúbico correspondiente a un cierto factor f es:

$$m_f = \begin{cases} fm_{c,1} + f^2m_{a,1} \\ +2fm_{cn,1} + 2f^2m_{an,1} + 2f^3m_{vn,1} & \text{si } f \leq \frac{1}{2} \\ \\ m_{n,2} + fm_{c,2} + f^2m_{a,2} \\ +(2f-1)m_{cn,2} + (2f-1)fm_{an,2} + (2f-1)f^2m_{vn,2} & \text{si } f > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

siendo los valores de las constantes en la ecuación (D.2) los descritos a continuación. En primer lugar para el caso $f < 1/2$:

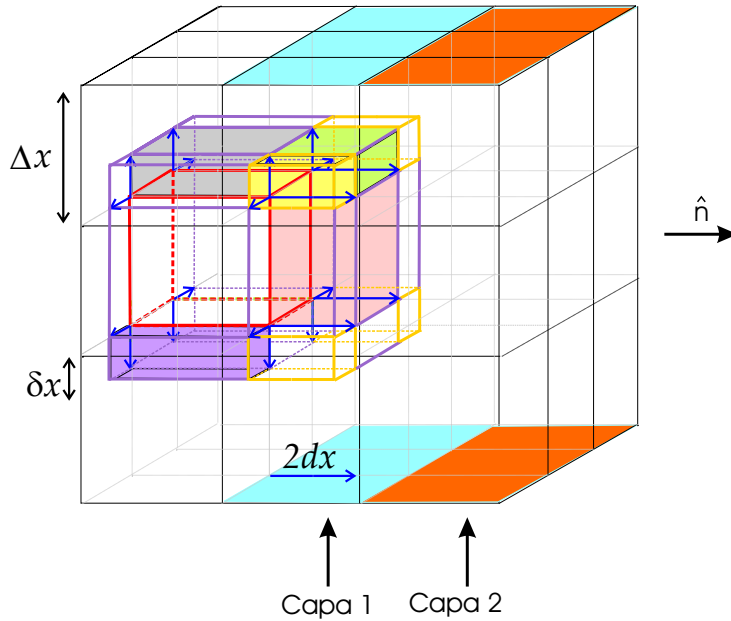


Figura D.4: Volumen tridimensional para el cálculo del SAR en la celda (i,j,k) en celdas marcadas como 'no usadas'.

- $m_{c,1}$ es la masa de las celdas laterales colindantes con el núcleo en cada una de las cuatro direcciones sobre la red FDTD perpendiculares a \hat{n} . Un ejemplo se puede ver en gris en la figura anterior.
- $m_{a,1}$ es la masa a considerar debida a las celdas de tipo arista no pertenecientes a la 'Capa 1', como por ejemplo la pintada en color violeta.
- $m_{cn,1}$ se corresponde con la suma de las masas de las celdas laterales pertenecientes a la 'Capa 1', que crecen en dirección \hat{n} a partir del núcleo, como la dibujada en rosa en la figura anterior.
- $m_{an,1}$ es la masa de las celdas de tipo arista pertenecientes a la 'Capa 1'. En la figura D.4 se ha pintado como ejemplo una de ellas en color verde.
- $m_{vn,1}$ es la masa de las celdas que forman vértice pertenecientes a la 'Capa 1', y se ha dibujado en la figura con color amarillo una de ellas como ejemplo.

En el caso de que $f > 1/2$, hay que tener en cuenta que las celdas de la 'Capa 1' tipo 'vértice', 'arista' y 'cara' se convierten, respectivamente, en celdas tipo 'arista', 'cara' y 'núcleo', por lo que los paralelepípedos correspondientes a dichas celdas de la 'Capa 1' modifican su volumen y por tanto su masa. Así, se definen los siguientes términos de la expresión (D.2):

- $m_{n,2} = m_{cn,1}$
- $m_{c,2} = m_{c,1} + m_{an,1}$
- $m_{a,2} = m_{a,1} + m_{vn,1}$
- $m_{cn,2}$ es la suma de las masas correspondientes a todas las celdas laterales en la dirección \hat{n} de la 'Capa 2'.
- $m_{an,2}$ se corresponde con la masa de las aristas pertenecientes a la 'Capa 2'.
- $m_{vn,2}$ es, por último, la masa de las celdas tipo arista pertenecientes a la 'Capa 2'.

El algoritmo desarrollado en esta Tesis parte del cálculo del valor de m_f cuando $f = 1/2$ usando para ello la expresión (D.2). En caso de que la masa así obtenida sea mayor que la masa de promediado m_p , se determina que $f < 1/2$, por lo que se resuelve la ecuación polinómica:

$$m_n + fm_{c,1} + f^2m_{a,1} + 2fm_{cn,1} + 2f^2m_{an,1} + 2f^3m_{vn,1} = m_p \quad (D.3)$$

En caso contrario, se calcula el valor de promediado f resolviendo la siguiente ecuación:

$$m_n + m_{n,2} + fm_{c,2} + f^2m_{a,2} + (2f - 1)m_{cn,2} + (2f - 1)fm_{an,2} + (2f - 1)f^2m_{vn,2} = m_p \quad (D.4)$$

Por último, y al igual que se hizo para el caso general (celdas cuyos volúmenes de promediado no tienen caras con todas sus celdas de aire), se utiliza el factor f calculado para obtener en cada celda el volumen a considerar en la ecuación (6.4), teniendo en cuenta el tipo de celda de que se trata y el valor de f (mayor o menor que $1/2$), para posteriormente, sumando las potencias y dividiendo entre la masa de promediado, obtener el SAR en la celda.

Bibliografía

- [1] IST-2001-33055, “Exploring the limits of fractal electrodinamics for future telecommunication technologies,” tech. rep., FractalComs Web Site (<http://www.tsc.upc.es/fractalcoms/>), 2003.
- [2] B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Company, 1983.
- [3] H. A. Wheeler, “Fundamental limitations of small antennas,” *Proceedings of the IRE*, vol. 35, pp. 1479–1484, 1947.
- [4] L. J. Chu, “Physical limitations on omni-directional antennas,” *Journal of Applied Physics*, vol. 19, pp. 1163–1175, 1948.
- [5] R. E. Collin and S. Rothschild, “Evaluation of antenna Q,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-12, no. 1, pp. 23–27, 1964.
- [6] R. L. Fante, “Quality factor of general ideal antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-17, pp. 151–155, 1969.
- [7] J. S. McLean, “A re-examination of the fundamental limits on the radiation Q of electrically small antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 5, pp. 672–676, 1996.
- [8] R. F. Harrington, “Effect of antenna size on gain, bandwidth and efficiency,” *Journal of Research of the National Bureau of Standards - D. Radio Propagation*, vol. 64D, pp. 1–12, 1960.
- [9] R. C. Hansen, “Fundamental limitations in antennas,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, no. 2, pp. 170–182, 1981.

- [10] S. Wolf, J. Davis, and M. Nisenoff, "Superconducting extremely low frequency (ELF) magnetic field sensors for submarine communications," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 22, no. 4, pp. 549–554, 1974.
- [11] H. A. Wheeler, "Small antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-23, no. 4, pp. 462–469, 1975.
- [12] B. G. Hagaman, "Low-frequency antennas," in *Antenna Engineering Handbook* (H. J. R. C. Johnson, ed.), McGraw-Hill Book Company, 2nd ed., 1984.
- [13] A. K. Skrivervik, J. F. Zürcher, O. Staub, and J. R. Mosig, "PCS antenna design: the challenge of miniaturization," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 43, no. 4, pp. 12–26, 2001.
- [14] R. C. Fenwick, "A new class of electrically small antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-13, pp. 379–383, 1965.
- [15] G. Goubau, N. Puri, and F. Schwing, "Diakoptic theory for multi-element antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 15–26, 1982.
- [16] C. W. Harrison, "Monopole with inductive loading," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-10, pp. 394–400, 1963.
- [17] G. S. Smith, "Radiation efficiency of electrically small multiturn loop antennas," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. AP-20, pp. 656–657, 1972.
- [18] H. Nakano, H. Tagami, A. Yoshizawa, and J. Yamauchi, "Shortening ratios of modified dipole antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-32, no. 4, pp. 385–386, 1984.
- [19] J. Rashed and C. T. Tai, "A new class of wire antennas," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 2, pp. 564–567, 1982.
- [20] J. Rashed and C. T. Tai, "A new class of resonant antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 9, pp. 1428–1430, 1991.

- [21] E. E. Altshuler and D. S. Linden, “Wire-antenna designs using genetic algorithms,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 39, no. 2, pp. 33–43, 1997.
- [22] E. E. Altshuler, “Electrically small self-resonant wire antennas optimized using a genetic algorithm,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 3, pp. 297–300, 2002.
- [23] H. Choo, R. Rogers, and H. Ling, “Design of electrically small wire antennas using genetic algorithm taking into consideration bandwidth and efficiency,” in *Proceedings IEEE AP-URSI Symp.*, (San Antonio, TX), 2002.
- [24] C. Puente Baliarda, J. Romeu, and A. Cardama, “Small but long Koch fractal monopole,” *IEE Electronics Letters*, vol. 34, no. 1, pp. 9–10, 1998.
- [25] N. Cohen, “Fractal antennas: Part 1,” *Communications Quarterly*, pp. 7–22, 1995.
- [26] C. Puente Baliarda, J. Romeu, and A. Cardama, “The Koch monopole: A small fractal antenna,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, no. 11, pp. 1773–1781, 2000.
- [27] J. P. Gianvittorio and Y. Rahmat-Samii, “Fractal antennas: a novel miniaturization technique, and applications,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 44, no. 1, pp. 20–35, 2002.
- [28] K. Vinoy, K. Jose, V. Varadan, and V. V. Varadan, “Hilbert curve fractal antenna: a small resonant antenna for VHF/UHF applications,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 29, no. 4, pp. 215–219, 2001.
- [29] S. R. Best, “On the resonant properties of the Koch fractal and other wire monopole antennas,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 1, pp. 74–76, 2002.
- [30] S. R. Best and J. D. Morrow, “The effectiveness of space-filling fractal geometry in lowering resonant frequency,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 1, pp. 112–115, 2002.

- [31] S. R. Best, “Comments on Hilbert curve fractal antenna: a small resonant antenna for VHF/UHF applications,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 35, no. 5, pp. 420–421, 2002.
- [32] S. R. Best, “A comparison of the performance properties of the Hilbert curve fractal and meander line monopole antennas,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 35, no. 4, pp. 258–262, 2002.
- [33] S. R. Best, “On the resonant behavior of the small Koch fractal monopole antenna,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 35, no. 4, pp. 311–315, 2002.
- [34] J. Gonzalez Arbesu, J. Romeu, J. Rius, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, “Are prefractal monopoles optimum miniature antennas?,” in *IEEE-APS*, vol. Paper 17.8, (Columbus, Ohio), 2003.
- [35] R. Gomez Martin, A. Salinas, and A. Rubio Bretones, “Time-domain integral equations methods for transient analysis,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 34, pp. 15–23, 1992.
- [36] E. K. Miller, “An overview of time-domain integral-equation models in electromagnetics,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 1, no. 3, pp. 269–293, 1987.
- [37] E. K. Miller, R. M. Bevensee, A. J. Poggio, R. Adams, and F. J. Deadrick, “An evaluation of computer programs using intergral equations for the electromagnetic analysis of thin wire structures,” tech. rep., Interaction Notes, Note March, 1974.
- [38] M. Fernandez Pantoja, *Programa DOTIG5 para el análisis, en el dominio del tiempo, de estructuras conductoras formadas por superficies continuas e hilos*. PhD thesis, University of Granada (Spain), Dpto. de Electromagnetismo y física de la materia., 2000.
- [39] A. Rubio Bretones, R. Mittra, and R. Gomez Martin, “A new hybrid method combining the method of moments in the time domain and FDTD,” *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, vol. 8, pp. 281–283, 1998.
- [40] Salvador G. Garcia, A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, and M. Hernandez Lopez, “A new hybrid method combining the ADI-FDTD and

- the MoMTD techniques,” *Electromagnetics*, vol. 23, pp. 103–118, Feb. 2003.
- [41] T. Namiki, “A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, pp. 2003–2007, Oct. 1999.
- [42] F. Zheng, Z. Chen, and J. Zhang, “A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions,” *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, vol. 9, pp. 441–443, Nov. 1999.
- [43] R. Gomez Martin, A. Rubio Bretones, M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, and Salvador G. Garcia, “Simulation of pre-fractal structures in the time domain,” Tech. Rep. D8, FractalComs (IST-2001-33055), 2003.
- [44] A. Rubio Bretones, A. S. Extremera, R. Gomez Martin, and J. F. Callejon, “About the study in the time domain of junctions between thin wires,” *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, vol. 6, no. 2, pp. 2–20, 1991.
- [45] J. Rius, J. M. Gonzalez-Arbesu, J. Romeu, E. Cabot, M. Mattes, J. R. Mosig, R. Gomez Martin, A. Rubio Bretones, and M. Fernandez Pantoja, “Understanding fractal electrodynamics phenomena,” Tech. Rep. D1, FractalComs (IST-2001-33055), 2003.
- [46] F. J. Garcia Ruiz, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, “Estudio en el dominio del tiempo de la antena tipo fractal monopolo de Koch,” in *URSI España, 2002*, vol. 1, (Alcalá de Henares), Sept. 2002.
- [47] R. Gomez Martin, M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, S. Gonzalez Garcia, and A. Rubio Bretones, “Some thoughts about the design of small thin-wire antennas,” in *Joint XIX Spanish URSI/COST 284 meeting*, (Barcelona), Sept. 2004.
- [48] R. Gomez Martin, M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, S. Gonzalez Garcia, and A. Rubio Bretones, “Some thoughts about the design of small thin-wire antennas,” in *Asia Pacific Microwave Conference*, (New Delhi, India), Dec. 2004.

- [49] M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, J. Gonzalez-Arbesu, J. Romeu, and J. Rius, “GA design of wire pre-fractal antennas and comparison with other euclidean geometries,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 2, pp. 238–241, 2003.
- [50] M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, A. Rubio Bretones, Salvador G. Garcia, R. Gomez Martin, J. M. Gonzalez-Arbesu, J. Romeu, J. M. Rius, and D. Werner, “On the design of small antennas using GA,” in *27th ESA Antenna Technology workshop on: Innovative periodic antennas: Electromagnetic bandgap, Left-handed material, Fractal and Frequency selective surfaces*, (Santiago de Compostela (Spain)), Mar. 2004.
- [51] M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, A. Rubio Bretones, Salvador G. Garcia, R. Gomez Martin, J. Gonzalez-Arbesu, J. Romeu, J. Rius, P. Werner, and D. Werner, “On the design of small thin-wire antennas using GA,” *To be published*, 2005.
- [52] J. M. Gonzalez-Arbesu, M. Barra, C. Collado, J. O’Callaghan, J. Romeu, J. Rius, E. Cabot, M. Mattes, J. R. Mosig, R. Gomez Martin, A. Rubio Bretones, M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, and R. Godoy Rubio, “Design of fractal-shaped miniature devices,” Tech. Rep. D9, FractalComs (IST-2001-33055), 2003.
- [53] R. Gomez Martin, A. Rubio Bretones, M. Fernandez Pantoja, F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, and Salvador G. Garcia, “Transient excitation of permeable bodies: applications,” in *III Encuentro Ibérico de Electromagnetismo Computacional*, (Sedano), Dec. 2003.
- [54] A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, R. Godoy Rubio, F. J. Garcia Ruiz, and S. Gonzalez Garcia, “A hybrid method combining ADI-FDTD and MoM: applications,” in *IEEE-AP/URSI 2004*, (Monterrey (CA)), June 2004.
- [55] F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, Salvador G. Garcia, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, “Simulación con un método híbrido ADI-FDTD-MoMTD de la interacción entre antenas pequeñas de hilo y modelos de cabeza humana,” in *URSI España, 2004*, vol. 1, (Barcelona), Sept. 2004.

- [56] F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, Salvador G. Garcia, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, "On the application of hybrid methods to study the interaction between small thin-wire antennas and the human head," in *IEEE AP-S International Symposium and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, (Washington), July 2005.
- [57] F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, S. Gonzalez Garcia, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, "Interaction between small thin-wire antennas and the human head studied with the ADI-FDTD/MoMTD hybrid method," in *XXVIII General Assembly of International Union of Radio Science*, (New Delhi), Oct. 2005.
- [58] F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, Salvador G. Garcia, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, "On the interaction between small thin-wire antennas and the human head," *To be published*, 2005.
- [59] F. J. Garcia Ruiz, M. Fernandez Pantoja, Salvador G. Garcia, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, "A new algorithm for computation of the Specific Absorption Rate," *To be published*, 2005.
- [60] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Malabar: McMillan, 1968.
- [61] R. F. Harrington, "The method of moments in electromagnetics," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 1, no. 3, pp. 181–200, 1987.
- [62] A. Rubio Bretones, *DOTIG1: Un programa para el estudio en el dominio del tiempo de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras de hilo*. PhD thesis, Electromagnetismo y Física de la Materia. Universidad de Granada, Granada, (Spain), 1988.
- [63] A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, and A. Salinas, "DOTIG1, a time-domain numerical code for the study of the interaction of electromagnetic pulses with thin-wire structures," *COMPEL*, vol. 8, no. 1, pp. 39–61, 1989.
- [64] B. G. Galerkin, "Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates," *Vestnik Inzhenerov Tech.*, vol. 19, pp. 897–908, 1915.

- [65] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook. Rad. Lab. Series, 10.* NY: McGraw-Hill Book Co., 1951.
- [66] V. H. Rumsey, “The reaction concept in electromagnetic theory,” *The Physical Review*, vol. 2, no. 94,6, pp. 1483–1491, 1954.
- [67] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields.* NY: McGraw-Hill Book Co., 1961.
- [68] M. G. Andreasen, “Scattering from parallel metallic cylinders with arbitrary cross sections,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-11, pp. 754–764, 1963.
- [69] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics.* John Wiley, 1989.
- [70] J. Moore and R. Pizer, *Moment methods in electromagnetics.* London: Research Studies Press, 1984.
- [71] G. J. Burke and A. J. Poggio, “Numerical electromagnetics code (NEC) - method of moments,” Tech. Rep. UCID-18834, Lawrence Livermore National Laboratory, 1981.
- [72] A. Rubio Bretones and A. Tijhuis, “Transient excitation of a straight-wire segment over an interface between two dielectric half-space,” *Radio-Science*, 1994.
- [73] A. Heldring and J. M. Rius, “The thin wire model for thick and highly curved wire structures,” in *IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, vol. 4, pp. 4072–4075, 2004.
- [74] A. Heldring and J. M. Rius, “Efficient full kernel calculation for wire antennas,” in *IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, vol. 4, pp. 3461–3464, 2004.
- [75] N. Champagne, J. William, and D. Wilton, “The use of curved segments for numerically modeling thin wire antennas and scatterers,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 6, 1992.
- [76] J. Wang, *Generalized moment methods in electromagnetics.* New York: John Wiley, 1991.

- [77] E. K. Miller, A. Poggio, and G. Burke, “An integro-differential equation technique for the time-domain analysis of thin-wire structures. Part I: The numerical method,” *Journal of Computer Physics*, vol. 12, 1973.
- [78] G. Thiele, *Wire antennas, in Computer techniques for Electromagnetics*. Oxford: Pergamon Press, 1973.
- [79] B. Kolundzija, “Comparison of a class of subdomain and entire domain basis functions automatically satisfying KCL,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 10, 1996.
- [80] W. Stutzman and G. Thiele, “Antenna theory and design,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 43, no. 4, pp. 12–26, 2001.
- [81] A. G. Tijhuis, P. Zhongqiu, and A. Rubio Bretones, “Transient excitation of a straight thin-wire segment: a new look at an old problem,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 10, pp. 1132–1146, 1992.
- [82] J. Moore and R. Pizer, *Moment methods in electromagnetics. Techniques and Applications*. Research Studies Press LTD., John Wiley and Sons INC, 1983.
- [83] T. T. Wu and R. W. P. King, “The tapered antenna and its application to the junction problem for thin-wires,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-24, no. 1, pp. 42–45, 1976.
- [84] R. Gomez Martin, A. Rubio Bretones, A. Monorchio, M. Fernandez Pantoja, and Salvador G. Garcia, “Time-domain hybrid methods,” in *Finite difference time domain methods* (D. Poljak, ed.), WIT Press, 2003.
- [85] A. Monorchio, A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, and R. Mittra, “Hybrid time domain technique combining the finite element, finite difference and integral equation methods,” in *IEEE Antennas and Propagat. Soc. Int. Symposium*, vol. 2, (Salt Lake City, UT), pp. 733–736, July 2000.
- [86] R.-B. Wu and T. Itoh, “Hybrid finite-difference time-domain modeling of curved surfaces using tetrahedral edge elements,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, pp. 1302–1309, Aug. 1997.

- [87] G. Ledfelt, *Hybrid Time-Domain Methods and Wire Models for Computational Electromagnetics*. PhD thesis, Kungl Tekniska Högskolan, Stockholm, Sweden, 2001. Available at url-<http://media.lib.kth.se:8080/dissfull.asp>.
- [88] M. A. Mangoud, R. A. Abd-Alhameed, and P. S. Excell, “Simulation of human interaction with mobile telephones using hybrid techniques over coupled domains,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 2014–2021, Nov. 2000.
- [89] M. A. Hernandez-Lopez, A. Rubio Bretones, M. Quintillan, and R. Gomez Martin, “On the implementation of the equivalence theorem in the hybrid FDTD-MoMTD approach,” *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, vol. 16, no. 1, pp. 27–30, 2001.
- [90] A. Taflove, ed., *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Boston, MA: Artech House, 1998.
- [91] R. Courant, K. Friedrichs, and Lewy, “Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik,” *Math. Ann.*, vol. 100, pp. 32–74, 1928.
- [92] K. S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, Mar. 1966.
- [93] W. C. Chew, “Electromagnetic theory on a lattice,” *Journal of Applied Physics*, vol. 75, pp. 4843–4850, May 1994.
- [94] C. L. Wagner, “Sources and field divergence in electromagnetic finite-difference time-domain simulations,” Master’s thesis, Washington State University, Pullman, WA, 1998.
- [95] G. Lazzi, S. S. Pattnaik, C. M. Furse, and O. P. Gandhi, “Comparison of FDTD computed and measured radiation patterns of commercial mobile telephones in presence of the human head,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, pp. 943–944, June 1998.
- [96] O. P. Gandhi, G. Lazzi, and C. M. Furse, “Electromagnetic absorption in the human head and neck for mobile telephones at 835 and 1900 MHz,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, pp. 1884–1897, Oct. 1996.

- [97] P. Bernardi, M. Cavagnaro, S. Pisa, and E. Piuze, “Specific absorption rate and temperature increases in the head of a cellular-phone user,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 1118–1126, July 2000.
- [98] K. R. Umashankar and A. Taflove, “A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects,” *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, vol. 24, no. 4, pp. 397–405, 1982.
- [99] W. K. Gwarek, “Analysis of an arbitrarily-shaped planar circuit. A time domain approach,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 10, pp. 1067–1072, 1985.
- [100] R. J. Luebbers, F. Hunsberger, and K. S. Kunz, “A finite-difference time-domain near zone to far zone transformation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 4, pp. 429–433, 1991.
- [101] R. J. Luebbers, L. Chen, T. Uno, and S. Adachi, “FDTD calculations of radiation patterns, impedance and gain for a monopole antenna in a conducting box,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 12, pp. 1577–1583, 1992.
- [102] Salvador G. Garcia, A. Rubio Bretones, B. Garcia Olmedo, and R. Gomez Martin, “Time Domain Techniques in Computational Electromagnetics,” in *Finite difference time domain methods* (D. Poljak, ed.), WIT Press, 2003.
- [103] A. Fijany, M. A. Jensen, Y. Rahmat-Samii, and J. Barhen, “A massively parallel computation strategy for FDTD: Time and space parallelism applied to electromagnetics problems,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, pp. 1441–1449, Dec. 1995.
- [104] D. Peaceman and H. Rachford, “The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations,” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 3, pp. 28–41, 1955.
- [105] R. Godoy Rubio, *Métodos de diferencias finitas incondicionalmente estables para la resolución de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo*. PhD thesis, Universidad de Granada, 2005.
- [106] T.-W. Lee and S. C. Hagness, “Wave source conditions for the unconditionally stable ADI-FDTD method,” in *IEEE Antennas and Propagat. Soc. Int. Symposium*, vol. 4, (Boston, MA), pp. 142–145, July 2001.

- [107] D. E. Merewether, R. Fisher, and F. W. Smith, "On implementing a numeric Huygen's source scheme in a finite difference program to illuminate scattering bodies," *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 27, pp. 1829–1833, Dec. 1980.
- [108] F. J. Garcia Ruiz, R. Godoy Rubio, C. Moreno de Jong, A. Rubio Bretones, M. Fernandez Pantoja, Salvador G. Garcia, J. Romera, and R. Gomez Martin, "Detección y localización de fracturas en mármol mediante GPR (Ground Penetrating Radar)," in *URSI España, 2004*, vol. 1, (Barcelona), Sept. 2004.
- [109] C. Moreno de Jong, F. J. Garcia Ruiz, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, "Diseño de una antena tipo bow-tie formada por hilos cargados para aplicaciones GPR," in *URSI España, 2004*, vol. 1, (Barcelona), Sept. 2004.
- [110] K. Vinoy, J. K. Abraham, and V. Varadan, "On the relationship between fractal dimension and the performance of multi-resonant dipole antennas using Koch curves," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 9, pp. 2296–2303, 2003.
- [111] H. von Koch, "Une méthode géométrique élémentaire pur l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane," *Acta Math.*, vol. 30, pp. 145–174, 1906.
- [112] D. Hilbert, "Über die stetige abbildung einer linie auf ein flachenstück," *Math. Ann.*, vol. 38, pp. 459–460, 1891.
- [113] G. Peano, "Sur une courbe, qui remplit une aire plane," *Math. Ann.*, vol. 36, pp. 157–160, 1890.
- [114] J. Feder, *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.
- [115] S. R. Best, "On the multiband behavior of the Koch fractal monopole antenna," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 35, no. 5, pp. 371–374, 2002.
- [116] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press, 2nd ed., 1993.
- [117] J. Hutchinson, "Fractals and self-similarity," *Journal of Indiana University Mathematics*, vol. 30, pp. 713–747, 1981.

- [118] F. Dekking, "Recurrent sets," *Advances in Mathematics*, vol. 44, pp. 78–104, 1982.
- [119] D. Werner, A. Rubio Bretones, and B. Long, "Radiation characteristics of thin-wire ternary fractal trees," *Electronics Letters*, vol. 35, no. 8, pp. 609–610, 1999.
- [120] C. Puente Baliarda, J. Claret, F. Sagues, J. Romeu, M. Lopez-Salvans, and R. Pous, "Multiband properties of a fractal tree antenna generated by electrochemical deposition," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 25, pp. 2298–2299, 1996.
- [121] B. M. Kolundzija, J. S. Ognjanovic, T. K. Sarkar, and R. F. Harrington, *WIPL: Electromagnetic Modeling of Composite Wire and Plate Structures*. Dedham, Massachusetts: Artech House, Inc., 1998.
- [122] G. A. Burrell, "Propagation of current on bent wire antennas - an experimental study," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-26, pp. 427–434, 1978.
- [123] S. Gee, E. K. Miller, A. J. Poggio, E. S. Selden, and G. J. Burke, "Computer techniques for electromagnetic scattering and radiation analyses," in *IEEE International Electromagnetics Compatibility Symposium Rec.*, pp. 122–131, 1971.
- [124] A. Driouach, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, "Application of parametric models to inverse scattering problems," *IEE Proc. Microwave and Antennas Propagation*, vol. 143, no. 1, pp. 31–35, 1996.
- [125] J. S. Petko and D. H. Werner, "Dense 3-D fractal tree structures as miniature end-loaded dipole antennas," in *IEEE-APS*, vol. 4, (San Antonio, Texas), pp. 94–97, 2002.
- [126] J. S. Petko and D. H. Werner, "Miniature reconfigurable three-dimensional fractal tree antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 8, pp. 1945–1956, 2004.
- [127] K. J. Vinoy, *Fractal shaped antenna elements for wide- and multi-band wireless applications*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, College of Engineering., 2002.
- [128] R. E. Collin, *Antennas and radiowave propagation*. McGraw-Hill International Editions, 1985.

- [129] J. M. Gonzalez-Arbesu, S. Blanch, and J. Romeu, “The Hilbert curve as a small self-resonant monopole from a practical point of view,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 39, no. 1, pp. 45–49, 2003.
- [130] E. T. Back, *Handbook of evolutionary computation*. IOP Publishing Ltd, 1997.
- [131] D. H. Werner and P. L. Werner, “Genetically engineered multiband fractal antennas,” *Electronics Letters*, vol. 37, no. 19, pp. 1150–1151, 2001.
- [132] D. H. Werner and S. Gaungly, “An overview of fractal antenna engineering research,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 45, no. 2, pp. 38–57, 2003.
- [133] D. H. Wolpert and W. G. Macready, “No free lunch theorems for search,” Tech. Rep. SFI-TR-95-02-010, Santa Fe Institute, 1996.
- [134] J. Kennedy, R. Eberhart, and Y. Shi, *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [135] E. T. Back, ed., *Evolutionary Design by Computers*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1999.
- [136] L. J. Fogel, “Evolutionary programming in perspective: The topdown view,” in *Computational Intelligence: imitating life* (C. J. R. J. M. Zurada, R. J. Marks, ed.), Piscataway, NJ: IEEE Press, 1994.
- [137] D. B. Fogel, “What is evolutionary computation?,” *IEEE Spectrum*, vol. 37, pp. 26–32, February 2000.
- [138] J. R. Koza, *Genetic Programming: On the programming of computers by means of natural selection*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1992.
- [139] Y. Rahmat-Samii and E. Michielssen, *Electromagnetic Optimization by Genetic Algorithms*. New York: Wiley, 1999.
- [140] S. Chakravarty and R. Mittra, “Design of a frequency selective surface (FSS) with very low cross-polarization discrimination via the parallel micro-genetic algorithm (PMGA),” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 7, pp. 1664–1668, 2003.

- [141] C. Moreno de Jong, Salvador G. Garcia, M. Fernandez Pantoja, A. Rubio Bretones, and R. Gomez Martin, “Microstrip-patch array design using a multi-objective GA,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2005.
- [142] J. H. Holland, “Genetic algorithms and the optimal allocations of trials,” *SIAM Journal of Computing*, vol. 2, no. 2, pp. 88–105, 1973.
- [143] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial system*. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.
- [144] K. A. De Jong, *An analysis of the behaviour of a class of genetic adaptive systems*. PhD thesis, University of Michigan, 1975.
- [145] D. E. Goldberg, *Computer-aided gas pipeline operation using genetic algorithms and rule learning*. PhD thesis, University of Michigan, 1975.
- [146] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. MA: Addison-Wesley, 2001.
- [147] D. Schaffer, “Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms,” in *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, (NJ), pp. 93–100, 1985.
- [148] N. Srinivas and K. Deb, “Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms,” *Evolutionary Computation*, vol. 2, no. 3, pp. 221–248, 1994.
- [149] J. Horn, N. Nafplotis, and D. Goldberg, “A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization,” in *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation*, vol. 1, pp. 82–87, 1994.
- [150] C. Fonseca and P. Fleming, “Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization,” in *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, (San Mateo, CA), pp. 416–423, 1993.
- [151] E. Zitzler and L. Thiele, “Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative study and the strength pareto approach,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 3, no. 4, pp. 257–271, 1999.

- [152] S. H. R. Haupt, *Practical genetic algorithms*. John Wiley and Sons, 2004.
- [153] C. A. Coello, “Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique,” in *Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO99)* (E. S. Wu, ed.), (Orlando, FL), pp. 117–118, 1999.
- [154] W. E. McKinzie, “A modified Wheeler cap method for measuring antenna efficiency,” in *Proc. Antennas and Propagation Symp.*, vol. 1, (Montreal, QC, Canada), 1997.
- [155] H. A. Wheeler, “The radiansphere around a small antenna,” *Proceedings of the IRE*, pp. 1325–1331, 1959.
- [156] B. A. Austin, “Resonant mode limitations with the Wheeler method of radiation efficiency measurement,” in *Colloquium on Advances in the Direct Measurement of Antenna Radiation Characteristics in Indoor Environments*, pp. 7/1–7/4, 1989.
- [157] B. D. Popovic and A. Nestic, “Generalization of the concept of equivalent radius of thin cylindrical antennas,” *IEE Proceedings Part H*, vol. 131, pp. 153–158, 1984.
- [158] A. Rubio Bretones, R. Gomez Martin, and I. Sanchez Garcia, “Time-domain analysis of magnetic and/or dielectric coated wire antennas and scatterers,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 43, pp. 591–596, 1995.
- [159] M. A. Mangoud, R. A. Abd-Alhameed, N. J. McEwan, P. S. Excell, and E. A. Abdulmula, “SAR reduction for handset with two-element phased array antenna computed using hybrid MoM/FDTD technique,” *Electronics Letters*, vol. 35, no. 20, pp. 1693–1694, 1999.
- [160] R. A. Abd-Alhameed, P. S. Excell, M. A. Mangoud, and J. A. Vaul, “Hybrid integral equation/finite difference method for computation of interaction of mobile telephone antenna with the human head,” in *IEE Seminar on Electromagnetic Assessment and Antenna Design Relating To Health Implications of Mobile Phones*, (London, UK), pp. 9/1–9/4, June 1999.

- [161] L.-W. Li, P.-S. Kooi, M.-S. Leong, H.-M. Chan, and T.-S. Yeo, “FDTD analysis of electromagnetic interactions between handset antennas and the human head,” in *Asia-Pacific Microwave Conf., APMC '97.*, vol. 3, (Hong Kong), pp. 1189–1192, Dec. 1997.
- [162] X. Thiry and R. Mittra, “Modeling of hand-held receiving antennas in the presense of a human head,” in *IEEE Antennas and Propagat. Soc. Int. Symp.*, vol. 2, (Newport Beach, CA), pp. 1116–1119, June 1995.
- [163] J. Wiart, R. Mittra, S. Chaillou, and Z. Altman, “The analysis of human head interaction with a hand-held mobile using the non-uniform FDTD,” in *1998 IEEE-APS Conf. on Antennas and Propagat. for Wireless Communications*, (Waltham, MA), pp. 77–80, Nov. 1998.
- [164] H.-R. Chuang, “Human operator coupling effects on radiation characteristics of a portable communication dipole antenna,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 556–560, Apr. 1994.
- [165] Y. Rahmat-Samii, “Novel antennas for personal communications including biological effects,” in *Proc. SBMO/IEEE MTT-S Int. Microwave and Optoelectronics Conf.*, vol. 1, (Rio de Janeiro, Brazil), pp. 295–308, July 1995.
- [166] J. Toftgard, S. N. Hornsleth, and J. B. Andersen, “Effects on portable antennas of the presence of a person,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, pp. 739–746, June 1993.
- [167] ANSI, “Safety levels with respect to exposure to radio frequency electromagnetic fields, 3 kHz to 300 GHz,” *ANSI/IEEE*, no. C95.1, 1992.
- [168] ICNIRP, “Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz),” *Health Physics*, vol. 74, no. 4, pp. 494–522, 1998.
- [169] G. Lazzi and O. P. Gandhi, “Realistically tilted and truncated anatomically based models of the human head for dosimetry of mobile telephones,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 39, no. 1, pp. 55–61, 1997.
- [170] V. Hombach, K. Meier, M. Burkhardt, E. Kuhn, and N. Kuster, “The dependence of EM energy absorption upon human head modeling at 900 MHz,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, pp. 1865–1873, Oct. 1996.

- [171] J. C. Lin, “Cellular mobile telephones and children,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 44, pp. 142–145, Oct. 2002.
- [172] J. Wang and O. Fujiwara, “Comparison and evaluation of electromagnetic absorption characteristics in realistic human head models of adult and children for 900-MHz mobile telephones,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, pp. 966–971, Mar. 2003.
- [173] J. Wiart and R. Mittra, “Power deposited in biological tissues from a hand-held mobile antenna,” in *IEEE Antennas and Propagat. Soc. Int. Symp.*, vol. 2, (Baltimore, MD), pp. 1104–1107, July 1996.
- [174] A. Taflove and S. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 2 ed. Boston, MA: Artech House, 2000.
- [175] C. Gabriel, S. Gabriel, and E. Corthout, “The dielectric properties of biological tissues: I. Literature survey,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 41, pp. 2231–2249, 1996.
- [176] S. Gabriel, R. W. Lau, and C. Gabriel, “The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 41, pp. 2251–2269, 1996.
- [177] S. Gabriel, R. W. Lau, and C. Gabriel, “The dielectric properties of biological tissues: III. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 41, pp. 2271–2293, 1996.
- [178] K. Caputa, M. Okoniewski, and M. A. Stuchly, “An algorithm for computation of the power deposition in human tissue,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 41, pp. 102–107, Aug. 1999.
- [179] ANSI, “IEEE recommended practice for measurements and computations of radio frequency electromagnetic fields with respect to human exposure, 100 kHz to 300 GHz,” *IEEE*, no. C95.3, 2002.
- [180] D. Manteuffel and W. Simon, “FDTD calculation of the SAR induced in the human head by mobile phones,” in *IEEE Int. Workshop on Antenna Tech. Small Antenna and novel metamaterials*, (Singapur), 2005.

- [181] C. Liang and T. Su, "The generalized Foster theorem and network-Q," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 37, no. 1, pp. 40–45, 2003.
- [182] Y. Q. W. Geyi, P. Jarmuszewski, "The Foster reactance theorem for antennas and radiation Q," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, no. 3, pp. 401–408, 2000.
- [183] A. D. Yaghjian and S. R. Best, "Impedance, bandwidth and Q of antennas," in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 1, pp. 501–504, 2003.
- [184] S. R. Best, "The Foster reactance theorem and quality factor for antennas," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 3, pp. 306–309, 2004.

