

INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA EN PÉRGOLAS DE FERROCARRIL DE ALTA VELOCIDAD

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Por
Francisco José Cuadros Mantas
Máster en Estructuras

Tutor
Alejandro E. Martínez Castro

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica ,
Universidad de Granada
Edificio Politécnico Fuentenueva, C/ Severo Ochoa s/n, CP 18002
Granada (España)

Septiembre 2019

© Copyright 2019
por
Francisco José Cuadros Mantas

Resumen

La reciente proliferación de líneas de alta velocidad en España ha provocado la construcción de nuevas líneas ferroviarias prácticamente coincidentes con las ya existentes, lo que ha generado la problemática de cruces entre líneas con un gran esviaje. Aparece la necesidad de diseñar estructuras que salven una luz de gran tamaño, haciendo de las pérgolas la solución óptima al problema.

La finalidad de este trabajo es analizar una pérgola perteneciente a una línea de alta velocidad en servicio y establecer un sistema de modelado en el que se incluya la tipología de cimentación de la estructura. Se pretende calcular la tasa de amortiguamiento geométrico generado a partir de dicha cimentación y evaluar su efecto sobre los resultados dinámicos de la estructura bajo el paso de los trenes indicados en la normativa.

La solución al problema de cargas móviles se ha realizado tradicionalmente mediante la utilización de métodos de integración paso a paso. Dada la ineficacia de dichos métodos para el cálculo exigido en la normativa, en este trabajo se empleará el método semianalítico generalizado a la geometría de una pérgola.

Palabras clave: Análisis dinámico, alta velocidad ferroviaria, pérgola, cimentación mediante pilotes

Abstract

The number of high-speed railway lines in Spain has increased a lot in the last years and many of this new lines have been built very close to existing ones, which were built in the 19th century. This has caused the intersection of lines almost parallel. To solve the problem is necessary to build bridges with huge spans and pergola bridges are the optimal solution.

The objective of this work is to analyze a real high-speed railway pergola bridge and make a modelling that will include the structure and its foundation. It's expected to calculate the geometrical damping generated by the foundation and evaluate its effect in the results of the dynamic analysis.

Moving loads problems have usually been solved using step by step methods which are really inefficient. In this work, generalized semi-analytic method will be used to solve them.

Keywords: Dynamic analysis, high-speed rail, pergola bridge, piles foundation

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer el apoyo de mis padres. A mis abuelos a los que tanto les debo y que tanto se han preocupado siempre por mí, así como al resto de mi familia. A mis amigos, que han hecho que todos estos años de estudio hayan sido preciosos e inolvidables.

Es esencial agradecer el trabajo de Alejandro E. Martínez Castro, tutor de este trabajo, que no hubiera sido posible sin su dedicación, consejo, guía y apoyo. Y por último agradecer también a Alejandro Castillo Linares por proporcionar los planos de la pérgola de Bobadilla II y así poder estudiarla.

Dedicado a mis padres y abuelos

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Capítulo 1. Introducción, objetivos y metodología	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Metodología	3
Capítulo 2. Método semianalítico	5
2.1. Introducción al método	5
2.2. Ecuación de Gobierno para una viga.	5
2.3. Discretización espacial	7
2.4. Resolución	12
2.5. Generalización del método.	15
2.6. Pruebas de validación	18
2.6.1. Planteamiento	18
2.6.2. Prueba de validación 1: Viga de Bernoulli-Euler biapoyada	18
2.6.3. Prueba de validación 1: Viga de Bernoulli-Euler de tres vanos	26
2.7. Conclusiones	33
Capítulo 3. Interacción suelo-estructura. Análisis modal	35
3.1. Trabajos y publicaciones	35
3.2. Características dinámicas de las cimentaciones mediante pilotes	44
3.2.1. Introducción	44
3.2.2. Caracterización de la rigidez y el amortiguamiento dinámicos	45

3.2.3.	Gráficas de rigidez y amortiguamiento	50
3.2.4.	Conclusiones	52
3.3.	Análisis modal en pérgolas cimentadas por pilotes	53
Capítulo 4.	Pérgola de Bobadilla II	55
4.1.	Geometría de la pérgola de estudio	55
4.2.	Modelo tridimensional de la pérgola	57
4.2.1.	Cargas muertas	58
4.2.2.	Conexión vigas - losa	59
4.2.3.	Apoyos	60
4.3.	Análisis dinámico de la pérgola de Bobadilla II	61
4.3.1.	Datos de partida	63
4.3.2.	Cálculo dinámico	68
4.3.3.	Resultados de la interacción suelo - estructura	110
Capítulo 5.	Conclusiones y aportaciones	113
Apéndice A.	Análisis dinámico de la pérgola de Bobadilla II	115
A.1.	Resultado para estructura con apoyos	115
A.1.1.	Resultados de aceleración	115
A.1.2.	Resultados de desplazamiento	120
A.2.	Resultados para $E_p/G_s = 250$	121
A.2.1.	Resultados de aceleración	121
A.2.2.	Resultados de desplazamiento	126
A.3.	Resultados para $E_p/G_s = 500$	127
A.3.1.	Resultados de aceleración	127
A.3.2.	Resultados de desplazamiento	132
A.4.	Resultados para $E_p/G_s = 1\ 000$	133
A.4.1.	Resultados de aceleración	133
A.4.2.	Resultados de desplazamiento	138
A.5.	Resultados para $E_p/G_s = 2\ 500$	139
A.5.1.	Resultados de aceleración	139
A.5.2.	Resultados de desplazamiento	144
A.6.	Resultados para $E_p/G_s = 5\ 000$	145

A.6.1. Resultados de aceleración	145
A.6.2. Resultados de desplazamiento	150
A.7. Resultados para $E_p/G_s = 10\,000$	151
A.7.1. Resultados de aceleración	151
A.7.2. Resultados de desplazamiento	156

Índice de cuadros

2.1. Frecuencias y períodos de vibración. Prueba 1	19
2.2. Frecuencias y períodos de vibración. Prueba 2	27
4.1. Valores de f_{v1} para distintos casos de rigidez. Pérgola de Bobadilla II	65
4.2. Valores de f_{v2} para distintos casos de rigidez. Pérgola de Bobadilla II	66
4.3. Valores de k_v y c_v para distintos casos de rigidez. Pérgola de Bobadilla II	68
4.4. Valores de período y frecuencia para estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II	71
4.5. Máxima aceleración para estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II	73
4.6. Máximo desplazamiento para estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II	74
4.7. Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II	78
4.8. Máxima aceleración para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II	78
4.9. Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II	79
4.10. Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II	84
4.11. Máxima aceleración para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II	84
4.12. Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II	85
4.13. Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 1\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	90
4.14. Máxima aceleración para $E_p/G_s = 1\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	90
4.15. Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 1\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	91
4.16. Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 2\ 500$. Pérgola de Bobadilla II	96
4.17. Máxima aceleración para $E_p/G_s = 2\ 500$. Pérgola de Bobadilla II	96
4.18. Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 2\ 500$. Pérgola de Bobadilla II	97
4.19. Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 5\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	102

4.20. Máxima aceleración para $E_p/G_s = 5\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	102
4.21. Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 5\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	103
4.22. Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 10\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	108
4.23. Máxima aceleración para $E_p/G_s = 10\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	108
4.24. Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 10\ 000$. Pérgola de Bobadilla II	109

Índice de figuras

1.1. Esquema de una pérgola ferroviaria. Ugarte González [37]	2
2.1. Esquema de carga móvil sobre viga de sección variable. García Macías [5]	6
2.2. Discretización. García Macías [5]	7
2.3. Esquema de línea de carga C1. García Macías [5]	16
2.4. Esquema de línea de carga y puntos de postproceso en estructura. García Macías [5]	17
2.5. Esquema de cálculo del Método Semianalítico Generalizado. García Macías [5]	17
2.6. Geometría de la viga. Prueba 1.	18
2.7. Desplazamientos en centro de vano de manera analítica. Prueba 1	20
2.8. Aceleración de centro de vano de manera analítica. Prueba 1	21
2.9. Desplazamientos en centro de vano mediante SAP2000. Prueba 1	22
2.10. Aceleración en centro de vano mediante SAP2000. Prueba 1	23
2.11. Desplazamientos en centro de vano mediante el método semianalítico. Prueba 1	24
2.12. Aceleración en centro de vano mediante el método semianalítico. Prueba 1	25
2.13. Comparativa de desplazamientos. Prueba 1	25
2.14. Comparativa de aceleración. Prueba 1	26
2.15. Geometría de la viga. Prueba 2	26
2.16. Desplazamientos en centro de vano central de SAP2000. Prueba 2	28
2.17. Aceleración en centro de vano central de SAP2000. Prueba 2	29
2.18. Desplazamientos en centro de vano central del método semianalítico. Prueba 2	30
2.19. Aceleración en centro de vano central del método semianalítico. Prueba 2	31
2.20. Comparativa de desplazamientos en el centro del vano central	32
2.21. Comparativa de aceleración en el centro del vano central	33
3.1. Alternativas estudiadas. Ülker Kaustell et al. [12]	36
3.2. Valores máximos de aceleración. Ülker Kaustell et al. [12]	37

3.3. Discretización de la estructura. Romero et al. [33]	38
3.4. Modelo del bogie. Romero et al. [33]	38
3.5. Serie temporal de aceleración en centro de vano para un tren viajando a (a) $v = 110.4$ m/s, (b) $v = 103$ m/s, (c) $v = 95$ m/s y (d) $v = 92.5$ m/s en (a) terreno infinitamente rígido, (b) terreno duro, (c) terreno de dureza media y (d) terreno blando. Romero et al. [33]	39
3.6. Modelo de elementos finitos y de contorno. Doménech et al. [4] y Martínez-Rodrigo et al. [15]	40
3.7. Resultados de aceleración. Doménech et al. [4]	41
3.8. Resultados de aceleración. Martínez-Rodrigo et al. [15]	42
3.9. Diferentes modelos de terreno considerados. (a) Semiespacio homogéneo y (b) estrato homogéneo sobre roca. Zangeneh et al. [40]	43
3.10. (a) Rigidez dinámica normalizada y (b) coeficiente de amortiguamiento vertical normalizado para la superficie estudiada (3.5×7 m ²), restante en estrato homogéneo con velocidad de onda $V_s = 300$ m/s y gran H sobre roca. El eje de abcisas representa la relación entre la frecuencia estudiada y la de resonancia. Zangeneh et al. [40]	43
3.11. Generación de rigidez en el pilote en direcciones individuales. Novak et al. [28] 46	46
3.12. Ejemplo de variación de la rigidez de la pila en función de la frecuencia y la rigidez del terreno. Nogami and Novak [18]	48
3.13. Efecto de la relación entre las masas del pilote y el terreno en los parámetros de rigidez y amortiguamiento. Novak and Aboul-Ella [21]	49
3.14. Parámetros de rigidez y amortiguamiento para vibración horizontal de pilotes con $l/R > 25$ en perfiles homogéneos y $l/R > 30$ en suelos de perfil parabólico. Novak et al. [28]	50
3.15. Valores de f_{v1} y f_{v2} para pilotes empotrados. Novak et al. [28]	51
3.16. Valores de f_{v1} y f_{v2} para pilotes flotantes. Novak et al. [28]	52
4.1. Planta. Pérgola Bobadilla II	55
4.2. Tipología de vigas. Pérgola Bobadilla II	56
4.3. Tipología de cimentación. Pérgola de Bobadilla II	57
4.4. Modelo en SAP2000. Pérgola de Bobadilla II	57
4.5. Sección transversal de la vía. Pérgola de Bobadilla II	58
4.6. Detalle de la conexión entre las vigas y la losa. Pérgola de Bobadilla II	60
4.7. Detalle del sistema muelle - amortiguador de un grado de libertad. Pérgola de Bobadilla II	61

4.8. Puntos de posproceso de valores de aceleración. Pérgola de Bobadilla II	62
4.9. Puntos de posproceso de valores de desplazamiento. Pérgola de Bobadilla II .	63
4.10. Valores de f_{v1} y f_{v2} para $\frac{l}{R} = 50$. Novak et al. [28]	64
4.11. Valores de f_{v1} . Pérgola de Bobadilla II	65
4.12. Valores de f_{v2} . Pérgola de Bobadilla II	66
4.13. Valores de k_v . Pérgola de Bobadilla II	67
4.14. Valores de k_v . Pérgola de Bobadilla II	68
4.15. Modo 1 de vibración. Pérgola de Bobadilla II	72
4.16. Modo 2 de vibración. Pérgola de Bobadilla II	72
4.17. Modo 3 de vibración. Pérgola de Bobadilla II	73
4.18. Envolvente de aceleración en el punto 2 en estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II	74
4.19. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 en estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II	75
4.20. Envolvente de aceleración en el punto 2 para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II	79
4.21. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II	80
4.22. Envolvente de aceleración en el punto 2 para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II	85
4.23. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II	86
4.24. Envolvente de aceleración en el punto 5 para $E_p/G_s = 1\,000$. Pérgola de Bobadilla II	91
4.25. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 1\,000$. Pérgola de Bobadilla II	92
4.26. Envolvente de aceleración en el punto 5 para $E_p/G_s = 2\,500$. Pérgola de Bobadilla II	97
4.27. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 2\,500$. Pérgola de Bobadilla II	98
4.28. Envolvente de aceleración en el punto 1 para $E_p/G_s = 5\,000$. Pérgola de Bobadilla II	103
4.29. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 5\,000$. Pérgola de Bobadilla II	104

4.30. Envolvente de aceleración en el punto 2 para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II	109
4.31. Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II	110
4.32. Aceleración máxima en función de E_p/G_s . Pérgola de Bobadilla II	111
4.33. Desplazamiento máxima en función de E_p/G_s . Pérgola de Bobadilla II	112

CAPÍTULO 1

Introducción, objetivos y metodología

1.1. Introducción

El ferrocarril nació en Inglaterra en el siglo XIX como sustitución de la tracción animal en las vagonetas utilizadas sobre carriles de hierro en los trabajos mineros. Tras el invento de la máquina de vapor Stephenson la combinó con los carriles metálicos para diseñar una locomotora que remolcaba un conjunto de vagones sobre los elementos metálicos. La primera línea de ferrocarril existente fue la que unía la ciudad minera de Stockton y el puerto fluvial de Darlington, un tramo de 25 km construido en 1825.

La primera línea de ferrocarril española se construye en Cuba, uniendo las localidades de La Habana y Bejucal mediante un tramo de 28 km destinado al transporte de la caña de azúcar. Para presenciar la primera línea de ferrocarril en territorio peninsular hay que remontarse hasta el año 1848, cuando se inaugura la línea entre Barcelona y Mataró.

Las facilidades dadas al capital extranjero para la creación de líneas de ferrocarril hacen que las compañías privadas proliferen, lo que conlleva un gran impulso para la red ferroviaria española. En 1865, solo 17 años después de la inauguración del primer tren peninsular, la longitud de la red española ya alcanzaba los 5000 kilómetros. Y a finales del siglo XIX la longitud era de 10 000 km, un 90 % de la existente en 1940. Lo que indica que el recorrido de la red ferroviaria tradicional existente en España en la actualidad data de finales del siglo XIX.

En 1992 se produce un paso al frente en España con la inauguración de la primera línea de alta velocidad en territorio nacional, la que une las ciudades de Madrid y Sevilla. A la construcción de esta línea la siguieron la de otras tantas, lo que ha hecho que España, tras China, sea el segundo país del mundo con la red de alta velocidad más extensa.

La creación de las líneas de alta velocidad confronta fuertemente con la red ferroviaria tradicional existente, que como se ha comentado data principalmente del siglo XIX. Este conflicto ha provocado que muchas líneas de nueva creación deban discurrir por trazados paralelos y prácticamente coincidentes con los ya existentes, dadas las limitaciones de trazado que conlleva la alta velocidad, lo que ha generado graves inconvenientes en la construcción de las mismas.

Uno de los problemas ocasionados es la aparición de cruces entre las nuevas vías y las existentes con grandes ángulos de esviaje. Estos cruces provocan que la luz a salvar sea de grandes dimensiones. Si se quisiera optar por viaductos tradicionales habría grandes limitaciones en su construcción, ya que la imposibilidad de colocar pilas sobre la vía de ferrocarril a cruzar acarrearía la utilización de vigas de gran canto, con todas las complicaciones que eso conlleva, lo que convierte a la pérgola en la solución óptima para salvar el obstáculo.

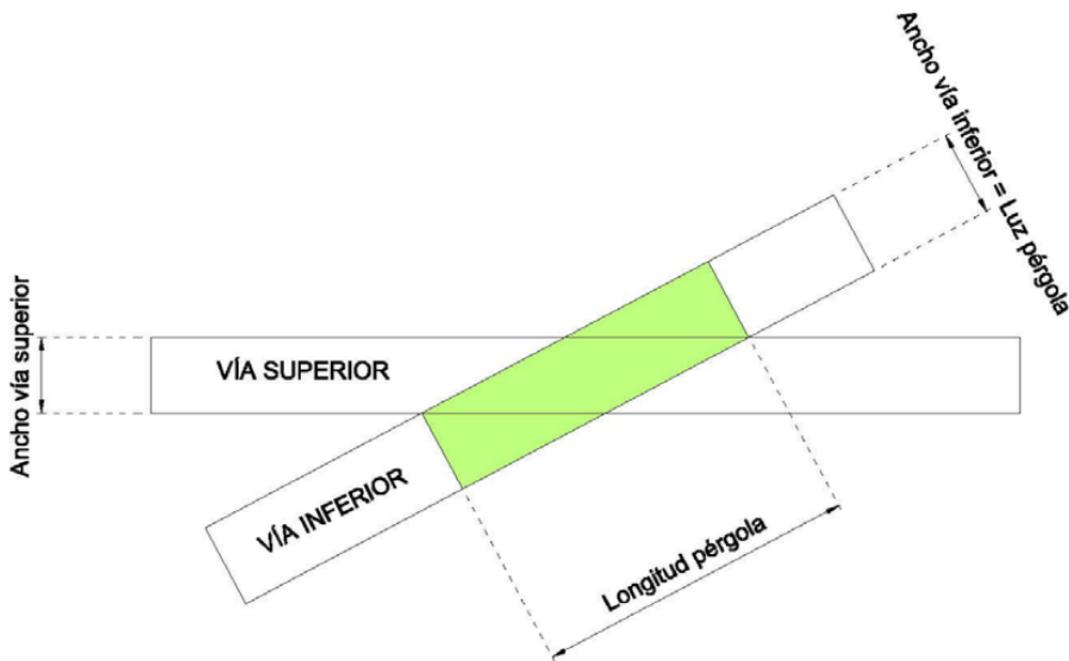


Figura 1.1: Esquema de una pérgola ferroviaria. Ugarte González [37]

Las pérgolas son estructuras singulares ya que existen pocos estudios rigurosos sobre qué modelos emplear y modos de fallos y en la normativa IAPF-2011 tampoco se plantean modelos para su análisis. Sin embargo en los últimos años se han publicado trabajos que han tratado de caracterizar la respuesta dinámica de este tipo de estructuras bajo la circulación de trenes de alta velocidad como Ugarte González [37] o Maldonado Salguero [13].

1.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

- Caracterización de pérgolas mediante modelos que incluyan la cimentación de las mismas y establecimiento de una metodología general para su análisis.
- Desarrollo de una metodología que incluya la interacción suelo - estructura para realizar el análisis dinámico de pérgolas para el paso del ferrocarril de alta velocidad mediante el método semianalítico, una vez se han demostrado las ventajas del mismo.
- Análisis de sensibilidad de respuestas dinámicas en función de la variación de la rigidez del terreno.

1.3. Metodología

La metodología seguida en la elaboración del presente trabajo es:

1. Verificación del método semianalítico para realizar los cálculos dinámicos en estructuras tipo pérgola, tras demostrar sus ventajas y calibrar el método mediante dos modelos bidimensionales realizado mediante una viga de Bernouilli-Euler. El primero una viga de tipología biapoyada y el segundo una viga continua de tres vanos.
2. Revisión del estado del arte en soluciones a la interacción suelo - estructura haciendo especial hincapié en las cimentaciones profundas mediante pilotes y caracterización de la tipología de rigidez y amortiguamiento presentes en los mismos.
3. Solución a la ecuación dinámica que gobierna el movimiento de la pérgola de manera que sea posible obtener los valores de amortiguamiento geométrico producidos por la interacción suelo - estructura.
4. Concepción y verificación del modelo de pérgola cimentado mediante pilotes empleando el software SAP2000 para introducir la geometría y realizar el análisis modal, previo a la integración analítica en el tiempo.
5. Análisis dinámico del modelo de pérgola empleando el método semianalítico bajo distintos supuestos de rigidez del terreno.
6. Análisis de la variación de las respuestas dinámicas de la pérgola bajo distintos supuestos de rigidez del terreno.
7. Conclusiones de los resultados dinámicos obtenidos y aportaciones futuras al campo del amortiguamiento geométrico en cimentaciones de pérgolas de ferrocarril.

CAPÍTULO 2

Método semianalítico

2.1. Introducción al método

La solución semianalítica al paso de cargas móviles fue desarrollada por Martínez Castro et al. [14], profesores de la Universidad de Granada.

El propósito del método es analizar las vibraciones de la viga en el plano vertical, que es el definido por la directriz de la misma y la dirección de las cargas actuantes sobre ella. La viga es dividida mediante nodos. Cada nodo tiene dos grados de libertad, el desplazamiento vertical y la rotación. A continuación se calculan las formas modales y las frecuencias naturales de la estructura mediante el sistema de valores y vectores propios. Finalmente las cargas modales equivalentes se expresan analíticamente en función de las formas modales previamente calculadas. A partir de esto se obtiene la expresión matemática de la solución en el dominio del tiempo para cada modo de manera directa.

En este apartado se va a exponer la formulación del método y se va a proceder a validarlo mediante dos ejemplos, una viga biapoyada y una viga continua de tres vanos, con el fin de demostrar que su utilización es válida para el cálculo dinámica de las pérgolas ferroviarias.

2.2. Ecuación de Gobierno para una viga.

Se considera una viga de sección variable, sometida a una carga p_0 que experimente un desplazamiento a través del eje longitudinal de la viga, x , a una velocidad de valor constante v :

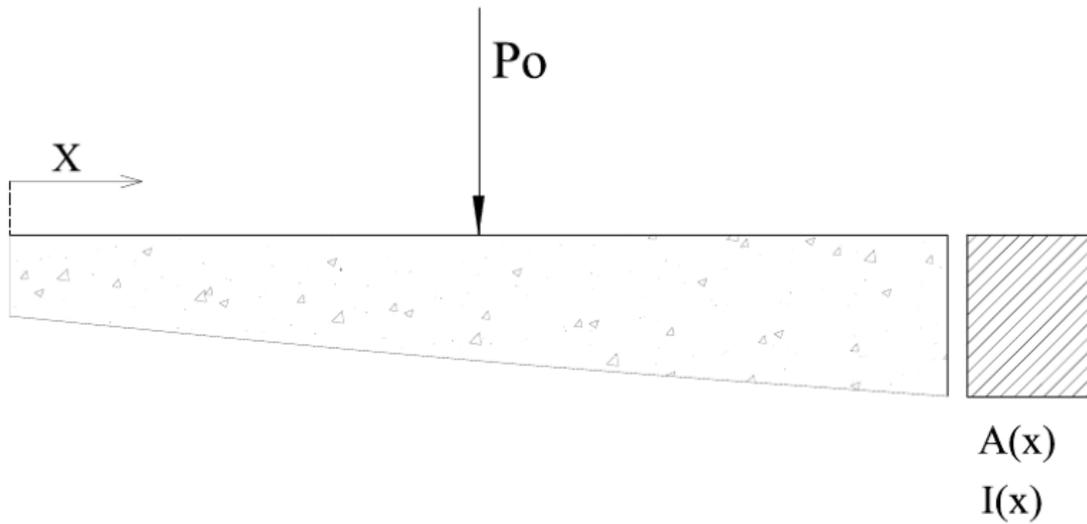


Figura 2.1: Esquema de carga móvil sobre viga de sección variable. García Macías [5]

Si se plantea el equilibrio en la rebanada mediante el principio de D'Alembert, despreciando en un principio la contribución del amortiguamiento, se obtiene lo que se indica a continuación:

- Equilibrio de fuerzas:

$$-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Siendo δ la función Delta de Dirac para imponer la distribución puntual de la carga aplicada con velocidad v , x la coordenada curvilínea de la línea de carga ($x \ni [0,L]$) y $\rho(x)$ la densidad lineal [$\frac{M}{L}$].

- Equilibrio de momentos:

$$\partial M(x,t) = Q(x,t) \partial x \Rightarrow \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t) \quad (2.2)$$

Si se sustituye 2.2 en 2.1:

$$-\frac{\partial(\frac{\partial M(x,t)}{\partial x})}{\partial x} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

Como ecuación constitutiva se utiliza como base la ecuación de la viga de Bernoulli-Euler en la que se adopta la relación lineal momento-curvatura:

$$\frac{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{M(x,t)}{EI(x)} \quad (2.5)$$

$$M(x,t) = EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Ecuación que una vez sustituida en 2.4 permite obtener la ecuación que gobierna el problema:

$$\frac{\partial^2 EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}{\partial x^2} - p_o \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}] + p_o \cdot \delta(x - vt) = 0 \quad (2.8)$$

Ecuación diferencial que se debe ser resuelta supuestas unas condiciones iniciales de reposo:

$$u(s, 0) = 0, \forall x \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \forall x \quad (2.10)$$

2.3. Discretización espacial

Dado un elemento de la línea de carga de longitud L, figura 2.2:

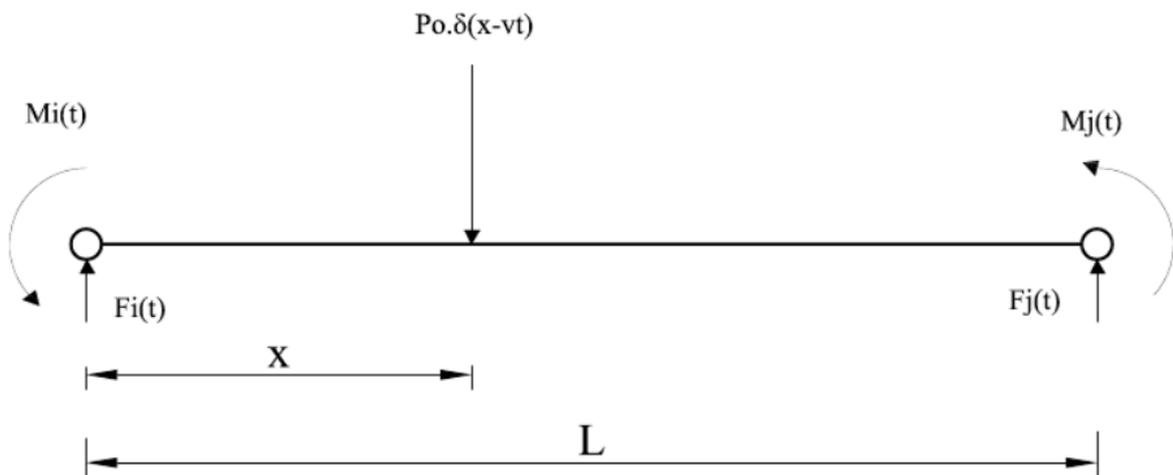


Figura 2.2: Discretización. García Macías [5]

- Fuerzas externas.

1. **Fuerzas y momentos nodales:**

Si se tiene en consideración el criterio de signos representado en la figura:

$$F_i^b = Q(0, t) \quad (2.11)$$

$$F_j^b = -Q(L, t) \quad (2.12)$$

$$M_i^b = -M(0, t) \quad (2.13)$$

$$M_j^b = M(L, t) \quad (2.14)$$

2. Fuerza puntual:

$$p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (2.15)$$

3. Fuerza de inercia:

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

■ Esfuerzos.

1. Cortantes:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = -p_0 \cdot \delta(x - vt) - \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Que integrándola entre 0 y $x \in [0, L]$:

$$Q(x, t) = Q(0, t) - \int_0^x p_0 \cdot \delta(\xi - vt) d\xi - \int_0^x \rho(\xi) \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (2.18)$$

2. Flectores:

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t) \cdot dx \quad (2.19)$$

$$M(x, t) = M(0, t) + \int_0^x Q(\xi, t) d\xi \quad (2.20)$$

En este punto, aplicando los conceptos de elementos finitos, se procede a trabajar con la formulación débil de la ecuación de Bernoulli-Euler de la viga multiplicando por una función de ponderación espacial, $u^*(x)$, y aplicando el método de integración por partes:

Se procede a utilizar la siguiente notación:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \dot{u}(x, t) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \ddot{u}(x, t) \quad (2.22)$$

Si se multiplica 2.8 por $u^*(x)$:

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) + (u''(x, t) \cdot EI(x))'' = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (2.23)$$

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) + (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \quad (2.24)$$

Integrando en el dominio:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) ds = \\
& = - \int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Es posible aplicar doble integración por partes en el segundo sumando del primer término:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx = \\
& = u^*(x) \cdot (u''(x, t) \cdot EI(x))' \Big|_0^L - \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))' \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} ds = \\
& = u^*(x) \cdot (u''(x, t) \cdot EI(x))' \Big|_0^L - (u''(x, t) \cdot EI(x)) \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \Big|_0^L + \\
& + \int_0^L u''(x, t) \cdot EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} dx
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Analizando detenidamente los sumandos de la expresión anterior es posible identificar fácilmente (*Por la relación Momento-Curvatura de Euler-Bernouilli*):

$$Q(x, t) = (u'' \cdot EI(x))' \tag{2.27}$$

$$M(x, t) = u'' \cdot EI(x) \tag{2.28}$$

Con lo cual, y teniendo en cuenta las relaciones anteriores, 2.27 y 2.28:

$$\begin{aligned}
& (u'' \cdot EI(x))' \cdot u^*(x) \Big|_0^L = Q(L, t) \cdot u^*(x) \Big|_0^L = \\
& = Q(L, t) \cdot u^*(L) - Q(0, t) \cdot u^*(0) = -F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
& u'' \cdot EI(s) \cdot \frac{\partial \cdot u^*(s)}{\partial s} \Big|_0^L = M(s) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0^L = \\
& = -M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_L - M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Con lo que la ecuación 2.26 resultaría:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L (u''(s, t) \cdot EI(s))'' \cdot u^*(s) dx = \\
& \int_0^L u''(s, t) \cdot EI(s) \cdot \frac{\partial^2 u^*(s)}{\partial s^2} - F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) - M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_L + \\
& + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En cuanto al segundo miembro de la ecuación 2.25:

$$\int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \cdot dx = p_0 \cdot u^*(vt) \tag{2.32}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función Delta de Dirac.

Por lo tanto, si se sustituyen las ecuaciones 2.31 y 2.32 en la ecuación 2.25 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(s) dx = \\
& = +F_j^b \cdot u^*(L) + F_i^b \cdot u^*(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot u^*(vt)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Expresión de la que no se ha impuesto condición alguna sobre $u^*(x)$ más que sea continua y derivable. Por ello, y continuando con los conceptos básicos de elementos finitos, se considera una base de los polinomios de Hermite de grado menor o igual a 3, pues se discretizarán los elementos barra por dos nodos extremos con 4 grados de libertad, dos de desplazamientos y otros dos de giro.

Se supondrá que $u(x,t)$ del elemento puede representarse de forma exacta a través de una combinación lineal de la base de los polinomios anteriormente indicada.

Por ello:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^4 y_n(t) \cdot h_n(x) \tag{2.34}$$

Siendo las expresiones de los polinomios de Hermite:

$$[U_i] \rightarrow h_1(x) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{2.35}$$

$$[\theta_i] \rightarrow h_2(x) = L \cdot \left[\frac{x}{L} - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \tag{2.36}$$

$$[U_j] \rightarrow h_3(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{2.37}$$

$$[\theta_j] \rightarrow h_4(x) = L \cdot [-(\frac{x}{L})^2 + (\frac{x}{L})^3] \quad (2.38)$$

Si se desarrolla la ecuación 2.34 usando las relaciones anteriores:

$$u(x, t) = y_i \cdot h_1(x) + \theta_i \cdot h_2(x) + y_j \cdot h_3(x) + \theta_j \cdot h_4(x) \quad (2.39)$$

De modo que es posible obtener la velocidad y la aceleración:

$$u(\dot{x}, t) = \dot{y}_i \cdot h_1(x) + \dot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \dot{y}_j \cdot h_3(x) + \dot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (2.40)$$

$$u(\dot{x}, t) = \sum_{n=1}^4 y_n(t) \cdot h_n(x) \quad (2.41)$$

$$u(\ddot{x}, t) = \ddot{y}_i \cdot h_1(x) + \ddot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \ddot{y}_j \cdot h_3(x) + \ddot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (2.42)$$

$$u(\ddot{x}, t) = \sum_{n=1}^4 y_n(t) \cdot h_n(x) \quad (2.43)$$

Si además se aceptan como funciones de ponderación $u^*(x)$ las propias funciones de Hermite:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho(x) \cdot \sum_{n=1}^4 [y_n(t) \cdot h_n(x)] \cdot h_m(x) dx + \int_0^L \sum_{n=1}^4 [y_n(t) \cdot \frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2}] \cdot EI(x) h_m(x) dx^2 = \\ & = +F_j^b \cdot h_m(L) + F_i^b \cdot h_m(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot h_m(vt) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Con lo cual se tiene la posibilidad de escribir de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_i(vt) \\ \dot{\theta}_i(vt) \\ \dot{y}_j(vt) \\ \dot{\theta}_j(vt) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i(vt) \\ \theta_i(vt) \\ y_j(vt) \\ \theta_j(vt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^b(vt) \\ M_i^b(vt) \\ F_j^b(vt) \\ M_j^b(vt) \end{bmatrix} - p_0 \begin{bmatrix} h_1(vt) \\ h_2(vt) \\ h_3(vt) \\ h_4(vt) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Siendo:

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \cdot h_i(x) \cdot h_j(x) dx \quad (2.46)$$

$$K_{ij} = \int_0^L h_i''(x) \cdot EI(x) \cdot h_j''(x) dx \quad (2.47)$$

Matrices cuyos subíndices indican que son matrices simétricas.

Si se procede a acoplar estas matrices elementales es posible obtener una formulación global para la estructura completa:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -p_0\mathbf{h}(vt) \quad (2.48)$$

2.4. Resolución

Se está trabajando con matrices simétricas por lo que la forma más sencilla de resolución es tratar de desacoplar el sistema, para ello se realiza un cambio de base, mediante la matriz C , matriz de cambio de base (obtenida del problema de autovalores), del sistema B (que coincidirá con la base de vectores propios) a la base canónica E :

$$(-w^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{y}(t) = 0 \Rightarrow |\mathbf{K} - w^2\mathbf{M}| = 0 \quad (2.49)$$

Problema de valores propios que proporciona los vectores propios o modos de vibración que compondrán por columnas la matriz C . De este modo, a través de dicha matriz C , se establece una relación entre las nuevas coordenadas del vector mediante las expresiones siguientes:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.51)$$

De modo que si se realiza dicho cambio de base y se multiplica por la izquierda por la transpuesta de C , se obtienen matrices diagonales para M y K , consiguiendo desacoplar el sistema:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{M}\mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{q} = -p_0\mathbf{C}^T\mathbf{h}(vt) \quad (2.52)$$

Las matrices de masa y rigidez resultan diagonales:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{C}^T\mathbf{M}\mathbf{C} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{C}^T\mathbf{K}\mathbf{C} \quad (2.54)$$

Si multiplica por la izquierda por \mathbf{M}_D^{-1} es posible reescribir:

$$\mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (2.55)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}(vt) \quad (2.56)$$

Siendo \mathbf{D} una matriz diagonal tal que $D_{ii} = w_i^2$, y la matriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \quad (2.57)$$

(*) Nótese que si se normaliza con la matriz de masa, $M_D=I$, y $G=-p_0 \cdot \mathbf{C}^T$

De este modo se ha conseguido desacoplar el sistema, siendo resoluble para cada función $q_i(t)$ independientemente, de modo que se puede expresar:

$$\ddot{q}_n(t) + w_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (2.58)$$

Llegados a este punto se pueden incluir los efectos producidos por el amortiguamiento:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta w_n \dot{q}_n(t) + w_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (2.59)$$

En la que ζ representa la tasa de amortiguamiento, en el que se puede introducir un valor distinto para cada modo (lo que sería más ajustado al comportamiento real ya que es evidente pensar que se amortiguarán de mejor manera los modos altos a los bajos), aunque en la práctica se suele optar por la inclusión de un amortiguamiento constante para cada uno de los modos por lo que en el presente documento se procederá de igual forma.

Por lo tanto, el problema a resolver viene dado por:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta w_n \dot{q}_n(t) + w_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (2.60)$$

$$q_i(t)|_{t=0} = q_i(0) \quad (2.61)$$

$$\dot{q}_i(t)|_{t=0} = \dot{q}_i(0) \quad (2.62)$$

Se considera una escala de referencia local para cada elemento, en el que el instante t igual a 0 coincide con el instante en que la carga entra en el elemento, coincidente con el punto de abscisa igual a 0. De este modo se evitan exponenciales con términos fuera de rango (se puede entender sin complicación si se visualiza la ecuación de un sistema de un grado de libertad amortiguado, en el que se dispone de una función exponencial decreciente con el aumento del tiempo).

Si se observa la ecuación 2.60, se aprecia que se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea por lo que la solución se descompone en la suma de la solución a la ecuación homogénea más una solución particular:

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) \quad (2.63)$$

- Solución homogénea:

$$q_H(t) = e^{-\zeta w_i t} (C_1 \cos(w_{iD} t) + C_2 \sin(w_{iD} t)) \quad (2.64)$$

$$w_{iD} = w_i \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.65)$$

- Solución particular:

Si se descompone el término no homogéneo:

$$p_0(G_1 h_1(vt) + G_2 h_2(vt) + G_3 h_3(vt) + G_4 h_4(vt)) \quad (2.66)$$

Es más que un polinomio de tercer grado, lo que provoca que la ecuación particular sea de la forma:

$$q_P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 vt + \alpha_2 (vt)^2 + \alpha_3 (vt)^3 \quad (2.67)$$

Ecuación cuyos coeficientes se obtienen sustituyendo en la ecuación 2.60 y comparando coeficientes de mismo grado, obteniéndose:

$$\alpha_0 = v^3 \alpha_{01} + v^2 \alpha_{02} + v \alpha_{03} + \alpha_{04} \quad (2.68)$$

$$\alpha_1 = v^2 \alpha_{11} + v \alpha_{12} + \alpha_{13} \quad (2.69)$$

$$\alpha_2 = v \alpha_{21} + \alpha_{22} \quad (2.70)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{31} \quad (2.71)$$

Los diez coeficientes que aparecen obedecen a las siguientes expresiones:

$$[1] \mapsto \alpha_{01} = -\frac{24\zeta(2\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^5} \quad (2.72)$$

$$[2] \mapsto \alpha_{02} = -\frac{2(4\zeta^2 - 1)(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^4} \quad (2.73)$$

$$[3] \mapsto \alpha_{03} = -\frac{2G_2 \zeta}{w_i^3} \quad (2.74)$$

$$[4] \mapsto \alpha_{04} = \frac{G_1}{w_i^2} \quad (2.75)$$

$$[5] \mapsto \alpha_{11} = \frac{6(4\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^4} \quad (2.76)$$

$$[6] \mapsto \alpha_{12} = \frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^3} \quad (2.77)$$

$$[7] \mapsto \alpha_{13} = \frac{G_2}{w_i^2} \quad (2.78)$$

$$[8] \mapsto \alpha_{21} = -\frac{6\zeta(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^3} \quad (2.79)$$

$$[9] \mapsto \alpha_{22} = -\frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^2} \quad (2.80)$$

$$[10] \mapsto \alpha_{31} = \frac{2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L}{L^3 w_i^2} \quad (2.81)$$

Estos diez elementos dependen del amortiguamiento, de la longitud del elemento, de las frecuencias naturales y de los coeficientes G_i que a su vez depende de los modos de vibración, sin depender en ningún momento de la velocidad de paso de la carga por o que se podrían determinar en un principio estos diez parámetros para la malla completa.

En último lugar resta determinar los parámetros C_1 y C_2 de la solución homogénea a partir de la imposición de las condiciones iniciales:

$$q(0) = \alpha_0 + C_1 \quad (2.82)$$

$$C_1 = q(0) - \alpha_0 \quad (2.83)$$

$$\dot{q}(0) = -\zeta w_i C_1 + w_{iD} C_2 + \alpha_1 v \quad (2.84)$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}(0) + \zeta w_i C_1 - \alpha_1 v}{w_{iD}} \quad (2.85)$$

2.5. Generalización del método.

Se observa en la solución obtenida, 2.67 y 2.64, que todos los parámetros de los que depende (C_i, w_i y G_i) se obtienen del análisis modal, estando la parte temporal definida de forma analítica. En ningún momento aparecen imposiciones de geometría, sección o inercia, estando contenida toda esta información geométrica en forma de masa e inercia a través del análisis modal.

Se puede interpretar la ecuación matricial 2.45, mediante un operador diferencial L:

$$\mathcal{L}\{u(\bar{x}, t), v(\bar{x}, t), w(\bar{x}, t)\} = -p_0 \cdot \delta(s - vt) \quad (2.86)$$

Con s coordenada curvilínea de una línea de carga C^1 . Se resuelve mediante separación de variables, espacial y temporal, a través del análisis modal que, gracias a la diagonalización de las matrices de rigidez y masa, desacopla todo el sistema.

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{C}^T \cdot h(vt) \quad (2.87)$$

Por lo tanto, el método semianalítico se encarga de realizar la integración temporal de la información modal, información que le es proporcionada externamente, como en los casos que se analizan en este documento, mediante el software SAP2000, o cualquier otro software de análisis modal al uso. Por ello, parece razonable pensar que esta metodología para vigas es generalizable a líneas de carga genéricas, con la única imposición de la derivabilidad, C^1 , de la línea de carga, de modo que la discretización espacial mediante los polinomios de Hermite permita una transición suave en su definición evitando la existencia de discontinuidades que introduzcan picos de aceleración ficticios.

En la publicación de Museros et al. [16], en la que los autores desarrollan la aplicación del método a placas de Kirchhoff esviadas, se observa de nuevo la generalidad del método en cuanto no se exige más que la derivabilidad de la línea de carga, tratando el dominio espacial mediante análisis modal de forma independiente.

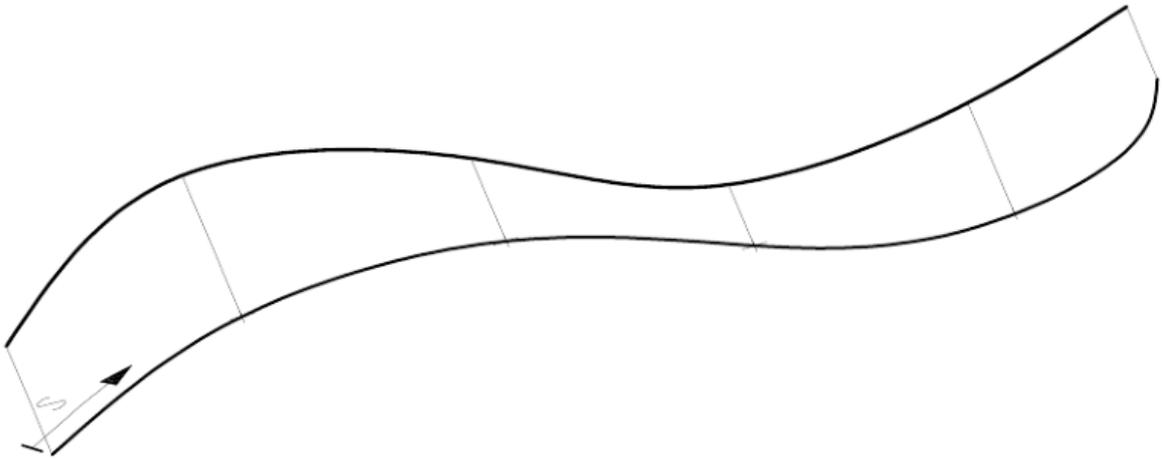


Figura 2.3: Esquema de línea de carga C^1 . García Macías [5]

Por lo tanto, el esquema de cálculo consiste, en primer lugar, en la determinación de los diez parámetros α_n , así como las matrices \mathbf{C} y \mathbf{G} mediante cualquier *software* de elementos

finitos y análisis modal, información que recibe el algoritmo semianalítico para, posteriormente, realizar la integración temporal de la solución, quedando así determinada por completo la misma en términos de desplazamientos y giros (*solución analítica, no aproximada*) de los puntos de postproceso (puntos donde estudiamos aceleraciones y desplazamientos, figura 2.4) que previamente introduzcamos, de una manera sencilla gracias a la diagonalización de las matrices de masa y rigidez con el consecuente desacoplamiento del sistema.

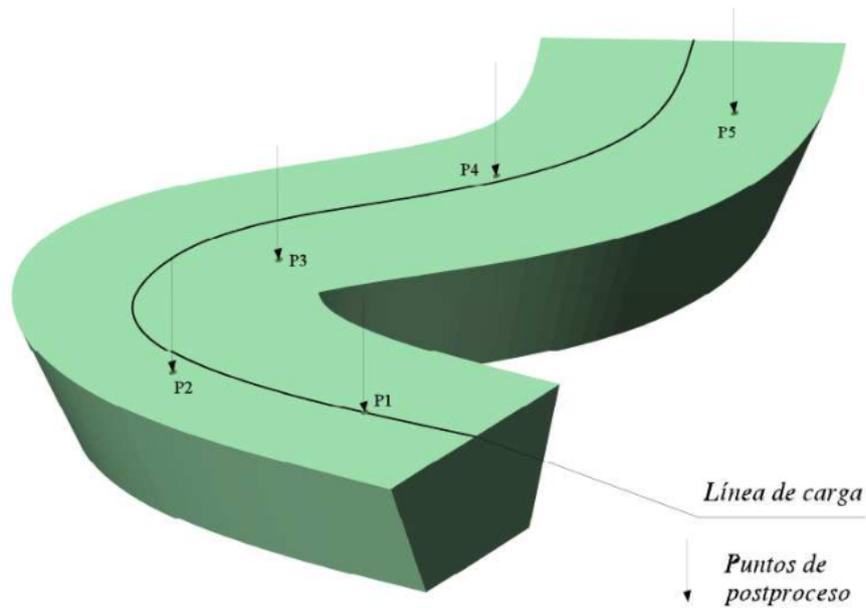


Figura 2.4: Esquema de línea de carga y puntos de postproceso en estructura. García Macías [5]

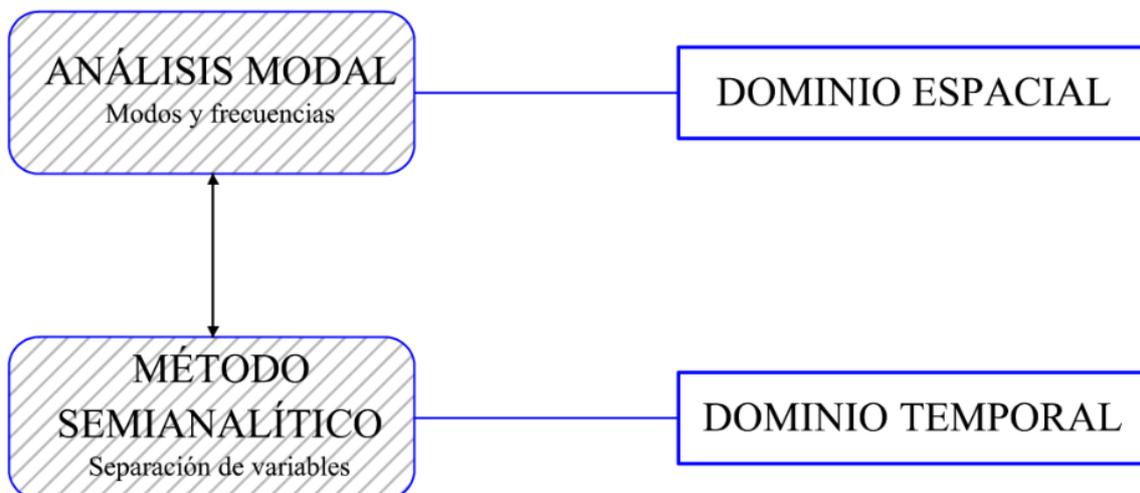


Figura 2.5: Esquema de cálculo del Método Semianalítico Generalizado. García Macías [5]

2.6. Pruebas de validación

2.6.1. Planteamiento

Las estructuras que van a ser utilizadas en las pruebas de validación son:

1. Viga isostática biapoyada
2. Viga continua de tres vanos

Sobre las estructuras indicadas se va a realizar un cálculo dinámico con el fin de comprobar los resultados que arrojan tres métodos distintos y comprobar si efectivamente son coincidentes. Los métodos empleados van a ser la solución analítica (solamente en la primera prueba), el cálculo mediante el método semianalítico y el cálculo mediante el programa SAP2000.

El objetivo es el siguiente:

1. Comparativa entre los resultados obtenidos por los diferentes métodos.
2. Detectar las ventajas del método semianalítico frente al cálculo con el programa SAP2000.
3. Demostrar que la aplicación del método semianalítico es válida en el cálculo de pérgolas.

2.6.2. Prueba de validación 1: Viga de Bernoulli-Euler biapoyada

Esta primera prueba consiste en la comparativa de resultados dinámicos obtenidos durante el paso de una carga móvil por la viga representada en la figura 2.6.



Figura 2.6: Geometría de la viga. Prueba 1.

Las características de la viga son:

- Viga de Bernoulli - Euler
- Longitud: $L = 15 \text{ m}$
- Masa por unidad de longitud: $\rho A = 15.291 \text{ t/m}^3$
- Rigidez a flexión: $EI = 7.695 \text{ GNm}^2$
- Amortiguamiento modal: $\xi = 2 \%$
- Velocidad de paso: $V = 100 \text{ m/s}$
- Carga móvil: $P = 195 \text{ kN}$

Para efectuar el cálculo dinámico se divide la viga de manera uniforme en 8 elementos. Se realiza un análisis bidimensional y el cálculo modal mediante el software SAP2000 considerando 3 modos de vibración.

Los resultados de períodos y frecuencias naturales son los representados en la tabla 2.1.

Modo (n°)	Período (s)	Frecuencia (Hz)
1	0.2019	4.9524
2	0.0505	19.8040
3	0.0225	44.4900

Cuadro 2.1: Frecuencias y períodos de vibración. Prueba 1

Una vez obtenidas las formas y frecuencias modales se va a proceder al análisis dinámico de la viga mediante el paso de una carga puntual. El análisis dinámico se va a efectuar a través de los siguientes métodos:

1. Fórmula analítica
2. Programa comercial SAP2000
3. Método semianalítico

Cálculo mediante fórmula analítica

La solución de esta ecuación es posible mediante el método de separación de variables. Consideraremos que la solución para $w(x,t)$ puede expresarse mediante el producto de una función que sólo depende de x , la cual notaremos como $\phi(x)$, por otra función que sólo depende del tiempo (t), la cual notaremos como $q(t)$ (2.88).

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.88)$$

La solución espacial $\phi_n(x)$ se denominan modos de vibración y poseen la expresión indicada en la fórmula (2.89).

$$\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.89)$$

La expresión de la solución temporal es la indicada en la fórmula (2.90).

$$q_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} [A_n \cos(\omega_{Dn} t) + B_n \text{sen}(\omega_{Dn} t) + \alpha_n \cos(\Omega_n t) + \beta_n \text{sen}(\Omega_n t)] \quad (2.90)$$

La expresión de las variables que aparecen en la fórmula (2.90) es el siguiente:

$$\alpha_n = \frac{4P_0\xi_n\omega_n\Omega_n}{mI\kappa} \quad (2.91)$$

$$\beta_n = \frac{2P_0(\Omega_n^2 - \omega_n^2)}{mI\kappa} \quad (2.92)$$

$$A_n = -\alpha_n \quad (2.93)$$

$$B_n = \frac{-\Omega_n\beta_n - \xi_n\omega_n\alpha_n}{\omega_{Dn}} \quad (2.94)$$

Para obtener los resultados dinámicos del análisis la solución 2.88 se ha implementado en el entorno C++ por su eficiencia de cálculo.

Para los primeros 0.6 segundos se obtienen en centro de vano los resultados de desplazamientos representados en la figura 2.7.

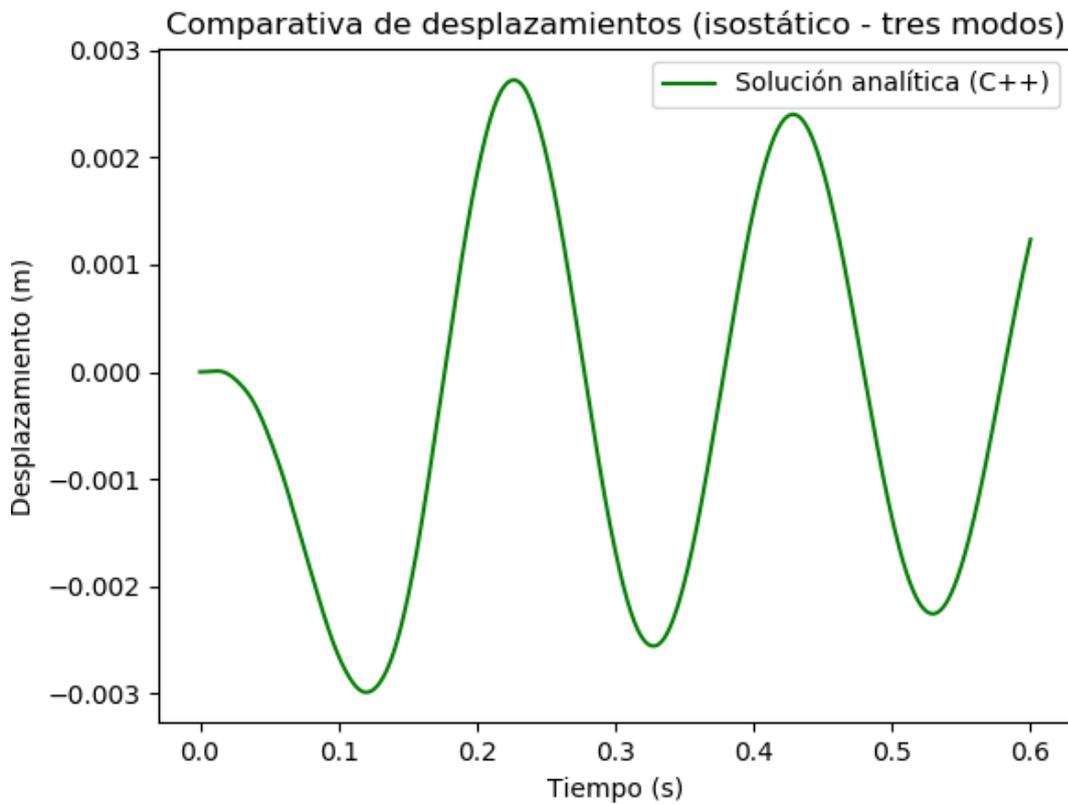


Figura 2.7: Desplazamientos en centro de vano de manera analítica. Prueba 1

Para el mismo período de tiempo y la misma ubicación los resultados de aceleración son los representados en la figura 2.8.

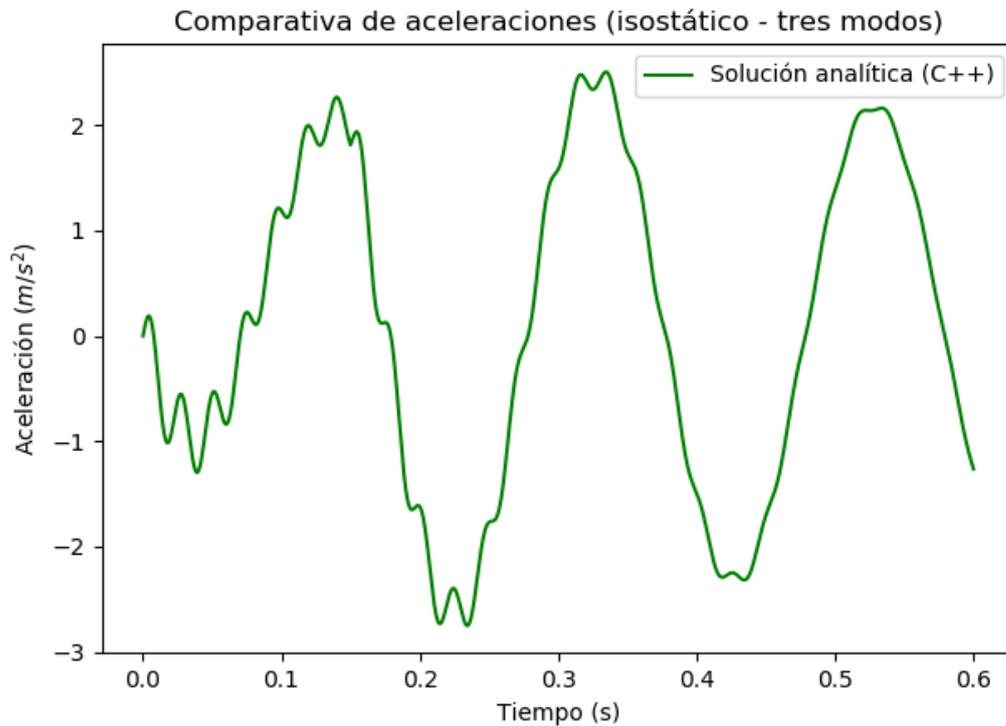


Figura 2.8: Aceleración de centro de vano de manera analítica. Prueba 1

Cálculo mediante SAP2000

Como en cualquier método paso a paso, se debe definir los dos siguientes parámetros:

1. Tiempo de discretización de la carga: Se emplearán pasos de $3 \cdot 10^{-4}$ s.
2. Tiempo de discretización del paso: Será igual que el anterior.

Los pasos se eligen con lo suficientemente finos para poder comparar con los otros métodos pero teniendo el cuidado de no seleccionar un número de pasos demasiado elevado, ya que este método conlleva un coste computacional muy alto.

Para los primeros 0.6 segundos se obtienen en centro de vano los resultados de desplazamientos representados en la figura 2.9.

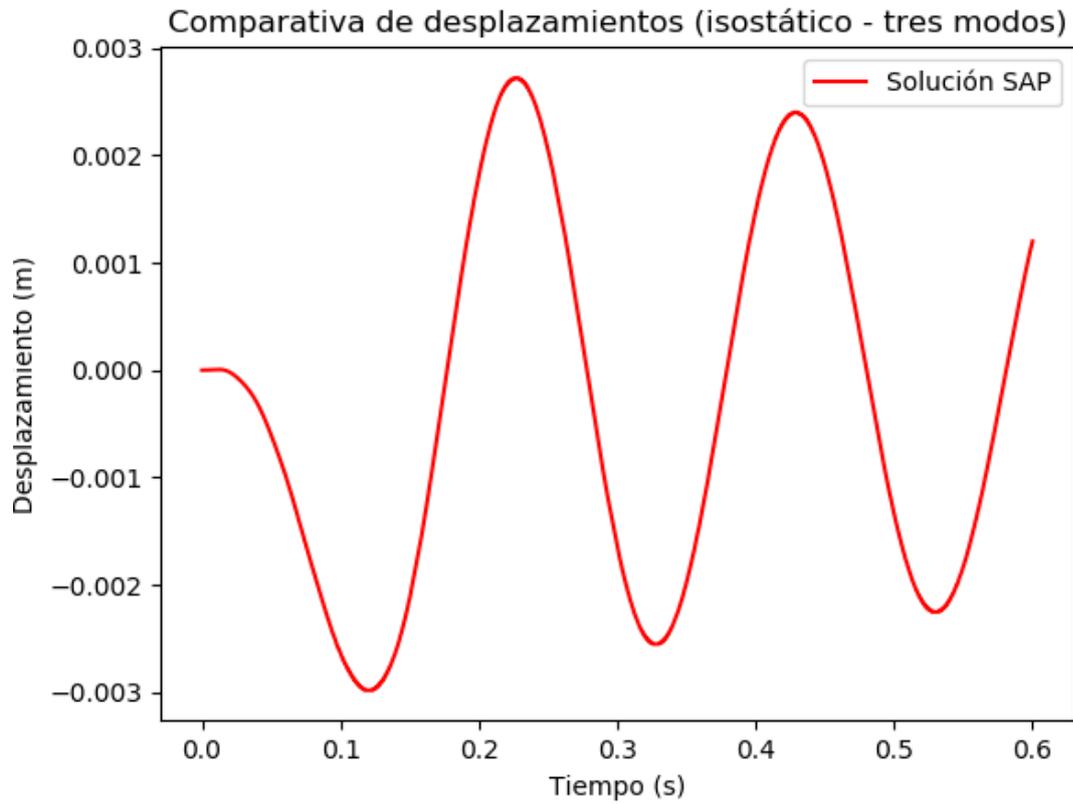


Figura 2.9: Desplazamientos en centro de vano mediante SAP2000. Prueba 1

Para el mismo período de de tiempo y la misma ubicación los resultados de aceleración son los representados en la figura 2.10.

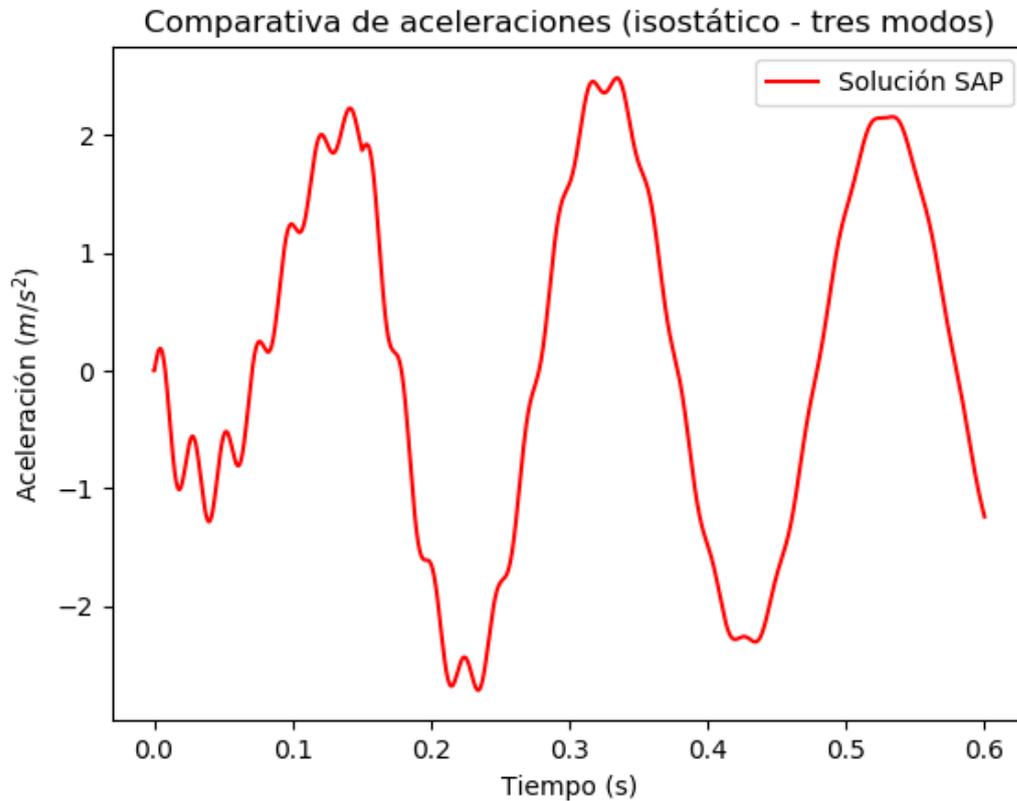


Figura 2.10: Aceleración en centro de vano mediante SAP2000. Prueba 1

Cálculo método semianalítico

Los datos de entrada del método semianalítico son: frecuencias naturales, número de modos a analizar, valores de aceleración vertical y giros procedentes del análisis modal, valor de la amortiguación, definición de cargas móviles, definición de línea de carga y de puntos de postproceso. El poder definir exclusivamente los puntos que interesa analizar ahorrará más tiempo ya que los cálculos en SAP2000 se realizan en cada nodo que se discretiza la estructura.

El paso de tiempo empleado es el mismo que en el cálculo con SAP2000 y se han empleado como puntos de posproceso cuartos y centro de vano.

Para los primeros 0.6 segundos se obtienen en centro de vano los resultados de desplazamientos representados en la figura 2.11.

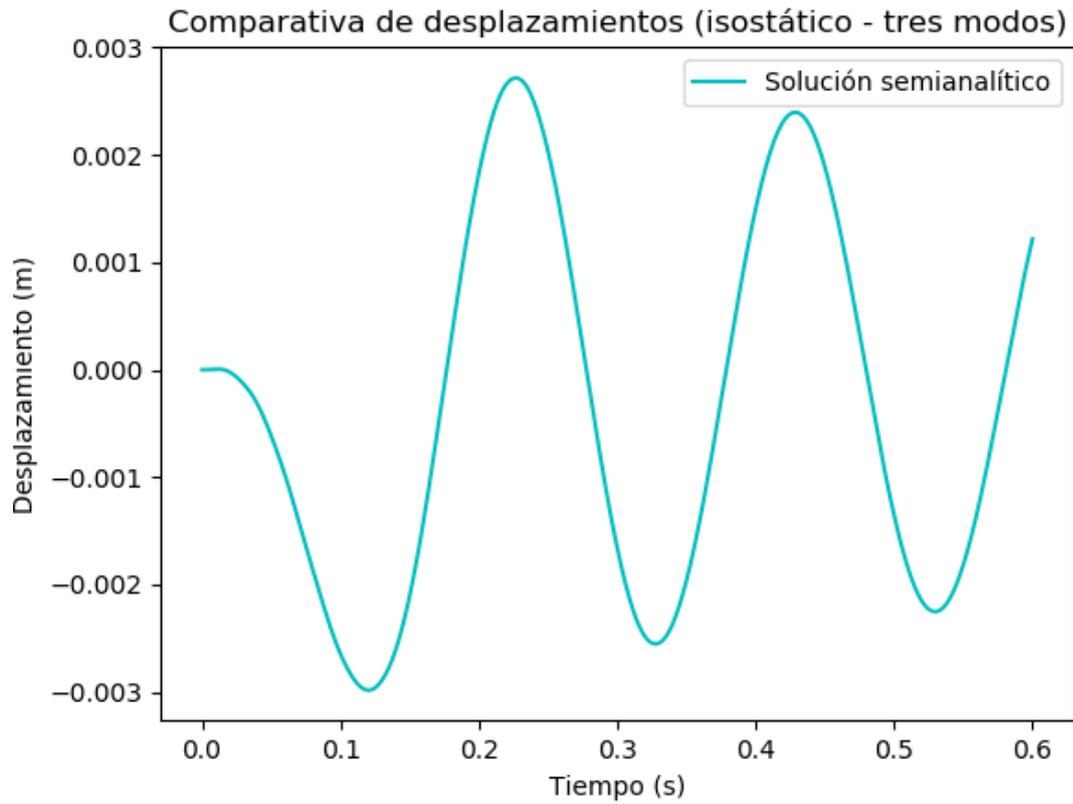


Figura 2.11: Desplazamientos en centro de vano mediante el método semianalítico. Prueba 1

Para el mismo período de de tiempo y la misma ubicación los resultados de aceleración son los representados en la figura 2.12.

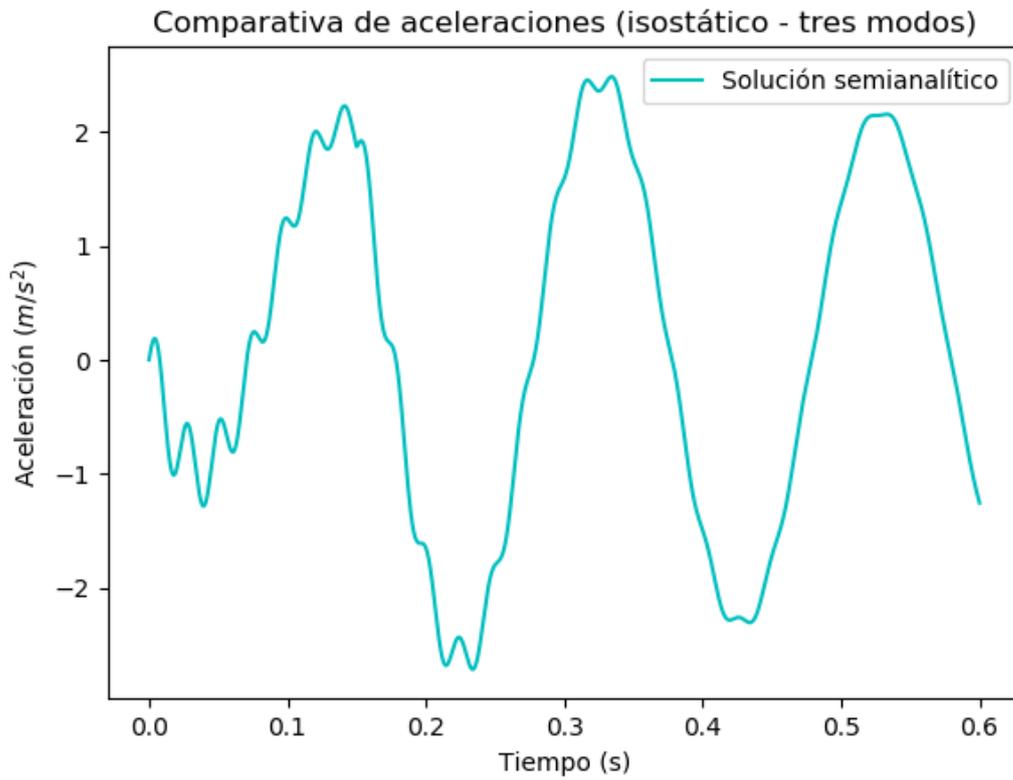


Figura 2.12: Aceleración en centro de vano mediante el método semianalítico. Prueba 1

Comparativa

La comparativa de resultados de desplazamiento se puede observar en la figura 2.13.

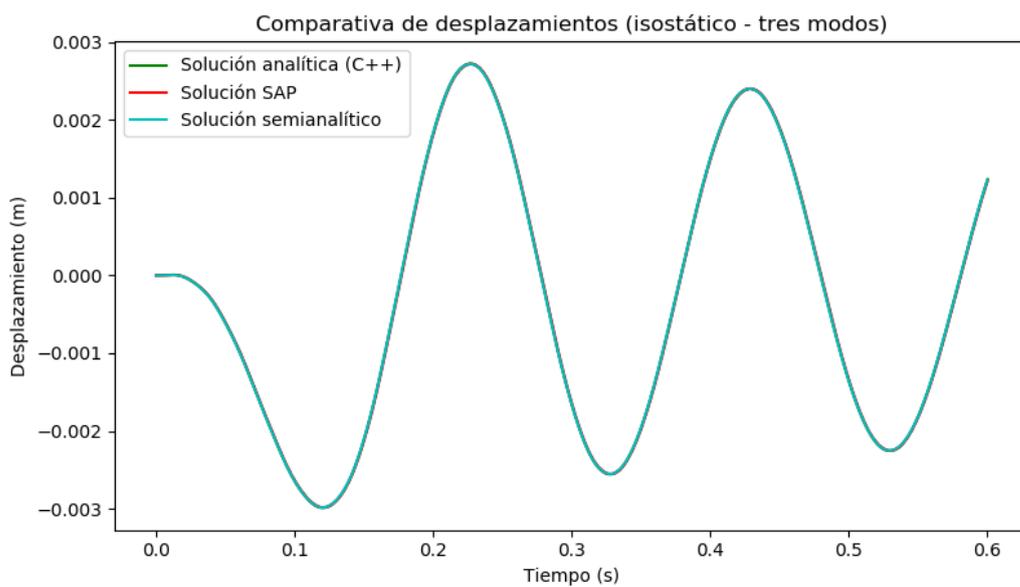


Figura 2.13: Comparativa de desplazamientos. Prueba 1

La comparativa de resultados de desplazamiento se puede observar en la figura 2.14.

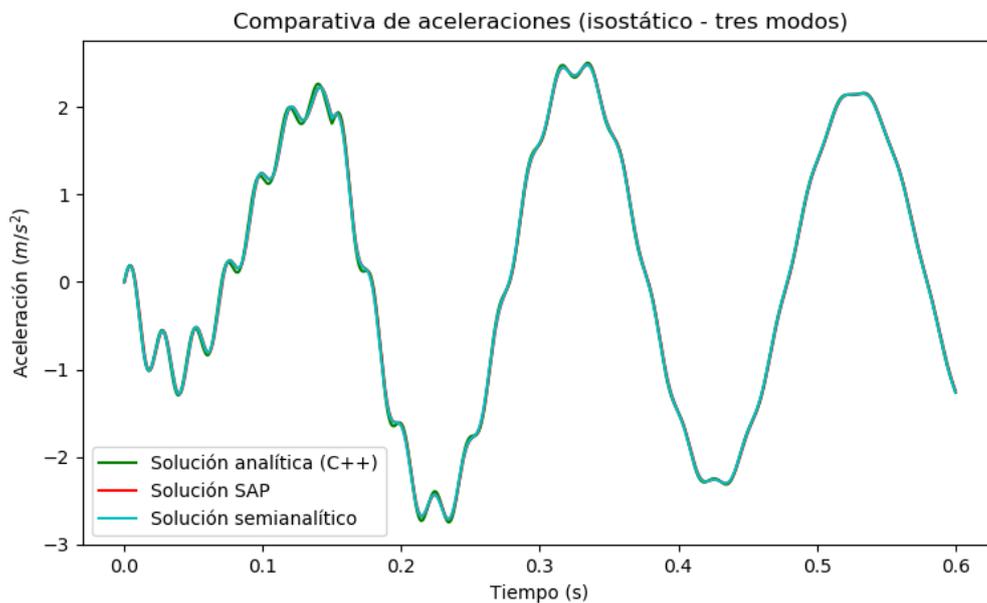


Figura 2.14: Comparativa de aceleración. Prueba 1

Como se puede observar en las figuras 2.13 y 2.14 los tres métodos arrojan el mismo resultado. También cabe destacar que el tiempo de computación de los métodos analítico y semianalítico es mucho menor que el empleado por SAP2000, lo que los convierte en métodos de cálculo mucho más recomendables.

2.6.3. Prueba de validación 1: Viga de Bernoulli-Euler de tres vanos

Esta segunda prueba consiste en la comparativa de resultados dinámicos tras el paso de una carga móvil por la viga representada en la figura 2.15.

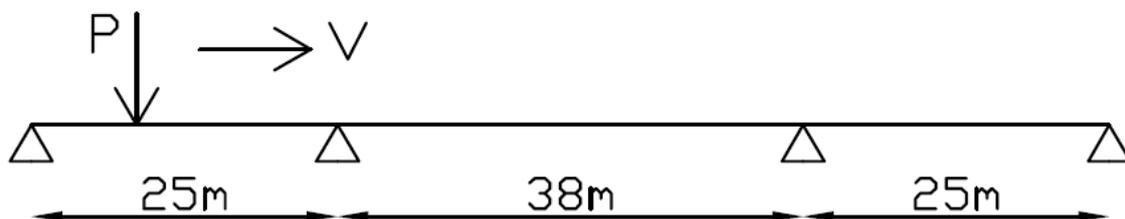


Figura 2.15: Geometría de la viga. Prueba 2

Las características de la viga son:

- Viga de Bernoulli - Euler
- Masa por unidad de longitud: $\rho A = 14.435 \text{ t/m}^3$

- Rigidez a flexión: $EI = 110.6 \text{ GNm}^2$
- Amortiguamiento modal: $\xi = 2 \%$
- Velocidad de paso: $V = 100 \text{ m/s}$
- Carga móvil: $P = 195 \text{ kN}$

Se divide la viga de manera uniforme en 8 elementos. Se realiza un análisis bidimensional y el cálculo modal mediante el software SAP2000 considerando 5 modos de vibración.

Los resultados de períodos y frecuencias naturales obtenidos en el análisis modal son los representados en la tabla 2.2.

Modo (n°)	Frecuencia (Hz)	Período (s)
1	4.2802	0.2336
2	8.1962	0.1220
3	9.5928	0.1042
4	15.8050	0.0633
5	27.4730	0.0364

Cuadro 2.2: Frecuencias y períodos de vibración. Prueba 2

Una vez realizado el análisis modal se va a proceder al análisis dinámico de la viga mediante el paso de una carga puntual. El análisis dinámico se va a efectuar a través de los siguientes métodos:

1. Programa comercial SAP2000
2. Método semianalítico

Cálculo mediante SAP2000

Los pasos de tiempo elegidos son los iguales a los utilizados en el caso de la viga de tipología biapoyada.

1. Tiempo de discretización de la carga: Se emplearán pasos de $3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.
2. Tiempo de discretización del paso: Será igual que el anterior.

Para los primeros 0.6 segundos se obtienen en el centro del vano central los resultados de desplazamientos representados en la figura 2.16

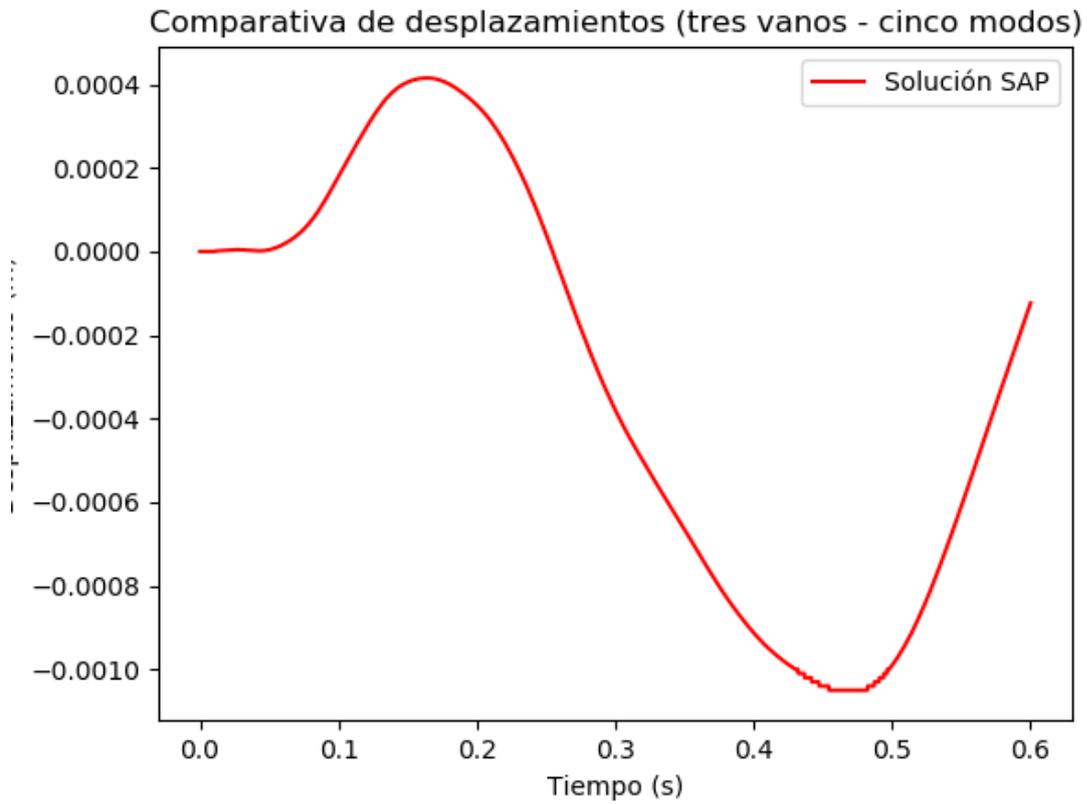


Figura 2.16: Desplazamientos en centro de vano central de SAP2000. Prueba 2

Para el mismo período de de tiempo y la misma ubicación los resultados de aceleración son los representados en la figura 2.17.

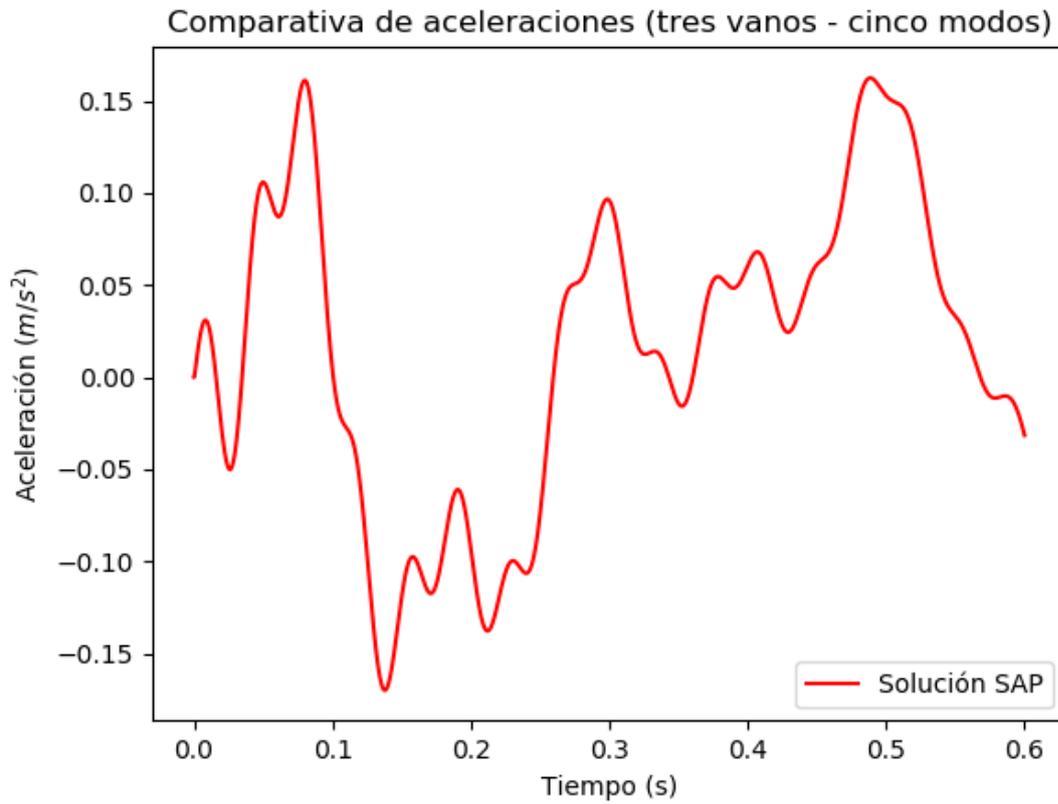


Figura 2.17: Aceleración en centro de vano central de SAP2000. Prueba 2

Cálculo método semianalítico

Los puntos de posproceso elegidos son los situados en cuartos y centro de vano.

Para los primeros 0.6 segundos se obtienen en el centro del vano central los resultados de desplazamientos representados en la figura 2.18

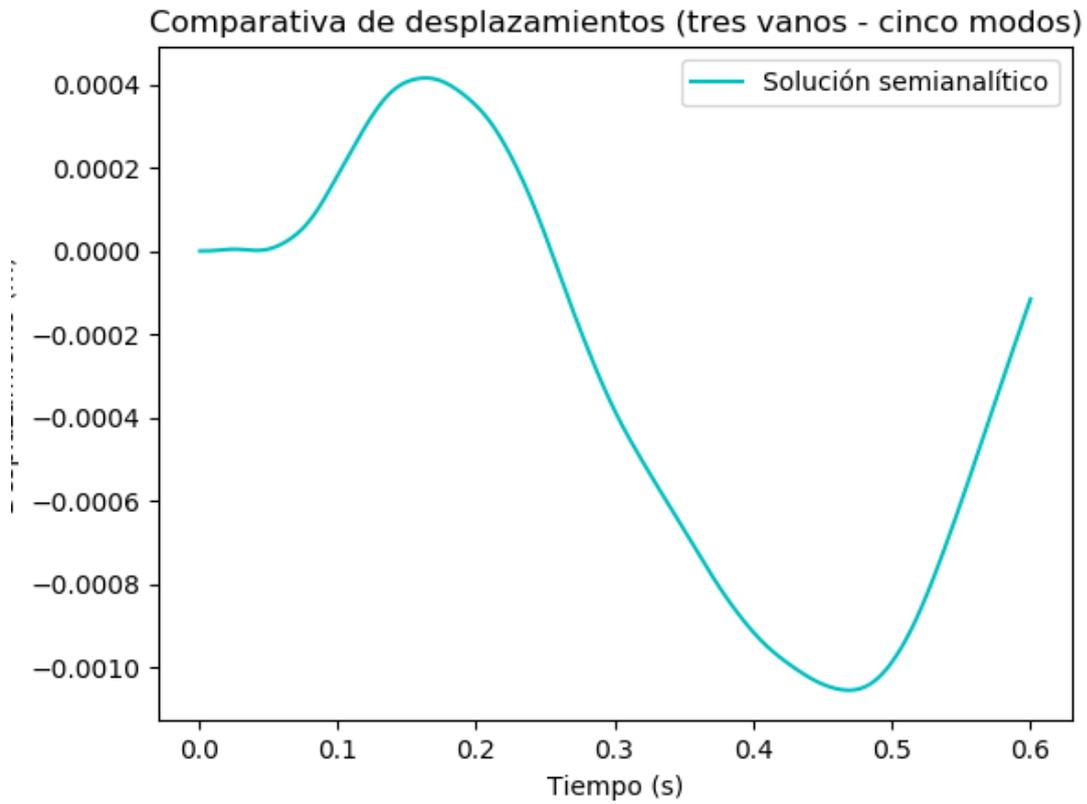


Figura 2.18: Desplazamientos en centro de vano central del método semianalítico. Prueba 2

Para el mismo período de de tiempo y la misma ubicación los resultados de aceleración son los representados en la figura 2.19.

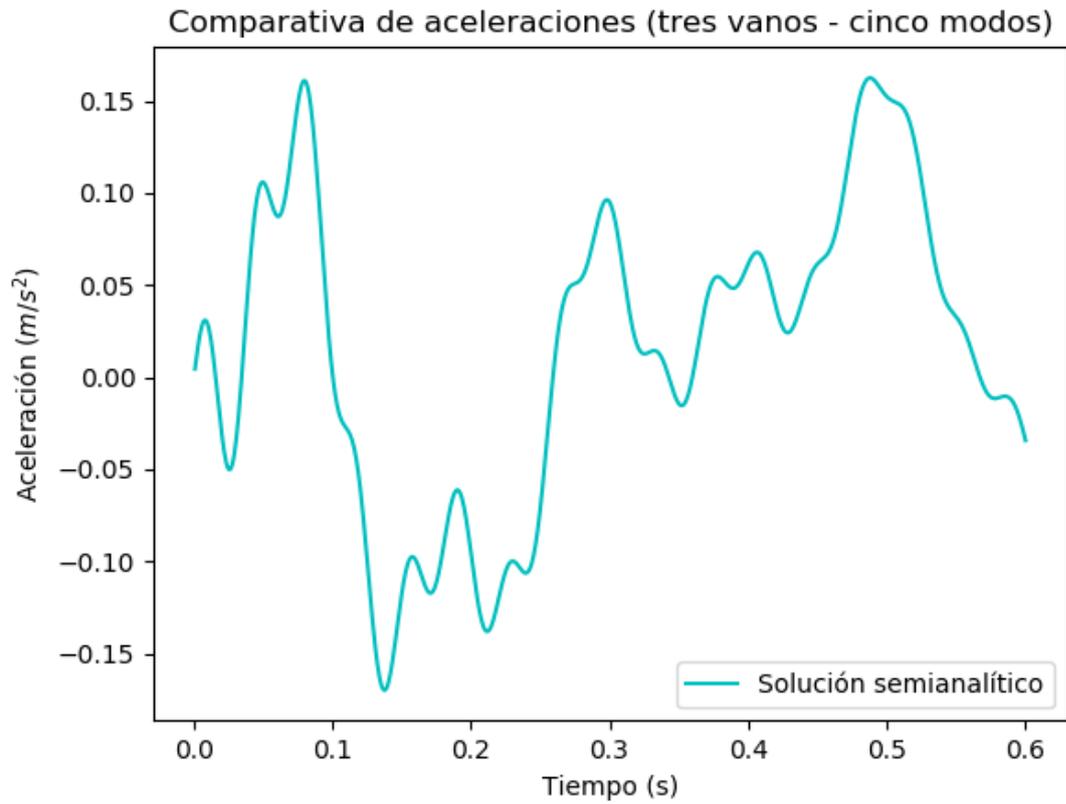


Figura 2.19: Aceleración en centro de vano central del método semianalítico. Prueba 2

Comparativa

La comparativa de los resultados de desplazamiento se puede observar en la figura 2.20.

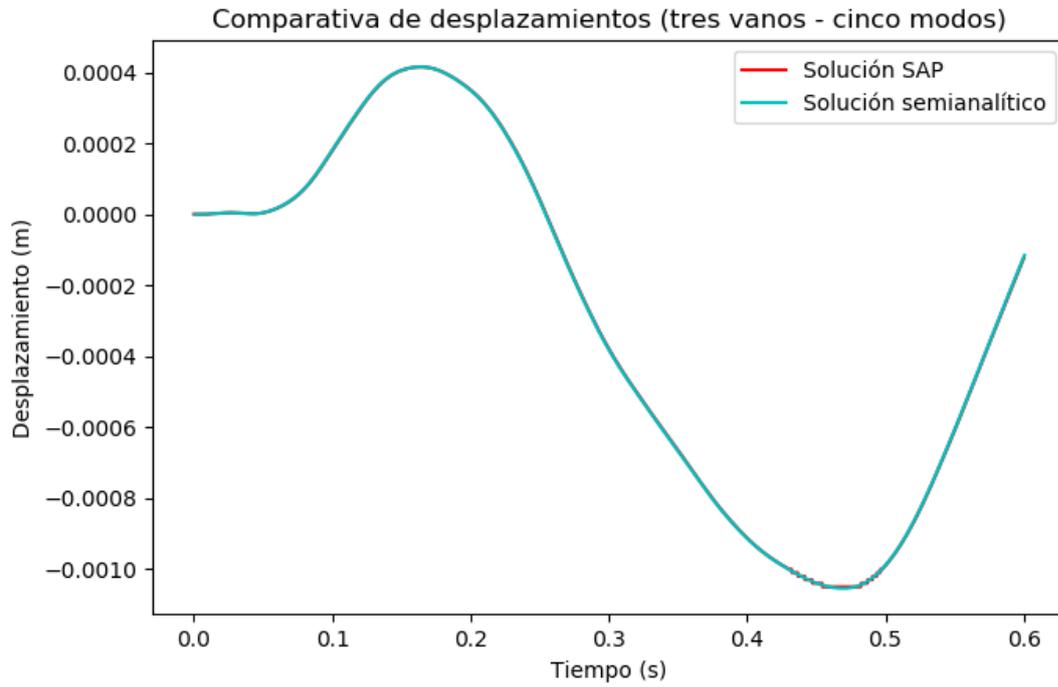


Figura 2.20: Comparativa de desplazamientos en el centro del vano central

La comparativa de los resultados de aceleración se puede observar en la figura 2.21.

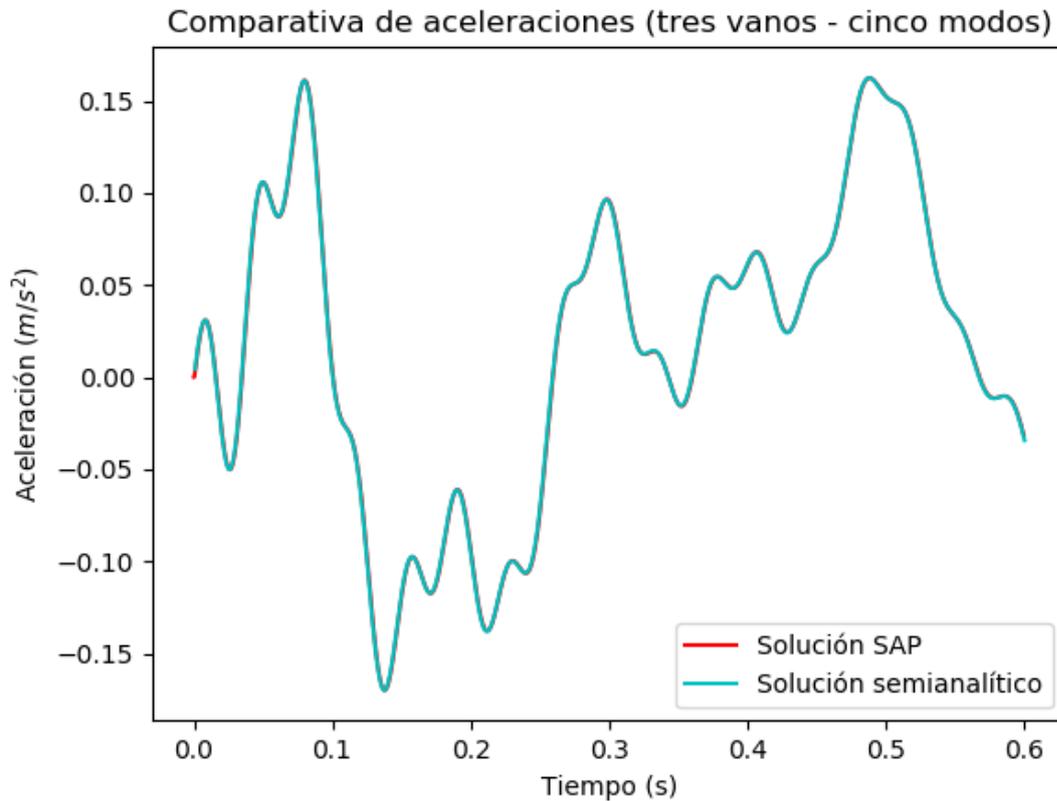


Figura 2.21: Comparativa de aceleración en el centro del vano central

Como se puede observar en las figuras 2.20 y 2.21 los diferentes métodos vuelven a coincidir de forma exacta en los resultados. En lo que se refiere al tiempo de computación de nuevo se ha obtenido un tiempo muy superior en SAP2000, lo que hace que el método semianalítico sea mucha más eficiente y recomendable para el análisis de series temporales.

2.7. Conclusiones

A continuación se hace una exposición de las conclusiones a las que se ha llegado tras la realización de las pruebas de validación.

1. La utilización del método semianalítico implica una disminución del tiempo empleado en el cálculo. Este ahorro de tiempo procede de la formulación analítica de la variable temporal, evitando el empleo de métodos de integración en el dominio del tiempo. Los métodos paso a paso ven condicionada su fiabilidad y los tiempos de cálculo al intervalo de paso seleccionado, el cual debe tomar un valor muy pequeño. Por otro lado, el método semianalítico ofrece la posibilidad de escoger los puntos de posproceso en los que se obtienen resultados, lo que elimina gran número de cálculos ya que no se analizan todos los puntos discretizados.

2. Los métodos paso a paso pierden fiabilidad a medida que el intervalo elegido aumenta su valor, lo que produce una acumulación de errores en cada iteración. En el cálculo realizado mediante el método semianalítico no existe esta problemática ya que se realiza un cálculo exacto en la variable temporal. Los errores acumulados en el empleo del método semianalítico provienen exclusivamente de los cometidos en el análisis modal realizado a partir del método de elementos finitos.
3. Los intervalos de tiempo de evaluación utilizados en el empleo del método semianalítico son menores a los intervalos de tiempo de integración necesarios por los métodos de integración paso a paso. Un intervalo igual a una décima parte del período más pequeño asegura resultados satisfactorios, mientras que en los métodos paso a paso la definición de esta variable condiciona la rigurosidad del cálculo.
4. El método semianalítico proporciona la solución utilizando un total de diez coeficientes por elemento y modos que no son dependientes de la velocidad. Este proceso convierte al método en el óptimo para realizar los numerosos cálculos exigidos por la normativa vigente en materia ferroviaria.
5. A bajas velocidades la solución obtenida mediante el método semianalítico converge a la estática, por lo que se evita el fenómeno de Gibbs asociado a las soluciones analíticas basadas en series armónicas, las cuales deben sufrir un tratamiento especial.
6. Durante el empleo del método semianalítico se evita el uso de funciones exponenciales con argumentos elevados, que conllevan errores numéricos en soluciones analíticas. Esto es debido a la normalización temporal realizada en la formulación de la metodología.

CAPÍTULO 3

Interacción suelo-estructura. Análisis modal

3.1. Trabajos y publicaciones

La interacción suelo-estructura es un tema sobre el que se han publicado diversos trabajos en los últimos años. Se va a realizar una síntesis de los mismos con el fin de comprender el tema sobre el que versa el presente trabajo.

Úlker Kaustell et al. [12] llevaron a cabo un estudio sobre el caso de la interacción suelo-estructura en un puente de vigas semejante a un pórtico perteneciente a la línea de Botnia, Suecia. Para el estudio se consideraron las siguientes tres hipótesis de estructura:

1. Empotrada
2. Con interacción suelo-estructura estática
3. Con interacción suelo estructura dinámica

En la imagen 3.1 se pueden observar las condiciones en los apoyos de cada una de las hipótesis asumidas.

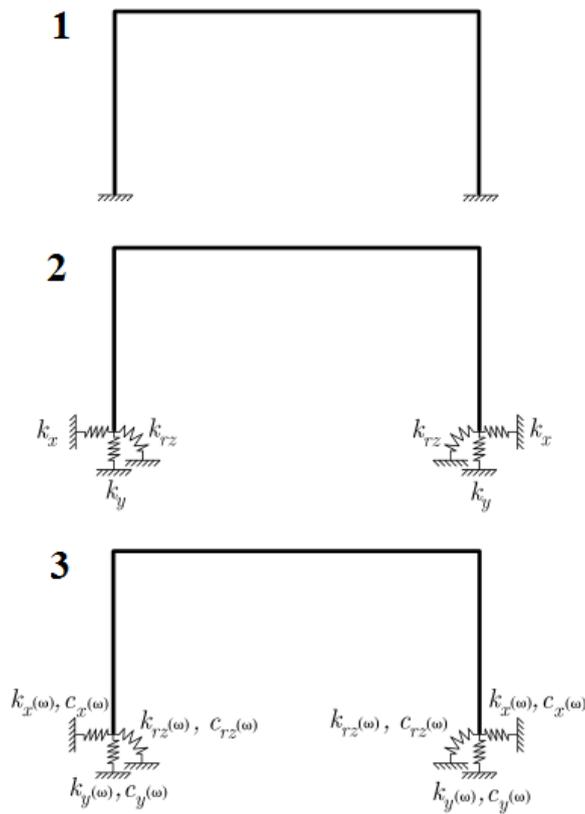


Figura 3.1: Alternativas estudiadas. Ülker Kaustell et al. [12]

Una crítica que se debe realizar al modelo dinámico es la no inclusión de la masa de la cimentación ya que es una magnitud fundamental en el estudio de estructuras bajo el paso de cargas móviles.

En la figura 3.2 se observan los resultados de aceleración máximos obtenidos para el paso de la carga.

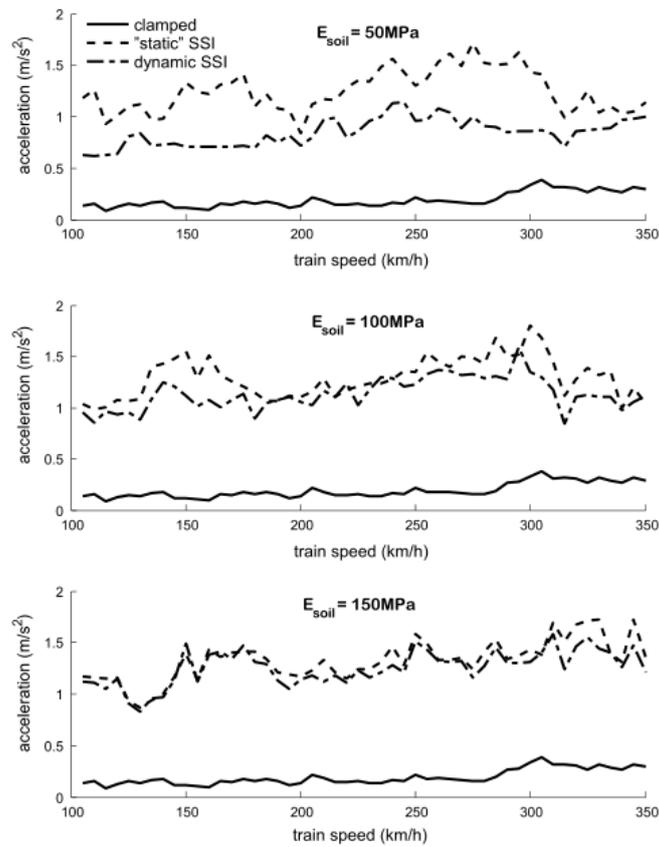


Figura 3.2: Valores máximos de aceleración. Ülker Kaustell et al. [12]

El resultado de la estructura empotrada está muy lejos de reflejar la realidad de la situación. En cuanto a los dos modelos con interacción se observa como el modelo estático devuelve unos valores de mayor magnitud, algo evidente debido a la no inclusión de amortiguadores. A medida que el terreno se vuelve más rígido las soluciones convergen, lo que indica que la tasa de amortiguamiento geométrico producido es menor a medida que el suelo posee una mayor rigidez.

Romero et al. [33] comenzaron a estudiar los efectos de la resonancia, llevando a cabo un estudio parecido al del Ülker Kaustell et al. [12], pero utilizando un modelo de elementos finitos y de contorno en tres dimensiones, mucho más complejo que el anterior(3.3).

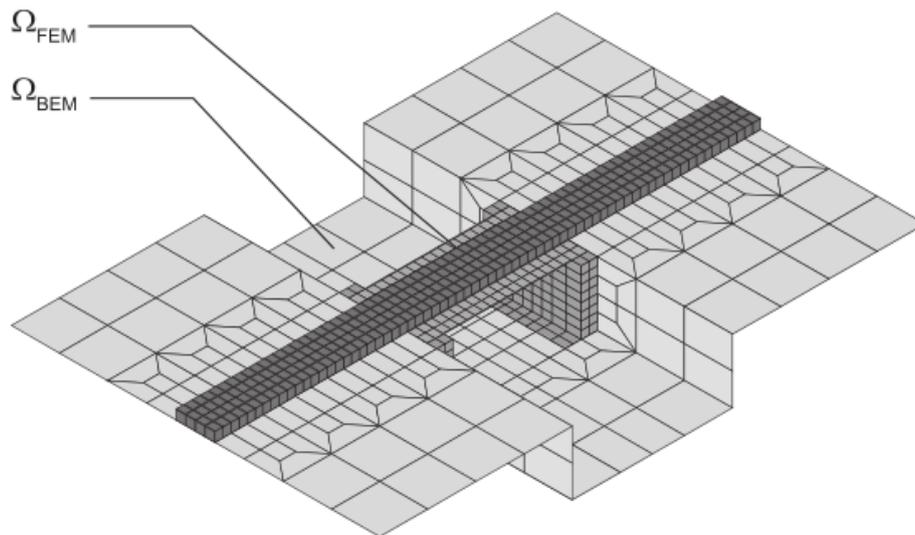


Figura 3.3: Discretización de la estructura. Romero et al. [33]

Para la transmisión de cargas también se usó un modelo mucho más complejo que incluía la representación del bogie del tren.

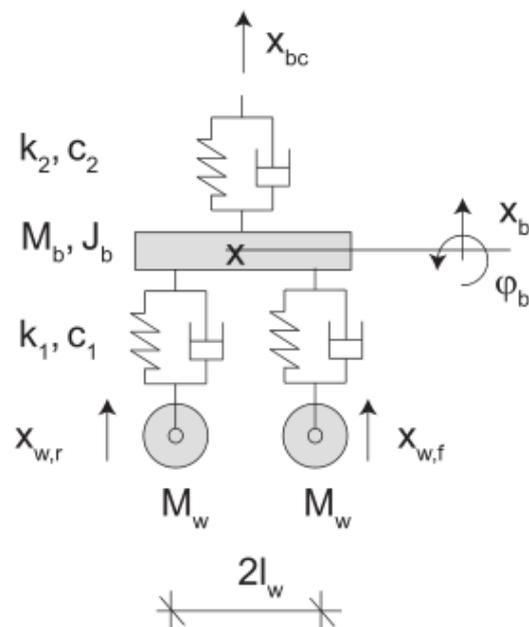


Figura 3.4: Modelo del bogie. Romero et al. [33]

Los resultados de aceleración obtenidos en centro de vano se pueden observar en la figura 3.5.

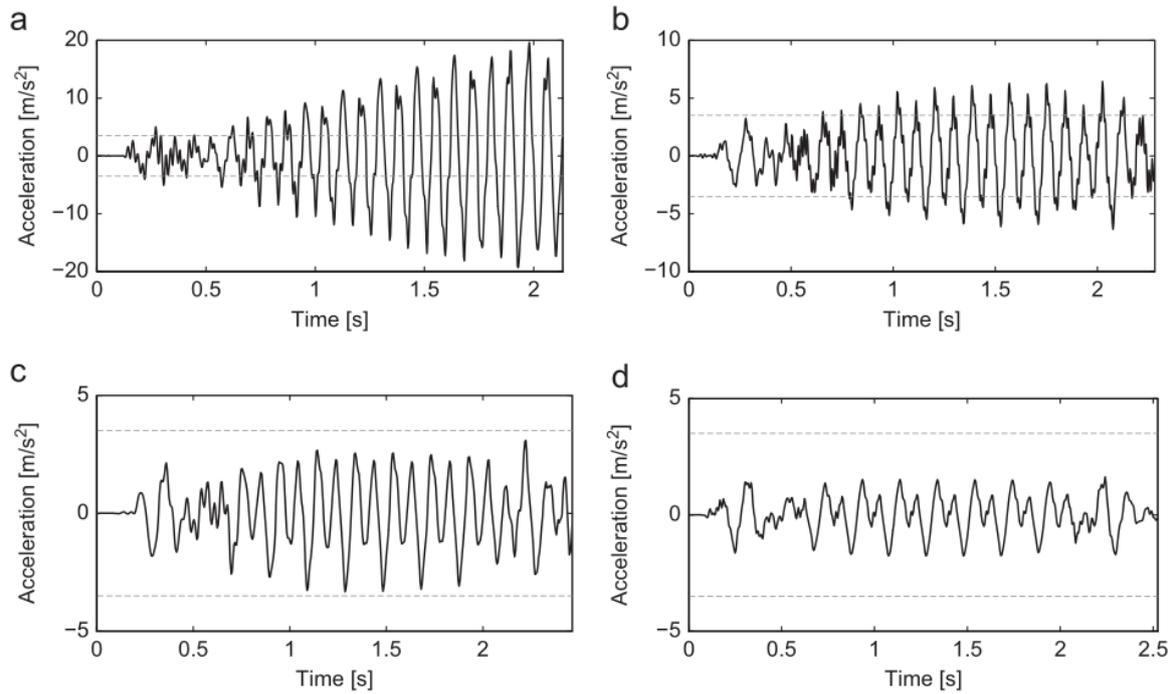


Figura 3.5: Serie temporal de aceleración en centro de vano para un tren viajando a (a) $v = 110.4$ m/s, (b) $v = 103$ m/s, (c) $v = 95$ m/s y (d) $v = 92.5$ m/s en (a) terreno infinitamente rígido, (b) terreno duro, (c) terreno de dureza media y (d) terreno blando. Romero et al. [33]

Doménech et al. [4] y Martínez-Rodrigo et al. [15] también estudiaron los efectos provocados por la resonancia en elementos con interacción suelo-estructura. Para ello utilizaron el modelo representado en la figura 3.6, elaborado a partir de elementos finitos y de contorno y colocado sobre un semiespacio que representa el terreno. El modelo es muy complejo pero tiene un fallo y es la no inclusión de la masa de la cimentación.

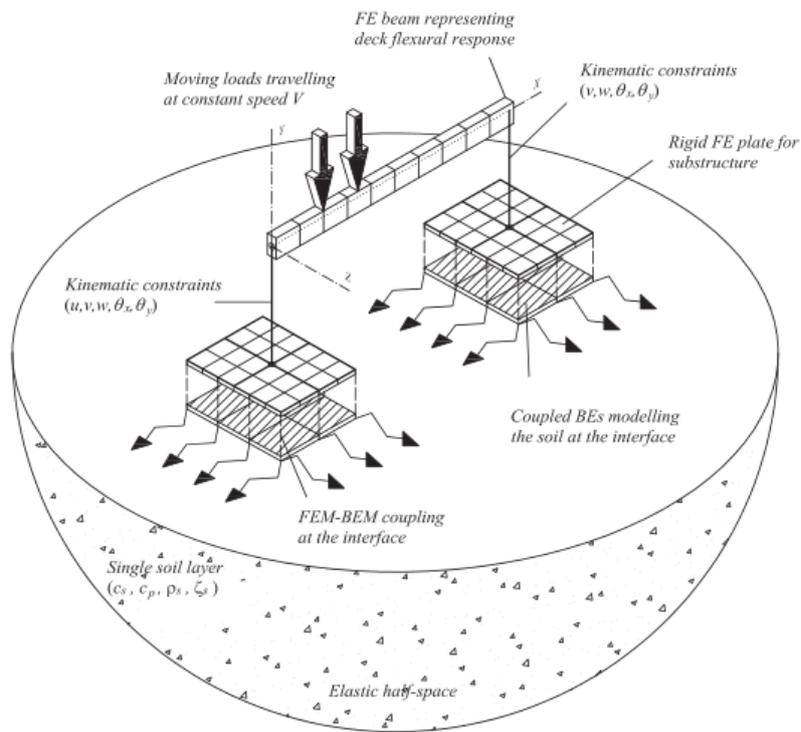


Figura 3.6: Modelo de elementos finitos y de contorno. Doménech et al. [4] y Martínez-Rodrigo et al. [15]

En la figura 3.7 se pueden observar los resultados de aceleración obtenidos en el trabajo de Doménech et al. [4]. Los resultados están compuestos por una envolvente de aceleraciones máximas y por una serie temporal a una velocidad de 222.58 km/h. Los resultados están referidos a centro de vano.

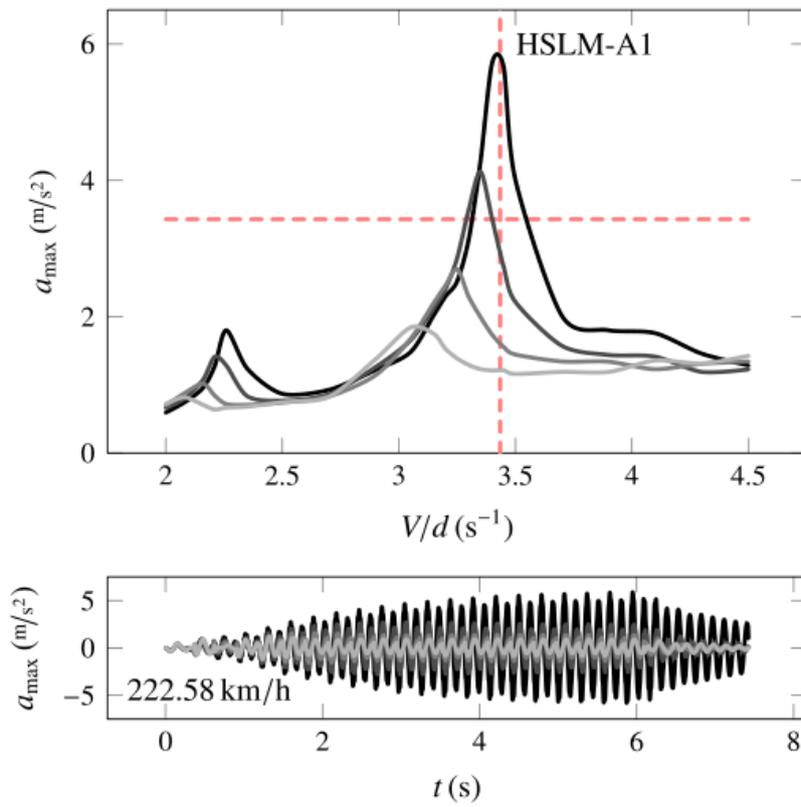


Figura 3.7: Resultados de aceleración. Doménech et al. [4]

En la figura 3.8 se aprecian los resultados de aceleración obtenidos por Martínez-Rodrigo et al. [15]. Se establece un amortiguamiento estructural constante igual al 5 % y se realiza el análisis para cuatro tipos diferentes de terreno, desde suelo infinitamente rígido a blando.

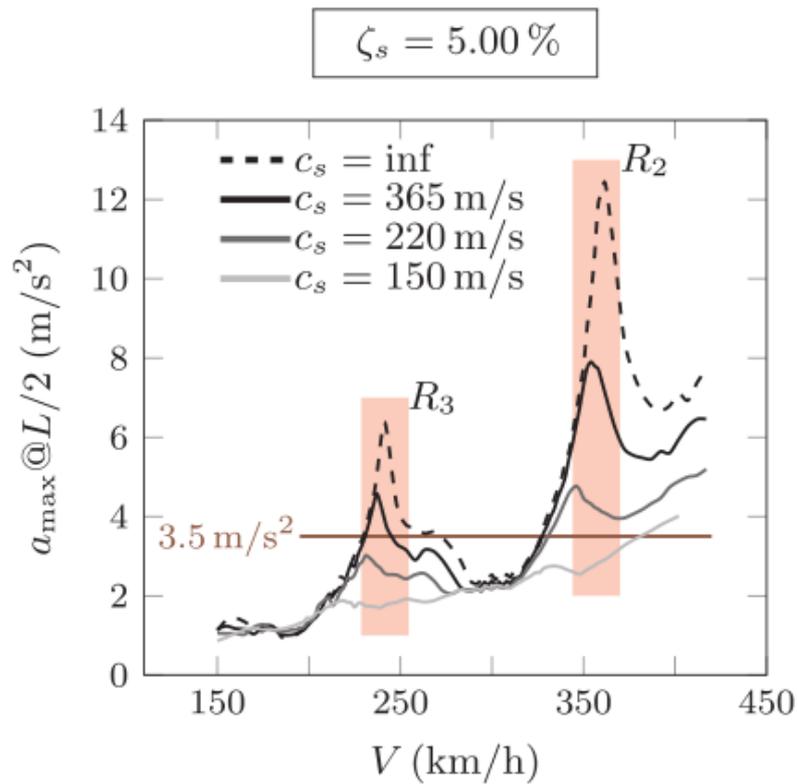


Figura 3.8: Resultados de aceleración. Martínez-Rodrigo et al. [15]

De los trabajos que han estudiado la influencia de la interacción suelo-estructura sobre los fenómenos de resonancia se extrae una conclusión muy clara, y es que cuanto menos rígido es el terreno sobre el que se sustenta la construcción menor es el valor de dichos efectos.

Para el cálculo de los resultados dinámicos obtenidos con anterioridad es necesario el establecimiento de los valores de rigidez y amortiguamiento en la dirección vertical. Recientemente Zangeneh et al. [40] publicaron un trabajo sobre la obtención de estos valores.

El terreno fue representado mediante el semiespacio que se puede observar en la figura 3.9.

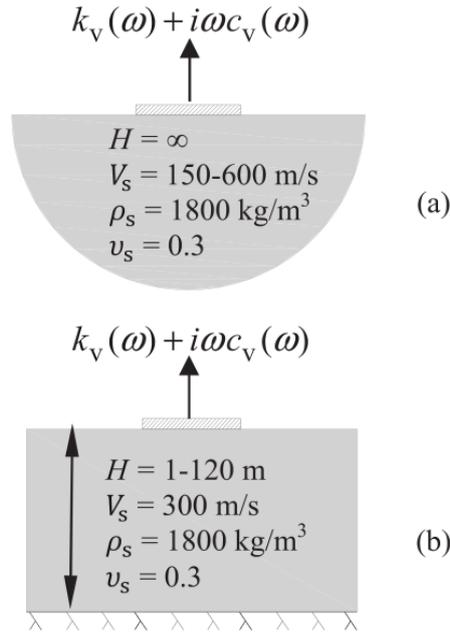


Figura 3.9: Diferentes modelos de terreno considerados. (a) Semiespacio homogéneo y (b) estrato homogéneo sobre roca. Zangeneh et al. [40]

Los resultados de rigidez y amortiguamiento adimensionales obtenidos en el estudio se encuentran en la figura 3.10.

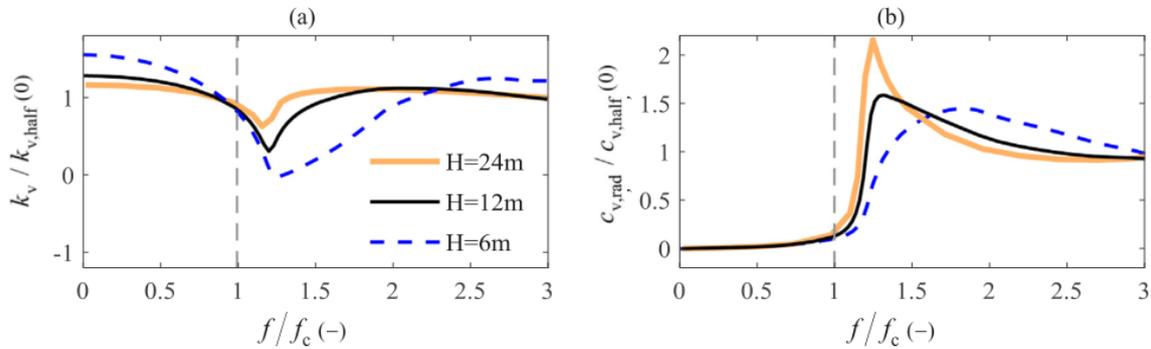


Figura 3.10: (a) Rigidez dinámica normalizada y (b) coeficiente de amortiguamiento vertical normalizado para la superficie estudiada ($3.5 \times 7 \text{ m}^2$), restante en estrato homogéneo con velocidad de onda $V_s = 300 \text{ m/s}$ y gran H sobre roca. El eje de abscisas representa la relación entre la frecuencia estudiada y la de resonancia. Zangeneh et al. [40]

El valor de rigidez experimenta un descenso cuando la frecuencia es cercana a la de resonancia, más cuantioso cuanto menor es el valor de H . Por lo que si H tiene un valor muy elevado se puede adoptar un valor de rigidez constante.

Por su parte el amortiguamiento presenta un comportamiento completamente diferente, aumentando en frecuencias cercana a la de resonancia y siendo mayor el aumento a medida que aumenta el valor de H .

3.2. Características dinámicas de las cimentaciones mediante pilotes

3.2.1. Introducción

La rigidez dinámica y el amortiguamiento son necesarios en el análisis de estructuras cimentadas mediante pilotes sometidas a cargas móviles.

Los valores de rigidez y amortiguamiento se ven afectados por la interacción con el terreno. Hace un tiempo esta interacción se consideraba mediante una viga equivalente en voladizo más corta que el pilote real. El amortiguamiento se calculaba mediante una estimación.

En estudios más recientes se entiende la interacción suelo-estructura en términos de propagación de ondas elásticas. Para los pilotes aislados se ha optado por aproximaciones continuas (Kobori et al. [8], Nogami and Novak [18], Novak [19], Novak and Aboul-Ella [22] y Tajimi [35]) y mediante elementos finitos (Blaney et al. [3], Kuhlemeyer [9] y Wolf and von Arx [39]). Los estudios citados indican que la interacción suelo-estructura provoca una alteración de la rigidez del pilote, haciéndola dependiente de la frecuencia y que genera un amortiguamiento geométrico.

En grupos de pilotes cercanos la caracterización de la rigidez y el amortiguamiento posee una mayor dificultad debido a la interacción entre pilotes o efecto de grupo. La solución para grupos de pilotes ha sido extendida por Kaynia and Kausel [7], Nogami [17], Sheta and Novak [34], Trbojevic et al. [36], Waas and Hartmann [38] y Wolf and von Arx [39]. El comportamiento dinámico de los grupos de pilotes es mucho más complicado de caracterizar porque es mucho más dependiente de la frecuencia. Sin embargo, es posible analizar grupos de pilotes en ocasiones concretas, como por ejemplo a bajas frecuencias, grupos pequeños o pilotes muy separados entre sí. Dichos cálculos se realizan mediante medias de los factores de interacción.

Los factores de interacción derivan de la consideración de dos pilotes exactamente iguales y la determinación del desplazamiento que se produce en uno si se aplica una carga en el otro. Los citados factores fueron presentados para cargas estáticas por Poulos [29] y Poulos and Davis [30] y para cargas dinámicas por Kaynia and Kausel [7], Randolph and Poulos [31] y Trbojevic et al. [36] realizaron aproximaciones al problema basadas en los factores de interacción proporcionando útiles resultados.

En los últimos años se ha incidido en publicaciones de artículos basados en el cálculo de los grupos de pilotes mediante el empleo de los factores de interacción anteriormente descritos. En Álamo et al. [10] se propone un método numérico que permite el cálculo de grupos de pilotes inclinados en suelos estratificados y en Álamo et al. [11] se describe la importancia del uso de perfiles precisos del suelo a la hora de llevar a cabo cálculos que impliquen la obtención de factores cinemáticos.

Cuando la distancia entre pilotes es muy extensa los factores de interacción obtienen valores irrisorios, de manera que la rigidez y el amortiguamiento del grupo se obtienen sumando las características de cada pilote de forma individual (Novak [19]).

3.2.2. Caracterización de la rigidez y el amortiguamiento dinámicos

La ecuación del movimiento en el dominio del tiempo es la que se puede apreciar a continuación, donde v representa desplazamiento vertical.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (3.1)$$

Si a la ecuación (3.1) se le aplica la Transformada de Fourier (3.2) se produce un traslado del dominio del tiempo al de la frecuencia, siendo (3.3) la ecuación del movimiento en dicho dominio.

$$u = Ue^{i\omega t} \quad (3.2)$$

$$-\omega^2 mU + i\omega cU + kU = F \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.3) se extrae que en el dominio de la frecuencia la rigidez dinámica está compuesta por una parte real y una parte imaginaria. Pudiendo expresarse como se indica a continuación.

$$K = k_1 + ik_2 \quad (3.4)$$

La parte real representa la rigidez constante del pilote. La parte imaginaria representa amortiguamiento debido a la energía de disipación en suelo y pilote. Este amortiguamiento suele crecer con la frecuencia de forma que se asemeja a un amortiguamiento viscoso, pudiendo definirse en términos de una constante del mismo.

$$c = \frac{k_2}{\omega} \quad (3.5)$$

Pasando la rigidez dinámica a expresarse de la forma siguiente.

$$K = k + i\omega c \quad (3.6)$$

La rigidez y el amortiguamiento pueden definirse experimentalmente o de forma teórica, siendo esta última la más indicada debido a que los experimentos son de difícil generalización.

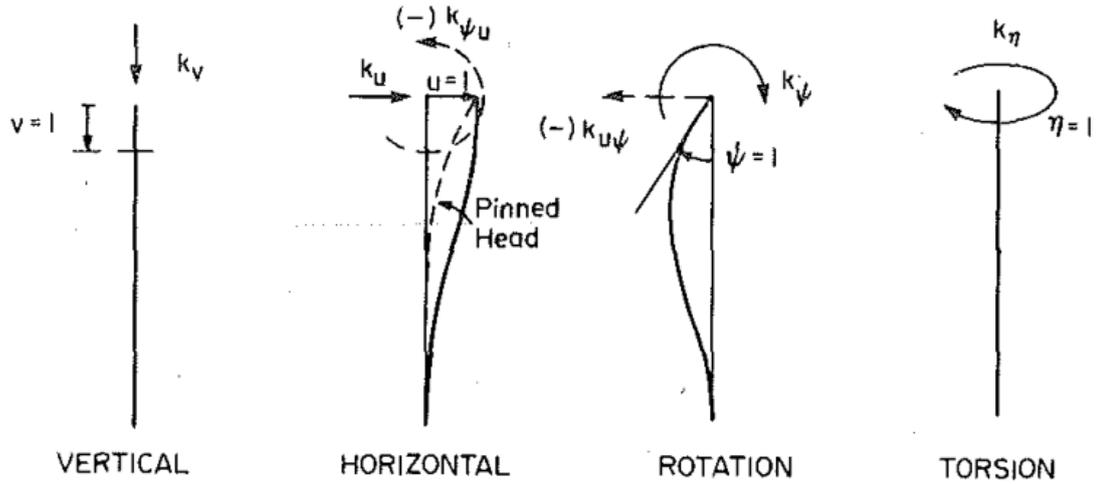


Figura 3.11: Generación de rigidez en el pilote en direcciones individuales. Novak et al. [28]

Los valores de rigidez (k) y amortiguamiento vertical (c) se obtienen del estudio de Novak [19]. A continuación se pueden observar las expresiones para cada grado de libertad.

Desplazamiento vertical, v :

$$k_v = \frac{E_p A}{R} f_{v1} \quad c_v = \frac{E_p A}{V_s} f_{v2} \quad (3.7)$$

Desplazamiento horizontal, u :

$$k_u = \frac{E_p I}{R^3} f_{u1} \quad c_u = \frac{E_p I}{R^2 V_s} f_{u2} \quad (3.8)$$

Rotación de la cabeza del pilote en el plano vertical, ψ :

$$k_{\psi} = \frac{E_p I}{R} f_{\psi 1} \quad c_{\psi} = \frac{E_p I}{V_s} f_{\psi 2} \quad (3.9)$$

Pareja de traslación horizontal y rotación, c :

$$k_c = \frac{E_p I}{R^2} f_{c1} \quad c_u = \frac{E_p I}{R V_s} f_{c2} \quad (3.10)$$

Donde $k_c = k_{u\psi} = k_{\psi u}$

Torsión, η :

$$k_{\eta} = \frac{G_p J}{R} f_{\eta 1} \quad c_{\eta} = \frac{G_p J}{V_s} f_{\eta 2} \quad (3.11)$$

Los símbolos f_1 y f_2 son valores adimensionales de rigidez y amortiguamiento. Dependen de los siguientes factores.

- Frecuencia adimensional: $a_0 = \frac{\omega R}{V_s}$
- Rigidez relativa entre pilote y terreno: E_p/G_s
- Relación entre velocidad de compresión y cizalla en el pilote: $\bar{v} = V_s/v_c$
- Relación entre la densidad del terreno y la del pilote: ρ/ρ_p
- Esbeltez del pilote: l/R
- Amortiguamiento del material que compone el pilote y el terreno

El significado de las variables utilizadas en las fórmulas anteriores es el siguiente:

- ω : Frecuencia angular
- v_c : Velocidad de las ondas de compresión en el pilote ($v_c = \sqrt{E_p/\rho_p}$)
- V_s : Velocidad de ondas de cizalla en el terreno ($V_s = \sqrt{G_s/\rho}$)
- ρ : Densidad del terreno
- ρ_p : Densidad del material que compone el pilote
- E_p : Módulo de Young del pilote
- $G_p J$: Rigidez torsional
- G_s : Módulo de cizalla del suelo
- V_s : Velocidad de las ondas de cizalla en el suelo
- R : Radio del pilote
- l : longitud del pilote
- A : Área del pilote
- I : Momento de inercia del pilote

Para una correcta consideración de las variables indicadas con anterioridad es necesario el uso de la mecánica computacional. Un método eficiente y para cualquier clase de terreno fue elaborado por Novak y Aboul-Ella (Novak and Aboul-Ella [21], Novak and Aboul-Ella [22] y Novak and Grigg [23]). El método fue generalizado para incluir la separación entre pilotes por Novak and Sheta [26]. Estas soluciones están basadas en la hipótesis de deformación plana del terreno Novak et al. [27].

Las formulaciones anteriores son una aproximación, pero si se comparan con con las soluciones mediante el cálculo con elementos finitos presentadas por Blaney et al. [3], Kulemeyer [9] y Kaynia and Kausel [6] se demuestra que la hipótesis de deformación plana proporciona soluciones suficientemente precisas, sobre todo a altas frecuencias. Para bajas frecuencias la solución puede sufrir una corrección.

El método descrito en Novak and Aboul-Ella [21] y Novak and Aboul-Ella [22] fue el utilizado para la elaboración de Novak et al. [28], artículo en el que se basa este trabajo.

Los efectos de la frecuencia adimensional pueden observarse en la figura 3.12, extraída del trabajo de Nogami and Novak [18].

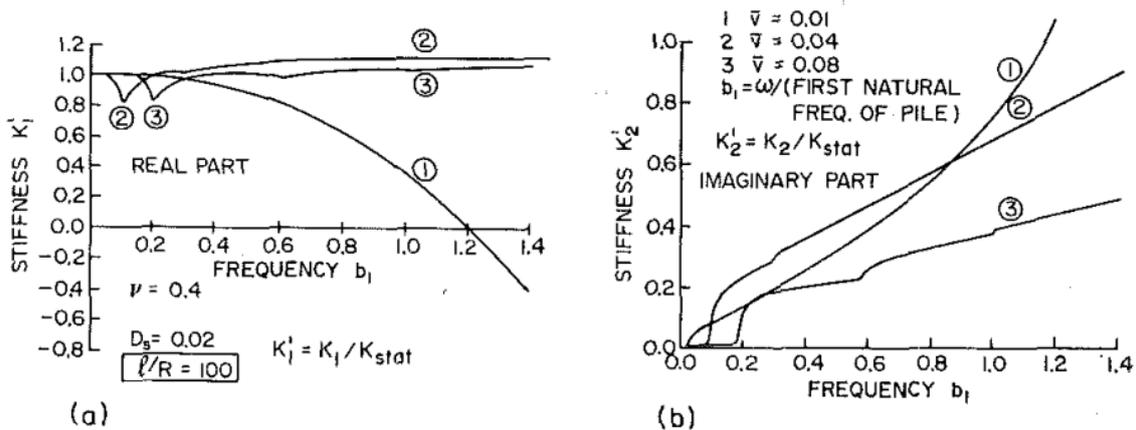


Figura 3.12: Ejemplo de variación de la rigidez de la pila en función de la frecuencia y la rigidez del terreno. Nogami and Novak [18]

En la figura 3.12 se puede observar una relación entre la frecuencia dinámica (parte real e imaginaria) y la frecuencia estática.

La parte real de la rigidez disminuye de manera considerable con el aumento de la frecuencia, pudiendo incluso llegar a ser negativa si el terreno es muy flexible o el pilote demasiado robusto. Sin embargo, para pilas más esbeltas en suelos más habituales el valor de la parte real se mantiene prácticamente constante para cualquier valor de frecuencia. Los pequeños mínimos que se pueden observar en las curvas 2 y 3 de la figura 3.12 se deben a efectos de resonancia que desaparecen para valores de amortiguamiento del material más altos.

La parte imaginaria de la rigidez (amortiguamiento de la pila) crece de manera casi lineal con la frecuencia, de manera que puede expresarse a partir de una constante de amortiguamiento viscoso, c , que es casi independiente de la frecuencia. Solamente por debajo de la frecuencia natural del terreno, indicada por los mínimos en la gráfica 3.12 el amortiguamiento geométrico disminuye y el propio del material es el dominante. Se puede esperar que en bajas frecuencias, terrenos muy rígidos y suelos muy someros el amortiguamiento sea prácticamente inexistente.

De la figura 3.12 y lo explicado con posterioridad a ella se extrae una conclusión muy importante, que es sobre la que se basa completamente la realización del presente trabajo. En las cimentaciones profundas mediante pilotes, salvo caso muy excepcionales, los valores de rigidez (k) y amortiguamiento (c) son constantes, lo que permite el cálculo del amortiguamiento geométrico trabajo en el dominio del tiempo con independencia de la frecuencia.

La relación entre la densidad del terreno y la del pilote (ρ/ρ_p) es otro factor que solamente interviene en casos extremos, como puede observarse en la figura 3.13. La rigidez y amortiguamiento de la pila solo sufren variación si el pilote posee una masa muy elevada.

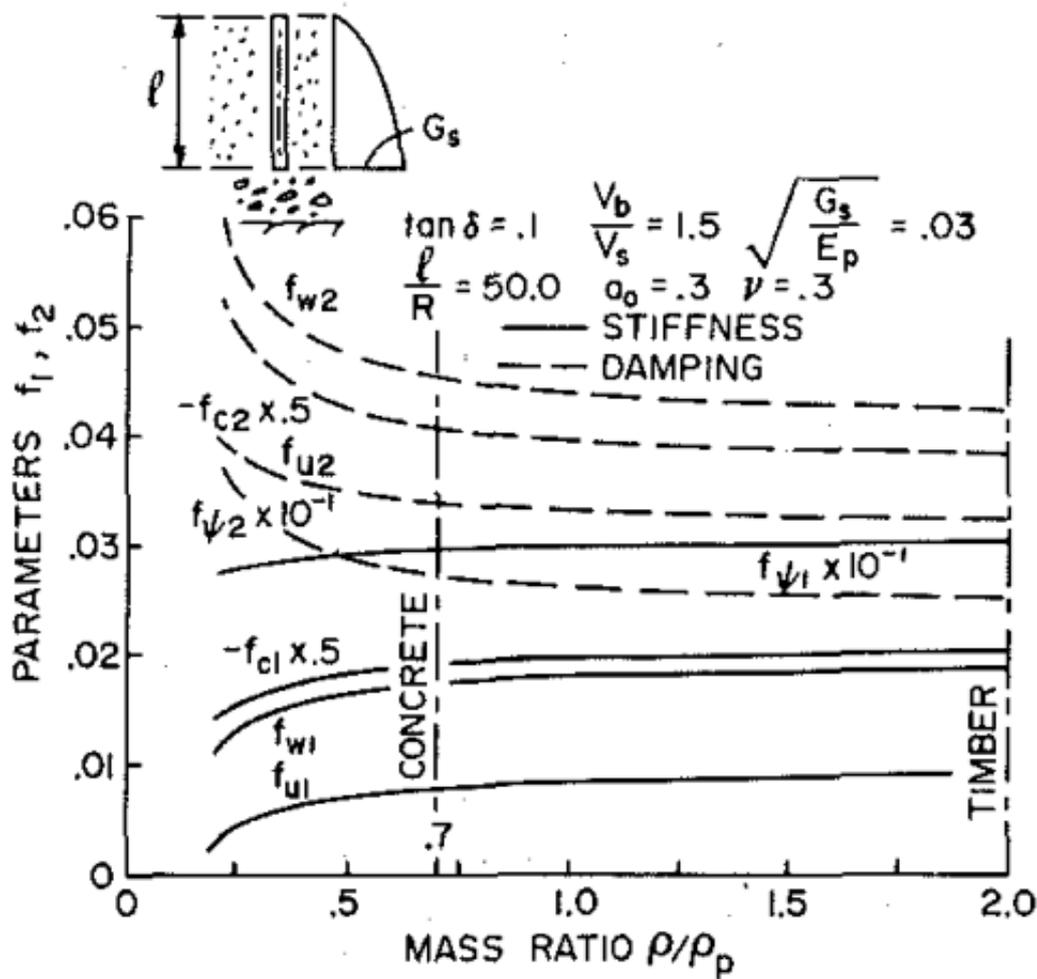


Figura 3.13: Efecto de la relación entre las masas del pilote y el terreno en los parámetros de rigidez y amortiguamiento. Novak and Aboul-Ella [21]

El efecto del módulo de Poisson es muy débil para la vibración vertical, ausente para la torsión y no demasiado importante para el resto de modos de vibración, excepto si su valor es muy próximo a 0.5 y las frecuencias son altas. El efecto del módulo de Poisson se puede reducir si la relación de rigideces entre el pilote y el terreno se calcula de la forma E_p/E_s en lugar de con E_p/G_s (Roesset [32]).

La esbeltez (l/R) y las condiciones de empotramiento en punta son muy importantes para pilotes cortos y en la dirección vertical, donde los pilotes son rígidos. En la dirección horizontal los pilotes son muy flexibles y los factores f_1 y f_2 son independientes de la esbeltez y las condiciones en punta para relaciones l/R mayores a 25 y terrenos homogéneos (Novak [19] y Novak [20]). Si la rigidez del suelo disminuye en la sentido vertical ascendente los factores f_1 y f_2 disminuyen a mayores esbelteces.

De lo explicado anteriormente se extrae que los factores que poseen una mayor influencia en el cálculo de f_1 y f_2 son:

- La relación entre la rigidez del pilote y la del suelo
- El perfil del terreno
- La esbeltez y las condiciones en punta

3.2.3. Gráficas de rigidez y amortiguamiento

Dirección horizontal

En la figura 3.14 se pueden observar los valores f_1 y f_2 asociados a vibración horizontal en la cabeza de los pilotes.

ν (1)	E_{pile}/G_{soil} (2)	Stiffness Parameters				Damping Parameters			
		f_{d1} (3)	f_{d1} (4)	f_{u1} (5)	f_{u1}^p (6)	f_{d2} (7)	f_{d2} (8)	f_{u2} (9)	f_{u2}^p (10)
(a) Homogeneous Soil Profile									
0.25	10,000	0.2135	-0.0217	0.0042	0.0021	0.1577	-0.0333	0.0107	0.0054
	2,500	0.2998	-0.0429	0.0119	0.0061	0.2152	-0.0646	0.0297	0.0154
	1,000	0.3741	-0.0668	0.0236	0.0123	0.2598	-0.0985	0.0579	0.0306
	500	0.4411	-0.0929	0.0395	0.0210	0.2953	-0.1337	0.0953	0.0514
	250	0.5186	-0.1281	0.0659	0.0358	0.3299	-0.1786	0.1556	0.0864
0.40	10,000	0.2207	-0.0232	0.0047	0.0024	0.1634	-0.0358	0.0119	0.0060
	2,500	0.3097	-0.0459	0.0132	0.0068	0.2224	-0.0692	0.0329	0.0171
	1,000	0.3860	-0.0714	0.0261	0.0136	0.2677	-0.1052	0.0641	0.0339
	500	0.4547	-0.0991	0.0436	0.0231	0.3034	-0.1425	0.1054	0.0570
	250	0.5336	-0.1365	0.0726	0.0394	0.3377	-0.1896	0.1717	0.0957
(b) Parabolic Soil Profile									
0.25	10,000	0.1800	-0.0144	0.0019	0.0008	0.1450	-0.0252	0.0060	0.0028
	2,500	0.2452	-0.0267	0.0047	0.0020	0.2025	-0.0484	0.0159	0.0076
	1,000	0.3000	-0.0400	0.0086	0.0037	0.2499	-0.0737	0.0303	0.0147
	500	0.3489	-0.0543	0.0136	0.0059	0.2910	-0.1008	0.0491	0.0241
	250	0.4049	-0.0734	0.0215	0.0094	0.3361	-0.1370	0.0793	0.0398
0.40	10,000	0.1857	-0.0153	0.0020	0.0009	0.1508	-0.0271	0.0067	0.0031
	2,500	0.2529	-0.0284	0.0051	0.0022	0.2101	-0.0519	0.0177	0.0084
	1,000	0.3094	-0.0426	0.0094	0.0041	0.2589	-0.0790	0.0336	0.0163
	500	0.3596	-0.0577	0.0149	0.0065	0.3009	-0.1079	0.0544	0.0269
	250	0.4170	-0.0780	0.0236	0.0103	0.3468	-0.1461	0.0880	0.0443

Figura 3.14: Parámetros de rigidez y amortiguamiento para vibración horizontal de pilotes con $l/R > 25$ en perfiles homogéneos y $l/R > 30$ en suelos de perfil parabólico. Novak et al. [28]

Comparando los resultados de la figura 3.14 se extrae que los suelos de perfil parabólico producen valores menores de rigidez y amortiguamiento. En la figura aparecen expresiones de la forma f_{u1}^p y f_{u2}^p que corresponden a pilotes apoyados en cabeza. La rigidez y el amortiguamiento de dichos pilotes es menor que los que poseen los empotrados en cabeza.

Dirección vertical

Los valores de rigidez y amortiguamiento son fuertemente dependientes de la esbeltez y las condiciones en punta del pilote. En las figuras 3.15 y 3.16 se pueden observar los valores de f_{v1} y f_{v2} para varias relaciones de esbeltez y de rigidez del suelo. Los resultados se aportan en dos gráficas según la tipología del pilote en punta, flotantes o empotrados. Dentro de cada tipología de pilote se distingue entre terreno rigidez homogénea y de creciente de forma parabólica en el sentido vertical descendente.

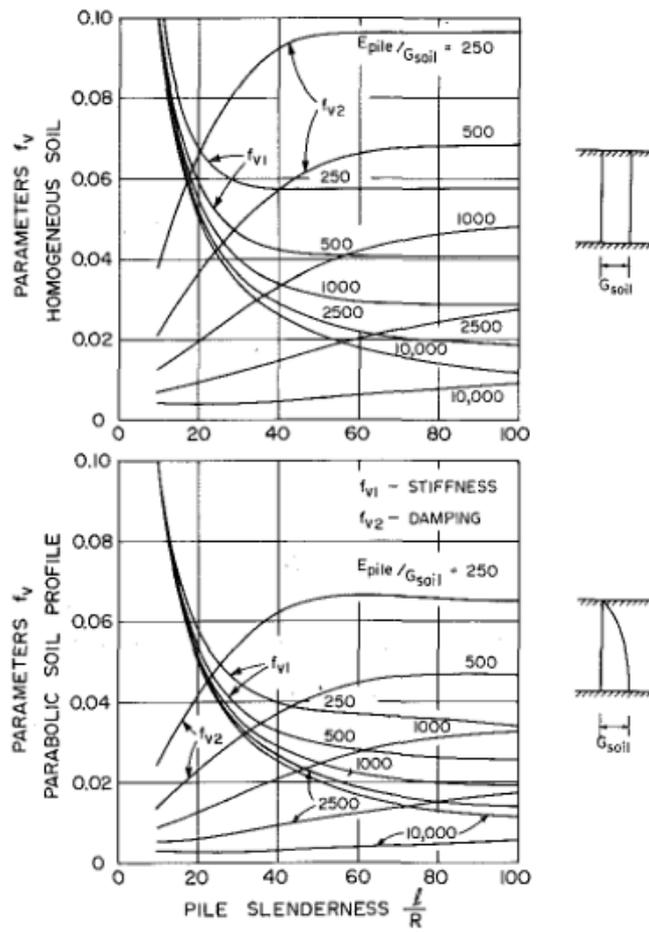


Figura 3.15: Valores de f_{v1} y f_{v2} para pilotes empotrados. Novak et al. [28]

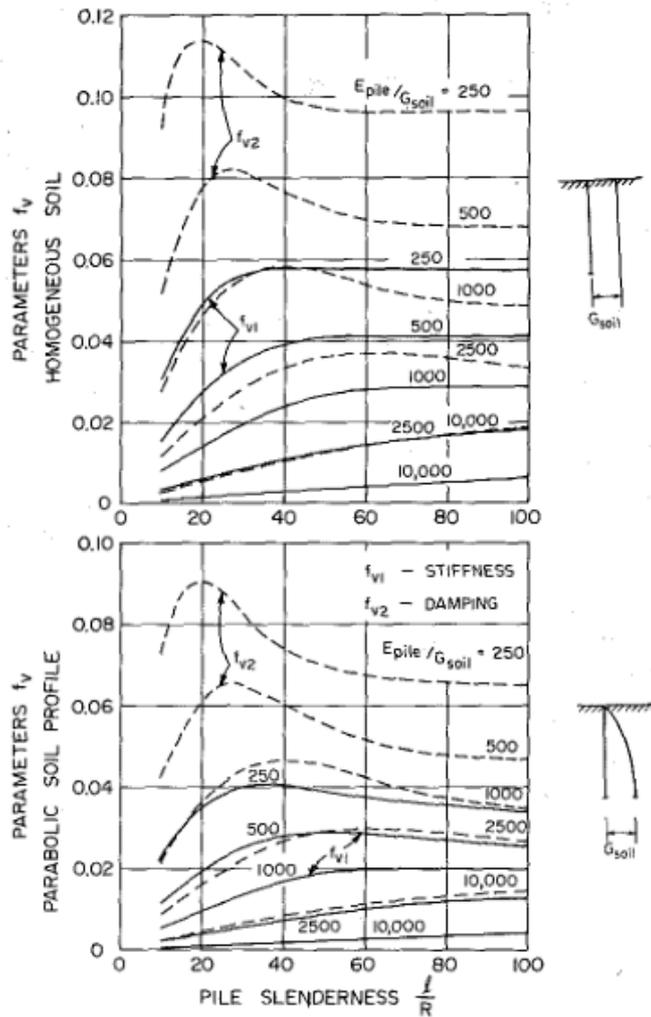


Figura 3.16: Valores de f_{v1} y f_{v2} para pilotes flotantes. Novak et al. [28]

En las gráficas se puede apreciar como los valores de rigidez y amortiguamiento son menores para el suelo de perfil parabólico que para el homogéneo. En cuanto a la tipología de pilote se puede observar como los pilotes flotantes experimentan un mayor amortiguamiento y una rigidez mucho menor en las esbelteces más pequeñas.

La torsión es muy dependiente de la frecuencia. Se pueden consultar parámetros torsionales en Novak and Howell [24] y Novak and Howell [25].

3.2.4. Conclusiones

Del trabajo de Novak et al. [28] se extraen las siguientes conclusiones:

- Los pilotes apoyados en cabeza poseen menos rigidez y amortiguamiento que los empotrados.
- La variación parabólica de la rigidez del terreno proporciona unos valores de rigidez y amortiguamiento mucho menores

- Los pilotes flotantes generan en la dirección vertical un mayor amortiguamiento pero una menor rigidez.

3.3. Análisis modal en pérgolas cimentadas por pilotes

La expresión que gobierna el movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad sin amortiguamiento es la indicada en la ecuación (3.12).

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (3.12)$$

Los modos de vibración son vectores ortogonales, lo que los hace linealmente independientes. Que los modos de vibración formen una base de vectores linealmente independientes permite expresar el desplazamiento sufrido mediante una combinación lineal de los mismos.

Una vez explicado lo anterior, a la ecuación (3.12) se le aplica el cambio de variable $u(t) = \Phi q(t)$, siendo Φ y $q(t)$ la matriz y contribución modal respectivamente, y se multiplica por la matriz traspuesta de la modal se obtiene lo indicado en 3.13.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T K \Phi q = 0 \quad (3.13)$$

La matriz modal es ortogonal respecto a la matriz de masa y la de rigidez, dicho lo cual el sistema de múltiples grados de libertad se desacopla en múltiples sistemas de un grado de libertad, notándose el modo correspondiente como i .

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = 0 \quad (3.14)$$

La expresión (3.14) es equivalente a la (3.15).

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (3.15)$$

Si la ecuación (3.15) se enriquece con la inclusión de una tasa de amortiguamiento se obtiene la expresión (3.16).

$$\ddot{q}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (3.16)$$

La tasa de amortiguamiento (ξ) está compuesta por los siguientes términos:

1. Amortiguamiento estructural: Viene definido en la normativa IAPF-11 [2]. Para estructuras de hormigón se debe tomar una tasa del 2 %.

2. Amortiguamiento geométrico: Viene definido por la interacción entre la estructura y el terreno que se encuentra bajo ella. Se calcula a partir de la matriz de amortiguamiento (D), tal y como se explica a continuación.

La estructura tiene definidos unos sistemas de un grado de libertad (vertical) en una serie de puntos finitos, que son cada uno de los pilotes que componen la cimentación. Esto provoca que la matriz D solo tenga un valor distinto del nulo en el grado de libertad correspondiente al movimiento vertical, siendo ese valor igual al amortiguamiento del sistema (c).

$$\Phi^T D \Phi = \sum_{j=1}^{j=n^{\circ} \text{ pilotes}} \phi_{ij}^2 c \quad (3.17)$$

La expresión obtenida en la ecuación (3.17) es equivalente a la parte de la ecuación (3.16) que representa el amortiguamiento.

$$\sum_{j=1}^{j=n^{\circ} \text{ pilotes}} \phi_{ij}^2 c = 2 \xi_i \omega_i \quad (3.18)$$

El valor de ϕ_i corresponde al desplazamiento vertical obtenido en cada uno de los pilotes para cada modo de vibración, obtándose a partir de este momento por notarlo como v_i . Si se procede a despejar el valor de ξ de la ecuación (3.18) es posible obtener una expresión analítica para el cálculo de la tasa de amortiguamiento geométrico.

$$\xi_i = \frac{\sum_{j=1}^{j=n^{\circ} \text{ pilotes}} v_{ij}^2 c}{2 \omega_i} \quad (3.19)$$

Como se ha explicado con anterioridad, en las cimentaciones mediante pilotes el valor de la rigidez (k) y del amortiguamiento (c) son constantes para todo valor de frecuencia, por lo que existe la posibilidad de calcular la tasa de amortiguamiento geométrico para cada modo de vibración en el dominio del tiempo mediante la fórmula (3.19).

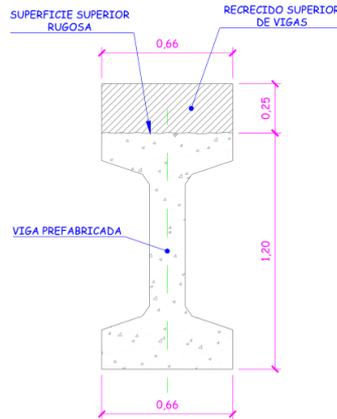


Figura 4.2: Tipología de vigas. Pérgola Bobadilla II

La pérgola está compuesta por los siguientes elementos estructurales. Entre los mismos se incluyen vigas de hormigón armado y pretensado y una losa de hormigón armado.

A continuación se pueden apreciar las características de los elementos estructurales indicados:

- Vigas de hormigón pretensado HP-50
 - 31 vigas de 1.20 m de canto
 - $E = 35 \text{ GPa}$
 - $\nu = 0.2$
 - $\rho = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
 - Viga de Bernoulli-Euler
- Losa de hormigón armado HA-30
 - $E = 30 \text{ GPa}$
 - $\nu = 0.2$
 - $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
 - Placa de Kirchhoff-Love
- Viga riostra de hormigón armado HA-30
 - $E = 30 \text{ GPa}$
 - $\nu = 0.2$
 - $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
 - Viga de Bernoulli-Euler

La cimentación consiste en un elemento unidimensional formado por la unión del fuste, la zapata y un pilote de 30 m. En la figura 4.3 se puede observar la cimentación en detalle.

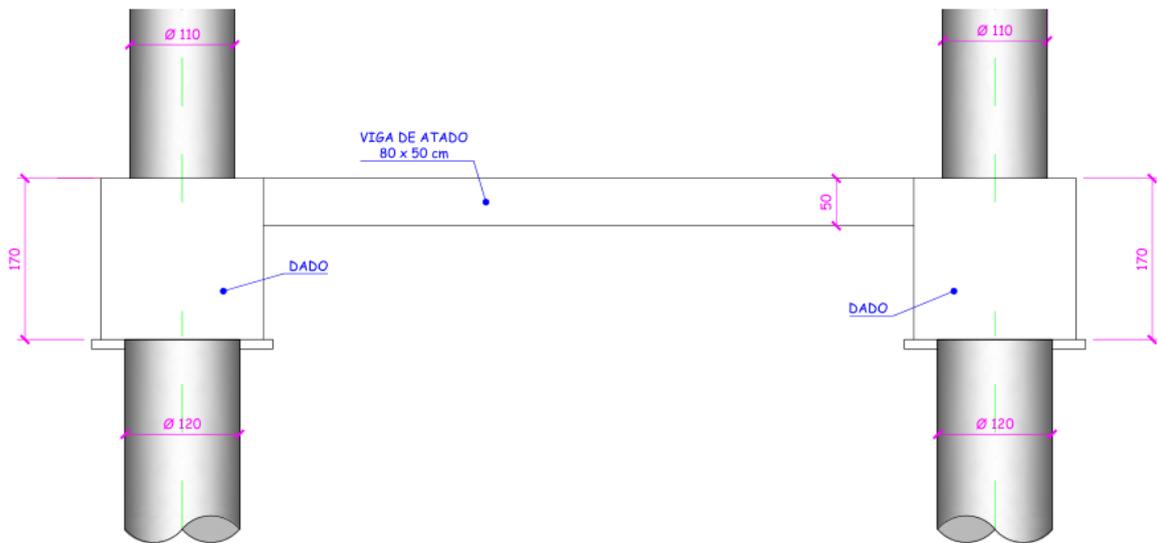


Figura 4.3: Tipología de cimentación. Pérgola de Bobadilla II

4.2. Modelo tridimensional de la pérgola

El modelo de la pérgola se realiza en el programa SAP2000. Se modelan las vigas y se unen a la losa superior y entre sí con una viga riostra. Como se ha comentado anteriormente, tanto en las vigas como en la placa se desprecia la deformación por cortante.

Se colocan dos apoyos que restringen el movimiento vertical en los extremos de la línea de carga, evitando una flecha que no existe en la realidad ya que existe continuidad con la vía antes y después de la losa.

En la figura 4.4 se puede observar la geometría del modelo en SAP2000.

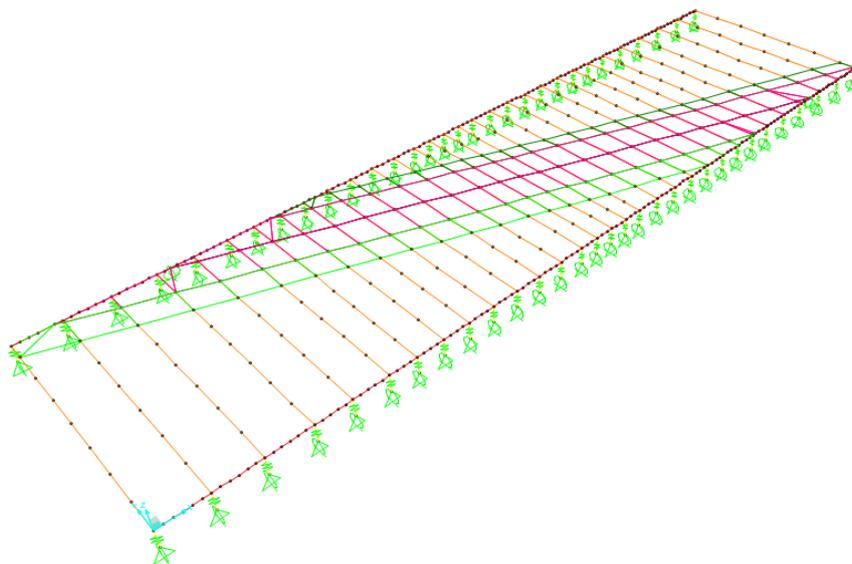


Figura 4.4: Modelo en SAP2000. Pérgola de Bobadilla II

4.2.1. Cargas muertas

Las cargas muertas se van a añadir al modelo como un modificador de masa de la losa.

En la figura 4.5 se puede observar la sección transversal de la vía, de la que se obtienen el conjunto de cargas muertas que actúan sobre la estructura.

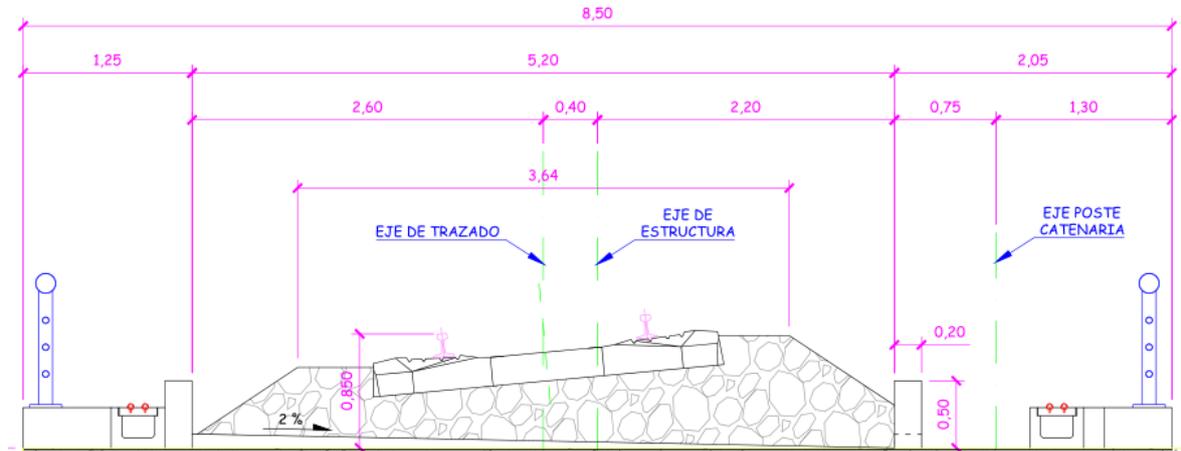


Figura 4.5: Sección transversal de la vía. Pérgola de Bobadilla II

A continuación se obtiene el coeficiente multiplicador de masa para cada una de las tres zonas en que está dividida la losa. Para ello en primer lugar se obtendrá la densidad lineal de cada elemento que suponga una carga muerta en la estructura y se procederá a calcular la relación entre la masa existente y la masa de la losa de hormigón en solitario.

Zona izquierda de la losa

Sobre esta zona actúan las siguientes cargas muertas:

- Losa de hormigón

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 1,25 \text{ m} = 781,25 \text{ kg/m}$$

- Acera

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 750 \text{ kg/m}$$

- Pretil

$$\rho_l = 1000 \text{ kg/m}$$

$$\text{Coeficiente} = \frac{781,25 + 750 + 100}{781,25} = 2,1 \quad (4.1)$$

Zona derecha de la losa

Sobre esta zona actúan las siguientes cargas muertas:

- Losa de hormigón

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 2.05 \text{ m} = 1281.25 \text{ kg/m}$$

- Acera

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 750 \text{ kg/m}$$

- Pretil

$$\rho_l = 1000 \text{ kg/m}$$

$$\text{Coeficiente} = \frac{1281.25 + 750 + 100}{1281.25} = 1.66 \quad (4.2)$$

Zona central

Sobre esta zona actúan las siguientes cargas muertas:

- Losa de hormigón

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 5.20 \text{ m} = 3250 \text{ kg/m}$$

- Balasto

Acorde a las indicaciones de la legislación vigente en materia de cargas ferroviarias se asigna al balasto una densidad de 1800 kg/m^3 y un espesor de 0,5 m.

$$\rho_l = 1800 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 5.20 \text{ m} = 4680 \text{ kg/m}$$

- Traviesas

Se suponen colocadas cada 0,6 m.

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 2.60 \text{ m} \cdot 0.6 = 2340 \text{ kg/m}$$

- Carril

$$\rho_l = 60 \text{ kg/m} \cdot 2 = 120 \text{ kg/m}$$

- Muretes para soportar el balasto

$$\rho_l = 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 2 = 500 \text{ kg/m}$$

$$\text{Coeficiente} = \frac{3250 + 4680 + 2340 + 120 + 500}{3250} = 1.66 \quad (4.3)$$

4.2.2. Conexión vigas - losa

La unión entre las vigas y la losa debe hacerse de forma monolítica para poder realizar el análisis en 6 grados de libertad. Para ello el modelo se realiza en el plano del centro de

gravedad de la losa, y posteriormente se les asigna a las vigas un *offset* vertical de forma que su cara superior coincida con la cara inferior de la losa.

En la figura 4.6 se puede observar la conexión en detalle.

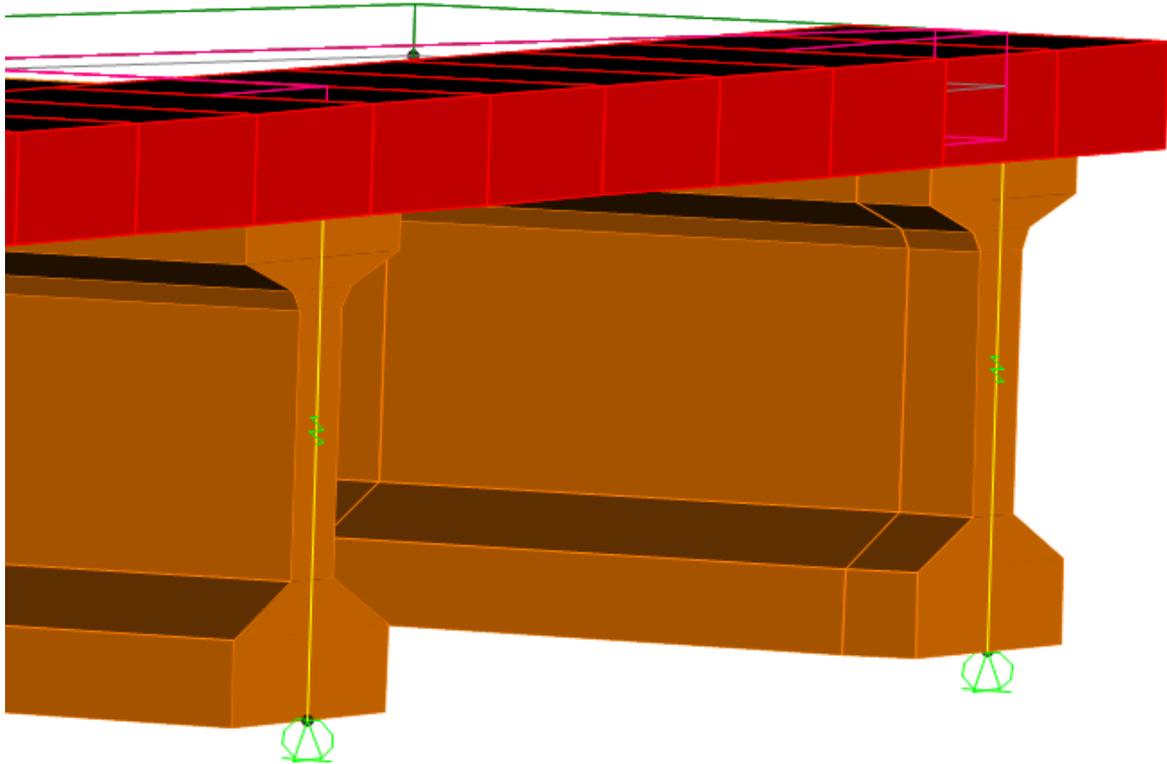


Figura 4.6: Detalle de la conexión entre las vigas y la losa. Pórgola de Bobadilla II

4.2.3. Apoyos

Los apoyos deben colocarse en el lugar en el que se encuentran en la realidad con el fin de no restringir los movimientos de membrana de la losa. Para ello se crea un *link* desde el centro de gravedad de la losa (plano del modelo) a la parte inferior de la viga, tal y como puede apreciarse en la figura 4.6. La tipología del *link* debe transmitir solamente los movimientos los ejes globales x y z .

En cuanto a la tipología del apoyo se debe distinguir entre dos tipos de modelos:

- Modelo sin interacción entre el suelo y la estructura

En este modelo se restringe el movimiento en el eje x y el eje z .

- Modelo con interacción entre el suelo y la estructura

En este modelo, mediante un *link* se restringe el movimiento en el eje x . En el eje vertical se crea un conjunto muelle + amortiguador de un grado de libertad con la masa del conjunto

fuste + zapata + pilote y la rigidez y factor de amortiguamiento del terreno, tal y como puede observarse en la figura 4.7.

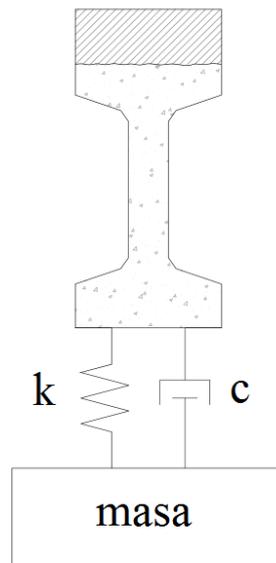


Figura 4.7: Detalle del sistema muelle - amortiguador de un grado de libertad. Pérgola de Bobadilla II

4.3. Análisis dinámico de la pérgola de Bobadilla II

En este apartado se va a realizar un análisis dinámico de la pérgola de Bobadilla II, con el fin de comprobar la influencia de la interacción suelo - estructura en las aceleraciones y desplazamientos máximos que experimenta la pérgola. Una vez obtenidos los datos anteriormente citados se procederá a elaborar unas gráficas que ayuden a entender el comportamiento de las estructuras de este tipo a medida que la rigidez del suelo varía.

Como se ha explicado con anterioridad, para modelizar la tipología de cimentación se emplean sistemas muelle - amortiguador de un grado de libertad en la dirección vertical, como puede observarse en la figura 4.7. Los valores de rigidez y amortiguamiento dinámicos a incluir en el sistema de un grado de libertad se obtienen a partir de los resultados del trabajo de Novak et al. [28].

El cálculo se va a realizar para la siguiente serie de relaciones entre la rigidez del pilote y la del terreno.

- Apoyos ($E_p/G_s = 0$)
- $E_p/G_s = 250$
- $E_p/G_s = 500$
- $E_p/G_s = 1\ 000$
- $E_p/G_s = 2\ 500$
- $E_p/G_s = 5\ 000$

- $E_p/G_s = 10\,000$

La pérgola de Bobadilla II está diseñada para una velocidad de paso de 200 km/h y según se indica en la normativa pertinente [2] se debe realizar el análisis dinámico hasta una velocidad un 20% superior a la estipulada para el paso de los trenes.

$$v_{max} = 200 \text{ km/h} \cdot 1.2 = 240 \text{ km/h} \quad (4.4)$$

La red debe garantizar la compatibilidad con la red europea, así que los trenes a considerar van a ser los siguientes:

- 10 trenes de la composición HSLM [1]
- Tren AVE
- Tren TALGO

En lo que respecta a los puntos de posproceso se distingue entre dos tipos:

- Puntos de posproceso de aceleración
- Puntos de posproceso de desplazamiento.

Puntos de posproceso de aceleración

Están localizados en centros y cuartos de vano de la línea de carga y los extremos de la cama de balasto, lugar donde suelen experimentarse las máximas aceleraciones en estructuras de este tipo. Son un total de 9 puntos, cuya localización puede apreciarse en la figura 4.8.

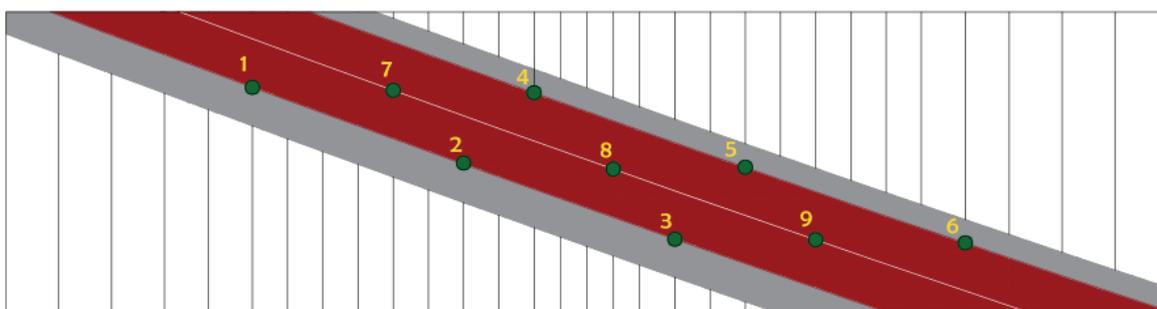


Figura 4.8: Puntos de posproceso de valores de aceleración. Pérgola de Bobadilla II

Puntos de posproceso de desplazamiento

Están localizados en centro y cuartos de vano de la línea de carga, lugar donde se experimentan los máximos valores de desplazamiento. Son un total de 3 puntos, cuya localización puede apreciarse en la figura 4.9.

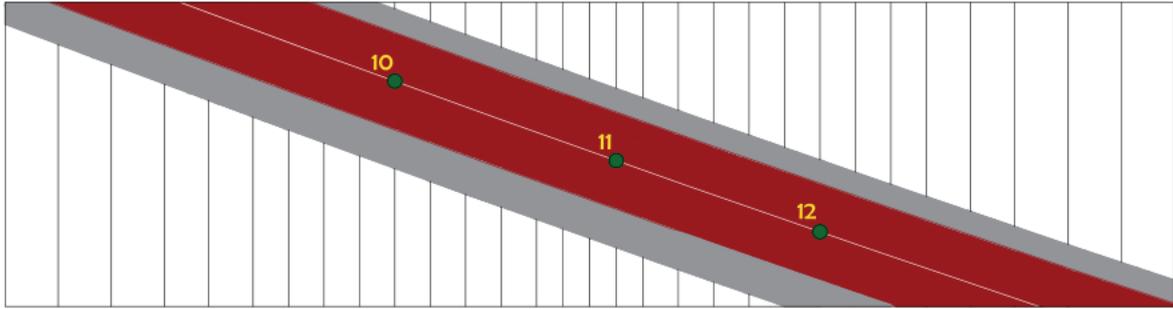


Figura 4.9: Puntos de posproceso de valores de desplazamiento. Pérgola de Bobadilla II

4.3.1. Datos de partida

Los datos necesarios para el cálculo de la rigidez y amortiguamiento en los pilotes de la pérgola de Bobadilla II son los siguientes:

- $E_p : 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
- $V_s: 250 \text{ m/s}$
- $R: 0.6 \text{ m}$
- $l: 30 \text{ m}$
- $A: 1.131 \text{ m}^2$
- $I: 0.101787 \text{ m}^4$

A partir de los datos anteriores se procede a obtener la relación existente entre la longitud y el radio del pilote.

$$\frac{l}{R} = \frac{30}{0.6} = 50 \quad (4.5)$$

Una vez se ha obtenido la relación entre la longitud y el radio del pilote se deben obtener los valores de f_{v1} y f_{v2} para la tipología de pilote a la que pertenezca. Los pilotes de la pérgola de Bobadilla II y el terreno existente a su alrededor tienen las siguientes características:

- Pilote flotante
- Rigidez del terreno ascendente de forma parabólica en el sentido vertical descendente

En la figura 4.10 se pueden observar los valores de f_{v1} y f_{v2} para la esbeltez calculada mediante la fórmula (4.5).

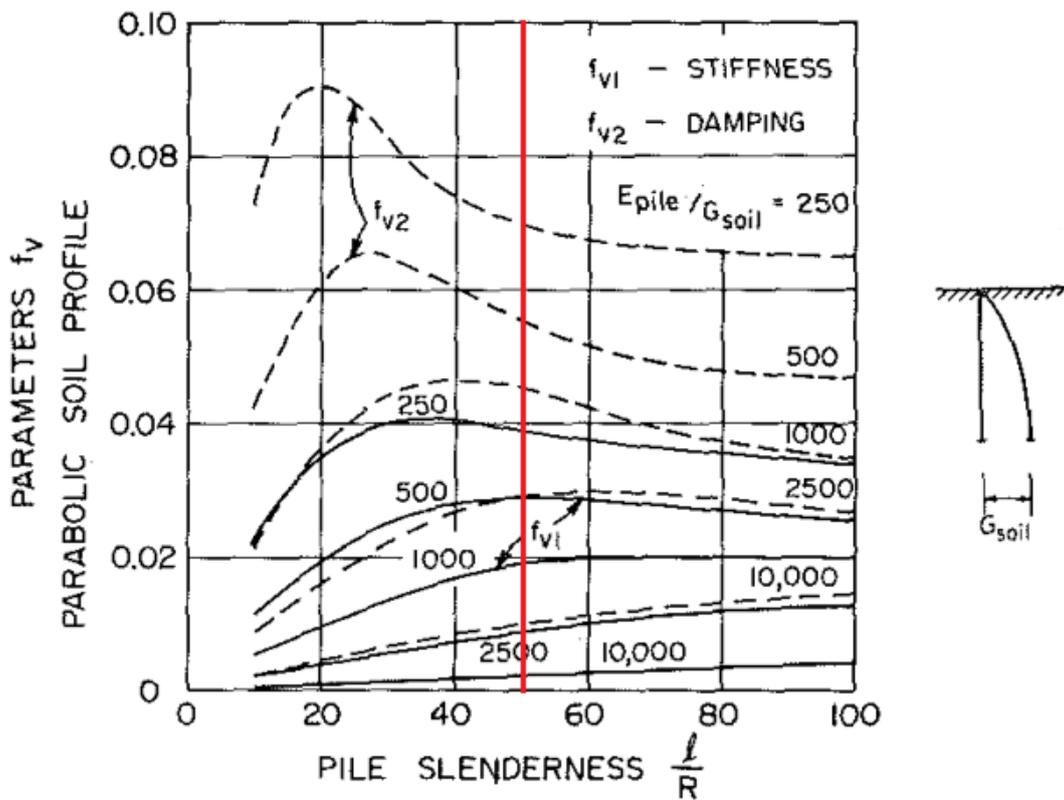


Figura 4.10: Valores de f_{v1} y f_{v2} para $\frac{l}{R} = 50$. Novak et al. [28]

Una vez obtenidos los valores de f_{v1} y f_{v2} para todas las relaciones de rigidez (E_p/G_s) presentes en la gráfica 4.10 se procede a elaborar una curva de tendencia para cada parámetro, con el fin de poder realizar el análisis para relaciones de rigidez distintas a las utilizadas por Novak et al. [28].

La línea de tendencia para el valor f_{v1} se puede observar en la figura 4.11. Su ecuación es la (4.6).

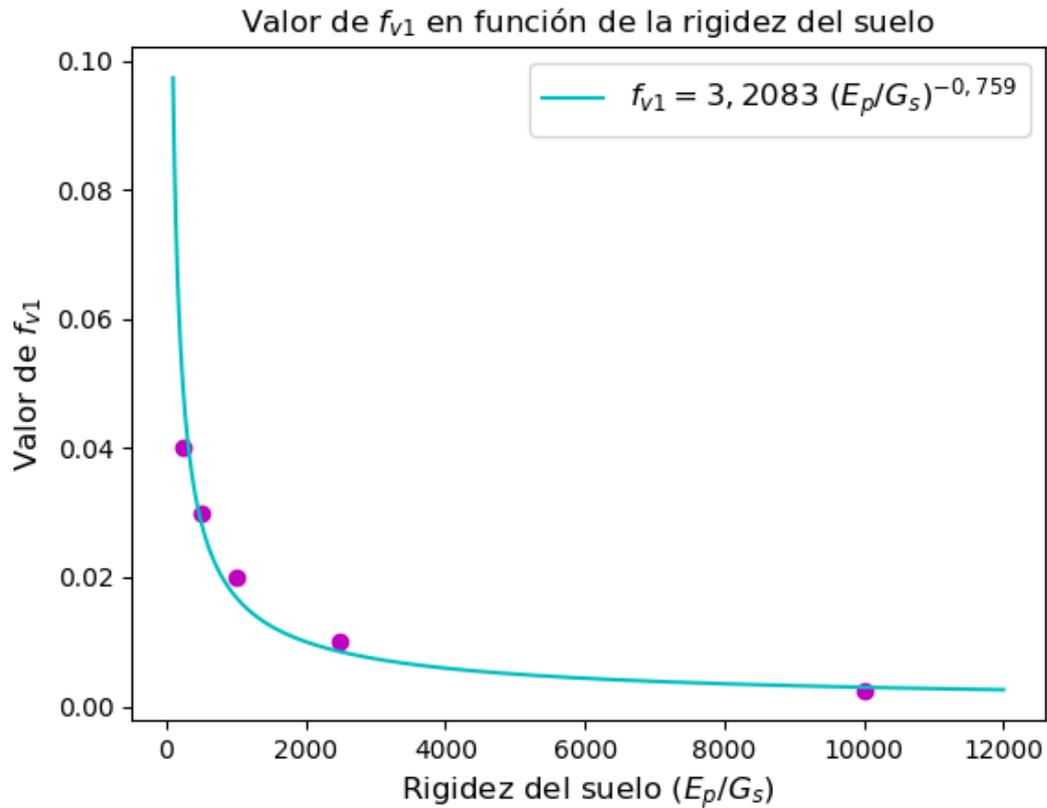


Figura 4.11: Valores de f_{v1} . Pérgola de Bobadilla II

$$f_{v1} = 3.2083 \left(\frac{E_p}{G_s} \right)^{-0.759} \quad R^2 = 0.9749 \quad (4.6)$$

Los valores de f_{v1} para los casos de estudio se pueden observar en la tabla 4.1.

E_p/G_s	f_{v1}
250	0.04
500	0.03
1 000	0.02
2 500	0.01
5 000	0.005
10 000	0.0025

Cuadro 4.1: Valores de f_{v1} para distintos casos de rigidez. Pérgola de Bobadilla II

La línea de tendencia para el valor f_{v2} se puede observar en la figura 4.12. Su ecuación es la (4.7).

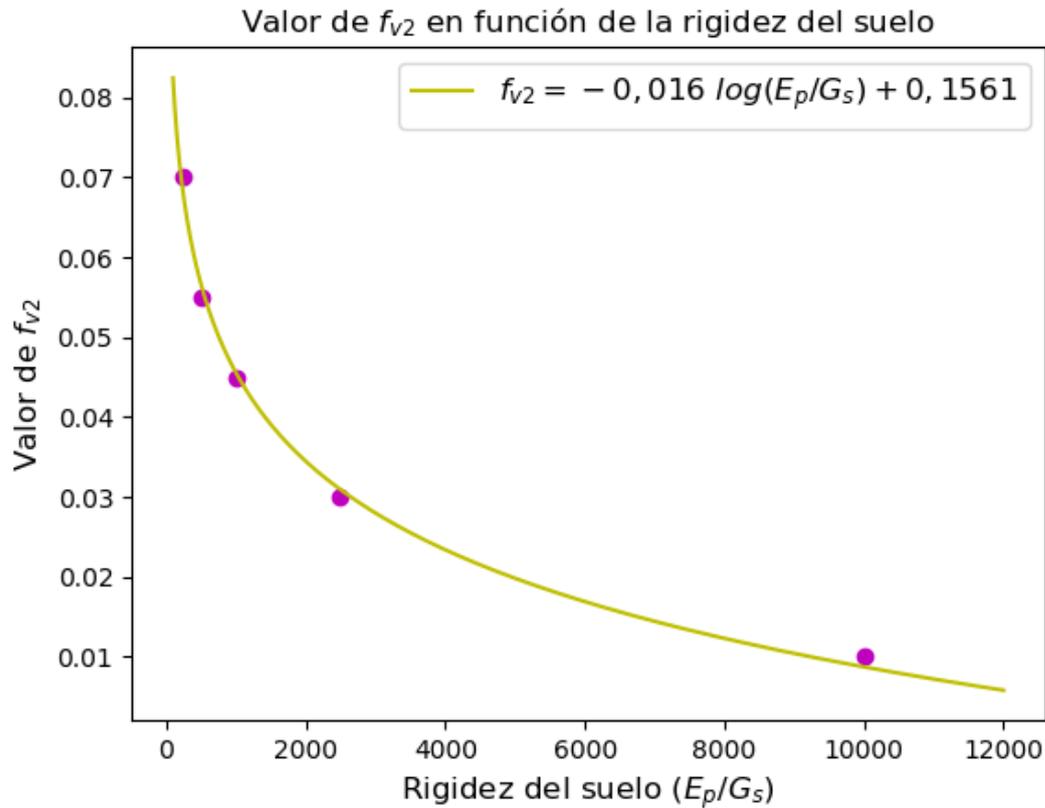


Figura 4.12: Valores de f_{v2} . Pérgola de Bobadilla II

$$f_{v2} = -0.016 \log\left(\frac{E_p}{G_s}\right) + 0.1561 \quad R^2 = 0.995 \quad (4.7)$$

Los valores de f_{v2} para los casos de estudio se pueden observar en la tabla 4.2.

E_p/G_s	f_{v2}
250	0.07
500	0.055
1 000	0.045
2 500	0.03
5 000	0.02
10 000	0.01

Cuadro 4.2: Valores de f_{v2} para distintos casos de rigidez. Pérgola de Bobadilla II

A partir de la ecuación (3.7) y la línea de tendencia obtenida para f_{v1} de la figura 4.11, cuya ecuación es la (4.6), es posible expresar la rigidez vertical (k_v) de forma analítica.

La gráfica que representa (k_v) es la figura 4.13.

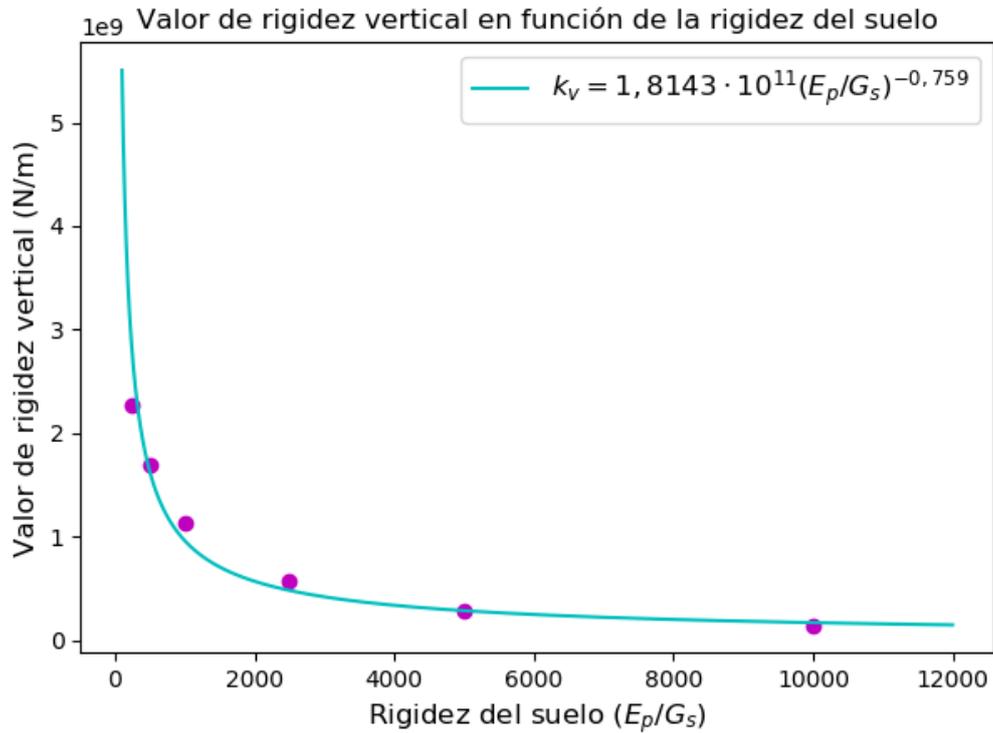


Figura 4.13: Valores de k_v . Pérgola de Bobadilla II

Y su ecuación es la (4.8).

$$k_v = 1.8143 \cdot 10^{11} \left(\frac{E_p}{G_s} \right)^{-0.759} \quad (4.8)$$

De manera análoga se puede calcular una expresión analítica para el amortiguamiento vertical (c_v). En esta ocasión se utiliza la línea de tendencia de f_{v2} (ecuación (4.7)).

La gráfica que representa (c_v) es la figura 4.14.

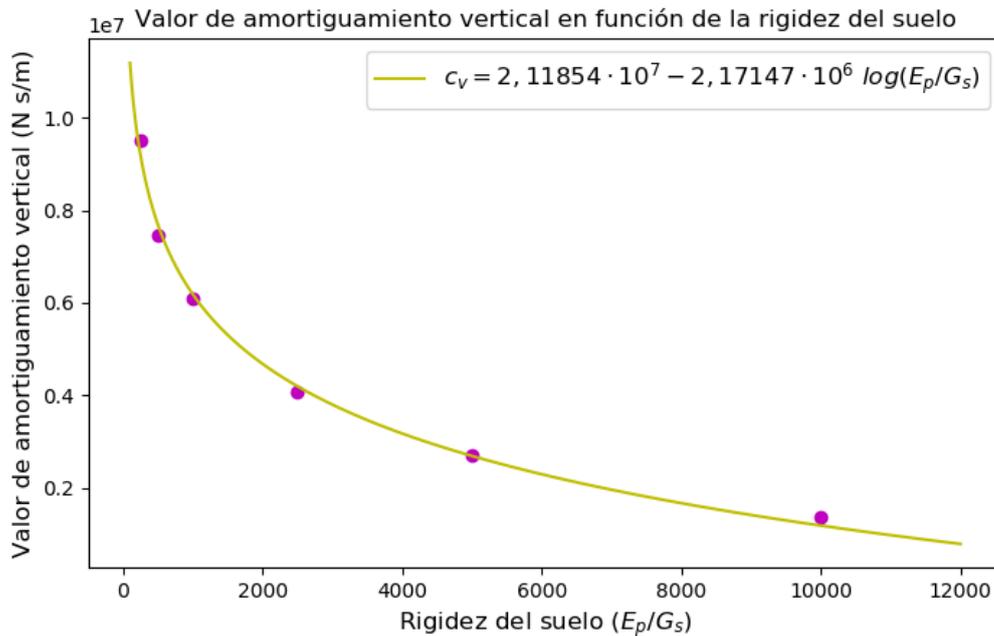


Figura 4.14: Valores de k_v . Pérgola de Bobadilla II

Y su ecuación es la (4.9).

$$c_v = 2.11854 \cdot 10^7 - 2.17147 \cdot 10^6 \log\left(\frac{E_p}{G_s}\right) \quad (4.9)$$

Los valores de k_v y c_v para cada los distintos casos de rigidez del suelo contemplados en este trabajo pueden observarse en la tabla 4.3.

E_p/G_s	k_v (N/m)	c_v ($\frac{Ns}{m}$)
250	2 261 946 710.58	9 500 176.18
500	1 696 460 032.93	7 464 424.14
1 000	1 130 973 355.29	6 107 256.11
2 500	565 486 677.64	4 071 504.07
5 000	282 743 338.82	2 714 336.05
10 000	141 371 669.41	1 357 168.02

Cuadro 4.3: Valores de k_v y c_v para distintos casos de rigidez. Pérgola de Bobadilla II

4.3.2. Cálculo dinámico

Para el cálculo dinámico se van a seguir las siguientes directrices.

- Modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz
- Amortiguamiento estructural constante igual al 2 %
- Amortiguamiento por la interacción suelo-estructura propio para cada modo calculado por SAP2000

Estructura con apoyos rígidos

Estructura con apoyos. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz se pueden observar en la tabla 4.4. En este caso no existe amortiguamiento por interacción suelo-estructura.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)
1	0.1560	6.4094
2	0.1520	6.5811
3	0.1469	6.8089
4	0.1419	7.0469
5	0.1397	7.1558
6	0.1395	7.1694
7	0.1362	7.3426
8	0.1309	7.6402
9	0.1266	7.8965
10	0.1250	7.9994
11	0.1240	8.0673
12	0.1213	8.2474
13	0.1201	8.3294
14	0.1148	8.7124
15	0.1136	8.8005
16	0.1100	9.0912
17	0.1090	9.1779
18	0.1059	9.4386
19	0.1030	9.7072
20	0.0999	10.0120
21	0.0973	10.2790
22	0.0950	10.5310
23	0.0929	10.7620
24	0.0893	11.2010
25	0.0889	11.2520
26	0.0862	11.6060
27	0.0849	11.7840
28	0.0821	12.1810
29	0.0813	12.3060
30	0.0782	12.7830
31	0.0762	13.1300
32	0.0734	13.6180

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)
33	0.0712	14.0360
34	0.0709	14.1030
35	0.0693	14.4370
36	0.0671	14.9030
37	0.0666	15.0260
38	0.0655	15.2680
39	0.0637	15.6960
40	0.0630	15.8830
41	0.0612	16.3430
42	0.0594	16.8340
43	0.0585	17.0890
44	0.0568	17.6000
45	0.0563	17.7520
46	0.0559	17.8890
47	0.0542	18.4650
48	0.0527	18.9930
49	0.0513	19.4990
50	0.0510	19.5930
51	0.0506	19.7610
52	0.0502	19.9150
53	0.0471	21.2170
54	0.0466	21.4410
55	0.0461	21.6910
56	0.0452	22.1030
57	0.0443	22.5690
58	0.0433	23.1090
59	0.0432	23.1520
60	0.0427	23.4140
61	0.0413	24.1850
62	0.0404	24.7750
63	0.0401	24.9330
64	0.0399	25.0390
65	0.0391	25.5700
66	0.0388	25.7550
67	0.0385	26.0010
68	0.0377	26.5580
69	0.0375	26.6690

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)
70	0.0374	26.7350
71	0.0369	27.0800
72	0.0363	27.5380
73	0.0362	27.6500
74	0.0360	27.7980
75	0.0358	27.9710
76	0.0356	28.1150
77	0.0352	28.3780
78	0.0350	28.5360
79	0.0348	28.7040
80	0.0348	28.7490
81	0.0347	28.8210
82	0.0346	28.8660
83	0.0345	28.9670
84	0.0343	29.1350
85	0.0341	29.3340
86	0.0338	29.5490
87	0.0336	29.7220
88	0.0335	29.8180

Cuadro 4.4: Valores de período y frecuencia para estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II

La forma de los tres primeros modos de vibración se puede apreciar en las figuras 4.15, 4.16 y 4.16.

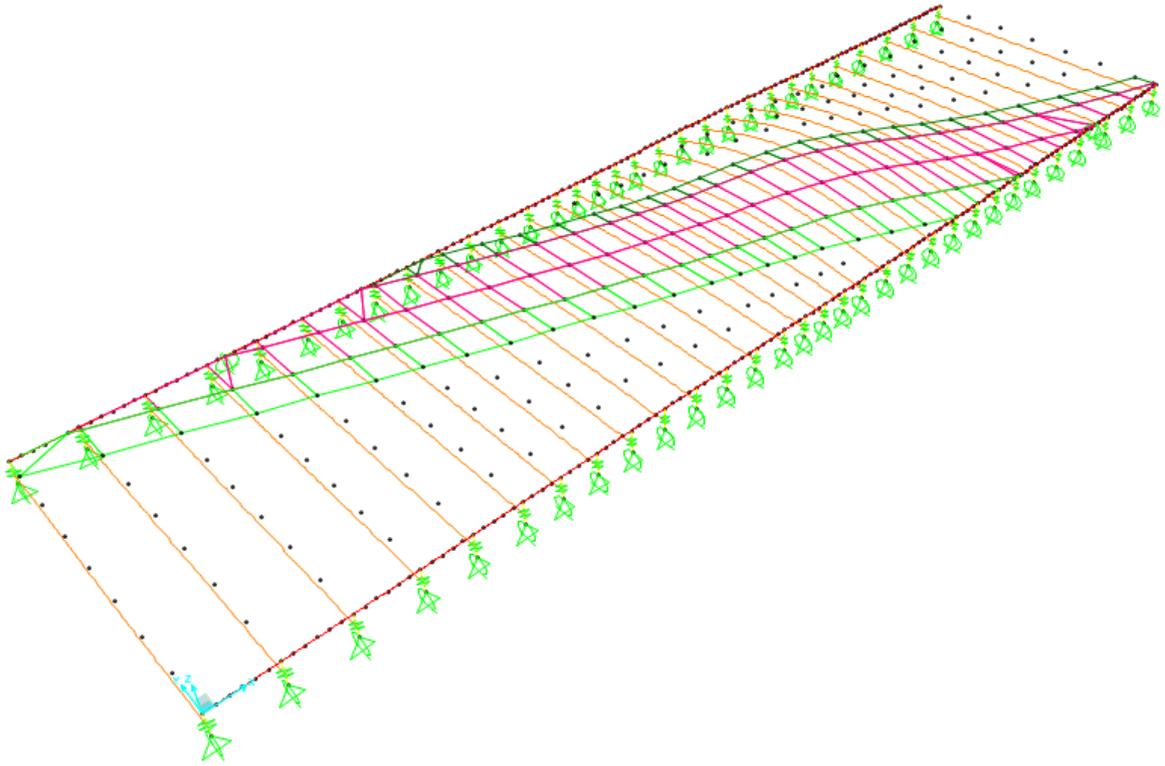


Figura 4.15: Modo 1 de vibración. Pérgola de Bobadilla II

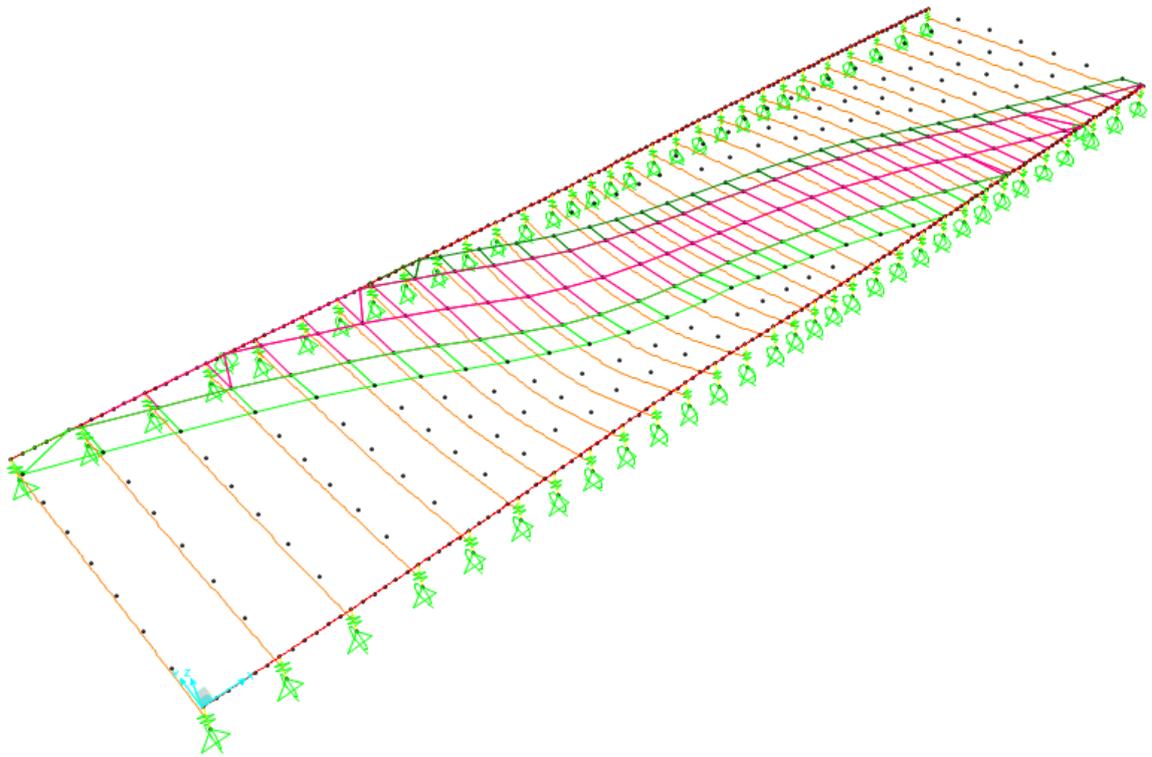


Figura 4.16: Modo 2 de vibración. Pérgola de Bobadilla II

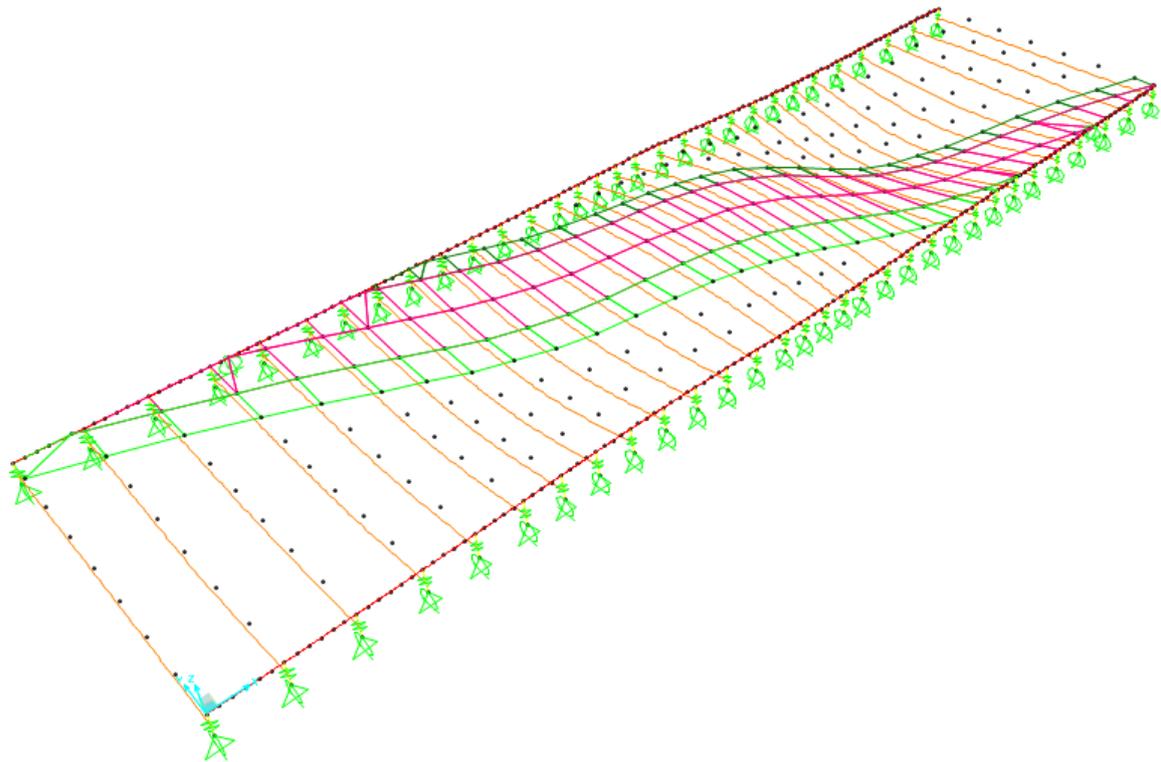


Figura 4.17: Modo 3 de vibración. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con apoyos. Resultados de aceleración

En la tabla 4.5 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	4.320 m/s^2
Punto	2
Tren	2
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.5: Máxima aceleración para estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.18 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

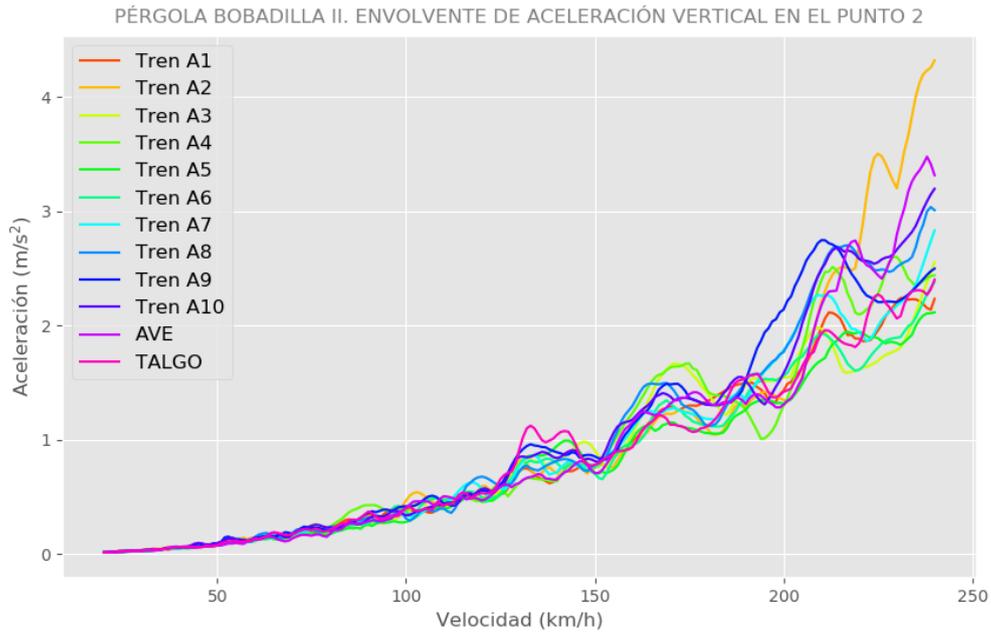


Figura 4.18: Envolvente de aceleración en el punto 2 en estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con apoyos. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.6 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de desplazamiento	2.717 mm
Punto	11
Tren	10
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.6: Máximo desplazamiento para estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.19 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

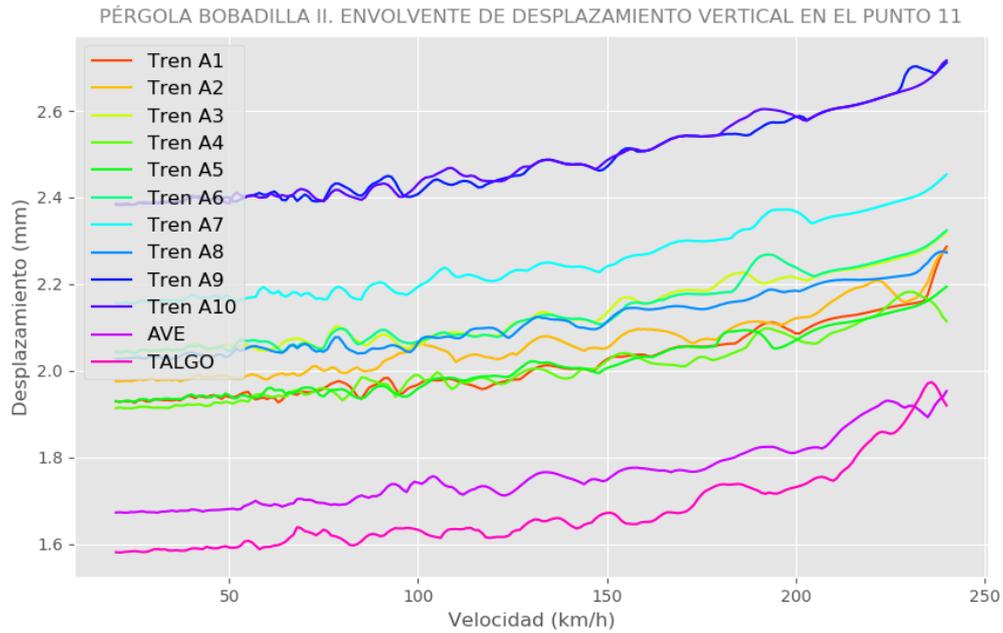


Figura 4.19: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 en estructura con apoyos. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con $E_p/G_s = 250$

$E_p/G_s = 250$. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz y su amortiguamiento por la interacción suelo estructura se pueden observar en la tabla 4.7.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
1	0.1572	6.3626	0.001276
2	0.1531	6.5302	0.001390
3	0.1479	6.7609	0.001315
4	0.1428	7.0005	0.001274
5	0.1398	7.1516	0.000139
6	0.1395	7.1668	0.000061
7	0.1370	7.2996	0.001138
8	0.1316	7.5965	0.001167
9	0.1273	7.8579	0.001056
10	0.1253	7.9834	0.000488
11	0.1242	8.0546	0.000373
12	0.1216	8.2220	0.000669
13	0.1204	8.3077	0.000581

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
14	0.1153	8.6758	0.001013
15	0.1139	8.7808	0.000551
16	0.1104	9.0592	0.000916
17	0.1092	9.1610	0.000473
18	0.1061	9.4239	0.000408
19	0.1033	9.6775	0.000824
20	0.1002	9.9767	0.001006
21	0.0974	10.2640	0.000426
22	0.0951	10.5100	0.000620
23	0.0931	10.7420	0.000525
24	0.0895	11.1730	0.000975
25	0.0891	11.2210	0.000745
26	0.0864	11.5710	0.001072
27	0.0850	11.7630	0.000539
28	0.0823	12.1520	0.000948
29	0.0814	12.2790	0.000701
30	0.0783	12.7710	0.000372
31	0.0764	13.0910	0.001191
32	0.0735	13.6080	0.000308
33	0.0714	14.0000	0.001199
34	0.0710	14.0900	0.000371
35	0.0694	14.4150	0.000645
36	0.0672	14.8740	0.001047
37	0.0667	15.0040	0.000674
38	0.0656	15.2490	0.000553
39	0.0638	15.6860	0.000335
40	0.0630	15.8730	0.000360
41	0.0614	16.2900	0.001793
42	0.0594	16.8240	0.000340
43	0.0585	17.0810	0.000294
44	0.0569	17.5600	0.001623
45	0.0564	17.7310	0.000677
46	0.0559	17.8760	0.000405
47	0.0542	18.4540	0.000460
48	0.0527	18.9870	0.000272
49	0.0515	19.4360	0.002765
50	0.0511	19.5760	0.000498

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
51	0.0506	19.7550	0.000207
52	0.0502	19.9060	0.000340
53	0.0474	21.1110	0.004777
54	0.0467	21.4290	0.000597
55	0.0461	21.6780	0.000647
56	0.0453	22.0850	0.001104
57	0.0443	22.5580	0.000632
58	0.0435	22.9710	0.007824
59	0.0433	23.0880	0.003755
60	0.0428	23.3730	0.002908
61	0.0414	24.1470	0.003648
62	0.0405	24.6880	0.011204
63	0.0404	24.7340	0.013059
64	0.0401	24.9110	0.025098
65	0.0398	25.1510	0.072679
66	0.0393	25.4310	0.098788
67	0.0391	25.5570	0.030694
68	0.0391	25.6050	0.115136
69	0.0389	25.6850	0.032970
70	0.0387	25.8400	0.095243
71	0.0386	25.9130	0.090607
72	0.0385	25.9760	0.145698
73	0.0382	26.1540	0.170270
74	0.0382	26.1930	0.095211
75	0.0379	26.3640	0.025744
76	0.0379	26.3900	0.159608
77	0.0378	26.4500	0.165070
78	0.0375	26.6590	0.155826
79	0.0374	26.7580	0.041543
80	0.0371	26.9730	0.150327
81	0.0369	27.0760	0.158579
82	0.0366	27.3070	0.163081
83	0.0363	27.5490	0.098601
84	0.0362	27.6050	0.104007
85	0.0361	27.7320	0.152585
86	0.0359	27.8250	0.127430
87	0.0357	27.9950	0.188080

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
88	0.0355	28.1390	0.077048
89	0.0354	28.2670	0.121093
90	0.0353	28.3350	0.064141
91	0.0352	28.3710	0.105000
92	0.0351	28.4690	0.164873
93	0.0349	28.6350	0.186433
94	0.0348	28.7160	0.031108
95	0.0346	28.9110	0.070686
96	0.0344	29.0740	0.068305
97	0.0342	29.2250	0.228225
98	0.0341	29.3320	0.210991
99	0.0337	29.6320	0.251851
100	0.0336	29.7290	0.108680
101	0.0335	29.8420	0.353863
102	0.0334	29.9330	0.366850
103	0.0334	29.9480	0.344265

Cuadro 4.7: Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 250$. Resultados de aceleración

En la tabla 4.8 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	3.828 m/s^2
Punto	2
Tren	2
Velocidad	238 km/h

Cuadro 4.8: Máxima aceleración para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.20 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

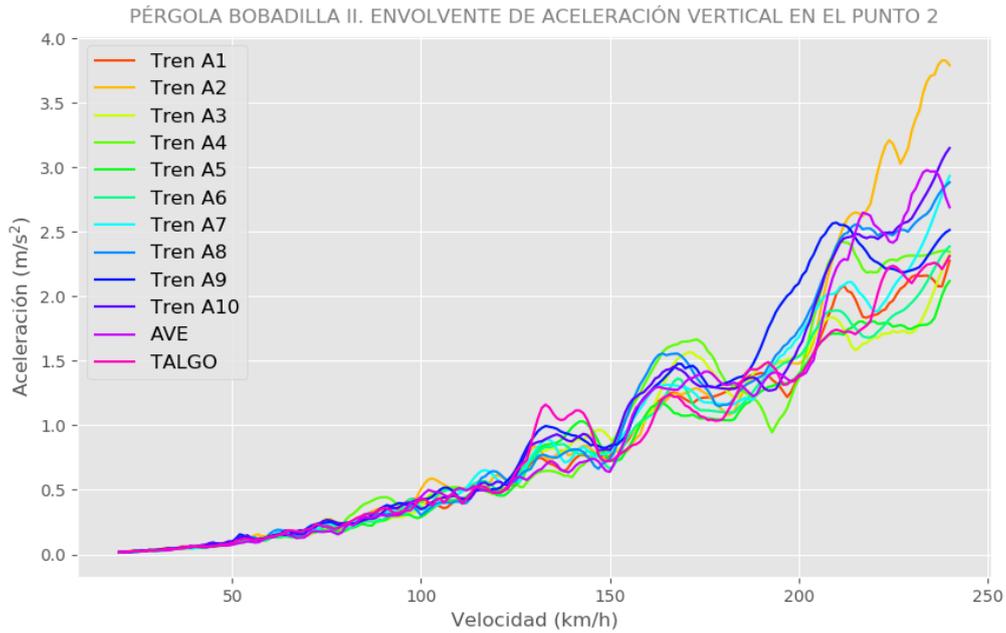


Figura 4.20: Envolvente de aceleración en el punto 2 para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 250$. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.9 se puede observar toda la información relativa al punto de desplazamiento máximo.

Máximo valor de desplazamiento	2.753 mm
Punto	11
Tren	10
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.9: Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.21 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

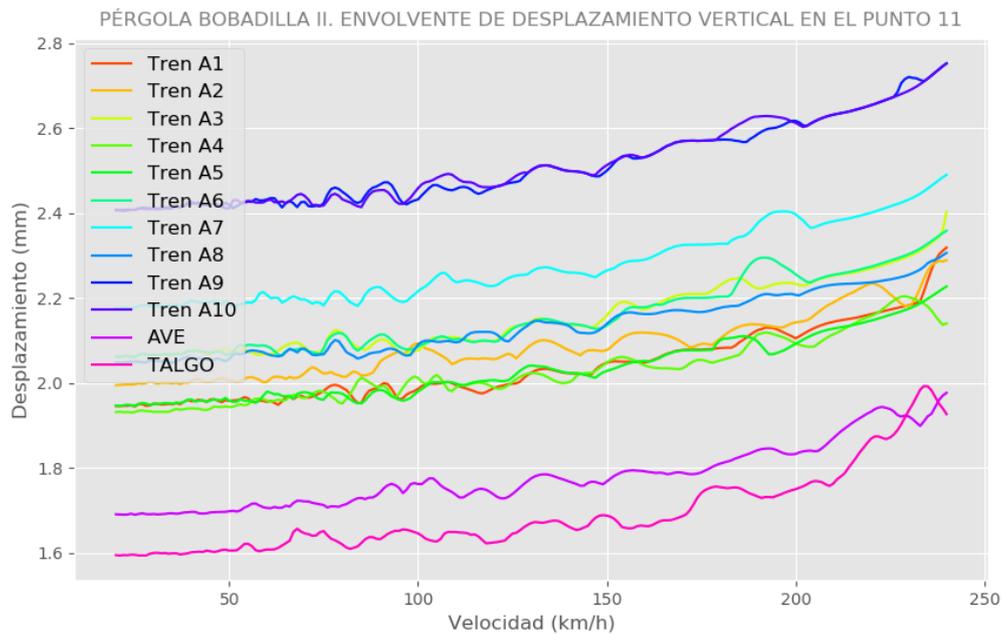


Figura 4.21: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 250$. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con $E_p/G_s = 500$

$E_p/G_s = 500$. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz y su amortiguamiento por la interacción suelo estructura se pueden observar en la tabla 4.10.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
1	0.1576	6.3463	0.001824
2	0.1536	6.5124	0.001988
3	0.1483	6.7440	0.001884
4	0.1432	6.9842	0.001828
5	0.1399	7.1497	0.000234
6	0.1395	7.1661	0.000082
7	0.1373	7.2852	0.001583
8	0.1319	7.5817	0.001652
9	0.1275	7.8444	0.001517
10	0.1254	7.9769	0.000759
11	0.1242	8.0497	0.000560
12	0.1218	8.2136	0.000927
13	0.1205	8.3003	0.000819

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
14	0.1154	8.6628	0.001466
15	0.1140	8.7737	0.000801
16	0.1105	9.0473	0.001348
17	0.1092	9.1549	0.000694
18	0.1062	9.4186	0.000593
19	0.1034	9.6669	0.001189
20	0.1004	9.9636	0.001480
21	0.0975	10.2590	0.000655
22	0.0952	10.5020	0.000918
23	0.0931	10.7360	0.000732
24	0.0896	11.1590	0.001604
25	0.0892	11.2120	0.000976
26	0.0865	11.5570	0.001687
27	0.0851	11.7560	0.000751
28	0.0824	12.1390	0.001555
29	0.0815	12.2700	0.000946
30	0.0783	12.7660	0.000594
31	0.0765	13.0750	0.001823
32	0.0735	13.6040	0.000473
33	0.0715	13.9840	0.001978
34	0.0710	14.0850	0.000565
35	0.0694	14.4070	0.000985
36	0.0673	14.8590	0.001847
37	0.0667	14.9950	0.001045
38	0.0656	15.2420	0.000846
39	0.0638	15.6810	0.000575
40	0.0630	15.8670	0.000655
41	0.0615	16.2650	0.003026
42	0.0595	16.8190	0.000632
43	0.0586	17.0770	0.000548
44	0.0570	17.5360	0.003177
45	0.0564	17.7220	0.001124
46	0.0560	17.8700	0.000653
47	0.0542	18.4470	0.000997
48	0.0527	18.9820	0.000609
49	0.0516	19.3930	0.005838
50	0.0511	19.5690	0.000858

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
51	0.0506	19.7520	0.000437
52	0.0503	19.9010	0.000674
53	0.0475	21.0330	0.011181
54	0.0467	21.4170	0.002187
55	0.0462	21.6650	0.002236
56	0.0453	22.0580	0.005970
57	0.0444	22.5430	0.003248
58	0.0438	22.8280	0.022654
59	0.0436	22.9530	0.044558
60	0.0430	23.2620	0.045142
61	0.0427	23.4310	0.232704
62	0.0425	23.5090	0.213629
63	0.0423	23.6260	0.202033
64	0.0421	23.7500	0.188981
65	0.0419	23.8440	0.241858
66	0.0418	23.9210	0.186965
67	0.0417	23.9610	0.208366
68	0.0417	23.9900	0.246941
69	0.0414	24.1670	0.103868
70	0.0412	24.2940	0.187529
71	0.0409	24.4330	0.054398
72	0.0408	24.5100	0.201574
73	0.0406	24.6230	0.224183
74	0.0404	24.7230	0.194861
75	0.0403	24.8020	0.104127
76	0.0401	24.9500	0.247654
77	0.0399	25.0580	0.147081
78	0.0399	25.0880	0.196986
79	0.0395	25.3080	0.220281
80	0.0394	25.3530	0.248966
81	0.0392	25.4850	0.232906
82	0.0392	25.5200	0.068337
83	0.0391	25.5850	0.222785
84	0.0389	25.6780	0.217829
85	0.0388	25.7720	0.128281
86	0.0388	25.7940	0.195506
87	0.0386	25.8840	0.193817

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
88	0.0384	26.0490	0.280084
89	0.0383	26.0850	0.280043
90	0.0383	26.0980	0.319093
91	0.0383	26.1370	0.223895
92	0.0382	26.1910	0.336972
93	0.0381	26.2620	0.332574
94	0.0380	26.2830	0.269234
95	0.0380	26.3230	0.328746
96	0.0379	26.4000	0.337794
97	0.0378	26.4230	0.337685
98	0.0378	26.4720	0.311850
99	0.0377	26.5310	0.297452
100	0.0377	26.5510	0.342435
101	0.0376	26.5840	0.332824
102	0.0375	26.6730	0.337755
103	0.0375	26.6990	0.332890
104	0.0374	26.7190	0.320216
105	0.0373	26.7800	0.337598
106	0.0373	26.8190	0.099743
107	0.0372	26.8780	0.265014
108	0.0372	26.9010	0.312488
109	0.0371	26.9670	0.294563
110	0.0370	27.0130	0.326758
111	0.0369	27.1080	0.323709
112	0.0368	27.1590	0.307664
113	0.0368	27.2100	0.333505
114	0.0366	27.3280	0.304109
115	0.0365	27.4170	0.324658
116	0.0363	27.5490	0.314962
117	0.0363	27.5700	0.249636
118	0.0362	27.6240	0.108311
119	0.0359	27.8390	0.302843
120	0.0359	27.8860	0.287307
121	0.0358	27.9000	0.242833
122	0.0357	27.9840	0.286027
123	0.0357	28.0460	0.035236
124	0.0356	28.0660	0.300842

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
125	0.0353	28.3140	0.172610
126	0.0353	28.3430	0.142765
127	0.0351	28.4980	0.304703
128	0.0349	28.6230	0.235880
129	0.0349	28.6520	0.042451
130	0.0348	28.7320	0.049973
131	0.0347	28.8040	0.088742
132	0.0347	28.8250	0.227901
133	0.0346	28.8770	0.289942
134	0.0345	29.0270	0.052101
135	0.0344	29.0810	0.300759
136	0.0343	29.1600	0.298307
137	0.0338	29.5600	0.158792
138	0.0337	29.6450	0.114719
139	0.0336	29.7600	0.317764
140	0.0334	29.9480	0.315422

Cuadro 4.10: Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 500$. Resultados de aceleración

En la tabla 4.11 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	3.450 m/s^2
Punto	2
Tren	2
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.11: Máxima aceleración para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.22 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

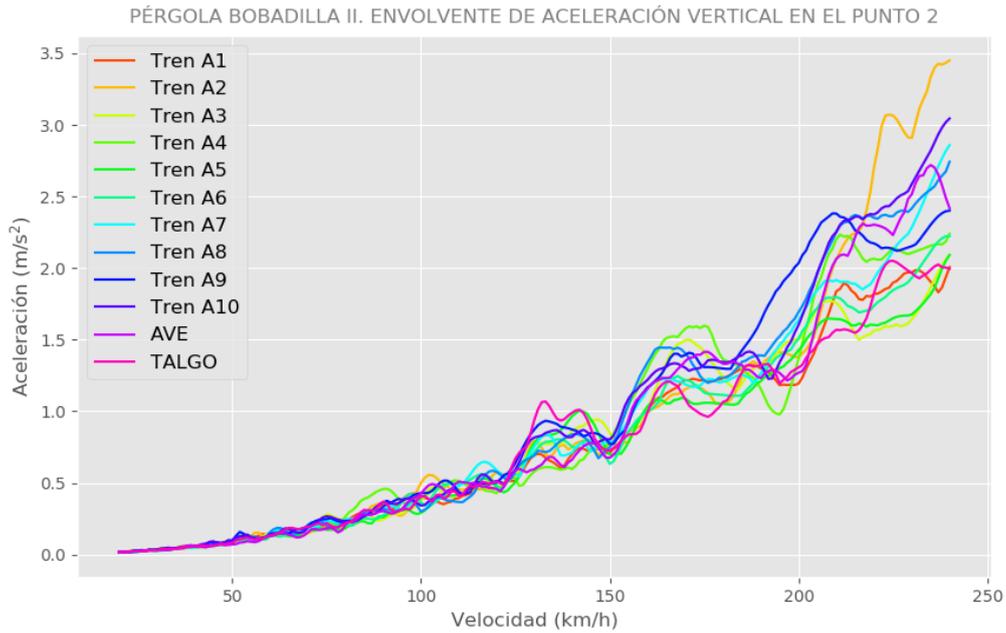


Figura 4.22: Envolvente de aceleración en el punto 2 para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 500$. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.12 se puede observar toda la información relativa al punto de desplazamiento máximo.

Máximo valor de desplazamiento	2.768 mm
Punto	11
Tren	9
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.12: Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.23 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

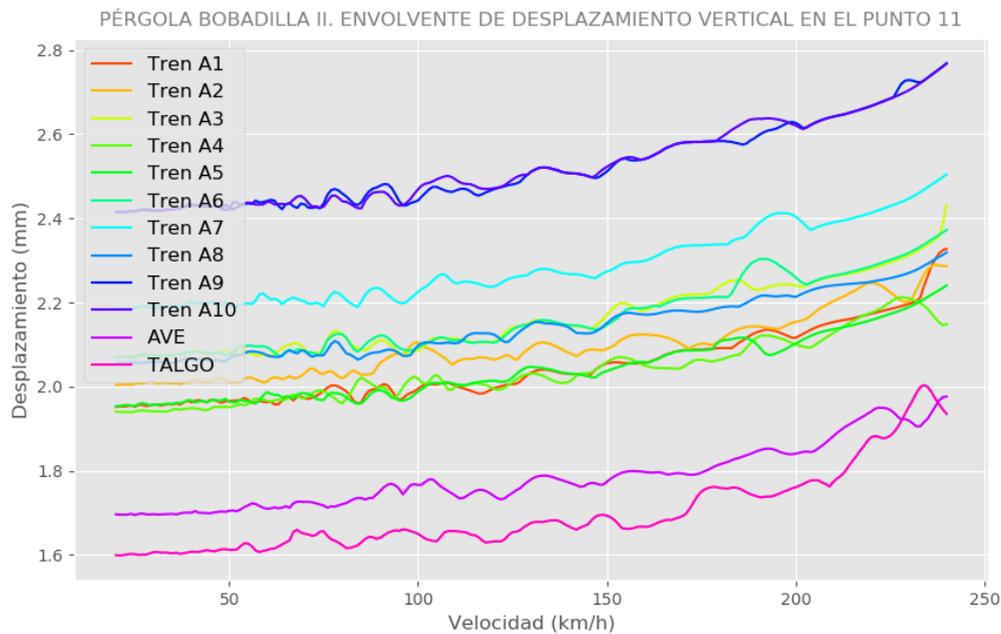


Figura 4.23: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 500$. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con $E_p/G_s = 1000$

$E_p/G_s = 1000$. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz y su amortiguamiento por la interacción suelo estructura se pueden observar en la tabla 4.13.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
1	0.1584	6.3126	0.003505
2	0.1544	6.4757	0.003825
3	0.1491	6.7092	0.003638
4	0.1439	6.9503	0.003537
5	0.1400	7.1444	0.000663
6	0.1396	7.1646	0.000146
7	0.1378	7.2570	0.002808
8	0.1324	7.5514	0.003127
9	0.1279	7.8162	0.002958
10	0.1256	7.9616	0.001732
11	0.1244	8.0388	0.001186
12	0.1220	8.1970	0.001659
13	0.1207	8.2854	0.001531

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
14	0.1158	8.6353	0.002900
15	0.1142	8.7586	0.001601
16	0.1108	9.0217	0.002736
17	0.1094	9.1416	0.001429
18	0.1063	9.4074	0.001184
19	0.1037	9.6448	0.002325
20	0.1007	9.9354	0.003020
21	0.0976	10.2460	0.001489
22	0.0954	10.4840	0.001872
23	0.0933	10.7230	0.001352
24	0.0899	11.1260	0.003797
25	0.0893	11.1950	0.001714
26	0.0868	11.5230	0.003925
27	0.0852	11.7430	0.001370
28	0.0826	12.1060	0.003893
29	0.0816	12.2540	0.001585
30	0.0784	12.7530	0.001504
31	0.0767	13.0390	0.004032
32	0.0736	13.5950	0.001072
33	0.0717	13.9410	0.005145
34	0.0711	14.0730	0.001362
35	0.0695	14.3870	0.002234
36	0.0675	14.8160	0.005613
37	0.0668	14.9740	0.002411
38	0.0657	15.2250	0.001915
39	0.0638	15.6680	0.001781
40	0.0631	15.8510	0.002384
41	0.0617	16.1980	0.008427
42	0.0595	16.8030	0.002489
43	0.0586	17.0620	0.002223
44	0.0573	17.4510	0.012368
45	0.0565	17.6950	0.003818
46	0.0560	17.8560	0.001979
47	0.0543	18.4110	0.007763
48	0.0528	18.9570	0.006017
49	0.0520	19.2180	0.028258
50	0.0512	19.5350	0.011588

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
51	0.0507	19.7140	0.086852
52	0.0506	19.7640	0.292977
53	0.0505	19.7880	0.205306
54	0.0503	19.8760	0.030018
55	0.0498	20.0780	0.292377
56	0.0497	20.1060	0.303185
57	0.0497	20.1370	0.292001
58	0.0495	20.1940	0.289827
59	0.0490	20.4010	0.293309
60	0.0488	20.4870	0.285321
61	0.0485	20.6240	0.086790
62	0.0484	20.6790	0.295586
63	0.0480	20.8270	0.315754
64	0.0479	20.8680	0.302616
65	0.0478	20.9100	0.300327
66	0.0474	21.1010	0.300797
67	0.0472	21.2040	0.292860
68	0.0470	21.2570	0.310289
69	0.0469	21.3230	0.234141
70	0.0468	21.3650	0.254879
71	0.0467	21.4280	0.323906
72	0.0466	21.4560	0.340476
73	0.0466	21.4660	0.337549
74	0.0465	21.4930	0.321357
75	0.0465	21.5190	0.294979
76	0.0464	21.5730	0.320257
77	0.0463	21.6040	0.293211
78	0.0462	21.6620	0.221975
79	0.0461	21.6830	0.241615
80	0.0461	21.7140	0.295829
81	0.0459	21.7860	0.329583
82	0.0459	21.7870	0.299658
83	0.0459	21.7940	0.190021
84	0.0458	21.8530	0.313451
85	0.0457	21.8790	0.326252
86	0.0456	21.9240	0.305158
87	0.0455	21.9840	0.329588

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
88	0.0453	22.0760	0.335220
89	0.0452	22.1160	0.283305
90	0.0451	22.1900	0.192457
91	0.0450	22.2150	0.322459
92	0.0449	22.2520	0.294001
93	0.0449	22.2820	0.301793
94	0.0447	22.3820	0.278633
95	0.0446	22.4110	0.307215
96	0.0446	22.4440	0.291822
97	0.0444	22.5320	0.219746
98	0.0442	22.6420	0.142491
99	0.0440	22.7020	0.301577
100	0.0440	22.7360	0.315303
101	0.0438	22.8500	0.303254
102	0.0436	22.9510	0.285328
103	0.0436	22.9600	0.301902
104	0.0434	23.0350	0.315051
105	0.0433	23.1000	0.290906
106	0.0430	23.2480	0.067453
107	0.0429	23.3080	0.261706
108	0.0428	23.3810	0.273651
109	0.0426	23.4710	0.133014
110	0.0425	23.5430	0.256496
111	0.0421	23.7560	0.272033
112	0.0418	23.9190	0.293572
113	0.0414	24.1620	0.153128
114	0.0413	24.2140	0.138822
115	0.0410	24.3690	0.206038
116	0.0408	24.4940	0.281963
117	0.0406	24.6190	0.309524
118	0.0403	24.7960	0.158512
119	0.0403	24.8410	0.203403
120	0.0402	24.8990	0.146410
121	0.0400	24.9800	0.250034
122	0.0398	25.1050	0.048751
123	0.0396	25.2810	0.277359
124	0.0391	25.5890	0.010097

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
125	0.0391	25.6020	0.299672
126	0.0389	25.6820	0.078137
127	0.0388	25.7960	0.240432
128	0.0388	25.8060	0.062826
129	0.0384	26.0530	0.003352
130	0.0373	26.7780	0.001984
131	0.0369	27.1340	0.032810
132	0.0363	27.5780	0.002620
133	0.0358	27.9400	0.004323
134	0.0357	27.9910	0.055538
135	0.0354	28.2460	0.007984
136	0.0352	28.4370	0.024787
137	0.0350	28.5610	0.015436
138	0.0349	28.6920	0.003127
139	0.0347	28.7930	0.019040
140	0.0344	29.0550	0.015942
141	0.0343	29.1440	0.015705
142	0.0340	29.4400	0.055885
143	0.0338	29.5650	0.034947

Cuadro 4.13: Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 1000$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 1000$. Resultados de aceleración

En la tabla 4.14 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	2.707 m/s^2
Punto	5
Tren	9
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.14: Máxima aceleración para $E_p/G_s = 1000$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.24 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

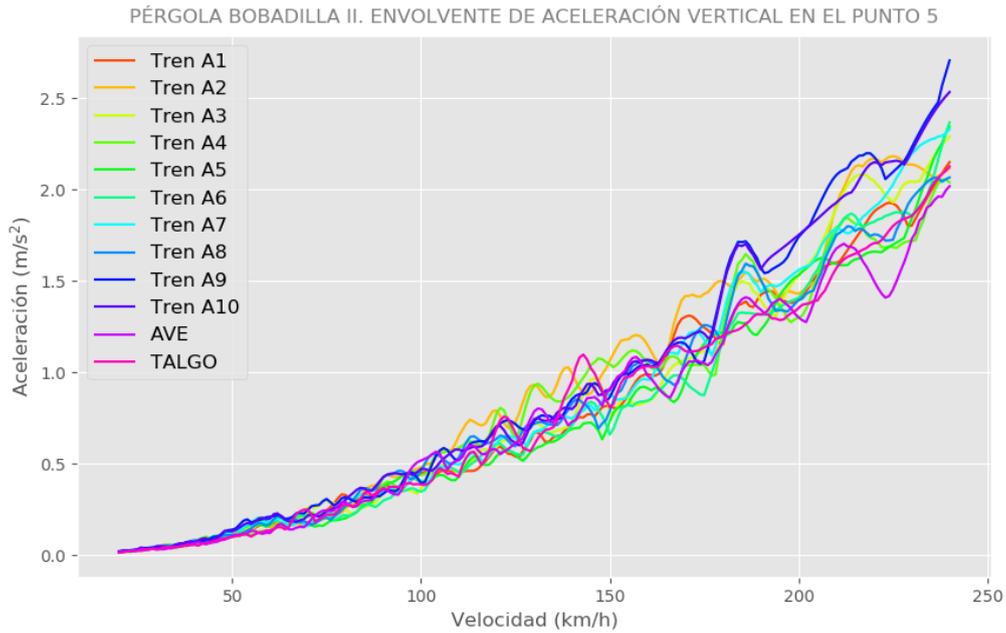


Figura 4.24: Envolvente de aceleración en el punto 5 para $E_p/G_s = 1\ 000$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 1\ 000$. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.15 se puede observar toda la información relativa al punto de desplazamiento máximo.

Máximo valor de desplazamiento	2.798 mm
Punto	11
Tren	9
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.15: Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 1\ 000$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.25 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

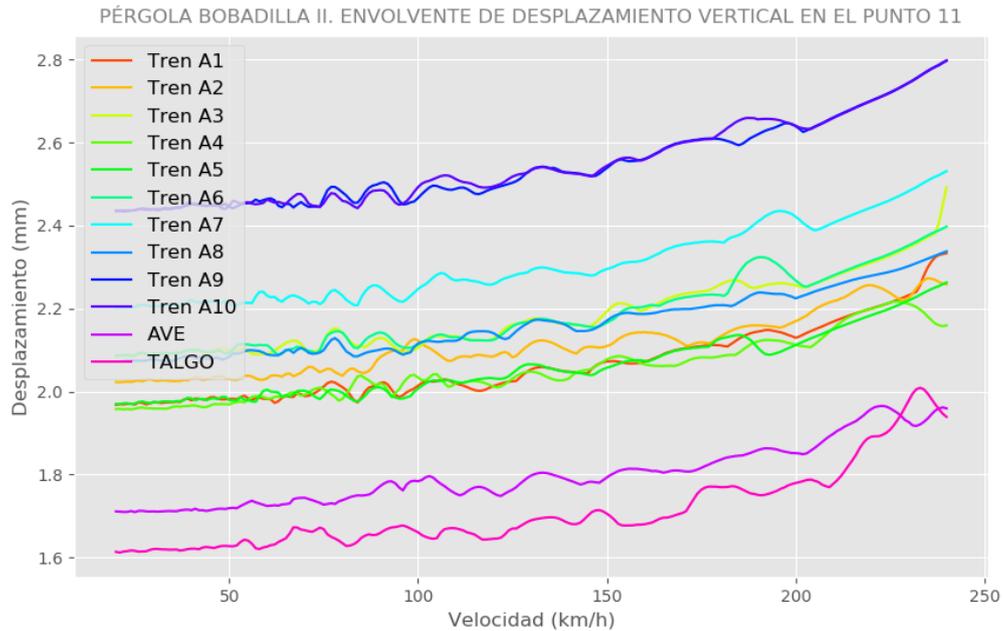


Figura 4.25: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 1\ 000$. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con $E_p/G_s = 2\ 500$

$E_p/G_s = 2\ 500$. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz y su amortiguamiento por la interacción suelo estructura se pueden observar en la tabla 4.16.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
1	0.1612	6.2025	0.010574
2	0.1573	6.3554	0.011562
3	0.1517	6.5941	0.011138
4	0.1462	6.8382	0.010863
5	0.1408	7.1001	0.007007
6	0.1397	7.1601	0.000451
7	0.1390	7.1925	0.003471
8	0.1341	7.4545	0.009227
9	0.1295	7.7200	0.009606
10	0.1267	7.8912	0.008335
11	0.1251	7.9948	0.004984
12	0.1227	8.1511	0.003868
13	0.1214	8.2401	0.004028

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
14	0.1171	8.5394	0.009705
15	0.1149	8.7040	0.005753
16	0.1120	8.9292	0.009432
17	0.1100	9.0889	0.006019
18	0.1068	9.3672	0.004194
19	0.1045	9.5701	0.007310
20	0.1017	9.8311	0.010928
21	0.0982	10.1810	0.008438
22	0.0959	10.4230	0.005755
23	0.0936	10.6810	0.004243
24	0.0911	10.9770	0.017145
25	0.0898	11.1330	0.007449
26	0.0881	11.3570	0.020440
27	0.0855	11.7020	0.003983
28	0.0838	11.9290	0.022820
29	0.0819	12.2110	0.003954
30	0.0790	12.6560	0.017972
31	0.0776	12.8900	0.014825
32	0.0739	13.5380	0.011277
33	0.0732	13.6530	0.045151
34	0.0717	13.9400	0.047076
35	0.0702	14.2470	0.040286
36	0.0697	14.3450	0.290536
37	0.0697	14.3530	0.297499
38	0.0694	14.4080	0.076405
39	0.0687	14.5480	0.302591
40	0.0687	14.5610	0.294567
41	0.0680	14.7020	0.292246
42	0.0677	14.7790	0.253269
43	0.0673	14.8510	0.098376
44	0.0671	14.8980	0.292551
45	0.0665	15.0390	0.286040
46	0.0662	15.1030	0.280935
47	0.0661	15.1240	0.135955
48	0.0659	15.1860	0.295142
49	0.0658	15.2080	0.297471
50	0.0654	15.2920	0.171061

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
51	0.0653	15.3160	0.275906
52	0.0651	15.3650	0.297252
53	0.0650	15.3790	0.303389
54	0.0649	15.4020	0.307473
55	0.0647	15.4540	0.308456
56	0.0645	15.5010	0.252501
57	0.0644	15.5370	0.297526
58	0.0641	15.5910	0.279279
59	0.0638	15.6660	0.286222
60	0.0636	15.7120	0.290153
61	0.0635	15.7440	0.290826
62	0.0634	15.7830	0.258503
63	0.0632	15.8110	0.275085
64	0.0631	15.8470	0.226632
65	0.0629	15.8920	0.217336
66	0.0627	15.9470	0.246002
67	0.0626	15.9720	0.275163
68	0.0625	16.0020	0.204031
69	0.0622	16.0870	0.261747
70	0.0621	16.1100	0.281186
71	0.0617	16.2090	0.282428
72	0.0613	16.3230	0.286920
73	0.0609	16.4290	0.276132
74	0.0606	16.5020	0.282226
75	0.0604	16.5590	0.270006
76	0.0603	16.5890	0.246821
77	0.0601	16.6490	0.255278
78	0.0597	16.7600	0.277245
79	0.0596	16.7850	0.210979
80	0.0592	16.9030	0.238444
81	0.0588	17.0100	0.115458
82	0.0588	17.0160	0.255246
83	0.0585	17.0880	0.215084
84	0.0583	17.1590	0.147145
85	0.0582	17.1910	0.252949
86	0.0579	17.2620	0.241237
87	0.0577	17.3270	0.257740

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
88	0.0573	17.4590	0.280608
89	0.0571	17.5030	0.274045
90	0.0570	17.5530	0.233484
91	0.0564	17.7230	0.019699
92	0.0560	17.8690	0.037432
93	0.0559	17.9000	0.259632
94	0.0554	18.0410	0.203012
95	0.0552	18.1080	0.255028
96	0.0547	18.2830	0.223768
97	0.0541	18.4700	0.203178
98	0.0540	18.5270	0.049351
99	0.0537	18.6210	0.169020
100	0.0531	18.8280	0.233866
101	0.0525	19.0400	0.014587
102	0.0517	19.3360	0.244288
103	0.0515	19.4360	0.258517
104	0.0511	19.5830	0.026280
105	0.0509	19.6370	0.239274
106	0.0507	19.7270	0.228090
107	0.0506	19.7530	0.022213
108	0.0504	19.8580	0.014939
109	0.0498	20.0910	0.048556
110	0.0492	20.3160	0.223103
111	0.0485	20.6030	0.253722
112	0.0483	20.6850	0.228206
113	0.0480	20.8220	0.251758
114	0.0478	20.9410	0.188850
115	0.0466	21.4720	0.007183
116	0.0464	21.5340	0.014613
117	0.0460	21.7530	0.007121
118	0.0452	22.1320	0.001433
119	0.0443	22.5840	0.000617
120	0.0431	23.1890	0.002606
121	0.0427	23.4200	0.011295
122	0.0426	23.4740	0.002981
123	0.0413	24.2180	0.001258
124	0.0403	24.8120	0.000886

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
125	0.0400	25.0210	0.001105
126	0.0396	25.2410	0.007486
127	0.0391	25.5800	0.000256
128	0.0388	25.7800	0.000500
129	0.0384	26.0310	0.000529
130	0.0374	26.7610	0.000496
131	0.0372	26.8900	0.005390
132	0.0365	27.4270	0.016145
133	0.0363	27.5500	0.001588
134	0.0359	27.8910	0.002344
135	0.0357	27.9870	0.012293
136	0.0354	28.2430	0.002759
137	0.0352	28.4480	0.003192
138	0.0350	28.6080	0.005874
139	0.0349	28.6490	0.003107
140	0.0346	28.8650	0.014756
141	0.0346	28.9250	0.004529
142	0.0345	29.0230	0.003491
143	0.0342	29.2480	0.008032
144	0.0337	29.6440	0.013310
145	0.0334	29.9240	0.012643

Cuadro 4.16: Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 2\ 500$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 2\ 500$. Resultados de aceleración

En la tabla 4.17 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	2.857 m/s^2
Punto	5
Tren	9
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.17: Máxima aceleración para $E_p/G_s = 2\ 500$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.26 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

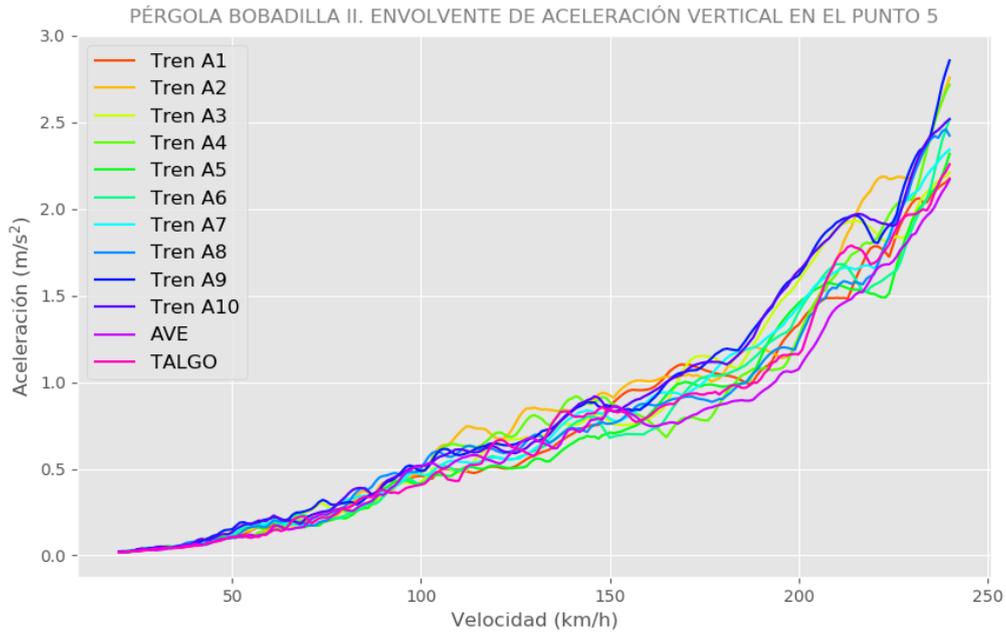


Figura 4.26: Envolvente de aceleración en el punto 5 para $E_p/G_s = 2\,500$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 2\,500$. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.18 se puede observar toda la información relativa al punto de desplazamiento máximo.

Máximo valor de desplazamiento	2.843 mm
Punto	11
Tren	10
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.18: Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 2\,500$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.27 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

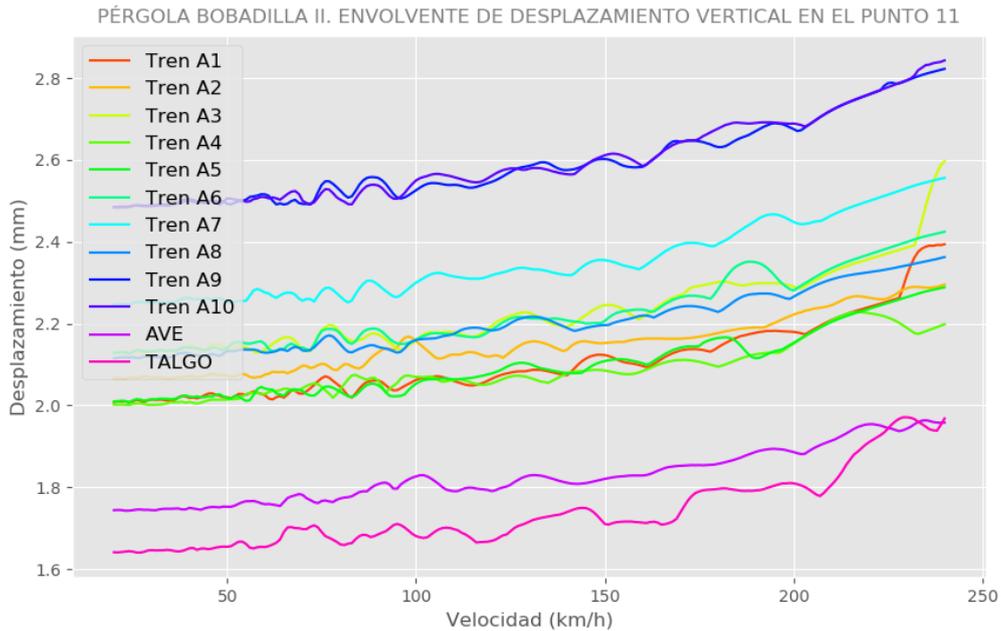


Figura 4.27: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 2500$. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con $E_p/G_s = 5000$

$E_p/G_s = 5000$. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz y su amortiguamiento por la interacción suelo estructura se pueden observar en la tabla 4.19.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
1	0.1683	5.9427	0.034220
2	0.1662	6.0163	0.000175
3	0.1647	6.0720	0.037053
4	0.1641	6.0923	0.000138
5	0.1583	6.3168	0.036885
6	0.1523	6.5676	0.035981
7	0.1456	6.8691	0.033130
8	0.1402	7.1349	0.009103
9	0.1396	7.1615	0.002081
10	0.1382	7.2375	0.024048
11	0.1342	7.4519	0.040537
12	0.1314	7.6088	0.045808
13	0.1281	7.8077	0.033253

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
14	0.1240	8.0629	0.015199
15	0.1225	8.1601	0.009496
16	0.1207	8.2841	0.031650
17	0.1177	8.4955	0.040217
18	0.1149	8.7004	0.025873
19	0.1130	8.8518	0.044292
20	0.1083	9.2302	0.029110
21	0.1068	9.3594	0.033418
22	0.1047	9.5543	0.029199
23	0.1021	9.7932	0.074545
24	0.0977	10.2370	0.105269
25	0.0973	10.2750	0.176203
26	0.0968	10.3330	0.226077
27	0.0964	10.3740	0.198277
28	0.0962	10.3990	0.275702
29	0.0956	10.4560	0.281202
30	0.0951	10.5180	0.291905
31	0.0950	10.5290	0.159797
32	0.0942	10.6170	0.123049
33	0.0937	10.6760	0.242704
34	0.0925	10.8050	0.292782
35	0.0923	10.8370	0.153572
36	0.0914	10.9440	0.244851
37	0.0910	10.9940	0.217561
38	0.0907	11.0190	0.262000
39	0.0900	11.1060	0.277317
40	0.0894	11.1820	0.273467
41	0.0884	11.3100	0.271532
42	0.0883	11.3240	0.269978
43	0.0881	11.3500	0.202897
44	0.0876	11.4130	0.258022
45	0.0871	11.4850	0.237454
46	0.0870	11.4930	0.254125
47	0.0867	11.5360	0.176911
48	0.0861	11.6200	0.221740
49	0.0856	11.6840	0.215953
50	0.0854	11.7070	0.250793

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
51	0.0851	11.7570	0.251625
52	0.0848	11.7930	0.183075
53	0.0841	11.8950	0.237755
54	0.0838	11.9350	0.226125
55	0.0836	11.9560	0.246271
56	0.0832	12.0230	0.219833
57	0.0822	12.1650	0.135544
58	0.0819	12.2040	0.207359
59	0.0816	12.2480	0.177643
60	0.0811	12.3270	0.227873
61	0.0809	12.3650	0.188301
62	0.0802	12.4630	0.203531
63	0.0799	12.5140	0.226681
64	0.0790	12.6510	0.212876
65	0.0789	12.6820	0.216508
66	0.0781	12.8000	0.173345
67	0.0776	12.8790	0.104228
68	0.0767	13.0410	0.235114
69	0.0762	13.1160	0.237537
70	0.0760	13.1570	0.196144
71	0.0754	13.2650	0.196266
72	0.0748	13.3710	0.194729
73	0.0742	13.4690	0.188234
74	0.0739	13.5290	0.075609
75	0.0738	13.5560	0.234147
76	0.0736	13.5920	0.223148
77	0.0724	13.8160	0.237866
78	0.0722	13.8460	0.163249
79	0.0720	13.8820	0.208141
80	0.0712	14.0470	0.165694
81	0.0710	14.0860	0.156214
82	0.0705	14.1860	0.071075
83	0.0699	14.3110	0.029681
84	0.0696	14.3620	0.179891
85	0.0684	14.6190	0.208418
86	0.0677	14.7610	0.154371
87	0.0672	14.8880	0.146310

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
88	0.0666	15.0180	0.019438
89	0.0661	15.1350	0.054101
90	0.0655	15.2780	0.152703
91	0.0649	15.4060	0.147853
92	0.0639	15.6480	0.054281
93	0.0638	15.6770	0.182475
94	0.0633	15.7880	0.046187
95	0.0628	15.9310	0.008358
96	0.0617	16.2050	0.210775
97	0.0610	16.3950	0.183403
98	0.0607	16.4640	0.206507
99	0.0599	16.6980	0.057641
100	0.0594	16.8350	0.156631
101	0.0593	16.8730	0.003605
102	0.0583	17.1410	0.008247
103	0.0571	17.5190	0.176422
104	0.0569	17.5730	0.197877
105	0.0565	17.6890	0.004903
106	0.0561	17.8160	0.175275
107	0.0561	17.8350	0.025154
108	0.0558	17.9170	0.160236
109	0.0553	18.0700	0.030722
110	0.0542	18.4640	0.038457
111	0.0538	18.5900	0.111397
112	0.0526	19.0110	0.000716
113	0.0511	19.5720	0.001241
114	0.0507	19.7270	0.004776
115	0.0505	19.7930	0.002459
116	0.0501	19.9640	0.002799
117	0.0467	21.4090	0.004097
118	0.0466	21.4620	0.000904
119	0.0460	21.7190	0.000882
120	0.0452	22.1220	0.000374
121	0.0443	22.5790	0.000188
122	0.0432	23.1700	0.000773
123	0.0429	23.3310	0.003711
124	0.0426	23.4540	0.000755

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
125	0.0413	24.2090	0.000398
126	0.0403	24.8040	0.000364
127	0.0400	25.0110	0.000549
128	0.0397	25.1790	0.002727
129	0.0391	25.5780	0.000104
130	0.0388	25.7750	0.000217
131	0.0384	26.0260	0.000240
132	0.0374	26.7560	0.000268
133	0.0373	26.8430	0.002225
134	0.0367	27.2760	0.007634
135	0.0363	27.5340	0.001008
136	0.0359	27.8420	0.004841
137	0.0358	27.8960	0.002358
138	0.0354	28.2180	0.001319
139	0.0352	28.4140	0.001966
140	0.0350	28.5520	0.002919
141	0.0350	28.5950	0.004564
142	0.0348	28.7450	0.004432
143	0.0346	28.8880	0.001778
144	0.0345	28.9920	0.001562
145	0.0343	29.1770	0.003382
146	0.0339	29.5180	0.006568
147	0.0336	29.7980	0.006856
148	0.0335	29.8930	0.009586

Cuadro 4.19: Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 5\,000$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 5\,000$. Resultados de aceleración

En la tabla 4.20 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	3.804 m/s^2
Punto	1
Tren	2
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.20: Máxima aceleración para $E_p/G_s = 5\,000$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.28 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

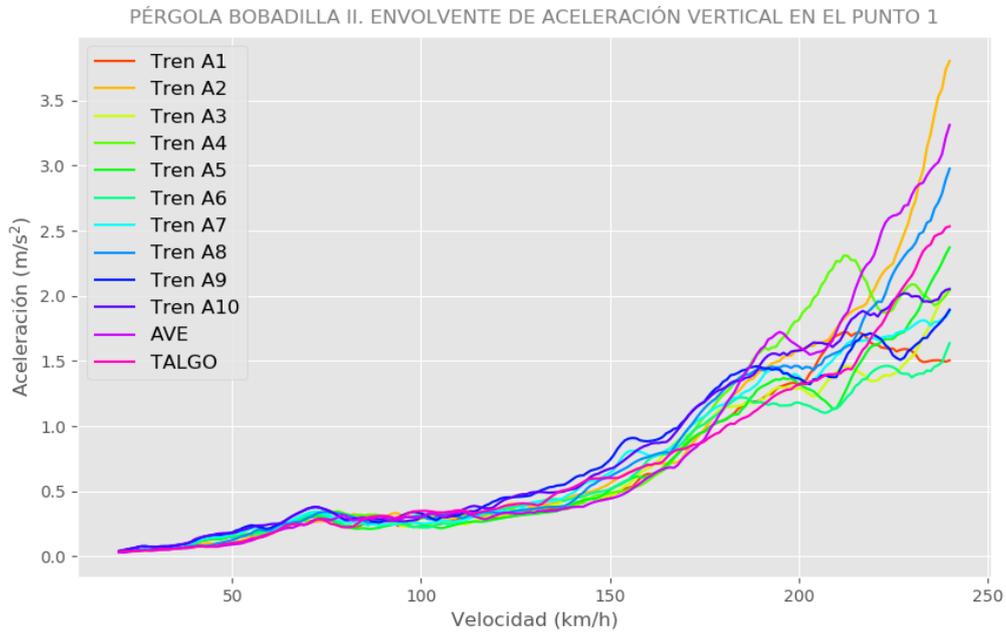


Figura 4.28: Envolvente de aceleración en el punto 1 para $E_p/G_s = 5\,000$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 5\,000$. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.21 se puede observar toda la información relativa al punto de desplazamiento máximo.

Máximo valor de desplazamiento	2.908 mm
Punto	11
Tren	9
Velocidad	235 km/h

Cuadro 4.21: Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 5\,000$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.29 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

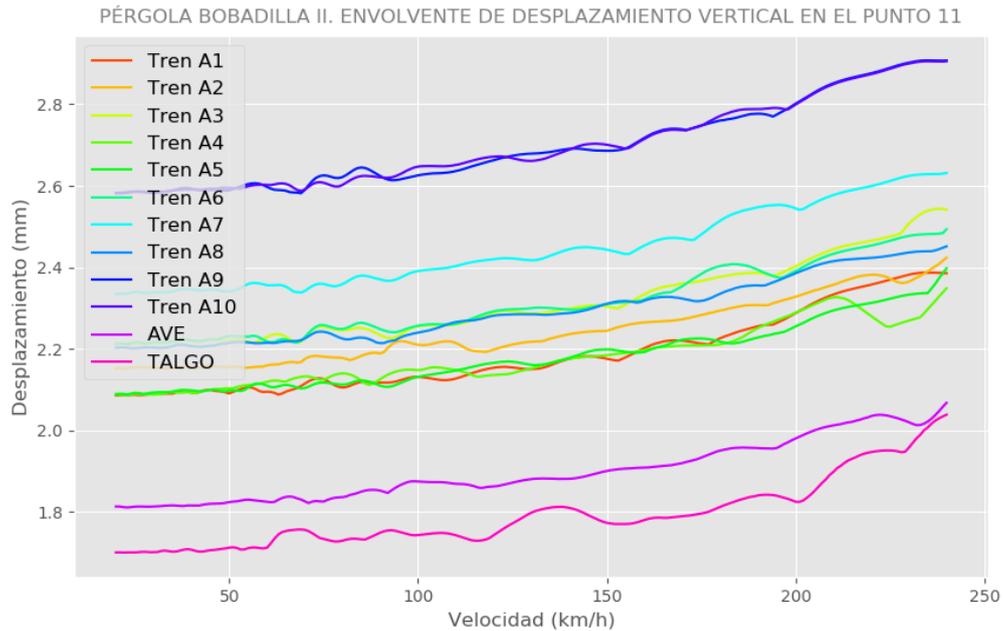


Figura 4.29: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 5\ 000$. Pérgola de Bobadilla II

Estructura con $E_p/G_s = 10\ 000$

$E_p/G_s = 10\ 000$. Análisis modal

Los modos de vibración con frecuencia inferior a 30 Hz y su amortiguamiento por la interacción suelo estructura se pueden observar en la tabla 4.22.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
1	0.1876	5.3292	0.074878
2	0.1845	5.4190	0.077855
3	0.1768	5.6554	0.079828
4	0.1687	5.9288	0.076061
5	0.1663	6.0144	0.000537
6	0.1642	6.0901	0.000793
7	0.1598	6.2593	0.075366
8	0.1546	6.4688	0.117421
9	0.1534	6.5182	0.122753
10	0.1491	6.7077	0.090445
11	0.1433	6.9787	0.087089
12	0.1405	7.1199	0.038546
13	0.1388	7.2022	0.027332

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
14	0.1370	7.3008	0.090469
15	0.1354	7.3855	0.213935
16	0.1349	7.4106	0.208634
17	0.1343	7.4477	0.201350
18	0.1336	7.4826	0.205885
19	0.1330	7.5205	0.157502
20	0.1322	7.5623	0.200943
21	0.1295	7.7197	0.153718
22	0.1289	7.7556	0.181455
23	0.1259	7.9457	0.193393
24	0.1256	7.9636	0.108997
25	0.1232	8.1171	0.054833
26	0.1228	8.1458	0.080032
27	0.1214	8.2368	0.172465
28	0.1210	8.2658	0.131128
29	0.1204	8.3062	0.151545
30	0.1194	8.3761	0.151283
31	0.1183	8.4542	0.103356
32	0.1176	8.5010	0.150034
33	0.1168	8.5652	0.147037
34	0.1161	8.6131	0.135077
35	0.1127	8.8704	0.168346
36	0.1121	8.9215	0.135077
37	0.1116	8.9587	0.123906
38	0.1105	9.0510	0.159061
39	0.1099	9.1031	0.137138
40	0.1092	9.1586	0.058848
41	0.1084	9.2232	0.094408
42	0.1082	9.2441	0.155905
43	0.1073	9.3188	0.083322
44	0.1070	9.3501	0.117093
45	0.1056	9.4657	0.117763
46	0.1052	9.5056	0.100782
47	0.1050	9.5210	0.125849
48	0.1040	9.6163	0.119081
49	0.1027	9.7384	0.126953
50	0.1018	9.8207	0.080908

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
51	0.1009	9.9109	0.128451
52	0.1003	9.9750	0.114582
53	0.0990	10.1030	0.137182
54	0.0988	10.1200	0.128275
55	0.0981	10.1970	0.125855
56	0.0966	10.3500	0.055103
57	0.0965	10.3580	0.084873
58	0.0953	10.4920	0.095460
59	0.0944	10.5900	0.116275
60	0.0938	10.6660	0.034779
61	0.0932	10.7300	0.112732
62	0.0925	10.8100	0.142754
63	0.0917	10.9050	0.109180
64	0.0909	11.0010	0.087275
65	0.0898	11.1340	0.113533
66	0.0889	11.2470	0.127946
67	0.0883	11.3210	0.138945
68	0.0878	11.3840	0.118337
69	0.0878	11.3940	0.020079
70	0.0863	11.5920	0.124945
71	0.0858	11.6520	0.138794
72	0.0857	11.6750	0.059012
73	0.0850	11.7610	0.076724
74	0.0834	11.9870	0.051825
75	0.0829	12.0620	0.111587
76	0.0823	12.1440	0.051187
77	0.0815	12.2740	0.093259
78	0.0801	12.4900	0.061777
79	0.0794	12.5920	0.095834
80	0.0786	12.7300	0.014225
81	0.0781	12.8050	0.108855
82	0.0768	13.0140	0.033587
83	0.0748	13.3730	0.070412
84	0.0744	13.4440	0.115727
85	0.0739	13.5360	0.039251
86	0.0724	13.8190	0.042520
87	0.0721	13.8720	0.088531

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
88	0.0709	14.0960	0.009648
89	0.0701	14.2570	0.025427
90	0.0698	14.3340	0.109903
91	0.0685	14.5940	0.090730
92	0.0682	14.6620	0.043779
93	0.0681	14.6870	0.092832
94	0.0667	14.9890	0.006000
95	0.0661	15.1380	0.059778
96	0.0659	15.1690	0.042742
97	0.0647	15.4510	0.008695
98	0.0635	15.7510	0.011128
99	0.0631	15.8430	0.107149
100	0.0629	15.8900	0.022674
101	0.0626	15.9790	0.073977
102	0.0621	16.1100	0.108408
103	0.0610	16.3830	0.096048
104	0.0603	16.5870	0.007892
105	0.0594	16.8460	0.004093
106	0.0584	17.1160	0.003212
107	0.0580	17.2490	0.073618
108	0.0566	17.6740	0.000736
109	0.0561	17.8310	0.001930
110	0.0556	17.9910	0.002869
111	0.0541	18.4910	0.000472
112	0.0526	19.0070	0.000186
113	0.0511	19.5650	0.000361
114	0.0508	19.6950	0.001566
115	0.0506	19.7800	0.000447
116	0.0501	19.9480	0.000646
117	0.0468	21.3790	0.001549
118	0.0466	21.4570	0.000219
119	0.0461	21.7130	0.000271
120	0.0452	22.1200	0.000136
121	0.0443	22.5780	0.000071
122	0.0432	23.1640	0.000295
123	0.0429	23.3050	0.001388
124	0.0426	23.4480	0.000276

Continúa en la página siguiente.

Modo	Período (s)	Frecuencia (Hz)	Amortiguamiento por interacción suelo - estructura
125	0.0413	24.2060	0.000151
126	0.0403	24.8010	0.000149
127	0.0400	25.0070	0.000246
128	0.0397	25.1590	0.001053
129	0.0391	25.5770	0.000042
130	0.0388	25.7730	0.000091
131	0.0384	26.0240	0.000102
132	0.0374	26.7540	0.000126
133	0.0373	26.8270	0.000902
134	0.0367	27.2180	0.003249
135	0.0363	27.5250	0.000542
136	0.0360	27.8010	0.002428
137	0.0359	27.8820	0.000627
138	0.0355	28.2070	0.000603
139	0.0352	28.3980	0.000983
140	0.0351	28.5290	0.001245
141	0.0350	28.5540	0.002610
142	0.0348	28.7170	0.001234
143	0.0346	28.8740	0.000749
144	0.0345	28.9800	0.000665
145	0.0343	29.1520	0.001394
146	0.0339	29.4670	0.002850
147	0.0336	29.7440	0.003183
148	0.0335	29.8200	0.004023

Cuadro 4.22: Valores de período, frecuencia y amortiguamiento para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 10\,000$. Resultados de aceleración

En la tabla 4.23 se puede observar toda la información relativa al punto de aceleración máxima.

Máximo valor de aceleración	4.318 m/s^2
Punto	2
Tren	2
Velocidad	240 km/h

Cuadro 4.23: Máxima aceleración para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.30 se puede observar la envolvente de aceleración en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

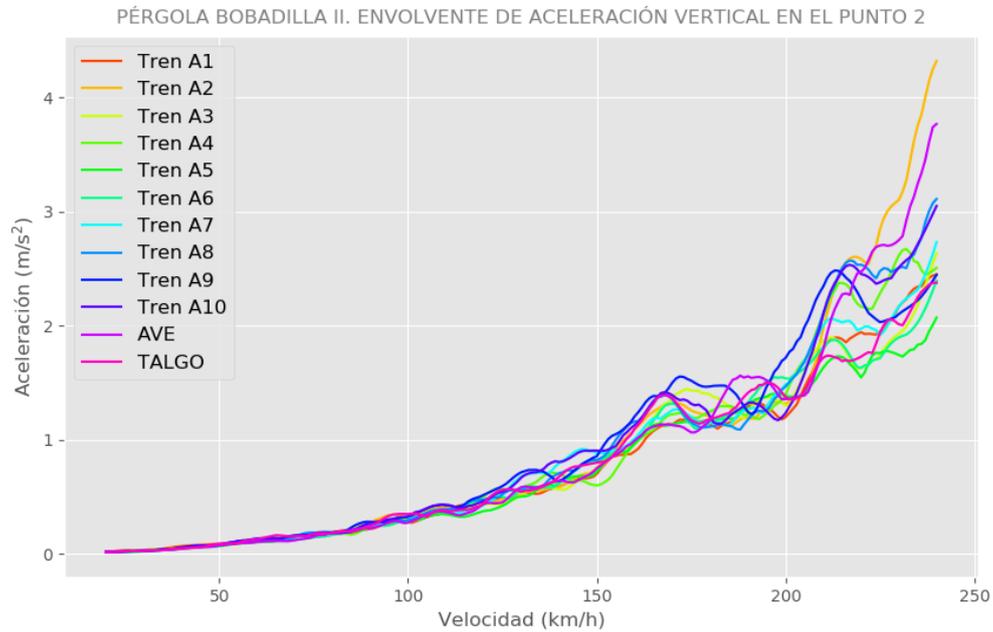


Figura 4.30: Envolvente de aceleración en el punto 2 para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II

$E_p/G_s = 10\,000$. Resultados de desplazamiento

En la tabla 4.24 se puede observar toda la información relativa al punto de desplazamiento máximo.

Máximo valor de desplazamiento	3.173 mm
Punto	11
Tren	10
Velocidad	212 km/h

Cuadro 4.24: Máximo desplazamiento para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II

En la figura 4.31 se puede observar la envolvente de desplazamiento en el punto en el que se alcanza su valor máximo.

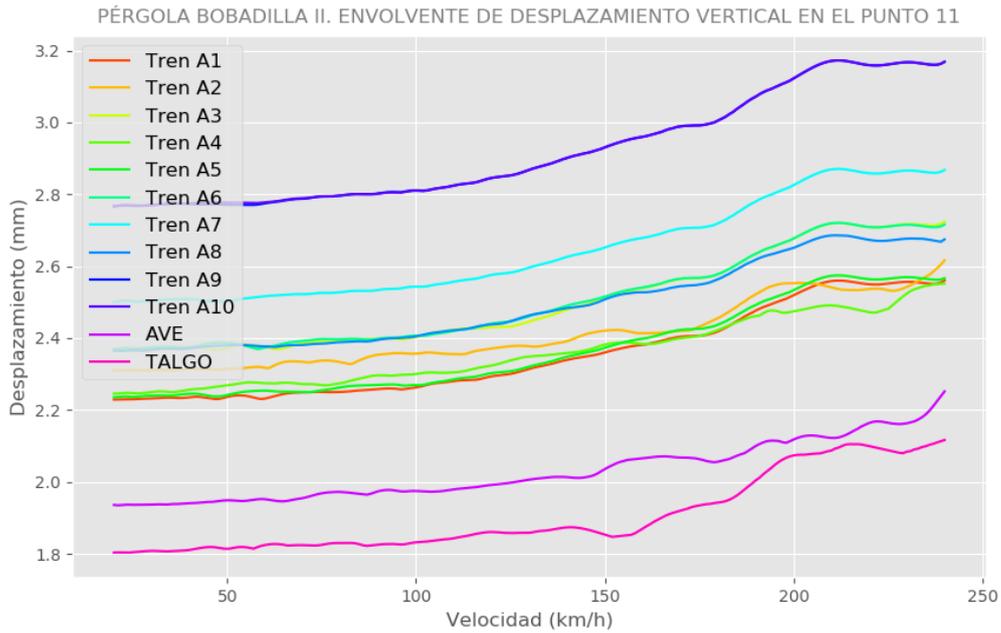


Figura 4.31: Envolvente de desplazamiento en el punto 11 para $E_p/G_s = 10\,000$. Pérgola de Bobadilla II

4.3.3. Resultados de la interacción suelo - estructura

Resultados de aceleración

En la figura 4.32 se puede observar la variación de la aceleración máxima experimentada en la pérgola para cada una de las relaciones E_p/G_s consideradas.

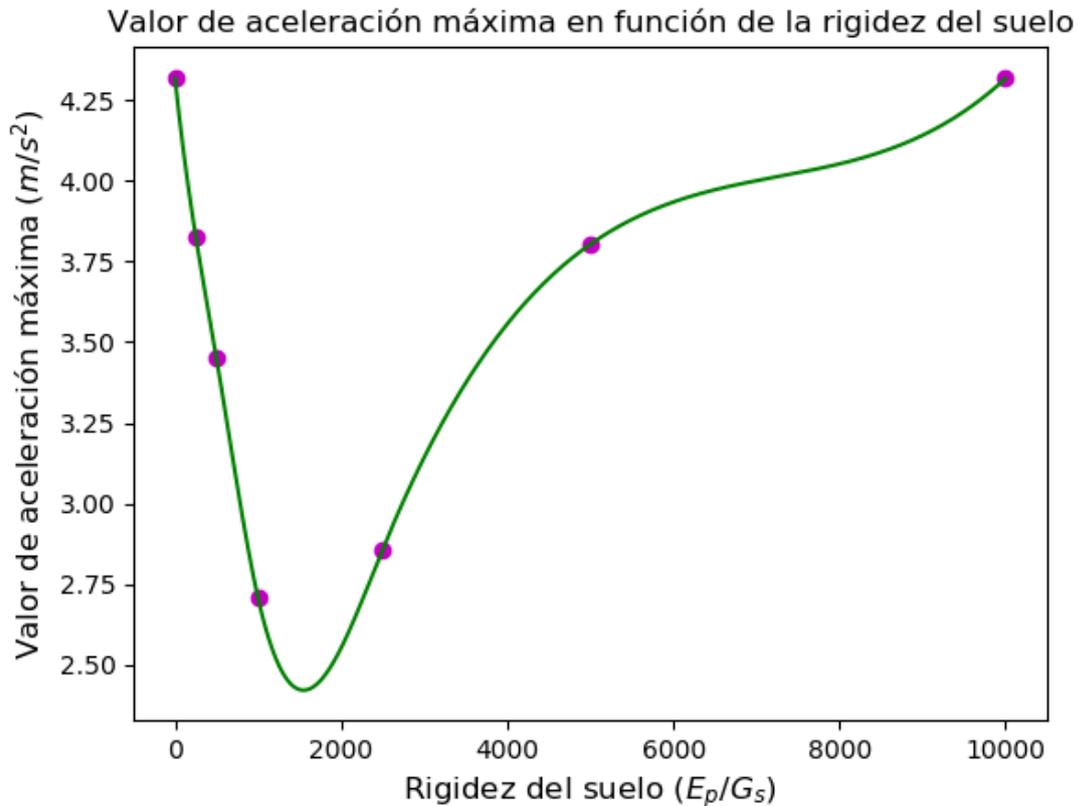


Figura 4.32: Aceleración máxima en función de E_p/G_s . Pérgola de Bobadilla II

Para poder entender los resultados reflejados en la gráfica hay que tener en cuenta lo siguiente:

1. El aumento de E_p/G_s produce una disminución de la rigidez del suelo, lo que hace que las frecuencias de la estructura bajen, haciéndola más flexible. Este hecho aislado produciría un aumento de la aceleración máxima si no se contemplase el amortiguamiento producido por la interacción suelo - estructura.
2. Al ser el suelo menos rígido se producen unas oscilaciones más grandes en la estructura. Se activan los elementos muelle - amortiguador y hace que la disipación por interacción suelo - estructura sea mayor, a pesar de que a medida que disminuye la rigidez del suelo los valores de k_v y c_v son cada vez menores.

La gráfica 4.32 la podemos dividir en tres zonas claramente diferenciadas:

1. Zona entre $E_p/G_s = 0$ y $E_p/G_s = 1500$ El efecto de la disipación suelo estructura es mayor que el efecto de la pérdida de rigidez de la estructura, y a medida que aumenta E_p/G_s la diferencia entre ambos es cada vez mayor. Esto produce una disminución de la aceleración máxima a medida que aumenta E_p/G_s .

2. Zona entre $E_p/G_s = 1\ 500$ y $E_p/G_s = 10\ 000$ El efecto de la disipación suelo estructura es mayor que el efecto de la pérdida de rigidez de la estructura, y a medida que aumenta E_p/G_s la diferencia entre ambos es cada vez menor. Esto produce un aumento de la aceleración máxima a medida que aumenta E_p/G_s , pero siempre con un valor menor al de la estructura modelada con terreno infinitamente rígido.
3. Zona superior a $E_p/G_s = 10\ 000$ El efecto de la disipación suelo - estructura y el efecto de la pérdida de rigidez de la estructura son prácticamente equivalentes, lo que hace que la aceleración máxima tenga aproximadamente el mismo valor que en la estructura modelada con terreno infinitamente rígido.

Resultados de desplazamiento

En la figura 4.33 se puede observar la variación de la aceleración máxima experimentada en la pérgola para cada una de las relaciones E_p/G_s consideradas.

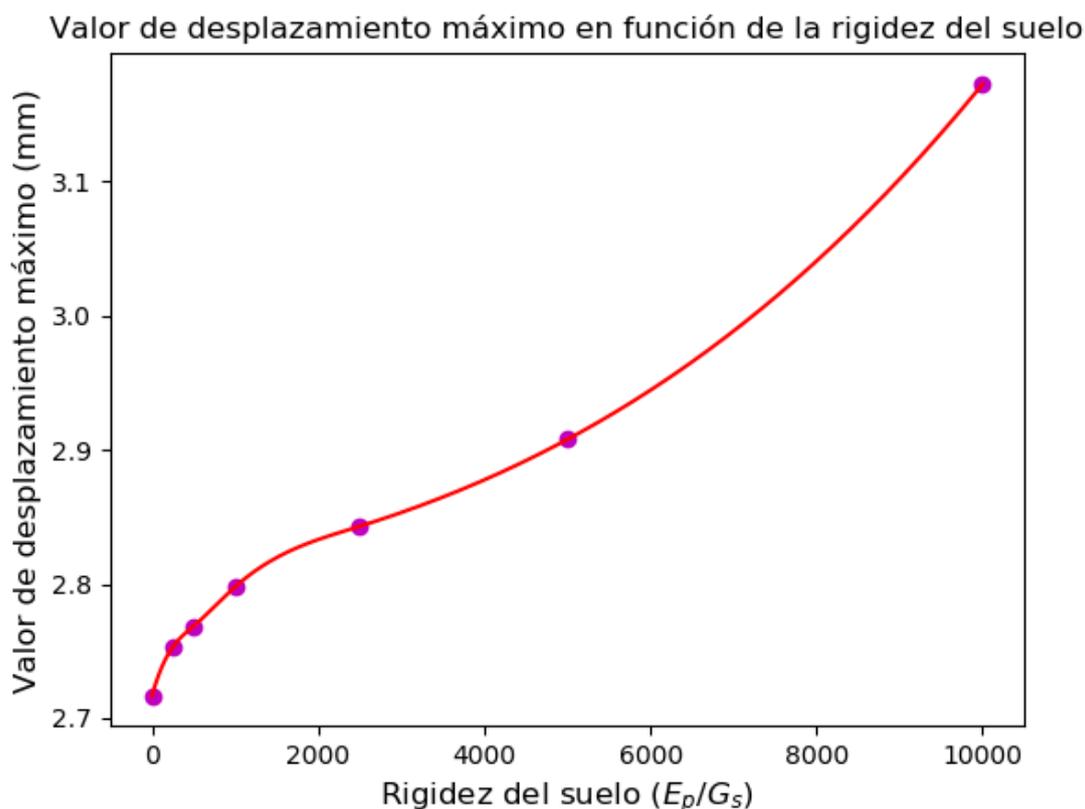


Figura 4.33: Desplazamiento máxima en función de E_p/G_s . Pérgola de Bobadilla II

En este caso, al convertirse la pérgola en una estructura más flexible se producen mayores oscilaciones, que hacen que aumente el valor de desplazamiento máximo experimentado bajo el paso de los trenes seleccionados.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y aportaciones

A continuación se describen las conclusiones obtenidas de la realización del presente documento:

1. El método semianalítico para resolver el problema de paso de cargas móviles presenta una serie de ventajas significativas con respecto a los métodos de integración por incrementos paso a paso, las cuales se sintetizan en los siguientes puntos:
 - Importante disminución del tiempo de cálculo.
 - Menor acumulación de errores por su cálculo de manera exacta en la variable temporal.
 - Requerimiento de intervalos de tiempo no tan exigentes como los métodos paso a paso.
 - Obtención de las respuestas dinámicas en los puntos de posproceso seleccionados por el usuario.
 - Permite el empleo de intervalos de velocidad más pequeños que posibiliten la obtención de gráficas de respuesta de mayor precisión y calidad.
2. El modelizado de las pérgolas mediante la inclusión de la cimentación lleva acarreada una disminución de la frecuencia fundamental de la estructura.
3. La tasa de amortiguamiento geométrico asociado a cada uno de los modos de vibración depende fuertemente de la flexibilidad del suelo. A medida que el terreno se convierte en un elemento más flexible, la tasa de amortiguamiento modal por propagación de ondas a lo largo del mismo también aumenta, a pesar de que los valores de rigidez y amortiguamiento de los pilotes disminuyen.
4. El valor máximo de aceleración obtenido tras el paso de las cargas sobre la pérgola varía con la rigidez del terreno. Se produce un descenso del mismo hasta un cierto valor de rigidez del terreno y a continuación un ascenso hasta el valor inicial, de forma que un terreno infinitamente flexible presenta aproximadamente los mismos valores de aceleración que uno infinitamente rígido.
5. Mediante el presente trabajo se muestra una metodología sencilla y de fácil inclusión en el modelo de cálculo de una pérgola cimentada mediante pilotes por cualquier proyectista. La utilización de un modelo que incluya la interacción entre el suelo y la estructura permite obtener unos valores máximos de aceleración menores que si no se

utilizara, lo que acarrea un abaratamiento de la estructura si es de nueva construcción, así como un aumento de la velocidad límite de paso si la pérgola estudiada ya está en servicio.

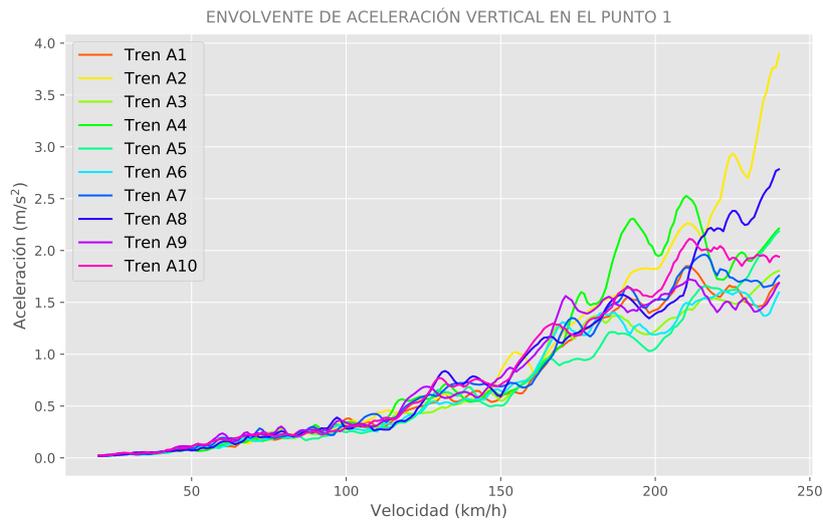
APÉNDICE A

Análisis dinámico de la pérgola de Bobadilla II

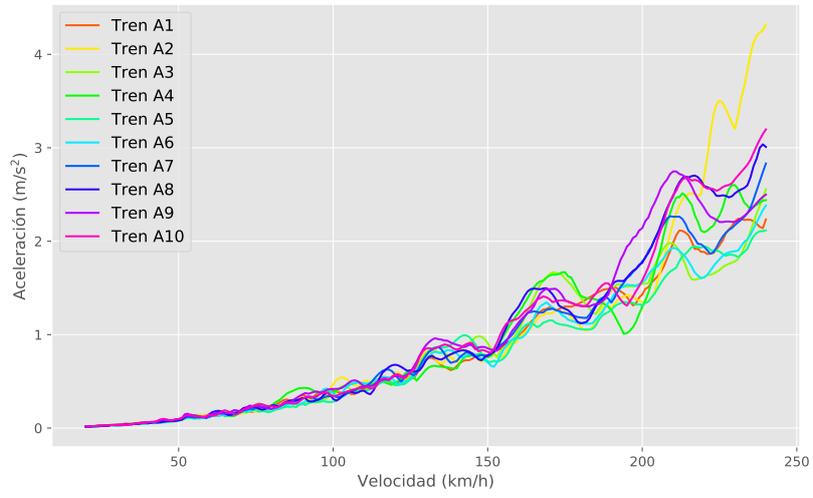
En este apéndice se van a exponer los resultados dinámicos en todos los puntos de post-proceso de aceleración (figura 4.8) y desplazamiento (figura 4.9).

A.1. Resultado para estructura con apoyos

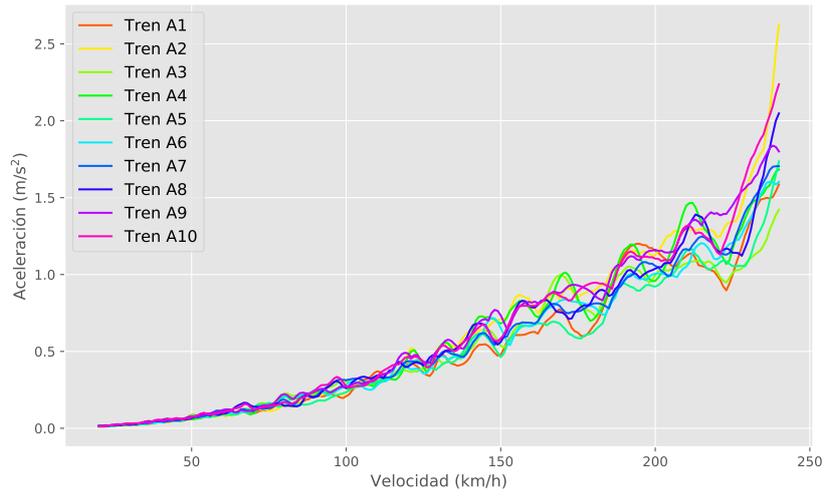
A.1.1. Resultados de aceleración

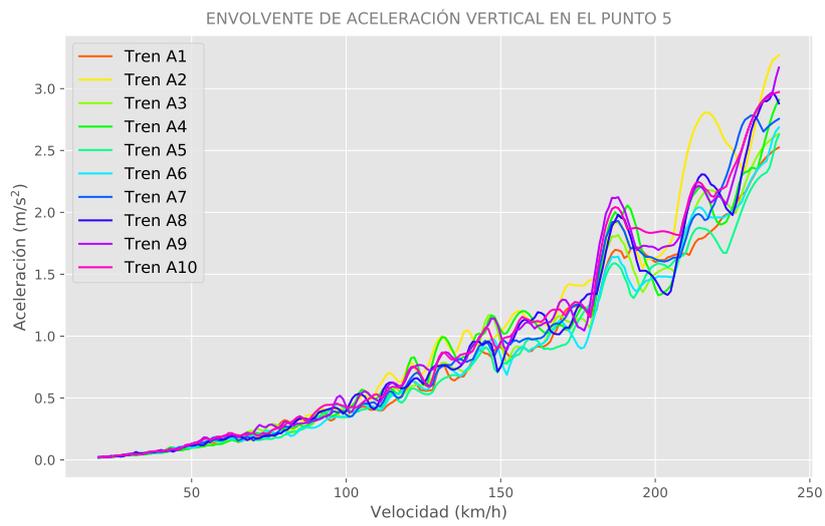
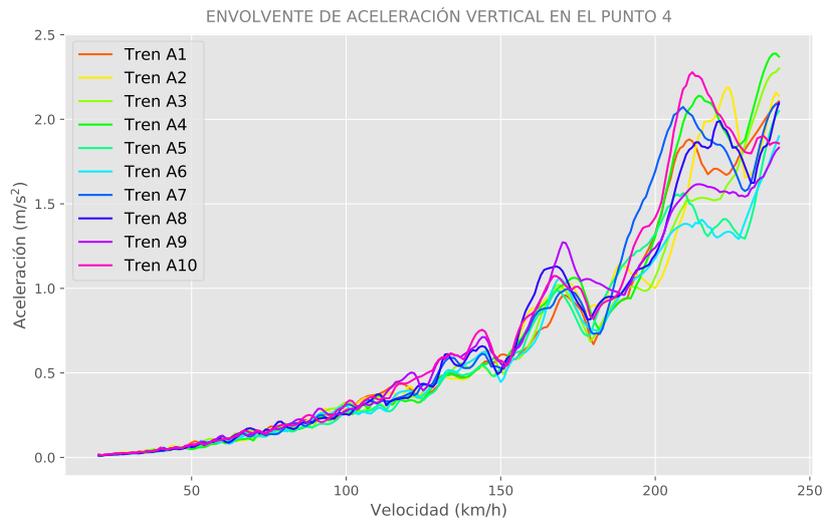


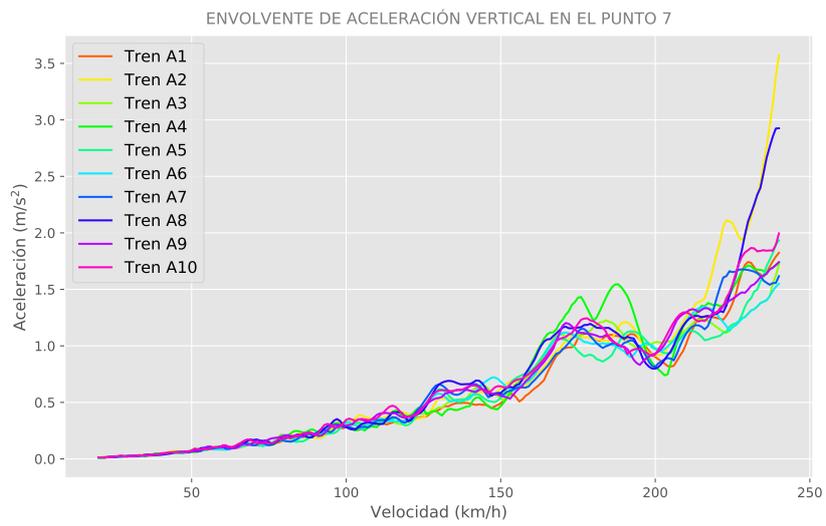
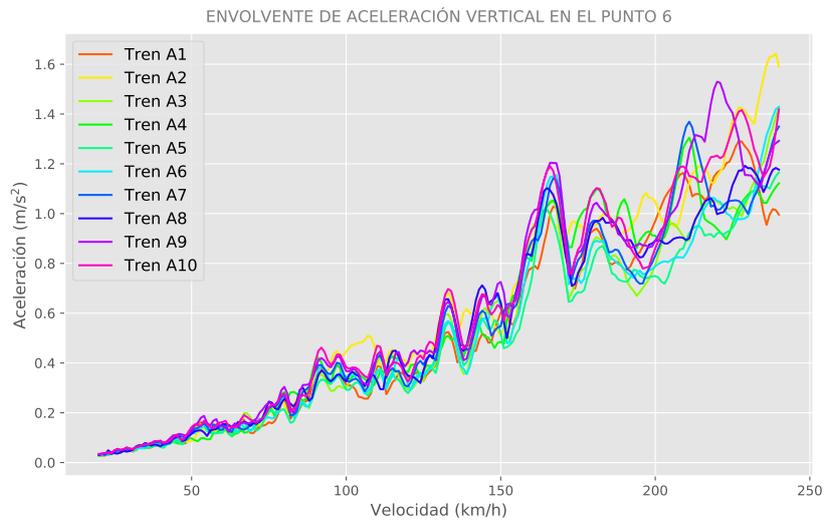
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 2

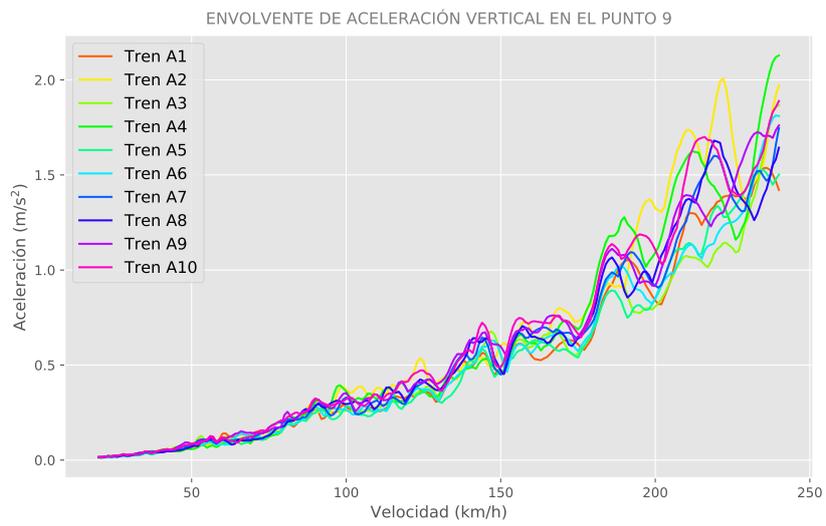
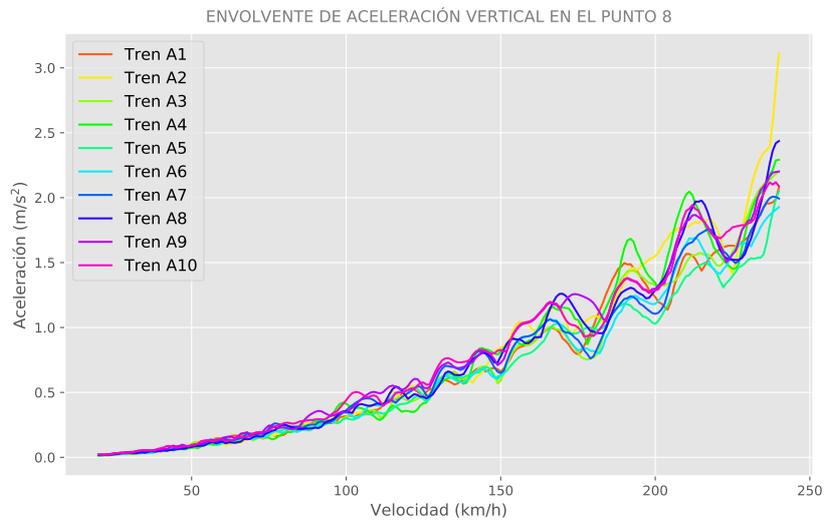


ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 3

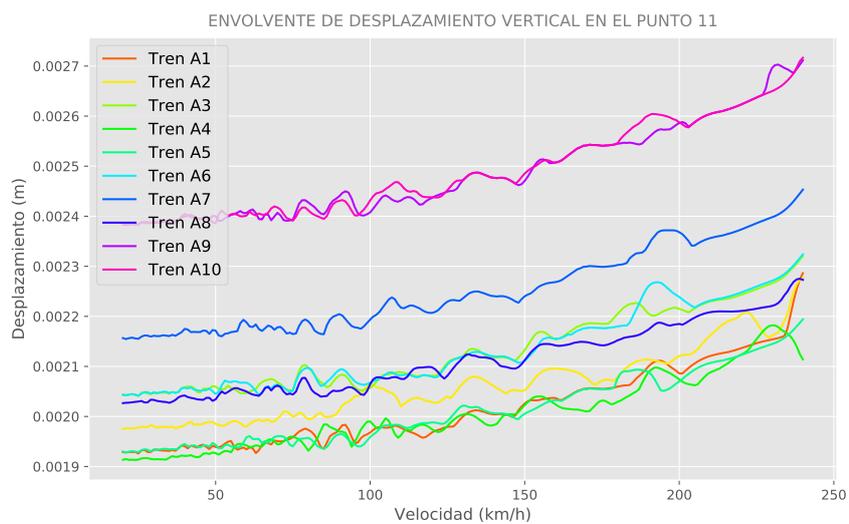
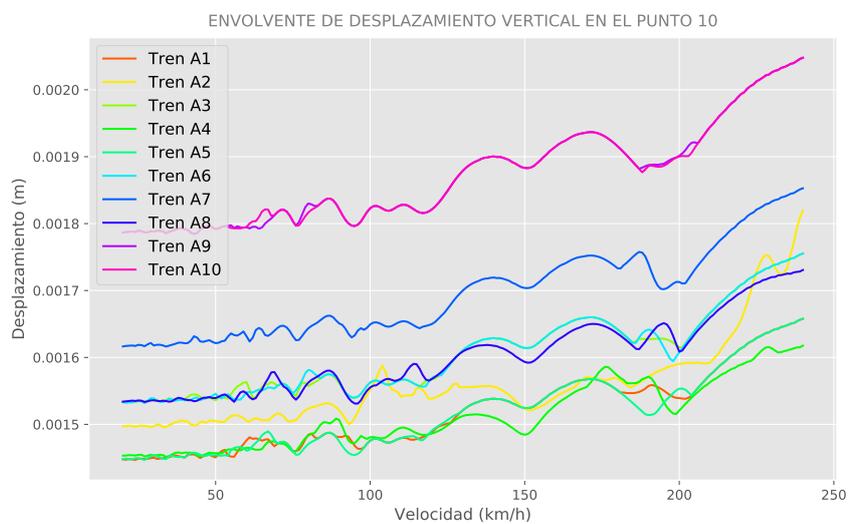


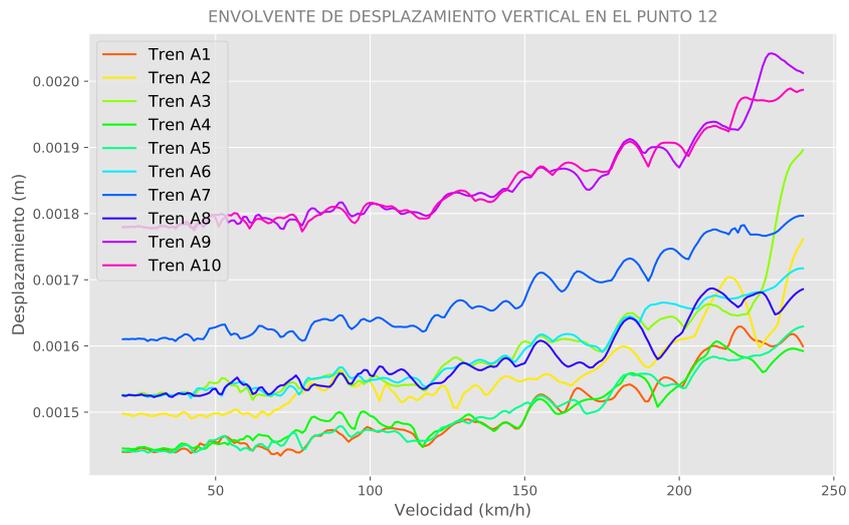






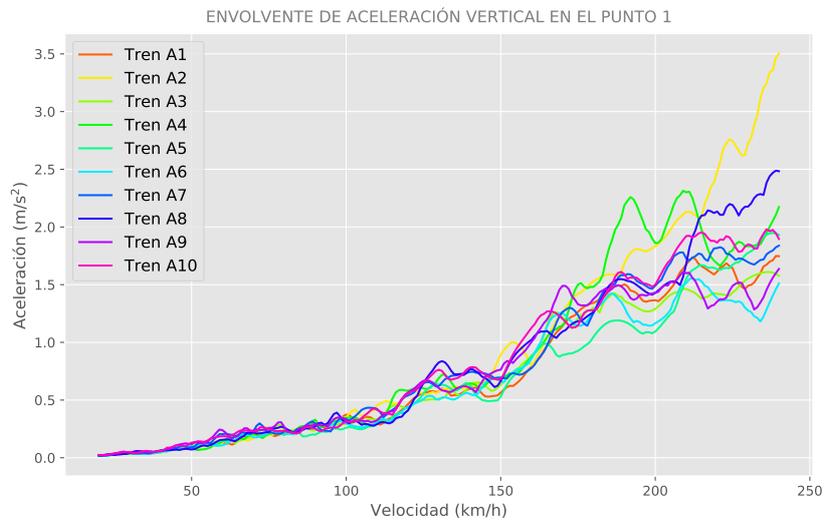
A.1.2. Resultados de desplazamiento

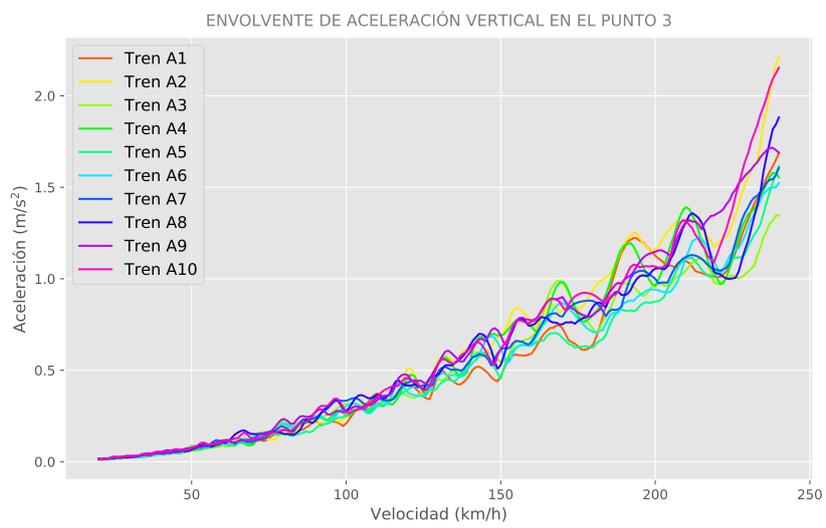
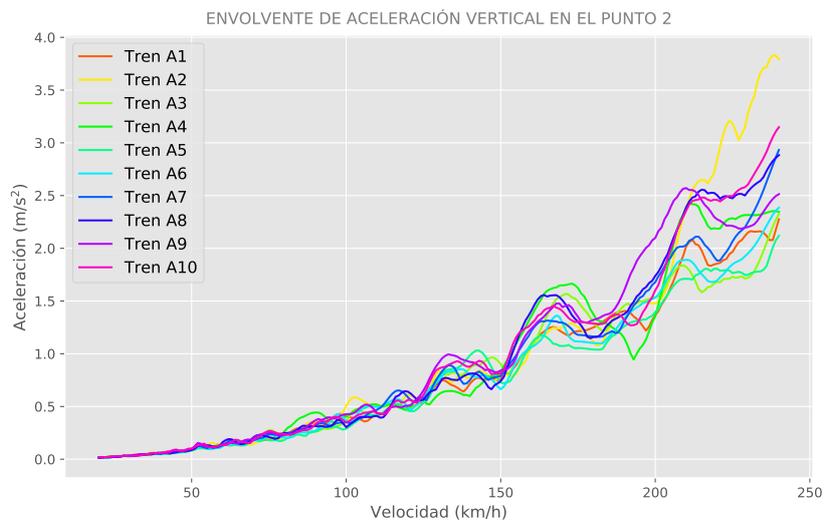


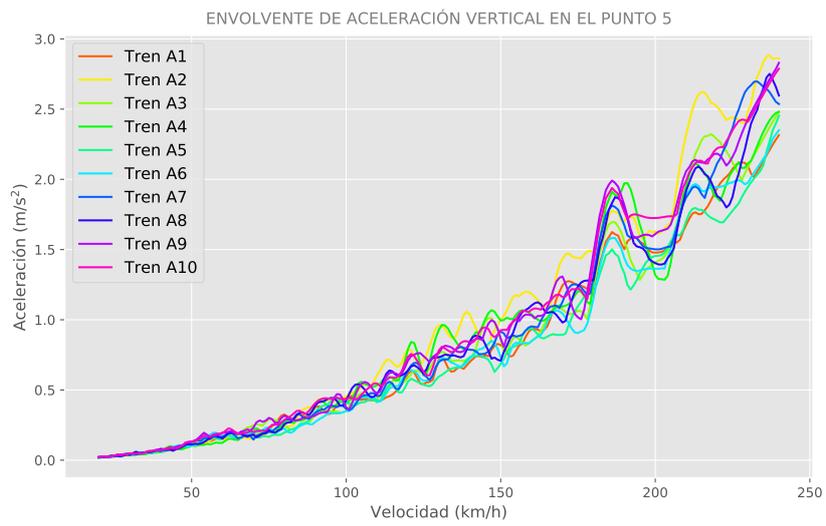
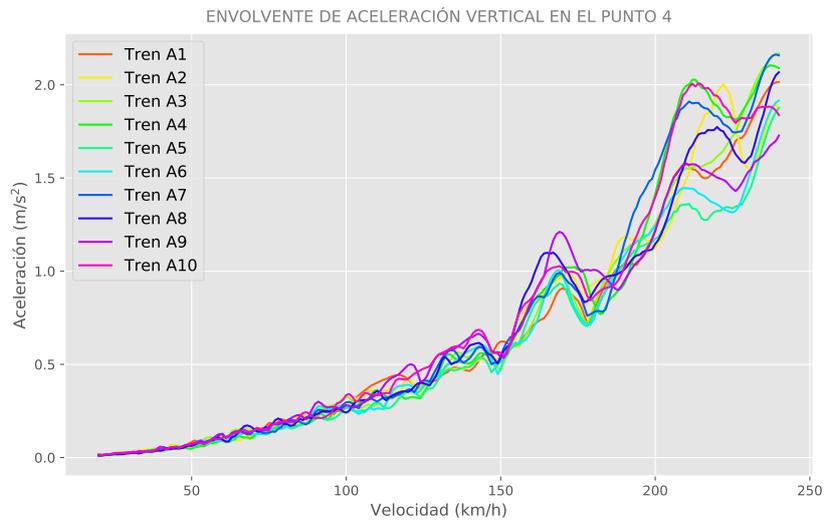


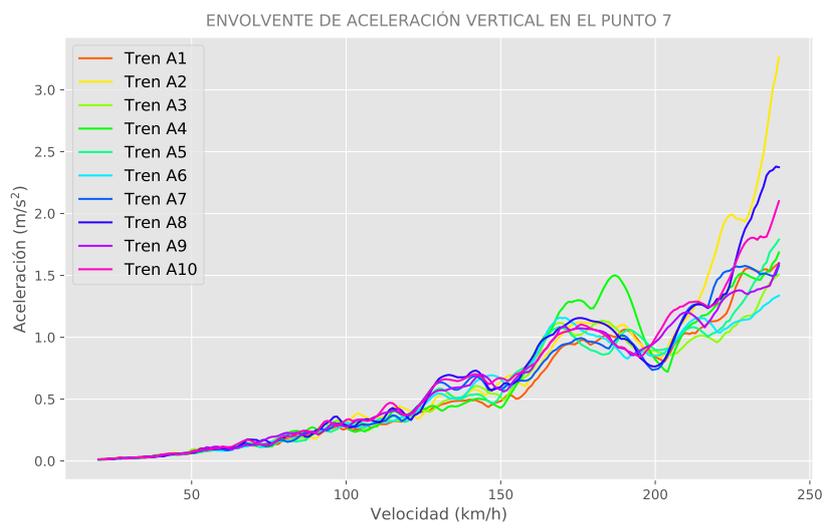
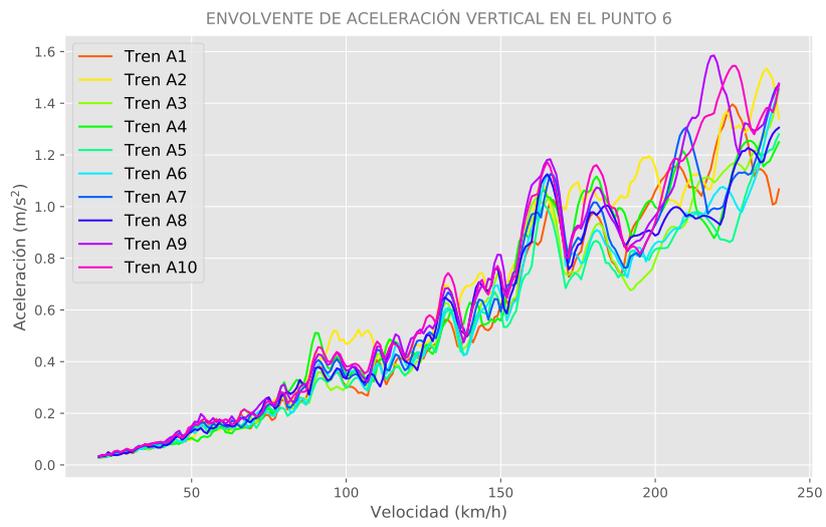
A.2. Resultados para $E_p/G_s = 250$

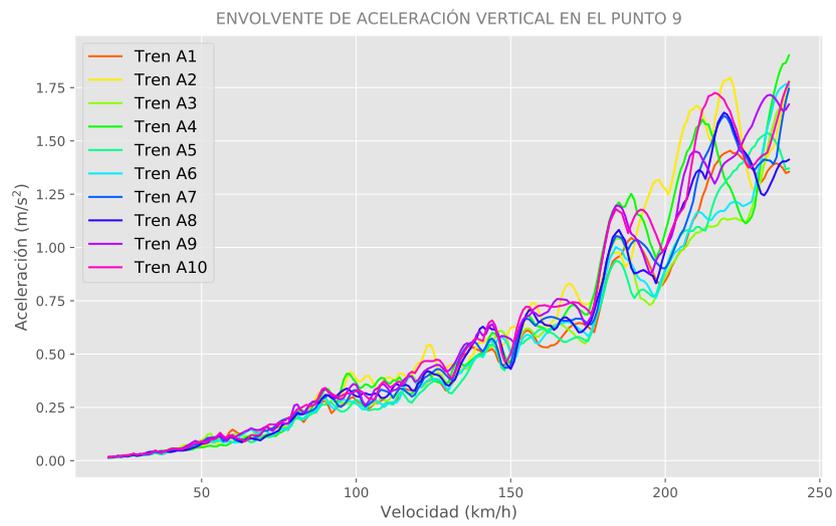
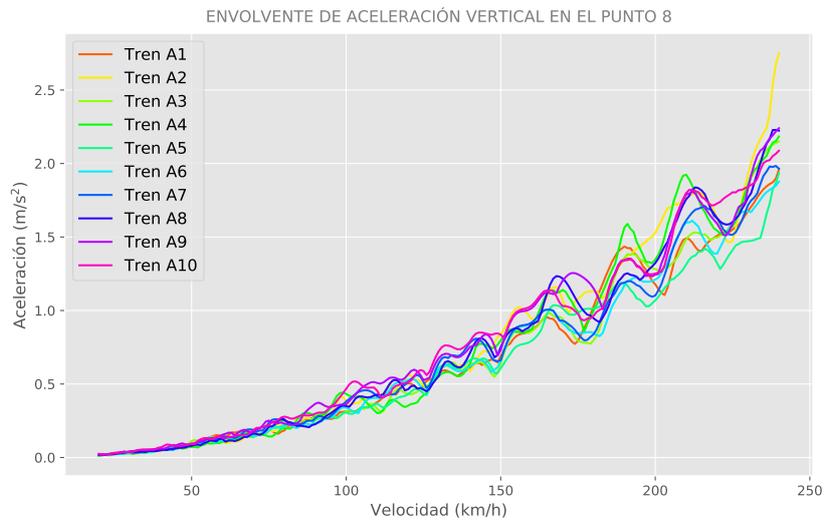
A.2.1. Resultados de aceleración



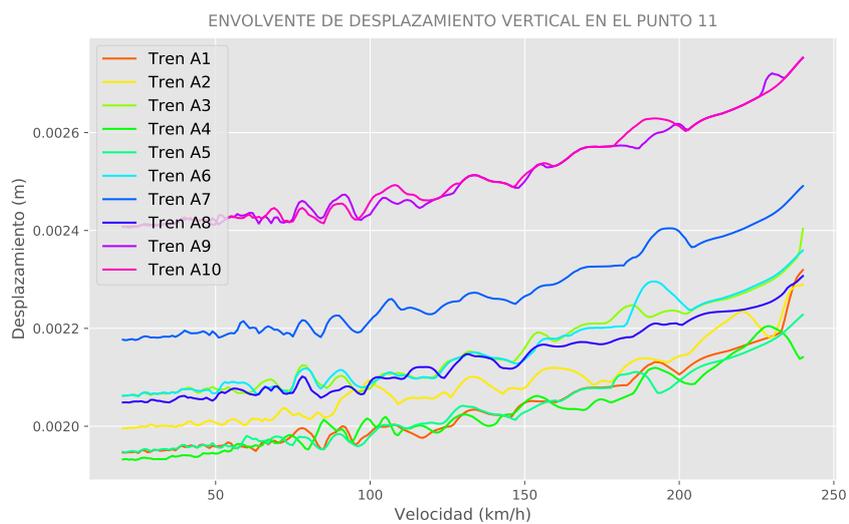
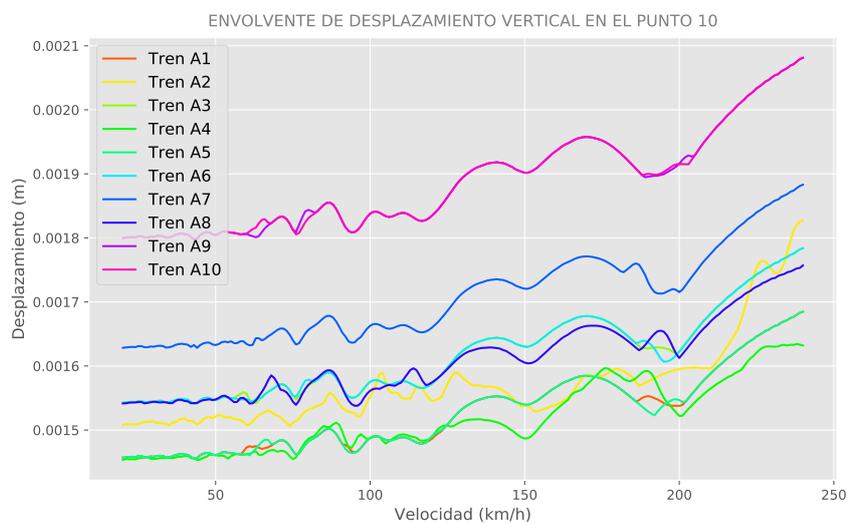


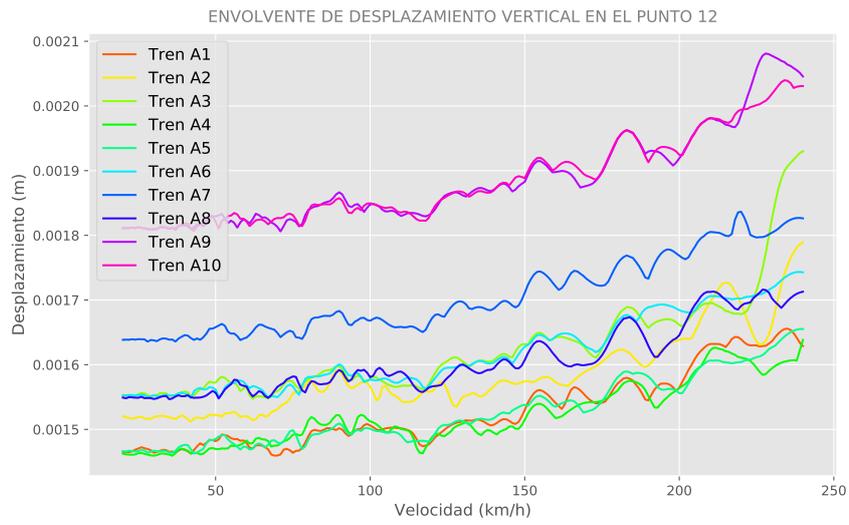






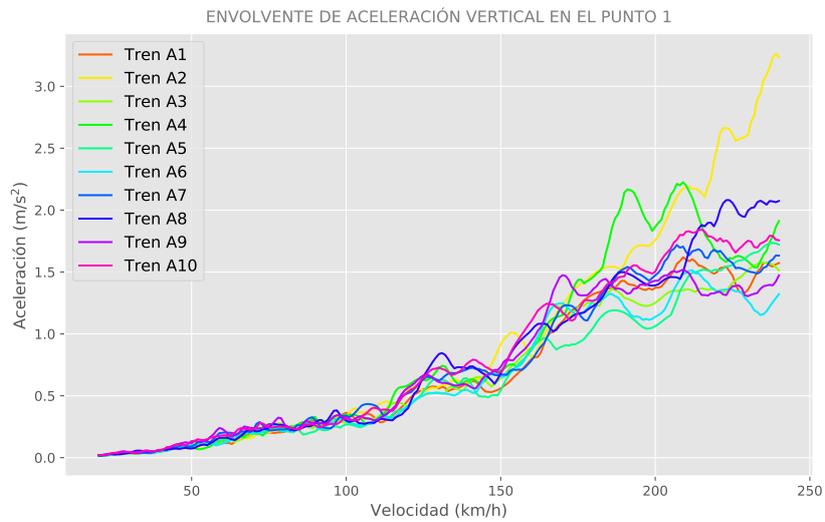
A.2.2. Resultados de desplazamiento

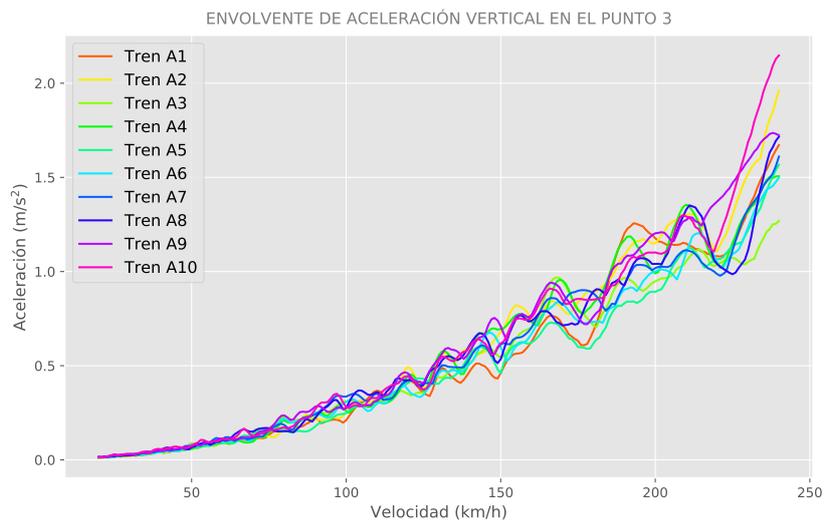
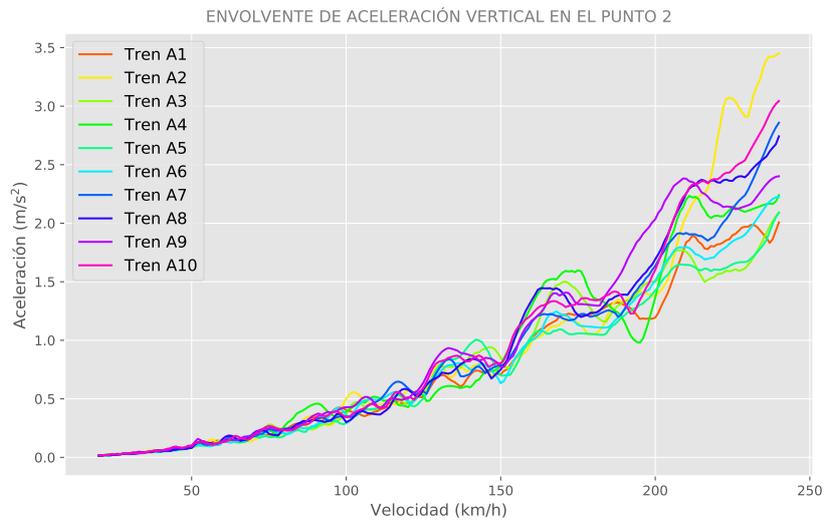


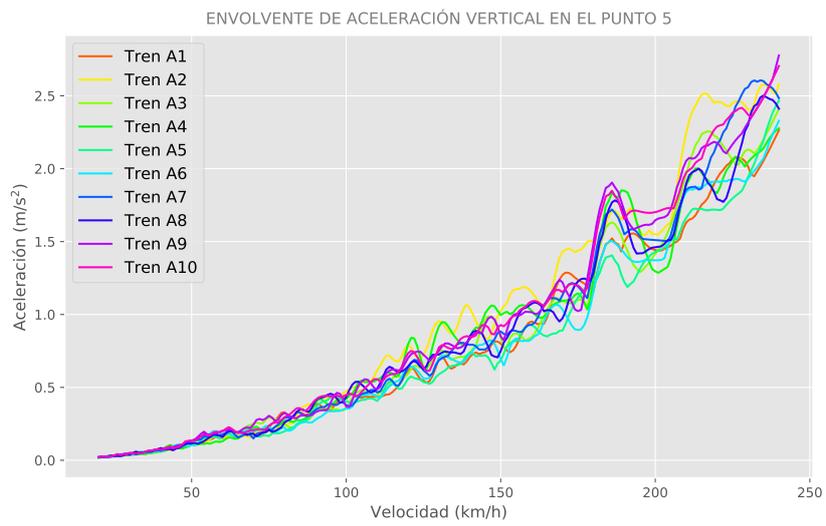
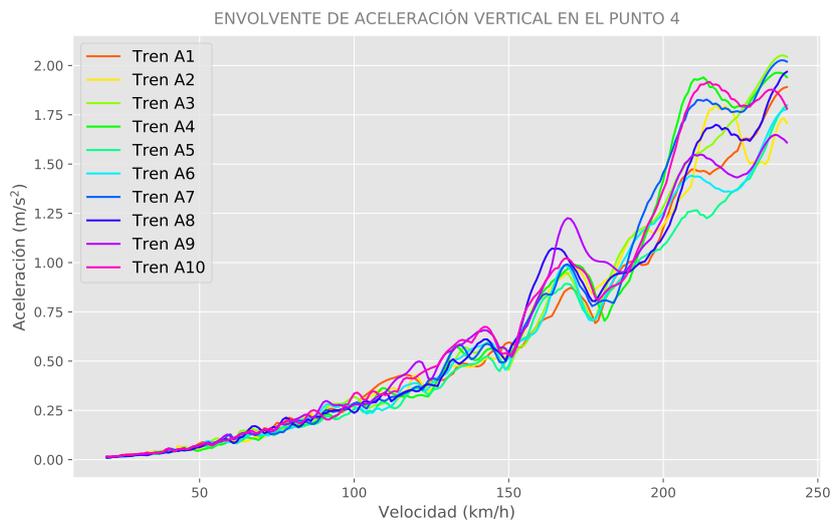


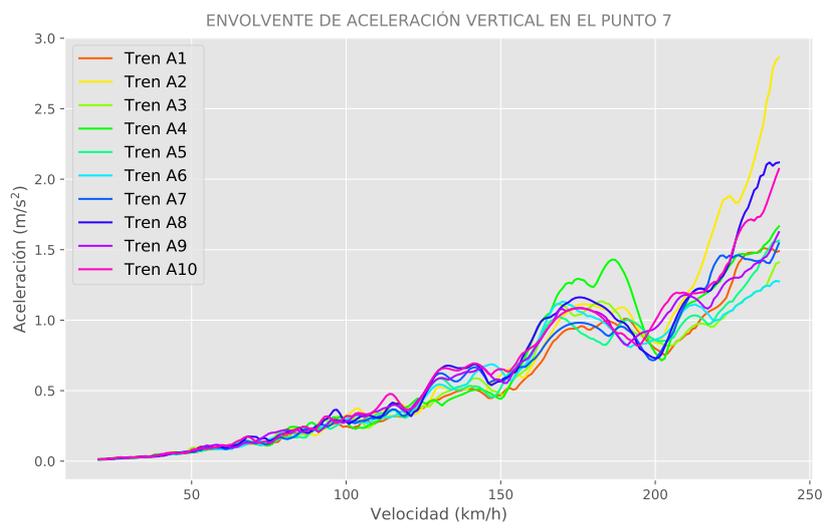
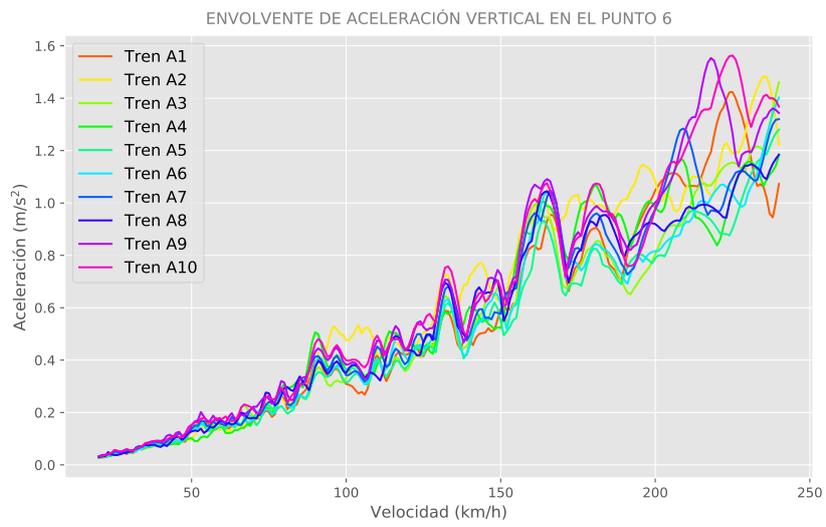
A.3. Resultados para $E_p/G_s = 500$

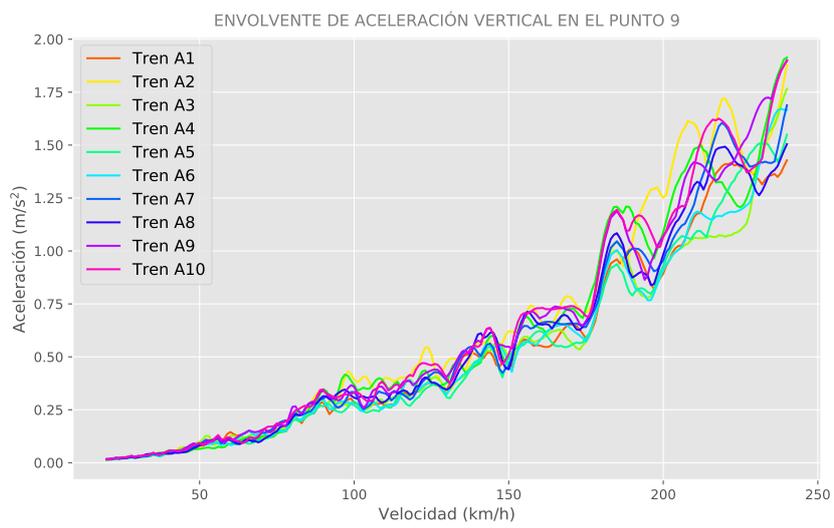
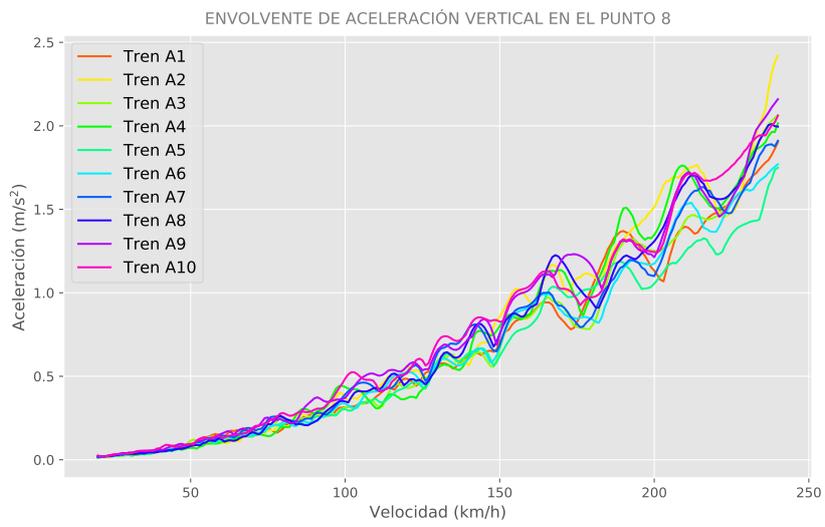
A.3.1. Resultados de aceleración



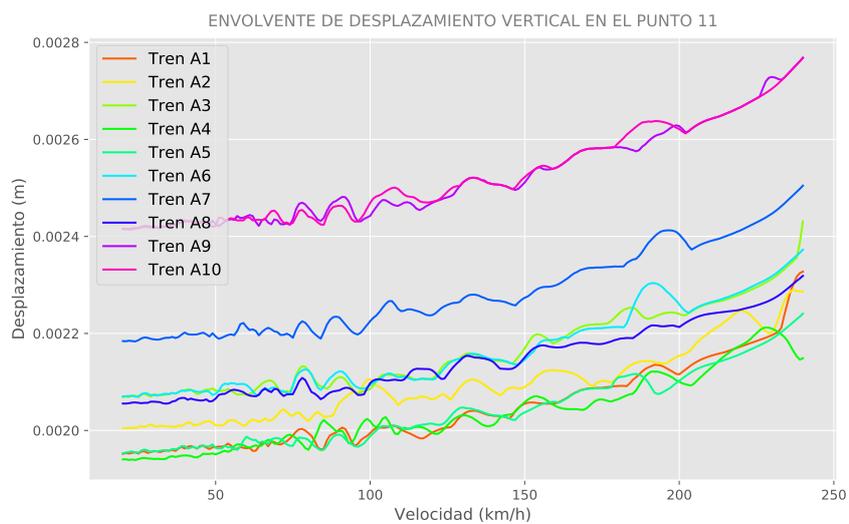
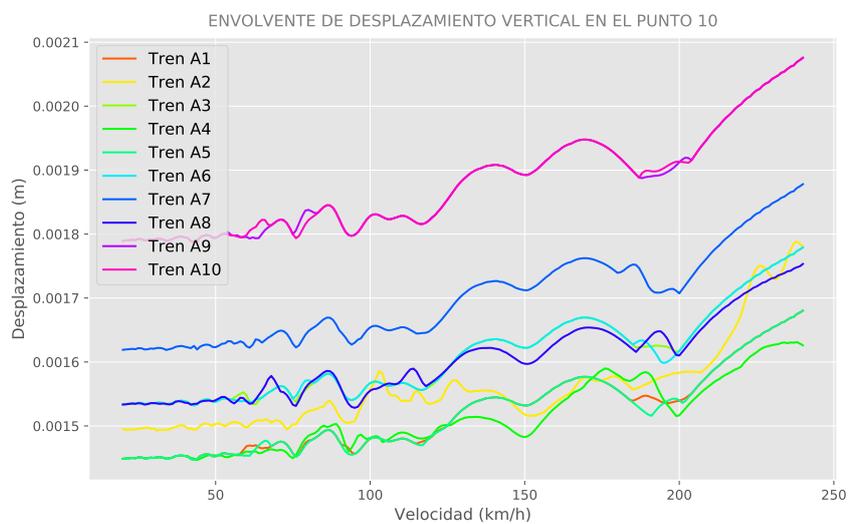


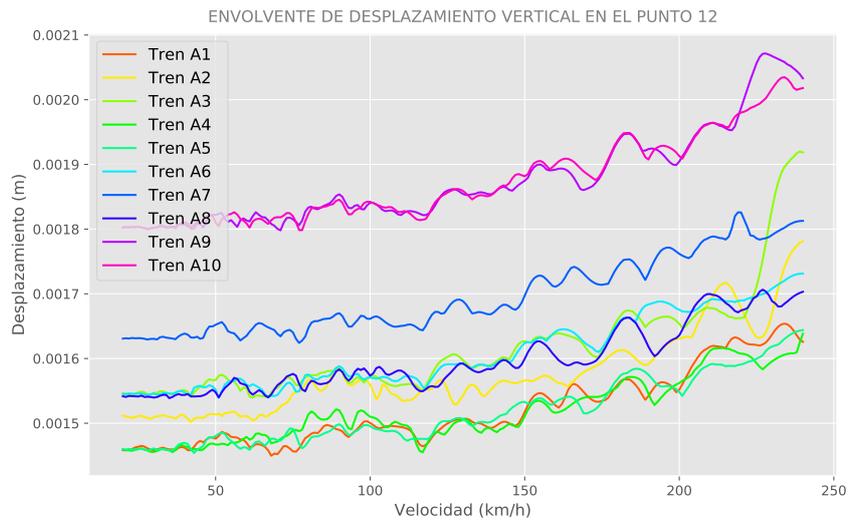






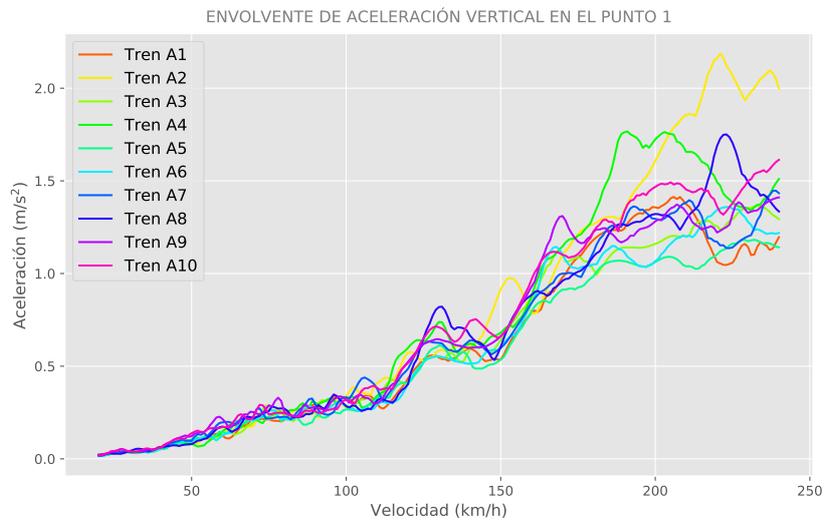
A.3.2. Resultados de desplazamiento

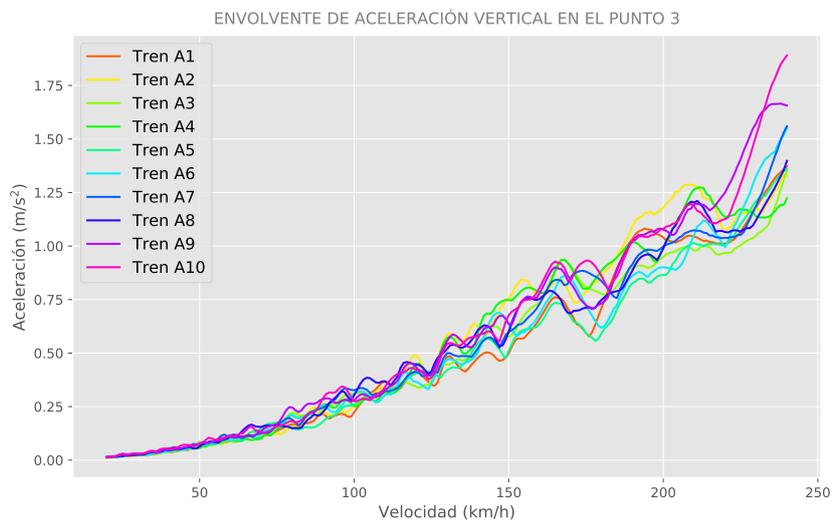
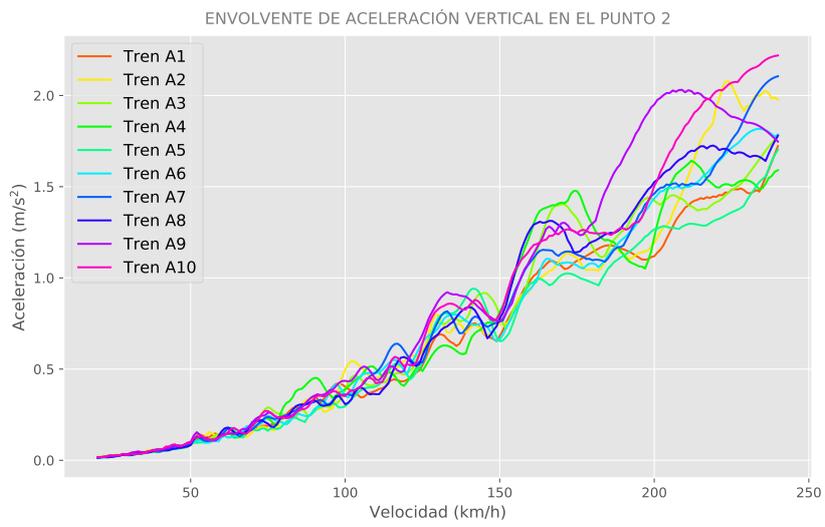


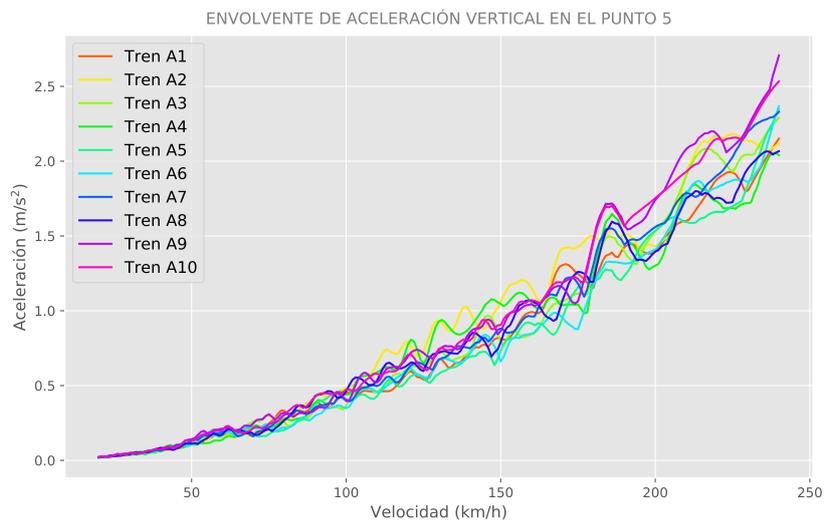
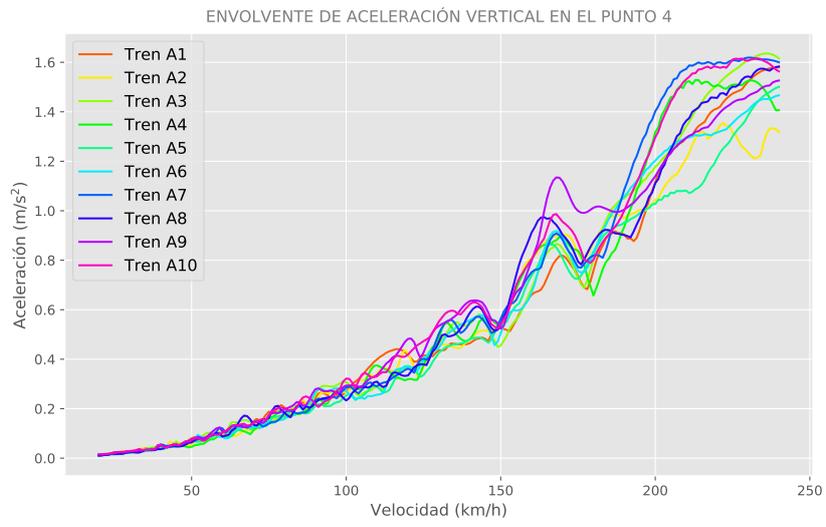


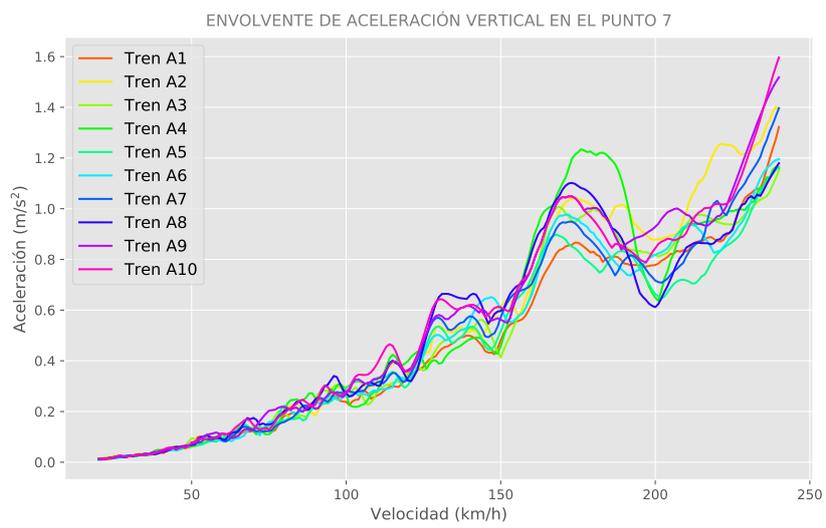
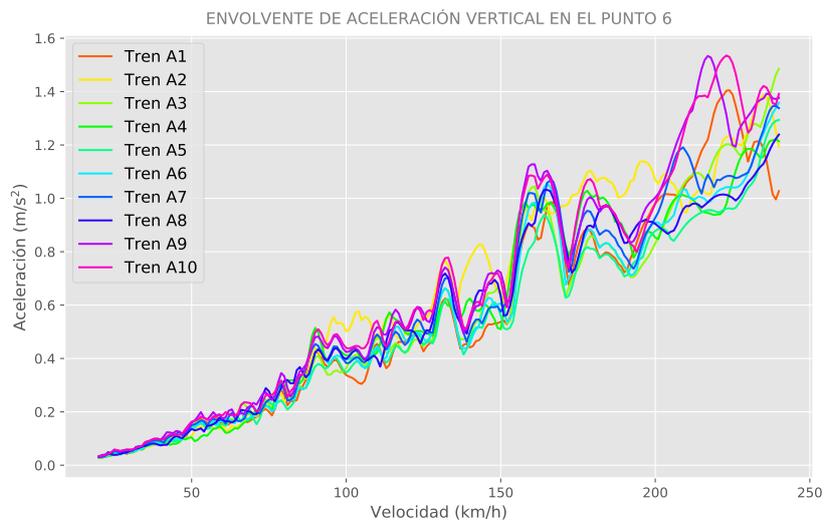
A.4. Resultados para $E_p/G_s = 1\ 000$

A.4.1. Resultados de aceleración

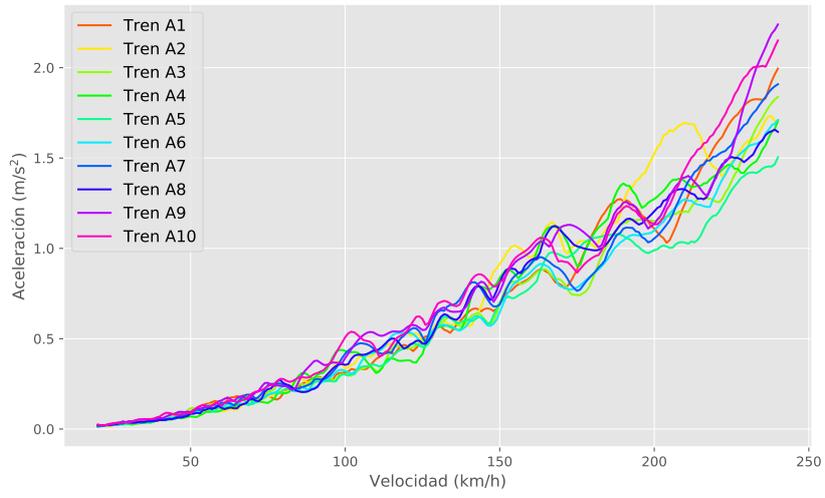




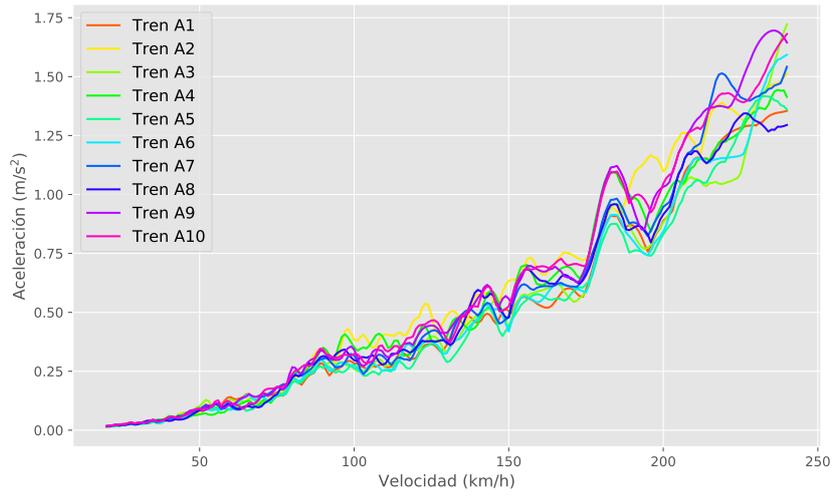




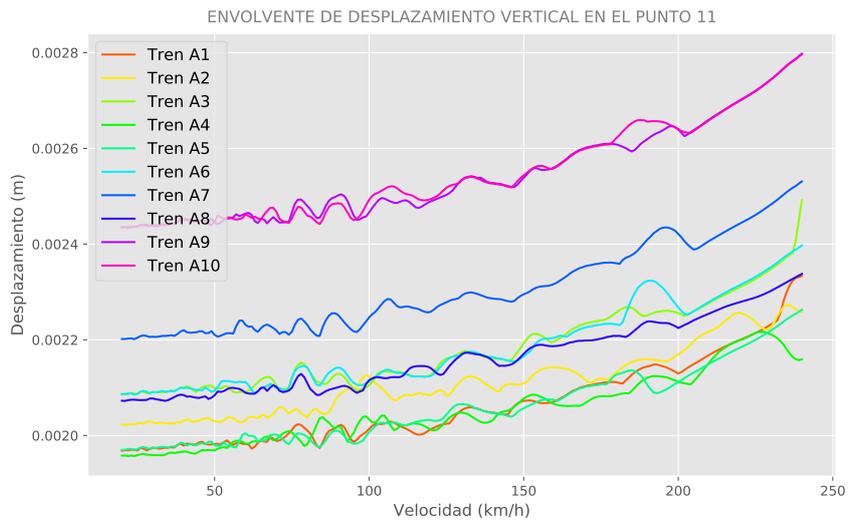
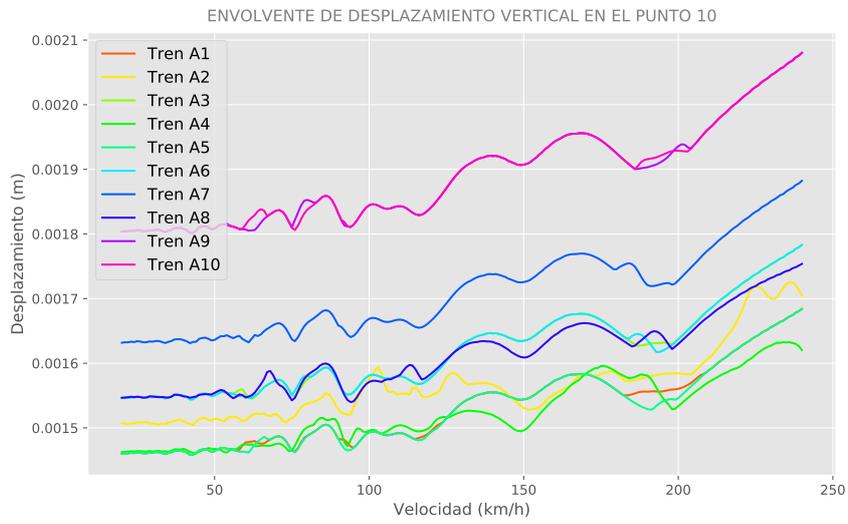
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 8

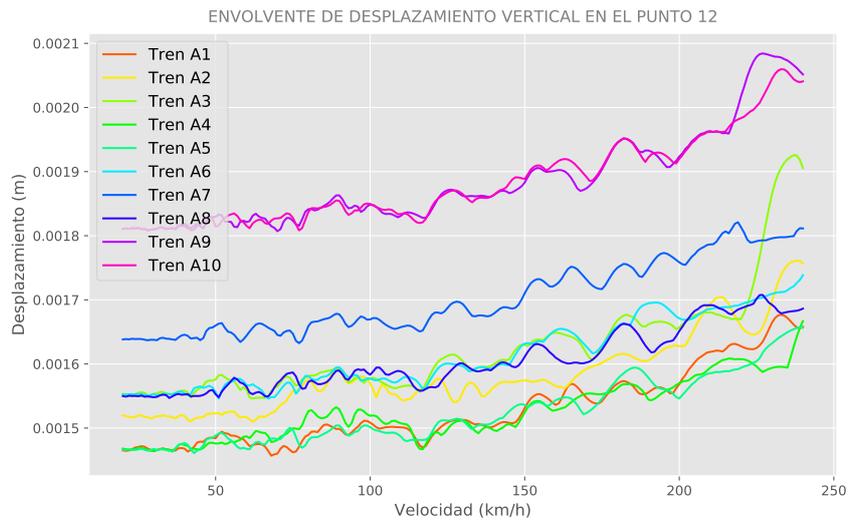


ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 9



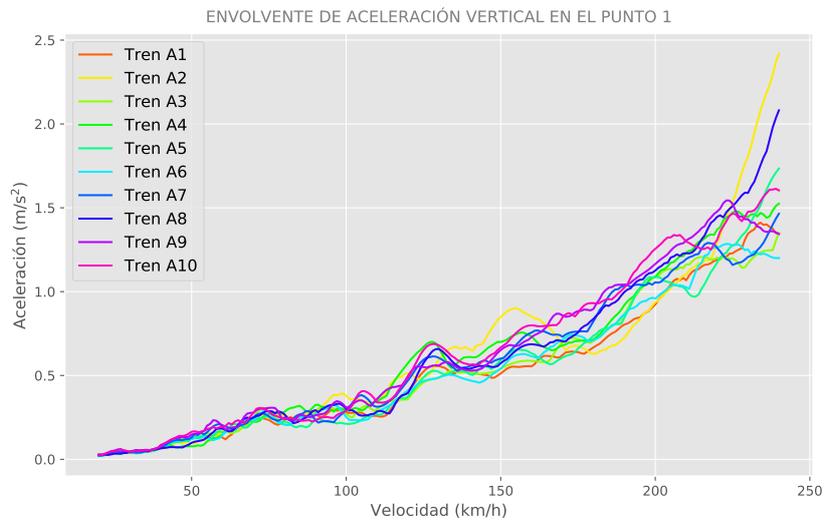
A.4.2. Resultados de desplazamiento



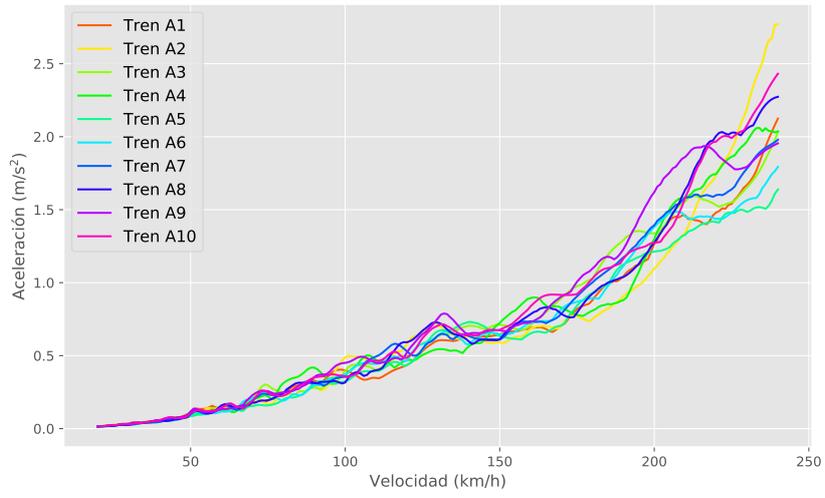


A.5. Resultados para $E_p/G_s = 2500$

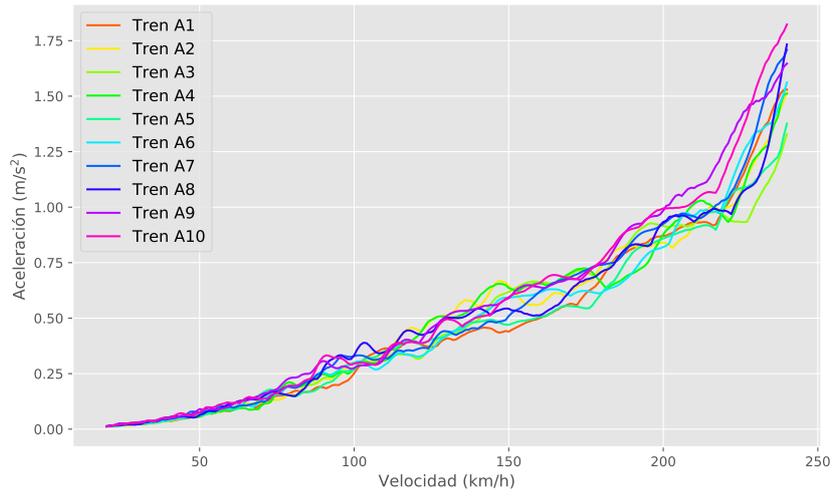
A.5.1. Resultados de aceleración

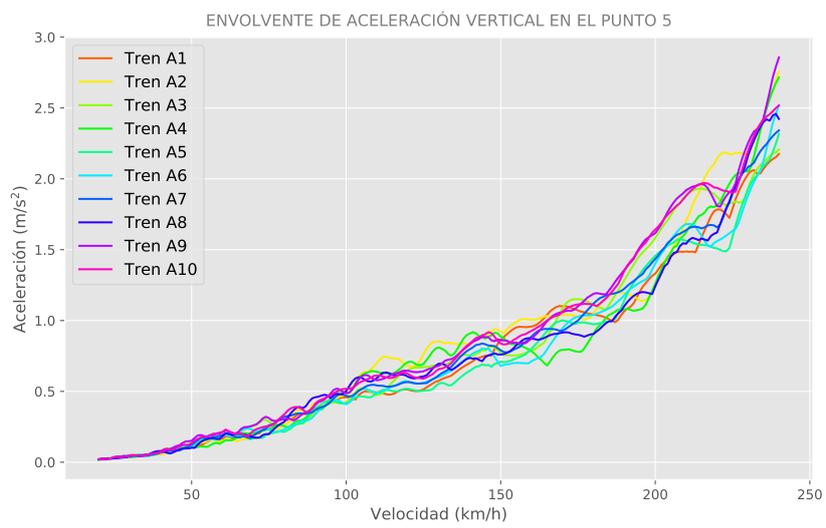
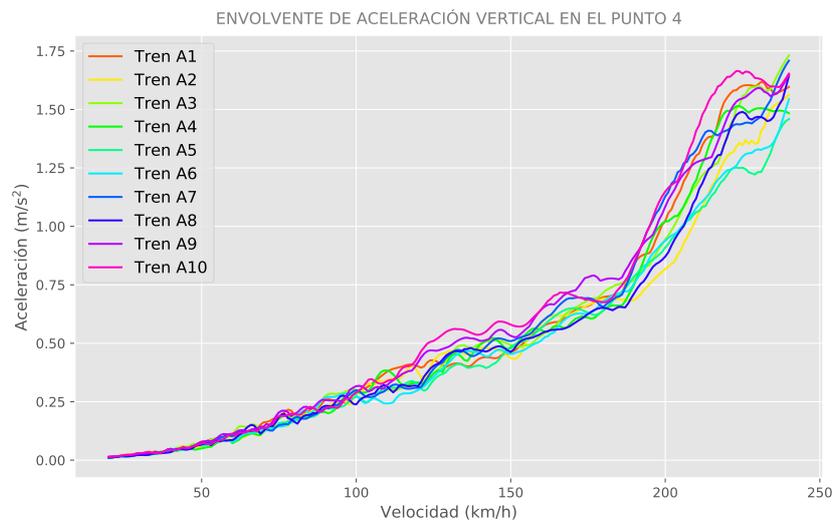


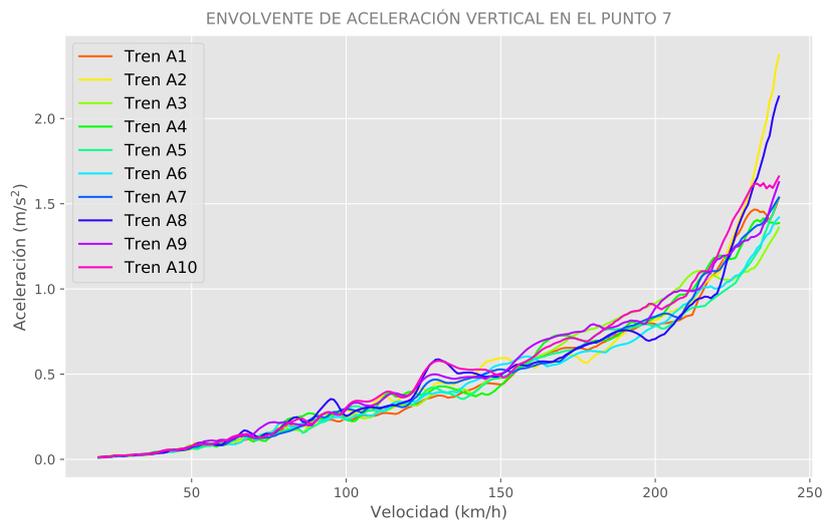
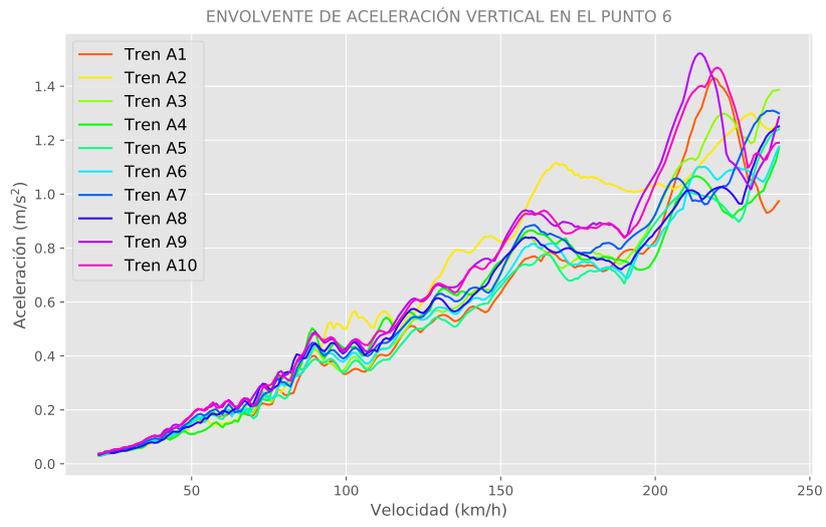
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 2

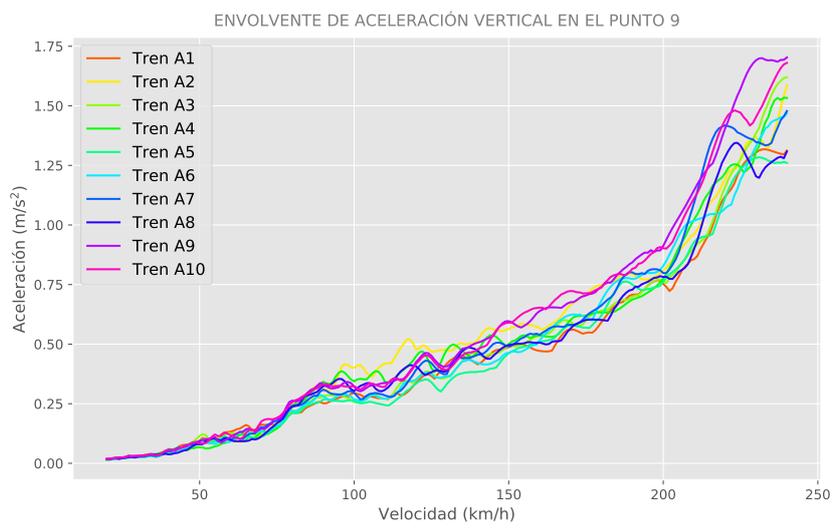
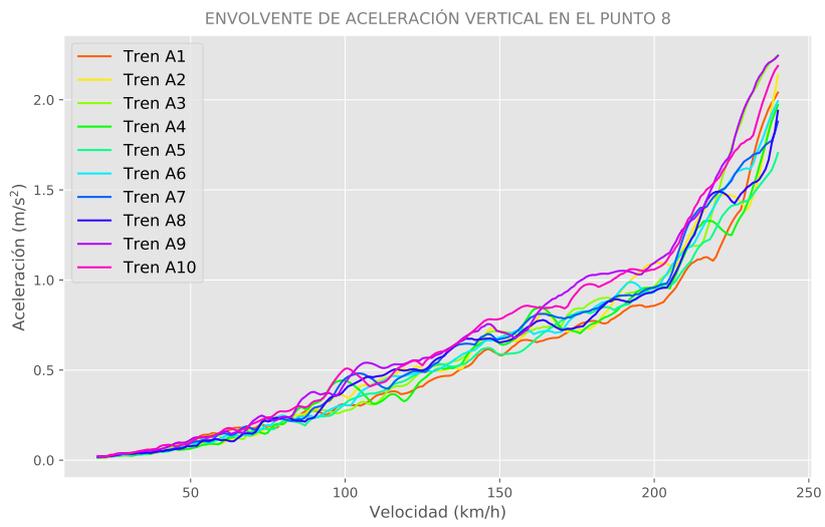


ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 3

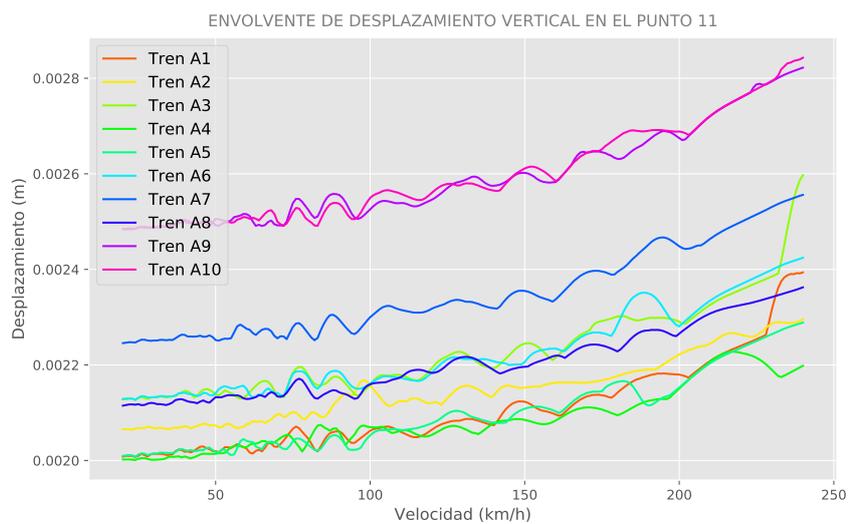
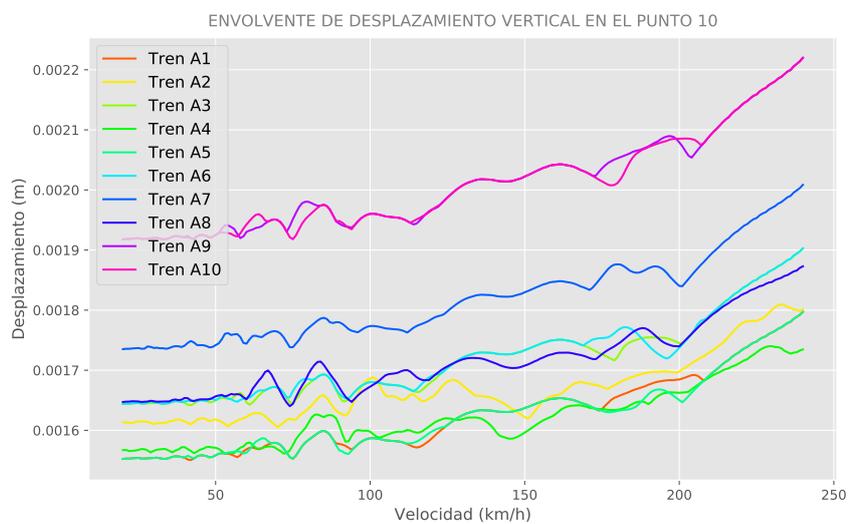


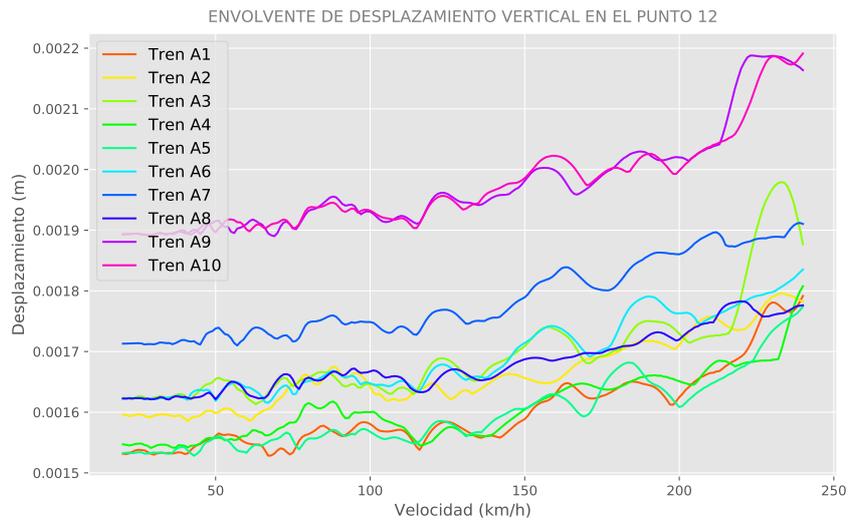






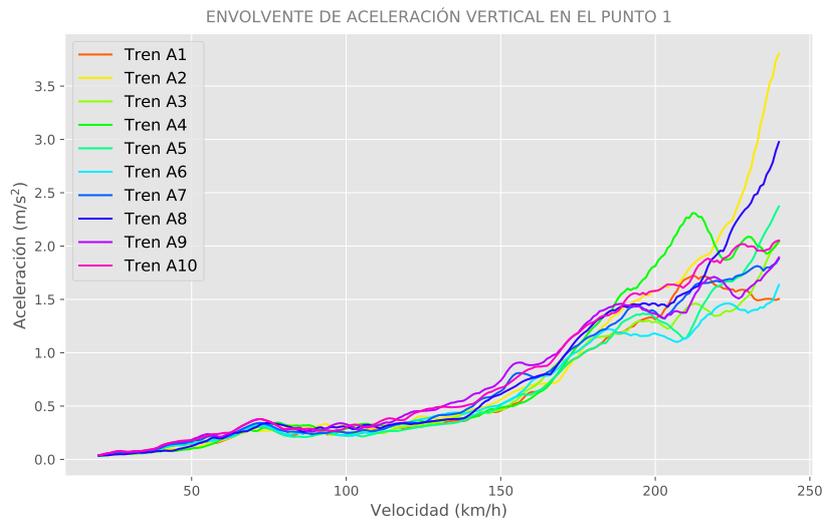
A.5.2. Resultados de desplazamiento

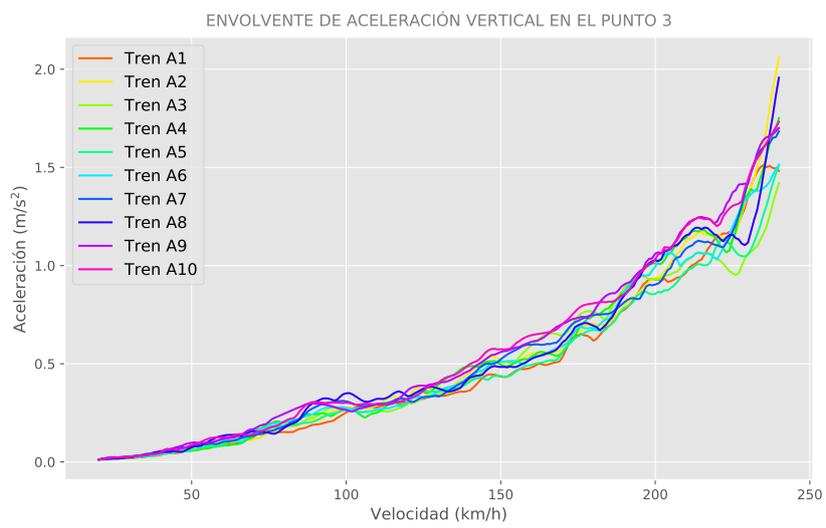
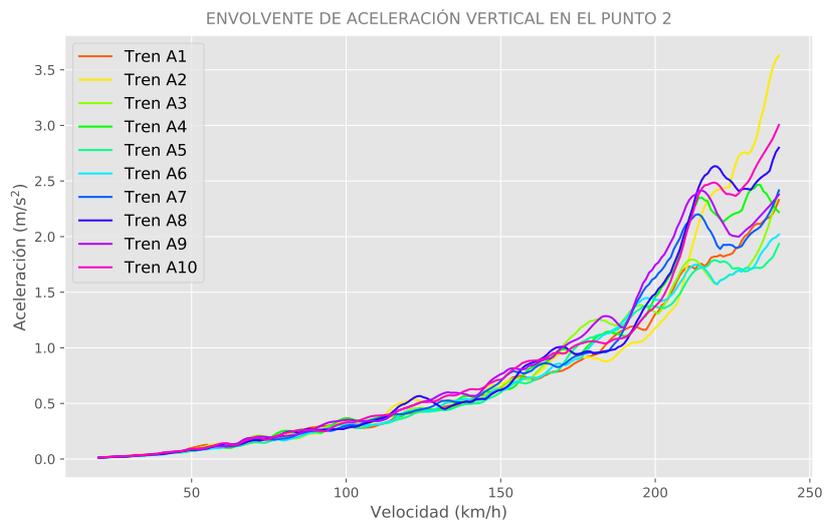


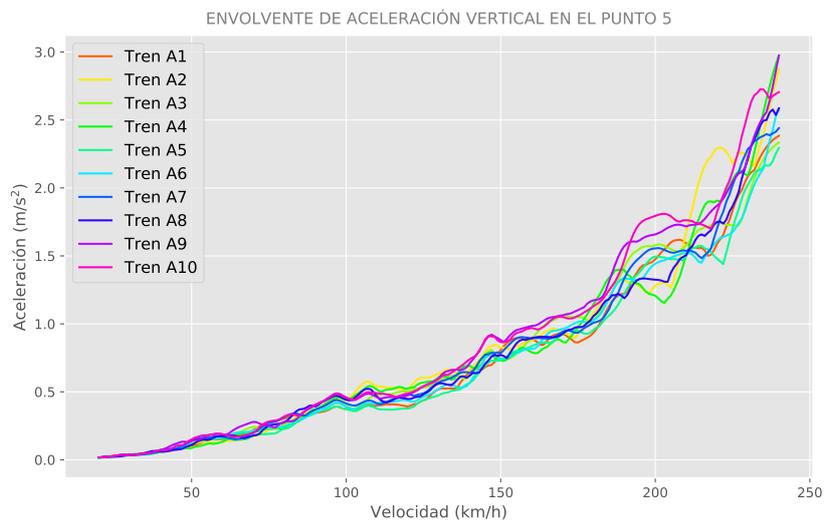
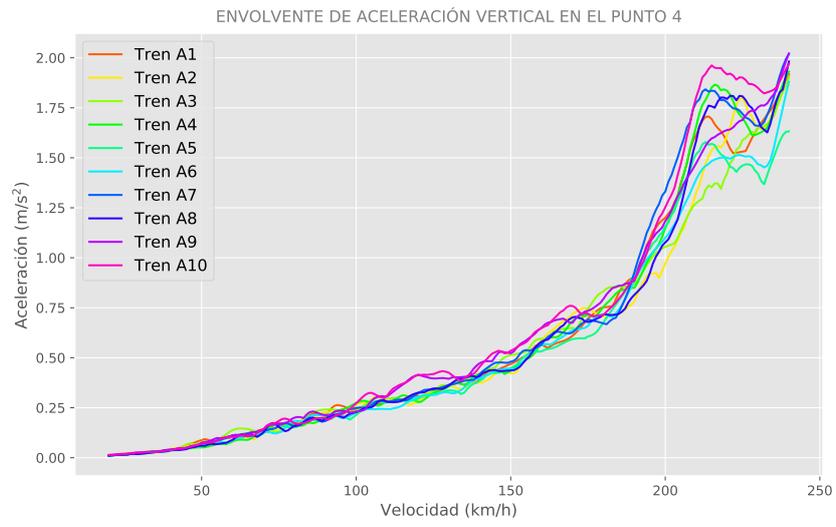


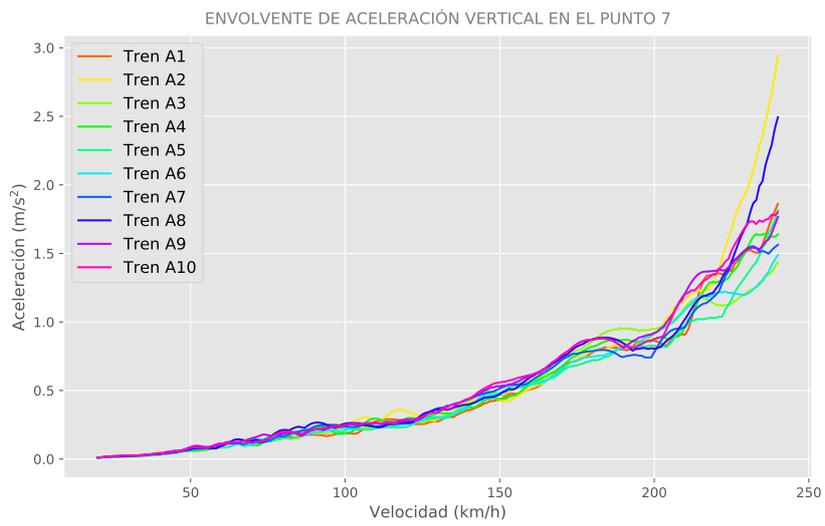
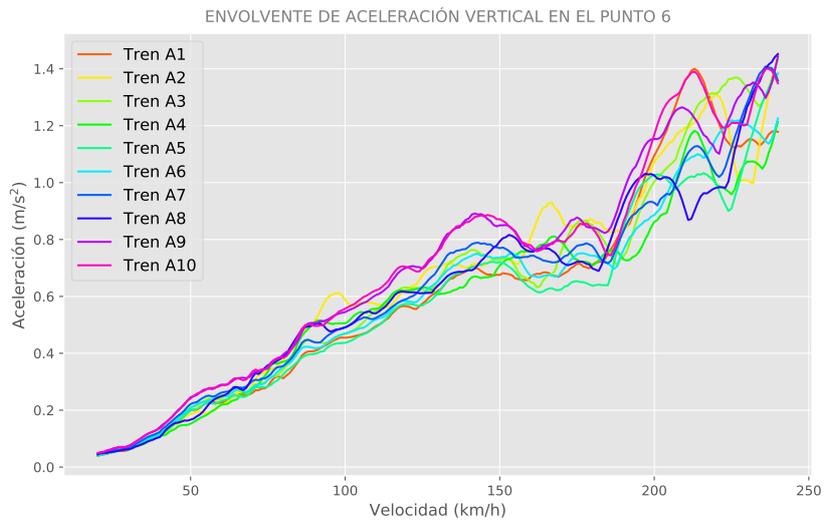
A.6. Resultados para $E_p/G_s = 5\ 000$

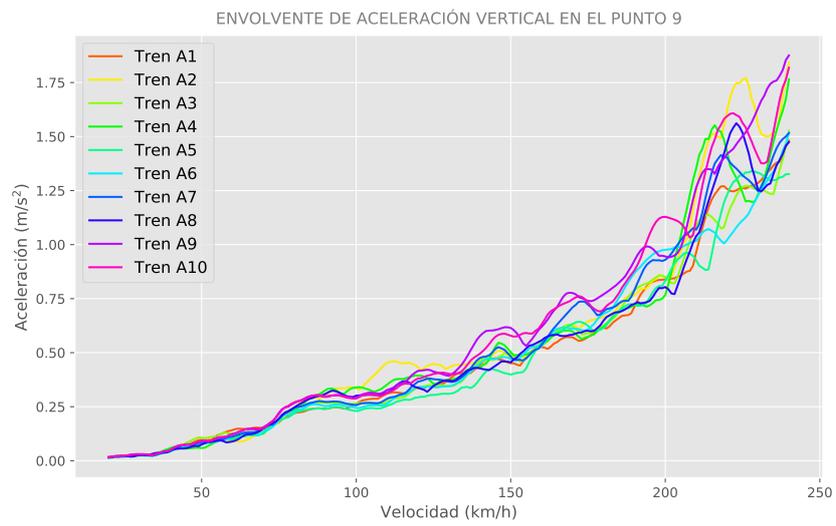
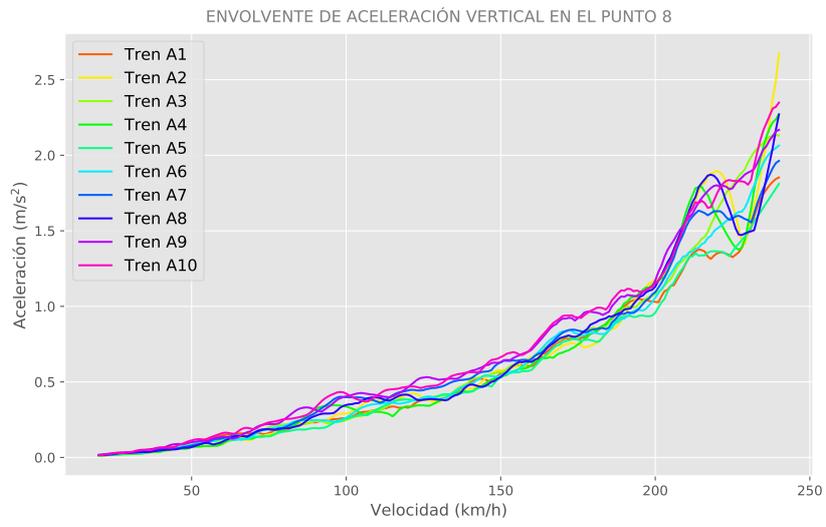
A.6.1. Resultados de aceleración



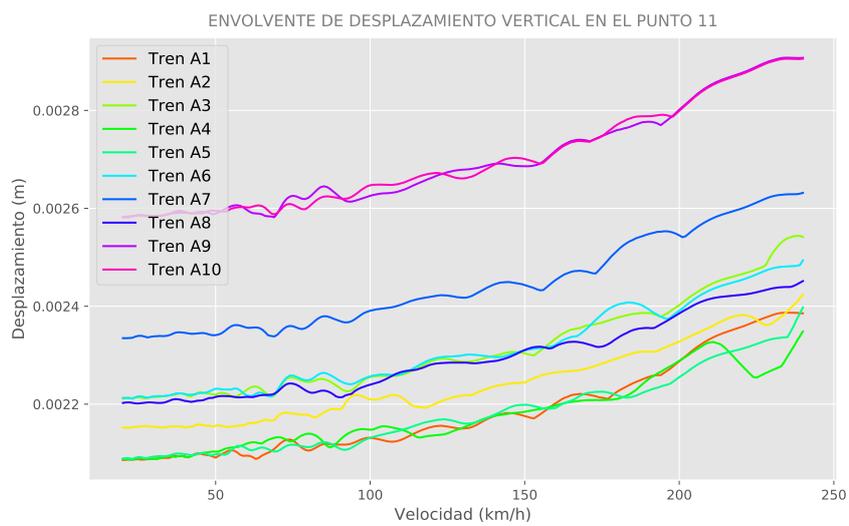
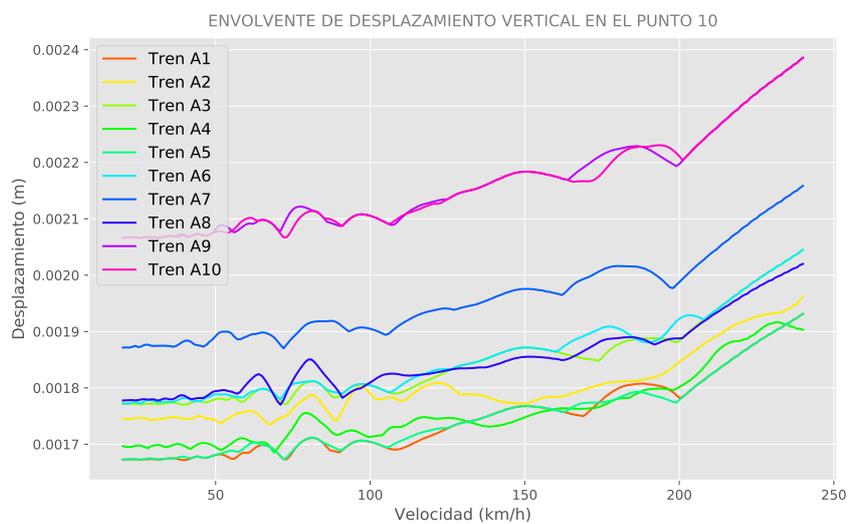


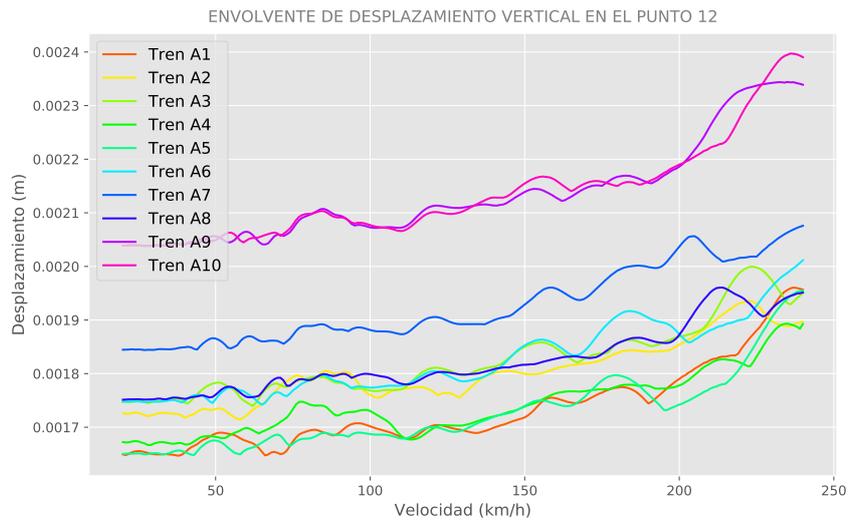






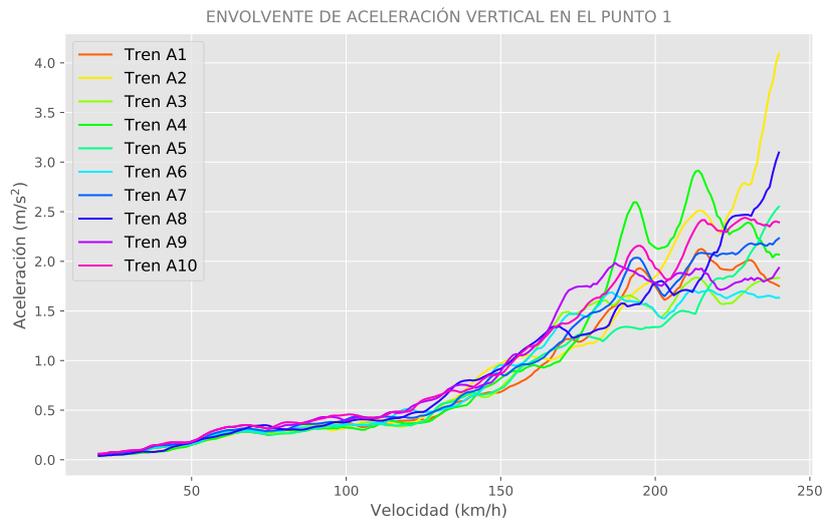
A.6.2. Resultados de desplazamiento



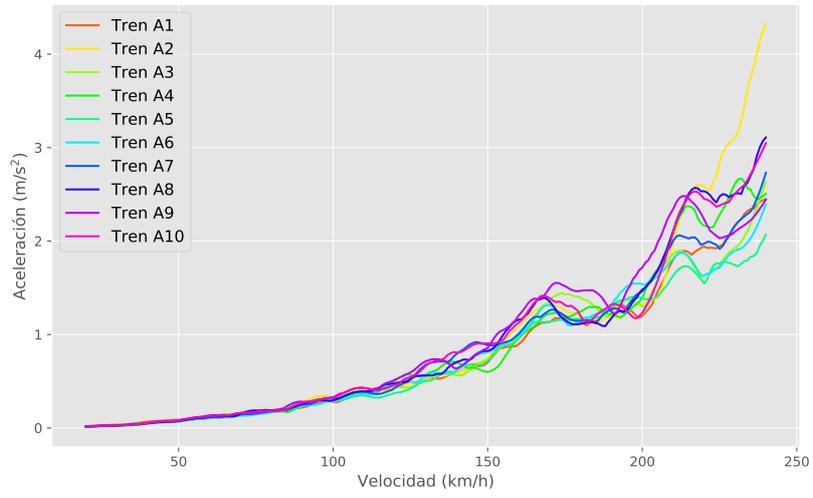


A.7. Resultados para $E_p/G_s = 10\,000$

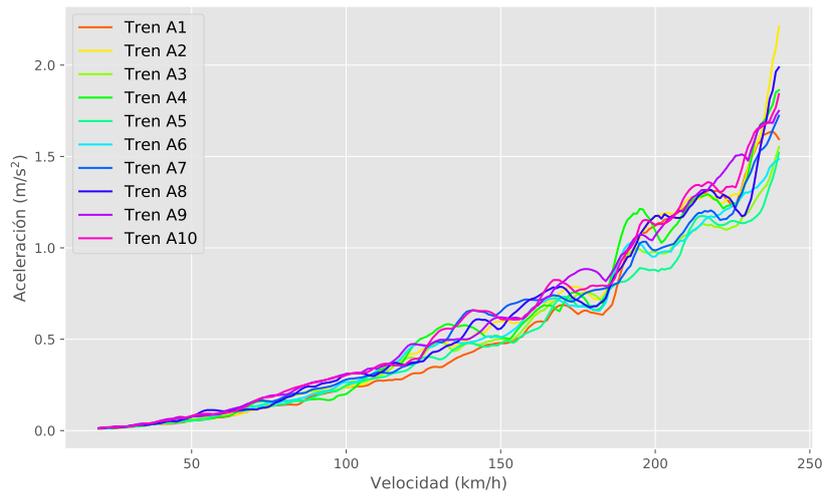
A.7.1. Resultados de aceleración

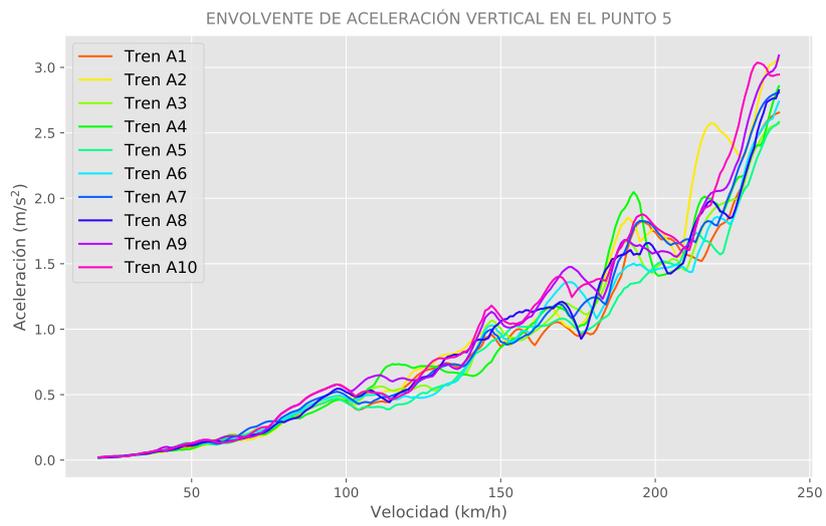
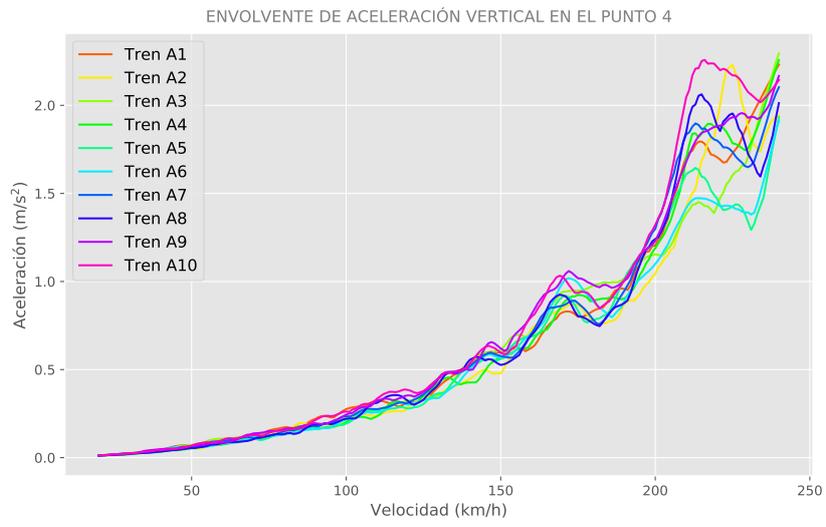


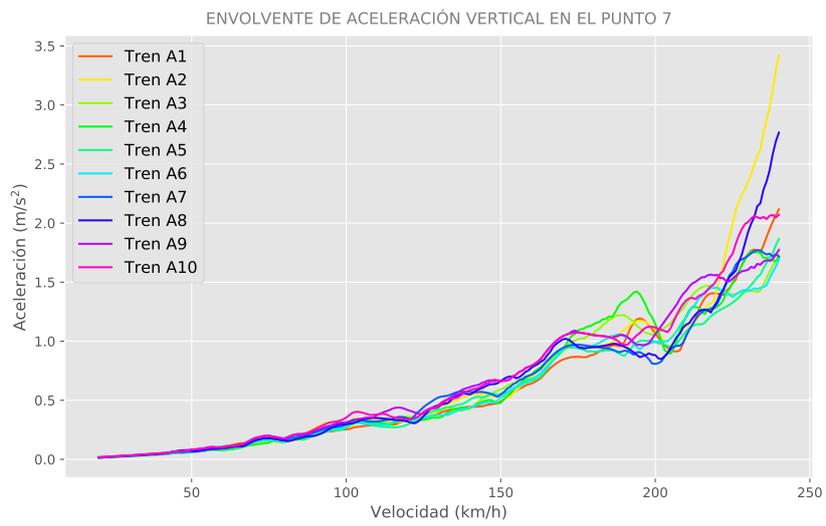
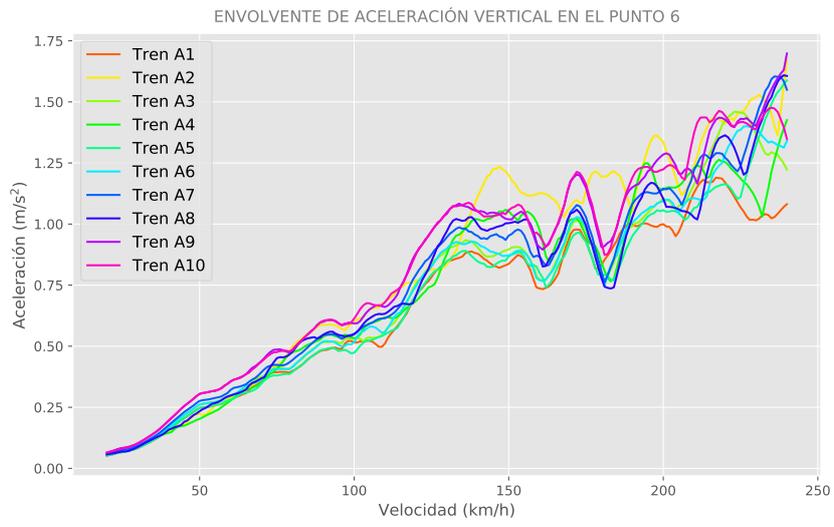
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 2



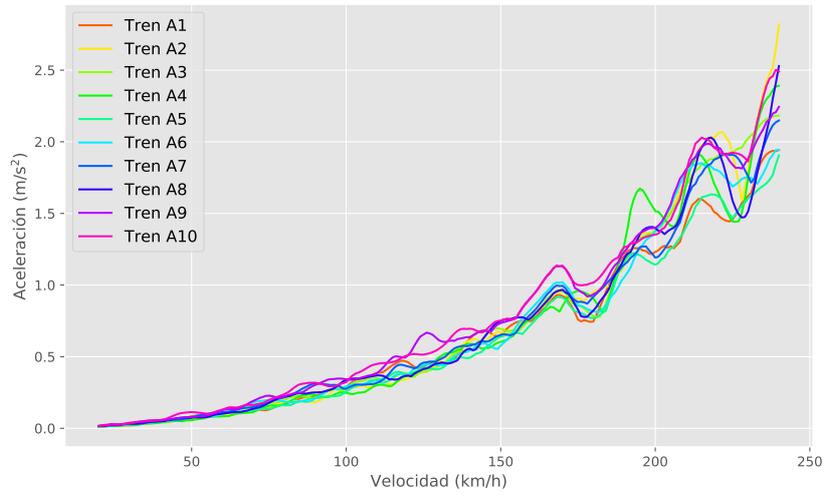
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 3



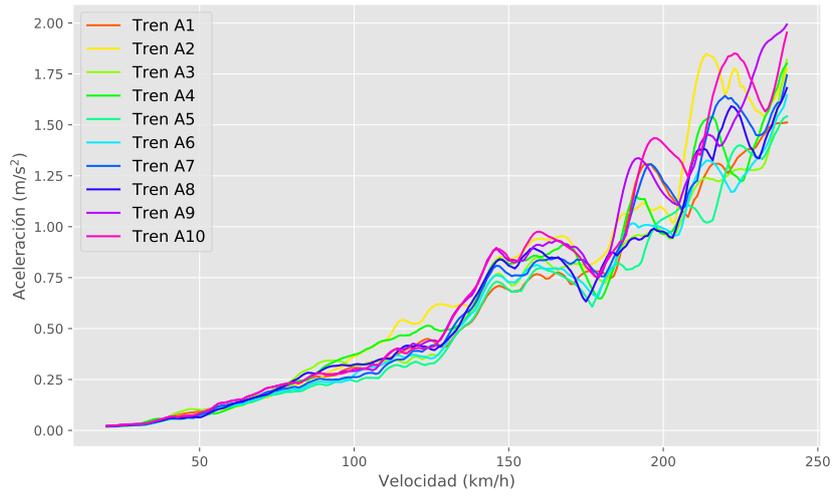




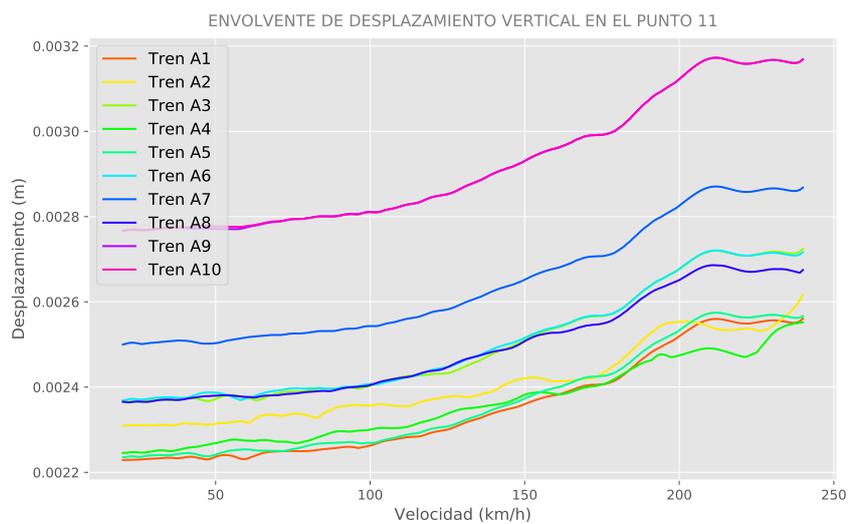
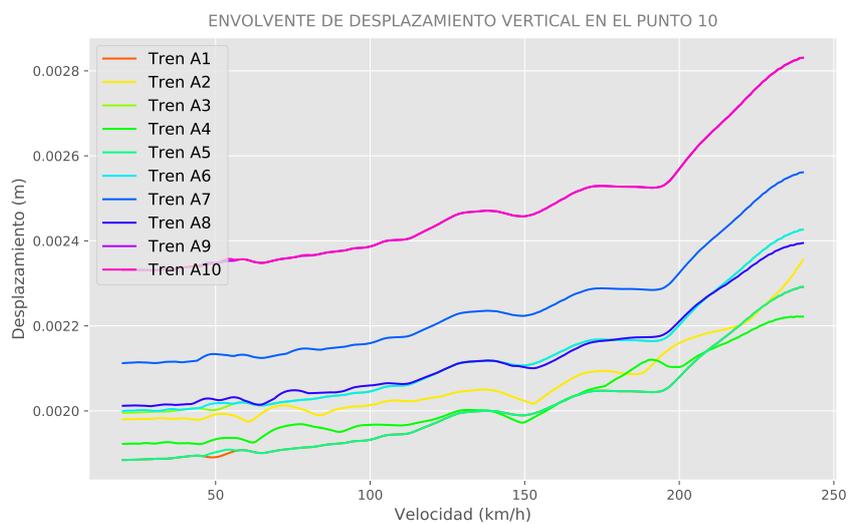
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 8



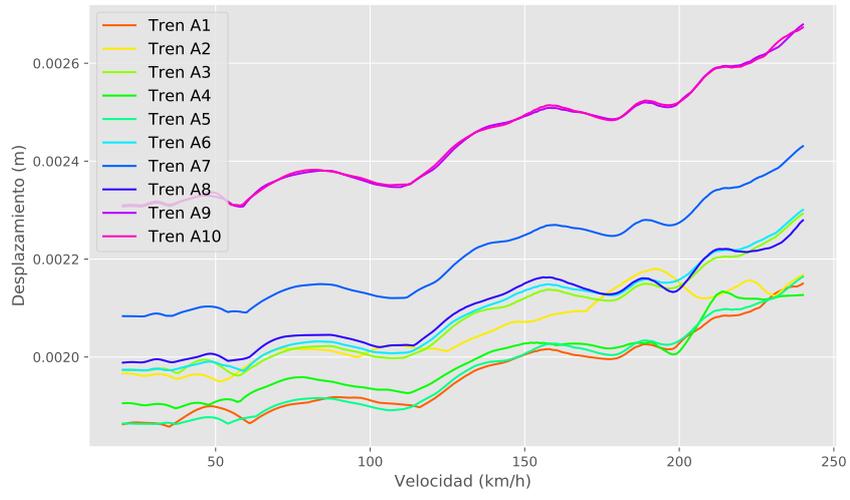
ENVOLVENTE DE ACELERACIÓN VERTICAL EN EL PUNTO 9



A.7.2. Resultados de desplazamiento



ENVOLVENTE DE DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN EL PUNTO 12



Bibliografía

- [1] UNE-EN 1991-2: 2003. *Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes*, septiembre 2003.
- [2] *Instrucción de Acciones a considerar en el proyecto de Puentes de Ferrocarril (IAPF)*, 2011.
- [3] G. W. Blaney, E. Kausel, and J. M. Roesset. Dynamic stiffness of piles. *2nd Int. Conf. Numerical Methods in Geomech*, pages 1001–1012, junio 1976. Nueva York.
- [4] A. Doménech, M.D. Martínez-Rodrigo, A. Romero, and P. Galvín. On the basic phenomenon of soil-structure interaction on the free vibration response of beams: Application to railway bridges. *Engineering Structures*, 125:254–265, julio 2016.
- [5] Enrique García Macías. Dinámica de puentes arco atirantados para el ferrocarril de alta velocidad. estudio de un caso, planteamiento de alternativas y conclusiones para el diseño. *Proyecto Fin de Carrera. Ingeniería de Caminos Canales y Puertos. Universidad de Granada*, septiembre 2012.
- [6] A.M. Kaynia and E. Kausel. Dynamic stiffness and seismic response of sleeved piles. *Report No. R80-12*, page 54, mayo 1980.
- [7] A.M. Kaynia and E. Kausel. Dynamic behavior of pile groups. *2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Offshore Piling*, 1982. Austin, Texas.
- [8] T. Kobori, R. Minai, and K. Baba. Dynamic behaviour of a laterally loaded pile. *9th Int. Conf. Soil Mech.*, 1977. Tokio, Japón.
- [9] R. L. Kuhlemeyer. Static and dynamic laterally loaded piles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 105(GT2):289–304, 1979.
- [10] Guillermo M. Álamo, Juan J. Aznárez, Luis A. Padrón, Alejandro E. Martínez Castro, Rafael Gallego, and Orlando Maeso. Efficient numerical model for the computation of impedance functions of inclined pile groups in layered soils. *Engineering Structures*, 126:379–390, noviembre 2016.
- [11] Guillermo M. Álamo, Juan J. Aznárez, Luis A. Padrón, Alejandro E. Martínez Castro, and Orlando Maeso. Importance of using accurate soil profiles for the estimation of pile kinematic input factors. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 145(8), junio 2019.
- [12] Mahir Ülker Kaustell, Raid Karoumi, and Costin Pacoste. Simplified analysis of the dynamic soil–structure interaction of a portal frame railway bridge. *Engineering Structures*, 32:3692–3698, septiembre 2010.

- [13] Patricia Maldonado Salguero. Análisis dinámico de pérgolas para el ferrocarril de alta velocidad. *Proyecto Fin de Carrera. Ingeniería de Caminos Canales y Puertos. Universidad de Granada*, enero 2014.
- [14] A.E. Martínez Castro, P. Museros, and A. Castillo Linares. Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span bernoulli–euler beams traversed by moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 294:278–297, 2006.
- [15] M.D. Martínez-Rodrigo, P. Galvín, A. Doménech, and A. Romero. Effect of soil properties on the dynamic response of simply-supported bridges under railway traffic through coupled boundary element-finite element analyses. *Engineering Structures*, 170:78–90, 2018.
- [16] P. Museros, A.E. Martínez Castro, and A. Castillo Linares. Semi-analytic solution for kirchhoff plates traversed by moving loads. *Actas del Eurodyn 2005, Paris*, 2005.
- [17] T. Nogami. Dynamic stiffness and damping of pile groups in inhomogeneous soil. *Proc. of Session on Dynamic Response of Pile Foundations: Analytical Aspects*, pages 31–52, octubre 1980.
- [18] T. Nogami and M. Novak. Soil-pile interaction in vertical vibration. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4:277–293, enero - marzo 1976.
- [19] M. Novak. Dynamic stiffness and damping of piles. *Canadian Geotechnical Journal*, II: 574–598, 1974.
- [20] M. Novak. Vertical vibration of floating piles. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103(EM1):153–168, febrero 1977.
- [21] M. Novak and F. Aboul-Ella. Impedance functions of piles in layered media. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 104:643–661, junio 1978.
- [22] M. Novak and F. Aboul-Ella. Stiffness and damping of piles in layered media. *Proc. Earthq. Engrg. and Soil Dyn*, pages 704–719, 1978. Pasadena, California.
- [23] M. Novak and R. F. Grigg. Dynamic experiments with small pile foundations. *Canadian Geotechnical Journal*, 13(4):372 – 385, 1976.
- [24] M. Novak and J.F. Howell. Torsional vibration of pile foundations. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 103(GT4):271–285, abril 1977.
- [25] M. Novak and J.F. Howell. Dynamic response of pile foundations in torsion. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 104(GT5):535–552, 1978.
- [26] M. Novak and M. Sheta. Approximate approach to contact problems of piles. *Proc. Geotechnical Engineering Division*, pages 53–79, octubre 1980.
- [27] M. Novak, T. Nogami, and F. Aboul-Ella. Dynamic soil reactions for plane strain case. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 104(EM4):953–959, 1978.
- [28] Milos Novak, M. ASCE, and Bahaa El Sharnouby. Stiffness constants of single piles. *J. Geotech. Engrg*, 109(7):961–974, 1983.
- [29] H.G. Poulos. Behavior of laterally loaded piles. ii pile groups. *Journal of the Soil Mechanics Foundations Division*, 97(SM5):733–751, 1971.

- [30] H.G. Poulos and E.H. Davis. Pile foundations analysis and design. *John Wiley and Sons*, page 397, 1980.
- [31] M.F. Randolph and H.G. Poulos. Estimating the flexibility of offshore pile groups. *Proc. of the Conf. on Numerical Methods in Offshore Piling*, page 16, 1982. Universidad de Texas, Austin.
- [32] J.M. Roesset. Stiffness and damping coefficients of foundations. *ASCE National Convention*, pages 1–30, octubre 1980.
- [33] A. Romero, M. Solís, J. Domínguez, and P. Galvín. Soil–structure interaction in resonant railway bridges. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47:108–116, julio 2012.
- [34] M. Sheta and M. Novak. Vertical vibration of pile groups. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 108(GT4):570–590, abril 1982.
- [35] H. Tajimi. Dynamic analysis of a structure embedded in an elastic stratum. *Proc. 4th World Conference Earthquake Engineering*, 1969. Chile.
- [36] V.M. Trbojevic, J. Marli, R. Danish, and K. Delink. Pile-soil-pile interaction analysis for pile groups. *6th SMIRT*, 1981. París, Francia.
- [37] Jokin Ugarte González. Análisis del comportamiento dinámico de tableros de puentes pérgola de ferrocarriles en líneas de alta velocidad. *Trabajo Fin de Máster. Ingeniería de Caminos Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid*, 2013.
- [38] G. Waas and H.G. Hartmann. Pile foundations subjected to dynamic horizontal loads. *Modelling and Simulation of Large Scale Structural Systems*, page 17, septiembre 1981. Capri, Italia.
- [39] J.P. Wolf and G.A. von Arx. Impedance functions of a group of vertical piles. *Proceedings of ASCE Specialty Conf. on Earthquake Engrg. and Soil Dynamics*, pages 1024–1041, 1978. Pasadena, California.
- [40] Abbas Zangeneh, Jean-Marc Battini, Costin Pacoste, and Raid Karoumi. Fundamental modal properties of simply supported railway bridges considering soil-structure interaction effects. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 121:212–218, 2019.