Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Tesis Doctoral

Límite Finito de una Sucesión: Fenómenos que organiza

Francisco Javier Claros Mellado

Granada, 2010

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Francisco Javier Claros Mellado
D.L.: GR 3485-2010
ISBN: 978-84-693-5362-2

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Límite Finito de una Sucesión: Fenómenos que organiza

Memoria de TESIS DOCTORAL dirigida por el Doctor Moisés Coriat Benarroch, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, presentada por Francisco Javier Claros Mellado, para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Francisco Javier Claros Mellado

VºBº: El Director

Fdo: Moisés Coriat Benarroch

La presente memoria pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctor, dentro del programa de doctorado "Didáctica de la Matemática" impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Esta investigación se realizó en el seno del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193).

A mis padres, que tanto me dan

A Leyre, por estar a mi lado y saber esperar

A Ana y Sergio, por estar con nosotros

Agradecimientos

En la realización de esta tesis han tenido papeles fundamentales las siguientes personas:

Mi esposa, Leyre, y mis hijos, Ana y Sergio, que me han apoyado durante el periodo de investigación y el de elaboración de la tesis doctoral, y han sabido tener paciencia por no estar con ellos el tiempo que se merecían.

El director del trabajo aceptó con decisión mi idea de realizar una tesis doctoral sobre el límite finito de una sucesión y ha estado trabajando de manera incansable para que este trabajo pudiera salir adelante. Gracias por tener paciencia durante estos años.

Mis padres y hermana, de manera incuestionable, han apoyado todos y cada uno de los pasos y decisiones que he tomado en la vida.

A mi amiga y compañera, María Teresa Sánchez Compaña, por su dedicación, apoyo, comprensión y trabajo.

A mi amigo Jesús Gallardo Romero, por sus sabios consejos en momentos claves de la investigación y por saber escuchar.

A mi familia política, en especial a Ana Iribarren Aicua (qepd), por haberme tratado como un hijo desde el primer día que me conoció.

A mis profesores de la Universidad de Málaga, José Luis González Marí y Alfonso Ortiz Comas (qepd), por infundirnos su amor por la didáctica de la matemática.

A los profesores, de universidad y de instituto, que han participado como expertos en el estudio.

A los alumnos que han participado en la realización de las pruebas llevadas a cabo.

A los miembros del grupo de investigación de la Universidad de Granada y del grupo de trabajo de la SEIEM, por sus aportaciones en las reuniones de trabajo que hemos tenido.

Algunos profesores del Área de Didáctica de la Matemática dedicaron tiempo y esfuerzos a discutir algunas partes de esta investigación en momentos más o menos críticos de su desarrollo; los mencionamos siguiendo la cronología de las reuniones que tuvimos con cada uno de ellos separadamente: Profesora Carmen Azcárate, Profesor Luis Rico, Profesor Modesto Sierra y Profesor Tomás Ortega. Esta memoria de investigación debe mucho a las conclusiones que supimos extraer de las diferentes conversaciones.

Después de tantos apoyos y comentarios constructivos, es más que nunca cierto que los errores que quedan en este trabajo son imputables únicamente a su autor.

Presentación

1

El objeto de esta investigación lo constituye el estudio de los fenómenos relacionados con el límite finito de una sucesión. El límite es un “concepto clave” del análisis matemático y la dificultad de su enseñanza atrajo desde un primer momento al equipo de investigación formado por Moisés Coriat Benarroch, Teresa Sánchez Compaña y Francisco Javier Claros Mellado, que intentaron acercarse a él desde el punto de vista de las sucesiones (Claros) y desde el punto de vista de las funciones (Sánchez).

El origen de este trabajo hay que situarlo un poco antes de la elección del trabajo de investigación. La memoria realizada por Claros (2000), sobre la aproximación en sucesiones de números reales, nos acercó al análisis no-estándar, y al tratamiento que el límite y las aproximaciones reciben en dicho análisis, como constatamos leyendo a Robinson (1974). Al trabajar con la definición de límite desde esta perspectiva, es necesario manejar los infinitésimos y los infinitésimos equivalentes, elementos que habían sido desechados a lo largo de la historia, y que se recuperaban para intentar dar una definición más accesible a todos.

Los infinitésimos que, en sus comienzos, ayudaron a manejar la definición de límite finito de una sucesión, nos parecía ahora que contribuían a oscurecerla, debido sobre todo a la terminología y expresiones, empleadas en el análisis no-estándar (como suficientemente grande, suficientemente pequeño, tendencia, proximidad o aproximación, entre otros), asociadas a la definición de infinitésimo.

Después de muchas horas de conversación en el seno del equipo de investigación arriba mencionado, en las que discutimos sobre la pertinencia de seguir abordando el límite finito de una sucesión, optamos por no continuar en la línea del análisis no-estándar, ya que, para seguir en ella, tendríamos que dar una definición clara del papel que juegan las expresiones anteriores en la definición de límite, y esto abría un campo que no veíamos cómo abordar.

Nuestro interés, sin embargo, siguió centrado en analizar el límite, con dos objetivos: tener una idea más clara de todos los elementos puestos en juego por la definición y descubrir (en el sentido de destapar o desenredar) elementos que facilitaran el acceso a la definición de límite.

En nuestras revisiones bibliográficas habíamos observado que la mayoría de los trabajos se habían ocupado del estudio del límite, sin distinguir entre sucesiones y funciones. Surgió, por contraste, la idea de establecer diferencias y analogías entre las definiciones de sucesiones y funciones, que pudiesen dar lugar a la elaboración de dos investigaciones distinguibles por su tema, pero comúnmente entroncadas en "el límite". En el equipo de investigación tenemos la convicción de que, a la presente memoria, le seguirá otra, elaborada por la investigadora Sánchez Compaña, que estudiará el límite finito de una función en un punto.

El análisis detallado de la definición de límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto, nos dio bastante información y conseguimos estructurar las diferencias y analogías observadas apelando a dos grandes organizadores: el simbolismo matemático y la fenomenología didáctica.

2

El estudio del límite finito de una sucesión que presentamos, lo hemos organizado mediante seis capítulos, que describimos brevemente.

Dada la abundante bibliografía existente sobre "el límite", era necesario comenzar por un estudio de antecedentes, que se describen en el *capítulo 1º*. Para presentar un resumen (y, a veces, crítica) de las lecturas realizadas, hemos clasificado los trabajos según los criterios siguientes: Desarrollo histórico del concepto de límite; Infinito potencial e infinito actual; Propuestas didácticas relativas a la enseñanza del límite; Dificultades, obstáculos y errores relativos al límite; y Ubicación del concepto de límite de una sucesión en el currículo. Estos criterios, por supuesto, no definen una clasificación matemática en sentido estricto.

En el *capítulo 2º*, se expone el marco teórico de nuestra investigación, que se nutre de tres grandes líneas de trabajo: fenomenología, pensamiento matemático avanzado y representaciones. En este marco, tienen cabida varios enunciados: el de nuestro problema de investigación, los objetivos perseguidos, los métodos usados para llevarla a cabo y las hipótesis que querríamos refutar.

Los fenómenos que, por nuestra investigación, entendemos que son organizados por una definición de límite finito de una sucesión, se presentan en el *capítulo 3º*, junto con diferentes perspectivas de ampliación (al encontrar que, fenomenológicamente, solamente hay dos tipos de definiciones de límite finito).

Los fenómenos caracterizados en el capítulo 3º, los hemos buscado en libros de texto de bachillerato, como se explica en el *capítulo 4º*. Esta búsqueda se realizó en un período temporal que abarca unos 70 años. Creemos que el método de estudio cualitativo usado es replicable y, por tanto, puede ampliarse la muestra (en número de documentos y en extensión temporal) prácticamente a voluntad.

Por analogía, decidimos plantear la búsqueda de esos fenómenos en las producciones de alumnos de bachillerato; a ello se dedica el *capítulo 5º*. Para hacerlo, hubimos de diseñar un instrumento que permitiera recoger información sobre lo que escriben los alumnos; la muestra elegida, desde luego, no es representativa, pero los estudios de frecuencias que hemos realizado aportan abundante información sobre este tópico.

El último *capítulo*, el *6º*, resume algunas ideas desarrolladas, presenta conclusiones y enumera algunas perspectivas de futuro para esta investigación. Hemos pasado revista al logro de objetivos y a la refutación (o no) de las hipótesis enunciadas.

Conviene reseñar algunas decisiones tomadas a la hora de estructurar el presente documento.

Cada capítulo se inicia con un apartado de introducción, no numerado, que da una panorámica y, a la vez, lo resume. Con objeto de mantener un hilo conductor en el desarrollo de cada capítulo, en muchas ocasiones hemos remitido informaciones detalladas a los anexos. Por ejemplo, cuando hablamos de una consulta a expertos (y lo hacemos por dos veces en esta memoria), remitimos a anexos la información más detallada sobre esa consulta.

Otra decisión ha estado ligada a la posición de los anexos. Dado que los capítulos tienen una meta sencilla de enunciar, hemos preferido colocar los anexos al final de cada capítulo (y no al final del texto). Así, cada capítulo tiene su propio contenido y se facilita el acceso para comprobaciones.

Pareció conveniente respetar la costumbre de ubicar la bibliografía al final del documento.

Finalmente, en los anexos y en algunas partes de los capítulos, hemos usado el interlineado sencillo, mientras que, como norma, éste ha sido de 1’5. Esto no quiere decir que demos menos importancia al contenido de unos párrafos u otros.

Índice

Capítulo 1º: Antecedentes

Introducción

Este capítulo recoge investigaciones relevantes que han estudiado el concepto de límite de una sucesión o el de límite de una función en un punto, porque en ocasiones no han distinguido detalladamente ambas ideas. Hemos querido también recoger ideas notables sobre la situación actual del concepto de límite en la didáctica de las matemáticas.

La información recogida de los trabajos que se han ocupado del estudio del límite, la hemos organizado del siguiente modo:

Desarrollo histórico. En este apartado explicamos cómo ha evolucionado el concepto de límite desde sus orígenes ligados a la geometría hasta llegar a la definición actual de límite de una función de Weierstrass-Heine, pasando por otras definiciones precursoras, como la de D'Alembert y la de Cauchy, que se acercaron bastante a lo que consideramos como definición actual de límite de una función.

Infinito potencial e infinito actual, así como los tipos de infinito. En este apartado presentamos las diferencias existentes entre ambos tipos de infinitos y señalamos que están presentes en el concepto de límite finito de una sucesión. Se presenta brevemente el desarrollo histórico que ha sufrido el concepto de infinito, mencionando a los principales matemáticos que se han ocupado de él, desde puntos de vista puramente matemático o didáctico; en este segundo campo, se señalan investigaciones relevantes que se han ocupado de analizar las dificultades relativas al concepto de infinito en los alumnos, así como investigaciones que tratan de mejorar la práctica docente para que dicho concepto resulte más asequible al alumno. El apartado termina con una reflexión relativa a la "posición" del concepto de infinito con respecto al pensamiento matemático elemental o avanzado.

Propuestas didácticas relativas a la enseñanza del límite. En este apartado trabajamos desde dos puntos de vista; por un lado, investigaciones que se han centrado en el trabajo con alumnos y, por otro, investigaciones que se han centrado en el trabajo con profesores. Las primeras, después de establecer las dificultades de los alumnos relativas al concepto de límite, diseñan una secuencia didáctica que va desde el trabajo, por partes separadas, de la definición de límite antes de manejar la definición completa (Mamona-Downs, 2001), hasta el trabajo con una nueva definición de límite, como proponen Blázquez y Ortega (2002).

Dificultades, obstáculos y errores relativos al concepto de límite. Las dificultades relativas al concepto de límite han sido puestas de manifiesto por muchos autores, como Tall (1992) o Sierra, González y López (1999). En este apartado señalamos las dificultades que presenta el campo matemático del análisis para, a continuación, particularizar y centrarnos en el concepto de límite. Las dificultades en torno al límite son de muy diferente índole y van desde las dificultades propias de la definición (cuantificadores, notación, múltiples representaciones, entre otras) hasta dificultades relacionadas con el lenguaje del límite (como tendencia o aproximación).

Ubicación del límite de una sucesión en el currículo. Nuestra investigación sobre el concepto de límite se inició en el año 2000, y por lo tanto tres son las leyes educativas que se han sucedido desde entonces: L.O.G.S.E, L.O.C.E (se aplicó solo en la Comunidad Autónoma de Madrid) y L.O.E. En este apartado presentamos las asignaturas de los diferentes planes de estudio correspondientes en las que está presente el concepto de límite de una sucesión. Citaremos tanto las asignaturas en las que aparece el concepto de límite como el apartado del currículo referido al concepto de límite.

Esta estructura del capítulo es una de las muchas posibles, ya que algunos trabajos podrían situarse en más de un apartado. Al situarlos preferentemente donde lo hemos hecho, creemos estar respetando la meta perseguida por el autor (o autores) en su investigación.

1.1. Desarrollo histórico del concepto de límite

En este apartado hemos recopilado los principales pasos seguidos a lo largo de la historia hasta llegar a la definición actual de límite. El período de estudio abarcado irá desde la antigua Grecia hasta el siglo XIX.

Según Boyer (1999) los orígenes del concepto de límite los encontramos en la antigua Grecia cuando Eudoxo emplea el método de exhausción para calcular el área de figuras planas. Según Arquímedes, Eudoxo dio el lema que ahora lleva el nombre de lema de Arquímedes (más conocido como método de exhausción). Este lema afirma que si tenemos dos magnitudes que tengan una razón, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra. Esta propiedad excluía el uso de los infinitésimos, segmentos indivisibles de cantidad constante. La idea de infinitésimo parece estar presente en los trabajos de Demócrito, aunque su principal aportación es la que afirma que todos los fenómenos hay que explicarlos en términos de átomos infinitamente pequeños e infinitamente variados tanto en forma como en tamaño.

La definición moderna de límite, tal como hoy la concebimos no se desarrollaría hasta comienzos del siglo XIX.

En Boyer (1999, p. 567) encontramos recogida la primera definición de límite que D'Alembert escribió para la Encyclopédie:

<u>Definición 1</u>. *"Llama a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)".*

El concepto de límite había sido abordado también por otros autores, como Newton o Euler. Newton a través de su método de fluxiones y series infinitas estuvo muy cerca de una definición del concepto de límite, aunque emplease en su terminología expresiones tan imprecisas como "desvanecerse". Euler, por su parte, consideraba las cantidades infinitamente grandes como inversas de las infinitamente pequeñas, cosa que fue desechada cuando D'Alembert dio su definición de límite. A partir de ese momento lo infinitamente grande se expresará en términos de límites.

Cauchy toma como punto de partida la definición de límite dada por D'Alembert aunque le impone un carácter aritmético para hacerla más precisa, prescindiendo de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio. Formula Cauchy la siguiente definición de límite, casi tan precisa como la definición moderna (Boyer, 1999, p. 647):

Definición 2. "Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos este ultimo valor se llama el límite de todos los demás".

Según Boyer, Cauchy hizo uso de expresiones tales como "valores sucesivos", "aproximarse indefinidamente" o "tan pequeño como uno quiera". La formalización en la que se estaban viendo envuelta las matemáticas, hizo necesario que se reformulara la definición de límite de manera más precisa. Weierstrass y Heine son los que dan la definición actual conocida como "definición epsilon-delta", también reproducida por Boyer (1999, p. 696):

Definición 3. "Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 + \eta)- L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x=x_0$".

En esta definición no se exige, como se hace en la definición que manejamos hoy día, que ε sea mayor que cero; también vemos que el símbolo η ha sido sustituido por δ. Además, notamos cómo esta definición se adapta a la definición de límite finito de sucesiones que conocemos hoy y que vulgarmente llamamos "definición ε - N". No tenemos constancia en toda la bibliografía revisada, de la evolución histórica seguida por el concepto de límite de una sucesión. Nuestra suposición es que la definición de límite funcional, fue posteriormente adaptada al límite finito de una sucesión. Esto no es nada extraño ya que las sucesiones son funciones de N en R. A pesar de esto, tenemos que señalar que existen diferencias significativas entre la definición de límite de una sucesión y la definición de límite de una función. Claros, Sánchez y Coriat (2006) las agrupan en dos grandes campos: diferencias simbólicas y diferencias fenomenológicas. Las diferencias simbólicas se organizan en torno a los conceptos de dependencia, orden, valor absoluto, cota y procesos infinitos, mientras que las diferencias fenomenológicas hacen referencia a los distintos fenómenos presentes en cada una de las definiciones estudiadas.

Si prestamos atención a las tres definiciones enunciadas, podemos destacar los siguientes aspectos:

En las tres definiciones se utiliza como sistema de representación el sistema verbal, pero hemos de notar que la tercera aparece cargada de simbolismo matemático. Esta definición será la que adquiera la forma actual de definición de límite de una función epsilon-delta. Los sistemas de representación gráfico, tabular y simbólico no aparecen en estas definiciones.

Las definiciones que se dan corresponden al caso de límite finito de una función en un punto. De alguna manera, los diferentes autores entendieron que ése era el problema que debían resolver y que el resto de situaciones serían solamente variantes del primero.

1.2 Infinito potencial e infinito actual

En este apartado presentamos dos de los sentidos atribuidos al infinito en matemáticas, el infinito potencial y el infinito actual, cuyo origen histórico situamos en la antigua Grecia. El interés por el concepto de infinito ha hecho que sean muchos los autores que se ocupen de él, tanto desde un punto de vista que podríamos llamar matemático puro, en el que citamos a autores tan importantes como Dedekind o Cantor, como desde un punto de vista didáctico en el que citamos a autores como Tall o D´Amore entre otros. Desde este último punto de vista, la mejora de la enseñanza del infinito y su “posición” en el campo del pensamiento matemático avanzado han generado líneas de investigación.

1.2.1 Desarrollo histórico del infinito; tipos de infinito

La relación entre el concepto de límite finito de una sucesión y el concepto de infinito parece a priori estar claramente definida. En el concepto de límite finito de una sucesión la variable independiente tiende a infinito, y el conjunto formado por los elementos de una sucesión y su límite es un conjunto infinito.

Según Boyer (1999), Wallis fue el primero en usar el símbolo infinito en el cálculo de límites. En concreto lo usó para calcular el límite de la sucesión:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

llegando a la conclusión de que el límite era 1/3. A este símbolo le llamó el “lazo del amor”.

Asociados a la noción de infinito están el infinito potencial y el infinito actual. El infinito potencial suele relacionarse con la idea de proceso infinito. La idea de infinito potencial es bastante antigua y podemos situarla en la antigua Grecia donde se consideraba que el tiempo no tenía final. Aristóteles empleó en sus trabajos el concepto de infinito potencial e incluso llegó a plantearse el concepto de infinito actual; en el libro III de la Física, se hallan evidencias del rechazo que Aristóteles mostró ante el infinito actual. En el fondo de este rechazo se encuentra el carácter finito que Aristóteles empleó en todos sus razonamientos. Aristóteles distinguió dos tipos de infinitos: el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es lo que denominamos infinito potencial mientras que el segundo es lo que denominamos infinito actual. En este libro, refuta la existencia del infinito actual, apoyándose en que, aunque el tiempo y el movimiento son procesos potencialmente infinitos, nunca están dados como una totalidad infinita, hecho que daría sentido al infinito actual.

Boyer (1999, página 138) recoge la siguiente afirmación referente a la problemática entre el infinito potencial y el infinito actual:

"La discusión aristotélica sobre el infinito actual y potencial en la aritmética y en la geometría ejerció una profunda influencia en muchos escritores posteriores sobre los fundamentos de las matemáticas".

Ortiz (1994), señala que la noción de infinito potencial se basa en las operaciones reiteradas e interminables; por muy grande que sea n siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y así sucesivamente. Este tipo de infinito potencial sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal.

El límite de una sucesión abarca dos tipos de infinitos.

El infinito potencial está asociado al proceso que se produce cuando los términos de la sucesión sometida a estudio, se van generando de manera automática. Esto se expresa de la siguiente manera:

"si para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si $n> N$ ";

"N" depende del epsilon que tomemos, y permitirá avanzar en la comprobación de las condiciones de la definición.

Por otro lado el infinito actual podemos observarlo si nos sentimos capaces de abarcar conceptualmente todos los términos de un conjunto infinito. En el caso del límite finito de una sucesión, el conjunto formado por los términos de la sucesión y el límite forman un nuevo conjunto, con cardinal $\aleph_0$.

La idea de infinito actual ha seguido un camino más difícil y complicado que la de infinito potencial. Muchos autores negaron su existencia; además de Aristóteles, más recientemente, D'Alembert también la negó.

Con Galileo Galilei se empieza a admitir la existencia del infinito actual, aunque su definición definitiva llegaría con Bolzano, Cantor y Dedekind.

Con Cantor se hace patente la diferencia entre infinito potencial e infinito actual, y además la existencia de varios infinitos en la matemática (numerable, no numerable,...). La teoría de conjuntos infinitos de Cantor supuso el inicio de la formalización de conjuntos como R o Q; para demostrar la numerabilidad o no numerabilidad de un conjunto numérico, Cantor empleó la correspondencia biyectiva. Sin embargo la formalización definitiva de los conjuntos numéricos N, Q y R llegaría de la mano de Dedekind.

Por lo tanto y teniendo en cuenta todo lo anterior, en el límite finito de una sucesión encontramos la presencia de los dos tipos de infinito: potencial y actual. El infinito potencial aparece cuando vamos calculando los términos de la sucesión a través de un proceso infinito, mientras que el infinito actual se presenta cuando consideramos a todos los términos de la sucesión y a su límite como un conjunto que tiene infinitos elementos.

El infinito ha sido un tema que ha interesado no solo a matemáticos, sino también a filósofos, y a investigadores en didáctica de las matemáticas.

La preocupación existente a lo largo de la historia de las matemáticas por el concepto de infinito es permanente. Boyer (1999) recoge las afirmaciones aristotélicas sobre la distinción entre infinito actual y potencial, pero subraya que la visión de Aristóteles es puramente potencial. Cañón (1993) recoge los trabajos de Kant, en los cuales distingue entre infinito potencial e infinito actual. La definición dada por Kant al primer tipo de infinito es la siguiente:

"el infinito potencial no es más que ese avance de la razón en su proceso constructivo que avanza sin interrupción y sin límite".

Respecto al infinito actual, Kant lo sitúa no en el mundo de los conceptos, si es que el infinito potencial puede considerarse concepto-límite, sino en el de las ideas. El infinito actual es definido por Kant como la capacidad de la razón para aprehender una totalidad infinita.

Hitt (2003) recoge también los trabajos de Kant sobre el concepto de infinito, en los que se afirma que la distinción entre el infinito potencial y el infinito actual, se establece en que el primero es construible y el segundo no. Kant afirma también que la distinción entre uno y otro debe realizarse en torno a la experiencia, según la cual el infinito potencial se puede concebir mediante ella, mientras que el infinito actual se debe construir mediante una reflexión. Hitt considera a Kant como uno de los autores más importantes, a lo largo de la historia, que se han ocupado del concepto de infinito; añade también los nombres siguientes: Zenón de Elea, Bolzano y Cantor. Comentaremos a continuación las aportaciones realizadas por los autores anteriormente citados, según Hitt:

- La famosa paradoja de Aquiles y la tortuga, enunciada por Zenón de Elea, muestra la presencia de los dos tipos de infinito: el potencial y el actual. El infinito potencial lo observamos a través del hecho de que Aquiles no alcanzará a la tortuga. El infinito actual se presenta en el caso de que concibamos la opción de que Aquiles alcance a la tortuga. En este caso estaríamos tomando conciencia de manera simultánea de todos los elementos de un conjunto infinito.

- Si el infinito actual había tenido un carácter contradictorio, a partir de Bolzano se define como se concibe actualmente. Bolzano además construye su teoría en la que hace uso del concepto de infinito y define también por primera vez la idea de conjunto infinito. La demostración de que un conjunto es infinito la realiza de la siguiente manera:

"Sea A una proposición verdadera, por ejemplo: "Existen verdades". Si consideramos la proposición: "A es verdadera", esta es distinta de la anterior; la llamaremos B. Se puede ahora considerar la nueva proposición C: "B es verdadera y así sucesivamente"

- A finales del siglo XIX, Cantor hace patente la diferencia entre infinito potencial e infinito actual, y además señala la existencia de varios tipos de infinitos en la matemática (numerable, no numerable,...). La teoría de conjuntos de Cantor supuso el inicio de la formalización de los conjuntos de infinitos como R o Q.

Más recientemente, tenemos que citar la aportación de Fischbein (1982), para quien el infinito potencial es intuitivo, responde a una interpretación natural e intuitiva del infinito, mientras que el infinito actual es contraintuitivo.

A la relación de autores anteriormente citados por Hitt (2003), D'Amore (1996) añade los siguientes: Euclides de Alejandría, Nicolás de Oresme, Galileo, René Descartes y Dedekind. El primero, siguiendo los trabajos de Aristóteles, evita el uso del infinito actual, ocupándose única y exclusivamente del infinito potencial. Oresme estudió la serie $S = 1 + 1 / 2 + 1/3+ ...$, llegando a demostrar que el valor de la suma anterior es mayor que cualquier valor M que fijemos; en este trabajo están presentes ambos infinitos aunque no sabemos si el autor se dio cuenta de este último. Con Galileo se inicia la definición de conjunto infinito que concluye con Dedekind y Cantor. Por otro lado René Descartes, no toma una posición fuerte y propia en lo que respecta al infinito. Dedekind realiza una demostración de la existencia de conjuntos infinitos muy parecida a la de Bolzano. Define el conjunto de los números reales, a través de las cortaduras que llevan su nombre. Mantuvo mucho contacto con Cantor, al que se le puede considerar el autor más brillante en este campo del infinito.

1.2.2 El infinito y la didáctica de la matemática

En el campo de la didáctica de la matemática, el interés despertado por el concepto de infinito ha sido muy grande.

Garbin (2000) realizó una investigación sobre el infinito actual de la que destacamos los siguientes objetivos:

- Aproximarse a los esquemas conceptuales de los estudiantes asociados al concepto de infinito actual cuando trabajan con problemas expresados en el sistema de representación: verbal, gráfico, geométrico, algebraico y analítico.

- Diseñar un instrumento que mostrase la coherencia de las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados y establece lo que denomina "líneas de coherencia".

- Realizar la distinción entre incoherencia e inconsistencia y por lo tanto entre coherencia y consistencia.

Para lograr estos objetivos realizó dos cuestionarios con preguntas relativas al infinito, que se administraron a 80 alumnos con edades comprendidas entre 16 y 17 años. En el segundo cuestionario se posibilitó a los estudiantes reflexionar, corregir o completar las respuestas dadas en el primer cuestionario. También se realizaron 6 entrevistas con un intervalo de tiempo de 15 días desde la aplicación del segundo cuestionario.

Respecto a las conclusiones de su estudio, podemos anotar lo siguiente:

- Los estudiantes no siempre respondieron teniendo en cuenta la infinitud del proceso.

- Las respuestas de los estudiantes estuvieron influenciadas por el sistema de representación que se empleó en los enunciados de las cuestiones presentadas y por los esquemas conceptuales asociados a los conceptos que aparecen en el enunciado de la cuestión presentada.

- Un alumno podía tener diferentes respuestas y esto no daba lugar a ningún conflicto. No hay consciencia de la inconsistencia interna que producen dos respuestas diferentes a un mismo problema.

- Garbin estableció cinco categorías para describir la situación de coherencia de los estudiantes; las categorías fueron denominadas: categoría 1, categoría 2, categoría 3, categoría Mixta (correspondería a la cuarta categoría considerada) y categoría 1/3 (corresponde a la quinta categoría considerada). En la categoría 1 estarían los alumnos que se muestran finitistas o que evaden la infinitud. En la categoría 2, aquellos que muestran una concepción actual en la mayoría de sus respuestas, en la categoría 3, aquellos que se muestran potencialistas; en la categoría mixta, aquellos en los que aparece o está presente en las respuestas de los alumnos, en mayor grado (excluyendo la categoría dos) el infinito actual. En la categoría 1/3 se muestra un mayor arraigo de la concepción potencial y una ausencia, aunque débil, del infinito actual.

- Identificó inconsistencias profundas en los alumnos. El término profundas fue usado por Vinner (1990) para distinguir entre los niveles de inconsistencias (superficiales o profundas)

- Consiguió clasificar a los alumnos en tres tipos: alumno coherente y consistente, alumno coherente pero no consistente y alumno incoherente.

Otro autor que se ocupó del estudio del infinito y su relación con el concepto de límite fue Fernando Hitt (2003), el cual señala la importancia del dominio del concepto de infinito, tanto en su aspecto potencial como en el actual, para aprender el concepto de límite. Las aportaciones de Hitt la estructuramos en dos ideas bien diferenciadas:

1º) Señala las dificultades que han estado presentes, a lo largo de la historia, en la comunidad matemática, para llegar a establecer el concepto de infinito en sus dos aspectos, potencial y actual. Hitt, siguiendo a Bachelard, emplea la expresión obstáculo epistemológico para señalar la superación de la dificultad de distinguir y admitir los diferentes tipos de infinito.

2º) Las dificultades que genera el concepto de infinito cuando se trabaja con el límite (límite finito en el infinito o límites infinitos).

Respecto a la primera aportación, Hitt realiza una investigación exhaustiva, en la que señala los autores que se han ocupado del concepto de infinito a lo largo de la historia de las matemáticas. En esta lista cita y comenta las aportaciones de los autores siguientes: Zenon de Elea, Kant, Bolzano y Cantor.

Respecto a la segunda aportación, realiza un trabajo con profesores. Del análisis de este trabajo deduce que la enseñanza del concepto de límite presenta una doble complejidad, una la del propio concepto y otra, la promovida por los profesores, en concreto por la manera en que los profesores abordan dicho concepto.

Teniendo en cuenta lo anterior Hitt señala la necesidad de iniciar una discusión sobre el infinito potencial y el infinito actual, entre los profesores de secundaria. También señala la necesidad de utilizar diferentes sistemas de representación en la enseñanza del límite y no restringirse única y exclusivamente al sistema de representación algebraico. Dicho sistema debería ir acompañado con gráficas y tablas.

D' Amore (1996) también se ha ocupado del concepto de infinito y su relación con el límite, estableciendo dos líneas: la primera, va enfocada a observar el desarrollo histórico del infinito y la segunda a realizar un breve resumen sobre las investigaciones didácticas que se han ocupado del estudio del infinito.

Respecto a la primera línea D'Amore comenta los siguientes autores:

- Zenón de Elea. Presenta la paradoja de Aquiles y la tortuga y concluye que hoy día algunos debaten sobre la paradoja para ver si Aquiles alcanza a la tortuga o no.

- Aristóteles de Stagira. Concluye que el infinito actual no sirve y que a los matemáticos les basta con el potencial. La herencia de Aristóteles fue recogida por Euclides y sus sucesores.

- Euclides de Alejandría. En su obra Los Elementos, evita el uso del infinito actual y solo usa el potencial.

- Nicolás de Oresme. Se ocupó del estudio de la serie armónica (S = 1 + ½ + 1/3+ ...) y demostró que esta serie es mayor que cualquier valor M que fijemos, teniendo por lo tanto un valor infinito. En el trabajo de Oresme están presentes dos resultados: el infinito potencial con el que se expresa el resultado de la suma y el infinito actual, aunque no sabemos si el autor se dio cuenta de este último.

- Galileo. Inicia la definición de conjunto infinito que concluye con Dedekind y Cantor.

- René Descartes no toma una posición fuerte y propia en lo que respecta al infinito.

- Newton también se ocupó en sus trabajos del estudio del infinito.

- Leibniz. Toma una posición recta y decisiva con respecto al infinito. Con él, el infinito entra definitivamente en la historia de las matemáticas.

- Berkeley, se opondrá con ironía y desprecio y también con algo de razón a todos aquellos que niegan la existencia de los infinitésimos. A continuación surgen cuestiones como la existencia de conjuntos infinitos.

- Bolzano, da una primera demostración de la existencia de los conjuntos infinitos de la siguiente manera*: "Sea A una proposición verdadera, por ejemplo: "Existen verdades". Si consideramos la proposición: "A es verdadera", esta es distinta de la anterior; la llamaremos B. Se puede ahora considerar la nueva proposición C: "B es verdadera" y así, sucesivamente".*

- Dedekind. Realiza una demostración de la existencia de conjuntos infinitos muy parecida a la de Bolzano. Mantuvo mucho contacto con Cantor, al que se le puede considerar el autor más brillante en este campo del infinito.

- Cantor. Las intuiciones de Cantor se fueron concretando con el paso del tiempo a medida que la técnica, el lenguaje y el rigor progresaban. A él debemos el estudio de "los monstruos cardinales" y los "monstruos ordinales".

Con respecto al concepto de infinito en la didáctica de las matemáticas, D´Amore distingue dos líneas de investigación:

La línea A, que estaría compuesta por todas aquellas investigaciones que tienden a hacer más fáciles, más atractivos, y más simples los conceptos que han sido considerados tradicionalmente más difíciles para los alumnos.

La línea B, en la que estarían todas aquellas investigaciones que, según el autor, "se ponen de parte del alumno" y pretenden examinar cuáles son los motivos que hacen de la problemática del infinito una temática tan difícil de entender. Esta línea, en la que se engloban muchos trabajos de los actuales y en la que nos encontramos nosotros en el tema referente al límite, suele ir acompañada de pruebas empíricas, de entrevistas, etc.

D'Amote señala que el infinito potencial está presente en análisis, geometría y aritmética, mientras que el infinito actual está, además, presente en la lógica.

Tsamir y Tirosh (1992), entre otros, han estudiado las dificultades en relación con la adquisición del infinito.

Estos autores señalan las numerosas investigaciones sobre las diversas "escaleras" del infinito desde el no-numerable hasta el continuo. También señalan que un verdadero conocimiento sobre este tema solamente fue alcanzado en el siglo pasado.

El infinito también se ha estudiado mucho en geometría, con el caso de la infinitud de la recta o de los infinitos puntos de un segmento. Actualmente el debate sobre el concepto de infinito continúa en el aula, con las dificultades que presentan los alumnos para pasar desde la idea de conjunto denso hasta la de conjunto continuo, en el que los alumnos tienen que pasar de un conjunto numerable (Q) a un conjunto no numerable R. Este conjunto no numerable y sobre todo, la representación de los números reales en la recta real, instrumento que normalmente se suele usar cuando se presentan los conjuntos numéricos en secundaria, presenta algunas dificultades para los alumnos que hay que tener en cuenta. Estas dificultades ya fueron señaladas por Coriat y Scaglia (2000); aquí destacaremos las siguientes::

- La identificación punto-número, necesaria para asignar a cada punto de la recta real un número real es esencialmente aproximada o exige un buen conocimiento de R.

- Esta identificación, desde un punto de vista físico, no es exacta.

- Para que la representación sea completamente exacta es necesario que se dé una condición suplementaria, la cual exige que el número que se quiere representar sea construible con regla y compás. Esta condición puede ser sustituida por otra que relacionaría los valores 0 y 1 con el número que se quiere representar a través de una relación explicita.

Teniendo en cuenta estas dificultades Coriat y Scaglia (oc) concluyen que la representación de los números reales en la recta es más compleja que otras representaciones de los números reales. Por ello sugieren una serie de precauciones, que señalamos a continuación, a tener en cuenta cuando se enseña ésta:

"Estas precauciones atañen a la "naturaleza" de la recta y a las intuiciones que soportan una concepción de la recta geométrica, a las dificultades conceptuales y procedimentales de la asignación punto-número y a la imposibilidad de realizar esta asignación en su totalidad (salvo creencia soportada por una generalización)" (P. 18.)

En un intento por solucionar los problemas que presenta el aprendizaje del conjunto de los números reales, que es el primer constructo matemático en el que los alumnos de secundaria se encuentran con un proceso infinito, Coriat, Martínez y Baena (1993) idearon una estrategia didáctica basada en la mezcla de pigmentos de diferentes colores, la cual podría ser una buena aproximación a la introducción del conjunto de los números reales. Esta estrategia didáctica utilizó términos como mezcla tonal o tamaño de la mezcla. La estrategia consistió en mezclar, siguiendo determinados patrones, cantidades de pigmentos azul y amarillo, dando lugar a diferentes tonalidades de verde (estas tonalidades son cada vez mas indistinguibles entre sí). Este hecho pretendió hacer una equivalencia con el hecho de que la suma de los elementos, 1/2, ¼, 1/8, ..., da lugar a aproximaciones de 1 cada vez mejores.

Coriat, Martinez y Baena (1993) no recomiendan que se traslade esta estrategia didáctica directamente a clase, aunque consideran que ésta sí que puede ser un instrumento de ayuda para establecer condiciones que deben ser satisfechas en clase. Por este motivo sugieren la encapsulación como un buen método para aunar la creencia sobre los números reales que los alumnos tienen o desarrollan con el concepto matemático de número real. La encapsulación se refiere, por un lado, a conceptos y, por otro, a creencias. La encapsulación de conceptos supone que para adquirir el concepto de número real los alumnos tengan que pasar de un proceso finito a un proceso infinito. Estos autores sugieren dos modos de hacer esto: añadiendo términos (los valores ½ + ¼ + 1/8 + ..., cada vez se acercan más a 1) o dibujando (se dibujan líneas sobre la recta que representan los distintos números reales)

La encapsulación de creencias supone un proceso en el que a los alumnos se les debe inducir a usar sus intuiciones infinitistas como una ayuda para generar creencias matemáticas que son nuevas para ellos. A este proceso los autores le llaman exhausción, (distinto del método de exhausción usado por Eudoxo) y afirman que en un proceso infinito la exhausción aparece dos veces: la primera en un nivel manipulativo y la segunda en un nivel numérico.

El nivel manipulativo hace referencia a los límites percibidos y manipulativos de una materia. En la actividad propuesta por estos autores en la que se usaron pigmentos azules y amarillos, el nivel de manipulación de la exhausción es alcanzado cuando un profesor es incapaz de distinguir un color de otro que él mismo ha producido.

El nivel numérico hace referencia al límite numérico o algebraico de los individuos. En este caso no se puede continuar manualmente o no se distingue un tono de otro (en el caso de los pigmentos), pero uno imagina lo que puede ocurrir cuando mezcla dos pigmentos o cuando tiene que calcular el siguiente número de una sucesión.

La conclusión obtenida por Coriat, Martinez y Baena (1993) es que las intuiciones de límite e infinito pertenecen a un proceso de encapsulación didáctica que aparece en el aprendizaje del número real.

Siguiendo con las dificultades de los alumnos sobre el concepto de infinito Tsamir-Tirosh cita el ejemplo en el que se afirma que hay el mismo número de puntos en un cuadrado que en uno de sus lados.

D´Amore señala que hay investigaciones sobre el infinito en todos los niveles: primaria, infantil, escuela superior, señalando que son interesantes en todos los niveles pero sobre todo en la escuela superior.

La didáctica del infinito ha atraído también a los psicólogos del aprendizaje, señalando que son cada vez más los que se ocupan del concepto infinito, y lo clasifican dentro de lo que denominamos Pensamiento Matemático Avanzado. (PMA). Penalva (2001) afirmaba que las principales investigaciones, sobre el desarrollo cognitivo del estudiante, relativas al concepto de infinito, se centraron en analizar dificultades de tipo psicológico debidas al conocimiento intuitivo. A continuación, Penalva aclara lo que entiende por intuición y cuáles son las principales dificultades en el aprendizaje del infinito.

Penalva (2001) recogió el significado de intuición que Fischbein dio en 1982, calificándola como el sentido común elemental, una forma de conocimiento primitiva, opuesta a interpretaciones y concepciones científicas. También señala que entre las dificultades de tipo psicológico citadas anteriormente estarían: la compartimentación y el desdoblamiento.

La compartimentación fue definida por Vinner (1990, 1994) como dos piezas de conocimiento que son conocidas por el sujeto pero que permanecen sin relacionar en su pensamiento. Para superar esta compartimentación Penalva afirma que se debe insistir en el tándem uso-comprensión de los conceptos y no solo en uno de estos aspectos.

Respecto al desdoblamiento como obstáculo de aprendizaje Penalva (2001) recoge el trabajo de Duval (1983) que señala la dificultad que supone separar significados distintos que están asociados a un mismo concepto y reconocer los distintos significados que puede tener un concepto dependiendo del contexto en el que se sitúe.

A día de hoy el debate sobre el infinito actual continúa. Tall, D. y Tirosh, D. (2001) realizan un informe en el que recogen el estado de dicha cuestión.

En dicho informe manifiestan que los cardinales infinitos son aceptados generalmente por la comunidad matemática, pero por otro lado hay matemáticos que adoptan completamente la teoría de los infinitesimales del análisis no-estándar (Robinson, 1974), otros que niegan su existencia y afirman la preeminencia del análisis estándar, y un gran número de quienes no se ocupan de los problemas de fundamentación y simplemente tratan de usar las matemáticas con un propósito práctico. El análisis no estándar de Robinson (1974) se basa en el trabajo con una nueva estructura numérica denominada el sistema de los números hiperreales. Este sistema numérico está formado por los números reales a los que se le han incorporado los infinitésimos e infinitos. Estos números infinitésimos tienen sentido en el marco de una axiomática construida por Robinson, y que es más amplia que la axiomática de R aunque sea compatible con ella. En esta nueva estructura no se satisface el axioma de Arquímedes (véase más arriba, al comienzo de 1.1), puesto que el producto de un infinitésimo por cualquier número real estándar o por otro infinitésimo es siempre menor que cualquier fracción ordinaria positiva.

Respecto a la relación entre infinito, límite e intuición, Fischbein (1982) encontró que las concepciones intuitivas de los estudiantes sobre el concepto de límite parecían centrarse más en el infinito del proceso que en el valor finito del límite.

Planteó la siguiente cuestión: Coge un segmento de longitud 1m. Añádele la mitad más, después la mitad de la mitad, y así sucesivamente. ¿Cuánto vale su límite?

El 84 % de los estudiantes encuestados contempló que el proceso nunca podría finalizarse mientras que el 14 % sí consideró que terminaría. Solamente un 6% pensó que la suma de los segmentos podía ser 2, el 17% pensaba que sería menos de 2 y el 51% creía que daría infinito. Esta lucha sin fin con el concepto de infinito potencial, llevó a identificar una serie de obstáculos en la comprensión del concepto del límite.

(1) Nuestros esquemas intelectuales son genuinamente construidos sobre nuestra práctica y la idea de que "el todo podría ser equivalente a las partes" contradice nuestros esquemas mentales.

(2) La interpretación intuitiva del infinito es de pura potencialidad, que lleva a la conclusión de que todos los conjuntos infinitos tienen los mismos elementos.

La extensión de la idea de contar a los conjuntos infinitos da lugar a la teoría de cardinales infinitos, mientras que la correspondiente extensión de la idea de medir da lugar a diferentes formas de infinitos denominados "medida infinita" surgiendo así una amplia gama de contextos teóricos incluyendo el análisis no estándar.

Tall, D. y Tirosh, D. (2001) distinguieron entre infinitos "naturales", que nacen por extensión de experiencias finitas al caso infinito, e infinitos "formales" , enmarcados en la moderna teoría axiomática de las aproximaciones, más conocida como análisis no-estándar y que fue propuesto por Robinson en 1966 y desarrollada en 1974.

El análisis no estándar tiene una completa aritmética en la cual las cantidades infinitas tienen inversos infinitésimos pero los cardinales infinitos no. Esto revela no una contradicción en sí mismo del concepto de infinito, sino diferentes conceptos formales de infinitos, cada uno coherentes dentro de su propio contexto.

Tall y Tirosh (2001) explicaron también cómo a través de la experiencia (construida sobre imágenes que surgen de los conceptos definidos) aparecen teoremas que pueden ser demostrados mediante la deducción formal (usando definiciones).

Fischbein (1982) volvió a ocuparse del concepto de infinito, relacionándolo esta vez con la intuición. Para ello estableció la siguiente diferencia entre el infinito actual y el potencial: el infinito potencial responde a una interpretación natural e intuitiva del infinito, mientras que el infinito actual es contraintuitivo.

Klein (1911) se ocupó de la intuición y distinguió entre lo que denominó *"naive and the refined intuition"* (pag. 42); es decir distinguió entre las intuiciones primarias y las intuiciones secundarias. Las primeras están muy presentes durante el periodo de desarrollo del cálculo diferencial e integral, mientras que las segundas aparecen ya en los trabajos de Euclides el cual está basado en un conjunto de axiomas bien formulados y en demostraciones de propiedades y teoremas basados en esos axiomas.

Klein aclara la distinción entre las intuiciones primarias y secundarias afirmando que las primeras no son exactas, y que las segundas no son exactamente intuiciones y nacen del desarrollo lógico de axiomas.

Klein señala el distanciamiento existente entre la matemática pura (centrada en el establecimiento de axiomas y teoremas demostrados a partir de los axiomas anteriores) y la matemática aplicada (menos preocupada por los fundamentos y más centrada en la utilidad de sus resultados), y se posiciona al respecto señalando la importancia de combinar la intuición con la matemática pura.

Las diferencias existentes entre la matemática pura y la matemática aplicada se manifiestan en los profesores de matemáticas cuando tienen que enseñar un determinado concepto. Klein cita el caso del cálculo diferencial e integral, en el cual un profesor, al enseñar esta materia, se encuentra con el problema de confrontar dos posiciones completamente opuestas: por un lado el hecho de que la mente de los estudiantes no está lo suficientemente madura como para comprender estos conceptos y además solo se interesan por sus aplicaciones prácticas y por otro lado el hecho de introducir todo el rigor y formalismo matemático. Klein señala que este segundo punto de vista es en el que está presente en las universidades de Europa, y cita como texto modelo el Curso de Análisis de Camille Jordan. Klein afirma que en la enseñanza de las matemáticas es necesario ser menos abstracto al principio y hacer constantes consideraciones a las aplicaciones de lo que se explica, para a continuación ir introduciendo poco a poco el formalismo. De esta manera se consigue que los alumnos vayan comprendiendo de manera más fácil lo que se explica.

1.2.3 "Posición" del infinito: ¿pensamiento matemático elemental o avanzado?

En 1992 Tall afirmó que el pensamiento matemático avanzado se debía caracterizar por dos componentes: definiciones matemáticas precisas y deducciones lógicas de teoremas basadas en ellas. Estas características le diferenciarían del denominado pensamiento matemático elemental, centrado hasta ahora en conceptos más básicos de las matemáticas. Dicho autor señaló varios conceptos que debían situarse por su dificultad dentro del pensamiento matemático avanzado, entre ellos el concepto de límite y el de infinito.

Tall(1992) señaló que la distinción histórica realizada por los filósofos entre infinito potencial e infinito actual, debía ahora ser interpretada en términos de la teoría de los conjuntos infinitos de Cantor. Según ésta, un conjunto es infinito si puede ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio. Como ejemplo señala el conjunto de los números naturales, que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números pares. Siguiendo con el concepto de infinito Tall señala la existencia de diferentes nociones de infinito, las cuales clasifica en:

- Infinito potencial. El símbolo infinito (∞), que cuando se usa en la expresión x_n tiende a x, tiene un carácter potencial.

- Infinito actual. El infinito actual puede dividirse en tres nociones diferentes: cardinal infinito, ordinal infinito, medida infinita.

Respecto al cardinal infinito, Tall afirma que aparece cuando se extiende la noción de contar a través de la comparación de conjuntos mientras que el ordinal infinito aparece a través de la comparación de conjuntos ordenados. Según las ideas de Tall, la medida infinita surge cuando se amplía la noción de medir a un conjunto ordenado de cardinal mayor que el de los números reales.

Tall señala, a la vista de los tipos de infinitos definidos anteriormente, la necesidad de considerarlos cuando se estudian las intuiciones de los alumnos referentes al concepto de infinito, y la de no caer en el error de que solo es posible un tipo de infinito, el cardinal infinito.

En nuestro caso, el límite finito de una sucesión, admitimos la existencia de los dos tipos de infinitos considerados hasta ahora, el potencial y el actual.
El infinito potencial en el límite finito de sucesiones aparece cuando vamos dando valores a n y obteniendo sus correspondientes f(n), mientras que el infinito actual aparece cuando consideramos la sucesión y su límite como un todo, formando de esta manera un conjunto que en nuestro caso será numerable. (Este conjunto es numerable porque existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de los números naturales y el de los términos de la sucesión.)

1.2.4 Enseñanza del concepto de infinito

Respecto a la enseñanza del concepto de infinito, recogemos los trabajos de Tsamir y Tirosh (1999), Mamona-Dawns, J. (2001), Hitt (2003) y Penalva (2001).

En el primer trabajo, la enseñanza del infinito se realiza a través de la teoría de cardinales, mientras que, en el segundo, la enseñanza del concepto de infinito se aborda a través del concepto de límite de una sucesión. En el trabajo de Hitt se aborda el estudio del infinito a través de la relación que mantiene éste con el límite. Por otro lado en el trabajo de Penalva se aborda la comprensión de los alumnos sobre los conjuntos infinitos.

Pessia Tsamir estudia el concepto de cardinal infinito. Ella demuestra que las inconsistencias de los estudiantes responden a diferentes representaciones de conjuntos infinitos, las cuales pueden ser usadas para eliminar contradicciones en los diferentes razonamientos empleados y pueden guiar a los alumnos hacia el uso de la correspondencia uno a uno como el único criterio para la comparación de cantidades infinitas. La principal aportación de la autora es que la decisión de los estudiantes para afirmar si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos estará basada en la específica representación de los conjuntos infinitos presentados en el problema.

La autora describe también un estudio empírico en el que se usa una actividad en la que los alumnos producen reacciones contradictorias ante ella, observándose de esta manera su carácter problemático. Además de esto, la mayoría de los participantes evita las contradicciones inherentes a través de una aproximación informal al concepto de cardinal infinito, usando la correspondencia uno a uno como el único criterio de comparación de conjuntos infinitos.

Mamona-Dawns (2001) se ocupa del estudio de límite de una sucesión, en concreto del estudio del límite finito de una sucesión. En dicho estudio dedica un apartado al infinito, el cual aborda a través del ejemplo de una bola de ping-pong, que es lanzada desde una determinada altura y da una serie de botes, de manera que en cada bote, la altura que toma es la mitad de la altura que tomó anteriormente. El infinito aparece en algunas de las respuestas de los alumnos, respecto al número de botes que da dicha pelota. La autora señala que muchos alumnos consideran el infinito como el número que resulta de contar indefinidamente; de esta manera una sucesión infinita de términos tendrá un término final que en nuestro caso será cero. La autora señala también como un elemento para manejar el concepto de límite, la necesidad de comprender el conjunto de los números naturales. Afirma que si no se comprende bien dicho conjunto, no se comprenderá el concepto de una secuencia infinita.

Hitt (2003) abordó el estudio del concepto de infinito basándose en la relación que mantiene éste con el concepto de límite. Señala que, para aprender el concepto de límite, es necesario no solamente manejar los procesos algorítmicos asociados al mismo, sino también distinguir entre el infinito potencial y el infinito actual en las actividades en las que aparecen procesos infinitos. Hitt (2003) consideró al infinito un obstáculo, en términos de obstáculo epistemológico, que ha sido pasado por alto en el estudio del límite.

Hitt (2003) en relación con las dificultades observadas en los alumnos relativas al límite (y, en concreto, al límite infinito), señaló que estaban relacionadas con las dificultades que los mismos profesores manifestaban. Por este motivo sugirió una discusión entre profesores sobre lo que es el infinito actual y el infinito potencial, en un intento por solucionar los problemas que plantea el concepto de límite en los alumnos, en particular el límite infinito.

Penalva (2001) trabajó en la enseñanza de los conjuntos infinitos. La investigación realizada aporta información sobre cómo evoluciona la comprensión de los alumnos, sobre los conjuntos infinitos, en relación con las diferentes concepciones mantenidas por los estudiantes. Para Penalva (2001) es muy importante que los profesores conozcan los significados que los estudiantes dan a los contenidos de matemáticas con los que se está trabajando, así como las dificultades que surgen en relación con dichos conceptos.

Penalva (2001) considera necesario trabajar un amplio abanico de actividades en función de las distintas concepciones detectadas, dando de esta manera un tratamiento de la diversidad.

1.3 Propuestas didácticas para la enseñanza del límite

En este apartado analizamos algunas investigaciones que se han ocupado de la problemática de la enseñanza del concepto de límite. Tratamos este campo de investigación desde dos diferentes puntos de vista, según que los sujetos básicos sean alumnos o profesores.

En el primer caso presentamos investigaciones relevantes sobre propuestas didácticas en la enseñanza del límite. Recogemos las dificultades que plantea la definición de límite en los alumnos, y cuáles son sus reacciones ante ella, para, a continuación, establecer la secuencia didáctica que guíe la enseñanza del mismo.

En el segundo caso trabajamos con investigaciones que se han ocupado de analizar la práctica docente, estableciendo cuáles son los pasos seguidos por ellos y cuáles son sus estrategias didácticas, cuando tienen que enfrentarse a la explicación del concepto de límite.

1.3.1 Propuestas centradas en el trabajo con alumnos. Análisis de respuestas obtenidas a cuestiones relativas al concepto de límite.

Las dificultades para obtener una imagen del concepto de límite que sea fiable y robusta han sido reseñadas por muchos autores tales como Mamona-Downs (2001) o Vinner (1991). Este último autor añadía además que la solución a esta cuestión era algo difícil de conseguir.

Las dificultades con respecto a la noción de límite son de muy diferente índole. Mamona-Downs (2001) señala como fuente de dificultad las intuiciones previas que los alumnos tienen sobre el concepto de límite, coincidiendo en ello con afirmaciones previamente hechas por Cornu (1991). Cornu se refirió a intuiciones previas que los alumnos tenían antes de la enseñanza del límite, llamándolas concepciones espontáneas.

Mamona-Downs establece diferencias entre los diferentes tipos de límites (límite de una sucesión, límite de una función o derivadas entre otros), para a continuación centrarse en el análisis del límite de una sucesión. En concreto, analiza el límite finito de una sucesión.

El análisis de la definición de límite finito de una sucesión arroja la necesidad de manejar una serie de conceptos, los cuales son denominados prerrequisitos necesarios para manejar la definición. Entre los citados por la autora se encuentran:

-El número real, el cual es considerado como uno de los elementos más importantes. El estudio del número real puede abordarse desde una perspectiva estándar o desde una perspectiva no-estándar. En esta última estaría admitido el uso de infinitésimos, cuestión muy discutida a lo largo de la historia de las matemáticas. Algunos autores avalaron la existencia de los mismos y defendieron su uso en la enseñanza del cálculo (Robinson, 1966)

-La noción de función. A las sucesiones raramente se les considera como funciones de N en R. Se les considera más como proceso que como objeto matemático.

Además de estos prerrequisitos, la definición de límite exige una serie de destrezas que son:

1) Arreglárselas con los cuantificadores
2) Comparación de valores absolutos e inecuaciones.

Una vez observados estos prerrequisitos, la autora comienza a analizar la definición formal, la cual a pesar de considerarla un buen punto de partida, genera una serie de problemas, entre los que cita.

1) El estilo minimalista en que se expresa
2) El contenido de la definición (aspectos cognitivos y metacognitivos).

Además de estas dificultades señala las siguientes:

1) La desigualdad $|a_n - l| < \varepsilon$, la cual a pesar de ser un aspecto fundamental de la definición, ya que según la autora toda la información va encaminada a elaborar esta inecuación, los alumnos la realizan sin saber si l es el verdadero límite.

2) La lectura de la definición. Se plantea la cuestión de por qué se lee la definición de izquierda a derecha, cuando en realidad se trabaja con ella empezando desde la derecha.

3) Intervalo en lugar de valor absoluto. Se plantea la posibilidad de sustituir la desigualdad anterior por el intervalo $(l-\varepsilon, l + \varepsilon)$. Sin embargo la desigualdad puede ayudar a manejar el concepto de distancia.

4) Variable, constante y parámetro. En la definición de límite, l es una constante, a_n es variable y ε es un parámetro. No es una afirmación de verdad, sino que es la base de un proceso de decisión.

5) Intuiciones previas. Se observa la presencia de experiencias intuitivas en los alumnos, las cuales se mezclan con el nuevo formalismo dado a la definición.

6) Problemas con el valor N que aparece en la definición. Éstos pueden ser superados usando el sistema de representación verbal, como en la expresión: "*Dado ε, hay una cierta posición a partir de la cual, todos los términos de la secuencia distan de L menos de ε". (*P.277)

7) Problemas con el símbolo "ε" y con el cuantificador "∀ε" (para todo épsilon). Epsilon es visto como algo que no tiene relación con la sucesión.

8) La comprensión de la frase "para todo epsilon mayor que 0" tiene aspectos cognitivos y metacognitivos.

9) Gráfica de una sucesión. La gráfica de una sucesión puede ayudar a fortalecer el significado de la sucesión como una función. Un gráfico

puede sugerir un aspecto estático del límite mientras que lo que deseamos es un aspecto dinámico

10) La definición de límite sirve para comprobar si un valor es el límite o no de una sucesión, pero no nos dice de antemano cuál puede ser. Esto es un problema que se soluciona con la experiencia.

11) Análisis del significado de ε. En un principio parece independiente de la sucesión, pero después se observa que ε depende de N y se puede construir la función g: $\varepsilon \rightarrow N$ que asigna a cada valor de ε un valor de N. (Esta función es comentada por Claros, Sánchez y Coriat (2006) como parte esencial de los fenómenos presentes en la definición de límite finito de una sucesión.)

Una vez señaladas todas las dificultades anteriores, Mamona-Downs entra de lleno en la elaboración de una secuencia didáctica para la enseñanza del límite finito de una sucesión, cuya idea básica es la de permitir madurar las intuiciones de los alumnos mediante una clase debate en la que estas intuiciones ayuden a la comprensión de la definición formal.

La estrategia que se propone es identificar el corazón de la definición y construir por estadios desde ahí la definición completa.

En concreto la secuencia didáctica que desarrolla es la siguiente:

1) Iniciar y desarrollar la intuición a través de ideas en el desarrollo de una clase de discusión.

2) Introducir la definición formal y analizarla junto con las ideas que han aparecido en la primera fase. Trabajar con una representación particular del concepto de límite finito de una sucesión.

3) Revisar las opiniones hechas en la clase de discusión, comparándolas con la definición formal, especialmente a través de la representación elegida para acompañar o presentar la definición formal

Para llegar a la secuencia didáctica planteada, la autora propone dos cuestiones, las cuales desean simular con algún grado de posibilidad el camino en que los estudiantes argumentan especialmente en un contexto social, acerca de sucesiones y sus límites, como un problema para el cual no tienen ninguna preconcepción de tales objetos.

La regla de las cuestiones es inspirar debate sobre el problema planteado, más que llegar a dar ciertas respuestas.

Analizando las respuestas de los alumnos a las cuestiones, la autora afirma que cuando un alumno se encuentra por primera vez con la definición de límite, intenta dar sentido al simbolismo y acomodar dicha definición con sus ideas sobre el concepto de límite.

Por otro lado, algunos alumnos captarán la definición y otros tendrán problemas para comprenderla, llegando a no entenderla nunca. Pero si la definición es comprendida, es establecida como un camino apropiado para describir el proceso de “paso al límite”.

Después de trabajar con los alumnos la autora no espera que los alumnos sean capaces de construir por sí solos la definición formal. Esta afirmación está sustentada en las dificultades que se han señalado anteriormente.

Las estrategias pedagógicas sugeridas por la autora como consecuencia de su trabajo con alumnos son las siguientes:

1) Se sugiere una primera aproximación a la enseñanza del límite a través de las sucesiones de Cauchy. El que una sucesión sea de Cauchy o no, es una propiedad que una sucesión puede tener o no; el límite es entonces mostrado como el único asociado a la propiedad que la sucesión mantiene. Esta primera aproximación a la enseñanza del límite es criticada por Claros, Sánchez y Coriat (2009) que han puesto de manifiesto: (1) la equivalencia matemática entre la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy no tiene una contrapartida fenomenológica. Estos autores observaron que los fenómenos asociados a cada una de las definiciones seleccionadas no son

equivalentes. En el caso de los fenómenos de aproximación, los fenómenos a.s.i (aproximación simple intuitiva) y a.s.i.c (aproximación simple intuitiva de Cauchy) presentan diferencias notables; en el primer caso los valores de la sucesión se aproximan al candidato a límite (que puede ser un número negativo, cero o positivo), si éste se eligió acertadamente, mientras que en el segundo caso, son las diferencias entre los valores de la sucesión las que se aproximan a un único valor que tiene que ser cero para toda sucesión convergente. (2) También hay algunas diferencias simbólicas notables entre la definición de límite finito de una sucesión y la definición de Cauchy. En el primer caso hay un proceso infinito que asocia a cada valor de n un a_n, mientras que en el segundo caso hay un proceso infinito que asocia a cada valor de n y m, dos valores a_n y a_m. Este proceso infinito genera una sucesión que podríamos llamar doble, ya que exige que se generen dos términos de la sucesión. (3) La presencia de fenómenos diferentes en las dos definiciones consideradas abre un camino para el estudio diferenciado de cada una de las definiciones de límite de sucesiones que conocemos, ya que, como creemos haber establecido, cada definición de límite organiza fenómenos diferentes.

2) Otra aproximación es la de desarrollar una imagen, a partir de la definición, que altere las intuiciones originales que los alumnos tienen sobre el concepto de límite finito de una sucesión.

3) Respecto a los sistemas de representación señala que:

a) El sistema de representación gráfico puede ser considerado como un sistema donde toda la información que conlleva la definición puede ser fielmente embebida, a pesar de los problemas que pueden surgir con las sucesiones constantes.

b) Los argumentos hechos en la representación gráfica pueden ayudar a persuadir a los estudiantes a abandonar creencias tales como: término final existente en una sucesión infinita de valores; límite que es valor y posición a la vez; y límite nunca puede ser alcanzado, porque es la última posición.

c) El uso de la representación gráfica puede ayudar a alejar la idea de que el límite requiere un comportamiento monótono.

Garbin Dall'Alba, S. y Azcárate, C. (2001) también se ocuparon de la didáctica del concepto de límite. Esas autoras afirman que el concepto de límite es un concepto extremadamente difícil, debido a la diversidad de concepciones, y a la riqueza y complejidad de nociones que dicho concepto lleva involucradas.

Resumimos sus estrategias, todas ellas relativas a la enseñanza del límite:

1) Antes de trabajar de lleno con el concepto de límite puede ser útil conocer las ideas espontáneas, imágenes, intuiciones y experiencias que los alumnos tienen sobre dicho concepto. Esto hace que los alumnos conozcan la variedad de significados sobre la palabra límite y tomen conciencia del problema.

2) Un contexto apropiado para la enseñanza del límite es la resolución de problemas.

3) La introducción del concepto de límite a través de su definición formal, y las deducciones lógicas realizadas a partir de ellas, son insuficientes para que los alumnos comprendan el citado concepto.

4) La descomposición genética propuesta por Dubinsky puede ser una buena herramienta didáctica, pero para llevarla a cabo es necesario introducir el concepto imagen y la secuencia, según la cual los alumnos van realizando sus construcciones mentales sobre el concepto de límite, construcciones que son imprescindibles que los estudiantes hagan para alcanzar la comprensión del mismo.

5) El trabajo con el ordenador puede proporcionar un entorno en el que los estudiantes ganen apropiadas experiencias para construir el concepto de límite. Esta forma de trabajar (con el ordenador) puede generar sus propios obstáculos epistemológicos.

Cornu (1991), después de haber identificado los obstáculos epistemológicos que históricamente ha debido superar el concepto de límite hasta llegar a su definición actual, y notar la posibilidad de que esos mismos obstáculos se den en los alumnos, señala la importancia de las ideas previas que los alumnos poseen sobre el concepto de límite, ideas que están influenciadas por el lenguaje usual y su propia experiencia. Para intentar superar estas dificultades apunta una serie de sugerencias didácticas:

1) Antes de comenzar con la enseñanza del concepto de límite es útil conocer las ideas previas, llamadas, por Cornu, concepciones espontáneas: las imágenes, intuiciones y experiencias que los alumnos poseen. Esto puede ayudar a que conozcan la variedad de significados sobre la palabra límite y que tomen conciencia del problema con el que se está trabajando.

2) La resolución de problemas puede ser un contexto apropiado para la enseñanza del límite

3) Una secuencia de enseñanza basada en definiciones y deducciones lógicas a partir de las definiciones dadas, parece no ser muy adecuada para conseguir una comprensión del concepto de límite por parte de los alumnos. Como consecuencia de esto se producen diferentes aproximaciones a la enseñanza del concepto de límite: Douady (1986) propone su teoría tool-object en la que el concepto se usa en principio como herramienta, para adquirir cierta experiencia, y a continuación trabajar con él como objeto matemático.

   Cornu cita también a Dubinsky (1991), el cual propone la denominada descomposición genética del concepto de límite; para introducir el concepto de límite de una sucesión, primero se debe introducir el concepto imagen y la secuencia de las construcciones mentales que los estudiantes han de elaborar necesariamente.

4) El uso del ordenador cuando se trabaja con el concepto de límite puede genera experiencias beneficiosas para los alumnos, aunque también puede generar nuevas dificultades que deberíamos enunciar y tener en cuenta.

Przenioslo (2005) reconociendo las dificultades que los alumnos de secundaria y primeros cursos de universidad tienen en torno a la comprensión del concepto de límite propone nuevos métodos de introducirlo, prestando atención no solo a las concepciones particulares que los alumnos poseen sino a algunos hechos y principios más generales.

Entre estos hechos la autora señala los siguientes:

-Representaciones visuales, las cuales juegan un papel importante en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

-Desarrollo del concepto imagen, el cual puede estar considerablemente influenciado por los primeros ejemplos que se plantean a los alumnos. La autora aboga por la presentación de una amplia gama de ejemplos a partir de los cuales los alumnos puedan construir y desarrollar no solo la definición sino también situaciones apropiadas en las que se emplee el concepto de límite.

Teniendo en cuenta lo anterior la autora propone la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una sucesión a través de una clase guiada en la que se fomenta la discusión alrededor de un conjunto amplio de ejemplos provocativos, problemas y cuestiones.

Entre los problemas que se discuten, uno de ellos juega el papel de principal y, el resto, está diseñado con dos fines:

1) Enriquecer las discusiones alrededor del problema principal.
2) Dar al profesor la posibilidad de poner al descubierto, aquellos aspectos de la convergencia de sucesiones, que están normalmente ocultos o son malinterpretados a través de concepciones espontáneas de los estudiantes.

Para que esta nueva estrategia didáctica tenga éxito la autora señala una serie de requisitos previos que los alumnos deben tener. Estos requisitos ya fueron señalados por Mamona-Downs (1990); entre ellos está el de comprender el concepto de función y ver las sucesiones como un caso particular de funciones. Los estudiantes también deberían estar familiarizados con el concepto de subsucesión y proximidad. Además puede ser también necesario el manejo de cuantificadores e inecuaciones con valor absoluto.

El desarrollo de la enseñanza del concepto de límite se produce en tres pasos:

- El primer paso corresponde al desarrollo de concepciones relativas al significado de la frase "*a partir de un cierto n*". Algunos de los problemas propuestos se dedican a arrojar luz sobre esta frase. En este apartado se discuten observaciones que provienen de los ejercicios que se presentan. Entre estas observaciones podemos citar las siguientes (página 87):

"a partir de un cierto n los términos se aproximan a uno pero no exceden de 1"

" a partir de un cierto n los valores de la secuencia son no solo menos diferentes de uno sino también que esta diferencia se va haciendo cada vez más pequeña".

- El segundo paso supone comprender nociones relativas a la idea de entornos de longitud arbitraria alrededor del valor del límite. En este apartado se fija un entorno del límite y se dibujan los valores de la sucesión que quedan dentro de la franja determinada por los extremos del entorno fijado alrededor del límite. Se pretende en este estado que los alumnos sean capaces de reconocer que las sucesiones que tienen límite cumplen que todos sus valores a partir de un cierto lugar quedan dentro de una franja de valores determinada por el límite.

- El tercer paso pretende desarrollar conceptos relativos al término "alrededores". En este paso se favorece la discusión entre los alumnos en torno a la siguiente cuestión:

Cada entorno que tomamos alrededor del límite contiene casi todos los términos de la sucesión. Esto acarrea una discusión respecto a cuántos términos de la sucesión se permite que queden fuera de este entorno.

Después de que los estudiantes han desarrollado concepciones de sucesiones y han conectado estas concepciones con la idea de franja y la idea de entorno alrededor del límite, se puede introducir el término convergencia y límite de una sucesión. Se les invita además a que los propios alumnos den su propia definición de límite de una sucesión.

A continuación se formula una definición formal de límite. Esto se hace después de haber trabajado con sucesiones convergentes concretas, cuyo límite era uno.

Przenioslo (2005) concluye que la enseñanza basada en las herramientas didácticas anteriormente propuestas, permite desarrollar concepciones a los estudiantes que poco a poco se van aproximando al significado del concepto de límite de una sucesión. Los estudiantes pueden adquirir las concepciones en torno al límite y llegar a adquirir la definición formal porque los saltos entre unas concepciones y otras no son muy grandes.

Otra autora (Navarro, 2002) propuso una estrategia metodológica basada en el uso del ordenador. Para ello trabajó con el programa Matlab 5.3, en el cual realizó una serie de pasos, primero trabajó con los alumnos para que alcanzasen una imagen visual del concepto de límite de una sucesión para que a continuación llegasen por sí mismos a dar una definición formal de límite de una sucesión.

Los objetivos de la tesis de Navarro (2002) se pueden concretar en dos puntos:

a. Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento del proceso de convergencia de una sucesión.

b. Presentar una propuesta metodológica que permita la comprensión del concepto de convergencia de una sucesión numérica y su introducción en cursos tempranos donde los alumnos aún no tienen la madurez necesaria que requiere la definición formal.

Para la consecución del primer objetivo se realizaron tres pasos que se presentan a continuación:

1) Se presentó el proceso de convergencia de una sucesión de una forma visual. Este modo de presentación hizo que el alumno se sintiera inclinado a manejar por sí mismo, de una forma intuitiva, nociones y razonamientos de tipo infinito que generalmente suponen un obstáculo difícil de superar.

2) Se diseñó una entrevista clínica, semiestructurada y de tipo socrático que acompaña al alumno en su razonamiento y hace que éste vaya progresando, pasando de un nivel a otro. Esta entrevista ha permitido determinar los descriptores de los distintos niveles de razonamiento de acuerdo con Van Hiele y situar a cada estudiante entrevistado en su correspondiente nivel.

3) Se diseñó un test escrito para estudiar grupos de alumnos más numerosos. Los resultados obtenidos en este test corroboraron lo obtenido en la entrevista individual y permitieron clasificar de manera automática a cada alumno en su nivel correspondiente.

Para la consecución del segundo objetivo se empleó la entrevista clínica diseñada en el primer objetivo. La autora consideró esta entrevista como una buena propuesta metodológica para la enseñanza del concepto de sucesión convergente. Esta entrevista pretendió que el alumno fuese realizando la construcción del concepto de sucesión convergente, de manera que al final fuese capaz de expresar verbalmente su propia definición de sucesión convergente y de límite de una sucesión.

Para conseguir esto, además de apoyarse en el uso del ordenador y del programa Matlab 5.3, la autora rebaja el lenguaje matemático que se usa habitualmente cuando se introduce el concepto de límite de una sucesión. Como ejemplo de esto usa expresiones como *"nube de puntos"* en lugar de límite de una sucesión o *"proceso de estabilización"* para referirse al proceso de convergencia. (Navarro, 2002, p. 171.)

En la primera parte, la autora introduce el concepto de límite y solo pretende que los alumnos observen las imágenes que se producen en el ordenador y vayan razonando sobre ellas. En este primer momento los alumnos no conocen la expresión simbólica de la sucesión con la que se trabaja. En la última parte de la propuesta metodológica se presenta la expresión simbólica de la sucesión.

Los descriptores que la autora ha hallado y que permiten clasificar el nivel de razonamiento de los alumnos, se detallan a continuación.

- Descriptor de nivel 1. En este nivel los alumnos reconocen la nube de puntos (esta nube de puntos representa los valores de la sucesión con la que se trabaja) con todas sus propiedades pero no son capaces de usar datos o elementos ajenos a la nube de puntos. A estos alumnos les basta observar un número grande de puntos para inducir cual es el valor del límite.

- Descriptor de nivel 2. Los alumnos que se encuentran en este nivel de razonamiento reconocen que el conjunto de valores de la sucesión es infinito y empiezan a fijarse, una vez que los valores de la sucesión son representados, en aquellas zonas que más información les pueden proporcionar.

- Descriptor de nivel 3. Los alumnos en este nivel son capaces, observando la nube de puntos que representa la sucesión, de distinguir si la sucesión presentada tiene límite o no, y además dar una definición de límite de una sucesión.

Navarro (2002) recoge el trabajo de Van Hiele, el cual reconoció cinco niveles de razonamiento. A pesar de reconocer cinco niveles, consideró más importantes los tres primeros. Respecto a los dos últimos afirmó que eran difíciles de distinguir y dejó para un trabajo posterior la determinación del nivel 4 en el caso de la convergencia de sucesiones.

Estos niveles se han aplicado sobre todo a cuestiones geométricas y la forma más habitual a la hora de hablar de los niveles de razonamiento de Van Hiele es la de distinguir cuatro niveles de razonamiento.[1]

Otra autora que estudió en detalle el concepto de límite fue Blázquez (2000). Una de sus hipótesis de investigación fue la siguiente (página 44):

La noción de límite lleva consigo graves dificultades de comprensión, sea cual sea la presentación que se haga. Conocer dichas dificultades, junto con las creencias que los alumnos tienen sobre el límite es una herramienta eficaz para su enseñanza.

La autora, además de señalar las dificultades relacionadas con la enseñanza del límite, propone la elaboración de secuencias de enseñanza- aprendizaje para detectar dificultades, ponerlas de manifiesto y superarlas para obtener un aprendizaje significativo. Para ello definió las categorías de contenido matemático como organizadores del contenido, los cuales controlan la relación del objeto de enseñanza con el profesor. Estas categorías son definidas como los contenidos necesarios para desarrollar el concepto de límite funcional y poder así asegurar la comprensión del mismo. Las categorías necesarias para desarrollar el concepto de límite en una clase de bachillerato de ciencias sociales (1º y 2º), según Blázquez (2000, capítulo IV, pp. 26-27), son las siguientes:

---

[1] Nivel 1 (de reconocimiento visual). Los alumnos perciben las figuras geométricas como objetos individuales, y no son capaces de generalizar las características que reconocen en ellas a otras de su misma clase.
Nivel 2 (de análisis). Los estudiantes en este nivel presentan un avance en sus razonamientos respecto al nivel anterior. Ellos han cambiado su forma de mirar las figuras que se les presentan, son conscientes de que estas figuras están formadas por partes y que tienen ciertas propiedades. También son capaces de reconocer que las figuras con las que están trabajando son o pueden ser representantes de alguna familia.
Nivel 3 (de clasificación, de relación). En este nivel los alumnos comienzan a desarrollar la capacidad de razonamiento formal. Han adquirido la habilidad para conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras.
Nivel 4 (Deducción formal). Los alumnos que se encuentran en este nivel pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones toman sentido y son el único instrumento para verificar la verdad de una afirmación. Los alumnos aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisa y también que existan definiciones equivalentes de un mismo concepto.

NA: *Contenidos sobre números y aproximación:*

NAR: *Número racional y su representación en la recta.*

NAI: *Existencia de números irracionales.*

NAAR: *Aproximación de números racionales.*

NAAI: *Aproximación de números irracionales.*

NAE: *Error absoluto de aproximación.*

NARE: *Representación en la recta del error y su aproximación.*

PI: *Contenidos sobre procesos infinitos.*

PICI: *Conjuntos infinitos.*

PISe: *Series. Expresión decimal de un número.*

PID: *Densidad de los números racionales.*

PISu: *Sucesiones.*

F: *Contenidos sobre funciones.*

FC: *Función como dependencia entre magnitudes.*

FR: *Representación de funciones: gráfica, tabular, verbal, algebraica.*

FCR: *Paso de unos sistemas de representación a otros.*

FE: *Funciones elementales.*

FP: *Características básicas de las funciones: dominio, periodicidad, simetrías, puntos de corte, monotonía, acotación y extremos, concavidad y convexidad.*

FL: *Características de las funciones relacionadas con el límite: tendencias, asíntotas, continuidad.*

FO: *Operaciones con funciones.*

LS: *Contenidos sobre límites secuenciales.*

LSN: *Estudio tabular de las tendencias numéricas.*

LST: *Discriminación entre tendencias finitas e infinitas.*

LSC: *Aritmética de límites.*

LF: *Contenidos sobre límite funcional finito e infinito.*

LFN: *Necesidad del límite.*

LFI: *Idea ingenua de límite funcional.*

LFA: *Idea precisa de límite como aproximación óptima.*

LFIL: *Ilustraciones del concepto en sus registros numérico, algebraico y gráfico.*

LFT: *Relación tendencia y límite.*

LFP: *Propiedades de límites.*

LFC: *Cálculo con límites finitos e infinitos.*

Además de esto, Blázquez y Ortega (2002) propusieron trabajar con una nueva definición de límite, por ello consideran que la forma más adecuada de presentar el límite finito es a través de lo que denominan aproximación optima. Dicha presentación del límite permite aprovechar el aspecto intuitivo y cercano a la realidad sin reducir el límite a una simple aproximación. El empleo de esta definición de límite implica que en principio la representación a utilizar sea numérica y un trabajo previo con aproximaciones y tendencias. Para estos autores los términos aproximación y tendencia se definen de la siguiente manera (página 14):

"Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número son cada vez menores.

La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan mas que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable".

Una vez trabajados con los alumnos estos términos y habiendo trabajado con sucesiones, se pasa a trabajar con funciones, momento en el que se da una nueva definición de límite finito de una función en términos de tendencias.

1.3.2 Propuestas centradas en el trabajo con profesores. Análisis de su tarea docente.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000), presentan "la otra cara" en los problemas de la enseñanza del límite: analizan la tarea de un profesor que tiene que enseñar el concepto de límite. Para ello se preguntan qué tipo de conocimiento moviliza el profesor cuando se enfrenta con la tarea de enseñar el concepto de límite de una función y las dificultades con las que se encuentra.

Para llevar a cabo ese trabajo tuvieron que analizar dos aspectos: el pensamiento del profesor, y el conocimiento de su práctica en la enseñanza de un conocimiento matemático determinado.

Las dificultades que surgen cuando se estudia el pensamiento del profesor son: la primera, de naturaleza epistemológica, la segunda se relaciona con el modo de analizar el pensamiento del profesor.

Para solventarlas, se apoyaron en el marco teórico conocido como enfoque antropológico de lo didáctico desarrollado por Yves Chevallard (1998), que se enmarca dentro del programa de investigación más general conocido como la didáctica fundamental, iniciada por Guy Brousseau (1983). Ésta se propone analizar el saber matemático como vía de acceso para el estudio de los fenómenos didácticos, partiendo del supuesto básico de que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático fundamental.

Se propone la necesidad de modelizar el conocimiento matemático a través de un modelo construido por la propia didáctica de las matemáticas.

La noción de organización matemática, que Chevallard denomina *praxeológica matemática u obra,* permite modelizar el conocimiento matemático como actividad humana.

Como toda actividad responde a unas razones de ser específicas, los tipos de problemas y técnicas asociadas a una tarea determinada constituyen un "saber-hacer" que hacen referencia a la práctica o *praxis* de la actividad. Los discursos que describen, justifican y explican estas técnicas se denominan tecnología, y el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha tecnología, la teoría. Tecnología y teoría constituyen el logos para la praxis y se corresponde con el "saber". Praxis y logos se hallan íntimamente relacionados y la articulación de ambos permite dar forma a la praxeologia matemática. Se trata pues de una modelización estática del trabajo

Se propone, además, un modelo dinámico o funcional de dicha actividad que permitirá contar el proceso de construcción de una obra matemática. El estudio se refiere tanto al proceso de creación o recreación de una organización matemática como al producto de dicho proceso.

Proceso y producto aluden a dos aspectos distintos del trabajo matemático pero inseparables. Existe una dialéctica entre ambos, siendo, de hecho, como dos caras de una misma moneda. El proceso de estudio tendrá distintas dimensiones o momentos distribuidos de manera dispersa a lo largo del trabajo que estamos comentando.

El proceso de estudio se organiza a través de seis momentos distintos: Momento del primer encuentro, momento exploratorio, momento del trabajo de la técnica, momento tecnológico-teórico, momento de la institución, momento de la evaluación. (Página 358).

Una vez desarrollado el proceso de estudio sobre el concepto de límite, se entra de lleno en el análisis de la actividad del profesor. Espinoza y Azcárate describen con cierto detalle sus opiniones sobre ella:

La actividad del profesor se puede describir como un conjunto de organizaciones praxeológicas que conllevan un conjunto de tareas, alrededor de las cuales se desarrollan y organizan técnicas, tecnología y teoría. Se trata de problemas didácticos, técnicas didácticas, tecnología y teoría didáctica, aunque frecuentemente aparezcan implícitos o vagamente descritos dentro de dicha actividad.

El profesor tiene una primera tarea de construir organizaciones matemáticas, pero está limitado por el currículo oficial.

El segundo tipo de tareas consiste en guiar la reconstrucción escolar de dicha organización matemática. Esta reconstrucción puede variar de un profesor a otro.

Una vez realizado el estudio teórico sobre el concepto de límite y sobre el trabajo del profesor en relación con dicho concepto, se propone una metodología de investigación que permita estudiar las técnicas didácticas que utiliza el profesor para dirigir y gestionar el estudio del límite de funciones en la enseñanza secundaria y el tipo de reconstrucción que realiza de la organización matemática propuesta por los cuestionarios oficiales de esta institución escolar. Habría que describir las tecnologías que utiliza el profesor para describir, justificar, dirigir y pensar su práctica docente.

Las autoras introducen el término 'epistemología espontánea' para describir aquellos elementos que se emplean de manera natural en el ejercicio de la actividad docente.

Aunque el proceso de estudio no empieza en el aula, sí será ésta el lugar donde se centre la investigación.

La metodología de investigación que se llevó a cabo, se concreta en los siguientes pasos:

1) Análisis de los libros de texto.

2) Trabajo con un profesor ("A") que impartía matemáticas de 2º B.U.P, que aceptó ser grabado, y entrevistado.

3) Trabajo con producciones de alumnos; las autoras recogieron apuntes de clase, exámenes sobre el tema de límites de funciones, y respuestas al cuestionario elaborado por ellas mismas.

Después de todo ese proceso se eligió un segundo profesor ("B") con el que se siguieron los mismos pasos anteriores.

El análisis didáctico-matemático que se realizó fue el siguiente:

1) Se exploraron algunas organizaciones matemáticas construidas en torno al "límite" a lo largo de la historia de las matemáticas.
2) Análisis del concepto de límite de una función desde el punto de vista oficial.
3) Análisis de los libros de texto donde aparece el concepto de límite de una función. (Dimensión estática.)
4) Análisis de la dimensión dinámica del proceso: las grabaciones, dispositivos didácticos y observaciones de campo realizadas.
5) Análisis de las técnicas didácticas utilizadas por los profesores observados para dirigir el proceso de estudio.
6) Análisis de la tecnología didáctica de los profesores: las entrevistas.
7) Síntesis, relación de resultados y conclusiones del estudio.

Las conclusiones que pueden obtenerse del trabajo de Azcarate y Espinoza (2000), en torno al concepto de límite de función, es que hay dos organizaciones matemáticas incompletas y desconectadas entre sí; la primera es denominada organización matemática relativa al álgebra de límites, y responde al cálculo de límites de una función partiendo del supuesto previo de su existencia, y la segunda es denominada organización matemática relativa a la definición del objeto límite de función y obedece a la cuestión de la enseñanza del límite. En esta última encontraríamos la definición ε-δ, por entornos o sucesiones.

Pese a tratarse de profesores distintos y de aulas diferentes, las autoras constataron que las organizaciones matemáticas en torno a los límites de funciones efectivamente construidas poseen en esencia las mismas características. Ambas obedecen a la única cuestión del cálculo de límites de funciones, partiendo de la base de que existe o es infinito.

La mayor dificultad a la que se vieron enfrentados ambos profesores fue la de escoger los elementos tecnológicos adecuados para el tipo de actividad que proponían a la clase.

En resumen las autoras afirman que las reconstrucciones realizadas son dos versiones de una misma organización matemática, debido a la gran influencia que ejercen las restricciones institucionales.

Los dos profesores mostraron una serie de semejanzas entre las que se destacan las siguientes: no describieron el concepto de límite ni al principio, a modo de introducción, ni al final como modo de síntesis. También se nota en ambos una ausencia de momentos teóricos, exceptuando algunos casos.

La estrategia del profesor A es catalogada por Espinoza y Azcárate (2000) como la del eterno "momento exploratorio" en la que el proceso de estudio se va haciendo sobre la marcha.

La estrategia del profesor B es introducir el concepto de límite de funciones a partir del concepto de límite de sucesiones. Es una técnica muy utilizada y antigua. La estrategia del profesor B es catalogada por la del "eterno momento de la institucionalización". El profesor se convierte en un narrador.

En este documento encontramos (página 365) la expresión “*fenómenos matemáticos locales*”, relativos al estudio realizado en el aula. Entre estos fenómenos se encuentran la contradicción entre la tecnología sabia y la práctica de cálculo de límites o los efectos en la gestión del proceso didáctico de la ausencia de una tecnología para el álgebra de límites.

1.4. Dificultades en torno a la idea de límite

El concepto de límite, presente en los programas del bachillerato español desde los años treinta hasta nuestros días, se sitúa por su importancia como un elemento clave para el desarrollo de otros conceptos como puedan ser la derivada o la integral. Sierra, González y López (1999) señalan que los profesores de enseñanza secundaria manifiestan las dificultades que surgen en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, y que las investigaciones, realizadas en educación matemática fuera de nuestro país, han confirmado que los alumnos no adquieren una comprensión clara de estos conceptos.

1.4.1 Dificultades respecto al análisis matemático

La palabra análisis tiene diferentes significados en diferentes países. Tall (1992) recoge los siguientes significados del término:

1) Análisis informal, caracterizado por ideas informales como la de tasa de variación, reglas de diferenciación y de integración como proceso inverso a la diferenciación, y cálculo de áreas y volúmenes como aplicaciones de la integración.

2) Análisis formal, ideas formales de completitud, definición de límite ε-δ, continuidad, integral de Riemann y deducciones formales de teoremas.

3) Análisis no-estándar, basado en las ideas de infinitésimos e infinitos, como números inversos.

4) Aproximaciones en el ordenador, que usan manipulaciones numéricas, gráficas y simbólicas, con o sin programación.

Tall señala que en muchos países la primera acepción del término se enseña en educación secundaria, mientras que la segunda se enseña en un nivel superior.

A pesar de esto, observa casos en los que la segunda acepción es enseñada en secundaria, como es el caso de la Grecia actual (años noventa).

Tall señala que es en el análisis donde los alumnos se encuentran por primera vez con un concepto que involucra procesos infinitos, como es el caso del límite, y que en los últimos tiempos hay un descontento general con los resultados que obtienen los alumnos en un curso de análisis. Todo esto llevó a que se produjera en los años noventa en Estados Unidos un movimiento denominado "Calculus Reform Movement" con un gran desarrollo en tecnología pero con poca inversión en investigación cognitiva. Este movimiento generó muchas publicaciones en el campo del análisis matemático y sobre todo muchas publicaciones en torno al concepto de límite.

En torno a las dificultades que presenta el concepto de límite, Tall recoge las siguientes:

- Dificultades suscitadas por la lengua: términos como *límite*, *tender* o *aproximarse* tienen un significado ordinario que choca con el concepto formal. Estas dificultades ya fueron señaladas por Monaghan (1991) y Cornu (1991)
- El proceso de límite no se puede transformar en una simple operación aritmética o algebraica, sino que involucra un proceso infinito.
- Una variable que se hace cada vez más pequeña puede ser interpretada como infinitésimo, que es una cantidad variable arbitrariamente pequeña.
- La cantidad de N haciéndose arbitrariamente grande sugiere la idea de números infinitos.
- Dificultades relacionadas con la idea de si el límite es alcanzado o no.
- Confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

Ante esta serie de inconvenientes, Tall (1992) propone dos métodos para actuar de los alumnos. El primero consistiría en reconciliar lo antiguo y lo nuevo mediante una reconstrucción de una nueva estructura coherente de conocimientos; el segundo sería mantener los elementos de conflicto en dos compartimentos separados y de manera que no sean simultáneamente evocados.

Los alumnos suelen decantarse por esta última postura manteniéndose de este modo una separación entre la teoría y la práctica.

Otra aportación de Tall referente al análisis, es una crítica de cómo se aborda el concepto de límite en el programa francés y en el programa estadounidense. En el programa francés, los libros dedican generalmente una lección al concepto de límite en el que se incluye una definición formal, una afirmación de su unicidad y teoremas relativos a operaciones aritméticas. Los ejercicios sin embargo no se concentran en el concepto de límite, sino que se concentran en operaciones como límite de la suma, del producto y operaciones aritméticas. Este hecho es constatado también por Cornu (1992).

En el programa estadounidense, sin embargo, se produce una división entre el conocimiento procedimental (sustituir variables en funciones continuas, factorizar y cancelar, usar la regla de l'Hôpital para resolver indeterminaciones que aparecen en el cálculo de límites) y el conocimiento conceptual.

En Tall (1992) hallamos recogidas las afirmaciones de Ervynck, el cual concluía que muchos estudiantes tienen una comprensión prerrigurosa del concepto de límite pero pocos alcanzan la comprensión de la definición rigurosa, y las de Davis y Vinner, que afirman que los ejemplos específicos, en particular, las sucesiones monótonas, dominan el aprendizaje y esto hace que domine el concepto imagen de los estudiantes sobre el límite de una sucesión.

Tall advierte las siguientes características en los alumnos:

- Normalmente no emplean argumentos globales, sino que usan diferentes argumentos dependiendo del caso, de manera que pueden aparecer conflictos pero que están en distintos compartimentos. Esto ocurre con el caso del límite en el que pueden aparecen dos ideas contradictorias mantenidas por el mismo alumno.

- Aprenden las cosas que ellos necesitan para pasar el examen. Cuando la técnica que usan para resolver un ejercicio falla, inventan una nueva que no es casi nunca consistente con la antigua.

Teniendo en cuenta estas características y los resultados que produce la enseñanza del cálculo, Tall señala que es posible que el énfasis puesto en la enseñanza de procedimientos en secundaria condicione el desarrollo posterior del análisis.

Conciliar los aspectos formales e informales del análisis no es tarea fácil. Algunos autores optaron por realizar esta conciliación, como Williams (1991), que realizó una experiencia en la que confrontaba el concepto imagen de límite con la definición formal. A través de entrevistas con los alumnos intentaba confrontar los conocimientos que los alumnos tenían y producir un conflicto entre los nuevos ejemplos que se presentaban y ese concepto imagen.

En la literatura referente al concepto de límite esto no siempre fue así y algunos autores optaron por desdeñar una aproximación al concepto de límite en favor de otra. Esto puede suceder incluso con la enseñanza propuesta por un país; por ejemplo en Grecia se hace uso de los métodos formales de la definición de límite ε-δ, lo cual lleva emparejado una reducción de los métodos infinitesimales. A pesar de esto se producen dificultades de comprensión en los alumnos respecto al concepto de límite. Como consecuencia de este uso, los griegos conciben el límite como un objeto más que como un proceso dinámico. Además algunos autores griegos, señalan la existencia de un conflicto entre la aproximación dinámica y la aproximación estática, sugiriendo que el primero es más natural a su intuición original.

Una solución a lo anterior sería no guiar el análisis y el concepto de límite, hacia el análisis estándar y formal, sino hacia el análisis no estándar. Tall cita los estudios de Sullivan (1976), el cual dio evidencias del aparente éxito de tales aproximaciones.

Para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en lo referente al cálculo, Tall (1992) propones varias hipótesis de trabajo: Aprendizaje activo; Construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización; Gráficos en el ordenador; Programas de ordenador; y Software de manipulación simbólica. Pasamos a describir cada una de ellas.

-*Aprendizaje activo*. Tall (1992) recoge los trabajos de Cummins (1960), que realizó una experiencia con alumnos basada en el uso de materiales. Los resultados comparativos entre los estudiantes del experimento y los estudiantes de un grupo de control, arrojaron las siguientes conclusiones: los alumnos de uno y otro grupo obtienen los mismos resultados en el manejo de las operaciones básicas, sin embargo obtienen mejores resultados en cuestiones que requieren una mayor comprensión conceptual, en el grupo en el que se usaron materiales.

-*Construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización*. Tall recoge también la aportación de Dubinsky, el cual propone trabajar los conceptos del análisis de una manera particularmente sofisticada. Según Dubinsky los alumnos deben trabajar en grupos y reflexionar sobre la construcción de programas, en un lenguaje de programación, los cuales deben estar diseñados para mejorar el crecimiento del pensamiento matemático. Por ejemplo las funciones pueden ser especificadas como procedimientos y entonces pueden ser concebidas como objetos que se usan para introducir otras funciones. La encapsulación de la función proceso como un objeto es vista como un paso fundamental en el proceso de aprendizaje. La encapsulación permite a un proceso ser concebido como un proceso y como un objeto que podrá ser manipulado en un nivel superior. Este diseño es uno de los pocos en el movimiento de la reforma del cálculo que es consciente de las dificultades e intenta resolverlas.

-Gráficos en el ordenador. Muchas experiencias con ordenadores se diseñan para construir intuiciones que posteriormente deberán ser formalizadas. Las gráficas en el ordenador pueden hacer que ayuden a los alumnos a observar algunas propiedades de las funciones como diferenciabilidad. A pesar de la utilidad de las gráficas, Tall (1986) afirma que la potencia de los gráficos tiene que ser completada con aproximaciones simbólicas y numéricas, y que el éxito en cálculo está ligado a la versatilidad de representaciones y al movimiento entre unas y otras.

-Programas de ordenador. Los programas de ordenador son vistos como un problema extra que puede incrementar la dificultad de las matemáticas, y por otros es visto como una actividad constructiva que permite a los estudiantes aprender cuando programas los algoritmos requeridos. En el trabajo de Dubinsky con estudiantes, se les animaba a realizar sus construcciones matemáticas y a reflejar en ellas su comprensión de las mismas. En una comparación con estudiantes que siguieron un curso tradicional, este autor fue capaz de mostrar que los estudiantes podían transformar tan bien o mejor que los estudiantes que recibieron una enseñanza tradicional. Sin embargo, también comentaba que estas comparaciones tenían poco valor.

-Software de manipulación simbólica. Estuvo muy extendido en la enseñanza del análisis; en la actualidad se manejan los siguientes programas: Derive, Cabri, Geogebra, entre otros. Un ejemplo del uso del ordenador los encontramos en Palmiter (1991), el cual usó el software Macsyma para enseñar a un conjunto de estudiantes de primer curso, cálculo integral durante cinco semanas, mientras que en paralelo se estudiaba durante 10 semanas con otro conjunto de estudiantes. El examen conceptual fue llevado a cabo por ambos grupos bajo idénticas condiciones, los estudiantes del grupo experimental usaron Macsyma en el examen de ordenador pero solo durante una hora mientras que el grupo de control tuvo dos horas. Los resultados extraídos fueron mejores en el grupo experimental que en el grupo de control, tanto en el examen conceptual como en el examen computacional.

1.4.2 Dificultades específicas del concepto de límite

El concepto de límite, como hemos citado anteriormente, presenta dificultades de comprensión en los alumnos. En un sentido matemático podría ser apropiado distinguir entre varios tipos de límites diferentes, por ejemplo, el límite discreto de la secuencia (a_n) cuando n tiende a infinito y el límite continuo de f(x) cuando x tiende a "a". Sin embargo una investigación empírica muestra dificultades comunes para principiantes a través de varias categorías matemáticas.

La terminología asociada con el proceso del límite matemático incluye frases tales como tender a, aproximarse, o muy próximo a, las cuales otra vez tienen un significado coloquial diferente del significado matemático.

De hecho, cuando estas frases son usadas en relación con la aproximación a un límite, ello conlleva la invariable implicación de que los términos de la sucesión no pueden igualarse al límite. (Schwarzenberger & Tall, 1977.)

Davis y Vinner (1986) sugieren que hay una serie de concepciones erróneas relacionadas con las nociones del límite, aparentemente inevitables. Una es la influencia del lenguaje, por el cual los términos nos recuerdan las ideas que nos introducen en las matemáticas. Añadidas a estas palabras, hay ideas que ellas evocan, las cuales tiene sus orígenes en experiencias tempranas.

Otra fuente de errores es la absoluta complejidad de las ideas, las cuales no pueden aparecer de una manera instantánea y completamente maduras. Así que algunas partes de las ideas conseguirán adecuarse a la representación que en ese momento se esté usando antes que otras.

Tall (1986) afirmaba que la creencia de que algunas propiedades que mantienen todos los términos de una sucesión son también mantenidas por el límite, había sido una creencia válida a lo largo de la historia, por ejemplo en el "Principio de continuidad de Leibniz". Esta idea advertida por Tall ha sido un hecho constante a lo largo de la historia, donde encontramos el ejemplo de

Cauchy de que el límite de las funciones continuas debía ser una función continua**.**

Si todo lo anterior lo aplicamos al límite de una sucesión como la que se presenta a continuación:

0.9, 0.99, 0.999, ..., 0.9(n veces repetido)9, ...

el límite de esta sucesión debería ser menor que 1 ya que todos los términos son menores que 1.

Tall (1991) englobaba todas las dificultades relativas al concepto de límite dentro de lo que denominó dificultades del análisis en general. Entre estas dificultades citamos las siguientes:

- *(1ª) Restricción excesiva de las funciones que se usan.*

  Las funciones que se suelen manejar no suelen causar muchas dificultades en el análisis elemental. Sin embargo, cuando los alumnos se encuentran con funciones dadas por ramas o mediante valor absoluto suelen aparecer dificultades. En el caso concreto del concepto de límite de una sucesión nosotros afirmamos que en la mayoría de los libros de texto se usan sucesiones que tienen límite y cuando aparece una sucesión que no tiene límite los alumnos no saben qué contestar.

- *(2ª) La notación de Leibniz (una útil ficción o un genuino significado)*

  Muchos exámenes de análisis se centran en la manipulación simbólica más que en la resolución de problemas.

- *(3ª) Traslación de problemas reales dentro de la formulación del análisis.*

  Esta notación es casi indispensable en el análisis, sin embargo, causa serios problemas conceptuales, hasta que los alumnos no saben aprenden que no es una fracción (o en qué sentido puede serlo) y sí es un simple símbolo indivisible.

- *(4ª) Selección y uso de representaciones apropiadas.*

Tall recoge los trabajos de Robert y Boschet (1984) los cuales afirmaban que los estudiantes que tenían más éxito en análisis eran aquellos que podían flexibilizar el uso de una variedad de aproximaciones: simbólica, numérica y visual.

- *(5ª) Manipulaciones algebraicas o carencia de ellas.*

La manipulación de símbolos algebraicos es el modo preferido para muchos estudiantes.

- *(6ª) Absorción de ideas complejas en un tiempo limitado.*

Los individuos cambiamos nuestros conceptos con el paso del tiempo. Un límite podría ser inicialmente un proceso intuitivo de "cada vez más próximo", después una definición "epsilon-delta", pero después de que varios teoremas hayan sido probados, la definición es suprimida y se emplean solamente los teoremas demostrados. De esta manera los estudiantes se van encarando con distintas definiciones de un mismo concepto a lo largo de su desarrollo escolar.

También Blázquez y Ortega (2001) señalaron que la utilización de diferentes registros (algebraico, numérico, gráfico y verbal) mejoraba la comprensión del límite. Para comprobar esto realizaron una investigación cualitativa completando tres ciclos de investigación-acción en los que trabajaron sobre una secuencia didáctica, la cual aparece completa en Blázquez (2000). En dicha investigación incluyeron un considerable número de registros con el fin de estudiar no sólo la comprensión en cada uno de ellos, sino de comprobar si la imagen conceptual que el alumno tiene de límite se enriquece al considerar éste desde diferentes perspectivas, aun siendo conscientes de las dificultades que pueden generar las traducciones de un registro a otro. La secuencia se centró, por tanto, en la identificación de sistemas de representación y en la traducción entre ellos, si bien en algunas tareas, además, se trabajó la modelización. En el desarrollo de la secuencia didáctica se observó que algunos sistemas de representación eran más acertados para una determinada faceta de un concepto pero encerraban dificultades con respecto a otras facetas. Por ejemplo se comentó que el sistema verbal mostraba una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de ésta, más vinculada a fenómenos reales, y más próxima al desarrollo cognitivo del alumno en educación secundaria.

- *(7ª) Manejo de cuantificadores en definiciones múltiplemente cuantificadas.*

Los cuantificadores constituyen una parte formal e importante de la teoría formalizada, pero causan una gran tensión en los estudiantes. Cuando a los alumnos se les pide que completen la definición de límite de una sucesión con límite a (definición formal), ninguno continúa la definición formal, porque no la han usado en los ejemplos que se manejan habitualmente. Aquellos alumnos que son más versátiles en el uso de diferentes aproximaciones son más propensos a tener más éxito en cálculo. Deben tener un conocimiento flexible para esto y además ser capaces de arreglárselas y cambiar de representaciones eligiendo la que sea más adecuada en cada caso particular.

- *(8ª) Preferencia en los estudiantes por métodos procedimentales frente a métodos conceptuales.*

Teniendo en cuenta todo lo anterior Tall señala que existe en los alumnos una preferencia por el empleo de métodos procedimentales frente a los conceptuales, los cuales suelen ocasionar muchas dificultades de comprensión.

Cornu (1983) también se ocupó de estudiar con gran detalle el concepto de límite, encontrando una gama o colección de creencias, entre las que señalamos la siguiente:

La sucesión 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999..., tiende a 0,99999 pero su límite es 1

Cornu (1981) ya había distinguido varios modelos de límite: límite a no sobrepasar, cota que uno se prohíbe alcanzar, y otros más que son utilizados en el lenguaje común. Entre todos éstos predominaba el carácter inalcanzable del límite.

Cornu (1991) señaló la importancia del lenguaje y los conocimientos informales sobre el concepto de límite, que los alumnos poseen antes de la enseñanza por parte del profesor. Los alumnos, antes de la enseñanza del concepto de límite, tienen una serie de ideas que son denominadas "*concepciones espontáneas*". Éstas se mezclarán con los nuevos conocimientos adquiridos por el alumno, de manera que formen o afiancen sus concepciones personales. Por ejemplo, las palabras "tender a" y "límite" tienen un significado antes de cualquier contacto con el conocimiento formal de límite. Este significado es mantenido incluso después de trabajar con la definición formal.

Cornu cita una amplia gama de significados que puede tener la palabra tender:

- aproximarse (eventualmente lejos de él)

- aproximarse sin llegar a alcanzarlo

- aproximarse justamente alcanzándolo

- parecerse (el azul tiende a violeta)

Los significados atribuidos a la palabra límite son:

- Un límite "impasible" el cual es alcanzado.

- Un límite "impasible" el cual es imposible de alcanzar.

- Un punto al cual uno se aproxima sin llegar a tocarlo.

- Un punto al cual uno se aproxima y alcanza.

- Un límite por encima o por debajo.

- Un máximo o un mínimo.

- Un intervalo que viene inmediatamente después y que puede ser tocado.

- Una restricción, una prohibición, una regla.

- El final, lo último.

La expresión "término final" en lugar de límite de una sucesión, empezó a ser usada en un intento de ayudar a los estudiantes para entender el significado de los límites. (Orton, 1983)

Además de la influencia de las nociones previas que los alumnos poseen, sobre el concepto de límite, el propio concepto ha generado una serie de obstáculos que se han ido superando a lo largo de la historia hasta llegar a la noción actual de límite. Para Cornu (1983), la constitución del concepto de límite en un alumno no tiene por qué ser una recapitulación histórica de cómo se ha llegado a formular actualmente el concepto de límite. Sin embargo, aparecen ciertas semejanzas entre lo que le ocurre a un alumno y lo ocurrido en el desarrollo histórico del concepto. Entre estas semejanzas se sitúan los obstáculos encontrados a lo largo de la historia en el desarrollo del concepto. También señala los obstáculos epistemológicos como ejemplos de obstáculos que necesitan, para ser superados, mejorar ciertos conocimientos anteriores defectuosos o erróneos. Una revisión histórica del concepto de límite puede permitir descubrir estos obstáculos y conjeturar sobre su existencia en los alumnos.

Los obstáculos históricos en el desarrollo de la noción de límite son según Cornu (1991) los que se presentan a continuación:

1) El límite, noción metafísica.

El manejo por parte de los alumnos del concepto de límite supone la necesidad de manejar el concepto de infinito, el cual lleva asociados dos términos: infinito potencial e infinito actual. El autor señala las nociones de infinito y de límite como nociones relevantes de la metafísica, más que de las matemáticas, y señala las reticencias a incluirlos en el campo de las matemáticas.

2) La noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande

La necesidad de manejar en la definición de límite cantidades mayores que cero pero muy próximas a él, sin llegar nunca a ser cero o el manejo de un número mayor que todos los demás, es actualmente una fuente permanente de errores.

3) El límite puede ser alcanzado

El hecho de que el límite se alcance o no, es una dificultad histórica. Antes de que apareciera el concepto unificador de límite, los matemáticos no podían aclarar las nociones de "grandeza última", "aproximación última" y otras semejantes. Los alumnos tienden a pensar en sucesiones monótonas que no alcanzan el límite.

4) La transposición numérica

El concepto de límite que, en sus orígenes, apareció vinculado al campo geométrico, fue posteriormente llevado a un dominio numérico. Este salto, denominado "transposición numérica", es considerado por el autor como uno de los obstáculos más difíciles de superar.

El autor señala que estos obstáculos están también presentes hoy día en el alumno y que ocurren en parte debido a la naturaleza del concepto matemático. Esta postura no es mantenida por Blázquez (2000, p. 9) la cual señala que "*este obstáculo no aparece en la actualidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje puesto que los alumnos están habituados a trabajar con números ciertas situaciones que relacionan magnitudes".*

Según Cornu (1991), los anteriores obstáculos epistemológicos se transmiten en la enseñanza, lo cual denomina *"transmisión didáctica de los obstáculos epistemológicos".* También señala que los intentos por simplificar demasiado la enseñanza pueden llevar directamente a los obstáculos que han sido descritos antes, los cuales son, de hecho, una parte esencial del proceso de enseñanza y, cuando aparecen, requieren una reconstrucción cognitiva, en la que cabe observar períodos de conflictos y confusión.

Davis y Vinner (1986) señalan, referente al concepto de límite, la completa complicación de nuevas ideas que lleva asociado este concepto, las cuales no aparecen instantáneamente en una forma completa y madura. De hecho algunas partes de la idea de límite conseguirán representaciones adecuadas antes que otras partes. El concepto imagen más frecuentemente empleado por los estudiantes es el de las sucesiones monótonas.

Robert (1982) estudió cómo el concepto de límite de una sucesión era percibido por 1380 estudiantes de varios niveles, en la escuela y la universidad. Les preguntó cómo explicarían la definición de una sucesión convergente a estudiantes entre 14 y 15 años. Estos alumnos conocían la definición formal de límite de una sucesión, pero apenas la empleaban en sus justificaciones. La autora clasificó las respuestas en cuatro categorías:

1. Monótona y dinámica monótona (12%). Una sucesión convergente es una sucesión creciente delimitada superiormente ó una sucesión decreciente delimitada inferiormente. Una sucesión convergente es una sucesión creciente o decreciente la cual se aproxima al límite.

2. Dinámica (35%). La sucesión tiende al límite, la sucesión se aproxima a límite, la distancia entre los valores de la sucesión y el límite es cada vez más pequeña. Los valores se aproximan cada vez más y más a un número.

3. Estática (13%). Los valores de la sucesión están en un intervalo cerca del límite, los valores de la sucesión están agrupados alrededor del valor del límite, los valores de la sucesión se aproximan tanto como uno quiera al valor del límite.

4. Mixto (14%). Una mezcla de los casos anteriores.

Además de estas respuestas mayoritarias, citamos otras respuestas dadas por los alumnos: el 4% empleó la definición formal, el 5% no contestó a la pregunta y el resto la dio de modo incompleto o incorrecto, diciendo, por ejemplo que los valores de la sucesión no pasan por el valor del límite o que los valores de la sucesión están todos por debajo del valor del límite.

La petición que Robert realizó a sus alumnos para que explicasen el concepto de límite de una sucesión a chicos con edades comprendidas entre 14 y 15 años parece excluir la definición formal porque les resulta muy difícil. Esta dificultad ya fue confirmada por Tall y Vinner (1981) quienes pidieron a 70 alumnos, de primer año de matemáticas, que escribieran que la definición de límite de una función cuando x tiende a a, es igual a c. Ellos acababan de llegar del instituto y se esperaba que dieran una definición dinámica.

Los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes: la mayoría de los que usaron la definición dinámica lo hicieron de forma correcta, mientras que la mayoría de los que escogieron dar una definición formal no lo hicieron bien.

Estos autores señalaron que debido a la complejidad del concepto de límite, la idea de facilitar la trayectoria de los estudiantes para intentar evitar dificultades puede que no fuese la mejor medida a tomar; la simplificación excesiva produce conceptos imágenes inapropiados, los cuales sólo sirven para acumular problemas que surgen más adelante. Estas ideas informales sobre el concepto de límite pueden ser resistentes y no acomodarse bien cuando la definición formal de límite es presentada. Un camino más útil podría ser proporcionar una rica experiencia, necesaria para que los estudiantes intenten confrontar las dificultades y negociar un concepto más estable, siendo conscientes de los posibles escollos que pueden aparecer.

Sierpinska (1987) se propuso crear situaciones didácticas que ayudaran a superar los obstáculos epistemológicos relativos al límite. Para llevar a cabo este proyecto trabajó con alumnos del bachillerato de humanidades, de 17 años de edad.

Sierpinka (1985) ya había presentado una lista de cuatro elementos que consideraba eran fuente de obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite, a saber: conocimiento científico, infinito, función y número real. Éstos a su vez fueron organizados en dos grandes grupos: el obstáculo "heurístico" y el obstáculo "rigurístico":

El obstáculo "heurístico", era considerado por Sierpinska (1985, p. 372) como carente de rigor:

"El paso al límite no es considerado como una operación matemática sino un método heurístico que guía al descubrimiento gracias al razonamiento basado en una inducción completa".

Este obstáculo Sierpinska lo divide en dos tipos de obstáculos: el estático y el cinético, según que se refieran, a intuiciones alejadas de la idea de movimiento o a intuiciones ligadas a esta idea, respectivamente. En el obstáculo estático heurístico, las aproximaciones son geométricas y numéricas, mientras que en el obstáculo cinético heurístico, para encontrar el límite, tenemos que aproximarnos al infinito geométricamente o numéricamente.

El obstáculo "rigurístico", la autora lo divide en dos tipos de obstáculos: el obstáculo Eudoxio y el obstáculo Fermat; los explicó, respectivamente, de la siguiente manera (o.c., p. 372):

"El paso al límite no es una operación matemática, sino un riguroso método de demostrar ciertas relaciones entre cantidades".

"*El paso al límite es una operación matemática que consiste en sustituir números variables y omitir valores no deseados con respecto a otros*".

Sierpinska (1987) consideraba necesaria la superación de los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite para llegar a dominarlo. Para superar un obstáculo epistemológico es necesario que se produzca en el alumno un conflicto, pero si un obstáculo epistemológico se enlaza con alguna convicción anterior que el alumno tenga, entonces la superación de este obstáculo no consistirá en reemplazar esta convicción por otra opuesta.

Sierpinska trabajó con alumnos del bachillerato de humanidades de 17 años de edad, organizando cuatro sesiones de 45 minutos. El objetivo era explorar posibles situaciones didácticas que ayudaran a los alumnos a superar los obstáculos epistemológicos que el concepto de límite llevaba emparejado y que ya han sido descritos anteriormente.

Para ello eligió el contexto de las sucesiones numéricas; una actividad en la que trabajó con los alumnos fue 0,9999....=1. La autora esperaba que los alumnos superasen al menos tres obstáculos: conocimiento científico, infinito y número real.

El trabajo con la actividad anterior, hizo que aparecieran en algunos alumnos los dos tipos de infinitos que conocemos: infinito potencial e infinito actual. También apareció la noción de infinitamente pequeño, entre otras.

La noción de infinito fue fuente de grandes conflictos en los alumnos ya que por un lado tenían la concepción primitiva de infinito como algo ilimitado, pero por otro lado tenían la idea de que 0,999... era igual a 1, es decir, la sucesión se va aproximando cada vez más a uno y al final lo alcanza.

Para escapar de esta paradoja los estudiantes adoptaron diferentes soluciones:

(1ª) Se mantiene la concepción de infinito como algo ilimitado. Se distinguieron cuatro actitudes hacia el infinito de acuerdo con esta primera solución.

1ª,1) Actitud denominada intuitiva y definidora. Todas las secuencias son finitas y el número de sus términos está bien determinado. En este caso el número 0,9999... denota una aproximación del número uno, pero no es el valor uno.

1ª,2) Actitud intuitiva, que mantiene la indefinición. Las secuencias limitadas son finitas. Se trata de un caso particular del anterior.

1ª,3) Actitud discursiva definidora. Todas las secuencias son finitas pero algunas veces es imposible determinar el número de términos; el verdadero límite de una secuencia es su último término. Si en algún caso no se puede determinar este último término, se puede dar una aproximación de él.

1ª,4) Actitud discursiva indefinida. En el cuarto caso, todas las secuencias limitadas son finitas. (P. 384.)

En estos modelos, el concepto de sucesión como función está ausente, una sucesión fue considerada como un conjunto bien ordenado. También echamos de menos en las respuestas de los alumnos el hecho de no considerar el límite 1 como una suma infinita de términos de la forma $9 \cdot 10^{-n}$ o como el límite de un conjunto infinito de números de la forma 0,9, 0,99, 0,999..., ...

(2ª) La implicación "A infinito entonces A ilimitado" fue rechazada y se admitió la existencia de dos tipos de infinitos: el infinito limitado y el infinito ilimitado.

Las actitudes relativas al conocimiento y el infinito hicieron que hubiese cuatro modelos de concepciones de límites:

- Modelo potencialista, en el cual el límite no es alcanzado. La sucesión 0,999... no llega a alcanzar el valor uno.

- Modelo potencial-actualista de límite, en el que después de un tiempo infinito la sucesión infinita se completa y el límite es alcanzado.

- Modelo frontera del límite. Una sucesión es un conjunto, el cual puede ser limitado o ilimitado. En este caso una sucesión puede tener dos límites y ser ellos elementos de la sucesión o tener un solo límite y no ser éste un elemento propiamente dicho de la sucesión.

- Modelo infinitesimal del límite. Surge cuando, en la definición de límite, expresamos que la diferencia entre un valor que consideramos límite y el conjunto de términos de la sucesión es infinitamente pequeña. Teniendo en cuenta esto podemos llegar a admitir que 0,9999... = 1.

Las consecuencias que obtiene la autora una vez realizado el estudio son dos:

Ninguno de los alumnos superó de manera completa los obstáculos epistemológicos relativos al límite.

A pesar de no haberse producido la superación de estos obstáculos sí ha nacido en los alumnos una serie de conflictos, que puede ser un punto de partida para aprendizajes posteriores.

Sierra, González y López (1999) señalaron las dificultades de los alumnos ante los conceptos de límite y continuidad, mostrando que las concepciones que los alumnos tenían sobre estos conceptos eran diferentes de las definiciones de límite y continuidad. Estas concepciones mantenidas por los alumnos tenían relación con las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas sobre los conceptos de límite y continuidad. Para señalar las concepciones mantenidas por los alumnos ante los conceptos citados anteriormente diseñaron un cuestionario que administraron a 145 alumnos de bachillerato (alumnos de B.U.P y C.O.U).

Respecto al límite, los criterios de justificación dados por estos autores fueron (o.c., p. 79):

L1: Aproximarse. L2: El valor de la función en el punto. L3: Utilización de límites laterales. L4: La función es continua. L5: Utilización de la fórmula de la derivada. L6: Utilización de funciones conocidas. L7: La función tiene ramas. L8: Concepto de indeterminación. L9: Visual. L10: Definición formal. L11: Otras. Además se ha considerado L12: Respuesta si/no sin justificación y L13: Ausencia de respuesta.

Después de analizar las respuestas de los alumnos al cuestionario presentado concluyeron, teniendo en cuenta la frecuencia con la que se emplean los criterios, que el criterio más usado fue L3, luego L1, seguido de L2, y que la definición formal fue utilizada esporádicamente.

1.4.3 Dificultades en torno al lenguaje del límite

Monaghan (1991) investigó las dificultades que el lenguaje podía ocasionar en la comprensión del concepto de límite. Para ello analizó las ambigüedades que podían presentar los términos tender a, aproximarse, convergencia y límite, cuyo significado en los alumnos podría ser distinto del significado matemático. Para los matemáticos los cuatro términos anteriores: tender a, aproximarse, convergencia y límite habían sido intercambiables.

Monaghan (1991) presentó los resultados obtenidos al administrar dos cuestionarios que construyó y que trataban de aclarar qué significado asignaban los estudiantes a los términos indicados. El primer cuestionario se administró a 27 estudiantes y el segundo, a 190.

Las conclusiones que obtuvo Monaghan se pueden resumir en los siguientes puntos:

- El término *aproximarse* parece presentar pocas dificultades en los alumnos debido a que es un término impreciso.

- *Tender a* es a menudo visto con un significado similar a aproximarse, aunque en su uso diario no suele aparecer asociado a situaciones en las que aparece el concepto de límite.

- *Convergencia* tiene un significado, en el uso diario, asociado con líneas que convergen. Este hecho hace que muchos estudiantes no puedan ver cómo una sucesión de números pueda converger.

- *Límite* es visto como un punto frontera, el cual no se puede sobrepasar. También observa que, a veces, los alumnos tienen dificultades relacionadas con el concepto de infinito. Por ejemplo en la sucesión 0,9, 0,99, 0,999... algunos alumnos consideran que 1 es el límite mientras que otros tienen problemas para admitir este hecho.

Monaghan sostiene, a pesar de obtener estas conclusiones, que lo anteriormente señalado no es algo que se pueda generalizar, ya que los resultados podrían variar según el contexto en el que se planteen las cuestiones y depender de los estudiantes a los que les sean presentadas.

Monaghan señaló además que el lenguaje no es la única fuente de dificultades en torno al concepto de límite. Menciona otros factores, también importantes, como los esquemas de razonamientos que se usan para tratar estos procesos infinitos (sucesiones) o los problemas que pueden derivarse de una enseñanza no bien dirigida

Monaghan no explicó cómo superar las dificultades debidas al diferente significado que los cuatro conceptos tienen en matemáticas y en la vida real. Sin embargo, sugirió que los alumnos explorasen y discutieran sus propias concepciones en torno a estos términos, para que se dieran cuenta de que el significado usual les podía llevar a realizar interpretaciones erróneas en contextos matemáticos.

Blázquez y Ortega (2000) enumeraron las diferencias existentes entre aproximación y tendencia y propusieron una nueva definición de límite como aproximación óptima. Para llegar a esta definición trabajaron una secuencia didáctica que constituyó el centro de su investigación, a lo largo de tres ciclos. La secuencia se centró en la definición de límite como aproximación óptima, en la que se señaló la propiedad que tiene el límite de ser, no una simple aproximación de los valores de la función en torno a un punto a, sino la mejor de todas, en el sentido de que cualquier otra, distinta de ella, se puede mejorar. La definición evoluciona, a lo largo de los ciclos establecidos, al igual que la secuencia, de manera que en el último de ellos se perfecciona y se enuncia tras discriminar entre aproximación y tendencia.

Cornu (1991) ya había señalado las dificultades del lenguaje, sobre todo debidas a las concepciones que los alumnos tenían sobre los términos tender, aproximarse o límite antes de cualquier enseñanza. Estas dificultades podrían mantenerse incluso después de cualquier enseñanza sobre el concepto de límite.

Tall (1992) dio un paso más y señaló que no solamente la palabra límite podría tener diferentes significados, sino que la palabra análisis también los tenía y además dependía del país en el que se estuviera trabajando.

1.5 Ubicación curricular del límite de una sucesión

La investigación aquí reseñada se ha realizado entre los años 2000 y 2010; durante ese período, estando vigente la L.O.G.S.E, ley de ordenación general del sistema educativo, se han aprobado, sucesivamente, dos leyes educativas: L.O.C.E y L.O.E. Muchos de los libros con los que hemos trabajado y muchos de los contenidos de las leyes L.O.C.E y L.O.E derivan de la L.O.G.S.E. Nuestra referencia a estas leyes se limita a la etapa del bachillerato, pues en ella se define y trabaja el concepto de límite.

El 3 de octubre de 1990 se aprobó la ley de ordenación general del sistema educativo (L.O.G.S.E) que definió las características básicas del bachillerato: objetivos generales, organización en materias comunes, materias propias de cada modalidad y materias optativas, y estableció también las materias comunes. El Real Decreto 1700/1991, de 29 de noviembre, desarrolló la estructura del bachillerato, fijando las materias propias de sus distintas modalidades y otros aspectos generales de la organización de sus enseñanzas; destacó que el bachillerato debía de cumplir una triple finalidad, de formación general, de orientación de los alumnos y de preparación para estudios superiores.

El Real decreto 1170/1992 del 2 de Octubre estableció las enseñanzas mínimas correspondientes al bachillerato. Estas enseñanzas debían de ser concretadas por las comunidades autónomas en virtud del artículo 4 de la Ley Orgánica 1/1990. La comunidad de Madrid, en cuyo ámbito geográfico se ha desarrollado la mayor parte de nuestra investigación, estableció el currículo de bachillerato a través del decreto 47/2002 del 21 de marzo, que incluye cuatro asignaturas de matemáticas: matemáticas I y II (en las dos modalidades, Tecnológica y Ciencias de la Naturaleza y de la Salud) y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II (en la modalidad de Ciencias Sociales).

En Matemáticas I, en el bloque dedicado a funciones y gráficas, en el cual se suele introducir el concepto de límite de una sucesión como antesala al límite de una función, no se menciona el estudio del límite de una sucesión, lo cual no descarta que se incluya en la concreción que cada profesor realice después en el aula.

En Matemáticas II, en el bloque dedicado a análisis se incluye el concepto de límite de una sucesión, como un concepto previo al estudio del concepto de límite de una función.

En Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, no aparece de manera expresa un apartado dedicado al cálculo de límite de sucesiones.

En Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, en el bloque dedicado a análisis, lugar donde habitualmente se suele estudiar el concepto de límite de una sucesión, no aparece una mención expresa de este concepto.

Posteriormente a la L.O.G.S.E se aprobó, la L.O.C.E (ley orgánica de calidad de la educación), la cual modificó algunos apartados de la L.O.G.S.E. La L.O.C.E tuvo un período de vigencia muy limitado y solamente se aplicó en la C.A. de Madrid.

La L.O.C.E estableció la ordenación del bachillerato a través del Real Decreto 832/2003. En dicho decreto se establecieron asignaturas de matemáticas del bachillerato con los mismos nombres que utilizó la LOGSE.

En la asignatura de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I no se incluye el concepto de límite de una sucesión, sin descartar, como ya señalamos anteriormente, que se impartan dichos contenidos cuando se trabaje con el límite de una función. Este hecho dependerá sobre todo de las programaciones que cada departamento de matemáticas de cada instituto elabore. En la asignatura de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II tampoco aparece un apartado dedicado expresamente al estudio del límite de una sucesión.

En la asignatura de matemáticas I, el concepto de sucesión quedó integrado en el bloque de aritmética y álgebra. En la asignatura de matemáticas II, se dedica un apartado dedicado al límite de una sucesión y otro al límite de una función, ambos en el bloque de análisis.

La L.O.E fue aprobada en 2006; el gobierno estableció, a través del Real Decreto 1467/2007, la estructura del bachillerato y sus enseñanzas mínimas. Posteriormente, la Comunidad Autónoma de Madrid a través del real decreto 67/2008, desarrolló el currículo del bachillerato en el cual se imparten actualmente las materias de matemáticas con las mismas denominaciones que en las anteriores leyes orgánicas: matemáticas I y II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II.

En ninguna de estas cuatro asignaturas se menciona expresamente al concepto de límite de una sucesión. Entendemos, sin embargo, que se abordará cuando se trabaje con el concepto de límite de una función; reconocemos que se trata de una mera interpretación

En Educación Secundaria Obligatoria, la Comunidad Autónoma de Madrid, en su resolución del 27 de junio de 2007 (enmarcada, por tanto, en la LOE), establece una serie de asignaturas optativas entre las que se encuentra "ampliación de matemáticas", en la que se observa un apartado dedicado al estudio de límite de sucesiones. En concreto, aparece un apartado dedicado a sucesiones numéricas, al estudio del concepto del límite finito e infinito, y al cálculo del límite de una sucesión.

Capítulo 2º: Campo de problemas y marco teórico

Introducción

El capitulo 2 se organiza en dos partes bien distintas; los tres primeros apartados configuran, junto con algún material procedente del capítulo anterior, el marco teórico de esta investigación; en cambio, el último apartado lo dedicamos a delimitar el problema de investigación.

El marco teórico de nuestra investigación se articula en torno a cuatro palabras clave que deben añadirse a las del capítulo anterior: fenomenología, representaciones, sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado.

El primer apartado presenta lo que entendemos por fenomenología, en el sentido de Freudenthal (1983), analizando la aplicación de ésta, en particular, a los conceptos de límite, continuidad e infinito.

En el segundo apartado, dedicado a las representaciones en matemáticas, recogemos varias ideas relacionadas con la representación, así como los sistemas de representación. Veremos la diferente terminología asociada y establecemos la que hemos usado en esta investigación: al repasar la estrecha relación que mantienen las representaciones con la enseñanza del límite, concluimos que los sistemas de representación gráfico, simbólico, tabular y verbal son los más usados en su enseñanza.

El tercer apartado resume la corta historia del campo de conocimientos denominado *pensamiento matemático avanzado*, desde la creación del grupo de ese nombre dentro del PME, en los años ochenta, hasta la actualidad; observamos que las diferencias que se fijaron en su momento para distinguirlo del pensamiento matemático elemental no están tan claras hoy día, sobre todo en lo que se refiere al concepto de límite, donde un uso algorítmico de los teoremas sobre el límite ha hecho que no sepamos muy bien dónde situar este concepto, el cual había sido siempre clasificado como un concepto típico del pensamiento matemático avanzado.

La segunda parte del capítulo, es decir, el cuarto apartado, describe nuestro problema de investigación, centrado en el estudio de los fenómenos relacionados con el límite finito de una sucesión. Junto con él, se enuncian los objetivos perseguidos, la metodología de trabajo adoptada para alcanzar dichos objetivos y las hipótesis que se tenían al principio de la investigación. Estas hipótesis serán revisadas en el Capítulo 6, donde revisaremos exhaustivamente nuestros resultados.

2.1 Fenomenología

2.1.1 Idea de análisis fenomenológico

Freudenthal (1983) da el nombre de "*fenomenología*"a su método de análisis de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre "*fenómeno*" y "*noumeno*". El término *noumeno* hace referencia a los conceptos o estructuras matemáticas, como organizadoras de *fenómenos*.

Puig (1997; p.63) siguiendo a Freudenthal señala que:

"El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos".

La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización debe tener en cuenta las matemáticas en su estado actual, pero también se debe tener en cuenta para qué fenómenos se creó y a cuáles, si es caso, se extendió posteriormente.

El análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y no pretende entrar a valorar la naturaleza de las matemáticas. Para Freudenthal no hay dos mundos distintos (mundo de los conceptos matemáticos, o mundo ideal, y mundo de las experiencias), sino un solo mundo que crece con cada producción matemática.

Esta idea de fenomenología de Freudenthal es distinta de la idea de Hegel, Husserl o Heidegger. No aclara muy bien Freudenthal sus discrepancias con estos autores y se limita a afirmar que "noumeno" es "objeto del pensamiento", mientras que "fenómeno" es algo de lo que tenemos experiencia.

Para Freudenthal los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan. Un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno (o más de uno), pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por otro nuevo concepto matemático.

2.1.2 Tipos de fenomenología

Freudenthal (1983) establece cuatro tipos de fenomenología, todas ellas al servicio de la didáctica, pero sólo una de ellas es denominada fenomenología didáctica. Los tipos de fenomenología son: Fenomenología; Fenomenología didáctica; Fenomenología genética; y Fenomenología histórica.

Unas fenomenologías se diferencian de otras en función de los fenómenos que se tienen en cuenta con respecto al concepto matemático del que se ocupan. En el primer caso, hablamos de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en su uso actual. El segundo caso se ocupa de fenómenos que están presentes en el mundo de la enseñanza. En el tercer caso hablamos de los fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices. En último lugar hablamos de los fenómenos que son organizados por el concepto matemático y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

El primer sentido del término fenomenología (ver más arriba) tiene una diferencia notable con respecto a los otros tres sentidos del término, ya que en él tenemos en cuenta las relaciones ya establecidas, mientras que en los otros tres se tiene en cuenta, respectivamente, cómo se produjeron estas relaciones en el sistema educativo, cómo se adquirieron dichas relaciones con respecto al desarrollo cognitivo o cómo se han conformado a lo largo de la historia.

En nuestro trabajo, cuando hablamos de fenomenología, nos referimos, principalmente, a la fenomenología en el primer sentido, ya que nos preocupan las relaciones establecidas entre los fenómenos detectados y el concepto de límite finito de una sucesión. Estos fenómenos los hemos denominado *aproximación simple intuitiva* (a.s.i.) y *retroalimentación* o *ida-vuelta en sucesiones* (i.v.s.). Estos fenómenos serán definidos y categorizados con todo detalle en el capítulo siguiente; sin embargo, vamos a establecer qué relación tienen estos fenómenos con el concepto de límite y como se relacionan ambos entre sí.

Nuestros fenómenos a.s.i e i.v.s son fenómenos que surgen directamente de la definición de límite, por lo tanto son fenómenos organizados por la definición de límite. Además, el fenómenos i.v.s, por su propia naturaleza, organiza los fenómenos de aproximación intuitiva a.s.i. Esta relación será descrita con mayor detalle en el capitulo tres. De esta manera hemos establecido una serie de relaciones, las cuales ilustramos con la figura 2.1.

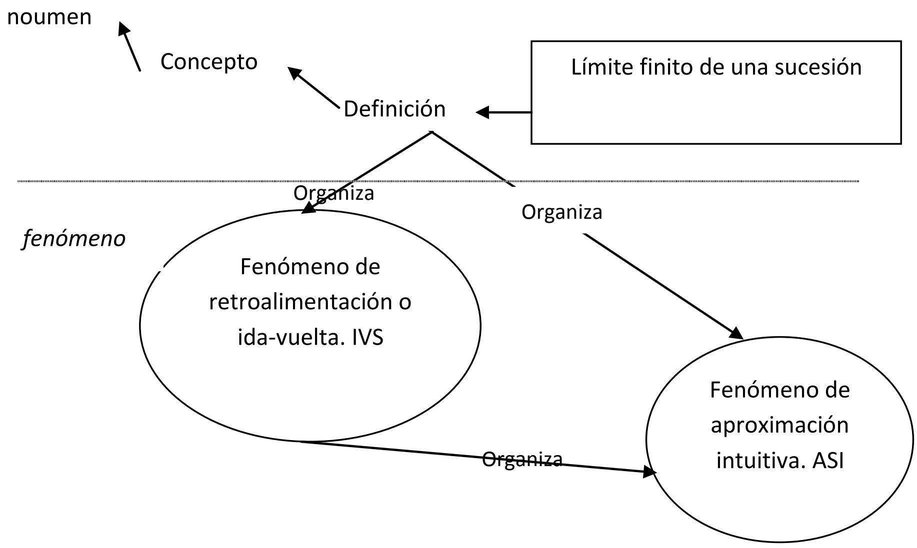


Figura 2.1

2.1.3. Objetos mentales y conceptos

Puig, siguiendo a Freudenthal, afirma que el objetivo de la acción educativa debe ser en primer lugar la constitución de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. Esta posición es pertinente para el análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos, sobre todo si se trata de desarrollar una fenomenología didáctica sobre la cual se apoye una organización de los conceptos en la enseñanza. El objeto mental es concebido como lo que está en la cabeza de las personas, y el concepto como lo que está establecido en las matemáticas.

Los conceptos matemáticos, una vez definidos, organizan los fenómenos del mundo real, donde hay productos de la cognición humana y productos propiamente matemáticos. Además van a organizar las propiedades de esos objetos y las acciones que hacemos sobre ellos, produciéndose la incorporación de los conceptos matemáticos al mundo de nuestra experiencia en el que están como fenómenos, en una nueva relación fenómenos / medios de organización, en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y el proceso se reitera una y otra vez. Esta progresión escalonada del par fenómeno / medio de organización da lugar a una creación de objetos matemáticos cada vez más abstractos.

La contraposición entre objeto mental y concepto recuerda a la establecida por Tall (1981) entre *concept image* y el *concept definition*. *Concept image* corresponde a la imagen que los alumnos crean y mantienen de un determinado concepto matemático, mientras que *concept definition* corresponde al tópico matemático en cuestión (la definición de dicho tópico matemático).

En el lenguaje habitual no suele usarse el término objeto mental definido por Freudenthal; es más corriente que aparezcan expresiones como el concepto que tiene una persona, o también que se use el término concepción.

Este término concepción ya fue usado por autores como Cornu (1991; pp 153-154) o Blázquez (2000; p.3). El primero usó expresiones como *"concepción fundamental"* o "concepciones espontáneas" en sus investigaciones, para referirse, en el primer caso, a la idea de que adquirir un concepto es llegar a tener una concepción fundamental de él y, en el segundo caso, a las ideas mantenidas por los alumnos antes de la enseñanza de un concepto. Blázquez considera la concepción en el sentido señalado por Vinner y Tall en su teoría de la imagen conceptual, que describiremos en el apartado dedicado al pensamiento matemático avanzado.

El objetivo de los sistemas educativos es, según Freudenthal, la constitución de buenos objetos mentales, lo cual implica poder dar cuenta con ellos de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes.

La relación entre un concepto matemático y su correspondiente objeto mental es complicada, debe establecer cómo se relacionan la constitución del citado objeto mental y la adquisición del concepto. La constitución, por parte del individuo, de un buen objeto mental, se determina gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente.

2.1.4 Objetos mentales y conceptos a lo largo de la historia de las matemáticas

El análisis que permite distinguir los objetos mentales de los conceptos es el análisis didáctico. El análisis didáctico que actúa sobre el sistema educativo debe tener en cuenta por un lado los objetos mentales que los alumnos construyen y por otro lado los conceptos matemáticos que los alumnos deben aprender.

Para Freudenthal, en el sistema escolar se da la siguiente situación: los conceptos son anteriores a los fenómenos que los alumnos experimentan sobre dicho concepto, y lo que pretende el sistema educativo es permitir la creación en los alumnos de objetos mentales que sean medio de organización de los fenómenos relacionados con los conceptos, pero además pretende que el alumno acceda a los medios de organización legados por la historia, es decir, a los conceptos.

Esta situación que se produce en el sistema educativo no refleja el desarrollo histórico de un concepto. En la historia de las matemáticas los conceptos no son previos a los fenómenos que organizan. Es más, la distinción entre objeto mental y concepto es diferente en el ámbito de la historia de las matemáticas que en el ámbito educativo. En el ámbito de la historia de las matemáticas, el objeto mental es anterior al concepto, y el concepto no es más que la cristalización de un objeto mental.

Además, este hecho es una práctica habitual en el campo de las matemáticas, en el que los matemáticos crean nuevos conceptos matemáticos a partir de un análisis de objetos mentales, los cuales aparecen como medios de organización de fenómenos. El fin de crear estos conceptos es incorporarlos al sistema de las matemáticas.

La relación entre un objeto mental y un concepto no es la misma en la perspectiva del sistema educativo que en la de las matemáticas como disciplina establecida.

La relación entre objeto mental y concepto se torna entonces variada, de manera que a veces la diferencia entre un objeto mental o el primer objeto mental constituido a partir de un concepto, y el propio concepto puede ser muy grande. Hay dominios de las matemáticas en los que es posible avanzar mucho sin definir conceptos, solamente empleando objetos mentales. Tal es el caso de la geometría elemental en la que los objetos mentales son suficientes para organizar una gran cantidad de fenómenos. Para la constitución de los objetos mentales a través de la enseñanza teniendo en cuenta los conceptos que hay que enseñar, la distancia entre ellos y las distintas formas que adopta esa distancia tiene entonces importancia.

Una fenomenología didáctica puede mostrar que los fenómenos organizados por el concepto son tan variados que se constituyen objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se emplee. Para la adquisición del concepto es necesario integrar los diferentes objetos mentales en un único objeto mental. La integración de los diferentes objetos mentales no siempre es fácil; un ejemplo de ello lo constituye el concepto de área, el cual puede generarse midiendo directamente la figura o a través del espacio limitado por una curva. El problema se plantea al integrar los diferentes objetos mentales generados al abordar la adquisición del concepto área desde ambas perspectivas.

Otras veces es difícil distinguir el objeto mental del concepto. Es decir se producen diferentes objetos mentales que son difíciles de unificar en un solo objeto mental. Como ejemplo Freudenthal cita el concepto de función, el cual ha evolucionado a lo largo de la historia hasta alcanzar su definición actual. Las funciones hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables cuya variabilidad se comparaba en términos infinitesimales. A continuación surgieron los conceptos de composición e inversión de funciones, que hicieron éste aún más rico. La necesidad de distinguir entre variable dependiente e independiente puso en primer plano las funciones. Estos usos de las funciones, junto con su empleo como elementos esenciales del análisis en la representación gráfica, el cálculo de límites, el cálculo de derivadas o integral, hacen que el campo de fenómenos sobre el que actúa el concepto de función sea tan amplio que no se pueda abarcar con un solo objeto mental.

Nosotros pensamos que el concepto de límite tiene tal amplitud que, al igual que ocurre con el de función, como hemos visto, siguiendo a Freudenthal, da lugar en los alumnos a varios objetos mentales. No es objetivo de esta investigación el determinarlos con precisión; sin embargo, la riqueza fenomenológica que hemos encontrado en el concepto nos conduce a pensar que deberían realizarse investigaciones en dicho campo.

El concepto de límite de una sucesión, al igual que el de límite de una función, tiene emparejadas una serie de dificultades asociadas a la propia naturaleza del concepto. Estas dificultades, y su superación, dan lugar a la formación de diferentes objetos mentales. En concreto, en el límite de una sucesión aparecen involucrados dos conceptos matemáticos: el de función, ya que las sucesiones son funciones de N en R, y el de límite. El trabajo simultáneo con ambos conceptos da lugar a la creación de diferentes objetos mentales, todos ellos relacionados con las dificultades asociadas a ambos y con los distintos fenómenos que el límite organiza, más aún si distinguimos al menos los casos en que el límite es finito o no. La variedad de situaciones y fenómenos que surgen del concepto de límite, nos lleva a observar que parece necesario distinguir entre límite de una sucesión y límite de una función, e incluso tratarlos en capítulos diferentes para que los alumnos o estudiantes lleguen a formar sus propios objetos mentales, relativos a cada uno de los conceptos de límite considerados. A su vez el trabajo con una determinada definición de límite da lugar a la creación de una amplia variedad de objetos mentales que a continuación deben ser unificados en un solo objeto mental, que debe constituir el último paso hacia la adquisición del concepto límite. Reconocemos que en Secundaria no suele dedicarse tiempo suficiente al trabajo con los límites ni suelen hacerse distinciones entre ellos, salvo la mención de que, en que el límite de sucesiones, la variable independiente siempre tiende a infinito.

2.1.4. Límite, continuidad e infinito

Puig (1997), siguiendo a Freudenthal (1983), señala que existe un abismo entre los conceptos de límite, continuidad e infinito, los fenómenos iniciales y los primeros objetos mentales que se constituyen tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de cada persona. Además, señala que los fenómenos para cuya organización han elaborado los matemáticos estos conceptos pertenecen al mundo de las matemáticas en el que hay objetos que los producen o se predicen en contextos altamente matematizados. Así, para Puig (1997; p.39):

"una didáctica de estos conceptos también ha de tener en cuenta que sólo pueden constituirse buenos objetos mentales de ellos a condición de poder experimentar los fenómenos que organizan".

En nuestro caso y basándonos en la afirmación anterior podemos conjeturar que, si trabajamos con los alumnos los fenómenos de aproximación simple intuitiva e ida-vuelta en sucesiones (a.s.i e i.v.s), los cuales son organizados por el concepto de límite, podemos hacer que los alumnos lleguen a constituir buenos objetos mentales del límite. A continuación, y siguiendo a Puig, los diferentes objetos mentales se deben refundir para dar lugar a la adquisición del concepto de límite.

2.2 Las representaciones en matemáticas

2.2.1 Representaciones y sistemas de representación

Las representaciones han jugado y juegan un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas y en su aprendizaje, por parte de los alumnos, a lo largo de toda su historia como disciplina científica.

Castro y Castro (1997) aportan varias ideas:

- El conocimiento matemático se recibe y se transmite principalmente a través de los sentidos auditivo y visual y de manera complementaria por el tacto. Los enunciados verbales y las gráficas son los principales elementos usados en la emisión, transmisión y recepción de conocimiento matemático.

- En el aprendizaje de las matemáticas, las representaciones ayudan a generar imágenes y objetos mentales, que colaboran en la formación de conceptos y procedimientos matemáticos. Los medios principales para la elaboración de imágenes mentales y la potenciación de la formación del conocimiento matemático son dos: representaciones y modelos.

Estos autores caracterizan así las representaciones y los modelos:

Representaciones (oc., p. 96):

"las notaciones simbólicas o gráficas, especificas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes".

Modelos (oc., p. 96):

"esquemas o materiales estructurados, conectados mediante leyes o reglas, que ofrecen una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones y propiedades".

Se suelen calificar como "externas" las representaciones y modelos que acabamos de definir, para distinguirlos de las llamadas representaciones "internas": imágenes mentales sobre los conceptos y operaciones que queremos transmitir. En estas representaciones mentales juega un papel importante la visualización, la cual correspondería a una representación mental en la que predominan los componentes figurativos o gráficos.

Castro y Castro (1997) realizan un análisis conceptual de la noción de representación estableciendo:

- Los signos, gráficos o notaciones, con soporte físico tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza, distinguiéndose así dos tipos de representaciones, internas y externas.

- Las representaciones externas juegan un doble papel: actúan como estimulo para la construcción de nuevas estructuras mentales y por otro lado permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

- Las representaciones externas se dividen en dos grandes familias: representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico (representaciones simbólicas) y representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo (representaciones gráficas).

Castro y Castro analizan la relación entre representaciones y construcción de conceptos estableciendo que, recientemente, se observa un creciente interés por las representaciones; está fundamentado en la creencia de que las representaciones externas de los conceptos mejoran la comprensión del mismo o la visualización de un proceso o concepto matemático. Esto ha generado una presencia masiva de representaciones en los libros de texto así como un aumento de la producción investigadora orientada a precisar esa idea de representación y su influencia en la comprensión de los conceptos matemáticos. Además, recogen ideas como las siguientes:

- La conceptualización actual de las matemáticas, basada en la noción de estructura, en la que los conceptos se adquieren a través de relaciones entre objetos, fenómenos y conceptos previos, da lugar a la formación de entidades abstractas que requieren el empleo de algún sistema de representación.

- Se introduce el término sistema de representación en lugar de representación para referirse al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar a una estructura matemática.

- Cada sistema de representación viene a destacar algunas de las propiedades del concepto en cuestión, pero dificulta la comprensión de otras. Además el uso de diferentes sistemas de representación para un mismo concepto puede añadir un grado de dificultad a la adquisición de dicho concepto por parte de los alumnos.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, estos autores proponen una definición de lo que es dominar un concepto matemático (oc., p. 103):

"Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar determinadas propiedades" p. 103

En el caso que nos ocupa, para tener un dominio del concepto de límite finito de una sucesión, se tendrá que conocer sus principales representaciones, las cuales consideramos que son: verbal, gráfica, simbólica y tabular. Estas cuatro representaciones fueron consideradas por Janvier (1987) como las principales en la representación de variables. Otro aspecto a tener en cuenta en el dominio del concepto de límite, es la capacidad para pasar de un sistema de representación a otro, empleando en cada caso el que mejor se adapte al problema o situación que se quiere resolver o comunicar.

Las representaciones aparecen en la enseñanza elemental, pero el número de ellas y su importancia van aumentando en cursos cada vez más avanzados (secundaria obligatoria, bachillerato y universidad). Las representaciones, junto con la abstracción, serán elementos imprescindibles en el desarrollo de matemáticas de mayor nivel.

Son muchos los autores que se han ocupado del estudio de las representaciones, aportando ideas a este campo en expansión.

Dreyfus (1991) señala que los procesos relacionados con la representación son:

a) Representación

b) Cambio de representaciones y traducción

c) Modelización

a) Representación. La representación implica la generación de un concepto, muestra, o imagen de él. Las representaciones se clasifican en internas y externas. Las primeras corresponden a las representaciones que el sujeto puede tener en la mente, y que Dreyfus (1991; p. 31) denomina *"a mental representation of the object or process under consideration"* y que puede variar de un sujeto a otro, aunque trabajen sobre el mismo concepto y además no tienen una equivalencia directa con la definición. Una representación mental, se refiere a un esquema interno que el sujeto usa para interactuar con el mundo exterior. Sobre las representaciones externas, Dreyfus afirma que una representación simbólica es externa y puede ser escrita o hablada. La visualización juega un papel esencial en el trabajo de mucho eminentes matemáticos.

Asociado al concepto de representación aparece el de visualización, como un proceso por el cual las representaciones mentales pueden ser generadas. El acto de generar una representación mental, descansa en un sistema de representación, concreto y externo que puede ser materialmente realizado. En el caso de las funciones, los gráficos, las fórmulas algebraicas, los diagramas de flechas y las tablas de valores son algunos de los instrumentos usados.

Las representaciones mentales son creadas en la mente teniendo como referencia estos sistemas de representaciones concretos. Así, una persona puede crear una o varias representaciones mentales válidas respecto al mismo concepto matemático.

Para tener éxito en matemáticas es deseable tener una rica representación mental de un concepto. Una representación mental puede contener diferentes aspectos de un concepto. Una representación es pobre cuando tiene pocos elementos que permitan flexibilizar la resolución del problema.

Aunque tener diferentes representaciones de un mismo concepto matemático puede resultar beneficioso, también puede ocurrir que algunas de ellas entren en conflicto en un momento determinado. A pesar de esto, Dreyfus (1991; p. 32) señala que en la mayoría de los casos, el tener una mayor cantidad de representaciones es mejor que tener pocas representaciones.

b) Cambio de representaciones y traducción. Aunque es muy importante tener muchas representaciones de un concepto, su existencia por sí mismas no es suficiente para permitir un uso flexible del concepto en la resolución de problemas. Se necesita la realización de cambios de una representación a otra, siempre que esta última sea más eficiente para el paso que queramos hacer a continuación.

No es fácil la enseñanza y aprendizaje de los procesos de cambio de una representación a otra y en muchos casos los estudiantes suelen trabajar con una única representación. Una posible solución según Dreyfus es sistematizar el uso de varias representaciones en la enseñanza y recalcar el proceso de cambio de representaciones desde el comienzo.

Un proceso que está próximamente conectado con el cambio de representaciones es la traducción. Un significado de traducción es ir de una formulación de una afirmación matemática o problema a otra equivalente o que la contenga de alguna manera. Los problemas aplicados son un caso típico de esto.

En el estudio del concepto de límite podemos trabajar fácilmente con varios sistemas de representación: verbal, gráfico, tabular y simbólico, como ya hemos comentado anteriormente. Sin embargo como ya expusimos (Claros, Sánchez y Coriat, 2007), el sistema de representación simbólico se ha descartado en los libros de texto en los últimos tiempos (periodo aproximado 1990-2005 que denominamos "período LOGSE"), pasando a utilizar, sobre todo, las representaciones verbal, gráfica y tabular. Por otro lado, los libros de texto insisten poco en el cambio de un sistema de representación a otro, produciéndose explicaciones aisladas del concepto de límite.

Con respecto a la traducción, en algunos libros de texto se produce una traducción directa de los conceptos aprendidos, a veces "demasiado" directa. En el caso del límite, los ejemplos que aparecen en la teoría y los ejercicios que se proponen se reducen, en muchos casos, a una aplicación directa de la definición, sin que se pretenda que el alumno reflexione sobre el concepto de límite estudiado ni que trabaje casos dudosos o discutibles.

c) Modelización. La definición que Dreyfus (1991; p.34) da de modelización es la siguiente:

"Encontrar una representación matemática para un objeto o proceso no matemático. Ello significa la construcción de una teoría, proceso y sistema, el cual incorpore hechos esenciales del objeto o proceso que es descrito"

Modelización y Representación están muy relacionadas: en la primera, la situación o sistema es físico y el modelo es matemático, en la segunda, el objeto representado es una estructura matemática y el modelo es una estructura mental. De esta manera las representaciones mentales son relativas al modelo matemático mientras el modelo matemático es relativo al sistema físico.

Los sistemas de representación se hallan muy extendidos en la literatura de didáctica de las matemáticas. Un campo en el que han adquirido especial relevancia, aparte de los números reales, ha sido el del análisis, y más concretamente, el del concepto de límite. Blázquez y Ortega (2001) estudian la influencia de los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Estos autores consideran cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico.

Romero y Rico (1999) usan la clasificación de las representaciones externas, realizada por Castro y Castro (1997), la cual como ya dijimos consideraba dos grandes familias: las representaciones digitales y las representaciones analógicas. Estas dos familias fueron denominadas sistemas de representación simbólica y sistemas de representación gráfica.

Romero (2000) piensa que la idea de comprensión está ligada a los sistemas de representación y dicha comprensión se caracteriza mediante una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, como las que se enuncian a continuación:

- *Formación de representaciones identificables en un sistema dado*: Dentro de un mismo sistema hay multitud de representaciones que caracterizan cada uno de los sistemas de representación. Dreyfus (1991) alerta de que las distintas representaciones mentales podrían entrar en conflicto, si bien, utilizando un proceso de abstracción, se consigue complementarlas e integrarlas en una representación más simple.

- *Transformación dentro de un sistema de representación:* Puesto que existen distintas representaciones dentro de un mismo sistema es necesario considerar las transformaciones de unas a otras.

- *Traducción entre sistemas de representación*: Además de existir distintas representaciones dentro de un sistema, existen pluralidad de sistemas de representación vinculados a un mismo concepto, con lo que la traducción de un sistema a otro se hace imprescindible. Por ejemplo, los cuatro sistemas considerados (verbal, numérico, gráfico y simbólico) representan el mismo concepto, aunque algunos destacan unos aspectos mas que otros.

- *Cristalización*: Un paso más general que la simple traducción entre sistemas de representación supone la formación de relaciones entre objetos de la estructura conceptual considerada. Una vez que se consigue la traducción entre todos los sistemas de representación asociados, el concepto surgirá como aquello que tienen de común todas sus representaciones y el campo conceptual de límite habrá cristalizado.

- *Modelización:* Aún mas general es el hecho de traducir situaciones a uno o varios sistemas de representación, de utilizar la estructura conceptual creada en la mente para modelizar determinadas situaciones.

Como indica Rico (2000), son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la necesidad, ya indicada, de utilizar distintas representaciones de un mismo concepto para captar la complejidad del mismo. Los sistemas de representación son limitados, necesitan unos de otros, porque unos muestran distintos aspectos del concepto con mayor o menor claridad.

Duval (1999) afirma que las representaciones y la visualización son el corazón de la comprensión en matemáticas. Si esto es así, tenemos que aclarar qué entiende Duval por representaciones y por visualización y comprender cuáles son sus propuestas en estos campos.

En el caso de las representaciones Duval (1999) realiza las siguientes aportaciones:

1) El carácter paradójico del conocimiento matemático. En matemáticas, a diferencia de otras ciencias, no hay otra forma de acceder a los objetos matemáticos, si no es a través de algunas representaciones semióticas. Por otro lado no hay que confundir el objeto matemático en sí con el uso de las representaciones del mismo.

2) Significado ambiguo del término representación. Este término es a menudo usado para referirnos a entidades mentales: imágenes. También tenemos la distinción entre representación mental y externa. Esta distinción "*se refiere a su modo de producción y no a su naturaleza o su forma*". Los signos no van a ser entidades ni mentales ni entidades externas. Distinguimos dos clases de representaciones cognitivas: aquellas que son intencionalmente producidas por el uso de cualquier sistema semiótico:

sentencias, gráficos, diagramas y dibujos... Su producción puede ser mental o externa. Por otro lado tenemos aquellas que son producidas de manera casual o automática por un sistema organizado, (sueño o memoria visual) o por un acto físico como reflexiones o fotografías. La distinción no se produce entonces entre representación mental o representaciones externas, sino que la distinción radica entre sistemas semióticos de representación y representaciones físicas / orgánicas.

3) La necesidad de varios sistemas semióticos para el pensamiento matemático. La historia muestra que el progreso en matemáticas ha estado enlazado al desarrollo de varios sistemas semióticos desde la primitiva dualidad de los modos cognitivos los cuales están basados en diferentes sistemas sensoriales: lenguaje e imagen. Sea para el discurso (descripción, explicación, razonamiento y cálculo) o para la visualización, tenemos dos clases de registros: los registros con una estructura triádica de importancia (lenguaje natural, representaciones en dos dimensiones y en tres dimensiones) y registros con una estructura diádica de importancia (notaciones simbólicas, lenguajes formales, y diagramas).

Duval(1999) respecto a las operaciones cognitivas en el pensamiento matemático señala lo siguiente:

- Los procesos matemáticos se componen de dos clases de transformaciones de representaciones: procesamiento y conversión. Las primeras están hechas dentro del mismo registro de representación, como cálculo aritmético y algebraico. Por otro lado la conversión descansa en el cambio de registros: la representación de un objeto es trasladada usando una diferente representación del mismo objeto en otro registro. Como ejemplo se cita la transformación de ecuaciones dentro de los gráficos cartesianos.

- La actividad matemática, en situaciones de resolución de problemas, requiere la habilidad para cambiar de registros, bien porque otra presentación de los datos encaje mejor con el modelo o bien porque dos registros deban entrar en juego a la vez, como las figuras, el lenguaje natural o la notación simbólica en geometría.

- Las operaciones de conversión llevan asociadas una gran complejidad. Cuando una conversión es *congruente*, la representación del registro de partida es transparente a la representación del registro objetivo. En otras palabras, la conversión puede ser vista como una fácil traslación unidad a unidad. La congruencia o no congruencia de cualquier conversión depende de su dirección. Una conversión puede ser congruente en una dirección y no congruente en la dirección opuesta.

- En la enseñanza se presta poca atención a la diferencia natural entre proceso y conversión. Estas dos clases de operaciones cognitivas son agrupadas en la unidad de procesos matemáticos para resolver problemas. Y cuando un cambio de registro debe ser introducido en la enseñanza, uno generalmente elige la dirección y los casos que son congruentes. Hay un instinto natural para evitar las situaciones no congruentes que llevan a dificultades reales, pero son imposibles de evitar cuando se requiere la transferencia de conocimientos.

Los bloqueos y fallos que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje son explicados como incomprensión conceptual. En realidad el hecho de que los estudiantes no reconozcan nada más, cuando la dirección de conversión se cambia, revela una carencia de coordinación entre los registros que deben ser traídos para jugar todos juntos. La coordinación de registros no es una consecuencia de la comprensión matemática, de lo contrario, es una condición esencial.

- El aprendizaje de las matemáticas implica la construcción de la arquitectura cognitiva. Esta arquitectura cognitiva requiere la conexión entre registros según la cual los estudiantes pueden reconocer el mismo objeto a través de diferentes representaciones y pueden hacer conexiones objetivas entre matemáticas deductivas y empíricas. El punto de partida en la coordinación de registros es la visualización.

A continuación presentamos otras definiciones de representación y sistemas de representación.

Janvier (1983) recoge tres diferentes acepciones para el término representación. La primera de ellas afirma que representación significa una organización material de símbolos como diagramas o gráficos, los cuales se refieren a otras entidades o sirve como modelo a algunos procesos mentales. El segundo significado relaciona las representaciones con los conceptos, en algunos casos identificando éstas con ellos y en otros casos afirmando que las representaciones se forman a partir de los conceptos, siendo ésta la estructura que los sustenta. Este segundo significado puede llamarse concepción. El tercer significado de representación relaciona éstas con las imágenes mentales.

Otro significado de representación fue dado por Kaput (1983), el cual afirma que cualquier concepto de representación debe envolver las dos siguientes entidades: la representación del mundo y el mundo representado. Debe haber además una correspondencia entre algunos aspectos del mundo representado y la representación del mundo. Kaput señala que en matemáticas la representación es independiente de los símbolos que se usen y es considerada como una abstracción o idealización. A continuación señala algunas de las representaciones más comunes en matemáticas: morfismos, construcciones algebraicas genéricas, construcciones canónicas internas y externas, aproximaciones, aislamiento de propiedades y modelos lógicos.

2.2.2 Representacionalismo y antirrepresentacionalismo

Las representaciones que manejamos en nuestra investigación (representación gráfica, verbal, simbólica y tabular del límite) admiten una doble lectura: la representacionalista y la antirrepresentacionalista o no representacionalista. Font (2005) se ocupa de describir las tesis de ambos modelos, los cuales describimos a continuación.

El representacionalismo considera dos mundos diferentes: el mundo real de los objetos exteriores al sujeto y el mundo mental del sujeto. Los objetos del mundo real generan representaciones mentales internas, las cuales son procesadas en la mente del sujeto.

El representacionalismo presenta dos versiones, denominadas débil y fuerte. La primera hace referencia a la relación entre objetos del mismo mundo, por ejemplo cuando decimos que el objeto físico B representa al objeto físico A. Esta versión débil del representacionalismo es aceptada por las dos posiciones, la representacionalista y la no-representacionalista.

La versión fuerte del representacionalismo establece una relación homeomórfica entre objetos de mundos diferentes. La relación homeomórfica permite establecer una relación de equivalencia entre ambos objetos. Esta postura es criticada por los no-representacionalistas.

Los antirrepresentacionalistas resumen sus ideas en las siguientes afirmaciones:

- No consideran que las representaciones internas sean la causa oculta de las representaciones externas.

- Consideran que la manipulación de representaciones materiales va acompañada de “procesos psicológicos” y se produce en un contexto determinado.

-Afirman que no tiene sentido segregar las representaciones internas de las externas (supeditando las segundas a las primeras) ni tampoco segregarlas de la situación en que se producen.

El representacionalismo se suele relacionar con la metáfora del espejo interior, según la cual los objetos del mundo exterior se reflejan en la mente del sujeto, mientras que el no-representacionalismo o antirrepresentacionalismo se relaciona con la metáfora de la construcción que considera que las personas construyen y modelan su mundo de experiencia a través de las relaciones con otras personas.

Las tesis representacionalistas han sido criticadas por algunos autores como Gallardo (2004) el cual afirma que no está claro cómo se realiza la conexión entre las representaciones internas y las externas. A pesar de esto considera la aproximación representacionalista como una interpretación teórica adecuada para proporcionar ideas de carácter general relacionadas con la comprensión.

2.2.3. Representación y comprensión

Font (2005) señala que la noción de representación es ambigua, ya que se usa con distintos significados y está ligada con el concepto de comprensión.

Font (2000; p. 24) presenta su propia visión sobre la comprensión relacionándolas con las representaciones y los procesos mentales. Esto lo expresa de la siguiente manera

"[...] diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona."

Para Font (2005) un alumno ha aprendido un concepto cuando ha desarrollado una amplia variedad de representaciones internas y ha establecido relaciones entre estas representaciones, de manera que le permiten producir representaciones externas adecuadas, para la resolución de tareas relacionadas con el concepto en cuestión.

Una definición más perfilada de comprensión la encontramos en Font (2005), el cual relaciona la comprensión con las representaciones internas. Afirma Font que la comprensión está relacionada con la construcción e integración de representaciones internas las cuales hacen que los alumnos dominen los sistemas de representación externos, usados para resolver tareas.

El tema de comprensión en matemáticas ha sido muy trabajado por diferentes autores, Sierpinska o Duval, entre otros. En los últimos tiempos destaca el trabajo de Gallardo (2005), el cual señala que no se ha resuelto la cuestión de precisar cuál es el tipo de relación entre los tres elementos: comprensión, representación interna y representación externa. Dicho autor afirma que una de las posibles dificultades sería la de tratar con elementos no observables.

Gallardo (2005; p.122) propone su particular visión respecto a la relación entre comprensión y representación, que expresa de la siguiente manera

"Las afirmaciones en torno a la comprensión de un sujeto debieran realizarse exclusivamente a partir de, y en base a, los distintos usos observables dados por el individuo al conocimiento matemático considerado. Asimismo, conviene que estos usos sean establecidos y catalogados de antemano a partir de análisis sobre el conocimiento matemático tratado y sirvan de referencia para la posterior interpretación de acciones y respuestas. Conviene resaltar que en el estudio del conocimiento matemático se incluiría como aspecto particular analizable las distintas representaciones externas que pudiera adoptar dicho conocimiento, por lo que la utilización de una representación externa concreta sería vista como un aspecto más de un uso determinado dado al conocimiento matemático en una situación particular".

En nuestro trabajo no emplearemos afirmaciones sobre cuándo los alumnos comprenden o no la definición de límite finito de una sucesión, en virtud de las respuestas que den. Nuestro trabajo no pretende evaluar la comprensión de los alumnos en torno al límite finito de una sucesión, solamente pretende mostrar qué fenómenos emplean los alumnos cuando responden a cuestiones relativas al límite finito de una sucesión.

Para nosotros, un alumno ha aprendido el concepto de límite finito de una sucesión cuando es capaz de emplear los fenómenos definidos por nosotros en los sistemas de representación gráfico, simbólico, tabular y verbal.

2.2.4 Visualización

El término visualización se emplea con referencia a figuras o representaciones pictóricas, ya sean externas o internas, sobre soporte material (pantalla, papel) o en la mente. La noción de visualización o pensamiento visual está fuertemente ligada a la capacidad de formación de imágenes mentales, las cuales pueden evocar un objeto sin estar presente.

Asociado al término visualización, aparece el término pensamiento visual, el cual se usa para describir los aspectos del pensamiento matemático que están basados o se expresan en términos de imágenes mentales.

Castro y Castro (1997) consideran que el aprendizaje de un concepto debe lograrse integrando la comprensión alcanzada por el procesamiento de la información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos y que ambos se complementan. Esta afirmación tiene como base una hipótesis que, pensamos, se admite sin mucha discusión en la comunidad matemática, a saber: la educación visual mejora la intuición y proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento.

Un aspecto donde la visualización tiene especial importancia es en el razonamiento deductivo e inductivo.

Ya hemos señalado anteriormente que Duval (1999), considera las representaciones y la visualización como dos elementos claves en el proceso de comprensión en matemáticas. Sus aportaciones en el campo de la visualización se detallan a continuación:

- <u>Visión.</u> Hace referencia a percepciones visuales y por extensión a imagen visual. La visión envuelve dos esenciales funciones cognitivas. La primera consiste en dar un acceso directo a cualquier objeto físico. Esa es la razón por la que la percepción visual es siempre tomada como un modelo para la noción epistemológica de intuición. Visión es el opuesto de representación, incluso de "imagen mental", porque representación es algo que está a pesar de cualquier otra cosa. El autor llama a esta función: función epistemológica. La segunda función cognitiva es bastante diferente. Visión consiste en aprehender simultáneamente varios objetos o un campo entero. En otras palabras, visión parece dar inmediatamente una completa aprehensión de cualquier objeto o situación. En ese sentido, visión es el discurso opuesto, de deducción, la cual requiere una secuencia de focos de actuación en una cadena de afirmaciones. Nosotros llamaremos a ello la función sinóptica.

- P<u>ercepción visual y visualización.</u> La percepción visual necesita una exploración a través del movimiento físico porque nunca da una completa aprehensión de un objeto. La visualización puede conseguir de una sola vez una completa aprehensión de cualquier organización de relaciones. La visualización está basada en la producción de representaciones semióticas. Una representación semiótica muestra las relaciones o mejor dicho la organización de relaciones entre unidades de representación, que deben estar bidimensionalmente conectadas, porque cualquier organización requiere al menos dos dimensiones para convertirse en obvia. La visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, que no es, ni mental ni física. También expresiones como "imagen mental", "mental representación" "imagen mental" son equivocas. Ellas solo pueden ser extensión de la percepción visual.

- <u>Visualización y comprensión</u>. La verdadera comprensión en matemáticas de los estudiantes exige que incorporen, en su arquitectura cognitiva, los variados registros de las representaciones semióticas usadas para hacer matemáticas, incluso los de visualización. En la perspectiva del aprendizaje, tres problemas son tenidos en cuenta acerca de la visualización: el problema de la discriminación, el problema del procesamiento y el problema de la coordinación con un registro.

- Visualización y procesamiento de figuras. La idea clave para analizar cualquier forma de visualización es la siguiente: la existencia de varios registros de representación proporciona un camino específico para procesar cada registro. Se distinguen tres operaciones para modificar una figura:

  1) Dividir una figura completa en partes de varias formas distintas (rectángulos, bandas, etc.)
  2) Hacer una forma más grande o más estrecha, o girarla.
  3) Cambiar la orientación de la figura en el plano. Éste es el cambio más débil.

  Estas operaciones constituyen un proceso figurativo específico que proporciona figuras con una función heurística. Una de estas operaciones puede dar una idea para la solución de un problema.

- Visualización transicional y desarrollo de la coronación de registros de representaciones. La introducción de gráficos en la demostración es bien conocida. Entre las tareas que hacen que los estudiantes sean capaces de comprender la demostración mediante la visualización, citamos: construir uno mismo el gráfico completo o averiguar hacia delante o hacia atrás los caminos desde las hipótesis hacia la afirmación probada.

  Bajo unas especificas condiciones, la demostración gráfica es una clase de visualización que permite a uno explorar y chequear nuestra propia comprensión del razonamiento deductivo.

2.2.5 Sistemas de representación en la enseñanza del límite

El concepto de representación en España ha sido trabajado por muchos autores de relevancia en el campo de la didáctica de las matemáticas como: Rico, Castro y Castro, u Ortega.

Rico (2000) señala que, a la hora de considerar los sistemas de representación en la enseñanza, hay que seleccionar los más adecuados para cada concepto y cada edad. Cornu (1991) ya había señalado las distintas concepciones que los alumnos tienen de tendencia y de límite, muchas de ellas influenciadas por su uso en otros contextos.

En Educación Secundaria el currículo propone un tratamiento intuitivo de los conceptos, en especial del concepto de límite. Sin embargo, para adquirir un conocimiento completo del concepto de límite, es necesario manejar varios sistemas de representación. Se han ideado diferentes formas de presentar el concepto de límite, de las cuales podemos encontrar ejemplos en los libros de secundaria y bachillerato que se manejan actualmente; véase, por ejemplo, los de las editoriales Anaya (2002) ó Santillana (1997). El concepto de representación asociado al límite, ha sido trabajado en España por Blázquez y Ortega (2001), los cuales señalan que:

- Las distintas investigaciones sobre el concepto de límite funcional sugieren considerar los siguientes sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y algebraico, representaciones que coinciden con las representaciones de función.
- La utilización de representaciones verbales para trabajar el concepto de límite chocan con las dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. (El término lenguaje habitual lo expresa Cornu (1991; p.154) con la expresión "*the colloquial meaning ot the terms being used".*). Emplear la palabra límite en el lenguaje habitual, sería usar el significado coloquial de la palabra límite.
- Para definir el concepto de límite es adecuado presentar el límite finito como aproximación óptima, la cual, según estos autores, permite aprovechar el aspecto intuitivo y cercano a la realidad sin reducir el límite a una simple aproximación. El empleo de esta definición de límite implica que, en principio, la representación a utilizar deba ser numérica.

El marco curricular de Educación Secundaria, establecido sucesivamente por la LOGSE, la LOCE y la LOE, establece una serie de representaciones para el concepto de función y, asimismo, explicita una serie de criterios para la introducción del límite. Uno de ellos es la introducción intuitiva del concepto de límite finito de una función en 1º de bachillerato con apoyo gráfico y calculadora (LOE, decreto 67/2008, 19 de junio, BOCM) o también la introducción previa del límite de una sucesión para a continuación introducir el límite de una función (LOCE, decreto 832/2003, 27 junio, BOE).

Blázquez y Ortega (2000), proponen trabajar el concepto de límite, en Secundaria, en los sistemas verbal, numérico, gráfico y algebraico y en ellos se consideran estas representaciones:

- En el sistema verbal, el concepto de límite de una función en un punto se representa como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto.

- En el sistema numérico, como un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de estos, en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él, se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés.

- En el sistema gráfico, el límite se presenta como un punto del eje OY, tal que: a todo segmento que le contiene le corresponde otro en torno al punto de interés, que se proyecta dentro de él.

- Finalmente, en el sistema algebraico, aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de ε-δ, que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones o la definición topológica de entornos.

Además de éstas, se han considerado otras representaciones sinónimas, lógicamente, siempre encaminadas hacia la concepción de límite como aproximación óptima. El término representaciones sinónimas fue empleado por Janvier y otros (1993) para referirse a representaciones diferentes de un mismo objeto matemático.

La elección de estas representaciones en estos sistemas de representación fue el primer paso para llevar a cabo una investigación sobre la importancia de la representación del concepto de límite en el bachillerato de Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales.

Los autores Blázquez y Ortega (2001; p.8) manejaron la siguiente hipótesis:

“La utilización de distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto de límite”.

Para comprobar esto realizaron una investigación cualitativa completando tres ciclos de investigación-acción trabajando sobre una secuencia didáctica, que aparece completa en Blázquez (2000), incluyendo un considerable número de registros con el fin de estudiar no sólo la comprensión en cada uno de ellos, sino de comprobar si la imagen conceptual que el alumno tiene de límite se enriquece al considerar éste desde distintas perspectivas, aun siendo conscientes de las dificultades que pueden generar las traducciones de un registro a otro. La secuencia se centró, por tanto, en la identificación de sistemas y en la traducción entre ellos, si bien en algunas tareas, además, se trabajó la modelización. En el desarrollo de la secuencia didáctica se observó que algunos sistemas de representación eran más acertados para una determinada faceta de un concepto pero encerraban dificultades con respecto a otras facetas. Por ejemplo se cita que el sistema verbal muestra una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de ésta, más vinculada a fenómenos reales, y más próxima al desarrollo cognitivo del alumno en educación secundaria.

Las consecuencias que se obtuvieron de la investigación llevada a cabo permitieron enunciar dos conclusiones generales que resumimos. (Blázquez y Ortega, 2001; pp 12-13)

La utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser, en parte, un obstáculo didáctico, puesto que en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico y, además de descuidar el resto de representaciones, no se ha incidido en los cambios entre ellos. Esta dificultad se subsana, en gran parte, si se utiliza el ordenador para traducir unos sistemas de representación a otros.

En la secuencia de enseñanza se puso de manifiesto cómo el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje y lo hace de dos formas: por un lado compensa las limitaciones de unas representaciones con otras, y por otro, permite que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación mas apropiada para cada situación.

Tall (1996) propone tres sistemas de representación para trabajar con conceptos de cálculo (límite, derivadas, etc), relacionados directamente con la utilización de los ordenadores como herramienta didáctica:

- Representaciones interactivas, como la simulación de las relaciones entre espacio, tiempo y velocidad que proporciona el programa MathCars.
- Representaciones numéricas, simbólicas y visuales. Todas ellas muestran el funcionamiento proceptual (como proceso y como concepto) y constituyen el cálculo elemental.
- Representaciones formales donde los objetos se manipulan a través de definiciones y no de descripciones y que constituyen el análisis matemático.

En cuanto a la traducción entre distintas representaciones, Tall, en consonancia con las representaciones anteriores, observa que, en las formales es donde se produce el análisis conceptual más intenso, que éste es más profundo que el simple formalismo simbólico y que por tanto, implica construcciones significativas y reconstrucción del conocimiento.

Mamona-Downs (2001) realiza una serie de aportaciones en relación con los sistemas de representación presentes en la enseñanza del límite de una sucesión:

1) El sistema de representación gráfico puede ser considerado como un sistema donde toda la información que conlleva la definición puede ser fielmente embebido, a pesar de los problemas que pueden surgir con las sucesiones constantes.

2) Los argumentos hechos en la gráfica dinámica pueden ayudar a persuadir a los estudiantes a abandonar creencias tales como: término final existente en una secuencia infinita, límite siendo valor y posición a la vez, y el límite nunca puede ser alcanzado, porque es la última posición.

3) El uso de la gráfica puede ayudar a alejar la idea de que el límite requiere un comportamiento monótono.

Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini (2007) realizan una propuesta didáctica de la enseñanza de límite finito de una función en un punto, del cual se pueden extrapolar sugerencias para la enseñanza del límite finito de una sucesión, sobre todo en lo referente a los sistemas de representación que se deben usar en la enseñanza de uno y otro concepto.

Para ello analizan una secuencia de actividades en el aula de modo que los alumnos gestionen con sentido el conocimiento matemático para que resulte un conocimiento vivo (que pueda evolucionar) y además que sea funcional (que permita resolver problemas).

Los sistemas de representación formaron parte de las tareas que se usaron. Diseñaron además una situación didáctica orientada a que los alumnos estén suficientemente preparados para abordar el aprendizaje de límite finito de una variable finita teniendo en cuenta el trabajo que realizaron con funciones, considerando especialmente las distintas formas de representación y algunas cuestiones relacionadas con las aproximaciones. Se favoreció el trabajo en forma verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Las actividades se organizaron para favorecer el desarrollo de habilidades para poder pasar sin inconvenientes de un sistema de representación a otro buscando que el estudiante entre en acción.

En nuestro trabajo emplearemos los siguientes sistemas de representación: verbal, gráfico, tabular o numérico y simbólico, porque tras intensas lecturas, creemos que son los más usuales en la enseñanza del límite. También aceptamos que la palabra límite tiene unas connotaciones antes de la enseñanza del concepto matemático, pero no pretendemos entrar a cambiar esas concepciones previas que los alumnos tienen, ya que no hemos diseñado una secuencia didáctica que llevar a cabo para la enseñanza del concepto en cuestión. Consideramos que el manejo de diferentes sistemas de representación puede ser más beneficioso que perjudicial y que puede llegar a mejorar la comprensión del concepto de límite finito de una sucesión. A pesar de esto, nuestro trabajo no pretende analizar en qué grado un alumno comprende o no el límite finito de una sucesión en función de los distintos sistemas de representación y del número de ellos que usa cuando realiza tareas relacionadas con él.

Nuestro trabajo usa los sistemas de representación como un elemento en el que los diferentes fenómenos se expresan y son observados. Queremos, a lo largo de la investigación, observar la relación entre los fenómenos observados y los sistemas de representación usados, estableciendo la frecuencia con que los primeros aparecen en los segundos.

2.3 Pensamiento matemático avanzado

En 1985, en el seno del PME, se creó un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del "pensamiento matemático avanzado". Pretendía profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus 1990 y Tall, 1991).

El interés en didáctica de la matemática se empieza a centrar en la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y no como una simple adquisición de competencias y habilidades. También se produce una evolución en las investigaciones, que empiezan a ocuparse de tópicos que por su naturaleza y complejidad se situarían dentro de una matemática superior (límite, derivada, entre otros).

Entre los procesos involucrados en el pensamiento matemático avanzado citamos en primer lugar, por su importancia, la abstracción y la generalización.

La abstracción es definida como un proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos (Dreyfus, 1991). Para este autor, la generalización es definida como derivar o inducir de particulares, para identificar generalidades y expandir los dominios de validez.

Tall (1991, p.12) distingue diferentes tipos de generalización de acuerdo con los aspectos cognitivos que se observan:

- Expansiva: generalización en la cual el estudiante extiende su estructura cognitiva pero sin producir cambios en las ideas corrientes.

- Reconstructiva: generalización en la cual se requiere una reconstrucción de la estructura cognitiva.

- Disyuntiva: generalización en la que los estudiantes son capaces ahora de operar en un amplio rango de ejemplos. No parece ser muy duradera.

La abstracción no se considera una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco otros procesos como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar o formalizar. Estos tres últimos, junto con la abstracción adquieren mayor importancia en las matemáticas superiores. Los alumnos señalan que una de las dificultades de la enseñanza de las matemáticas avanzadas es que son demasiado abstractas, creando éstos imágenes mentales a partir de las definiciones dadas por el profesor, como ya observaron Tall (1981) y Vinner (1991), los cuales crearon una teoría cognitiva sobre la forma en la que los alumnos aprendían los conceptos matemáticos.

2.3.1 Teorías cognitivas

El interés por estudiar la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos da lugar a varias teorías del conocimiento como: concepto imagen y concepto definición, la teoría de las concepciones de Sfard o la descomposición genética de Dubisnky.

- *Concepto imagen y concepto definición*

Asociado a un concepto matemático Tall y Vinner (1981) señalan los siguientes términos: concepto imagen y concepto definición, denominados por Vinner (1991) dos diferentes celdas en nuestra estructura cognitiva.

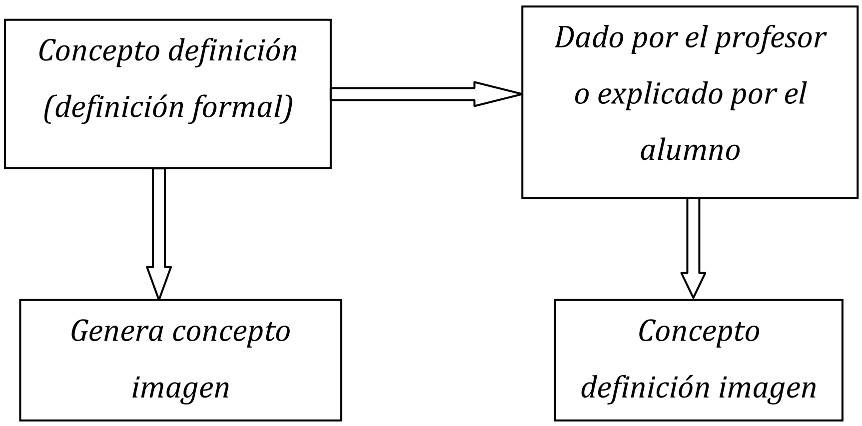
El "concepto definición" es definido como un conjunto de palabras usadas para especificar el concepto. Enunciado por el profesor y trabajado por el alumno tiene un camino personal hasta la asimilación por parte del alumno. En este camino un concepto definición *personal* puede diferir de un concepto definición *formal*, siendo el último el que es aceptado por toda la comunidad matemática.

Cada concepto definición genera su propio concepto imagen el cual puede ser llamado "concepto definición imagen". Esto es, de hecho, parte del concepto imagen. El concepto imagen es algo más amplio que puede producirse de varias formas diferentes.

Vinner(1991) señala que el concepto imagen es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre de un concepto. Puede ser una representación visual de un concepto o una colección de impresiones o experiencias. El término “concepto imagen evocado” es introducido para describir el contenido de la memoria evocado en un contexto dado.

Garbin y Azcárate (2001) no exigen que el concepto imagen sea coherente en todos los momentos. Al cambiar de registros, es decir al cambiar de una representación a otra, se pueden producir situaciones de congruencia o de incongruencia. Las inconsistencias han sido estudiadas ampliamente por Tirosh (1990).

Teniendo en cuenta lo anterior establecemos el siguiente diagrama.



En nuestro caso, el concepto de límite finito de una sucesión, la definición formal epsilon-delta, constituye el concepto definición, el cual es explicado normalmente por el profesor en clase. La lectura, análisis e interpretación de la definición da lugar a la creación de los correspondientes ‘concepto imagen’ y ‘concepto definición imagen’. El primero sería algo más amplio que el segundo y recogería todas las imágenes mentales que formamos en torno al límite de una sucesión. En estas imágenes mentales aparecerán diferentes sistemas de representación como gráficos, tablas, símbolos e incluso representaciones verbales del concepto de límite de una sucesión. En el segundo caso “concepto definición imagen” la definición produce un concepto definición imagen que pretende facilitar el uso y comprensión del concepto de límite finito de una sucesión. Este concepto definición imagen estaría representado por expresiones que usan los alumnos, tales como: "Sn tiene límite s, porque la diferencia entre Sn y s puede hacerse tan pequeña como se desee."

Estableciendo relaciones entre esta teoría y los fenómenos a.s.i e i.v.s, podemos afirmar lo siguiente:

-El fenómeno a.s.i estarían relacionados con el concepto imagen o los conceptos imágenes creados a partir del concepto de límite finito de una sucesión o como preparación del aprendizaje de éste, ya que tanto el fenómeno a.s.i como el concepto imagen son aproximaciones al concepto definición de límite.

-El fenómenos i.v.s estaría relacionado con el concepto definición imagen y también con el concepto definición, ya que el fenómeno i.v.s nace de la interpretación de la definición de límite finito de una sucesión y además es la esencia de la definición de límite, puesto que organiza todas las aproximaciones posibles (véase la figura 2.1).

- Teoría de las concepciones de Sfard

Sfard (1991) habla de dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: concepciones operacionales, cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y concepciones estructurales, cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos. Las concepciones operacionales preceden a las estructurales y ambas son complementarias.

Concepciones para un mismo concepto	
Operacionales	Estructurales
- Procesos dinámicos - Algoritmos - Acciones	- Objetos abstractos

Cuadro 2.1 Concepciones según Sfard y ejemplos.

Sfard (1991) distingue tres etapas que corresponden a tres grados de estructuración progresiva y que denomina: interiorización, condensación y cosificación. Las dos primeras son procesos graduales y cuantitativos mientras que la segunda es instantánea. La nueva entidad cosificada, el objeto, se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. El estadio de cosificación es el punto de partida para la interiorización de conocimiento de un nivel superior, que se originará a través de procesos sobre el objeto en cuestión

- Teoría APOS

La teoría APOS nace de una interpretación del constructivismo de Piaget en 1992 propuesta por Dubinsky. El paradigma de investigación, denominado teoría APOS es descrito de la siguiente manera. En primer lugar se realiza un primer trabajo teórico sobre el tópico que se desea trabajar. A continuación teniendo en cuenta cómo el concepto puede ser aprendido por los alumnos se diseña e implementa la instrucción. Con los resultados obtenidos y las observaciones realizadas durante el período de instrucción se realiza un análisis teórico, que lleva a una revisión de todo el proceso realizado. Todo esto, queda reflejado en la figura 2.2:

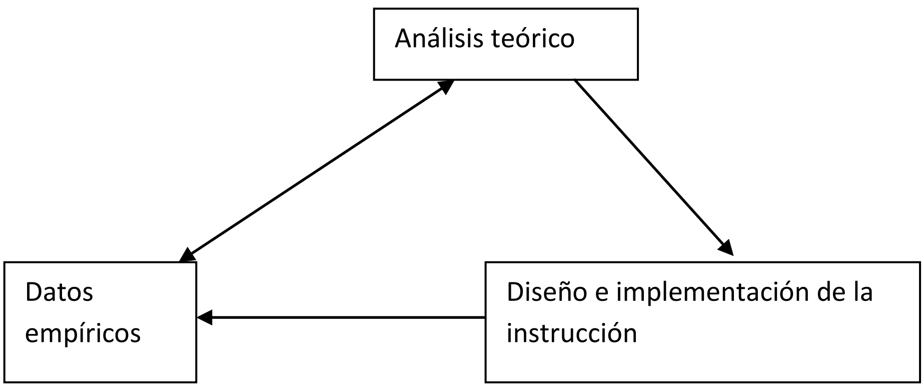


Figura 2.2: Esquema de la teoría APOS

Cottrill, Dubinsky y otros (1996; pp 171-172) realizan unas modificaciones a la teoría APOS, introduciendo el concepto de esquema. Esta teoría concibe tres tipos de conocimiento matemático: acciones, procesos y objetos. Estos tres tipos de conocimientos están organizados dentro de estructuras a las cuales nos referimos como esquemas. Una acción es definida como "*una transformación física o mental de un objeto para obtener otros objetos. Ocurre como reacción a un estimulo que el individuo percibe como externo*". Un proceso es *"una transformación de un objeto u objetos";* en él, el individuo controla la transformación. La construcción de un objeto se define así: *"Un objeto es construido a través de la encapsulación de un proceso. Esta encapsulación es alcanzada cuando el individuo es consciente de la totalidad del proceso, realiza esas transformaciones que pueden actuar en él y es capaz de construir tales transformaciones".* El proceso inverso de la encapsulación (denominado desencapsulación) permite pasar del objeto anteriormente obtenido a los procesos de los que proviene. Esta reversibilidad entre un objeto y los procesos de los que proviene es algo muy habitual y a la vez muy valorado en matemáticas. Finalmente, un esquema se define como una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están enlazados de algún modo y son retomados para soportar una situación problemática. Los individuos pueden transformar los esquemas, producto generalmente de la reflexión que han hecho sobre los mismos. Los objetos creados también pueden ser transformados, llevando a nuevos procesos, objetos y esquemas. La transformación de estos objetos se realiza mediante acciones de alto nivel. (Cottril, Dubinsky y otros, 1996; p.172)

Respecto a la percepción de los objetos y a la posterior acción sobre ellos, Tall (1995) explica la existencia de dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas: Los objetos se perciben en forma visuo-espacial, produciendo posteriormente una descripción verbal, una clasificación y el inicio de deducciones verbales. La acción sobre los objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con la dualidad objeto-proceso y la noción de procepto. Gray y Tall (1994) definieron "elementary procept" como "*Un proceso el cual produce un objeto matemático y un símbolo, el cual es usado para representar ó el proceso ó el objeto*" y el procepto como una colección de proceptos elementales los cuales actúan sobre el mismo objeto.

Cottill, Dubinsky y otros (1996) analizaron el concepto de límite, desde la perspectiva de la teoria Apos, afirmando que éste podría ser interpretado como una colección coherente de acciones, procesos y objetos, lo cual reciba el nombre de esquema. Además se podían aplicar acciones a esquemas. El límite de una secuencia, de una función, de un conjunto y demás limites son esquemas que son interpretados como objetos.

La descomposición genética y la teoría en la cual está basada no pretende ser una "verdadera" descripción de lo que ocurre en la mente de los estudiantes. Esta teoría, consideran los autores que:

- Proporciona un método para dar sentido a una amplia gama de datos cualitativos.

- Proporciona un lenguaje para hablar acerca de la naturaleza del aprendizaje de tópicos particulares en matemáticas.

- Puede permitir sugerir estrategias pedagógicas que pueden mejorar el campo en el cual el aprendizaje tiene lugar.

Estos autores llevaron a cabo una descomposición genética del concepto de límite finito de una función, diseñaron la instrucción basada en ella y después la implementaron. A continuación realizaron entrevistas que sirvieron para revisar la descomposición genética realizada.

Una objeción a la teoría Apos, respecto a cómo se lleva a cabo la descomposición genética del límite finito de una función, es que realiza una serie de pasos intermedios para llegar a manejar la definición formal. Entre estos pasos intermedios están la evaluación de una función en varios puntos o el trabajo con cuantificadores. Sin embargo, los autores no observan que hay una serie de fenómenos implícitos en la definición de límite que es necesario conocer y con los que se debe trabajar. El dominio del concepto de límite, su manejo, no se reduce a emplear con éxito la definición formal en diferentes problemas, exige también conocer los elementos subyacentes, entre los cuales situamos los fenómenos que hemos observado en nuestra investigación y que serán descritos con detalle en el capítulo 3.

- Teoría cognitiva de Duval

Duval desarrolló, entre 1996 y 1999, una teoría cognitiva que cuestiona si los medios estructurales requeridos para acceder a un conocimiento matemático son distintos de los necesarios para acceder a otro tipo de conocimiento. El debate, análisis y reflexión sobre esta cuestión llevó a obtener las siguientes conclusiones: (1) los objetos matemáticos no son reales y no son accesibles fuera de un sistema semiótico; (2) no se debe confundir un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa).

Además de esto, Duval considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Cambio se refiere al paso de un sistema de representación a otro y coordinación se refiere a la necesidad de coordinar los diferentes registros de la representación

2.3.2 Diferencia entre pensamiento matemático avanzado y elemental

Tall (1985; 1991) afirma que el paso del Pensamiento Matemático Elemental (PME) al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica pasar, por un lado, de "describir" a "definir" y, por otro, de "convencer" a "demostrar". La franja de edad de los alumnos que situaría en este tipo de pensamiento sería 16-20 años. Esta franja corresponde a los alumnos de 1º y 2º de bachillerato y 1º y 2º de Universidad.

La transición de las matemáticas elementales a las avanzadas, supone trabajar cada vez más con entidades abstractas, las cuales se construyen a través de deducciones de definiciones formales. El propio Tall (1991), sin embargo, reconoce que no se ha definido con precisión el paso del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado; Tall (1992) enlaza la noción de pensamiento matemático avanzado con las matemáticas formales. El pensamiento matemático avanzado se reconocería, al menos, por dos componentes: definiciones matemáticas precisas y deducciones de teoremas basadas en ellas.

Robert y Swarzenberger (1991) señalaron una serie de diferencias entre el pensamiento elemental y el avanzado: (1) En el pensamiento matemático avanzado los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además estos son presentados de manera formal. (2) Los conceptos enseñados llevan asociadas las siguientes propiedades: generalización, abstracción y formalización, propiedades que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior que se tenía sobre el concepto. (3) Los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos, los cuales no pueden ser discutidos en todo detalle.

Estas diferencias entre el pensamiento elemental y el pensamiento avanzado propuesta por Tall (1991), Robert y Swarzenberger (1991) son rebatidas actualmente, por Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) los cuales, además de proponer una definición alternativa de pensamiento matemático avanzado, señalan que un concepto se considerará dentro del pensamiento matemático avanzado dependiendo de los aspectos que se traten.

Edwards, Dubinsky, McDonald (2005; pp.17-18) proponen la siguiente definición de pensamiento matemático avanzado:

"Pensamiento que requiere deductivo y riguroso razonamiento acerca de nociones matemáticas que no nos son enteramente accesibles a través de los cinco sentidos".

Estos autores señalan que no hay un punto en el cual el pensamiento matemático elemental termina y empiece el avanzado. Desde su punto de vista, el pensamiento matemático avanzado forma parte de un continuo proceso de pensamiento que parece trascender pero no ignora la experiencia procedimental o las intuiciones del pensamiento matemático elemental. Además, estos autores proponen que un concepto que previamente puede ser catalogado como si requiriera un pensamiento matemático avanzado, depende, para esa catalogación, del contexto en el que se esté trabajando. Para ello enuncian el caso del concepto de límite en el análisis real, cuya comprensión completa requiere un razonamiento deductivo y riguroso acerca de un proceso inaccesible. Este hecho no implica que lo que se realice con los límites se integre siempre en el pensamiento matemático avanzado. Los estudiantes de secundaria trabajan calculando límites, como un mero proceso algebraico y por lo tanto esta actividad no necesariamente requiere pensamiento matemático avanzado.

Harel y Sowder (2005) proponen otra definición de Pensamiento Matemático Avanzado, para la cual es necesario distinguir entre "formas de pensamiento" y "formas de comprensión". Los significados particulares que los estudiantes dan a un término, sentencia o texto, la solución que ellos proporcionan a un problema, o la justificación que usan para validar o refutar una afirmación son formas de comprensión, mientras que las teorías generales implícitas o explicitas que subyacen a tales acciones son formas de pensamiento.

Teniendo en cuenta lo anterior, Harel y Sowder (2005; pp 34-35) proponen la siguiente definición que afirma cuándo un pensamiento matemático es considerado como avanzado:

"Un pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo envuelve al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición para una forma de pensamiento por un individuo es determinado por la amplitud con la cual ha superado estos obstáculos".

Las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico son: (1) Hay trazas de él en la historia de las matemáticas. (2) Un obstáculo epistemológico no es una ausencia de conocimiento, o una mala concepción, sino que son piezas de conocimiento o concepciones que producen respuestas satisfactorias en un contexto determinado, y generan respuestas inválidas fuera de ese contexto. (3) Un obstáculo epistemológico ocasiona contradicciones y establece una mejor pieza de conocimiento. Esta mejor pieza de conocimiento no es suficiente para que el precedente desaparezca.

2.3.3 Situación del concepto de límite dentro del Pensamiento Matemático Avanzado.

Teniendo en cuenta la distinción establecida por Tall (1991) según la cual la definición formal y la deducción distinguen al pensamiento matemático avanzado del elemental, el concepto de límite de una sucesión estaría situado dentro de los conceptos que requieren para su dominio un pensamiento matemático avanzado.

Cornu (1991) sitúa también, por su dificultad, el concepto de límite, como un concepto típico del pensamiento matemático avanzado. Señala además que es un punto fundamental del análisis, presente en la teoría de aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración.

Cornu señala que una de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite no está solamente en su riqueza y complejidad, sino que hay aspectos cognitivos que no pueden ser generados puramente de la definición formal. Los alumnos son capaces de realizar ejercicios con límites pero no son capaces de comprender completamente el formalismo de la definición. Los cuantificadores "para todo" y "existe" tienen significados diferentes en la vida diaria y esto puede ser un obstáculo que ocasione muchas dificultades.

Además de las dificultades citadas anteriormente, tenemos que añadir que los alumnos, antes de la enseñanza del concepto de límite, tienen una serie de ideas que son llamadas por el autor "concepciones espontáneas", las cuales se mezclan con los nuevos conocimientos adquiridos por el alumno, elaborando éstos, así, sus concepciones personales.

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) señalan sin embargo que el concepto de límite estará situado en el pensamiento matemático elemental o avanzado dependiendo del trabajo que se realice con él. Si solamente se trabaja cálculo de límites, no estaríamos hablando de un concepto que requiera un pensamiento matemático avanzado para realizar esta operación.

Teniendo en cuenta los fenómenos asi e ivs, que presentaremos en el próximo capítulo, consideramos que el concepto de límite estará dentro del pensamiento matemático avanzado si los alumnos reconocen y emplean en sus justificaciones los fenómenos a.s.i e i.v.s de manera conjunta. Por el contrario si los alumnos emplean el fenómeno a.s.i en sus respuestas y justificaciones a cuestiones relativas al concepto de límite, esta manera de actuar no deberíamos incluirla dentro del pensamiento matemático avanzado. Véase figura 2.3.

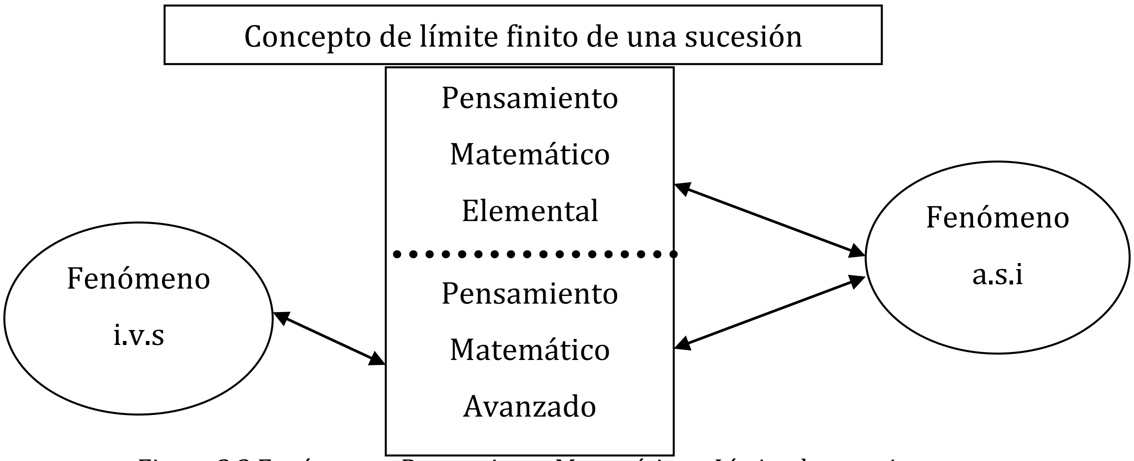


Figura 2.3 Fenómenos, Pensamiento Matemático y Límite de sucesiones

2.4 Delimitación del problema de investigación

La línea-marco en la que se sitúa nuestra investigación sobre el límite de una sucesión se articula en torno a los tres soportes que hemos considerado hasta ahora: fenomenología, representaciones y pensamiento matemático avanzado, aunque no descartamos el pensamiento matemático elemental, como acabamos de indicar (véase la figura 2.4). Con estas "herramientas teóricas" creemos que es posible abarcar la complejidad del límite de una sucesión.

Esta investigación se inició cuando nos preguntamos, como profesores de secundaria, a qué se deben las dificultades que sufrimos para enseñar correctamente el concepto de límite de una sucesión y para conseguir que se aprenda adecuadamente.

Nos dimos cuenta de que, si queríamos seguir a Freudenthal, teníamos que establecer los fenómenos organizados por la definición y que, siguiendo otras investigaciones en Educación Matemática, era necesario tener en cuenta, las representaciones usadas para presentar el límite, así como la complejidad y dificultad de éste, que el Pensamiento Matemático Avanzado, a pesar de sus limitaciones, en nuestra opinión plantea y describe bien.

La **meta principal de la investigación** es la de obtener información sobre los fenómenos relacionados con el límite de una sucesión, caracterizarlos y establecer las relaciones de éstos con los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. En el campo de la educación matemática se han realizado aportes significativos sobre el estudio del concepto de límite, desde diferentes puntos de vista (estudios sobre dificultades, errores, práctica docente, trabajo con alumnos, entre otros) pero quedan aún cuestiones pendientes como la de establecer qué relación mantienen la fenomenología, el pensamiento matemático avanzado, los sistemas de representación y el límite. Véase la figura 2.4 (página siguiente).

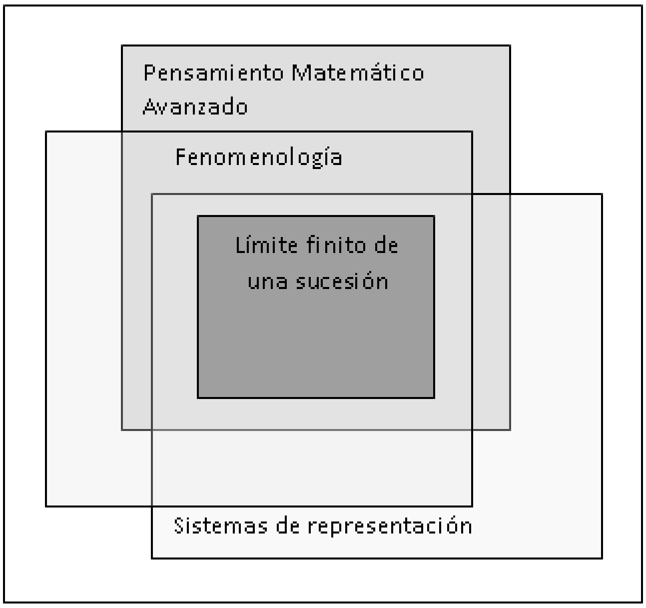


Figura 2.4: Esquema del marco teórico

2.4.1 Objetivos

Objetivo 1: Revisar y analizar el campo de conocimientos actual en torno al límite finito de una sucesión, poniendo de manifiesto los principales intereses, problemas y limitaciones existentes.

El estudio del límite finito de una sucesión se puede abordar desde diferentes puntos de vista. Así podemos encontrar investigaciones centradas en las dificultades y errores de los alumnos en torno al límite (Cornu, 1991), otras dedicadas a diseñar una secuencia didáctica que mejore la comprensión del concepto de límite (Blázquez, 2000) e incluso otras que investigan la evolución del concepto de límite a lo largo de la historia y sus implicaciones o relaciones con el concepto de infinito (Hitt, 2003). Esta amalgama de casos hace necesario estructurar y analizar en qué punto se encuentra actualmente la investigación en torno al concepto de límite finito de una sucesión.

Objetivo 2: Describir dificultades asociadas a la presentación del límite.

El concepto de límite aparece en secundaria bajo diferentes sistemas de representación. Además, dicho concepto puede enunciarse empleando la definición formal (muchos libros de texto y muchos profesores plantean la definición formal de límite de una sucesión, denominada usualmente *definición epsilon-n_0*) o un acercamiento intuitivo, como se planteó en el marco de la LOGSE. Los enfoques intuitivos no son exclusivos del período LOGSE, y encontramos evidencias de ellos en los años sesenta, setenta y ochenta, e incluso de manera ocasional antes de los años sesenta.

Las dificultades sobre el concepto de límite, en particular sobre cómo ir acomodando los nuevos conocimientos con las ideas previas de los alumnos, fueron trabajadas con mucho detalle por Cornu (1991). Dicho autor señala que en el caso del concepto de límite las palabras "tender a" y "límite" tienen un significado antes de cualquier contacto con el concepto de límite. Tender puede traducirse como: aproximarse (eventualmente lejos de él); aproximarse sin llegar a alcanzarlo; aproximarse justamente alcanzándolo; parecerse (el azul tiende a violeta). Los significados atribuidos a la palabra límite son: un "impasible" límite el cual es alcanzado; un "impasible" límite el cual es imposible de alcanzar; un punto al cual uno se aproxima sin llegar a tocarlo; un punto al cual uno se aproxima y logra alcanzar; un límite superior o inferior; un máximo o un mínimo; un intervalo que viene inmediatamente después que pues ser tocado; una restricción, una prohibición, una regla; el final, lo último.

Estos significados son mantenidos incluso después de trabajar con la definición formal, planteándose un campo problemático, necesario de considerar antes de la explicación del concepto.

Objetivo 3: Enunciar elementos necesarios para manejar el límite finito de una sucesión y distinguir el límite finito de una sucesión de otros tipos de límite, como el límite infinito de una sucesión o el límite de una función.

El concepto de límite de una sucesión ha aparecido en los libros de texto y ha sido presentado a los alumnos, en la mayoría de los casos, como un paso previo en la definición de límite de una función. Es decir, se trabaja con los alumnos el límite de una sucesión y cuando tienen un cierto manejo de él se empieza a trabajar con el límite de una función. El propio Tall (1981) reconoce que el orden lógico en la enseñanza del límite debe ser: límite de una sucesión, límite de una función y continuidad. Nosotros estamos de acuerdo con este orden propuesto por Tall para la enseñanza del límite, pero queremos poner de manifiesto que el paso del límite de una sucesión al límite de una función no es algo tan evidente como muchos docentes piensan. Este salto, nuestra experiencia nos dice que, generalmente, ocasiona muchas dificultades en los alumnos.

Objetivo 4: Seleccionar una definición de límite finito de una sucesión para su estudio en profundidad.

De las distintas definiciones de límite finito de una sucesión (métrica, topológica, intuitiva, entre otras) se hace necesaria la elección de una de ellas, para su estudio exhaustivo. El trabajar con una definición de límite y desechar las demás supone una limitación, pero también supone la ventaja de profundizar y llegar a resultados más específicos y relevantes sobre el límite finito de una sucesión.

Objetivo 5: Caracterizar y definir, si los hay, los fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión.

La fenomenología de Freudenthal (1983) es un instrumento que usamos como guía en nuestro intento de reconocer las dificultades asociadas al concepto de límite. Aunque no es un objetivo del presente trabajo el reconocimiento de todos los fenómenos implicados en el concepto de límite de una sucesión, entendemos que será una importante ayuda para diseñar, en el futuro, situaciones de enseñanza-aprendizaje que permitan superar algunas de las dificultades.

Objetivo 6: Detectar esos fenómenos en los libros de texto de secundaria y organizar la información obtenida.

Para lograr este objetivo se realizará un estudio de una muestra de libros de texto que se usan o se han usado habitualmente en secundaria, estableciéndose los siguientes objetivos específicos:

6.1. Construir tablas de frecuencias de los diferentes fenómenos observados.

6.2. Comparar las frecuencias de los fenómenos observados y establecer relaciones entre ellos.

6.3. Calcular la "correlación" entre las frecuencias de ambos teniendo en cuenta el sistema de representación usado.

6.4. Establecer períodos temporales al analizar los libros con el fin de observar la evolución de uso de los fenómenos en función de los años.

6.5. Analizar las diferentes apariciones de los fenómenos en función de los años.

6.6. Estudiar la "correlación" de los fenómenos encontrados teniendo en cuenta los diferentes periodos de tiempo considerado.

El estudio de los libros de texto es una pieza clave en nuestro trabajo, pues a la vez que confirma la presencia de los fenómenos considerados, informa sobre la frecuencia de estos fenómenos a lo largo del tiempo. El análisis de los libros de texto se ha hecho a través de una agrupación por décadas y también a través de una agrupación por períodos educativos (entendemos por periodos educativos los que han sucedido debido a las diferentes leyes de educación acontecidas en España en los últimos tiempos). En este análisis observamos cómo unos fenómenos prevalecen muy por encima de otros, en lo que a frecuencia absoluta se refiere.

Objetivo 7: Detectar esos fenómenos en las respuestas de los alumnos de bachillerato a un cuestionario relativo al límite finito de una sucesión.

Para lograr este objetivo se elaborará un instrumento, el cual se administrará a alumnos de bachillerato. Se establecen los siguientes objetivos específicos:

7.1. *Observar si los sistemas de representación usados en los enunciados de las preguntas (verbal, gráfico y tabular), tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos. Los sistemas de representación más usuales en el límite son: verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico. El sistemas de representación simbólico es poco usado actualmente, debido al carácter intuitivo con el que se presenta la definición de límite (marco este hecho por el currículo). Por este motivo dicho sistema de representación es excluido del estudio.*

7.2. Observar la influencia de la variable "sexo" en las respuestas de los alumnos al cuestionario sobre el límite finito de una sucesión.

7.3. Observar la influencia de la variable "edad" en las respuestas de los alumnos al cuestionario sobre el límite finito de una sucesión.

Queremos observar si estas variables secundarias tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos y, en su caso, describir esa influencia.

La presencia de los fenómenos anteriormente señalados en las respuestas de los alumnos a un cuestionario sobre el límite finito de una sucesión, nos permitirá completar la secuencia metodológica indicada en la figura 2.5:

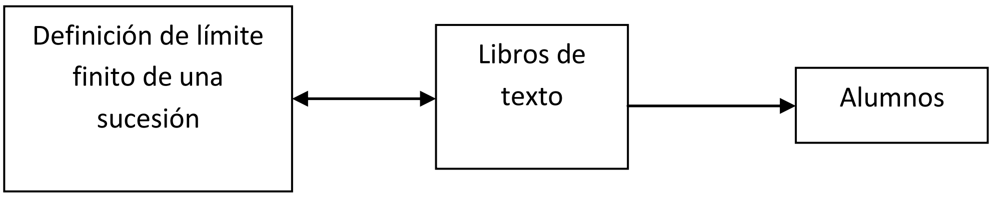


Figura 2.5 Estudios realizados para esta investigación

Se plantea una cuestión relevante al analizar el paso de los fenómenos señalados, de los libros de texto a los alumnos. El analizar este paso supone estudiar cómo los profesores organizan sus ideas y cuáles de ellas usan para explicar el concepto de límite de una sucesión. Este estudio no lo hemos realizado.

2.4.2 Metodología

Fue necesario diferenciar esta investigación de otras que se habían ocupado del estudio del concepto de límite, como la realizada por Blázquez (2000). Esta autora se ocupa del concepto de límite en alumnos de bachillerato (modalidad de ciencias sociales), y trabaja tanto el concepto de límite de sucesión como el de función, no estableciendo diferencias significativas entre ambos conceptos de límite.

Nuestro primer paso fue establecer diferencias significativas entre la definición de límite finito de una sucesión y la definición de límite finito de una función en un punto. Las diferencias se estructuraron en torno a dos grupos distintos: diferencias simbólicas y diferencias fenomenológicas.

<u>-Diferencias simbólicas</u>. Se establecieron diferencias entre ambas definiciones señalando tres campos de incidencia: acotación (en la definición de límite finito de una sucesión la variable independiente no está acotada), procesos infinitos y tipos de infinitos. Entendemos por *proceso infinito* cada una de las formas posibles de aproximación experimentadas por las variables, independiente y dependiente, presentes en las definiciones formales consideradas y, para el análisis de los tipos de infinitos, manejamos el infinito discreto presente en el límite de sucesiones.

<u>Diferencias fenomenológicas</u>: Los fenómenos presentes en la definición de límite finito de una sucesión son en esencia distintos de los fenómenos que encontramos en la definición de límite de una función. En el concepto de límite de una sucesión están presentes dos enfoques completamente diferentes: un enfoque informal, basado en una actitud de plena "confianza" en la sucesión, según el cual los valores de la variable independiente siguen obedientemente (por así decir) una tendencia; el enfoque formal apela a una definición de límite y la aplica, antes de establecer cualquier conclusión.

El enfoque informal no es matemáticamente satisfactorio, pero en las relaciones cotidianas suele aceptarse que conlleva información suficiente. De hecho, suele usarse para fundamentar los aspectos formales. Raman (2002) observa que los estudiantes tienen dificultades al coordinar los dos enfoques el informal y el formal, señalando entre las razones fundamentales de esta dificultad el poco provecho, en términos de comprensión, que se saca del enfoque informal y la manipulación de símbolos en el enfoque formal sin tener una profunda comprensión de lo que los símbolos significan.

También afirma que se ha discutido mucho sobre el tema y algunos educadores matemáticos afirman que: algunas presentaciones de libros de textos pueden estar en desacuerdo a cómo queremos que los alumnos aprendan.

Autores como Cottrill, Dubisnky y otros (1996), presentan dos posturas respecto al concepto de límite de una función en un punto: la concepción estática y la concepción dinámica. La concepción estática es identificada con la definición formal epsilon – delta, mientras que la concepción dinámica sería el valor al que se aproximan los f(x) cuando x se aproximan a *a*. La dificultad para alcanzar el dominio de la definición formal es debida a no haber trabajado de manera suficiente la concepción dinámica.

La problemática sobre si es mejor trabajar sobre la definición formal de límite o sobre aspectos informales de ésta, ha sido considerada por varios autores. Scharfer (1997) señala la conveniencia de trabajar sobre la definición formal de límite, siendo necesario para ello poner especial atención en las palabras que componen la definición y en un cuidadoso análisis del significado y propósito de cada parte de la definición. La autora señala que en ocasiones se crean "definiciones simplificadas", en las que se podría usar un lenguaje menos formalizado y en la que aparecerían menos signos matemáticos. Este hecho, aparentemente, ayuda al manejo y comprensión de la definición, sin embargo Tall y Schwarzenberger (1978) pusieron de manifiesto una serie de dificultades provenientes de pasar a un lenguaje informal la definición de límite secuencial "s es el límite de s_n si podemos tomar s_n tan cerca de s como queramos haciendo n suficientemente grande". En esta definición se muestra una pérdida de precisión puesto que no se especifica cuánto, de cerca, se pueden tomar los términos de la sucesión, ni se especifica la relación entre epsilon y n. Además, la palabra cerca se asocia a distinto, produciéndose serios problemas con sucesiones que en un momento determinado se hacen constantes.

Scharfer (1997) señala las dificultades para definir con claridad, cómo y cuándo se debe introducir la definición formal de un concepto matemático. A pesar de estas dificultades, resalta su importancia, como un paso previo para realizar demostraciones formales.

Una vez establecidas las diferencias entre ambas definiciones, empezamos a trabajar en la definición de límite de una sucesión, definiendo, los fenómenos que aparecen en ella y la relación que mantienen estos con la definición.

En nuestro estudio asociamos, al enfoque informal (definiciones simplificadas según Scharfer), un fenómeno que hemos llamado de aproximación simple intuitiva (a.s.i) y, al enfoque formal, que se sustenta en la construcción de una función de apoyo, un fenómeno de retroalimentación que, por comodidad, también designamos con la expresión "fenómeno de ida y vuelta en sucesiones" (i.v.s).

<u>Límite, fenómenos y representaciones en nuestra investigación.</u> La complejidad del concepto de límite, requiere en primer lugar distinguir entre sucesión y función. Esta distinción dará lugar a dos tesis doctorales con un cuerpo común, el concepto de límite (la tesis de la investigadora Sánchez, y la presente investigación). Además de la distinción anteriormente citada, necesitamos considerar los sistemas de representación más usuales en los cuales aparecen los fenómenos considerados en nuestra investigación. Estos sistemas de representación aparecen habitualmente en la enseñanza secundaria y son: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Algunas autores sustituyen el nombre tabular por numérico (Blázquez y Ortega, 2000).

Los libros de texto, al igual que los docentes, usan esos sistemas de representación en dos circunstancias diferentes: en un ejemplo o en una definición. El empleo de los anteriores sistemas considerados y de los formatos ejemplos o definición varía de un autor a otro, y también de un periodo educativo a otro, entendiendo por periodo educativo, el periodo en el que tiene vigencia una ley educativa.

<u>Fenómenos y estudios experimentales.</u> Una vez definidos los fenómenos se realizaron dos estudios experimentales: el primero centrado en la observación de los fenómenos anteriores en los libros de texto, y el segundo dedicado a la observación de los citados fenómenos en las producciones de alumnos, los cuales contestaron un cuestionario con preguntas relativas al concepto de límite finito de una sucesión.

La observación de los fenómenos en los libros de texto y en las respuestas de los alumnos confirmará algunas de las hipótesis que manejamos durante todo el proceso que duró la investigación.

El análisis que vamos a hacer tanto de los libros de texto como del cuestionario carece de significatividad estadística, Realizamos inducciones, siempre recordando que las muestras (libros de texto y alumnos que respondieron al cuestionario) no son representativas.

Actuando como matemáticos, la principal dificultad al estudiar los libros de texto (a saber: la variedad de estilos y secuencias de presentación de los conceptos) obligó a depurar con mucho cuidado el estudio de los fragmentos e incluso a justificar la selección de éstos.

Por otro lado hay que decir que la muestra de libros seleccionada fue intencional, porque se analizaron los libros a los que tuvimos acceso en los diferentes institutos en los que ejercimos como docente y, finalmente, se completó la muestra con libros consultados en la Biblioteca Nacional. El análisis de los libros de texto se organizó por periodos de diez años (décadas), para observar con mayor detalle la evolución temporal de los fenómenos citados anteriormente. Dicho estudio de libros de texto se dividió en cuatro apartados: (1) Características del libro y de la ubicación en él del concepto de límite. (2) Secuenciación del apartado o apartados elegidos. (3) Detalle de los fenómenos observados. (4) Cuadros resumen.

La presencia de los fenómenos en los libros de texto, y el uso que habitualmente los docentes realizan de los mismos, nos llevó a realizar el segundo estudio experimental, centrado en los alumnos. Se trata de un estudio descriptivo, exploratorio y transversal (Cohen y Manion, 1990). El término descriptivo hace referencia a la descripción de los fenómenos que están presentes en las respuestas de los alumnos. El término exploratorio lo usamos para referirnos a los estudios que tienen una idea más o menos clara de lo que puede ocurrir y tienden a encontrarla. El término transversal hace referencia al estudio de diferentes grupos en diferentes momentos.

Hemos hecho un análisis cualitativo de algunas respuestas obtenidas, con el fin de establecer categorías, necesarias para tabular las respuestas abiertas, aunque breves, de los alumnos, previstas en el instrumento de recogida de datos que, en nuestro caso, fue un cuestionario que contiene preguntas relativas al concepto de límite de una sucesión, utilizando diferentes sistemas de representación: verbal, gráfico, tabular y simbólico.

Para la producción de la prueba definitiva se tomaron algunas precauciones habituales (Cohen y Manion, 1990), como son la revisión por expertos o la realización y estudio de una prueba piloto, antes de realizar la prueba definitiva. Se optó por las preguntas de respuesta abierta breve y se adoptó la decisión de acercar la pregunta al sujeto apelando a un alumno (hipotético) cuya respuesta había que analizar. (Conocemos un precedente de esta decisión; véase Scaglia, 2000).

Además de recoger las respuestas de los alumnos respecto a las cuestiones relativas al concepto de límite, recogimos unos datos secundarios para observar su posible influencia en las respuestas; preguntamos la edad, el sexo, la asignatura cursada y si repetía curso. De ellos, analizamos las variables "sexo" y "edad", para buscar indicios sobre los siguientes asuntos (que no son objetivos de esta investigación):

-Las dificultades experimentadas por hombres y mujeres jóvenes, ¿son diferentes cuando aprenden el concepto de límite de una sucesión?

-En la cabal comprensión del concepto de límite de una sucesión, ¿hay un efecto de maduración debido a la edad?

La metodología llevada a cabo en la investigación se concreta en la figura 2.6:

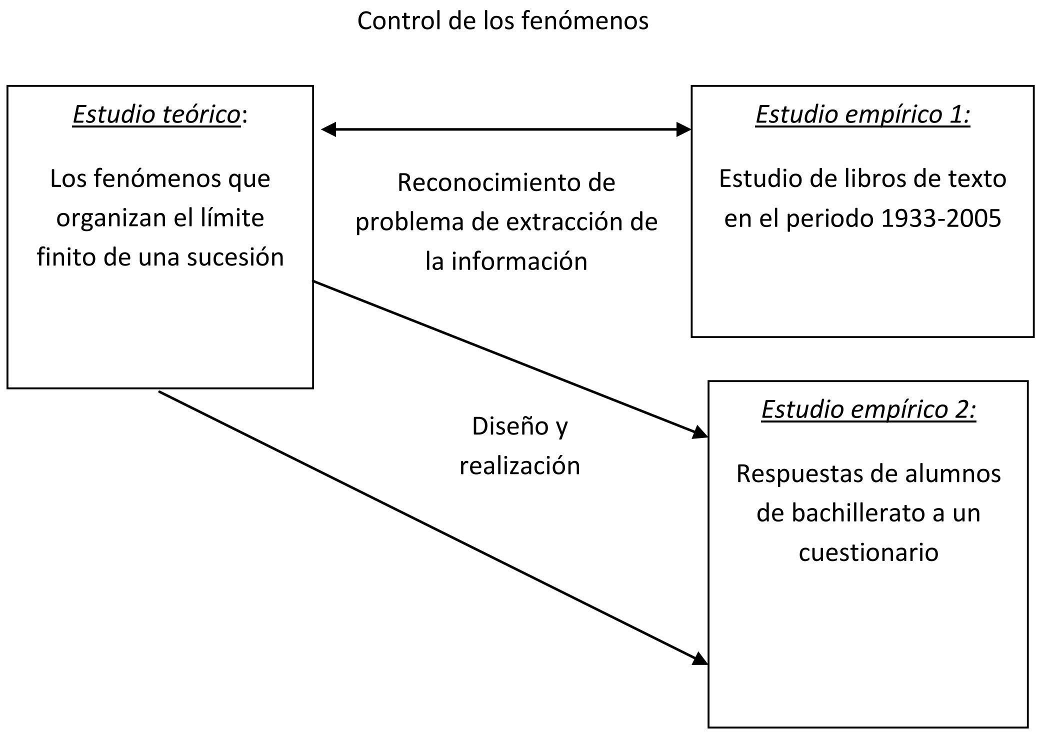


Figura 2.6: Plan de la investigación

2.4.3 Hipótesis

Para elaborar las hipótesis de la investigación se han tenido en cuenta los resultados de las investigaciones relacionadas con el concepto de límite, trabajos preliminares publicados (Claros, Sánchez y Coriat, 2006; 2007), los supuestos teóricos relacionados con él (teorías descritas anteriormente, en este capítulo), la reflexión realizada por el investigador sobre el problema, la experiencia docente del equipo investigador, el currículo y el tratamiento curricular del concepto de límite en los libros de texto durante un periodo relativamente amplio 1933-2005

Los objetivos que hemos enunciado admiten una concreción en términos de las siguientes hipótesis de investigación.

(***H1***) El límite de una sucesión es distinto del límite de una función y por ello se hace necesario un estudio pormenorizado de cada uno de ellos.

En toda la literatura observada, solamente Rey Pastor (1933) intentó unificar ambos conceptos. Una práctica habitual en los libros de textos es presentar el concepto de límite de una función a continuación del límite de una sucesión, y realizar un "paso natural" del segundo al primero, sin considerar las diferencias existentes entre uno y otro. Veremos que los fenómenos asociados al límite de una sucesión merecen una consideración particular. Esto, unido a las diferencias simbólicas citadas anteriormente, hace que el llamado "paso natural" no lo sea tal, produciéndose en los alumnos una serie de dificultades y obstáculos, normalmente no considerados por el docente.

(***H2***) La definición de límite finito de una sucesión organiza dos fenómenos: la aproximación simple intuitiva (fenómeno a.s.i) y la retroalimentación o ida y vuelta en sucesiones (fenómeno i.v.s).

(***H3***) Es posible detectar los fenómenos de aproximación simple intuitiva y de retroalimentación, organizados por la definición de límite finito de una sucesión, analizando libros de texto de bachillerato.

(***H4***) Un muestreo de libros de texto basado en décadas permite observar de manera suficiente la evolución en el tiempo de los fenómenos organizados por la definición de límite de una sucesión.

(***H5***) Los fenómenos de aproximación intuitiva aparecen con mayor frecuencia en los libros de texto que los fenómenos de retroalimentación.

(***H6***) Es posible detectar los fenómenos de aproximación simple intuitiva y de retroalimentación analizando las respuestas de los alumnos de Bachillerato a un cuestionario relacionado con el límite finito de sucesiones.

(***H7***) El fenómeno i.v.s está presente en las respuestas de los alumnos en menor medida que el fenómeno a.s.i.

(***H8***) El fenómeno i.v.s no está presente en las justificaciones de los alumnos cuando en la pregunta se emplea el fenómeno a.s.i.

(***H9***) El uso del fenómeno i.v.s en el enunciado de las preguntas del cuestionario, inducirá a los alumnos a emplearlo como justificación de sus respuestas.

(***H10***)Los alumnos de bachillerato no dominan la definición de límite.

Al enunciar estas hipótesis, perseguimos diferentes metas; básicamente, se trataría de acumular indicios para considerarlas como refutadas; sin embargo, algunas de ellas (como H1, H2, H3 o H10), de no ser refutadas, enuncian "cómo son" algunas cosas relacionadas con la fenomenología didáctica o la educación matemática.

Capítulo 3º: Estudio teórico

Introducción

Este capítulo incluye todos nuestros resultados teóricos relacionados con los fenómenos que organizan las definiciones de límite. Tras múltiples ensayos, lo hemos organizados en tres partes bien diferenciadas:

- La primera (3.1 a 3.4), se dedica al estudio de los fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión.

- La segunda parte (3.5), se ocupa de presentar los fenómenos análogos organizados por una definición de sucesión de Cauchy.

- La tercera parte (3.6), presenta las conclusiones, destaca los logros alcanzados y las limitaciones que aún hallamos en nuestro estudio teórico.

Esta estructura ha resultado ser, a nuestro entender, la más próxima a la cronología de nuestra investigación: durante mucho tiempo, pensamos que solamente era posible organizar dos fenómenos con ayuda de una definición arbitrariamente elegida. Cuando decidimos analizar otras definiciones, establecimos que somos capaces de distinguir dos clases de definiciones de límite finito por los fenómenos que organizan: la primera clase corresponde a las definiciones que exhiben el límite de la sucesión mientras que la segunda clase corresponde a las definiciones que exhiben el comportamiento de los términos de la sucesión sin referencia a límite alguno. Ambas clases de definiciones son matemáticamente equivalentes (está demostrado en los libros de matemáticas), pero no parecen equivalentes desde el punto de vista fenomenológico, al menos, no lo son aún.

Los cuatro primeros apartados constituyen, por así decir, el corazón de nuestra investigación en su primera etapa, cuando solamente manejábamos una definición. En ellos exponemos cómo hemos llegado a la observación de dos fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión, la cual se obtuvo mediante una consulta a expertos, realizada en el año 2000; los detalles de esta consulta a expertos se hallarán en 3.1 y en A3.1. La observación de los fenómenos en la definición seleccionada, supuso el primer paso para definir con detalle los fenómenos que se observaron, y que se denominaron: *fenómeno de aproximación simple intuitiva* o a.s.i y *fenómeno de retroalimentación* o i.v.s La definición de estos fenómenos, así como la relación que mantienen estos con la definición de límite finito de una sucesión se detalla en 3.2. Una continuación natural de esto es una colección de ejemplos de tales fenómenos, ejemplos extraídos de libros de texto; en 3.3 hemos estructurado las posibles maneras de encontrar estos fenómenos apoyándonos en lo que se viene llamando "sistemas de representación elegidos" y lo que hemos denominado "formatos" posibles. En 3.4 hemos retomado la definición de límite finito de una sucesión y la hemos considerado desde las esferas simbólica y fenomenológica.

Nuestro insatisfacción por la relativa arbitrariedad de la definición elegida condujo a estudiar todas las definiciones que habíamos presentado a los expertos (véase A3.1) y tratar de recuperar los fenómenos a.s.i e i.v.s en todas ellas. Este estudio se ha descrito en el anexo A3.2. Resultó que la definición de sucesión de Cauchy parece fenomenológicamente diferente, puesto que fuimos capaces de detectar otros dos fenómenos que hemos denominado *aproximación simple intuitiva de Cauchy* (a.s.i.c) e *ida-vuelta en sucesiones de Cauchy* (i.v.s.c). A la descripción de estos fenómenos y al estudio de relaciones que mantienen éstos con los fenómenos a.s.i e i.v.s, hemos dedicado el apartado 3.5.

El capítulo se cierra (3.6) con un balance de logros alcanzados y dificultades detectadas que, confiamos, constituyen puntos de partida de futuras investigaciones.

3.1 Límite finito de una sucesión

En educación secundaria la enseñanza del concepto de límite finito de una sucesión se suele presentar de dos maneras no excluyentes: empleando la definición formal o realizando un acercamiento intuitivo a la idea de límite.

El estudio de la definición formal de límite finito de una sucesión, en secundaria, se suele hacer empleando la definición métrica "épsilon-n" y suele formularse después de realizar un acercamiento intuitivo.

Teniendo en cuenta esta información, y considerando que la definición de límite finito de una sucesión puede enunciarse no solo a través de una definición métrica, sino también mediante consideraciones topológicas, parece conveniente tomar como punto de partida una sola definición y, con ella, (1º) analizar aproximaciones informales que le son asociadas, y (2º) estudiar cuáles son los fenómenos que organiza, si los hubiera, y que podrían diferir de una definición a otra.

Esta elección responde a la necesidad de realizar un estudio particular, pero minucioso, de la definición de límite. Se podría haber realizado un estudio de cada definición que hemos encontrado, pero optamos por estudiar una, aunque sabemos que queda pendiente la relación entre la definición estudiada y las demás.

Una vez definida la problemática en la que nos encontramos realizamos dos pasos:

1) Elegir una definición de límite finito de una sucesión, que esté avalada por profesores que trabajan como matemáticos en el campo de la enseñanza. Nuestra investigación parte de la definición seleccionada.

2) Estudiar, analizar y revisar la definición de límite seleccionada. El análisis de esta definición dará lugar a la observación de una serie de fenómenos imprescindibles para nuestra investigación.

3.1.1. Definición seleccionada

Como consecuencia de una consulta a expertos, la definición de límite finito de una sucesión que sirvió como punto de partida fue:

Sea x_n una sucesión en $\Re$, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ se cumple que $/x_n-x/<\varepsilon$

En esta definición, $\Re$ es el conjunto de números reales y la convergencia en $\Re$ se entiende como la convergencia en el espacio métrico $\Re$, con la distancia usual d(x,y)=|x-y|. Esta definición es conocida usualmente como "definición ε–N".

Los detalles de la consulta a expertos se describen en el Anexo 3.1.

3.2 Fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión

El concepto de límite es reconocido en Educación Matemática como una de las nociones clave en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado de los alumnos. Tal como se ha venido subrayando recientemente (Azcárate y Camacho, 2003), las investigaciones desarrolladas en este ámbito han experimentado en los últimos años una evolución significativa en sus enfoques y propósitos, transitando de los estudios centrados en caracterizar las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión del límite (Cornu, 1991; Tall, 1992) a las investigaciones preocupadas por analizar las razones que subyacen a tales dificultades y por proporcionar, en base al nuevo conocimiento generado, soluciones efectivas en forma de propuestas didácticas sustentadas en marcos teóricos operativos (Espinoza y Azcárate, 2000; Mamona-Downs, 2001). Otros autores teniendo en cuenta las dificultades que plantea la definición formal de límite de una función en secundaria, han optado por dar una nueva definición de límite como “aproximación óptima” (Blázquez y Ortega, 2002). En general, desde la perspectiva de estos nuevos planteamientos suele admitirse la relevancia que posee el análisis de los fenómenos que organizan o dan sentido al límite para su comprensión. De hecho, la preocupación por esta cuestión llega a reflejarse en procedimientos específicos, como la descomposición genética planteada por Dubinsky (1991), empleada en la actualidad con éxito en modelos tan influyentes como la teoría APOS (Moreno, 2005).

Nuestro trabajo en este capítulo, a partir de ahora, se centra en el estudio minucioso de la definición seleccionada anteriormente, para observar los fenómenos que organiza y arrojar alguna luz, si es posible, acerca de lo que conlleva el uso de la definición anteriormente expuesta.

En nuestro estudio hemos encontrados dos fenómenos básicos, aunque, con el transcurso de la investigación, pensamos que la definición formal que manejamos organiza más fenómenos de los descritos. Sirva como ejemplo de fenómeno que organiza la definición de límite, el de la acotación: una sucesión que tenga límite estará acotada superior e inferiormente. Otro fenómeno que observamos en las sucesiones que cumplen la definición formal, es decir, las sucesiones que tienen límite, es que las diferencias entre dos términos consecutivos de la sucesión, a partir de un cierto orden, se van haciendo cada vez más pequeñas y tienden a cero; esto ya fue observado por Cauchy y disponemos de un teorema (véase, por ejemplo, Spivak, 1991) que conecta ambas ideas: "una sucesión $\{a_n\}$ converge si y solo si es una sucesión de Cauchy".

Sean cuales sean el número total y los respectivos enunciados de los fenómenos organizados por la definición seleccionada de límite finito de una sucesión, nos centramos exclusivamente en los dos que hemos anunciado y que denominamos, abreviadamente, *fenómeno asi* y *fenómeno i.v.s*. Nuestro trabajo de investigación se ha orientado a describirlos, a estudiar su presencia en la enseñanza y el currículo y a analizar su influencia en la comprensión de los sujetos. En términos más precisos, nuestra investigación transcurre en torno a los problemas didácticos generados por el uso de las distintas nociones, ideas y definiciones que configuran el campo semántico vinculado al concepto de límite.

Fenómeno de aproximación simple intuitiva. Este fenómeno surge como consecuencia de una lectura informal de la definición de límite finito de una sucesión. Por ejemplo cuando afirmamos: *"A medida que n aumenta, los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real 2"* (Vizmanos y Anzola, 1998).

Fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones. Este fenómeno surge de la propia estructura de la definición de límite finito de una sucesión. Constituye el siguiente paso, una vez que se ha realizado un acercamiento a la idea de límite (normalmente, mediante la aproximación simple intuitiva). Un ejemplo de él lo constituye la siguiente afirmación: *"El número l es el límite de la sucesión a_n si y solo si para cualquier entorno de l que se tome, por pequeño que* *sea, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos pertenecen a dicho entorno".* (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1997).

En la definición de límite finito de una sucesión están presentes ambos fenómenos y, por lo tanto, se hace necesario coordinar el aspecto formal, representado por el fenómeno i.v.s, con el aspecto informal representado por el fenómeno a.s.i

Las dificultades sobre cómo coordinar aspectos informales de la continuidad ya fueron comentados por Manya Raman (2002); extendemos estas dificultades al concepto de límite, y en particular al límite finito de una sucesión. Teniendo en cuenta lo anterior, se hace necesario dar una definición precisa de lo que entendemos por aproximación simple intuitiva y por retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones.

3.2.1 Aproximación Simple Intuitiva

Con objeto de reducir en lo posible la complejidad de la exposición y lograr un mayor grado de precisión en el análisis, en todo nuestro estudio se trabaja con sucesiones simples y monótonas. Hemos desechado sucesiones dobles (pueden tener subsucesiones que converjan a distintos límites) y sucesiones que se acercan al límite por valores superiores e inferiores.

La aproximación intuitiva remite a los valores que van tomando los términos de una sucesión de números reales con límite real.

Empleamos la expresión *parecen acercarse* para capturar, al usarla, cualquier intuición para el límite finito de la sucesión; por ejemplo, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explicita o no) en los valores inspeccionados.

Aproximación simple intuitiva (a.s.i.). Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k, a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo.

<u>*Modelo*:</u> En la sucesión *(1,1), (1,1/2), (1,1/3),...,* los términos *1/n,* parecen acercarse a 0 a medida que *n* crece.

En el apartado 3.4 veremos nuevos ejemplos.

Conjeturamos que el fenómeno de aproximación simple intuitiva se podría separar en dos fenómenos diferentes: la intuición de la monotonía y la intuición de la convergencia; sin embargo, nos conformamos con acercarnos al estudio de la aproximación simple intuitiva, ya se pueda o no desagregar en fenómenos más elementales.

3.2.2 Retroalimentación o Ida-Vuelta en Sucesiones

El análisis de la definición métrica seleccionada da lugar a la observación de dos procesos:

- El primer proceso, denominado *de ida,* se produce cuando en la definición aparece la expresión: "*para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N*"

- El segundo proceso, denominado de vuelta, se produce cuando en la definición aparece la expresión: *"si $n \geq N$ se cumple que $|x_n-x|<\varepsilon$".*

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones, que definimos de manera precisa a continuación.

La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función ε-n para sucesiones. Dicho en términos coloquiales y gráficos, la retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el **ε** dado "vamos" desde éste hacia la variable natural para determinar el correspondiente *n* asociado, según sea el caso, y "volvemos" al entorno del límite para comprobar que las imágenes así obtenidas pertenecen al entorno considerado.

En la retroalimentación se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición formal de límite finito de una sucesión induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada.

En el caso de las sucesiones, la definición formal de límite hace surgir una función de variable real con valores naturales *(ε, n(ε))*; esto es lo que nos conduce a hablar del fenómeno de *idea y vuelta en sucesiones (i.v.s)*.

<u>*Modelo:*</u> Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Una vez fijado ε, tenemos que determinar n_0 a partir del cual $|1/n|<\varepsilon$; resolviendo esta inecuación tendríamos que n debe ser mayor que (1/ε) + 1. Para asegurarnos que sea un número natural tomamos $n_0 = E(1/\varepsilon)+1$.

3.2.3 Relación entre la aproximación simple intuitiva, la retroalimentación y el concepto de límite

Una vez definidos los fenómenos de aproximación simple intuitiva y retroalimentación que están presentes en la definición de límite finito de una sucesión, interesa conocer las relaciones que mantienen entre sí y con la definición. Estas relaciones las hemos reflejado en la figura 3.1.

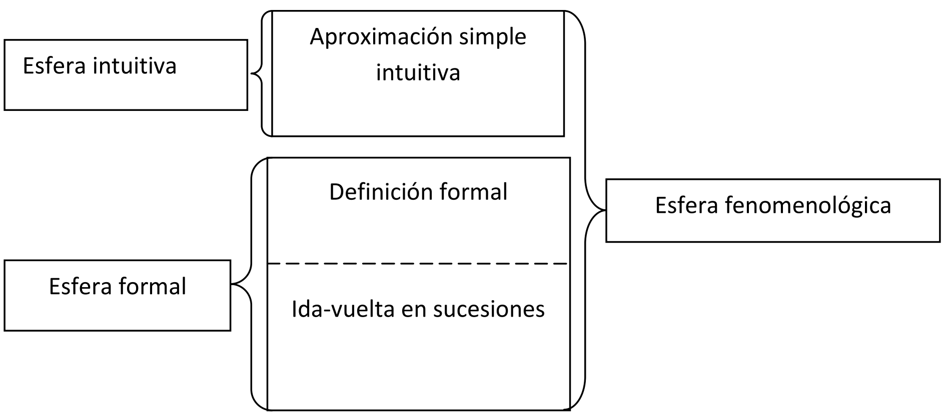


Figura 3.1

Figura 3.1. Fenómenos a.s.i e i.v.s en el límite finito de sucesiones

Si leemos la figura anterior de izquierda a derecha, vemos que el ámbito de la intuición es el que describe la idea monótona de acercamiento progresivo que no es plenamente satisfactoria para garantizar que hablamos de un límite, pero que genera la convicción o cierta convicción sobre el posible "desenlace" de ese acercamiento inacabable. No nos cabe duda de que estamos observando un fenómeno y que, con esa observación, las personas podemos establecer acuerdos aunque no usemos los métodos de demostración matemáticamente aceptados, ya que las cosas "parece que ocurren así", pero no estamos en condiciones de garantizarlo salvo apelando a convicciones personales.

También observamos un fenómeno si consideramos el ámbito formal, en cuyo seno, el seguimiento estricto de lo indicado por la definición genera la necesidad de construir una función o, en su defecto, la de demostrar su existencia, para asegurar no ya la idea intuitiva de que los valores de n, al crecer, hacen que s_n se acerque a l, sino que ese acercamiento es, matemáticamente hablando, seguro. El fenómeno, ahora, es estrictamente matemático; está gobernado por una función que, por así decir, "ajusta" cualquier distancia al supuesto límite con una secuencia infinita actual de términos de la sucesión que distan de ese supuesto límite menos que la distancia elegida. La definición no garantiza que esa función exista, deja la cuestión en manos del matemático que debe construirla o, al menos, demostrar que existe.

Por todo lo anterior, pensamos que el ámbito fenomenológico abarca los otros dos ámbitos o esferas, el intuitivo y el formal.

También hay una relación "vertical" (con referencia a la figura 3.1) entre los dos fenómenos que, no lo olvidemos, se refieren a la misma idea (al mismo concepto), aunque lo encapsulan de manera diferente: el fenómeno a.s.i sugiere el límite generando, a nuestro entender, también la necesidad de ser más convincente y esa necesidad la satisfará el fenómeno i.v.s. Éste, en su abstracción, supone conocido el límite y no hace más que aportar la confirmación de dicho conocimiento con los medios matemáticos disponibles hoy día; a pesar de sus limitaciones, el fenómeno a.s.i aporta esa “confianza moral” de que el valor supuestamente aceptado se eligió con sensatez. Si la elección se limita a ser sensata, usando solamente el fenómeno a.s.i, puede no ser correcta. Si la definición formal se aplica sobre un valor “cualquiera”, elegido sin pensar, el fenómeno i.v.s no será productivo, pero no “por culpa” de la propia definición, sino por la inadecuada y “ciega” elección.

3.2.4 Otras definiciones de límite de finito de una sucesión

Al comienzo de nuestra investigación decidimos seleccionar una definición de límite, para trabajar extensamente con ella; sin embargo, cuando ya habíamos realizado nuestros trabajos empíricos y conseguido cierta destreza en la detección de los fenómenos a.s.i e i.v.s, nos dimos cuentas de que, en todas las definiciones que presentamos a los expertos (ver el anexo 3.1), se reconocen los mismos fenómenos, en el sentido que iremos desarrollando a lo largo de este mismo capítulo, justificando así una cierta independencia entre éstos y la definición concreta de límite que se maneje.

Esto permite conjeturar que ambos fenómenos, sea cual sea el aspecto de la definición, están en el meollo del concepto de límite finito de una sucesión en el sentido de que, sin ellos, no sabríamos garantizar que un número es límite de la sucesión: la aproximación simple intuitiva da pistas sobre un posible candidato a límite, mientras que la ida-vuelta en sucesiones asegura o desmiente que el candidato sea, efectivamente, el límite de la sucesión con la que se esté trabajando.

Por ello, creemos que somos coherentes con el pensamiento de Freudenthal cuando decimos que ambos fenómenos, al estar organizados por cualquier definición de límite finito de una sucesión, organizan *el concepto* de límite finito de una sucesión.

Persuadidos de esta afirmación, hemos incluido, en el anexo 3.2, las diferentes definiciones presentadas en el anexo 3.1 y el reconocimiento de los correspondientes fenómenos a.s.i e i.v.s que éstas organizan.

No pretendemos con ello haber realizado un estudio exhaustivo de todas las definiciones de límite finito de una sucesión, aunque no descartamos una continuación por esta vía en un trabajo futuro; el objetivo del anexo 3.2 es mucho menos ambicioso; simplemente, en él acumulamos pruebas a favor de una conjetura inicial: *cualquier definición formal de límite finito de una sucesión organiza los fenómenos a.s.i e i.v.s.*

Esta conjetura solamente falla, que sepamos, en el caso de la definición de Cauchy. Esta definición organiza otros dos fenómenos, uno intuitivo y otro de ida-vuelta en sucesiones, que no es posible identificar con los fenómenos a.si. e i.v.s, como veremos. Por esta razón, nuestra conjetura la modificamos definitivamente del siguiente modo: *desde el punto de vista fenomenológico, hay dos clases de definiciones ligadas al límite finito de una sucesión: Def-L y Def-C. La primera clase conecta los términos de la sucesión con un número no perteneciente a su conjunto de valores (el límite) con ayuda de los fenómenos a.s.i e i.v.s; la segunda clase conecta los términos de la sucesión entre sí con ayuda de otros dos fenómenos diferentes, que denominamos a.s.i.c e i.v.s.c.*

En 3.5 se estudian los fenómenos organizados por la definición de sucesión de Cauchy y se comparan los fenómenos que organizan ambas definiciones.

3.2.5 Límite infinito de una sucesión

Nuestro trabajo desde un primer momento se centró en el límite finito de una sucesión. A pesar de esto, en algún momento, nuestra investigación llevó a preguntar sobre la posibilidad de que una definición de límite infinito de una sucesión organizara también los fenómenos a.s.i e i.v.s.

Estudiamos la siguiente definición de límite infinito de una sucesión: Se dice que x_n tiende a infinito si, para todo k>0 existe $n_0 \in N$ tal que si n> n_0 entonces x_n>k.

El análisis de esta definición arroja dos ideas relativas a los dos fenómenos:

(1ª) No se organiza ninguna aproximación intuitiva al hacer una lectura informal de la definición anteriormente propuesta, ya que los valores de la sucesión a medida que n aumenta no se acercan a un determinado valor. Esto lo desarrollaremos en el apartado 3.5.1, más abajo.

(2ª) En cambio, si, en la definición, seguimos considerando una "ida" desde la variable dependiente y una "vuelta" desde la independiente, el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones si está presente, aunque sin acotación. El proceso de ida se reconoce en el fragmento de definición: "para todo k>0 existe n_0", mientras que el de vuelta corresponde al fragmento: "si n > n_0 entonces x_n>k".

Por lo tanto conjeturamos que existen diferencias significativas en cuanto a los fenómenos organizados por las definiciones de límite finito y límite infinito de una sucesión. Queda pendiente para un futuro, el detectar y enunciar la intuición simple asociada al límite infinito (si es que la hay) y la descripción exhaustiva del fenómeno de retroalimentación y el estudio de las relaciones que se establecen entre ambos fenómenos.

3.3 Fenómenos, sistemas de representación y formatos

En un trabajo, preparatorio de esta investigación (Claros, Sánchez y Coriat, 2006), sobre la presencia de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación en libros de texto correspondientes al período LOGSE, se observó una preponderancia de los fenómenos a.s.i sobre los fenómenos i.v.s. En ese mismo trabajo se señalaba que el desarrollo del concepto de límite de una sucesión en los libros se solía hacer, empleando solo alguno de los sistemas de representación verbal, gráfico, tabular o simbólico, presentados en el Capítulo 2º.

La tabla siguiente recoge las frecuencias totales de aparición de los diferentes fenómenos en los libros de texto del período LOGSE

	Límite finito de una sucesión	
Fenómenos	a.s.i	i.v.s
Frecuencia	26	10
Frec. Total	36	

Tabla 3.1. Comparación entre fenómenos de aproximación intuitiva y de retroalimentación

Dicho trabajo también deja constancia de que los fenómenos a.s.i e i.v.s podían aparecer cuando se exponía un ejemplo o cuando se enunciaba una definición. Es más los fenómenos a.s.i en el periodo LOGSE se observan, sobre todo, en ejemplos, mientras que los fenómenos i.v.s se observan, en ejemplos o en definiciones de los libros de texto, repartidos de una manera algo más equitativa.

Se sigue que, al presentar el límite finito de una sucesión, los libros de texto pueden recurrir a *sistemas de representación* y a *formatos*. Para los primeros hay cuatro posibilidades, que designamos con los términos gráfico, verbal, tabular y simbólico, y para los segundos, dos, que designamos con los términos ejemplo y definición.

Organizamos toda la información correspondiente en la tabla 3.2, que usaremos extensamente en el próximo capítulo, aunque, para simplificar, excluiremos las cabeceras exteriores: en las columnas situamos los diferentes sistemas de representación, mientras que en las filas situamos los fenómenos a.s.i e i.v.s. Los formatos dividen las columnas en dos subcolumnas.

Sistemas de representación

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Verbal</td><td colspan="2">Tabular</td><td colspan="2">Simbólico</td><td colspan="2">Gráfico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fenómeno</td><td>a.s.i</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>i.v.s</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Formatos</td><td colspan="2">Formatos</td><td colspan="2">Formatos</td><td colspan="2">Formatos</td></tr>
</table>

Tabla 3.2. Fenómenos, sistemas de representación y formatos

La tabla 3.2 abarca todas las posibilidades que hemos considerado; creemos que abarca todos los casos posibles. Con objeto de simplificar la notación, usaremos una abreviatura que indicará sucesivamente el fenómeno, el sistema de representación y el formato, separados por un guión, como se describe y se ejemplifica a continuación. Los ejemplos que presentamos nos han parecido lo suficientemente clarificadores y creemos que ayudan a comprender la variedad de aspectos de los dos fenómenos que hemos presentado; dichos ejemplos proceden de libros de texto y constituyen una pequeña submuestra del material que se mostrará en el próximo capítulo. Los códigos para los que no hemos hallado ningún ejemplo se mencionan explícitamente con la frase "ejemplo no disponible"; quizá la ausencia de ejemplos en los casos indicados sea un tema de reflexión para el futuro.

- **a.s.i-v-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación verbal y con el formato definición.

  <u>Ejemplo:</u> *"Diremos que el numero a es el límite de la sucesión (a_n) cuando a medida que n toma valores cada vez mayores entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real a".* (Vizmanos, Anzola y Primo, 1981).

El autor afirma que los términos de la sucesión, a medida que se avanza en ella, se acercan a un determinado valor. El sistema de representación usado es el verbal y aparece bajo el formato de definición.

- **a.s.i-v-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación verbal y con el formato ejemplo.

<u>Ejemplo.</u> Dada la sucesión (an) = (1, 1,6, 1,66, 1,666, …, $1{,}666\underbrace{\ldots}_{n}6$ …, …,). Observa que cada término es una mejor aproximación que el anterior del número racional 10/6. Diremos que los términos de la sucesión (an) tienden al número 10/6 o que 10/6 es elo límite de la sucesión (an). Si representamos los términos de esta sucesión sobre un diagrama lineal, observamos que los sucesivos términos de la sucesión se van aproximando cada vez más al número racional 10/6. (Vizmanos, Anzola y Primo, 1981)

Se afirma que los términos de la sucesión, a medida que se avanza en ella, se acercan a 10/6: se trata de una aproximación simple intuitiva. Se describe todo con palabras y se trata de un ejemplo.

- **a.s.i-g-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación gráfico y con el formato definición.

<u>Ejemplo</u> no disponible.

- **a.s.i-g-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación gráfico y con el formato ejemplo.

<u>Ejemplo:</u> (Bescos y Pena, 2002, p. 90)

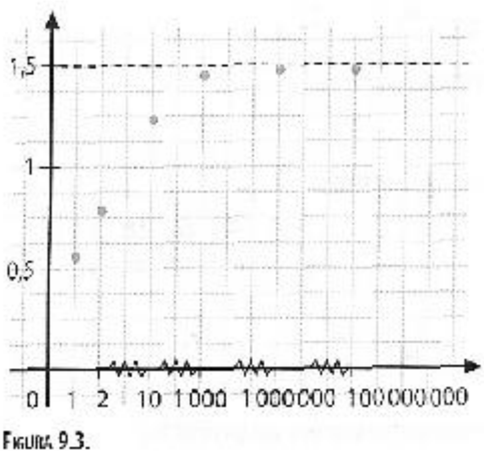


FIGURA 9.3.

Al inspeccionar la secuencia de términos a_1 = 0.55, a_2 =0.72 , a_3 =1.99, a_4= 1.49, a_5 = 1.499, a_6 = 1,4999, los valores correspondientes parecen acercarse al valor 1,5; además, se usa una representación gráfica y el autor la da como ejemplo.

- **a.s.i-s-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación simbólico y con el formato definición.

Ejemplo no disponible.

- **a.s.i.-s-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación simbólico y con el formato ejemplo.

Ejemplo no disponible.

- **a.s.i.-t-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación tabular y con el formato definición.

Ejemplo no disponible.

- **a.s.i-t-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno a.s.i en el sistema de representación tabular y con el formato ejemplo.

Ejemplo no disponible.

- **i.v.s-v-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación verbal y con el formato definición.

"*Sea a_n una sucesión de números reales y l un número, también real. Se dice que la sucesión a_n tiende a l, o tiene por límite l cuando para todo número ε>0 es posible encontrar un término a_p de la sucesión tal que él y todos los términos que le siguen difieren de l, en valor absoluto, en menos que ε".* (Segura, 1973)

Se trata de un presentación con palabras de la definición, incluyendo la función ε-N_0 y su objetivo. Se evita en lo posible el simbolismo, por eso lo incluimos como sistema de representación verbal

- **i.v.s-v-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación verbal y con el formato ejemplo.

Ejemplo. (Caruncho Castro, y Gutiérrez, 1986)

- En la primera figura se ve que si tomamos $\varepsilon = 0{,}5$, los únicos puntos de la gráfica que no están dentro del entorno de aproximación $]1 - 0{,}5,\ 1 + 0{,}5[$ son los correspondientes a $n = 1$ y $n = 2$.

  Para $n > 2$ se verifica que:

  $$a_n \in]1 - 0{,}5,\ 1 + 0{,}5[$$

  Por tanto, aquí el valor de n_0 es $n_0 = 2$.

Se construye, con palabras, un ejemplo de la función ε-N_0. Los símbolos matemáticos no nos parecen suficientes para inclinarnos por el sistema de representación simbólico. El fenómenos i.v.s surge al interpretar una gráfica que representa, por eso se leen expresiones como “en la primera figura” ó “los únicos puntos de la gráfica”.

- **i.v.s-g-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación gráfico y con el formato definición.

Ejemplo. (Vizmanos, Anzola y Primo, 1981)

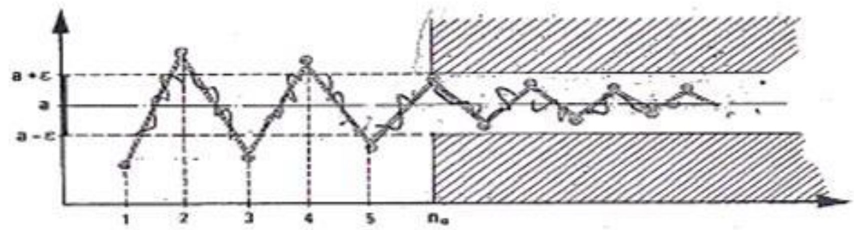
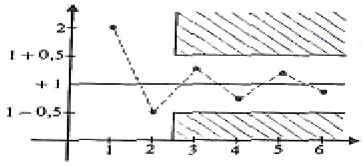


Figura 11.4

Se construye gráficamente la función ε-N_0 con idea de definir el límite. Por eso decimos que se trata de un fenómeno i.v.s-g-d. “Vemos” un entorno del límite al que pertenecen los valores de la sucesión a partir de un cierto lugar (n_0) en adelante.

- **i.v.s-g-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación gráfico y con el formato ejemplo.

Ejemplo: (Caruncho Castro, y Gutiérrez, 1986)



Esta gráfica es muy parecida a la figura del caso anterior. La diferencia principal está en la información que suministran los ejes; en este caso, se trata de un ejemplo: límite uno y entorno de radio 0,5, debiendo ser n>2. Todo lo dicho en el caso anterior se aplica a este formato ejemplo.

- **i.v.s-s-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación simbólico y con el formato definición.

Ejemplo: $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. (Vives, 1980)

Se construye la función ε-N_0. Esto se hace presentando la definición y con pleno dominio del simbolismo.

- **i.v.s-s-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación simbólico y con el formato ejemplo.

Ejemplo. Averigua qué términos de la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ pertenecen al entorno con centro en 2 y radio igual a una centésima. Solución. Como lím a_n = 2 tendrán que pertenecer a $E_{0,01}(2)$ = (1,99, 2,01) todos los términos desde uno en adelante. En efecto, tanteando y utilizando una calculadora se tiene: a_{199} = 398/200 = 1,99. Está justo al borde del entorno. a_{200} = 400/201 = 1,9900498 ... $\in$ $E_{0,01}(2)$. Los elementos que siguen a a_{200} continúan perteneciendo al entorno. Puede llegarse al resultado mediante cálculo y no por tanteo: $a_n \in E_{0,01}(2) \Rightarrow 1{,}99 < a_n < 2{,}01$

$$\begin{cases} 1{,}99 < a_n \Rightarrow 1{,}99 < \dfrac{2n}{n+1} \Rightarrow 1{,}99 < 0{,}01 \cdot n \Rightarrow n > 199 \\ a_n < 2{,}01 \Rightarrow \dfrac{2n}{n+1} < 2{,}01 \Rightarrow -2{,}01 < 0{,}01 \cdot n \Rightarrow n > -201 (*) \end{cases}$$

La condición (*) la cumplen todos los términos, luego basta con que n > 199. Es decir, pertenecen al entorno los términos a partir de a_{200}. (Negro y otros, 1997, p. 218)

Se trata de un fenómeno i.v.s. porque se construye la función ε-N_0. El sistema de representación utilizado es el simbólico y el formato con el que se trabaja es un ejemplo, la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

- **i.v.s-t-d** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación tabular y con el formato definición.

Ejemplo no disponible.

- **i.v.s-t-e** Este símbolo lo usaremos cuando detectemos el fenómeno i.v.s. en el sistema de representación tabular y con el formato ejemplo.

Ejemplo. (Vizmanos, Anzola y Primo, 1981)

ε	n_0	a_{n_0}
10^{-1}	9	a_9
10^{-2}	99	a_{99}
10^{-3}	999	a_{999}
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10^{-50}	$9 \ldots 9$	$a_{\overset{50}{9 \ldots 9}}$

El autor explica una definición dando varios ejemplos de valores de la función ε-N_0 organizados en una tabla. En cada caso, se elige algún valor de épsilon, se determina el valor de n_0 correspondiente. Por eso consideramos que el fenómeno manejado es la ida-vuelta en sucesiones en una representación tabular y en un formato de ejemplo.

Como resultado de este estudio, la tabla 3.2 la adaptamos como indica la tabla 3.3.

	v		t		s		G	
a.s.i			**NO**	**NO**	**NO**	**NO**		
i.v.s				**NO**				
	E	d	e	d	e	d	e	D

Tabla 3.3 Los casos efectivamente encontrados en la bibliografía consultada

Aceptamos que resulte difícil presentar simbólicamente el fenómeno a.s.i, pero nos extraña no haberlo hallado expuesto con ayuda de una tabla, al menos, en el formato de ejemplo. La investigación que estamos relatando encontró aquí un punto en el que había que asumir una decisión: podíamos suponer que los casos indicados como “NO” (ejemplos no disponibles) era imposible hallarlos o, en su lugar, podíamos suponer que esos casos ausentes se podían explicar por algún sesgo inesperado e indeseado de las muestras que hemos manejado. Decidimos inclinarnos por esta segunda suposición y dejar para una futura investigación el estudio detallado de las ausencias indicadas. En ambas decisiones estábamos interpretando un hecho empírico y nos inclinamos por la opción menos exigente, toda vez que nuestra investigación no se hallaba cerrada. Por esta razón, usaremos en lo sucesivo, como plantilla, la tabla 3.2 quitando las referencias a fenómenos, sistemas y formatos.

3.4 Conocimiento implícito en la definición de límite finito de una sucesión

La definición formal de límite finito de una sucesión con la que estamos trabajando ya ha sido presentada en 3.1.1; los detalles se han desarrollado en el Anexo 3.1. Por otra parte, la figura 3.1 describe cómo dicha definición está solicitada por las esferas simbólica y fenomenológica. El objeto de este apartado es el de exponer, desde ambas perspectivas, los principales requisitos para manejar dicha definición. Interpretamos que los aspectos matemáticos de la definición formal constituyen el foco de interés de la esfera simbólica, mientras que los fenómenos organizados por esta definición, ya definidos en 3.2.1 y 3.2.2, constituyen el correspondiente foco de interés de la esfera fenomenológica.

3.4.1 Enfoque simbólico

Para manejar diestramente la definición formal en su aspecto simbólico, es necesario, previamente, estar en condiciones de coordinar cuestiones o asuntos relacionados con orden, dependencia, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito. Estos conceptos matemáticos subyacen en la definición formal de límite finito de una sucesión, en la cual se se hallan relacionados entre sí.

Estos conceptos pueden estar presentes, o no, en otras definiciones de límite finito de una sucesión distinta de la que hemos usado. Queda para un trabajo posterior el observar la presencia de todos ellos en cualquier definición de límite finito de una sucesión con la que se trabaje. Un punto de partida para abordar esta investigación sería observar si están presentes en algunas de las definiciones de límite que se incluyeron en la consulta a expertos descrita en el Anexo 3.1.

Otro estudio pendiente de abordar exige determinar si los conceptos de orden, dependencia, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito están presentes en la definición de límite infinito de una sucesión. Una lectura rápida de ésta da, como primera consecuencia, que el concepto de acotación no se halla en dicha definición, pero sí aparecen procesos infinitos.

- Dependencias

Observamos dos dependencia bien distintas: la dependencia $\{n \rightarrow x_n\}$ y la dependencia $\{\varepsilon \rightarrow No\}$. La primera es obvia, pues define la sucesión; la segunda, debe construirse para asegurar que el candidato es el límite de la sucesión. Estas dos de dependencia difieren en los respectivos conjuntos iniciales y finales. En la dependencia $\{n \rightarrow x_n\}$ el conjunto de partida es N y el de llegada R, mientras que en la otra se intercambiar las funciones de estos conjuntos, pues el de partida es R (estrictamente hablando: R^{*+}) y el de llegada, N.

- Orden, valor absoluto y cota

Cuando hablamos de *orden*, nos referimos a una relación de orden total, en la cual cualquier par de números son comparables. Necesitamos el orden en N y el orden en R. La relación de orden es un prerrequisito necesario para manejar la definición de límite finito de una sucesión. La comparación de términos, está presente en ella a través de los siguientes símbolos "<", ">" y "≥".En la definición de límite de una sucesión todas las comparaciones se realizan entre números reales excepto la comparación "$n \geq N$ ", que ocurre entre dos números naturales.

Cuando hablamos de *valor absoluto*, nos referimos a una función de R en R, que cumple que $x \rightarrow |x| = \max\{x,-x\}$. Este prerrequisito se observa en expresiones como $|x_n - a|$, si a es el supuesto límite.

Cuando hablamos de cota superior (respectivamente, inferior), nos referimos a números, si existen, que son mayores (respectivamente, menores) que todos los valores de un subconjunto dado A de R; técnicamente, tendremos, para la cota superior de A: "Sea $A \subset R$, diremos que A está acotado superiormente si y solo si $\exists\ k \in R$ tal que $\forall\ x \in A \Rightarrow x \leq k$"; análogamente, para la cota inferior de A: "Sea $A \subset R$, diremos que A está acotado inferiormente si y solo si $\exists\ k \in R$ tal que $\forall\ x \in A \Rightarrow x \geq k$". Si ambos números existen, el *conjunto* está *acotado*. El concepto de acotación es necesario para comprobar que el candidato seleccionado como límite, es el verdadero límite. Esto se consigue cuando a partir de un cierto *n* en adelante todos los términos de la sucesión cumplen que $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$. La traducción de este prerrequisito es simple: la variable dependiente de una sucesión que tiene límite está acotada. La variable independiente, sin embargo, no está acotada, ya que n supera cualquier valor imaginable.

- Procesos infinitos

Un *proceso infinito* es una de manera de indicar el cambio experimentado por las variables, independiente y dependiente, presentes en la definición formal considerada; para el análisis de los tipos de infinitos, recurrimos a Tall (1991). En la definición de límite de una sucesión se manejan y se coordinan dos procesos infinitos basados en la idea de sucesión. El primer proceso se refiere a la variable independiente, y se resume con la frase $n\rightarrow\infty$; se trata de un avance inexorable, por lo cual, nos abstenemos de hablar de acercamiento o de aproximación. El segundo proceso infinito se genera al construir los sucesivos valores de los términos de la sucesión. Si nos limitamos a las sucesiones monótonas, en el segundo proceso infinito, la variable dependiente puede evolucionar de una de estas dos maneras: bien sus valores se acercan a un valor numérico concreto o bien se alejan de cualquier valor numérico [2]. Los procesos infinitos que hemos descrito para cada variable son, en todos los casos, proceso infinitos discretos, ya que el cardinal de los conjuntos que manejamos tanto en la variable independiente como en la variable dependiente es N.

-Tipos de infinitos

En el límite finito de sucesiones, el proceso infinito que aparece reflejado cuando vamos dando valores a *n* y obteniendo sus correspondientes x_n, se ajusta a la idea de infinito potencial. Por este motivo decimos que el infinito

[2] Muchos dicen, en este segundo caso, que la variable dependiente “se acerca a infinito”. En esta investigación hemos procurado evitar la idea de *acercamiento al infinito*, ya que no hemos sabido dar sentido a esa idea.

potencial se halla presente en la definición de límite finito de una sucesión. Si consideramos la sucesión y su límite como un todo estaremos aludiendo a la idea de infinito actual; el conjunto que forman la sucesión sometida a estudio y su límite tiene cardinal numerable, ya que existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de los números naturales y los términos de la sucesión.

Un resumen de todos los prerrequisitos matemáticos de la definición de límite finito de una sucesión lo mostramos en figura 3.5.

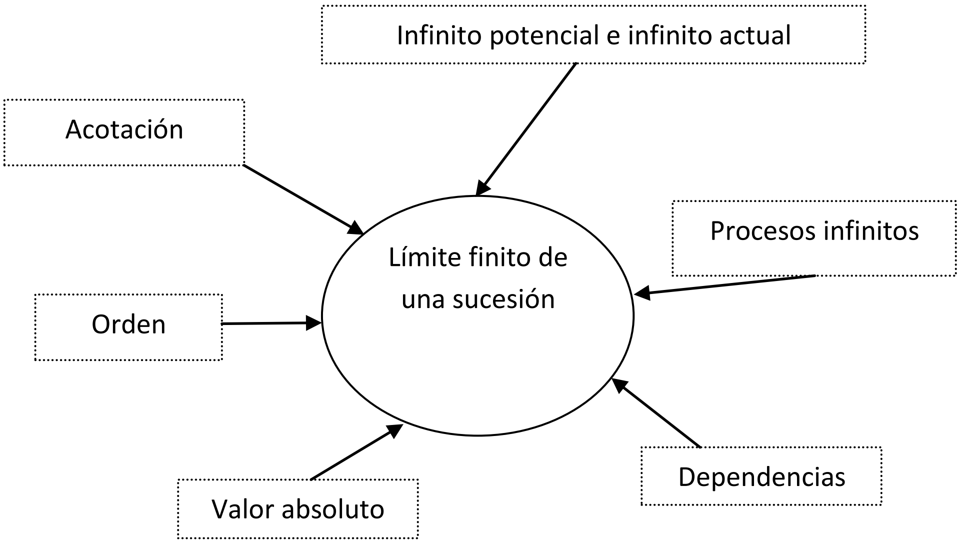


Figura 3.5 Prerrequisitos matemáticos en el enfoque formal

3.4.2 Enfoque fenomenológico

Los fenómenos de aproximación simple intuitiva y de ida-vuelta en sucesiones o retroalimentación, son básicos para determinar si una sucesión tiene límite o no y calcularlo usando la definición formal de límite.

El candidato a límite se obtiene cuando se observan los sucesivos valores que toma la sucesión estudiada, mientras que la comprobación se realiza cuando se aplica la definición formal. En el primer paso, estamos poniendo en juego el fenómeno a.s.i, incluso cuando observamos que los términos parecen acercarse a un número real; en el segundo, estamos poniendo en juego el fenómeno i.v.s.

En el caso de la definición de límite infinito de una sucesión, ya comentamos anteriormente que solamente observaríamos el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones, y no el fenómeno de aproximación simple intuitiva.

Si comparamos esta definición con la definición de límite finito de una sucesión podemos establecer las siguientes diferencias fenomenológicas que mostramos a continuación.

Lo anterior queda recogido en la tabla 3.3:

		EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN ES	
		Finito	*Infinito*
FENÓMENOS	***Aproximación***	a.s.i (observado)	a.s.i (ausente)
	Retroalimentación	i.v.s (observado)	i.v.s (observado)

Tabla 3.3: Comparación de fenómenos a.s.i e i.v.s en los casos de límite finito e infinito

3.5 Fenómenos presentes en la definición de sucesión de Cauchy

Cuando se trabaja con el fenómeno a.s.i, no solamente se observa que los términos de la sucesión parecen acercarse a un cierto valor (que será un candidato al límite); también se observa que los términos de la sucesión parecen acercarse mutuamente, cada vez más. Por ello, parece necesario comprender las relaciones existentes entre la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy desde un punto de vista fenomenológico y desde un punto de vista simbólico.

Las dos definiciones seleccionadas se indican a continuación y las designaremos, respectivamente, como Def-L y Def-C, donde la "C" recuerda el nombre de Cauchy[3]:

Definición de límite finito de una sucesión. "Def-L" (Spivak, 1991, p. 615.)

> *Una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia L (en símbolos $\lim_{n\to\infty} a_n = l$) si para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n> N entonces $|a_n - l|<\varepsilon$.*

Definición de sucesión de Cauchy. "Def-C" (Spivak, 1991, p. 624.)

> *Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N, entonces $|a_n-a_m|<\varepsilon$.*
>
> *(Esta condición se escribe generalmente lim $m,n\to\infty$ $|a_n-a_m|=0$)*

[3] Esta elección se justifica por analogía con la elección realizada al principio del capítulo, véase Anexo 3.1. Def-L es una definición tipo "epsilon-N", por ser la que recibió más apoyo entre los expertos. Queríamos usar una Def-C que hubiera sido enunciada de manera coherente (para facilitar el establecimiento de la equivalencia formal, matemática, entre ambas); entre las diferentes posibilidades, elegimos el texto de Spivak indicado.

Estas dos definiciones son matemáticamente equivalentes. Esto se demuestra con ayuda del teorema de Bolzano–Weierstrass, que afirma que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente (Véase Spivak, 1991, página 623 y 624).

3.5.1 Diferencias simbólicas entre una definición de límite finito de una sucesión y una definición de sucesión de Cauchy

Compararemos simbólicamente las definiciones de límite finito de una sucesión y de sucesión de Cauchy, estudiando tres aspectos: acotación, procesos infinitos y tipos de infinitos. En Claros, Sánchez y Coriat (2006) se describe con detalle la técnica de estudio.

-Acotación en Def-L y en Def-C

La acotación de la sucesión se explicó en 3.4.1; si una sucesión tiene límite, a partir de un cierto n en adelante todos los términos de la sucesión cumplen que $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$. Esto significa que todos los valores de la sucesión quedan, a excepción de un número finito, dentro del entorno de centro a y radio ε.

El concepto de acotación también se da en las sucesiones de Cauchy. La demostración de que una sucesión de Cauchy es acotada puede verse en Spivak (1991, p. 624).

Observamos por tanto en las dos definiciones que de las dos variables que manejamos n y a_n, solo la variable dependiente está acotada (a_n). La variable independiente no está acotada ya que n crece indefinidamente.

-Procesos infinitos en Def-L y en Def-C

En Def-L, se manejan dos procesos infinitos (véase 3.4.1). Uno, se refiere a la variable independiente y se apoya en la noción primitiva de sucesor; el otro, se genera al construir el valor de los términos de la sucesión; a cada valor de n le hacemos corresponde un valor de a_n.

En Def-C, se manejan también dos procesos infinitos. El primer proceso, referido a la variable independiente, es idéntico al de la primera definición. El segundo proceso se genera, también, al construir el valor de los términos de la sucesión pero en este caso, se seleccionan dos valores n y m, a los que asociamos sus correspondientes valores a_n y a_m.

Las diferencias, en este segundo proceso infinito, se producen porque, en el caso de Def-L, los valores de la sucesión se acercan a un determinado valor denominado límite, mientras que en el segundo caso, los valores de la sucesión se acercan entre sí.

-Tipos de infinito

En Def-L, el infinito potencial se usa en el fragmento: *"si para todo ε>0 existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n> N".* "N" depende del epsilon que tomemos, y permitirá avanzar en la comprobación de las condiciones de la definición.

En Def-C, el infinito potencial se usa en el fragmento: *"si para ε>0 existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N".* El papel de "N" es el mismo en ambas definiciones, aunque, de una a otra, cambie la condición que debe estudiarse.

Todos los procesos infinitos que hemos observado en Def-L y en Def-C son discretos, ya que el cardinal de los conjuntos que manejamos tanto en la variable independiente como en la variable dependiente es $\aleph_0$. Merece la pena, no obstante, reseñar una diferencia: en el caso Def-L, al conjunto de valores de la sucesión se añade un nuevo elemento, externo a ella: su límite; esto no modifica la cardinalidad de los conjuntos infinitos implicados. En cambio en Def-C el límite no es conocido.

Las analogías y diferencias simbólicas halladas se concretan en la tabla 3.4 (página siguiente).

<table>
<tr><td></td><td>Def-L: límite finito de una sucesión</td><td>Def-C: sucesión de Cauchy</td></tr>
<tr><td>Acotación</td><td colspan="2">Variable independiente no acotada.
Variable dependiente acotada.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Procesos infinitos</td><td colspan="2">- Aproximación unilateral en la variable independiente.</td></tr>
<tr><td>- Aproximación al límite mediante valores superiores o inferiores.</td><td>- Las diferencias entre dos términos cualesquiera de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeñas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-Procesos infinitos discretos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Infinito potencial</td><td colspan="2">- Sucesor</td></tr>
<tr><td>- “existe un número natural N tal que si n >N.”</td><td>- ”existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N”</td></tr>
<tr><td>Infinito actual ($\aleph_0$)</td><td>Los valores de la sucesión y su límite, a: $\{a_n\}\cup\{a\}$</td><td>Los valores de la sucesión</td></tr>
<tr><td>Límite</td><td>Conocido</td><td>Desconocido</td></tr>
</table>

Tabla 3.4 Resumen de analogías y diferencias simbólicas entre Def-L y Def-C

3.5.2 Fenómenos observados en una sucesión de Cauchy

En este apartado establecemos los fenómenos organizados por la definición de sucesión de Cauchy y los caracterizamos mediante un modelo. En la definición de sucesión de Cauchy elegida, establecemos la presencia de al menos dos fenómenos: Aproximación Simple Intuitiva de Cauchy y Fenómeno de Cauchy en sucesiones.

- Aproximación simple intuitiva de Cauchy (ASIC)

Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, *(1, a_1), (2, a_2), ..., (k,a_k)*, caracterizamos la aproximación simple intuitiva de Cauchy como el fenómeno observado al inspeccionar cualquier secuencia de valores; a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre dos valores $/a_n - a_m/$ “parece acercarse” a cero. Es decir a medida que avanzamos en la sucesión, las diferencias existentes entre cualesquiera dos valores de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas.

Modelo: En la sucesión *(1,1), (1,1/2), (1,1/3),...*, las diferencias $|1/n- 1/m|$, parecen acercarse a 0 a medida que *n y m* crecen.

Si calculamos las diferencias entre los términos consecutivos podemos observar que en la sucesión anterior las diferencias entre los términos se van haciendo cada vez más pequeñas: $|1/2-1| < |1/3-1/2| < |1/4-1/3| < \ldots$

-Fenómeno de Cauchy (IVSC)
En la definición de sucesión de Cauchy se dan dos procesos:

(1º) Si $\varepsilon>0$ existe un N perteneciente al conjunto de los números naturales.

(2º) Si n, m >N entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de Cauchy, que caracterizamos a continuación.

El fenómeno de Cauchy se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición de sucesión de Cauchy desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función ε-N. Dicho en términos coloquiales y gráficos, el fenómeno de Cauchy corresponde a un proceso de ida-vuelta; este fenómeno es distinto del proceso de ida-vuelta implicado en la retroalimentación o i.v.s organizado por Def-L.

En el fenómeno de Cauchy se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición de sucesión de Cauchy induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada. Esta nueva función emergente, en el caso de las sucesiones de Cauchy, resulta ser una función natural de variable real ***(ε, N(ε))***.

Modelo: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Si fijamos ε, tenemos que determinar N de manera que si n, m pertenecen al conjunto de los números naturales se cumpla que $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon$. Sabemos que $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|<\frac{1}{n}$ es una desigualdad que se cumple para todo n, m ≥ 1 y n<m; además se cumple que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, por la propiedad arquimediana. Entonces tomando N= E(1/ε) + 1, aseguramos que $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$.

3.5.3 Diferencias entre una definición de límite finito de una sucesión y una definición de sucesión de Cauchy.

La tabla 3.6 resume los fenómenos respectivamente organizados por Def-L y por Def-C.

Fenómenos organizados por Def-L	Fenómenos organizados por Def-C
a.s.i Los términos de la sucesión y su límite	a.s.i.c Los términos de la sucesión entre sí
i.v.s Desde cierto valor de n, $\|a_n - a\| < \varepsilon$	i.v.s.c Desde cierto valor de n, m $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$

Tabla 3.6 Fenómenos organizados por Def-L y Def-C

A continuación vamos a comparar Def-L y Def-C desde un punto de vista fenomenológico; analizaremos, sucesivamente, la aproximación simple y la retroalimentación en ambos casos. Tomaremos como idea directriz el hecho de que en Def-L es necesario conocer el límite, mientras que en Def-C dicha información no es necesaria.

3.5.3.1 Comparación entre la aproximación simple intuitiva (asi) y la aproximación simple intuitiva de cauchy (asic)

En los dos fenómenos se da una sola aproximación; la consideramos "simple" por afectar solamente a la variable dependiente. Analicemos las diferencias entre ambas aproximaciones:

-En la aproximación simple intuitiva, los valores de la sucesión se aproximan a su límite, que puede ser positivo, negativo o cero; en cambio, en la aproximación simple intuitiva de Cauchy las diferencias entre los valores de la sucesión se aproximan a cero.

El fenómeno a.s.i.c se suele observar de una de estas dos maneras: (1ª) Se calculan diferencias entre valores cualesquiera de la sucesión y se observa si estas diferencias se van haciendo cada vez más pequeñas a medida que n crece; (2ª) Se calculan diferencias entre valores consecutivos y se observa si estas diferencias se van haciendo también más pequeñas a medida que n crece.

El acercamiento a cero de las sucesiones construidas de cualquiera de estas maneras da una primera información sobre si la sucesión es de Cauchy. Este hecho solo podrá establecerse usando la definición formal de sucesión de Cauchy.

3.5.3.2 Diferencias y analogías entre la retroalimentación (ivs) y el fenómeno de cauchy (ivsc)

En cada fenómeno de ida y vuelta se dan dos procesos, pero el segundo proceso toma un aspecto distinto en cada uno de ellos.

Estudio de diferencias

-En la retroalimentación de Def-L, el segundo proceso (si n> N entonces $|a_n - l| < \varepsilon$) implica una diferencia entre los valores de la sucesión y el candidato a límite. Si dicha diferencia puede hacerse tan pequeña como queramos, es decir, si se cumple que $|a_n - l| < \varepsilon$ para todo ε, entonces la sucesión a_n tiene límite l.

-En el fenómeno de Cauchy el segundo proceso (si n, m >N entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$) implica una diferencia entre dos valores de la sucesión. En este caso no es necesario tener un candidato a límite. La comprobación de la desigualdad $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo ε, asegurará que la sucesión estudiada tiene límite, pero no cuál es el límite de la sucesión. El candidato a límite tendrá que salir de la observación directa de la sucesión; es decir tendremos que observar hacia qué valor se acercan sus términos.

Estudio de funciones “épsilon-N” y entornos asociados

Con ambas definiciones se construyen funciones ***(ε, N(ε))***, que dependerán de la sucesión a_n que estemos manejando.

En Def-L, explícitamente o no, se maneja un entorno de centro el límite l y radio ε.

En Def-C no se conoce el límite de la sucesión y no es posible apoyarse en un candidato para construir un entorno: en su lugar, construimos algo así como una sucesión doble, calculando las diferencias entre dos valores de la sucesión dada; obviamente, estas diferencias permanecen en un entorno de centro 0 y radio ε.

3.6 Conclusiones del estudio teórico

Anotamos lo que hemos establecido hasta ahora y lo que hemos dejado pendiente, para una investigación posterior.

- Hemos detectado y enunciado, en una definición de límite finito de una sucesión, dos fenómenos: aproximación simple intuitiva (a.s.i) y la retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s).

- Hemos aprendido a observar estos fenómenos cuando se usan diferentes sistemas de representación y formatos; se trata de situaciones extraídas de libros de texto.

- Además, en las sucesiones convergentes, hemos observado el fenómeno de la acotación y también el que se produce por el hecho de que los términos (consecutivos o no) se aproximan entre sí cada vez más a medida que "avanzamos" en la sucesión.

- Creemos haber esbozado estos fenómenos, aunque mencionamos la necesidad de avanzar en algunas líneas que hemos indicado.

- Queda pendiente, del mismo modo, la búsqueda de otros fenómenos cuya posible detección simplemente sospechamos.

- Hemos ampliado nuestra detección de los dos fenómenos (a.s.i e i.v.s) a otras definiciones de límite finito de una sucesión; suponemos que la variedad de definiciones usadas en el anexo 3.2 constituye una muestra representativa de las definiciones que podríamos encontrar en todos los manuales de matemáticas, por lo que nos atrevemos a conjeturar que *hay dos clases de definiciones ligadas al límite finito de una sucesión*: Def-L y Def-C.

- Creemos haber hecho emerger la idea de que la equivalencia matemática entre ambas clases de definiciones oculta diferencias fenomenológicas notables. Las definiciones como Def-L conectan los términos de la sucesión con un número no perteneciente a su conjunto de valores (el límite) con ayuda de los fenómenos a.s.i e i.v.s; en cambio, las definiciones como Def-C conectan los términos de la sucesión entre sí con ayuda de otros dos fenómenos diferentes, que denominamos a.s.i.c e i.v.s.c.

El estudio teórico, descrito en este capítulo, corresponde al primer recuadro de la figura 2.6 (véase capítulo 2º) y, por lo tanto constituye el punto de partida de los estudios empíricos que presentaremos. El del próximo capítulo describe la presencia de los dos fenómenos a.s.i. e i.v.s en los libros de texto, mientras que el del capítulo 5º se dedica a buscar esos mismos fenómenos en las respuestas textuales de alumnos de bachillerato a un cuestionario relativo al límite finito de una sucesión.

Anexo 3.1: Detalles de la consulta a expertos

A3.1.1 Muestras

La selección de una definición se basó en una consulta a expertos. En dicha consulta se presentaron, a ocho profesores de los departamentos de matemática aplicada (escuela técnica superior de ingeniería informática) y de análisis matemático (facultad de ciencias), de la universidad de Málaga, siete definiciones de límite finito de una sucesión, para que las ordenasen, dando a cada una de ellas un valor comprendido entre uno y siete.

El cuestionario presentado a los expertos iba acompañado de una hoja en la que se explicaba que se estaba trabajando sobre el límite finito de una sucesión, y que se les reclamaba su ayuda para anotar qué definiciones eran más aceptadas por ellos, como representantes de la comunidad matemática.

El cuestionario iba también acompañado de una pequeña explicación de cómo tenían que contestar. En concreto, se apuntaba que los profesores que participaran en el estudio, deberían asignar un número comprendido entre uno y siete. El número uno, significaría, en su opinión, que se trataba de la mejor definición posible, mientras que el número siete correspondería a la peor de todas las que se presentaban. Se incluyó también una nota en la que se permitía asignar la misma puntuación a dos definiciones distintas, pero no dos puntuaciones distintas para una misma definición. También se pidió que si consideraban que alguna definición presentada no era adecuada, la tacharan y explicaran por qué no era adecuada. Además de esto, se instaba a que si conocían alguna definición de límite de sucesiones, distinta de las anteriores, la enunciaran. Los resultados referentes a los dos últimos puntos: comentarios a las definiciones presentadas y enunciado de otras definiciones diferentes a las señaladas, se presentarán en el siguiente apartado. A continuación se presentan las definiciones manejadas, en el mismo orden que aparecieron en el cuestionario; se trata de reproducciones literales salvo en lo relativo a la notación, que hemos unificado.

Definición n º 1: La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, es que para cada contorno V de a, exista un entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $x_n \in V$. (Dicho de otro modo, V contiene todos los x_n con excepción de un número finito de índices.) (Bartle y Sherbert, 1990, p. 86. Notación adaptada.)

Definición n º 2: Que un número x es límite de una sucesión x_1, x_2, x_3,.... significa que a cada número positivo ε se puede hacer corresponder algún término de la sucesión, de tal manera que él y todos los que le siguen difieren de x menos que ε. (Negro y Benedicto, 1987, p.10. Notación adaptada.)

Definición n º 3: Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim $x_n = x$) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - x|<\varepsilon$. (Novoa, 1991, p. 61. Notación adaptada.)

Definición n º 4: La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, es que para cada $\varepsilon>0$, existe un número entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $d(a, x_n) < \varepsilon$. Este último criterio se puede escribir también de la siguiente manera: $\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$. (Margalef y Outerelo, 1993, p. 315. Notación adaptada.)

Definición n º 5: Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales tiende al límite a y se escribe: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, cuando para todo número $\varepsilon>0$ existe un número natural v que depende de ε tal que cualquiera que sea $n>v$, se verifica $|x_n - a|<\varepsilon$. (Martínez Salas, 1985, p. 251. Notación adaptada.)

Definición n º 6: La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es que a todo número $\varepsilon>0$ se puede asociar un número natural v tal que, cualesquiera que sean p y q mayores que v, se verifique $|x_p - x_q|<\varepsilon$. (Martínez Salas, 1985, p. 255.)

Definición n º 7: Una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia a y se escribe: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, si para todo ε>0 existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n>N, entonces $|x_n - a|<\varepsilon$. (Spivak, 1991, p. 615. Notación adaptada.)

Las definiciones que se han presentado fueron extraídas de manuales que se emplean habitualmente tanto en la escuela superior de ingeniería informática como en la facultad de ciencias.

A3.1.2 Estudio de las respuestas de los expertos

En este apartado presentamos la definición que fue más aceptada por los expertos. Incluimos algunos comentarios recogidos, inspirados por algunas de las definiciones anteriores.

Para la corrección del cuestionario se asignó un código a cada uno de los profesores que participaron, a fin de preservar el anonimato. Los códigos asignados fueron E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8. A cada definición se le asignó el código respectivo Def1, Def2, Def3, Def4, Def5, Def6 y Def7. Cada código correspondió a una definición, en el orden en el que aparecieron en el cuestionario. Así Def1 correspondió a la definición número 1 que apareció en el cuestionario.

Cada experto asignó un valor comprendido entre uno y siete a cada definición. A continuación nosotros invertimos ese valor asignado, a la hora de corregir, en cada definición, y después sumamos los resultados obtenidos. De esta manera la definición con mayor puntuación sería la más aceptada.

Los resultados obtenidos se concretan en la siguiente tabla A3.1.1, página siguiente. En esta tabla el valor “nada” hace referencia a una respuesta vacía dada por alguno de los expertos, y le asignamos el valor de cero. El valor 1 significa que la definición es situada en primer lugar, mientras que los valores 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 y 1/7, corresponden a definiciones colocadas en los lugares segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo respectivamente.

Observando la tabla notamos que las definiciones tres y cinco son las más puntuadas. De entre estas dos, que son bastante similares elegimos, después de analizar ambas definiciones, la número tres.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
Def1	1 / 6	1 / 7	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1	Nada	Nada
Def2	1 / 2	1 / 4	1 / 5	1 / 4	1 / 3	1 / 7	Nada	1 / 7
Def3	1	1 / 3	1	1 / 2	1 / 3	1 / 3	Nada	1
Def4	1 / 7	1 / 2	1 / 4	1 / 3	1 / 7	1 / 4	Nada	1 / 5
Def5	1 / 3	1	1 / 2	1	1	1 / 3	Nada	1 / 3
Def6	Nada	Nada	1 / 7	1 / 7	1 / 7	1 / 7	Nada	1 / 2
Def7	1 / 3	1	1 / 3	1 / 3	1 / 2	1 / 3	Nada	1 / 4

Tabla A3.1.1

Las razones que justifican esta elección son las siguientes: (1ª) En la definición número tres se emplea el concepto de convergencia en R, y se emplea el valor absoluto como distancia. Este hecho distingue la convergencia que vamos a usar de otras convergencias que se pueden usar en R. (2ª) La definición número cinco es más informal ya que emplea el concepto de tendencia en su enunciado. Este concepto, como ya describió Cornu (1981,1983), puede tener unas implicaciones para el alumno diferentes a las dadas por la definición (aproximarse sin alcanzarlo, aproximarse hasta alcanzarlo o parecerse, entre otras) y pueden ser una fuente de dificultades para el alumno.

La definición número tres, que se presenta a continuación, fue la seleccionada, y supuso el punto de partida de nuestra investigación:

Sea x_n una sucesión en $\Re$, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim $x_n= x$) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ se cumple que $|x_n-x|<\varepsilon$

En esta definición $\Re$, es el conjunto de números reales y la convergencia en $\Re$, se entiende como la convergencia en el espacio métrico $\Re$, con la distancia usual d(x,y)=|x-y|. Esta definición es conocida usualmente como definición *ε–N.*

En el análisis de la definición, ayudaron los comentarios que los expertos realizaron en el cuestionario que se les administró. Estos comentarios se recogen a continuación.

A3.1.3 Comentarios sobre las definiciones presentadas

Un objetivo del cuestionario era desechar las definiciones que los expertos no consideraran adecuadas, siempre que explicaran el porqué de dicho caso. Otro objetivo era observar si se manejaban definiciones diferentes a las presentadas, por lo que se incluyó una pregunta al respecto. Presentamos los comentarios realizados por los expertos, en los que suprimen algunas definiciones propuestas por nosotros e incluyen otras definiciones que ellos emplean:

El encuestado E1, suprimió la definición nº 6, y comentó lo siguiente:

"La entiendo como definición de sucesión de Cauchy, si bien los conceptos de sucesión convergente y de sucesión de Cauchy son equivalentes en R, son diferentes. De hecho aquí se habla solo de convergencia y no del límite".

El encuestado E2, suprimió la definición nº 1 por no utilizar la terminología apropiada. En la definición presentada apareció la palabra contorno, y el experto la tachó y la cambió por entorno. Además suprimió la definición número seis y señaló lo siguiente. "*es una condición necesaria y suficiente pero no es la definición*".

Sobre la definición nº 4 el encuestado E2, afirmó que *"la condición necesaria y suficiente no es propia de una definición".* Sobre la definición nº 5 afirmó que *"es casi idéntica a la anterior, solo cambia terminología".*

El encuestado E3, suprimió la definición nº 6 y afirmó que: "la definición seis no es una definición de límite de una sucesión, sino una equivalencia, un criterio (de Cauchy) para determinar la convergencia de una sucesión sin necesidad de conocer su límite. Por tanto no es aceptable como definición de límite de una sucesión, sino más bien como definición de sucesión convergente".

También señaló que las definiciones números 3, 5 y 7 son similares y añade:

"Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ $n \in N$ de números reales converge a un número real a (o que el límite de $\{x_n\}$ es a) si para cada real $\varepsilon>0$ existe $n \in N$ tal que, para cada $n \geq N$ se verifica $|x_n - a| < \varepsilon$. En tal caso, escribiremos: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *ó* $x_n \to a$*"*

El encuestado E4 suprimió las definiciones números 1, 4 y 6 y afirmó lo siguiente: *"Las tres definiciones tachadas están enunciadas como una caracterización, lo que presupone una definición previa del concepto de límite o de sucesión convergente. Además la sexta sería la definición de sucesión de Cauchy, que es un concepto diferente en un medio más general".*

El encuestado E5 suprimió las definiciones números 1, 4 y 6 y afirmó lo siguiente:

"Las definiciones que he apuntado como 6 y 7 creo que no son adecuadas para un nivel de Bachillerato ya que manejan conceptos como "distancia" o "entornos" que pueden resultar complicados en dicho nivel. En cualquier caso estas definiciones deben ir acompañadas de dibujos o incluso animaciones gráficas realizadas con el programa "Matemática" o "Matlab" (o similar) que aclaren el concepto.

Por otro lado, las definiciones tachadas no son propiamente definición, son caracterizaciones por estar enunciadas con un "si y solo si". Esto supone que el concepto de límite debe haber sido enunciado con anterioridad. La definición marcada con (*) (definición 6) no es la definición de límite sino de sucesión de Cauchy que es un concepto un poco más general."

El encuestado E6 suprime la palabra contorno y la sustituye por la palabra entorno y añade "entonces" en la definición nº 3. Además afirma que "muchas definiciones no son posibles en R sin ninguna otra restricción. Estamos tratando con un espacio métrico (R, || ||) ó (R,d)

También afirma lo siguiente: *"supongo que junto a las definiciones, se les presentará gráficamente el significado, y antes también, mediante tablas de aproximación, el sentido de límite. Todas las definiciones de límite son muy abstractas y escapan al sentido del alumno. Creo que el alumno, no deber ver el límite de una sucesión como una relación entre ε y naturales, sino en su sentido geométrico. La definición formal está para darle formalidad a la clase de matemáticas, no para aburrir al alumno"*

El encuestado E7, no puntúa las definiciones, pero si añade una nueva definición a las planteadas por nosotros. En concreto señala lo siguiente:

"Diremos que l es el límite de una sucesión de números reales $\{x_1, x_2,\ldots,x_n\ldots\}$ si fijado cualquier valor $\varepsilon>0$, siempre podemos encontrar un término de la sucesión tal que, a partir de el, los términos siguientes de la sucesión distan de l menos que la cantidad ε"

Dicho experto señala también la dificultad para comparar definiciones de una misma cosa, señalando el carácter subjetivo de la misma.

A3.1.4. Modelo de escrito a expertos y de cuestionario administrado

En las páginas siguientes se muestran estos. En la respuesta del experto se observa que hemos eliminado datos personales, a fin de preservar el anonimato. La reproducción no se hace a tamaño real (DinA4), con objeto de incluir dos páginas en una sola.

Véase en las páginas siguientes.

Carta de presentación

Estimado compañero:

Actualmente estamos desarrollando un estudio sobre el limite de sucesiones de números reales, el cual pretendemos que se convierta en una tesis doctoral dirigida por el doctor Coriat Benarroch, de la Universidad de Granada.

El objetivo general de este trabajo es mejorar el conocimiento de los elementos que intervienen en la definición de limite de sucesiones de números reales, para intentar establecer una mejor comprensión de dicho concepto matemático por parte de los alumnos de Bachillerato.

Para ello nos proponemos los siguientes objetivos:

1) Establecer qué definiciones de sucesión de números reales son más aceptadas por la comunidad matemática.
2) Estudiar el desarrollo histórico que ha llevado a la definición del concepto de limite de sucesiones de números reales, estableciendo las relaciones que ha mantenido con otras nociones matemáticas como son la aproximación y el infinito.
3) Establecer las relaciones que mantienen entre sí las nociones de aproximación, infinito actual e infinito potencial y como se pasa de éstas al concepto de limite.
4) Seleccionar el campo en el que se mueve la definición de limite de sucesión de números reales.
5) Justificar la situación del concepto de limite de sucesión de números reales en el pensamiento matemático avanzado.

Puesto que nuestro trabajo parte de la definición de limite de sucesiones de números reales, hemos obtenido una selección de las diferentes definiciones que podemos encontrar en los libros de cálculo (7 definiciones diferentes), y solicitamos vuestra ayuda para elegir aquella que consideréis mas adecuada desde el punto de vista matemático.

Gracias de antemano por el tiempo que puedas dedicar a ello y un cordial saludo.

Fdo: Francisco Javier Claros Mellado.

CONSULTA A EXPERTOS

Nombre: ______________________

Dpto. al que pertenece: ______

1)De las siguientes definiciones de limites de sucesiones de números reales numera por orden de preferencia las que consideras más adecuadas. Hay siete definiciones diferentes. Un "1" significa que, en tu opinión, se trata de la mejor definición posible, mientras que un "7" significa que, en tu opinión se trata de la peor de todas las propuestas. (Puedes poner el mismo número a dos definiciones, pero recuerda que "la peor" debe llevar el número 7). Por la estructura de la encuesta podemos admitir la misma puntuación para 2 preguntas distintas pero no dos puntuaciones distintas para las misma pregunta.

•La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que: $\boxed{1}$

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Es que para cada ~~contorno~~ entorno V de a, exista un entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique
$x_n \in V$ (dicho de otro modo, V contiene todos los x_n con excepción de un número finito de índices).

• Que un número x es el límite de una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$. significa que a cada número positivo ε se puede hacer corresponder algún término de la sucesión, de tal manera que él y todos los que le siguen difieren de x menos que ε. $\boxed{7}$

• Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos $\lim x_n = x$) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un numero natural N tal que si $n \geq N$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon$. $\boxed{3}$

• La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

es que para cada $\varepsilon > 0$, exista un entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $\boxed{4}$

$d(a, x_n) < \varepsilon$. Este ultimo criterio se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$$

• Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales tiende al limite a y se escribe:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\boxed{3}$

cuando para todo número $\varepsilon>0$ existe un número natural v que depende de ε tal que cualquiera que sea $n>v$, se verifica $|x_n-a|<\varepsilon$

• La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es que a todo número $\varepsilon>0$ se puede asociar un número natural v tal que, cualesquiera que sean p y q mayores que v, se verifique $|x_p-x_q|<\varepsilon$. $\boxed{7}$

• Una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia a y se escribe:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

si para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si $n>N_{(\varepsilon)}$ entonces $|x_n-a|<\varepsilon$. $\boxed{3}$

2) Si crees que alguna de las definiciones enunciadas no es adecuada táchala y di por qué consideras que no es adecuada.

Muchas definiciones no son posibles en $\mathbb{R}$ sin ninguna otra restricción. Estamos tratando con un espacio métrico. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ó $\underline{(\mathbb{R}, d)}$.

3) Si crees que hay alguna definición de limite de sucesiones de números reales que no hemos incluido, enúnciala.

Supongo que junto a las definiciones, se les presentará gráficamente el significado y antes también mediante tablas de aproximación, el sentido de límite.

Todas las definiciones de Límite son muy abstractas y escapan al sentido del alumno. Creo que al alumno no debe ver el límite de una sucesión como una relación entre ε y naturales, sino en su sentido geométrico, la definición formal, está para darle formalidad a la clase de matemáticas, no para abrumir al alumno.

Anexo 3.2 Los fenómenos a.s.i e i.v.s en las definiciones del Anexo 3.1

En este anexo detectamos los fenómenos a.s.i. e i.v.s. en las definiciones indicadas.

En general, el fenómeno *a.s.i* se reconoce haciendo una lectura que va de la variable independiente (n) a los valores de la sucesión (x_n) y a su límite *a.* Por su parte, el fenómeno i.v.s se reconoce analizando estructuralmente la definición en busca de dos procesos.

En lo que sigue, reproducimos cada definición y, de forma resumida, ubicamos en ellas los dos fenómenos indicados. La definición nº 3 (Def3) es la que hemos seleccionado y desarrollado extensamente desde el apartado 3.2, por ello no se menciona ahora.

Def1

La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, es que para cada entorno V de a, exista un entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $x_n \in$ V. (Dicho de otro modo, V contiene todos los x_n con excepción de un número finito de índices.)

En Def1, hemos corregido, como apreció uno de los expertos, la palabra “contorno” por la de “entorno”.

Fenómeno a.s.i: los términos de la sucesión, a medida que *n* es cada vez mayor, están todos (excepto unos términos contados) dentro de un entorno centrado en el valor *a* y se van acercando a *a*.

Fenómeno i.v.s: Un proceso de *ida* exige asociar un natural n_0 a cada entorno de *a*: *“Para cada entorno V de a, existe un entero n_0”*. Un proceso de *vuelta* se reconoce en la afirmación-conclusión: *“La relación $n \geq n_0$ implique $x_n \in V$”.*

Def2

Que un número x es límite de una sucesión x_1, x_2, x_3,.... significa que a cada número positivo ε se puede hacer corresponder algún término de la sucesión, de tal manera que él y todos los que le siguen difieren de x menos que ε.

Fenómeno a.s.i: La siguiente lectura es posible; l*a diferencia entre los valores de la sucesión y x se va haciendo cada vez más pequeña a medida que n va creciendo.*

Fenómeno i.v.s: Un proceso de *ida* lo hallamos en el fragmento *"a cada número positivo ε se puede hacer corresponder algún término de la sucesión.* El proceso de *vuelta* asociado se reconoce en el fragmento final: *"él y todos los que le siguen difieren de x menos que ε".*

Def4

La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, es que para cada ε>0, existe un número entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $d(a, x_n) < \varepsilon$. Este último criterio se puede escribir también de la siguiente manera: $\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$

Fenómeno a.s.i: La siguiente lectura es posible; *los valores de la sucesión distan cada vez menos del valor a, a medida que avanzamos en la sucesión*.

Fenómeno i.v.s: Un proceso de *ida* lo hallamos en el fragmento *"para cada ε>0, existe un número entero n_0".* El proceso de *vuelta* asociado se reconoce en el fragmento final: *"la relación $n \geq n_0$ implique $d(a, x_{n)} < \varepsilon$".*

Def5

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales tiende al límite a y se escribe: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, cuando para todo número ε>0 existe un número natural v que depende de ε tal que cualquiera que sea n>v , se verifica $|x_n - a|<\varepsilon$.

Fenómeno a.s.i: Lectura informal de la definición, *A medida que avanzamos en la sucesión la diferencia entre los valores de esta y el valor a, es cada vez menor*.

Fenómeno i.v.s: Un proceso de *ida* lo hallamos en el fragmento *"para todo número ε>0 existe un número natural v".* El proceso de *vuelta* asociado se reconoce en el fragmento final: *"cualquiera que sea n>v , se verifica* $|x_n - a| < \varepsilon$*".*

Def6

La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es que a todo número $\varepsilon>0$ se puede asociar un número natural v tal que, cualesquiera que sean p y q mayores que v, se verifique $|x_p - x_q|<\varepsilon$.

Fenómeno a.s.i.c: La siguiente lectura informal es posible; *la diferencia entre los términos de la sucesión se va haciendo cada vez más pequeña.* Como consecuencia, los términos de la sucesión se irán aproximando cada vez más a un valor determinado, pero desconocido. Esta dificultad es la que nos hizo estudiar en profundidad la definición de Cauchy (Def-C), véase 3.5.

Fenómeno i.v.s.c: Un proceso de *ida* lo hallamos en el fragmento *"a todo número ε>0 se puede asociar un número natural v".* El proceso de *vuelta* asociado se reconoce en el fragmento final: *"cualesquiera que sean p y q mayores que v, se verifique* $|x_p - x_q|<\varepsilon$*".*

Def7

Una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia a y se escribe: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, si para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n>N, entonces $|x_n - a|<\varepsilon$.

Fenómeno a.s.i: Lectura informal de la definición, l*a diferencia entre los términos de la sucesión y el valor a, se va haciendo cada vez más pequeña a medida que n crece.*

Fenómeno i.v.s: Un proceso de *ida* lo hallamos en el fragmento *"para todo ε>0 existe un número natural N".* El proceso de *vuelta* asociado se reconoce en el fragmento final: *"si n>N, entonces* $|x_n - a|<\varepsilon$*".*

Capítulo 4º: Fenómenos *a.s.i* e *i.v.s* en libros de texto

Introducción

Con el fin de reconocer los fenómenos descritos en el capítulo anterior, en éste se analizan libros de texto de Matemáticas de secundaria en los que se trata el límite finito de sucesiones.

En 4.1 describimos los pasos seguidos hasta la obtención de la muestra. Hemos estructurado esta breve introducción en dos partes; en la primera, exponemos las principales razones que llevan a realizar un estudio de libros de texto, mientras que en la segunda hacemos una esbozo de la muestra e indicamos la razón que nos ha llevado a descartar libros consultados así como el único caso que nos ha hecho dudar acerca de si debía quedar incluido o excluido de la muestra.

El apartado 4.2 explica el guión de trabajo que planteamos para realizar un análisis sistemático, eficiente y replicable de los libros de texto. Se trata de un guión complejo estructurado mediante 4 criterios principales. Para manejar los resultados usaremos códigos, que también se describen o fueron ya descritos.

El apartado 4.3 y el anexo A4.1 se dedican a presentar los resultados brutos de nuestra búsqueda, en los libros de texto, de los fenómenos descritos en 3.2. Observamos la *aproximación simple intuitiva* (*a.s.i*) y la *retroalimentación* o *ida-vuelta en sucesiones* (*i.v.s*) precisando el sistema de representación y el formato que los autores eligieron para expresarlos. (Los sistemas de representación y los formatos, así como los códigos de tipificación correspondientes, quedaron establecidos en 3.3.)

Con los resultados de este estudio, hemos podido realizar un análisis descriptivo global (apartado 4.4). También hemos intentado describir la evolución de los fenómenos mediante dos criterios que permiten organizar la muestra de libros de texto de manera diferente (apartados 4.5 y 4.6). El capítulo se cierra (4.7) con unas breves consideraciones.

El anexo A4.1 contiene el extenso contenido detallado de la búsqueda y hallazgo de los fenómenos en cada libro de texto. Ha sido separado de 4.3 con la intención de facilitar la secuencia de lectura del capítulo.

La conexión entre los capítulos 3, 4 y 5 queda, de esta manera, bien definida. En el capítulo 3 se observaron una serie de fenómenos relacionados con el concepto de límite. Por la importancia que los libros de texto de secundaria tienen en todos los sistemas educativos, en este capítulo observamos, en una selección de libros de texto, los fenómenos indicados. En el capítulo 5, buscamos los mismos fenómenos, en producciones de alumnos de secundaria.

4.1 Rasgos del estudio

4.1.1 Rasgos principales del estudio de libros de texto

Los libros de texto, instrumentos de trabajo del profesor, han sido objeto de estudios de carácter didáctico por diferentes autores. Sierra, González y López (1999) estudiaron la evolución del concepto de límite de funciones en los libros de texto de bachillerato y COU en el período 1940-1995. Manya Raman (2002) utilizó libros de texto para analizar la enseñanza que los alumnos reciben en pre-cálculo y cálculo.

En el capítulo anterior hemos destacado fenómenos relacionados con el concepto de límite; los hemos denominado "fenómeno *a.s.i*" y "fenómeno *i.v.s*", los hemos clasificado según el sistema de representación (verbal, gráfico, tabular o simbólico) en el que son expresados y hemos distinguido dos formatos de presentación (ejemplo o definición); esto ha dado lugar a 8 posibles presentaciones para cada fenómeno, que se enumeraron en 3.3, junto con las abreviaturas que usaremos para designarlas.

Con el estudio empírico de libros de texto de secundaria, además de observar, como pretendíamos, los fenómenos *a.s.i* e *i.v.s* en diferentes representaciones y formatos, creemos que estamos en condiciones de matizar cuestiones sobre la enseñanza ofrecida a los alumnos a lo largo del tiempo, describiendo con algún detalle la evolución y cambios experimentados por la presentación de los fenómenos en los libros de texto.

4.1.2 Descripción breve de la muestra de libros

Se han estudiado 30 libros publicados entre 1933 y 2005, intervalo que abarca diferentes planes educativos en España. Sierra y González (1999) utilizaron un criterio de división en periodos educativos que consideraron significativos por basarse en diferentes leyes o épocas de nuestra historia reciente; hemos optado por un criterio puramente temporal, las décadas, excepto en los períodos inicial, por la mayor dificultad de hallar libros relativamente antiguos, y final, porque la ubicación temporal de este trabajo impuso que se cerrase la búsqueda de libros a los publicados en el intervalo 2000-2005. Las décadas constituyen un mero criterio organizador de la muestra. De hecho, en los estudios correspondientes de los resultados (véase 4.3 y 4.4), hemos usado ambos criterios.

La muestra usada es intencional: hemos analizado aquellos libros a los que hemos tenido acceso en los diferentes institutos, donde hemos ejercido como docentes y la hemos completado con libros de la Biblioteca Nacional, de manera que tuviéramos al menos tres ejemplares en cada intervalo de tiempo considerado (fuera década o fuera periodo de vigencia de una ley educativa).

La tabla 4.1 aporta una rápida descripción de la muestra, cuyo detalle se halla en la tabla 4.7

	Décadas	**Período**	**Nº de libros**	**Nº de editoriales diferentes**
	1'8	1933-1959	5	4
	1'0	1960-1969	4	3
	1'0	1970-1979	6	6
	1'0	1980-1989	8	6
	1'0	1990-1999	4	4
	0'6	2000-2005	3	2
Agregados	5,4	1933-2005	30	19

Tabla 4.1 Muestra de libros de texto. Descripción breve

4.1.3 Razón usada para excluir libros. Duda resuelta

Los datos de la muestra se refieren a los libros efectivamente usados. Se estudiaron algunos libros más, pero no hallamos elementos relacionados con el límite de una sucesión, razón por la que no se mencionan en esta memoria. Se trata de la única razón que hemos aplicado para descartar algún libro.

El profesor Rey Pastor (1933) presentó, en su ***Cálculo Infinitesimal***, una definición única para el límite de sucesiones y el límite de funciones. Para conseguirlo, unificó previamente las definiciones de sucesión y de función, interpretando la primera como función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. La definición de límite unificada apela al uso de infinitésimos, los cuales, una vez formalizados, nos obligan: (1º) A manejar conceptos del análisis no estándar. (2º) A renunciar a palabras como “aproximarse” o “acercarse”, que constituyen la base para definir los fenómenos *a.s.i* e *i.v.s*.

Tenemos razones para pensar que la propuesta de unificación que hace el admirado profesor Rey Pastor podría no ser completamente coherente desde un punto de vista formal, aunque en su redacción no admita reproche alguno. Por una parte, la unificación propuesta no permite comprender bien las diferencias fenomenológicas y simbólicas que hemos establecido entre el límite finito de una función en un punto y el límite finito de una sucesión. Por otra, en términos estrictamente matemáticos, no parece haber compatibilidad entre las ideas que se describen con las mismas frases. En particular, el límite de una sucesión apela a un infinito numerable que no es equipotente con el conjunto de los números reales. Así, bajo la frase unificadora se engloban objetos matemáticos difícilmente equiparables.

Por otra parte, el libro incluye algún fenómeno antes de presentar la definición. Este hecho es el que ha conducido a tomar la decisión de incluir el libro en la muestra. Pensamos que es mucho mejor para la investigación afrontar el contenido significativo de un libro que desecharlo totalmente, incluso aunque hemos expuesto buenas razones que darían respaldo a tal opción; solamente descartaremos la definición. En Claros, Sánchez y Coriat (2006) estudiamos las diferencias simbólicas y fenomenológicas entre el límite finito de una función en un punto y el de una sucesión.

4.2 Estudio empírico de libros de texto

En 4.2.1 exponemos el plan de trabajo o guión estructurado que hemos seguido para analizar los libros de texto y el criterio utilizado para clasificar los fenómenos que observamos en aquellos. En 4.2.2, explicamos, detalladamente, pero también de manera aislada, los diferentes códigos que hemos tenido que introducir para desarrollar el plan de trabajo. El análisis de los libros de texto se hace en 4.3 y en A.4.1, siguiendo de manera sistemática el guión anterior. El material de este apartado y el del anexo servirán para obtener los resultados que serán enunciados y comentados en 4.4

4.2.1 Guión estructurado para el análisis de los libros de texto

Al establecer el plan de trabajo o guión estructurado, hemos intentado satisfacer las que nos parecen exigencias de replicación de estudios. Lo esencial no es que otro hipotético lector del mismo documento interprete exactamente lo mismo que nosotros, sino que (1º) tenga información que le permita recuperar ese documento y (2º) comprenda bien cómo hemos actuado. Tales requisitos implican un guión complejo. Los cuatro criterios que estructuran el guión, Ficha, Secuenciación, Fenómenos y Resúmenes, se describen a continuación.

Criterio 1º: Ficha del libro

Esta estructura de recogida de información ayuda a clasificar e interpretar los datos obtenidos. Por ejemplo, el año de publicación lo hemos usado para estudiar la evolución de los fenómenos observados a lo largo del tiempo, mientras que el código del libro ayuda a identificar de manera única el objeto físico del que estamos hablando con un estilo uniforme. Los criterios usados para establecer el código se explican en 4.2.2. La ficha contiene, a nuestro entender, la máxima información objetiva posible. Hemos usado siete subcriterios para componer cada ficha. El contenido detallado de estos criterios se indica en la tabla 4.2 y se irá desarrollando en lo sucesivo.

Tabla 4.2 Subcriterios correspondientes al Criterio 1º: Ficha del libro

Denominación	Descripción	Observaciones
Código	Identificador único del objeto	Se ha usado una secuencia cronológica, ver 4.2.2
Autor o autores	Nombres	Recogido(s) literalmente de la portada o de la primera página
Título	Título del libro	Recogido literalmente de la portada o de la primera página. Si se trata de una colección, ésta no se indica, pero si se trata de varios volúmenes, sí.
Editorial	Nombre	Recogido literalmente de la portada o de la primera página
Año	Cuatro dígitos	Fecha de publicación del libro manejado.
Ubicación	Posición física	Nombre de la biblioteca en la que localizamos el libro
Información sobre el límite de sucesiones	Capítulo / Apartado y páginas	Se ha indicado si el libro tiene un capítulo dedicado al límite de sucesiones o si éste se halla inmerso en un capítulo dedicado a otro asunto.

Criterio 2º: Secuenciación

Hemos definido la *unidad de información* como el fragmento del libro en el que el autor desarrolla un contenido matemático único o que resulta cómodo desglosar. En un libro, normalmente, la presentación y desarrollo de un contenido matemático apela a varias unidades de información.

Tomamos la decisión de buscar los fenómenos en las unidades de información. Éstas, por su parte, las hemos numerado correlativamente, desde 01 en adelante. Esta numeración correlativa forma parte de un código, como se explica en 4.3.

En las figuras 4.1 y 4.2 reproducimos dos unidades de información sin codificar.

Ejemplo:

En la sucesión de números impares del ejemplo anterior, el término general es $a_n = 2n - 1$.

Hay sucesiones en las que sus términos cada vez se acercan más a un determinado valor, conocido como **límite de la sucesión**; este valor lo expresamos como $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, o simplemente como $\lim a_n$.

Figura 4.1 Unidad de información - 1

El fragmento de la figura 4.1 constituye una unidad de información porque el autor utiliza un ejemplo y, de él extrae una idea general.

Límite de una sucesión

Se dice que una sucesión indefinida de números reales $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, que representaremos por a_n, tiene por límite a, o converge hacia a, si la diferencia $a_n - a$, en valor absoluto, llega a ser tan pequeña como se quiera, tomando a_n lo suficientemente grande.

Figura 4.2 Unidad de información - 2

El fragmento de la figura 4.2 constituye también una unidad de información; aquí, el autor propone una definición de límite. Él mismo la ha recuadrado.

En los libros de texto de matemáticas, las unidades de información suelen presentarse secuenciadas.

Criterio 3º: Fenómenos observados, detalle

Aceptamos que los fenómenos *a.s.i* e *i.v.s* los encontraremos, o no, en las unidades de información. Para describir estos fenómenos, decidimos usar dos ideas:

(1) Ubicar el fenómeno dentro del libro de texto estudiado. Esto lo hemos hecho mediante un código que procede de lo general a lo particular: si unimos el código del libro, con el código de la secuenciación y con el número de orden del fenómeno dentro de su unidad de información, tenemos un método de etiquetado único para cada fenómeno.

(2) Asociar al código anterior la descripción detallada de lo observado. Elaboramos, así, una explicación que incluye:

-Si ha lugar, la presencia del fenómeno en el libro y, en caso afirmativo, presentamos un fragmento escaneado del libro en el que aparece el citado fenómeno.

-Dos decisiones que el autor del libro ha podido tomar y que enunciamos como preguntas: (a) ¿Qué formato (definición, ejemplo) ha usado el autor? (b) ¿Qué sistema de representación (verbal, gráfico, tabular, simbólico) ha elegido el autor?

El código completo de los fenómenos observados se describe en 4.2.3.

Criterio 4º: Resúmenes y comentario

Para cada libro, presentamos dos cuadros que resumen el trabajo de análisis realizado y un breve comentario. En el primer cuadro-resumen, incluimos la posición del fenómeno en el marco del libro; en el segundo cuadro-resumen, reubicamos los fenómenos observados en el marco de las dieciséis posibilidades descritas en 3.3, adquiriendo un aspecto muy parecido a la tabla 3.3.

La tabla 4.3 describe los cuadros-resumen del primer tipo.

Tabla 4.3. Estructura del cuadro-resumen tipo 1

Capítulo	Número del capítulo
Página	Número de la página
Figura	Indica si se usó o no una figura. En caso afirmativo, referencia en el libro[1]
Línea inicial	Se usan dos dígitos
Línea final	Se usan dos dígitos
Código	El código de ubicación del fenómeno. (Véase 4.2.2.)
Fenómeno	El código de tipificación del fenómeno. (Según 3.3)

[1] Para los propósitos de este cuadro, consideramos figuras tanto las gráficas como las tablas.

La tabla 4.4 muestra un ejemplo de cuadro-resumen del primer tipo.

Tabla 4.4 Un ejemplo de cuadro-resumen del tipo 1º

CAPÍTULO	PÁGINA	LÍNEA INICIO	LÍNEA FIN	FIGURA	CÓDIGO UBICACIÓN	CÓDIGO FENÓMENO
1	12	9	12	No	LS97006.08.01	i.v.s s-e

Conviene observar que la última columna del cuadro conecta la tediosa descripción anterior con el estudio teórico realizado en el capítulo anterior. Viene a resumir que, según nuestro estudio, hemos observado un fenómeno i.v.s s-e (ida-vuelta en sucesiones, sistema de representación simbólica-formato ejemplo) en el capítulo 1º, página 12, líneas 9-12, sin apoyo gráfico o tabular; en “código ubicación”, hasta el primer punto se incluye el código del libro (LS97006) y, seguidamente, los códigos de secuenciación (8ª unidad de información) y de número de orden del fenómeno (el primero, en dicha unidad).

Los cuadros-resumen del tipo 2º se explicaron y definieron en 3.3. Hemos elaborado, como quedó dicho, un cuadro-resumen de este tipo para cada libro estudiado. Como consecuencia de lo dicho en la tabla 4.4, el cuadro-resumen del tipo 2º para libro estudiado se incrementará en un ítem que se indica en la tabla 4.5:

	Tabla 4.5 Ítem que se añade al cuadro-resumen del 2º tipo como resultado de lo dicho en la tabla 4.4							
	v		T		s		g	
a.s.i								
i.v.s					LS97006.08.01			
	e	d	e	d	e	d	e	d

Como consecuencia del trabajo realizado, resulta posible retroceder a lo largo del proceso seguido, o replicarlo, para establecer claramente el contexto de un comentario o de una crítica.

4.2.2 Explicación de los códigos de ubicación

Sucesivamente, presentamos el código asignado a los libros, a la secuenciación y a los fenómenos; los últimos, son los que llamamos “códigos de ubicación”.

4.2.2.1. Código asignado a los libros

El código de los libros tiene por meta identificarlo plenamente; por ello, construimos el código del libro usando cuatro ideas. La primera indica el soporte, la segunda, el contenido matemático, la tercera, la década y la cuarta el número de orden, en la muestra, dentro de ésta.

La indicación de que el soporte es un libro (abreviado L) no era realmente imprescindible, ya que, en nuestra investigación solamente hemos usado este soporte; sin embargo, con el avance de los soportes electrónicos, entre otros, hemos considerado que convenía incluir tal recordatorio.

Análogamente, hemos usado una S para recordar que estudiamos, en ese soporte, las sucesiones y no otra cosa.

La indicación de la década no es completamente rigurosa porque el primer período investigado y el último no abarcan 10 años, como se indica en la tabla 4.1. A pesar de ello, hemos incluido el primer año de cada período (en su mayoría, son décadas) y cometeremos, a menudo, el abuso de referirnos a todos los períodos como “décadas”.

Por último, dentro de cada década, hemos establecido un número de orden que consta de dos dígitos: hicimos la suposición de que en una década o período no hallaremos más de 99 libros diferentes de los que nos interesan, incluso si pasamos de la muestra a la población, en el territorio de España.

De esta manera, el código de los libros es único en la muestra y, posiblemente, lo es también en la población. Se leerá como indica la tabla 4.6.

Tabla 4.6 Explicación del código de asignado a cada libro

Indicadores	Soporte	Contenido	Década	Orden, en la década
Código	L	S	XYZ	TU
Ejemplo	L	S	970	06
			Tres dígitos	Dos dígitos

El código LS97006 remite al sexto (06) libro (L), de la década que comenzó en 1970 (970), en el que hemos estudiado exclusivamente las sucesiones numéricas (S).

4.2.2.1. Código asignado a las unidades de información y a los fenómenos. Simplificación de códigos

Como ha quedado patente, la codificación de las unidades de información mediante dos dígitos y en secuencia correlativa no es suficiente para identificarlas. Para evitar códigos muy largos, a estos códigos les hemos añadido, por la izquierda, el código del libro, de manera que, con éste y con el apoyo de los cuadros resumen del tipo 1º, la unidad de información queda perfectamente identificada.

Continuando con el ejemplo del libro anterior, un código como LS97006.08 indica que nos estamos refiriendo a la 8ª unidad de información del libro ya indicado. Los detalles del fenómenos o fenómenos hallados en esta unidad de información, se encontrarán en el “estudio detallado” y, brevemente, en el cuadro-resumen del tipo 1º.

Al código de la unidad de información le hemos añadido, por la derecha, el código con el número de orden del fenómeno hallado, si es que tal cosa ocurrió. Por ejemplo, tendría sentido el siguiente código de ubicación de un fenómeno: LS97006.08.02. Significa que nos referimos al segundo de los fenómenos hallados en la octava unidad de información del libro indicado.

Al estudiar muchos libros, notamos que, en suficiente número de casos, a cada unidad de información seleccionada le correspondía exactamente un fenómeno. Esto no ha sido algo voluntario, puesto que hay contraejemplos, pero sí tiene la suficiente frecuencia como para justificar el siguiente *criterio de simplificación en la escritura de códigos*: cuando una unidad de información se asocia a un solo fenómeno, omitimos el código de éste, decidiéndose, en este caso, por el contexto, si estamos hablando de una unidad de información o del fenómeno único que hemos observado en ella. Por razones obvias, si en una unidad de información detectamos más de un fenómeno, el criterio de simplificación de códigos no se aplicará.

En el ejemplo de 4.3.1 se hallarán, entre otros, los siguientes códigos de ubicación de fenómenos: LS97006.07, LS97006.08.01 y LS97006.08.02. En el primer código de ubicación hemos aplicado el criterio de simplificación, ya que solamente hemos encontrado un fenómeno en la 7ª unidad de información. En la 8ª unidad de información, evidentemente, dicho criterio no es aplicable, por haber hallado en ella dos fenómenos.

4.3 Muestra de libros y plan del estudio

4.3.1 Muestra

Período	***Código del Libro***	***Editorial***
1933-1959	LS93001 LS93002 LS93003 LS93004 LS94001	Ruiz de Lara (Cuenca) Sucesores de Rivadeneyra (Madrid) Ministerio de Educación y Ciencia Ministerio de Educación y Ciencia Stylos (Madrid)
1960-1969	LS96001 LS96002 LS96003 LS96004	Saeta (Madrid) Ministerio de Educación y Ciencia Summa Ministerio de Educación y Ciencia
1970-1979	LS97001 LS97002 LS97003 LS97004 LS97005 LS97006	U.T.E.H.A. (México) Magisterio Español Tecnibán S.A. (Madrid) Librería General (Zaragoza) Everest (León) S.M (Madrid)
1980-1989	LS98001 LS98002 LS98003 LS98004 LS98005 LS98006 LS98007 LS98008	Luis Vives (Zaragoza) S.M. (Madrid) Teide (Barcelona) Alhambra (Madrid) Santillana (Madrid) Edunsa Alhambra (Madrid) Alhambra (Madrid)
1990-1999	LS99001 LS99002 LS99003 LS99004	Santillana (Madrid) Luis Vives (Zaragoza) SM (Madrid) Oxford Educación
2000-2005	LS00001 LS00002 LS00003	Oxford Educación Oxford Educación Anaya

Tabla 4.7 Muestra de libros estudiada

En esta tabla se presenta el período de estudio considerado, el código asignado a cada libro y la editorial que lo publicó. La relación de libros estudiados se presenta en la bibliografía.

4.3.2 Un ejemplo

Presentamos el estudio del libro que ocupa el lugar 15º de la muestra (tabla 4.7), obtenido por sorteo. La totalidad del estudio se halla en el anexo A4.1. No se han numerado las tablas, ya que solamente pretenden ilustrar el guión presentado en 4.2. La misma información sobre este libro se reproduce también en el anexo indicado.

LS97006. Ficha

Código	LS97006
Autor	Valentín López, José Luis Sánchez Martín
Titulo	Matemáticas 2 Bachillerato
Año	1977
Editorial	S.M (Madrid)
Ubicación	I.E.S "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga)
Información sobre límites	Capítulo I. Sucesiones de números reales. Límite de sucesiones. Páginas 7-21.

LS97006.Secuenciación

1) Sucesión de números reales: *"Se llama sucesión de números reales a cualquier aplicación de N^+ en R".*
2) Término general de una sucesión: *"es una expresión con la indeterminada en n tal que al hacer n=1, 2, 3, … se obtienen respectivamente los términos primero, segundo, tercero, … de la sucesión"*
3) Dos maneras de determinar una sucesión: *"Por el termino general" o "Por una ley de recurrencia que permita obtener un término a partir de otros anteriores"*
4) Propiedades de las sucesiones. Las sucesiones de números reales con la suma y el producto forman un anillo conmutativo y unitario.
5) Sucesión monótona creciente y monótona decreciente.
6) Sucesión acotada, y de sucesión acotada superiormente e inferiormente.
7) Límite finito de una sucesión. Véase LS97006.07
8) Ejemplos: se plantean $a_n=1/(2n)$ y $b_n = 2n/(n+1)$ y se demuestra que sus límites valen cero y dos respectivamente usando la definición de limite. . Dado un épsilon $\varepsilon=1/1000$ y dada la sucesión ½, ¼,1/6,....1/(2n), se demuestra que el límite es cero hallando el n_0 que hace que la diferencia entre f_n y cero sea menor que épsilon. En este caso el $n_0=5$. Véanse LS97006.08.01 y LS97006.08.02
9) Se plantea la sucesión $a_n=n/(n+1)$ para que se razone que su límite es 1
10) Definición de intervalos y entornos en la recta real.
11) Definición de límite finito de una sucesión e interpretación geométrica. Véanse LS97006.11.01 y LS97006.11.02

LS97006. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS97006.07. i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta"; usan la representación verbal y el formato definición. (Ver fragmento en la página siguiente.)

Una sucesión de números reales f_1, f_2, f_3, … f_n tiene por **límite** el número L si el valor absoluto de la diferencia (f_n − L) puede hacerse menor que cualquier número positivo ε a partir de un cierto término f_p.

<u>LS97006.08.01 i.v.s s-e.</u> Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}$ ¿tiene por límite el número 0?

Solución

En efecto, si suponemos $\varepsilon = \frac{1}{1.000}$ a partir del término f_{501} se verifica:

$$|f_{501} - 0| = \left|\frac{1}{1.002} - 0\right| = \frac{1}{1.002} < \frac{1}{1.000}$$

$$|f_{502} - 0| = \left|\frac{1}{1.004} - 0\right| = \frac{1}{1.004} < \frac{1}{1.000}$$

Luego el número **0** es el límite.

<u>LS97006.08.02 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación simbólico y el ormato ejemplo.

La sucesión $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots$ ¿tiene por límite el número 2?

Solución

Si hacemos, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10.000}$ a partir del término $f_{20\,000}$ se tiene:

$$|f_{20\,000} - 2| = \left|\frac{40.000}{20.001} - 2\right| = \frac{2}{20.001} < \frac{1}{10.000}$$

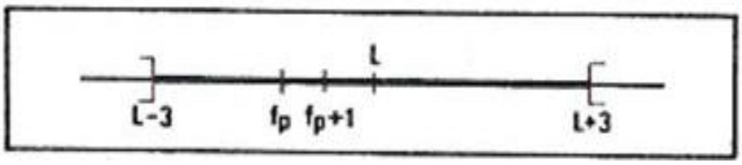
$$|f_{20\,001} - 2| = \left|\frac{40.002}{20.002} - 2\right| = \frac{2}{20.002} < \frac{1}{10.000}$$

Luego el límite de la sucesión es **2**.

<u>LS97006.11.01 i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Una sucesión f_n tienen por límite L si para cualquier número positivo ε existe un término f_p, tal que él y los siguientes pertenecen al entorno simétrico de L y radio ε.

<u>LS97006.11.02 i.v.s g-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



LS97006. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	11	No	24	26	LS97006.07	i.v.s v-d
	12	No	9	12	LS97006.08.01	i.v.s s-e
	12	No	13	19	LS97006.08.02	i.v.s s-e
	13	No	19	21	LS97006.11.01	i.v.s v-d
	14	Si			LS97006.11.02	i.v.s g-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs		LS97006.07 LS97006.11.01		LS97006.11.02			LS97006.08.01 LS97006.08.02	
	e	d	e	D	e	d	E	d

<u>Comentario</u>

Solamente observamos fenómenos de retroalimentación en este libro. Los autores usaron tres sistemas de representación, descartando las tablas.

4.4 Los fenómenos *a.s.i* e *i.v.s* en la muestra de libros

Este apartado presenta un resumen estadístico global de los datos presentados en el apartado en A4.1. Básicamente, hemos considerado toda la muestra y, con ella, hemos elaborado una tabla de frecuencias del fenómeno a.s.i (4.4.1), una tabla de frecuencias del fenómeno i.v.s (4.4.2), hemos estudiado el uso relativo de los fenómenos a.s.i e i.v.s en los sistemas de representación (4.4.3) y hemos establecido una relación entre los fenómenos a.s.i e i.v.s (4.4.4).

Los subapartados dan una visión conjunta y detallada, aunque no exhaustiva, de los dos fenómenos descritos, su evolución, frecuencia y comparación, siguiendo un criterio basado en los periodos cronológicos.

4.4.1 Tabla de frecuencias del fenómeno a.s.i

La tabla 4.8 (página siguiente) consta de tres campos: el primero corresponde al código del fenómeno, el segundo, a la frecuencia asociada a la muestra y el tercero, los códigos de ubicación que han permitido realizar el recuento. Recordaremos que el código del fenómeno se refiere a las variantes indicadas en el capítulo 3, mientras que los códigos de ubicación se generaron en el anexo 4.1, como resultado del estudio detallado de la muestra. Las dos primeras columnas se observan también en la figura 4.1 (página siguiente).

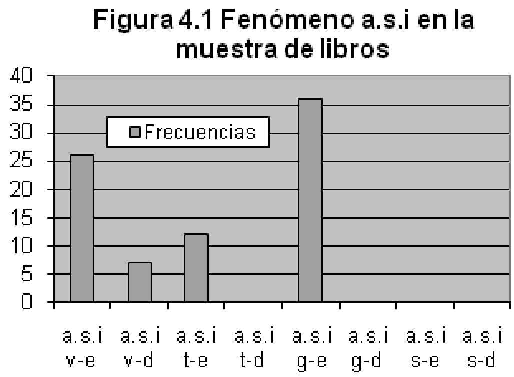
Las siguientes observaciones expresan con palabras algunas informaciones presentadas en la tabla 4.8 y en la figura 4.1:

> *El fenómeno a.s.i, en el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo, es el de mayor frecuencia absoluta.*
>
> *Otros códigos de fenómeno sobresalen en frecuencia absoluta: a.s.i v-e y a.s.i g-e, el cual, con una frecuencia absoluta de 36, constituye la moda de la distribución de frecuencias.*

De los 8 códigos de fenómeno posibles, hay cuatro que no se observan en ninguno de los libros estudiados: a.s.i t-d, a.s.i g-d, a.s.i s-e y a.s.i s-d.

Código fenómeno	Frecuencia (Recuento)	Códigos de ubicación
a.s.i v-e	26	LS97001.02, LS97003.01.01, LS97003.02.02, LS97003.03.02, LS97003.04.02, LS9700308, LS98002.01.01, LS98002.01.03, LS98002.01.05, LS98003.08, LS98003.02.03, LS98004.06.03, LS98005.01.01, LS98005.01.03, LS98007.04.02, LS98008.01, LS98008.02.01, LS99001.02, LS99001.03.01, LS99003.01.02, LS99003.02, LS99003.04, LS99003.05.02, LS99004.02.07, LS00002.02.07, LS0004.01.02
a.s.i v-d	7	LS93002.01.01, LS98002.02, LS99002.04, LS99004.02.08, LS00001.03.07, LS00002.02.08, LS00003.03
a.s.i t-e	12	LS98003.02.01, LS99003.01.01, LS99003.05.01, LS99004.02.01, LS99004.02.03, LS99004.02.04, LS00001.03.04, LS00001.03.05, LS00001.03.06, LS00002.02.01, LS00002.02.03, LS00002.02.04
a.s.i t-d	0	
a.s.i g-e	36	LS97003.01.02, LS97003.02.01, LS97003.03.01, LS97003.04.01, LS97003.07, LS97003.08, LS98001.09.02, LS98001.11, LS98002.01.02, LS98002.01.04, LS98002.07.02, LS98003.02.02, LS98003.03, LS98003.10, LS98004.06.01, LS98004.06.02, LS98005.01.02, LS98005.01.04 LS98007.02, LS98007.03, LS98007.04.01, LS98008.01, LS98008.02.02, LS99001.03.03, LS99003.05.03, LS99004.02.02, LS99004.02.05, LS99004.02.06, LS00001.01, LS00001.03.01, LS00001.03.02, LS00001.03.03, LS00002.02.02, LS00002.02.05, LS00002.02.06, LS00003.01.01
a.s.i g-d	0	
a.s.i s-e	0	
a.s.i s-d	0	

Tabla 4.8. Recuento del fenómeno a.s.i



Cuando los autores de la muestra usan el formato definición, siempre presentan el fenómeno a.s.i usando la representación verbal.

No se observa el uso del fenómeno a.s.i en el sistema de representación simbólico, da la impresión de que no tiene sentido para los autores de los libros de texto estudiados.

Si en la tabla 4.8 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno en cada sistema de representación, agregando los formatos, observamos:

Para presentar el fenómeno a.s.i, en los libros de texto de la muestra, se usan, preferentemente los sistemas de representación gráfica (36 ocurrencias) o verbal (33), seguidos, a distancia, por el tabular (12).

Si en la tabla número 4.8 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno en cada formato, agregando los sistemas de representación, observamos:

Para presentar el fenómeno a.s.i, en los libros de texto de la muestra, se usa, preferentemente, el formato ejemplo (74 ocurrencias) y, en ocasiones, el formato definición (7). La razón de ocurrencias es de 10:1.

4.4.2 Tabla de frecuencias del fenómeno i.v.s

La tabla 4.9 (página siguiente) es análoga a la tabla 4.8, pero referida ahora al fenómeno i.v.s. Recordaremos que el código del fenómeno se refiere a las variantes indicadas en el capítulo 3, mientras que los códigos de ubicación se generaron en el anexo 4.1, como resultado del estudio detallado de la muestra. Las dos primeras columnas se observan también en la figura 4.2 (página siguiente).

Las siguientes observaciones expresan con palabras algunas informaciones presentadas en la tabla 4.9 y en la figura 4.2:

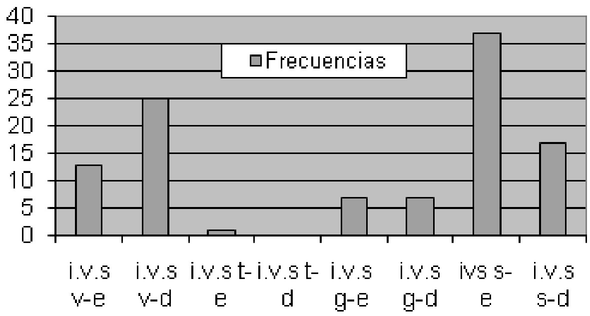
El fenómeno i.v.s, en el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo, es el de mayor frecuencia absoluta.

Otros códigos de fenómeno sobresalen en frecuencia absoluta: i.v.s s-d é i.v.s v-d. La moda de la distribución de frecuencias corresponde a i.v.s s-e, con una frecuencia absoluta de 37.

Código fenómeno	Frecuencia (Recuento)	Códigos de ubicación
i.v.s v-e	13	LS93001, LS93002.01.03, LS93003.01, LS93003.02, LS96003.04.02, LS97002.02, LS98005.03.01, LS98005.03.02, LS98006.01, LS98007.05, LS98008.02.03, LS99001.03.02, LS00001.03.01
i.v.s v-d	25	LS93002.01.02, LS93004.01, LS93004.03, LS96001.02, LS96003.04.01, LS96003.04.03, LS96003.04.04, LS97002.01, LS97003.10.01, LS97004.01.01, LS97005.01, LS97006.07, LS97006.11.01, LS98001.08.01, LS98001.06, LS98002.06.01, LS98002.14, LS98005.04.01, LS98007.06.01, LS98007.06.02, LS98007.06.03, LS99001.04, LS00001.04, LS00001.05, LS00001.06
i.v.s t-e	1	LS98002.07.03
i.v.s t-d	0	
i.v.s g-e	7	LS98005.03.03, LS98005.03.04, LS98006.04.02, LS98006.05.02, LS98007.07.02, LS00001.03.02, LS00001.07.01.
i.v.s g-d	7	LS94001.02, LS96002.08, LS97004.05, LS97006.11.02, LS98002.06.02, LS98005.04.04, LS98005.04.05
i.v.s s-e	37	LS93004.02, LS96001.03.01, LS96001.03.02, LS96002.09, LS96004.02, LS97001.04.01, LS9701.04.02, LS97002.03.01, LS97003.09, LS97003.10.03, LS97004.02, LS97006.08.01, LS97006.08.02, LS98001.09.01,LS98002.04.01, LS98002.04.02, LS98002.05.01, LS98002.05.02, LS98002.07.01, LS98002.07.04, LS98002.07.05, LS98003.11, LS98003.12, LS98004.09, LS98005.02.01, LS98005.02.02, LS98005.02.03, LS98005.02.04, LS98005.02.05, LS98006.04.01, LS98006.04.03, LS98006.05.01, LS98006.05.03, LS98007.07.01, LS98008.03, LS99001.05, LS00001.07.01
i.v.s s-d	17	LS93004.01, LS94001.01, LS96002.07, LS96004.01, 0LS97001.02, LS97003.10.02, LS97004.01.02, LS97004.04, LS97005.02, LS98001.08.02, LS98002.06.03, LS98002.07.06 LS98004.07, LS98005.04.02, LS98005.04.03, LS98006.02, LS98008.02.04

Tabla 4.9. Recuento del fenómeno i.v.s

Figura 4.2 Fenómeno i.v.s en la muestra de libros



> *De los 8 códigos de fenómeno posibles, uno, i.v.s t-d, no se observa en ninguno de los libros estudiados; de hecho, la representación tabular se usa una sola vez con este fenómeno.*

Si en la tabla 4.9 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno en cada sistema de representación, agregando los formatos, observamos:

> *Para presentar el fenómeno a.s.i, en los libros de texto de la muestra, se usan los sistemas de representación en el orden que sigue, por número de ocurrencias: simbólico, verbal, gráfico y tabular.*

Si en la tabla número 4.9 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno en cada formato, agregando los sistemas de representación, observamos:

> *Para presentar el fenómeno i.v.s, en los libros de texto de la muestra, se usan, indistintamente, ejemplo (58 ocurrencias) o el formato definición (49). La razón de ocurrencias es, prácticamente de 1.*

4.4.3 Uso relativo de los fenómenos a.s.i e i.v.s en los sistemas de representación

En el sistema de representación verbal ocurre lo siguiente:

> *El fenómeno a.s.i es más frecuente en el formato ejemplo, mientras que el fenómeno i.v.s es más frecuente en el formato definición.*

En cuanto al sistema de representación tabular observamos:

> *Ambos fenómenos solamente se usan en el formato ejemplo.*

En el sistema de representación gráfico observamos:

> *El fenómeno a.s.i se usa solamente en el formato ejemplo y el número de ocurrencias es superior al del fenómeno i.v.s, que se usa en los dos formatos (ejemplo y definición).*

En el sistema de representación simbólico observamos:

No consta que el fenómeno a.s.i se use en ninguno de los formatos; en cambio, el fenómeno i.v.s se usa con los dos. Además, al código i.v.s s-e la corresponde la máxima frecuencia registrada en las tablas 4.8 y 4.9.

Si agregamos todos los recuentos en cada una de las tablas 4.8 y 4.9, obtenemos la tabla 4.10, que permite enunciar un resultado más:

Fenómeno	a.s.i	i.v.s
Frecuencias	81	107

Tabla 4.10. Frecuencias totales de los fenómenos

El cociente 107/81 está próximo a la razón sencilla 4/3. Asociamos este número a la razón de uso de ambos fenómenos por los diferentes autores de la muestra.

4.4.4 Relación entre los fenómenos a.s.i e i.v.s

Definimos las siguientes variables X e Y, que son variables cualitativas discretas y que consideramos también como variables aleatorias:

X = “Códigos del fenómeno a.s.i” = {a.s.i v-e, a.s.i v-d, a.s.i t-e, a.s.i t-d, a.s.i g-e, a.s.i g-d, a.s.i s-e, a.s.i s-d}. Asociamos a cada valor de X la frecuencia indicada en la tabla 4.8. (Ver columnas 1ª y 2ª de dicha tabla.)

Y = “Códigos del fenómeno i.v.s” = {i.v.s v-e, i.v.s v-d, i.v.s t-e, i.v.s t-d, i.v.s g-e, i.v.s g-d, i.v.s s-e, i.v.s s-d}. Asociamos a cada valor de Y la frecuencia indicada en la tabla 4.9. (Ver columnas 1ª y 2ª de dicha tabla.)

Nuestro siguiente paso consiste en construir una tabla con los pares de frecuencias (X, Y), con la condición de que se emparejan los valores cuando coinciden las respectivas dos últimas letras de sus códigos. Véase la tabla 4.11.

		v-e	v-d	t-e	t-d	g-e	g-d	s-e	s-d
a.s.i	X	26	7	12	0	36	0	0	0
i.v.s	Y	9	20	1	0	7	6	37	17

Tabla 4.11. Emparejamiento de variables

Por inspección de la tabla 4.11 deducimos:

(1º) A los fenómenos a.s.i e i.v.s. considerados globalmente no les corresponden frecuencias equilibradas; al contrario, al aumentar el valor total en un sistema de representación-formato (etiquetas de columnas de 4.11), disminuye el valor total en el mismo sistema de representación-formato del otro fenómeno. La única excepción de esta afirmación es la pareja (0,0), correspondiente al sistema de representación tabular y formato definición.

(2º) Globalmente, el fenómeno a.s.i predomina en los sistemas de representación-formato v-e, t-e, g-e (es decir, básicamente, en el formato ejemplo), mientras que el fenómeno i.v.s predomina en los formatos v-d. g-d, s-e y s-d (es decir, básicamente, en el sistema de representación simbólico, así como en el formato definición).

(3º) Algo más del 75% de las ocurrencias del fenómeno a.s.i se concentra en dos sistemas de representación-formato: verbal-ejemplo y gráfico-ejemplo. En cambio, algo más del 75% de las ocurrencias del fenómeno i.v.s se reparte entre dos sistemas de representación: simbólico y verbal.

4.5 Estudio de los fenómenos por periodos. (1º) "Décadas"

En este apartado estudiamos con más detalle los fenómenos teniendo en cuenta los códigos de fenómeno y los períodos establecidos en la tabla 4.7; por comodidad, haremos un abuso de lenguaje y llamaremos "década" a cada uno de esos períodos, aunque el primero la excede y el último no la alcanza. Sucesivamente, estudiaremos el fenómeno a.s.i en función de las décadas (4.5.1), la evolución, con las décadas, de los códigos del fenómeno a.s.i (4.5.2). Subapartados análogos corresponderán al fenómeno i.v.s (4.5.3 y 4.5.4). Finalmente, compararemos ambos fenómenos (4.5.5).

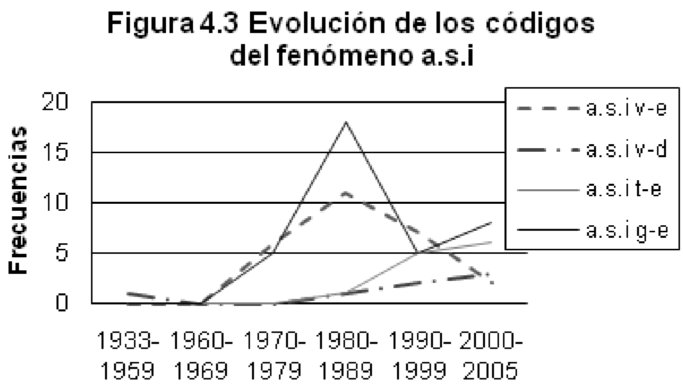
4.5.1 El fenómeno a.s.i en función de las décadas

La gráfica 4.3 y la tabla 4.12 reflejan la evolución del fenómeno a.s.i en los diferentes sistemas de representación y en los diferentes formatos, a lo largo de los años. Los libros se van a agrupar en los períodos indicados en las tabla 4.1 y 4.7. Excepto en los períodos inicial y final, manejamos décadas. Hemos usado el siguiente convenio para hacer recuentos y escribir las correspondientes frecuencias: sumamos las ocurrencias para todos los libros del mismo período.

	1933-1959	1960-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2005	Recuento por código de fenómeno
a.s.i v-e	0	0	6	11	7	2	26
a.s.i v-d	1	0	0	1	2	3	7
a.s.i t-e	0	0	0	1	5	6	12
a.s.i t-d	0	0	0	0	0	0	0
a.s.i g-e	0	0	5	18	5	8	36
a.s.i g-d	0	0	0	0	0	0	0
a.s.i s-e	0	0	0	0	0	0	0
a.s.i s-d	0	0	0	0	0	0	0
Recuento por década	1	0	11	31	19	19	81

Tabla 4.12 Códigos del fenómeno a.s.i observados en libros, agregados por décadas

La figura recoge la evolución de los códigos del fenómeno a.s.i según las décadas indicadas.



El contenido de la tabla 4.12 y el de la figura 4.3 lo describimos así:

En los libros de la "primera década", el fenómeno a.s.i solamente se usa una vez y, en los libros de la década 1960-1969, ninguna.

1980-89 es la década de apogeo del fenómeno a.s.i (31 ocurrencias).

El fenómeno a.s.i solamente se usa para definir el límite de una sucesión en el sistema de representación verbal. En los últimos años de la "última década", se da con cierta frecuencia en los libros de texto.

El sistema de representación gráfico se usa con el fenómeno a.s.i, por primera vez, en la década 1970-1979, y desde entonces, ha estado presente en mayor o menor medida en los libros de texto, conjeturando que persiste hoy día.

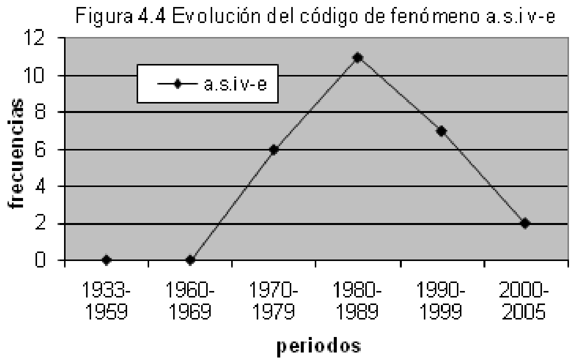
Las ocurrencias del código a.s.i t-e han aumentado en los últimos años analizados; han pasado de una práctica ausencia en los libros de textos a un valor comparable con el del código a.s.i v-e

4.5.2 Evolución de los códigos del fenómeno a.s.i según las décadas

Presentamos la evolución de los códigos del fenómeno a.s.i en función de las décadas, dando prioridad, en los comentarios, a los sistemas de representación. Solamente disponemos de registros correspondientes a cuatro códigos, como se observa en la tabla 4.12 y en la figura 4.3.

4.5.2.1 Representación verbal (a.s.i v-e y a.s.i v-d) en las décadas

La figura 4.4 da la evolución del código de fenómeno a.s.i v-e, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.

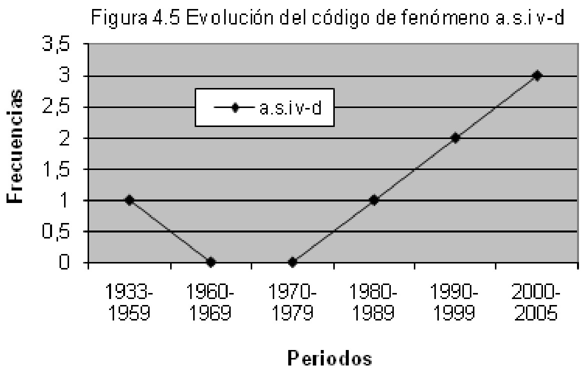


El código del fenómeno a.s.i v-e alcanza su frecuencia máxima en la década 1980-1989.

En los periodos 1933-1959 y 1960-1969, el código del fenómeno a.s.i v-e no se observa en ningún libro estudiado.

En la década 1980-1989 (década de la reforma educativa, previa a la promulgación de la LOGSE), se produce, en los libros de texto, un aumento de la frecuencia del código de fenómeno a.s.i v-e. En los dos períodos que siguen (1990-1999 y 2000-2005), el número de ocurrencias se va reduciendo.

La figura 4.5 da la evolución del código de fenómeno a.s.i v-d, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.



El código de fenómeno a.s.i v-d está poco presente en los libros analizados, ya que el número de ocurrencias por periodo, oscila entre 0 y 3.

El aumento de este código de fenómeno parece coincidir con la promulgación e implantación de la LOGSE, es poco significativo y, en todo caso, ocurre lentamente.

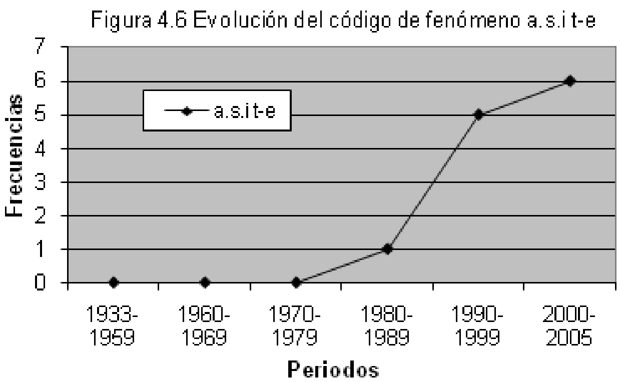
Si comparamos la frecuencia total del código a.s.i v-e (26) con la correspondiente frecuencia del código a.s.i v-d (7):

Observamos una razón de ocurrencias de 4:1, aproximadamente.

Estos resultados sugieren que, *en el fenómeno a.s.i., la representación verbal se usa básicamente para presentar ejemplos de límites de sucesiones*.

4.5.2.2 Representación tabular (a.s.i t-e) en las décadas

La figura 4.6 da la evolución del código de fenómeno a.s.i t-e, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.

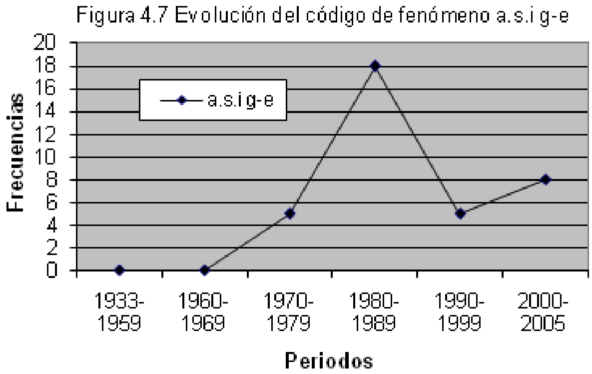


El código de fenómeno a.s.i t-e comienza a observarse en los libros de texto de la década 1980-1989, el número de ocurrencias aumenta progresivamente, desde entonces, y parece bien integrado en los libros de texto.

Pensamos que la promulgación de la LOGSE genera el crecimiento indicado.

4.5.2.4 Representación gráfica (a.s.i g-e) en las décadas

La figura 4.7 da la evolución del código de fenómeno a.s.i g-e, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.



El máximo de ocurrencias del código de fenómeno a.s.i g-e se registra en la década 1980-89. Desde el periodo 1970-79, no deja de ser usado. Aunque no es un dato de la figura 4.7, el código lo hemos registrado en todos los libros que hemos estudiado del periodo 2000-05.

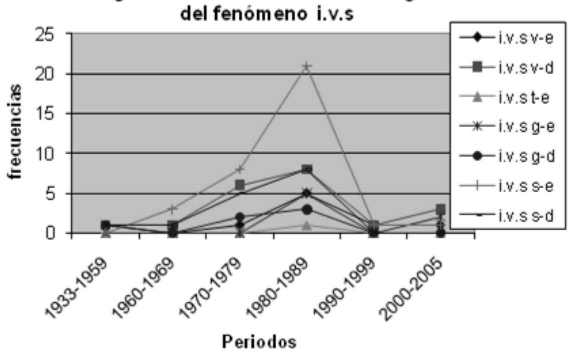
4.5.3 El fenómeno i.v.s en función de las décadas

Presentamos la evolución de los códigos del fenómeno a.s.i en función de los periodos, dando prioridad a los sistemas de representación. Ver la tabla 4.13 y la figura 4.8 (en la página siguiente). En la figura, no se ha incluido el código i.v.s. t-d.

	1933-1959	1960-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2005	Recuento por código de fenómeno
i.v.s v-e	4	1	1	5	1	1	13
i.v.s v-d	3	4	6	8	1	3	25
i.v.s t-e	0	0	0	1	0	0	1
i.v.s t-d	0	0	0	0	0	0	0
i.v.s g-e	0	0	0	5	0	2	7
i.v.s g-d	1	1	2	3	0	0	7
i.v.s s-e	1	4	8	22	1	1	37
i.v.s s-d	2	2	5	8	0	0	17
Recuento por década	11	12	22	52	3	7	107

Tabla 4.13 Códigos del fenómeno i.v.s observados en libros, agregados por décadas

Figura 4.8 Evolución de los códigos del fenómeno i.v.s



El código i.v.s t-d es el único que no registramos con nuestros datos. El código i.v.s. t-e se observa en una sola ocasión.

1980-89 es el periodo de apogeo del fenómeno i.v.s. Hay coincidencia con el periodo de apogeo del fenómeno a.s.i. (Véase tabla 4.12 o figura 4.3.)

El código de fenómeno i.v.s s-d deja de observarse a partir del periodo que se inicia en 1990. Análoga evolución se observa en el código i.v.s. s-e, hallado esporádicamente entre 1990 y 2005 (2 ocurrencias).

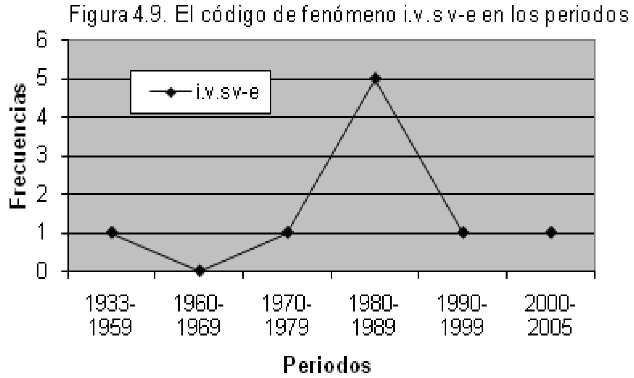
Comparando globalmente los fenómenos a.s.i e i.v.s, observamos que, en el periodo 2000-05 la razón de ocurrencias se acerca 3:1 (19:7 en recuentos); en el periodo 1960-69 la misma razón está próxima a 3:5 (31:52 en recuentos). Con todas las cautelas necesarias, parece sensato concluir que se constata un cambio en la presentación del límite finito de sucesiones en los libros de texto, que ha pasado de recibir un tratamiento basado en el fenómeno i.v.s a estar basado en el fenómeno a.s.i.

4.5.4 Evolución de los códigos del fenómeno i.v.s según las décadas

Presentamos la evolución de cada código de fenómeno i.v.s en función de las décadas, dando prioridad a los sistemas de representación. Disponemos de registros correspondientes a siete códigos, como se observa en la tabla 4.13 y en la figura 4.8, aunque, en algunos casos, el número de ocurrencias es excesivamente bajo.

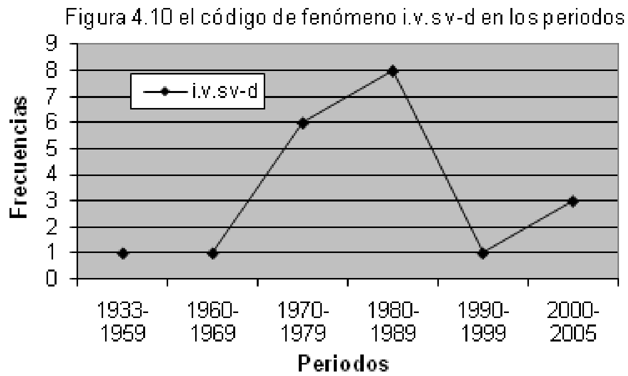
4.5.4.1 Representación verbal (i.v.s v-e é i.v.s. v-d) en las décadas

La figura 4.9 da la evolución del código de fenómeno i.v.s. v-e, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas



> *El código de fenómeno, presente en casi todas las décadas, tiene escasa o nula ocurrencia, excepto en el periodo 1980-89*

La figura 4.10 da la evolución del código de fenómeno i.v.s. v-d, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.



> *El código de fenómeno se observa en todos los periodos y su frecuencia es máxima (8) en el período 1980-89.*

Concluimos que la representación verbal del fenómeno i.v.s parece de largo alcance; recibió su máxima valoración por los autores en el periodo 1980-89.

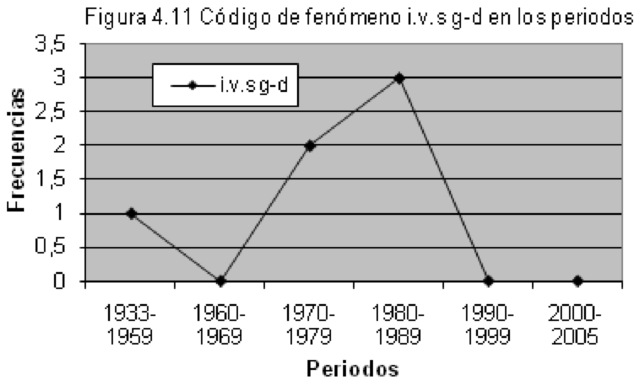
4.5.4.2 Representación tabular (i.v.s t-e é i.v.s. t-d) en las décadas

La tabla 4.13 permite observar que la representación tabular no ha reclamado el interés de los autores de libros de texto. Solamente se registra una ocurrencia (código de fenómeno i.v.s. t-e), en el periodo 1980-89.

4.5.4.3 Representación gráfica (i.v.s. g-e é i.v.s g-d) en las décadas

El código de fenómeno i.v.s. g-e ha sido poco utilizado, a juzgar por la tabla 4.13. Solamente se observa en dos periodos (1980-89 y 2000-05) con las ocurrencias respectivas de 5 y 2.

La figura 4.11 da la evolución del código de fenómeno i.v.s. g-d, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.

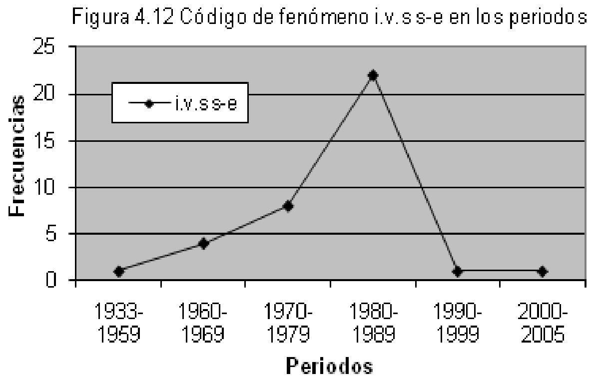


Hay tres décadas en las que el código de fenómeno no se observa y otras tres en que se observa, con un número de ocurrencias que alcanza un máximo de 3 en el periodo 1980-89. En particular, no se observa su uso desde 1990, aunque esto puede ser un efecto de la muestra.

Concluimos que la representación gráfica constituye una vía explorada por los autores de libros de texto; no parece que se considere un sistema de representación decisivo en la enseñanza del límite cuando la definición organiza el fenómeno i.v.s.

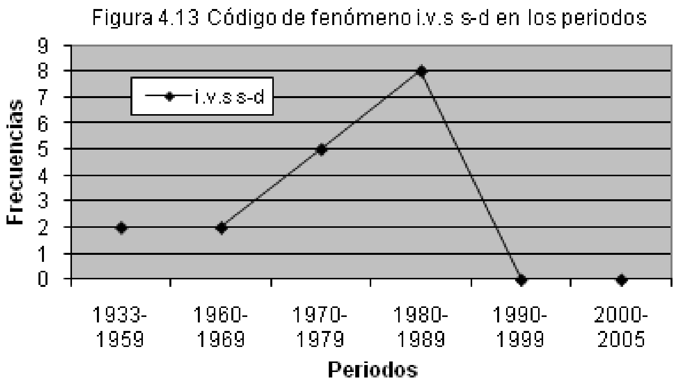
4.5.4.4 Representación simbólica (i.v.s. s-e é i.v.s s-d) en las décadas

La figura 4.12 da la evolución del código de fenómeno i.v.s. s-e, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.



El código de fenómeno i.v.s s-e se observa en todos los periodos, aunque su frecuencia oscila desde 1 (en tres periodos) hasta más de 20 (en el periodo 1980-89).

La figura 4.13 da la evolución del código de fenómeno i.v.s. s-d, según nuestros datos, a lo largo de las diferentes décadas.



Se detecta el código en todas las décadas, hasta la que comienza en 1990, a partir de la cual deja de ser usado en los libros de la muestra. La máxima frecuencia ocurre en el periodo 1980-89.

Comparando los cuatro sistemas de representación entre sí:

Observamos una presencia ininterrumpida del fenómeno i.v.s, si bien el sistema de representación simbólico parece haber sido sustituida por el sistema de representación verbal.

4.5.5. Comparación de fenómenos a.s.i e i.v.s en función de las décadas.

Una primera observación tiene que ver con la constancia de los máximos de frecuencias en el periodo 1980-89, lo que hace pensar que fue un verdadero periodo de experimentación, por parte de los autores de libros de texto, de las diferentes maneras de presentar los fenómenos a.s.i e i.v.s.

Si reunimos los recuentos por décadas de las tablas 4.12 y 4.13, obtenemos la tabla 4.14. En ella se observa cómo, hasta la década 1980-1989, el fenómeno i.v.s supera en frecuencia al fenómeno a.s.i; la preponderancia relativa se invierte a partir de 1990 y perdura hasta 2005. Este cambio coincide en el tiempo con la promulgación de la LOGSE.

	1933-1959	1960-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2005
Fenómeno a.s.i	1	0	11	31	19	19
Fenómeno i.v.s	11	12	22	52	3	7

Tabla 4.14 Recuentos totales por fenómeno en cada periodo

Si este resultado tiene algún interés, lo hemos obtenido, evidentemente, mediante un criterio de organización arbitrario: las décadas.

4.6 Estudio de los fenómenos por periodos. (2º) "Periodos educativos"

La arbitrariedad del criterio basado en décadas, se pone más de manifiesto si se considera el trabajo de Sierra, González y López (1999). Estos autores establecieron, en su estudio sobre el límite de funciones, tres períodos educativos que abarcan desde 1940 hasta 1995. Con objeto de ajustar la idea de estos autores con la muestra de libros manejados, consideraremos cinco periodos educativos y hemos retocado algunos extremos de los periodos para que cada libro quede incluido unívocamente.

- Periodo 1930 y 1939. Desde los años anteriores a la Guerra Civil Española hasta la terminación de ésta. (Periodo introducido por nosotros.)
- Periodo 1940 - 1966. Desde el final de la Guerra Civil Española hasta los primeros textos piloto para la introducción de la matemática moderna.
- Periodo 1967 - 1974. Desde la llamada "matemática moderna" hasta la promulgación del bachillerato unificado y polivalente (B.U.P)
- Periodo 1975 - 1994. Desde el B.U.P hasta el inicio de las modalidades de bachillerato establecidas en la LOGSE.
- Periodo 1995 - 2005. Desde el bachillerato LOGSE hasta la LOCE (2004) y la LOE (2005). (Periodo introducido por nosotros.)

Para reconfigurar la muestra con arreglo a estos periodos, hemos adaptado las dos primeras columnas de la tabla 4.7, como se indica en la tabla 4.15. (Ver página siguiente.)

Por analogía con 4.5, en este apartado estudiamos con más detalle los fenómenos teniendo en cuenta los códigos de fenómeno y los períodos establecidos en la tabla 4.15. Sucesivamente, estudiaremos el fenómeno a.s.i en función de los periodos educativos (4.6.1), la evolución, con dichos periodos, de los códigos de fenómeno a.s.i (4.6.2). Subapartados análogos corresponderán al fenómeno i.v.s (4.6.3 y 4.6.4). Finalmente, compararemos ambos fenómenos (4.6.5).

Periodos educativos	Códigos de libros
1930-1939	LS93001 LS93002 LS93003 LS93004
1940-1966	LS94001 LS96001 LS96002
1967-1974	LS96003 LS96004 LS97001
1975-1994	LS97002 LS97003 LS97004 LS97005 LS97006 LS98001 LS98002 LS98003 LS98004 LS98005 LS98006 LS98007 LS98008
1995-2005	LS99001 LS99002 LS99003 LS99004 LS00001 LS00002 LS00003

Tabla 4.15. La muestra de libros estudiados, organizada por períodos educativos.

4.6.1 Tabla de frecuencias del fenómeno a.s.i

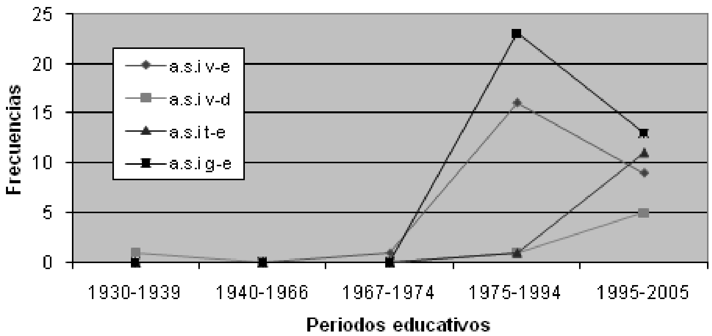
La tabla 4.16 y la figura 4.14 (página siguiente) reflejan la evolución del fenómeno a.s.i en los diferentes sistemas de representación y en los diferentes formatos, a lo largo de los periodos educativos indicados en la tabla 4.15. Hemos usado el siguiente convenio para hacer recuentos y escribir las correspondientes frecuencias: sumamos las ocurrencias para todos los libros que fueron publicados en el mismo período educativo.

En los tres primeros períodos educativos considerados, el fenómeno a.s.i es prácticamente inobservable (2 ocurrencias). En cambio, en los dos últimos periodos, se observa "masivamente" (79 ocurrencias).

	1930-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Recuento por código de fenómeno
a.s.i v-e	0	0	1	16	9	26
a.s.i v-d	1	0	0	1	5	7
a.s.i t-e	0	0	0	1	11	12
a.s.i t-d	0	0	0	0	0	0
a.s.i g-e	0	0	0	23	13	36
a.s.i g-d	0	0	0	0	0	0
a.s.i s-e	0	0	0	0	0	0
a.s.i s-d	0	0	0	0	0	0
Recuento por periodos	1	0	1	41	38	81

Tabla 4.16 Códigos del fenómeno a.s.i observados en libros, agregados por períodos educativos

Figura 4.14 Evolución de los códigos del fenómeno a.s.i



El fenómeno a.s.i solamente se usa para definir el límite de una sucesión en el sistema de representación verbal.

El sistema de representación gráfico se usa con el fenómeno a.s.i, por primera vez, en el periodo 1975-1994, y desde entonces, ha estado presente en mayor o menor medida en los libros de texto, conjeturando que persiste hoy día.

Las ocurrencias del código a.s.i t-e han aumentado en los últimos años analizados; han pasado de una práctica ausencia en los libros de textos a un valor comparable con el del código a.s.i v-e

Estas observaciones son muy similares a las realizadas en 4.4.1. Indicaremos a continuación las principales diferencias que observamos en los códigos de fenómeno (vistos por décadas o por periodos legislativos), cuando se da prioridad a los sistemas de representación.

4.6.1.1 Representación verbal (a.s.i v-e y a.s.i v-d) en los periodos educativos.
La principal diferencia observada en los datos, cuando se agregan por periodos educativos y no por décadas, es la siguiente:

> *Cuando se usa el sistema de representación verbal para presentar el fenómeno a.s.i, en todos los periodos educativos se observa una cierta preferencia hacia el formato ejemplo, frente al formato definición.*

4.6.1.2 Representación tabular (a.s.i t-e) en los periodos educativos
La principal diferencia observada en los datos, cuando se agregan por periodos educativos y no por décadas, es la siguiente:

> *En el periodo 1995-2005, la representación tabular, en el formato ejemplo, ha recibido una considerable atención por parte de los autores, para presentar con su ayuda el límite finito de una sucesión. Con anterioridad, el interés recibido fue prácticamente nulo.*

4.6.1.3 Representación gráfica (a.s.i g-e) en los periodos educativos
La principal diferencia observada en los datos, cuando se agregan por periodos educativos y no por décadas, es la siguiente:

> *Desde 1975, la representación gráfica, en el formato ejemplo, se viene usando con insistencia para presentar con su ayuda una definición intuitiva de límite. La reducción experimentada en el periodo LOGSE con respecto al periodo BUP induce a pensar que la representación gráfica no termina de considerarse una óptima representación para describir el límite finito de una sucesión.*

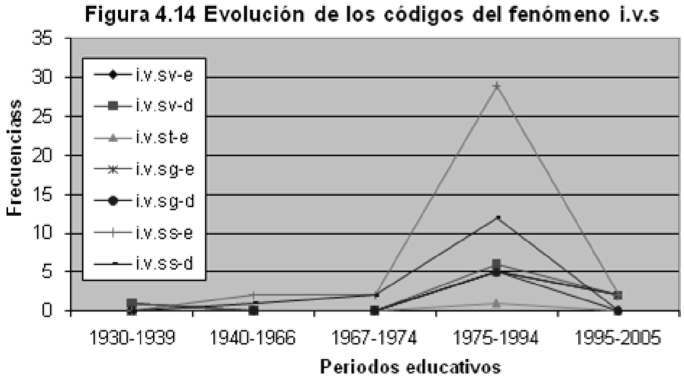
4.6.2 Tabla de frecuencias del fenómeno i.v.s en función de los periodos educativos.

La tabla 4.17 y la figura 4.15 (página siguiente) reflejan la evolución del fenómeno i.v.s en los diferentes sistemas de representación y en los diferentes formatos, a lo largo de los periodos educativos indicados en la tabla 4.15.

	1930-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Recuento por código de fenómeno
i.v.s v-e	4	0	1	6	2	13
i.v.s v-d	3	1	3	14	4	25
i.v.s t-e	0	0	0	1	0	1
i.v.s t-d	0	0	0	0	0	0
i.v.s g-e	0	0	0	5	2	7
i.v.s g-d	0	2	0	5	0	7
i.v.s s-e	1	3	2	29	2	37
i.v.s s-d	1	2	2	12	0	17
Recuento por periodos educativos	7	8	8	72	10	107

Tabla 4.17 Códigos del fenómeno i.v.s observados en libros, agregados por períodos educativos

Figura 4.14 Evolución de los códigos del fenómeno i.v.s



Se mantienen, con la debida adaptación a los periodos educativos, las observaciones enunciadas para las décadas. Las reproducimos, adaptando los periodos.

> *El código i.v.s t-d es el único que no registramos con nuestros datos. El código i.v.s. t-e se observa en una sola ocasión.*

> *1975-95 es el periodo de apogeo del fenómeno i.v.s. Hay coincidencia con el periodo de apogeo del fenómeno a.s.i. (Véase tabla 4.16 o figura 4.13.)*
>
> *El código de fenómeno i.v.s s-d deja de observarse a partir del periodo que se inicia en 1995. Análoga evolución se observa en el código i.v.s. g-d.*
>
> *Comparando globalmente los fenómenos a.s.i e i.v.s, observamos que, en el periodo 1995-2005 la razón de ocurrencias se acerca 4:1 (38:10 en recuentos); en el periodo 1967-74 la misma razón está próxima a 1:8 (en recuentos). Con todas las cautelas necesarias, parece sensato concluir que se constata un cambio en la presentación del límite finito de sucesiones en los libros de texto, el cual ha pasado de recibir un tratamiento basado en el fenómeno i.v.s a estar basado en el fenómeno a.s.i.*

Estas observaciones son muy similares a las realizadas en 4.4.2. Indicaremos a continuación las principales diferencias que observamos, en los códigos de fenómeno (vistos por décadas o por periodos legislativos) cuando se da prioridad a los sistemas de representación.

4.6.2.1 Representación verbal (i.v.s v-e é i.v.s v-d) en los periodos educativos.

La principal diferencia observada en los datos, cuando se agregan por periodos educativos y no por décadas, es la siguiente:

> *Cuando se usa el sistema de representación verbal para presentar el fenómeno i.v.s, desde 1940, en todos los periodos educativas se observa una cierta preferencia hacia el formato definición, frente al formato ejemplo.*

(Para establecer lo anterior, basta comparar las líneas homólogas (i.v.s. v-e é i.v.s v-d) de las tablas 4.13 y 4.17.)

> *Esto es lo contrario de lo que ocurre con el fenómeno a.s.i en el mismo sistema de representación.*

4.6.2.2 Representación tabular (i.v.s t-e) en los periodos educativos

Al darse una sola ocurrencia, no consideramos relevante ninguna observación sobre ella, salvo la de anotar esa ausencia.

4.6.2.3 Representación gráfica (i.v.s g-e é i.v.s g-d) en los periodos educativos

La agregación por periodos educativos induce a pensar:

> *Cuando se usa la representación gráfica para presentar el fenómeno i.v.s hay una especie de "movimiento pendular" según el cual, cuando esta representación despierta el interés de los autores, se pone más énfasis en el formato definición o en el formato ejemplo, pero sin "seguridad" en la potencialidad educativa, como lo atestiguan los periodos en que hay escasa o nula ocurrencia de estos códigos.*

4.6.2.4 Representación simbólica (i.v.s s-e é i.v.s s-d) en los periodos educativos

En esta representación, la agregación de códigos de fenómenos por periodos educativos no genera ninguna diferencia con las observaciones enunciadas en 4.5.4.4.

4.7 Avances provisionales

Anotamos discrepancias de planteamiento del límite finito de una sucesión, por parte de los autores de los libros consultados. Así, frente a textos de orientación más formal, como LS96001, LS94001 o LS98006, que emplean básicamente el fenómeno i.v.s, encontramos otros textos de orientación más intuitiva como LS99003, LS99004, LS0003, que emplean básicamente el fenómeno a.s.i.

El uso de estos dos fenómenos ha variado a lo largo del tiempo en los libros de texto, pero no hemos encontrado diferencias significativas al realizar la agrupación de los libros entre los periodos que denominamos "décadas" y los que denominamos "periodos educativos".

Si nuestra muestra fuera representativa, lo esencial de lo observado en el estudio de los libros de texto podría reducirse a tres etapas temporales que pasamos a resumir.

(1) Hasta los años 70, el fenómeno i.v.s fue el más usual en los libros de texto; muchos de éstos, ni siquiera apelaban a intuición alguna. (Por ejemplo, en el periodo 1933-1959, el fenómeno a.s.i se observa en uno solo de los cinco libros analizados y con una sola ocurrencia.)

(2) Durante los años 80, ocurren variadas experiencias que, vistas *a posteriori*, evidenciaron o anunciaron el cambio que se iba a producir en los libros de texto y que, en la práctica, consiste en la sustitución del fenómeno i.v.s por el fenómeno a.s.i para presentar y definir el límite finito de una sucesión. El libro que hemos codificado como LS98008 es, en nuestra opinión, exponente del problema de decisión afrontado por los autores. En él, hallamos los fenómenos i.v.s y a.s.i con la misma frecuencia (3).

(3) Desde los años 90, vamos observando un uso creciente del fenómeno a.s.i en detrimento del fenómeno i.v.s, y una correlativa lenta reducción de los sistemas de representación hasta detectarse la preponderancia del sistema de representación verbal.

El enunciado de motivos por los que, a lo largo de los últimos 80 años, los libros de texto pasan (o parecen pasar), en la presentación del límite finito de una sucesión, de un estilo formal a un estilo intuitivo en el que se usan diferentes sistemas de representación para enunciarlo, exigiría un estudio histórico del lapso temporal, estudio que no hemos realizado; sin embargo nos permitimos avanzar posibles explicaciones, no incompatibles entre sí: las leyes educativas aprobadas, la poca aplicación extra escolar que los alumnos de Secundaria hallan de la definición formal y la dificultad inherente a la presentación formal de dicha definición. Si la última fuera aceptable, nos inclinaríamos a explicarla con ayuda de la fenomenología: el conocimiento de los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión posiblemente es anterior al dominio de ésta. Sin embargo, nos limitamos a anotar el cambio producido y descrito.

Por otro lado, no tenemos que perder de vista que nuestro objetivo en este capítulo se ha visto cumplido. Queríamos observar la presencia de los fenómenos a.s.i e i.v.s en los libros de texto y hemos tenido la oportunidad de observar ambos fenómenos en diferentes sistemas de representación y formatos.

Nos preguntamos también si los alumnos usan estos fenómenos (y cómo lo hacen, en su caso) cuando tienen que responder a cuestiones relacionadas con el límite finito de una sucesión. De esta nueva cuestión se ocupa el capítulo 5º, en el que desarrollamos un estudio experimental realizado con alumnos de 1º y 2º de bachillerato de diferentes institutos de la comunidad de Madrid. Para hacerlo, nos hemos visto inclinados a considerar con más detalle las presentaciones de los fenómenos a.s.i e i.v.s que observamos en los libros del periodo 2000-2005, por ser los más cercanos en el tiempo al estudio realizado por los alumnos.

Anexo 4.1 Fenómenos hallados en cada libro

Este inevitablemente extenso anexo, conectado con las explicaciones dadas en los apartados 4.2 y 4.3, contiene el resultado de nuestra búsqueda de fenómenos a.s.i e i.v.s en libros de texto.

El desarrollo de los diferentes guiones constituye una secuencia cronológica, que hemos estructurado con ayuda de los períodos indicados en la tabla 4.7.

A4.1.1 Periodo 1933-1959

En este periodo se han analizado cinco libros de texto de los años ‘30 y ‘40. Dos de estos libros se encuentran ubicados en el IES “Pedro Espinosa” (Antequera, Málaga), el resto fueron localizados en la Biblioteca Nacional de España (Madrid). Queremos subrayar que la posibilidad de encontrar libros “antiguos” en los IES es pequeña, dado que éstos son, en su mayoría, mucho más recientes que aquéllos.

Por razones organizativas, cada libro se inicia en una página nueva. Con objeto de ganar espacio, el contenido se ha preparado a espacio sencillo. Hemos modificado los colores de las reproducciones, que se dan aquí en blanco y negro o escala de grises.

LS93001Ficha

Código	LS93001
Autor	Rey Pastor, J.
Titulo	Curso Cíclico de Matemáticas. Cálculo Infinitesimal. Tomo II
Editorial	Ruiz de Lara, Cuenca
Año	1933
Ubicación	Biblioteca Nacional
Información sobre límite	Capítulo I. Límites e infinitésimos. Páginas 1-9

LS93001. Secuenciación

1) Números racionales: Paso de fracción a decimal. Se seleccionan fracciones que tengan una expresión decimal infinita (periódico puro y periódico mixto). Veáse 2.1
2) Números decimales con expresiones infinitas no periódicas: por ejemplo π.
3) Presentación de las funciones como "sucesiones *continuas*".
4) Definición general del límite en el caso de sucesiones y funciones. En un intento por unificar la definición de límite tanto para sucesiones como para funciones, estas últimas son definidas como sucesiones continuas, en la que los valores de la sucesión están ordenados en correspondencia con los puntos de un segmento. Las sucesiones son definidas como "sucesiones discretas". Cuando se calcule el límite de una sucesión habrá que indicar el valor al que tiende la variable independiente que puede ser infinito (para sucesiones discretas) o un valor concreto (para sucesiones continuas). Véase 2.4
5) Definición de infinitésimos y propiedades de éstos
6) Cálculo de límites: límite de la suma y del producto, utilizando infinitésimos.
7) Aplicaciones de los infinitésimos y del límite en las ciencias físicas.

LS93001. Fenómenos observados

<u>LS93001.01 i.v.s v-e.</u> Se construye la función ε-N_0, se usa el sistema de representación verbal y el fenómeno aparece bajo el formato ejemplo.

> y cualquiera que sea el número de cifras 0,33...3 que se tomen, el número decimal nunca vale exactamente $\frac{1}{3}$, pero se va aproximando a $\frac{1}{3}$ y llega a diferir de $\frac{1}{3}$ tan poco como se quiera. Esto se expresa diciendo: el número *variable* $0,3\overset{n}{3\ldots}3$ *tiende* hacia $\frac{1}{3}$ o *tiende como límite* $\frac{1}{3}$, o *converge* hacia $\frac{1}{3}$, y se escribe así:
>
> $$\lim_{n\to\infty} 0,3\overset{n}{3\ldots}3 = \frac{1}{3},$$

LS93001. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial.	Línea Final.	Código-ubicación.	Fenómeno
I	1	No	9	15	LS93001.01	i.v.s verbal ejemplo

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs	LS93001.01							
	e	d	e	d	e	d	e	d

Comentario: Como se dijo más arriba, Rey Pastor propuso unificar las definiciones de límite de sucesión y de funciones.

LS93002. Ficha

Código	LS93002
Autor	Félix Alonso Misol
Titulo	Elementos de Análisis Matemático y sus aplicaciones. Libro Primero: Teoría general de funciones y derivadas
Editorial	Sucesores de Rivadeneyra, Madrid
Año	1934
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera (Málaga)
Información sobre límite	Capítulo IV. Elementos de la teoría de límites. Páginas: 92-97

LS93002. Secuenciación.

1) Definición de límite finito de una sucesión. Comienza el apartado con una definición intuitiva de lo que se va a entender como límite de una variable y a continuación se prepara al lector para la definición formal. Se puntualiza en el apartado que se puede entender la aproximación al límite tanto por la derecha como por la izquierda o en ambos sentidos, y para ello se utilizan ejemplos como el límite de las áreas de polígonos regulares inscritos en una circunferencia, y las reducidas de una fracción continua ilimitada. Para terminar el apartado se toma un ejemplo en el que se calcula el límite utilizando la definición formal, y se propone otro pero que no se acompaña de la demostración. Véase LS93002.01.01, LS93002.01.02 y LS93002.01.03
2) Definición de límite infinito y de límite cero de una sucesión, a los que llamará infinitesimales.
3) Observaciones a la definición de límite de sucesiones: el límite puede pertenecer o no a la sucesión, nos acercamos al límite de manera continua o dando saltos.

LS93002. Fenómenos observados

<u>LS93002.01.01 a.s.i v-d.</u> Se trata de una aproximación simple intuitiva, no se construye la función ε-N_0, aparece en el sistema de representación verbal y bajo el formato definición.

§ 55. **Limite de una variable.**—La definición más elemental de límite de una variable x es la siguiente: Diremos que una cantidad constante a es el *límite* hacia el cual *tiende* o *converge* una variable x cuando esta variable adquiere valores que cada vez se aproximan más a la constante a y desde un cierto momento, el valor absoluto de la diferencia $x - a$ concluye por tender *definitivamente* hacia cero. Ahora

<u>LS93002.01.02 i.v.s v-d.</u> Se trata de una "ida - vuelta", se usa el sistema de representación verbal y el fenómeno aparece bajo el formato definición.

En el (2.) de los casos considerados, imaginemos una *sucesión infinita* de elementos, que suponemos *reales*, en un orden determinado,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$$

Diremos que los *números de esta sucesión tienden hacia un límite a*, cuando la diferencia

$$|x_n - a|$$

concluye por ser definitivamente menor que cualquier cantidad asignable ε a partir de un valor convenientemente grande del *índice* n, o sea que dada una cantidad *arbitrariamente pequeña* ε se puede hacer corresponder un entero N tal que se tenga

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

para todo valor de n superior a N.

LS93002.01.03 i.v.s v-e. Se trata de una "ida - vuelta", se usa el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

$$x = a + \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{n\pi}{2}$$

Como la diferencia $|x - a|$ termina por ser constantemente menor que una cantidad arbitrariamente pequeña ε para un valor conveniente de n, se ve que a es, en efecto, el límite de x, y este límite lo alcanza infinitas veces.

LS93002.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IV	92	(No)	1	6	LS93002.01.01	a.s.i v-d
	93	(No)	1	12	LS93002.01.02	i.v.s v-d
	95	(No)	1	4	LS93002.01.03	i.v.s v-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi		LS93002.01.01						
ivs	LS93002.01.03	LS93002.01.02						
	e	d	e	d	e	d	e	D

LS93002. Comentario

En este libro observamos tres códigos de fenómenos: dos del tipo i.v.s y uno del tipo a.s.i. Los tres se expresan de modo básicamente verbal; dos, en formato definición y uno en el formato ejemplo.

LS93003. Ficha

Código	LS93003
Autor	Martín Robles, I.
Titulo	Elementos de Matemáticas (Cuarto Curso)
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1936
Ubicación	Biblioteca Nacional
Información sobre límites	Capítulo XI. Los números reales. Pp. 63-67.

LS93003. Secuenciación

1) Definición de sucesión como números variables. Si los valores que toma la sucesión hablaremos de variable creciente, mientras que en caso contrario hablaremos de variable decreciente.
2) Definición de sucesión que crece indefinidamente y sucesión que crece infinitamente y ejemplos de las mismas.
3) Definición de número infinitamente pequeño y número infinitamente grande.
4) Definición de límite de una sucesión, donde se excluye el caso de que la sucesión sea constante. La definición de límite que se presenta no es muy clara.
5) Ejemplos de sucesiones que tienen límite Véase LS93003.01 y LS93003.02.
6) Definición de límite superior y límite inferior. El límite superior es definido como el límite que es mayor que todos los valores que toma la variable, mientras que el límite inferior es definido como el límite que es menor que todos los valores que toma la variable.

LS93003. Fenómenos observados

<u>LS93003.01. i.v.s v-e.</u> Se trata de una "ida- vuelta" porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

1.º La sucesión

$$0,7;\ 0,77;\ 0,777;\ldots$$

tiene por límite $\frac{7}{9}$, pues la diferencia $0,777\ldots - \frac{7}{9}$ tiende a ser menor que cualquier número finito por pequeño que sea, pudiendo escribirse:

$$\frac{7}{9} = \text{límite } 0,(7)$$

<u>LS93003.02. i.v.s v-e</u>. Se trata de una "ida- vuelta" porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

2.º La sucesión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\ \cdots\ \frac{1}{2^n}\cdots$$

tiene por límite 0, pues la diferencia

$$\frac{1}{2^n} - 0 = \frac{1}{2^n}$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera:

LS93003. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inic.	Línea Fin.	Código-ubicación	Fenómeno
XI	65	No	21	23	LS93003.01	i.v.s v-e
	66	No	1	3		
			4	8	LS93003.02	i.v.s v-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs	LS93003.01 LS93003.02							
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

En este libro se observa solamente el fenómeno i.v.s expresado en el sistema de representación verbal. No se alude a la aproximación intuitiva, ni siquiera en los ejemplos. El hecho de que esto sea así responde, pensamos, a la importancia que en aquellos años se dio al desarrollo formal de los conceptos matemáticos. Por otro lado, pensamos que la definición de límite que se da es poco clarificadora del concepto; la sucesión se define como números variables y no como aplicación de N en R.

LS93004. Ficha

Código	LS93004
Autor	Baratech Montes, Benigno y Zalama Miguel Carmen
Titulo	Matemáticas sexto curso del bachillerato.
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1938
Ubicación	Biblioteca Nacional
Información sobre límites	Capítulo I. Los número reales. Páginas 3-30.

LS93004.Secuenciación

1) Definición de sucesión con límite finito a, y se presenta un ejemplo teórico de sucesión con límite uno, que no se realiza con detalle. Véase LS93004.01
2) Definición de sucesión constante y cálculo del límite de una sucesión constante. A continuación se presenta un ejemplo relativo a esto.
3) Definición de infinitésimo como sucesión con límite cero y ejemplo de algún infinitésimo. Véase LS93004.03
4) Definición de sucesión con límite +∞ y -∞. Se definen y sobre este último se realiza un ejemplo
5) Definición de sucesión convergente, divergente, y oscilante.
6) Teoremas relativos al límite: unicidad, sucesiones monótonas, etc.
7) Operaciones con límites: suma, resta multiplicación y división.

LS93004.Detalle de los fenómenos observados.

<u>LS93004.01. i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida- vuelta" porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

> **Así, diremos:**
> *De una sucesión indefinida de números reales.*
>
> $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ a_n\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
>
> *se dice que tiende a un límite* a, *o que tiene por límite el número real fijo* a, *cuando la diferencia* $a - a_n$ *puede ser, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera desde un valor de* n *en adelante.*

<u>LS93004.03. i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta" verbal en definición porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

> 33. **Infinitésimo.**—*El límite de una sucesión será cero cuando en ella se pueda hallar un término, a partir del cual todos los restantes son menores, en valor absoluto, que cualquier número positivo dado.*

LS93004. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial.	Línea Final.	Código-ubicación.	Fenómeno
I	21	No	5	10	LS93004.01	i.v.s v-d
	22	No	9	12	LS93004.03	i.v.s v-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs		LS93004.01 LS93004.03						
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

En este libro se observa que el fenómeno de ida-vuelta se presenta verbalmente. No hay alusión a la aproximación intuitiva, ni siquiera en los ejemplos.

LS94001. Ficha

Código	LS94001
Autor	F. Navarro Borrás y Sixto Ríos
Titulo	Curso Preliminar de Análisis Matemático
Editorial	Stylos (Madrid)
Año	1944
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera (Málaga)
Información sobre límites	Capítulo I. Sucesiones numéricas, Apartado 7. Límites 10-13. Apartado 8. Propiedades fundamentales de los limites 13-15

LS94001. Secuenciación

1) Comienza el apartado calculando algunos términos de la sucesión $a_n = 2+1/n$ y a partir de ésta se construye otra en la que cada término es el de la sucesión anterior menos 2. Se presentan dos definiciones de límite de una sucesión: la primera definición emplea infinitésimos, y la segunda emplea ε-N. Véase LS94001.01
2) Se presenta una gráfica en la que aparece la franja ε-η,ε+η y los supuestos términos de una sucesión, desde un lugar en adelante, dentro de esa franja. Esta gráfica incluye una explicación de lo que quiere representar. Véase LS94001.02. Se da como ejemplo la sucesión $y_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$; se afirma que tiene por límite 1.
3) El resto de los apartados están dedicados a propiedades fundamentales de los límites. (Criterio del sándwich, monotonía y acotación) y ejemplos en los que se aplican las propiedades fundamentales

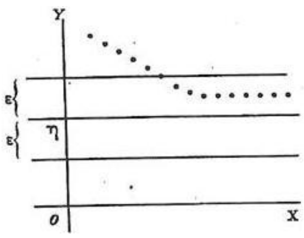
LS94001. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS94001.01 i.v.s s-d</u>. Se trata de una “ida- vuelta” porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

El número η se dirá límite de la sucesión $\{y_n\}$ *si dado un número* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño, se puede determinar un número* N *de modo que para* $n > N$ *sea :*

$$|y_n - \eta| < \varepsilon$$

<u>LS94001.02 i.v.s g-d</u>. Se trata de una “ida- vuelta” gráfico en definición porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



LS94001. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	11	No	12	15	LS94001.01	i.v.s s-d
		Si	16	21	LS94001.02	i.v.s g-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs				LS94001.02				LS94001.01
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>
En este libro observamos solamente el fenómeno i.v.s en el formato definición; lo que cambia de una ocurrencia a la otra es el sistema de representación utilizado: gráfico, en un caso y simbólico, en el otro.

A4.1.2 Periodo 1960-1969

Hemos analizado cuatro libros de texto de los años 1963 y 1969. Dos, se hallaron en el IES “Pedro Espinosa” (Antequera, Málaga) y otros dos se localizaron en la Biblioteca Nacional de España. Queremos subrayar, como en el periodo anterior, la dificultad para encontrar libros tan antiguos, ya que la mayoría de los institutos en los que hemos trabajo como docentes tenían una antigüedad menor de 30 años.

LS96001. Ficha

Código	LS96001
Autor	J. Rey Pastor, A. De Castro Brzezicki
Titulo	Elementos de Matemáticas
Editorial	Saeta. Madrid
Año	1963
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera (Málaga)
Información sobre límites	Fascículo II. Capítulo XI. Sucesiones numéricas. Páginas: 246-267

LS96001. Secuenciación

1) El capítulo comienza con un primer apartado titulado “limite de sucesiones de números reales”, en el que se define lo que es una sucesión y se dan algunos ejemplos.
2) Definición de límite de una sucesión. Véase LS196001.02
3) Se presentan cinco ejemplos: $\{1/n\}$, $\{1/2^n\}$, $\{0.79, 0.799, 0.7999...\}$, $\{(n+1)/n\}$, $\{(-1)^n/n\}$. Véase LS196001.03.01 y LS196001.03.02
4) Propiedades de los límites finitos. Se presentan varios teoremas: teorema fundamental, teorema de sándwich, etc.
5) Cálculo de límites. En este apartado se presentan las siguientes propiedades del cálculo de límites: límite de una suma, límite de un producto, límite de un cociente y límite de los logaritmos y potencias

LS96001. Detalle de los fenómenos observados

LS96001.02 i.v.s v-d. Se trata de una “ida- vuelta”, se usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Una sucesión infinita $|\alpha_n|$ se dice que *tiende al límite* α, o *tiene el límite* α, o *converge hacia* α, si la diferencia $\alpha_n - \alpha$ llega a ser tan pequeña como se quiera en valor absoluto, tomando α_n bastante avanzado. En términos más precisos:

Se dice que α es el límite de la sucesión $|\alpha_n|$, cuando dado un número positivo cualquiera ε, existe un valor $n = \nu$ tal, que para α_ν y todos los términos siguientes, la diferencia $\alpha_n - \alpha$ (o la $\alpha - \alpha_n$) es en valor absoluto menor que ε. Es decir:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon, \quad |\alpha_{\nu+1} - \alpha| < \varepsilon, \quad |\alpha_{\nu+2} - \alpha| < \varepsilon, \ \ldots$$

LS96001.03.01 i.v.s s-e. Se trata de una “ida- vuelta”, se usan el sistema de representación simbólico y el ejemplo.

1. La sucesión

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots,$$

tiene por límite cero; pues la diferencia es $\frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon$, tomando $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Por ejemp es $\frac{1}{n} < 0{,}01$ desde el término que ocupa el lugar 101 en adelante.

Escribiremos, pues: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

LS96001.03.02 i.v.s s-e. Se trata de una “ida- vuelta”, se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo. (Véase fragmento en la página siguiente.)

2. También tiene el límite 0 la sucesión

$$\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}: \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \ldots,$$

pues $\frac{1}{2^n} - 0 = \frac{1}{2^n}$ puede hacerse tan pequeño como se quiera; por ejemplo, será $\frac{1}{2^n} <$ $< 0{,}001$ desde el momento en que sea $2^n > 1000$, es decir, desde $n = 10$ en adelante. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

LS96001.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XI	246	No	10	21	LS96001.02	i.v.s v-d
			30	31	LS96001.03.01	i.v.s s-e
	247	No	1	22	LS96001.03.02	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs		LS96001.02					LS96001.03.01 LS96001.03.02	
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

Solamente se observa el fenómeno i.v.s. Los sistemas de representación usados son el simbólico o el verbal, y los formatos, ejemplo o definición, prevaleciendo, no obstante, el primero.

LS96002. Ficha

Código	LS96002
Autor	Sixto Ríos, A. Rodríguez Sanjuan
Titulo	Matemáticas sexto curso de bachillerato. Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1966
Ubicación	Biblioteca Nacional
Información sobre límites	Capítulo IV. Nociones sobre límites. Páginas 30-35.

LS96002. Secuenciación

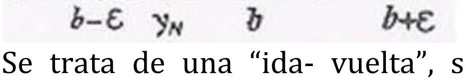
1) Se presentan dos ejemplos de sucesiones numéricas: una progresión aritmética (a_n=2n-1) y una geométrica ($a_n = 2^{n-1}$).
2) Definición de sucesión de números reales, como un conjunto de números reales que asocia a cada número natural n otro número y_n.
3) Se presentan dos ejemplos de sucesiones de números reales:
$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad b_n = \frac{n}{n+1}$$
4) Representación en la recta real de dos ejemplos de sucesiones numéricas.
5) Definición de sucesión infinitésima y presentación de varios ejemplos que son sucesiones infinitésimas: $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ y $a_n = \frac{1}{n}$
6) Definición de sucesión convergente en término de infinitésimos
7) Definición formal de sucesión convergente. Véase LS96002.07.
8) Representación gráfica de una sucesión convergente e interpretación de la misma. Véase LS96002.08.
9) Ejemplo de ejercicio en el que se emplea la definición formal. Véase LS96002.09.

LS96002.Detalle de los fenómenos observados.

LS96002.07. i.v.s s-d. Se trata de una "ida- vuelta" porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

El número b *se dirá límite de la sucesión* y_n *si dado un número* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño, se puede determinar un número* N, *de modo que para* $n \geq N$ *sea* $|y_n - b| < \varepsilon$.

LS96002.08. i.v.s g-d. Se trata de una "ida- vuelta", se usa el sistema de representación gráfico y el formato definición.



LS96002.09. i.v.s s-e. Se trata de una "ida- vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

$$\left| - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

LS96002. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial.	Línea Final.	Código-ubicación.	Fenómeno
IV	33	No	15	17	LS96002.07	i.v.s s-d
	33	Sí			LS96002.08	i.v.s g-d
	34	No	3	3	LS96002.09	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs				LS96002.08			LS96002.09	LS96002.07
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

Solamente se observa el fenómeno i.v.s, sin que haya alusión a la aproximación simple intuitiva. Suponemos que esto responde a la importancia que en aquellos años se daba al desarrollo formal de los conceptos matemáticos.

LS96003. Ficha

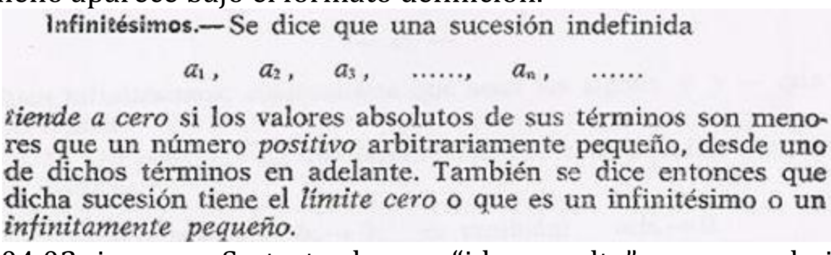
Código	LS96003
Autor	Pérez Carranza, Emilio
Titulo	Matemáticas. Sexto Curso.
Editorial	Summa
Año	1969
Ubicación	Biblioteca Nacional
Información sobre límites	Capítulo 4. Nociones sobre límites. Págs. 22-31.

LS96003. Secuenciación.

1) Definición de sucesión de números racionales. Se presentan varios ejemplos en los que se deducen sus términos generales.
2) Definición de sucesión con límite cero. Una sucesión con límite cero es definida como un infinitésimo. A continuación se presentan varios ejemplos de sucesiones con límite cero. Se vuelve a aclarar qué se entiende por sucesión con límite cero.
3) Propiedades de los infinitésimos o sucesiones con límite cero. Una vez definido un infinitésimo, se enuncian varias propiedades de éstos: el producto de un infinitésimo por un número es otro infinitésimo, la suma general de varios infinitésimos es otro infinitésimo, etc.
4) Definición de sucesión con límite a. Se define por el hecho de que la diferencia entre los términos de la sucesión y el límite tiende a cero y por lo tanto es un infinitésimo. Se presenta, como aclaración a la definición de límite presentada anteriormente una definición más formal de límite de una sucesión. Dentro de este mismo apartado se presentan varios ejemplos de sucesiones que tienen límite. Véanse LS96003.04.01, LS96003.04.02, LS96003.04.03 y LS96003.04.04
5) Propiedades de los límites. Se presentan varias propiedades relativas a los límites, tales como la de que el límite de una sucesión es único.
6) Definición de límite infinito de una sucesión, y ejemplos de sucesiones con límite +∞ y -∞.
7) Ejercicios. Están dedicados a continuar sucesiones y a calcular límites finitos e infinitos.

LS96003. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS96003.04.01. i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida- vuelta" verbal en definición porque se construye la función ε-N_0, se usa el sistema de representación verbal y el fenómeno aparece bajo el formato definición.



Infinitésimos.— Se dice que una sucesión indefinida

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots\ldots, \quad a_n, \quad \ldots\ldots$$

tiende a cero si los valores absolutos de sus términos son menores que un número *positivo* arbitrariamente pequeño, desde uno de dichos términos en adelante. También se dice entonces que dicha sucesión tiene el *límite cero* o que es un infinitésimo o un *infinitamente pequeño.*

<u>LS96003.04.02. i.v.s v-e.</u> Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

EJEMPLOS: 1) La sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{(supuesto que es } n = 1, 2, \dots)$$

En efecto: dado un número arbitrariamente pequeño, tal como 0'001, bastará que en a_n pongamos $n = 1001, 1002, \dots,$ para que *todos* los términos que se obtengan sean menores que 0,001. Es decir:

$$\frac{1}{n} < 0{,}001 \quad \text{para} \quad n > 1000$$

Escribiremos, pues:

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

<u>LS96003.04.03.i.v.s v-d.</u> Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación verbal y el formato definición. Véase la figura anterior, a partir de la cual, el autor continúa así:

En general, $a_n \to 0$ ó $\lim a_n = 0$, si dado el número positivo p, arbitrariamente pequeño, se verifica: $|a_n| < p$, para todos los valores de n, mayores que cierto número natural n_1.

<u>LS96003.04.04 i.v.s v-d.</u> Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación verbal y el formato definición. Aún con referencia a la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, el autor continúa: "prefijado un número"

positivo p, arbitrariamente pequeño, se verificará:

$$|x_n| = |a_n - a| < p$$

para todos los valores de n mayores que cierto número n_1.

LS96003.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial.	Línea Final.	Código-ubicación	Fenómeno
IV	23	No	1	5	LS96003.04.01	i.v.s v-d
	23	No	10	17	LS96003.04.02	i.v.s v-e
	23	No	28	30	LS96003.04.03	i.v.s v-d
	26	No	1	9	LS96003.04.04	i.v.s v-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs	LS96003.04.02	LS96003.04.01 LS96003.04.03 LS96003.04.04						
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

En este libro incluye solamente el fenómeno i.v.s y usa nada más que la representación verbal

LS96004. Ficha

Código	LS96004
Autor	Pedro Abellanas Cebollero, Joaquín García Rúa, Alfredo Rodríguez Labajo, Juan Casulleras Regas, Francisco Marcos de Lanuza
Titulo	Bachillerato superior, Matemática Moderna, 6º Curso
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1969
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera (Málaga)
Información sobre límites	(Inmerso en Capítulo I.) Complementos a la teoría del número real. Apartado IV. Límites de una sucesión Páginas 14-16

LS96004.Secuenciación.

1) Definición formal de sucesión con límite cero a la que llama *sucesión nula.* El autor lo enuncia de la siguiente manera: “*Elegido arbitrariamente un número racional* ε, *existe un número racional v, dependiente de* ε, *tal que todos los números* a_n *de la sucesión posteriores a un lugar determinado n>v, verifican* $|a_n|<\varepsilon$”. Véase LS96004.01
2) A continuación se presenta un ejemplo de sucesión nula: 1, ½, 1/3, ¼,… El autor lo enuncia de la siguiente manera: “*1, ½, 1/3, ¼,…, es una sucesión nula, puesto que basta tomar* $n>1/\varepsilon$ *para que sea* $1/n<\varepsilon$”. Véase LS960004.02
3) Propiedades de las sucesiones nulas. Propiedades del producto y de la suma de dos sucesiones nulas.
4) Definición de límite finito de una sucesión usando el concepto de sucesiones nulas.
5) Ejemplo de sucesión. (n+1)/n con límite 1, basándose en que 1/n es una sucesión nula.
6) Demostración: Si una sucesión a_n tiene limite a, entonces la diferencia $| a_n – a| <\varepsilon$
7) Definición de sucesión convergente.
8) Demostración de que toda sucesión convergente es acotada.
9) Definición de sucesiones convergentes equivalentes, como sucesiones que tienen el mismo límite.

LS96004.Detalle de los fenómenos observados

<u>LS96004.01 i.v.s s-d</u> Se trata de una “ida - vuelta” porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Elegido arbitrariamente un número racional positivo ε, existe un número racional ν, dependiente de ε, tal que todos los números a_n de la sucesión, posteriores a un lugar determinado $n > \nu$, verifican

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Tales sucesiones de números racionales se llaman *sucesiones nulas*.

<u>LS96004.02 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

es una sucesión nula, puesto que basta tomar $n > \frac{1}{\varepsilon}$ para que sea

$\frac{1}{n} < \varepsilon$.

LS96004. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	13	No	12	15	LS96004.01	i.v.s. s-d
			16	19	LS96004.02	i.v.s. s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs							LS96004.02	LS96004.01
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

En este libro solamente se observa el fenómeno i.v.s. El único sistema de representación empleado es simbólico, aunque se observan los dos formatos.

Sierra, González y López (1999) señalan que en 1962 se constituyó la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre las Matemática Moderna en los institutos Nacionales de Enseñanzas Medias, la cual editó en 1967 y 1969 dos textos piloto para 5º y 6º de bachillerato.

Estos libros supusieron una ruptura con la etapa anterior; sirvieron de base para los nuevos programas de matemáticas basados en la teoría de conjuntos y los enfoques bourbakistas.

A4.1.3 Periodo 1970-1980

En este periodo se han analizado seis libros de texto: uno de 1974, cuatro de1976 y uno de 1977. Los libros se encuentran ubicados en los institutos "Cristóbal de Monroy", situado en la localidad sevillana de Alcalá de Guadaira y "Pedro Espinosa", situado en la localidad malagueña de Antequera. En 1975 se produjo la implantación del BUP (bachillerato unificado polivalente), que perduró hasta la promulgación de la LOGSE.

LS97001. Ficha

Código	LS97001
Autor	Original: C.W. Lucas y R. T. James. Traducción: Susana Blumovicz de Siperstein y Santiago Alonso
Titulo	Matemáticas I
Editorial	U.T.E.H.A. (México)
Año	1974
Ubicación	I.E.S "Cristóbal de Monroy" (Alcalá de Guadaira, Sevilla)
Información sobre límites	Capítulo V. Páginas 97-109

LS97001. Secuenciación

1) El capítulo comienza con dos problemas. El primero, trata de calcular la velocidad en un instante determinado y el segundo, trata de hallar el área de un círculo que está contenido en un cuadrado de lado 2 y tiene en su interior un cuadrado de lado $\sqrt{2}$.
2) Presentación de varios ejemplos para introducir el concepto de límite. Véase LS97001.02
3) Definición de límite finito de una sucesión. Véase LS97001.03
4) Empleo de la definición de limite finito en dos ejemplos: (1) $S_n = 2 - (1/2)^{n-1}$ (2) $S_n = (n+1)/n$. Véanse LS97001.04.01 y LS97001.04.02
5) Se enuncian sin demostración 4 teoremas que intentan simplificar los cálculos de límites. Se trabaja con S_n y T_n, dos sucesiones, y S y T, sus sumas, si existen. C es una constante.

LS97001. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS97001.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

iii) Si $s = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ entonces $S_n = \dfrac{1[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$.

El panorama es bastante distinto en iii). Cuanto mayor sea el valor de n, tanto menor será el valor de $(\frac{1}{2})^{n-1}$, de modo que S_n se acerca cada vez más a 2. En este caso, decimos que *la suma, S,* de toda la sucesión (s) era 2, o sea, que *el límite de la suma parcial,* S_n, a medida que n se hace cada vez mayor, era 2. En forma simbólica esto puede expresarse

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2.$$

<u>LS97001.03 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Definición 5.1

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *si, al tomar* n *suficientemente grande,*

$$|S_n - S| < \varepsilon, \quad \textit{donde} \quad \varepsilon > 0,$$

pero tan pequeño como se quiera.

<u>LS97001.04.01 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplo 1

Considérese la parte iii) nuevamente. Utilizando nuestra pequeña ración de sentido común podíamos haber elegido $S = 2$.

Por nuestra definición debe ser posible, ya que

$$|S_n - 2| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow \quad |2 - \tfrac{1}{2}^{n-1} - 2| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}^{n-1} < \varepsilon.$$

Esto es cierto puesto que si $\varepsilon = \frac{1}{32}$, $n > 6$ la satisfará
si $\varepsilon = (\frac{1}{2})^{10}$, $n > 11$ la satisfará
si $\varepsilon = (\frac{1}{2})^{100}$, $n > 101$ la satisfará

y así sucesivamente.

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$.

<u>LS97001.04.02 i.v.s s-e.</u> Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplo 2

Considérese otro ejemplo en que $S_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Sustituyendo $n = 1, 2, 3$, etc. vemos que

$S_1 = 2$, $S_2 = \frac{3}{2}$, $S_3 = \frac{4}{3}$, $S_4 = \frac{5}{4}$, $S_5 = \frac{6}{5}$, y así sucesivamente.

Se ve que conforme n aumenta, S_n tiende a 1. Esto se aclara más si escribimos $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

Según la definición,

$$|S_n - 1| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow \quad \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Esto se verifica, porque si $\varepsilon = 0.01$, $n > 101$ la satisfará
si $\varepsilon = 10^{-6}$, $n > 10^6$ la satisfará.

En general, si $\varepsilon = \varepsilon$, $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ la satisfará.

Por tanto, el $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

LS97001.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
V	99	No	19	22	LS97001.02	a.s.i v-e
			29	31	LS97001.03	i.v.s s-d
	100	No	6	12	LS97001.04.01	i.v.s s-e
			15	27	LS97001.04.02	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS97001.02							
ivs							LS97001.04.01 LS97001.04.02	LS97001.03
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

El fenómenos de retroalimentación predomina sobre el de aproximación simple intuitiva, el formato ejemplo sobre el definición y la representación simbólica sobre la representación verbal.

LS97002. Ficha

Código	LS97002
Autor	Javier Guillén Barona, Roberto Navarro, Juan Antonio Peña y Sebastián Ferrer Martínez.
Titulo	Matemáticas 2º Bachillerato
Editorial	Magisterio Español
Año	1976
Ubicación	I.E.S "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga)
Información sobre límites	Capitulo I. Sucesiones de números reales. Páginas 5-14

LS97002.Secuenciación.

1) Comienza el tema con una serie de definiciones: Sucesión de números reales, sucesión acotada superior e inferiormente, monótona creciente y decreciente.
2) Definición de límite de una sucesión.. Esta definición se acompaña de una explicación, véase LS97002.02
3) Aplicación de la definición formal a la resolución del ejemplo 2n/(3n-1). Véanse LS97002.03.01 y LS97002.03.02
4) Definición de sucesión nula.
5) Demostración de varios teoremas: Si una sucesión tiene limito finito, éste es único; si una sucesión está comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite, la sucesión situada entre las dos tiene el mismo límite que las otras.
6) Cuestiones y ejercicios

LS97002. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS97002.02 i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

> Diremos que una sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ tiene por límite el número real a, si para todo número positivo ε, por pequeño que sea, existe un entero positivo n_0 tal ,que siempre que se tenga $n \geq n_0$, se tenga también $|a - a_n| < \varepsilon$. Es decir, n_0 es un lugar de orden tal que , a partir de él, todos los términos de la sucesión difieren de a en menos de lo que vale ε

<u>LS97002.03.01 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo. (Véase el fragmento en la página siguiente.)

La existencia de un límite finito se puede justificar por vía analítica. Por ejemplo vamos a demostrar que la sucesión de la respuesta 1 tiene por límite 2/3. La diferencia entre 2/3 y un término cualquiera de la sucesión vale:

$$\frac{2}{3} - \frac{2n}{3n-1} = \frac{6n-2-6n}{9n-3} = \frac{-2}{9n-3}$$

Si n es entero positivo, $9n-3$ es positivo. De aquí que, si el valor absoluto de último miembro ha de ser menor que ε, debe tenerse:

$$\frac{2}{9n-3} < \varepsilon$$

y esta desigualdad es equivalente a las que siguen:

$$2 < \varepsilon(9n-3); \quad \frac{2}{\varepsilon} < 9n-3; \quad \frac{2}{\varepsilon} + 3 < 9n; \quad \frac{\frac{2}{\varepsilon}+3}{9} < n$$

LS97002.03.02 i.v.s v-e. Se trata de una "ida - vuelta"; representación verbal y formato ejemplo

Cuanto menor sea ε, siendo positivo, mayor será $2/\varepsilon$, y mayor todo el primer miembro de la última expresión. Pero, por grande que llegue a ser, siempre habrá un valor de n, a partir del cual la desigualdad sea siempre cierta. Luego el límite 2/3 está garantizado.

LS97002.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	8	No	27	31	LS97002.02	i.v.s v-d
	9	No	3	11	LS97002.03.01	i.v.s s-e
		No	12	15	LS97002.03.02	i.v.s v-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs	LS97002.02	LS97002.03.02					LS97002.03.01	
	e	d	e	d	e	d	e	d

Comentario

Se observa solamente el fenómeno de retroalimentación. En el sistema de representación verbal, el fenómeno i.v.s aparece tanto en ejemplo como en definición, mientras que en el sistema de representación simbólico aparece solamente en ejemplo.

LS97003.Ficha

Código	LS97003
Autor	Ángel Martínez Losada, Fernando Hernández Aina, Francisco Lorenzo Miranda
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P.
Editorial	Tecnibán S.A. (Madrid)
Año	1976
Ubicación	I.E.S "Cristóbal de Monroy" (Alcalá de Guadaira, Sevilla)
Información sobre límites	Capítulo II. Límites de sucesiones. Páginas: 23-39.

LS97003. Secuenciación.

1) Cálculo de √5: Se acota su valor, dando una cota superior y una cota inferior. Se van dando nuevas cotas superiores e inferiores que se aproximan más al valor √5. De esta manera el autor construye una sucesión que se aproxima a √5 por exceso y otra que se aproxima a √5 por defecto. A partir de esto el autor afirma que la sucesión construida: 2; 2,2; 2,23; 2,236….. *"tiende a √5 o que tiene por límite √5".* Véanse LS97003.01.01 y LS97003.01.02
2) Cálculo de un área. Se representa una función y se pretende calcula el área A encerrada entre la curva, el eje OX y dos puntos denominados M y N. Véanse LS97003.02.01 y LS97003.02.02
3) División de una cuartilla en partes cada vez más pequeñas y cálculo de las áreas correspondientes. Se dispone de una cuartilla de papel rectangular de $1dm^2$. A continuación, se divide la cuartilla en dos partes iguales A_1 y B_1. Después se divide B_1 en dos partes iguales y así sucesivamente. De esta manera se va construyendo una sucesión: 1, ½, ¼, 1/16,…. A partir de esto el autor afirma: *"Observa que cuando n es muy grande, los términos de la sucesión se aproximan o tienden cada vez más a cero. Se dice que la sucesión tiene por limite 0".* Véanse LS97003.03.01 y LS97003.03.02
4) Se presenta la sucesión 1, ½, 1/3, ….1/n. Se representan gráficamente (sobre una recta y sobre unos ejes cartesianos) los valores y se observa que dado un numero, por pequeño que sea, existe un lugar a partir del cual todos los términos de la sucesión son menores que ese valor. A partir de aquí el autor afirma que la citada sucesión tiene por límite cero. Véanse LS97003.04.01 y LS97003.04.02
5) Se presenta la sucesión -4, -1, 4, 11, 20, n^2 -5, …, y se representan gráficamente (sobre recta y ejes cartesianos) los valores de la sucesión.
6) Se presenta la sucesión -2, -4, -6, -2n,.. y se representa gráficamente (sobre una recta y sobre unos ejes cartesianos).
7) Se presenta la sucesión: 1+ ½, -1 – ¼, 1+ 1/3, -1 -1/8,… Se representa gráficamente sobre una recta y sobre unos ejes cartesianos. Véase LS97003.07
8) Se presenta la sucesión ½, 3/2, 2/3, 4/3. Se representa gráficamente sobre una recta y sobre unos ejes cartesianos. Véase LS97003.08

9) Presenta la sucesión ½, 2/3, ¾,… El autor observa que, dado un número, por pequeño que sea (denominado ε), existe un término de la sucesión de manera que todos los que le siguen pertenecen al intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Véase LS97003.09
10) Se presenta la definición de límite finito de una sucesión. Se presenta nuevamente la definición de límite finito de una sucesión. Se usa para comprobar que el límite de la sucesión (2n+1)/(3n +5) es 2/3. Véanse LS97003.10.01, LS97003.10.02 y LS97003.10.03.

LS97003. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS97003.01.01 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si deseamos calcular $\sqrt{5}$, procedemos así:

1.er paso

Hallando las potencias 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ..., se obtiene que $2^2 < 5 < 3^2$; de donde $2 < \sqrt{5} < 3$ y, por tanto, $\sqrt{5} = 2'...$

2.° paso

Hallando las potencias $2'0^2$, $2'1^2$, $2'2^2$, ..., $2'9^2$, 3^2, se obtiene que $2'2^2 < 5 < 2'3^2$, o sea que $2'2 < \sqrt{5} < 2'3$ y, por tanto, que $\sqrt{5} = 2'2...$

3.er paso

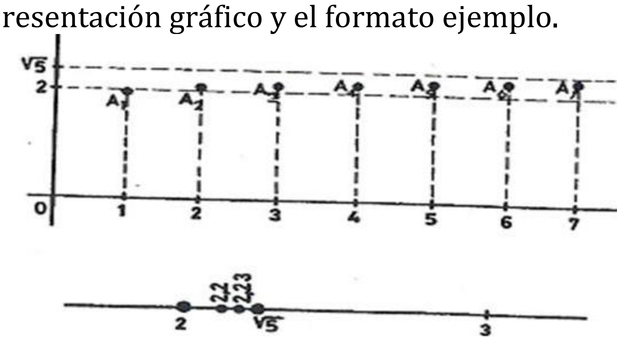
Calculando $2'20^2$; $2'21^2$; $2'22^2$, ..., $2'29^2$, $2'30^2$, se obtiene que $2'23^2 < 5 < 2'24^2$; luego $2'23 < \sqrt{5} < 2'24$ y, por tanto, $\sqrt{5} = 2'23$ ...

Continuando de igual forma, obtenemos sucesivamente $\sqrt{5} = 2'236$ ..., $\sqrt{5} = 2'2360$ ... Esta sucesión de «pasos», que se puede continuar indefinidamente, se llama un **proceso infinito**; mediante él, se obtienen las sucesiones,

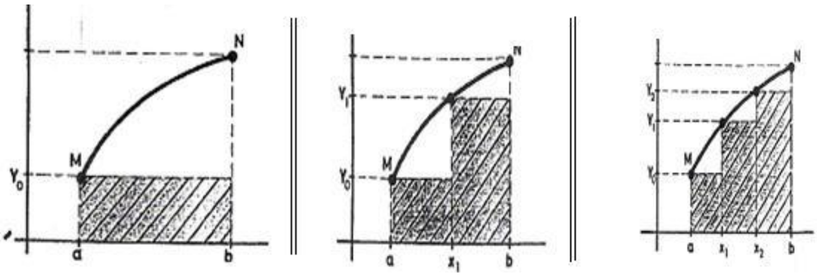
$$\begin{array}{lllll} 2; & 2'2; & 2'23; & 2'236; & 2'2360; \ldots \\ 3; & 2'3; & 2'24; & 2'237; & 2'2361; \ldots \end{array} \qquad (1)$$

y la sucesión de intervalos **(2, 3)**, (2'2, 2'3), ... permite **aproximar** $\sqrt{5}$ tanto como deseemos, puesto que las amplitudes de los intervalos obtenidos son 1, 0'1, 0'01, 0'001, ... y estas amplitudes, como ya sabemos, determinan una cota del error de los números aproximados que pertenecen a esos intervalos.

<u>LS97003.01.02 a.s.i. g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS97003.02.01 a.s.i. g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan la representación gráfica y el formato ejemplo. (Ver página siguiente.)



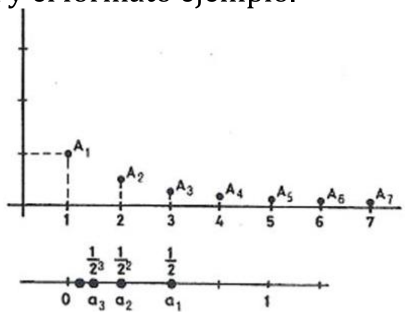
<u>LS97003.02.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Se ha definido así un proceso infinito mediante el cual se ha formado la sucesión numérica

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \ldots$$

De la observación de las figuras formadas, «parece» que los números $A_1, A_2, \ldots$ «tienden a aproximarse» cada vez más al número que designa el área A.

<u>LS97003.03.01 a.s.i. g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan la representación grafica y el formato ejemplo.



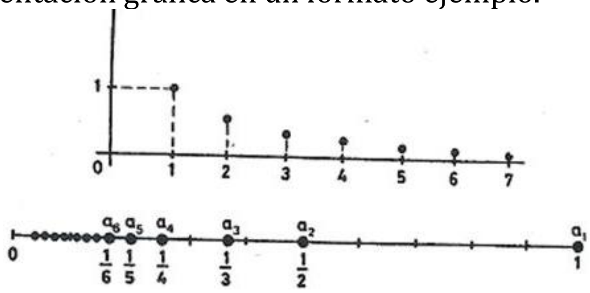
<u>LS97003.03.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observa que cuando n es «muy grande», los términos de la sucesión (3) se «aproximan» o «tienden», cada vez más, a cero. Se dice que la sucesión (3) tiene por límite 0. Si se escriben en forma decimal los términos de (3) se obtiene

0'5; 0'25; 0'125; 0'0625; 0'03125; 0'015625;
0'0078125; 0'00390625; 0'001953125; 0'0009765625, ...

que, como se observa, se «acerca» (tiende) a 0.

<u>LS97003.04.01 a.s.i. g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se muestra su representación gráfica en un formato ejemplo.

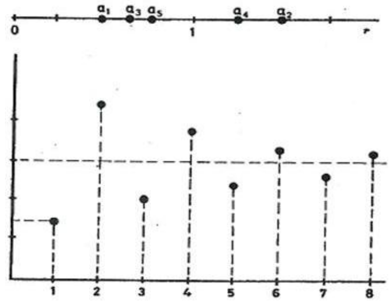


<u>LS97003.04.02. a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva verbal ejemplo porque sólo se está utilizando una variable, es intuitiva en el sentido de que no se construye la función ε-N_0, aparece en el sistema de representación verbal y bajo el formato ejemplo. (Ver página siguiente.)

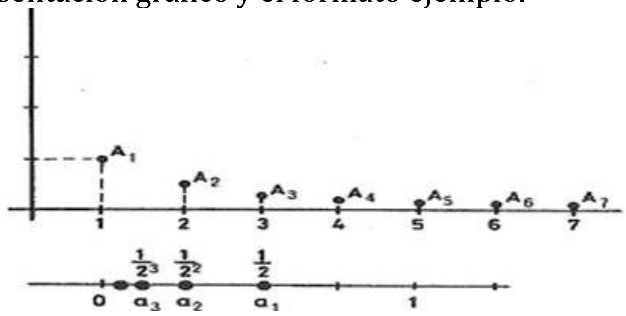
La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

es tal que sus términos «parece» que tienden a aproximarse, cada vez más a cero.

LS97003.07 a.s.i. g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, representada gráficamente y en formato ejemplo.



LS97003.08 a.s.i. g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS97003.09 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

En general, si elegimos el número $\varepsilon > 0$, existe un término de la sucesión n' tal que todos los que le siguen pertenecen al entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, de 1.

En efecto, todos los términos que ocupan lugares dados por números $n > n' = E\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ = parte entera de $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, cumplen que

$$\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

luego $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, o sea, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$; pero $\frac{1}{n+1} = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$; luego todos los términos que siguen al que ocupa lugar n para $n > n' = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, son tales que $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, o sea, pertenecen al entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, de 1.

LS97003.10.01 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Se dice que $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tiende al número l o que tiene por límite l, si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número n' tal que todos los términos $a_{n'+1}, a_{n'+2}, \dots$ que siguen a $a_{n'}$ pertenecen al entorno $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, o lo

LS97003.10.02 i.v.s s-d. Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número n' tal que para todo $n > n'$, es $|a_n - l| < \varepsilon$.

<u>LS97003.10.03 i.v.s s-e</u>. Se trata de una “ida - vuelta” simbólico, se usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Por ejemplo: la sucesión $\frac{2n+1}{3n+5}$ tiene por límite $\frac{2}{3}$, pues la diferencia $\left|\frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, siempre que $n > n' = \frac{7-15\varepsilon}{9\varepsilon}$ y cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

LS97003. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Linea Inicial.	Linea Final.	Código-ubicación.	Fenómeno
II	24	No	14	16	LS97003.01.01	a.s.i v-e
	24	Si			LS97003.01.02	a.s.i g-e
	25	Si			LS97003.02.01	a.s.i g-e o
	26	No	9	11	LS97003.02.02	a.s.i v-e
	27	Si			LS97003.03.01	a.s.i g-e
	27	No	10	13	LS97003.03.02	a.s.i v-e
	28	Si			LS97003.04.01	a.s.i g-e
	28	No	5	6	LS97003.04.02	a.s.i v- e
	31	Si			LS97003.07	a.s.i g-e
	32	Si			LS97003.08	a.s.i g-e
	33	No	1	20	LS97003.09	i.v.s s- e
	34	No	7	12	LS97003.10.02	i.v.s s-d
	34	No	13	15	LS97003.10.03	i.v.s s- e
	34	No	4	7	LS97003.10.01	i.v.s v- d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS97003.01.01; LS97003.02.02; LS97003.03.02 LS97003.04.02; LS97003.08		LS97003.01.02; LS97003.02.01; LS97003.03.01 LS97003.04.01; LS97003.07; LS97003.08					
ivs		LS97003.10.01					LS97003.09 LS97003.10.03	LS97003.10.02
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

Este libro muestra un cambio de tendencia respecto a los anteriores, produciéndose un aumento considerable del fenómeno a.s.i (11 ocurrencias) frente al fenómeno i.v.s (4 ocurrencias). Se observa un considerable repertorio de códigos del fenómeno a.s.i (11) frente a los de retroalimentación (4). El único sistema de representación que no se usa es el tabular; los dos formatos están presentes.

LS97004. Ficha

Código	LS97004
Autor	Maria-Dolores Terrisse Jardi, Margarita Dávila Garcia-Miranda
Titulo	Matemática Curso 2º B.U.P
Editorial	Librería General (, Zaragoza)
Año	1976
Ubicación	I.E.S "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga)
Información sobre límites	Capítulo I. Límite de sucesiones. Páginas:13-23

LS97004. Secuenciación.

1) Definición de límite finito de una sucesión. Véanse LS97004.01.01 y LS97004.01.02
2) Aplicación de la definición para la resolución de un ejemplo. Véase LS97004.02
3) Definición de sucesión convergente, como aquella que tiene límite y de sucesión constante.
4) Definición de sucesión nula. Véase LS97004.04
5) Representación gráfica del límite de una sucesión. Véase LS97004.05

LS97004. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS97004.01.01 i.v.s v-d.</u> Se trata de una "ida - vuelta", se usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Sucesiones convergentes

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y l un número, también real.

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiende a l, o tiene por límite l cuando para todo número $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un término a_p de la sucesión tal que él y *todos los términos que le siguen* difieren de l, en valor absoluto, menos que ε.

<u>LS97004.01.02 i.v.s. s-d.</u> Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \ni \forall n \geq p; \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

<u>LS97004.02 i.v.s s-e.</u> Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

La sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+2}$, tiene por límite 2, pues:

$$|a_n - l| = \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 2n - 4}{n+2} \right| = \frac{4}{n+2}$$

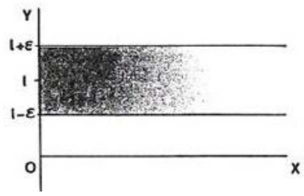
donde, si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}01$:

<u>LS97004.04 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Un caso interesante de sucesiones convergentes lo constituyen aquellas cuyo límite es cero. En este caso, para todo $\varepsilon > 0$ debe existir un p tal que, si $n \geq p$ se verifica:

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

<u>LS97004.05 i.v.s g-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación gráfico y el formato definición. (Véase el fragmento en la página siguiente.)



LS97004.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	13	No	3	7	LS97004.01.01	i.v.s v-d
		No	9	9	LS97004.01.02	i.v.s s-d
	14	No	15	16	LS97004.04	i.v.s s-d
	13	No	13	17	LS97004.02	i.v.s s-e
	15	Si			LS97004.05	i.v.s g-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs		LS97004.01.01		LS97004.05			LS97004.02	LS97004.01.02 LS97004.04
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

En este libro solamente se observa el fenómeno i.v.s. No usan la aproximación intuitiva ni la representación mediante tablas.

LS97005.Ficha

Código	LS97005
Autor	Manuel Calvo Escandón
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P
Editorial	Everest (León)
Año	1976
Ubicación	I.E.S "Cristóbal de Monroy" (Alcalá de Guadaira, Sevilla)
Información sobre límites	Capítulo II. Límite de sucesiones. Páginas:8-13

LS97005.Secuenciación
1) Definición de límite finito de una sucesión. Véase LS97005.01
2) Definición de límite finito de una sucesión. Véase LS97005.02
3) Definición de límite infinito de una sucesión.
4) Propiedades de los límites finitos (unicidad, acotación, entre otros)
5) Operaciones con límites (suma, producto, cociente, etc.)

LS97005. Detalle de los fenómenos observados

LS97005.01 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta" verbal; usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

> **Se dice que una sucesión indefinida de números reales $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, que representaremos por a_n, tiene por límite a, o converge hacia a, si la diferencia $a_n - a$, en valor absoluto, llega a ser tan pequeña como se quiera, tomando a_n lo suficientemente grande.**

LS97005.02 i.v.s s-d. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

> Más concretamente, se dice que a es el límite de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, cuando para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un número $\gamma \in N$, tal que:
>
> $$|a_n - a| < \varepsilon, \text{si } n > \gamma$$

LS97005.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
II	8	No	1	3	LS97005.01	i.v.s v-d
			4	7	LS97005.02	i.v.s s-d

	Verbal		Gráfico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs		LS97005.01						LS97005.02
	e	d	e	d	e	d	e	d

Comentario
En este libro se observa solamente el fenómeno de retroalimentación. Los sistemas de representación empleados son el verbal y el simbólico, y en ambos casos el fenómeno i.v.s se usa con el formato definición

LS97006. Ficha

Código	LS97006
Autor	Valentín López, José Luis Sánchez Martín
Titulo	Matemáticas 2 Bachillerato
Año	1977
Editorial	S.M (Madrid)
Ubicación	I.E.S "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga)
Información sobre límites	Capítulo I. Sucesiones de números reales. Límite de sucesiones. Páginas 7-21.

LS97006.Secuenciación

1) Sucesión de números reales: *"Se llama sucesión de números reales a cualquier aplicación de N^+ en R".*
2) Término general de una sucesión: *"es una expresión con la indeterminada en n tal que al hacer n=1, 2, 3, … se obtienen respectivamente los términos primero, segundo, tercero, … de la sucesión"*
3) Dos maneras de determinar una sucesión: *"Por el termino general" o "Por una ley de recurrencia que permita obtener un término a partir de otros anteriores"*
4) Propiedades de las sucesiones. Las sucesiones de números reales con la suma y el producto forman un anillo conmutativo y unitario.
5) Sucesión monótona creciente y monótona decreciente.
6) Sucesión acotada, y de sucesión acotada superiormente e inferiormente.
7) Límite finito de una sucesión. Véase LS97006.07
8) Ejemplos: se plantean $a_n=1/(2n)$ y $b_n = 2n/(n+1)$ y se demuestra que sus límites valen cero y dos respectivamente usando la definición de limite. . Dado un épsilon $\varepsilon=1/1000$ y dada la sucesión ½, ¼,1/6,....1/(2n), se demuestra que el límite es cero hallando el n_0 que hace que la diferencia entre f_n y cero sea menor que épsilon. En este caso el $n_0=5$. Véanse LS97006.08.01 y LS97006.08.02
9) Se plantea la sucesión $a_n=n/(n+1)$ para que se razone que su límite es 1
10) Definición de intervalos y entornos en la recta real.
11) Definición de límite finito de una sucesión e interpretación geométrica. Véanse LS97006.11.01 y LS97006.11.02

LS97006. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS97006.07. i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta"; usan la representación verbal y el formato definición. (Ver fragmento en la página siguiente.)

Una sucesión de números reales $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$ tiene por **límite** el número L si el valor absoluto de la diferencia $(f_n - L)$ puede hacerse menor que cualquier número positivo ε a partir de un cierto término f_p.

<u>LS97006.08.01 i.v.s s-e.</u> Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo. (Fragmento en página siguiente.)

La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}$ ¿tiene por límite el número 0?

Solución

En efecto, si suponemos $\varepsilon = \frac{1}{1.000}$ a partir del término f_{501} se verifica:

$$|f_{501} - 0| = \left|\frac{1}{1.002} - 0\right| = \frac{1}{1.002} < \frac{1}{1.000}$$

$$|f_{502} - 0| = \left|\frac{1}{1.004} - 0\right| = \frac{1}{1.004} < \frac{1}{1.000}$$

Luego el número 0 es el límite.

LS97006.08.02 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación simbólico y el ormato ejemplo.

La sucesión $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$ ¿tiene por límite el número 2?

Solución

Si hacemos, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10.000}$ a partir del término $f_{20.000}$ se tiene:

$$|f_{20.000} - 2| = \left|\frac{40.000}{20.001} - 2\right| = \frac{2}{20.001} < \frac{1}{10.000}$$

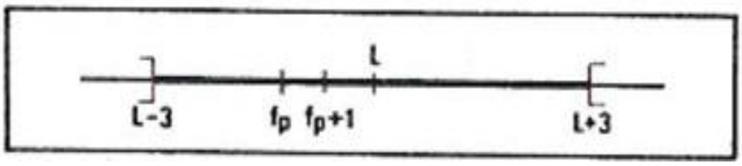
$$|f_{20.001} - 2| = \left|\frac{40.002}{20.002} - 2\right| = \frac{2}{20.002} < \frac{1}{10.000}$$

Luego el límite de la sucesión es 2.

LS97006.11.01 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Una sucesión f_n tienen por límite L si para cualquier número positivo ε existe un término f_p, tal que él y los siguientes pertenecen al entorno simétrico de L y radio ε.

LS97006.11.02 i.v.s g-d. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



LS97006. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	11	No	24	26	LS97006.07	i.v.s v-d
	12	No	9	12	LS97006.08.01	i.v.s s-e
	12	No	13	19	LS97006.08.02	i.v.s s-e
	13	No	19	21	LS97006.11.01	i.v.s v-d
	14	Si			LS97006.11.02	i.v.s g-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs		LS97006.07 LS97006.11.01		LS97006.11.02			LS97006.08.01 LS97006.08.02	
	e	d	e	d	e	d	e	d

Comentario

Solamente observamos el fenómeno de retroalimentación en este libro. Los autores usaron tres sistemas de representación, descartando las tablas.

A4.1.4 Periodo 1980-1989

Se han analizado ocho libros de texto publicados en este período: uno, de 1980, de 1981, de 1982, de 1985, de 1986 y de 1989 y dos de 1987. Los libros proceden de varios IES y de nuestra colección personal de libros de texto. Durante este periodo sigue vigente el bachillerato unificado polivalente, pero también se experimenta, discute y prepara la promulgación de la LOGSE.

LS98001. Ficha

Código	LS98001
Autor	Ignacio Lazcano Uranga y Paolo Barolo Babolin
Titulo	Matemáticas. Área Básica FP2
Editorial	Luis Vives (Zaragoza)
Año	1980
Ubicación	I.E.S "Cristóbal de Monroy" (Alcalá de Guadaira, Sevilla)
Información sobre límites	Capítulo XV. Sucesiones, páginas 174-186.

LS98001. Secuenciación

1) Definición de sucesión como "toda aplicación del conjunto de los números naturales N en el conjunto de los números reales R" y representación de la sucesión $a_n = (n^2 + 1)/(2n+3)$.
2) Definición de sucesión monótona.
3) Operaciones con sucesiones: suma, resta, multiplicación y división.
4) Conceptos topológicos de la recta real: Intervalos, Distancia en R y entorno de un punto.
5) Cotas de una sucesión.
6) Definición de punto de acumulación usando entornos. Véase LS98001.06
7) Ejemplo de sucesión que tiene dos puntos de acumulación. Se realiza la representación gráfica sobre la recta real.
8) Límite de una sucesión usando entornos. Véanse LS98001.08.01 y LS98001.08.02
9) Se presentan dos ejemplos de sucesiones que tienen límite y en el segundo de ellos se emplea la representación gráfica. Véanse LS98001.09.01 y LS98001.09.02
10) Nueva definición de límite usando entornos.
11) Ejemplo en el que se demuestra que una sucesión tiene limite 0, usando la representación gráfica. Véase LS98001.11
12) Teoremas sobre sucesiones convergente.

LS98001. Detalle de los fenómenos observados

LS98001.06 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Un número real a se llama **punto de acumulación** de una sucesión (a_n) si, para cualquier número δ positivo, tan pequeño como se quiera, el entorno $\mathscr{E}(a, \delta)$ contiene términos de (a_n) distintos de a.

LS98001.08.01 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Un número a es el límite de una sucesión (a_n) si fijado un número cualquiera, ε, positivo y tan pequeño como se quiera, existe un término a_n de la sucesión, a partir del cual **todos** los restantes distan de a menos que ε:

LS98001.08.02 i.v.s s-d. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_o / \forall n > n_o \longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

<u>LS98001.09.01 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", se usa el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

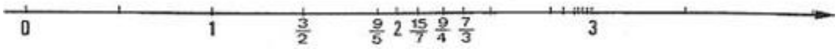
1) La sucesión 3,9, 3,99, 3,999, 3,9999, ... tiene como límite 4.

Si fijamos $\varepsilon = 10^{-6}$, a partir del término 7 se tiene:

$$| a_n - 4 | < 10^{-6}.$$

<u>LS98001.09.02 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.

2) La sucesión $1, \frac{6}{4}, \frac{9}{5}, 2, \frac{15}{7}, \ldots, \frac{3n}{n+2}, \ldots$ tiene como límite 3 (fig. 15.8).



<u>LS98001.11 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.

La sucesión $(a_n) = \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ldots$ tiene como límite el 0, ya que todo entorno de 0 contiene todos los elementos de la sucesión, salvo un número finito.

LS98001. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XV	180		9	11	LS98001.06	i.v.s v-d
	180		18	21	LS98001.08.01	i.v.s v-d
	180		22	22	LS98001.08.02	i.v.s s-d
	181		4	7	LS98001.09.01	i.v.s s-e
	181	Si			LS98001.09.02	a.s.i g-e
	182	Si			LS98001.11	a.s.i g-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi			LS98001.09.02 LS98001.11					
ivs		LS98001.08.01 LS98001.06					LS98001.09.01	LS98001.08.0 2
	e	d	e	D	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

Este libro incluye ambos fenómenos, a.s.i e i.v.s. El único sistema de representación no usado es el tabular. El fenómeno a.s.i se ve solamente en el formato ejemplo.

LS98002. Ficha.

Código	LS98002
Autor	Vizmanos-Anzola-Primo
Titulo	Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas
Editorial	S.M. (Madrid)
Año	1981
Ubicación	I.E.S "Cristóbal de Monroy" (Alcalá de Guadaira, Sevilla)
Información sobre límites	Capítulo XI. Sucesiones convergentes en R. Páginas 155-178.

LS98002. Secuenciación

1) Introducción del concepto de límite de una sucesión mediante cuatro ejemplos en los que se observa hacia dónde tienden las sucesiones presentadas. Véanse LS98002.01.01, LS98002.01.02, LS98002.01.03, LS98002.01.04 y LS98002.01.05
2) Definición del concepto de límite finito de una sucesión. Véase LS98002.02
3) Definición de valor aproximado a uno dado. "Se dice que x es un valor aproximado de a con error menor que ε si se verifica que $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.
4) Dos ejemplos sobre valores aproximados a uno dado, usando sucesiones. Véanse LS98002.04.01 y LS98002.04.02
5) Presentación de dos ejemplos para ilustrar la definición de límite de sucesiones usando entornos, $(a_n)=(1/n)$ y $(b_n)=(n/n+1)$. Véanse LS98002.05.01 y LS98002.05.02
6) Definición de límite finito de sucesiones y representación gráfica del mismo. Véanse LS98002.06.01, LS98002.06.02 y LS98002.06.03
7) Se realizan cinco ejemplos en los que se aplica la definición de límite. Los que se ocupan del estudio del límite finito son: ejemplo 1, ejemplo 4 y ejemplo 5. Véanse LS98002.07.01, LS98002.07.02, LS98002.07.03, LS98002.07.04, LS98002.07.05 y LS98002.07.06

LS98002. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS98002.01.01 a.s.i. v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva; usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Dada la sucesión $(a_n) = (1,\ 1{,}6,\ 1{,}66,\ 1{,}666,\ \ldots,\ 1{,}666 \overset{n}{\ldots} 6\ \ldots,\ \ldots)$.

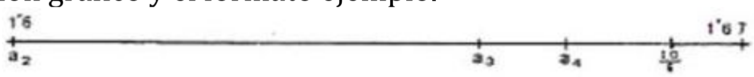
Observa que cada término es una mejor aproximación que el anterior del número racional 10/6.

Diremos que los términos de la sucesión (a_n) *tienden* al número 10/6 o que 10/6 es el **límite** de la sucesión (a_n).

Si representamos los términos de esta sucesión sobre un diagrama lineal, observamos que los sucesivos términos de la sucesión **se van aproximando cada vez más al número racional 10/6** (Fig. 11.1).

<u>LS98002.01.02 a.s.i g-e</u>.

Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



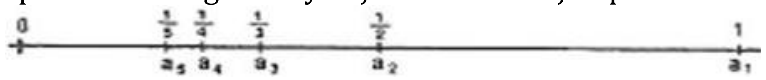
LS98002.01.03 a.s.i. v-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Sea ahora la sucesión $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$

Cada término es una mejor aproximación que el anterior del número cero, de tal manera que para valores muy grandes de n la diferencia entre 0 y 1/n se hace muy pequeña.

En estas condiciones diremos que los términos de la sucesión (1/n) **tienden a cero** o que el **límite** de la sucesión (1/n) es cero.

LS98002.01.04 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva en el sistema de representación gráfico y bajo el formato ejemplo.



LS98002.01.05 a.s.i. v-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva en el sistema de representación verbal y bajo el formato ejemplo.

Observamos que para un valor de n grande, sea, por ejemplo, $n = 10^6$ se tiene que

$$c_{10^6} = \frac{2 \cdot 10^6}{10^6 + 1} = 1{,}999998$$

que es un valor muy próximo a 2. De tal manera que los términos de la sucesión (c_n) para valores de n muy grandes se van **acercando cada vez más al número 2.**

LS98002.02 a.s.i. v-d. Se trata de una aproximación simple intuitiva en el sistema de representación verbal y bajo el formato definición.

Diremos que el número **a es el límite de la sucesión (a_n)** *cuando a medida que n toma valores cada vez mayores entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real a.*

LS98002.04.01 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta" en el sistema de representación simbólico y bajo el formato ejemplo.

1. En la sucesión $(a_n) = (1/n)$ si $\varepsilon = 0{,}001$, entonces el término 1/1001 está próximo a cero, con error menor que $\varepsilon = 0{,}001$. Ya que

$$-\frac{1}{1000} < \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000}$$

Análogamente ocurre para todos los términos siguientes a partir del término $n = 1001$.

LS98002.04.02 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

La sucesión $\frac{2n}{n+1}$ tiene términos que se aproximan a 2 con error menor que $\varepsilon = 10^{-4}$. En efecto, basta tomar n de modo que:

$$\left|2 - \frac{2n}{n+1}\right| < 10^{-4}$$

Es decir,

$$\left|\frac{2n + 2 - 2n}{n+1}\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{10^4}$$

$$2 \cdot 10^4 < n + 1 \Rightarrow n > 2 \cdot 10^4 - 1 \Rightarrow n > 19999$$

Luego para todo $n > 19999$ se verifica que la diferencia entre cualquier término a_n de la sucesión y el número 2 es menor que $\varepsilon = 10^{-4}$.

LS98002.05.01 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

La sucesión $(a_n) = (1/n)$ tiene límite 0, ya que para todo ε que fijemos se puede determinar el término a_{n_0} tal que a partir de él todos los siguientes términos estén en el entorno $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[$.

Veamos mediante ejemplos que el término a_{n_0} depende del ε elegido.

1.º Sea $\varepsilon = \frac{1}{10}$, tiene que ocurrir que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{10}$. Es decir, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$, $n > 10$.

Luego $a_{n_0} = a_{10}$

2.º Sea $\varepsilon = \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n > 1000.$

Luego $a_{n_0} = a_{1000}$

3.º Sea $\varepsilon = \frac{1}{10^5} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{10^5} \Rightarrow n > 10^5.$

Luego $a_{n_0} = a_{10^5}$

<u>LS98002.05.02 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

2. Sea la sucesión $(b_n) = (n/n + 1)$ que tiene límite 1, ya que para todo ε que fijemos se puede determinar el término a_{n_0} tal que a partir de él todos los términos siguientes estén en el entorno $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$. Veamos mediante ejemplos que a_{n_0} depende del ε elegido.

1.º Sea $\varepsilon = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \left|1 - \dfrac{n}{n+1}\right| < \dfrac{1}{10} \Rightarrow \left|\dfrac{n+1-n}{n+1}\right| < \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{10}$

Luego $n + 1 > 10 \Rightarrow n > 9$. Por tanto $a_{n_0} = a_9$; a partir del término noveno, todos los términos de la sucesión se encuentran en el entorno $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[=]0{,}9, 1{,}1[$.

2.º Sea $\varepsilon = \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow n + 1 > 1000 \Rightarrow n > 999$.

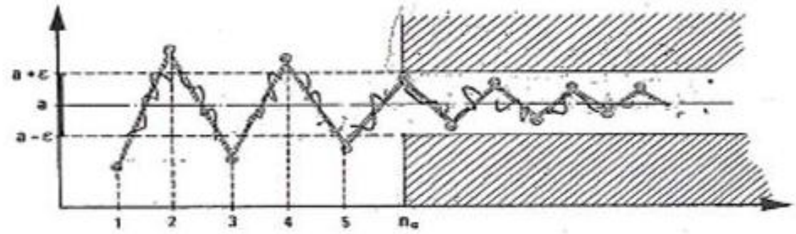
Entonces $a_{n_0} = a_{999}$.

A la vista de los ejemplos anteriores se tiene que cuanto más pequeño es ε mayor es el número natural n_0.

<u>LS98002.06.01 i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan la representación verbal y el formato definición.

Se dice que el límite de la sucesión (a_n) es el número real a y se escribe $\lim a_n = a$, cuando para todo número real positivo ε se puede determinar un número natural n_0 tal que para todo $n > n_0$, se verifica que a_n pertenece al entorno de centro a y radio ε que representamos por $E(a, \varepsilon)$.

<u>LS98002.06.02 i.v.s g-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



<u>LS98002.06.03 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta"; usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Se dice que la sucesión (a_n) tiene por límite el número real a cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que siempre que $n > n_0$ se verifica

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

<u>LS98002.07.01 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta" presentado en el sistema de representación simbólico y bajo el formato ejemplo.

Demostrar que la sucesión de números reales $(a_n) = \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$, *converge al número real 2.*

Sea ε un número real positivo cualquiera, tenemos que encontrar un número natural n_0 tal que:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n > n_0$$

Ahora bien:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

Entonces:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < \varepsilon n + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \varepsilon n \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

<u>LS98002.07.02 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.

Gráficamente (Fig. 11.5) resulta que a partir del término a_9 todos los términos siguientes están en el entorno $]1{,}9, 2{,}1[$.

<u>LS98002.07.03 i.v.s t-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan la representación tabular y el formato ejemplo. (Ver fragmento en página siguiente.)

ε	n_0	a_{n_0}
10^{-1}	9	a_9
10^{-2}	99	a_{99}
10^{-3}	999	a_{999}
.	.	.
.	.	.
10^{-50}	$9 \ldots 9$	$a_{9 \overset{50}{\ldots} 9}$

<u>LS98002.07.04 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usa el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Demostrar que el límite de la sucesión $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ es 1.

Se trata de ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

siempre que $n > n_0$.
Como

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Se tiene que $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Luego $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, siendo $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ = parte entera $\frac{1}{\varepsilon}$

<u>LS98002.07.05 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

La sucesión constante $(b_n) = (5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots)$ evidentemente tiene por límite el número real 5, ya que cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$ se verifica $|b_n - 5| = |5 - 5| = 0 < \varepsilon$.

<u>LS98002.07.06 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$\begin{aligned} \lim a_n = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n > n_0, \ |a_n - a| < \varepsilon. \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n > n_0, \ a_n \in E(a, \varepsilon). \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall n > n_0, \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \end{aligned}$$

LS98002. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial.	Línea Final.	Código-ubicación.	Fenómeno
XI	156	No	14	15	LS98002.01.01	a.s.i v-e
	156	Si			LS98002.01.02	a.s.i g-e
	156	No	19	22	LS98002.01.03	a.s.i v-e
	156	Si			LS98002.01.04	a.s.i g-e
	157	No	1	8	LS98002.01.05	a.s.i v-e
	157	No	16	18	LS98002.02	a.s.i v-d
	158	No	1	4	LS98002.04.01	i.v.s s-e
	158	No	4	13	LS98002.04.02	i.v.s s-e
	158	No	20	28	LS98002.05.01	i.v.s s-e
	158	No	28	33	LS98002.05.02	i.v.s s-e
	159	No	11	13	LS98002.06.01	i.v.s v-
	159	Si			LS98002.06.02	i.v.s g-d
	160	No	1	7	LS98002.06.03	i.v.s s-d
	160	Si			LS98002.07.01	i.v.s s-e
	160	Si	8	25	LS98002.07.02	a.s.i g-e
	160	No	8	19	LS98002.07.03	i.v.s t-e
	161	No	12	22	LS98002.07.04	i.v.s s-e
	161	No	23	24	LS98002.07.05	i.v.s s-e
	161		27	29	LS98002.07.06	i.v.s s-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS98002.01.01 LS98002.01.03 LS98002.01.05	LS98002.02	LS98002.01.02 LS98002.01.04 LS98002.07.02					
ivs		LS98002.06.01		LS98002.06.02	LS98002.07.03		LS98002.04.01 LS98002.04.02 LS98002.05.01 LS98002.05.02 LS98002.07.01 LS98002.07.04 LS98002.07.05	LS98002.06.03 LS98002.07.06
	e	d	e	D	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

En este libro observamos los fenómenos a.s.i e i.v.s, en 7 ocasiones y en 11, respectivamente. Los autores usan los cuatro sistemas de representación que hemos considerado, aunque sobresale el interés que prestan al sistema simbólico; el que menos se observa continúa siendo el sistema de representación tabular (1 ocasión).

LS98003. Ficha

Código	LS98003
Autor	Grupo Cero (Eliseo Borrás Vesés, Mª Elisa Carrillo Quintela, Joaquin D´Opazo Álvarez, Francisco Hernán Siguero, Magda Morata Cubells, Luis Puig Espinosa, Ángel Salar Gálvez, Adela Salvador Alcalde, Vicente Talens Oltra)
Titulo	Matemáticas de Bachillerato. Volumen 2
Editorial	Teide (Barcelona)
Año	1982
Ubicación	I.E.S "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga)
Información sobre límites	Capítulo V. Sucesiones y límites. Páginas 226-271

LS98003. Secuenciación

1) Construcción de la sucesión $a_n= 2^n$. Realiza una tabla y una gráfica a partir del siguiente enunciado: *"cierta clase de algas, se reproduce doblando su número en 2 ½ horas"* A continuación el autor observa que a medida que aumenta n, aumenta a_n
2) Construcción de la sucesión $a_n =1/(2^n)$. Análogamente, se realiza una tabla y una gráfica y se observa que, a medida que aumenta n, disminuye el valor de a_n, estando cada vez más próximo a 0. Véanse LS98003.02.01, LS98003.02.02 y LS98003.02.03
3) Suma de una progresión geométrica, de razón menor que 1, cuyo valor es 1. Realiza una tabla y una gráfica en la que, para cada n, se suma $1/2^n$ con el valor que tenia la sucesión en el paso anterior. Véase LS98003.03
4) Se construye la sucesión de las áreas de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, y se comprueba que el límite de estas áreas, corresponde al área de la circunferencia.
5) Se define una sucesión de números reales como *"una función de N en R"*.
6) Ejemplo: se presenta la sucesión constante $a_n = 3$.
7) Ejercicios de manipulación.
8) Introducción en la definición de límite de sucesión: Los ejemplos procuran abarcar situaciones que los alumnos se pueden encontrar a la hora de calcular un límite (sucesión convergente, y sucesión no convergente). Véase LS98003.08
9) Se presentan 4 ejemplos que inducen a plantear las siguientes cuestiones: " ¿una sucesión puede tener dos límites distintos?", "¿dos sucesiones distintas pueden tener el mismo límite?" "¿una sucesión puede converger a l acercándose a l por arriba y por abajo?"
10) La sucesión $a_n=n/(n+1)$ se representa gráficamente y se demuestra, usando la intuición y la definición de limite finito de una sucesión ε-n_0, que su límite vale 1. Véase LS98003.10
11) Se demuestra, usando la definición formal ε-n_0, que el límite de la sucesión $a_n=n/3(n+1)$ vale 1/3. Véase LS98003.11
12) Se demuestra, usando la definición formal ε-n_0, que el límite de la sucesión $a_n=(2n + 3)/(5n – 4)$ vale 2/5. Véase LS98003.12

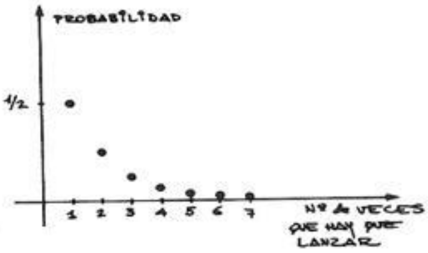
13) Se proponen ejercicios en los que, dado el límite, que se conjetura, y dado ε, se trata de hallar n.
14) Definición de límite finito de una sucesión. Véase LS98003.14

LS98003.Detalle de los fenómenos observados

LS98003.02.01 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, se usan el sistema de representación tabular y formato ejemplo.

Suceso:	1	2	3	4	5	6	7	... n ...
Probabilidad:	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	...$1/2^n$...

LS98003.02.02 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva presentada en el sistema de representación gráfico y bajo el formato ejemplo.

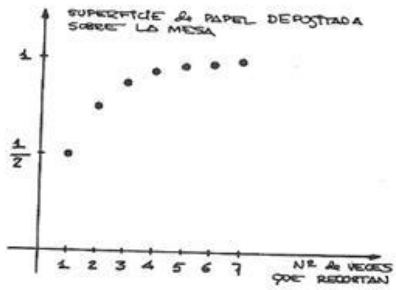


LS98003.02.03 a.s.i v-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva presentada en el sistema de representación verbal y bajo el formato ejemplo.

Presta atención al hecho de que

A medida que aumenta n. *la probabilidad correspondiente,* p(n), *es cada vez más pequeña. Concretamente:*

LS98003.03 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



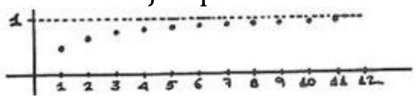
LS98003.08 a.s.i v-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

¿Por qué esta última sucesión tiene como límite 0? Porque basta con tomar valores de *n* cada vez para que $^{1}/_{2^n}$ se acerque a 0 cuanto queramos.

LS98003.10 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y bajo formato ejemplo.

La gráfica de la sucesión

$$n \mapsto \frac{n}{n+1}$$



LS98003.11 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo. (Véase el fragmento reproducido en la página siguiente.)

Por ejemplo, nos acercamos a 1 más de 0'01 si tomamos desde $n = 100$ en adelante, ya que para acercarnos a 1 más de 0'01 ha de ser

$$1 - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{100} \Longrightarrow \frac{n+1-n}{n+1} < \frac{1}{100} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Longrightarrow n+1 > 100$$

cosa que se cumple para $n = 100$, $n = 101$, $n = 102$, ...

Nos acercamos a 1 más de 0'0001 si tomamos desde $n = 10.000$ en adelante, puesto que

$$1 - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{10000} \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10000}$$

desigualdad que se cumple para $n = 10.000$, $n = 10.001$, $n = 10.002$, ...

<u>LS98003.12 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usanel sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

¿Por qué converge a 1/3 ?

Porque sea cual sea la precisión o aproximación que deseamos, podemos encontrar el término apropiado de la sucesión. En efecto, si queremos aproximarnos a 1/3 más de 0'01 habrá de cumplirse que

$$\frac{1}{3} - \frac{n}{3(n+1)} < \frac{1}{100} \quad \text{y por eso}$$

$$\frac{1}{3n+3} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 3n+3 > 100 \Longrightarrow 3n > 97$$

$$\Longrightarrow n > \frac{97}{3}$$

es decir, $n = 33, 34, 35, \ldots$

<u>LS98003.14 i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

DEFINICIÓN

DADA UNA SUCESIÓN $a_1, a_2, a_3, \ldots$ DE NÚMEROS REALES, SE DICE QUE TIENE COMO LÍMITE EL NÚMERO REAL ℓ O QUE CONVERGE HACIA ℓ CUANDO PARA CADA NÚMERO REAL POSITIVO ε HAY UN NÚMERO NATURAL n (O LO QUE ES IGUAL, UN a_n) TAL QUE EL VALOR ABSOLUTO DE LA DIFERENCIA ENTRE ℓ Y TODO TÉRMINO DE LA SUCESIÓN, DESDE a_n EN ADELANTE, ES MENOR QUE ε:

$$|a_n - \ell| < \varepsilon.$$

LS98003. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial.	Línea Final.	Código-ubicación.	Fenómeno
V	228	Sí			LS98003.02.01	a.s.i t-e
	228	Sí			LS98003.02.02	a.s.i g-e
	228	No	15	16	LS98003.02.03	a.s.i v-e
	229	Si			LS98003.03	a.s.i g-e
	262	No	15	16	LS98003.08	a.s.i v-e
	264	Sí			LS98003.10	a.s.i g-e
	265	No	1	8	LS98003.11	i.v.s s-e
	265	No	15	24	LS98003.12	i.v.s s-e
	270	No	1	5	LS98003.14	i.v.s v-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS98003.02.03 LS98003.08		LS98003.02.02 LS98003.03 LS98003.10		LS98003.02.01			
ivs		LS98003.14					LS98003.11; LS98003.12	
	e	d	e	d	e	d	e	d

Comentario.

En este libro se produce un cambio de tendencia respecto a lo observado anteriormente, ya que el fenómeno i.v.s pierde importancia y es sustituido por fenómeno a.s.i. Esto queda reflejado en la frecuencia con la que aparece cada uno: el segundo aparece en seis ocasiones mientras que el primero aparece en tres. Los autores usan los 4 sistemas de representación, aunque no con la misma frecuencia; también sobresale, en frecuencia, el formato ejemplo en detrimento del formato definición.

Para Sierra, González y López (1999), este libro supuso una ruptura con todo lo anterior e influyó en la configuración del currículo LOGSE. El texto del libro se desarrolla de acuerdo con la fenomenología de Freudenthal y con ideas constructivistas (no de las matemáticas constructivistas) según las cuales se espera que el alumno investigue, conjeture y rectifique para alcanzar conocimiento y que el profesor gestione y aliente dicho aprendizaje.

LS98004. Ficha

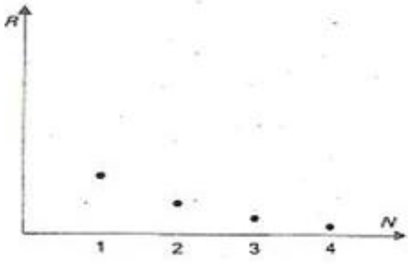
Código	LS98004
Autor	Santiago Pérez Cacho Adolfo Negro
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P
Editorial	Alhambra
Año	1985
Ubicación	Biblioteca personal
Información sobre límites	Inmerso en Capítulo I: Límites y continuidad páginas 1-51

LS98004. Secuenciación

1) Definición de sucesión: "Una sucesión es una aplicación de N en R".
2) Ejemplos: se presentan las sucesiones f(n) = $\sqrt{2}$, g(n) = $(-1)^n$ para todo n, y a(n) = 1/n. Se calculan los cinco primeros términos y se observa la imposibilidad de representar todos los términos de la sucesión. Para ello se recurre a dar el término general o dar una sucesión de forma recurrente.
3) Ejemplos: se presenta la sucesión de Fibonacci y se calculan los primeros términos.
4) Definición de sucesión monótona creciente y sucesión monótona decreciente.
5) Ejemplo: se presentan las sucesiones a_n= 1/n y 1, -1, 1, -1,... De la primera, se dice que es monótona decreciente y de la segunda que no es ni decreciente ni creciente.
6) Ejemplo: se representan gráficamente las sucesiones $a_n= 2^n/10$ y $b_n = 1/2^{n-1}$, usando ejes cartesianos. Solo el segundo ejemplo va a tener límite finito. Se representan gráficamente las mismas sucesiones en la recta real. Véanse LS98004.06.01, LS98004.06.02 y LS98004.06.03
7) Definición de límite usando la definición ε-N_0. Véase LS98004.07
8) Definición de límite infinito de una sucesión.
9) Uso de la definición formal para asegurar que 1 es el límite de la sucesión a_n = (n+1)/n. Véase LS98004.09
10) Varios criterios de convergencia.

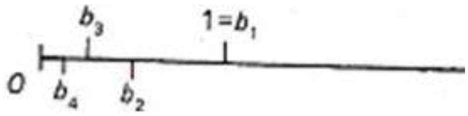
LS98004. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS98004.06.01 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva; usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



$(a_n) = (1/2^{n-1})$

<u>LS98004.06.02 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS98004.06.03 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

modo que «parece querer perderse en el infinito», mientras que la sucesión (b_n), a pesar de ser decreciente, va «acercándose» a cero, sin llegar a tomar valores negativos.

<u>LS98004.07 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Una sucesión real (a_n) tiene *límite a*, $a \in R$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R^{+}, \cup h \in N \,/\, \forall n > h,\ n \in N,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

<u>LS98004.09 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Compruébese que 1 es el límite de la sucesión

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

basta que

$$\left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

LS98004. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	**Figura**	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	15	Si			LS98004.06.01	a.s.i g-e
	16	Si			LS98004.06.02	a.s.i g-e
	16	No	6	8	LS98004.06.03	a.s.i v-e
	16	No	13	14	LS98004.07	i.v.s s-d
	17	No	1	14	LS98004.09	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS98004.06.03		LS98004.06.01; LS98004.06.02					
ivs							LS98004.09	LS98004.07
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario.</u>

En este libro aparecen tanto el fenómeno a.s.i como el fenómeno i.v.s, aunque el primero es más frecuente. No se observa el sistema de representación tabular. Sobresale el formato ejemplo (4, de 5 veces)

LS98005.Ficha

Código	LS98005
Autor	José Caruncho Castro, Maria Gutiérrez de Sande
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P
Editorial	Santillana
Año	1986
Ubicación	Biblioteca personal
Información sobre límites	Capítulo X. Sucesiones convergentes. Páginas 106-111

LS98005.Secuenciación

1) Introducción al concepto de límite de una sucesión usando los ejemplos: a_n= (0,3, 0,33, 0,333…..), $b_n=\frac{n}{n+1}$ y $c_n=2^{n-1}$. Véanse LS98005.01.01, LS98005.01.02, LS98005.01.03 y LS98005.01.04
2) Conceptos previos a la definición de límite finito de una sucesión. Se definen valor aproximado de un número con error menor que ε, y entorno del límite. Se trabaja con el ejemplo 1/n y dado el límite 0 y épsilon= 1/10 se busca el n_0 que verifica la definición de límite. Véanse LS98005.02.01, LS98005.02.02, LS98005.02.03, LS98005.02.04 y LS98005.02.05
3) Se presenta el ejemplo $a_n= 1 + (-1)^{n+1}/n$, y se afirma que su límite vale 1. Véanse LS98005.03.01, LS98005.03.02, LS98005.03.03 y LS98005.03.04
4) Definición de limite finito de una sucesión. Véanse LS98005.04.01, LS98005.04.02, LS98005.04.03, LS98005.04.04 y LS98005.04.05

LS98005.Detalle de los fenómenos observados

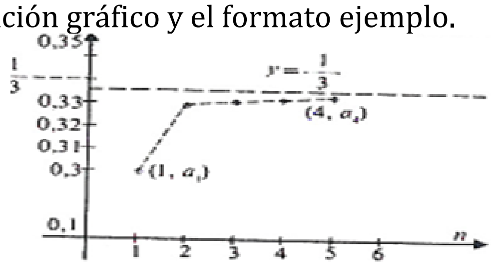
<u>LS98005.01.01 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

En la sucesión

$$(a_n) = (0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ \ldots,\ 0{,}33 \overset{n}{\ldots} 3,\ \ldots) \qquad [1]$$

sus términos se aproximan cada vez más al número racional $\frac{1}{3}$. Se suele decir que los términos de esta sucesión tienden o se aproximan al número $\frac{1}{3}$.

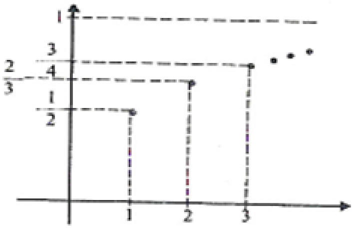
<u>LS98005.01.02 a.s.i. g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS98005.01.03 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo. (Ver el fragmento en la página siguiente.)

La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right)$ tiene por límite el número 1. Si n se hace *muy grande*, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima cada vez más a 1 (ver segunda figura).

LS98005.01.04 a.s.i. g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98005.02.01 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

En la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$, si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces el término $\frac{1}{101}$ está próximo a 0, con error menor que 0,01, ya que

$$-\frac{1}{100} < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

y lo mismo sucede para todos los siguientes a partir del término de lugar $n = 101$.

LS98005.02.02 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Si $\varepsilon = \frac{1}{10}$, el término a_{n_0} es a_{10}, ya que

$$\frac{-1}{10} < \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \text{ para todo } n > 10$$

LS98005.02.03 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Si $\varepsilon = \frac{1}{100}$, el término a_{n_0} es a_{100}, ya que

$$\frac{-1}{100} < \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \text{ para todo } n > 100$$

LS98005.02.04 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Si $\varepsilon = 10^{-6}$, el término a_{n_0} es $a_{1.000.000}$, ya que

$$\frac{-1}{106} < \frac{1}{n} < \frac{1}{106} \text{ para todo } n > 1.000.000$$

LS98005.02.05 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ tiene términos que se aproximan a 1 con error menor que $\varepsilon = 10^{-6}$. Es decir, todos los términos de la sucesión, a partir de uno de ellos en adelante, se encuentran en el entorno

$$\left]1 - \frac{1}{10^6}, 1 + \frac{1}{10^6}\right[$$

En efecto, basta tomar n de modo que

$$1 - \frac{n}{n+1} < 10^{-6}$$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$\frac{n+1-n}{n+1} < \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow n+1 > 10^6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n > 10^6 - 1$$

Por tanto, si $n > 10^6 - 1$, la diferencia entre cualquier término de la sucesión y el número 1 es menor que $\varepsilon = 10^{-6}$.

LS98005.03.01 i.v.s v-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

En la primera figura se ve que si tomamos $\varepsilon = 0{,}5$, los únicos puntos de la gráfica que no están dentro del entorno de aproximación $]1 - 0{,}5,\ 1 + 0{,}5[$ son los correspondientes a $n = 1$ y $n = 2$.

Para $n > 2$ se verifica que:

$$a_n \in]1 - 0{,}5,\ 1 + 0{,}5[$$

Por tanto, aquí el valor de n_0 es $n_0 = 2$.

LS98005.03.02 i.v.s v-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

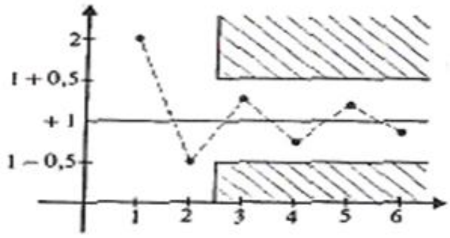
En la segunda figura se observa que si tomamos $\varepsilon = 0{,}1$, los únicos puntos que no están dentro del entorno de aproximación $]1 - 0{,}1,\ 1 + 0{,}1[$ son los correspondientes a $n = 1, 2, \ldots 10$.

Para $n > 10$ se verifica que:

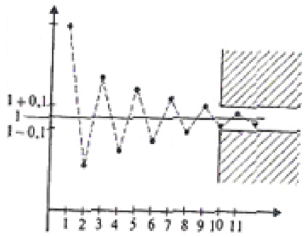
$$a_n \in]1 - 0{,}1,\ 1 + 0{,}1[$$

y aquí el valor de n_0 es $n_0 = 10$.

LS98005.03.03 i.v.s g-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98005.03.04 i.v.s g-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98005.04.01 i.v.s v-d. Se trata de una “ida - vuelta”, usa el sistema de representación verbal y el formato definición.

El número real a es el límite de la sucesión (a_n) y se escribe $\lim a_n = a$, $\lim a_n = a$ o $a_n \to a$ cuando para todo número real positivo ε existe un término a_{n_0} de la sucesión a partir del cual todos los términos siguientes están en el entorno $]a - \varepsilon,\ a + \varepsilon[$ del punto a.

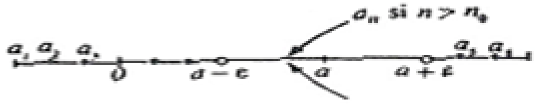
LS98005.04.02 i.v.s s-d. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Se dice que la sucesión (a_n) tiene por límite a cuando para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que siempre que $n > n_\varepsilon$, se verifica $|a_n - a| < \varepsilon$.

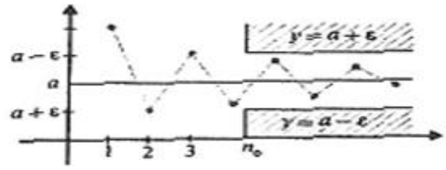
LS98005.04.03 i.v.s s-d. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0$$

LS98005.04.04 i.v.s g-d. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación grafico y el formato definición. (Fragmento en página siguiente)



<u>LS98005.04.05 i.v.s g-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación grafico y el formato definición.



LS98005. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
X	106	No	1	4	LS98005.01.01	a.s.i v-e
	106	Si			LS98005.01.02	a.s.i g-e
	106	No	14	17	LS98005.01.03	a.s.i v-e
	106	Si			LS98005.01.04	a.s.i g-e
	107	Si			LS98005.02.01	i.v.s s-e
	107	No	25	27	LS98005.02.02	i.v.s s-e
	107	No	27	29	LS98005.02.03	i.v.s s-e
	107		29	31	LS98005.02.04	i.v.s s-e
	107	Si			LS98005.02.05	i.v.s s-e
	108	No	5	9	LS98005.03.01	i.v.s v-e
	108	No	11	19	LS98005.03.02	i.v.s v-e
	108	Si			LS98005.03.03	i.v.s g-e
	108	Si			LS98005.03.04	i.v.s g-e
	109	No	5	9	LS98005.04.01	i.v.s v-d
	109	No	26	28	LS98005.04.02	i.v.s s-d
	109	No	31	31	LS98005.04.03	i.v.s s-d
	109	Si			LS98005.04.04	i.v.s g-d
	109	Si			LS98005.04.05	i.v.s g-d

	Verbal		Grafico		Tabu-lar		Simbólico	
asi	LS98005.01.01; LS98005.01.03		LS98005.01.02; LS98005.01.04					
ivs	LS98005.03.01; LS98005.03.02	LS98005.04.01	LS98005.03.03; LS98005.03.04	LS98005.04.04; LS98005.04.05			LS98005.02.01; LS98005.02.02 LS98005.02.03 LS98005.02.04 LS98005.02.05	LS98005.04.02; LS98005.04.03;
	e	d	e	d	E	d	e	d

Comentario

En este libro se observa que no se ha producido ningún cambio respecto a la década anterior, en la que prevalecía el fenómeno i.v.s sobre el fenómeno a.s.i. En concreto, la relación es de 14 a 4. El único sistema de representación que no se observa es la tabla. La relación entre los formatos es de 5 (definición) a 13 (ejemplo).

LS98006. Ficha

Código	LS98006
Autor	F. González y J. Villanova
Titulo	Curso práctico de matemáticas 2º B.U.P.
Editorial	Edunsa
Año	1987
Ubicación	I.E.S "Mayorazgo" (Málaga)
Información sobre límites	Capítulo III. Convergencia de sucesiones. Límites. Páginas 41 -52

LS98006. Secuenciación

1) Se desarrolla el ejemplo $a_n = \frac{2n+1}{n}$. Véase LS98006.01
2) Definición de límite finito de una sucesión. Véase LS98006.02
3) Teorema de la unicidad del límite; se definen las sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes Acotación , monotonía y convergencia y teoremas.
4) Se propone demostrar que la sucesión an = (4n + 7)/5n tiene límite 4/5, y que no tiene límite ¾, usando la definición ε-n_0. Emplea la representación gráfica. Véanse LS98006.04.01, LS98006.04.02 y LS98006.04.03
5) Se trabaja con la sucesión an= (3n -1)/(2n+3) y se ve que su límite no es ni 3, ni 2, ni 1,4, y sí que vale 3/2, usando la definición formal. Emplea la representación gráfica. Véanse LS98006.05.01, LS98006.05.02 y LS98006.05.03

LS98006. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS98006.01 i.v.s v-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

• La distancia de los términos de la sucesión a 2 puede hacerse tan pequeña como se desee , a partir de un término convenientemente elegido . Por ejemplo , si se desea que tal distancia sea inferior a 0'0001 , es evidente que ello ocurre a partir del término que ocupa el lugar 10001 , inclusive :

<u>LS98006.02 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Definición de límite

Dada una sucesión (a_n) , diremos que el número real L es el <u>límite</u> de esa sucesión , y escribiremos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, si se verifica la siguiente condición :

Para cualquier número real $\varepsilon > 0$, puede hallarse un natural n_0 tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

<u>LS98006.04.01 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

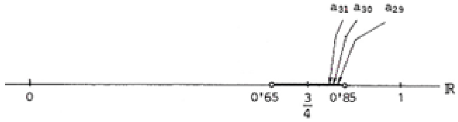
b) Se trata de hallar términos que cumplan la condición

$$\left| a_n - \frac{3}{4} \right| < 0'1 \quad , \quad \text{esto es ,} \quad \frac{n+28}{20n} < \frac{1}{10}$$

Dichos términos corresponderán a aquellos valores de n que cumplan la última inecuación escrita . Resolvámosla :

$$\frac{n+28}{20n} < \frac{1}{10} \iff 20n \cdot \frac{n+28}{20n} < 20n \cdot \frac{1}{10} \iff n+28 < 2n \iff n > 28$$

LS98006.04.02 i.v.s g-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98006.04.03 i.v.s s-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

a) Debemos probar que la inecuación $\left|a_n-\frac{3}{4}\right|<0'01$ no tiene soluciones :

$$\left|a_n-\frac{3}{4}\right|<0'01 \iff \frac{n+28}{20n}<\frac{1}{100} \iff 5n+140<n \iff$$

$$\iff 4n<-140 \iff n<-35$$

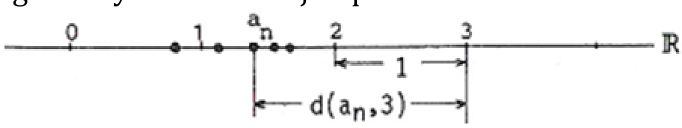
LS98006.05.01 i.v.s s-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Esto puede demostrarse resolviendo la inecuación $\left|a_n-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon$:

$$\left|a_n-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{4n+7}{5n}-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{4n+7-4n}{5n}\right|<\varepsilon \iff$$

$$\left|\frac{7}{5n}\right|<\varepsilon \iff \frac{7}{5n}<\varepsilon \iff 7<5\varepsilon n \iff n>\frac{7}{5\varepsilon}$$

LS98006.05.02 i.v.s g-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98006.05.03 i.v.s s-e. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

c) Para saber si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, procedemos como sigue :

$$|a_n-2|<\varepsilon \iff \left|\frac{3n-1}{2n+3}-2\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{3n-1}{2n+3}-\frac{4n+6}{2n+3}\right|<\varepsilon$$

$$\iff \left|\frac{-n-7}{2n+3}\right|<\varepsilon \iff \frac{n+7}{2n+3}<\varepsilon \iff n+7<2\varepsilon n+3\varepsilon$$

$$\iff n-2\varepsilon n<3\varepsilon-7 \iff n(1-2\varepsilon)<3\varepsilon-7$$

LS98006. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
3	41	No	4	17	LS98006.01	i.v.s v-e
	41	No	18	24	LS98006.02	i.v.s s-d
	44	No	10	21	LS98006.04.01	i.v.s s-e
	45	Si			LS98006.04.02	i.v.s g-e
	45	No	1	10	LS98006.04.03	i.v.s s-e
	46	No	4	20	LS98006.05.01	i.v.s s-e
	47	Si			LS98006.05.02	i.v.s g-e
	47	No	14	21	LS98006.05.03	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi								
ivs	LS98006.01		LS98006.04.02; LS98006.05.02				LS98006.04.01; LS98006.04.03; LS98006.05.01; LS98006.05.03	LS98006.02
	e	d	e	d	e	d	e	d

Comentario.

Este libro sigue la tendencia de la década de los setenta, en la que prevalecía el fenómeno i.v.s (8) por encima del fenómeno a.s.i (0). Como en libros anteriores, observamos la ausencia de fenómenos en el sistema de representación tabular. El formato ejemplo prevalece sobre el formato definición.

LS98007. Ficha

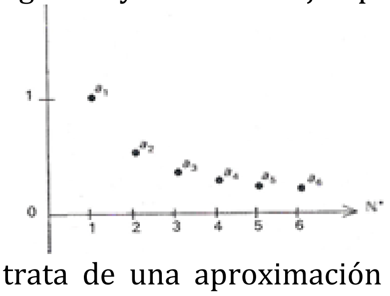
Código	LS98007
Autor	César Benedicto y Adolfo Negro
Titulo	Matemáticas 2 ªB.U.P
Editorial	Alhambra
Año	1987
Ubicación	I.E.S "Mayorazgo" (Málaga)
Información sobre límites	Capítulo I. Sucesiones. Límite de sucesiones. Páginas 1-18

LS98007. Secuenciación

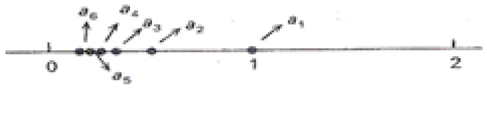
1) Empieza con dos ejemplos de sucesiones. A continuación, da la definición de sucesión de números reales.
2) Se presenta la sucesión a_n= 1/n y se afirma que la manera más adecuada de representar las sucesiones es mediante diagramas lineales y diagramas cartesianos. Se realiza la representación grafica utilizando las dos tipos de representaciones. Véase LS98007.02
3) Se estudia la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$. Se calculan unos cuantos términos y se representan gráficamente. Véase LS98007.03
4) Ejemplo. Se vuelve a estudiar la sucesión anterior y se afirma que 1 es el límite de la sucesión. Véanse LS98007.04.01 y LS98007.04.02
5) Se vuelve a estudiar la sucesión a_n= 1/n y se demuestra que su límite es 0. Véase LS98007.05.01
6) Definiciones de límite finito de una sucesión. Una, en términos de distancia, otra, en términos de entorno y otra, usando la definición ε-n_0. Véanse LS98007.06.01, LS98007.06.02 y LS98007.06.03
7) Se presenta el ejemplo a_n= 1/n y se demuestra que su límite es cero, usando la definición ε-n_0. También se usa el sistema de representación gráfica. Véanse LS98007.07.01 y LS98007.07.02

LS98007.Detalle de los fenómenos observados

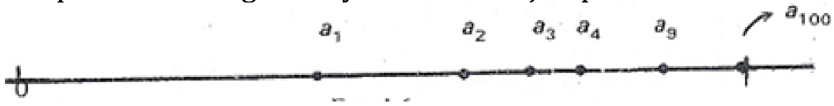
<u>LS98007.02 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS98007.03 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98007.04.01 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98007.04.02 a.s.i v-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Parece que el número al que se va acercando la sucesión es 1.
1 va a ser el *límite* de la sucesión a_n (la sucesión a_n *tiende* al número 1).

LS98007.05 i.v.s v-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

¿Por qué es 1 el límite? Porque vamos a ver que 1 cumple que:
4. *Tomando cualquier distancia por pequeña que sea, todos los términos de la sucesión a partir de uno de ellos, distan del límite menos de la distancia tomada.*

LS98007.06.01 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

El número L es el **límite** de la sucesión a_n, cuando para cualquier distancia ε * que tomemos, por pequeña que sea, existe un término de la sucesión, a partir del cual la distancia de todos los siguientes términos a L, es menor que ε.

LS98007.06.02 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

$\lim a_n = L$ cuando para cualquier entorno de L que tomemos, por pequeño que sea su radio ε, existe un término de la sucesión, a partir del cual, todos los siguientes términos pertenecen a dicho entorno.

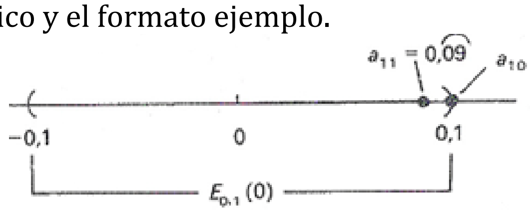
LS98007.06.03 i.v.s v-d. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

$\lim a_n = L$ si y sólo si para cualquier número positivo ε que tomemos, existe un término a_k, a partir del cual todos los términos a_n, siguientes a a_k cumplen que $|a_n - L| < \varepsilon$.

LS98007.07.01 i.v.s s-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ *parecía en el ejemplo 7 tener límite 0. Esto es cierto, ya que si tomamos cualquier distancia* ε, *podemos conseguir siempre que* $|a_n - 0| < \varepsilon$, *para todos los términos* a_n *a partir de un término* a_k. *Para saber cuál es* a_k, *has de tomar* $K = \frac{1}{\varepsilon}$ *(en los ejercicios resueltos puedes ver cómo obtener* K*).*

LS98007.07.02 i.v.s g-e. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS98007.Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	7	Si			LS98007.02	a.s.i g-e
	7	Si			LS98007.03	a.s.i g-e
	8	Si			LS98007.04.01	a.s.i g-e
	8	No	11	12	LS98007.04.02	a.s.i v-e
	9	No	3	5	LS98007.05	a.s.i v-e
	10	No	1	4	LS98007.06.01	i.v.s v-d
	10	No	7	9	LS98007.06.02	i.v.s v-d
	10	No	13	15	LS98007.06.03	i.v.s v-d
	10	No	16	23	LS98007.07.01	i.v.s s-e
	10	Si			LS98007.07.02	a.s.i g-e

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Verbal</td><td colspan="2">Grafico</td><td colspan="2">Tabular</td><td colspan="2">Simbólico</td></tr>
<tr><td>asi</td><td>LS98007.04.02</td><td></td><td>LS98007.02
LS98007.03
LS98007.04.01</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ivs</td><td>LS98007.05</td><td>LS98007.06.01
LS98007.06.02
LS98007.06.03</td><td>LS98007.07.02</td><td></td><td></td><td></td><td>LS98007.07.01</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td></tr>
</table>

Comentario

Los fenómenos están repartidos (4, a.s.i, frente a 6, i.v.s). Sobresale el sistema de representación verbal y se corrobora la ausencia del sistema de representación tabular. Hallamos 7 veces el formato ejemplo frente a 3 veces el formato definición.

LS98008. Ficha

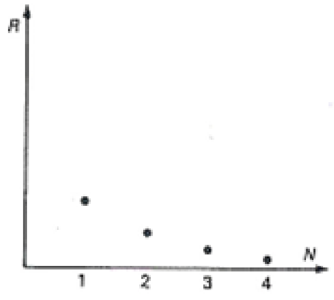
Código	LS98008
Autor	J. M. Belmonte, G. Montero, Adolfo Negro, Santiago Pérez, Tomas Sierra.
Titulo	Matemáticas 2 Bachillerato
Editorial	Alhambra (Madrid)
Año	1989
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera (Málaga)
Información sobre límites	Capítulo I. Sucesiones y límites. Páginas 02 -15

LS98008. Secuenciación

1) Comienza el tema recordando la definición de sucesión de números reales dando algunos ejemplos y definiendo lo que son sucesiones monótonas. Representa gráficamente dos sucesiones de números reales. Véase LS98008.01
2) Definición de límite de una sucesión. Ésta se da empleando la representación gráfica. Véanse LS98008.02.01, LS98008.02.02, LS98008.02.03 y LS98008.02.04
3) Se demuestra que el límite de la sucesión $a_n= (n+1)/n$ vale 1, usando la definición ε-N_0. Véase LS98008.03

LS98008. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS98008.01 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



$(b_n) = (1/2^{n-1})$

<u>LS98008.02.01 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Como puedes observar la sucesión de término general $a_n = 1/n$ parece que se acerca indefinidamente a cero, que se puede aproximar tanto como queramos a cero.

<u>LS98008.02.02 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.

<u>LS98008.02.03 i.v.s v-e</u>. Se trata de una “ida - vuelta”, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo. (Ver fragmento en página siguiente.)

Pero esto ocurre con cualquier distancia que yo tome. Es decir, dada una distancia, que llamaré ε, puedo encontrar un término de la sucesión a partir del cual todos los términos que le siguen se separan de cero menos que la distancia ε.

<u>LS98008.02.04 i.v.s s-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Dado un $\varepsilon > 0$, existe un $m \in IN$, tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geqslant m$.

<u>LS98008.03 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Por tanto, si se demuestra que un elemento a_n dista menos que ε de 1, los demás aún estarán más cerca. Ahora bien, para que

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

basta que

$$\left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

Y esta desigualdad se cumple si $\frac{1}{\varepsilon} < n$.

LS98008. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	4	Si			LS98008.01	a.s.i g-e
	4	No	7	9	LS98008.02.01	a.s.i v-e
	5	Si			LS98008.02.02	a.s.i g-e
	5	No	5	8	LS98008.02.03	i.v.s v-e
	5	No	13	15	LS98008.02.04	i.v.s s-d
	6	No	1	14	LS98008.03	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS98008.02.01		LS98008.01; LS98008.02.02					
ivs	LS98008.02.03						LS98008.03	LS98008.02.04
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario.</u>

En este libro hallamos ambos fenómenos con la misma frecuencia: 3. No usaron el sistema de representación tabular. El formato se inclina básicamente hacia los ejemplos (5 de 6).

A4.1.5 Periodo 1990-1999

En este periodo analizamos cuatro libros: dos de 1997 y dos de 1998. Proceden de los institutos "Pedro Espinosa", de Antequera (Málaga) y "José Hierro", de Getafe (Madrid). Durante este periodo se promulga y desarrolla la LOGSE en toda España y se inician diferentes críticas que conducirán, sucesivamente, en el siguiente lapso, a nuevas leyes orgánicas.

LS99001.Ficha

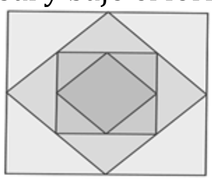
Código	LS99001
Autor	Adolfo Negro, Cesar Benedicto, Mariano Martínez y José Manuel Poncela. Grupo Azul 21
Titulo	Matemáticas 2.Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.
Año	1997
Editorial	Santillana (Madrid)
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera (Málaga)
Información sobre límites	Bloque III. Tema XII. Apartado I. Límite de sucesiones. Páginas 214 – 231; 217-218

LS99001. Secuenciación.

1) El tema comienza con la definición de sucesión, progresión aritmética, progresión geométrica, y sucesiones definidas por recurrencia. A continuación se realizan ejercicios relativos a ello.
2) Ejemplo manipulativo para la introducción del límite finito de una sucesión. Véase LS99001.02
3) Se presenta la sucesión a_n= 2n/(n+1). Véanse LS99001.03.01, LS99001.03.02, y LS99001.03.03
4) Definición de límite de una sucesión. Véase LS99001.04
5) La sucesión a_n = 2n/(n+1) tiene límite. Véase LS99001.05

LS99001. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS99001.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y bajo el formato ejemplo.



Cada cuadrado tiene un área que es la mitad del área anterior. La sucesión An de las áreas de los cuadrados de la figura 1 tiende a un número finito (cero). Se dice que su límite es 0 y se escribe que lim An=0

<u>LS99001.03.01 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Veamos otro ejemplo. La sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ (fig. 2).

$a_1 = 1,\ a_2 = 4/3 = 1{,}\hat{3},\ a_3 = 6/4 = 1{,}5,\ a_4 = 8/5 = 1{,}6 \ldots a_{19} = 38/20 = 1{,}9$

Con ayuda de la calculadora se obtienen términos avanzados:

$$a_{100} = \frac{200}{101} = 1{,}980198 \ldots a_{1.000.000} = \frac{2.000.000}{1.000.001} = 1{,}999998 \ldots$$

<u>LS99001.03.02 i.v.s v-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

2 es el límite porque tomando cualquier distancia, por pequeña que sea, todos los términos de la sucesión, a partir de uno de ellos, distan de 2 menos de esa distancia. O dicho de otra manera: porque tomando cualquier entorno por pequeño que sea con centro en 2, todos los términos de la sucesión a partir de uno de ellos pertenecen al entorno.

<u>LS99001.03.03 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.

Fig. 2. Sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

<u>LS99001.04 i.v.s v-d</u>. Se trata de una "ida - vuelta", usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

El número L es el límite de la sucesión a_n si y sólo si para cualquier entorno de L que se tome, por pequeño que sea, existe un término de la sucesión a partir del cual todos los siguientes términos pertenecen a dicho entorno [1].

<u>LS9900105 i.v.s s-e</u>. Se trata de una "ida - vuelta" porque se construye la función ε-N_0, usan el sistema de representación simbólico y formato ejemplo.

Averigua qué términos de la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ pertenecen al entorno de centro en 2 y radio igual a una centésima.

Solución

Como lím $a_n = 2$ tendrán que pertenecer a $E_{0,01}(2) = (1{,}99,\ 2{,}01)$ todos los términos desde uno en adelante.

En efecto, tanteando y utilizando la calculadora se tiene:

$a_{199} = 398/200 = 1{,}99$. Está justo al borde del entorno.
$a_{200} = 400/201 = 1{,}9900498 \ldots \in E_{0,01}(2)$.

Los elementos que siguen a a_{200} continúan perteneciendo al entorno.

Puede llegarse al resultado mediante cálculo y no por tanteo:

$$a_n \in E_{0,01}(2) \Rightarrow 1{,}99 < a_n < 2{,}01$$

$$\begin{cases} 1{,}99 < a_n \Rightarrow 1{,}99 < \dfrac{2n}{n+1} \Rightarrow 1{,}99 < 0{,}01 \cdot n \Rightarrow n > 199 \\ a_n < 2{,}01 \Rightarrow \dfrac{2n}{n+1} < 2{,}01 \Rightarrow -2{,}01 < 0{,}01 \cdot n \Rightarrow n > -201(*) \end{cases}$$

LS99001. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XII	217	No	5	6	LS99001.02	a.s.i v-e
		No	12	16	LS99001.03.01	a.s.i v-e
		No	27	31	LS99001.03.02	i.v.s v-e
		Si			LS99001.03.03	a.s.i g-e
		No	33	35	LS99001.04	i.v.s v-d
	218	No	1	16	LS99001.05	i.v.s s-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS99001.02; LS99001.03.01		LS99001.03.03					
ivs	LS99001.03.02	LS99001.04					LS99001.05	
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>LS99001. Comentario.</u>

En este libro hallamos ambos fenómenos con la misma frecuencia: 3. Entre los sistemas de representación usados no figura la representación tabular. Sobre sale el uso del formato ejemplo frente al formato definición (5 a 1).

LS99002. Ficha

Código	LS99002
Autor	Mª Trinidad Cámara Meseguer, Mª Felicidad Monteagudo Martínez, Jesús Paz Fernández
Titulo	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I
Año	1997
Editorial	Luis Vives
Ubicación	I.E.S. "José Hierro" (Getafe, Madrid)
Información sobre límites	Inmerso en Capítulo VII. Límite de funciones. Continuidad

LS99002. Secuenciación.

1) Definición de sucesión de números reales.
2) Se presenta la sucesión $a_n = n$ y se calculan algunos términos.
3) Se afirma que la sucesión de términos impares del ejemplo anterior es 2n-1
4) Definición de límite de una sucesión. Véase LS99002.04
5) Se presenta la sucesión $a_n = 1/n$ y se afirma que su límite es cero.
6) Operaciones con límites: Suma, resta, producto, cociente y producto por una constante.

LS99002. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS99002.04 a.s.i v-d</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

> Hay sucesiones en las que sus términos cada vez se acercan más a un determinado valor, conocido como **límite de la sucesión**; este valor lo expresamos como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, o simplemente como $\lim a_n$.

LS99002. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
VII	128	No	16	18	LS99002.04	a.s.i v-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi		LS99002.04						
ivs								
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario.</u>

Este libro solamente incluye un código de fenómeno: a.s.i v-d.

LS99003. Ficha

Código	LS99003
Autor	J. R. Vizmanos y M. Anzola
Titulo	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I
Año	1998
Editorial	SM
Ubicación	I.E.S. "José Hierro" (Getafe, Madrid)
Información sobre límites	Inmerso en Capítulo X. Tendencia y Continuidad. Pp. 149-166.

LS99003. Secuenciación.

1) Se presenta la sucesión $a_n = 1/n$. Se realiza una tabla de valores y se observa que su límite es cero. Véanse LS99003.01.01 y LS99003.01.02
2) Se presentan tres ejemplos de sucesiones con límite 0. Véase LS99003.02
3) Definición de sucesión nula.
4) Ejercicio resuelto. Se presentan tres ejemplos en los que se afirma que tienen limite 0. Véase LS99003.04
5) Ejemplo. Se presenta la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Se realiza una tabla de valores y se observa que su límite es 2. Se emplea la representación grafica. Véanse LS99003.05.01, LS99003.05.02 y LS99003.05.03
6) Definición de sucesión con límite l, basándose en la sucesión nula.

LS99003. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS99003.01.01 a.s.i t-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	10	100	1 000	10 000	1 000 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000001	...	tiende a 0

<u>LS99003.01.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

A medida que n aumenta, lo que equivale a decir que **n tiende a $+\infty$ y se lee más infinito**, los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeños y se aproximan cada vez más al número real 0.

Este número hacia el cual tienden se llama **límite de la sucesión**.

<u>LS99003.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

b) Si n se hace cada vez mayor, ¿a qué número se aproximan los términos de las siguientes sucesiones?

$$a_n = \frac{1}{n+2} \qquad b_n = \frac{1}{n+3} \qquad c_n = \frac{1}{n+4} \ldots$$

Dando valores a n cada vez mayores se obtienen términos de la sucesión que se aproximan cada vez más a 0.

<u>LS99003.04 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

¿A qué valor tienden los términos de las siguientes sucesiones?

$$a_n = \frac{2}{n+2} \qquad b_n = \frac{3}{n+3} \qquad c_n = \frac{4}{n+4} \ldots$$

A medida que n va tomando valores cada vez mayores, lo mismo sucede con el denominador; en cambio, el numerador permanece constante. Por tanto, el cociente se aproxima a 0. El límite de estas sucesiones es 0.

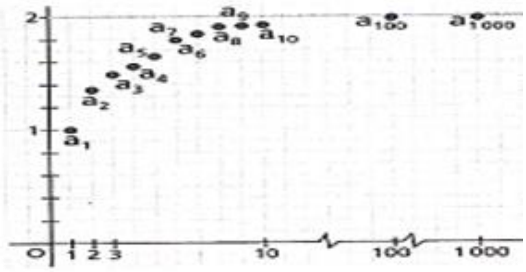
<u>LS99003.05.01 a.s.i t-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo: ver página siguiente.

n	1	10	100	10 000	1 000 000	...	tiende a $+\infty$
a_n	1	1,81...	1,98...	1,999...	1,99999...	...	tiende a 2

<u>LS99003.05.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

A medida que n aumenta, los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real 2. El límite de esta sucesión es 2.

<u>LS99003.05.03 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Representación de los términos de la sucesión

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

LS99003. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
X	150	Si			LS99003.01.01	a.s.i t-e
	150	No	7	10	LS99003.01.02	a.s.i v-e
	150	No	11	15	LS99003.02	a.s.i v-e
	150	No	20	24	LS99003.04	a.s.i v-e
	151	Si			LS99003.05.01	a.s.i t-e
	151	No	7	8	LS99003.05.02	a.s.i v-e
	151	Si			LS99003.05.03	a.s.i g-e

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS99003.01.02; LS99003.02; LS99003.04; LS99003.05.02		LS99003.05.03		LS99003.01.01; LS99003.05.01			
ivs								
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario</u>

Este libro incluye solamente el fenómeno a.s.i, hecho que parece confirmar una tendencia empezada ya en los años 80, época en la que se inicia el aumento de la importancia relativa de la intuición con respecto a la definición formal. Los sistemas de representación empleados son el verbal, el gráfico y el tabular. Los autores usan solamente el formato ejemplo.

LS99004. Ficha

Código	LS99004
Autor	Esther Bescos, Zoila Pena
Titulo	Matemáticas 1º BachILLERATO (Ciencias de la Naturaleza y de la Salud)
Editorial	Oxford Educacion
Año	1998
Ubicación	I.E.S. “José Hierro” (Getafe, Madrid)
Información sobre límites	Capítulo IX. Límite y continuidad. Pp. 204-243

LS99004. Secuenciación

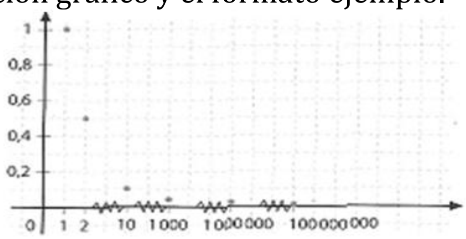
1) Definen el término general de una sucesión, las progresiones (aritméticas y geométricas), y plantean ejercicios.
2) Límite finito de una sucesión. Se emplean gráficas y tablas en ejemplos para introducir la definición de límite. Véanse LS99004.02.01, LS99004.02.02, LS99004.02.03, LS99004.02.04, LS99004.02.05, LS99004.02.06, LS99004.02.07 y LS99004.02.08
3) Sucesión divergente. Actividades.
4) Operaciones con sucesiones, cálculo de límites y número e.

LS99004. Detalle de los fenómenos observados

LS99004.02.01 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{1}{n}$	1	0,5	0,1	0,001	0,000001	0,00000001	…	0

LS99004.02.02 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



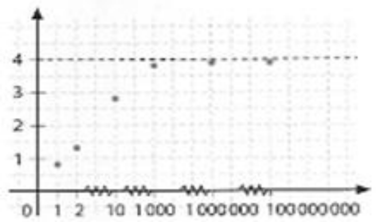
LS99004.02.03 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{4n}{n+4}$	0,8	$1,\hat{3}$	2,8571	3,9840	3,999984	3,999999984	…	4

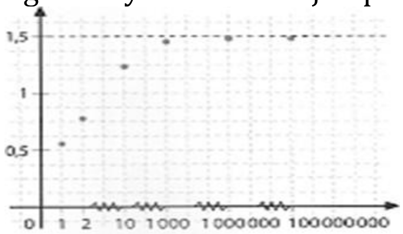
LS99004.02.04 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{3n+1}{2n+5}$	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	…	1,5

LS99004.02.05 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo. (Ver fragmento en página siguiente.)



<u>LS99004.02.06 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS99004.02.07 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

En todas las representaciones anteriores se puede observar que los términos de la sucesión se van acercando a un determinado valor constante al que, sin embargo, no acaban de llegar nunca. Este valor al que se acercan indefinidamente los términos de la sucesión recibe el nombre de **límite de la sucesión.**

<u>LS99004.02.08 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si una sucesión cualquiera a_n tiene de límite un número real L se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Una sucesión tiene límite L si, cuando n tiende a infinito, existe un n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ la diferencia entre a_n y L es cada vez menor.

Es decir, cuando $n \to \infty$, $|a_n - L| \to 0$

LS99004. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IX	208	Si			LS99004.02.01	a.s.i t-e
	208	Si			LS99004.02.02	a.s.i g-e
	208	Si			LS99004.02.03	a.s.i t-e
	208	Si			LS99004.02.04	a.s.i t-e
	208	Si			LS99004.02.05	a.s.i g-e
	208	Si			LS99004.02.06	a.s.i g-e
	208	No	13	14	LS99004.02.07	a.s.i v-e
	208	No	18	19	LS99004.02.08	a.s.i v-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS99004.02.07	LS99004.02.08	LS99004.02.02; LS99004.02.05 LS99004.02.06		LS99004.02.01; LS99004.02.03 LS99004.02.04			
ivs								
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario.</u>

Únicamente observamos el fenómeno a.s.i; este libro sigue la tendencia del anterior. El sistema de representación simbólico es el único ausente y sobresale el formato ejemplo frente al formato definición.

A4.1.6 Periodo 2000-2005

De este periodo hemos analizado tres libros de texto, todos publicados en el año 2002. Proceden del “El Mayorazgo”, de Málaga, y nuestra biblioteca personal.
Durante este periodo se promulgan la LOCE (2004) aunque su vigencia será muy corta, y la LOE, actualmente en vigor. Sin embargo, los libros estudiados solamente reflejan, como mucho, las críticas recibidas por la LOGSE.

LS00001. Ficha

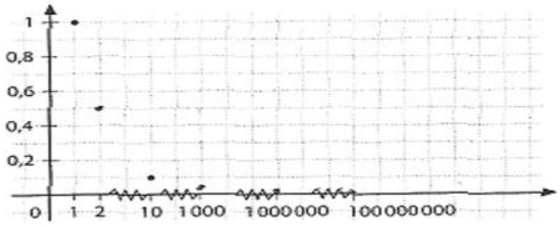
Código	LS00001
Autor	Esther Bescos, Zoila Pena
Título	Matemáticas 1º BachILLERATO (Humanidades y Ciencias Sociales)
Editorial	Oxford Educación
Año	2002
Ubicación	I.E.S. “Mayorazgo” (Málaga)
Información sobre límites	Capítulo IV. Límite y continuidad. Pp. 86-119

LS00001. Secuenciación

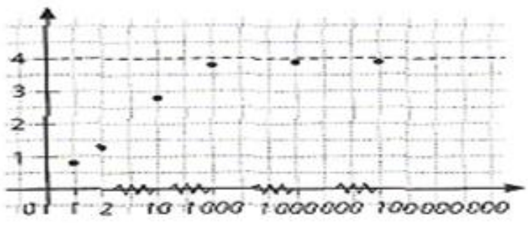
1) Definición de sucesión (como una aplicación de N en R) y de término general de una sucesión. Se presentan varias sucesiones en las que se calcula el término general.
2) Se definen las progresiones aritméticas y geométricas. Se calcula la expresión que da el término general de cada una de ellas y a continuación se realizan algunos ejemplos. Se proponen actividades y se resuelven.
3) Definición de límite usando tablas de valores y representaciones gráficas. Se da también la definición de límite usando la representación verbal. Véanse LS00001.03.01, LS00001.03.02, LS00001.03.03, LS00001.03.04, LS00001.03.05, LS00001.03.06 y LS00001.03.07

LS00001. Detalle de los fenómenos observados

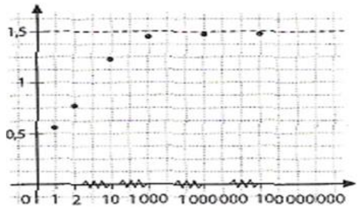
<u>LS00001.03.01 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS00001.03.02 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS00001.03.03 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo. (Véase fragmento en la página siguiente.)



LS00001.03.04 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{1}{n}$	1	0,5	0,1	0,001	0,000001	0,00000001	…	0

LS00001.03.05 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{4n}{n+4}$	0,8	$1,\widehat{3}$	2,8571	3,9840	3,999984	3,999999984	…	4

LS00001.03.06 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{3n+1}{2n+5}$	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	…	1,5

LS00001.03.07 a.s.i v-d. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Si una sucesión cualquiera de término general a_n tiene por límite un número real, L, se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Una sucesión tiene límite L si, cuando n tiende a infinito, la diferencia entre a_n y L es cada vez menor.

Es decir, cuando $n \to \infty$, $|a_n - L| \to 0$

LS00001. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IV	90	Si			LS00001.03.01	a.s.i g-e
	90	Si			LS00001.03.02	a.s.i g-e
	90	Si			LS00001.03.03	a.s.i g-e
	90	Si			LS00001.03.04	a.s.i t-e
	90	Si			LS00001.03.05	a.s.i t-e
	90	Si			LS00001.03.06	a.s.i t-e
	90	No	11	16	LS00001.03.07	a.s.i v-d

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Verbal</td><td colspan="2">Grafico</td><td colspan="2">Tabular</td><td colspan="2">Simbólico</td></tr>
<tr><td>asi</td><td></td><td>LS00001.03.07</td><td>LS00001.03.01;
LS00001.03.02;
LS00001.03.03</td><td></td><td>LS00001.03.04;
LS00001.03.05;
LS00001.03.06</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ivs</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td><td>E</td><td>D</td><td>e</td><td>d</td></tr>
</table>

Comentario.

Continúa la tendencia observada en libros anteriores: mayor importancia de la intuición respecto a la definición formal: solamente aparece el fenómeno a.s.i. Se descarta en este caso el sistema de representación simbólico. El formato ejemplo se cuenta 6 veces, frente a una sola vez el formato definición.

LS00002. Ficha

Código	LS00002
Autor	Esther Bescos, Zoila Pena
Título	Matematicas 1º Bachillerato (Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología)
Editorial	Oxford Educación
Año	2002
Ubicación	I.E.S. “Mayorazgo” (Málaga)
Información sobre límites	Tema IX. Límite y continuidad. Páginas: 202 - 229

LS00002. Secuenciación

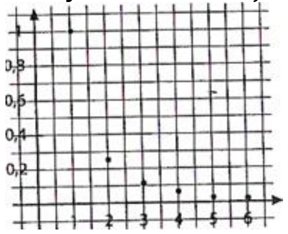
1) Término general de una sucesión, las progresiones (aritméticas y geométricas); ejercicios.
2) Límite finito de una sucesión. Gráficas y tablas en ejemplos para introducir la definición de limite. Véanse LS00002.02.01, LS00002.02.02, LS00002.02.03, LS00002.02.04, LS00002.02.05, LS00002.02.06, LS00002.02.07
3) Sucesión divergente. Actividades.
4) Operaciones con sucesiones, cálculo de límites y número e.

LS00002. Detalle de los fenómenos observados

LS00002.02.01 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

n	1	2	3	4	5	6	…	$n \to \infty$
$\frac{1}{n^2}$	1	0,25	$0,\hat{1}$	0,625	0,04	$0,02\hat{7}$	…	0

LS00002.02.02 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS00002.02.03 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

La figura 9.2 es la representación gráfica de la sucesión $b_n = \frac{4n}{n+4}$.

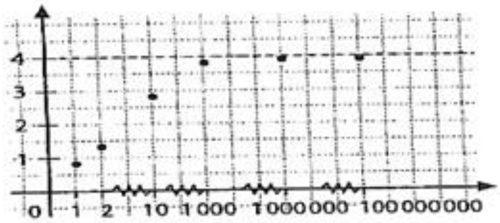
n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{4n}{n+4}$	0,8	1,3X	2,8571	3,9840	3,999984	3,999999984	…	4

LS00002.02.04 a.s.i t-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

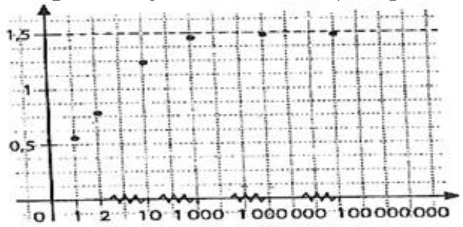
La figura 9.3 es la representación gráfica de la sucesión $c_n = \frac{3n+1}{2n+5}$.

n	1	2	10	1 000	1 000 000	100 000 000	…	$n \to \infty$
$\frac{3n+1}{2n+5}$	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	…	1,5

LS00002.02.05 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo. (Ver página siguiente.)



LS00002.02.06 a.s.i g-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



LS00002.02.07 a.s.i v-e. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

En todas las representaciones anteriores se puede observar que los términos de la sucesión se van acercando a un determinado valor al que, sin embargo, no acaban de llegar nunca. El valor al que se acercan indefinidamente los términos de una sucesión recibe el nombre de **límite de la sucesión.**

LS00002.02.08 a.s.i v-d. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Si el límite de una sucesión de término general a_n es, L, se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Una sucesión, a_n, tiene límite L si, cuando n tiende a infinito, la diferencia entre a_n y L es cada vez menor.

Es decir, cuando $n \to \infty$, $|a_n - L| \to 0$.

LS00002. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IX	206	Si			LS00002.02.01	a.s.i t-e
	206	Si			LS00002.02.02	a.s.i g-e
	206	Si			LS00002.02.03	a.s.i t-e
	206	Si			LS00002.02.04	a.s.i t-e
	206	Si			LS00002.02.05	a.s.i g-e
	206	Si			LS00002.02.06	a.s.i g-e
	206	No	13	14	LS00002.02.07	a.s.i v-e
	206	No	18	19	LS00002.02.08	a.s.i v-d

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Verbal</td><td colspan="2">Grafico</td><td colspan="2">Tabular</td><td colspan="2">Simbólico</td></tr>
<tr><td>asi</td><td>LS00002.02.07</td><td>LS00002.02.08</td><td>LS00002.02.02;
LS00002.02.05
LS00002.02.06</td><td></td><td>LS00002.02.01;
LS00002.02.03
LS00002.02.04</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ivs</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td><td>e</td><td>d</td></tr>
</table>

Comentario.

Análogo a los libros recientes: fenómeno a.s.i. No hay representación simbólica; en la práctica totalidad de casos se usa el formato ejemplo.

LS00003. Ficha

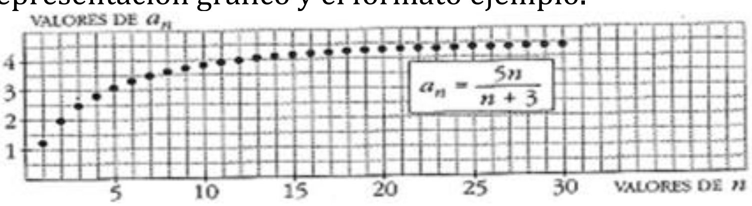
Código	LS00003
Autor	J. Colera, R. García y M. J. Oliveira
Titulo	Matemáticas I
Editorial	Anaya
Año	2002
Ubicación	Biblioteca personal
Información sobre límites	Inmerso en Capítulo II Sucesiones. Páginas 50-67

LS00003.Secuenciación

1) Se representa gráficamente la sucesión $a_n = \frac{5n}{n+3}$ y se hacen algunas observaciones sobre la gráfica representada. Véanse LS00003.01.01 y LS00003.01.02
2) Se representa gráficamente la sucesión $a_n = \frac{n^2}{5} - 4n$, que diverge.
3) Definición de límite de una sucesión. Véase LS00003.03
4) Se enuncia cómo expresar el hecho de que una sucesión tiene límite L. "*Si se acerca a un número L, decimos $a_n \to l$ o bien lim $a_n = l$.*"

LS00003. Detalle de los fenómenos observados

<u>LS00003.01.01 a.s.i g-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



<u>LS00003.01.02 a.s.i v-e</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observamos que los elementos de la sucesión se acercan cada vez más a 5. Eso lo expresamos así:

$$\text{lím } a_n = \text{lím } \frac{5n}{n+3} = 5$$

<u>LS00003.03 a.s.i v-d</u>. Se trata de una aproximación simple intuitiva, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

El límite de una sucesión es su comportamiento para términos muy avanzados, cuando n toma valores cada vez mayores.

LS00003. Cuadros-resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
(II)	57	Si			LS00003.01.01	a.s.i g-e
	57	No	8	9	LS00003.01.02	a.s.i v-e
	57	No	16	17	LS00003.03	a.s.i v-d

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
asi	LS00003.01.02	LS00003.03	LS00003.01.01					
ivs								
	e	d	e	d	e	d	e	d

<u>Comentario.</u>

En este libro, como en los anteriores, solamente incluyen el fenómeno a.s.i (3 ocurrencias). Los sistemas de representación usados son el verbal y el gráfico, mientras que los formatos están todos: formato ejemplo (2) y formato definición (1).

Capítulo 5º: Fenómenos *a.s.i* é *i.v.s* en producciones de alumnos

Introducción

En este capítulo exponemos nuestra búsqueda de los fenómenos a.s.i e i.v.s en las producciones de los alumnos.

En 5.1 explicamos los pasos seguidos para la elaboración de un instrumento de recogida de información y la resolución de las dificultades encontradas. En un primer paso, elaboramos un cuestionario previo y lo sometimos al juicio de expertos, profesores de instituto, cuyas aportaciones permitieron valorar la pertinencia o relevancia de las preguntas y ayudaron a construir un cuestionario piloto. Éste se administró a un grupo de alumnos de 2º de bachillerato, del instituto "José Hierro" (Getafe, Madrid).

En la corrección de las respuestas al cuestionario piloto, vimos la necesidad de diseñar con cierto cuidado unas categorías de análisis de las respuestas que sirvieran para futuras actuaciones orientadas a reconocer los fenómenos a.s.i e i.v.s en las producciones de los alumnos.

Tras el estudio de las respuestas, estuvimos en condiciones de elaborar un instrumento.

El apartado 5.2 se orienta a describir el proceso de administración del cuestionario, incluyendo la búsqueda de Institutos para administrarlo, muestra, personas que colaboraron y fechas. Los cuestionarios se corrigieron usando las categorías aludidas, de manera que cada respuesta dada por un alumno a cada pregunta quedó asociada a una sola categoría.

El análisis de los resultados lo hemos llevado a cabo según tres ideas diferentes. En la primera (apartado 5.3), hemos estudiado las categorías observadas en los diferentes grupos que participaron en el estudio, sin considerar ninguna otra variable distintiva. Esto lo hemos hecho considerando agregados cada vez más amplios; en primer lugar, estudiamos separadamente los grupos de cada Instituto que participaron en el estudio; en segundo lugar, agregamos los grupos participantes del mismo instituto; en tercer lugar, estudiamos de manera global las categorías obtenidas en las respuestas de los alumnos de los tres institutos estudiados. Para facilitar la lectura e interpretación, hemos usado un mismo criterio de organización de la información en los tres niveles de agregación.

En la segunda (apartado 5.4), hemos estudiado las respuestas (más precisamente, las categorías asociadas a las respuestas), teniendo en cuenta las variables "sexo" y "edad", que fueron preguntadas en el cuestionario. Hemos mantenido, obviamente, los tres niveles de agregación mencionados más arriba y hemos mantenido, en todos ellos, la misma estructura de la información; no obstante, cuando no ha sido necesario no hemos presentado todos los resultados.

Antes de iniciar la tercera parte, el breve apartado 5.5 presenta una comparación entre lo estudiado para los libros de texto del período 2000-2005 y las respuestas obtenidas de los alumnos.

Pareció totalmente natural dedicar un apartado (5.6) a estudiar la relación de independencia o dependencia existente entre las variables categorías y edad y las variables categorías y sexo. Este estudio se apoya en el test chi-cuadrado de contingencia (Pearson) y lo hemos hecho teniendo en cuenta cada instituto, tanto separada como conjuntamente.

Un apartado de conclusiones (5.7) resume brevemente el trabajo realizado hasta ahora.

5.1 Construcción del instrumento

Para la construcción del instrumento, hemos seguido tres etapas.

Primera etapa: Elaboración de un cuestionario inicial para su revisión por expertos (en este caso, profesores de institutos).

Segunda etapa. Elaboración de una prueba piloto; Administración de esta prueba con un grupo de ensayo. Estudio de las respuestas de los alumnos para tomar decisiones sobre el instrumento: redacción definitiva del cuestionario y de las categorías de análisis.

Tercera etapa. Elaboración efectiva del instrumento: cuestionario y categorías de análisis asociadas.

5.1.1 Primera Etapa: Borrador de cuestionario y consulta a expertos

En el capitulo anterior hemos estudiado los fenómenos a.s.i e i.v.s en libros de texto y hemos observado que, en el periodo 1990-2005, se da una mayor frecuencia, en la definición de límite, del primero con respecto al segundo. Por ello, una primera decisión consistió en estudiar, en las producciones de los alumnos, las diferentes presentaciones del fenómeno a.s.i y elegimos los siguientes códigos de fenómeno: a.s.i v-e. a.s.i g-e y a.s.i t-e; descartamos el código a.si. s-e porque no se observa en los libros analizados del período LOGSE.

5.1.1.1 Cuestionario inicial

El cuestionario inicial se compuso de 12 preguntas y tuvo en cuenta las siguientes variables:

1º) Se distinguió entre sucesión creciente y sucesión decreciente, porque consideramos que el carácter creciente o decreciente de una sucesión influiría en las respuestas obtenidas. Pretendíamos, por lo tanto, detectar casos como el siguiente: un alumno dice que la sucesión 1/n decrece siempre y su límite por lo tanto es “-∞”, mientras que la sucesión 3-1/n crece y su límite es 3 porque nunca llega a pasar de 3.

2º) Se distinguió entre enunciado matemático y enunciado de la vida cotidiana, porque los enunciados del último tipo ayudan a los alumnos a ver la aplicación de los conceptos matemáticos y esto puede hacer que se impliquen más en sus respuestas.

3º) Se presentaron cuestiones en las que se emplearon los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular.

4º) Solamente presentamos sucesiones convergentes con límite finito, excluyendo situaciones atípicas, como las llamadas sucesiones dobles.

El cuestionario inicial se reproduce en el anexo 5.1.

5.1.1.2 Revisión del cuestionario inicial por expertos

Para avanzar en la prueba piloto, se suministró una copia a 5 profesores del Departamento de Matemáticas del IES "José Hierro" (Getafe, Madrid), donde ejercíamos como docente. El departamento está formado por más profesores, pero solamente hay 5 que se han ocupado en algún momento de enseñar el concepto de límite de una sucesión.

A la entrega del cuestionario se hizo la aclaración de que no se trata de examinarlos a ellos, sino de ver si las preguntas del cuestionario son "adecuadas" para el estudio del límite finito de una sucesión. Se les pide que anoten sus sugerencias en el propio cuestionario. En ningún momento se explicó nada relativo a los fenómenos que deseamos observar, sólo se pidió la "adecuación" de las cuestiones enunciadas.

El término "adecuada" es usado de manera intencionadamente genérica, para dejar un campo abierto a sus posibles críticas. Las principales recomendaciones de los expertos se indican a continuación, al justificar las decisiones que condujeron a la prueba piloto. Se recibieron cuatro respuestas, que se incluyen en el anexo 5.1.

5.1.2 Segunda etapa: Prueba piloto

5.1.2.1 Decisiones

Como consecuencia de las consideraciones de los expertos, tomamos las siguientes decisiones:

(1) Supresión de los "problemas de la vida real". Éstos ponen en juego connotaciones que no parecen necesarias para nuestro estudio. Por ejemplo: en un problema sobre economía, el enunciado comenzaba así:

El enriquecimiento de una persona sigue la siguiente sucesión, medida en millones de euros: 8´9, 8´99, 8´999, 8´9999, ...

Según este ejemplo deberíamos manejar infinitas cifras decimales, pero no tiene sentido hacer esto, ya que las cifras a partir de un cierto orden decimal no se consideran en economía.

(2) Supresión de la distinción entre sucesión creciente y decreciente. Los profesores expertos consideraron que las tareas en las que se distinguía en un mismo sistema de representación entre sucesión creciente y decreciente, no discriminaban sobre la definición de límite, propiamente dicha.

(3) Eliminación, cuando se daba en alguna pregunta, del término general de la sucesión. Se evita así que los alumnos empleen teoremas sobre el cálculo de límites, en lugar de usar el sistema de representación que a continuación se les presentaba.

(4) Introducción "liviana" del fenómeno i.v.s para buscar una cierta semejanza con lo que suele explicarse en algunas clases.

5.1.2.2 Diseño básico

Teniendo en cuenta estos resultados el cuestionario piloto se redujo a tres cuestiones: una, para el código de fenómeno a.s.i g-e, otra, para el código de fenómeno a.s.i t-e; la última, estuvo dedicada a la representación verbal, y la estructuramos en dos partes, una, para el código de fenómeno a.s.i v-e y otra, para el código de fenómeno i.v.s v-e.

5.1.2.3 Objetivos

Los objetivos generales de este cuestionario son:

1) Detectar el fenómeno a.s.i en las respuestas de los alumnos
2) Confirmar nuestra conjetura (como docentes) de que los alumnos no manejan el fenómeno i.v.s
3) Observar si los sistemas de representación usados en los enunciados de las preguntas (verbal, gráfico y tabular), tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos.
4) Detectar errores debidos a la mala elaboración del cuestionario.

Además de estos objetivos generales, cada pregunta tenía un objetivo específico bien delimitado que ayudaba a la consecución de los objetivos generales definidos anteriormente:

Preguntas 1ª, 2ª y 3ª, en su primera parte) Observar la "visión intuitiva" del límite finito de sucesiones por los alumnos y reconocer los códigos de fenómenos empleados en la justificación de la respuesta.

Pregunta 3ª, en su segunda parte) Observar el grado de manejo de la función épsilon-N_0 al decidir si una sucesión tiene determinado límite finito.

5.1.2.4 Muestra

La prueba piloto se administró a ocho alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales del IES "José Hierro" (Getafe, Madrid). El criterio de selección de la muestra fue el siguiente: "se eligieron aquellos alumnos que estaban trabajando en clase de manera individual". Con ello, quedaron fuera (de la selección) 7 alumnos que estaban sentados en grupos de tres y de dos; así, creemos, conseguimos no alterar el ritmo de la clase: un grupo de 8 alumnos realizó un cuestionario, que no era un examen, porque no lo hacían todos, y los otros hicieron los ejercicios de clase mandados por el profesor. Se pretendió crear ante la prueba un clima de naturalidad, como si se tratara de un ejercicio de clase.

La clase estaba compuesta por 15 alumnos y hay que reseñar el interés que mostraron sobre las cuestiones presentadas.

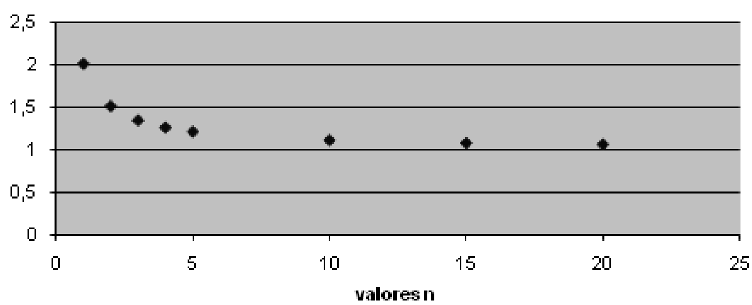
Se pidió que rellenaran unos datos adicionales, necesarios para conocer su trayectoria escolar: nombre, curso, centro, nota de matemáticas en el curso anterior, edad, sexo, asignatura de matemáticas que cursan, y libro de texto que estaban manejando; también se preguntó si repetían curso o no.

He aquí una descripción superficial de esta muestra de ocho alumnos: Dos alumnos no dieron esos datos personales; hay solamente un repetidor que no se presentó el año anterior a ningún examen de Matemáticas; manejan el libro Anzola González, M. y Vizmanos Buelta, J. (2002); el rango de notas es el intervalo [5, 7].

5.1.2.5 Preguntas

Las cuestiones tuvieron la siguiente estructura: El profesor preguntaba a la clase si la sucesión presentada tenía límite. A continuación un alumno ficticio daba una respuesta. Se pedía, a los sujetos, si estaban de acuerdo con la respuesta del alumno y además que justificasen su propia respuesta. Todas las sucesiones presentadas tenían límite finito.

Cuestión nº 1: *Se representa gráficamente una sucesión El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: "El límite es 1 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 1" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.*



Cuestión nº 2: Dada la siguiente sucesión:

n	a_n
1	1.9
2	1.99
3	1.999
4	1.9999
5	1.99999

6	1.999999
7	1.9999999
8	1.99999999
...	...

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: “El límite es 2, porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 2” ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

Cuestión nº 3: La sucesión siguiente cumple: su primer término vale 3.9, su segundo término vale 3.99, su tercer término vale 3.999, su cuarto término 3.9999, su quinto término 3.99999, su sexto término 3.999999, su séptimo término 3.9999999, su octavo término 3.99999999 y así, sucesivamente.

Un alumno afirma: “Esta sucesión tiene límite 4, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 4” ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta

Otro alumno afirma: “Esta sucesión tiene límite 4, porque para cualquier entorno de 4 que tomemos, se cumple que existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos de la sucesión quedan dentro de ese entorno” ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

5.1.2.6 Categorías para el análisis de las respuestas

Las seis categorías que se presentan fueran extraídas inductivamente de las respuestas dadas a las cuestiones presentadas en el estudio piloto.

Categoría C1: “Justifica empleando la respuesta dada en el enunciado”.

Categoría C2: “Contesta erróneamente”.

Categoría C3: “Identifica la afirmación que aparece en el enunciado de la cuestión como la definición de límite”.

Categoría C4: “Responde bien y justifica su respuesta”.

Categoría C5: “Plantea la necesidad de conocer más valores de ‘x’ o ‘f(x)’”. Algunos alumnos emplearon esta respuesta, en algunas de las preguntas del cuestionario. En este caso los alumnos usaron la variable x, para referirse a los valores 1,2,3,... . En general suele usarse la variable “n” para sucesiones, en las que el dominio es N y “x”, para las funciones reales, en las que el dominio es R.

Categoría C6: “No sabe / No contesta”.

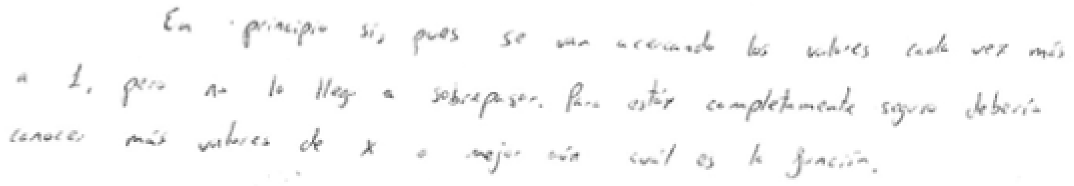
5.1.2.7 Resumen de las respuestas obtenidas

La tabla 5.1 resume los resultados obtenidos. Cada respuesta dada por un alumno ha sido anotada con el símbolo “X”.

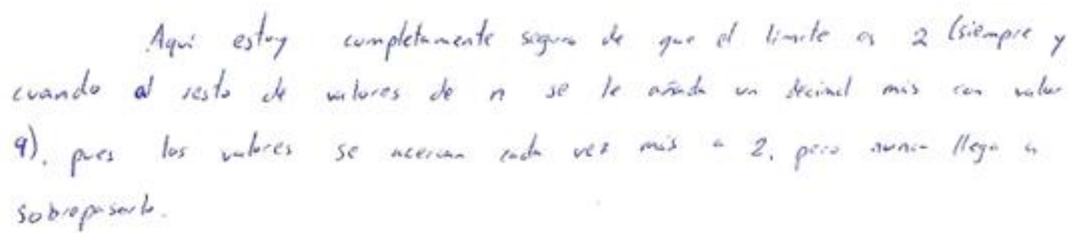
	Cuestión nº 1	Cuestión nº 2	Cuestión nº 3, “a”	Cuestión nº 3, “b”	Observaciones
C1	X^1, X, X, X, X	X^2, X, X, X, X	X, X, X		X^1 indica una respuesta a la cuestión nº 1 que puede corresponderse con las categorías 1 y 5. X^2 indica una respuesta a la cuestión nº 2 que puede corresponderse con las categorías 1 y 5.
C2	X	X	X, X		
C3	X				
C4	X	X	X		
C5	X^1	X^2			
C6		X	X, X	X, X, X, X, X, X, X, X	

Tabla 5.1 Resumen de las respuestas a la prueba piloto.

A fin de aclarar las marcas X^1 y X^2, presentamos los siguientes ejemplos:


En principio sí, pues se van acercando los valores cada vez más a 1, pero no lo llega a sobrepasar. Para estar completamente seguro debería conocer más valores de x o mejor aún cuál es la función.

Ejemplo de *X^1*. Esta respuesta se corresponde con la categoría C1, ya que el alumno emplea en la frase “*pues se van acercando los valores cada vez más a 1*”, la misma justificación que el alumno ficticio que aparece en el enunciado de la primera pregunta del cuestionario. También cabe en la categoría C5, ya que el alumno plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión en la frase “*para estar completamente seguro debería conocer más valores de x o mejor aún cuál es la función*”.


Aquí estoy completamente seguro de que el límite es 2 (siempre y cuando al resto de valores de n se le añada un decimal más con valor 9), pues los valores se acercan cada vez más a 2, pero nunca llega a sobrepasarlo.

Ejemplo de X^2. Esta respuesta se corresponde con la categoría C1, ya que el alumno emplea en la frase "*pues los valores se acercan cada vez más a 2*", la misma justificación que el alumno ficticio que aparece en el enunciado de la segunda pregunta del cuestionario. También cabe en la categoría C5, ya que el alumno plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión en la frase "*siempre y cuando al resto de valores de n se le añada un decimal más con valores 9*".

La tabla 5.2 reúne las frecuencias asociadas a cada una de las categorías reseñadas. Observamos que C1 es la categoría más frecuente (13 ocurrencias) y C3 es la menos frecuente (1).

Categorías	Frecuencias
C1	13
C2	4
C3	1
C4	3
C5	2
C6	11

Tabla 5.2 Prueba piloto: frecuencias de las categorías

5.1.2.8. Conclusiones de la prueba piloto

De las respuestas de los alumnos en la prueba piloto extraemos las siguientes conclusiones:

(1) Los alumnos no manejan el concepto de entorno. Esto hace que no entiendan el enunciado dado en la pregunta n º 3, apartado b y que contesten todos "no sabe / no contesta". Esto obliga bien a evitar o bien a explicar la palabra 'entorno' cuando empleemos el fenómeno de retroalimentación. Si la evitamos, habrá que sustituirla por otra suficientemente descriptiva, que permita conocer si los alumnos reconocen y emplean el fenómeno.

(2) La categoría C1, en la que el alumno emplea la respuesta dada por el alumno ficticio, es la más frecuentemente asociada a las respuestas dadas por los alumnos, principalmente, en las preguntas 1ª y 2ª. Esto condujo a adoptar un cambio en la redacción de las condiciones de la prueba, que implicó incluir la

siguiente recomendación: "*preferimos que, en las respuestas, uses tus propias frases para explicar si la solución tiene límite o no.*

(3) Por una parte, los alumnos emplean las respuestas del alumno ficticio como justificación de que la sucesión presentada tiene límite y, por otra, dicha justificación se apoya en el código de fenómeno a.s.i v-e. Esto lleva a conjeturar que los alumnos podrían identificar este código de fenómeno con la propia definición de límite finito de la sucesión. (Se trata de una mera conjetura; encontramos evidencia escrita en el texto de un solo alumno.)

(4) Solamente un alumno contestó correctamente a las tres preguntas (con la excepción del apartado b de la pregunta n º 3), y justificó sus respuestas de manera correcta. Este hecho lleva a suponer que serán pocos los alumnos que tengan un conocimiento exhaustivo y bien delimitado del límite finito de una sucesión.

(5) En la primera cuestión hay una respuesta errónea, en la segunda cuestión hay una respuesta errónea y una respuesta "no sabe / no contesta" y en la tercera cuestión, apartado "a", hay dos respuestas erróneas y dos respuestas "no sabe / no contesta". Teniendo en cuenta estos datos y que cada cuestión correspondía a un sistema de representación distinto: gráfico, tabular y verbal, conjeturamos que, al usar el sistema de representación gráfico, se produce el mayor porcentaje de éxito.

(6) Solamente hay un alumno que se plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión para asegurar con certeza cuál es su límite. Esta petición se enfrenta a una de las sugerencias de los expertos; resolveremos la contradicción indicando, en las condiciones de la prueba, que quienes necesiten más valores de la lista podrán pedírselos al investigador, el cual dará la información. Además de esto se decidió que la información se daría solamente a aquellos alumnos que planteasen la necesidad de conocer más valores de la sucesión y no a todos en general.

(7) No hemos comprobado si se ha cumplido el objetivo general 1º (véase 5.1.4.2), ya que no sabemos si los alumnos emplean de manera espontánea los fenómenos de aproximación intuitiva, o si lo hacen por contaminación de la respuesta del alumno ficticio.

(8) No tenemos argumentos para afirmar que los alumnos manejen los fenómenos de retroalimentación en sucesiones, ya que no manejan la idea de entorno, palabra empleada en el enunciado de la cuestión como elemento de los fenómenos de retroalimentación.

(9) Creemos haber logrado el objetivo general 3º, ya que hemos observado un mayor porcentaje de éxito en la cuestión en la que se empleaba el sistema de representación gráfico, estableciéndose así diferencias entre éste y los sistemas de representación verbal y tabular.

(10) Creemos haber logrado el objetivo general 4º, ya que hemos detectado que al dar una posible respuesta a la cuestión presentada (respuesta de un alumno ficticio), ésta se emplea en las respuestas de los alumnos.

(11) Los sujetos justificaron sus respuestas empleando las respuestas atribuidas al alumno ficticio. Esto ha impedido detectar los fenómenos que emplearían los alumnos si hicieran sus propias justificaciones. En consecuencia, no hemos podido lograr los objetivos específicos mencionados en 5.1.4.2.

5.1.3 Tercera etapa: Elaboración del instrumento

El cuestionario definitivo tuvo en cuenta las conclusiones obtenidas en el apartado anterior, así como las observaciones realizadas por los investigadores presentes en la reunión del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (2007), al documento "Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento" (Claros, Sánchez, y Coriat, 2007), realizado en Aravaca (Madrid).

El cuestionario definitivo consta de tres preguntas, la primera, relativa al código de fenómeno a.s.i g-e, la segunda, relativa al código a.s.i t-e y la tercera (dividida en dos apartados) relativa al código a.s.i v-e y al código i.v.s. v-e. Los enunciados no coinciden con los de la prueba piloto, pero mantienen la estructura de ésta. Las instrucciones para la realización se suministraron con el propio cuestionario.

El cuestionario y sus instrucciones se reproducen en el anexo 5.2.

Para la corrección del cuestionario establecimos las categorías definitivas siguientes:

Categoría C0: "Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea la justificación dada por el alumno ficticio".

Categoría C1: "Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea algún fenómeno en sus justificaciones".

- Categoría C1.1 Emplea el código de fenómeno a.s.i g-e.
- Categoría C1.2 Emplea el código de fenómeno a.s.i t-e.
- Categoría C1.3 Emplea el código de fenómeno a.s.i v-e.
- Categoría C1.4 Emplea el código de fenómeno i.v.s v-e.

Categoría C2: "Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada, pero no emplea ningún fenómeno en sus justificaciones".

- Categoría C2.1 Justifica su respuesta de alguna manera, sin emplear ningún fenómeno.
- Categoría C2.2 No justifica su respuesta.

Categoría C3 No calcula correctamente el límite.

- C 3.1 Usa una idea de infinito potencial.
- C 3.2 No usa una idea de infinito potencial.
- (Ejemplo: Si el alumno contesta que la sucesión 0,9, 0,99, 0,999... tiende a 0,99999...=0, $\widehat{9}$, y no tiende a 1, ha calculado incorrectamente el límite y maneja una idea de infinito potencial.)

Categoría C4: "Plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión"

Categoría C5: "No sabe / No contesta".

Tabla 5.3 Categorías para la corrección de las respuestas al cuestionario

El cuidado en la definición de las categorías era imprescindible porque, a diferencia de los libros de texto, no podíamos garantizar que las respuestas a nuestras preguntas fueran matemáticamente correctas. Por esta razón, en el estudio descriptivo nos referimos a las categorías, aunque solamente cuatro de ellas corresponden, efectivamente, a códigos de fenómenos definidos en el capítulo 3º.

5.2 Administración del cuestionario

5.2.1 La muestra y su estructura

El cuestionario se administró en tres IES: “José Hierro” (Getafe, Madrid), “Celestino Mutis” y “Dámaso Alonso”, ambos de Madrid. El segundo se halla en una zona donde predomina lo que sociológicamente se denomina clase media-baja; los otros dos se hallan en zonas de clase media-alta. Se eligieron estos Centros porque en cada uno de ellos había un antiguo compañero de trabajo que estaba dispuesto a colaborar en el estudio. Antes de administrar el cuestionario nos reunimos con cada uno de ellos y les hicimos una pequeña entrevista, en la que preguntamos, entre otras cosas, si habían explicado este año el concepto de límite en alguno de los grupos que tenían, y qué grupos tenían asignados. A continuación les comentamos que queríamos observar las respuestas de los alumnos ante un cuestionario en el que aparecían cuestiones relativas al límite de una sucesión. Después de fijar los días en los que podía acudir a sus respectivos centros, recibieron una copia del cuestionario.

De los 143 alumnos que participaron, 64 fueron hombres y 79 mujeres. Las edades oscilaban entre 16 y 20 años. Hay que señalar el interés que mostraron los alumnos ante las instrucciones del cuestionario y en la realización de la prueba.

La participación por Centro y grupo se describe en la tabla 5.4

<table>
<tr><th>Institutos</th><th>Grupos</th><th colspan="2">Subtotales</th></tr>
<tr><td rowspan="4">“José Hierro”</td><td>1º Bachillerato A</td><td>14</td><td rowspan="4">57</td></tr>
<tr><td>1º Bachillerato B</td><td>20</td></tr>
<tr><td>2º Bachillerato B</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2° Bachillerato C</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">“Celestino Mutis”</td><td>1º Bachillerato A</td><td>22</td><td rowspan="2">50</td></tr>
<tr><td>1º Bachillerato B</td><td>28</td></tr>
<tr><td rowspan="2">“Dámaso Alonso”</td><td>1º Bachillerato X</td><td>21</td><td rowspan="2">36</td></tr>
<tr><td>1º Bachillerato Y</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tabla 5.4 Distribución de sujetos por Centro y grupo</td></tr>
</table>

Éstos eran los grupos en los que los profesores impartían docencia. El cuestionario se administró a un grupo de 2º de bachillerato de ciencias sociales del IES "José Hierro", donde el investigador imparte actualmente docencia, pero en el cual no se explicó el concepto de límite de una sucesión durante ese curso.

En el proceso de recogida de datos estovo presente en todo momento el investigador, que observó cómo los alumnos realizaban el cuestionario. En cada IES, también estuvo presente el profesor colaborador en el estudio. El calendario de administración se indica en la tabla 5.5; las fechas se eligieron a conveniencia del investigador

IES	Fecha de administración
"José Hierro"	19/abril/2007
"Celestino Mutis"	10/mayo/2007
"Dámaso Alonso"	14/junio/2007

Tabla 5.5. Calendario de administración del cuestionario

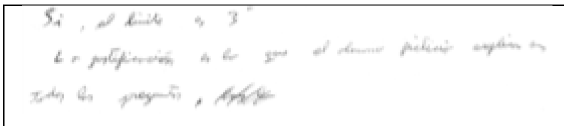
Los resultados de las respuestas obtenidas se han corregido siguiendo las categorías de la tabla 5.3. A continuación, hicimos el recuento de cada categoría en los tres niveles de agregación indicados: Grupo, Centro y Global.

Se han obtenido conclusiones por institutos y conclusiones globales. Se han relacionado las respuestas con algunas variables secundarias, como edad y sexo.

5.2.2 Ejemplos de asignación de categorías

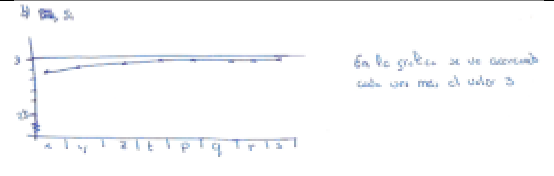
Este apartado presenta ejemplos de respuestas de alumnos y la asignación de categorías (ver tabla 5.3) que hemos realizado.

(1º) Ejemplo de la categoría C0 asignada a una respuesta a la cuestión n º 1. (IES "Dámaso Alonso", 1º de bachillerato X)

	Transcripción: *Sí, el límite es 3. La justificación es la que el alumno ficticio explica en todas las preguntas*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C0, ya que emplea la misma justificación dada por el alumno ficticio. (En este caso, el empleo corresponde a darla por buena.)

(2º) Ejemplo de la categoría C1.1, asignada a una respuesta a la pregunta n º 3, b. (IES "José Hierro", 2º de bachillerato C)

	Transcripción: Hace una dibujo. "*Sí. En la gráfica se va acercando cada vez más al valor 3*"

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C1.1; emplea el fenómeno a.s.i, usa la representación gráfica y el formato ejemplo.

Anotamos que no presentamos ejemplo de la categoría C1.2 porque ningún alumno ha empleado el fenómeno de aproximación intuitiva tabular ejemplo

(3º) Ejemplo de la categoría C1.3, asignada a una respuesta a la pregunta n º 1. (IES "Dámaso Alonso", 1º de bachillerato X)

- Es verdadera, ya que cuando n se va haciendo más grande, la sucesión se va acercando a 3.	Transcripción: *"-Es verdadera, ya que cuando n se va haciendo más grande, la sucesión se va acercando a 3."*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C1.3 porque maneja el fenómeno a.s.i, usa la representación verbal y el formato ejemplo.

(4º) Ejemplo de la categoría C1.4, asignada a una respuesta a la pregunta n º 3, b. (IES "José Hierro", 2º de bachillerato B)

(b) Teniendo en cuenta que una sucesión de números reales a_n tiene por límite el número real a, cuando para todo número real positivo ε existe un número natural n^*, tal que para todo $n>n^*$ se verifica que $\|a_n-a\|<ε$. Estoy de acuerdo con la afirmación, siempre que el número al que se reduzca sea menor que el número ε.	Transcripción: *"Teniendo en cuenta que una sucesión de número reales a_n tiene por limite el número real a, cuando para todo número real positivo ε existe un número natura n^*, tal que para todo $n>n^*$ se verifica que $\|a_n-a\|<ε$ Estoy de acuerdo con la afirmación, siempre que el número al que se reduzca sea menor que el número ε"*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C1.4 porque surge el fenómeno i.v.s, usa el sistema de representación el verbal y el formato ejemplo

(5º) Ejemplo de la categoría C2.1, asignada a una respuesta a la pregunta n º 2. (IES "José Hierro", 1º de bachillerato B)

	Transcripción: *"Si porque la a_n tiende 1 y nunca va a pasar de 1,5 por lo tanto es un límite"*

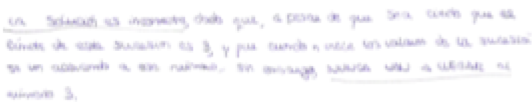
Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C2.1 porque calcula correctamente el límite de la sucesión y justifica su respuesta de alguna manera sin emplear ninguno de los fenómenos que manejamos (a.s.i e i.v.s)

(6º) Ejemplo de la categoría C2.2, asignada a una respuesta a la pregunta n º 2. (IES "José Hierro", 1º de bachillerato B)

	Transcripción: *"Sí, estoy de acuerdo"*

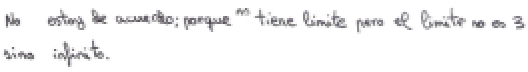
Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C2.2 porque el alumno calcula correctamente el límite de la sucesión presentada pero no justifica su respuesta.

(7º) Ejemplo de la categoría C3.1, asignada a una respuesta a la pregunta n º 1. (IES "José Hierro", 2º de bachillerato B)

	Transcripción: *"La solución es incorrecta dado que a pesar de sea cierto que el límite de esta sucesión, y que cuando n crece los valores de la solución se van acercando a ese número, sin embargo nunca va a llegar al número 3"*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C3.1 porque no calcula correctamente el límite y además en su respuesta aparece el infinito potencial expresado a través de la frase "nunca va a llegar al número 3".

(8º) Ejemplo de la categoría C3.2, asignada a una respuesta a la pregunta n º 1. (IES "Celestino Mutis", 1º de bachillerato B)

	Transcripción: *"No estoy de acuerdo; porque no tiene limite pero el limite no es 3 sino infinito"*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C3.2 porque el alumno no calcula correctamente el límite de la sucesión presentada; afirma, erróneamente, que no es 3. Además no usa el infinito potencial.

(9º) Ejemplo de la categoría C4, asignada a una respuesta a la pregunta n º 1. (IES "Celestino Mutis", 1º de bachillerato A) (Página siguiente.)

No, solo con esta grafica no podriamos afirmar que el limite de esta sucesión sea 3, habría que dar valores mucho mas altos que 10 para saberlo.	Transcripción: *"No, solo con esta gráfica no podríamos afirmar que el límite de esta sucesión sea 3, habría que dar valores mucho mas altos que 10 para saberlo"*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C4, porque el alumno plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión. Así interpretamos su texto *"… habría que dar valores mucho más altos…".*

(10º) Ejemplo de la categoría C5, asignada a una respuesta a la pregunta n º 3. (IES "Celestino Mutis", 1º de bachillerato B)

a)(~~Sí, porque~~) No entiendo su pregunta b) No entiendo su pregunta.	Transcripción: *"a) (~~Sí, porque~~) No entiendo su pregunta"* *b) No entiendo su pregunta"*

Consideramos la respuesta como ejemplo de la categoría C5 porque el alumno no contesta nada.

5.3 Estudio descriptivo

Este apartado presenta los resultados obtenidos, una vez corregidas las respuestas a los cuestionarios administrados.

En la corrección, asignamos una sola categoría por respuesta y alumno. Seguidamente, hicimos un recuento de categorías distinguiendo los tres niveles anunciados: grupo, centro y global; el nivel de centro se obtiene por agregación de los grupos de ese centro y el nivel global por agregación de los centros. Hubiera sido deseable estudiar las modalidades de bachillerato separadamente, pero no tuvimos grupos de ambos cursos en todas ellas, como indica la tabla 5.4.

5.3.1 Criterios de presentación y códigos de etiquetas

La información obtenida la presentamos, básicamente, en dos soportes: tablas y resultados – explicaciones.

El título de cada tabla para cada grupo lo hemos codificado así: Ixy Buv Ct Gs

Ixy: La I, significa "IES"; la xy remite a las iniciales del nombre del Instituto; xy toma los valores JH, CM y DA.

Buv: La B, significa "modalidad de bachillerato"; uc toma los valores CS (Ciencias Sociales) y NS (Ciencias de la Naturaleza y de la Salud).

Ct: La C, significa "curso"; t toma los valores 1, para Primer Curso, y 2, para Segundo Curso.

Gs: La G, significa "grupo"; s toma los valores A, B, C, X o Y.

Por ejemplo: el código "IJH BCS C2 GC. Resultados" en el encabezado de una tabla significa: "Resultados para el IES "José Hierro", Bachillerato de Ciencias Sociales, Curso 2º, grupo C".

A cada pregunta del cuestionario le hemos asociado tres campos: CAT, correspondiente a las categorías asignadas, FRABS, contiene la frecuencia absoluta, obtenida como recuento de ocurrencias de la categoría, y %, muestra la misma información como tanto por ciento. La abreviatura "NHD" significa "no hay ocurrencia de la categoría; cuando esto ocurre para todas las preguntas, hemos tachado la línea, para enfatizarlo. En cada categoría y pregunta, el porcentaje se ha redondeado a la cifra de las unidades.

Terminada cada tabla, enunciaremos resultados de su estudio; cada resultado va precedido de una información identificadora formada por el código del IES seguido de una letra R (por "resultado") y de un número de orden de dicho resultado. Por ejemplo: el código "JHR3" remite al tercer resultado enunciado para el IES "José Hierro". Análogamente, cada intento de explicación va precedido por el código del IES seguido de una letra E·(por "explicación propuesta") y de un número de orden de dicho intento. A veces, un intento de explicación será un simple comentario. Cuando agreguemos los tres institutos, usaremos las letras A3 (por "agregación de los tres centros") en lugar de las iniciales de los respectivos nombres.

5. 3.1 Resultados obtenidos en el IES "José Hierro"

5.3.1.1 Tablas de grupo y tabla agregada para el Centro.

Presentamos los resultados obtenidos en cada uno de los cuatro grupos que participaron en el estudio. Hemos incluido una tabla final que incluye la agregación de los grupos del mismo instituto. Ver tablas 5.6 a 5.10, páginas siguientes.

Tabla 5.6: IJH BCS C2 GC. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	1	9	NHD	NHD	1	9	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	9
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	6	54	7	64	6	54	2	18
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	1	9	2	18	1	9	2	18
C2.2	2	18	1	9	NHD	NHD	2	18
C3.1	1	9	NHD	NHD	1	9	NHD	NHD
C3.2	NHD	NHD	1	9	2	18	3	27
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	9
TOT	11	100	11	100	11	100	11	100

Tabla 5.7 IJH BCS C2 GB. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	7	58	7	58	4	33	2	17
C1.4	1	8	1	8	NHD	NHD	2	17
C2.1	3	25	2	17	6	50	1	8
C2.2	NHD	NHD	1	8	NHD	NHD	NHD	NHD
C3.1	1	8	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD
C3.2	NHD	NHD	1	8	2	17	4	33
C4	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	8
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	2	17
TOT	12	100	12	100	12	100	12	100

Tabla 5.8 IJH BNS C1 GA. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	NHD	NHD	NHD	NHD	1	7	NHD	NHD
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	4	29	5	36	2	14	1	7
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	8	57	7	50	7	50	3	21
C2.2	NHD	NHD	1	7	2	14	1	7
C3.1	1	7	NHD	NHD	1	7,14	NHD	NHD
C3.2	1	7	NHD	NHD	NHD	NHD	6	43
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	NHD	NHD	1	7	1	7	3	21
TOT	14	100	14	100	14	100	14	100

Tabla 5.9 IJH BNS C1 GB. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	NHD	NHD	1	5	1	5	NHD	NHD
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	7	35	6	30	6	30	1	5
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	7	35	6	30	6	30	4	20
C2.2	1	5	2	10	1	5	1	5
C3.1	3	15	1	5	1	5	1	5
C3.2	2	10	2	10	3	15	5	25
C4	NHD	NHD	1	5	NHD	NHD	NHD	NHD
C5	NHD	NHD	1	5	2	10	8	40
TOT	20	100	20	100	20	100	20	100

Tabla 5.10 IJH Agregados. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	1	2	1	2	3	5	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	2
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	24	42	25	44	18	32	6	11
C1.4	1	2	1	2	NHD	NHD	2	4
C2.1	19	33	17	30	20	35	10	18
C2.2	3	5	5	9	3	5	4	7
C3.1	6	11	1	2	3	5	1	2
C3.2	3	5	4	7	7	12	18	32
C4	NHD	NHD	1	2	NHD	NHD	1	2
C5	NHD	NHD	2	4	3	5	14	25
TOT	57	100	57	100	57	100	57	100

5.3.1.2 Resultados del I.E.S "José Hierro"

Respuestas más frecuentes.

JHR1. La categoría C1.3. El porcentaje está próximo al 50%. Se da en las preguntas 1ª y 2ª.

JHR2. La categoría C2.1, en la pregunta 3ª (a)

JHR3. La categoría C3.2 en la pregunta 3ª (b)

Respuestas menos frecuentes. Por definición, las respuestas observadas menos frecuentes tienen una ocurrencia. Solamente indicamos la frecuencia cuando es mayor que 1.

JHR4. Las categorías C0 y C1.4 en la pregunta 1ª.

JHR5. Las categorías C0, C1.4, C3.1 y C4 en la pregunta 2ª.

JHR6. Las categorías C0, C2.2 y C3.1 en la pregunta 3ª (a). (3 ocurrencias.)

JHR7. Las categorías C1.3, C2.2. y C3.1en la pregunta 3ª (b).

Porcentaje de respuestas correctas

Decimos que una respuesta es correcta si cae en una de las categorías C0, C1 o C2. Para dar el porcentaje sin decimales, usamos la función parte entera.

JHR8. En la pregunta 1ª, 84%. En la pregunta 2ª, 86%. En la pregunta 3ª (a) 77%. En la pregunta 3ª (b) 40%.

Intentos de explicación

IJHE1. En JHR8, hay una disminución drástica del éxito en las respuestas dadas por los alumnos a la pregunta 3ª (b); en el enunciado de esta pregunta hemos usado el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones, representación verbal, formato ejemplo, que los alumnos no conocen.

IJHE2. Todo lo recogido sobre las preguntas 1ª y 2ª induce a afirmar que no existen diferencias notables entre ellas. Consideramos que los alumnos conocen y manejan los códigos de fenómeno a.s.i g-e y a.s.i t-e

IJHE3. Al analizar las respuestas de los alumnos hemos encontrado frecuentemente el código de fenómeno a.s.i v-e, como lo comprueba el hecho de que la categoría C1.3 es la más frecuente. Sin embargo, cuando la pregunta la enunciamos usando ese código de fenómeno, el porcentaje de respuestas correctas desciende con respecto a aquellas preguntas en las que se emplea el fenómeno a.s.i g-e o a.s.i t-e.

5.3.2 Resultados obtenidos en el I.E.S "Celestino Mutis".

5.3.2.1 Tablas de grupos y agregada para el Centro

Presentamos los resultados obtenidos en los dos grupos que participaron en el estudio, tablas 5.11 y 5.12. La tabla 5.13 incluye la agregación de los grupos del mismo instituto.

Tabla 5.11 ICM BNS C1 GA. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	13	59	12	55	12	55	9	41
C1.4	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	45
C2.1	2	9	7	32	6	27	1	45
C2.2	4	18	2	9	1	5	4	18
C3.1	NHD	NHD	NHD	NHD	2	9	NHD	NHD
C3.2	1	5	1	5	NHD	NHD	3	14
C4	2	9	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	1	5	4	18
TOT	22	100	22	100	22	100	22	100

Tabla 5.12 ICM BNS C1 GB. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	13	46	12	43	10	36	6	21
C1.4	NHD	NHD	NHD	NHD	1	4	NHD	NHD
C2.1	9	32	5	18	3	11	5	18
C2.2	1	4	1	4	3	11	4	14
C3.1	NHD	NHD	NHD	NHD	3	11	NHD	NHD
C3.2	4	14	3	11	4	14	5	18
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	1	4	7	25	4	14	8	29
TOT	28	100	28	100	28	100	28	100

Tabla 5.13 ICM Agregados. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	26	52	24	48	22	44	15	30
C1.4	NHD	NHD	NHD	NHD	1	2	1	2
C2.1	11	22	12	24	9	18	6	12
C2.2	5	10	3	6	4	8	8	16
C3.1	NHD	NHD	NHD	NHD	5	10	NHD	NHD
C3.2	5	10	4	8	4	8	8	16
C4	2	4	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD
C5	1	2	7	14	5	10	12	24
TOT	50	100	50	100	50	100	50	100

5.3.2.2 Resultados del IES "Celestino Mutis".

<u>Respuestas más frecuentes</u>

CMR1. La categoría C1.3, en todas las preguntas del cuestionario. El porcentaje desciende progresivamente, desde el 50 hasta el 30 %.

<u>Respuestas menos frecuentes</u>

CMR2. La categoría C5 en la pregunta 1ª.

CMR3. La categoría C2.2 en la pregunta 2ª. 3 ocurrencias.

CMR4. La categoría C1.4 en la pregunta 3ª (a y b).

<u>Porcentaje de respuestas correctas</u>

CMR$_5$. En la pregunta 1ª, 84%. En la pregunta 2ª, 85%. En la pregunta 3ª (a), 77%. En la pregunta 3ª (b), 40%

Intentos de explicación

CME1. En CMR5, hay una disminución drástica del éxito en las respuestas dadas por los alumnos a la pregunta 3ª (b); en el enunciado de esta pregunta hemos usado el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones, representación verbal, formato ejemplo, que los alumnos no conocen.

CME2. Todo lo recogido sobre las preguntas 1ª y 2ª induce a afirmar que no existen diferencias notables entre ellas. Consideramos que los alumnos conocen y manejan los códigos de fenómeno a.s.i g-e y a.s.i t-e

CME3. Al analizar las respuestas de los alumnos hemos encontrado frecuentemente el código de fenómeno a.s.i v-e, como lo comprueba el hecho de que la categoría C1.3 es la más frecuente. Sin embargo, cuando la pregunta la enunciamos usando ese código de fenómeno, el porcentaje de respuestas correctas desciende con respecto a aquellas preguntas en las que se emplea el fenómeno a.s.i gráfico ejemplo o tabular ejemplo.

5.3.3 Resultados obtenidos en el I.E.S "Dámaso Alonso"

5.3.3.1 Tablas por grupo y agregada para el Centro

Presentamos los resultados obtenidos en los dos grupos que participaron en el estudio, tablas 5.14 y 5.15. La tabla 5.16 incluye la agregación de los grupos del mismo instituto.

Tabla 5.14 IDA BNS C1 GX. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	2	10	2	10	2	10	NHD	NHD
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	7	33	12	27	5	24	2	10
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	2	10	1	5	1	5	2	10
C2.2	2	10	4	20	6	29	5	24
C3.1	1	5	NHD	NHD	1	5	NHD	NHD
C3.2	7	33	2	10	1	5	3	14
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	5	24	9	43
TOT	21	100	21	100	21	100	21	100

Tabla 5.15 IDA BNS C1 GY. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.1	NHD	NHD	1	7	NHD	NHD	NHD	NHD
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	13	87	9	60	7	47	4	27
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	1	7	4	27	4	27	3	20
C2.2	1	7	1	7	2	13	2	13
C3.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C3.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	2	13	6	40
TOT	15	100	15	100	15	100	15	100

Tabla 5.16 IDA Agregados. Resultados								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	2	6	2	6	2	6	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	1	3	NHD	NHD	NHD	NHD
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	20	56	21	58	12	33	6	17
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	3	8	5	14	5	14	5	14
C2.2	3	8	5	14	8	22	7	19
C3.1	1	3	NHD	NHD	1	3	NHD	NHD
C3.2	7	19	2	6	1	3	3	8
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	7	19	15	42
TOT	36	100	36	100	36	100	36	100

5.3.3.2 Resultados del IES "Dámaso Alonso"

<u>Respuestas más frecuentes</u>

DAR1. La categoría C1.3 en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a), con porcentajes respectivos del 55, 58 y 33 %.

DAR2. La categoría C5 en la pregunta 3ª (b), con porcentaje de 41 %.

<u>Respuestas menos frecuentes.</u>

DAR4. La categoría C3.1, en la pregunta 1ª. La categoría C1.1, en la pregunta 2ª. Las categorías C3.1 y C3.2 en la pregunta 3ª (a).

La categoría C3.2 en la pregunta 3ª (b), con frecuencia 3.

<u>Porcentaje de respuestas correctas</u>

DAR5. En la pregunta 1ª, 77%. En la pregunta 2ª, 94%. En la pregunta 3ª (a) 75 %. En la pregunta 3ª (b), 50%.

Intentos de explicación

DAE1. En DAR5, hay una disminución drástica del éxito en las respuestas dadas por los alumnos a la pregunta 3ª (b); en el enunciado de esta pregunta hemos usado el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones, representación verbal, formato ejemplo, que los alumnos no conocen.

DAE2. Todo lo recogido sobre las preguntas 1ª y 2ª induce a afirmar que no existen diferencias notables entre ellas. Consideramos que los alumnos conocen y manejan los códigos de fenómeno a.s.i g-e y a.s.i t-e

DAE3. Al analizar las respuestas de los alumnos hemos encontrado frecuentemente el código de fenómeno a.s.i v-e, como lo comprueba el hecho de que la categoría C1.3 es la más frecuente. Sin embargo, cuando la pregunta la enunciamos usando ese código de fenómeno, el porcentaje de respuestas correctas desciende con respecto a aquellas preguntas en las que se emplea el fenómeno a.s.i g-e o a.s.i t-e.

5.3.4 Comparación de respuestas en el nivel de agregación "institutos"

Mostramos analogías y diferencias observadas. Las primeras, las etiquetamos, respectivamente, como An y Dm, donde n m son números de orden.

Analogías entre las respuestas más frecuentes.

A1. En los tres institutos estudiados, la respuesta más frecuente a la pregunta 1ª corresponde a la categoría C1.3; frecuencias respectivas: en el instituto "José Hierro", 24; en el instituto "Celestino Mutis", 26 y en el instituto "Dámaso Alonso", 20.

A2. La respuesta más frecuente a la pregunta 2ª corresponde a la categoría C1.3. Frecuencias respectivas: 25, 24 y 21, respectivamente.

Analogías entre las respuestas menos frecuentes

A3. La categoría C1.4 está prácticamente ausente; totalmente, lo está en el instituto "Dámaso Alonso".

A4. La categoría C4 está prácticamente ausente en las respuestas de todos los IES.

Diferencias

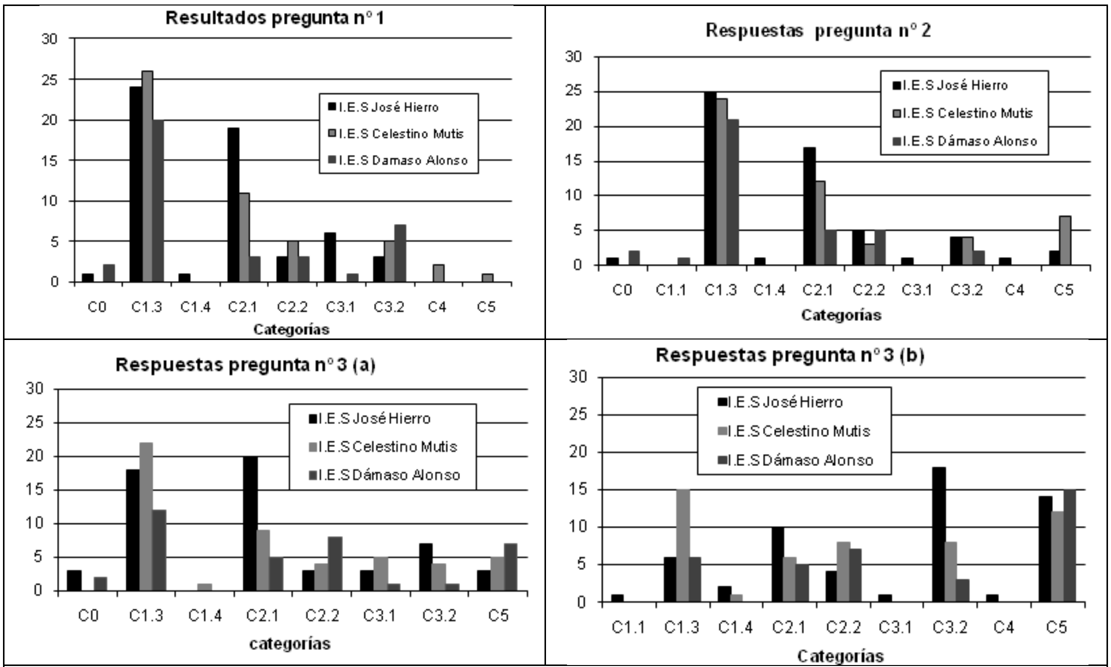
D1. En el instituto "José Hierro", la respuesta más frecuente a la pregunta 3ª (a) corresponde a la categoría C2.1, con una frecuencia de 20. En cambio, en los otros dos institutos la respuesta más frecuente corresponde a la categoría C1.3, con frecuencia de 22 (instituto "Celestino Mutis") o de 12 (en el instituto "Dámaso Alonso")

D2. En la pregunta 3ª (b) los resultados relativos a la respuesta más frecuente varían de un instituto a otro. En el instituto "José Hierro", corresponde a la categoría C3.2 (frecuencia: 18), en el instituto "Celestino Mutis", corresponde a la categoría C1.3 (frecuencia: 15) y en el instituto "Dámaso Alonso", a la categoría C5 (frecuencia: 15)

D3. Los alumnos del instituto "Celestino Mutis" no emplean la categoría C0 en sus respuestas. Sí lo hacen los alumnos de los otros dos IES.

D4. Los alumnos del instituto "Dámaso Alonso" no emplean la categoría C4 en sus respuestas. Sí lo hacen los alumnos de los otros dos IES.

Las figuras 5.1 a 5.4 muestran, por categorías e institutos las ocurrencias de todas las respuestas. De algunas categorías no salen las correspondientes barras; por ejemplo en la figura 5.1, categoría C5, no hay barras asociadas a los IES "José Hierro" y "Dámaso Alonso"; la ausencia de barras significa frecuencia nula, es decir, que ningún alumno respondió de manera que asignásemos esa categoría a su respuesta.



Figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4, de izquierda a derecha y de arriba abajo

5.3.5 Última agregación: los tres institutos

Tabla 5.17 Los tres IES agregados. Resultados

CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%	FRABS	%
C0	3	2	3	2	5	3	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	1	1	NHD	NHD	1	1
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	70	49	70	49	52	36	27	19
C1.4	1	1	1	1	1	1	3	2
C2.1	33	23	34	24	34	24	21	5
C2.2	11	8	13	9	15	10	19	13
C3.1	7	5	1	1	9	6	1	1
C3.2	15	10	10	7	12	8	29	20
C4	2	1	1	1	NHD	NHD	1	1
C5	1	1	9	6	15	10	41	29
TOT	143	100	143	100	143	100	143	100

La tabla 5.17 (página anterior) incluye los resultados agregados de los tres IES que participaron en el estudio. Los siguientes comentarios interpretan la la información mostrada.

Respuestas más frecuentes

A3R1. A la pregunta nº 1. La categoría C1.3, con una frecuencia de 70, seguida la categoría C2.1, con una frecuencia de 33.

A3R2. A la pregunta nº 2. La categoría C1.3, con una frecuencia de 70, seguida de la categoría C2.1 con una frecuencia de 34.

A3R3. A la pregunta nº 3 (a). La categoría C1.3, con una frecuencia de 52, seguida de la categoría C2.1, con una frecuencia de 34.

A3R4. A la pregunta nº 3 (b). La categoría C5, con una frecuencia de 41, seguida de la categoría C3.2 con una frecuencia de 29.

Respuestas menos frecuentes

A3R5. A la pregunta nº 1. Las categorías C1.4 y C5, ambas con frecuencia 1.

A3R6. A la pregunta nº 2. Las categoría C1.1, C1.4, C3.1 y C4, todas con frecuencia 1.

A3R7. A la pregunta nº 3 (a). La categoría C1.4, con frecuencia 1.

A3R8. A la pregunta nº 3 (b). Las categorías C1.1, C3.1 y C4, todas con una frecuencia 1.

Otros resultados

A3R9. No existen diferencias notables en las respuestas de mayor frecuencia relativas a las preguntas 1ª y 2ª y 3ª (a). La respuesta más frecuente relativa a la pregunta 3ª (b), en cambio, deja al descubierto el menor conocimiento relativo de la definición formal de límite finito.

A3R10. El fenómeno a.s.i parece ayudar a los alumnos a establecer correctamente el límite de la sucesión, a juzgar por los altos porcentajes de acierto (82, en la pregunta 1ªy 85, en la pregunta 2ª y 74, en la pregunta 3ª (a). Cuando se ven abocados a usar el fenómeno i.v.s, el porcentaje de aciertos se reduce: 49% en la pregunta 3ª (b).

A3R11. La categoría C5 va aumentando su frecuencia a medida que avanzamos en la prueba; pasa, sucesivamente, por los valores 1, 9, 15 y 41, para las preguntas en el orden de presentación. Sobre este resultado cabe enunciar dos consideraciones: (1ª) La comprensión del enunciado no parece implicar una respuesta correcta; así, en la pregunta 1ª, con una sola ocurrencia de la categoría C5, hay un porcentaje menor de respuestas correctas que en la pregunta 2ª, a pesar de que, en ésta, la misma categoría se dio 9 veces. (2ª) La representación gráfica podría ser la que más sirvió a los alumnos para comprender el enunciado. (Ver también A3R13.)

A3R12. El fenómeno i.v.s (categoría C1.4) es casi inexistente en las respuestas de los alumnos. Su frecuencia es de 1 (pregunta 1ª, pregunta 2ª, pregunta 3ª (a)) y de 3 (pregunta 3ª (b)); esto corresponde a 6 respuestas de un total de 572. En todos estos casos, usaron el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

A3R13. En la pregunta 3ª (b) la respuesta más frecuente corresponde a la categoría C5.

A3R14. El fenómeno a.s.i (categorías C1.1, C1.2 y C1.3) supera al fenómeno i.v.s (C1.4). Si, por argumentos de equidad, estimamos la razón de uso esperada en 3:1, las que efectivamente observamos son: 70:1 (pregunta 1ª), 71:1 (pregunta 2ª), 52:1 (pregunta 3ª (a)) y 28:3 (pregunta 3ª (b)).
A3R15. La categoría C1.3 es la más frecuente (219 de 572). Deducimos que el código de fenómeno a.s.i v-e es el más usado por los alumnos en sus respuestas.

5.4 Las variables secundarias

En este apartado analizamos las variables: sexo, edad, curso, y su relación con las categorías que aparecen en las respuestas de los alumnos. Los datos se han reunido en tablas con los resultados individuales. Véase el anexo 5.3

5.4.1. Variable sexo

La tabla 5.18 incluye el reparto de hombres y mujeres por grupo y centro. Bajo cada cantidad por instituto y sexo incluimos el detalle por grupo de alumnos.

<table>
<tr><th colspan="10">Tabla 5.18. La muestra, por sexos</th></tr>
<tr><th>IES</th><th colspan="4">Hombres</th><th colspan="4">Mujeres</th><th>Subtotales</th></tr>
<tr><td rowspan="2">JH</td><td colspan="4">23</td><td colspan="4">34</td><td rowspan="2">57</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>4</td><td>9</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CM</td><td colspan="4">29</td><td colspan="4">21</td><td rowspan="2">50</td></tr>
<tr><td colspan="2">9</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DA</td><td colspan="4">12</td><td colspan="4">24</td><td rowspan="2">36</td></tr>
<tr><td colspan="2">9</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td>Subtotales</td><td colspan="4">84</td><td colspan="4">79</td><td>143</td></tr>
</table>

5.4.1.1 Resultados obtenidos en el IES "José Hierro"

Presentamos los resultados obtenidos relativos a la variable sexo en el instituto "José Hierro", distinguiendo el sexo de los alumnos, grupos agregados. Se indican las categorías y las frecuencias absolutas de cada pregunta, habiéndose omitido, para facilitar la lectura, los porcentajes correspondientes (Ver tabla 5.19, página siguiente.)

Junto con la tabla 5.19, enunciamos resultados estructurados de modo análogo a lo hecho hasta ahora, a saber: respuestas más frecuentes, respuestas menos frecuentes, porcentajes de respuestas correctas e intentos de explicación. Los resultados los hemos organizado mediante códigos de 4 o más símbolos (ABXD…), donde AB son las iniciales del IES, X representa la variable sexo. Les sigue un número de orden para cada resultado.

<u>Respuestas mas frecuentes</u>

JHX1. En las mujeres, C1.3 es la categoría más frecuente en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a), con porcentajes respectivos 50%, 53% y 44%. La categoría C3.2 es la más frecuente en la pregunta 3ª (b) con una frecuencia del 21%.

JHX2. En los hombres la categoría C1.3 es la más frecuente en la pregunta 1ª y 2ª con porcentajes idénticos (30%), inferiores a los porcentajes obtenidos por las mujeres. C3.2 es la categoría más frecuente en las preguntas 3ª (a) y 3ª (b), con porcentajes 26% y 48% respectivamente.

Tabla 5.19 IJH Resultados por sexos (M, H)								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	M	H	M	H	M	H	M	H
C0	NHD	1	NHD	1	1	2	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	NHD
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	17	7	18	7	15	3	6	7
C1.4	1	NHD	1	NHD	NHD	NHD	1	1
C2.1	12	7	11	6	15	5	6	4
C2.2	1	2	3	2	1	2	2	2
C3.1	2	4	NHD	1	NHD	3	1	NHD
C3.2	1	2	NHD	4	1	6	7	11
C4	NHD	NHD	1	NHD	NHD	NHD	1	NHD
C5	NHD	NHD	NHD	2	1	2	9	5
TOT	34	23	34	23	34	23	34	23

<u>Respuestas menos frecuentes</u>

JHX3. En las mujeres C1.4, C2.2 y C3.2 en la pregunta 1ª, C1.4 y C4 en la pregunta 2ª, C0, C2.2, C3.2 y C5 en la pregunta 3ª (a) y C1.1, C1.4, C3.1 y C4 en la pregunta 3ª(b) con una frecuencia de uno.

JHX4. En los hombres en la pregunta 1ª C0, C2.2 y C5, en la pregunta 2ª C0 y C3.1, en la pregunta 3ª(a) C0, C2.2 y C5 y en la pregunta 3ª(b) C1.4.

<u>Porcentajes de respuestas correctas</u>

JHX5. En las mujeres los porcentajes de respuestas correctas son: en la pregunta 1ª, 91%. En la pregunta 2ª, 97%. En la pregunta 3ª (a) 96% y en la 3ª (b) 73%

JHX6. En los hombres, los porcentajes de respuestas correctas son: en la pregunta 1ª, 74%. En la pregunta 2ª, 69%. En la pregunta 3ª (a) 53% y en la 3ª (b) 31%

<u>Intentos de explicación.</u>

JHXE1. El porcentaje de respuestas correctas en las Mujeres es mayor que en los Hombres, en todas las preguntas del cuestionario

JHXE2. El porcentaje de respuesta que usan la del alumno ficticio es algo mayor en los Hombres que en las Mujeres. En los hombres 13% y en las mujeres aproximadamente 3%.

JHXE3. Observando el porcentaje de respuestas correctas en las mujeres podemos afirmar que no existen diferencias notables entre las preguntas 1ª, 2ª y 3ª(a) (correspondientes a los sistemas gráfico, tabular y verbal). Por otro lado en los hombres observamos que si observamos un mayor éxito de respuestas cuando se usa el sistema de representación gráfico (1ª pregunta)

5.4.1.2 Instituto “Celestino Mutis”

Presentamos los resultados obtenidos relativos a la variable sexo, siguiendo los mismos pasos que en el instituto “José Hierro”. Ver la tabla 5.20.

Tabla 5.20 ICM Resultados por sexos (M, H)								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	M	H	M	H	M	H	M	H
C0	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.1	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	12	14	11	13	11	11	6	9
C1.4	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	1	NHD	1
C2.1	3	8	6	6	4	4	2	5
C2.2	3	3	NHD	3	NHD	4	3	5
C3.1	NHD	NHD	NHD	NHD	1	4	NHD	NHD
C3.2	2	2	2	2	3	1	4	4
C4	1	1	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD
C5	NHD	1	2	5	2	4	6	5
TOT	21	29	21	29	21	29	21	29

<u>Respuestas más frecuentes</u>

CMX1. En las mujeres la categoría C1.3 en todas las preguntas del cuestionario.

CMX2. En los hombres también C1.3 es la categoría más frecuente en todas las preguntas del cuestionario.

<u>Respuestas menos frecuentes</u>

CMX3. En las mujeres las categorías menos frecuentes son: C4 en la pregunta 1ª, C5 en la pregunta 2ª, C3.1 en la pregunta 3ª (a) y C2.1 en la pregunta 3ª (b).

CMX4. En los hombres las categorías menos frecuentes son: .las categorías C4 y C5 en la pregunta 1ª, la categoría C3.2 en la pregunta 2ª, C1.4 y C3.2 en la pregunta 3ª (a) y C1.4 en la pregunta 3ª (b).

Porcentajes de respuestas correctas

CMX5. En las mujeres se obtiene que en la pregunta 1ª es aproximadamente del 86%. En la pregunta 2ª es aproximadamente del 81 %. En la pregunta 3ª (a), es aproximadamente del 71%. En la pregunta 3ª (b) apartado b, es aproximadamente 52%.

CMX6. En los hombres se obtiene que en la pregunta 1ª es aproximadamente del 86%. En la pregunta 2ª es aproximadamente del 76 %. En la pregunta 3ª (a), es aproximadamente del 69%. En la pregunta 3ª (b) apartado b, es aproximadamente 69%.

Intentos de explicación

CME1. Ni las mujeres ni los hombres emplean la respuesta dada por el alumno ficticio para justificar sus respuestas

CME2. Una sola mujer emplea el infinito potencial en sus respuestas, mientras que son cuatro los hombres que lo hacen.

CME3. Tanto los hombres como las mujeres tienden a justificar sus respuestas de una u otra manera y son pocos los que no lo hacen

5.4.1.3 Instituto "Dámaso Alonso"

Presentamos los resultados obtenidos, relativos a la variable sexo, siguiendo los mismos pasos que en los otros dos IES. Ver la tabla 5.21.

Tabla 5.21 IDA. Resultados por sexos (M, H)

CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	M	H	M	H	M	H	M	H
C0	1	1	1	1	1	1	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	1	NHD	NHD	NHD	NHD	NHD
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	16	4	16	5	11	1	4	2
C1.4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C2.1	1	2	3	2	3	2	4	1
C2.2	1	2	2	3	5	3	4	3
C3.1	1	NHD	NHD	NHD	NHD	1	NHD	NHD
C3.2	4	3	1	1	1	NHD	2	1
C4	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C5	NHD	NHD	NHD	NHD	3	4	10	5
TOT	24	12	24	12	24	12	24	12

Respuestas mas frecuentes

DAX1.En las mujeres la categoría C1.3 en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª(a) con porcentajes aproximados de 67%, 67% y 46% respectivamente. En la pregunta 3ª (b) la categoría C5.

DAX2. En los hombres la categoría C1.3 en las preguntas 1ª y 2ª con porcentajes aproximados del 33% y 42% respectivamente. En las preguntas 3ª(a) y 3ª(b) C5 es la categoría mas frecuente con porcentajes aproximados del 33% y 42% respectivamente.

Respuestas menos frecuentes

DAX3. En las mujeres las categorías C0, C2.1, C2.2 y C3.1 son las menos frecuentes en la pregunta 1ª, con una frecuencia de uno. En la pregunta 2ª C0, C1.1 y C3.2 son las categorías menos frecuentes con una frecuencia de uno. En la pregunta 3ª (a) las categorías C0 y C3.2 son las menos frecuentes con una frecuencia de uno. En la pregunta 3ª(b) la categoría C3.2 es la menos frecuente con una frecuencia de dos.

Porcentajes de respuestas correctas

DAX4. En las mujeres obtenemos los siguientes resultados: en la pregunta 1ª es el 79%. En la pregunta 2ª es el 88%. En la pregunta 3ª(a),es el 83%. En la pregunta 3ª(b) es 50%

DAX5. En los hombres obtenemos los siguientes resultados: En la pregunta 1ª es el 75%. En la pregunta 2ª es 82%. En la pregunta 3ª(a) es el 58%. En la pregunta, apartado 3ª(b), es el 50 %.

Intentos de explicación

DAE1. El fenómeno de ida-vuelta en sucesiones verbal ejemplo, representado a través de la categoría C1.4, no aparece en ninguna de las respuestas de los alumnos, ya sean hombres o mujeres.

DAE2. En el caso de las mujeres, una sola de ellas emplea el infinito potencial en sus respuestas y lo hace en la pregunta 1ª, mientras que en el caso de los hombres, aunque también lo emplea uno solo de ellos, lo hace en la pregunta 3ª(a).

DAE3. Ningún alumno plantea la necesidad de conocer mas valores de la sucesión, (situación representada por la categoría C4), ya sea hombre o mujer.

5.4.1.4 Comparación de respuestas por sexos e institutos

Al considerar las respuestas a cada pregunta por ambos colectivos, establecemos algunas analogías y diferencias.

Analogías entre las respuestas más frecuentes (Mujeres)

A1. En las mujeres la categoría C1.3 es la más frecuente en la pregunta 1ª en todos los IES. En el IES “José Hierro” la frecuencia es 17, en el “Celestino Mutis”, 12 y en el “Dámaso Alonso”, 16.

A2. En la pregunta 2ª, C1.3 es la categoría más frecuente en los tres IES. En el orden en que los presentamos, las frecuencias respectivas son 18, 11 y 16.

A3. La categoría C1.3 es la más frecuente en los tres IES estudiados: 15, 11 y 11, respectivamente.

A4. C5 es la más frecuente en los tres IES estudiados: (9, 6 y 10).

Analogías entre las respuestas más frecuentes (Hombres)

A5. En la pregunta 1ª, C1.3 es la más frecuente: (7, 14, 4).

A6. En la pregunta 2ª, la categoría C1.3 es la más frecuente: (7, 13, 5)

Analogías entre las respuestas menos frecuentes (Mujeres)

A7. En la pregunta 1ª C1.4 no aparece en ninguno de los tres IES estudiados. La categoría C0 obtiene prácticamente los mismos resultados en los tres IES (0, 0, 1).

A8. En la pregunta 2ª, C1.4 no aparece apenas en las respuestas de los alumnos, obteniéndose (1, 1, 0).

A9. En la pregunta 3ª (a), la categoría C3.1 obtiene resultados similares en los tres IES estudiados: (0, 1, 0).

A10. En la pregunta 3ª (b), los resultados obtenidos por la categoría C1.1 son muy similares en los tres IES: (1, 0, 0).

Analogías entre las respuestas menos frecuentes (Hombres)

A11. En la pregunta 1ª, la categoría C4 apenas aparece en las respuestas de los alumnos. La frecuencia en IES "Celestino Mutis", es 1.

A12. En la pregunta 2ª, apenas aparece la categoría C3.1 con frecuencias respectivas (1, 0, 0).

A13. En la pregunta 3ª (a), muy pocos alumnos emplean la respuesta dada por el alumno ficticio como justificación a sus respuestas: (2, 0, 1).

A14. La categoría C1.4 apenas es empleada en las respuestas de los alumnos: (1, 1, 0).

Diferencias (Mujeres)

D1. En la pregunta 1ª, C2.1 la tripleta de frecuencia es (12, 3, 1)

D2. En la pregunta 2ª, C2.1 se emplea con las frecuencias (11, 6, 3).

D3. En la pregunta 3ª (a), la categoría C2.1 se reparte así: (15, 4, 3).

D4. En la pregunta 3ª (b), la categoría C2.1 es la que menos diferencias aporta: (6, 2, 4).

Diferencias (Hombres)

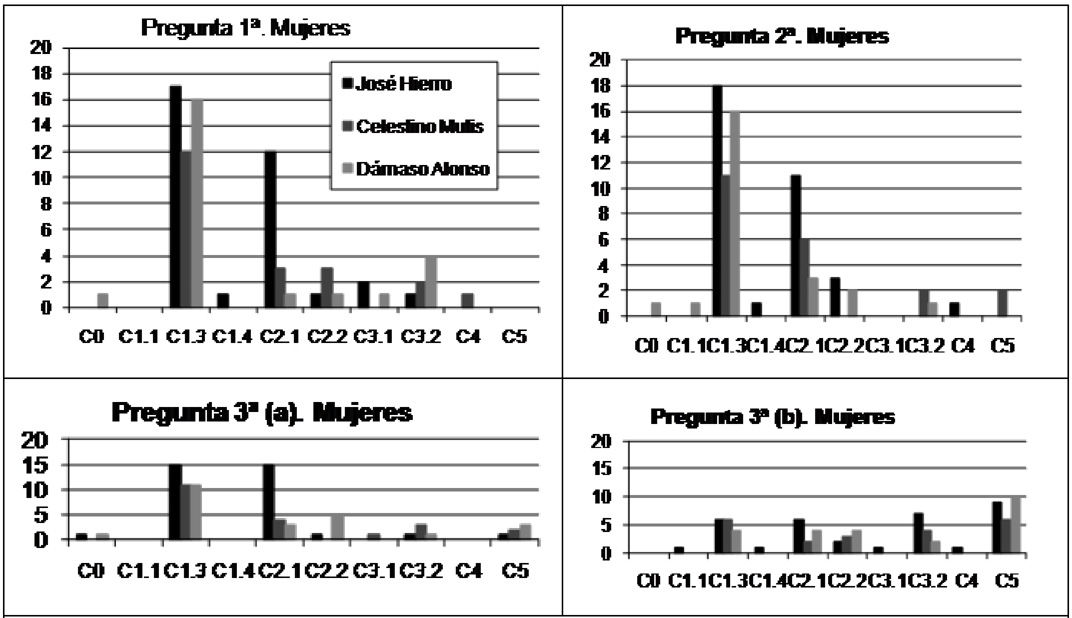
D5. En la pregunta 1ª, a la categoría C3.1 le asociamos la tripleta de frecuencias (4, 0, 0).

D6. En la pregunta 2ª, la categoría C5 se usa así (2, 5, 0).

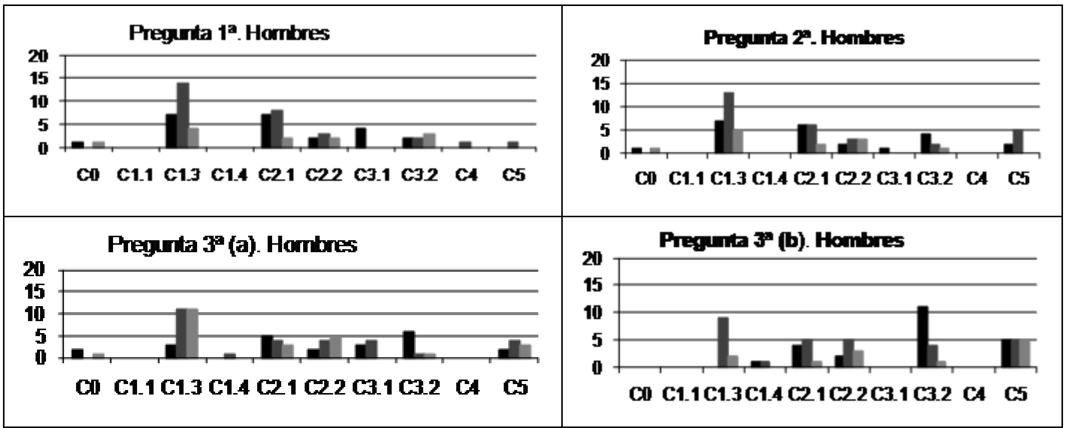
D7. En la pregunta 3ª (a), la categoría C3.2 se reparte en (6, 1, 1).

D8. En la pregunta 3ª (b), la categoría C3.2 muestra importantes oscilaciones: (11, 4, 1).

En las figuras 5.5 a 5.8 mostramos las frecuencias de respuestas, por preguntas, para el colectivo de Mujeres. En las figuras 5.9 a 1.12 mostramos la información correspondiente al colectivo de Hombres. (Véase la página siguiente.)



Figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8. Respuestas del colectivo de Mujeres



Figuras 5.9, 5.10, 5.11 y 5.12. Respuestas del colectivo de Hombres

5.4.1.5 Agregación de institutos

Presentamos las frecuencias resultantes al agregar los datos por institutos, manteniendo la variable sexo como criterio para el análisis de las respuestas. Después de presentar la tabla 5.22 (página siguiente), anotamos resultados que arrojan alguna luz sobre la información que en ella se muestra.

Para etiquetar los resultados, empleamos el código A3XN donde A3 recuerda que hemos agregado datos de tres IES, X remite a la variable sexo y N al número de orden del resultado.

Tabla 5.22. Resultados por sexos (M, H)								
CAT	Pregunta 1ª		Pregunta 2ª		Pregunta 3ª a		Pregunta 3ª b	
	M	H	M	H	M	H	M	H
C0	1	2	1	2	2	3	NHD	NHD
C1.1	NHD	NHD	1	NHD	NHD	NHD	1	NHD
C1.2	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~	~~NHD~~
C1.3	45	25	45	25	37	15	16	11
C1.4	1	NHD	NHD	NHD	NHD	1	1	2
C2.1	16	17	20	14	22	11	12	10
C2.2	5	7	5	8	6	9	9	10
C3.1	3	4	1	1	1	8	1	NHD
C3.2	7	7	3	7	5	7	13	16
C4	1	1	1	NHD	NHD	NHD	4	NHD
C5	NHD	1	2	7	6	10	25	15
TOT	79	64	79	64	79	64	79	64

Respuestas más frecuentes

A3X1. Mujeres: en todas las preguntas del cuestionario, C1.3 es la categoría más frecuente. La frecuencia en cada una de las preguntas es 45, 45, 37 y 16.

A3X2. Hombres: en las preguntas 1ª y 2ª y 3ª (a), C1.3 es la categoría más frecuente con 25, 25 y 15 ocurrencias. En la pregunta 3ª (b), lo es C3.2 con frecuencia 16.

Respuestas menos frecuentes

A3X3. Mujeres: solamente en la pregunta 3ª (a) hay una categoría con 1 respuesta. En las demás preguntas, hay varias categorías con frecuencia 1.

A3X4. Hombres: las frecuencias mínimas están menos dispersas. En tres preguntas hay una sola categoría con frecuencia 1, mientras que en la pregunta 1ª se dan dos categorías con esa puntuación.

Porcentaje de respuestas correctas

A3X5. Mujeres: Pregunta 1ª, 86%; pregunta 2ª, 91%; pregunta 3ª (a), 86% y (b), 49%.

A3X6. Hombres: Pregunta 1ª, 80%; pregunta 2ª, 77%; pregunta 3ª (a), 61% y (b), 52%.

Intentos de explicación

A3X7. En el fenómeno a.s.i, el sistema de representación que parece de más ayuda para responder es el tabular (en las Mujeres) y el gráfico (en los Hombres). En ambos colectivos, el empleo del fenómeno i.v.s en el enunciado de la pregunta parece generar una dificultad a la hora de responderla adecuadamente.

A3X8. En los dos colectivos, los códigos de fenómeno a.si. g-e, a.s.i t-e y a.si v-e (correspondientes a las categorías C1.1, C1.2 y C1.3, respectivamente) se usan con más frecuencia que el código de fenómeno i.v.s. v-e (categoría C1.4). La razón de frecuencias de uso de estos códigos depende de las preguntas y de los colectivos. Mujeres: (Preguntas 1ª, 2ª, 3ª (a), 3ª (b)) = (1:45, 0:45, 0:37, 1:16). Hombres: (Preguntas 1ª, 2ª, 3ª (a), 3ª (b)) = (0:25, 0:25, 1:25, 2:11). El aspecto es el mismo en ambos colectivos. Suponemos que el aumento de respuestas en el de Mujeres se debe al tamaño de esta submuestra.

5.4.2 Variable edad

Nuestro estudio de esta variable secundaria comenzará con la agregación de los tres IES, toda vez que, instituto-edad por instituto-edad, no hemos sabido hallar evidencias de interés para esta memoria. Las tablas correspondientes de ese detalle se muestran en el anexo 5.4.

5.4.2.1 Resultados por edad, IES agregados.

La tabla 5.23 corresponde a edades de 16, 17, 18, 19 y 20 años. Un alumno no indicó su edad. Dos alumnos han quedado excluidos; uno, de 20 años, por ser el único de esa edad; sus datos pueden consultarse en el anexo; otro, porque no indicó su edad. El signo "/" significa "No hay datos". En los comentarios, a A3 le sigue la edad considerada.

Tabla 5.23. Variable edad. Resultados por agregación de IES.

CAT	Pregunta 1ª				Pregunta 2ª				Pregunta 3ª (a)				Pregunta 3ª (b)			
	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19
C0	/	2	1	/	/	3	/	/	/	3	1	/	/	/	/	/
C1.1	/	/	/	/	/	1	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
C1.2	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿	⌿
C1.3	23	38	7	2	27	33	6	2	18	28	4	1	9	17	1	/
C1.4	/	1	/	/	/	1	/	/	1	/	/	/	1	2	/	/
C2.1	15	9	7	1	18	10	5	1	14	13	5	1	10	8	2	2
C2.2	4	5	1	/	3	9	1	/	7	8	/	/	6	12	/	/
C3.1	3	3	/	1	/	2	/	/	5	1	2	1	1	/	/	/
C3.2	6	7	2	/	2	6	2	/	3	7	2	/	11	12	5	1
C4	2	1	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	1	/	/
C5	/	/	/	/	3	1	4	1	5	6	4	1	15	14	10	1
TOT	53	66	18	4	53	66	18	4	53	66	18	4		66	18	4

Respuestas más frecuentes.

A3161. La categoría C1.3 en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a), con frecuencias respectivas 23, 27 y 18. La categoría C5, en la pregunta 3ª (b), (frecuencia: 15).

A3172. La categoría C1.3 en todas las preguntas del cuestionario. Las frecuencias respectivas son: 38, 33, 28 y 17

A3183. La categoría C1.3 en las preguntas 1ª y 2ª. Las frecuencias respectivas son: 7 y 6. La categoría C2.1, en la pregunta 3ª (a), (frecuencia 5). La categoría C3.2, en la pregunta 3ª (b), (frecuencia 5).

A3194. La categoría C1.3 en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a). Las frecuencias respectivas son: 2, 2 y 1. La categoría C2.1, en la pregunta 3ª (b), (frecuencia 2).

Deducimos que los alumnos de las cuatro edades prefirieron el código de fenómeno a.s.i v-e.

Respuestas menos frecuentes

A3165. Pregunta 1ª, C4 (2); pregunta 2ª, C3.2 (2); pregunta 3ª (a), C1.4; pregunta 3ª (b), C1.4 y C3.1.

A3176. Pregunta 1ª, C1.4 y C4; pregunta 2ª, C1.1, C1.4 y C5; pregunta 3ª (a), C3.1 y pregunta 3ª (b), C4.

A3187. Pregunta 1ª, C0 y C2.2; pregunta 2ª, C2.2; pregunta 3ª (a), C0 y pregunta 3ª (b), C1.3.

A3198. Pregunta 1ª, C2.1 y C3.1; pregunta 2ª, C2.1 y C5; pregunta 3ª (a), C1.3, C2.1, C3.1 y C5 y pregunta 3ª (b), C5.

Porcentaje de respuestas correctas

A3169. Porcentajes, redondeados a la unidad, por orden de las preguntas: 79, 91, 75 y 49.

A31710. 83, 86, 79 y 59.

A31811. 89, 67, 56 y 17.

A31912. 75, 75, 50 y 50.

Intentos de explicación

A31613. En la pregunta 3ª (b) hay una disminución notable de las respuestas correctas. Esto puede ser un indicador del escaso interés hacia el uso del código de fenómeno i.v.s. v-e.

A31614. En la pregunta 2ª se observa un aumento considerable de las respuestas correctas. Esto puede ser un indicador del mayor interés hacia el uso del código de fenómeno a.s.i t-e.

A31715. Todo lo recogido en las preguntas 1ª y 2ª, induce a pensar que no existen diferencias notables entre ellas. Los alumnos manejan lo que aquí llamamos códigos de fenómeno a.s.i g-e y a.s.i t-e.

A31716. Mismo comentario que A31613.

A31817. En esta edad, disminuye el uso del código de fenómeno a.s.i v-e.

A31818. Mismo comentario que A31613.

A31919. Mismo comentario que en A31613, ampliado a la pregunta 3ª (a).

5.4.2.2 Categorías y edades: comentarios adicionales

La categoría C1.3, parece ser de uso constante en todas las edades 16 a 19 años, aunque se registra un descenso en el grupo de 18.

Los alumnos del rango 17-18 emplearon, ocasionalmente, la respuesta atribuida al alumno ficticio para justificar sus respuestas (categoría C0)

La categoría C1.4, que nosotros asociamos al código de fenómeno i.v.s. v-e, se observó en el rango 16-17, exclusivamente.

Los alumnos de este rango plantearon ocasionalmente la necesidad de conocer más valores de la sucesión (categoría C4).

El porcentaje más alto de respuestas "no sabe / no contesta" (C5), se observa en la edad de 18 años y en la pregunta 3ª (b): 56%.

5.5 Producciones de alumnos y libros de texto

En el capitulo anterior estudiamos y observamos los fenómenos a.si e i.v.s en los libros de texto, mientras que en este capítulo estamos estudiando estos fenómenos en las respuestas de los alumnos a cuatro cuestiones relacionadas con el límite finito de una sucesión.

En este apartado comparamos someramente los resultados obtenidos en los dos capítulos estableciendo sus analogías y diferencias.

El código de fenómeno de mayor frecuencia es, en los libros de texto, a.s.i g-e, (36 ocurrencias) mientras que, en las respuestas de los alumnos, lo es el a.s.i v-e (26 ocurrencias). No sabemos explicar este cambio de la representación gráfica a la representación verbal ni creemos tener recogida información alguna que lo explique. En las producciones de los alumnos, la representación gráfica se observó solamente en 2 de las 572 respuestas recogidas.

La categoría C.1.3 (código de fenómeno a.s.i v-e) es la más usada por los alumnos en sus respuestas a las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a); las correspondientes ocurrencias suman casi la mitad del total (219 de 572).

Esta diferencia en las ocurrencias de los códigos de fenómenos preferidos (en los libros de texto, a.s.i g-e, y en las producciones de los alumnos, a.s.i v-e) conduce a conjeturar que, siendo de importancia, la influencia de los libros de texto en las producciones de los alumnos no es la única; a pesar del escaso uso que hacen los alumnos del código de fenómeno a.s.i g-e, dado que en la pregunta 2ª hay un 83% de respuestas de este tipo.

Respecto al código del fenómeno a.s.i t-e, que se observa en los libros de texto, sobre todo, en el periodo 1995-2005, parece haber tenido una gran aceptación por parte de los alumnos, ya que aunque no lo emplean en sus respuestas, nos da la impresión de que les ayuda a calcular el límite de una sucesión, cuando en ésta se usa el código a.s.i t-e. Para afirmar esto nos apoyamos en el 85% de respuestas correctas que obtiene la pregunta 2ª del cuestionario.

Un hecho que se ha manifestado tanto en los libros de texto como en las respuestas de los alumnos es el descenso del fenómeno i.v.s. Por ejemplo, en el periodo 1975-1994, se observaron 72 ocurrencias, mientras que, en el periodo siguiente, 1995-2005, la frecuencia descendió hasta 10. Creemos que las respuestas del cuestionario (6 de 572) confirman esta tendencia.

El sistema de representación verbal es el más usado por los alumnos para justificar sus respuestas, ya sea cuando eligen el fenómeno a.s.i, ya cuando eligen el fenómeno i.v.s: 198 respuestas de 572 posibles. En los libros de texto, este sistema de representación es el segundo más empleado, tanto cuando eligen el fenómeno a.s.i como cuando eligen el fenómeno i.v.s.

En los libros de texto del periodo 2000-2005, la razón de uso del fenómeno a.s.i al fenómeno i.v.s es casi de 3:1, mientras que en las respuestas de los alumnos que, en principio, han usado libros de dicho periodo, la misma razón es de 36:1, aproximadamente. El predominio del fenómeno a.s.i se observa en ambos tipos de fuentes, pero no sabemos explicar el enorme aumento en la razón de uso del fenómeno a.s.i.

5.6 Test de independencia de las variables

Este apartado incluye el estudio de dependencias entre variables asociadas al cuestionario, a saber: Categoría asociada a las respuestas de los alumnos, con valores nominales C0, C1.1, C1.2, C1.3, C1.4, C2.1, C2.2, C3.1, C3.2, C4 y C5; Edad del alumno, con valores ordinales 16, 17, 18, 19 y 20; Sexo indicado por el alumno, con valores nominales V (varón) y M (Mujer).

Hemos estudiado la independencia o dependencia entre las variables de la pareja categoría-edad y entre las de la pareja categoría-sexo.

Este estudio lo presentamos pregunta por pregunta: en primer lugar por institutos y, a continuación, con los datos agregados de los tres IES.

Hemos elegido aplicar el test de chi-cuadrado de contigencia (Pearson), (Serret Moreno-Gil, 1995) porque la relación entre categoría-edad y categoría-sexo, cumple la principal condición para aplicarlo: debemos manejar dos variables que tengan diferentes modalidades y que en total sumen el conjunto de la población. La variable categoría tiene distintas modalidades, y las variables edad y sexo también. El total de la población se consigue si se realiza el análisis pregunta por pregunta. De esta manera habremos construido nuestra tabla de contingencia. El parámetro que da información sobre la independencia entre las variables se denomina significación asintótica; su valor crítico es 0'05; por debajo de este corte, se admite la especulación de que las variables consideradas no son independientes, mientras que, por encima de él, es fundado pensar que hay razones para afirmar la independencia. Todos los cálculos se han realizado con el programa SSPS, versión 12.0.1

5.6.1 Resultados del test, por instituto y pregunta, en el par de variables categoría-edad

Instituto "José Hierro"

En el instituto "José Hierro" participaron 57 alumnos, pero un alumno no respondió la edad que tenía por lo que desechamos sus respuestas en el estudio. De esta manera la muestra se compuso de 56 alumnos. La tabla 5.24 contiene los resultados principales.

Tabla 5.24 IJH. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y edad?		
Pregunta	SA	Conclusión
1ª	0,629	Independientes
2ª	0,99	Independientes
3ª (a)	0,665	Independientes
3ª (b)	0,00	Sospechar dependencia

Los resultados obtenidos en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a) no admiten lugar a dudas. En todos ellos, se observa independencia entre, por una parte, las categorías de respuestas que los alumnos usan ante las cuestiones presentadas en el cuestionario sobre el límite finito y, por otra, la edad que éstos declararon tener.

Este hecho no se manifiesta en la pregunta 3ª (b) que necesita un análisis más profundo.

Existen tres factores que pueden alterar el resultado de las pruebas de asociación e independencia: el tamaño de la muestra, la fidelidad de los datos y el sesgo muestral. Antes de sacar conclusión alguna, es necesario revisar estos factores en busca de distorsiones del resultado. En la pregunta 3ª (b) hay muchas casillas (en la tabla de contingencia) con frecuencia esperada menor que 5. El resultado obtenido en esta pregunta (Sig. Asintótica 0.00) induce a pensar que existe dependencia entre las categorías de respuestas que usan los alumnos y la variable edad, pero tenemos que demostrarlo usando la significación asintótica exacta, la cual se aplica cuando los datos no cumplen alguno de los supuestos necesarios para obtener resultados fiables.

Antes de aplicarla decidimos eliminar las edades correspondientes a 19 años (2 ocurrencias) y 20 años (1 ocurrencia), ya que tal hecho no va a alterar los resultados y sí puede mostrar la verdadera relación entre las variables estudiadas. Eliminadas estas edades, obtenemos que la significación asintótica es 0,484 y la significación asintótica exacta 0,521.

Instituto “Celestino Mutis”

En el instituto “Celestino Mutis” participaron 50 alumnos. No hay casos excluidos. La tabla 5.25 contiene los resultados principales.

Tabla 5.25 ICM. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y edad?

Pregunta	SA	Conclusión
1ª	0,560	Independientes
2ª	0,006	Sospechar dependencia
3ª (a)	0,094	Sospechar independencia
3ª (b)	0,792	Independientes

Los resultados obtenidos en la pregunta 1ª y 3ª (b) indican independencia entre las variables categorías y edad. Por otro lado los resultados obtenidos en las preguntas 2ª y 3ª (a), inducen a sospechar cierta dependencia entre ambas variables, la cual demostraremos o desecharemos usando la significación asintótica exacta.

Antes de aplicar la significación asintótica exacta eliminamos la edad 19 años, ya que hay un solo alumno y este hecho no afecta a las conclusiones que obtengamos. Al aplicar el test de chi-cuadrado a la pregunta 2ª, obtenemos una significación asintótica de 0,003 y una significación asintótica exacta de 0,004 inferior a 0,05. Teniendo en cuenta estos datos, afirmamos la dependencia entre las variables categorías y edad, en la pregunta 2ª. Un procedimiento análogo en la pregunta 3ª (a) muestra que la significación asintótica es 0,094 y la significación asintótica exacta es 0,109. Este hecho muestra la independencia entre las variables categorías y edad en la pregunta 3ª (a).

Instituto “Dámaso Alonso”

En el instituto “Dámaso Alonso” participaron 36 alumnos. No hay casos excluidos. La tabla 5.26 contiene los resultados principales.

Tabla 5.26 IDA. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y edad?		
Pregunta	SA	Conclusión
1ª	0,962	Independientes
2ª	0,300	Independientes
3ª (a)	0,651	Independientes
3ª (b)	0,076	Sospechar independencia

Los resultados obtenidos en las preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a) indican independencia entre las variables categorías y edad. Este hecho no parece tan claro en la pregunta 3ª (b), a la cual le vamos a aplicar el parámetro significación asintótica exacta después de eliminar la edad 19 años, ya que solamente hay un representante de dicho valor. Los resultados obtenidos son significación asintótica 0,106 y significación asintótica exacta 0,102, lo que indica independencia entre las variables categorías y edad en esta última pregunta.

5.6.2 Resultados del test, por pregunta, en el par de variables categoría-edad

En total se computan 142 alumnos, por desechar la respuesta del que no contestó la edad que tenía. La tabla 5.27 contiene los resultados principales del test. (Ver página siguiente.)

Solamente en la pregunta 3ª (b) se desprende una cierta sospecha de dependencia. Esta sospecha podemos refrendarla con el estudio análogo realizado por parejas de IES; las respuestas a la pregunta 3ª (b) no podemos darlas por dependientes al agregar los datos del instituto “Celestino Mutis” y los del instituto “Dámaso Alonso”; en los otros dos casos, se mantiene esa sospecha de dependencia.

Tabla 5.27. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y edad?		
Pregunta	SA	Conclusión
1ª	0,892	Independientes
2ª	0,706	Independientes
3ª (a)	0,778	Independientes
3ª (b)	0,00	Sospechar dependencia

Un estudio detallado de la pregunta 3ª (b) usando la significación asintótica exacta ayudará a confirmar o no la dependencia entre las variables categorías y edad.

5.6.3 Resultados del test, por instituto y pregunta, en el par de variables categorías-sexo

Este estudio sigue las mismas pautas que el anterior, realizado para las variables categoría y edad. Para evitar reiteraciones argumentales que consideramos innecesarias, hemos incluido el estudio de los casos sospechosos en las propias tablas, evitando así los comentarios. Cuando se da la sospecha de independencia, calculamos la significación asintótica exacta (SAE) y extraemos la conclusión definitiva correspondiente (Conclusión D).

Instituto "José Hierro"

En el instituto "José Hierro" participaron 57 alumnos. La tabla 5.28 contiene los resultados principales.

Tabla 5.28 IJH. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y sexo?				
Pregunta	SA	Conclusión	SAE	Conclusión D
1ª	0,325	Independencia	--	Independencia
2ª	0,060	Sospechar dependencia	0,020	Dependencia
3ª (a)	0,004	Sospechar dependencia	0,001	Dependencia
3ª (b)	0,289	Independencia	--	Independencia

Instituto "Celestino Mutis"

En el instituto "Celestino Mutis" participaron 50 alumnos. La tabla 5.29 (página siguiente) contiene los resultados principales.

Tabla 5.29 ICM. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y sexo?				
Pregunta	SA	Conclusión	SAE	Conclusión D
1ª	0,456	Independencia	--	Independencia
2ª	0,516	Independencia	--	Independencia
3ª (a)	0,288	Independencia	--	Independencia
3ª (b)	0,813	Independencia	--	Independencia

Instituto "Dámaso Alonso"

En el instituto "Dámaso Alonso" participaron 36 alumnos. La tabla 5.30 contiene los resultados principales.

Tabla 5.30 IDA. Dependencia-Independencia. ¿Categoría y sexo?				
Pregunta	SA	Conclusión	SAE	Conclusión D
1ª	0,343	Independencia	--	Independencia
2ª	0,615	Independencia	--	Independencia
3ª (a)	0,233	Independencia	--	Independencia
3ª (b)	0,953	Independencia	--	Independencia

5.6.4 Resultados del test, por pregunta, en el par de variables categoría-sexo

Se computa a los 143 alumnos. La tabla 5.31 contiene los resultados principales del test.

Tabla 5.31 Dependencia-Independencia. ¿Categoría y sexo?				
Pregunta	SA	Conclusión	SAE	Conclusión D
1ª	0,350	Independencia	--	Independencia
2ª	0,122	Independencia	--	Independencia
3ª (a)	0,007	Sospechar dependencia	--	Dependencia
3ª (b)	0,671	Independencia	--	Independencia

5.7 Avances y conclusión del segundo estudio empírico

En este capítulo hemos buscado y observado los fenómenos a.s.i e i.v.s en las respuestas de los alumnos a un cuestionario sobre el límite finito de una sucesión; con esto, completamos el trabajo planeado en el capítulo 2º (ver figura 2.6), donde propusimos la secuencia de observación de los dos fenómenos, partiendo de una definición de límite finito de una sucesión, en libros de texto, primero y, a continuación, en producciones de los alumnos.

Es necesario resaltar el uso generalizado del código del fenómeno a.s.i v-e. En contraste, para el fenómeno a.s.i en el formato ejemplo, apenas emplean la representación gráfica y no emplean en absoluto la representación tabular.

Respecto al segundo fenómeno, los alumnos apelaron ocasionalmente al código del fenómeno i.v.s v-e.

En este capítulo hemos analizado también la posible influencia de las variables edad y sexo en las categorías que asociamos a las respuestas de los alumnos y hemos establecido algunos resultados.

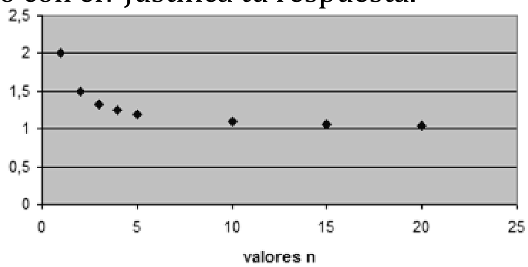
Respecto a la variable sexo, conviene recordar que el colectivo de Mujeres de la muestra emplea el código de fenómeno a.s.i v-e con más frecuencia que los hombres y que su porcentaje de respuestas correctas es también mayor en todo el cuestionario, excepto en la pregunta 3ª (b). Respecto a la variable edad, hemos notado cierta influencia en los porcentajes de respuestas correctas, produciéndose en media, mejores resultados a la edad de 17 años.

Después de aplicar el test de chi-cuadrado de contingencia, cabe anotar que existe una dependencia entre las categorías de respuestas dadas por los alumnos a la pregunta 3ª(b) y su edad. Este hecho no se manifiesta en las preguntas anteriores, en las que destaca la independencia entre las variables categorías y edad. Si por el contrario lo que se tiene en cuenta es el sexo de los alumnos, al aplicar el test de chi-cuadrado de contingencia, se manifiesta una cierta dependencia, en la pregunta 3ª (a), entre éste y las categorías de respuestas de los alumnos.

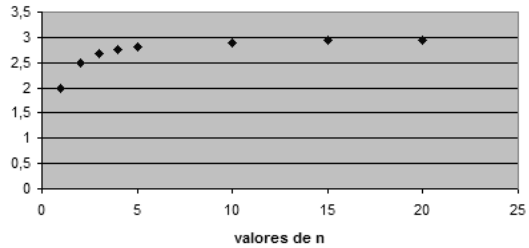
Anexo 5.1 Cuestionario inicial y respuestas de expertos

A.5.1.1 Cuestionario inicial

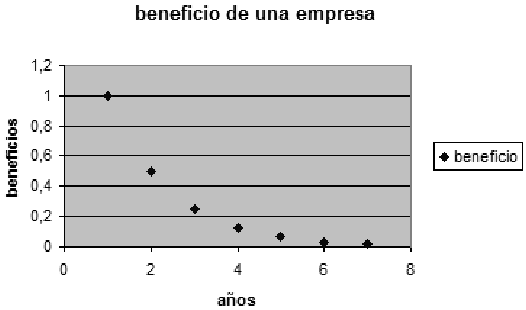
Pregunta 1.
Se representa gráficamente la sucesión $b_n = 1 + 1/n$. El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene limite la sucesión? Un alumno responde: "El límite es 1 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 1" . ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.



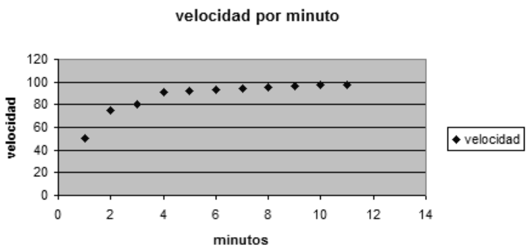
Pregunta 2.
Se representa gráficamente la sucesión $b_n = 3 - 1/n$. El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: "El límite es 3 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 3". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.



Pregunta 3
Las ganancias de una empresa que últimamente marcha muy mal económicamente vienen representadas por la siguiente gráfica:



El profesor pregunta: ¿Llegará a ser el beneficio nulo? El alumno responde: "El límite del beneficio es 0, porque a medida que aumente el tiempo, el beneficio disminuye". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.
Pregunta 4.
La velocidad de una nave espacial, va aumentando siguiendo la siguiente gráfica:



El profesor pregunta ¿Llegará a alcanzar la nave la velocidad de 100 km/minuto? Un alumno responde: ”No, está cada vez más cerca de 100 km/minuto, pero nunca llega a alcanzarla”. ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

Pregunta 5.

Dada la siguiente sucesión a_n, expresada a través de una tabla:

n	a_n
1	1/5
2	1/25
3	1/125
....	....

¿A qué valor se aproximan los valores de la sucesión a medida que continuamos dando valores a n? ¿Es este valor el límite de la sucesión? Justifica tu respuesta.

Pregunta 6.

Dada la siguiente sucesión:

n	A_n
1	1.9
2	1.99
3	1.999
....	.....

¿A qué valor se aproximan los valores de la sucesión a medida que continuamos dando valores a n? ¿Es este valor el límite de la sucesión? Justifica tu respuesta.

Pregunta 7

Tenemos un cuadrado de lado 1 m y dividimos el cuadrado en cuatro partes. Cada cuadrado resultante lo divido en 4 partes y así sucesivamente. La siguiente tabla recoge las medidas de cada cuadrado, resultante de la división de un cuadrado de lado 1m:

n	a_n
1	1
2	1/4
3	1/16
....	....

El profesor pregunta a un alumno: ¿Tiene límite la sucesión considerada? El alumno responde “El límite de la sucesión resultante de cortar el cuadrado es cero”. ¿Estás de acuerdo con el? Justifica tu respuesta.

Pregunta 8
Una persona debe recoger andando los 10 km, que separan dos ciudades. Cada día va a recorrer la mitad del camino que le falta para llegar al final. La siguiente tabla recoge el espacio recorrido hasta el día n.

n	a_n
1	5
2	7´5
3	8´75
4	9´375
....	....

Miguel responde "Llegará algún día en que recorra la distancia que separa las dos ciudades" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

Pregunta 9
La sucesión $a_n = \frac{1}{10^n}$ cumple: su primer término vale 1/10, su segundo término vale 1/100, su tercer término vale 1/1000 y así sucesivamente. Miguel dice: "Esta sucesión no tiene límite, porque nunca voy a parar" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta

Pregunta 10
La sucesión siguiente cumple: su primer término vale 3´9, su segundo término vale 3´99, su tercer término vale 3´999, su cuarto término 3´9999 y así sucesivamente. Miguel dice: "Esta sucesión tiene límite 4, porque a medida que avanza n su valor va acercándose a 4". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta

Pregunta 11
La cantidad de agua almacenada en un deposito disminuye siguiendo la siguiente sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots..$$

El profesor pregunta: ¿Llegará a vaciarse completamente el depósito? Un alumno responde: "El límite de la capacidad del depósito es 0, porque a medida que pasa el tiempo, la capacidad se va acercando a 0" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

Pregunta 12
El enriquecimiento de una persona sigue la siguiente sucesión, medida en millones de euros: 8´9, 8´99, 8´999, 8´9999, ...
¿Llegará a alcanzar alguna vez la cantidad de 9 millones de euros? ¿Es este valor el límite de la sucesión? Un alumno responde: "El límite de su enriquecimiento es 9, porque a medida que n crece su valor va aumentando". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta

A.5.2.2 Respuestas de los expertos

Los profesores serán denotados por las letras A, B, C y D. De esta manera queda garantizado el anonimato de sus comentarios.

Profesor A

Este profesor no realiza ninguna crítica a las primeras dos cuestiones presentadas. Emplea el signo "+" en cada una de ellas para afirmar que las considera adecuadas.
A la tercera pregunta, realiza una crítica que citamos a continuación de manera textual: "La marcha de una empresa puede cambiar: no responde a una función matemática. No tiene sentido hablar de límite en un número finito (y pequeño) de "años"."
A la cuarta pregunta realiza la siguiente crítica: *"¿Es una pregunta de contexto "real"?*
Las preguntas 5 y 6 son consideradas adecuadas por él. Emplea un signo "+" para confirmar que está de acuerdo con ellas.
En la pregunta nº 7 considera que la palabra "medidas" que aparece en el enunciado del problema podría ser sustituida por la palabra "*área*".
En la pregunta nº 8 realiza la siguiente anotación: "*el número de días ¿puede ser infinito? ¿se puede "recorrer andando" 0,9765625 m (el décimo día)?*"
La pregunta nº 9 es considerada adecuada por él. Emplea un signo "+" para confirmar que está de acuerdo con ellas.
En la pregunta nº 10 realiza la siguiente anotación: *"igual que la pregunta 6"*
En la pregunta nº 11 realiza la siguiente anotación: *"¿la sucesión indica tiempos iguales?*
En la pregunta nº 12 realiza la siguiente anotación: " millones de euros $\Rightarrow$ solo tiene sentido 8 decimales. A partir de aquí no tiene sentido el problema. Alcanzará 899999999 céntimos de €.

Profesora B

La profesora B no hace una objeción específica a las preguntas 1 y 2. Solo comenta en la misma hoja del cuestionario donde aparecen las preguntas 1 y 2, la siguiente observación "*se podría añadir un ej. de suc. que no converja ej* $a_n = (-1)^n$"
A la pregunta 3 hace las siguientes observaciones: *"¿Responde a la pregunta? ¿Podría llegar a tener pérdidas?"*
A la pregunta 4 realiza la siguiente observación: "Parece que este punto no mantiene la misma tendencia" Esta observación se refiere al gráfico presentado. En él, el valor (3, f(3)), parece no seguir el mismo orden de crecimiento que los demás puntos. En realidad se trata solamente de un efecto óptico, porque la gráfica presentada crece de la misma manera en todo su dominio. También se realiza la siguiente observación "suponiendo una aceleración constante". Esta observación se realiza a la pregunta que presentamos ¿Llegará a alcanzar la nave la velocidad de 100 km/minuto?
No se hace ninguna observación a las preguntas 8, 9 y 10.

A la pregunta número 11, realiza la siguiente observación: "¿Responde a la pregunta inicial?", refiriéndose a la respuesta que presentamos como dada por un alumno.
A la pregunta número 12 realiza la siguiente observación: "sucesión finita: unidades monetarias", afirmando las dificultades de manejar unidades monetarias con tanto decimales.

Profesora C

La profesora C no hace ninguna objeción específica a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
A la pregunta número 7, realiza la siguiente observación "del lado" o "del área", refiriéndose a la frase que aparece en la pregunta "la siguiente tabla recoge las medidas de cada cuadrado, resultante de la división de un cuadrado de lado 1m". La profesora no entiende si las medidas se refieren a áreas o a medidas de los lados.
A la pregunta número 8, la profesora realiza la siguiente observación: "a_n espacio recorrido hasta el día n", refiriéndose a la imposibilidad de hallar una expresión algebraica que dé el término general. También anota que la palabra "recoger" que aparece en la primera frase de la pregunta deber ser sustituida por "recorrer".
A las preguntas número 9 y 10 no hace ninguna observación.
A la pregunta número 11 realiza la siguiente observación: la palabra "capacidad" que aparece en el enunciado de la pregunta debe ser sustituida por la palabra "almacenada".
A la pregunta número 12 no hace ninguna observación.

Profesor D

El profesor D realiza los siguientes comentarios que quedan recogidos de manera literal.
"Tarea 1. Quitaría el fondo gris y las líneas de cuadrícula horizontales porque pueden "forzar" la idea de que se alcanza el valor 1(¿?).
Tarea 2. La considero exactamente igual que la tarea 1 para los propósitos del estudio.
Tarea 3. Tiene un aspecto que la diferencia de las tareas 1 y 2 y no es precisamente el poseer un "enunciado de la vida real". Me refiero a que en ella NO aparece el término general de la sucesión en términos simbólicos. Pienso que este hecho podría generar diferencias importantes. En las tareas 1 y 2 el alumno puede apoyarse en la ley que regula la sucesión para afirmar que nunca alcanza el límite. Esta opción no se tiene en la tarea 3.
Tarea 4. La respuesta dada por el alumno ficticio a la tarea 1 ("el límite es 0"), tarea 2 ("el límite es 3") y tarea 3 ("el límite es 1"), no es de la misma naturaleza que la respuesta dada en la tarea 4 ("el límite nunca se alcanza"). ¿Por qué este cambio repentino en la secuencia de tareas?
Tarea 5. Si en las tareas anteriores le presentas a los alumnos hasta 11 valores de la sucesión (véase tarea 4, por ejemplo), ¿por qué ahora tan sólo presentas 3? Deberías unificar este aspecto en todas las tareas. Para la tarea 5, incluiría más

valores para que se viera mejor la evolución experimentada por términos de la sucesión.
Por otra parte, las cuatro primeras tareas son equivalentes (salvo por lo comentado al hablar de la tarea 4) porque el formato y el contenido de las preguntas es el mismo. ¿Por qué ahora se cambian las cuestiones de formato?; ¿por qué no sigue habiendo un "profesor" y un "alumno" ficticios?; ¿por qué ahora no se les "adelanta" a los chicos cuál es el límite, como en los otros casos?
Tarea 6. ¿Por qué decimal y antes fracción? T5 y T6 son equivalentes y no creo que T6 aporte nada nuevo a T5.
Tarea 7. Se vuelve de nuevo al formato de pregunta adoptado en T1, T2, T3 y T4.
Tarea 8. No es verdad que "la siguiente tabla recoge el espacio recorrido hasta el día n". ¿Dónde está la relación (n, a_n)?, es decir, no proporcionas el término general de la sucesión.
Tarea 9. ¿Realmente el enunciado está expresado en un sistema de representación verbal? Te lo digo porque presentas el término general de la sucesión (la ley) simbólicamente.
Tarea 10. Si observas, aquí ya no presentas formalmente el término general de la sucesión, a diferencia que en la tarea 9.
Tarea 11 y 12. No me queda claro que tan verbal es el sistema de representación empleado. A mí me parece más próximo al tabular".

A5.1.3 Conclusiones de la consulta a expertos

Teniendo en cuenta las consideraciones de los compañeros, he decidido suprimir los problemas de la vida real. Ellos implicaban una serie de connotaciones que no son necesarias para nuestro estudio. Por ejemplo: en economía no tiene sentido emplear más de 8 decimales. Teniendo en cuenta esto y mis propias iniciativas he decidido presentar tres tareas:
(1ª) Empleo la representación gráfica y suprimo el término general. También suprimo la distinción entre creciente y decreciente, al aceptar que no va a suponer ninguna variable para nuestro estudio.
(2ª) Empleo una tabla y suprimo el término general. También suprimo la distinción entre creciente y decreciente, por la misma razón que antes.
(3ª) Empleo el sistema de representación verbal y suprimo el término general. También suprimo la distinción entre creciente y decreciente. En esta tarea incluiré también una pregunta en la que empleo el fenómeno de ida-vuelta verbal, ya que me gustaría saber si los alumnos manejan la retroalimentación y cómo lo hacen. No descarto incluir otras variantes del fenómeno i.v.s, según la respuesta que reciba en la prueba piloto.

Anexo 5.2 Cuestionario administrado e instrucciones

El cuestionario consta de 5 páginas. En las dos primeras se incluyen instrucciones y en las otras tres, las preguntas propiamente dichas, una por página. Las preguntas se mostraron cada una en un recuadro.

<u>Página 1ª del cuestionario</u>

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN DEL CUESTIONARIO:
1) El cuestionario tiene una duración de 30 minutos y se realiza por cada alumno de manera individual.
2) En cada pregunta se da una justificación de un alumno y se pide une aclaración. Como aclaración, por favor, no emplees las mismas palabras que ese alumno. Es decir, cuando contestes sobre el límite de la sucesión presentada, esperamos que justifiques dicha afirmación de manera razonada, y utilizando tus propias palabras.
3) Para justificar tus respuestas, puedes emplear el modo que consideres más conveniente.
4) Por favor, como esto no es un examen, contesta todas las cuestiones, sin dejar en blanco ninguna de ellas.
5) Si deseas conocer algún término de la sucesión que no aparece en la cuestión presentada, pregunta al profesor, el cual te lo suministrará.

6) El cuestionario solamente puede ser realizado por alumnos de 1º y 2º de bachillerato, de ciencias sociales, de ciencias de la naturaleza y de la salud y bachillerato tecnológico.

7) Los datos de clasificación: nombre, curso, centro, edad, etc, son recogidos para observar si existen diferencias importantes entre el tratamiento del concepto de límite en los diferentes cursos en los que se imparte. Asimismo recogemos la asignatura que los alumnos estudian para observar si también existe diferente tratamiento entre un bachillerato y otro.

8) Los datos personales, así como las respuestas obtenidas serán tratadas de manera confidencial. En nuestro estudio no citaremos el nombre de ningún alumno, manteniendo de esta manera su anonimato. Además, las respuestas individuales de los alumnos se utilizarán para describir las características del grupo. Gracias por la colaboración.

<u>Página 2ª del cuestionario</u>

<u>Cuestionario</u>
Nombre:______________________________________
Curso:________
Centro:_______________________________________
Edad:________Sexo:________
Repite curso:_____________

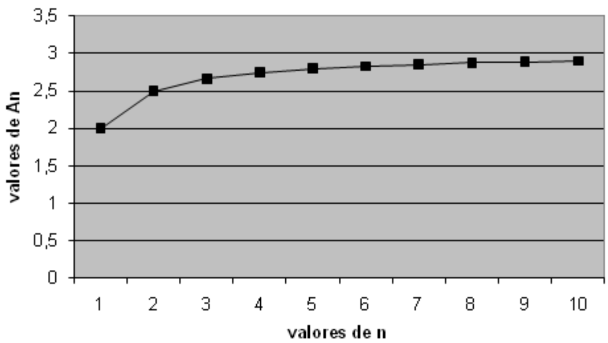
Usáis libro de texto en clase:___________ ¿Cuál?_________
Nota de matemáticas en el último curso__________________
Rodea el nombre de la asignatura de matemáticas que cursas:

- Matemáticas I.
- Matemáticas II.
- Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I.
- Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II.

Página 3ª del cuestionario

Cuestión nº 1.

1) Se representa gráficamente una sucesión An. El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: "El limite es 3 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 3". ¿Estás de acuerdo con el? Justifica tu respuesta de manera razonada.



Página 4ª del cuestionario

Cuestión nº 2.

2) Dada la siguiente sucesión:

n	1	2	10	1000	1000000	1000000000	....
a_n	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	....

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión a_n? Un alumno responde: "El límite es 1,5 porque a medida que avanzo en la sucesión los valores de a_n se aproximan más a 1,5". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Página 5ª del cuestionario

Cuestión nº 3.

3) La sucesión a_n cumple: su primer término vale 2.9, su segundo término vale 2.99, su tercer término vale 2.999, su cuarto término 2.9999, su quinto término 2.99999, su sexto término 2.999999, su séptimo término 2.9999999, su octavo término 2.99999999 y así sucesivamente.

a) Un alumno afirma: "Esta sucesión tiene límite 3, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 3" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

b) Otro alumno afirma: "La sucesión tiene límite 3 porque la distancia entre los términos de la sucesión y 3, puede hacerse tan pequeña como se desee, a partir de un término convenientemente elegido" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Anexo 5.3 Respuestas detalladas

Instituto "José Hierro"						
Curso: 2 º C bachillerato de Ciencias Sociales						
Alumno	Edad	Sexo	Pregunta 1ª	Pregunta 2ª	Pregunta 3ª (a)	Pregunta 3ª (b)
1	20	F	C2.1	C1.3	C1.3	C1.1
2	17	F	C1.3	C1.3	C1.3	C2.2
3	17	F	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3
4	17	V	C 2.2	C1.3	C3.2	C3.2
5	18	V	C0	C2.1	C0	C5
6	17	V	C2.2	C1.3	C1.3	C2.2
7	19	V	C 1.3	C1.3	C1.3	C3.2
8	17	V	C 1.3	C 3.2	C 3.2	C 3.2
9	19	V	C 3.1	C2.1	C3.1	C.2.1
10	17	F	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3
11	17	F	C1.3	C2.2	C2.1	C2.1
Curso: 2 º B bachillerato de Ciencias de la Salud						
1	17	V	C2.1	C1.3	C1.3	C1.4
2	17	F	C1.4	C1.4	C2.1	C4
3	18	F	C2.1	C1.3	C2.1	C5
4	17	F	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3
5	18	F	C1.3	C1.3	C1.3	C1.3
6	17	F	C1.3	C1.3	C3.2	C3.2
7	17	F	C3.1	C2.2	C2.1	C1.4
8	18	V	C1.3	C1.3	C2.1	C3.2
9	18	F	C2.1	C2.1	C2.1	C3.2
10	18	F	C1.3	C1.3	C1.3	C5
11	18	V	C1.3	C3.2	C3.2	C3.2
12	17	V	C1.3	C2.1	C2.1	C2.1

Instituto "José Hierro"						
Curso: 1 º A bachillerato de Ciencias de la Salud						
Alumno	Edad	Sexo	Pregunta 1ª	Pregunta 2ª	Pregunta 3ª (a)	Pregunta 3ª (b)
1	16	V	C 3.2	C1.3	C 2.1	C 3.2
2	16	F	C 1.3	C 2.1	C 5	C 5
3	18	F	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C 5
4	16	F	C 2.1	C 2.1	C 2.2	C 2.2
5	16	F	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 2.1
6	17	F	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 3.2
7	16	F	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 3.2
8	18	V	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 3.2
9	16	F	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 3.2
10	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
11	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C5
12	16	V	C 2.1	C 2.2	C 2.2	C 2.1
13	NS/NC	F	C 2.1	C 1.3	C0	C 2.1
14	16	V	C 3.1	C 5	C 3.1	C 3.2
Curso: 1 º B bachillerato de Ciencias de la Salud						
1	17	V	C 3.2	C 3.2	C 3.2	C 5
2	16	V	C 1.3	C 1.3	C 5	C 5
3	17	V	C 2.1	C 2.2	C 2.2	C 2.2
4	18	V	C 2.1	C 5	C 5	C 5
5	17	V	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 3.2
6	17	F	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C 2.1
7	16	V	C 2.1	C 2.1	C 3.2	C3.2
8	17	F	C 1.3	C 2.2	C 2.1	C 5
9	16	F	C 2.2	C 2.1	C 1.3	C 1.3
10	17	V	C 3.1	C 3.1	C 3.1	C 3.2
11	16	V	C 3.1	C 3.2	C 3.2	C 2.1
12	17	F	C 2.1	C 1.3	C 1.3	C 2.1
13	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 2.1
14	16	F	C 3.2	C 2.1	C 2.1	C 3.2
15	16	F	C 2.1	C 1.3	C 2.1	C 3.1
16	16	F	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C5
17	17	F	C 1.3	C 2.1	C 1.3	C 5
18	17	F	C 1.3	C 4	C 1.3	C 5
19	16	F	C 3.1	C 1.3	C 1.3	C 3.2
20	17	V	C 1.3	C 0	C 0	C 5

Instituto "Celestino Mutis"						
Curso: 1 º A bachillerato de Ciencias de la Salud						
Alumno	Edad	Sexo	Pregunta 1ª	Pregunta 2ª	Pregunta 3ª (a)	Pregunta 3ª (b)
1	16	F	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C3.2
2	17	F	C3.2	C 1.3	C 1.3	C 1.3
3	16	V	C 1.3	C 2.2	C 1.3	C 1.3
4	16	V	C 4	C 2.1	C 1.3	C 1.3
5	17	F	C 2.2	C 1.3	C 1.3	C 2.2
6	17	F	C 1.3	C 3.2	C5	C 2.1
7	16	F	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C 5
8	16	F	C 2.2	C 2.1	C 1.3	C 5
9	16	V	C 4	C 1.3	C 3.1	C 1.4
10	17	V	C 1.3	C 1.3	C 5	C 3.2
11	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 5
12	17	F	C 1.3	C 2.1	C 1.3	C 1.3
13	16	V	C 2.2	C 2.2	C 2.2	C 2.2
14	16	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
15	16	F	C 2.1	C 1.3	C 1.3	C 1.3
16	16	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 2.1
17	16	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
18	16	V	C 1.3	C 2.1	C 2.1	C 1.3
19	17	F	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 2.2
20	16	F	C 1.3	C 2.1	C 3.1	C 2.2
21	16	F	C 2.2	C 2.1	C 2.1	C 3.2
22	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
Curso: 1 º B bachillerato de Ciencias de la Salud						
1	16	V	C 3.2	C 5	C 3.1	C 3.2
2	18	F	C 3.2	C 5	C 3.2	C 3.2
3	17	F	C 1.3	C 1.3	C 5	C 2.1
4	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
5	17	V	C 3.2	C 3.2	C 2.2	C 2.2
6	16	F	C 1.3	C 5	C 1.3	C 5
7	18	V	C 2.1	C 5	C 5	C 5
8	17	V	C 1.3	C 2.1	C 2.1	C 2.2
9	16	V	C 1.3	C 1.3	C 3.2	C 2.1
10	17	F	C 2.1	C 1.3	C 1.3	C 1.3
11	17	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
12	17	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
13	17	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 5
14	16	V	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 1.3
15	16	V	C 2.1	C 2.1	C 5	C 5
16	19	V	C 2.1	C 5	C 5	C 5
17	16	V	C 2.1	C 3.2	C 2.1	C 3.2
18	16	V	C 1.3	C 1.3	C 1.4	C 2.1
19	17	V	C 2.1	C 1.3	C 1.3	C 1.3
20	16	V	C 2.1	C 1.3	C 2.2	C 2.2
21	16	V	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 2.1
22	17	F	C 1.3	C 1.3	C 3.2	C 5
23	17	F	C 3.2	C 2.1	C 1.3	C 5
24	17	V	C 5	C 5	C 2.2	C 2.2
25	18	V	C 2.2	C 2.2	C 3.1	C 5
26	17	V	C 1.3	C 2.1	C 1.3	C 3.2
27	18	V	C 2.1	C 5	C 3.1	C 2.1
28	17	F	C 1.3	C 3.2	C 3.2	C 3.2

Instituto "Dámaso Alonso"						
Curso: 1 º X bachillerato de Ciencias de la Salud						
Alumno	Edad	Sexo	Pregunta 1ª	Pregunta 2ª	Pregunta 3ª (a)	Pregunta 3ª (b)
1	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 3.2
2	17	F	C 2.2	C 1.3	C 1.3	C 2.2
3	16	V	C 3.2	C 1.3	C 2.2	C 2.2
4	16	F	C 1.3	C 1.3	C 2.2	C 2.1
5	17	V	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C 1.3
6	17	V	C 1.3	C 1.3	C 5	C 5
7	17	V	C 2.2	C 2.2	C 2.2	C 2.2
8	17	V	C 1.3	C 2.2	C 5	C 5
9	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 3.2
10	16	V	C 3.2	C 2.1	C 5	C 5
11	17	F	C 3.2	C 2.2	C 3.2	C 2.2
12	17	V	C0	C0	C0	C 2.2
13	17	V	C 3.2	C 3.2	C 2.2	C 3.2
14	17	F	C 2.1	C 2.2	C 2.2	C 1.3
15	17	F	C 3.1	C 1.3	C 5	C 5
16	17	F	C0	C0	C0	C 5
17	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 2.1
18	18	F	C 3.2	C 3.2	C 1.3	C 5
19	16	V	C 2.1	C 1.3	C 3.1	C 5
20	17	F	C 3.2	C 1.3	C 2.2	C 5
21	16	F	C 3.2	C 1.3	C 5	C 5
Curso: 1 º Y bachillerato de Ciencias Sociales						
1	17	F	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C 1.3
2	18	F	C 1.3	C 2.1	C 5	C 5
3	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 5
4	16	F	C 1.3	C 1.3	C 2.2	C 5
5	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 5
6	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 2.2
7	18	F	C 1.3	C 2.1	C 1.3	C 2.1
8	17	F	C 1.3	C 2.1	C 2.1	C 1.3
9	16	V	C 2.1	C 2.1	C 2.1	C 2.1
10	17	F	C 1.3	C 1.1	C 2.2	C 1.3
11	17	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 2.2
12	16	F	C 1.3	C 1.3	C 1.3	C 5
13	17	V	C 1.3	C 2.2	C 1.3	C 1.3
14	19	F	C 1.3	C 1.3	C 2.1	C 2.1
15	18	V	C 2.2	C 1.3	C 5	C 5

Anexo 5.4 Respuestas por instituto y edad

Bajo cada etiqueta de pregunta se indican las respuestas registradas por edad y categoría. Se ha omitido la única respuesta de un alumno de 20 años así como la respuesta de un alumno que no indicó su edad.

Instituto "José Hierro". Resultados por edad

CAT	Pregunta 1ª				Pregunta 2ª				Pregunta 3ª (a)				Pregunta 3ª (b)			
	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19
C0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
C1.1	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C1.2	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C1.3	4	14	5	1	6	11	5	1	4	10	2	1	1	4	1	0
C1.4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
C2.1	8	5	4	0	9	4	3	1	7	8	5	0	4	4	0	1
C2.2	1	2	0	0	1	4	0	0	2	1	0	0	1	3	0	0
C3.1	3	2	0	1	0	2	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
C3.2	2	1	0	0	1	2	1	0	2	4	1	0	7	6	4	1
C4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
C5	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0	4	5	5	0

Instituto "Celestino Mutis". Resultados por edad																
CAT	Pregunta 1ª				Pregunta 2ª				Pregunta 3ª (a)				Pregunta 3ª (b)			
	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19
C0	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C1.1	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C1.2	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C1.3	13	13	0	0	12	12	0	0	10	12	0	0	8	7	0	0
C1.4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
C2.1	5	3	2	0	7	5	0	0	6	2	0	0	4	2	1	0
C2.2	3	1	1	0	2	0	1	0	2	2	0	0	3	5	0	0
C3.1	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0
C3.2	0	3	1	0	1	3	0	0	1	2	1	0	4	3	1	0
C4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C5	0	0	0	0	2	1	3	0	1	3	1	0	4	4	2	0

Instituto "Dámaso Alonso". Resultados por edad																
CAT	Pregunta 1ª				Pregunta 2ª				Pregunta 3ª (a)				Pregunta 3ª (b)			
	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19	16	17	18	19
C0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
C1.1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C1.2	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C1.3	6	11	2	1	9	10	1	1	4	6	2	0	0	6	0	0
C1.4	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C2.1	2	1	1	0	2	1	2	0	1	3	0	1	2	2	1	1
C2.2	0	2	0	0	0	5	0	0	3	5	0	0	2	4	0	0
C3.1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
C3.2	3	3	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	3	0	0
C4	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
C5	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2	0	7	5	3	0

Anexo 5.5 Test χ^2 de contingencia (Pearson): listados de ordenador

Parte 1ª: Variables Categoría y Edad

A5.5.1 Resumen del procesamiento de los casos en el IES "José Hierro"

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 1	56	98,2%	1	1,8%	57	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta n º 1

Recuento

		Pregunta n º 1							Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	
Edad	16	0	4	0	8	1	3	2	18
	17	0	14	1	5	2	2	1	25
	18	1	5	0	4	0	0	0	10
	19	0	1	0	0	0	1	0	2
	20	0	0	0	1	0	0	0	1
Total		1	24	1	18	3	6	3	56

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	21,214(a)	24	,626
Razón de verosimilitud	22,177	24	,569
N de casos válidos	56		

(a) 31 casillas (88,6%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 2	56	98,2%	1	1,8%	57	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta n º 2

Recuento

		Pregunta n º 2									Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Edad	16	0	6	0	9	1	0	1	0	1	18
	17	1	11	1	4	4	1	2	1	0	25

	18	0	5	0	3	0	0	1	0	1	10
	19	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2
	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Total		1	24	1	17	5	1	4	1	2	56

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	16,360ª	32	,990
Razón de verosimilitud	19,629	32	,957
N de casos válidos	56		

ª 41 casillas (91,1%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta nº. 3a	56	98,2%	1	1,8%	57	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta nº. 3a

Recuento

		Pregunta nº. 3a							Total
		C0	C1.3	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C5	
Edad	16	0	4	7	2	1	2	2	18
	17	1	10	8	1	1	4	0	25
	18	1	2	5	0	0	1	1	10
	19	0	1	0	0	1	0	0	2
	20	0	1	0	0	0	0	0	1
Total		2	18	20	3	3	7	3	56

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	20,556(a)	24	,665
Razón de verosimilitud	19,276	24	,737
N de casos válidos	56		

(a) 31 casillas (88,6%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,04.

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta nº. 3b	56	98,2%	1	1,8%	57	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta nº. 3b

Recuento

		Pregunta nº. 3b									Total
		C1.1	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Edad	16	0	1	0	4	1	1	7	0	4	18
	17	0	4	2	4	3	0	6	1	5	25
	18	0	1	0	0	0	0	4	0	5	10
	19	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2
	20	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Total		1	6	2	9	4	1	18	1	14	56

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	72,736(a)	32	,000
Razón de verosimilitud	29,905	32	,573
N de casos válidos	56		

(a) 42 casillas (93,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

A5.5.2 Resumen del procesamiento de los casos en el instituto "Celestino Mutis"

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 1	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta n º 1

Recuento

		Pregunta n º 1							Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 4	C 5	C3.2	
Edad	16	13	5	3	1	2	0	0	24
	17	13	3	1	2	0	1	1	21
	18	0	2	1	1	0	0	0	4
	19	0	1	0	0	0	0	0	1
Total		26	11	5	4	2	1	1	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	16,473(a)	18	,560
Razón de verosimilitud	18,536	18	,421
N de casos válidos	50		

(a) 25 casillas (89,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 2	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta n º 2

Recuento

		Pregunta n º 2					Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 5	
Edad	16	12	7	2	1	2	24
	17	12	5	0	3	1	21
	18	0	0	1	0	3	4
	19	0	0	0	0	1	1
Total		24	12	3	4	7	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	27,820(a)	12	,006
Razón de verosimilitud	23,927	12	,021
N de casos válidos	50		

(a) 16 casillas (80,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,06.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta nº. 3 a	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta nº. 3 a

Recuento

		Pregunta nº. 3 a							Total
		C 1.3	C 1.4	C 2.1	C 2.2	C 3.1	C 3.2	C 5	
Edad	16	10	1	6	2	3	1	1	24
	17	12	0	2	2	0	2	3	21
	18	0	0	0	0	2	1	1	4
	19	0	0	0	0	0	0	1	1
Total		22	1	8	4	5	4	6	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)

Chi-cuadrado de Pearson	26,279(a)	18	,094
Razón de verosimilitud	24,879	18	,128
N de casos válidos	50		

(a) 26 casillas (92,9%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta nº. 3 b	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta nº. 3 b

Recuento

		Pregunta nº. 3 b						Total
		C 1.3	C 1.4	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 5	
Edad	16	8	1	4	3	4	4	24
	17	7	0	2	5	3	4	21
	18	0	0	1	0	1	2	4
	19	0	0	0	0	0	1	1
Total		15	1	7	8	8	11	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	10,435(a)	15	,792
Razón de verosimilitud	11,613	15	,708
N de casos válidos	50		

(a) 21 casillas (87,5%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

A5.5.3 Resumen del procesamiento de los casos en el instituto “Dámaso Alonso”

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 1	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta n º 1

Recuento

		Pregunta n º 1						Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.1	C 3.2	C0	
Edad	16	6	2	0	0	3	0	11
	17	11	1	2	1	3	2	20
	18	2	0	1	0	1	0	4
	19	1	0	0	0	0	0	1

Total	20	3	3	1	7	2	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	7,952(a)	15	,926
Razón de verosimilitud	9,841	15	,830
N de casos válidos	36		

(a) 22 casillas (91,7%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,03.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 2	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta n º 2

Recuento

		Pregunta n º 2						Total
		C 1.1	C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C0	
Edad	16	0	9	2	0	0	0	11
	17	1	10	1	5	1	2	20
	18	0	1	2	0	1	0	4
	19	0	1	0	0	0	0	1
Total		1	21	5	5	2	2	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	17,316(a)	15	,300
Razón de verosimilitud	18,750	15	,225
N de casos válidos	36		

(a) 22 casillas (91,7%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,03.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta nº. 3a	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta nº. 3a

Recuento

		Pregunta nº. 3a							Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.1	C 3.2	C 5	C0	
Edad	16	4	1	3	1	0	2	0	11
	17	6	3	5	0	1	3	2	20
	18	2	0	0	0	0	2	0	4
	19	0	1	0	0	0	0	0	1
Total		12	5	8	1	1	7	2	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	15,165(a)	18	,651
Razón de verosimilitud	14,873	18	,671
N de casos válidos	36		

(a) 27 casillas (96,4%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,03.

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta nº. 3b	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

Tabla de contingencia Edad * Pregunta nº. 3b

Recuento

		Pregunta nº. 3b					Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 5	
Edad	16	0	2	2	0	7	11
	17	6	1	5	3	5	20
	18	0	1	0	0	3	4
	19	0	1	0	0	0	1
Total		6	5	7	3	15	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	19,568(a)	12	,076
Razón de verosimilitud	21,330	12	,046
N de casos válidos	36		

(a) 19 casillas (95,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,08.

A5.5.4 Variables categoría-edad (agregadas)

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Edad * Pregunta n º 1	142	100,0%	0	,0%	142	100,0%
Edad * Pregunta n º 2	142	100,0%	0	,0%	142	100,0%
Edad * Pregunta nº. 3a	142	100,0%	0	,0%	142	100,0%
Edad * Pregunta nº. 3b	142	100,0%	0	,0%	142	100,0%

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta n º 1									Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Edad	16	0	23	0	15	4	3	6	2	0	53
	17	2	38	1	9	5	3	7	0	1	66
	18	1	7	0	6	2	0	2	0	0	18
	19	0	2	0	1	0	1	0	0	0	4
	20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Total		3	70	1	32	11	7	15	2	1	142

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	22,547(a)	32	,892
Razón de verosimilitud	24,427	32	,829
N de casos válidos	142		

(a) 37 casillas (82,2%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Tabla de contingencia

		Pregunta n º 2										Total
		C0	C1.1	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Edad	16	0	0	27	0	18	3	0	2	0	3	53
	17	3	1	33	1	10	9	1	6	1	1	66
	18	0	0	6	0	5	1	0	2	0	4	18
	19	0	0	2	0	1	0	0	0	0	1	4
	20	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Total		3	1	69	1	34	13	1	10	1	9	142

Recuento

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)

Chi-cuadrado de Pearson	30,988(a)	36	,706
Razón de verosimilitud	32,124	36	,654
N de casos válidos	142		

(a) 44 casillas (88,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta nº. 3a								Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C5	
Edad	16	0	18	1	14	7	5	3	5	53
	17	3	28	0	13	8	1	7	6	66
	18	1	4	0	5	0	2	2	4	18
	19	0	1	0	1	0	1	0	1	4
	20	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Total		4	52	1	33	15	9	12	16	142

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	22,072(a)	28	,778
Razón de verosimilitud	26,174	28	,564
N de casos válidos	142		

(a) 30 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta nº. 3b									Total
		C1.1	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Edad	16	0	9	1	10	6	1	11	0	15	53
	17	0	17	2	7	13	0	12	1	14	66
	18	0	1	0	2	0	0	5	0	10	18
	19	0	0	0	2	0	0	1	0	1	4
	20	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Total		1	27	3	21	19	1	29	1	40	142

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	166,318(a)	32	,000
Razón de verosimilitud	39,041	32	,183
N de casos válidos	142		

(a) 34 casillas (75,6%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Parte 2ª: Variables Categoría y Sexo

A5.5.5 Resumen del procesamiento de los casos en el IES "José Hierro"

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 1	57	100,0%	0	,0%	57	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta n º 1

Recuento

		Pregunta n º 1							Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	
Sexo		0	0	0	0	0	0	0	1
	F	0	17	1	11	1	2	1	33
	V	1	7	0	7	2	4	2	23
Total		1	24	1	18	3	6	3	57

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	63,942(a)	14	,000
Razón de verosimilitud	17,598	14	,226
N de casos válidos	57		

(a) 20 casillas (83,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 2	57	100,0%	0	,0%	57	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta n º 2

Recuento

		Pregunta n º 2									Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Sexo		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	F	0	17	1	11	3	0	0	1	0	33
	V	1	7	0	6	2	1	4	0	2	23
Total		1	24	1	17	5	1	4	1	2	57

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	71,774(a)	18	,000
Razón de verosimilitud	28,126	18	,060
N de casos válidos	57		

(a) 26 casillas (86,7%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta nº. 3a	57	100,0%	0	,0%	57	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta nº. 3a

Recuento

		Pregunta nº. 3a							Total
		C0	C1.3	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C5	
Sexo		0	0	0	0	0	0	0	1
	F	0	15	15	1	0	1	1	33
	V	2	3	5	2	3	6	2	23
Total		2	18	20	3	3	7	3	57

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	78,503(a)	14	,000
Razón de verosimilitud	33,812	14	,002
N de casos válidos	57		

(a) 20 casillas (83,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta nº. 3b	57	100,0%	0	,0%	57	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta nº. 3b

Recuento

		Pregunta nº. 3b									Total
		C1.1	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Sexo		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	F	1	6	1	5	2	1	7	1	9	33
	V	0	0	1	4	2	0	11	0	5	23
Total		1	6	2	9	4	1	18	1	14	57

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	66,838(a)	18	,000
Razón de verosimilitud	22,916	18	,194
N de casos válidos	57		

(a) 25 casillas (83,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

A5.5.6 Resumen del procesamiento de los casos en el instituto "Celestino Mutis"

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 1	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta n º 1

Recuento

		Pregunta n º 1						Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 4	C 5	
Sexo	F	12	3	3	3	0	0	21
	V	14	8	2	2	2	1	29
Total		26	11	5	5	2	1	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,666(a)	5	,458
Razón de verosimilitud	5,788	5	,327
N de casos válidos	50		

a 9 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,42.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 2	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta n º 2

Recuento

		Pregunta n º 2					Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 5	
Sexo	F	11	6	0	2	2	21
	V	13	6	3	2	5	29
Total		24	12	3	4	7	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,256(a)	4	,516
Razón de verosimilitud	4,369	4	,358
N de casos válidos	50		

(a) 6 casillas (60,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,26.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta nº. 3 a	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta nº. 3 a

Recuento

		Pregunta nº. 3 a							Total
		C 1.3	C 1.4	C 2.1	C 2.2	C 3.1	C 3.2	C 5	
Sexo	F	11	0	4	0	1	3	2	21
	V	11	1	4	4	4	1	4	29
Total		22	1	8	4	5	4	6	50

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	7,375(a)	6	,288
Razón de verosimilitud	9,299	6	,157
N de casos válidos	50		

(a) 12 casillas (85,7%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,42.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta nº. 3 b	50	100,0%	0	,0%	50	100,0%

.

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta nº. 3 b

Recuento

		Pregunta nº. 3 b						Total
		C 1.3	C 1.4	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 5	
Sexo	F	6	0	2	3	4	6	21
	V	9	1	5	5	4	5	29
Total		15	1	7	8	8	11	50

.

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,254(a)	5	,813
Razón de verosimilitud	2,630	5	,757
N de casos válidos	50		

(a) 9 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,42.

.

A5.5.7 Resumen del procesamiento de los casos en el instituto Dámaso Alonso.

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 1	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

.

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta n º 1

Recuento

		Pregunta n º 1						Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.1	C 3.2	C0	
Sexo	F	16	1	1	1	4	1	24
	V	4	2	2	0	3	1	12
Total		20	3	3	1	7	2	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	5,636(a)	5	,343
Razón de verosimilitud	5,841	5	,322
N de casos válidos	36		

(a) 10 casillas (83,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,33.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 2	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

.

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta n º 2

Recuento

		Pregunta n º 2						Total
		C 1.1	C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C0	
Sexo	F	1	16	3	2	1	1	24
	V	0	5	2	3	1	1	12
Total		1	21	5	5	2	2	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,557(a)	5	,615
Razón de verosimilitud	3,771	5	,583
N de casos válidos	36		

(a) 10 casillas (83,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,33.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta nº. 3a	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta nº. 3a

Recuento

		Pregunta nº. 3a							Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.1	C 3.2	C 5	C0	
Sexo	F	11	3	5	0	1	3	1	24
	V	1	2	3	1	0	4	1	12
Total		12	5	8	1	1	7	2	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	8,073(a)	6	,233
Razón de verosimilitud	9,297	6	,158
N de casos válidos	36		

(a) 12 casillas (85,7%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,33.

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta nº. 3b	36	100,0%	0	,0%	36	100,0%

.

Tabla de contingencia Sexo * Pregunta nº. 3b

Recuento

		Pregunta nº. 3b					Total
		C 1.3	C 2.1	C 2.2	C 3.2	C 5	
Sexo	F	4	4	4	2	10	24
	V	2	1	3	1	5	12
Total		6	5	7	3	15	36

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,686(a)	4	,953
Razón de verosimilitud	,712	4	,950
N de casos válidos	36		

(a) 8 casillas (80,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,00.

A5.5.8 Variables categoría-sexo (agregadas).

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Sexo * Pregunta n º 1	143	100,0%	0	,0%	143	100,0%
Sexo * Pregunta n º 2	143	100,0%	0	,0%	143	100,0%
Sexo * Pregunta nº. 3a	143	100,0%	0	,0%	143	100,0%
Sexo * Pregunta nº. 3b	143	100,0%	0	,0%	143	100,0%

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta n º 1										Total
		C 2.1	C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Sexo	F	1	1	45	1	15	5	3	8	0	0	79
	V	0	2	25	0	17	6	4	7	2	1	64
Total		1	3	70	1	32	11	7	15	2	1	143

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	10,010(a)	9	,350
Razón de verosimilitud	11,916	9	,218
N de casos válidos	143		

(a) 13 casillas (65,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,45.

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta n º 2											Total
		C 1.3	C0	C1.1	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Sexo	F	1	1	1	44	1	20	5	0	3	1	2	79
	V	0	2	0	25	0	14	8	1	7	0	7	64
Total		1	3	1	69	1	34	13	1	10	1	9	143

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	15,289(a)	10	,122
Razón de verosimilitud	17,346	10	,067
N de casos válidos	143		

(a) 15 casillas (68,2%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,45.

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta nº. 3ª								Total
		C0	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C5	
Sexo	F	2	37	0	22	6	1	5	6	79
	V	3	15	1	11	9	8	7	10	64
Total		5	52	1	33	15	9	12	16	143

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	20,201(a)	7	,005
Razón de verosimilitud	21,504	7	,003
N de casos válidos	143		

(a) 6 casillas (37,5%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,45.

Tabla de contingencia

Recuento

		Pregunta nº. 3b										Total
		C 2.1	C1.1	C1.3	C1.4	C2.1	C2.2	C3.1	C3.2	C4	C5	
Sexo	F	1	1	16	1	11	9	1	13	1	25	79
	V	0	0	11	2	10	10	0	16	0	15	64
Total		1	1	27	3	21	19	1	29	1	40	143

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	6,670(a)	9	,671
Razón de verosimilitud	8,178	9	,516
N de casos válidos	143		

(a) 10 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,45.

Capítulo 6º: Conclusiones y resúmenes; perspectivas

Introducción

Esta investigación ha partido de una definición de límite finito de una sucesión; la definición se eligió mediante una consulta a expertos; hemos descrito dos fenómenos que quedan organizados por ella: aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida y vuelta en sucesiones (i.v.s). Estos fenómenos se usan en algún sistema de representación (simbólico, verbal, gráfico o tabular) y en algún formato (ejemplo o definición). Los hemos observado en libros de texto y en producciones de alumnos de bachillerato (respuestas a un cuestionario relativo al concepto de límite finito de una sucesión, en cuyos enunciados usamos los fenómenos citados anteriormente). También hemos visto que, desde el punto de vista fenomenológico, parece haber solamente dos tipos de definiciones de límite de una sucesión: las que mencionan el valor del límite y las que mencionan la menguante distancia entre dos términos cualesquiera a partir de un cierto valor de n.

En este capítulo revisamos o resumimos:

- Los objetivos de la investigación y su cumplimiento. (Apartado 6.1)

- Las hipótesis de investigación y el grado en que son o no refutadas. (Apartado 6.2)

- Perspectivas de aplicación de la investigación realizada y cuestiones que quedan pendientes. (Apartado 6.3)

- Una breve reflexión final en la que se destaca el principal hallazgo de esta investigación: los fenómenos a.s.i e i.v.s, organizados por la definición de limite finito de una sucesión. (Apartado 6.4.)

6.1 Problema de investigación y objetivos

Nuestro problema de investigación surge al preguntar, como profesores de secundaria, a qué se deben las dificultades que afrontamos para enseñar correctamente el límite de una sucesión y para conseguir que se aprenda adecuadamente.

Para buscar vías de respuesta, consideramos conveniente abordar tres campos de la Educación Matemática: fenomenología, representaciones y pensamiento matemático avanzado. El estudio correspondiente se realizó en los primeros apartados del capítulo 2º.

La búsqueda de antecedentes en esos tres campos permitió centrar un problema de investigación mediante el enunciado de objetivos, la propuesta de hipótesis y el empleo de una metodología que consideramos adecuada para controlar los procesos teóricos y empíricos que pusimos en juego; se enunciaron al final del capítulo 2º y este apartado se dedica a su revisión y resumen detallados.

6.1.1 De los objetivos y su logro

Objetivo 1*. Revisar y analizar el campo de conocimientos actual en torno al concepto de límite finito de una sucesión, poniendo de manifiesto los principales intereses, problemas y limitaciones existentes.*

Objetivo 2. *Describir dificultades asociadas a la presentación del límite.*

Los objetivos 1 y 2 se han logrado mediante una revisión bibliográfica relativa al límite finito de una sucesión, la cual ha permitido reconocer problemas asociados a su historia, enseñanza y aprendizaje. El anexo A6.1 contiene una serie de resultados relativos a las dificultades de dicho concepto, dificultades que han aparecido, en la mayoría de los casos, desde su propio desarrollo histórico y que han sido recogidas en el capítulo 1º.

***Objetivo 3**. Enunciar elementos necesarios para manejar el límite finito de una sucesión. Distinción del concepto de límite finito de una sucesión de otros tipos de límite, como el límite infinito de una sucesión o el límite de una función.*

***Objetivo 4.** Seleccionar una definición de límite finito de una sucesión para su estudio en profundidad.*

***Objetivo 5.** Caracterizar y definir, si los hay, los fenómenos organizados por el concepto de límite finito de una sucesión.*

En el capítulo 3º hemos descrito los elementos necesarios para manejar el límite finito de una sucesión y lo hemos distinguido de otros límites, como el límite infinito de una sucesión o la definición de sucesión de Cauchy.

Los prerrequisitos necesarios para el manejo del límite finito de una sucesión (como cota, valor absoluto, procesos infinitos o tipos de infinito), le confieren un carácter diferenciador respecto a otras definiciones de límite. En varios trabajos anteriores (Claros, Sánchez y Coriat, 2006; 2007) se analizaron las diferencias y analogías existentes entre la definición de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto, diferencias que corroboraban la necesidad de estudiar cada una de las definiciones de manera independiente. Estas diferencias afectan a los prerrequisitos citados y a los fenómenos organizados por cada una de ellos. Centrándonos en esto último, la definición de límite finito de una sucesión lleva implícita una serie de fenómenos. La definición de estos fenómenos constituye el objetivo 5 de nuestra investigación y la hemos desarrollado en el capítulo 3º. La selección de una definición de límite finito de una sucesión constituye el objetivo 4 de nuestra investigación y se realizó también en ese capítulo, como paso previo a la definición de los fenómenos observados: a.s.i e i.v.s

El anexo A6.2 contiene una serie de resultados relativos a estos objetivos (3º, 4º y 5º)

***Objetivo 6.** Detectar esos fenómenos en los libros de texto de secundaria y organizar la información obtenida.*

Para lograr este objetivo se realizará un estudio de una muestra de libros de texto que se usan o se han usado habitualmente en secundaria, estableciéndose los siguientes objetivos específicos:

- 6.1. Construir tablas de frecuencias de los diferentes fenómenos observados.

-6.2.Comparar las frecuencias de los fenómenos observados y establecer relaciones entre ellos.

-6.3. Calcular la "correlación" entre las frecuencias de ambos teniendo en cuenta el sistema de representación usado.

-6.4 Establecer periodos temporales al analizar los libros con el fin de observar la evolución de uso de los fenómenos en función de los años.

-6.5 Analizar las diferentes apariciones de los fenómenos en función de los años.

-6.6 Estudiar la "correlación" de los fenómenos encontrados teniendo en cuenta los diferentes periodos de tiempo considerados.

En el capítulo 4º se analizan libros de texto de Matemáticas de secundaria en los que se encuentra el límite finito de sucesiones, con el fin de observar en ellos los fenómenos a.s.i ó i.v.s en uno o más sistemas de representación y en uno o más formatos. El objetivo 6 se logró por completo en dicho capítulo. El anexo A6.3 incluye resultados del estudio indicado.

Objetivo 7. *Detectar esos fenómenos en las respuestas de los alumnos de bachillerato a un cuestionario relativo al límite finito de una sucesión.*

Para lograr este objetivo se elaborará un instrumento, el cual se administrará a alumnos de bachillerato. Se establecen los siguientes objetivos específicos:

- 7.1 Observar si los sistemas de representación usados en los enunciados de las preguntas (verbal, gráfico y tabular), tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos.

Los sistemas de representación más usuales en el límite son: verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico. El sistemas de representación simbólico es poco usado actualmente, debido al carácter intuitivo con el que se presenta la definición de límite (marco este hecho por el currículo). Por este motivo dicho sistema de representación es excluido del estudio.

-7.2. Observar la influencia de la variable "sexo" en las respuestas de los alumnos al cuestionario sobre el límite finito de una sucesión.

-7.3. Observar la influencia de la variable "edad" en las respuestas de los alumnos al cuestionario sobre el límite finito de una sucesión.

Queremos observar si estas variables secundarias tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos y, en su caso, describir esa influencia.

El capítulo 5º describe los pasos seguidos hasta la construcción de un instrumento relativo al límite finito de una sucesión y los resultados obtenidos al analizar las respuestas de los alumnos. El instrumento definitivo se compone de un cuestionario con 3 preguntas y de una tabla de categorías, para el análisis de las respuestas; 4 de estas categorías corresponden a respuestas posibles que somos capaces de asociar a códigos de fenómenos a.s.i o i.v.s

El estudio de las respuestas de los alumnos ha permitido detectar los dos fenómenos descritos en el capítulo 3º; consideramos con ello haber logrado el objetivo 7 de nuestra investigación. El anexo A6.4 incluye algunos resultados obtenidos con ayuda del instrumento.

También, la comparación realizada entre los resultados obtenidos con los alumnos y el estudio de los libros de texto del período 2000-2005, ha aportado algunas ideas que consideramos de interés. (Véase apartado 5.5.)

6.2 Refutación de las hipótesis

H1) El límite de una sucesión es distinto del límite de una función y por ello se hace necesario un estudio pormenorizado de cada uno de ellos.

En toda la literatura observada, solamente Rey Pastor (1933) intentó unificar ambas definiciones.

El contenido de esta hipótesis se justifica, parcialmente, con lo dicho en los capítulos 1º, 3º y 4º. En los antecedentes (capítulo 1º) se observan dificultades que surgen según el tipo de límite que se esté trabajando; en el capítulo 3º, hemos recogido trabajos de nuestro equipo de investigación que muestran diferencias entre el límite finito de una función en un punto y el límite finito de una sucesión, hemos mencionado las diferencias simbólicas y las diferencias fenomenológicas, siendo las últimas las más relevantes para nuestro trabajo.

Todos los indicios obtenidos hasta ahora indican que esta hipótesis aporta un punto de vista que, si se sostiene tras un estudio, análogo al que hemos realizado, sobre el límite de una función, permitirá enfoques didácticos más detallados.

H2) La definición de límite finito de una sucesión organiza dos fenómenos: la aproximación simple intuitiva (fenómeno a.s.i) y la retroalimentación o ida y vuelta en sucesiones (fenómeno i.v.s).

El estudio y desarrollo de estas ideas se llevan a cabo en el capítulo 3º. En el análisis minucioso de una definición de límite finito de una sucesión, reconocemos los dos fenómenos indicados. Hemos analizado las diferentes maneras de presentar estos fenómenos, lo cual nos ha conducido a considerar cuatro sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y dos formatos (definición y ejemplo).

Se trata también de una hipótesis con respecto a la cual creemos haber afianzado la confianza que cabe depositar en ella.

H3) Es posible detectar los fenómenos de aproximación simple intuitiva y de retroalimentación, organizados por la definición de límite finito de una sucesión, analizando libros de texto de bachillerato.

Nada, en el capítulo 4º, refuta esta hipótesis. Hemos sabido detectar esos fenómenos en los libros analizados usando códigos de fenómenos, es decir, abreviaturas mnemotécnicas que recuerdan el fenómeno, el sistema de representación y el formato posibles. La frecuencia de uno u otro fenómeno varía según los periodos educativos considerados. Por ejemplo, mencionamos el uso "masivo" del fenómeno a.s.i en detrimento del fenómeno i.v.s durante el período "LOGSE-LOCE-LOE" (1990-2005).

Se trata de una hipótesis que se refiere a una posibilidad y creemos haber establecido esa posibilidad; más aún creemos que disponemos de un método constructivo para detectar los fenómenos indicados en cualquier libro de texto.

H4) Un muestreo de libros de texto basado en décadas permite observar de manera suficiente la evolución en el tiempo de los fenómenos organizados por la definición de límite de una sucesión.

La no refutación de esta hipótesis se desprende también del contenido del capítulo 4º, en el que se ha realizado un agrupamiento de los libros de texto por décadas, algunas de ellas, solamente aproximadas. Después de observar la presencia de los fenómenos a.s.i e i.v.s en los libros analizados, se estudió su evolución en cada uno de los periodos que se habían considerados.

Un estudio posterior llevado a cabo con esta misma muestra de libros, pero considerado periodos educativos en lugar de décadas, confirmó la influencia de los planes de estudio en el uso de unos u otros fenómenos. No obstante, debe resaltarse que la máxima variedad de códigos de fenómenos simultáneos se da en el período llamado de la "Reforma Educativa", previo a la promulgación de la LOGSE.

La no representatividad de la muestra de libros, sin embargo, lleva a admitir que esta hipótesis podría quedar refutada por una ampliación suficiente de la muestra.

H5) Los fenómenos de aproximación intuitiva se observan con mayor frecuencia en los libros de texto que los fenómenos de retroalimentación.

Los resultados obtenidos en el capítulo 4º refutan esta hipótesis, ya que el recuento total de los fenómenos de aproximación simple intuitiva es 81 mientras que el número total de los fenómenos de ida-vuelta o retroalimentación es 107. Sin embargo, debemos observar que, en el período 1995-2005, la hipótesis no se refuta, pues el recuento de frecuencias da 38 para el fenómeno a.s.i y 10 para el fenómeno i.v.s.

H6) Es posible detectar los fenómenos de aproximación simple intuitiva y de retroalimentación analizando las respuestas de los alumnos de Bachillerato a un cuestionario relacionado con el límite finito de sucesiones.

La información sobre esta hipótesis se ha obtenido en el capitulo 5º; hemos puesto de manifiesto el uso del fenómeno a.s.i (y, de manera no concluyente, del fenómeno i.v.s) en las respuestas de los alumnos a un cuestionario relativo al límite finito de una sucesión. Los códigos de fenómeno que hemos observado en estas respuestas son a.s.i g-e, a.s.i v-e, a.s.i t-e é i.v.s v-e.

La no representatividad de la muestra de alumnos, sin embargo, lleva a admitir que esta hipótesis podría quedar refutada por una muestra representativa.

H7) El fenómeno i.v.s está presente en las respuestas de los alumnos en menor medida que el fenómeno a.s.i.

En el capítulo 5º hemos obtenido el número de ocurrencias, asociado a cada fenómeno, en las respuestas de los alumnos. El recuento acumulado para los códigos de fenómeno a.s.i v-e, a.s.i g-e y a.s.i t-e se eleva a 221 respuestas, mientras que el del código de fenómeno i.v.s v-e (el único fenómeno i.v.s que aparece en las respuestas de los alumnos) se eleva a 6 respuestas.

Nuevamente, antes de considerar "no refutada" esta hipótesis, tenemos que recordar la no representatividad de la muestra.

H8) El fenómeno i.v.s no está presente en las justificaciones de los alumnos cuando en la pregunta se emplea el fenómeno a.s.i.

Esta hipótesis no puede refutarse totalmente, ya que hay algún alumno que emplea el fenómeno i.v.s en sus respuestas a pesar de que dicho fenómeno no se usa en el enunciado de la pregunta. Véase el anexo A6.4, punto 7. Reenunciamos la hipótesis así: *Cuando en el enunciado de la pregunta se usa el fenómeno a.s.i, las justificaciones de los alumnos no apelan al fenómeno i.v.s o lo hacen de manera irrelevante.* Queda pendiente un estudio detallado.

H9) El uso del fenómeno i.v.s en el enunciado de las preguntas del cuestionario, inducirá a los alumnos a emplearlo como justificación de sus respuestas.

El capitulo 5º explica cómo esta hipótesis no puede refutarse con nuestros datos: en la pregunta 3ª (b), en cuyo enunciado se había empleado el código de fenómeno i.v.s v-e, se produce un aumento en el número de alumnos que emplean dicho fenómeno. La impregnación de estilos parece establecida, pero la no representatividad de la muestra de alumnos nos lleva a la cautela.

H10) Los alumnos de bachillerato no dominan la definición de límite.

La no refutación de esta hipótesis se lleva a cabo teniendo en cuenta los resultados de los capítulos 3º y 5º. El fenómeno i.v.s está presente en todas las definiciones de límite finito de una sucesión. Dado que, según nuestra observación, los alumnos apenas emplean el fenómeno i.v.s en sus respuestas, concluimos que la hipótesis no se refuta. Una muestra representativa, en todo caso, permitirá una mejor inclinación a favor o en contra de lo enunciado en la hipótesis.

6.3 Perspectivas, expectativas

Durante el desarrollo de la investigación hemos ido planteando o afrontando cuestiones que, en algunos casos, hemos sabido responder y, en otros, hemos dejado abiertas. Reunimos ahora las cuestiones que hemos dejado abiertas.

1ª) Descripción y caracterización de dos fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión. Además de éstos, ¿organiza la definición algún fenómeno más que no hemos detectado? En caso afirmativo, ¿cuál es su relación con los fenómenos ya descritos?

2ª) Diseño de una secuencia didáctica tipo para la enseñanza y aprendizaje del límite finito de una sucesión. Tenemos cierta confianza en que esta investigación ayude a pensar tal diseño. En esa secuencia didáctica se trabajarían los fenómenos a.s.i e i.v.s en los sistemas de representación gráfico, verbal, simbólico y tabular y en los formatos ejemplo y definición. El trabajo con estos fenómenos creemos que debe ser anterior a la definición formal de límite finito de una sucesión, si finalmente se presenta a los alumnos. Hay que señalar que en los últimos años la definición formal de límite apenas se plantea a los alumnos de bachillerato.

3ª) Estudio del uso que hacen, los profesores de secundaria, de los fenómenos a.s.i e i.v.s. Nuestro trabajo se "cerraría" mejor con ello, pues incorporaría la visión de los fenómenos que tienen las personas que enseñan el límite de una sucesión en bachillerato. Pensamos que es posible observar los códigos de fenómeno en las explicaciones sobre el límite finito de una sucesión que los profesores dan a los alumnos. Esto se apoya en dos líneas de argumentos: (A) Los profesores de secundaria usan libros de texto, donde se observan tales fenómenos (capítulo 4º); (B) En las producciones de los alumnos, que intentan reproducir las enseñanzas de los profesores, también hemos observado algunos códigos de fenómenos. A pesar de esto es necesario observar, trabajando directamente con profesores de secundaria, cómo estos emplean los fenómenos a.s.i e i.v.s en sus explicaciones o cuando tengan que justificar alguna cuestión relativa al límite finito de una sucesión.

4ª) Fenómenos (idénticos, análogos o distintos) en otras definiciones de límite. En nuestra investigación hemos trabajado con otras definiciones de límite, como es el caso del límite infinito de una sucesión, en el que observamos que aparecía el fenómeno i.v.s pero no el fenómeno a.s.i, y también con las sucesiones de Cauchy, donde hemos visto dos fenómenos que hemos denominado a.s.i.c (aproximación simple intuitiva de Cauchy) e i.v.s.c (ida-vuelta en sucesiones de Cauchy).

5ª) Presencia de fenómenos a.s.i y fenómenos i.v.s en conceptos del análisis en los que aparece el límite de una sucesión, como es el caso de la suma de series.

6ª) Uso de muestras más amplias, cercanas a la representatividad, de libros de texto.

7ª) Diseño de un nuevo instrumento para usar con muestras representativas de alumnos.

6.4 Reflexión final

Cuando comenzamos nuestra investigación sobre el límite de una sucesión, constatamos que “el límite” ha dado lugar a numerosas investigaciones que trataban los problemas relativos al concepto de límite desde muchos puntos de vista diferentes. Así, nos encontramos con investigaciones que se ocupaban de los problemas de la enseñanza del límite, de las dificultades que presentaba la definición del límite debido al simbolismo que lleva aparejada, problemas con el lenguaje del límite, investigaciones centradas en el desarrollo histórico del concepto de límite, etc. Lo primero que llamó nuestra atención, de todas las investigaciones revisadas, es que muchas de ellas no distinguían los objetos (sucesiones, funciones) ni los tipos de límites (límites finitos o infinitos, por ejemplo). Esto condujo a estudiar similitudes y diferencias entre la definición de límite finito de una sucesión y de una función.

El principal aporte de nuestra investigación (los fenómenos a.s.i e i.v.s) tuvo lugar como consecuencia de este análisis pormenorizado de la definición de límite finito de una sucesión. Dicho análisis dio lugar a un estudio desde un punto de vista fenomenológico de la definición de límite finito de una sucesión. El estudio, no realizado anteriormente en las investigaciones revisadas, dio lugar a la observación de al menos dos fenómenos en la definición de límite finito de una sucesión, fenómenos que sirven como elemento diferenciador entre las diferentes definiciones de límites.

Con ayuda de estos fenómenos, creemos que es posible encontrar respuestas a las dificultades que plantea la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite finito de una sucesión; reconocemos, claro es, que el manejo de los dos fenómenos también ha de generar dificultades, pero pensamos que, si se consiguen superar, el camino del manejo de la definición de límite finito quedará expedito.

En el desarrollo de nuestra investigación ha jugado un rol especial el estudio de los libros de texto, porque ha servido para justificar la existencia de estos dos fenómenos que en principio surgieron de nuestra interpretación de la definición de límite finito de una sucesión. Un problema con el que nos hemos encontrado cuando trabajamos con libros de texto es la dificultad para encontrar textos antiguos, lo cual nos ha obligado a recurrir a la Biblioteca Nacional.

El trabajo con libros de texto dio la pista para observar los fenómenos a.s.i e i.v.s en los libros de texto. La conjetura que manejamos es simple: los libros de texto deben impregnar a los profesores y a los alumnos y, para estudiar ese posible efecto, elegimos el colectivo de alumnos.

El anexo A6.5 incluye un breve resumen de las labores de difusión de los trabajos realizados.

A6.1 Resultados relacionados con los objetivos 1 y 2: resumen

1. Hasta llegar a la definición actual de límite, se ha seguido un largo camino. Las tres definiciones que perfilaron el conocimiento sobre el límite fueron las de D'Alembert, Cauchy, y Weirestrass-Heine; ésta se considera como la definición actual de límite.

2. Los procesos infinitos y los dos tipos de infinitos forman parte del estudio del límite. En el estudio del límite de una sucesión tenemos dos procesos infinitos discretos, el infinito potencial y el infinito actual.

3. El infinito potencial ha sido aceptado históricamente sin problemas mientras que el infinito actual es negado reiteradamente. El infinito potencial surge cuando vamos dando valores a n y obteniendo sus correspondientes f(n), mientras que el infinito actual surge cuando consideramos la sucesión y su límite como un conjunto infinito numerable.

4. El límite de una sucesión y los dos tipos de infinito se integran en el pensamiento matemático avanzado, debido sobre todo a la diversidad de concepciones y a la riqueza y complejidad de nociones que dichos conceptos llevan involucrados.

5. Las propuestas didácticas diseñadas para la enseñanza del límite se enfocan generalmente desde dos puntos de vista: uno, centrado en el trabajo con alumnos, analizando las dificultades que encuentran cuando se les presenta dicho concepto, y otro, centrado en el trabajo con profesores, analizando su práctica docente en lo que se refiere a la enseñanza del límite.

6. En el diseño de una secuencia didáctica sobre el límite parece acertado empezar por conocer las ideas previas, imágenes e intuiciones que los alumnos tienen sobre ello. El trabajo con ordenador parece ser un elemento imprescindible en el desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza del límite.

7. En muchos de los estudios, los investigadores se han ocupado del límite en general, sin tratar de manera diferenciada los distintos tipos de límite, como límite finito de una sucesión, límite infinito de una sucesión o límite finito de

una función en un punto. En relación con el límite de una sucesión, la primera dificultad que afrontan los alumnos es la de reconciliar su idea previa informal con un enfoque formal.

8. La idea de límite está asociada a términos tales como "tender a", "aproximarse", o "muy próximo a", las cuales tienen un significado coloquial diferente del significado matemático.

9. El uso del lenguaje formal en la definición de límite, en la cual se usan cuantificadores, supone un serio problema de comprensión para los alumnos.

10. Históricamente, en el desarrollo del límite ha surgido una serie de obstáculos; para algunos investigadores, los obstáculos son: el límite como noción metafísica; la noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande; el limite puede ser alcanzado; y la transposición numérica; otros investigadores consideran obstáculos epistemológicos: conocimiento científico, infinito, función y número real.

11. Algunos investigadores han señalado las dificultades que los alumnos tienen ante el límite, mostrando que las concepciones de los alumnos son diferentes de la definición de límite y tienen relación con las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas sobre el límite.

12. Debido a la dificultad que supone manejar la definición de límite, algunos investigadores proponen, trabajar con una definición alternativa que ponga en juego conceptos tales como aproximación y tendencia. Esta nueva definición considera al límite como la aproximación óptima.

15. El límite de una sucesión ha estado presente en los programas del bachillerato español desde los años treinta hasta nuestros días. En las últimas leyes educativas LOGSE, LOCE y LOE no se menciona en todas las asignaturas de matemáticas que se imparten en el bachillerato. El límite de una sucesión recibe mención expresa en las asignaturas: matemáticas II (LOGSE y LOCE), pero está ausente en la última ley orgánica (LOE).

A6.2 Resultados relacionados con los objetivos 3, 4 y 5: resumen

1. El marco teórico de nuestra investigación se sustenta sobre: fenomenología, sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado.
2. El análisis fenomenológico del límite finito de una sucesión consiste en describir los fenómenos para los que la definición es el medio de organización de ellos y en establecer la relación que tienen estos fenómenos con la definición.
3. Existen cuatro tipos de fenomenología: fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología histórica y fenomenología genética. En nuestro caso cuando hablamos de fenomenología, nos referimos a la primera, ya que hablamos de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en su uso actual.
4. En la definición de límite finito de una sucesión hemos observado la presencia de al menos dos fenómenos que han sido llamados aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s).
5. La aproximación simple intuitiva (a.s.i) se define de la siguiente manera:

Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k, a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo.

6. La retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones se produce al observar de manera junta los dos procesos que se citan a continuación:

- El primer proceso, denominado "de ida", se produce cuando en la definición aparece la expresión: "*para cada* $\varepsilon>0$*, existe un número natural* N"
- El segundo proceso, denominado "de vuelta", se produce cuando en la definición aparece la expresión: "*si* $n \geq N$ *se cumple que* $|x_n - x| < \varepsilon$"

7. La retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el ε dado "vamos" desde éste hacia la variable natural para determinar el correspondiente **n** asociado, según sea el

caso, y “volvemos” al entorno del límite para comprobar que las imágenes así obtenidas pertenecen al entorno considerado.

8. En la retroalimentación o idea y vuelta en sucesiones (i.v.s) se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición formal de límite finito de una sucesión induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada.

9. Desde un enfoque fenomenológico podemos admitir la existencia de dos esferas: la esfera formal y la esfera intuitiva. En la primera situamos la definición formal y el fenómeno i.v.s que guardan entre sí una relación muy directa, mientras que en la segunda situamos el fenómeno a.s.i.

10. Los fenómenos a.s.i e i.v.s se pueden presentar usando algún sistema de representación (verbal, gráfico, simbólico o tabular) y algún formato (ejemplo o definición). Teniendo en cuenta esto tendremos dieciséis posibles aspectos de los fenómenos, que denominamos códigos de los fenómenos.

11. En la definición de límite infinito de una sucesión, con la que se ha trabajado, no hemos observado el fenómeno a.s.i, pero sí el de retroalimentación. Se pone de manifiesto con ello una diferencia notable con respecto a la definición de límite finito de una sucesión, que organiza dos fenómenos.

12. El manejo de la definición de límite finito de una sucesión exige un conocimiento adecuado de los siguientes conceptos: orden, valor absoluto, cota, infinito (infinito potencial e infinito actual), proceso infinito y dependencia.

La dependencia que señalamos aquí hace referencia a los siguientes tipos: dependencia {n-Xn} y dependencia {ε-No}.

13. Consideramos que el manejo de diferentes sistemas de representación puede ser más beneficioso que perjudicial y que puede llegar a mejorar la comprensión del concepto de límite finito de una sucesión. A pesar de esto nuestro trabajo no pretende analizar en qué grado un alumno comprende o no comprende el límite finito de una sucesión en función de los distintos sistemas de representación y del número de ellos que usa cuando realiza tareas

relacionadas con él. Nuestro trabajo usa los sistemas de representación como un elemento en el que se observan los diferentes fenómenos que hemos indicado.

14. El cambio de un sistema de representación a otro, para alcanzar un manejo de la definición de límite, no se suele trabajar en los libros de texto, produciéndose explicaciones aisladas del concepto de límite.

15. En el periodo LOGSE (1990-2005) el sistema de representación simbólico ha disminuido su frecuencia considerablemente en los libros de texto, recibiendo más importancia los otros tres sistemas de representación considerados. También hemos observado que los ejercicios que se suelen poner sobre el límite, se reducen a una aplicación directa de la definición, sin que se pida al alumno que reflexione sobre ella.

16. El concepto de representación ha sido uno de los más estudiados en didáctica de la matemática. La relación entre comprensión y representación puede ser vista desde la escuela representacionalista o la escuela no representacionalista. Nuestro trabajo no evalúa la comprensión de los alumnos en torno al límite finito de una sucesión, solamente exhibe fenómenos que emplean los alumnos cuando responden a cuestiones relativas al límite finito de una sucesión.

17. Siguiendo las ideas de concepto imagen y concepto definición de Tall, la definición formal de límite finito de una sucesión sería el concepto definición mientras que la lectura, análisis e interpretación de la definición da lugar al concepto imagen y al concepto definición imagen.

18. El límite lo situamos en el pensamiento matemático avanzado, pero el cálculo de límites puede situarse dentro del pensamiento matemático elemental. Más precisamente, pensamos que el límite finito de una sucesión estará dentro del pensamiento matemático avanzado si los alumnos reconocen y emplean en sus justificaciones los fenómenos a.s.i e i.v.s de manera conjunta. Por el contrario si los alumnos emplean únicamente el fenómeno a.s.i en sus respuestas y justificaciones a cuestiones relativas al límite finito de una sucesión, esta manera de actuar deberíamos incluirla dentro del pensamiento matemático elemental.

A6.3 Resultados relacionados con el objetivo 6: resumen

1. Se han analizado 30 libros que abarcan un periodo comprendido entre 1933 y 2005.
2. El código de fenómeno a.s.i g-e, con 36 ocurrencias, es el de mayor frecuencia absoluta, seguido, en frecuencia, por el código de fenómeno a.s.i v-e, con 26 ocurrencias. Los códigos de fenómeno a.s.i t-d, a.si g-d, a.s.i s-e y a.s.i s-d, no se observan en ninguno de los libros estudiados.
3. Respecto al fenómeno a.s.i, el sistema de representación más empleado es el gráfico, seguido del verbal y el tabular. Por lo que respecta a los formatos, la relación formato ejemplo a formato definición es de 10 a 1.
4. El código de fenómeno i.v.s s-e, con 37 ocurrencias, es el de mayor frecuencia absoluta, seguido del i.v.s v-d, con 25 ocurrencias. El código de fenómeno i.v.s t-d no se observa en ninguno de los libros analizados, y el código de fenómeno i.v.s t-e se observa solamente en una ocasión.
5. Respecto al fenómeno i.v.s, el sistema de representación más empleado en los libros de texto es el simbólico, seguido, en este orden, del verbal, el gráfico y el tabular.
6. La frecuencia acumulada del fenómeno i.v.s (107 ocurrencias) supera a la frecuencia acumulada del fenómeno a.s.i (81 ocurrencias).
7. La frecuencia del fenómeno a.s.i va creciendo hasta alcanzar su máximo en el período 1980-1989, que corresponde a la Reforma Educativa y su experimentación.
8. La representación verbal, en el fenómeno a.s.i está básicamente asociada a ejemplos; la razón de uso es de 4 a 1, de ejemplo a definición, en dicha representación.
9. La representación tabular, en el fenómeno a.s.i no se observa hasta el período 1980-1989. Su frecuencia aumenta, progresivamente, en los periodos posteriores considerados.
10. El código de fenómeno a.s.i g-e no se observa antes del período 1970-1979. Las mayores frecuencias corresponden al período 1980-89.

11. El fenómeno i.v.s se ha observado en todos los periodos considerados, siendo el de mayor frecuencia absoluta el período 1980-1989.

12. El código de fenómeno i.v.s s-d deja de ser observado, en los libros de texto consultados, a partir del año 1990. El código de fenómeno i.v.s s-e disminuye notablemente su frecuencia a partir del año 1990, apareciendo solamente una vez en ese período 1990-1999 y el siguiente, 2000-2005.

13. El fenómeno a.s.i casi no se observa hasta el período 1975-1994, donde recibe un extenso uso.

14. En el periodo 1995-2005, el fenómeno a.s.i se halla asociado, principalmente, a los códigos de fenómeno a.s.i g-e (13 ocurrencias) y a.s.i t-e (11 ocurrencias)

15 El fenómeno i.v.s tiene su mayor frecuencia absoluta (72 ocurrencias) en el período 1975-1994.

16. El sistema de representación simbólico es el de mayor frecuencia en el caso del fenómeno i.v.s (total acumulado: 54). Le siguen el sistema de representación verbal (38 ocurrencias) y el gráfico (14).

17. En el período 1995-2005 la razón de uso del fenómeno a.s.i al fenómeno i.v.s es, aproximadamente, de 4 a 1 (38:10).

A6.4 Resultados relacionados con el objetivo 7: resumen

1. La respuesta más frecuente a la pregunta 1ª del cuestionario, en cuyo enunciado se usa el código de fenómeno a.s.i g-e, ocurre empleando los alumnos el código de fenómeno a.s.i v-e

2. La respuesta más frecuente a la pregunta 2ª del cuestionario, en cuyo enunciado se usa el código de fenómeno a.s.i t-e, ocurre empleando los alumnos el código de fenómeno a.s.i v-e.

3. La respuesta más frecuente a la pregunta 3ª (a), en cuyo enunciado se usa el código de fenómeno a.s.i v-e, ocurre empleando los alumnos el código de fenómeno a.s.i v-e.

4. La respuesta más frecuente a la pregunta 3ª (b), en cuyo enunciado se usa el código de fenómeno i.v.s v-e, es "no sabe / no contesta".

5. Las respuestas correctas, por preguntas, corresponden a los siguientes porcentajes, redondeados a enteros: 1ª, 83 %; 2ª, 85 %; 3ª (a), 75%; y 3ª (b), 50 %. Nos atrevemos, con ello, a afirmar que los códigos de fenómeno a.s.i g-e y a.si t-e ayudan a los alumnos a calcular correctamente el límite de la sucesión.

6. En la primera pregunta solamente hay un alumno "no sabe / no contesta", mientras que en la segunda hay nueve alumnos y en los dos apartados de la tercera, 15 y 41 alumnos respectivamente. Esto nos lleva a afirmar que: (1º) la representación gráfica ayuda a los alumnos a comprender el enunciado, por encima de las demás representaciones utilizadas; (2º) el hecho de que los alumnos comprendan o entiendan lo que se les dice en los enunciados no implica que contesten correctamente.

7. El fenómeno i.v.s lo hemos observado, respectivamente: en una sola respuesta (preguntas 1ª, 2ª y 3ª (a)) y en tres respuestas (pregunta 3ª (b)). En todos estos casos el código de fenómeno observado es i.v.s v-e. Concluimos que el fenómeno i.v.s carece de relevancia en las respuestas de los alumnos.

8. El código de fenómeno a.s.i v-e es el más frecuente: se observa en 219 respuestas de 572 posibles.

9. El código de fenómeno a.s.i v-e parece recibir más preferencia por parte de las mujeres que por parte de los hombres en las respuestas a las preguntas 1ª y 2ª y 3ª (a). En la pregunta 3ª (b), la respuesta preferida cambia: para los hombres, el mayor número de casos corresponde a un cálculo incorrecto del límite con ausencia, en la respuesta, del infinito potencial, mientras que para las mujeres, continúa siendo más frecuente el código de fenómeno a.s.i v-e.

10. En los hombres, los porcentajes de respuestas correctas, redondeados a enteros, son: Pregunta 1ª, 80 %; 2ª, 77 %; 3ª (a), 61 %; 3ª (b), 52 %. En las mujeres, los porcentajes análogos, son: Pregunta 1ª, 86 %; 2ª, 91 %; 3ª (a), 86 %; 3ª (b), 49 %.

11. El código de fenómeno a.s.i v-e es la respuesta más frecuente en las preguntas 1ª y 2ª, en cualquiera de las edades de los alumnos. En la pregunta 3ª (a), se mantiene el código de fenómeno a.s.i v-e, excepto en la edad de 18 años, en que lo más frecuente es el cálculo del límite correcto sin usar ningún fenómeno. En la pregunta 3ª (b) las respuestas más frecuentes están dispersas según las edades: "no sabe / no contesta" (16 años), el código de fenómeno indicado (17 años), no calcula correctamente el límite ni usa el infinito potencial (18 años) o calcula el límite correcto, pero no usa fenómeno alguno (19 años).

12. En la pregunta 1ª, el porcentaje más alto (88%) se da a los 18 años; en la 2ª, el 91% lo aportan los alumnos de 16 años; en la 3ª (a), el 79% de máximo porcentaje corresponde a los 17 años y en la pregunta 3ª (b), aunque el porcentaje máximo baje al 59%, lo hallamos en la misma edad (17).

A6.5 Tareas de difusión de la investigación

- Mayo de 2006. Presentación en el VII Seminario de investigación en pensamiento numérico y algebraico. Titulo: *"Fenómenos relacionados con el límite finito"*. Esta presentación dio lugar a una publicación en la revista Indivisa. Se describieron lo pasos seguidos para seleccionar una definición de límite finito de una sucesión. Se presentó la consulta a expertos que se realizó con siete definiciones. Se presentaron algunos ejemplos que consideramos paradigmáticos de los fenómenos a.s.i e i.v.s hallados en libros de texto del periodo (1933-2005).

- Septiembre de 2006. Presentación en la X SEIEM celebrada en Huesca. Titulo: *"Fenómenos que organizan el límite".* Este documento dio lugar a una publicación en las actas de la SEIEM. Se definieron los fenómenos que se habían observado en la definición de límite finito de una sucesión, entre otros. También se presentaron ejemplos de cada uno de los fenómenos encontrados, extraídos todos ellos de libros de texto. El documento acababa con un pequeño estudio sobre la presencia de los fenómenos anteriormente citados en libros de texto del periodo LOGSE (1990-2005), en el cual se observaba una mayor frecuencia de los fenómenos de aproximación intuitiva con respecto a los de retroalimentación.

- Marzo de 2007. Presentación en el VIII Seminario de investigación en pensamiento numérico y algebraico. Titulo: "*Fenómenos que organizan el límite, diseño de un instrumento".* Esta presentación dio lugar a una publicación en la revista Indivisa. Presentamos los pasos seguidos para la elaboración de un instrumento destinado a detectar los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación, presentes en el límite finito de una sucesión, en las respuestas y justificaciones de los alumnos a un cuestionario relativo al límite. Se presentó una prueba piloto que se administró a alumnos de 2º de bachillerato de ciencias sociales y que sirvió de base para obtener una serie de conclusiones referentes a los enunciados y la tabla de categorías de respuestas, que habíamos elaborado previamente. El documento presentó los enunciados de las nuevas cuestiones, las cuales habían sufrido ciertas modificaciones respecto a las originales, y la tabla de categorías, que se iba a usar posteriormente en la corrección de las respuestas dadas por los alumnos al nuevo cuestionario.

- Abril de 2009. Presentación en el IX Seminario de investigación en pensamiento numérico y algebraico. Titulo: "*Límite de una sucesión: respuestas de los alumnos de 1º y 2º de bachillerato".* Esta presentación dio lugar a una publicación en la revista Indivisa. Se presentó la tabla de categorías que se usó para corregir las respuestas de los alumnos a un cuestionario sobre el límite finito de una sucesión. Se presentaron los datos obtenidos tras administrar el cuestionario a 143 alumnos de tres institutos de la comunidad de Madrid. Los datos obtenidos se analizaron pregunta por pregunta, en cada instituto de manera independiente y agregando los resultados obtenidos en cada uno de ellos. Los resultados arrojaron la preponderancia de respuestas en las que se empleaba el fenómeno a.s.i frente a las respuestas en las que se usa el fenómeno i.v.s.

- Enero de 2009. Videoconferencia. Presentación en el Seminario de Investigación del Departamento de Didáctica de la Matemática, que es un módulo del Master en Didáctica de la Matemática del citado Departamento. Título: *"Fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión"*. Se resumió el estado en el que se encontraba la investigación en ese momento; se señaló que el estudio del límite se estaba realizando desde un punto de vista fenomenológico, el cual servía de base para la definición de dos fenómenos que habíamos hallado en una definición de límite finito de una sucesión.

- Septiembre de 2009. Presentación en la XIII SEIEM celebrada en Santander. Título "*Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy".* Esta presentación dio lugar a una publicación en las Actas de la SEIEM. Se realizó un estudio comparativo entre la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy, mostrándose las diferencias y analogías existentes entre una y otra desde un punto de vista simbólico y fenomenológico.

-Enero de 2010. Presentación en el Seminario de Investigación del Departamento de Didáctica de la Matemática, que es un módulo del Master en Didáctica de la Matemática del citado Departamento. Título: "*Fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión*". En esta presentación se realizó un resumen de todo el trabajo de investigación realizado durante estos diez últimos años en torno al límite finito de una sucesión.

Bibliografía

Abellanas Cebollero, P., García Rúa, J., y otros (1969). **Bachillerato superior, Matemática Moderna, 6º Curso.** Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Alonso Misol, F. (1934). **Elementos de Análisis Matemático y sus aplicaciones. Libro Primero: Teoría general de funciones y derivadas.** Madrid: Sucesores de Rivadeneyra.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* Vol X, Nº 2, 135-149.

Baratech Montes, B. y Zalama Miguel, C. (1938). **Matemáticas sexto curso del bachillerato.** Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Bartle R. y Sherbert, D. (1996). **Introducción al análisis Matemático de una variable.** México, DF: Editorial Limusa.

Belmonte, J.M., Montero, G., Negro, A. y otros (1989). **Matemáticas 2º Bachillerato.** Madrid: Editorial Alhambra.

Bescos, E y Pena, Z. (1998). **Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.** Madrid: Editorial Oxford Educación.

Bescos, E y Pena, Z. (2002). **Matemáticas 1º Bachillerato. Humanidades y Ciencias Sociales.** Madrid: Editorial Oxford Educación.

Bescos, E y Pena, Z. (2002). **Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.Tecnología.** Madrid: Editorial Oxford Educación.

Blázquez, S. (2000). **Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.** Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *En* **El futuro del cálculo infinitesimal.** México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001).Los sistemas de representación en la enseñanza del límite*. Relime* vol 4. Nº3, 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, vol 10, 117-133.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002): Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas.* vol. 30, pp. 67-82.

Blumovicz de Siperstein, S. y Alonso, S.(1974). **Matemáticas I.** México, D.F: Editorial U.T.E.H.A.

Borrás Vesés, E. y Carrillo Quintela, M. E. (1982). **Matemáticas de Bachillerato. Volumen 2.** Barcelona: Editorial Teide.

Boyer, C. (1992): **Historia de la matemática.** Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1983): Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4.2, 165-198.

Calvo Escandón, M. (1976). **Matemáticas 2º B.U.P.** León: Editorial Everest.

Cámara Meseguer, M.T., Monteagudo Martínez, M.F. y Paz Fernández, J.(1997). **Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.** Zaragoza: Editorial Luis Vives.

Cañón C. (1993). **La matemática: creación y descubrimiento.** Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Caruncho Castro, J. y Gutiérrez de Sande, M. (1986). **Matemáticas 2º B.U.P.** Madrid: Editorial Santillana.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. *En* L. Rico (Coord.) **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.** Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, 95-124.

Chevallard, Y.(1998). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 17(3), 17-54**.**

Claros, F. J. (2000)**. La aproximación en sucesiones de números reales** Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Málaga. (No publicado.)

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. *En* P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), Actas del X simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Huesca: Universidad de Zaragoza.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA,* 1(3), pp. 125-137.

Claros, F. J., Sánchez, M.T. y Coriat, M. (2009). Límite de una sucesión: Respuestas de los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato*. Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, pp. 35-54.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. *En* M.J. González, M.t. Gonzalez y J. Murillo (Eds.), Actas del XIII simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Santander: Universidad de Cantabria.

Cohen, L., y Manion, L. (1990). **Métodos de Investigación Educativa.** Madrid: La Muralla.

Colera, J., García, R. y Oliveira, M. J. (2002). **Matemáticas I.** Madrid: Editorial: Anaya.

Coriat M., Martinez P. y Baena, J. (1993). Numbers and colours. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 24:4, 501-510.

Coriat M. y Scaglia S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las Ciencias* 18(1), 25-34.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. Proceedings PME-V, Grenoble, France, Vol. I, 322-326.

Cornu, B. (1983): **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.** Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991): Limits. *En* D. Tall (ed.): **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 153-166.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorg, Thomas, C. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: begining with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 167-192.

Cummins, K. (1960). A student Experience-Discovery Approach to the teaching of Calculus. *Mathematics Teacher,* reprinted in *Readings from the Mathematics Teacher,* NCTM(1977), 31-39.

Davis, R. y Vinner, S.(1986). The notion of Limit: some semingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematicasl Behavior,* 5, 281-303.

D´Amore, B. (1996). L`infinito:storia di conflitti, di sorpreses, di dubbi. *La Matematica a e la sua Didattica,* 3, 322-335.

Douady, R.(1986). Jeu de Cadres e Dialectique Outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2),5-32.

Dreyfus, T.(1990). Advanced mathematical thinking. *En* Nesher, P. Y Kilpatrick, J. (Eds.), **Mathematics and cognition.** Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

Dreyfus, T.(1991). Advanced mathematical thinking processes. **En** Tall, D. (Ed.), **Advanced mathematical thinking.**Dordrecht: Kluwer. 25-41

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematocal thinking. *En* Tall, D. (Ed.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 95-123

Duval, R.(1983). L`obstacle du dédoublemente des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 14, 358-414.

Duval, R.(1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Proceedings PME XXIII Mexico, Vol I, 3-25.

Edwards, Barbara S., Dubinsky, Ed and McDonald, Michael A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7:1, 15-25.

Engler, S. Vrancken, M. Hecklein, D. Müller y M. I. Gregorini (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 11, pp 113-132.

Espinoza, l. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355-368.

Fernández Novoa, J. (1991). **Análisis Matemático I**. Madrid: Editorial Universidad Nacional de educación a distancia.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, Vol 3(2), 9-19.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.

Font, V. (2005). Las representaciones en Educación Matemática. Conferencia impartida en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada

Freudenthal, H. (1983). **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.** Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gallardo, J.(2004). **Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales**. Tesis doctoral. Málaga: Universidad de Málaga.

Garbin, S.(2000). **Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años**. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

Garbin , S. y Azcárate, C.(2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, 53-67.

González, F. y Villanova, J. (1987). **Curso práctico de matemáticas 2º B.U.P.** Editorial: Edunsa

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility. A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25,2, 115-141.

Guillén Barona, J., Navarro R. y otros (1976). **Matemáticas 2º Bachillerato**. Editorial: Magisterio Español.

Harel, G. and Sowder, L.(2005). Advanced Mathematical Thinking at any ages: its nature an its development. *Mathematical Thinking and Learning,* 7:1, 27-50.

Hitt F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *En* **Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual.** México D.F: Editorial Fondo Educativo Interamericano.

Janvier, C. (Ed.) (1987). **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier C.y otros.(1993). Mathematicasl Symbols and Repreentations. *En* P. Wilson (Ed.) **Research ideas for the classrom**. Reston VA: NCTM.

Kaput, J. (1983). Representation systems and mathematics. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA (Vol. 2, pp. 57-66). Montreal.

Klein, F.(1911). **Lectures on Mathematics.On the Mathematical character of Space-Intuition and the relation of Pure Mathematics to the applied Sciences**. American Matematical Society, 6, 41-51.

Lazcano Uranga, I. y Barolo Babolin, P.(1980). **Matemáticas. Área Básica FP2**. Zaragoza: Editorial Luis Vives.

López, V. y Sánchez Martín, J.(1977). **Matemáticas 2 Bachillerato.** Madrid: Editorial S.M.

Mamona-Downs, J. (1990). Calculus-Analysis: A review of recent educational research: Desarrollo del Segundo Simposio International Investigación en Educación Matemática, 11-36, Cuernavaca, México 1990.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequense. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Margalef Roig, J. y Outerelo Domínguez E. (1993). **Introducción a la topología**. Madrid: Editorial Complutense.

Martín Robles, I. (1936). **Elementos de Matemáticas (Cuarto Curso)**. Madrid: Editorial Ministerio de Educación y Ciencia.

Martinez Salas, J (1985). **Elementos de Matemáticas**. Valladolid: Editorial J. Martinez.

Martínez Losada, A., Hernández Aina, F. y Lorenzo Miranda, F.(1976). **Matemáticas 2º B.U.P.** Madrid: Editorial Tecnibán.

Monaghan, M. (1982). Problems with the language of Limits. *For the Learning of Mathematics,* 11(3), 20-24.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 81-96). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Navarro, A. (2002). Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo educativo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica.

Navarro Borrás, F. y Ríos S. (1944). **Curso Preliminar de Análisis Matemático**. Madrid: Editorial: Stylos.

Negro, A. y Benedicto, C. (1987). **Matemáticas 2 ªB.U.P**. Editorial Alhambra.

Negro, A., Benedicto, C. y otros. (1997). **Matemáticas 2.Ciencias de la Naturaleza y de la Salud**. Madrid: Editorial Santillana.

Orton, A. (1983). Students´ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics,* 14(3), 235-250.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana*. Vol I, nº 2, 59-81.

Palmiter, J. (1991). Effect of Computer Álgebra Systems on Concept and Skill Adcquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 2, 151-156.

Penalva, M. (2001). Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: Reunión científica de Pensamiento Numérico y Algebraico (SEIEM), Universidad de Valladolid-Palencia.

Pérez Cacho, S. y Negro, A.(1985). **Matemáticas 2º B.U.P**. Editorial Alhambra.

Pérez Carranza, E. (1969). **Matemáticas. Sexto Curso**. Editorial: Summa.

Przenioslo, M.(2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secundary school. *Educational Studies in Mathematics* 60: 71-93.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria** (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Raman, M.(2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *The Journal of Mathematical Behavior* 21(2), 135-150.

Rey Pastor, J (1933). **Curso Cíclico de Matemáticas. Calculo Infinitesimal.** Tomo II. Cuenca: Editorial Ruiz de Lara.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva.

Rios, S. y Rodríguez Sanjuán A. (1966). **Matemáticas sexto curso de bachillerato. Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica**. Madrid: Editorial Ministerio de Educación y Ciencia

Robert, A.(1982). L´acquisition de la notion de convergence des suites numérique dans l´Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3 (3), 307-341.

Robert, A. & Boschet, F.(1984). L' acquisition de débuts de lánalyse sur R dans un section ordinaire de DEUG premiére année, *Cahier de didactique des mathématiques* 18-1, IREM, Paris VII.

Robert, A. y Schwarzenberger, T. (1991). Research in the teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. *En* Tall, D (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 25-41

Robinson, A. (1966). **Non-standard analysis.** Londres: North-Holland.

Robinson, A. (1974). **Non-standard analysis.** Londres: North-Holland. (Edición revisada.)

Romero, I. (2000). Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva.

Romero, I. y Rico, L (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Ema* 4 (2), 117-151.

Sánchez, T. (2000). La doble aproximación en el límite funcional. Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Málaga.

Sánchez, M. T., Claros, F. J., y Coriat, M. (2006). Fenómenos relacionados con el límite finito. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IV*, pp. 105-114.

Sánchez, M. T., Claros, F. J., y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX*, pp. 49-68.

Scaglia, S.(2000). **Dos conflictos al representar números reales en la recta**. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Scharfer, B. (1997). **Undergraduate mathematics major´ understanding and use of formal definitions in real analysis**. The Pennsylvania State University.

Schwarzenberger, R. y Tall, D. (1978): Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, vol 82, 44-49

Segura, D.(1973). **Matemáticas**. Valencia: Editorial Ecir.

Serret Moreno-Gil, J.(1995). **Manual de Estadística Universitaria: inductiva.** Madrid: Editorial ESIC.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36.

Sierpinska, A. (1994). **Understanding in Mathematics**. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A. (1985): Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 6.1, 5-67.

Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math*. vol 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990): Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol 10.3, 24-36.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T. y López Esteban, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476

Spivak, M. (1991). **Calculus**. Editorial: Reverté.

Sullivan, k. (1976). The teaching of elementary calculus: an approach using infinitesimals. *American Mathematic Monthly* 83,5 370-375.

Tall, D. y Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math*, vol 12, 151-169.

Tall, D. (1991) (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1991): The Psychology of Advanced Mathematicaal Thinking. *En* Tall, D. (ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 3-21.

Tall, D. (1996): Functions and Calculus. *En* Bishop, A. (ed.), **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 289-325.

Tall, D. y Tirosh, D.(2001). Infinity – The never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics*, 2-3(48), 129-136.

Tall, D.(1985). Understanding the calculus, *Mathematics Teaching* 110 49– 53.

Tall, D.(1986). **Graphic Calculus, I, II, III** (BBC compatible software). London: Glentop Press.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. Plenary presentation in working Group 3 (pp. 1-8). Québec: ICME.

Tall, D. (1995). Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, plenary address. In L. Meira & D. Carraher, (Eds.), Proceedings of PME 19, Recife, Brazil, I, 61– 75.

Terrisse Jardi, M.y Dávila Garcia-Miranda, M.(1976). **Matemática Curso 2º B.U.P.** Zaragoza: Editorial Librería General.

Tsamir, P. Y Tirosh(1999). The Transition from Comparison of Finite to the Comparison of Infinite Sets: Teaching Prospective Teachers.

Tsamir, P. Y Tirosh, D. (1992). Students´awareness of inconsistent ideas about actual infinity. PME 16, 90-97.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students´ mathematical constructs. *Focus on learning Problems in Mathematics,* 12, 111-129.

Tirosh, D. (1991). The role of students´ intuitions of infinity in teaching the Cantorial Theory. **En** Tall, D. (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 199-214.

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: their causes and function in learning mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, ¾., 85-98.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Theaching and Learning of Mathematics. *En* Tall, D. (ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 65-81.

Vinner, S.(1994). Students´ misconceptions and inconsistencies of thought. Proceedings of the International Congress on Mathematical Education. 109-113.

Vizmanos, José R., Anzola, M. y Primo Martínez A. (1981). **Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas**. Madrid: Editorial S.M.

Vizmanos, José R. y Anzola, M. (1998). **Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.** Madrid: Editorial S.M.

Williams, S. (1991): Models of Limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 22 (3), 219-236.