

F. Prov. 33/87  
t 6/74

UNIVERSIDAD DE GRANADA



Departamento de Álgebra

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
GRANADA  
Nº Documento 613382962  
Nº Copia 1561248X

**ÁLGEBRA HOMOTÓPICA EN  
CATEGORÍAS QUE MODELAN  
ALGEBRAICAMENTE ESPACIOS  
NO CONEXOS**

**TESIS DOCTORAL**  
RAQUEL OSORIO BLANCO

Granada, Octubre 1998

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
2 OCT. 1998  
COMISION DE DOCTORADO

ÁLGEBRA HOMOTÓPICA EN CATEGORÍAS QUE MODELAN  
ALGEBRAICAMENTE ESPACIOS NO CONEXOS

Raquel Osorio Blanco

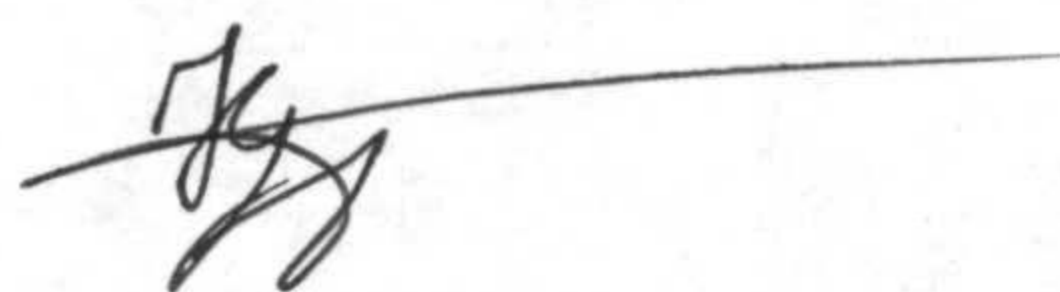
Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los profesores Dr. D. Antonio Rodríguez Garzón y Dr. D. Jesús García Miranda para la obtención del grado de Doctor en Ciencias (Sección Matemáticas) por la Universidad de Granada.

VºBº



Fdo. D. Antonio Rodríguez Garzón.

VºBº



Fdo. D. Jesús García Miranda.

El aspirante a doctor



Fdo. Raquel Osorio Blanco

*A Matías*



Quisiera expresar mi agradecimiento especialmente a los directores de esta memoria, D. Antonio Rodríguez Garzón y D. Jesús García Miranda, por su trabajo y dedicación a la elaboración de la misma, pues sin ellos no habría podido realizarla.

También quisiera agradecer a Matías su apoyo constante, su infinita paciencia y, sobre todo, el haber estado a mi lado en los momentos difíciles animándome para que el trabajo pudiera salir adelante.

Por último mostrar mi gratitud al Departamento de Álgebra y a todas las personas que de uno u otro modo ha hecho posible su realización.



# Índice General

Introducción	2
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Categorías de modelos de Quillen y teoría de homotopía asociada . . . . .	8
1.2 Grupoides . . . . .	13
1.3 Objetos simpliciales en una categoría. Conjuntos y Grupos simpliciales . .	18
<b>2 Grupoides simpliciales</b>	<b>27</b>
2.1 Construcciones en grupoides simpliciales . . . . .	27
2.2 La estructura de modelos en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . . . . .	36
2.3 Teoría de homotopía en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . . . . .	54
<b>3 Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas de grupoides simpliciales</b>	<b>77</b>
3.1 La $n$ -estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . . . . .	78
3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ - estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . . . . .	91
3.3 Comparación con otras estructuras de modelos . . . . .	101
3.3.1 Comparación con la estructura en $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . . . . .	101
3.3.2 Comparación con la $n$ -estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ y $\mathbf{Top}$ . . . . .	104
<b>4 Álgebra homotópica en subcategorías de grupoides simpliciales</b>	<b>107</b>
4.1 2-grupoides y categorías equivalentes . . . . .	108
4.2 Estructura de modelos en $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$ . . . . .	119
4.3 Construcciones homotópicas . . . . .	135
4.4 Las categorías $[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gpd})$ . Clasificación de clases de homotopía . . . . .	139
Bibliografía	146

# Introducción

Los objetivos generales de la Teoría de Homotopía algebraica quedaron bien marcados y delimitados tras la conferencia de J.H.C. Whitehead, que al respecto pronunció en el Congreso internacional de matemáticos en 1950: “*The ultimate aim of Algebraic Homotopy is to construct a purely algebraic theory, which is equivalent to homotopy theory in the same sort of way that analitic is equivalent to pure proyective Geometry*”.

Esta meta incluía en particular los siguientes problemas de clasificación homotópica:

- A) La clasificación de tipos de homotopía de poliedros  $X, Y, \dots$  mediante datos algebraicos;
- B) El cálculo del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas  $[X, Y]$  en términos de los datos algebraicos clasificadores de  $X$  e  $Y$ .

Ambos problemas, incluyendo otro tipo de espacios, han sido objeto de estudio en los últimos 50 años por diversos y cualificados investigadores. El primero de los problemas, al que de forma genérica se alude en los términos de obtener modelos algebraicos para los tipos de homotopía de espacios, ha sido usualmente abordado buscando construcciones functoriales que trasporten los espacios considerados hasta objetos de naturaleza algebraica (complejos de cadenas, complejos cruzados, ...) de modo que se tenga una equivalencia entre las respectivas categorías de homotopía.

En este sentido, recordemos, [27], que los grupos resultan modelos algebraicos de 1-tipos conexos, esto es, hay un funtor clasificador de espacios

$$B : \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{CW} - \text{ complejos}$$

tal que para cada grupo  $G$ , el espacio  $B(G)$  es conexo y satisface  $\pi_1 B(G) \cong G$  y  $\pi_j B(G) \cong 0$  para  $j \neq 1$ . Además, cada CW-complejo  $X$  con  $\pi_j(X) = 0$  para  $j \neq 1$  es del tipo de homotopía de  $B\pi_1 X$ .

De forma análoga (véase [49], [48]), los módulos cruzados de grupos, introducidos por Whitehead, [63], son modelos algebraicos de 2-tipos conexos, esto es, si  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  denota la categoría de módulos cruzados de grupos, hay un funtor clasificador de espacios

$$B : \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{CW} - \text{ complejos}$$

tal que si  $\mathcal{L} = (L \xrightarrow{\rho} M)$  es un módulo cruzado, entonces  $B\mathcal{L}$  es conexo,  $\pi_1 B\mathcal{L} \cong \text{Coker}(\rho)$ ,  $\pi_2 B\mathcal{L} \cong \text{Ker}(\rho)$  y  $\pi_j B\mathcal{L} = 0$  para todo  $j \neq 1, 2$ . Además, cada CW-complejo conexo  $X$



con  $\pi_j(X) = 0$  para  $j \neq 1, 2$  es del tipo de homotopía de  $B\mathcal{L}$ , para un cierto módulo cruzado  $\mathcal{L}$ .

Notemos que  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  es equivalente a la categoría  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  de categorías (grupoides) internas en grupos (véase [22], [48]), así como a la categoría  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gp})$ , de grupos simpliciales con complejo de Moore de longitud 1 (véase [22], [52]), de manera que estas últimas también proporcionan modelos algebraicos de 2-tipos conexos.

Desde un punto de vista global, es también un resultado clásico el ofrecido por Kan, [47], mostrando que la categoría de grupos simpliciales proporciona modelos algebraicos para todos los tipos de homotopía conexos. Este hecho puede describirse de forma sucinta como sigue:

Si  $\mathbf{Top}$  denota la categoría de espacios topológicos y  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  la de conjuntos simpliciales, existen funtores  $|-| : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Top}$  -realización geométrica- y  $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  -complejo singular total-, y una situación de adjunción (véase [51])  $|-| \vdash S$ , en la que se verifica que para cualquier conjunto simplicial  $K_\bullet$ ,  $|K_\bullet|$  es un CW-complejo, para cada espacio  $X$ ,  $S(X)$  es un complejo de Kan, y que induce una biyección entre los tipos de homotopía de conjuntos simpliciales de Kan y los tipos de homotopía de CW-complejos. Considerando la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1$  de conjuntos simpliciales reducidos (esto es, con un solo vértice), la situación anterior induce entonces una biyección entre los tipos de homotopía de conjuntos simpliciales reducidos de Kan y los de CW-complejos conexos. Ahora, la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1$  está conectada con la de grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , mediante funtores  $G : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1 \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  -grupo libre de lazos- y  $\overline{W} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1$  -complejo clasificador- y una situación de adjunción (véase [51])  $G \vdash \overline{W}$ , que, junto con lo antes comentado, induce en definitiva una biyección entre los tipos de homotopía de grupos simpliciales y CW-complejos conexos.

El estudio de clases restringidas (por su tipo de homotopía) de espacios y la obtención de nuevas categorías que modelen algebraicamente dichos tipos de homotopía, ha encontrado posteriormente aportaciones relevantes que vienen a generalizar el ya comentado modelo de los módulos cruzados de Mac Lane-Whitehead.

En este sentido empecemos recordando que Quillen, [57], restringiendo los funtores  $G$  y  $\overline{W}$  al caso de considerar conjuntos simpliciales  $(r+1)$ -reducidos y grupos simpliciales  $r$ -reducidos,  $r \geq 1$ , mostró a la categoría  ${}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$  de grupos simpliciales  $r$ -reducidos como una categoría de modelos algebraicos para los CW-complejos  $r$ -conexos (i.e., con  $\pi_i = 0$  para  $i \leq r$ ).

La categoría de módulos cruzados de grupos encontró una generalización en la categoría de 2-módulos cruzados de Conduché, [22], que proporciona modelos algebraicos para los 3-tipos conexos, y este resultado fue extendido a todas dimensiones por Carrasco-Cegarra, [19], por medio de una nueva categoría, llamada de  $n$ -hipercomplejos cruzados de grupos, que proporciona modelos algebraicos para todos los  $(n+1)$ -tipos conexos de espacios.

Destaquemos en este punto que, junto a las categorías explícitamente citadas como categorías de modelos algebraicos de tipos de homotopía de espacios, hay toda una gama de categorías equivalentes en la literatura que, consecuentemente, proporcionan modelos algebraicos alternativos que eventualmente pueden ser más adecuados para objetivos concretos.

Dentro de los comentarios en los que nos encontramos inmersos, es de destacar un problema también clásico, con repercusiones claras en el ámbito de la cohomología no abeliana (véase [13]) y con soluciones parciales a lo largo del tiempo ([5], [14], [20]), como es la clasificación y descripción algebraica de los CW-complejos conexos con dos únicos grupos de homotopía no nulos y consecutivos.

En el primer caso a considerar en esta problemática, una solución es dada por la ya comentada categoría de módulos cruzados de grupos o cualquiera de sus equivalentes. En el siguiente caso (espacios con  $\pi_j = 0$  para  $j \neq 2, 3$ ) una solución fué dada por Conduché, [22], al considerar la categoría de 2-módulos cruzados reducidos de grupos, que es equivalente (véase [22], [13]) a la de cat-grupos trenzados, también a la de módulos cruzados de grupos trenzados en el sentido de Brown-Gilbert, [6], y también a la de grupos simpliciales con complejo de Moore trivial en dimensiones distintas de 1 y 2 (véase [22], [52]).

Además, 2-módulos cruzados reducidos con una condición extra de simetría, llamados módulos cruzados estables (véase [22]), determinan una categoría que es equivalente a la de cat-grupos simétricos (véase [22], [14]) y también a la de grupos simpliciales con complejo de Moore trivial en dimensiones distintas de  $r$  y  $r + 1$ , para cada  $r$  fijo,  $r \geq 2$ , (véase [14], [52]). Cualquiera de estas categorías proporciona una de modelos algebraicos para espacios con  $\pi_j = 0$  para cada  $j \neq r, r + 1$  y  $r \geq 3$  (véase [22], [14], [52]).

Destaquemos en este punto que todas las categorías recién comentadas son casos particulares, cuando  $n = r + 1$  y distintos valores de  $r$ , de una situación mas general consistente en considerar, para cada  $r, n$  con  $0 \leq r \leq n$ , la categoría de grupos simpliciales con complejo de Moore trivial en dimensiones menores que  $r$  y mayores que  $n$ , que es una categoría que proporciona modelos algebraicos de espacios  $r$ -conexos (i.e., con  $\pi_i = 0$  para  $i \leq r$ ) y  $(n + 1)$ -coconexos (i.e., con  $\pi_i = 0$  para  $i \geq n + 2$ ) (véase [52]).

Destaquemos también que, volviendo al caso de espacios con únicos dos grupos no nulos y consecutivos, otras soluciones han sido dadas recientemente (véase [20]) que ofrecen también modelos algebraicos para dicho tipo de espacios.

En lo que respecta a la clasificación del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas  $[X, Y]$ , este problema ha encontrado, en diversos casos particulares, soluciones diferentes que involucran el uso de convenientes conjuntos de cohomología.

En tal sentido, la cohomología de Eilenberg-Mac Lane da una solución apropiada cuando  $X$  es asférico e  $Y$  tiene un único grupo de homotopía no trivial, y éste lo es en una dimensión mayor o igual que 2. Este resultado de clasificación ha tenido varias generalizaciones (véase [14]) cuando  $Y$  es del tipo de homotopía de un módulo cruzado o cuando es del tipo de un 2-módulo cruzado reducido. Estas clasificaciones han encontrado a su vez generalizaciones cuando  $X$  e  $Y$  son espacios con  $\pi_j = 0$  para  $j \neq n, n + 1, n = 0, 1, 2$ , en términos de clases de isomorfismo de funtores monoidales (trenzados) cuando  $n = 1$  (resp.  $n=2$ ), (véase [20]), y con toda generalidad sobre los valores de  $n$ , en términos de clases de equivalencia (homotopía) de funtores (véase [52]).

Como ha quedado reflejado, los avances más significativos aportando soluciones a cualesquiera de los problemas A) y B), se han producido bajo hipótesis de conexión en los espacios. Si se abandona tal restricción, algunos hechos relevantes han sido también aportados en estos últimos años.

Desde un punto de vista global, al igual que la categoría de grupos simpliciales modela todos los tipos de homotopía conexos, la categoría de grupoides simpliciales  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  (con conjunto simplicial de objetos constante) fué sugerida por Dwyer-Kan, [25], como adecuada para modelar todos (i.e., no necesariamente conexos) los tipos de homotopía de espacios, y ello siguiendo un proceso paralelo al anteriormente comentado en grupos simpliciales, consistente en mostrar la existencia de funtores  $G : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  -grupoide libre de lazos- y  $\overline{W} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  -complejo clasificador- y una situación de adjunción  $G \vdash \overline{W}$ .

Para tipos de homotopía truncados, es conocido que la categoría de grupoides proporciona modelos algebraicos para los 1-tipos; y para los 2-tipos, Moerdijk-Svensson, [54], mostraron a la categoría de 2-grupoides (un módulo cruzado es equivalente a un 2-grupoide con un solo objeto) como adecuada para modelar algebraicamente tales tipos de homotopía.

En el caso no conexo, y en lo que respecta al problema B), citemos que si  $X$  e  $Y$  son no conexos y  $\pi_j(X) = 0 = \pi_j(Y)$  para  $j > 1$  entonces  $[X, Y]$  es clasificado por el conjunto de clases de equivalencia de funtores entre los correspondientes grupoides fundamentales de los espacios (véase por ejemplo [9]).

En cualquiera de los problemas A) o B) lo que en definitiva se pretende es que el “álgebra” refleje la “geometría” de los espacios o, dicho en otras palabras, que la estructura homotópica de los espacios quede descrita de forma algebraica. Para conseguir esto, se requiere entonces ser capaz de “hacer teoría de homotopía” en contextos puramente algebraicos.

La teoría de homotopía desarrollada por Kan en la categoría de grupos simpliciales, así como la desarrollada en la categoría de conjuntos simpliciales (véase por ejemplo [51]) constituyen referencias oportunas, no topológicas, que conducen a considerar una teoría de homotopía (abstracta) como el desarrollo, en un ambiente categórico abstracto provisto de una conveniente axiomática, de los conceptos y resultados fundamentales que conforman tanto la teoría de homotopía topológica como la simplicial. Esta perspectiva permitiría entonces disponer, para el estudio de objetos geométricos, de lenguajes y herramientas que podrían ser mas simples al ser tratadas con esta óptica abstracta. Además, la unificación debida al desarrollo abstracto de la teoría tiene la virtualidad de que una sola demostración reemplaza a otras muchas para la amplia variedad de contextos en los que las técnicas de teoría de homotopía son útiles.

La idea de axiomatizar una teoría de homotopía fue ya usada implícitamente por Eckman-Hilton en su estudio de fenómenos de dualidad en teoría de homotopía topológica. De hecho, Hilton sugirió ya esa línea de actuación al escribir (véase [44]): “*It would seem therefore that we should consider an abstract system formalizing the category of spaces, its homotopy category and the homotopy functors connecting them*”.

Desde entonces, distintas soluciones se han dado a esta problemática de axiomatizar una teoría de homotopía y codificar a continuación al menos una parte de la estructura. En este sentido hay que citar las propuestas de K. Brown, [3], Anderson, [1], Heller, [41], y Baues, [2], pero sin duda, una de las más extendidas y potentes es la desarrollada por Quillen, [56], en base a lo cual y, pese a algunas deficiencias, es considerada con frecuencia la teoría de homotopía abstracta básica a manejar.

Destaquemos que los orígenes de la teoría de Quillen pueden ser encontrados en Teoría de Deformación y en el estudio de la cohomología de álgebras conmutativas, y que una vez desarrollada, dicha teoría fue usada de forma eficaz por Quillen, [57], en la obtención de nuevos resultados en teoría de homotopía racional.

El contexto abstracto en el que desarrollar la teoría de Quillen, llamado “categoría de modelos (para una teoría de homotopía)” es una categoría con límites y colímites y tres clases distinguidas de morfismos cuyo comportamiento e interacción están controlados por varios axiomas que proporcionan una medida para saber si, en un contexto dado, se tienen las bases sobre las que poder construir estructuras adicionales como cilindros, arcos, suspensiones, lazos, sucesiones (co)-fibración,..., que son construcciones cosustanciales a la clásica teoría de homotopía de espacios. Además, en este ambiente abstracto se tiene un criterio, [56], para asegurar cuando, dadas dos categorías de modelos conectadas por un par de funtores adjuntos, existe una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía asociadas en el sentido de que las categorías de homotopía sean equivalentes y además esta equivalencia preserve la estructura extra formada por los funtores lazo y suspensión y las familias de sucesiones fibración y cofibración.

En la presente memoria se estudia la existencia de estructuras de modelos de Quillen en categorías de grupoides simpliciales y se analiza la teoría de homotopía resultante mostrando de forma explícita determinadas construcciones que conforman esa teoría como las de cilindro, espacio de arcos, lazos, ..., y estudiando en dichas categorías la relación de homotopía que se deduce de ellas.

Los resultados que componen la Memoria aparecen divididos en cuatro capítulos de cuyos contenidos damos a continuación una visión resumida.

El primer capítulo ofrece un compendio de definiciones, construcciones y resultados ya conocidos pero que hemos considerado oportuno incluirlos para hacer que la Memoria sea lo más autocontenida posible. Así, en la primera sección se ofrece junto a la axiomática de categoría de modelos cerrada y algunos ejemplos de ellas, las construcciones homotópicas más notables que en dicho tipo de categorías se pueden realizar. En la segunda sección se hace un breve repaso sobre las principales construcciones en la categoría de grupoides que nos serán de utilidad en el estudio posterior de la categoría de grupoides simpliciales y ciertas subcategorías suyas. La última sección de este primer capítulo está dedicada a recordar algunos hechos fundamentales en las categorías de conjuntos simpliciales y grupos simpliciales y asimismo las estructuras de modelos que ambas categorías soportan.

El objetivo del segundo capítulo es, por un lado, hacer explícitas las demostraciones de algunos de los resultados indicados por Dwyer y Kan en torno al hecho de que la categoría de grupoides simpliciales (con conjunto simplicial de objetos constante) modela algebraicamente la de espacios topológicos y, por otro, hacer un estudio más completo de esa categoría,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , de grupoides simpliciales y la relación de homotopía entre morfismos, mostrando de forma explícita construcciones de cilindro y espacio de arcos. La primera sección está dedicada a introducir determinadas definiciones y construcciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  como son las de complejo de Moore, grupoides de homotopía y relación de homotopía entre morfismos. En la segunda sección ofrecemos la demostración explícita de que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es una categoría de modelos cerrada y extendemos dicha estructura, al

final de la sección, a la categoría de grupoides simpliciales punteados. La tercera sección del capítulo se dedica a mostrar construcciones de espacio de arcos y cilindro e identificar, vía estas construcciones, la relación de homotopía entre morfismos. Las correspondientes construcciones en la categoría de grupoides simpliciales punteados conducen posteriormente a nociones de funtores suspensión y lazos.

En el segundo capítulo se ha visto que en el paso a la consideración de espacios no necesariamente conexos, el papel jugado antes por la categoría de grupos simpliciales es ahora desempeñado por la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  de grupoides simpliciales con conjunto simplicial de objetos constante. Si uno fija la atención en categorías de espacios (no necesariamente conexos)  $n$ -coconexos es natural, en orden a modelar algebraicamente esa teoría de homotopía, seguir la misma línea que en grupos simpliciales (véase [52], [39]) y considerar, para cada  $n \geq 0$ , nociones de  $n$ -equivalencia débil y  $n$ -(co)fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  que determinen una estructura de modelos cerrada cuya teoría de homotopía asociada sea equivalente a la de los espacios  $n$ -coconexos. Éste es justamente el objetivo de la primera sección del capítulo tercero, que se complementará con las construcciones concernientes a la teoría de homotopía asociada a dicha estructura que realizaremos en la segunda sección del capítulo. Por último, en la sección tercera compararemos esa teoría de homotopía con otras existentes en las categorías de espacios topológicos y conjuntos simpliciales, que viene asociadas a estructuras de modelos ya estudiadas (véase [30]) en las que las equivalencias débiles fueron también definidas truncando convenientemente las definiciones clásicas.

Modelar algebraicamente clases restringidas (por su tipo de homotopía) de espacios puede afrontarse, como se ha visto en el tercer capítulo, mediante la consideración de nociones más débiles de equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y el desarrollo de una teoría de homotopía adecuada para ellas. Otra opción para abordar ese mismo problema es la que se adopta en el capítulo cuarto, consistente en la consideración de determinadas subcategorías de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  que soporten una estructura de modelos cuya teoría de homotopía sea de nuevo equivalente a la de los espacios considerados. Este hecho constituye el objetivo del cuarto capítulo junto con el estudio, también de especial relevancia, de la clasificación algebraica del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas entre los espacios considerados. En la misma línea que para el caso de grupos simpliciales (véase [52], [40]) se consideran en las secciones primera y segunda, para cada  $0 \leq r \leq n$ , subcategorías de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , denotadas  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$  que son dotadas en cada caso de una estructura de modelos cerrada en el sentido de Quillen y para las que es analizada la correspondiente teoría de homotopía asociada. Para valores particulares de  $r$  y  $n$  estas categorías son equivalentes a otras bien conocidas (si  $r = 0$  y  $n = 1$  véase corolario 4.1.16) siendo en general el caso  $n = r + 1$ , abordado en la cuarta sección del capítulo, de especial significación por sus connotaciones más clásicas al aportar como categorías equivalentes a las antes definidas versiones “no conexas” de las categorías de módulos cruzados de grupos, módulos cruzados trenzados o módulos cruzados estables.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo está dedicado a ofrecer un resumen de una serie de definiciones, construcciones y resultados, que son preliminares a los que se aportan nuevos en los siguientes capítulos de la memoria y que pretenden, en la medida de lo posible, hacerla autosuficiente.

### 1.1 Categorías de modelos de Quillen y teoría de homotopía asociada

Ofrecemos en esta sección la axiomática que usualmente se maneja de categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen ([57]), algunos ejemplos importantes de este tipo de categorías y las construcciones homotópicas más notables que en ellas se puede realizar.

**Definición 1.1.1.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría y  $\mathcal{F}$  una familia no vacía de morfismos. Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de  $\underline{\mathbf{C}}$  se dice que tiene la RLP (propiedad de levantamiento por la derecha) respecto a los morfismos de la familia  $\mathcal{F}$  (o respecto a  $\mathcal{F}$ ) si dado un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{donde } g \in \mathcal{F}$$

existe un morfismo  $B \rightarrow X$  que hace los dos triángulos resultantes conmutativos.

Análogamente, se dice que  $f$  tiene la LLP respecto a  $\mathcal{F}$  (propiedad de levantamiento por la izquierda) si se da la existencia de levantamiento para cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{donde } g \in \mathcal{F}$$

**Definición 1.1.2.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría. Se dice que  $\underline{\mathbf{C}}$  tiene una estructura de modelos cerrada, o que  $\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de modelos cerrada, si en  $\underline{\mathbf{C}}$  se tienen distinguidas tres

## 1.1 Categorías de modelos de Quillen.

familias de morfismos, llamados *fibraciones*, *cofibraciones* y *equivalencias débiles*, satisfaciendo los siguientes axiomas:

CM1)  $\underline{\mathbf{C}}$  es cerrada bajo límites y colímites finitos.

CM2) Para cada par de morfismos  $f, g$  tales que exista  $gf$ , si dos de los tres siguientes morfismos  $f$ ,  $g$  ó  $gf$  son equivalencias débiles, también lo es el tercero.

CM3) Las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles son cerradas bajo retracts, esto es, si el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{s} & X' & \xrightarrow{t} & X \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

es conmutativo con  $ts = 1_X$  y  $vu = 1_Y$ , entonces si  $f'$  es equivalencia débil, fibración o cofibración, también lo es  $f$ .

CM4) **Axioma de levantamiento** Existe un levantamiento en cualquier cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow h \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde  $i$  es una cofibración,  $h$  es una fibración e  $i$  o  $h$  es una equivalencia débil.

CM5) **Axioma de factorización** Todo morfismo  $f$  puede factorizarse como  $f = hi$  y  $f = kj$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ \downarrow j & \searrow f & \downarrow h \\ T & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

donde  $h$  y  $k$  son fibraciones,  $i$  y  $j$  son cofibraciones e  $i$  y  $k$  son equivalencias débiles.

Una axiomática equivalente puede verse en [56].

Es usual denominar fibraciones triviales a aquellos morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias débiles, y cofibraciones triviales a los que son cofibraciones y equivalencias débiles. Asimismo, un objeto  $X \in \underline{\mathbf{C}}$  se dice fibrante si el morfismo  $X \rightarrow *$  es una fibración y se dice cofibrante si el morfismo  $\emptyset \rightarrow X$  es cofibración, donde  $*$  y  $\emptyset$  denotan el objeto final e inicial respectivamente en la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ .

Damos ahora algunos ejemplos de categorías en las que se tiene definida una estructura de modelos:

## 1. Preliminares.

**Ejemplo 1.1.3.** i) La categoría **Top** de espacios topológicos y aplicaciones continuas es una categoría de modelos cerrada con la siguiente estructura (ver [56]):

- Las fibraciones son las fibraciones en el sentido de Serre, es decir, una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es una fibración si dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & X \\ i_0 \downarrow & & \downarrow f \\ D_n \times I & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe levantamiento, donde  $D_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$  es el disco unidad,  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  el intervalo unidad, e  $i_0$  es la aplicación definida por  $i_0(x) = (x, 1)$

- Las equivalencias débiles son las equivalencias homotópicas débiles, es decir, aquellas aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $f$  induce una biyección entre el conjunto de componentes conexas de  $X$  e  $Y$  y para cada  $n \geq 1$  y  $x_0 \in X$ , el morfismo de grupos inducido  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  es un isomorfismo.

- Las cofibraciones son las aplicaciones continuas que tienen la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

En esta categoría se tiene que todo objeto es fibrante y la clase de los objetos cofibrantes contiene a los CW-complejos.

ii) La categoría **Top** soporta otra estructura de modelos (ver [60]) en la que:

- Las fibraciones son los morfismos que tienen la RLP con respecto a las aplicaciones  $i_0 : X \rightarrow X \times I$  para cualquier espacio  $X$ .
- Las equivalencias débiles son las equivalencias homotópicas.
- Las cofibraciones son las aplicaciones cerradas que tienen la LLP con respecto a  $\partial_0 : Y^I \rightarrow Y$  dada por  $\partial_0(f) = f(0)$ , donde  $Y^I$  denota el espacio de aplicaciones continuas  $I \rightarrow Y$ .

iii) Un ejemplo trivial de categoría de modelos cerrada es el de una categoría finitamente completa y cocompleta en la que todo morfismo es fibración y cofibración y las equivalencias débiles son los isomorfismos.

iv) Si  $\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de modelos cerrada y  $Z \in \text{Obj}(\underline{\mathbf{C}})$ , entonces la categoría coma de objetos sobre  $Z$ , que notaremos  $(\underline{\mathbf{C}}, Z)$ , hereda de manera natural una estructura de modelos cerrada (ver [56]), donde las fibraciones, las cofibraciones y las equivalencias débiles son aquellos morfismos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z & \end{array}$$



## 1.1 Categorías de modelos de Quillen.

donde  $f$  es, respectivamente, una fibración, cofibración o equivalencia débil en  $\underline{\mathbf{C}}$ . Dualmente la categoría co-coma  $(Z, \underline{\mathbf{C}})$  también hereda una estructura de modelos de la de  $\underline{\mathbf{C}}$ .

Cuando a una categoría se le dota de una estructura de modelos cerrada, el objetivo es “hacer teoría de homotopía” en ella. En una categoría de modelos cerrada se puede hablar de homotopías entre morfismos, objetos cilindros y arcos, suspensiones, lazos, etc., y se puede construir la categoría de homotopía asociada, que se obtiene, o bien localizando respecto a la clase de las equivalencias débiles o bien dividiendo por la relación de homotopía. Precisemos un poco más estos conceptos y construcciones (para una exposición general ver [56]).

En lo que sigue,  $\underline{\mathbf{C}}$  denotará una categoría de modelos cerrada.

**1.1.4.** Dado  $X \in \underline{\mathbf{C}}$ , un cilindro para  $X$  es un objeto  $X \times I$  junto con una factorización del morfismo codiagonal  $\nabla : X \amalg X \rightarrow X$  de la forma

$$X \amalg X \xrightarrow{i_0+i_1} X \times I \xrightarrow{\sigma} X$$

donde  $i_0 + i_1$  es una cofibración y  $\sigma$  es una equivalencia débil. Dualmente, un espacio de arcos o cocilindro para un objeto  $Y \in \underline{\mathbf{C}}$  es un objeto  $Y^I$  junto con una factorización del morfismo diagonal  $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$  de la forma

$$Y \xrightarrow{\beta} Y^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} Y \times Y$$

donde  $\beta$  es una equivalencia débil y  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración.

Notemos que en la categoría **Top**, con la estructura de Quillen (ver 1.1.3), dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  ( $X$  cofibrante), el espacio producto  $X \times I$  es un cilindro para  $X$  y el espacio  $Y^I$  es un espacio de arcos para  $Y$ .

Estos conceptos de cilindro y espacio de arcos, permiten introducir el concepto de homotopía.

**1.1.5.** Una homotopía por la izquierda (resp. por la derecha) entre dos morfismos en  $\underline{\mathbf{C}}$   $f, g : X \rightarrow Y$ , es una aplicación  $k : X \times I \rightarrow Y$  (resp.  $h : X \rightarrow Y^I$ ) tal que  $ki_0 = f$  y  $ki_1 = g$  (resp.  $\partial_0 h = f$  y  $\partial_1 h = g$ ).

Es claro que ambos conceptos coinciden con el concepto de homotopía usual en espacios topológicos (cuando  $X$  es cofibrante).

Las relaciones de homotopía por la derecha y por la izquierda no son en general de equivalencia. Sí lo son cuando  $X$  es cofibrante e  $Y$  es fibrante, en cuyo caso, además, coinciden (ver [56]). Si nos quedamos con los objetos que son a la vez fibrantes y cofibrantes y como morfismos entre dos objetos  $X$  e  $Y$  tomamos las clases de homotopía de morfismos  $X \rightarrow Y$ , denotadas  $[X, Y]$ , obtenemos una categoría (es fácil ver que la composición en  $\underline{\mathbf{C}}$  induce una

## 1. Preliminares.

composición bien definida entre las clases de homotopía de morfismos) que se conoce como la categoría de homotopía de  $\underline{\mathbf{C}}$  asociada a la estructura de modelos en cuestión, y que se denota  $\pi\underline{\mathbf{C}}_{cf}$ . Si localizamos, en el sentido de Gabriel-Zisman (ver [33]), la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  con respecto a la clase de las equivalencias débiles (es decir, invertimos formalmente tales morfismos), se obtiene una nueva categoría,  $Ho(\underline{\mathbf{C}})$ , que es equivalente a  $\pi\underline{\mathbf{C}}_{cf}$ , donde la equivalencia  $\bar{\gamma} : \pi\underline{\mathbf{C}}_{cf} \rightarrow Ho(\underline{\mathbf{C}})$  está inducida por el funtor canónico  $\gamma : \underline{\mathbf{C}} \rightarrow Ho(\underline{\mathbf{C}})$ . Si  $X$  es fibrante e  $Y$  es cofibrante se tiene un isomorfismo  $\gamma : [X, Y] \xrightarrow{\sim} Hom_{Ho(\underline{\mathbf{C}})}(\gamma X, \gamma Y)$ . Además se verifica que  $f \in [X, Y]$  es una equivalencia débil si y sólo si  $\gamma(f)$  es un isomorfismo (ver [57]).

**1.1.6.** Cuando la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  es punteada, esto es, los objetos inicial y final son isomorfos, se define la fibra de un morfismo dado  $f : X \rightarrow Y$ , mediante el cuadrado cartesiano (pullback)

$$\begin{array}{ccc} * \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

es decir, como el núcleo de  $f$ , y la co-fibra de  $f$  por el cuadrado cocartesiano (pushout)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y \vee_X * \end{array}$$

es decir, como el conúcleo de  $f$ .

En este caso se dispone de un par de funtores adjuntos, llamados suspensión y funtor de lazos

$$\Sigma : Ho(\underline{\mathbf{C}}) \rightleftarrows Ho(\underline{\mathbf{C}}) : \Omega$$

Para definir  $\Sigma X$  se toma un cilindro para  $X$ ,  $X \times I$ , y se calcula la cofibra del morfismo  $i_0 + i_1 : X \amalg X \rightarrow X \times I$ ; puesto que el cilindro de un objeto no es único,  $\Sigma X$  no es único, pero está determinado salvo equivalencia débil. Por tanto, en la categoría de homotopía está determinado salvo isomorfismo. Análogamente se define  $\Omega Y$  como la fibra del morfismo  $(\partial_0, \partial_1) : Y^I \rightarrow Y \times Y$  donde  $Y^I$  es un espacio de arcos para  $Y$ .

La categoría de homotopía asociada a  $\underline{\mathbf{C}}$  junto con estas construcciones que hemos recordado de forma breve como son los funtores de lazos y suspensión y también las familias de sucesiones fibración y cofibración, constituyen lo que Quillen denominó la teoría de homotopía asociada a la estructura de modelos.

El siguiente teorema, probado por Quillen en [56], proporciona un criterio para saber cuando dos categorías de modelos relacionadas por un par de funtores adjuntos tienen

teorías de homotopía equivalentes en el sentido de que las categorías de homotopía sean equivalentes y esta equivalencia preserve la estructura extra aludida. Aplicaciones recientes de este teorema pueden verse en [17], [35], [30].

**Teorema 1.1.7.** ([56]) Sean  $\underline{\mathbf{C}}$  y  $\underline{\mathbf{C}'}$  dos categorías de modelos cerradas conectadas por dos funtores adjuntos

$$L : \underline{\mathbf{C}} \rightleftarrows \underline{\mathbf{C}'} : R$$

Supongamos que el adjunto por la derecha ( $R$ ) preserva fibraciones y equivalencias débiles entre objetos fibrantes, y que el adjunto por la izquierda preserva cofibraciones y equivalencias débiles entre objetos cofibrantes. Entonces  $L$  y  $R$  inducen una adjunción entre las categorías de homotopía

$$L : Ho(\underline{\mathbf{C}}) \rightleftarrows Ho(\underline{\mathbf{C}'}) : R$$

Si además se tiene que un morfismo  $LX \rightarrow Y$  es equivalencia débil si y sólo si lo es el correspondiente morfismo  $X \rightarrow RY$  para cualesquiera  $X \in \underline{\mathbf{C}}$  cofibrante e  $Y \in \underline{\mathbf{C}'}$  fibrante, entonces la unidad y counidad de la adjunción inducida son isomorfismos y, por tanto, se tiene una equivalencia entre las categorías de homotopía.

Si además  $\underline{\mathbf{C}}$  y  $\underline{\mathbf{C}'}$  son punteadas, se tiene, no sólo una equivalencia de categorías, sino una equivalencia de teorías de homotopía i.e., la equivalencia preserva los funtores suspensión y lazo y las sucesiones fibración y cofibración.

## 1.2 Grupos

A lo largo de esta sección haremos un breve repaso de la categoría de grupos y de ciertas construcciones en ella. Un detallado estudio puede verse en [4], [43]. Asimismo recordaremos (véase [50]) la estructura de modelos que soporta dicha categoría y algunas construcciones homotópicas en ella.

**1.2.1.** Un grupoide es una categoría pequeña en la que todo morfismo es invertible.

Si  $\mathcal{G}$  es un grupoide,  $O$  es el conjunto de objetos y  $X$  es el conjunto de morfismos, representaremos  $\mathcal{G}$  mediante un diagrama

$$\mathcal{G} \equiv \left( X \begin{array}{c} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{Id} \end{array} O \right)$$

o simplemente  $\mathcal{G} : X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$ , donde  $s$  y  $t$  son las aplicaciones dominio y codominio e  $Id$  es la aplicación que lleva cada objeto en la identidad sobre él mismo. Es claro que  $sId = tId = id_O$ . En ocasiones es útil considerar a  $O$  como un subconjunto de  $X$ , con la inclusión dada por la aplicación  $Id$ . La composición en el grupoide es entonces dada por un aplicación  $m : X_s \times_t X \rightarrow X$  que representaremos por  $m(x, y) = x \circ y$  (ó cuando no haya lugar a confusión por  $xy$ ), esto es

## 1. Preliminares.

$$\begin{array}{c} \cdot \xrightarrow{y} \cdot \xrightarrow{x} \cdot \\ \quad \quad \quad \curvearrowright \\ \quad \quad \quad xoy \end{array}$$

Si  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O$  es un grupoide y  $p, p' \in O$ , llamaremos  $X(p, p')$  ó  $Hom_{\mathcal{G}}(p, p')$  al conjunto de morfismos  $f : p \rightarrow p'$ . Si  $p = p'$  es fácil ver que este conjunto tiene estructura de grupo, al que se llama "grupo de automorfismos de  $\mathcal{G}$  en  $p$ ".

Denotaremos por **Gpd** a la categoría que tiene como objetos los grupoides y como morfismos los funtores entre ellos.

Notemos que si  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O$  y  $\mathcal{G}' : X' \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O'$  son dos grupoides, un funtor  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  consiste de dos aplicaciones  $f_0$  y  $f_1$

$$\begin{array}{ccccc} X_t \times_s X & \xrightarrow{m} & X & \begin{smallmatrix} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} & O \\ \downarrow (f_1, f_1) & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ X'_{t'} \times_{s'} X' & \xrightarrow{m'} & X' & \begin{smallmatrix} \xleftarrow{Id'} \\ \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow[t']{} \end{smallmatrix} & O' \end{array}$$

de forma que se verifiquen las siguientes igualdades:  $f_0 s = s' f_1$ ,  $f_0 t = t' f_1$ ,  $f_1 Id = Id' f_0$ ,  $f_1 m = m'(f_1, f_1)$ .

Veamos algunos ejemplos de grupoides:

**Ejemplo 1.2.2.** i) El grupoide vacío  $\emptyset$ , sin objetos y sin morfismos. Este grupoide es el objeto inicial en la categoría **Gpd**.

ii) El grupoide  $* = \{*\}$ , con un solo objeto y un único morfismo (la identidad). Este grupoide es final en la categoría **Gpd**.

iii) El grupoide "unidad", o grupoide intervalo  $\mathcal{I}$ , con dos objetos 0 y 1, y cuatro morfismos: las dos identidades, un morfismo  $i : 0 \rightarrow 1$  y su inverso.

iv) Si  $O$  es un conjunto, el grupoide discreto sobre  $O$  es aquel grupoide cuyo conjunto de objetos y de morfismos es  $O$  y las aplicaciones dominio y codominio son la identidad. Representaremos este grupoide como  $O \equiv O$ , o  $Disc(O)$ . Notemos que  $Disc$  define un funtor **Set**  $\rightarrow$  **Gpd** que convierte a la categoría de conjuntos en una subcategoría plena de **Gpd**.

v) Sea  $O$  un conjunto. Llamaremos  $\Delta(O)$  al grupoide que tiene como objetos el conjunto  $O$  y como morfismos el conjunto  $O \times O$ . Las aplicaciones dominio y codominio son las proyecciones. La aplicación identidad es la diagonal y la composición la única posible. Se tiene así definido un funtor  $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ .

vi) Si  $G$  es un grupo, entonces  $G$  puede ser visto como un grupoide con un solo objeto, donde la composición viene dada por la operación del grupo. De esta forma, la categoría de grupos puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría de grupoides.

vii) Grupoide fundamental de un espacio topológico:

Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un subespacio suyo no vacío. Se construye el grupoide fundamental de  $X$  sobre  $Y$ ,  $\pi_1(X, Y)$ , como sigue:

El conjunto de objetos es el conjunto  $Y$  y el conjunto de morfismos es el conjunto de aplicaciones continuas  $\alpha : I \rightarrow X$  verificando que  $\alpha(0), \alpha(1) \in Y$ , módulo la relación de equivalencia,  $\alpha \sim \beta$  si y sólo si existe  $H : I \times I \rightarrow X$  continua tal que:

- $H(t, 0) = \alpha(t)$  y  $H(t, 1) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$
- $H(0, s) = \alpha(0)$  y  $H(1, s) = \alpha(1)$ ,  $\forall s \in [0, 1]$

Las aplicaciones dominio y codominio están definidas como sigue:

$$s([\alpha]) = \alpha(0) \quad t([\alpha]) = \alpha(1)$$

y la identidad por  $I(y) = [c_y]$  donde  $c_y(t) = y \forall t \in [0, 1]$

Dadas  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, Y)$ , tales que  $t[\alpha] = s[\beta]$ , se define la composición como

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta] \quad \text{donde } (\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que si  $Y = \{x_0\}$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo fundamental de  $X$  con base en  $x_0$ , y si  $Y = X$ ,  $\pi_1(X, X) = \pi_1(X)$  es el grupoide fundamental de  $X$  (véase []).

Observemos también que si tomamos  $X = I = [0, 1]$  e  $Y = \partial X = \{0, 1\}$ , entonces  $\pi_1(X, Y)$  es justamente el grupoide intervalo definido anteriormente.

**1.2.3.** Sea  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[s]{t} O$  un grupoide. La relación binaria definida en  $O$  por  $p \sim p'$  si  $X(p, p') \neq \emptyset$ , establece una relación de equivalencia entre los objetos del grupoide y sus clases son llamadas las componentes conexas del grupoide. Al conjunto cociente lo denotaremos por  $\pi_0(\mathcal{G})$ . Es fácil observar que  $\pi_0(\mathcal{G})$  podría ser calculado como  $\pi_0(\mathcal{G}) = \text{Coigu}(s, t)$ . Si  $\pi_0(\mathcal{G}) = \{*\}$ , se dice que  $\mathcal{G}$  es conexo. Por el contrario, si  $\pi_0(\mathcal{G}) = O$ , se dice que  $\mathcal{G}$  es totalmente desconexo.

Si ahora  $p \in O$ , llamaremos  $\pi_1(\mathcal{G}, p)$  al grupo de automorfismos de  $\mathcal{G}$  en  $p$  ( $X(p, p)$ ). Es fácil ver que si  $p$  y  $p'$  están en la misma componente, entonces  $\pi_1(\mathcal{G}, p) \cong \pi_1(\mathcal{G}, p')$ , estando un isomorfismo dado por

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{G}, p) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{G}, p') \\ y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

## 1. Preliminares.

---

donde  $x : p \rightarrow p'$  es un morfismo.

Como consecuencia, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{G}, p) & \longrightarrow & X(p, p') \\ y & \longmapsto & xy \end{array}$$

es una biyección.

Es claro que si  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo en la categoría **Gpd**, entonces  $f$  induce una aplicación  $\pi_0(f) : \pi_0(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{H})$  (ya que si  $p$  y  $p'$  están en la misma componente, también lo están  $f_0(p)$  y  $f_0(p')$ ), y para cada  $p \in O$  un morfismo de grupos  $\pi_1(\mathcal{G}, p) \rightarrow \pi_1(\mathcal{H}, f(p))$  al que llamaremos  $\pi_1(f, p)$  o simplemente  $\pi_1(f)$ .

Las equivalencias de categorías entre grupoides pueden caracterizarse en función de estos morfismos, pues puede observarse sin dificultad que  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es una equivalencia de categorías si y sólo si  $\pi_0(f)$  es una biyección y para cada  $p \in O$ ,  $\pi_1(f, p)$  es un isomorfismo.

**1.2.4.** Es un hecho bien conocido que la categoría de grupoides es completa y cocompleta (véase por ejemplo [43]). Algunas construcciones posteriores requieren la descripción explícita de ciertos (co)-límites en grupoides, por lo que haremos a continuación un rápido repaso de ellos.

Si  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O$  un grupoide, un subgrupoide  $\mathcal{H} : Y \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} P$  de  $\mathcal{G}$  es una subcategoría que es cerrada para inversos. Se dice que  $\mathcal{H}$  es un subgrupoide normal si:

- i)  $\mathcal{H}$  contiene todas las identidades (o lo que es equivalente,  $P = O$ ).
- ii) Para cada  $x \in X(p, p')$  e  $y \in Y(p, p)$ ,  $xyx^{-1} \in Y(p', p')$ .

Como ejemplo inmediato tenemos que si  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O$  es un grupoide, entonces el subgrupoide formado sólo por las identidades, es decir,  $O = O$ , es un subgrupoide normal. Si  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo en la categoría **Gpd**, entonces  $\text{Ker}(f)$ , definido como el subgrupoide de  $\mathcal{G}$  formado por aquellos morfismos  $x$  tales que  $f_1x$  es una identidad en  $\mathcal{H}$ , y cuyo conjunto de objetos es igual al conjunto de objetos de  $\mathcal{G}$ , también es un subgrupoide normal de  $\mathcal{G}$ , llamado núcleo de  $f$ .

Si  $\mathcal{H} : Y \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O$  es un subgrupoide normal de  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} O$ , el grupoide cociente  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  es el grupoide cuyo conjunto de objetos es  $\pi_0(\mathcal{H})$  y cuyo conjunto de morfismos es  $X$  módulo la relación de equivalencia  $\equiv_Y$ , definida por:

$x \equiv_Y x'$  si existen  $y, y' \in Y$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ y \downarrow & \longrightarrow & \downarrow y' \\ & x' & \end{array}$$

es conmutativo.

Es evidente que si  $x \equiv_Y x'$  entonces tanto  $s(x)$  y  $s(x')$  como  $t(x)$  y  $t(x')$  dan el mismo elemento en  $\pi_0(\mathcal{H})$ , lo que permite definir  $\bar{s}, \bar{t} : X/ \equiv_Y \rightarrow \pi_0(\mathcal{H})$ . El morfismo identidad se define de manera obvia.

Sean  $x, y \in X$  tales que  $\bar{t}[x] = \bar{s}[y]$  es decir,  $Y(t(x), s(y)) \neq \emptyset$ . Dado entonces  $z \in Y(t(x), s(y))$ , Se define la composición de  $[y]$  y  $[x]$  como  $[y] \cdot [x] = [y \circ z \circ x]$ . Es rutinario comprobar que esta composición está bien definida, y convierte a  $X/ \equiv_Y \xrightarrow[\bar{t}]{\bar{s}} \pi_0(\mathcal{H})$

en un grupoide, al que denotaremos  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ , y que la proyección en objetos y en morfismos induce un functor  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ .

Los coproductos en **Gpd** se calculan, tanto en objetos como en morfismos, igual que en la categoría de conjuntos, esto es, haciendo la unión disjunta de los objetos y la unión disjunta de los morfismos, y componiendo de la única forma posible. La construcción de los coigualadores es bastante más compleja y requiere una descripción en términos de generadores y relatores que recordamos de forma rápida.

Dado que el functor  $Obj : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Set}$  es adjunto por la izquierda al functor  $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ , y por tanto preserva colímites, se tiene que para calcular un colímite en **Gpd**, sobre objetos se calcula igual que en conjuntos.

Sean ahora  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[t]{s} O$  y  $\mathcal{H} : Y \xrightarrow[t]{s} P$  dos grupoides, y  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  dos funtores entre ellos. Si existe  $Coigu(f, g) = \mathcal{C} : Z \xrightarrow[t]{s} Q$ , se tiene que  $Q = Coigu(f_0, g_0)$ , y el conjunto de morfismos  $Z$  es el conjunto cociente del conjunto de todas las sucesiones  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  donde  $y_i \in Y$ , y  $t(y_i)$  y  $s(y_{i+1})$  son iguales en  $Q$ , bajo la relación de equivalencia generada por:

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_n) R (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}y_i, y_{i+2}, \dots, y_n)$$

si existe la composición  $y_{i+1}y_i$

$$(y_1, \dots, y_i, Id, y_{i+1}, \dots, y_n) R (y_1, \dots, y_n) \quad \text{si } n \geq 1$$

$$(y_1, \dots, y_i, f_1(x), y_{i+1}, \dots, y_n) R (y_1, \dots, y_i, g_1(x), y_{i+1}, \dots, y_n) \quad \text{para } x \in X$$

Las aplicaciones dominio y codominio están definidas por

$$s(y_1, \dots, y_n) = [s(y_1)], \quad t(y_1, \dots, y_n) = [t(y_n)]$$

y la composición se define

$$(y_1, \dots, y_n) \cdot (z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_n) \text{ si } [t(z_n)] = [s(y_1)].$$

En general, los límites en **Gpd** también se calculan, tanto en objetos como en morfismos, igual que en la categoría de conjuntos. Esto se deduce de la siguiente proposición (véase [43]):

## 1. Preliminares.

**Proposición 1.2.5.** *i) Sean  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[t]{s} O$  y  $\mathcal{H} : Y \xrightarrow[t]{s} P$  dos grupoides y  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  dos morfismos entre ellos. Entonces el subgrupoide de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}' : X' \xrightarrow[t]{s} O'$  donde  $X' = \{x \in X / f_1(x) = g_1(x)\}$  y  $O' = \{p \in O / f_0(p) = g_0(p)\}$  es el igualador de  $f$  y  $g$ .*

*ii) Si  $(\mathcal{G}_\alpha : X_\alpha \xrightarrow[t]{s} O_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  es una familia de grupoides, el grupoide que tiene como objetos  $\prod_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha$  y como morfismos  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ , con la composición y aplicaciones dominio y codominio definidos coordenada a coordenada, es un producto para la familia en la categoría de grupoides.*

**1.2.6.** La categoría **Gpd** que, como acabamos de recordar es completa y cocompleta, soporta una estructura de modelos cerrada definida como sigue (véase [50]):

Supongamos que  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[t]{s} O$  y  $\mathcal{H} : X' \xrightarrow[t]{s} O'$  son dos grupoides y que  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo entre ellos. Entonces:

- $f$  es una fibración si es una fibración de Grothendieck, esto es, si para cada  $p \in O$  y cada  $y \in X'(f_0(p), q)$ , existe  $x \in X(p, p')$  tal que  $f_1(x) = y$ .
- $f$  es una equivalencia débil si es una equivalencia de categorías
- $f$  es una cofibración si es inyectivo en objetos.

Notemos que  $f$  es una fibración si y sólo si  $f$  tiene la RLP con respecto al morfismo  $* \hookrightarrow \mathcal{I}$ , y una fibración trivial si y sólo si tiene la RLP con respecto a  $\emptyset \hookrightarrow * \amalg * \hookrightarrow \mathcal{I}$ .

Al igual que en el caso de espacios topológicos, si consideramos el grupoide unidad  $\mathcal{I}$ , el producto usual de grupoides  $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$  es un objeto cilindro y  $\mathcal{H}^{\mathcal{I}} = \text{Hom}_{\text{Gpd}}(\mathcal{I}, \mathcal{H})$  es un espacio de arcos en la categoría de grupoides.

Puesto que en esta estructura todo objeto es fibrante y cofibrante, la relación (de equivalencia) por la derecha y por la izquierda es la misma y puede ser descrita, dados dos morfismos  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , mediante un morfismo  $H : \mathcal{G} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $H i_0 = f$  y  $H i_1 = g$  (con  $i_0(x) = (0, x)$  e  $i_1(x) = (1, x)$ ), o bien mediante un morfismo  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{I}}$  tal que  $\partial_0 h = f$  y  $\partial_1 h = g$  (con  $\partial_0(p \rightarrow q) = p$  y  $\partial_1(p \rightarrow q) = q$ ). Se tiene así concebida la categoría de homotopía de grupoides,  $\text{Ho}(\text{Gpd})$ , como la categoría cociente de **Gpd** por la relación de homotopía entre morfismos.

## 1.3 Objetos simpliciales en una categoría. Conjuntos y Grupos simpliciales

En esta sección recordaremos algunas construcciones en las categorías de conjuntos y grupos simpliciales que vamos a utilizar en el resto de la memoria. La comenzamos estudiando



en general objetos simpliciales sobre una categoría para posteriormente particularizar a las categorías antes mencionadas. Referencias oportunas son [51] y [52].

**1.3.1.** La categoría simplicial  $\Delta$  es aquella cuyos objetos son los conjuntos  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$  y los morfismos entre dos objetos  $[n]$  y  $[m]$  son las aplicaciones  $f : [n] \rightarrow [m]$  que son monótonas crecientes, es decir, si  $i \leq j$  se verifica que  $f(i) \leq f(j)$ . Es fácil ver que los morfismos inyectivos con dominio  $[n]$  y codominio  $[n+1]$  y los morfismos sobreyectivos con dominio  $[n]$  y codominio  $[n-1]$  "generan" todos los morfismos de la categoría, en el sentido de que todo morfismo puede expresarse como composición finita de ellos. Notemos que de los primeros hay exactamente  $n+1$  (tantos como posibles elecciones del único elemento que no está en la imagen) y los llamaremos  $\delta_i^n : [n] \rightarrow [n+1]$ ,  $0 \leq i \leq n$ , o simplemente  $\delta_i$ . Están definidos como sigue:

$$\delta_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

De los segundos hay  $n-1$ , pues cada morfismo  $h$  está determinado por el único  $i$  tal que  $h(i) = h(i+1)$ . A este morfismo lo llamaremos  $\sigma_i^{n-1}$ , o  $\sigma_i$ , y está definido:

$$\sigma_i^{n-1}(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Se comprueba que las aplicaciones  $\sigma_i, \delta_i$  verifican las siguientes identidades:

$$\begin{cases} \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} & i < j \\ \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} & i \leq j \\ \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & i < j \\ Id & i = j, i = j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & i > j+1 \end{cases} \end{cases}$$

y que la categoría  $\Delta$  es universal respecto a estas relaciones, es decir, la categoría  $\Delta$  está "determinada" por los morfismos  $\delta_i^n, \sigma_i^n$  junto con las relaciones anteriores.

**1.3.2.** Si  $\underline{\mathbf{C}}$  es cualquier categoría, un objeto simplicial en  $\underline{\mathbf{C}}$  es un funtor  $X : \Delta^{op} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ . Sea  $X$  un objeto simplicial en  $\underline{\mathbf{C}}$  y llamemos  $X_n = X([n+1])$ ,  $d_i = X(\delta_i)$  y  $s_i = X(\sigma_i)$ . Entonces  $X$  está determinado por los objetos  $X_n$  y los morfismos  $d_i, s_i$ , que deben de verificar las identidades que se deducen de 1.3.1 (a estos morfismos se les suele llamar operadores cara y operadores de degeneración respectivamente). Éstas son:

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i & i < j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i & i \leq j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j \\ Id & i = j, i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

## 1. Preliminares.

y se suelen conocer como identidades simpliciales.

Por tanto, dar un objeto simplicial en una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  es equivalente a dar una familia numerable de objetos  $(X_n)_{n \geq 0}$  junto con una familia de morfismos  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , satisfaciendo las identidades simpliciales.

Un objeto de esta forma lo denotaremos por  $X_\bullet$  y lo representaremos por un diagrama:

$$\cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{s_n} \\ \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} \begin{array}{c} X_{n+1} \\ \xrightarrow{d_{n+1}^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_n^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_n \\ \xrightarrow{d_n^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_{n-1} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \cdots \begin{array}{c} X_2 \\ \xrightarrow{d_2^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_1 \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_0 \end{array}$$

Dados dos objetos simpliciales  $X_\bullet$  e  $Y_\bullet$  sobre una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ , un morfismo simplicial entre ambos es una transformación natural  $f_\bullet$  entre los dos funtores o, equivalentemente, una familia de morfismos  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  que conmutan con las caras y las degeneraciones, es decir,  $f_n d_i = d_i f_{n+1}$  y  $f_{n+1} s_i = s_i f_n$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Obtenemos de esta forma, dada una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$  cuyos objetos son los objetos simpliciales en  $\underline{\mathbf{C}}$  y cuyos morfismos son los morfismos simpliciales. Así, en particular, podemos considerar la categoría de conjuntos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , de grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , de grupoides simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$ , etc..

**1.3.3.** Si consideramos la subcategoría plena de  $\Delta$  formada por aquellos objetos con  $n+1$  elementos o menos, se puede definir lo que es un objeto simplicial truncado en dimensión  $n$ , y se puede considerar la categoría de objetos simpliciales sobre una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  truncados en dimensión  $n$ , a la que denotaremos  $Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}))$ . Obviamente existe un functor  $tr^n : \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) \rightarrow Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}))$ . Dado un objeto simplicial truncado en dimensión  $n$ , que notaremos  $X_{\bullet, tr}$ , se define su “(n+1)-ésimo núcleo simplicial” como un objeto de  $\underline{\mathbf{C}}$  denotado por  $\Delta^{n+1}(X_{\bullet, tr})$ , junto con morfismos  $d_i : \Delta^{n+1}(X_{\bullet, tr}) \rightarrow X_n$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ , que es universal respecto de las relaciones  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ ,  $i < j$ . Existen morfismos  $s_i : X_n \rightarrow \Delta^{n+1}(X_{\bullet, tr})$ ,  $0 \leq i \leq n$ , tales que

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{s_n} \\ \vdots \\ \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \vdots \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} \begin{array}{c} \Delta^{n+1}(X_{\bullet, tr}) \\ \xrightarrow{d_{n+1}^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_n^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_n \\ \xrightarrow{d_n^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_{n-1} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \cdots \begin{array}{c} X_2 \\ \xrightarrow{d_2^{s_0}} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_1 \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \begin{array}{c} X_0 \end{array}$$

es un objeto simplicial truncado en dimensión  $n+1$ . Si a este objeto simplicial truncado le repetimos el mismo proceso (calculamos su (n+2)-ésimo núcleo simplicial) y así sucesivamente, obtenemos un objeto simplicial, al que llamaremos  $cosk^n(X_{\bullet, tr})$ . Esta construcción determina, si la categoría es finitamente completa, un functor  $cosk^n : Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$  que es adjunto por la derecha al functor  $tr^n : \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) \rightarrow Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}))$ . Denotaremos  $Cosk^n$  al functor composición  $cosk^n tr^n : \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$ .

Si  $X_\bullet$  es un objeto simplicial, su  $(n+1)$ -ésimo núcleo simplicial es, por definición,  $\Delta^{n+1}(X_\bullet) = \Delta^{n+1}(tr^n(X_\bullet))$ .

Dualmente, dado un objeto simplicial truncado en dimensión  $n$ ,  $X_{\bullet, tr}$ , su  $(n+1)$ -ésimo conúcleo simplicial es un objeto, denotado  $\nabla^{n+1}(X_{\bullet, tr})$ , junto con morfismos  $s_i : X_n \rightarrow \nabla^{n+1}(X_{\bullet, tr})$ ,  $0 \leq i \leq n$ , que es universal respecto de las relaciones  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ ,  $i \leq j$ . Se tiene que existen morfismos  $d_i : \nabla^{n+1}(X_{\bullet, tr}) \rightarrow X_n$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ , tales que

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & s_n & & s_{n-1} & & & & s_1 & & & & s_0 \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \nabla^{n+1}(X_{\bullet, tr}) & \xrightarrow{s_0} & X_n & \xrightarrow{s_0} & X_{n-1} & \cdots & X_2 & \xrightarrow{s_0} & X_1 & \xrightarrow{s_0} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & & \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & s_0 & & s_0 & & & & s_0 & & & & s_0 \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & d_{n+1} & & d_n & & & & d_2 & & & & d_1 \end{array} \end{array}$$

es un objeto simplicial truncado en dimensión  $n+1$ . Iterando este proceso se obtiene un funtor  $sk^n : Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$  que es adjunto por la izquierda al funtor  $tr^n$ . Denotaremos  $Sk^n = sk^n tr^n : \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$

Tenemos entonces un diagrama de adjunciones:

$$\begin{array}{ccc} & Sk^n & \\ \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{tr^n} \\ \xleftarrow{cosk^n} \end{array} & Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})) & \begin{array}{c} \xrightarrow{sk^n} \\ \xleftarrow{tr^n} \end{array} & \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) \\ & Cosk^n & \end{array}$$

donde las flechas inferiores representan los adjuntos por la derecha.

**1.3.4.** Dado  $X_{\bullet, tr}$  un objeto simplicial truncado en dimensión  $n$ , se define su  $k$ -ésima cara abierta en dimensión  $n+1$ ,  $0 \leq k \leq n+1$ , y se nota  $\Lambda_k^{n+1}(X_{\bullet, tr})$ , como el objeto universal respecto a la propiedad de que existan morfismos  $d_i : \Lambda_k^{n+1}(X_{\bullet, tr}) \rightarrow X_n$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ , satisfaciendo  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ ,  $i < j$ ,  $j \neq k$ .

Es claro que dado un morfismo simplicial truncado  $f_{\bullet, tr} : X_{\bullet, tr} \rightarrow L_{\bullet, tr}$ , para cada  $k$ ,  $n$  en la situación  $0 \leq k \leq n+1$ ,  $f_{\bullet, tr}$  induce un morfismo  $\Lambda_k^{n+1}(X_{\bullet, tr}) \rightarrow \Lambda_k^{n+1}(L_{\bullet, tr})$ .

**1.3.5.** Dados dos morfismos simpliciales  $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ , una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un sistema de morfismos  $k_j^n : X_n \rightarrow Y_n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , satisfaciendo las siguientes identidades (1):

$d_0 k_n^1 = g_{n-1} d_0$	$d_i k_n^j = k_{n-1}^{j-1} d_i \quad \text{si } i < j$	$s_i k_n^j = k_{n+1}^j s_i \quad \text{si } i \geq j$
$d_n k_n^n = f_{n-1} d_n$	$d_i k_n^j = k_{n-1}^j d_i \quad \text{si } i \geq j$	$s_i k_n^j = k_{n+1}^{j+1} s_i \quad \text{si } i < j$

Cuando exista una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$ , diremos que  $f_\bullet$  y  $g_\bullet$  son homotópicos. Es rutinario probar (véase [52]) que dar una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es equivalente a dar una

## 1. Preliminares.

familia de morfismos  $h_j^n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ ,  $0 \leq j \leq n$ , satisfaciendo las identidades (2):

$d_0 h_n^0 = g_n$	$d_{n+1} h_n^n = f_n$	$d_i h_n^j = h_{n-1}^{j-1} d_i$	$si\ i < j$
$s_i h_{n-1}^j = h_n^{j+1} s_i$	$si\ i \leq j$	$d_{j+1} h_n^{j+1} = d_{j+1} h_n^j$	
$s_i h_{n-1}^j = h_n^j s_{i-1}$	$si\ i > j$	$d_i h_n^j = h_{n-1}^j d_{i-1}$	$si\ i > j + 1$

Dado un morfismo simplicial  $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ , un inverso homotópico para  $f_\bullet$  es un morfismo simplicial  $g_\bullet : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  tal que  $f_\bullet g_\bullet$  es homotópico a  $1_{Y_\bullet}$  y  $g_\bullet f_\bullet$  es homotópico a  $1_{X_\bullet}$ . Un morfismo simplicial  $f_\bullet$  diremos que es una equivalencia homotópica si tiene inverso homotópico.

Es fácil comprobar que si se tiene que  $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  son homotópicos entonces, para cualquier par de morfismos,  $h_\bullet : U_\bullet \rightarrow X_\bullet$ ,  $h'_\bullet : Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$ , los morfismos  $h'_\bullet f_\bullet h_\bullet$  y  $h'_\bullet g_\bullet h_\bullet$  son también homotópicos.

Dados  $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$  denotaremos usualmente por  $[X_\bullet, Y_\bullet]$  al conjunto cociente de  $Hom_{\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})}(X_\bullet, Y_\bullet)$  bajo la relación de equivalencia generada por la de homotopía.

A continuación daremos algunas generalidades sobre conjuntos simpliciales (para más detalles, ver [24], [51], [55], [56]). Recordemos que un conjunto simplicial  $K_\bullet$  puede verse como una familia numerable de conjuntos  $(K_n)_{n \geq 0}$  junto con aplicaciones  $d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y  $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , satisfaciendo las identidades simpliciales.

Si  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial, a los elementos de  $K_n$  los llamaremos  $n$ -símplices o símplices de dimensión  $n$ . Los  $0$ -símplices se denominan también vértices. Si  $y \in K_n$ , diremos que  $y$  es un símplice degenerado si existe  $x \in K_{n-1}$  e  $i \in [n]$  tal que  $s_i x = y$ .

Dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , un subconjunto simplicial  $L_\bullet$  es un conjunto simplicial tal que  $L_n \subseteq K_n \forall n$  y la inclusión es una aplicación simplicial. Si  $L_\bullet$  es un subconjunto simplicial de  $K_\bullet$  y  $X$  es un conjunto de símplices de  $L_\bullet$ , diremos que  $X$  genera a  $L_\bullet$  si todo símplice de  $L_\bullet$  se puede obtener a partir de uno de  $X$  mediante los operadores cara y degeneración.

**1.3.6.** Puesto que la categoría **Set** es completa y cocompleta, dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , existen tanto su  $n$ -esqueleto como su  $n$ -coesqueleto.  $Sk^n(K_\bullet)$  queda identificado con el subconjunto simplicial de  $K_\bullet$  generado por todos los símplices (no degenerados) de dimensión menor o igual que  $n$  y el “ $(n+1)$ -ésimo núcleo simplicial” se identifica con:

$$\Delta^{n+1}(K_\bullet) = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in (K_n)^{n+2} / d_i x_j = d_{j-1} x_i, i < j\}$$

Por otro lado, su  $(n+1)$ -ésimo conúcleo simplicial,  $\nabla^{n+1}(K_\bullet)$ , es el conjunto  $\prod_{i=0}^n K_n$  dividido por la relación generada por  $\mu_i s_j = \mu_{j+1} s_i$ ,  $i \leq j$ , donde  $\mu_i : K_n \rightarrow \prod_{i=0}^n K_n$  es la inyección canónica  $i$ -ésima, y la  $k$ -ésima cara abierta en dimensión  $n+1$  de  $K_{\bullet, tr}$ ,  $\Lambda_k^{n+1}(K_{\bullet, tr})$ , es el conjunto:

$$\{(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \in (K_n)^{n+1} / d_i x_j = d_{j-1} x_i, i < j; i, j \neq k\}.$$

**1.3.7.** Una aplicación simplicial  $p_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  se dice que es una fibración de Kan si dados  $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(K_\bullet)$  e  $y \in L_n$  tales que  $d_i(y) = p_{n-1}(x_i)$ ,  $i \neq k$ , existe  $x \in K_n$  tal que  $p_n(x) = y$  y  $d_i(x) = x_i$ .

Un conjunto simplicial  $K_\bullet$  se dice que es de Kan si la aplicación  $K_\bullet \rightarrow *$  es una fibración de Kan, donde  $*$  está dado como en 1.3.8.

La categoría **Simp(Set)** está relacionada con la categoría **Top** mediante un par de funtores, el complejo singular total  $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y su adjunto por la izquierda, el functor realización geométrica  $|| : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Top}$  (ver [51]), lo cual permite dotar a **Simp(Set)** de una estructura de modelos cerrada (ver [56]), en la que:

- Las fibraciones son las fibraciones de Kan.
- Las equivalencias débiles son aquellos morfismos  $f_\bullet$  tales que  $|f_\bullet|$  es una equivalencia homotópica débil en **Top**.
- Las cofibraciones son las aplicaciones inyectivas.

La adjunción  $|| - || \vdash S$  relaciona esta estructura de modelos en **Simp(Set)** con la existente en la categoría **Top** (ver 1.1.3). Notemos además que dicha adjunción verifica las hipótesis del teorema 1.1.7, y por tanto, se tiene una equivalencia entre las categorías de homotopía  $Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})) \cong Ho(\mathbf{Top})$ .

Por otro lado, la construcción de Grothendieck del nervio de una categoría pequeña da lugar a un functor  $Ner : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  que encaja la categoría de grupoides como una subcategoría plena y reflexiva de la categoría de conjuntos simpliciales donde el functor reflector  $P : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Gpd}$  está dado mediante la construcción del grupoide de Poincaré de un conjunto simplicial (que se identifica con la del functor grupoide fundamental si el conjunto simplicial satisface la condición de extensión de Kan). Esta adjunción induce, utilizando el teorema 1.1.7, una adjunción entre las correspondientes categorías de homotopía, la cual establece una equivalencia entre  $H_0(\mathbf{Gpd})$  y  $H_0(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set}))/\pi_i = 0$ ,  $i \geq 2$ , donde esta última denota la categoría de homotopía de los conjuntos simpliciales  $X_\bullet$  con  $\pi_i(X_\bullet, x) = 0$  para  $i \geq 2$  y todo punto base  $x \in X_0$ .

Veamos a continuación algunos ejemplos de conjuntos simpliciales que utilizaremos posteriormente:

**Ejemplo 1.3.8.** i) Dado un conjunto  $K$ , consideramos el conjunto simplicial  $K_\bullet$  donde  $K_n = K \forall n \geq 0$ , y los operadores cara y degeneración son la identidad. Si  $K = \emptyset$  obtenemos el objeto inicial en la categoría **Simp(Set)**. Si  $K$  tiene un solo elemento, obtenemos el objeto final en la categoría. Este conjunto simplicial lo representaremos por  $*$  o  $\{*\}$ .

ii) Para cada  $n \geq 0$ ,  $\Delta[n]$  denota el conjunto simplicial cuyo conjunto de  $m$ -símplices es el conjunto de sucesiones de enteros  $(a_0, a_1, \dots, a_m)$  satisfaciendo que  $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_m \leq n$ , y donde los operadores cara y degeneraciones vienen dados por:

$$d_i(a_0, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

$$s_i(a_0, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

## 1. Preliminares.

Al elemento  $(0, 1, \dots, n) \in (\Delta[n])_n$  se le denomina el  $n$ -símplice estandar y lo representaremos por  $\Delta_n$ . Es fácil comprobar que este símplice genera todo  $\Delta[n]$  y por tanto, dada una aplicación simplicial  $f_\bullet : \Delta[n] \rightarrow K_\bullet$ , donde  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial cualquiera,  $f_\bullet$  está determinada por  $f_n(\Delta_n)$ . Además, dado  $x \in K_n$  existe una (única) aplicación simplicial  $\bar{x} : \Delta[n] \rightarrow K_\bullet$  tal que  $\bar{x}(\Delta_n) = x$ , de donde se deduce que  $\text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(\Delta[n], K_\bullet) \cong K_n$ .

Definimos ahora aplicaciones simpliciales  $\delta_i : \Delta[n] \rightarrow \Delta[n+1]$ ,  $0 \leq i \leq n+1$  y  $\sigma_i : \Delta[n] \rightarrow \Delta[n-1]$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Como el dominio es siempre  $\Delta[n]$ , la aplicación queda determinada conociendo la imagen de  $\Delta_n$ . Definimos entonces:

$$\delta_i(\Delta_n) = (0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1)$$

$$\sigma_i(\Delta_n) = (0, 1, \dots, i-1, i, i, i+1, \dots, n-1)$$

Es decir,  $\delta_i$  “deja igual” las coordenadas menores que  $i$  y aumenta en 1 las que son mayores o iguales que  $i$ , mientras que  $\sigma_i$  “deja igual” las que son menores o iguales que  $i$  y disminuye en 1 las que son mayores.

Notemos que las aplicaciones  $\delta_i$  son inyectivas. A la imagen de  $\Delta[n]$  por  $\delta_i$  se le suele llamar la “cara  $i$ -ésima” de  $\Delta[n+1]$  ( $\delta_i$  es por tanto la inclusión en la cara  $i$ -ésima). A  $\sigma_i$  se le denomina la “ $i$ -ésima proyección”.

- iii) Consideramos ahora el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por los elementos  $d_i(\Delta_n)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , es decir,  $Sk^n(\Delta[n])$ . A este conjunto simplicial se le denota  $\dot{\Delta}[n]$ . Es fácil ver que los símplices de este conjunto simplicial son los símplices de  $\Delta[n]$  que tienen  $n$  elementos distintos o menos. Notemos también que dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , es equivalente dar un morfismo  $f_\bullet : \dot{\Delta}[n] \rightarrow K_\bullet$  a dar un elemento de  $\Delta^n(K_\bullet)$  (a saber, el elemento  $(f_{n-1}d_0\Delta_n, \dots, f_{n-1}d_n\Delta_n)$ ).
- iv) Consideremos para cada  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por los elementos  $d_i(\Delta_n)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ , al que denotaremos  $\Delta[n, k]$ . Claramente este conjunto simplicial está también contenido en  $\dot{\Delta}[n]$ . Para un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , dar un morfismo  $f_\bullet : \Delta[n, k] \rightarrow K_\bullet$  es equivalente a dar un elemento de  $\Lambda_k^n(K_\bullet)$ . Como consecuencia se tiene que una aplicación simplicial  $p_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  es una fibración de Kan si y sólo si tiene la RLP respecto de la familia de morfismos  $\Delta[n, k] \hookrightarrow \Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$  (véase [56]).

Destaquemos que ésta última caracterización de las fibraciones, permite demostrar que en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  se verifican los axiomas CM4 y CM5 (ver [56]). Esta situación puede abstraerse, en el sentido de que, en general, para demostrar que una categoría tiene estructura de modelos cerrada, y más concretamente, para probar que se verifican los axiomas CM4 y CM5, es deseable que las fibraciones (triviales) aparezcan caracterizadas como aquellos morfismos que tienen la RLP con respecto a una familia concreta de morfismos, cuyos dominios tienen una propiedad común que permite utilizar el mismo tipo de argumento (ver [58] para un tratamiento general). Resaltamos ahora esta propiedad:

**Definición 1.3.9.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría y  $X$  un objeto de dicha categoría. Diremos que  $X$  es secuencialmente pequeño si para cualquier sistema directo  $\{Y_n, j_n : Y_n \rightarrow Y_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , (es decir, un funtor  $(\mathbb{N}, \leq) \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ ) se verifica que  $\text{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, \lim_{\rightarrow} Y_n) \cong \lim_{\rightarrow} (\text{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y_n))$ .

En particular se tiene que los conjuntos simpliciales  $\Delta[n]$ ,  $\dot{\Delta}[n]$  y  $\Delta[n, k]$  son secuencialmente pequeños.

**1.3.10.** La categoría de grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , es la de objetos simpliciales en la categoría de grupos. Como usualmente, un grupo simplicial será representado mediante un diagrama de grupos y homomorfismos de grupos

$$G_{\bullet} : \cdots G_{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{n+1}} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} G_n \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \cdots G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} G_0$$

$\begin{array}{c} \text{Arco superior: } s_n \text{ de } G_{n+1} \text{ a } G_n \\ \text{Arco superior: } s_1 \text{ de } G_2 \text{ a } G_1 \\ \text{Arco superior: } s_0 \text{ de } G_1 \text{ a } G_0 \end{array}$

en el que se satisfacen las identidades simpliciales (véase 1.3.2). Dado  $G_{\bullet} \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  denotaremos por  $N(G_{\bullet})$  a su complejo de Moore ([55], [51]), esto es al complejo de grupos

$$N(G_{\bullet}) = \cdots N_q(G_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{d}_q} N_{q-1}(G_{\bullet}) \rightarrow \cdots \rightarrow N_1(G_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{d}_1} N_0(G_{\bullet})$$

con  $N_0(G_{\bullet}) = G_0$  y  $N_q(G_{\bullet}) = \bigcap_{i=0}^{q-1} (\ker(d_i)) \subset G_q$ , para cada  $q \geq 1$ , donde cada  $\bar{d}_q$  denota la restricción de  $d_q$ .

El conjunto simplicial subyacente a cada grupo simplicial siempre satisface la condición de extensión de Kan (1.3.7), y sus grupos de homotopía con base en el elemento neutro de  $G_0$  (ver [51]) coinciden con los grupos de homología del complejo  $N(G_{\bullet})$  que, denotados  $\pi_q(G_{\bullet})$ ,  $q \geq 0$ , son llamados los grupos de homotopía de  $G_{\bullet}$ .

Ahora, si notamos  $Z_n(G_{\bullet}) = \text{Ker}(\bar{d}_n)$ , el complejo de Moore del grupo simplicial  $\text{Cosk}^n(G_{\bullet})$  queda identificado como sigue:

$$N_q(\text{Cosk}^n(G_{\bullet})) = \begin{cases} N_q(G_{\bullet}) & \text{si } q \leq n \\ Z_n(G_{\bullet}) & \text{si } q = n + 1 \\ 0 & \text{si } q \geq n + 2 \end{cases}$$

y como consecuencia se tiene:

$$\pi_q(\text{Cosk}^n(G_{\bullet})) = \begin{cases} \pi_q(G_{\bullet}) & \text{si } q \leq n - 1 \\ 0 & \text{si } q \geq n \end{cases}$$

**1.3.11.** La categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  soporta una estructura de modelos cerrada (véase [56]), en la que las fibraciones son las fibraciones de Kan, las equivalencias débiles son los morfismos  $f_{\bullet}$  que inducen isomorfismos  $\pi_q(f_{\bullet})$ ,  $q \geq 0$ , y las cofibraciones, definidas por tener la

## 1. Preliminares.

---

*LLP* respecto a las fibraciones triviales, resultan ser aquellos morfismos que son retractsos de los morfismos simpliciales libres (véase [56]).

Las fibraciones (fibraciones triviales) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  quedan caracterizadas como aquellos morfismos que tiene la RLP respecto de la familia de morfismos  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 1$  ( $F\overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ ), donde dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ ,  $F(K_\bullet)$  denota el grupo simplicial que en dimensión  $n$  es el grupo libre sobre los  $n$ -símplices de  $K_\bullet$ , y los operadores cara y degeneración inducidos por los de  $K_\bullet$ . (nótese que esta construcción define un funtor  $F : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que es claramente adjunto por la izquierda al funtor de olvido  $U : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , que “olvida” la estructura de grupo).

La teoría de homotopía asociada a esta categoría de modelos es justamente la teoría desarrollada por Kan ([47]) que, en la terminología de Quillen es equivalente a la teoría de homotopía en la categoría de espacios topológicos punteados y conexos. En particular, se tiene una equivalencia de categorías

$$Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{CW} \mid \text{conexos})$$

donde el primer miembro denota la localización respecto a las equivalencias homotópicas débiles de la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y el segundo la categoría de homotopía estándar de los CW-complejos conexos. Usualmente se dice entonces que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  modela todos los tipos de homotopía conexos.



## Capítulo 2

# Grupoides simpliciales

La categoría de grupos simpliciales es, como hemos recordado en el capítulo anterior, una categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen y la teoría de homotopía asociada es la teoría desarrollada por Kan que viene a ser equivalente, vía la existencia de un par de funtores adjuntos  $G \vdash \bar{W}$ , a la teoría de homotopía en la categoría de conjuntos simpliciales reducidos y consecuentemente a la teoría en la categoría de espacios topológicos punteados y conexos.

Desde este punto de vista global, pero bajo la consideración de conjuntos simpliciales no necesariamente reducidos (o si se quiere, de espacios topológicos no necesariamente conexos), Dwyer-Kan indican en [25] que la correspondiente teoría de homotopía puede ser modelada algebraicamente por la que existe en la categoría de grupoides simpliciales con conjunto simplicial de objetos constante y ello, viendo por un lado que dicha categoría admite una estructura de modelos cerrada en el sentido de Quillen y, por otro lado, extendiendo a este nuevo contexto la adjunción antes aludida.

El objetivo de este capítulo es hacer explícitas las demostraciones de algunos de los resultados sugeridos por Dwyer-Kan y hacer un estudio más completo de esta categoría de grupoides simpliciales y la relación de homotopía entre morfismos, mostrando además de forma explícita, aún con la complejidad de expresión que ello supone, construcciones homotópicas típicas como lo son las de objeto cilindro y espacio de arcos y, eventualmente si se puntea la categoría, las de suspensión y espacio de lazos.

### 2.1 Construcciones en grupoides simpliciales

Consideraremos en lo que sigue la subcategoría plena de la categoría de grupoides simpliciales cuyos objetos son grupoides simpliciales que tienen conjunto simplicial de objetos constante. Dicha categoría la denotaremos por  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y cada  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  puede ser representado mediante un diagrama

## 2. Grupoides simpliciales.

$$\cdots \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_{n-1}} & \\ & \xrightarrow{s_0} & \\ X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array} \cdots \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_1} & \\ & \xrightarrow{s_0} & \\ X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array} \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ & \xrightarrow{d_1} & \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array}$$

donde cada  $X_n \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \rightarrow O \end{array}$  es un grupoide, y

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array}$$

son morfismos de grupoides verificando entre sí las usuales identidades simpliciales (véase 1.3.2).

Notemos que si  $O = *$ , esto es,  $O$  tiene un solo elemento, entonces  $X$  puede verse como un grupo simplicial, de manera que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  incluye como una subcategoría plena a la de grupos simpliciales.

Dado  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $p, q \in O$  denotaremos por  $X(p, q)$  al conjunto simplicial de morfismos en  $X$  de  $p$  a  $q$

$$X(p, q) : \cdots \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_n} & \\ & \xrightarrow{s_0} & \\ X_{n+1}(p, q) & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n(p, q) \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array} \cdots \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_1} & \\ & \xrightarrow{s_0} & \\ X_2(p, q) & \xrightarrow{d_2} & X_1(p, q) \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array} \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ & \xrightarrow{d_1} & \\ X_1(p, q) & \xrightarrow{d_1} & X_0(p, q) \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \end{array}$$

Si  $p = q$  entonces  $X(p, p)$ , que será denotado solamente por  $X(p)$ , es un grupo simplicial llamado el grupo simplicial de automorfismos en  $p$ .

**2.1.1.** Si  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , para cada  $p \in O$  y cada  $n \geq 0$ , se define  $\pi_n(X, p) = \pi_n(X(p))$ , el  $n$ -ésimo grupo de homotopía del grupo simplicial de automorfismos en  $p$ , mientras que se define  $\pi(X)$  como  $\pi_0(X_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \rightarrow O \end{array}) = \pi_0(X_i \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \rightarrow O \end{array})$ .

El grupoide simplicial  $X$  se dice  $r$ -conexo cuando ocurre que  $\pi(X) = O$  y  $\forall p \in O$ ,  $\pi_n(X, p) = 0$ ,  $0 \leq n \leq r - 1$ . Se dice  $r$ -coconexo si  $\forall p \in O$ ,  $\pi_n(X, p) = 0$ ,  $n > r$ .

**2.1.2.** Como  $\mathbf{Gpd}$  es una categoría completa y co-completa, se tiene que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$  también lo es. Dado un funtor  $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , con  $\mathbf{I}$  una categoría pequeña, podemos considerarlo con rango  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$ , y por tanto calcular su límite y

colímite, que sabemos que se calcula punto a punto. Es fácil ver, usando que el codominio de  $D$  es  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y que tanto los límites como los colímites en  $\mathbf{Gpd}$  se calculan sobre objetos igual que en conjuntos (no depende del conjunto de morfismos, sino solamente de las aplicaciones que haya entre los objetos), que el límite y el colímite de  $D$  son objetos de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Deducimos entonces que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es completa y cocompleta y que los límites y colímites se calculan punto a punto.

**2.1.3.** Extenderemos a continuación a la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  la definición del funtor complejo de Moore en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (véase 1.3.10).

Dado  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , su complejo de Moore,  $N_*(X)$ , es el complejo de grupoides descrito en el diagrama siguiente

$$N_*X = \left( \begin{array}{ccccccc} \cdots & N_n X & \xrightarrow{\bar{d}_n} & N_{n-1} X & \cdots & N_2 X & \xrightarrow{\bar{d}_2} & N_1 X & \xrightarrow{\bar{d}_1} & N_0 X \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} \right)$$

donde  $N_n X \xrightarrow[s]{t} O = \text{Ker}(d_0) \cap \cdots \cap \text{Ker}(d_{n-1})$ ,  $N_0 X \xrightarrow[s]{t} O = X_0 \xrightarrow[s]{t} O$  y cada  $\bar{d}_n$  es la restricción del correspondiente  $d_n$ .

Nótese que, al ser los morfismos cara y de degeneración en  $X$  la identidad sobre objetos, para todo  $n \geq 1$  el grupoide  $N_n X \xrightarrow[s]{t} O$  es totalmente desconexo, es decir, es una unión disjunta de grupos indizada en el conjunto de objetos  $O$  (de hecho,  $N_n(X) = \bigvee_{p \in O} N_n(X(p))$ ).

En particular  $\bar{d}_n \bar{d}_{n+1}$  es siempre una identidad y, por tanto,  $N_*(X)$  es ciertamente un complejo de cadenas de grupoides sobre  $O$ . Si  $O = *$  es claro que esta construcción es justamente la del complejo de Moore de un grupo simplicial.

**2.1.4.** Supongamos que  $X_{tr}$  es un objeto de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  truncado en dimensión  $n$ , esto es,

$$X_{tr} = \left( \begin{array}{ccccccc} & & \overset{s_{n-1}}{\curvearrowright} & & \overset{s_1}{\curvearrowright} & & \overset{s_0}{\curvearrowright} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \cdots & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ O & \xlongequal{\quad} & O & \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} \right)$$

Su núcleo simplicial en dimensión  $n+1$  (1.3.3), denotado por  $\Delta^{n+1}(X_{tr})$ , es el grupoide cuyo conjunto de objetos es  $O$  y para cada  $p, q \in O$  el conjunto de morfismos es

$$\{(x_0, \cdots, x_{n+1}) \mid x_j \in X_n(p, q) \wedge d_i x_j = d_{j-1} x_i, 0 \leq i < j \leq n+1\}$$

## 2. Grupos simpliciales.

con  $s(x_0, \dots, x_{n+1}) = p$  y  $t(x_0, \dots, x_{n+1}) = q$ .

Definiendo los operadores cara por:  $d_i(x_0, \dots, x_{n+1}) = x_i$ ,  $0 \leq i \leq n+1$

y para cada  $x \in X_n(p, q)$ , las degeneraciones por:

$$- s_0(x) = (x, x, s_0 d_1 x, \dots, s_0 d_{n-1} x)$$

$$- s_1(x) = (s_0 d_0 x, x, x, s_1 d_2 x, \dots, s_1 d_{n-1} x)$$

...

$$- s_{n-1}(x) = (s_{n-2} d_0 x, s_{n-2} d_1 x, \dots, x, x)$$

$$- s_n(x) = (s_{n-1} d_0 x, s_{n-1} d_1 x, \dots, s_{n-1} d_{n-1} x, x)$$

se tiene un grupoide simplicial truncado en dimensión  $n+1$  que permite definir (ver 1.3.3) los funtores  $\text{cosk}^n : \text{Tr}^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y también  $\text{Cosk}^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Nótese que  $\Delta^{n+1}(X_{tr})(p) = \Delta^{n+1}(X(p)_{tr})$  así que  $(\text{Cosk}^{n+1}X)(p) = \text{Cosk}^{n+1}(X(p))$ . Por otro lado, dado que si  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ ,  $sk^n(X)$  se calcula haciendo colímites en  $\mathbf{Gpd}$  y que sobre objetos éstos se calculan como en conjuntos se tiene que  $sk^n(X) \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y, por tanto, la construcción del co-núcleo simplicial (ver 1.3.3) permite definir otro par de funtores  $sk^n : \text{Tr}^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $Sk^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , que son adjuntos por la izquierda, respectivamente, a los dados anteriormente.

A continuación definiremos los grupoides de homotopía asociados a un grupoide simplicial, y veremos la relación de los mismos con los grupos de homotopía definidos para los grupos simpliciales de automorfismos sobre cada uno de los objetos del grupoide simplicial dado.

**Definición 2.1.5.** Sea  $X$  un grupoide simplicial. Se define el grupoide de  $n$ -bordes como el grupoide cuyo conjunto de objetos es  $O$  y cuyo conjunto de morfismos es  $\overline{d_{n+1}}(N_{n+1}(X))$ , y lo denotaremos  $B_n(X) \xrightarrow[s]{t} O$ . Se define el grupoide de  $n$ -ciclos como el grupoide cuyo conjunto de objetos es  $O$  y cuyo conjunto de morfismos es  $\text{Ker}(\overline{d_n})$ , y lo denotaremos  $Z_n(X) \xrightarrow[s]{t} O$ . En ambos casos los morfismos  $s$ ,  $t$  e  $\text{Id}$  se definen de manera evidente.

Notemos que  $B_n(X) \xrightarrow[s]{t} O$  es un subgrupoide normal de  $Z_n(X) \xrightarrow[s]{t} O$ , lo que permite introducir la siguiente:

**Definición 2.1.6.** Sea  $X$  un grupoide simplicial. Para todo  $n \geq 0$ , se define el  $n$ -ésimo grupoide de homotopía de  $X$ ,  $\pi_n(X)$ , como el grupoide cociente del grupoide de  $n$ -ciclos sobre el grupoide de  $n$ -bordes, es decir,  $\pi_n(X) = ( \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \xrightarrow[s]{t} O )$ , donde  $\frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$  es  $Z_n(X)$

módulo la relación  $\equiv_{B_n(X)}$  definida como  $x \equiv_{B_n(X)} x'$  si existen  $y, y' \in B_n(X)$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ y \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow y' \\ & x' & \end{array}$$

es conmutativo.

**2.1.7.** Los grupos de automorfismos de estos grupoides de homotopía pueden ser identificados como sigue:

$\pi_0(X) = ( \frac{X_0}{B_0(X)} \xrightarrow[t]{s} O )$  y, puesto que  $B_0(X)$  sólo contiene automorfismos, dados  $x, x' : p \rightarrow p \in X_0$ , se tiene que  $x \equiv x'$  si y sólo si  $x'x^{-1} \in B_0(X)$ , y por tanto, para cada  $p \in O$  se verifica que el grupo de automorfismos del grupoide  $\pi_0(X)$  en el objeto  $p$  es  $\pi_0(X(p))$ .

Sean ahora  $x, x' : p \rightarrow p \in Z_n(X)$ . Es fácil ver que  $x \equiv x'$  si y sólo si  $x'x^{-1} \in B_n(X)$  y, por tanto se tiene que para cada  $p \in O$  y cada  $n \geq 1$ , el grupo de automorfismos del grupoide  $\pi_n(X)$  en  $p$  es  $\pi_n(X(p))$ .

Por último señalar que, puesto que para  $n \geq 1$  se verifica que  $N_n(X) = \bigvee_{p \in O} N_n(X(p))$ , se tiene que para todo  $n \geq 1$ ,  $\pi_n(X) \cong \bigvee_{p \in O} \pi_n(X(p))$  (ver 2.1.1).

Veamos ahora cuanto valen el complejo de Moore y los grupoides de homotopía del grupoide simplicial  $\text{Cosk}^n(X)$ .

**Proposición 2.1.8.** *Sea  $X$  un grupoide simplicial. Entonces:*

$$N_q(\text{Cosk}^n(X)) = \begin{cases} N_q(X) & \text{si } q \leq n \\ Z_n(X) & \text{si } q = n + 1 \\ O & \text{si } q \geq n + 2 \end{cases}$$

*Demostración:* En dimensión 0 es evidente. Para el resto basta tener en cuenta que se tienen las siguientes identificaciones

$$N_q(\text{Cosk}^n(X)) = \bigvee_{p \in O} N_q(\text{Cosk}^n(X))(p) = \bigvee_{p \in O} N_q(\text{Cosk}^n(X(p))), \quad 1 \leq q \leq n$$

$$Z_n(X) = \bigvee_{p \in O} (Z_n(X))(p) = \bigvee_{p \in O} Z_n(X(p)), \quad n \geq 1$$

así como el correspondiente resultado en grupos simpliciales (véase 1.3.10). ■

Como consecuencia se tiene:

## 2. Grupos simpliciales.

**Corolario 2.1.9.** Sea  $X$  un grupoide simplicial. Entonces:

$$\pi_q(\text{Cosk}^n(X)) = \begin{cases} \pi_q(X) & \text{si } q \leq n-1 \\ 0 & \text{si } q \geq n \end{cases}$$

A continuación estableceremos la noción de homotopía entre morfismos en la categoría  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

**Definición 2.1.10.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Una homotopía de  $f$  a  $g$ , que denotaremos  $\beta : f \simeq g$ , consiste en una aplicación  $\beta : \text{Obj}(X) \rightarrow Y_0$  tal que  $s\beta = f$  y  $t\beta = g$  junto con una familia de aplicaciones  $\beta_n^j : X_n \rightarrow Y_n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , verificando las siguientes relaciones:

$$a) d_0\beta_n^1(x) = g_{n-1}d_0(x) \circ s_0^{n-1}\beta s(x); d_n\beta_n^n(x) = s_0^{n-1}\beta t(x) \circ f_{n-1}d_n(x), \forall x \in X_n.$$

$$b) d_i\beta_n^j = \beta_{n-1}^{j-1}d_i \quad i < j,$$

$$d_i\beta_n^j = \beta_{n-1}^j d_i \quad i \geq j.$$

$$c) s_i\beta_n^j = \beta_{n+1}^{j+1}s_i \quad i < j,$$

$$s_i\beta_n^j = \beta_{n+1}^j s_i \quad i \geq j.$$

$$d) \text{Dados } p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r \in X_n, \beta_n^j(y \circ x) = \beta_n^j(y) \circ (s_0^n \beta t(x))^{-1} \circ \beta_n^j(x).$$

**Proposición 2.1.11.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces dar una homotopía de  $f$  a  $g$  es equivalente a dar una aplicación  $\alpha : \text{Obj}(X) \rightarrow Y_0$  tal que  $s\alpha = f$  y  $t\alpha = g$ , junto con una familia de aplicaciones  $\alpha_n^j : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ ,  $0 \leq j \leq n$ , verificando las siguientes relaciones:

$$a) s\alpha_n^j = fs, t\alpha_n^j = gt$$

$$b) d_0\alpha_n^0(x) = g_n(x) \circ s_0^n \alpha s(x); d_{n+1}\alpha_n^n(x) = s_0^n \alpha t(x) \circ f_n(x), \forall x \in X_n.$$

$$c) d_i\alpha_n^j = \alpha_{n-1}^{j-1}d_i, \quad i < j,$$

$$d_{j+1}\alpha_n^j = d_{j+1}\alpha_n^{j+1},$$

$$d_i\alpha_n^j = \alpha_{n-1}^j d_{i-1}, \quad i > j+1.$$

$$d) s_i\alpha_{n-1}^j = \alpha_n^{j+1}s_i, \quad i \leq j,$$

$$s_i\alpha_{n-1}^j = \alpha_n^j s_{i-1}, \quad i > j.$$

$$e) \text{Dados } p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r \in X_n, \alpha_n^j(y \circ x) = \alpha_n^j(y) \circ (s_0^{n+1} \alpha t(x))^{-1} \circ \alpha_n^j(x).$$

*Demostración:*

Supongamos que tenemos  $\alpha : f \simeq g$  una homotopía. Si definimos  $\beta : \text{Obj}(X) \rightarrow Y_0$  como  $\beta(p) = \alpha(p)$ ,  $\forall p \in \text{Obj}(X)$  y para cada  $1 \leq j \leq n$  las aplicaciones  $\beta_n^j : X_n \rightarrow Y_n$  como  $\beta_n^j = d_j \alpha_n^{j-1}$ , es rutinario comprobar que se verifican las condiciones dadas. Para demostrar el recíproco basta definir para cada  $p \in \text{Obj}(X)$   $\alpha(p) = \beta(p)$  y  $\alpha_n^j = \beta_{n+1}^{j+1} s_j$ ,  $0 \leq j \leq n$ . ■

A continuación veremos la relación que hay entre los morfismos inducidos en los grupoides de homotopía (ver 2.1.6) por dos morfismos que son homotópicos en  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Para ello haremos una consideración previa:

Dados  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y una homotopía  $\beta : f \simeq g$ , en particular se tiene para cada  $p \in \text{Obj}(X)$  un morfismo  $\beta(p) : f(p) \rightarrow g(p)$  (ver 2.1.10), y a partir de él consideramos el morfismo  $g_\beta : X \rightarrow Y$  definido por  $g_\beta(p) = f(p)$  y  $g_\beta(x) = s_0^n \beta t(x)^{-1} \circ g(x) \circ s_0^n \beta s(x)$ ,  $x \in X_n$ .

**Proposición 2.1.12.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Si existe una homotopía  $\beta : f \simeq g$  entonces  $\pi_n(f) = \pi_n(g_\beta)$ ,  $n \geq 0$ .

*Demostración:* Sea  $p \in \text{Obj}(X)$ . Consideremos la familia de morfismos de grupos  $\bar{\beta}_n^j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , donde cada  $\bar{\beta}_n^j : X_n(p) \rightarrow Y_n(f(p))$  es la composición  $\bar{\beta}_n^j = s_0^n \beta(p)^{-1} \circ \beta_n^j$ . Es rutinario comprobar que la familia de morfismos en  $\text{Simp}(\mathbf{Gp})$  así definida determina una homotopía de grupos simpliciales,  $\bar{\beta}$ , entre los morfismos  $f_p$  y  $(g_\beta)_p$ . Por tanto, para cada  $n \geq 0$  se tiene que  $\pi_n(f_p) = \pi_n((g_\beta)_p)$ , de donde, considerando las identificaciones dadas en 2.1.7 se sigue que para cada  $n \geq 1$ ,  $\pi_n(f) = \pi_n(g_\beta)$ .

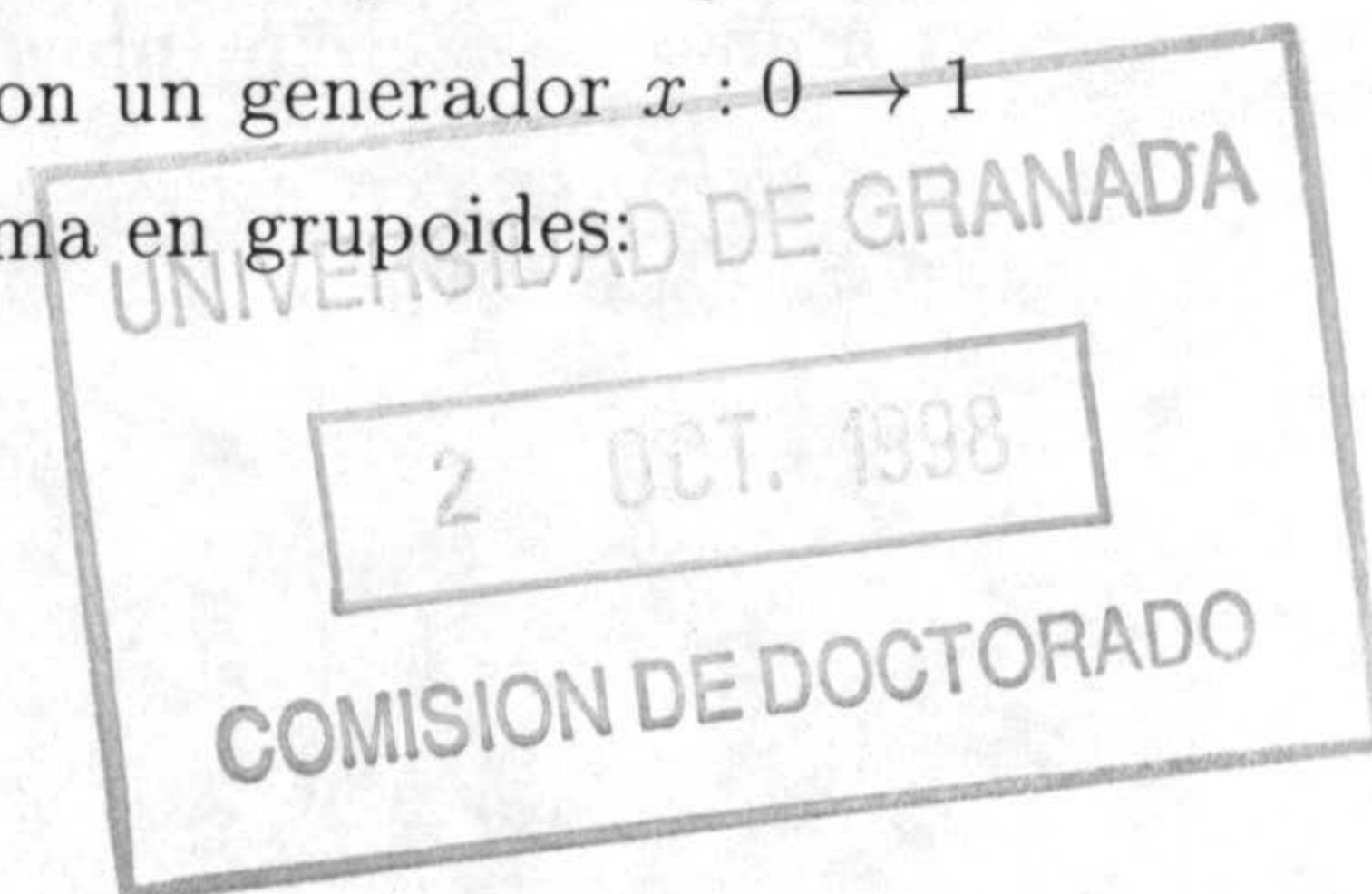
Para demostrar que  $\pi_0(f) = \pi_0(g_\beta)$  hemos de comprobar (ver 2.1.6) que para cada  $x : p \rightarrow q \in X_0$  existen  $y, y' \in B_0(Y)$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f(p) & \xrightarrow{f(x)} & f(q) \\ y \downarrow & & \downarrow y' \\ f(p) & \xrightarrow{g_\beta(x)} & f(q) \end{array}$$

Si consideramos ahora  $\bar{y} = s_0 \beta(p)^{-1} \circ s_0 g(x)^{-1} \circ \beta_1^1(s_0 x) \in Y_1(f(p))$  se tiene que  $d_0(\bar{y}) = Id_{f(p)}$  y  $d_1(\bar{y}) = \beta(p)^{-1} \circ g(x)^{-1} \circ \beta(q) \circ f(x)$ . Así los morfismos  $y = \beta(p)^{-1} \circ g(x)^{-1} \circ \beta(q) \circ f(x)$  e  $y' = Id_{f(q)}$  cumplen las condiciones requeridas. ■

**2.1.13.** Sea ahora  $K_\bullet$  un conjunto simplicial no vacío. Se define el grupoide libre sobre  $K_\bullet$ ,  $FK_\bullet$ , (véase [25]), como el grupoide simplicial cuyo conjunto de objetos es  $\{0, 1\}$  y, para cada dimensión,  $(FK_\bullet)_n \xrightarrow[s]{t} \{0, 1\}$  es el grupoide libre con un generador  $x : 0 \rightarrow 1$  para cada  $x \in K_n$ . Es decir, si consideramos el siguiente diagrama en grupoides:

$$\left\{ * \amalg * \xrightarrow{f_x} \mathcal{I} \right\}_{x \in K_n}$$



## 2. Grupos simpliciales.

en el que  $f_x$  es el funtor que asigna a los dos objetos de  $*\amalg*$  los objetos "0" y "1" respectivamente del grupoide  $\mathcal{I}$ ,  $(FK_\bullet)_n \xrightarrow[t]{s} O$  es el colímite del anterior diagrama.

Los operadores cara y degeneración están inducidos por los de  $K_\bullet$ .

Denotaremos también por  $F \overset{\bullet}{\Delta} [0]$  al grupoide simplicial con dos objetos y las identidades sobre cada uno de ellos y  $F\Delta[0,0]$  al grupoide simplicial con un solo objeto, y sólo la identidad.

Se tiene así definido un funtor

$$F : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$$

Notemos que para  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , dar un morfismo  $f : FK_\bullet \rightarrow X$  es equivalente a dar dos objetos  $p, p'$  de  $X$  que estén en la misma componente (salvo que  $K_\bullet$  sea el conjunto simplicial vacío) y una aplicación simplicial  $K_\bullet \rightarrow X(p, p')$ .

**2.1.14.** Recordemos que un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de grupos simpliciales se dice que es una aplicación libre (véase [25]) si:

i)  $f$  es inyectivo en objetos y en morfismos.

ii) Existe un subconjunto  $V$  de morfismos de  $Y$ , llamado base, cerrado para degeneraciones, de manera que todo morfismo del grupoide simplicial  $Y$  se expresa de forma única como composición reducida de elementos que están en la imagen de  $f$ , de morfismos de  $V$  y sus inversos, donde reducida quiere decir que no aparezcan seguidos dos morfismos que estén en la imagen de  $f$ , ni un morfismo y su inverso.

Un grupoide simplicial  $X$  se dice que es libre si el morfismo  $\emptyset \rightarrow X$  es una aplicación libre.

Nótese que si  $p_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  es una aplicación simplicial inyectiva de conjuntos simpliciales el morfismo inducido en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$   $F(p_\bullet) : FK_\bullet \rightarrow FL_\bullet$ , es una aplicación libre en la que una base de  $FL_\bullet$  es el conjunto formado por aquellos generadores  $x : 0 \rightarrow 1$  que se corresponden con simplices que no están en la imagen de  $p_\bullet$ . Como caso particular de este hecho, se tiene que los morfismos de grupos simpliciales  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ , y  $F \overset{\bullet}{\Delta} [n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ , son aplicaciones libres.

**2.1.15.** Los grupos simpliciales aparecen también asociados a conjuntos simpliciales  $K_\bullet$  mediante la construcción del llamado "grupoide simplicial de lazos",  $GK_\bullet$ , debida a Dwyer-Kan (véase [25]). Este grupoide simplicial  $GK_\bullet$  es aquel que tiene como objetos el conjunto  $K_0$ , y en dimensión  $n$ ,  $(GK_\bullet)_n \xrightarrow[t]{s} K_0$  es el grupoide libre con un generador  $\bar{x} : d_0 d_2 \dots d_{n+1} x \rightarrow d_1 d_2 \dots d_{n+1} x$  para cada  $x \in K_{n+1}$ , con las relaciones  $\overline{s_0 x} = Id_{d_1 \dots d_n x}$  para cada  $x \in K_n$ . Los operadores cara están definidos por

$$d_0 \bar{x} = \overline{d_1 x} \cdot (\overline{d_0 x})^{-1} \quad d_i(\bar{x}) = \overline{d_{i+1} x}, \quad i \geq 1$$



y las degeneraciones por

$$s_i \bar{x} = \overline{s_{i+1} x}, \quad i \geq 0.$$

En sentido inverso, cada grupoide simplicial  $X$  tiene asociado un conjunto simplicial,  $\overline{WX}$ , su "complejo clasificador", definido como sigue (véase [25]):

$$- (\overline{WX})_0 = O$$

$$\begin{aligned} - (\overline{WX})_n &= X_{n-1} \underset{s}{\times} X_{n-2} \underset{s}{\times} \dots \underset{s}{\times} X_1 \underset{s}{\times} X_0 = \\ &= \left\{ (g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) / \begin{array}{l} g_i \in X_i \\ s(g_{i+1}) = t(g_i) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Es decir,  $(\overline{WX})_n$  es el conjunto de sucesiones de morfismos

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$$

donde  $g_i \in X_i$ .

- Los operadores cara están definidos:

$$d_0(g_{n-1}, \dots, g_0) = (g_{n-2}, \dots, g_1, g_0)$$

$$d_i(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{i-1}g_{n-1}, \dots, d_1g_{n-i+1}, d_0g_{n-i} \cdot g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \dots, g_0)$$

$$d_n(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{n-1}g_{n-1}, \dots, d_2g_2, d_1g_1)$$

es decir, si  $A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$  es un elemento de  $(\overline{WX})_n$ , su imagen por  $d_0$  es

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-3}} A_{n-2} \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1}$$

por  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \dots A_{n-i-2} \xrightarrow{g_{n-i-2}} A_{n-i-1} \xrightarrow{d_0g_{n-i}g_{n-i-1}}$$

$$\xrightarrow{d_0g_{n-i}g_{n-i-1}} A_{n-i+1} \xrightarrow{d_1g_{n-i+1}} A_{n-i+2} \dots A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$$

y por  $d_n$

$$A_1 \xrightarrow{d_1g_1} A_2 \xrightarrow{d_2g_2} \dots \xrightarrow{d_{n-2}g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}g_{n-1}} A_n$$

- Las degeneraciones:

$$s_0(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (Id_{t_{g_{n-1}}}, g_{n-1}, \dots, g_1, g_0)$$

$$s_i(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (s_{i-1}g_{n-1}, \dots, s_0g_{n-i}, Id_{s_{g_{n-i}}}, g_{n-i-1}, \dots, g_0)$$

es decir, la imagen de  $A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$  por  $s_0$  es

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n \xrightarrow{Id_{A_n}} A_n$$

## 2. Grupos simpliciales.

y por  $s_i$

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & \xrightarrow{g_0} & A_1 & \cdots & A_{n-i-1} & \xrightarrow{g_{n-i-1}} & A_{n-i} \xrightarrow{Id_{A_{n-i}}} \\ & & & & & & \xrightarrow{Id_{A_{n-i}}} A_{n-i} \xrightarrow{s_0 g_{n-i}} & A_{n-i+1} \cdots & A_{n-1} \xrightarrow{s_i g_{n-1}} & A_n \end{array}$$

Las construcciones  $G$  y  $\overline{W}$  son functoriales y de hecho se tiene:

**Proposición 2.1.16.** *El functor  $G : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es adjunto por la izquierda al functor  $\overline{W}$ .*

*Demostración:* Definiremos únicamente las biyecciones

$$\phi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*}(GK_\bullet, X) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, \overline{W}X)$$

$$\psi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, \overline{W}X) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*}(GK_\bullet, X)$$

para cada  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y cada  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Sean  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ ,  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $f : GK_\bullet \rightarrow X$ .

$$(\phi(f))_n(k) = (f_{n-1}(\overline{x}), f_{n-2}(\overline{d_0 x}), \dots, f_0(\overline{d_0^{n-1} x}), n \geq 1$$

$(\phi(f))_0$  se define de manera obvia.

Sea ahora  $h : K_\bullet \rightarrow \overline{W}X$ . Entonces definimos  $\psi(h)$ :

- Sobre objetos se define como  $h_0$
- Sobre morfismos

$$(\psi(h))_n(\overline{x}) = g_n$$

donde  $g_n$  es la primera coordenada de  $h_{n+1}(x)$ . ■

## 2.2 La estructura de modelos en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

En esta sección haremos explícita la demostración de que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es una categoría de modelos cerrada con la estructura propuesta por Dwyer-Kan en [25], que recogemos en la siguiente:

**Definición 2.2.1.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Se dice que:*

i)  *$f$  es una fibración si:*

a) *Para cualesquiera  $p \in \mathit{Obj}(X)$  y  $b : f(p) \rightarrow q \in Y_0(f(p), q)$ , existe  $a \in X_0(p, p')$*

tal que  $f(a) = b$  (esto es si  $\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array}$  es una fibración de grupoides).

b) Para cualquier  $p \in \text{Obj}(X)$  el morfismo inducido  $X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una fibración de grupos simpliciales.

ii)  $f$  es una equivalencia débil si:

a)  $f$  induce una biyección entre las componentes de  $X$  y las de  $Y$ , es decir,

$$\pi(X) \stackrel{\pi(f)}{\cong} \pi(Y).$$

b) Para cualquier  $p \in \text{Obj}(X)$ , el morfismo inducido  $X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.

iii)  $f$  es una cofibración si es un retracts de una aplicación libre.

Las equivalencias débiles inyectivas en objetos pueden ser caracterizadas en términos de los grupoides de homotopía definidos en 2.1.6 como sigue:

**Proposición 2.2.2.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  inyectivo en objetos. Entonces  $f$  es una equivalencia débil si y sólo si el morfismo inducido en el conjunto de componentes conexas,  $\pi(f) : \pi(X) \rightarrow \pi(Y)$  es una biyección y para cada  $n \geq 0$  el funtor  $\pi_n(f) : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  es pleno y fiel.

*Demostración:*

Supongamos que  $f$  es una equivalencia débil. Tenemos que demostrar que dados  $p, q \in \text{Obj}(X)$  la aplicación inducida entre los conjuntos  $\text{Hom}_{\pi_n(X)}(p, q) \rightarrow \text{Hom}_{\pi_n(Y)}(f(p), f(q))$  es biyectiva para cada  $n \geq 0$ .

Supongamos  $n = 0$ . Según vimos en 1.2.3 si  $p$  y  $q$  están en la misma componente conexa se tiene que los conjuntos  $\text{Hom}_{\pi_0(X)}(p, q)$  y  $\text{Hom}_{\pi_0(X)}(p)$  son biyectivos, así como los conjuntos  $\text{Hom}_{\pi_0(Y)}(f(p), f(q))$  y  $\text{Hom}_{\pi_0(Y)}(f(p))$ . Basta tener en cuenta que  $\text{Hom}_{\pi_0(X)}(p) \cong \pi_0(X(p))$  y que  $\text{Hom}_{\pi_0(Y)}(f(p)) \cong \pi_0(Y(f(p)))$  y que para cada  $p \in \text{Obj}(X)$  el correspondiente morfismo de grupos simpliciales  $\pi_0(f_p) : \pi_0(X(p)) \rightarrow \pi_0(Y(f(p)))$  es un isomorfismo.

Si  $n \geq 1$  el conjunto de morfismos  $\text{Hom}_{\pi_n(X)}(p, q)$  es vacío si  $p \neq q$  y, por ser  $f$  inyectivo en objetos, también lo es cada uno de los conjuntos  $\text{Hom}_{\pi_n(Y)}(f(p), f(q))$ . Si  $p = q$ , al igual que en el caso anterior, sólo hemos de tener en cuenta las identificaciones de los grupos de automorfismos de cada uno de los grupoides de homotopía dadas en 2.1.7, así como que en cada uno de dichos ellos el morfismo inducido es un isomorfismo de grupos.

Para demostrar el recíproco basta atender al significado de que el funtor  $\pi_n(f) : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  sea pleno y fiel para  $p = q$  así como 2.1.7. ■

**Lema 2.2.3.** Sea  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $f : X \rightarrow X$ . Si existe una homotopía  $\alpha : f \simeq 1_X$  con  $\alpha(p) = \text{Id}_p \quad \forall p \in \text{Obj}(X)$  entonces  $f$  es una equivalencia débil.

*Demostración:* Es claro que sólo hay que probar que  $\forall p \in \text{Obj}(X)$  el morfismo inducido  $f_p : X(p) \rightarrow X(p)$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales. Ahora, la hipótesis

## 2. Grupos simpliciales.

sobre la homotopía  $\alpha$  dan justamente (véase 1.3.5) una homotopía entre los morfismos de grupos simpliciales  $f_p$  y  $1_{X(p)}$  así que,  $\forall p \in \text{Obj}(X)$ ,  $f_p$  es, como se requería, una equivalencia débil. ■

Para encontrar caracterizaciones de las fibraciones y las fibraciones triviales es conveniente ver precisamente en que se traduce que un morfismo de grupoides simpliciales tenga la RLP respecto de algunas familias particulares de morfismos.

**2.2.4.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Atendiendo a la definición del funtor  $F$  (ver 2.1.13) y de los conjuntos simpliciales implicados es fácil ver que:

- El morfismo  $f$  tiene la RLP respecto a cualquiera de las inclusiones  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F\Delta[0]$  si y sólo si para cada objeto  $p$  de  $X$ , y cada morfismo  $b \in Y_0(f(p), q)$  existe un morfismo

$$a \in X_0(p, p') \text{ tal que } f(a) = b, \text{ esto es si } \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ s \downarrow & & s \downarrow \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array} \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \text{ es una fibración de grupoides.}$$

- El morfismo  $f$  tiene la RLP respecto a  $F\overset{\bullet}{\Delta}[0] \hookrightarrow F\Delta[0]$  si y sólo si para cada  $p, p' \in \text{Obj}(X)$ , y cada  $b \in Y_0(f(p), f(p'))$  existe un morfismo  $a \in X_0(p, p')$  tal que  $f(a) = b$ .
- El morfismo  $f$ , con  $X \neq \emptyset$ , tiene la RLP respecto a cualquiera de las inclusiones  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[0]$  si y sólo si es sobreyectivo en objetos.
- El morfismo  $f$  tiene la RLP respecto a la familia de morfismos  $F\Delta[n,k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $1 \leq k \leq n$ , si y sólo si para cada  $p, p' \in O$  y cada sucesión de  $n$  elementos  $a_0, a_1, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_n \in X_{n-1}(p, p')$  verificando  $d_i a_j = d_{j-1} a_i$ ,  $i < j$ ,  $i, j \neq k$  y cada morfismo  $b \in Y_n(f(p), f(p'))$  tal que  $d_i b = f(a_i)$  existe un morfismo  $a \in X_n(p, p')$  tal que  $f(a) = b$  y  $d_i a = a_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ .
- El morfismo  $f$  tiene la RLP respecto a la familia de morfismos  $F\overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 1$ , si y sólo si para cada  $p, p' \in O$  y cada sucesión de  $n+1$  elementos  $a_0, a_1, \dots, a_n \in X_{n-1}(p, p')$  verificando  $d_i a_j = d_{j-1} a_i$ ,  $i < j$  y cada morfismo  $b \in Y_n(f(p), f(p'))$  tal que  $d_i b = f(a_i)$  existe un morfismo  $a \in X_n(p, p')$  tal que  $f(a) = b$  y  $d_i a = a_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Caracterizamos a continuación las fibraciones de grupoides simpliciales en los siguientes términos:

**Proposición 2.2.5.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Son equivalentes:

i)  $f$  es una fibración.

ii)  $f$  tiene la RLP respecto de  $F\Delta[n,k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 0$

iii) El morfismo 
$$\begin{array}{ccc} N_q(X) & \xrightarrow{N_q(f)} & N_q(Y) \\ s \downarrow \downarrow t & & s \downarrow \downarrow t \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array}$$
 es una fibración de grupoides para todo  $q \geq 0$ .

*Demostración:*

$i) \Rightarrow ii)$  La primera condición de fibración dice, como hemos notado en 2.2.4 que  $f$  tiene la RLP respecto a  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F\Delta[0]$ . Si  $n \geq 0$ , utilizando de nuevo 2.2.4, hemos de probar que dados  $a_0, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_n \in X_{n-1}(p, p')$  con  $d_i a_j = d_{j-1} a_i$ ,  $i < j$ ,  $i, j \neq k$  y dado un morfismo  $b \in Y_n(f(p), f(p'))$  tal que  $d_i b = f(a_i)$ , existe  $a \in X_n(p, p')$  tal que  $f(a) = b$  y  $d_i a = a_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ . Ahora, por ser  $f_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))$  una fibración de grupos simpliciales para cualquier  $p \in O$ , es una fibración de Kan lo cual es equivalente a que dados  $a'_0, a'_1, \dots, \hat{a}'_k, \dots, a'_n$   $n$  elementos cualesquiera en  $X_{n-1}(p)$  verificando que  $d_i a'_j = d_{j-1} a'_i$ ,  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , y dado un morfismo  $b' \in Y_n(f(p))$  tal que  $d_i b' = f(a'_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ , existe  $a' \in X_n(p)$  verificando  $f(a') = b'$  y  $d_i a' = a'_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ . Si elegimos ahora un morfismo  $\alpha \in X_n(p, p')$  (basta tomar, por ejemplo,  $\alpha = s_0 a_0$  y tomamos para cada  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ ,  $a'_i = (d_i \alpha) a_i \in X_{n-1}(p)$ , se tiene que si llamamos  $b' = f(\alpha) \circ b \in Y_n(f(p))$ , se cumplen las condiciones expuestas anteriormente:

$$d_i a'_j = d_i (d_j \alpha \circ a_j) = d_i d_j \alpha \circ d_i a_j = d_{j-1} d_i \alpha \circ d_{j-1} a_i = d_{j-i} a'_i.$$

$$d_i b' = d_i (f(\alpha) \circ b) = f(d_i \alpha) \circ d_i b = f(d_i \alpha) \circ f(a_i) = f(a'_i).$$

Por tanto, existe  $a' \in X_n(p)$  verificando que, para cada  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ ,  $d_i a' = a'_i$  y  $f(a') = b'$ . Veamos que  $a = \alpha^{-1} \circ a'$  es el morfismo buscado:

$$d_i a = d_i (\alpha^{-1}) \circ d_i a' = (d_i \alpha)^{-1} \circ d_i a' = (d_i \alpha)^{-1} \circ a'_i = (d_i \alpha)^{-1} \circ d_i \alpha \circ a_i = a_i.$$

$$f(a) = f(\alpha^{-1} \circ a') = f(\alpha)^{-1} \circ b' = f(\alpha)^{-1} \circ f(\alpha) \circ b = b.$$

$ii) \Rightarrow i)$  Que  $f$  tenga la RLP respecto a  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F\Delta[0]$  implica como hemos notado en 2.2.4 la primera condición de fibración. La segunda condición se deduce (véase 2.2.4) de lo que significa que  $f$  tenga la RLP respecto a la familia de morfismos  $F\Delta[n,k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 1$ , tomando  $p = p' \in O$ .

$i) \Leftrightarrow iii)$  La primera condición de fibración dice justamente que el morfismo

$$\begin{array}{ccc} N_0(X) = X_0 & \xrightarrow{N_0(f)} & N_0(Y) = Y_0 \\ s \downarrow \downarrow t & & s \downarrow \downarrow t \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array}$$

es una fibración de grupoides. La segunda condi-

ción es equivalente (véase [56]) a que para cada  $p \in O$  y cada  $q \geq 1$ , el morfismo inducido en los complejos de Moore de los grupos simpliciales de automorfismos  $N_q(f_p) : N_q(X(p)) \rightarrow N_q(Y(f(p)))$ , sea sobreyectivo y por lo tanto, dados  $p \in O$  y  $b : f(p) \rightarrow f(p) \in N_q(Y(f(p)))$  existe  $a : p \rightarrow p$  verificando  $(N_q(f))(a) = b$ , lo cual es

equivalente a que el morfismo 
$$\begin{array}{ccc} N_q(X) & \xrightarrow{N_q(f)} & N_q(Y) \\ s \downarrow \downarrow t & & s \downarrow \downarrow t \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array}$$
 sea una fibración de grupoides para

## 2. Grupos simpliciales.

$q \geq 1$ , puesto que en tal caso se tiene que  $N_q(X) \cong \bigvee_{p \in O} N_q(X(p))$ . ■

**Proposición 2.2.6.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces  $f$  es una fibration trivial si y sólo si tiene la RLP respecto de  $F \overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$  y de  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta}[0]$ .*

*Demostración:*

Supongamos que  $f$  es una fibration trivial. Veamos en primer lugar la segunda condición que, según observamos en 2.2.4 es equivalente a que  $f$  sea sobreyectivo en objetos. Sea  $q \in \text{Obj}(Y)$ ; como  $f$  es una equivalencia débil induce una biyección entre las componentes de  $X$  y las de  $Y$  que en particular es sobreyectiva, luego  $q$  está en una componente de  $Y$  que es imagen por  $f$  de una componente de  $X$ , es decir, existe  $p \in \text{Obj}(X)$  y un morfismo  $b : f(p) \rightarrow q$ . Por otro lado como  $f$  es una fibration existe  $a \in X_0(p, p')$  tal que  $f(a) = b$  y por tanto  $f(p') = q$ . Veamos ahora que  $f$  tiene la RLP respecto de  $F \overset{\bullet}{\Delta}[0] \hookrightarrow F\Delta[0]$ , para lo cual utilizamos de nuevo 2.2.4. Para ello sean  $p, p' \in \text{Obj}(X)$  y  $b \in Y_0(f(p), f(p'))$ ; como  $f(p)$  y  $f(p')$  están en la misma componente también lo están  $p$  y  $p'$ , existe pues  $a' \in X_0(p, p')$  con  $f(a')^{-1} \circ b \in Y_0(f(p), f(p))$ . Pero por ser  $f_p : X_0(p) \rightarrow Y_0(f(p))$  una fibration de grupos simpliciales existe  $\alpha \in X_0(p)$  tal que  $f(\alpha) = f(a')^{-1} \circ b$ . Sea  $a = a' \circ \alpha \in X_0(p, p')$ ; se tiene que  $f(a) = f(a') \circ f(\alpha) = f(a') \circ f(a')^{-1} \circ b = b$ . La demostración de que el morfismo  $f$  tiene la RLP respecto de  $F \overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 1$  es análoga a la realizada para las fibraciones en la proposición 2.2.5.

Recíprocamente, al ser  $f$  sobreyectiva en objetos induce una aplicación sobreyectiva entre las componentes de  $X$  y las de  $Y$ . Por otro lado, al tener  $f$  la RLP respecto de  $F \overset{\bullet}{\Delta}[0] \hookrightarrow F\Delta[0]$ , dados  $p, p' \in \text{Obj}(X)$  tal que  $f(p)$  y  $f(p')$  están en la misma componente se tiene que  $p$  y  $p'$  están en la misma componente de  $X$  y por tanto  $f$  induce una aplicación inyectiva entre las componentes de  $X$  y las de  $Y$ . Como  $f$  tiene la RLP respecto de  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta}[0]$  y de  $F \overset{\bullet}{\Delta}[0] \hookrightarrow F\Delta[0]$ , entonces  $f$  tiene la RLP respecto de  $F\Delta[0,0] \hookrightarrow F\Delta[0]$ , así que, de acuerdo con 2.2.4, se tiene la primera condición de fibration. Por último, la comprobación de que para todo  $p \in \text{Obj}(X)$ ,  $f_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una fibration trivial de grupos simpliciales se deduce (véase 2.2.4) de lo que significa que  $f$  tenga la RLP respecto a la familia de morfismos  $F \overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 1$ . ■

Las fibraciones triviales de grupos simpliciales, inyectivas en objetos, pueden ser caracterizadas utilizando el complejo de Moore y los grupos de homotopía como sigue:

**Proposición 2.2.7.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  inyectivo en objetos. Entonces  $f$  es una fibration trivial si y sólo si  $\pi(X) \xrightarrow{\pi(f)} \pi(Y)$ , el morfismo inducido*

$$\begin{array}{ccc} N_q(X) & \xrightarrow{N_q(f)} & N_q(Y) \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ O & \xrightarrow{f} & O' \end{array} \quad \text{es una fibración de grupoides y } \pi_q(\mathit{Ker}f) = (O = O), \text{ para todo } q \geq 0.$$

*Demostración:*

Si  $f$  es una fibración trivial y utilizando la proposición 2.2.5 sólo queda probar que para cada  $q \geq 0$  se tiene que  $\pi_q(\mathit{Ker}f) = (O = O)$ . Ahora, es claro que  $\forall p \in \mathit{Obj}(X)$ ,  $(\mathit{Ker}f)(p) = \mathit{Ker}(f_p)$  y entonces para  $q \geq 1$  se tiene que  $\pi_q(\mathit{Ker}f) = \bigvee_{p \in O} \pi_q[(\mathit{Ker}f)(p)] = \bigvee_{p \in O} \pi_q[\mathit{Ker}(f_p)] = (O = O)$  habiendo tenido en cuenta (véase [56]) que al ser  $f_p : X(p) \rightarrow Y(p)$  una fibración trivial de grupos simpliciales se tiene que  $\pi_q[(\mathit{Ker}f)(p)] = 0$  para todo  $q \geq 0$ . En cuanto a  $\pi_0(\mathit{Ker}f)$  notemos que al ser  $f$  inyectivo en objetos  $\mathit{Ker}f_0$  sólo tiene automorfismos y  $\mathit{Ker}f_0 = \bigvee_{p \in O} (\mathit{Ker}f_0)(p)$  así que en este caso el razonamiento anterior también es válido.

Recíprocamente, utilizando de nuevo la proposición 2.2.5, sólo resta probar que  $\forall p \in \mathit{Obj}(X)$  el morfismo de grupoides simpliciales  $f_p : X(p) \rightarrow Y(p)$  es una fibración trivial lo que es equivalente (véase [56]) a que para cada  $q \geq 0$ ,  $N_q(f_p) : N_q(X(p)) \rightarrow N_q(Y(p))$  sea sobreyectivo y  $\pi_q[(\mathit{Ker}f)(p)] = 0$ . Como  $f_p$  es fibración la sobreyectividad se tiene para  $q > 0$  y para  $q = 0$  es consecuencia de ser  $f$  inyectivo en objetos. Por otro lado,  $\pi_q(\mathit{Ker}f) = \bigvee_{p \in O} \pi_q[(\mathit{Ker}f)(p)] = \bigvee_{p \in O} \pi_q[\mathit{Ker}(f_p)] = (O = O)$  (nótese que para  $q = 0$  también es cierto por ser  $f$  inyectivo en objetos) de donde  $\pi_q[\mathit{Ker}(f_p)] = O$ , para todo  $q \geq 0$ . ■

En orden a probar ya que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  con las definiciones anteriormente dadas de fibración, cofibración y equivalencia débil es una categoría de modelos cerrada, demostramos la siguiente:

**Proposición 2.2.8.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , entonces  $f$  tiene la LLP respecto de la familia de las fibraciones triviales.*

*Demostración:* Hemos de probar que en cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & G \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{v} & H \end{array}$$

con  $g$  una fibración trivial de grupoides simpliciales, existe un levantamiento.

Supongamos que  $f$  es una aplicación libre; basta entonces definir el levantamiento sobre los elementos que están en la imagen de  $f$  y sobre los elementos de la base de  $f$ , que notaremos  $V$ . Comencemos por definirlo sobre objetos: Sea  $q \in \mathit{Obj}(Y)$ , si  $q = f(p)$  con

## 2. Grupoides simpliciales.

$p \in \text{Obj}(X)$  definimos  $h(q) = u(p)$  (nótese que por ser  $f$  inyectiva en objetos  $h$  está bien definido). Si  $q \notin f(X)$  consideramos  $v(q) \in \text{Obj}(H)$  y, por ser el morfismo  $g$  una fibración trivial, en particular es sobreyectivo en objetos y por lo tanto, existe  $g_q \in \text{Obj}(G)$  tal que  $g(g_q) = v(q)$  en cuyo caso definimos  $h(q) = g_q$ . Sea ahora  $y : q \rightarrow q'$  un morfismo en  $Y$ . Si  $y = f(x) \in Y_n$ , definimos  $h(y) = u(x)$  (está bien definida por ser  $f$  inyectiva en morfismos). Supongamos ahora que  $y \in V$ . Comenzaremos definiendo  $h$  en dimensión 0: si  $y \in V_0 \subset Y_0$  y consideramos  $v_0(y) : g_0(h(q)) \rightarrow g_0(h(q'))$ , por ser  $g$  una fibración trivial existe un morfismo  $a : h(q) \rightarrow h(q') \in G_0$  verificando  $g_0(a) = v_0(y)$ . Definimos  $h_0(y) = a$ . Si  $y \in V_n$  con  $n \geq 1$  distinguiremos dos casos:

i) Si  $y$  es un símplice degenerado, es decir  $y = s_j y'$  para algún  $y' \in Y_{n-1}$ , definimos  $h_n(y) = s_j h_{n-1}(y')$ .

ii) Si  $y$  no es degenerado, construimos el morfismo  $h$  por inducción de forma que  $d_i h_n = h_n d_i$  con  $0 \leq i \leq n$ . Para  $n=0$  ya está definido y supongámoslo construído hasta la dimensión  $n-1$ . Dado  $y \in V_n$  consideremos los morfismos  $a_i = h_{n-1}(d_i y)$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Veamos que verifican  $d_i a_j = d_{j-1} a_i$ ,  $0 \leq i < j \leq n$ , para ello usaremos las identidades simpliciales, así como que por hipótesis se tiene que  $d_i h_{n-1} = h_{n-1} d_i$ :

$$d_i a_j = d_i(h_{n-1}(d_j y)) = h_{n-2}(d_i(d_j y)) = h_{n-2}(d_{j-1}(d_i y)) = d_{j-1}(h_{n-1}(d_i y)) = d_{j-1} a_i$$

Si consideramos ahora el morfismo  $v_n(y) \in H_{n-1}(v(q), v(q'))$ , se tiene que

$$g_{n-1} \circ a_i = g_{n-1} \circ h_{n-1}(d_i y) = g_{n-1} \circ d_i(h_n(y)) = d_i g_n \circ h_n(y) = d_i v_{n-1}(y)$$

puesto que  $g$  es una fibración trivial y teniendo en cuenta 2.2.4, existe  $a \in G_n(g_q, g_{q'})$  verificando que  $g_n(a) = v_n(y)$  y  $d_i a = a_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Definimos  $h_n(y) = a$ . Se verifica entonces que  $d_i h_n(y) = d_i a = a_i = h_{n-1}(d_i y)$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

El morfismo  $h : Y \rightarrow G$  así definido es, por tanto, una aplicación simplicial que verifica  $hf = u$  y  $gh = v$  como se requería. ■

**Lema 2.2.9.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una cofibración trivial de grupoides simpliciales, entonces  $\forall p \in \text{Obj}(X)$  el morfismo inducido  $X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una cofibración trivial de grupos simpliciales.

*Demostración:* Por definición se tiene que, para cada  $p \in \text{Obj}(X)$  el morfismo inducido, que notaremos  $f_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales, así hemos de probar únicamente que dicho morfismo es una cofibración de grupos simpliciales lo cual es equivalente a encontrar un levantamiento en cada diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{array}{ccc} X(p) & \longrightarrow & G \\ f_p \downarrow & \nearrow k & \downarrow g \\ Y(f(p)) & \longrightarrow & H \end{array} \quad (*)$$

donde  $g : G \rightarrow H$  una fibración trivial de grupos simpliciales. Para ello fijemos un objeto  $p$  y consideremos el diagrama de grupoides simpliciales



$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X(p) \\ f \downarrow & & \downarrow f_p \\ Y & \xrightarrow{h} & Y(f(p)) \end{array} \quad (**)$$

donde el morfismo  $i : X \rightarrow X(p)$  está definido:

- Dado  $q \in \text{Obj}(X)$ ,  $i(q) = p$ .
- Dado  $x : q \rightarrow r \in X_n$ , si  $p$  y  $q$  están en distinta componente definimos  $i(x) = Id_p$ . En caso contrario comenzaremos definiéndolo en dimensión 0, es decir, supongamos que  $x \in X_0$ , como  $q$  y  $r$  están en la misma componente elegimos un morfismo  $\alpha_q : p \rightarrow q \in X_0$  ( $\alpha_p = Id_p$ ), definimos  $i(x) = \alpha_r^{-1} \circ x \circ \alpha_q$ . Si  $x \in X_n$ ,  $i(x) = s_0^n(\alpha_r^{-1}) \circ x \circ s_0^n(\alpha_q)$ .

y el morfismo  $h : Y \rightarrow Y(f(p))$  se define como:

- Dado  $q' \in \text{Obj}(Y)$ ,  $h(q') = f(p)$ .
- Dado  $y : q' \rightarrow r' \in Y_n$ , si  $q'$  y  $f(p)$  están en distinta componente definimos  $h(y) = Id_{f(p)}$ . En caso contrario, supongamos en primer lugar que  $y \in Y_0$ . Elegimos un morfismo  $\alpha_{q'} : f(p) \rightarrow q' \in Y_0$  (si  $q' = f(q)$   $\alpha_{q'} = f(\alpha_q)$ ) y definimos  $h(y) = \alpha_{r'}^{-1} \circ y \circ \alpha_{q'}$ . Si  $y \in Y_n$ ,  $h(y) = s_0^n \alpha_{r'}^{-1} \circ y \circ s_0^n \alpha_{q'}$ .

Se comprueba sin dificultad que las aplicaciones así definidas son simpliciales. Veamos que hacen conmutativo el diagrama (\*\*)

Dado  $q \in \text{Obj}(X)$  se tiene que  $fi(q) = hf(q) = f(p)$ . Dado  $x : q \rightarrow r$  un morfismo en  $X$ , por ser  $f$  una equivalencial débil induce una biyección entre los conjuntos de componentes conexas de  $X$  e  $Y$ ; por tanto, si  $q$  y  $p$  no están en la misma componente, tampoco lo están  $f(p)$  y  $f(q)$  y se tiene entonces que  $fi(x) = hf(x) = Id_{f(p)}$ . Si, por el contrario  $q$  y  $p$  están en la misma componente también lo están  $f(p)$  y  $f(q)$  y por tanto,  $fi(x) = hf(x) = f(\alpha_r^{-1}) \circ f(x) \circ f(\alpha_q)$ .

Puesto que en particular  $f : X \rightarrow Y$  es una cofibración de grupoides simpliciales y el morfismo  $g : G \rightarrow H$  puede verse de forma obvia como una fibración trivial de grupoides simpliciales, se tiene que existe un levantamiento  $k' : Y \rightarrow G$  en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X(p) & \longrightarrow & G \\ f \downarrow & & \downarrow f_p & \nearrow k' & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{h} & Y(f(p)) & \longrightarrow & H \end{array}$$

Por otro lado notemos que los morfismos  $i$  y  $h$  son retracciones, pues si los morfismos  $l : X(p) \rightarrow X$  y  $j : Y(f(p)) \rightarrow Y$  denotan las respectivas inclusiones es evidente que se verifica que  $il = 1_{X(p)}$  y  $jh = 1_{Y(f(p))}$ . Veamos que el morfismo de grupos simpliciales  $k = k'j$  es el levantamiento buscado en el diagrama (\*):  $k'f = ui$  luego  $k'jf_pi = ui$ , de

## 2. Grupos simpliciales.

donde se sigue  $k'jf_p = u$  y por tanto  $kf_p = u$ . De otra parte  $gk' = vh$  de donde  $gk'j = vhj$  y por tanto  $gk = v$  ■

**Proposición 2.2.10.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una cofibración trivial en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , entonces  $f$  tiene la LLP respecto de la familia de las fibraciones.

*Demostración:* Hemos de probar que en cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & G \\ f \downarrow & \nearrow k & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{h} & H \end{array}$$

con  $g$  una fibración, existe un levantamiento. Para ello consideremos el conjunto de componentes conexas de  $X$ . En cada una de las componentes elegimos un representante que notaremos  $\bar{p}$ . Para cada uno de esos representantes elegidos se tiene, por el lema anterior, que en cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} X(\bar{p}) & \xrightarrow{i} & G(i(\bar{p})) \\ f \downarrow & \nearrow k' & \downarrow g \\ Y(f(\bar{p})) & \xrightarrow{h} & H(hf(\bar{p})) \end{array}$$

existe un levantamiento,  $k'$ .

Veamos como definir el morfismo  $k : Y \rightarrow G$ . Sea  $q' \in \text{Obj}(Y)$ :

- Si  $q' = f(p)$  con  $p \in \text{Obj}(X)$ , elegimos un morfismo  $\bar{x} : \bar{p} \rightarrow p \in X_0$ , donde suponemos que  $p$  pertenece a la componente de representante  $\bar{p}$  ( si  $\bar{p} = p$  elegimos la identidad). Definimos  $k(q') = i(p)$ . Para cada morfismo  $y_{q'} \in Y_0$  de la forma  $y_{q'} = f(\bar{x}) : f(\bar{p}) \rightarrow f(p) = q'$ , definimos  $k(y_{q'}) = i(\bar{x})$ .
- Si  $q'$  no está en la imagen de  $f$ , está en alguna componente que es imagen de una de  $X$  y, por tanto, existe  $\bar{p} \in \text{Obj}(X)$  y existe un morfismo en  $Y_0$ ,  $y_{q'} : f(\bar{p}) \rightarrow q'$ , de donde  $h(y_{q'}) : gi(\bar{p}) \rightarrow h(q')$ . Como el morfismo  $g$  es una fibración, existen  $g_0 \in \text{Obj}(G)$  y  $g' \in G_0$ ,  $g' : i(\bar{p}) \rightarrow g_0$  tales que  $g(g') = h(y_{q'})$ . Definimos  $k(q') = g_0$  y  $k(y_{q'}) = g'$ .

En general, dado  $y : q \rightarrow q' \in Y_n(q, q')$ , puesto que existe una biyección entre el conjunto de componentes conexas de  $X$  e  $Y$ , el morfismo  $y$  está en una componente de  $Y$  que es imagen de una componente de  $X$  de representante  $\bar{p}$ , por lo tanto admite una descomposición de la forma

$$q \xrightarrow{s_0^n(y_q^{-1})} f(\bar{p}) \xrightarrow{\alpha} f(\bar{p}) \xrightarrow{s_0^n(y_{q'})} q'$$

donde  $\alpha = s_0^n y_{q'}^{-1} \circ y \circ s_0^n y_q$ . Definimos  $k(y) = s_0^n k(y_{q'}) \circ k'(\alpha) \circ s_0^n k(y_q^{-1})$ . Se comprueba sin dificultad que la aplicación  $k$  así definida es simplicial y verifica  $gk = h$  y  $kf = i$ . ■

## 2.2 La estructura de modelos en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

**Lema 2.2.11.** Sea  $\{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una familia de cofibraciones (cofibraciones triviales) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces el morfismo  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$  es una cofibración (cofibración trivial) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

*Demostración:*

Supongamos que cada  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  es una aplicación libre. Entonces, teniendo en cuenta que para hacer el coproducto en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  basta hacer la unión disjunta de los objetos y de los morfismos y puesto que cada  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  es inyectiva en objetos y morfismos se tiene que también lo es el morfismo inducido  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ . Si llamamos  $V_\alpha \subset Y_\alpha$  a la base de cada morfismo  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ , se tiene que  $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$  es una base del morfismo  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ .

Supongamos ahora que cada  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  es libre y una equivalencia débil. Por las consideraciones tenidas en cuenta anteriormente, es evidente que  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$  induce una biyección entre las componentes conexas de  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  y las de  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ . Para la segunda condición de equivalencia débil basta tener en cuenta que dado  $p \in \text{Obj}(\coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha)$ , existe  $\alpha$  tal que  $p \in \text{Obj}(X_\alpha)$  por lo que podemos identificar el morfismo inducido  $(\coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha)(p) \rightarrow (\coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha)(f_\alpha(p))$  con el correspondiente morfismo  $X_\alpha(p) \rightarrow Y_\alpha(f_\alpha(p))$  que es por hipótesis una equivalencia débil de grupos simpliciales. ■

**Lema 2.2.12.** Dado en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  un cuadrado cocartesiano de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

si  $f : X \rightarrow Y$  es una cofibración entonces  $k : Z \rightarrow T$  es una cofibración.

*Demostración:* Supondremos que  $f$  es una aplicación libre. Como  $f$  es inyectivo en objetos y el pushout en objetos se hace como en conjuntos, se tiene que el morfismo  $k$  es inyectivo en objetos. Por otro lado, puesto que  $f$  es libre tiene una base,  $V \subset Y$ , y teniendo en cuenta 1.2.4 es fácil ver que una base del morfismo  $k$  es justamente el conjunto  $h(V)$ . ■

**Lema 2.2.13.** Consideremos una sucesión de morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

$$X_0 \xrightarrow{j_0} X_1 \xrightarrow{j_1} X_2 \dots \quad X_n \xrightarrow{j_n} X_{n+1} \xrightarrow{j_{n+1}} \dots$$

tales que  $j_k : X_k \rightarrow X_{k+1}$  es una cofibración (cofibración trivial)  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Sean  $X_\infty = \lim_{\rightarrow} X_k$  y  $q_k : X_k \rightarrow X_\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , los morfismos canónicos. Entonces  $q_0 : X_0 \rightarrow X_\infty$  es una cofibración (cofibración trivial).

## 2. Grupoides simpliciales.

*Demostración:* Lo haremos para el caso de que cada  $j_k : X_k \rightarrow X_{k+1}$  sea una aplicación libre. Sea  $V_k \subset X_k$ ,  $k \geq 1$ , una base del morfismo  $j_k$ . Por ser cada  $j_k$ ,  $k \geq 0$  inyectivo en objetos y morfismos se tiene que  $X_\infty = \lim_{\rightarrow} X_k \cong \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$  y por tanto  $q_0 : X_0 \rightarrow X_\infty$  también es inyectiva en objetos y morfismos. Para ver que  $q_0$  es una aplicación libre basta tener en cuenta que el conjunto  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} q_k(V_k)$ ,  $k \geq 1$ , es una base.

Supongamos ahora que cada  $j_k : X_k \rightarrow X_{k+1}$  es una aplicación libre y una equivalencia débil. Es evidente que el morfismo  $q_0$  induce una biyección entre las componentes conexas de  $X_0$  y las de  $X_\infty$ . Por otro lado, al ser inyectiva en objetos, dado  $p \in \text{Obj}(X_k)$  podemos identificar cada  $j_k(p)$  con  $p$ . En particular, para cada  $p \in \text{Obj}(X_0)$  podemos considerar la sucesión de morfismos de grupos simpliciales

$$X_0(p) \xrightarrow{j_0} X_1(p) \xrightarrow{j_1} X_2(p) \dots \quad X_n(p) \xrightarrow{j_n} X_{n+1}(p) \xrightarrow{j_{n+1}} \dots$$

Es fácil ver que  $(\lim_{\rightarrow} X_k)(p) \cong \lim_{\rightarrow} X_k(p)$ . Por ser cada morfismo inducido  $j_k : X_k(p) \rightarrow X_{k+1}(p)$  una equivalencia débil de grupos simpliciales se tiene que el morfismo  $q_0 : X_0(p) \rightarrow \lim_{\rightarrow} X_k(p)$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales (ver [56]) y, por tanto,  $q_0 : X_0 \rightarrow X_\infty$  es una equivalencia débil de grupoides simpliciales. ■

**Proposición 2.2.14.** *Para cada par de enteros  $k, n$  con  $0 \leq k \leq n$ , el morfismo  $i : F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$  es una equivalencia débil y si*

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, k] & \xrightarrow{u} & Z \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ F\Delta[n] & \xrightarrow{v} & T \end{array}$$

*es un cuadrado co-cartesiano entonces  $f$  es una equivalencia débil.*

*Demostración:*

Es claro que  $\pi(F\Delta[n, k]) \cong \pi(F\Delta[n])$  puesto que ambos grupoides simpliciales tienen una sola componente, así que resta probar que para cada objeto de  $F\Delta[n, k]$ ,  $p \in \{0, 1\}$ , el morfismo inducido en los grupos simpliciales de automorfismos  $i_p : F\Delta[n, k](p) \rightarrow F\Delta[n](p)$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales. Ahora, si probamos que  $i : F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$  es un retracto fuerte de deformación, esto es, que existe un morfismo  $r : F\Delta[n] \rightarrow F\Delta[n, k]$  tal que  $ri = 1_{F\Delta[n, k]}$  y existe una homotopía  $\alpha : ir \simeq 1_{F\Delta[n]}$ , tendremos que  $ri$  es una equivalencia débil y si además se verifica que para cada  $p \in \text{Obj}(F\Delta[n])$   $\alpha(p) = Id_p$ , utilizando el lema 2.2.3, también lo será  $ir$ . Entonces, para todo  $p \in \text{Obj}(F\Delta[n, k]) = \text{Obj}(F\Delta[n])$  y cada  $q \geq 0$  se tendría

$$\begin{array}{ccccc} \pi_q(F\Delta[n, k](p)) & \xrightarrow{\pi_q(i_p)} & \pi_q(F\Delta[n](p)) & \xrightarrow{\pi_q(r_p)} & \pi_q(F\Delta[n, k](p)) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & 1_{\pi_q(F\Delta[n, k](p))} & & \end{array}$$

## 2.2 La estructura de modelos en $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$ .

esto es,  $\pi_q(r_p)\pi_q(i_p) = 1_{\pi_j(F\Delta[n,k](p))}$ , y por otro lado  $\pi_q(ir_p) = \pi_q(i_p)\pi_q(r_p)$  sería un isomorfismo de donde  $\pi_q(i(p))$  sería un isomorfismo para todo  $q \geq 0$  y por tanto  $i_p$  una equivalencia débil de grupos simpliciales como se requería.

La demostración con toda generalidad de que  $i : F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$  es un retractor fuerte de deformación es tediosa y de difícil expresión por lo que procedemos a realizarla en un caso particular que es por otro lado absolutamente ilustrativo de cómo se procedería en general.

Consideremos la inclusión  $i : F\Delta[2, 2] \hookrightarrow F\Delta[2]$  y recordemos que dar un morfismo  $r : F\Delta[2] \rightarrow F\Delta[2, 2]$  es equivalente a dar dos objetos de  $F\Delta[2, 2]$  que estén en la misma componente (los dos únicos objetos 0 y 1 que tiene) y una aplicación simplicial  $r_\bullet : \Delta[2] \rightarrow F\Delta[2, 2](0, 1)$  que, como bien sabemos, está determinada por  $r_2(\Delta_2) = r_2((0, 1, 2))$ . Definimos entonces  $r_2((0, 1, 2)) = (1, 1, 2) \circ (1, 2, 2)^{-1} \circ (0, 2, 2) : 0 \rightarrow 1$  (habiendo tomado para cada generador del grupoide libre la notación del símplice correspondiente). Se tiene entonces que  $ri = 1_{F\Delta[2, 2]}$  pues basta tener en cuenta que

$r_1(1, 2) = r_1d_0(0, 1, 2) = d_0r_2(0, 1, 2) = (1, 2) \circ (2, 2)^{-1} \circ (2, 2) = (1, 2)$  y  
 $r_1(0, 2) = r_1d_1(0, 1, 2) = d_1r_2(0, 1, 2) = (1, 2) \circ (1, 2)^{-1} \circ (0, 2) = (0, 2)$  y que  $\Delta[2, 2]$  está generada por  $d_0(0, 1, 2) = (1, 2)$  y  $d_1(0, 1, 2) = (0, 2)$ .

Nuestro objetivo es ver que existe una homotopía  $\alpha : ir \simeq 1_{F\Delta[2]}$  con  $\alpha(p) = Id_p$ . Consideremos entonces  $\forall p \in \{0, 1\} = \text{Obj}(F\Delta[n])$ ,  $\alpha(p) = Id_p \in F\Delta[2]_0$  y las aplicaciones  $\alpha_0^0 = s_0 : F\Delta[2]_0 \rightarrow F\Delta[2]_1$ ,  $\alpha_1^0, \alpha_1^1 : F\Delta[2]_1 \rightarrow F\Delta[2]_2$  determinadas por:

$$\alpha_1^0(0, 1) = (0, 1, 1) \circ (0, 1, 2)^{-1} \circ (0, 0, 2)$$

$$\alpha_1^0(0, 2) = (0, 0, 2)$$

$$\alpha_1^0(1, 2) = (1, 1, 2)$$

$$\alpha_1^1(0, 1) = (0, 1, 1)$$

$$\alpha_1^1(0, 2) = (0, 2, 2)$$

$$\alpha_1^1(1, 2) = (1, 2, 2)$$

y  $\alpha_2^0, \alpha_2^1, \alpha_2^2 : F\Delta[2]_2 \rightarrow F\Delta[2]_3$  determinadas por:

$$\alpha_2^0(0, 1, 2) = (0, 1, 1, 2) \circ (0, 1, 2, 2)^{-1} \circ (0, 0, 2, 2)$$

$$\alpha_2^1(0, 1, 2) = (0, 1, 1, 2)$$

$$\alpha_2^2(0, 1, 2) = (0, 1, 2, 2) \text{ (Nótese que las identidades simpliciales y las condiciones de}$$

homotopía determinan  $\alpha_2^k, 0 \leq k \leq 2$ , sobre cualquier otro símplice). Se tiene entonces que:

$$d_0\alpha_2^0(0, 1, 2) = (1, 1, 2) \circ (1, 2, 2)^{-1} \circ (0, 2, 2) = (ir)_2(0, 1, 2)$$

$$d_1\alpha_2^0(0, 1, 2) = (0, 1, 2) = d_1\alpha_1^1(0, 1, 2)$$

$$d_3\alpha_2^0(0, 1, 2) = (0, 1, 1) \circ (0, 1, 2)^{-1} \circ (0, 0, 2) = \alpha_1^0d_2(0, 1, 2) \circ d_0\alpha_1^1(0, 1, 2) = (1, 1, 2) = \alpha_1^0d_0(0, 1, 2)$$

$$d_2\alpha_2^1(0, 1, 2) = (0, 1, 2) = d_2\alpha_2^2(0, 1, 2)$$

$$d_3\alpha_2^1(0, 1, 2) = (0, 1, 1) = \alpha_1^1d_2(0, 1, 2) \circ d_0\alpha_2^2(0, 1, 2) = (1, 2, 2) = \alpha_1^1d_0(0, 1, 2)$$

$$d_1\alpha_2^2(0, 1, 2) = (0, 2, 2) = \alpha_1^1d_1(0, 1, 2)$$

## 2. Grupos simpliciales.

$$d_3\alpha_2^2(0, 1, 2) = (0, 1, 2) = Id_{(0,1,2)}$$

lo que nos indica de acuerdo con 2.1.11, la manera de construir una homotopía  $\alpha$  de  $ir$  a  $1_{F\Delta[2]}$ .

Finalmente, para ver que en un cuadrado cocartesiano como el del enunciado el morfismo  $f$  también es una equivalencia débil basta observar que  $f : Z \rightarrow T$  también es un retracts fuerte de deformación. Por un lado es claro que, considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, k] & \xrightarrow{u} & Z \\ r \uparrow \downarrow i & & \downarrow f \\ F\Delta[n] & \xrightarrow{v} & T \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow 1_Z \\ \downarrow g \\ \rightarrow Z \end{array}$$

*(Note: The diagram shows a commutative square with  $F\Delta[n, k]$  at top-left,  $Z$  at top-right,  $F\Delta[n]$  at bottom-left, and  $T$  at bottom-right. Arrows:  $u: F\Delta[n, k] \to Z$ ,  $v: F\Delta[n] \to T$ ,  $r: F\Delta[n, k] \to F\Delta[n]$ ,  $i: F\Delta[n] \to F\Delta[n, k]$ ,  $f: Z \to T$ . A diagonal arrow  $1_Z: Z \to Z$  and a dotted arrow  $g: T \to Z$  are also shown, with  $ur$  and  $vg$  connecting  $F\Delta[n, k]$  and  $F\Delta[n]$  to  $Z$ .)*

existe  $g : T \rightarrow Z$  tal que  $gf = 1_Z$ . Por otro lado no es difícil ver que considerando la homotopía  $\alpha : ir \simeq 1_{F\Delta[n]}$  esta induce, de acuerdo con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, k]_q & \xrightarrow{u_q} & Z_q \\ \downarrow i_q & & \downarrow f_q \\ F\Delta[n]_q & \xrightarrow{v_q} & T_q \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow f_{q+1}s_q \\ \downarrow \gamma_q^j \\ \rightarrow T_{q+1} \end{array}$$

*(Note: The diagram shows a commutative square with  $F\Delta[n, k]_q$  at top-left,  $Z_q$  at top-right,  $F\Delta[n]_q$  at bottom-left, and  $T_q$  at bottom-right. Arrows:  $u_q: F\Delta[n, k]_q \to Z_q$ ,  $v_q: F\Delta[n]_q \to T_q$ ,  $i_q: F\Delta[n, k]_q \to F\Delta[n]_q$ ,  $f_q: Z_q \to T_q$ . A diagonal arrow  $f_{q+1}s_q: Z_q \to T_{q+1}$  and a dotted arrow  $\gamma_q^j: T_q \to T_{q+1}$  are also shown, with  $v_{q+1}\alpha_q^j$  connecting  $F\Delta[n]_q$  to  $T_{q+1}$ .)*

una homotopía  $\gamma : fg \simeq 1_T$  (Nótese por ejemplo que,  $d_0\gamma_q^0v_q = d_0v_{q+1}\alpha_q^0 = v_qd_0\alpha_q^0 = v_qi_qr_q = f_qu_qr_q = f_qg_qv_q$  y  $d_0\gamma_q^0f_q = d_0f_{q+1}s_0 = f_qd_0s_0 = f_q = f_qg_qf_q$  así que  $d_0\gamma_q^0 = f_qg_q$  y también,  $d_{q+1}\gamma_q^q v_q = d_{q+1}v_{q+1}\alpha_q^q = v_qd_{q+1}\alpha_q^q = v_qId = Idv_q$  y  $d_{q+1}\gamma_q^q f_q = d_{q+1}f_{q+1}\alpha_q^q = f_qd_{q+1}\alpha_q^q = f_qId = Idf_q$ , así que  $d_{q+1}\gamma_q^q = Id$ ). ■

Recordando la definición de objeto secuencialmente pequeño (ver 1.3.9), se tiene que los grupos simpliciales  $F\Delta[n]$ ,  $F\Delta[n, k]$  y  $F\Delta[n]$  son secuencialmente pequeños y podemos demostrar ya el siguiente:

**Teorema 2.2.15.** ([25]) *Con las definiciones dadas de fibración, cofibración y equivalencia débil, la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  tiene estructura de modelos cerrada.*

*Demostración:* El axioma CM1 es consecuencia de 2.1.2, el axioma CM4 es consecuencia de las proposiciones 2.2.8 y 2.2.10 y los axiomas CM2 y CM3 se prueban sin dificultad, así que sólo queda demostrar el axioma CM5. Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ ; veamos que  $f$  admite una factorización de la forma  $f = hi$  donde  $i$  es una cofibración y  $h$

## 2.2 La estructura de modelos en $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$ .

una fibración trivial. Para ello usaremos el conocido como argumento del objeto pequeño (véase [56]) para lo cual construimos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{j_0} & Z_0 & \xrightarrow{j_1} & Z_1 & \longrightarrow & \cdots \xrightarrow{j_n} Z_n \longrightarrow \cdots \\
 \downarrow f & & \swarrow h_0 & \swarrow h_1 & \swarrow h_n & & \\
 & & Y & & & & 
 \end{array}$$

donde llamaremos  $Z_{-1} = X$   $h_{-1} = f$  y supuesto obtenido  $Z_n$ , obtenemos  $Z_{n+1}$  y  $h_{n+1}$  como sigue:

Consideremos todos los diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\alpha_n} & \xrightarrow{\gamma_{\alpha_n}} & Z_n \\
 \downarrow & & \downarrow h_n \\
 Y_{\alpha_n} & \xrightarrow{\delta_{\alpha_n}} & Y
 \end{array}$$

donde  $X_{\alpha_n} \hookrightarrow Y_{\alpha_n}$  es un morfismo de la forma  $F \overset{\bullet}{\Delta}[q] \hookrightarrow F \Delta[q]$ ,  $q \geq 0$ , ó  $F \Delta[0,0] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta}[0]$  y a partir de aquí definimos  $Z_{n+1}$  y  $h_{n+1}$  mediante el siguiente diagrama cocartesiano.

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod X_{\alpha_n} & \xrightarrow{\Sigma \gamma_{\alpha_n}} & Z_n \\
 \downarrow & & \downarrow j_{n+1} \\
 \coprod Y_{\alpha_n} & \xrightarrow{\Sigma \delta_{\alpha_n}} & Z_{n+1} \\
 & \searrow h_{n+1} & \swarrow h_n \\
 & & Y
 \end{array}$$

Tenemos así una sucesión

$$Z_{-1} \xrightarrow{j_0} Z_0 \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{j_2} \cdots$$

y consideremos  $Z_\infty = \varinjlim Z_m$  y  $q_m : Z_m \rightarrow Z_\infty$  el correspondiente morfismo canónico. Para cada  $m \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  se tiene  $h_m : Z_m \rightarrow Y$  verificando  $h_{m+1} j_{m+1} = h_m$ , por lo tanto  $\exists h : Z_\infty \rightarrow Y$  tal que  $h q_m = h_m$

$$\begin{array}{ccc}
 Z_m & \xrightarrow{q_m} & Z_\infty \\
 \downarrow h_m & & \swarrow h \\
 Y & & 
 \end{array}$$

Si llamamos  $i$  a  $q_{-1}$  se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & Z_\infty \\
 \downarrow f & & \swarrow h \\
 Y & & 
 \end{array}$$

## 2. Grupoides simpliciales.

Veamos que ésta es la factorización buscada del morfismo  $f$ . Los morfismos  $X_{\alpha_n} \rightarrow Y_{\alpha_n}$  son aplicaciones libres (ver 2.1.14), por tanto cofibraciones, y por el lema 2.2.11  $\coprod X_{\alpha_n} \rightarrow \coprod Y_{\alpha_n}$  es una cofibración. De ahí, usando el lema 2.2.12 se tiene que  $j_{n-1}$  es una cofibración,  $\forall n \in \mathbb{N}$  y por el lema 2.2.13 el morfismo  $i$  es entonces una cofibración. Veamos ahora que  $h$  es una fibración trivial y para ello, utilizando la proposición 2.2.6. Para ello consideremos un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} F \dot{\Delta}[n] & \longrightarrow & Z_{\infty} \\ \downarrow & & \downarrow h \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

en el que tratamos de encontrar un levantamiento, para lo cual hemos de tener en cuenta que, dado que  $F \dot{\Delta}[n]$  es secuencialmente pequeño, el morfismo  $F \dot{\Delta}[n] \hookrightarrow Z_{\infty}$  factoriza a través de algún  $Z_m$ , puesto que

$$\text{Hom}(F \dot{\Delta}[n], Z_{\infty}) \cong \varinjlim \text{Hom}(F \dot{\Delta}[n], Z_m)$$

con lo que se tiene

$$\begin{array}{ccc} F \dot{\Delta}[n] & \longrightarrow & Z_m \\ \downarrow & & \downarrow hq_m \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

que es uno de los diagramas considerados anteriormente. Consideremos ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} F \dot{\Delta}[n] = X_{\alpha_n} & \xrightarrow{s} & & & Z_{\infty} \\ & \searrow \gamma_{\alpha_n} & & & \uparrow q_m \\ & \downarrow i_{\alpha_n} & \coprod X_{\alpha_n} & \xrightarrow{\Sigma \alpha_n} & Z_m \\ & & \downarrow & & \downarrow j_{m+1} \\ & & \coprod Y_{\alpha_n} & \xrightarrow{\Sigma l_{\alpha_n}} & Z_{m+1} \\ & \swarrow l_{\alpha_n} & & & \downarrow h_{m+1} \\ F\Delta[n] = Y_{\alpha_n} & \xrightarrow{\delta_{\alpha_n}} & & & Y \end{array} \quad (*)$$

El morfismo  $q_{m+1} \Sigma l_{\alpha_n} l_{\alpha_n} : F\Delta[n] \rightarrow Z_{\infty}$  es el levantamiento buscado. Si hubiéramos partido de un diagrama de la forma



$$\begin{array}{ccc} F\Delta[0,0] & \longrightarrow & Z_\infty \\ \downarrow & & \downarrow h \\ F\dot{\Delta}[0] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

el razonamiento se hace análogamente.

La factorización de un morfismo como una cofibración trivial seguida de una fibración se haría mediante un desarrollo análogo, partiendo, en este caso, de diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n,k] & \xrightarrow{\gamma} & Z_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ F\Delta[n] & \xrightarrow{\delta} & Y \end{array}$$

$0 \leq k \leq n$ . Se llegaría a una factorización de la forma  $X \xrightarrow{j} Z_\infty \xrightarrow{q} Y$  donde, por 2.1.14 y la proposición 2.2.14, los morfismos  $F\Delta[n,k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$  son cofibraciones triviales y por los lemas 2.2.11 2.2.12 y 2.2.13 junto con la proposición 2.2.14 se tiene que  $j$  es una cofibración trivial. El levantamiento requerido para demostrar que  $q$  tiene la RLP respecto de las cofibraciones triviales se obtiene a partir de un diagrama análogo a (\*), lo cual prueba que el morfismo  $q$  es una fibración. ■

Una vez probado que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es una categoría de modelos cerrada las cofibraciones y las cofibraciones triviales quedan caracterizadas como sigue:

**Proposición 2.2.16.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , entonces  $f$  es una cofibración (cofibración trivial) si y sólo si tiene la LLP respecto de la familia de las fibraciones triviales (fibraciones).*

*Demostración:* Si  $f$  es una cofibración, según vimos en 2.2.8, tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales. Recíprocamente consideremos una factorización de  $f$  de la forma  $f = hi$ , donde  $i$  es una cofibración y  $h$  es una cofibración trivial obtenida como en la demostración de 2.2.15. Dado que  $f$  tiene la LLP respecto de las fibraciones triviales, existe un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z_\infty \\ f \downarrow & \nearrow k & \downarrow h \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

lo que implica que el morfismo  $f$  es un retracto de  $i$ . Teniendo en cuenta el axioma CM3 se tiene que  $f$  es una cofibración.

La parte correspondiente a las cofibraciones triviales se demuestra análogamente teniendo en cuenta la otra mitad del axioma CM4 y una factorización de  $f$  como una cofibración trivial seguida de una fibración. ■

## 2. Grupoides simpliciales.

**2.2.17.** La teoría de homotopía asociada a esta categoría de modelos es equivalente, vía los funtores  $G$ , grupoide libre de lazos y  $\overline{W}$ , complejo clasificador (2.1.15), a la teoría de homotopía de conjuntos simpliciales, y ello como consecuencia de 1.1.7 y del siguiente:

**Teorema 2.2.18.** ([25])

- i) El functor  $G : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  preserva cofibraciones y equivalencias débiles.
- ii) El functor  $\overline{W} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  preserva y refleja fibraciones y equivalencias débiles.
- iii) Para cada par de objetos  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , un morfismo  $K_\bullet \rightarrow \overline{W}X$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  es una equivalencia débil si y sólo si, el morfismo adjunto  $GK_\bullet \rightarrow X$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es una equivalencia débil.

*Demostración:* La demostración de i) en lo que respecta a las cofibraciones es consecuencia de la caracterización de ellas en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  (las aplicaciones que son inyectivas en cada dimensión) y el hecho de que las aplicaciones libres son cofibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

En cuanto a las equivalencias débiles, hay que demostrar que si  $f_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  es una equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  entonces  $Gf_\bullet$  lo es en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , lo que supone demostrar por una parte que  $\pi(Gf_\bullet)$  es una biyección y por otra que para cada  $x_0 \in K_0$ ,  $\pi_n((Gf_\bullet)_{x_0})$  es un isomorfismo para cada  $n \geq 0$ . La primera condición se deduce fácilmente del hecho de que  $\pi(GK_\bullet) \cong \pi_0(K_\bullet)$  y esto es cierto pues el conjunto de objetos de  $GK_\bullet$  es  $K_0$  y los morfismos que los relacionan proceden de los 1-símplices de  $K_\bullet$ . Para la segunda parte se razona como sigue:

Sean  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $x_0 \in K_0$ . Definimos el siguiente subconjunto simplicial de  $K_\bullet$ ,  $K_\bullet(x_0)$ . En dimensión 0,  $(K_\bullet(x_0))_0 = \{x_0\}$ , y para cada  $n \geq 1$ ,  $(K_\bullet(x_0))_n = \{x \in K_n / d_0 \cdots \hat{d}_i \cdots d_n x = x_0, i = 0, 1, \dots, n\}$ . Como  $K_\bullet(x_0)$  es un conjunto simplicial reducido podemos calcularle su grupo simplicial de lazos  $G(K_\bullet(x_0))$  que puede ser visto como un grupoide simplicial con un solo objeto  $*$ . Se tiene entonces un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$   $h_{x_0} : G(K_\bullet(x_0)) \hookrightarrow GK_\bullet$  tal que  $h_{x_0}(*) = x_0$ .

Para cada elemento de  $\pi_0(K_\bullet)$  tomamos un representante  $x$  y consideramos el morfismo  $h : \bigvee_x G(K_\bullet(x)) \rightarrow GK_\bullet$  inducido por los morfismos  $h_x$ , que es una cofibración trivial pues es rutinario probar que tiene la LLP respecto de las fibraciones. Es claro entonces que si consideramos el grupo de automorfismos en un punto  $x_0 \in K_0$ , el morfismo  $h_{x_0}$  factoriza a través de  $GK_\bullet(x_0)$

$$G(K_\bullet(x_0)) \rightarrow GK_\bullet(x_0) \hookrightarrow GK_\bullet$$

siendo el primero de éstos una equivalencia débil de grupos simpliciales.

Consecuentemente, si  $f_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales, también lo es el inducido  $K_\bullet(x_0) \rightarrow L_\bullet(f_0(x_0))$  y por tanto  $G(K_\bullet(x_0)) \rightarrow G(L_\bullet(f_0(x_0)))$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales (ver [51]). El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G(K_\bullet(x_0)) & \hookrightarrow & GK_\bullet(x_0) \\ \downarrow & & \downarrow (Gf_\bullet)_{x_0} \\ G(L_\bullet(f_0(x_0))) & \hookrightarrow & GL_\bullet(f_0(x_0)) \end{array}$$

determina que  $(Gf_\bullet)_{x_0}$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.

La demostración de ii) es rutinaria atendiendo a las definiciones de los conceptos implicados, y teniendo en cuenta que dado  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ ,  $\pi(X) = \pi_0(\overline{W}X)$  y para cada  $n \geq 0$  y cada  $p \in \mathit{Obj}(X)$ ,  $\pi_n(X(p)) \cong \pi_{n+1}(\overline{W}X, p)$ .

Por último, indicaremos como se demuestra iii). De la demostración de i) se sigue que dados  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $x_0 \in K_0$ ,  $\pi_n(GK_\bullet(x_0)) \cong \pi_{n+1}(K_\bullet, x_0)$ , y que  $\pi(GK_\bullet) \cong \pi_0(K_\bullet)$ . Esto permite probar que tanto la unidad como la counidad de la adjunción son equivalencias débiles en las correspondientes categorías, lo cual implica la propiedad requerida. ■

Como consecuencia de la equivalencia existente también entre las teorías de homotopía de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $\mathbf{Top}$  (véase 1.3.7), se tiene en particular

$$Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \cong Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})) \cong Ho(\mathbf{Top}) \cong Ho(\mathbf{CW}) \quad (1)$$

A continuación “puntearemos” la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y extenderemos a esta nueva categoría la estructura de modelos.

**2.2.19.** Denotaremos por  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  a la categoría de grupoides simpliciales punteados que es aquella en la que:

- Los objetos son pares de la forma  $(X, p)$ , con  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $p \in O$  un objeto fijo del grupoide simplicial  $X$ .
- Dados  $(X, p)$  e  $(Y, p')$  dos grupoides simpliciales punteados, un morfismo entre ellos es  $f : X \rightarrow Y \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  tal que  $f(p) = p'$ . Lo notaremos  $f : (X, p) \rightarrow (Y, p')$ .

Nótese que el grupoide simplicial punteado  $(\{*\}, *)$  es el objeto cero de la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$ .

Esta categoría es isomorfa a la categoría co-coma  $(*, \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*)$ , cuyos objetos recordemos que son morfismos de grupoides simpliciales de la forma  $* \rightarrow X$ , con  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y cuyos morfismos son triángulos conmutativos de morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

puesto que dar un morfismo  $\alpha : * \rightarrow X$  es fijar en  $X$  el objeto  $p = \alpha(*)$ ; y dar un triángulo conmutativo como el anteriormente descrito equivale a dar un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en

## 2. Grupos simpliciales.

$\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  tal que  $f(\alpha(*)) = \beta(*)$ , y por tanto, un morfismo  $f : (X, p) \rightarrow (Y, p')$ , con  $p' = \beta(*)$ .

Por tanto, la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  soporta de manera natural (ver 1.1.3) una estructura de modelos cerrada, inducida por la existente en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  en la que  $f$  es fibración (cofibración, equivalencia débil) si el morfismo  $f : X \rightarrow Y$  es fibración (cofibración, equivalencia débil respectivamente) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

### 2.3 Teoría de homotopía en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

La estructura de modelos estudiada en la sección anterior permite realizar en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  construcciones homotópicas como las de objeto cilindro y espacio de arcos que describimos a continuación explícitamente.

**2.3.1.** Recordemos previamente que si  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , el grupo simplicial  $H_\bullet^I$ , cuyos  $n$ -símplices son

$$(H_\bullet^I)_n = \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(\Delta[1] \times \Delta[n], H_\bullet) \cong$$

$$\cong \{(x_0, \dots, x_n) \in (H_{n+1})^{n+1} / d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$$

y los operadores cara y degeneración están dados por:

$$d_i(x_0, \dots, x_n) = (d_{i+1}x_0, \dots, d_{i+1}x_{i-1}, d_i x_{i+1}, \dots, d_i x_n), 0 \leq i \leq n,$$

$$s_i(x_0, \dots, x_n) = (s_{i+1}x_0, \dots, s_{i+1}x_i, s_i x_i, \dots, s_i x_n), 0 \leq i \leq n$$

es un espacio de arcos para  $H_\bullet$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  dado que se tiene una factorización del morfismo diagonal

$$H_\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} H_\bullet^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$$

donde  $\beta_\bullet$ , dado por  $\beta_n(x) = (s_0 x, \dots, s_n x)$ , es una equivalencia débil y  $(\partial_0, \partial_1)$ , el morfismo inducido por  $(\partial_0)_n(x_0, \dots, x_n) = d_{n+1}x_n$  y  $(\partial_1)_n(x_0, \dots, x_n) = d_0 x_0$ , es una fibración (véase [52], [40]).

Esta construcción permite definir el concepto de homotopía por la derecha, pues se tiene que dados  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos de grupos simpliciales, una homotopía por la derecha de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un morfismo  $h_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  verificando que  $\partial_0 h_\bullet = g_\bullet$  y  $\partial_1 h_\bullet = f_\bullet$ .

**Definición 2.3.2.** Dado  $H \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  definimos el grupoide simplicial  $H^I$  como sigue:

- El conjunto de objetos de  $H^I$  es  $H_0$ .

- El conjunto de morfismos, en dimensión  $n$  es el conjunto de  $(n+1)$ -uplas de cuadrados conmutativos

$$(H^I)_n = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \\ \downarrow x_0 & x'_0 \downarrow & \downarrow x_n & x'_n \downarrow \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' \end{array} \right) / \left. \begin{array}{l} a, b \in H_0 \quad d_i x_i = d_i x_{i-1} \\ x_i, x'_i \in H_{n+1} \quad d_i x'_i = d_i x'_{i-1} \\ p, q \in O \end{array} \right\}$$

donde, en cada dimensión, las aplicaciones dominio y codominio del grupoide  $(H^I)_n \xrightarrow[s]{t} H_0$  están definidas por:

$$s \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \\ x_0 \downarrow & \downarrow x'_0 & x_1 \downarrow & \downarrow x'_1 & \dots & x_n \downarrow & \downarrow x'_n \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' \end{array} \right) = a$$

$$t \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \\ x_0 \downarrow & \downarrow x'_0 & x_1 \downarrow & \downarrow x'_1 & \dots & x_n \downarrow & \downarrow x'_n \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' \end{array} \right) = b$$

y los morfismos cara y degeneración están dados en cada dimensión por:

$$d_i \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \\ x_0 \downarrow & \downarrow x'_0 & x_1 \downarrow & \downarrow x'_1 & \dots & x_n \downarrow & \downarrow x'_n \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' \end{array} \right) =$$

$$\left( \begin{array}{cccc} p \xrightarrow{s_0^n a} q & p \xrightarrow{s_0^n a} q & p \xrightarrow{s_0^n a} q & p \xrightarrow{s_0^n a} q \\ \downarrow d_{i+1} x_0 & \downarrow d_{i+1} x_{i-1} & \downarrow d_i x_{i+1} & \downarrow d_i x_n \\ d_{i+1} x'_0 & d_{i+1} x'_{i-1} & d_i x'_{i+1} & d_i x'_n \\ p' \xrightarrow{s_0^n b} q' & p' \xrightarrow{s_0^n b} q' & p' \xrightarrow{s_0^n b} q' & p' \xrightarrow{s_0^n b} q' \end{array} \right)$$

$$s_j \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \\ x_0 \downarrow & \downarrow x'_0 & x_1 \downarrow & \downarrow x'_1 & \dots & x_n \downarrow & \downarrow x'_n \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} q' \end{array} \right) =$$

## 2. Grupos simpliciales.

$$\left( \begin{array}{cccc} p \xrightarrow{s_0^{n+2}a} q & , \dots , & p \xrightarrow{s_0^{n+2}a} q & , \dots , & p \xrightarrow{s_0^{n+2}a} q & , \dots , & p \xrightarrow{s_0^{n+2}a} q \\ \downarrow s_{j+1}x_0 & & \downarrow s_{j+1}x_j & & \downarrow s_j x_j & & \downarrow s_j x_n \\ & s_{j+1}x'_0 & & s_{j+1}x'_j & & s_j x'_j & & s_j x'_n \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+2}b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^{n+2}b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^{n+2}b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^{n+2}b} q' \end{array} \right)$$

Se tiene así construido un grupoide simplicial  $H^I$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \overset{s_{n-1}}{\curvearrowright} & & \overset{s_1}{\curvearrowright} & & \overset{s_0}{\curvearrowright} \\ & & \downarrow s_0 & & \downarrow s_0 & & \downarrow s_0 \\ \dots & H_n^I & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}^I & \dots & H_2^I & \xrightarrow{d_2} & H_1^I & \xrightarrow{d_1} & H_0^I \\ & \downarrow s \downarrow t & & \downarrow s \downarrow t & & \downarrow s \downarrow t & & \downarrow s \downarrow t & & \downarrow s \downarrow t \\ \dots & H_0 & \xrightarrow{d_0} & H_0 & \dots & H_0 & \xrightarrow{d_0} & H_0 & \xrightarrow{d_0} & H_0 \end{array}$$

que explicitamos a continuación en dimensiones bajas:

$$(H^I)_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0 a} q & & \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x'_0 \\ p' \xrightarrow{s_0 b} q' & & \end{array} / a, b \in H_0; x_0, x'_0 \in H_1 \right\}$$

$$(H^I)_1 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^2 a} q & & p \xrightarrow{s_0^2 a} q \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x'_0 \\ p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' \end{array} , \begin{array}{ccc} x_1 \downarrow & & \downarrow x'_1 \\ p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' \end{array} \right) / \begin{array}{l} a, b \in H_0 \\ x_0, x'_0, x_1, x'_1 \in H_2 \\ d_1 x_1 = d_1 x_0 \\ d_1 x'_1 = d_1 x'_0 \end{array} \right\}$$

donde los morfismos cara y degeneración en esta dimensión son:

$$d_0 \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^2 a} q & & p \xrightarrow{s_0^2 a} q \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x'_0 \\ p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' \end{array} , \begin{array}{ccc} x_1 \downarrow & & \downarrow x'_1 \\ p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0 a} q & & \\ d_0 x_1 \downarrow & & \downarrow d_0 x'_1 \\ p' \xrightarrow{s_0 b} q' & & \end{array}$$

$$d_1 \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^2 a} q & & p \xrightarrow{s_0^2 a} q \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x'_0 \\ p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' \end{array} , \begin{array}{ccc} x_1 \downarrow & & \downarrow x'_1 \\ p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^2 b} q' \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0 a} q & & \\ d_2 x_0 \downarrow & & \downarrow d_2 x'_0 \\ p' \xrightarrow{s_0 b} q' & & \end{array}$$

$$s_0 \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0 a} & q \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0 b} & q' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ s_1 x_0 \downarrow & & \downarrow s_1 x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array} , \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ s_0 x_0 \downarrow & & \downarrow s_0 x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array} \right)$$

Notemos que la construcción anterior determina un funtor

$$(-)^I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$$

**Proposición 2.3.3.** *El grupoide simplicial  $H^I$  definido anteriormente es un espacio de arcos para  $H$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .*

*Demostración:* Tenemos que demostrar que existe una factorización del morfismo diagonal  $\Delta : H \rightarrow H \times H$  de la forma

$$H \xrightarrow{\beta} H^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H \times H$$

donde el morfismo  $\beta$  es una equivalencia débil y  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración.

Definimos  $\beta : H \rightarrow H^I$  como sigue:

- En objetos  $\beta : O \rightarrow H_0$  es dado por  $\beta(p) = Id_p \quad \forall p \in O$
- En morfismos  $\beta : H_n \rightarrow (H^I)_n$  es dado, para  $x : p \rightarrow q \in H_n$ , por

$$\beta(x) = \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_p} p & & p \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_p} p \\ s_0 x \downarrow & & \downarrow s_0 x \\ q \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_q} q & , \dots , & q \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_q} q \\ s_n x \downarrow & & \downarrow s_n x \end{array} \right)$$

La demostración de que el morfismo  $\beta$  así definido es simplicial es rutinaria. Veamos que es una equivalencia débil, y para ello hemos de comprobar, en primer lugar, que induce una biyección entre las componentes de  $H$  y las de  $H^I$ .

Para ver que es inyectiva hemos de ver que si  $\beta(p)$  y  $\beta(q)$  están en la misma componente de  $(H^I)_0$ , entonces  $p$  y  $q$  están en la misma componente de  $H_0$ , lo cual es evidente, pues si

$$\begin{array}{ccc} p & \xlongequal{\quad} & p \\ x \downarrow & & \downarrow x \\ q & \xlongequal{\quad} & q \end{array}$$

es un cuadrado que los conecta en  $(H^I)_0$ ,  $x : p \rightarrow q$  es un morfismo que los conecta en  $H_0$ .

Para ver que es sobreyectiva es suficiente probar que, dado  $x : p \rightarrow q$  con  $p \in O$ ,  $\beta(p)$  y  $x$  están en la misma componente en  $(H^I)_0$ , y para ello basta considerar el cuadrado

## 2. Grupoides simpliciales.

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0 Id_p} & p \\ \parallel & & \downarrow s_0 x \\ p & \xrightarrow{s_0 x} & q \end{array}$$

En segundo lugar, hemos de demostrar que,  $\forall p \in O$ , el morfismo inducido  $\beta(p) : H(p) \rightarrow H^I(\beta(p))$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales. Para ello basta tener en cuenta que  $\forall p \in O$  podemos identificar los grupos simpliciales  $H^I(\beta(p))$  y  $(H(p))^I$  pues:

$$\begin{aligned} (H^I(\beta(p)))_n &= \left\{ \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_p} & p \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x_0 \\ p & \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_p} & p \end{array}, \dots, \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_p} & p \\ x_n \downarrow & & \downarrow x_n \\ p & \xrightarrow{s_0^{n+1} Id_p} & p \end{array} \right) / \begin{array}{l} d_i x_i = d_i x_{i-1} \\ x_i \in H_{n+1} \end{array} \right\} \cong \\ &\cong \left\{ (x_0, \dots, x_n) / \begin{array}{l} d_i x_i = d_i x_{i-1} \\ x_i \in (H(p))_{n+1} \end{array} \right\} = (H(p))^I \end{aligned}$$

Así pues el morfismo  $\beta$  puede ser también identificado con el correspondiente morfismo dado en la construcción del espacio de arcos en la categoría de grupos simpliciales (véase 2.3.1), y por tanto es una equivalencia débil.

Definimos a continuación  $(\partial_0, \partial_1) : H^I \rightarrow H \times H$ :

- En objetos  $(\partial_0, \partial_1) : H_0 \rightarrow O \times O$  es dado por  $(\partial_0, \partial_1)(a) = (s(a), t(a))$ ,  $\forall a \in H_0$
- En morfismos es dado por  $(\partial_0, \partial_1)_n : (H^I)_n \rightarrow H_n \times H_n$

$$(\partial_0, \partial_1)_n \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1} a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0^{n+1} b} & q' \end{array}, \dots, \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1} a} & q \\ \downarrow x_n & & \downarrow x'_n \\ p' & \xrightarrow{s_0^{n+1} b} & q' \end{array} \right) = (d_{n+1} x_n, d_0 x'_0)$$

La comprobación de que el morfismo  $(\partial_0, \partial_1)$  es un morfismo de grupoides simpliciales es rutinaria. La ilustraremos viéndola en dimensiones cero y uno:

En dimensión 0

$$(\partial_0, \partial_1)_0 : (H^I)_0 \rightarrow H_0 \times H_0 \text{ está dado por } (\partial_0, \partial_1)_0 \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0 a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0 b} & q' \end{array} \right) = (d_1 x_0, d_0 x'_0)$$

Hemos de probar la conmutatividad de los siguientes cuadrados



$$\begin{array}{ccc} (H^I)_0 & \xrightleftharpoons[t]{s} & H_0 \\ (\partial_0, \partial_1)_0 \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ H_0 \times H_0 & \xrightleftharpoons[t]{s} & O \times O \end{array}$$

lo cual es claro pues

$$\begin{aligned} (s(\partial_0, \partial_1)_0) \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0 a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0 b} & q' \end{array} \right) &= s(d_1 x_0, d_0 x'_0) = (p, q) \\ ((\partial_0, \partial_1)_0 s) \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0 a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0 b} & q' \end{array} \right) &= (\partial_0, \partial_1)(a) = (p, q) \end{aligned}$$

En dimensión 1

$$(\partial_0, \partial_1)_1 : (H^I)_1 \rightarrow H_1 \times H_1 \text{ es dado por } (\partial_0, \partial_1)_1 \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array}, \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ \downarrow x_1 & & \downarrow x'_1 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array} \right) = (d_2 x_1, d_0 x'_0)$$

Hemos de comprobar que el cubo siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & (H^I)_1 & \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)_1} & H_1 \times H_1 \\ & \swarrow d_1 & & & \swarrow d_1 \\ (H^I)_0 & \xrightarrow{d_0} & H_0 \times H_0 & \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)_0} & H_0 \times H_0 \\ \downarrow t & & \downarrow s & & \downarrow s \\ H_0 & \xrightarrow{t} & H_0 & \xrightarrow{s} & O \times O \\ & \searrow s & & & \searrow s \\ & & H_0 & \xrightarrow{s} & O \times O \end{array}$$

y en particular lo haremos para la cara de arriba y el morfismo  $d_0$ . Ahora bien

$$\begin{aligned} (d_0(\partial_0, \partial_1)_1) \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array}, \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ \downarrow x_1 & & \downarrow x'_1 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array} \right) &= d_0(d_2 x_1, d_0 x'_0) = (d_0 d_2 x_1, d_0 d_0 x'_0) \\ ((\partial_0, \partial_1)_0 d_0) \left( \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x'_0 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array}, \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^2 a} & q \\ \downarrow x_1 & & \downarrow x'_1 \\ p' & \xrightarrow{s_0^2 b} & q' \end{array} \right) &= (\partial_0, \partial_1)_0 \left( \begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & q \\ \downarrow d_0 x_1 & & \downarrow d_0 x'_1 \\ p' & \longrightarrow & q' \end{array} \right) = (d_1 d_0 x_1, d_0 d_0 x'_1) \end{aligned}$$

## 2. Grupos simpliciales.

y aplicando las identidades simpliciales, así como que  $d_i x_i = d_i x_{i-1}$  se tiene que

$$(d_0 d_2 x_1, d_0 d_0 x'_0) = (d_1 d_0 x_1, d_0 d_0 x'_1)$$

Finalmente hemos de probar que el morfismo  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . En primer lugar empezaremos demostrando que el morfismo

$$\begin{array}{ccc} (H^I)_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & H_0 \\ (\partial_0, \partial_1) \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ H_0 \times H_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & O \times O \end{array}$$

es una fibración de grupoides. Para ello veamos que dado  $a : p \rightarrow q \in H_0$  y dado un par  $(p \xrightarrow{x} p', q \xrightarrow{x'} q') \in H_0 \times H_0$ , existe un cuadrado en  $(H^I)_0$  tal que

$(\partial_0, \partial_1) \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array} \right) = (x, x')$ . Dicho cuadrado existe y es

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0 a} & q \\ s_0 x \downarrow & & \downarrow s_0 x' \\ p' & \xrightarrow{s_0(x' a x^{-1})} & q' \end{array}$$

Por último hemos de demostrar la segunda condición de fibración, es decir, que dado  $a : p \rightarrow q \in H_0$  el morfismo  $(\partial_0, \partial_1) : H^I(a) \rightarrow H(p) \times H(q)$  es una fibración de grupos simpliciales. Como los objetos  $p$  y  $q$  están en la misma componente de  $H_0$ , hay un isomorfismo entre los automorfismos de  $p$  y los de  $q$ , es decir  $H(p) \times H(q) \cong H(p) \times H(p)$ . Además podemos identificar  $H^I(a)$  con  $H(p)^I$  pues dado un objeto de  $(H^I(a))_n$

$$\left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \\ x_0 \downarrow & \downarrow x'_0 & \downarrow x'_n \\ p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1} a} q \end{array} \right)$$

éste determina  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in (H(p))_n^I$ . Recíprocamente, dado  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in (H(p))_n^I$  los morfismos  $x'_0, \dots, x'_n$  están determinadas por composición. Luego el morfismo  $(\partial_0, \partial_1) : H^I(a) \rightarrow H(p) \times H(q)$  puede ser identificado con el morfismo de grupos simpliciales  $H(p)^I \rightarrow H(p) \times H(p)$ , que ya está demostrado que es una fibración, pues es el correspondiente en la construcción del espacio de arcos en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (véase 2.3.1). Por último es claro que  $(\partial_0, \partial_1)\beta = \Delta$ . ■

La construcción realizada en la proposición anterior permite expresar de forma explícita la relación de homotopía (por la derecha) entre dos morfismos. Dados  $f, g : G \rightarrow H$  dos

morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  una homotopía (por la derecha) de  $f$  a  $g$  es un morfismo  $\alpha : G \rightarrow H^I$  tal que  $\partial_0\alpha = f$  y  $\partial_1\alpha = g$ , lo que supone dar:

- Una aplicación  $\alpha : O \rightarrow H_0$  tal que el diagrama

$$O \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{(f,g)} \end{array} H_0 \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} O' \times O'$$

sea conmutativo, y teniendo en cuenta que  $(\partial_0, \partial_1)\alpha = (s\alpha, t\alpha)$ , la aplicación  $\alpha$  ha de verificar que  $s\alpha = f$  y  $t\alpha = g$ .

- Una aplicación  $\alpha_0 : G_0 \rightarrow H_0^I$  tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & O \\ \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ H_0^I & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & H_0 \end{array} \quad y$$

$$G_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0} \\ \xrightarrow{(f_0, g_0)} \end{array} H_0^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H_0 \times H_0$$

sean conmutativos.

Ahora, si  $x : p \rightarrow q \in G_0$ ,  $\alpha_0(x) : \alpha(p) \rightarrow \alpha(q) \in H_0^I$  y será por tanto de la forma

$$\begin{array}{ccc} f(p) & \xrightarrow{s_0\alpha(p)} & g(p) \\ x_0 \downarrow & & \downarrow x'_0 \\ f(q) & \xrightarrow{s_0\alpha(q)} & g(q) \end{array} \quad \text{con } d_1x_0 = f_0(x), \quad d_0x'_0 = g_0(x)$$

así que dar  $\alpha_0$  en esas condiciones equivale a dar una aplicación

$$\alpha_0^0 : G_0 \longrightarrow H_1 \quad \text{tal que} \quad \begin{array}{l} s\alpha_0^0(x) = fs(x), \quad t\alpha_0^0(x) = gt(x), \\ d_1\alpha_0^0(x) = \alpha t(x) \circ f_0(x), \quad d_0\alpha_0^0(x) = g_0(x) \circ \alpha s(x) \end{array}$$

$$x \longmapsto s_0\alpha t(x) \circ x_0$$

(nótese que  $d_0\alpha_0^0(x) = \alpha t(x) \circ d_0x_0 = \alpha t(x) \circ (\alpha t(x))^{-1} \circ d_0x'_0 \circ \alpha s(x) = g_0(x) \circ \alpha s(x)$ )

El hecho de que el par  $(\alpha_0, \alpha)$  sea un morfismo de grupoides equivale claramente a que dados morfismos en  $G_0$ ,  $p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r$ , se tenga que  $\alpha_0^0(y \circ x) = \alpha_0^0(y) \circ (s_0\alpha t(x))^{-1} \circ \alpha_0^0(x)$

- Una aplicación  $\alpha_1 : G_1 \rightarrow (H^I)_1$  tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & O \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ (H^I)_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & H_0 \end{array} , & \begin{array}{ccc} G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & G_0 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_0 \\ (H^I)_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & (H^I)_0 \end{array} \quad y & G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{(f_1, g_1)} \end{array} (H^I)_1 \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H_1 \times H_1 \end{array}$$

## 2. Grupos simpliciales.

sean conmutativos.

Ahora, si  $x : p \rightarrow q \in G_1$ ,  $\alpha_1(x) : \alpha(p) \rightarrow \alpha(q) \in (H^I)_1$  y será por tanto de la forma

$$\left( \begin{array}{ccc} f(p) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(p)} g(p) & f(p) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(p)} g(p) & \\ \downarrow x_0 & \downarrow x_0' & \\ f(q) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(q)} g(q) & f(q) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(q)} g(q) & \end{array} \right) \begin{array}{l} / \\ / \end{array} \begin{array}{l} d_1 x_0 = d_1 x_1 \\ d_1 x_0' = d_1 x_1' \end{array}$$

$$\text{con } d_2 x_1 = f_1(x), d_0 x_0' = g_1(x) \text{ y } \alpha_0(d_0 x) = \begin{array}{ccc} f(p) \xrightarrow{s_0 \alpha(p)} g(p) & & \\ \downarrow d_0 x_1 & & \downarrow d_0 x_1' \\ f(q) \xrightarrow{s_0 \alpha(q)} g(q) & & \end{array} \text{ y}$$

$$\alpha_0(d_1 x) = \begin{array}{ccc} f(p) \xrightarrow{s_0 \alpha(p)} g(p) & & \\ \downarrow d_2 x_0 & & \downarrow d_2 x_0' \\ f(q) \xrightarrow{s_0 \alpha(q)} g(q) & & \end{array}$$

Se tiene pues que dar  $\alpha_1$  en esas condiciones es equivalente a dar dos aplicaciones

$$\alpha_1^0, \alpha_1^1 : G_1 \longrightarrow H_2 \quad \text{tales que}$$

$$x \longmapsto s_0^2 \alpha t(x) \circ x_0$$

$$x \longmapsto s_0^2 \alpha t(x) \circ x_1$$

$$s \alpha_1^0(x) = f s(x), t \alpha_1^0(x) = g t(x), s \alpha_1^1(x) = f s(x), t \alpha_1^1(x) = g t(x)$$

$$d_0 \alpha_1^0(x) = s_0 \alpha t(x) \circ d_0 x_0 = d_0 x_0' \circ s_0 \alpha s(x) = g_1(x) \circ s_0 \alpha s(x)$$

$$d_1 \alpha_1^0(x) = s_0 \alpha t(x) \circ d_1 x_0 = s_0 \alpha t(x) \circ d_1 x_1 = d_1 \alpha_1^1(x)$$

$$d_2 \alpha_1^0(x) = s_0 \alpha t(x) \circ d_2 x_0 = \alpha_0^0 d_1(x)$$

$$d_0 \alpha_1^1(x) = s_0 \alpha t(x) \circ d_0 x_1 = \alpha_0^0 d_0(x)$$

$$d_2 \alpha_1^1(x) = s_0 \alpha t(x) \circ d_2 x_1 = s_0 \alpha t(x) \circ f_1(x)$$

Además, si  $x : p \rightarrow q \in G_0$ , se tiene que

$$s_0 \alpha_0(x) = s_0 \left( \begin{array}{ccc} f(p) \xrightarrow{s_0 \alpha(p)} g(p) & & \\ \downarrow x_0 & & \downarrow x_0' \\ f(q) \xrightarrow{s_0 \alpha(q)} g(q) & & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} f(p) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(p)} g(p) & f(p) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(p)} g(p) & \\ \downarrow s_1 x_0 & \downarrow s_1 x_0' & \\ f(q) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(q)} g(q) & f(q) \xrightarrow{s_0^2 \alpha(q)} g(q) & \end{array} \right) = \alpha_1 s_0(x)$$

$$\text{así que } s_0 \alpha_0^0(x) = s_0^2 \alpha t(x) \circ s_0 x_0 = \alpha_1^1 s_0(x)$$

$$s_1 \alpha_0^0(x) = s_1 s_0 \alpha t(x) \circ s_1 x_0 = s_0^2 \alpha t(x) \circ s_1 x_0 = \alpha_1^0 s_0(x)$$

El hecho de que  $(\alpha_1, \alpha)$  sea un morfismo de grupoides equivale a que dado  $p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r \in G_1$  se tenga que  $\alpha_1^0(y \circ x) = \alpha_1^0(y) \circ (s_0^2 \alpha t(x))^{-1} \circ \alpha_1^0(x)$  y  $\alpha_1^1(y \circ x) = \alpha_1^1(y) \circ (s_0^2 \alpha t(x))^{-1} \circ \alpha_1^1(x)$

Reiterando estos cálculos y teniendo en cuenta la definición de homotopía dada en 2.1.11 se tiene en definitiva:

**Proposición 2.3.4.** Sean  $G, H \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $f, g : G \rightarrow H$  dos morfismos. Entonces se tiene que dar un morfismo  $\alpha : G \rightarrow H^I$  tal que  $(\partial_0, \partial_1)\alpha = (f, g)$  es equivalente a dar una homotopía  $\alpha : f \simeq g$

A continuación haremos la construcción del espacio de arcos en la categoría de grupoides simpliciales punteados.

**Proposición 2.3.5.** Sea  $(H, p)$  un objeto de la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$ . Entonces el grupoide simplicial punteado  $(H^I, Id_p)$ , es un espacio de arcos para  $(H, p)$ , donde  $H^I$  es el grupoide simplicial definido en 2.3.2.

*Demostración:* Hemos de demostrar que existe una factorización del morfismo diagonal de la forma

$$(H, p) \xrightarrow{\beta} (H^I, Id_p) \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} (H \times H, (p, p))$$

Para ello basta definir los morfismos  $\beta$  y  $(\partial_0, \partial_1)$  como en la proposición 2.3.3. Se tiene así inmediatamente que ambos morfismos están bien definidos, y que  $\beta$  es una equivalencia y  $(\partial_0, \partial_1)$  una fibración en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$ . ■

**2.3.6.** La construcción del espacio de arcos en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  permite definir un funtor

$$\bar{\Omega} : (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$$

$$\bar{\Omega}((H, p)) = Ker((H^I, Id_p) \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} (H \times H, (p, p)))$$

que induce el correspondiente funtor de lazos en la categoría  $H_0((\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}))$ .

**2.3.7.** Recordemos ahora que si  $G_\bullet$  es un grupo simplicial cofibrante (esto es, libre), el grupo simplicial  $G_\bullet \otimes I$ , cuyos  $n$ -símplices son  $(G_\bullet \otimes I)_n = \coprod_{i=0}^{n+1} (G_n)_i$ , donde  $(G_n)_i = G_n$ ,  $0 \leq i \leq n$ , es un cilindro para  $G_\bullet$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  dado que se tiene una factorización del morfismo codiagonal

$$G_\bullet \amalg G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma} G_\bullet$$

## 2. Grupos simpliciales.

donde  $\sigma$ , que es el morfismo inducido por las identidades, es una equivalencia débil, y el morfismo  $i_0 + i_1$ , que en el inducido por la primera y última inclusión respectivamente, es una cofibración (véase [52], [40]).

Esta construcción permite definir el concepto de homotopía por la izquierda, pues se tiene que dados  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos de grupos simpliciales, con  $G_\bullet$  cofibrante, una homotopía por la izquierda de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un morfismo  $h_\bullet : G_\bullet \otimes I \rightarrow H_\bullet$  verificando que  $h_\bullet i_0 = f_\bullet$  y  $h_\bullet i_1 = g_\bullet$ .

**Definición 2.3.8.** Dado  $G \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  definimos el grupoide simplicial  $G \otimes I$  como sigue:

- El conjunto de objetos de  $G \otimes I$  es  $O \times \{0, 1\}$ , y lo notaremos  $O \vee O$ . Dados  $(p, 0) \in O \times \{0\}$  y  $(p, 1) \in O \times \{1\}$  los llamaremos  $p_0$  y  $p_1$  respectivamente.
- El conjunto de morfismos en dimensión cero  $(G \otimes I)_0$  lo notaremos  $G_0^0 \vee G_0^1 \vee O$ . Veamos como está compuesto y para ello hagamos algunas consideraciones:

Para cada  $x \in G_0$ ,  $x : p \rightarrow q$ , tenemos dos morfismos que notaremos  $x^0 : p_0 \rightarrow q_0$  y  $x^1 : p_0 \rightarrow q_0$ . Los conjuntos  $G_0^0$  y  $G_0^1$  son de la forma  $G_0^0 = \{x^0, x \in G_0\}$  y  $G_0^1 = \{x^1, x \in G_0\}$ .

Para cada  $p \in O$  se tiene un morfismo  $I_p : p_0 \rightarrow p_1$ , y su inverso  $I_p^{-1} : p_1 \rightarrow p_0$  que "conectan" los conjuntos  $O \times \{0\}$  y  $O \times \{1\}$ .

El conjunto  $(G \otimes I)_0$  está compuesto por las tres clases de morfismos descritos anteriormente y por todas las palabras  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , donde cada  $\alpha_i$  es un morfismo de los descritos anteriormente, con  $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$ . Un morfismo de tal forma lo notaremos  $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0$ . Todos los morfismos anteriores están sujetos a las relaciones  $x^0 y^0 = (x \circ y)^0$ ,  $x^1 y^1 = (x \circ y)^1$ ,  $(Id_p)^0 = (Id_p)^1$ .

Tenemos así definido un grupoide

$$(G \otimes I)_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow[t]{s} \\ \xrightarrow{s} \end{array} O \vee O$$

donde los morfismos  $s$ ,  $t$  e  $Id$  están definidos:

Dados  $p_0, p_1 \in O \vee O$ ,  $Id_{p_0} = (Id_p)^0 = (Id_p)^1$ ;  $Id_{p_1} = I_p I_p^{-1}$

Dados  $x^0 : p_0 \rightarrow q_0 \in G_0^0$  y  $x^1 : p_0 \rightarrow q_0 \in G_0^1$ ,  $s(x^0) = s(x^1) = s(I_p) = p_0$  y  $s(I_p^{-1}) = p_1$ ;  $t(x^0) = t(x^1) = t(I_q^{-1}) = q_0$  y  $t(I_q) = q_1$ .

- Análogamente al conjunto  $(G \otimes I)_1$  lo notaremos  $G_1^{00} \vee G_1^{01} \vee G_1^{11} \vee O$ .

Dado un morfismo  $x : p \rightarrow q \in G_1$ , construimos  $x^{00} : p_0 \rightarrow q_0 \in G_1^{00}$ ,  $x^{01} : p_0 \rightarrow q_0 \in G_1^{01}$ , y  $x^{11} : p_0 \rightarrow q_0 \in G_1^{11}$ . Al igual que antes, dado  $p \in O$  también se consideran los morfismos  $I_p : p_0 \rightarrow p_1$ , y todas las composiciones de la forma  $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0$ , donde

cada  $\alpha_i$  es un morfismo de los descritos anteriormente con  $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$ . Los morfismos anteriores están sujetos a las relaciones  $x^{00}y^{00} = (x \circ y)^{00}$ ,  $x^{01}y^{01} = (x \circ y)^{01}$ ,  $x^{11}y^{11} = (x \circ y)^{11}$ ,  $(Id_p)^{00} = (Id_p)^{01} = (Id_p)^{11} = Id_{p_0}$ .

- En dimensión 2 tendríamos  $(G \otimes I)_2 = G_2^{000} \vee G_2^{001} \vee G_2^{011} \vee G_2^{111} \vee O$ .
- En general definimos  $(G \otimes I)_n = \bigvee_{\tau \in (\Delta[1])_n} G_n^\tau \vee O$ , donde el conjunto de la derecha se construye como hemos explicado anteriormente. Así, dado  $x \in G_n$  y  $\tau \in (\Delta[1])_n$ , tenemos  $x^\tau \in G_n^\tau \subset (G \otimes I)_n$ .

Se tiene así definido, en cada dimensión  $n$ , un grupoide

$$(G \otimes I)_n \begin{array}{c} \xrightarrow{Id} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} O \vee O$$

Los morfismos cara y degeneración se definen:  $d_i(x^\tau) = (d_i x)^{d_i \tau}$ , con  $x^\tau \in G_n$ ,  $0 \leq i \leq n$

$d_i(I_p) = I_p$  en una dimensión menor.

$s_i(x^\tau) = (s_i x)^{s_i \tau}$ , con  $x^\tau \in G_n$ ,  $0 \leq i \leq n-1$

$s_i(I_p) = I_p$  en una dimensión mayor.

La comprobación de que con estas definiciones

$$G \otimes I : \begin{array}{ccc} \dots & (G \otimes I)_n & \xrightarrow{d_n} (G \otimes I)_{n-1} & \dots \\ & \downarrow s \quad \downarrow t & \xrightarrow{d_0} & \downarrow s \quad \downarrow t \\ \dots & O \vee O & \xrightarrow{=} & O \vee O \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \dots & (G \otimes I)_1 & \xrightarrow{d_1} (G \otimes I)_0 & \dots \\ & \downarrow s \quad \downarrow t & \xrightarrow{d_0} & \downarrow s \quad \downarrow t \\ \dots & O \vee O & \xrightarrow{=} & O \vee O \end{array}$$

es un grupoide simplicial es rutinaria.

Destaquemos que la construcción anterior determina un functor

$$(-) \otimes I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$$

**Proposición 2.3.9.** Dado  $G \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  cofibrante, el grupoide simplicial  $G \otimes I$  definido anteriormente es un objeto cilindro para  $G$ .

*Demostración:* Tenemos que demostrar que existe una factorización del morfismo codiagonal  $\nabla : G \amalg G \rightarrow G$  de la forma

$$G \amalg G \xrightarrow{i_0 + i_1} G \otimes I \xrightarrow{\sigma} G$$

donde el morfismo  $i_0 + i_1$  es una cofibración y  $\sigma$  es una equivalencia débil.

## 2. Grupos simpliciales.

Definimos  $\sigma : G \otimes I \rightarrow G$  por:

- $\sigma(p_0) = \sigma(p_1) = p$ , donde  $p_0 \in O \times \{0\}$  y  $p_1 \in O \times \{1\}$
- $\sigma(x^\tau) = x$ ,  $x^\tau \in G_n^\tau$
- $\sigma(I_p) = Id_p$ ,  $p \in O$ .

Los morfismos  $i_0, i_1 : G \rightarrow G \otimes I$  vienen dados por:

- $i_0(p) = p_0$ ,  $\forall p \in O$ ,
- $i_0(x) = x^{00\dots 0}$ ,  $x \in G_n$ , es decir,  $i_0(x)$  es  $x$  visto en la primera componente de  $(G \otimes I)_n$ ,
- $i_1(p) = p_1$ ,  $\forall p \in O$ ,
- $i_1(x) = I_q x^{1\dots 11} I_p^{-1}$ ,  $x \in G_n$ , es decir según el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p_1 & \xrightarrow{i_1(x)} & q_1 \\ I_p^{-1} \downarrow & & \uparrow I_q \\ p_0 & \xrightarrow{x^{1\dots 11}} & q_0 \end{array}$$

Evidentemente se tiene que  $\sigma i_0 = \sigma i_1 = 1_G$

Veamos a continuación que si  $G$  es un grupoide simplicial cofibrante,  $i_0 + i_1$  es una cofibración, de hecho una aplicación libre. Para ello hemos de ver que es inyectiva en objetos y en morfismos, lo cual es evidente, y que existe un conjunto de morfismos en  $G \otimes I$ , cerrado para degeneraciones, tal que todo morfismo se escribe de forma única como composición reducida de morfismos que están en la imagen de  $i_0 + i_1$ , morfismos de dicho conjunto y sus inversos.

Como  $G$  es un grupoide simplicial libre tiene una base  $V$ . Sea  $W_n = V_n^{00\dots 01} \cup V_n^{00\dots 011} \cup \dots \cup V_n^{011\dots 1} \cup O$  y comprobemos que  $W = \{W_n; n \in \mathbb{N}\}$  es una base de  $G \otimes I$ .

Que es cerrado para degeneraciones es consecuencia inmediata de la propia definición de las degeneraciones.

Un morfismo de  $G \otimes I$  es de la forma  $I_q x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_n^{\tau_n} I_p$ , donde la primera y última composiciones pueden aparecer o no. Fijémonos en un  $x_i^{\tau_i} : p_0 \rightarrow q_0$ ; si  $\tau_i = (00\dots 0)$ , entonces  $x_i^{\tau_i}$  está en la imagen de  $i_0$  y por tanto en la de  $i_0 + i_1$ ; si  $\tau_i = (11\dots 1)$ , puede expresarse como  $x_i^{\tau_i} = I_q^{-1} i_1(x_i) I_p$  y por tanto como composición de dos morfismos pertenecientes a  $W_n$  ( $I_p, I_q^{-1}$ ) o sus inversos, y otro que está en la imagen de  $i_1$ , y por tanto en la de  $i_0 + i_1$ ; por último, si  $\tau_i \neq (00\dots 0)$  y  $\tau_i \neq (11\dots 1)$ , consideramos el morfismo  $x_i$  que admitirá una expresión como composición de elementos de la base  $X$  y, por lo tanto,  $x_i^{\tau_i}$  se podrá expresar como composición de morfismos pertenecientes a  $V_n^\tau$ .

Para comprobar ahora que  $\sigma$  es una equivalencia débil es suficiente ver (véase 1.1.5) que es una equivalencia homotópica.

Evidentemente  $\sigma i_0 = 1_G$ . Veamos que  $i_0 \sigma \simeq 1_{G \otimes I}$ , y para ello construyamos la homotopía.

En primer lugar, veamos cómo está definida la composición  $i_0 \sigma : G \otimes I \rightarrow G \otimes I$ :

$$\begin{aligned} (i_0 \sigma)(p_0) &= p_0, (i_0 \sigma)(p_1) = p_1, (i_0 \sigma)(I_p) = (Id_p)^0, p \in O; \\ (i_0 \sigma)(x^\tau) &= x^{00\dots 0}, x^\tau \in (G \otimes I)_n. \end{aligned}$$



Dar una homotopía es dar un morfismo  $H : G \otimes I \rightarrow (G \otimes I)^I$  verificando  $\partial_0 H = i_0 \sigma$ ,  $\partial_1 H = 1_{G \otimes I}$ . Para hacer más clara su definición  $H : G \otimes I \rightarrow (G \otimes I)^I$ , la explicitaremos para dimensiones bajas:

- En objetos, dado  $p \in O$ :

$$H(p_0) = ( p_0 \xrightarrow{Id} p_0 )$$

$$H(p_1) = ( p_0 \xrightarrow{I_p} p_1 )$$

y se verifica que

$$\partial_0 H(p_0) = i_0 \sigma(p_0), \partial_1 H(p_0) = p_0, \partial_0 H(p_1) = i_0 \sigma(p_1) \text{ y } \partial_1 H(p_1) = p_1.$$

- En dimensión 0:

$$H(x^0) = \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ (s_0 x)^{00} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{00} \\ q_0 & \xrightarrow{Id} & q_0 \end{array}$$

se verifica que

$$\partial_0 H(x^0) = \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ (s_0 x)^{00} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{00} \\ q_0 & \xrightarrow{Id} & q_0 \end{array} \right) = d_1 (s_0 x)^{00} = x^0 = (i_0 \sigma)(x^0)$$

$$\partial_1 H(x^0) = \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ (s_0 x)^{00} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{00} \\ q_0 & \xrightarrow{Id} & q_0 \end{array} \right) = d_0 (s_0 x)^{00} = x^0 = 1_{G \otimes I}(x^0)$$

$$H(x^1) = \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ (s_0 x)^{01} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{01} \\ q_0 & \xrightarrow{Id} & q_0 \end{array}$$

se verifica que

$$\partial_0 H(x^1) = \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ (s_0 x)^{01} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{01} \\ q_0 & \xrightarrow{Id} & q_0 \end{array} \right) = d_1 (s_0 x)^{01} = x^0 = (i_0 \sigma)(x^1)$$

## 2. Grupos simpliciales.

$$\partial_1 H(x^1) = \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ (s_0x)^{01} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{01} \\ q_0 & \xrightarrow{Id} & q_0 \end{array} \right) = d_0(s_0x)^{01} = x^1 = 1_{G \otimes I}(x^1)$$

$$H(I_p) = \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ Id \parallel & & \downarrow I_p \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array}$$

$$\partial_0 H(I_p) = \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ Id \parallel & & \downarrow I_p \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} \right) = d_1 Id_p = (d_1 Id_p)^{d_1(0,0)} = (Id_p)^0 = (i_0\sigma)(I_p)$$

$$\partial_1 H(I_p) = \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{Id} & p_0 \\ Id \parallel & & \downarrow I_p \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} \right) = d_0 I_p = I_p = 1_{G \otimes I}(I_p)$$

Como hemos comprobado, se tiene que  $\partial_0 H = i_0\sigma$  y  $\partial_1 H = 1_{G \otimes I}$

- En dimensión 1

$$H(x^{00}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{=} & p_0 \\ (s_0x)^{000} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{000} \\ q_0 & \xrightarrow{=} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{=} & p_0 \\ (s_1x)^{000} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{000} \\ q_0 & \xrightarrow{=} & q_0 \end{array} \right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial_0 H(x^{00})) &= \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{=} & p_0 \\ (s_0x)^{000} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{000} \\ q_0 & \xrightarrow{=} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{=} & p_0 \\ (s_1x)^{000} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{000} \\ q_0 & \xrightarrow{=} & q_0 \end{array} \right) \\ &= d_2(s_1x)^{000} = x^{00} = (i_0\sigma)(x^{00}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_1 H(x^{00})) &= \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{=} & p_0 \\ (s_0x)^{000} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{000} \\ q_0 & \xrightarrow{=} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{=} & p_0 \\ (s_1x)^{000} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{000} \\ q_0 & \xrightarrow{=} & q_0 \end{array} \right) \\ &= d_0(s_0x)^{000} = x^{00} = 1_{G \otimes I}(x^{00}) \end{aligned}$$

$$H(x^{01}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_0x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_1x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} \right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial_0 H(x^{01})) &= \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_0x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_1x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} \right) \\ &= d_2(s_1x)^{001} = x^{00} = (i_0\sigma)(x^{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_1 H(x^{01})) &= \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_0x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_1x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} \right) \\ &= d_0(s_0x)^{001} = x^{01} = 1_{G \otimes I}(x^{01}) \end{aligned}$$

$$H(x^{11}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_0x)^{011} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{011} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_1x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} \right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial_0 H(x^{11})) &= \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_0x)^{011} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{011} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_1x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} \right) \\ &= d_2(s_1x)^{001} = x^{00} = (i_0\sigma)(x^{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_1 H(x^{11})) &= \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_0x)^{011} \downarrow & & \downarrow (s_0x)^{011} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xlongequal{\quad} & p_0 \\ (s_1x)^{001} \downarrow & & \downarrow (s_1x)^{001} \\ q_0 & \xlongequal{\quad} & q_0 \end{array} \right) \\ &= d_0(s_0x)^{011} = x^{11} = 1_{G \otimes I}(x^{11}) \end{aligned}$$

$$H(I_p) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \\ Id \parallel & & \parallel Id \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \\ Id \parallel & & \parallel Id \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} \right)$$

se tiene que

## 2. Grupos simpliciales.

$$(\partial_0 H(I_p)) = \partial_0 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \\ Id \parallel & & \parallel Id \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \\ Id \parallel & & \parallel Id \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} \right) = d_1 Id_p = Id_p$$

$$= (Id_p)^0 = (i_0 \sigma)(I_p)$$

$$(\partial_1 H(I_p)) = \partial_1 \left( \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \\ Id \parallel & & \parallel Id \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \\ Id \parallel & & \parallel Id \\ p_0 & \xrightarrow{I_p} & p_1 \end{array} \right) = d_0 I_p = I_p = 1_{G \otimes I}(I_p)$$

- En dimensión 2

$$H(x^{000}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_0 x)^{0000} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{0000} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_1 x)^{0000} \downarrow & & \downarrow (s_1 x)^{0000} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_2 x)^{0000} \downarrow & & \downarrow (s_2 x)^{0000} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} \right)$$

$$H(x^{001}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_0 x)^{0001} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{0001} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_1 x)^{0001} \downarrow & & \downarrow (s_1 x)^{0001} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_2 x)^{0001} \downarrow & & \downarrow (s_2 x)^{0001} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} \right)$$

$$H(x^{011}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_0 x)^{0011} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{0011} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_1 x)^{0011} \downarrow & & \downarrow (s_1 x)^{0011} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_2 x)^{0011} \downarrow & & \downarrow (s_2 x)^{0011} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} \right)$$

$$H(x^{111}) = \left( \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_0 x)^{0111} \downarrow & & \downarrow (s_0 x)^{0111} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_1 x)^{0111} \downarrow & & \downarrow (s_1 x)^{0111} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} , \begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_2 x)^{0111} \downarrow & & \downarrow (s_2 x)^{0111} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} \right)$$

- En general, en dimensión  $n$ , la homotopía  $H : (G \otimes I)_n \rightarrow ((G \otimes I)^I)_n$  estaría definida:

Dado  $x^{00^{(n-j+1)011^{(j,1)}}$ ,  $0 \leq j \leq n+1$ , un elemento de  $(G \otimes I)_n$

$H(x^{00^{(n-j+1)011^{(j,1)}}}) = (d_0, d_1, \dots, d_k, \dots, d_n)$ , donde cada  $d_k$  es un diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc} p_0 = p_0 & & p_0 = p_0 \\ (s_k x)^{00^{(n-j+2)011^{(j,1)}}} \downarrow & & \downarrow (s_k x)^{00^{(n-j+2)011^{(j,1)}}} \\ q_0 = q_0 & & q_0 = q_0 \end{array} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n-j+1$$

$$\begin{array}{ccc}
 p_0 & \equiv & p_0 \\
 \downarrow (s_k x)^{00(k+1)011(n-k+1)} & & \downarrow (s_k x)^{00(k+1)011(n-k+1)} \\
 q_0 & \equiv & q_0
 \end{array} \quad \text{si } n - j + 2 \leq k \leq n + 1$$

Análogamente a como se hizo para dimensiones bajas, es rutinario comprobar que se verifica  $\partial_0 H = i_0 \sigma$  y  $\partial_1 H = 1_{G \otimes I}$ . ■

La construcción realizada anteriormente permite ahora expresar de forma explícita la relación de homotopía (por la izquierda) entre dos morfismos. Dados  $f, g : G \rightarrow H$  dos morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , una homotopía (por la izquierda) de  $f$  a  $g$  es un morfismo  $\beta : G \otimes I \rightarrow H$  tal que  $\beta i_0 = f$  y  $\beta i_1 = g$ , lo que supone dar:

- Una aplicación  $\bar{\beta} : O \vee O \rightarrow O'$  tal que para cada  $p \in O$ ,  $\bar{\beta}(p_0) = f(p)$  y  $\bar{\beta}(p_1) = g(p)$ , así que  $\bar{\beta}$  está totalmente determinada por las aplicaciones  $f, g : O \rightarrow O'$ .
- Una aplicación  $\beta_0 : (G \otimes I)_0 \rightarrow H_0$  tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 (G \otimes I)_0 & \xrightleftharpoons[t]{s} & O \vee O \\
 \beta_0 \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\
 H_0 & \xrightleftharpoons[t]{s} & O'
 \end{array} \quad \text{y} \quad G_0 \amalg G_0 \xrightleftharpoons[(f_0+g_0)]{i_0+i_1} (G \otimes I)_0 \xrightarrow{\beta_0} H_0$$

sean conmutativos.

Ahora, dado  $x : p \rightarrow q \in G_0$ ,  $i_0(x) = x^0$  y  $\beta_0(x^0) = f_0(x) : f(p) \rightarrow f(q)$ , así que  $\beta_0$  está determinada sobre  $G_0^0$  por  $f_0$ .

Si  $p \in O$ ,  $\beta_0(I_p)$  es un morfismo en  $H_0$  tal que  $s\beta_0(I_p) = f(p)$  y  $t\beta_0(I_p) = g(p)$ , así que dar  $\beta_0$  sobre los morfismos  $I_p$  equivale a dar una aplicación  $\beta : O \rightarrow H_0$  tal que  $s\beta = f$  y  $t\beta = g$  (poniendo  $\beta_0(x^0) = f_0(x)$ ;  $\beta_0(I_p) = \beta(p)$ ;  $\beta_0(x^1) = \beta s(x)^{-1} \circ g_0(x) \circ \beta s(x)$ ).

- Una aplicación  $\beta_1 : (G \otimes I)_1 \rightarrow H_1$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 (G \otimes I)_1 & \xrightleftharpoons[t]{s} & O \vee O \\
 \beta_1 \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\
 H_1 & \xrightleftharpoons[t]{s} & O'
 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{s_0} & \\
 (G \otimes I)_1 & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & (G \otimes I)_0 \\
 \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_0 \\
 H_1 & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & H_0
 \end{array} \quad \text{y}$$

$$G_1 \amalg G_1 \xrightleftharpoons[(f_1+g_1)]{i_0+i_1} (G \otimes I)_1 \xrightarrow{\beta_1} H_1 \quad \text{sean conmutativos.}$$

Ahora, si  $p \in O$  es claro que  $\beta_1(I_p) = s_0 \beta(p)$  y, dado  $x : p \rightarrow q \in G_1$  se verifica que  $\beta_1 i_0(x) = \beta_1(x^{00}) = f_1(x) : f(p) \rightarrow f(q)$  y que

## 2. Grupos simpliciales.

$\beta_1 i_1(x) = s_0 \beta t(x) \circ \beta_1(x^{11}) s_0 \circ \beta s(x)^{-1} = g_1(x) : g(p) \rightarrow g(p)$ . Entonces  $\beta_1$  queda determinada dando  $\beta_1(x^{01}) : f(p) \rightarrow f(q)$  que ha de verificar que

$$d_0 \beta_1(x^{01}) = \beta_0(d_0(x^{01})) = \beta_0((d_0 x)^1) = \beta t(x)^{-1} \circ g_0 d_0(x) \circ \beta s(x)$$

$$d_1 \beta_1(x^{01}) = \beta_0(d_1(x^{01})) = \beta_0((d_1 x)^0) = f_0 d_1(x)$$

lo cual es equivalente a dar una aplicación

$$\begin{aligned} \beta_1^1 : G_1 &\longrightarrow H_1 \\ x &\longmapsto s_0 \beta t(x) \circ \beta_1(x^{01}) : f(p) \rightarrow g(q) \end{aligned}$$

verificando 
$$\begin{aligned} d_0 \beta_1^1(x) &= \beta t(x) \circ \beta t(x)^{-1}(x) \circ g_0 d_0(x) \circ \beta s(x) = g_0(x) \circ d_0 \beta s(x) \\ d_1 \beta_1^1(x) &= \beta t(x) \circ f_0 d_1(x) \end{aligned}$$

El hecho de que el par  $(\beta_1, \bar{\beta})$  sea un morfismo de grupoides equivale a que dado  $p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r \in G_1$  se tenga que

$$\begin{aligned} \beta_1^1(y \circ x) &= s_0 \beta t(y) \circ \beta_1((y \circ x)^{01}) = s_0 \beta t(y) \circ \beta_1(y^{01} x^{01}) = s_0 \beta t(y) \circ \beta_1(y^{01}) \circ \beta_1(x^{01}) = \\ &= s_0 \beta t(y) \circ \beta_1(y^{01}) \circ s_0 \beta t(x)^{-1} \circ s_0 \beta t(x) \circ \beta_1(x^{01}) = \beta_1^1(y) \circ (s_0 \beta t(x))^{-1} \circ \beta_1^1(x) \end{aligned}$$

- Una aplicación  $\beta_2 : (G \otimes I)_2 \rightarrow H_2$  tal que

$$\begin{array}{ccc} (G \otimes I)_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & O \vee O \\ \beta_2 \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ H_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & O' \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} s_0 \\ s_1 \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & \\ (G \otimes I)_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & (G \otimes I)_1 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_0 \\ H_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & H_1 \\ & \begin{array}{c} s_0 \\ s_1 \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & \end{array}$$

y

$$G_2 \amalg G_2 \xrightarrow{i_0+i_1} (G \otimes I)_2 \xrightarrow{\beta_2} H_2$$

$f_2+g_2$

sean conmutativos.

Ahora, dado  $p \in O$  se tiene que  $\beta_2(I_p) = s_0^2 \beta(p)$  y si  $x : p \rightarrow q \in G_2$ ,  $\beta_2 i_0(x) = \beta_2(x^{000}) = f_2(x)$  y  $\beta_2 i_1(x) = \beta_2(I_q x^{111} I_p^{-1}) = s_0^2 \beta t(x) \circ \beta_2(x^{111}) \circ s_0^2 \beta s(x)^{-1} = g_2(x)$ . Entonces  $\beta_1$  queda determinada por  $\beta_2(x^{001})$  y  $\beta_2(x^{011})$  que han de verificar que

$$d_0 \beta_2(x^{001}) = \beta_1 d_0(x^{001}) = \beta_1((d_0 x)^{01}) = s_0 \beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_0(x)$$

$$d_1 \beta_2(x^{001}) = \beta_1 d_1(x^{001}) = \beta_1((d_1 x)^{01}) = s_0 \beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_1(x)$$

$$\begin{aligned} d_2\beta_2(x^{001}) &= \beta_1 d_2(x^{001}) = \beta_1((d_2x)^{00}) = f_1 d_2(x) \circ d_0\beta_2(x^{011}) = \beta_1 d_0(x^{011}) = \\ &= \beta_1((d_0x)^{11}) = s_0\beta t(x)^{-1} \circ g_1 d_0(x) \circ s_0\beta s(x) \end{aligned}$$

$$d_1\beta_2(x^{011}) = \beta_1 d_1(x^{011}) = \beta_1((d_1x)^{01}) = s_0\beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_1(x)$$

$$d_2\beta_2(x^{011}) = \beta_1 d_2(x^{011}) = \beta_1((d_2x)^{01}) = s_0\beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_2(x)$$

Lo cual es equivalente a dar dos aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} \beta_2^1 : G_2 & \longrightarrow & H_2 \\ x \longmapsto & \longrightarrow & s_0^2\beta t(x) \circ \beta_2(x^{001}) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \beta_2^2 : G_2 & \longrightarrow & H_2 \\ x \longmapsto & \longrightarrow & s_0^2\beta t(x) \circ \beta_2(x^{011}) \end{array}$$

verificando

$$\begin{aligned} d_0\beta_2^1(x) &= d_0 s_0^2\beta t(x) \circ d_0\beta_2(x^{011}) = s_0\beta t(x) \circ s_0\beta t(x)^{-1} \circ g_1 d_0(x) \circ s_0\beta s(x) = \\ &= g_1 d_0(x) \circ s_0\beta s(x) \end{aligned}$$

$$d_1\beta_2^1(x) = d_1 s_0^2\beta t(x) \circ d_1\beta_2(x^{011}) = s_0\beta t(x) \circ s_0\beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_0(x) = \beta_1^1 d_0(x)$$

$$d_2\beta_2^1(x) = d_2 s_0^2\beta t(x) \circ d_2\beta_2(x^{011}) = s_0 d_1 s_0\beta t(x) \circ f_1 d_2(x) = s_0\beta t(x) \circ f_1 d_2(x)$$

$$d_0\beta_2^2(x) = d_0 s_0^2\beta t(x) \circ d_0\beta_2(x^{001}) = s_0\beta t(x) s_0\beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_0(x) = \beta_1^1 d_0(x)$$

$$d_1\beta_2^2(x) = d_1 s_0^2\beta t(x) \circ d_1\beta_2(x^{001}) = s_0\beta t(x) \circ s_0\beta t(x)^{-1} \circ \beta_1^1 d_1(x) = \beta_1^1 d_1(x)$$

$$d_2\beta_2^2(x) = d_2 s_0^2\beta t(x) \circ d_2\beta_2(x^{001}) = s_0 d_1 s_0\beta t(x) \circ f_1 d_2(x) = s_0\beta t(x) f_1 d_2(x)$$

Además, si  $x : p \rightarrow q \in G_1$  se tiene que

$$d_0\beta_2^2 s_0(x) = \beta_1^1(x), \text{ de donde } \beta_2^2 s_0(x) = s_0\beta_1^1(x)$$

$$d_1\beta_2^1 s_0(x) = \beta_1^1(x), \text{ de donde } \beta_2^1 s_0(x) = s_1\beta_1^1(x)$$

El hecho de que el par  $(\beta_2, \bar{\beta})$  sea un morfismo de grupoides equivale a que dado  $p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r \in G_2$  se tenga que

$$\begin{aligned} \beta_2^1(y \circ x) &= s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2((y \circ x)^{011}) = s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2(y^{011} x^{011}) = s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2(y^{011}) \circ \beta_2(x^{011}) = \\ &= s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2(y^{011}) (s_0^2\beta t(x))^{-1} \circ s_0^2\beta t(x) \circ \beta_2(x^{011}) = \beta_2^1(y) \circ (s_0^2\beta t(x))^{-1} \circ \beta_2^1(x) \\ \beta_2^2(y \circ x) &= s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2((y \circ x)^{001}) = s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2(y^{001} x^{001}) = \\ &= s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2(y^{001}) \circ \beta_2(x^{001}) = \\ &= s_0^2\beta t(y) \circ \beta_2(y^{001}) \circ (s_0^2\beta t(x))^{-1} \circ s_0^2\beta t(x) \circ \beta_2(x^{001}) = \\ &= \beta_2^2(y) \circ (s_0^2\beta t(x))^{-1} \circ \beta_2^2(x) \end{aligned}$$

Reiterando estos cálculos y teniendo en cuenta la definición 2.1.10 se tiene en definitiva:

## 2. Grupos simpliciales.

**Proposición 2.3.10.** Sean  $f, g : G \rightarrow H$  dos morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces se tiene que dar un morfismo  $\beta : G \otimes I \rightarrow H$  tal que  $\beta(i_0 + i_1) = f + g$  es equivalente a dar una homotopía  $\beta : f \simeq g$

Como consecuencia inmediata de las proposiciones 2.3.4, 2.3.10 y 2.1.11 se tiene el siguiente

**Corolario 2.3.11.** El funtor  $(-) \otimes I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es adjunto por la izquierda al funtor  $(-)^I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

Dado un grupoide simplicial punteado cofibrante  $(G, p)$ , construiremos a continuación un objeto cilindro para él.

Consideremos el grupoide unidad  $\mathcal{I}$  y el grupoide simplicial constante construido a partir de él, al que seguiremos notando  $\mathcal{I}$ , así como el morfismo de grupos simpliciales  $u : \mathcal{I} \rightarrow G \otimes I$ , definido en cada dimensión:  $u(0) = p_0$ ,  $u(1) = p_1$ ,  $u(0 \rightarrow 1) = I_p$ , donde  $G \otimes I$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  e  $I_p$  están dados como en la definición 2.3.8. Este morfismo da lugar a otro, que seguiremos llamando  $u$ , en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$

$$u : (\mathcal{I}, 0) \rightarrow (G \otimes I, p_0)$$

**Definición 2.3.12.** Sea  $(G, p)$  un grupoide simplicial punteado. Definimos  $(\overline{G \otimes I}, p_0)$  mediante el siguiente cuadrado co-cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{I}, 0) & \xrightarrow{u} & (G \otimes I, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \gamma \\ (\{*\}, *) & \xrightarrow{i} & (\overline{G \otimes I}, p_0) \end{array}$$

Nótese que el grupoide simplicial  $\overline{G \otimes I}$  puede ser identificado con el grupoide simplicial  $G \otimes I$ , junto con las relaciones  $p_0 = p_1$ ,  $I_p = Id_{p_0} = Id_{p_1}$ .

**Proposición 2.3.13.** Dado  $G$  un grupoide simplicial cofibrante, el grupoide simplicial punteado  $(\overline{G \otimes I}, p_0)$  es un objeto cilindro para  $(G, p)$ .

*Demostración:* Tenemos que demostrar que existe una factorización del morfismo codiagonal

$$(G, p) \amalg (G, p) \xrightarrow{i'_0 + i'_1} (\overline{G \otimes I}, p_0) \xrightarrow{\sigma'} (G, p)$$

donde el morfismo  $i'_0 + i'_1$  es una cofibración y  $\sigma'$  es una equivalencia débil. Para ello consideraremos los morfismos de grupos simpliciales  $\sigma : G \otimes I \rightarrow G$ ,  $i_0, i_1 : G \rightarrow G \otimes I$ , definidos en la proposición 2.3.9, así como los correspondientes morfismos inducidos en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$ , que seguiremos denotando con el mismo nombre,  $\sigma : (G \otimes I, p_0) \rightarrow (G, p)$  e  $i_0 : (G, p) \rightarrow (G \otimes I, p_0)$ .



$\sigma'$  es el morfismo inducido en el cuadrado co-cartesiano dado en 2.3.12 por los morfismos  $\sigma : (G \otimes I, p_0) \rightarrow (G, p)$  y  $0 : (\{*\}, *) \rightarrow (G, p)$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{I}, 0) & \xrightarrow{u} & (G \otimes I, p_0) \\
 \downarrow 0 & & \downarrow \gamma \\
 (\{*\}, *) & \xrightarrow{\quad} & (\overline{G \otimes I}, p_0) \\
 & \searrow 0 & \nearrow \sigma \\
 & & (G, p)
 \end{array}$$

puesto que se verifica que  $\sigma u = 0$ .

Veamos cómo están definidos los morfismos  $i'_0$  y  $i'_1$ .

$i'_0 : (G, p) \rightarrow (\overline{G \otimes I}, p_0)$  es la composición

$$(G, p) \xrightarrow{i_0} (G \otimes I, p_0) \xrightarrow{\gamma} (\overline{G \otimes I}, p_0)$$

es decir, en cada dimensión, dado  $q$  un objeto de  $G$ , se define  $i'_0(q) = \gamma(i_0(q)) = \gamma(q_0) = q_0$ , y dado  $x : q \rightarrow r$  un morfismo en  $G$ , se define  $i'_0(x) = \gamma i_0(x) = \gamma(x^{00\dots 0}) = x^{00\dots 0}$ .

Para definir  $i'_1$  consideramos la composición de morfismos de grupoides simpliciales  $\gamma i_1 : G \rightarrow \overline{G \otimes I}$ . Dicho morfismo da lugar al morfismo de grupoides simpliciales punteados  $i'_1 : (G, p) \rightarrow (\overline{G \otimes I}, p_0)$ . Más concretamente, en cada dimensión, dado  $q$  un objeto de  $G$ , se define  $i'_1(q) = q_0$ , y dado  $x : q \rightarrow r$  un morfismo en  $G$ , se define  $i'_1(x) = I_q x^{11\dots 1} I_r^{-1}$ .

Veamos que realmente hemos obtenido una factorización del morfismo codiagonal:

- $\sigma' i'_0(q) = \sigma'(q_0) = \sigma(q_0) = q$ .
- $\sigma' i'_0(x) = \sigma'(x^{00\dots 0}) = \sigma(x^{00\dots 0}) = x$ .
- $\sigma' i'_1(q) = \sigma'(q_0) = \sigma(q_0) = q$ .
- $\sigma' i'_1(x) = \sigma'(I_q x^{11\dots 1} I_r^{-1}) = \sigma(I_q x^{11\dots 1} I_r^{-1}) = x$ .

La demostración de que si  $(G, p)$  es un grupoide simplicial punteado cofibrante, el morfismo  $i'_0 + i'_1$  es una cofibración se hace mediante un desarrollo totalmente análogo al realizado en la proposición 2.3.9. De igual modo se prueba sin dificultad que el morfismo  $\sigma'$  es una equivalencia homotópica y, por tanto, una equivalencia débil, donde la homotopía  $H' : (\overline{G \otimes I}, p_0) \rightarrow ((\overline{G \otimes I})^I, Id_{p_0})$  está definida de forma análoga a la homotopía de grupoides simpliciales  $H : G \otimes I \rightarrow (G \otimes I)^I$ , dada en la demostración de la proposición 2.3.9, puesto que basta tener en cuenta que podemos identificar el conjunto de objetos del grupoide simplicial punteado  $((\overline{G \otimes I})^I, Id_{p_0})$  con el conjunto  $\{G_0^0 \vee G_0^1 \vee O/p_0 = p_1; I_p = Id_{p_0} = Id_{p_1}\}$ , (ver definición 2.3.8), así como en cada dimensión  $((\overline{G \otimes I})^I)_n$  puede ser identificado con el conjunto

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccc} q \xrightarrow{s_0^{n+1} a} r & & q \xrightarrow{s_0^{n+1} a} r \\ \downarrow x_0 & x'_0 \downarrow & \downarrow x_n & x'_n \downarrow \\ q' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} r' & & q' \xrightarrow{s_0^{n+1} b} r' \end{array} \right) / \left. \begin{array}{l} a, b \in (\overline{G \otimes I})_0 \\ x_i, x'_i \in (\overline{G \otimes I})_{n+1} \\ q, r \in O \end{array} \right\} \begin{array}{l} d_i x_i = d_i x_{i-1} \\ d_i x'_i = d_i x'_{i-1} \end{array}$$

## 2. Grupos simpliciales.

---

2.3.14. Al igual que ocurría en 2.3.6 esta construcción del cilindro en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  permite definir un funtor, que es adjunto por la izquierda al funtor  $\bar{\Omega}$  dado en 2.3.6 e induce el correspondiente funtor suspensión en la categoría  $H_0((\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}))$  ■

$$\bar{\Sigma} : (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$$

dado por

$$\bar{\Sigma}((G, p)) = \text{Coker}((G, p) \amalg (G, p) \xrightarrow{i'_0 + i'_1} (\overline{G \otimes I}, p_0))$$

## Capítulo 3

# Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas de grupoides simpliciales

La estructura de modelos de Quillen en la categoría de grupos simpliciales conduce a una equivalencia entre la teoría de homotopía asociada en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y la teoría de homotopía en la categoría de espacios topológicos punteados y conexos. En dicha estructura las equivalencias débiles son los morfismos  $f_\bullet$  que inducen isomorfismos  $\pi_q(f_\bullet)$  en los grupos de homotopía para  $q \geq 0$ . Ahora, si uno se restringe a categorías de espacios conexos y  $n$ -coconexos (i.e., con  $\pi_q(X, *) = 0$ ,  $q \geq n + 1$ ) es natural plantearse, en orden a modelar algebraicamente esa teoría de homotopía, la consideración de nociones más débiles de equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que convenientemente acompañadas de adecuadas clases de fibrationes y cofibrationes proporcionen, vía la correspondiente estructura de modelos, dicha teoría de homotopía. Este proceso fue abordado satisfactoriamente en [39] considerando, para  $n \geq 0$ , el concepto de  $n$ -equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  como aquel morfismo  $f_\bullet$  tal que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $0 \leq q \leq n$ , junto a apropiadas nociones de  $n$ -fibración y  $n$ -cofibración ([39], definición 3.1).

En el capítulo anterior hemos visto que en el paso a la consideración de espacios no necesariamente conexos el papel jugado antes por la categoría de grupos simpliciales es ahora desempeñado por la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  de grupoides simpliciales con conjunto simplicial de objetos constante. Ahora, de nuevo, si uno fija la atención en categorías de espacios (no necesariamente conexos)  $n$ -coconexos, parece natural, en orden a modelar algebraicamente esa teoría de homotopía, seguir la línea antes citada, y considerar, para cada  $n \geq 0$ , nociones de  $n$ -equivalencia débil,  $n$ -fibración y  $n$ -cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  que determinen una estructura de modelos cerrada cuya teoría de homotopía asociada sea equivalente a la teoría en la categoría de los espacios  $n$ -coconexos. Este es justamente el objeto de la primera sección de este capítulo, que se complementará con las construcciones concernientes a la teoría de homotopía asociada a dicha estructura que realizaremos en la sección 3.2. Por último, en la sección 3.3, compararemos esta teoría de homotopía con otras existentes en las categorías de espacios topológicos y conjuntos simpliciales, que

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

vienen asociadas a estructuras de modelos ya estudiadas ([30]) en las que las equivalencias débiles son también definidas truncando en determinados niveles las definiciones clásicas.

#### 3.1 La $n$ -estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

Considerando para cada  $n \geq 0$  el par de funtores adjuntos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ ,  $Sk^{n+1} \vdash Cosk^{n+1}$ , (véase 2.1.4), empezamos haciendo la siguiente:

**Definición 3.1.1.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Diremos que:

- $f$  es una  $n$ -fibración si  $Cosk^{n+1}(f)$  es una fibración de grupoides simpliciales.
- $f$  es una  $n$ -equivalencia débil si  $Cosk^{n+1}(f)$  es una equivalencia débil de grupoides simpliciales.
- $f$  es una  $n$ -cofibración si tiene la LLP respecto de las  $n$ -fibraciones triviales.

**3.1.2.** Recordemos que en grupos simpliciales, y para cada  $n \geq 0$ , las  $n$ -fibraciones fueron caracterizadas como aquellos morfismos  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  tales que  $Z_{n+1}(f_\bullet) = Ker(N_{n+1}(G_\bullet) \rightarrow N_n(G_\bullet)) \rightarrow Ker(N_{n+1}(H_\bullet) \rightarrow N_n(H_\bullet))$  y  $N_q(f_\bullet)$ ,  $1 \leq q \leq n+1$ , son sobreyectivos, y las  $n$ -equivalencias débiles como aquellos morfismos  $f_\bullet$  que verifican que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $0 \leq q \leq n$ .

En la misma línea podemos ahora probar:

**Proposición 3.1.3.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces:

i)  $f$  es una  $n$ -fibración si, y sólo si,

$$\begin{array}{ccc} Z_{n+1}(X) \xrightarrow{Z_{n+1}(f)} Z_{n+1}(Y) & N_q(X) \xrightarrow{N_q(f)} N_q(Y) & \\ \begin{array}{c} s \downarrow \downarrow t \\ O \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} s' \downarrow \downarrow t' \\ O' \end{array} & y & \begin{array}{c} s \downarrow \downarrow t \\ O \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} s' \downarrow \downarrow t' \\ O' \end{array} \end{array}$$

$0 \leq q \leq n+1$  son fibraciones de grupoides.

ii)  $f$  es una  $n$ -equivalencia débil si, y sólo si, induce una biyección entre las componentes de  $X$  y las de  $Y$  y para cada  $p \in Obj(X)$  el morfismo inducido  $\pi_q(f_p) : \pi_q(X(p)) \rightarrow \pi_q(Y(f(p)))$ ,  $0 \leq q \leq n$ , es un isomorfismo de grupos.

*Demostración:*

i)  $f$  es una  $n$ -fibración si  $Cosk^{n+1}(f)$  es fibración de grupoides simpliciales, lo cual es equivalente por 2.2.5 a que para cada  $q \geq 0$ ,  $N_q(Cosk^{n+1}f)$  sea una fibración de grupoides y ahora, utilizando 2.1.8 se tiene que esto ocurre si, y sólo si,  $Z_{n+1}(f)$  y  $N_q(f)$ ,  $0 \leq q \leq n+1$ , son fibraciones de grupoides.

ii)  $f$  es una  $n$ -equivalencia débil si  $\text{Cosk}^{n+1}(f)$  induce una biyección entre la componentes de  $\text{Cosk}^{n+1}(X)$  y  $\text{Cosk}^{n+1}(Y)$  y para cada  $p \in \text{Obj}(X)$ , el morfismo inducido,  $(\text{Cosk}^{n+1}X)(p) \rightarrow (\text{Cosk}^{n+1}Y)(f(p))$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales. Ahora, teniendo en cuenta que  $(\text{Cosk}^{n+1}X)(p) \cong \text{Cosk}^{n+1}(X(p))$  y  $(\text{Cosk}^{n+1}Y)(f(p)) \cong \text{Cosk}^{n+1}(Y(f(p)))$ , la última condición es equivalente a que  $\pi_q(f_p) : \pi_q(\text{Cosk}^{n+1}(X(p))) \rightarrow \pi_q(\text{Cosk}^{n+1}(Y(f(p))))$  sea un isomorfismo, lo que teniendo en cuenta 1.3.10 ocurre si, y sólo si,  $\pi_q f_p : \pi_q(X(p)) \rightarrow \pi_q(Y(f(p)))$ ,  $0 \leq q \leq n$ , es un isomorfismo de grupos.

■

**3.1.4.** Utilizando el functor grupo libre  $F : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  las  $n$ -fibraciones ( $n$ -fibraciones triviales) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  fueron caracterizadas en los siguientes términos:

Dado  $f_\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , entonces  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración si y sólo si tiene la RLP con respecto a los morfismos  $F\Delta[q, k] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $1 \leq k \leq q \leq n+1$ , y con respecto a  $F\Delta[n+2, i] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[n+2]$ ,  $0 \leq i \leq n+2$ . Análogamente  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración trivial si y sólo si tiene la RLP con respecto a  $F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq q \leq n+1$ .

Las  $n$ -fibraciones y las  $n$ -fibraciones triviales de grupoides simpliciales pueden ser caracterizadas en análogos términos, utilizando el functor grupoide libre dado en 2.1.13.

**Proposición 3.1.5.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

i)  $f$  es una  $n$ -fibración si, y sólo si,  $f$  tiene la RLP respecto de los morfismos  $F\Delta[q, k] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq k \leq q \leq n+1$  y  $F\Delta[n+2, k] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[n+2]$ ,  $0 \leq k \leq n+2$ .

ii)  $f$  es una  $n$ -fibración trivial si, y sólo si,  $f$  tiene la RLP respecto de los morfismos  $F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq q \leq n+1$  y  $F\Delta[0, 0] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[0]$ .

*Demostración:* i) Por definición  $f$  es una  $n$ -fibración si, y sólo si,  $\text{Cosk}^{n+1}(f)$  es una fibración de grupoides simpliciales, lo que es equivalente a que  $\text{Cosk}^{n+1}(f)$  tenga la RLP con respecto a  $F\Delta[q, k] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq k \leq q$  y, teniendo en cuenta la adjunción  $Sk^{n+1} \vdash \text{Cosk}^{n+1}$ , esto último es equivalente a que  $f_\bullet$  tenga la RLP con respecto a  $Sk^{n+1}F\Delta[q, k] \hookrightarrow Sk^{n+1}F\Delta[q]$ ,  $0 \leq k \leq q$ .

Identifiquemos los grupoides simpliciales  $Sk^{n+1}F\Delta[q, k]$  y  $Sk^{n+1}F\Delta[q]$ :

$$Sk^{n+1}F\Delta[q, k] = F\Delta[q, k] \text{ y } Sk^{n+1}F\Delta[q] = F\Delta[q] \text{ si } 0 \leq k \leq q \leq n+1.$$

$$Sk^{n+1}F\Delta[n+2, k] = F\Delta[n+2, k] \text{ y } Sk^{n+1}F\Delta[n+2] = F\overset{\bullet}{\Delta}[n+2].$$

$$Sk^{n+1}F\Delta[q, k] = Sk^{n+1}F\Delta[q] \text{ si } 0 \leq k \leq q, q \geq n+3.$$

Si tenemos ahora en cuenta que todo morfismo tiene la propiedad de levantamiento respecto a un isomorfismo, obtenemos que  $f$  es una  $n$ -fibración si, y sólo si, se cumplen las propiedades mencionadas.

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

ii) Se procede análogamente al caso anterior, teniendo además en cuenta que:

$$Sk^{n+1}F \overset{\bullet}{\Delta} [q] = Sk^{n+1}F\Delta[q] \text{ si } q \geq n+2 \text{ y}$$

$$Sk^{n+1}F \overset{\bullet}{\Delta} [q] = F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \text{ si } q \leq n+1. \quad \blacksquare$$

Notemos que se dan las siguientes inclusiones de clases de morfismos:

$$\begin{aligned} \{fibs. triv\} \subseteq \dots \subseteq \{(n+1) - fibs. triv.\} \subseteq \{n - fibs. triv.\} \subseteq \dots \\ \dots \subseteq \{n - cof.\} \subseteq \{(n+1) - cof.\} \subseteq \dots \{cof.\} \end{aligned}$$

A continuación demostraremos que, con las definiciones dadas de  $n$ -fibración,  $n$ -cofibración y  $n$ -equivalencia débil la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es una categoría de modelos cerrada. Previamente demostraremos algunos resultados.

**Lema 3.1.6.** *Sea  $\{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una familia de morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  tales que para cada  $\alpha$ ,  $f_\alpha$  tiene la LLP respecto a una clase de morfismos  $\{g_\beta : G_\beta \rightarrow H_\beta\}_{\beta \in \Theta}$ , entonces el morfismo  $\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$  tiene la LLP respecto de la clase  $\{g_\beta\}_{\beta \in \Theta}$ .*

*Demostración:* Consideremos los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} X_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha & \xrightarrow{i} & G_\beta \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow r_\alpha & \nearrow r & \downarrow g_\beta \\ Y_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha & \xrightarrow{j} & H_\beta \end{array}$$

Supongamos  $g_\beta i = j(\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha)$ . Tenemos que encontrar un levantamiento  $r : \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha \rightarrow X$ . Para cada  $\alpha$ , se tiene que  $g_\beta i i_\alpha = j(\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha) i_\alpha = j j_\alpha f_\alpha$ . Como  $f_\alpha$  tiene la LLP respecto a  $g_\beta$ , existe  $r_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X$  tal que  $r_\alpha f_\alpha = i i_\alpha$ ,  $g_\beta r_\alpha = j j_\alpha$ . Por lo tanto existe  $r : \coprod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha \rightarrow G_\beta$  verificando  $r j_\alpha = r_\alpha$ . Además  $r(\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha) i_\alpha = r j_\alpha f_\alpha = r_\alpha f_\alpha = i i_\alpha$  de donde  $r(\coprod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha) = i$ . Por otro lado,  $g_\beta r j_\alpha = g_\beta r_\alpha = j j_\alpha$ , de donde  $g_\beta r = j$ .  $\blacksquare$

**Lema 3.1.7.** *Dado en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  un cuadrado cocartesiano de la forma*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow k \\ Y & \xrightarrow{h} & T \end{array}$$

*si  $f : X \rightarrow Y$  tiene la LLP respecto de una clase de morfismos de grupoides simpliciales  $\{g_\beta : G_\beta \rightarrow H_\beta\}_{\beta \in \Theta}$ , entonces  $k : Z \rightarrow T$  tiene la LLP respecto de la clase  $\{g_\beta\}_{\beta \in \Theta}$ .*

### 3.1 La $n$ -estructura en $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$ .

*Demostración:* Consideremos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{i} & G_\beta \\
 \downarrow f & & \downarrow k & \nearrow m & \downarrow g_\beta \\
 Y & \xrightarrow{h} & T & \xrightarrow{j} & H_\beta
 \end{array}$$

Como  $g_\beta i g = j h f$  entonces existe  $m : Y \rightarrow G_\beta$  tal que  $m f = i g$ ,  $g_\beta m = j h$ , y por tanto existe un morfismo  $n : T \rightarrow G_\beta$  verificando  $n h = m$ ,  $n k = i$ . Además  $g_\beta n h = g_\beta m = j h$ , de donde  $g_\beta n = j$ . ■

**Lema 3.1.8.** Consideremos una sucesión de morfismos en  $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$

$$X_0 \xrightarrow{j_0} X_1 \xrightarrow{j_1} X_2 \dots \quad X_n \xrightarrow{j_n} X_{n+1} \xrightarrow{j_{n+1}} \dots$$

tales que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $j_k : X_k \rightarrow X_{k+1}$  tiene la LLP respecto a una clase de morfismos  $\{g_\beta : G_\beta \rightarrow H_\beta\}_{\beta \in \Theta}$ . Sean  $X_\infty = \varinjlim X_k$  y  $q_k : X_k \rightarrow X_\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  los morfismos canónicos. Entonces  $q_0 : X_0 \rightarrow X_\infty$  tiene la RLP respecto a la clase  $\{g_\beta\}_{\beta \in \Theta}$ .

*Demostración:* Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{p_0} & G_\beta \\
 q_0 \downarrow & \nearrow h & \downarrow g_\beta \\
 X_\infty & \xrightarrow{k} & H_\beta
 \end{array}$$

en el que hemos de encontrar un levantamiento  $h : X_\infty \rightarrow G_\beta$

Vamos a construir por inducción  $h_n : X_n \rightarrow G_\beta$  tal que  $h_n j_{n-1} = h_{n-1}$ ,  $k q_n = g_\beta h_n$ . Para  $n = 0$  lo tenemos; supongamos construido hasta  $h_n$  y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & \xrightarrow{h_n} & G_\beta \\
 \downarrow j_n & \nearrow q_n & \downarrow g_\beta \\
 X_{n+1} & \xrightarrow{q_{n+1}} & X_\infty \xrightarrow{k} H_\beta
 \end{array}$$

Como  $j_n$  tiene la RLP respecto del morfismo  $g_\beta$ , existe  $h_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow G_\beta$  tal que  $h_{n+1} j_n = h_n$ ,  $k q_{n+1} = g_\beta h_{n+1}$ . Esto nos da  $h : X_\infty \rightarrow G_\beta$  verificando  $h q_n = h_n$ .

En particular  $h q_0 = h_0$  y  $g_\beta h q_n = g_\beta h_n = k q_n$ , de donde  $g_\beta h = k$ . ■

**Teorema 3.1.9.** Para cada  $n \geq 0$ , la categoría  $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$ , con la estructura dada en la definición 3.1.1, es una categoría de modelos cerrada. (A esta estructura la llamaremos " $n$ -estructura").

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

*Demostración:* El axioma CM1 se verifica por 2.1.2. Los axiomas CM2 y CM3 se deducen fácilmente teniendo en cuenta los correspondientes axiomas para la estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  dada en 2.2.15, así como la adjunción  $Sk^{n+1} \vdash Cosk^{n+1}$ . Veamos que se verifica CM5.

La factorización de un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  como una  $n$ -cofibración trivial seguida de una  $n$ -fibración se realiza utilizando el argumento del objeto pequeño. Construiremos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{j_0} & Z_0 & \xrightarrow{j_1} & Z_1 & \longrightarrow & \cdots \xrightarrow{j_r} & Z_r & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow f & & \swarrow h_0 & \swarrow h_1 & \swarrow h_r & & & & & \\
 Y & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

donde llamaremos  $Z_{-1} = X$   $h_{-1} = f$  y supuesto obtenido  $Z_r$ , obtenemos  $Z_{r+1}$  y  $h_{r+1}$  como sigue:

Consideremos todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(\lambda) \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[q, k] & \longrightarrow & Z_r \\ \downarrow & & \downarrow h_r \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad 0 \leq k \leq q \leq n+1$$

o de la forma

$$(\mu) \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[n+2, i] & \longrightarrow & Z_r \\ \downarrow & & \downarrow h_r \\ F\dot{\Delta}[n+2] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad 0 \leq i \leq n+2$$

A partir de ellos definimos  $Z_{r+1}$  y el morfismo  $j_{r+1}$ , mediante el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 (\coprod_{\lambda} F\Delta[q, k]) \coprod (\coprod_{\mu} F\Delta[n+2, i]) & \longrightarrow & Z_r \\
 \downarrow & & \downarrow j_{r+1} \\
 (\coprod_{\lambda} F\Delta[q]) \coprod (\coprod_{\mu} F\dot{\Delta}[n+2]) & \longrightarrow & Z_{r+1}
 \end{array}$$



y el morfismo  $h_{r+1}$  a partir de la propiedad universal del diagrama anterior

$$\begin{array}{ccc}
 (\coprod_{\lambda} F\Delta[q, k]) \amalg (\coprod_{\mu} F\Delta[n+2, i]) & \longrightarrow & Z_r \\
 \downarrow & & \downarrow j_{r+1} \\
 (\coprod_{\lambda} F\Delta[k]) \amalg (\coprod_{\mu} F\dot{\Delta}[n+2]) & \longrightarrow & Z_{r+1} \\
 & \searrow h_{r+1} & \downarrow h_r \\
 & & Y
 \end{array}$$

Tenemos así una sucesión de morfismos

$$Z_{-1} \xrightarrow{j_0} Z_0 \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{j_2} \dots$$

Consideremos  $Z_{\infty} = \lim Z_r$  y, para cada  $r \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , la inclusión  $q_r : Z_r \rightarrow Z_{\infty}$ . Cada morfismo  $h_r : Z_r \rightarrow \vec{Y}$ , construido anteriormente, verifica  $h_{r+1}j_{r+1} = h_r$ , por lo que podemos afirmar que existe un morfismo  $h : Z_{\infty} \rightarrow Y$  tal que  $hq_r = h_r$

$$\begin{array}{ccc}
 Z_r & \xrightarrow{q_r} & Z_{\infty} \\
 h_r \downarrow & & \searrow h \\
 & & Y
 \end{array}$$

En particular, para  $r = -1$  si llamamos  $g$  a  $q_{-1}$  obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & Z_{\infty} \\
 f \downarrow & & \searrow h \\
 & & Y
 \end{array}$$

Veamos que  $f = hg$  es la factorización buscada. Para ello hagamos algunas consideraciones: Cada morfismo  $j_r$ ,  $r \geq 0$ , puede expresarse de la forma  $j_r = \beta\alpha$ , donde los morfismos  $\alpha : Z_r \rightarrow A$  y  $\beta : A \rightarrow Z_{r+1}$  están dados a partir de los siguientes cuadrados cartesianos:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\lambda} F\Delta[q, k] & \longrightarrow & Z_r \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 \coprod_{\lambda} F\Delta[q] & \longrightarrow & A \\
 \\ 
 \coprod_{\mu} F\Delta[n+2, i] & \longrightarrow & Z_r \xrightarrow{\alpha} A \\
 \downarrow & & \downarrow \beta \\
 \coprod_{\mu} F\dot{\Delta}[n+2] & \longrightarrow & Z_{r+1}
 \end{array}$$

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

Los morfismos  $F\Delta[q, k] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq k \leq q \leq n+1$ , son  $n$ -cofibraciones, pues tienen la LLP respecto de las fibraciones (en particular respecto de las  $n$ -fibraciones triviales), y utilizando la estructura de modelos dada en 2.2.1, se tiene que son cofibraciones triviales (en particular equivalencias débiles) y, por tanto,  $n$ -cofibraciones triviales. Teniendo en cuenta los lemas 2.2.11, 2.2.12 y 2.2.13, el morfismo  $\alpha$  es una cofibración trivial, y por los lemas 3.1.6, 3.1.7 y 3.1.8 es una  $n$ -cofibración, de donde se deduce que  $\alpha$  es una  $n$ -cofibración trivial.

Veamos que el morfismo  $\beta$  es también una  $n$ -cofibración trivial. Mediante un razonamiento análogo al realizado anteriormente para el morfismo  $\alpha$ , se sigue que  $\beta$  es una  $n$ -cofibración. Para demostrar que es una  $n$ -equivalencia débil consideramos los siguientes diagramas co-cartesianos

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mu} F\Delta[n+2, i] & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ \coprod_{\mu} F\dot{\Delta}[n+2] & \longrightarrow & Z_{r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \coprod_{\mu} F\Delta[n+2] & \longrightarrow & B \end{array}$$

Puesto que  $F\dot{\Delta}[n+2]$  y  $F\Delta[n+2]$  tienen la misma  $(n+1)$ -truncación, también la tienen  $Z_{r+1}$  y  $B$ , de donde deducimos que  $\gamma$  es una  $n$ -equivalencia débil. Según hemos visto anteriormente, el morfismo  $\coprod_{\mu} F\Delta[n+2, i] \hookrightarrow \coprod_{\mu} F\Delta[n+2]$  es una  $n$ -equivalencia débil lo que implica, teniendo en cuenta el axioma CM2, que  $\beta$  es una  $n$ -equivalencia débil.

Por lo tanto  $g = \beta\alpha$  es una  $n$ -cofibración trivial.

Veamos que  $h$  es una  $n$ -fibración. Para ello hemos de encontrar un levantamiento en un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[q, k] & \longrightarrow & Z_{\infty} \\ \downarrow & & \downarrow h \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad 0 \leq k \leq q \leq n+1 \quad (1)$$

o de la forma

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n+2, i] & \longrightarrow & Z_{\infty} \\ \downarrow & & \downarrow h \\ F\dot{\Delta}[n+2] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad 0 \leq i \leq n+2 \quad (2)$$

Supongamos que partimos de (1). Como cada  $F\Delta[q, k]$  es secuencialmente pequeño, se verifica

$$\text{Hom}(F\Delta[q, k], Z_{\infty}) \cong \varinjlim \text{Hom}(F\Delta[q, k], Z_m)$$

por lo que el morfismo  $F\Delta[q, k] \hookrightarrow Z_\infty$  factoriza a través de algún  $Z_m$ . Se obtiene así el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[q, k] & \longrightarrow & Z_m \\ \downarrow & & \downarrow hq_m \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

que es uno de los considerados anteriormente, por lo que considerando ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F\Delta[q, k] & \xrightarrow{\delta_k} & & & Z_\infty \\ & \searrow^{i_k} & & & \uparrow q_m \\ & & (\coprod_{\lambda} F\Delta[q, k]) \amalg (\coprod_{\mu} F\Delta[n+2, i]) & \xrightarrow{\Sigma i_k} & Z_m \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow j_{m+1} \\ & & (\coprod_{\lambda} F\Delta[k]) \amalg (\coprod_{\mu} F\Delta[n+2]) \amalg Y_{\alpha_n} & \xrightarrow{\Sigma l_k} & Z_{m+1} \\ & \searrow^{l_k} & & & \downarrow h_{m+1} \\ F\Delta[q] & \xrightarrow{\quad} & & & Y \end{array} \quad (*)$$

El morfismo  $q_{m+1}\Sigma l_k l_k : F\Delta[q] \rightarrow Z_\infty$  es el levantamiento buscado.

Si hubiéramos partido de un diagrama de la forma (2) el razonamiento se hace de manera análoga.

Por otro lado, la factorización de un morfismo  $f$  de la forma  $f = hi$  con  $i$  una  $n$ -cofibración y  $h$  una  $n$ -fibración trivial se realiza mediante un argumento análogo al utilizado en la factorización anterior, así como teniendo en cuenta los lemas 3.1.6, 3.1.7 y 3.1.8 y el hecho de que, por definición, un morfismo que es  $n$ -cofibración tiene la LLP respecto de la clase de las  $n$ -fibraciones triviales.

Por último, de CM4 sólo hay que probar que existe un levantamiento en cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & G \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{v} & H \end{array}$$

donde  $f$  es una  $n$ -cofibración trivial y  $g$  es una  $n$ -fibración.

Para esto utilizamos un argumento análogo al utilizado en la primera parte de la demostración del axioma CM5, y factorizamos  $f = hi$ , donde  $h$  es una  $n$ -fibración e  $i$  tiene la LLP respecto de la clase de las  $n$ -fibraciones. Si consideramos la estructura de modelos existente en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , se tiene que  $i$  es una cofibración trivial, puesto que tiene la LLP respecto de las fibraciones, y en particular es una  $n$ -equivalencia débil. Por ser también  $f$

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

una  $n$ -equivalencia débil, se tiene que el morfismo  $h$  lo es y, por tanto es una  $n$ -fibración trivial. Así, puesto que  $f$  es una  $n$ -cofibración, si consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X_\infty \\ f \downarrow & \nearrow k & \downarrow g \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

podemos afirmar que existe un levantamiento  $h : Y \rightarrow X_\infty$

Por otro lado, puesto que el morfismo  $g$  es una  $n$ -fibración e  $i$  tiene la RLP respecto de todas las  $n$ -fibraciones, existe un levantamiento  $k$  en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & G \\ f \downarrow & \nearrow k' & \downarrow g \\ X_\infty & \xrightarrow{vh} & H \end{array}$$

El morfismo  $k'k : Y \rightarrow G$  verifica  $k'kf = u$  y  $gk'k = v$  y, por lo tanto, es el levantamiento buscado. ■

Podemos ahora caracterizar las cofibraciones triviales en los siguientes términos:

**Proposición 3.1.10.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , entonces  $f$  es una  $n$ -cofibración trivial si y sólo si tiene la LLP respecto de la clase de las  $n$ -fibraciones.*

*Demostración:* Basta hacer un desarrollo análogo al realizado en la segunda parte de la demostración de la proposición 2.2.16. ■

**3.1.11.** Recordemos ahora (ver [52]) que los grupos simpliciales  $n$ -cofibrantes fueron caracterizados como aquellos que son cofibrantes y la base está formada solamente por simpllices degenerados en cada dimensión mayor o igual que  $n + 2$ . Asimismo, las  $n$ -cofibraciones fueron caracterizadas como aquellos morfismos de grupos simpliciales que son retracts de una aplicación libre  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow G_\bullet \amalg FU_*$ , tal que para  $q \geq n + 2$ , cada elemento de  $U_q$  es un simpllice degenerado de algún elemento de  $U_{q-1}$ .

Nuestro objetivo ahora es estudiar quienes son las  $n$ -cofibraciones y los objetos  $n$ -cofibrantes en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

**Proposición 3.1.12.** *Sea  $X$  un grupoide simplicial. Entonces  $X$  es  $n$ -cofibrante si y sólo si  $X$  es cofibrante (es decir,  $X$  es un grupoide simplicial libre) y  $X \cong Sk^{n+1}(X)$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $X$  es  $n$ -cofibrante. Entonces  $X$  es cofibrante y si consideramos el morfismo canónico  $i : Sk^{n+1}X \rightarrow X$  se tiene que es una  $n$ -fibración trivial,

puesto que  $\text{Cosk}^{n+1}(i)$  es la identidad. Por tanto existe un levantamiento  $j$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Sk^{n+1}X \\ \downarrow & \nearrow j & \downarrow i \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

Se tiene que  $ij = 1_X$ . Veamos que  $ji = 1_{Sk^{n+1}X}$ . Como  $ji$  tiene como dominio  $Sk^{n+1}X$ , está determinado por su  $(n+1)$ -truncación, que es  $1_{tr^{n+1}(X)}$ , de donde se sigue que  $ji = 1_{Sk^{n+1}X}$ . Por lo tanto  $X \cong Sk^{n+1}X$ .

Recíprocamente, supongamos que  $X$  es un grupoide simplicial libre que coincide con su  $(n+1)$ -esqueleto, y queremos probar que es  $n$ -cofibrante, para lo cual debemos encontrar levantamiento en cualquier diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{donde } f \text{ es una } n\text{-fibración trivial.}$$

Pero como  $X = Sk^{n+1}X$ , encontrar levantamiento en el anterior diagrama es equivalente a encontrarlo en el siguiente

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}A \\ \downarrow & & \downarrow \text{Cosk}^{n+1}f \\ X & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}B \end{array}$$

y aquí existe puesto que  $X$  es cofibrante y  $\text{Cosk}^{n+1}(f)$  es una fibración trivial. ■

Antes de enunciar el siguiente resultado hagamos algunas consideraciones.

**3.1.13.** En primer lugar extenderemos el funtor  $Sk^q$  a un contexto un poco más general que el de grupoides simpliciales. Notemos que a la hora de definir el esqueleto de un grupoide simplicial no necesitamos los operadores "cara". Por tanto, si tenemos una familia de grupoides  $X_* = \{X_m, m \geq 0\}$  junto con unos morfismos  $s_i : X_m \rightarrow X_{m+1}$  que verifican las identidades usuales  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ ,  $i \leq j$ , podemos definir  $Sk^q(X_*)$  tal y como se define en grupoides simpliciales, pero "olvidándonos" de las caras. En segundo lugar haremos notar que si  $f : X \rightarrow Y$  es una cofibración de grupoides simpliciales (supongamos que es una aplicación libre) y  $\{V_q\}_{q \in \mathbb{N}} \subset Y$  es su base, la propia definición de lo que es una aplicación libre de grupoides simpliciales implica que, en cada dimensión  $Y_m$  puede obtenerse mediante el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & f(X_m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ FV_m & \longrightarrow & Y_m \end{array}$$

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

donde  $O$  denota el grupoide discreto sobre el conjunto de objetos de  $X$ ,  $f(X_m)$  es un grupoide por ser  $f$  inyectivo y  $FV_m$  es el grupoide libre cuyo conjunto de objetos es mismo que el de  $Y$  y con un generador por cada elemento de  $V_m$ . Por tanto, si consideramos la familia de grupoides  $(FV)_* = \{FV_m, m \geq 0\}$  es claro que el diagrama siguiente es co-cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & Sk^{n+1}f(X_m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ FV_m \cong Sk^{n+1}FV_m & \xrightarrow{j} & Sk^{n+1}Y_m \end{array}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.14.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación libre de grupoides simpliciales. Entonces  $f$  es una  $n$ -cofibración si y sólo si cada elemento de  $V_m$  es un símplice degenerado para  $m \geq n + 2$ , es decir,  $Sk^{n+1}(FV)_* = (FV)_*$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $f$  es una  $n$ -cofibración. Construimos un nuevo morfismo  $g : X \rightarrow Y$  de la siguiente forma: Consideremos el conjunto de componentes conexas del grupoide simplicial  $X$ ,  $\pi(X)$ . Para cada clase  $[p]$ ,  $p \in O = Obj(X)$  fijamos un representante  $p$ , y para cada  $q \in [p]$  fijamos un morfismo  $x_q : p \rightarrow q$  en  $X_0$ . Para el objeto  $p$ , el morfismo elegido es  $x_p = Id_p$ . Dados  $q_1, q_2 \in [p]$  elegimos en  $X_0$  el morfismo  $x_{q_2}x_{q_1}^{-1} : q_1 \rightarrow q_2$ .

Definimos un morfismo  $g : X \rightarrow Y$  como sigue:

- Dado  $q \in O$ ,  $g(q) = f(q)$ .
- Dado  $\alpha : q_1 \rightarrow q_2 \in X_n$ ,  $g(\alpha) = f(s_0^n(x_{q_2} \circ x_{q_1}^{-1}))$ .

La demostración de que está bien definido y es simplicial es rutinaria.

Sea  $h = coigu(f, g)$  y  $Z$  el objeto co-igualador. Veamos que es  $n$ -cofibrante. Para ello hemos de probar que existe un levantamiento en cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \nearrow k & \downarrow i \\ Z & \xrightarrow{j} & B \end{array}$$

con el morfismo  $i$  una  $n$ -fibración trivial pero, por ser  $Z$  el objeto co-igualador de  $f$  y  $g$ , dar un morfismo  $k : Z \rightarrow A$ , es equivalente a dar un morfismo  $l : Y \rightarrow A$  tal que  $lf = lg$ . Teniendo en cuenta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{j} & B \\ & & \searrow l & & \downarrow k & \nearrow i & \\ & & & & A & & \end{array}$$

como se ha de verificar  $ik = j$ , también se ha de cumplir  $ikh = jh$ , de donde  $il = jh$ . Por tanto el morfismo  $l$  puede encontrarse como levantamiento a un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & A \\ f \downarrow & \nearrow l & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{jh} & B \end{array}$$

para lo cual hemos de encontrar un morfismo  $m : X \rightarrow A$  de manera que el cuadrado anterior conmute ya que el morfismo  $f$  es una  $n$ -cofibración e  $i$  es una  $n$ -fibración trivial. Definimos el morfismo  $m$  como sigue:

- Si  $p \in O$  es el representante de una componente conexa elegido anteriormente, entonces  $jh f(p) \in \text{Obj}(B)$  y como el morfismo  $i$  es sobreyectivo en objetos, se tiene que existe  $\bar{p} \in \text{Obj}(A)$  tal que  $i(\bar{p}) = jh f(p)$ . Definimos  $m(p) = \bar{p}$ .

- En morfismos distinguiremos dos casos:

En primer lugar, consideremos  $x_q$ , con  $q$  un objeto cualquiera de  $X$ , el morfismo elegido

anteriormente. Como  $\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{i_0} & B_0 \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ \text{Obj}(A) & \longrightarrow & \text{Obj}(B) \end{array}$  es una fibración de grupoides se tiene que

dado  $m(p)$  y dado  $jh f(x_q) : jh f(p) = im(p) \rightarrow jh f(q)$ , existe  $y : m(p) \rightarrow \bar{q} \in B_0$  tal que  $i(y) = jh f(x_q)$ . Definimos  $m(x_q) = y$  (notemos que esto nos define ya el valor de  $m(q) = \bar{q}$ ).

En segundo lugar, consideremos  $\alpha : q_1 \rightarrow q_2$  un morfismo cualquiera en  $X_n$ . Definimos  $m(\alpha) = s_0^n m(x_{q_2}) \circ s_0^n m(x_{q_1}^{-1})$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  son los elegidos anteriormente.

Se comprueba sin dificultad que  $m$  está bien definida y es simplicial. Evidentemente el morfismo  $m$  así definido hace conmutativo el diagrama y, por tanto, existe  $l : Y \rightarrow A$  el levantamiento buscado, de donde se sigue que  $Z$  es un grupoide simplicial  $n$ -cofibrante. Por la proposición 3.1.12 se tiene que  $Sk^{n+1}(Z) \cong Z$ .

De la propia construcción del co-igualador en la categoría  $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  (ver sección 2.1) se sigue que  $\text{Obj}(Z) = \text{Obj}(Y)$ , puesto que en objetos se calcula como en conjuntos y los morfismos  $f$  y  $g$  son iguales sobre objetos. Además es fácil comprobar que si llamamos  $V$  a la base del grupoide simplicial  $Y$ , todo morfismo de  $Z_m$  es de la forma  $z = y_i y_{i-1} \dots y_1 y_0$  donde  $y_i$  ó  $y_i^{-1}$  están en  $V_m$ , ó  $y_i = s_0^m(f(x_q))$  ó  $y_i = s_0^m(f(x_q^{-1}))$ , y por tanto  $Z$  es libre con base en cada dimensión dada por  $W_m = V_m \cup \{s_0^m f(x_q), q \in \text{Obj}(X)\}$ . Se tiene por tanto que todo elemento  $x \in V_m$ ,  $m \geq n+2$  es de la forma  $s_i(x')$  con  $x' \in V_{m-1}$  (pues si  $x' = s_0^{m-1}(f(x_q))$  entonces  $x' \notin V_m$ ), es decir  $Sk^{n+1}(FV)_* \cong (FV)_*$ .

Recíprocamente, supongamos que  $Sk^{n+1}(FV)_* \cong (FV)_*$ . Para ver que el morfismo  $f$  es una  $n$ -cofibración, dada una  $n$ -fibración trivial  $i : A \rightarrow B$ , hemos de encontrar un levantamiento en un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & A \\ f \downarrow & \nearrow k & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}A \\
 f \downarrow & & \downarrow i & \nearrow & \downarrow \text{Cosk}^{n+1}(i) \\
 Y & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}B
 \end{array}$$

donde existe un levantamiento puesto que  $f$  es una cofibración y  $\text{Cosk}^{n+1}(i)$  una fibración trivial. Teniendo en cuenta ahora la adjunción  $Sk^{n+1} \vdash \text{Cosk}^{n+1}$ , se obtiene un levantamiento  $h$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Sk^{n+1}X & \longrightarrow & A \\
 Sk^{n+1}(f) \downarrow & \nearrow h & \downarrow i \\
 Sk^{n+1}Y & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Por otro lado, si llamamos  $V \subset Y$  a la base de  $f$ , en cada dimensión  $Y_m$  puede obtenerse como el siguiente cuadrado co-cartesiano:

$$\begin{array}{ccc}
 O & \longrightarrow & f(X_m) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 FV_m & \longrightarrow & Y_m
 \end{array}$$

Según hemos visto en 3.1.13 se tiene que  $(Sk^{n+1}Y)_m$  puede obtenerse mediante siguiente diagrama co-cartesiano:

$$\begin{array}{ccc}
 O & \longrightarrow & Sk^{n+1}f(X_m) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 FV_m \cong Sk^{n+1}FV_m & \xrightarrow{j} & (Sk^{n+1}Y)_m
 \end{array}$$

Dar  $k : Y \rightarrow A$ , el levantamiento buscado, es equivalente a dar en cada dimensión,  $m$ , dos morfismos  $g_m : f(X_m) \rightarrow A_m$  y  $l_m : FV_m \rightarrow A_m$ , tales que conmuten los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 O & \longrightarrow & f(X_m) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 FV_m & \longrightarrow & Y_m \\
 & \searrow l_m & \nearrow g_m \\
 & & A_m
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} & & \nearrow k_m \\ & & \searrow g_m \end{array}$

Definimos los morfismos  $g$  y  $l$  como sigue:

- $g(f(p)) = \alpha(p)$ ,  $p \in O$ ;  $g(f(x)) = \alpha(x)$ ,  $x \in X_m$ .
- $l(p') = hj(p')$ ,  $p' \in O'$ ;  $l(v) = hj(v)$ ,  $v \in V_m$ .



### 3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ -estructura.

Evidentemente  $g$  y  $l$  así definidos hacen el diagrama conmutativo. Por lo tanto existe el morfismo  $k$  requerido, que por construcción verifica  $kf = \alpha$  e  $ik = \beta$ . Comprobemos por último que  $k$  es realmente una aplicación simplicial. Puesto que los morfismos  $g$  y  $l$  conmutan con las degeneraciones,  $k$  también conmuta. Por tanto, sólo hemos de probar que para cualquier  $y \in Y_m$   $d_i k_m(y) = k_{m-1} d_i(y)$ , pero notemos que si  $m \leq n+1$ , la igualdad anterior es claramente cierta, así como si  $y = f(x)$  con  $x \in X_m$  para cualquier  $m$ . Veamos pues que dicha igualdad se verifica para cualquier  $y \in V_m$ ,  $m \geq n+2$ . Distinguiremos dos casos:

- Si  $d_i(y) \in V_{m-1}$ , entonces  $k_{m-1} d_i(y) = h_{m-1} d_i(y) = h_{m-1} d_i(y) = d_i h_m(y) = d_i k_m(y)$  (donde identificamos  $y = j(y)$ ).

- Si  $d_i(x) \notin V_{m-1}$ , por hipótesis tenemos que  $x = s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_k}(y)$  para algún  $y \in V_{n+1}$ , de donde  $d_i(x) = d_i s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_k}(y) = s_{j_0} s_{j_1} \dots s_{j_k} d_j(y)$ , después de intercambiar los operadores  $s$  y  $d$  mediante las identidades simpliciales. Deducimos entonces:

$$\begin{aligned} k_{m-1} d_i(x) &= k_{m-1} s_{j_0} \dots s_{j_k} d_j(y) = s_{j_0} \dots s_{j_k} k_n d_j(y) = \\ &= s_{j_0} \dots s_{j_k} d_j k_{n+1}(y) = d_i s_{i_0} \dots s_{i_k} k_{n+1}(y) = d_i k_m s_{i_0} \dots s_{i_k}(y) = d_i k_m(x) \end{aligned}$$

■

**3.1.15.** La categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  (ver 2.2.19) “hereda” de acuerdo con 1.1.3 esta nueva estructura de modelos dada en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y, en la que dado  $f : (X, p) \rightarrow (Y, p')$  un morfismo de grupoides simpliciales punteados,  $f$  es una  $n$ -fibración ( $n$ -cofibración,  $n$ -equivalencia débil) si el morfismo  $f : X \rightarrow Y$  es una  $n$ -fibración ( $n$ -cofibración,  $n$ -equivalencia débil) de grupoides simpliciales.

## 3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ -estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$

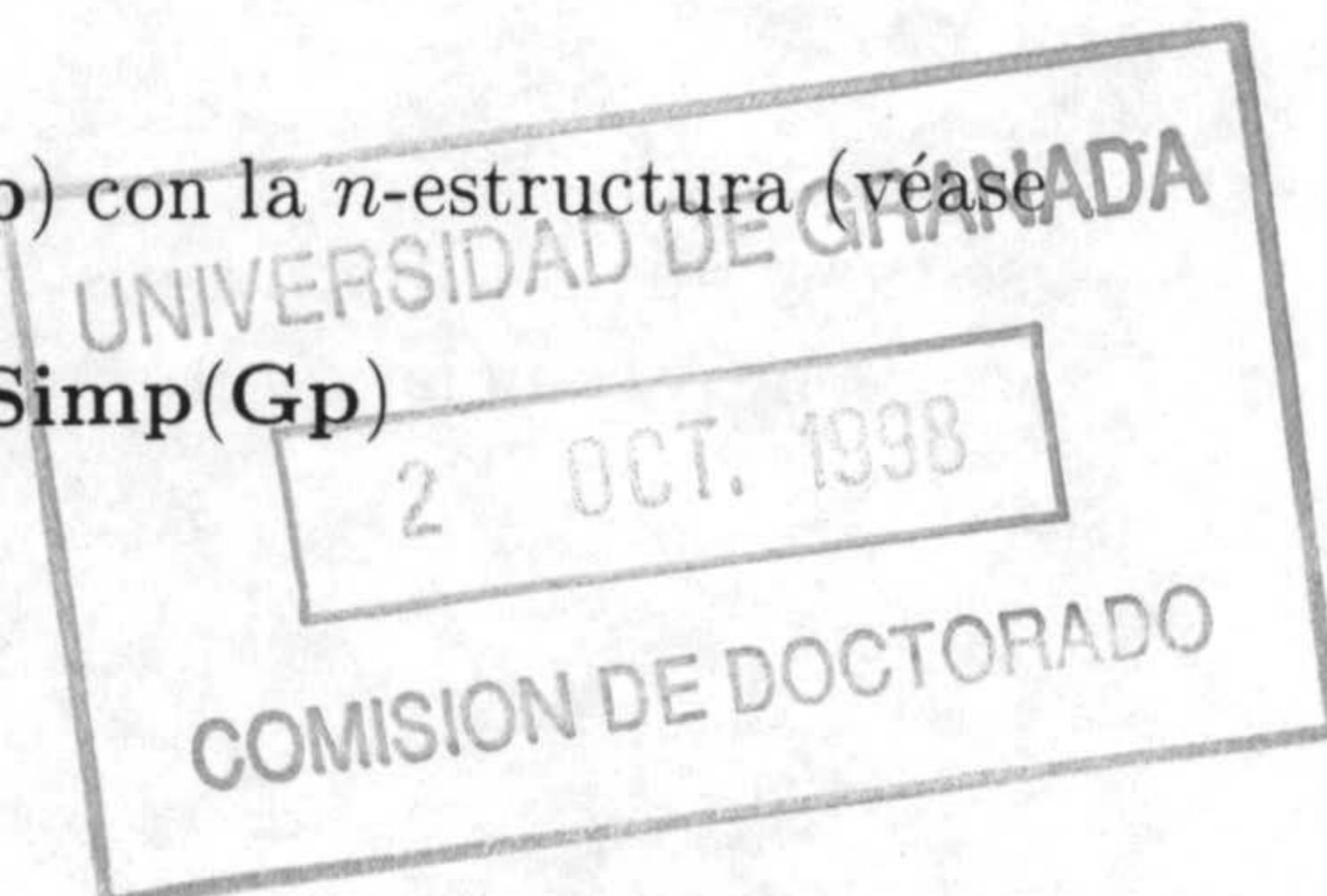
A lo largo de esta sección realizaremos construcciones concernientes a la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  asociada a la  $n$ -estructura.

**3.2.1.** Comenzaremos recordando que, dado un grupo simplicial  $H_\bullet$ , el grupo simplicial  ${}_n H_\bullet^I$  definido mediante el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} {}_n H_\bullet^I & \longrightarrow & (\text{Cosk}^{n+1} H_\bullet)^I \\ (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ H_\bullet^{I_0} & \longrightarrow & (\text{Cosk}^{n+1} H_\bullet)^{I_0} \end{array}$$

(donde  $I_0 = \overset{\bullet}{\Delta} [1]$ ) es un espacio de arcos para  $H_\bullet$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la  $n$ -estructura (véase [39]).

Esta construcción define un funtor  ${}_n(-)^I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$



### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

El funtor  ${}^n\Omega : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  definido como  ${}^n\Omega H_{\bullet} = \text{Ker}(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  determina el funtor de lazos en la categoría  $\text{Ho}_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$  y dado  $H_{\bullet}$  un grupo simplicial se verifica que  ${}^n\Omega H_{\bullet} \cong \Omega \text{Cosk}^{n+1} H_{\bullet}$  donde  $\Omega$  es el funtor de lazos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver [39]).

Damos a continuación la construcción del espacio de arcos asociado a la  $n$ -estructura en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_{*}$ .

**Definición 3.2.2.** Sea  $H$  un grupoide simplicial. Considerando la construcción del espacio de arcos  $(-)^I$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_{*}$  definimos  ${}_n H^I$  mediante el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} {}_n H^I & \longrightarrow & (\text{Cosk}^{n+1} H)^I \\ (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ H \times H & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1} H \times \text{Cosk}^{n+1} H \end{array}$$

**Proposición 3.2.3.** El grupoide simplicial  ${}_n H^I$  es un espacio de arcos para  $H$  (con respecto a la  $n$ -estructura).

*Demostración:* Hemos de ver que existe una factorización del morfismo diagonal de la forma

$$H \xrightarrow{\bar{\beta}} {}_n H^I \xrightarrow{(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)} H \times H, \text{ donde } \bar{\beta} \text{ es una } n\text{-equivalencia débil y } (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \text{ una fibración.}$$

Comenzaremos viendo que el morfismo  $\gamma : H^I \rightarrow {}_n H^I$  inducido en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^I & \begin{array}{l} \xrightarrow{p} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} & (\text{Cosk}^{n+1} H)^I \\ & \searrow & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ {}_n H^I & \xrightarrow{q} & \text{Cosk}^{n+1} H \times \text{Cosk}^{n+1} H \\ & \downarrow (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) & \\ H \times H & \longrightarrow & \end{array}$$

es una  $n$ -equivalencia débil. Para ello veamos que lo son los morfismos  $p$  y  $q$  dados en el diagrama anterior. El morfismo  $p$  es una  $n$ -equivalencia débil pues si tenemos en cuenta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1} H \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta' \\ H^I & \xrightarrow{p} & (\text{Cosk}^{n+1} H)^I \end{array}$$

se tiene que los morfismos  $\beta$  y  $\beta'$  son equivalencias débiles y el morfismo horizontal superior es  $n$ -equivalencia débil pues su  $(n+1)$ -coesqueleto es la identidad.

### 3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ -estructura.

El morfismo  $q$  también es una  $n$ -equivalencia débil pues es el opuesto en un cuadrado cartesiano a un morfismo cuya  $(n+1)$ -truncación es un isomorfismo.

El axioma CM2, junto con estos dos últimos hechos nos prueba que  $\gamma$  es una  $n$ -equivalencia débil.

En segundo lugar hemos de probar que el morfismo  $(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  es una  $n$ -fibración y para ello comprobaremos que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una  $n$ -fibración. Como  $(-)^I$  es un espacio de arcos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  se tiene que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración y, teniendo en cuenta la proposición 3.1.3, sólo hemos de probar que el morfismo  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1) : Z_{n+1}(\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I \rightarrow Z_{n+1}(H) \times Z_{n+1}H$  es una fibración de grupoides. Para ello, identifiquemos en primer lugar el grupoide  $Z_{n+1}((\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I)$ .

Teniendo en cuenta como está definido el espacio de arcos en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  con la estructura dada en la sección 2.2, se tienen las siguientes identificaciones:

$$[(\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I]_n = (H^I)_n = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q & & p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q \\ \downarrow x_0 \quad x'_0 \downarrow & \cdots & \downarrow x_n \quad x'_n \downarrow \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' \end{array} \right) / \begin{array}{l} a, b \in H_0 \quad d_i x_i = d_i x_{i-1} \\ x_i, x'_i \in H_{n+1} \quad d_i x'_i = d_i x'_{i-1} \\ p, q \in O \end{array} \right\}$$

$$[(\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I]_{n+1} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q & & p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q \\ \downarrow x_0 \quad x'_0 \downarrow & \cdots & \downarrow x_n \quad x'_n \downarrow \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' & & p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' \end{array} \right) / \begin{array}{l} a, b \in H_0 \quad d_i x_i = d_i x_{i-1} \\ x_i, x'_i \in (\mathit{Cosk}^{n+1}H)_{n+2} \quad d_i x'_i = d_i x'_{i-1} \\ p, q \in O \end{array} \right\}$$

Si consideramos ahora la construcción del co-esqueleto de un grupoide simplicial  $H$  dada en la sección 2.1,  $(\mathit{Cosk}^{n+1}H)_{n+2}$  puede identificarse con el siguiente conjunto:

$$\Delta^{n+2}(\mathit{Cosk}^{n+1}H_{tr}) = \{(y_0, y_1, \dots, y_{n+2}) \in (H_{n+1})^{n+3} / d_i x_j = d_{j-1} x_i, i < j\}$$

Podemos deducir, por tanto que los elementos de  $[(\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I]_{n+1}$  son matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0n+1} & c_{0n+2} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1n+1} & c_{1n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+10} & c_{n+11} & \cdots & c_{n+1n+1} & c_{n+1n+2} \end{pmatrix}$$

donde cada  $c_{ij}$  es un diagrama de la forma

$$\begin{array}{c} p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q \\ \downarrow x_{ij} \quad x'_{ij} \downarrow \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' \end{array} / \begin{array}{l} x_{ij}, x'_{ij} \in H_{n+1} \\ d_k x_{ij} = d_{j-1} x_{ik}, d_k x'_{ij} = d_{j-1} x'_{ik} \quad k < j \\ x_{ii+1} = x_{i+1i+1}, x'_{ii+1} = x'_{i+1i+1} \end{array}$$

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

y donde los operadores cara están definidos:

$$d_k(c_{ij}) = \left( \begin{array}{cccc} p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q & p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q \\ \downarrow x_{0k+1} & \downarrow x_{k-1,k+1} & \downarrow x_{k+1k} & \downarrow x_{n+1k} \\ x'_{0k+1} \downarrow & x'_{k-1k+1} \downarrow & x'_{k+1k} \downarrow & x'_{n+1k} \downarrow \\ p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' & p' \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q' \end{array} \right)$$

Recordemos que

$$Z_{n+1}(\text{Cosk}^{n+1}H)^I = \{(c_{ij}) \in (\text{Cosk}H)^I / d_0(c_{ij}), \dots, d_{n+1}(c_{ij}) \text{ son identidades}\}.$$

Así, considerando todo lo anteriormente dicho, podemos identificar los elementos del gupoide  $Z_{n+1}(\text{Cosk}^{n+1}H)^I$  con matrices

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & Id & \cdots & Id & Id & Id \\ Id & c_1 & c_2 & \cdots & Id & Id & Id \\ Id & Id & c_2 & \cdots & Id & Id & Id \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Id & Id & Id & \cdots & c_n & c_{n+1} & Id \\ Id & Id & Id & \cdots & Id & c_{n+1} & c_{n+2} \end{pmatrix}$$

donde cada  $c_i$  es un diagrama de la forma

$$\begin{array}{c} p \xrightarrow{s_0^{n+1}a} q \\ \downarrow x_i \quad x'_i \downarrow \\ p \xrightarrow{s_0^{n+1}b} q \end{array} / \begin{array}{l} p, q \in O; a, b \in H_0 \\ x_i, x'_i \in H_{n+1} \\ d_k x_i, d_k x'_i, 0 \leq k \leq n+1, \text{ son identidades} \end{array}$$

y cada  $Id$  representa un cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \\ \parallel Id_p & & \parallel Id_q \\ p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \end{array}$$

Por otra parte  $(\text{Cosk}^{n+1}H)_{n+1} \times (\text{Cosk}^{n+1}H)_{n+1} = H_{n+1} \times H_{n+1}$ , y el morfismo  $(\partial_0, \partial_1)_{n+1}$  está definido por  $(\partial_0, \partial_1)_{n+1}(c_{ij}) = (x_{n+1n+2}, x'_{00})$ .

Veamos finalmente que  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1) : Z_{n+1}(\text{Cosk}^{n+1}H)^I \rightarrow Z_{n+1}(H) \times Z_{n+1}H$  es una fibración de grupoides: Dado  $a : p \rightarrow q$  y dado  $\beta = (x : p \rightarrow p, y : q \rightarrow q) \in Z_{n+1}H \times Z_{n+1}H$ , el elemento  $\alpha$  de  $Z_{n+1}(\text{Cosk}^{n+1}H)^I$  dado por

### 3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ -estructura.

$$\begin{pmatrix} c & c & Id & \cdots & Id & Id & Id \\ Id & c & c & \cdots & Id & Id & Id \\ Id & Id & c & \cdots & Id & Id & Id \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Id & Id & Id & \cdots & c & c & Id \\ Id & Id & Id & \cdots & Id & c & d \end{pmatrix}$$

donde:

- cada  $c$  es un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \\ (s_0^{n+1}a)^{-1}y s_0^{n+1}a \downarrow & & y \downarrow \\ p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \end{array}$$

-  $d$  es el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \\ x \downarrow & & \downarrow (s_0^{n+1}a)x(s_0^{n+1}a)^{-1} \\ p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \end{array}$$

-  $Id$  representa un cuadrado de la forma

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \\ \parallel Id_p & & \parallel Id_q \\ p & \xrightarrow{s_0^{n+1}a} & q \end{array}$$

verifica que su imagen por  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1)$  es el elemento  $(x, y)$  del que partíamos así que  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración como se requería.

Se tiene entonces una factorización del morfismo diagonal

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Delta} & H \times H \\ & \searrow \beta & \nearrow (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \\ & H^I & \xrightarrow{\gamma} & {}_n H^I \end{array}$$

donde  $\bar{\beta}$  es una  $n$ -equivalencia débil puesto que  $\beta$  y  $\gamma$  lo son y  $(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  es una  $n$ -fibración.

Podemos pues concluir que  ${}_n H^I$  es un espacio de arcos para  $H$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  con la  $n$ -estructura. ■

La construcción del espacio de arcos en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  permite ahora dar la siguiente:

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

**Proposición 3.2.4.** Sea  $(H, p)$  un grupoide simplicial punteado. Entonces el grupoide simplicial punteado  $({}_n H^I, Id_p)$  dado mediante el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} ({}_n H^I, Id_p) & \longrightarrow & ((Cosk^{n+1} H)^I, Id_p) \\ (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ (H \times H, (p, p)) & \longrightarrow & (Cosk^{n+1} H \times Cosk^{n+1} H, (p, p)) \end{array}$$

es un espacio de arcos para  $(H, p)$  con la  $n$ -estructura.

*Demostración:* Los morfismos  $\bar{\beta}$  y  $(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  dados en la demostración de la proposición 3.2.3 determinan de forma clara la siguiente factorización del morfismo diagonal

$$(H, p) \xrightarrow{\bar{\beta}} ({}_n H^I, Id_p) \xrightarrow{(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)} (H \times H, (p, p))$$

donde recordemos que  $\bar{\beta}$  es una  $n$ -equivalencia débil y  $(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  una  $n$ -fibración. ■

**3.2.5.** Esta construcción permite definir para cada  $(H, p) \in (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  un nuevo grupoide simplicial punteado  ${}^n \bar{\Omega} H$  como  ${}^n \bar{\Omega}(H, p) = Ker(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$ , lo cual da lugar a un funtor

$${}^n \bar{\Omega} : (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$$

que a su vez determina el correspondiente funtor de lazos en la categoría  $Ho_n((\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}))$ .

La relación entre los funtores  ${}^n \bar{\Omega}$  y  $\bar{\Omega}$  (ver 2.3.6) viene dada en la siguiente:

**Proposición 3.2.6.** Sea  $(H, p)$  un grupoide simplicial punteado. Entonces  ${}^n \bar{\Omega}(H, p) \cong Cosk^{n+1}(\bar{\Omega}(H, p))$ .

*Demostración:* Si tenemos en cuenta que en un cuadrado cartesiano los núcleos de morfismos opuestos son isomorfos, así como que el funtor  $Cosk^{n+1}$  preserva límites por ser un adjunto por la derecha, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} {}^n \bar{\Omega}(H, p) &= Ker(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \cong Ker(Cosk^{n+1}(\partial_0, \partial_1)) \\ &\cong Cosk^{n+1}(Ker(\partial_0, \partial_1)) = Cosk^{n+1}(\bar{\Omega}(H, p)) \end{aligned}$$

**3.2.7.** Recordaremos ahora que si consideramos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  la  $n$ -estructura dada en [39], si  $G_\bullet$  es un grupo simplicial  $n$ -cofibrante, un objeto cilindro para  $G_\bullet$  viene dado por el grupo simplicial  $G_\bullet \otimes_n I$ , definido por el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I_0) & \xrightarrow{\alpha_\bullet} & G_\bullet \otimes I_0 \\ Sk^{n+1}(i_0+i_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}_0+\bar{i}_1 \\ Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I) & \xrightarrow{\beta_\bullet} & G_\bullet \otimes_n I \end{array}$$

### 3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ -estructura.

Esta construcción determina un funtor  $- \otimes_n I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que es adjunto por la izquierda al funtor  ${}_n(-)^I$ . Asimismo se tiene que el funtor  ${}^n\Sigma : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  dado por

$${}^n\Sigma(G_\bullet) = \text{Coker}(G_\bullet \otimes I_0 \xrightarrow{\bar{i}_0 + \bar{i}_1} G_\bullet \otimes_n I)$$

es adjunto por la izquierda al funtor  ${}^n\Omega : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y da lugar al funtor suspensión en la correspondiente categoría de homotopía.

Además, dado un grupo simplicial  $G_\bullet$ , se verifica que  ${}^n\Sigma(G_\bullet) \cong Sk^{n+1}(\Sigma G_\bullet)$ , donde  $\Sigma$  es el funtor suspensión en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver [40]).

**Definición 3.2.8.** Si  $G$  es un grupoide simplicial y consideramos la construcción del cilindro  $(-)\otimes I$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , se define  $G \otimes_n I$  mediante el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G \amalg G) & \xrightarrow{\alpha} & G \amalg G \\ Sk^{n+1}(i_0 + i_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}_0 + \bar{i}_1 \\ Sk^{n+1}(G \otimes I) & \xrightarrow{\delta} & G \otimes_n I \end{array}$$

**Proposición 3.2.9.** Sea  $G$  un grupoide simplicial  $n$ -cofibrante. El grupoide simplicial  $G \otimes_n I$  es un objeto cilindro para  $G$  (con la  $n$ -estructura).

*Demostración:*

Comenzaremos viendo que existe una  $n$ -equivalencia débil,  $\bar{\sigma} : G \otimes_n I \rightarrow G$ , tal que  $\bar{\sigma}(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \nabla$

Notemos en primer lugar que  $\delta$  es una  $n$ -equivalencia débil puesto que  $tr^{n+1}(\delta) = 1_{tr^{n+1}(G \otimes I)}$ , ya que  $tr^{n+1}(\alpha) = 1_{tr^{n+1}(G \amalg G)}$ . En segundo lugar, existen morfismos  $\epsilon : Sk^{n+1}(G \otimes I) \rightarrow G \otimes I$  e  $i_0 + i_1 : G \amalg G \rightarrow G \otimes I$

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G \amalg G) & \xrightarrow{\alpha} & G \amalg G \\ Sk^{n+1}(i_0 + i_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}_0 + \bar{i}_1 \\ Sk^{n+1}(G \otimes I) & \xrightarrow{\delta} & G \otimes_n I \end{array} \begin{array}{c} \searrow^{i_0 + i_1} \\ \searrow^{\gamma} \\ \searrow^{\epsilon} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ G \otimes I \end{array}$$

verificando  $\epsilon(Sk^{n+1}(i_0 + i_1)) = (i_0 + i_1)\alpha$ , puesto que su  $(n+1)$ -truncación es en ambos casos  $tr^{n+1}(i_0 + i_1)$ .

Existe por tanto  $\gamma : G \otimes_n I \rightarrow G \otimes I$ , que es una  $n$ -equivalencia débil puesto que  $\delta$  y  $\epsilon$  lo son. El morfismo buscado  $\bar{\sigma}$  es entonces la composición  $G \otimes_n I \xrightarrow{\gamma} G \otimes I \xrightarrow{\sigma} G$  que es  $n$ -equivalencia débil puesto que  $\sigma$  lo es.

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

Comprobemos ahora que  $\bar{i}_0 + \bar{i}_1$  es una  $n$ -cofibración. Como  $G$  es  $n$ -cofibrante, es cofibrante, y por tanto  $i_0 + i_1$  es una cofibración de grupoides simpliciales, de donde  $Sk^{n+1}(i_0 + i_1)$  es una  $n$ -cofibración, lo cual implica teniendo en cuenta 3.1.7 que  $\bar{i}_0 + \bar{i}_1$  es una  $n$ -cofibración.

Por último notemos que  $\bar{\sigma}(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \sigma\gamma(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \sigma(i_0 + i_1) = \nabla$  ■

**Proposición 3.2.10.** *La construcción dada en la definición 3.2.8 define un funtor  $- \otimes_n I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  que es adjunto por la izquierda al funtor  ${}_n(-)^I$ .*

*Demostración:* Es claro que la construcción  $(-) \otimes_n I$  es funtorial, por tanto sólo hemos de demostrar que dados  $G$  y  $H$  dos grupoides simpliciales, se tiene que

$$\mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*}(G \otimes_n I, H) \cong \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*}(G, {}_n H^I)$$

Para ello notemos que dar un morfismo  $G \otimes_n I \rightarrow H$  es equivalente a dar dos morfismos  $Sk^{n+1}(G \otimes I) \rightarrow H$  y  $G \amalg G \rightarrow H$  que hagan conmutativo el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G \amalg G) & \longrightarrow & G \amalg G \\ Sk^{n+1}(i_0+i_1) \downarrow & & \downarrow \\ Sk^{n+1}(G \otimes I) & \longrightarrow & H \end{array}$$

lo cual equivale a dar dos morfismos  $G \amalg G \rightarrow H$  y  $G \otimes I \rightarrow \mathit{Cosk}^{n+1}H$  tales que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \amalg G & \longrightarrow & G \otimes I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & \mathit{Cosk}^{n+1}H \end{array}$$

y, por las propiedades universales tanto del producto como del coproducto, ésto equivale a dar dos morfismos  $G \rightarrow H \times H$  y  $G \rightarrow (\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I$  que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & (\mathit{Cosk}^{n+1}H)^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H \times H & \longrightarrow & \mathit{Cosk}^{n+1}H \times \mathit{Cosk}^{n+1}H \end{array}$$

lo cual equivale precisamente a dar un morfismo  $G \rightarrow {}_n H^I$ . ■

Estudiaremos en lo que sigue cómo es la relación de homotopía (por la izquierda) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  asociada a la  $n$ -estructura y de hecho veremos que puede ser dada explícitamente truncando convenientemente la definición dada en 2.1.10.

**Definición 3.2.11.** *Sean  $f, g : G \rightarrow H$  dos morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Una  $n$ -homotopía de  $f$  a  $g$  consiste en una aplicación  $\beta : \mathit{Obj}(G) \rightarrow H_0$  tal que  $s\beta = f$  y  $t\beta = g$  junto con una familia de aplicaciones  $\beta_k^j : G_k \rightarrow H_k$ ,  $1 \leq j \leq k \leq n+1$ , verificando las siguientes relaciones:*



### 3.2 Teoría de homotopía asociada a la $n$ -estructura.

$$a) d_0\beta_k^1(x) = g_{k-1}d_0(x) \circ s_0^{k-1}\beta s(x); \quad d_k\beta_k^k(x) = s_0^{k-1}\beta t(x) \circ f_{k-1}d_k(x), \quad \forall x \in G_k.$$

$$b) d_i\beta_k^j = \beta_{k-1}^{j-1}d_i \quad i < j,$$

$$d_i\beta_k^j = \beta_{k-1}^j d_i \quad i \geq j.$$

$$c) s_i\beta_k^j = \beta_{k+1}^{j+1}s_i \quad i < j,$$

$$s_i\beta_k^j = \beta_{k+1}^j s_i \quad i \geq j.$$

$$d) \text{Dados } p \xrightarrow{x} q \xrightarrow{y} r \in G_k, \quad \beta_k^j(y \circ x) = \alpha_k^j(y) \circ (s_0^k\beta t(x))^{-1} \circ \beta_k^j(x).$$

La proposición siguiente muestra que este concepto de  $n$ -homotopía es equivalente al de homotopía (por la izquierda) que se deduce de la construcción del cilindro dada en 3.2.8.

**Proposición 3.2.12.** Sean  $f, g : G \rightarrow H$  dos morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces se tiene que dar una  $n$ -homotopía  $\beta$  de  $f$  a  $g$  es equivalente a dar un morfismo  $\bar{\beta} : G \otimes_n I \rightarrow H$  tal que  $\bar{\beta}(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = f + g$ .

*Demostración:*

Supongamos dadas aplicaciones  $\beta : \text{Obj}(G) \rightarrow H_0$  con  $s\beta = f$ ,  $t\beta = g$ , y  $\beta_k^j : G_k \rightarrow H_k$ ,  $1 \leq j \leq k \leq n+1$ , verificando las relaciones dadas en 3.2.11. Según vimos en 2.3.10 esto es equivalente a dar una familia de aplicaciones  $\beta_k : (G \otimes I)_k \rightarrow H_k$ ,  $0 \leq k \leq n+1$ , verificando  $\beta_k i_{0k} = f_k$  y  $\beta_k i_{1k} = g_k$ ,  $0 \leq k \leq n+1$  (recordemos que la equivalencia venía dada definiendo en cada dimensión  $k$ ,  $\beta_k(I_q) = s_0^k\beta(q)$  con  $q \in \text{Obj}(G)$ ,  $\beta_k(x^{00\dots 0}) = f_k(x)$ ,  $\beta_k(x^{11\dots 1}) = s_0^k\beta t(x) \circ g_k(x) \circ s_0^k\beta s(x)^{-1}$  y  $\beta_k(x^{00\dots 011^{j\dots 1}}) = s_0^k\beta t(x)^{-1} \circ \beta_k^j(x)$ ,  $1 \leq j \leq k$ ). Esto determina un morfismo simplicial truncado  $\beta_{tr} : tr^{n+1}(G \otimes I) \rightarrow tr^{n+1}(H)$  tal que  $\beta_{tr} tr^{n+1}(i_0 + i_1) = tr^{n+1}(f + g)$ . Teniendo en cuenta la adjunción  $sk^{n+1} \vdash tr^{n+1}$ , así como que  $Sk^{n+1} = sk^{n+1}tr^{n+1}$ , se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G \amalg G) & \xrightarrow{\alpha} & G \amalg G \\ \downarrow sk^{n+1}(i_0+i_1) & & \downarrow \bar{i}_0+\bar{i}_1 \\ Sk^{n+1}(G \otimes I) & \xrightarrow{\beta} & H \end{array}$$

que da lugar a un morfismo  $\bar{\beta} : G \otimes_n I \rightarrow H$  que verifica  $\bar{\beta}(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = f + g$ .

Recíprocamente, dado  $\bar{\beta} : G \otimes_n I \rightarrow H$  verificando la condición requerida, basta considerar el morfismo  $\delta\bar{\beta} : Sk^{n+1}(G \otimes I) \rightarrow H$ , que está determinado por su  $(n+1)$ -truncación, y definir los morfismos  $\beta_k^j$ ,  $1 \leq j \leq k \leq n+1$  a partir de  $(\delta\bar{\beta})_k : (G \otimes I)_k \rightarrow H_k$  como en 2.3.10. ■

La construcción del objeto cilindro en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  (véase 2.3.12) permite ahora hacer la correspondiente construcción considerando la  $n$ -estructura (véase 2.3.8).

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

**Proposición 3.2.13.** *Sea  $(G, p)$  un grupoide simplicial punteado con  $G$  un grupoide simplicial  $n$ -cofibrante. Entonces el grupoide simplicial punteado  $(\overline{G_n \otimes I}, p_0)$  definido mediante el siguiente diagrama cocartesiano*

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}((G, p) \amalg (G, p)) & \xrightarrow{\alpha} & (G, p) \amalg (G, p) \\ Sk^{n+1}(i'_0 + i'_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}'_0 + \bar{i}'_1 \\ Sk^{n+1}(\overline{G \otimes I}, p_0) & \xrightarrow{\delta} & (\overline{G \otimes_n I}, p_0) \end{array}$$

es un cilindro para  $(G, p)$  con la  $n$ -estructura.

*Demostración:* Notemos en primer lugar que al ser  $G$  cofibrante (puesto que es  $n$ -cofibrante), el morfismo  $i'_0 + i'_1$  es una cofibración y, por tanto,  $Sk^{n+1}(i'_0 + i'_1)$  una  $n$ -cofibración de grupoide simpliciales lo que implica que también lo es el morfismo  $\bar{i}'_0 + \bar{i}'_1$ .

Veamos ahora que existe una  $n$ -equivalencia débil  $\bar{\sigma}' : (\overline{G \otimes_n I}, p_0) \rightarrow (G, p)$  tal que la composición

$$(G, p) \amalg (G, p) \xrightarrow{\bar{i}'_0 + \bar{i}'_1} (\overline{G \otimes_n I}, p_0) \xrightarrow{\bar{\sigma}'} (G, p)$$

es una factorización del morfismo codiagonal. Para ello consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}((G, p) \amalg (G, p)) & \xrightarrow{\alpha} & (G, p) \amalg (G, p) \\ Sk^{n+1}(i'_0 + i'_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}'_0 + \bar{i}'_1 \\ Sk^{n+1}(\overline{G \otimes I}, p_0) & \xrightarrow{\beta} & (\overline{G \otimes_n I}, p_0) \\ & \searrow \epsilon & \downarrow \gamma' \\ & & (\overline{G \otimes I}, p_0) \end{array}$$

Mediante un desarrollo análogo al realizado en la demostración de la proposición 3.2.9 se comprueba que la composición

$$(\overline{G \otimes_n I}, p_0) \xrightarrow{\gamma'} (\overline{G \otimes I}, p_0) \xrightarrow{\sigma'} (G, p)$$

es el morfismo  $\bar{\sigma}'$  buscado, donde  $\sigma'$  es dado como en 2.3.13. ■

La construcción del cilindro en la categoría  $(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  permite definir el functor  ${}^n\bar{\Sigma} : (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$  dado por  ${}^n\bar{\Sigma}(G, p) = \text{Coker}(\bar{i}'_0 + \bar{i}'_1)$ . Siguiendo un razonamiento análogo al realizado en 3.2.6 se obtiene que, dado  $(G, p) \in (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*, \mathbf{p})$ , la relación entre los funtores  ${}^n\bar{\Sigma}$  y  $\bar{\Sigma}$  (ver 2.3.14) está dada por  ${}^n\bar{\Sigma}(G, p) \cong Sk^{n+1}(\bar{\Sigma}(G, p))$ .

### 3.3 Comparación con otras estructuras de modelos

#### 3.3.1 Comparación con la estructura en $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$

**3.3.1.** Recordemos que si consideramos para cada  $n \geq 0$ , la subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  cuyos objetos tienen complejo de Moore trivial en dimensión mayor que  $n$ , denotada en [52] por  $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ , ésta es una subcategoría plena y reflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , donde el funtor reflector  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ , que es dado por

$$\mathcal{P}_n(G_\bullet) = \text{cosk}^{n+1} \left( \begin{array}{c} G_{n+1} \rightrightarrows \frac{G_n}{d_{n+1}(N_{n+1}G_\bullet)} \rightrightarrows G_{n-1} \rightrightarrows \cdots \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0 \\ \hline H_{n+1} \rightrightarrows \end{array} \right)$$

con  $H_{n+1} = \{x \in G_{n+1} \mid d_i x \in d_{n+1}(N_{n+1}(G_\bullet))\}$ , es adjunto por la izquierda al funtor de inclusión  $J : \mathbf{T}_n](\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Entonces, definiendo fibraciones y equivalencias débiles en  $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  como aquellos morfismos que lo son en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y las cofibraciones por la *LLP* respecto a las fibraciones triviales, en [17] se probó que  $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  es una categoría de modelos cerrada, mostrándose además equivalencias de categorías

$$Ho(\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})|n - \text{coconexos}) \cong Ho(\mathbf{CW}|\pi_i = 0, i \geq n + 2)$$

donde el segundo miembro denota la subcategoría plena de  $Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$  cuyos objetos son los grupos simpliciales  $n$ -conexos (i.e., con  $\pi_i = 0$  para  $i \geq n + 1$ ).

En [52] se relacionó esta estructura de modelos en  $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  con la  $n$ -estructura dada en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver 1.3.11) mediante la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$ , y se demostró que un morfismo en  $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$   $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $J(f_\bullet)$  es una  $n$ -fibración (resp.  $n$ -equivalencia débil) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Recíprocamente se tiene también que dado un morfismo de grupos simpliciales  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil si y sólo si  $\mathcal{P}_n(f_\bullet)$  es una equivalencia débil, y si  $f_\bullet$  es una  $n$ -cofibración (resp.  $n$ -fibración) entonces  $\mathcal{P}_n(f_\bullet)$  es una cofibración (resp. fibración). Además, como tanto la unidad como la counidad de la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  son equivalencias débiles (ver [39]) se tiene para cada  $n \geq 0$ , una equivalencia de categorías

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})) .$$

**3.3.2.** Consideremos ahora, para cada  $n \geq 0$ , la categoría  $\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$ , que es la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  formada por aquellos grupoides simpliciales  $X$  tales que  $N_q(X)$  contiene solo identidades para  $q \geq n + 1$ . Esta es una subcategoría reflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , esto es, si  $J : \mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es el funtor de inclusión, éste tiene un adjunto izquierda, el funtor reflector,  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$ , donde dado  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ ,  $\mathcal{P}_n(X)$  se define como el siguiente grupoide simplicial:

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

$$\mathcal{P}_n(X) = \text{cosk}^{n+1} \left( \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{s_n} & & \xrightarrow{s_{n-1}} & & \xrightarrow{s_0} \\ & & \searrow^{s_0} & & \searrow^{s_0} & & \searrow^{s_0} \\ X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \cdots & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ \bigcap_{i=0}^n d_i^{-1} B_n(X) & \xrightarrow{d_0} & B_n(X) & \xrightarrow{d_0} & & \cdots & & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s \quad \downarrow t & & \downarrow s \quad \downarrow t & & \downarrow s \quad \downarrow t & & \downarrow s \quad \downarrow t & & \downarrow s \quad \downarrow t \\ O & \xrightarrow{\quad} & O & \xrightarrow{\quad} & O & \cdots & O & \xrightarrow{\quad} & O \end{array} \end{array} \right)$$

siendo efectivamente la counidad de la adjunción la identidad.

De la definición se sigue fácilmente que:

$$N_q(\mathcal{P}_n X) = \begin{cases} N_q(X) & \text{si } q \leq n-1 \\ \frac{N_n(X)}{B_n(X)} & \text{si } q = n \\ O & \text{si } q \geq n+1 \end{cases}$$

lo que implica

$$\pi_q(\mathcal{P}_n X) = \begin{cases} \pi_q(X) & \text{si } q \leq n \\ O & \text{si } q \geq n+1 \end{cases}$$

Recordemos que la categoría  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  es una categoría de modelos cerrada (véase [52], [35]) donde las fibraciones (equivalencias débiles) son los morfismos  $f$  tales que  $J(f)$  es fibración (equivalencia débil) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y las cofibraciones son los morfismos que tiene la LLP respecto a las fibraciones triviales. Resaltamos que en particular, para  $n=0$ , se tiene una equivalencia de categorías  $\mathbf{T}_0(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{Gpd}$  identificándose las correspondientes estructuras de modelos en ambas categorías.

A continuación relacionaremos la estructura que se tiene en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  y la  $n$ -estructura de grupoides simpliciales y, por tanto, sus teorías de homotopía asociadas.

**Proposición 3.3.3.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . Entonces  $f : X \rightarrow Y$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $J(f)$  es una  $n$ -fibración (resp.  $n$ -equivalencia débil).*

*Demostración:* Que  $f$  sea una fibración en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  equivale a que  $N_q(J(f))$  sea una fibración de grupoides para todo  $q \geq 0$  lo cual, teniendo en cuenta la caracterización de las  $n$  fibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  dada en 3.1.3, así como que  $Z_{n+1}(J(X))$  contiene sólo identidades, es equivalente a que  $J(f)$  sea una  $n$ -fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Si suponemos ahora que  $f$  es una equivalencia débil en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  basta tener en cuenta la caracterización de las  $n$ -equivalencias débiles en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  dada de nuevo en 3.1.3 así como que para cada  $p \in \text{Obj}(X)$  y cada  $q \geq n+1$  se tiene que  $\pi_q(JX(p)) = 0$ . ■

**Proposición 3.3.4.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de grupoides simpliciales.*

### 3.3 Comparación con otras estructuras.

- i) Si  $f$  es una  $n$ -cofibración, entonces  $\mathcal{P}_n(f)$  es una cofibración.  
 ii)  $f$  es una  $n$ -equivalencia débil si y sólo si  $\mathcal{P}_n(f)$  es una equivalencia débil.  
 iii) Si  $f$  es una  $n$ -fibración, entonces  $\mathcal{P}_n(f)$  es una fibración.

*Demostración:* i) Para demostrar que  $\mathcal{P}_n(f)$  es una cofibración en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  veamos que existe un levantamiento en cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n(X) & \longrightarrow & A \\ \mathcal{P}_n(f) \downarrow & \nearrow & \downarrow g \\ \mathcal{P}_n(Y) & \longrightarrow & B \end{array}$$

donde el morfismo  $g$  es una fibración trivial en la categoría  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . Para ello basta considerar el diagrama inducido mediante la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & J(A) \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow J(g) \\ Y & \longrightarrow & J(B) \end{array}$$

donde, por ser  $J(g)$  una fibración trivial y  $f$  una cofibración (pues es una  $n$ -cofibración) existe un levantamiento  $h$  que da lugar al levantamiento buscado en el primer diagrama.

ii) Supongamos que  $f$  es una  $n$ -equivalencia débil. Según hemos visto en la proposición 3.3.3 demostrar que  $\mathcal{P}_n(f)$  es una equivalencia débil es equivalente a probar que  $J\mathcal{P}_n(f)$  es una  $n$ -equivalencia débil, lo que teniendo en cuenta la proposición 3.1.3 equivale a demostrar induce una biyección entre los conjuntos de componentes conexas de  $J\mathcal{P}_n(X)$  y de  $J\mathcal{P}_n(Y)$ , lo cual es evidente, así como que para cada  $p \in \text{Obj}(X)$  y cada  $0 \leq q \leq n$  se induce un isomorfismo de grupos  $\pi_q((J\mathcal{P}_n(X))(p)) \cong \pi_q((J\mathcal{P}_n(Y))(f(p)))$ . Para ello basta tener en cuenta que  $\pi_q((J\mathcal{P}_n(X))(p)) = \pi_q((\mathcal{P}_n(X))(p)) = \pi_q(X(p))$ ,  $0 \leq q \leq n$  (ver 3.3.2), y que por ser  $f$  una  $n$ -equivalencia débil se tiene que  $\pi_q(X(p)) = \pi_q(Y(f(p)))$ ,  $0 \leq q \leq n$ .

El recíproco se demuestra invirtiendo el razonamiento anterior.

iii) Por definición  $\mathcal{P}_n(f)$  es una fibración en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  si  $J\mathcal{P}_n(f)$  lo es en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y por 2.2.5 esto es equivalente a que los morfismos  $N_q(J\mathcal{P}_n(f))$ ,  $q \geq 0$  sean fibraciones de grupoides, lo cual es cierto teniendo en cuenta 3.3.2 y que por hipótesis  $N_q(f)$  es fibración de grupoides para cada  $0 \leq q \leq n$ . ■

Puesto que tanto la unidad como la counidad de la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  son equivalencias débiles en las correspondientes categorías, la proposición anterior junto con 1.1.7 asegura el siguiente:

**Teorema 3.3.5.** *La adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  induce, para cada  $n \geq 0$ , una equivalencia de categorías*

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \cong Ho(\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd}))$$

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

#### 3.3.2 Comparación con la $n$ -estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ y $\mathbf{Top}$

Comenzaremos recordando que, para cada  $n \geq 0$ , tanto la categoría  $\mathbf{Top}$  como  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  soportan una estructura de modelos (la  $n$ -estructura), cuyo estudio detallado y relación puede verse en [30]. A continuación veremos cómo está definida dicha estructura y daremos algunas caracterizaciones que nos serán de utilidad posteriormente para establecer una relación entre las categorías de homotopía asociadas a dichas estructuras de modelos y la categoría de homotopía asociada a  $n$ -estructura dada en la sección 3.1 para la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

**3.3.6.** Consideremos la categoría de espacios topológicos. Si para cada  $q \geq 0$  se denota por  $I^q$  el intervalo unidad en dimensión  $q$ , por  $V^{q-1}$  a la unión de todas las caras de  $I^q$  excepto  $I^q \times \{1\}$  y por  $\dot{I}^q$  a la frontera de  $I^q$ , se tiene que definiendo, para cada  $n \geq 0$ , las  $n$ -fibraciones como aquellos morfismos que tienen la RLP respecto de la familia de morfismos  $V^{q-1} \rightarrow I^q$ ,  $0 < q \leq n+1$ , y de  $V^{n+1} \rightarrow \dot{I}^{n+2}$ , las  $n$ -equivalencias débiles como los morfismos  $f : X \rightarrow Y$  que verifican que, para cada  $q$ ,  $0 \leq q \leq n$ , y cada  $x \in X$  el morfismo inducido  $\pi_q(f) : \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$  es un isomorfismo, donde  $\pi_q$  denota el  $q$ -ésimo grupo de homotopía con base  $x$ , y las  $n$ -cofibraciones como los morfismos que tienen la LLP respecto de las  $n$ -fibraciones triviales, la categoría  $\mathbf{Top}$  tiene estructura de modelos cerrada (ver [30]).

Siguiendo un desarrollo análogo la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  también fue dotada de una nueva estructura de modelos, llamada también  $n$ -estructura (ver [52]), en los términos de que un morfismo de conjuntos simpliciales  $f_\bullet$  se dice que es una  $n$ -fibración si tiene la RLP respecto de las familias de morfismos  $\Delta[q, k] \hookrightarrow \Delta[q]$ ,  $0 \leq k \leq q$ ,  $0 < q \leq n+1$  y  $\Delta[n+2, k] \hookrightarrow \dot{\Delta}[n+2]$ ,  $0 \leq k \leq n+2$ ;  $f_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil si su realización geométrica  $|f_\bullet|$  es una  $n$ -equivalencia débil en  $\mathbf{Top}$  y  $f_\bullet$  es una  $n$ -cofibración si tiene la LLP respecto de las  $n$ -fibraciones triviales.

El par de funtores adjuntos  $|-| \vdash S$  induce además una equivalencia entre las correspondientes categorías de homotopía, esto es

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})) \cong Ho_n(\mathbf{Top})$$

Destaquemos también que las  $n$ -fibraciones, las  $n$ -equivalencias débiles y las  $n$ -fibraciones triviales en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  fueron caracterizadas en [30] como sigue:

Sea  $f_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$

- i)  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración si y sólo si  $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$  es una fibración.
- ii)  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración trivial si y sólo si tiene la RLP respecto de la familia de morfismos  $\dot{\Delta}[q] \hookrightarrow \Delta[q]$ ,  $0 \leq q \leq n+1$ .
- iii) Si  $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$  es una  $n$ -equivalencia débil, entonces  $f_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil.
- iv) Si  $K_\bullet$  y  $L_\bullet$  son  $n$ -fibrantes y  $f_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil, entonces  $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$  es una equivalencia débil.

### 3.3 Comparación con otras estructuras.

A continuación nuestro objetivo será probar que el par de funtores adjuntos  $G \vdash \overline{W}$  (ver 2.1.15) verifica las hipótesis del teorema 1.1.7 considerando, para cada  $n \geq 0$ , la  $n$ -estructura en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y la  $(n+1)$ -estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ .

**Proposición 3.3.7.** *i) Dado  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  entonces  $f$  es una  $n$ -fibración (resp.  $n$ -equivalencia débil) si sólo si  $\overline{W}(f)$  es una  $(n+1)$ -fibración (resp.  $(n+1)$ -equivalencia débil).*

*ii) Si  $f_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  es una  $(n+1)$ -cofibración (resp.  $(n+1)$ -equivalencia débil) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  entonces  $G(f_\bullet)$  es una  $n$ -cofibración (resp.  $n$ -equivalencia débil) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .*

*Demostración:*

i) Notemos en primer lugar que de las definiciones de los funtores  $\overline{W}$  y  $\mathit{Cosk}^n$  se sigue que, para cada  $n \geq 0$ ,  $\overline{W}\mathit{Cosk}^{n+1}(-) \cong \mathit{Cosk}^{n+2}\overline{W}(-)$ . Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es una  $n$ -fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Entonces por definición  $\mathit{Cosk}^{n+1}(f)$  es una fibración y, teniendo en cuenta la observación hecha anteriormente así como que el functor  $\overline{W}$  preserva y refleja fibraciones de grupoides simpliciales (ver 2.2.18), se tiene que  $\mathit{Cosk}^{n+2}\overline{W}(f)$  es una fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  lo que es equivalente por 3.3.6 a que  $\overline{W}(f)$  sea una  $(n+1)$ -fibración. La parte correspondiente a las equivalencias débiles se deduce de forma análoga (nótese que todo  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es  $n$ -fibrante y como acabamos de demostrar  $\overline{W}X$  es  $(n+1)$ -fibrante)

ii) Dada  $f_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  una  $(n+1)$ -cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  hemos de encontrar un levantamiento en cada diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} GK_\bullet & \longrightarrow & X \\ G(f_\bullet) \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ GL_\bullet & \longrightarrow & Y \end{array}$$

con  $g$  una  $n$ -fibración trivial de grupoides simpliciales, lo que es equivalente, teniendo en cuenta la adjunción  $G \vdash \overline{W}$ , a encontrar un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_\bullet & \longrightarrow & \overline{W}X \\ f_\bullet \downarrow & \nearrow h & \downarrow \overline{W}(g) \\ L_\bullet & \longrightarrow & \overline{W}Y \end{array}$$

el cual existe teniendo en cuenta 3.3.6 y que por i)  $\overline{W}(g)$  es una  $(n+1)$ -fibración trivial.

Por último, para probar que  $G$  preserva equivalencias débiles, notemos que para cada  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  el morfismo  $K_\bullet \rightarrow \overline{W}G(K_\bullet)$  es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales (véase 2.2.18) y, por tanto, para cada  $q \geq 0$  y cada  $x \in K_0$ , se tiene que

### 3. Teoría de homotopía para equivalencias débiles truncadas.

$\pi_q(K_\bullet, x) \cong \pi_q(\bar{W}GK_\bullet, x)$ . Por otro lado, de la propia definición del funtor  $\bar{W}$  se sigue que, para todo  $q > 0$ ,  $\pi_q(\bar{W}GK_\bullet, x) \cong \pi_{q-1}(GK_\bullet, x)$  y por tanto se tiene que  $\pi_q(K_\bullet, x) \cong \pi_{q-1}(GK_\bullet, x)$ . Así, si  $f_\bullet$  es una  $(n+1)$ -equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , para todo  $0 \leq q \leq n$  se tiene

$$\begin{aligned} \pi_q(GK_\bullet, x) &\cong \pi_{q+1}(\bar{W}GK_\bullet, x) \cong \pi_{q+1}(K_\bullet, x) \cong \pi_{q+1}(L_\bullet, f(x)) \cong \\ &\cong \pi_{q+1}(\bar{W}GL_\bullet, f(x)) \cong \pi_q(GL_\bullet, f(x)) \end{aligned}$$

Además se verifica que  $\pi_0(K_\bullet) \cong \pi_0(GK_\bullet)$  de donde se deduce que  $G$  preserva equivalencias débiles. ■

**Teorema 3.3.8.** *La adjunción  $G \vdash \bar{W}$  induce, para cada  $n \geq 0$ , una equivalencia entre las categorías  $Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*)$  y  $Ho_{n+1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set}))$*

*Demostración:* Teniendo en cuenta el teorema 1.1.7 y la proposición anterior sólo queda demostrar que dados  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  se tenga que  $f : K_\bullet \rightarrow \bar{W}X$  es una  $(n+1)$ -equivalencia débil si y sólo si su aplicación adjunta  $g : GK_\bullet \rightarrow X$  es una  $n$ -equivalencia débil, para lo cual basta considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} GK_\bullet & \xrightarrow{G(f)} & G\bar{W}X \\ & \searrow g & \downarrow \text{counidad} \\ & & X \end{array}$$

y tener en cuenta que la counidad de la adjunción es una  $n$ -equivalencia débil (puesto que es una equivalencia débil y que  $G(f)$  también lo es (pues  $f$  es una  $(n+1)$ -equivalencia débil). ■



## Capítulo 4

# Álgebra homotópica en subcategorías de grupoides simpliciales

El estudio de las propiedades geométricas de los espacios puede simplificarse si uno restringe, usando este tipo de propiedades, la clase de los espacios a ser considerada. Esto puede hacerse imponiendo condiciones típicamente sobre el tipo de homotopía de los espacios, esto es, considerando por ejemplo espacios  $r$ -conexos,  $r \geq 0$ , espacios  $n$ -coconexos,  $n \geq 0$ , o más en general, espacios  $r$ -conexos y  $n$ -coconexos,  $0 \leq r \leq n$ . Modelar algebraicamente estas clases más restringidas de espacios conduce de forma natural, o bien a la consideración de nociones más débiles de equivalencia débil en la categoría de grupoides simpliciales y al desarrollo de una teoría de homotopía adecuada para ellas, opción esta que ha sido analizada en el capítulo anterior, o bien, a la consideración de otras categorías de tipo algebraico, que eventualmente pueden ser subcategorías de la categoría de grupoides simpliciales, que modelen tales tipos de espacios y en las que se tenga definida una noción de homotopía que corresponda a la homotopía entre aplicaciones continuas de espacios. Esta segunda opción constituye el objetivo de este capítulo junto con el estudio, de especial relevancia también, de la clasificación algebraica del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas entre los espacios considerados.

En la misma línea que para el caso de grupos simpliciales (véase [52], [40]) se consideran aquí, para cada  $0 \leq r \leq n$ , subcategorías de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , denotadas  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$  que son dotadas en cada caso de una estructura de modelos cerrada en el sentido de Quillen y para las que es analizada la correspondiente teoría de homotopía asociada. Para valores particulares de  $r$  y  $n$  estas categorías son equivalentes a otras bien conocidas (si  $r = 0$  y  $n = 1$  véase corolario 4.1.16) siendo en general el caso  $n = r + 1$ , abordado en la sección 4 del capítulo, de especial significación por sus connotaciones más clásicas al aportar como categorías equivalentes a las antes definidas versiones “no conexas” de las categorías de módulos cruzados de grupos, módulos cruzados trenzados o módulos cruzados estables.

## 4.1 2-grupoides y categorías equivalentes

En el estudio de modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios, una adecuada generalización, en el paso de 1-tipos conexos al caso de 1-tipos no conexos, es ofrecida por la consideración de grupoides en lugar de grupos. Para el caso de 2-tipos también es posible una similar generalización, en este caso sustituyendo módulos cruzados de grupos por 2-grupoides. Analizamos en esta sección esta categoría de 2-grupoides, su estructura de modelos cerrada y su equivalencia tanto con la categoría de *módulos cruzados sobre grupoides* como con la categoría  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$ .

**4.1.1.** Un 2-grupoide es concebido como una 2-categoría pequeña en la cual tanto los morfismos de dimensión 1 como los de dimensión 2 son invertibles. De forma más explícita, un 2-grupoide  $X$ , consiste en un grupoide  $X$  en el cual para cada dos morfismos  $x, y : p \rightarrow q$  es dado un conjunto de *deformaciones* o *2-celdas*, representadas por diagramas del tipo

$$p \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{y} \end{array} q$$

de forma que para cada dos objetos  $p$  y  $q$ , el conjunto de morfismos  $X(p, q)$  constituye el conjunto de objetos de un grupoide, que denotaremos por  $\bar{X}(p, q)$ , cuyos morfismos son las deformaciones entre morfismos de  $p$  en  $q$ . La composición en este grupoide es usualmente llamada la composición *vertical* de deformaciones, y para dos deformaciones  $\alpha : x \Rightarrow y$ ,  $\beta : y \Rightarrow z$  es representada por  $\beta * \alpha : x \Rightarrow z$ .

También ha de estar dada una composición *horizontal* de deformaciones

$$p \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{y} \end{array} q \begin{array}{c} \xrightarrow{z} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{v} \end{array} r = p \begin{array}{c} \xrightarrow{z \circ x} \\ \Downarrow \gamma \circ \alpha \\ \xrightarrow{v \circ y} \end{array} r$$

de tal manera que el conjunto de todas las deformaciones representa el de morfismos de un grupoide cuyo conjunto de objetos es el propio de  $X$ . Ambas composiciones, horizontal y vertical, han de ser compatibles en el sentido de las leyes de Godement, esto es, si se tiene un diagrama

$$p \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{y} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{l} \end{array} q \begin{array}{c} \xrightarrow{z} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{v} \\ \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{m} \end{array} r$$

entonces

$$(\delta \circ \beta) * (\gamma \circ \alpha) = (\delta * \gamma) \circ (\beta * \alpha)$$

Un 2-grupoide  $X$  puede ser representado por un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & s_0 & \\ & \curvearrowright d_0 & \\ X_1 & \xrightarrow{\quad} & X_0 \\ & d_1 & \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ & t & \\ O & \xlongequal{\quad} & O \\ & t & \end{array}$$

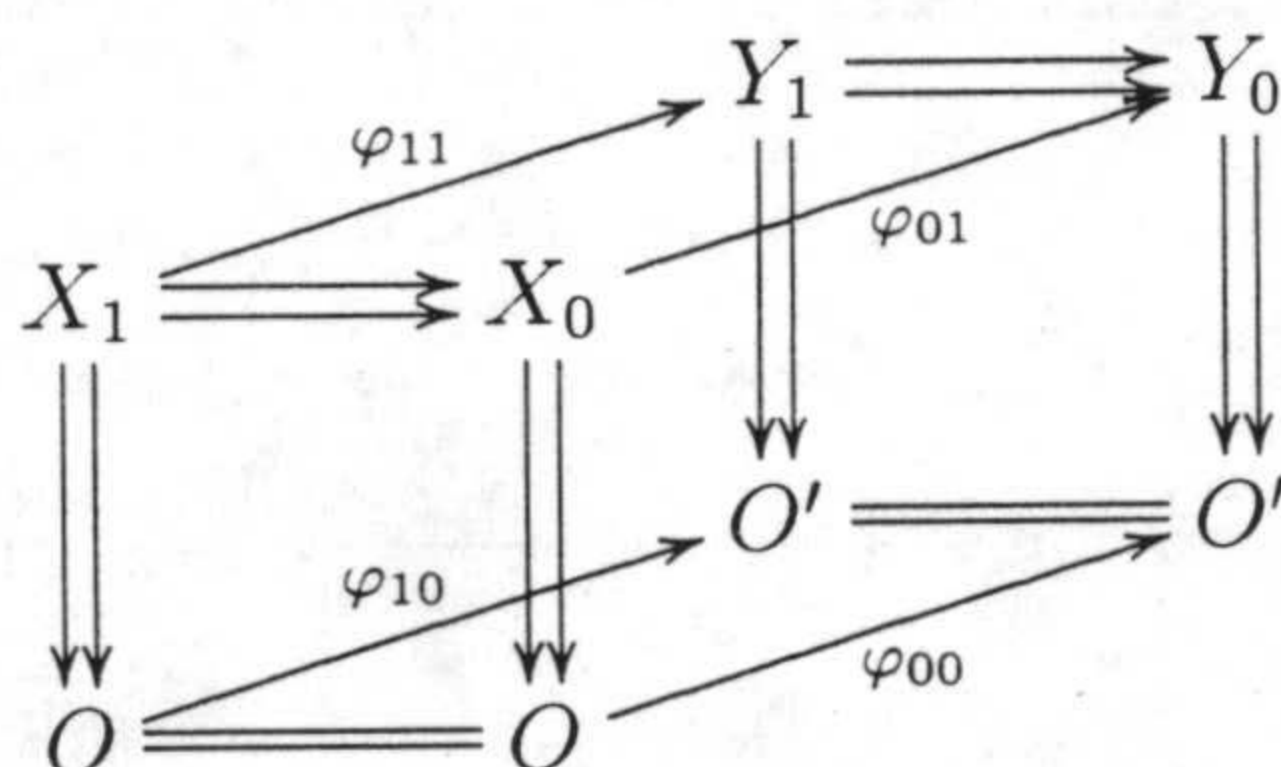
## 4.1 2-grupoides y categorías equivalentes.

en el cual  $O$  sería el conjunto de objetos,  $X_0$  el de morfismos y  $X_1$  el de deformaciones, donde además  $X_0 \xrightarrow[t]{s} O$ ,  $X_1 \xrightarrow[t]{s} O$  y  $X_1 \xrightleftharpoons[d_1]{s_0} X_0$  representan los grupoides cuyas respectivas composiciones son las de  $X$ , la horizontal y la vertical de deformaciones.

Una propiedad relevante sobre los 2-grupoides, es que la composición vertical está determinada por la horizontal y viceversa: Dados  $\alpha : x \Rightarrow y$ ,  $\beta : y \Rightarrow z$ , la ley de Gödement implica que necesariamente es  $\beta * \alpha = \alpha \circ (s_0(x))^{-1} \circ \beta$ . Teniendo en cuenta esto, es rutinario entonces probar el siguiente:

**Lema 4.1.2.** *Si  $X$  es un grupoides simplicial truncado a nivel 1, entonces existe una composición vertical que lo convierte en un 2-grupoides si, y sólo si, para cada  $\alpha, \beta \in N_1(X)$  tales que  $s(\alpha) = s(\beta)$  se tiene que  $\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha = (s_0 d_1(\alpha))^{-1} \circ \beta \circ s_0 d_1(\alpha)$ .*

Un morfismo de 2-grupoides  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un diagrama de conjuntos y aplicaciones



donde  $\varphi_{00} = \varphi_{10}$  y  $\varphi_{0*}, \varphi_{1*}$  y  $\varphi_{*1}$  son morfismos de grupoides.

Denotaremos  $\mathbf{2-Gpd}$  a la categoría de 2-grupoides. Ésta es una categoría completa y cocompleta, donde los límites son construidos como en conjuntos y los colímites por generadores y relaciones. Se tiene entonces:

**Teorema 4.1.3.** ([54]). *La categoría  $\mathbf{2-Gpd}$  es de modelos cerrada donde:*

- Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una fibración si es una fibración de Grothendieck, esto es, si  $\varphi$  verifica que para cualesquiera morfismos  $(q \xrightarrow{x} r) \in X_0$ ,  $(p' \xrightarrow{y} \varphi_{00}(q)) \in Y_0$  y  $(p' \xrightarrow{z} \varphi_{00}(r)) \in Y_0$ , y cualquier deformación  $(\alpha : z \Rightarrow \varphi_{01}(x) \circ y) \in Y_1$  existe una deformación  $(\beta : \bar{z} \Rightarrow x \circ \bar{y}) \in X_1$  tal que  $\varphi_{11}(\beta) = \alpha$ ,  $\varphi_{01}(\bar{z}) = z$  y  $\varphi_{01}(\bar{y}) = y$ .
- Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil si  $\forall p' \in O'$  existe un  $p \in O$  y un morfismo en  $X$ ,  $\varphi_{00}(p) \rightarrow p'$ , y además para cualesquiera dos objetos  $p, q \in O$ ,  $\varphi$  induce una equivalencia de categorías  $\varphi : \bar{X}(p, q) \rightarrow \bar{Y}(\varphi_{00}(p), \varphi_{00}(q))$ .
- Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Las fibraciones de 2-grupoides pueden ser caracterizadas como sigue:

**Lema 4.1.4.** *Sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morfismo de 2-grupoides. Son equivalentes:*

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$ .

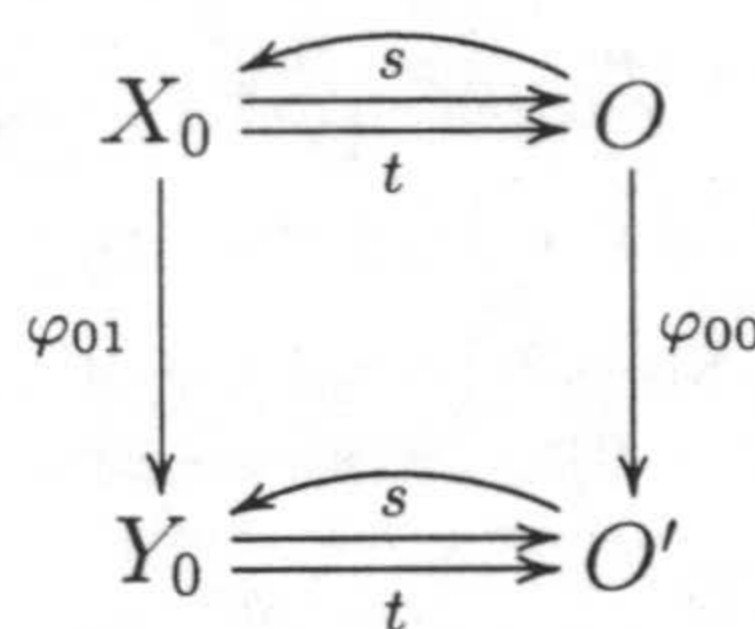
i)  $\varphi$  es una fibración.

ii)  $\varphi_{0*}$  y  $\varphi_{*1}$  son fibraciones de grupoides.

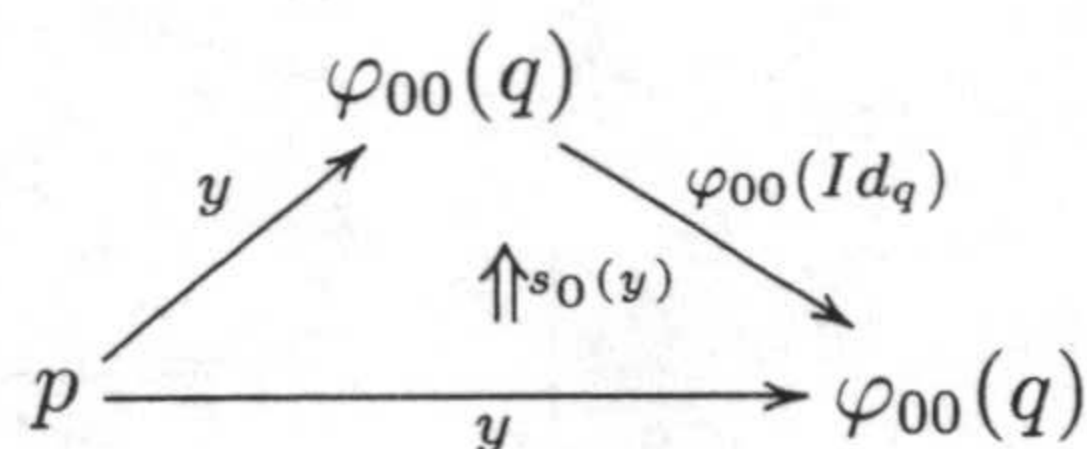
iii)  $\varphi_{1*}$  es una fibración de grupoides.

*Demostración:*

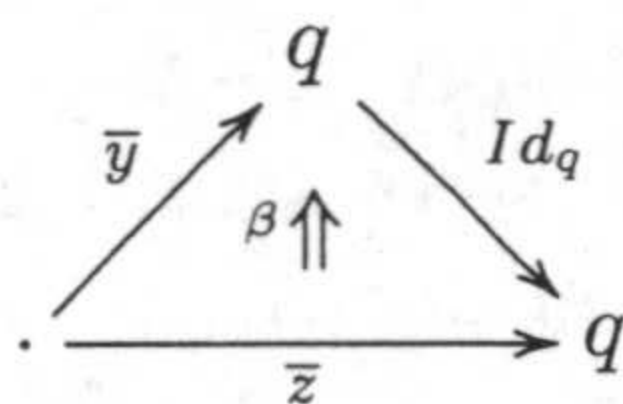
i)  $\Rightarrow$  ii) Consideremos



y sea  $(y, q) \in Y_0 \times_{\varphi_{00}} O$ . Entonces considerando el diagrama en  $Y$

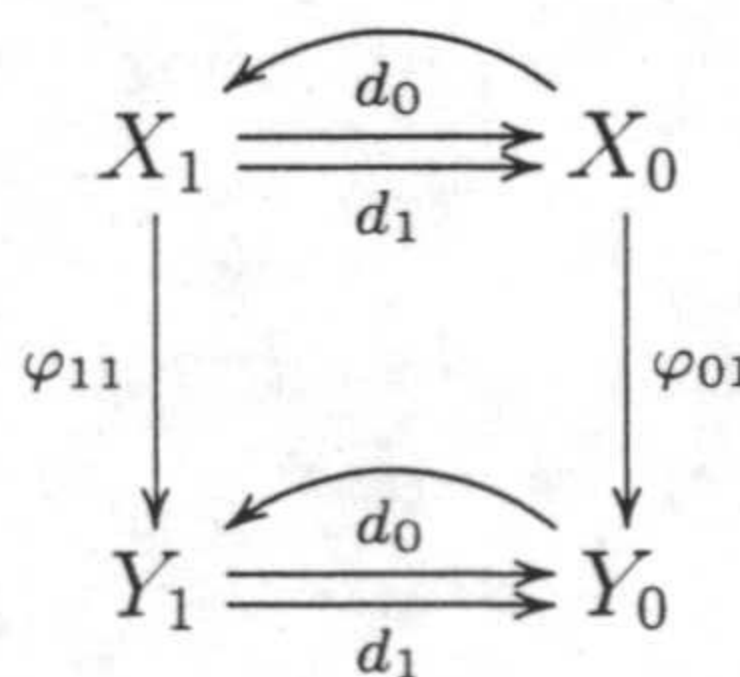


y aplicando que  $\varphi$  es una fibración, concluimos la existencia del diagrama en  $X$

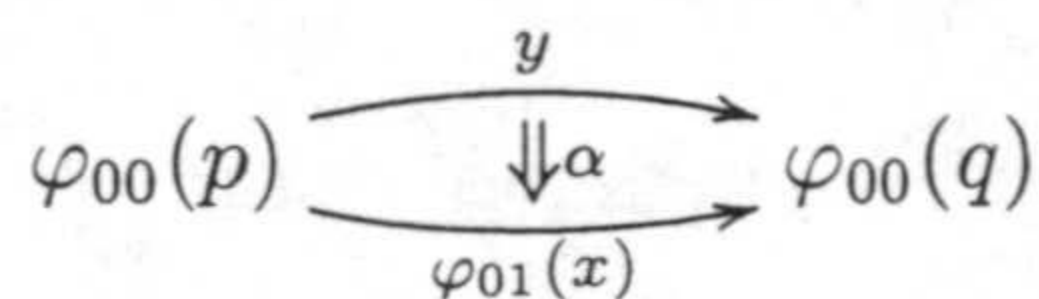


con  $\varphi_{11}(\beta) = s_0(y)$  y  $\varphi_{01}(\bar{y}) = y = \varphi_{01}(\bar{z})$ . En particular  $\bar{y} \in X_0$  es el requerido pues  $t(\bar{y}) = q$ .

Consideremos ahora



y sea  $(\alpha, x) \in Y_1 \times_{\varphi_{01}} X_0$ . Si  $p \rightarrow q$ , tenemos la deformación



## 4.1 2-grupoides y categorías equivalentes.

y aplicando entonces la condición de fibración para  $\varphi$  al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \varphi_{00}(p) & \\
 \varphi_{00}(Id_p) \nearrow & & \searrow \varphi_{01}(x) \\
 \varphi_{00}(p) & \xrightarrow{y} & \varphi_{00}(q)
 \end{array}$$

concluimos la existencia del diagrama en  $Y$

$$\begin{array}{ccc}
 & p & \\
 \bar{y} \nearrow & & \searrow x \\
 \cdot & \xrightarrow{\bar{z}} & q
 \end{array}$$

con  $\varphi_{11}(\beta) = \alpha$ ,  $\varphi_{01}(\bar{y}) = Id_{\varphi_{00}(p)}$ ,  $\varphi_{01}(\bar{z}) = y$  y  $t(\beta) = x \circ \bar{y}$ .

Ahora, considerando la composición horizontal

$$\begin{array}{ccc}
 \cdot & \xrightarrow{\bar{y}^{-1}} & \cdot \\
 \Downarrow s_0(\bar{y}^{-1}) & & \\
 \cdot & \xrightarrow{\bar{z}} & q \\
 \Downarrow \beta & & \\
 \cdot & \xrightarrow{\bar{z} \circ \bar{y}^{-1}} & q \\
 \Downarrow \beta \circ s_0(\bar{y}^{-1}) & & \\
 \cdot & \xrightarrow{x} & q
 \end{array}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \varphi_{11}(\beta \circ (s_0(\bar{y}))^{-1}) &= \varphi_{11}(\beta) \circ \varphi_{11}s_0(\bar{y}^{-1}) = \alpha \circ s_0\varphi_{01}(\bar{y}^{-1}) = \alpha \circ (s_0(Id_{\varphi_{00}(p)}))^{-1} = \\
 &= \alpha \circ s_0(Id_{\varphi_{00}(p)}) = \alpha \circ Id_{\varphi_{00}(p)} = \alpha
 \end{aligned}$$

y, además,  $d_1(\beta \circ s_0(\bar{y}^{-1})) = x$ .

*ii)  $\Rightarrow$  iii)* Consideremos

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} & O \\
 \varphi_{11} \downarrow & & \downarrow \varphi_{00} \\
 Y_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} & O'
 \end{array}$$

y sea  $(\alpha, q) \in Y_1 \times_{t, \varphi_{00}} O$ . Entonces, considerando  $(d_1(\alpha), q) \in Y_0 \times_{t, \varphi_{00}} O$ , existirá un  $x \in X_0$  tal que  $t(x) = q$  y  $\varphi_{01}(x) = d_1(\alpha)$ . Sea  $(\alpha, q) \in Y_1 \times_{d_1, \varphi_{01}} X_0$ ; existirá un  $\beta \in X_1$  tal que  $d_1(\beta) = x$  y  $\varphi_{11}(\beta) = \alpha$ .

Puesto que  $t(\beta) = td_1(\beta) = t(x) = q$ , este  $\beta \in X_1$  es el requerido.

*iii)  $\Rightarrow$  i)* Consideremos el diagrama en  $Y$

$$\begin{array}{ccc}
 & \varphi_{00}(q) & \\
 y \nearrow & & \searrow \varphi_{01}(x) \\
 p' & \xrightarrow{z} & \varphi_{00}(r)
 \end{array}$$

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\text{Gpd})_*$ .

Por composición horizontal con  $\epsilon = s_0((\varphi_{01}(x))^{-1})$ , obtenemos un diagrama en  $Y$

$$p' \begin{array}{c} \xrightarrow{(\varphi_{01}(x))^{-1} \circ z} \\ \Downarrow \epsilon \circ \alpha \\ \xrightarrow{y} \end{array} \varphi_{00}(q)$$

de manera que  $(s_0((\varphi_{01}(x))^{-1}) \circ \alpha, q) \in Y_1 \times_{\varphi_{00}} O$ , y por consiguiente existe un  $\beta \in X_1$  tal que  $t(\beta) = q$  y  $\varphi_{11}(\beta) = (s_0 \varphi_{01}(x))^{-1} \circ \alpha$ . Ahora, considerando la composición horizontal

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \Downarrow \beta \\ \cdot \end{array} q \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ \Downarrow s_0(x) \\ \xrightarrow{x} \end{array} r = \begin{array}{c} \cdot \\ \Downarrow s_0(x) \circ \beta \\ \cdot \end{array} r$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(s_0(x) \circ \beta) &= \varphi_{11}(s_0(x)) \circ \varphi_{11}(\beta) = s_0(\varphi_{01}(x)) \circ (s_0(\varphi_{01}(x)))^{-1} \circ \alpha = s_0(\text{Id}_{\varphi_{00}(r)}) \circ \alpha = \\ &= \text{Id}_{\varphi_{00}(r)} \circ \alpha = \alpha ; \end{aligned}$$

$$\varphi_{01}(\bar{y}) = \varphi_{01}d_1(\beta) = d_1\varphi_{11}(\beta) = d_1[(s_0(\varphi_{01}(x)))^{-1} \circ \alpha] = y ;$$

$$\begin{aligned} \varphi_{01}(\bar{z}) &= \varphi_{01}(x \circ d_0(\beta)) = \varphi_{01}(x) \circ \varphi_{01}(d_0(\beta)) = \varphi_{01}(x) \circ d_0(\varphi_{11}(\beta)) = \\ &= \varphi_{01}(x) \circ (\varphi_{01}(x))^{-1} \circ z = z. \end{aligned}$$

■

Notemos que dado un 2-grupoide  $X$ , se puede construir un nuevo grupoide

$$\Pi_1(X) = \left( \pi_0(X_1 \rightrightarrows X_0) \rightrightarrows O \right)$$

en el que la composición está inducida por la del grupoide  $X_0 \xrightleftharpoons[t]{s} O$ . Entonces, si  $\pi_1(X, p)$  denota el grupo de automorfismos en  $p \in O$  de  $\Pi_1(X)$  y  $\pi_2(X, p) = \pi_1(X_1 \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} X_0, \text{Id}_p)$ , estos grupos junto con  $\pi_0(X) = \pi_0(X_0 \xrightleftharpoons[t]{s} O)$  corresponden a los grupos de homotopía  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , del espacio clasificador (en relación con este espacio véase [53]), y la noción de equivalencia débil de 2-grupoide corresponde a la usual noción topológica pues se tiene que (véase [54]):

**Lema 4.1.5.** *Un morfismo de 2-grupoide  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil si, y sólo si, induce una biyección  $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ , y para cada  $p \in O$  isomorfismos  $\pi_i(X, p) \cong \pi_i(Y, \varphi_{00}(p))$ , para  $i = 1, 2$ .*

**4.1.6.** Notemos ahora la existencia de un par de funtores adjuntos (véase [54])

$$\text{Simp}(\text{Set}) \begin{array}{c} \xleftarrow{W} \\ \xrightarrow{\mathcal{N}} \end{array} \mathbf{2 - Gpd}$$

donde  $\mathcal{N}$ , el funtor nervio 2-dimensional, preserva y refleja fibraciones y equivalencias débiles, y el funtor  $W$ , dado por la construcción del 2-grupoide de Whitehead, preserva

## 4.1 2-grupoides y categorías equivalentes.

cofibraciones y equivalencias débiles. La counidad de esta adjunción es un isomorfismo y la unidad es una equivalencia débil para aquellos conjuntos simpliciales  $K_\bullet$  tales que  $\pi_i(K_\bullet, k) = 0$  para todo  $i \geq 3$  y cada  $k \in K_0$ .

Entonces se tiene una equivalencia de categorías

$$Ho(\mathbf{2 - Gpd}) \cong Ho(\mathbf{Simp(Set)}) | \pi_i = 0 \forall i > 2$$

**4.1.7.** Describiremos a continuación categorías equivalentes a la categoría  $\mathbf{2 - Gpd}$ . Para ello recordemos previamente que un módulo cruzado de grupos es un sistema que consiste en un morfismo de grupos  $\rho : L \rightarrow M$ , junto con una acción de  $M$  sobre  $L$  que verifica:

$$1. \rho(m l) = m + \rho(l) - m$$

$$2. \rho(l) l' = l + l' - l.$$

Un morfismo de módulos cruzados  $f : (\rho : L \rightarrow M) \rightarrow (\rho' : L' \rightarrow M')$  es un diagrama conmutativo de grupos

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ L' & \xrightarrow{\rho'} & M' \end{array}$$

tal que  $f_2(m l) = f_1(m) f_2(l)$ .

Se tiene así la categoría  $\chi\mathbf{M(Gp)}$  de módulos cruzados de grupos. Recordemos también que un objeto de  $\mathbf{Cat(Gp)}$ , que llamaremos un cat-grupo, es un diagrama de grupos y homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Id} & \\ A & \xrightarrow{s} & O \\ & \xrightarrow{t} & \end{array}$$

tal que  $sId = tId = id_O$  y  $[Ker(s), Ker(t)] = 0$ .

La categoría  $\mathbf{Cat(Gp)}$  es una subcategoría de  $\mathbf{Tr^1(Simp(Gp))}$  y el functor inclusión  $J : \mathbf{Cat(Gp)} \rightarrow \mathbf{Tr^1(Simp(Gp))}$  tiene un adjunto por la izquierda  $\mathcal{P} : \mathbf{Tr^1(Simp(Gp))} \rightarrow \mathbf{Cat(Gp)}$  dado por

$$\mathcal{P} \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ G_1 & \xrightarrow[d_1]{d_0} & G_0 \end{array} \right) = \frac{G_1}{[Ker d_0, Ker d_1]} \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ & \xrightarrow[d_1]{d_0} & G_0 \end{array}$$

Destaquemos que se tienen equivalencias de categorías (véase [22], [52])

$$[_0\mathbf{T}_1](\mathbf{Gp}) \cong \chi\mathbf{M(Gp)} \cong \mathbf{Cat(Gp)} \quad (1)$$

y que la estructura de modelos en  $[_0\mathbf{T}_1](\mathbf{Gp})$  determina, vía las equivalencias (1), una estructura de modelos tanto en  $\mathbf{Cat(Gp)}$  como en  $\chi\mathbf{M(Gp)}$  (véase [38]) en la que:

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

- Un morfismo  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  es una fibración si es una equivalencia de grupoides; es una equivalencia débil si es una equivalencia de categorías y es una cofibración si es un retracto de un morfismo  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$ , donde  $T_0 = G_0 \coprod FV$ , siendo  $FV$  el grupo libre sobre el conjunto  $V$ .
- Un morfismo  $f = (f_1, f_0) : (\rho : L \rightarrow M) \rightarrow (\rho' : L' \rightarrow M')$  en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  es una fibración si  $f_1$  es sobreyectivo; es una equivalencia débil si induce isomorfismos  $\text{Ker}(\rho) \cong \text{Ker}(\rho')$  y  $\text{Coker}(\rho) \cong \text{Coker}(\rho')$ , y es una cofibración si es un retracto de un morfismo en el cual  $M' = M \coprod FV$ , siendo  $FV$  el grupo libre sobre un conjunto  $V$ .

4.1.8. Pasamos a continuación a describir la categoría  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$ , de módulos cruzados sobre un grupoide.

Sea  $\mathcal{M} : M \begin{matrix} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} O$  un grupoide. Un *módulo cruzado* sobre  $\mathcal{M}$  (véase [6]) es un morfismo de grupoides

$$\mathcal{L} = \left( \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ O & \xlongequal{\quad} & O \\ t \downarrow & & \downarrow t \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} \right)$$

tal que  $s\rho = t\rho$ , en el cual  $M$  actúa sobre  $L$  (esto es para cada  $x \in L(q)$  y  $a \in M(p, q)$  es dado  ${}^a x \in L(p)$ , con las usuales condiciones de acción), de manera que  $\rho$  preserva la acción de  $M$ , donde  $M$  actúa sobre sí mismo por conjugación (es decir  $\rho({}^a x) = a^{-1} \circ \rho(x) \circ a$ ) y además  $\rho({}^{x^{-1}}y) = x^{-1} \circ y \circ x$  para cualesquiera  $x, y \in L(p)$ .

Notemos que si  $\mathcal{L}$  es un módulo cruzado sobre un grupoide, entonces para cada  $p \in O$   $L(p) \rightarrow M(p)$  es un módulo cruzado de grupos.

Un morfismo  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  de módulos cruzados sobre grupoides, consiste en un diagrama de conjuntos y aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} & & L' & \xrightarrow{\rho'} & M' \\ & f_2 \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{\rho} & M & \xrightarrow{f_1} & M' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O & \xrightarrow{f_0} & O' & \xlongequal{\quad} & O' \\ & \searrow f_0 & & & \downarrow \\ & & O & \xlongequal{\quad} & O \end{array}$$

tal que  $f_1\rho = \rho'f_2$  y  $(f_2, f_0), (f_1, f_0)$  son ambos morfismos de grupoides compatibles con las acciones de  $M$  y  $M'$ , esto es,  $\forall x \in L(p)$  y  $\forall a \in M(p, q)$ ,  $f_2({}^a x) = f_1(a) f_2(x)$ .

**Teorema 4.1.9.** *Existe una equivalencia de categorías*

$$\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) \stackrel{\Phi}{\cong} \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$$



Demostración: Dado

$$\mathcal{L} = \left( \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} \right)$$

definimos  $\Phi(\mathcal{L})$  como sigue:

Si  $L \times_s M = \{(x, a) | x \in L, a \in M \wedge s(x) = s(a)\}$ , ponemos  $L \times_s M \xrightleftharpoons[t]{s} O$  con  $s(x, a) = s(x)$ ,  $t(x, a) = t(a)$ ,  $Id_p = (Id_p, Id_p)$ . Obtenemos así un grupoïde en el cual, si  $t(x, a) = s(y, b)$ , la composición esté dada por  $(y, b) \circ (x, a) = ({}^a y \circ x, b \circ a)$ , donde "o" es en cada caso la respectiva composición en los grupoïdes  $L \xrightarrow[s]{s} O$  y  $M \xrightarrow[t]{s} O$ . Si po-

nemos además  $L \times_s M \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} M$  con  $d_0(x, a) = a$ ,  $d_1(x, a) = a \circ \rho(x)$  y  $s_0(a) = (Id_p, a)$ , se tiene un grupoïde en el cual la composición está dada por

$$(y, a \circ \rho(x)) * (x, a) = (x \circ y, a) .$$

Entonces  $\Phi(\mathcal{L})$  es el 2-grupoïde

$$\begin{array}{ccc} L \times_s M & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & M \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array}$$

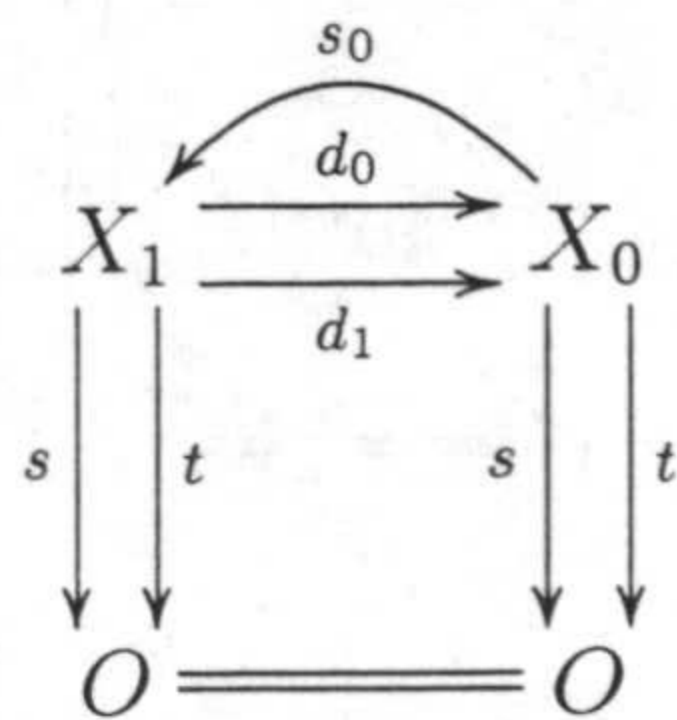
que, efectivamente, es un 2-grupoïde, pues dados

$$\begin{array}{ccccc} & a' & & b' & \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & \\ p & \xrightarrow{a} & q & \xrightarrow{b} & r \\ & \downarrow \beta & & \downarrow \delta & \\ & a \circ \rho(x) & & b \circ \rho(y) & \end{array}$$

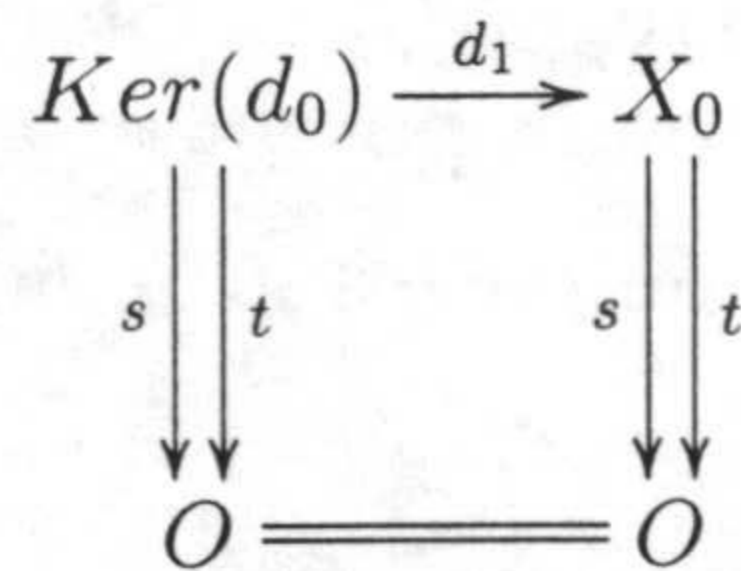
con  $\alpha = (x', a')$ ,  $\beta = (x, a)$ ,  $\gamma = (y', b')$  y  $\delta = (y, b)$  se tiene que  $[(y, b) * (y', b')] \circ [(x, a) * (x', a')] = (y' \circ y, b') \circ (x' \circ x, a') = ({}^{a'} y' \circ {}^{a'} y \circ x' \circ x, b' \circ a') = ({}^a y \circ x, b \circ a) * ({}^{a'} y' \circ x', b' \circ a') = [(y, b) \circ (x, a)] * [(y', b') \circ (x', a')]$  donde hemos utilizado que  ${}^a y = ({}^{a' \circ \rho(x')}) y = \rho(x') ({}^{a'} y) = x'^{-1} \circ {}^{a'} y \circ x'$ .

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Recíprocamente, dado un 2-grupoide



consideremos el subgrupoide núcleo del morfismo de grupoides  $d_0$ ,  $\text{Ker}(d_0) \xrightarrow[s]{t} O$ , y el diagrama



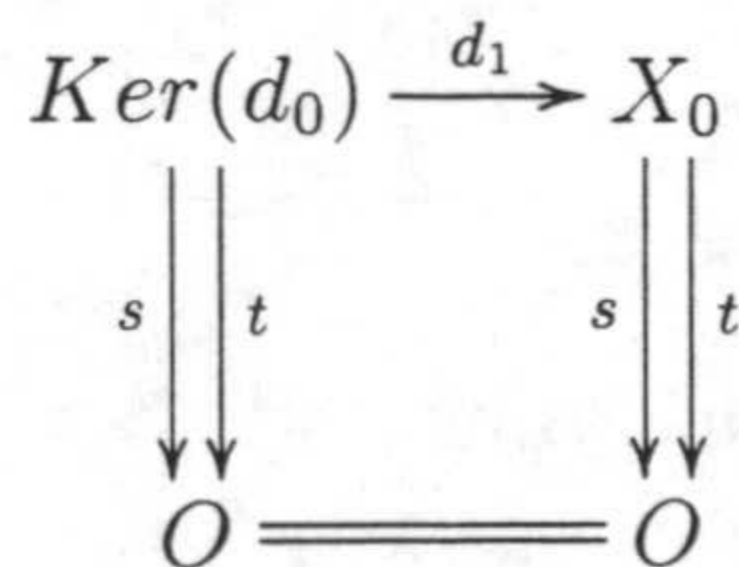
que es un morfismo de grupoides con  $sd_1 = td_1$ . Si  $(p \xrightarrow{a} q) \in X_0$  y  $(q \xrightarrow{x} q) \in \text{Ker}(d_0)$ , definimos una acción de  $X_0$  sobre  $\text{Ker}(d_0)$  por

$${}^a x = (s_0(a))^{-1} \circ x \circ s_0(a)$$

Se tiene que  $s({}^a x) = t({}^a x) = p$  y además

- $d_1({}^a x) = (d_1 s_0(a))^{-1} \circ d_1(x) \circ d_1 s_0(a) = a^{-1} \circ x \circ a$
- $d_1(x)y = (s_0 d_1(x))^{-1} \circ y \circ s_0 d_1(x) = x^{-1} \circ y \circ x$  (por lema 4.1.2)

de manera que



es un módulo cruzado sobre un grupoide, y esta construcción determina de forma clara un cuasi-inverso para el funtor  $\Phi$  definido anteriormente. ■

La equivalencia de categorías  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  y la estructura de modelos en  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  dada en teorema 4.1.3 determina entonces:

**Corolario 4.1.10.** *La categoría  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$  es una categoría de modelos cerrada.*

Las fibraciones quedan caracterizadas en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$  como sigue:

**Proposición 4.1.11.** *Un morfismo  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$  es una fibración si, y sólo si,  $(f_1, f_0)$  es una fibración de grupoides y para todo  $p \in O$*

$$\begin{array}{ccc} L(p) & \xrightarrow{\rho} & M(p) \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ L'(f_0(p)) & \xrightarrow{\rho'} & M'(f_0(p)) \end{array}$$

es una fibración de módulos cruzados de grupos, es decir  $f_2 : L(p) \rightarrow L'(f_0(p))$  es sobreyectiva.

*Demostración:*

Un morfismo  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$  es una fibración si, y sólo si,  $\Phi(f)$  es una fibración de 2-grupoides, lo que es equivalente, por lema 4.1.4, a que

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} L \times_s M & \xrightarrow{s_0} & M \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ & \xrightarrow{d_1} & \\ (f_2, f_1) \downarrow & & \downarrow f_1 \\ L' \times_s M' & \xrightarrow{s_0} & M' \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ & \xrightarrow{d_1} & \end{array} & \text{y} & \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{I} & O \\ & \xrightarrow{s} & \\ & \xrightarrow{t} & \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ M' & \xrightarrow{I} & O' \\ & \xrightarrow{s} & \\ & \xrightarrow{t} & \end{array} \end{array}$$

sean fibraciones de grupoides.

Ahora,  $((f_2, f_1), f_1)$  es una fibración de grupoides si, y sólo si, el morfismo  $L \xrightarrow{(f_2, s)} L' \times_s M' \times_{f_0} O$  es sobreyectivo. En efecto, supuesto que  $((f_2, f_1), f_1)$  es una fibración de grupoides, y que  $(x', p) \in L' \times_s M' \times_{f_0} O$ , esto es,  $s(x') = f_0(p)$ , se tiene que  $((x', Id_{f_0(p)} \circ (\rho'(x'))^{-1}) \in (L' \times_s M')_{d_1} \times_{f_1} M$ , y entonces existirá  $(x, a) \in L \times_s M$  tal que  $(f_2, f_1)(x, a) = (x', Id_{f_0(p)} \circ (\rho'(x'))^{-1})$  y  $d_1(x, a) = Id_p$ . En particular es  $f_2(x) = x'$  y  $s(x) = p$ , de modo que  $(f_2, s)(x, a) = (x', p)$  y así  $(f_2, s)$  es sobreyectivo.

Recíprocamente, si  $(f_2, s)$  es sobreyectivo, y suponemos dado un elemento  $((x', a'), a) \in (L' \times_s M')_{d_1} \times_{f_1} M$  se tiene que  $a' \circ \rho'(x') = f_1(a)$ . Ahora, considerando  $(x', s(a)) \in L' \times_s M' \times_{f_0} O$  (nótese que puesto que  $f_0(s(a)) = s f_1(a) = s \rho'(x') = s(x')$ ), un  $x \in L$  tal que  $(f_2, s)(x) = (x', s(a))$ . Entonces  $(x, a \circ (\rho(x))^{-1}) \in L \times_s M$  y verifica que  $d_1(x, a \circ (\rho(x))^{-1}) = a \circ (\rho(x))^{-1} \circ \rho(x) = a$  y  $(f_2, f_1)(x, a \circ (\rho(x))^{-1}) = (x', a')$ , pues  $f_2(x) = x'$  y

$$f_1(a \circ (\rho(x))^{-1}) = f_1(a) \circ (f_1 \rho(x))^{-1} = f_1(a) \circ (\rho' f_2(x))^{-1} = a' \circ \rho'(x') \circ (\rho'(x'))^{-1} = a'.$$

Finalmente, es claro que  $L \xrightarrow{(f_2, s)} L' \times_s M' \times_{f_0} O$  es sobreyectivo si, y sólo si,  $\forall p \in O$ , el morfismo  $L(p) \xrightarrow{f_2} L'(f_0(p))$  es sobreyectivo. ■

**Definición 4.1.12.** *Dado  $\mathcal{L} \in \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$ , se define  $\pi_0(\mathcal{L}) = \pi_0(M \xrightarrow{\rho} O)$  y, para cada  $p \in O$ ,  $\pi_1(\mathcal{L}, p) = \text{coker}(L(p) \xrightarrow{\rho} M(p))$  y  $\pi_2(\mathcal{L}, p) = \text{ker}(L(p) \xrightarrow{\rho} M(p))$ .*

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Se tiene entonces:

**Lema 4.1.13.** *Sea  $\mathcal{L} \in \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$ . Entonces  $\pi_0(\mathcal{L}) = \pi_0(\Phi(\mathcal{L}))$  y, para cada  $p \in O$ , se tiene isomorfismos de grupos  $\pi_1(\mathcal{L}, p) \cong \pi_1(\mathcal{L}', f_0(p))$  y  $\pi_2(\mathcal{L}, p) \cong \pi_2(\mathcal{L}', f_0(p))$  (donde  $\Phi$  denota la equivalencia de categorías dada en 4.1.9).*

*Demostración:* Claramente  $\pi_0(\Phi(\mathcal{L})) = \pi_0(\mathcal{L})$

Por otro lado,  $\pi_0(\Phi(\mathcal{L}), p)$  es el grupo de automorfismos en  $p$  del grupoide

$$\pi_0(L \times_s M \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} M) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$$

donde  $\pi_0(L \times_s M \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} M) = \text{Coigu}(d_0, d_1) = \frac{M}{\sim}$ , es el cociente de  $M$  por la congruencia definida por  $a_1 \sim a_2 \iff \exists x \in L \mid a_1 \circ \rho(x) = a_2$ . Si  $p \in O$  y  $a_1, a_2 \in M(p)$ , entonces  $a_1 \sim a_2 \iff (a_2)^{-1} \circ a_1 \in \text{Imag}(L(p) \xrightarrow{\rho} M(p))$ , de donde resulta que  $\pi_1(\Phi(\mathcal{L}), p) \cong \frac{M(p)}{\text{Imag}(\rho)} \cong \pi_1(\mathcal{L}, p)$ .

Finalmente,  $\pi_2(\Phi(\mathcal{L}), p) \cong \pi_2(\mathcal{L}, p)$ , para todo  $\mathcal{L}$ , puesto que

$$\pi_2(\Phi(\mathcal{L}), p) = \pi_1(L \times_s M \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} M, Id_p)$$

y, si  $(x, a)$  es un automorfismo en  $Id_p$ , se tiene que  $d_0(x, a) = a = Id_p$ , y  $d_1(x, a) = a \circ \rho(x) = Id_p$ . Entonces  $x \in L(p)$  y  $\rho(x) = Id_p$  de modo que  $x \in \text{Ker}(L(p) \xrightarrow{\rho} M(p)) = \pi_2(\mathcal{L}, p)$ . ■

**Corolario 4.1.14.** *Un morfismo  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$  es una equivalencia débil si, y sólo si,  $f$  induce una biyección  $\pi_0(\mathcal{L}) \cong \pi_0(\mathcal{L}')$  y, para cada  $p \in O$ ,  $f$  induce isomorfismos de grupos  $\pi_1(\mathcal{L}, p) \cong \pi_1(\mathcal{L}', f_0(p))$  y  $\pi_2(\mathcal{L}, p) \cong \pi_2(\mathcal{L}', f_0(p))$ .*

*Demostración:* El morfismo  $f$  es una equivalencia débil si, y sólo si, su correspondiente por  $\Phi$  lo es como morfismo de 2-grupoide, y, por tanto, según el lema 4.1.5, si y sólo si induce una biyección  $\pi_0(\Phi(\mathcal{L})) \cong \pi_0(\Phi(\mathcal{L}'))$ , y para cada  $p$ , isomorfismos de grupos  $\pi_1(\Phi(\mathcal{L}), p) \cong \pi_1(\Phi(\mathcal{L}'), f_0(p))$  y  $\pi_2(\Phi(\mathcal{L}), p) \cong \pi_2(\Phi(\mathcal{L}'), f_0(p))$ , lo cual es claro teniendo en cuenta el lema 4.1.13. ■

Consideremos ahora la categoría  $\mathbf{T}_{1|}(\mathbf{Gpd})$  definida 3.3.2. Es claro que, utilizando el lema 4.1.2, si  $X \in \mathbf{T}_{1|}(\mathbf{Gpd})$ , su 1-truncación,  $tr^1(X)$ , es un 2-grupoide.

Por otro lado, existe un funtor *nervio*  $Ner : \mathbf{2} - \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{T}_{1|}(\mathbf{Gpd})$ , (véase [54], [52]) tal que si  $X \in \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$ ,  $Ner(X)$  es el grupoide simplicial con conjunto de objetos constante  $O$ , y que en cada dimensión consiste en  $Ner_0(X) = X_0$ ,  $Ner_1(X) = X_1$  y, para cada  $n \geq 2$ ,  $Ner_n(X) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X_1^n \mid d_1\alpha_j = d_0(\alpha_{j+1})\}$ . Se tiene entonces:

**Teorema 4.1.15.** *El funtor  $tr^1 : \mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd}) \rightarrow \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  es una equivalencia de categorías, con cuasi-inverso el funtor  $Ner$ .*

*Demostración:* Es manifiesto que  $tr^1 Ner = id_{\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}}$ . Por otro lado  $Ner tr^1 \cong id_{\mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd})}$  pues cada objeto de  $\mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd})$  está completamente determinado, salvo isomorfismo, por su truncación al nivel uno. ■

**Corolario 4.1.16.** *Existen equivalencias de categorías*

$$\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{2} - \mathbf{Gpd} \cong \mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd})$$

**4.1.17.** Puesto que las categorías  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  y  $\mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd})$  son de modelos cerradas, observamos, finalmente, que ambas estructuras se corresponden por la equivalencia del teorema 4.1.15.

Los funtores  $\mathcal{N} : \mathbf{2} - \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $\bar{W}J Ner : \mathbf{2} - \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  son naturalmente equivalentes (véase [35]). Entonces se tiene que un morfismo  $\varphi$  de 2-grupoides es una fibración (resp. equivalencia débil) si, y sólo si,  $\mathcal{N}(\varphi)$  es una fibración (resp. equivalencia débil) de conjuntos simpliciales, y si, y sólo si,  $\bar{W}J Ner(\varphi)$  lo es. Ahora, como  $\bar{W}$  preserva y refleja fibraciones (resp. equivalencias débiles), resulta que  $\varphi$  es una fibración (equivalencia débil), si, y sólo si,  $Ner(\varphi)$  lo es en  $\mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd})$ .

Por último, la equivalencia entre las correspondientes clases de cofibraciones es consecuencia de que éstas están, en ambos casos, caracterizadas por la LLP respecto a las fibraciones triviales.

## 4.2 Estructura de modelos en $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd})$

**4.2.1.** Comenzamos esta sección recordando que si consideramos, para cada  $r > 0$ , la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , denotada por  $[_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$ , cuyos objetos son los grupos simpliciales  $r$ -reducidos, esto es, reducidos al grupo trivial en dimensiones  $< r$ , ésta es una subcategoría correflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  en la que el funtor correflector, adjunto por la izquierda al funtor de inclusión  $I$ , está dado por  $E_r(G_\bullet) = Ker(G_\bullet \rightarrow Cosk^{r-1}(G_\bullet))$ . Notemos que  $I$  tiene también un adjunto por la izquierda dado por  $L_r(G_\bullet) = Coker(Sk^{r-1}(G_\bullet) \rightarrow G_\bullet)$ , teniéndose que  $L_r I = E_r I = Id$ .

En [57], Quillen consideró la siguiente estructura de modelos en  $[_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$ : Cofibraciones y equivalencias débiles fueron definidas como aquellos morfismos tales que  $I(f_\bullet)$  es, respectivamente, una cofibración o equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , mientras que las fibraciones, definidas por la *RLP* con respecto a las cofibraciones triviales, fueron caracterizadas como aquellos morfismos  $f_\bullet$  tales que los morfismos inducidos  $N_q(f_\bullet)$  son sobreyectivos para  $q > r$ .

La teoría de homotopía asociada a esta categoría de modelos fue mostrada entonces por Quillen como equivalente a la teoría de homotopía en la categoría de los espacios

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

topológicos  $r$ -conexos (i.e., con  $\pi_i = 0$ ,  $\forall i \leq r$ ), teniéndose en particular una equivalencia de categorías

$$Ho({}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \mid r\text{-conexos}) \cong Ho(\mathbf{CW} \mid \pi_i = 0, i \leq r)$$

donde el segundo miembro denota la subcategoría plena de  $Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$  cuyos objetos son los grupos simpliciales  $r$ -conexos (i.e., con  $\pi_i = 0 \forall i \leq r-1$ ).

La observación de que la categoría  ${}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$  es precisamente la subcategoría plena de la de grupos simpliciales cuyos objetos son aquellos tales que su complejo de Moore es trivial en dimensiones menores que  $r$ , hace aparecer en un cierto sentido dual el tratamiento realizado en [17] para dotar a la categoría  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$ , de  $n$ -hipergrupoides de grupos (y a su equivalente de complejos hipercruzados de grupos, (véase [19]), de una estructura de modelos.

Las dos subcategorías  ${}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$ , pueden ser tratadas como casos particulares y extremos ( $n \rightarrow \infty$  y  $r = 0$ ) de una situación más general que consiste en considerar, para cada  $r, n$  con  $0 \leq r \leq n$ , la categoría

$${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp}) = {}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp}) \cap \mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$$

Nótese que  ${}_0\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp}) = \mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  y que  ${}_r\mathbf{T}_\infty(\mathbf{Gp}) = {}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$ .

La categoría  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  es una subcategoría plena y reflexiva de  ${}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$ . El functor reflector  $\mathcal{P}_n : {}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp}) \rightarrow {}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  es la restricción del functor también llamado  $\mathcal{P}_n$ , dado en 3.3.1, y en [52] se demostró que  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  es una categoría de modelos cerrada definiendo fibraciones y equivalencias débiles como aquellos morfismos que lo son en  ${}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp})$ , mientras que las cofibraciones fueron definidas por la *LLP* respecto a las fibraciones triviales. Construcciones típicas de la teoría de homotopía asociada a esta estructura de modelos, como espacios de arcos, cilindros, suspensiones o lazos, fueron explicitadas en [52], teniéndose además equivalencias de categorías

$$Ho({}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})) \cong Ho({}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gp}) \mid n\text{-coconexos}) \cong Ho(\mathbf{CW} \mid \pi_i = 0, \forall i \leq r; \pi_j = 0, j \geq n+2)$$

Destaquemos que la estructura de modelos en  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  fue definida en [52] desde un punto de vista más general al ser relativizada a cada subconjunto multiplicativo  $S \in \mathbb{Z}$ , lo que condujo al estudio de la teoría de homotopía de Serre en  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  (véase [40]).

Para valores particulares de  $r$  y  $n$ , las categorías  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$  son equivalentes a otras categorías bien conocidas, a las que, lógicamente, es posible transportar la estructura de modelos, pudiéndose entonces estudiar en ellas la correspondiente teoría de homotopía asociada (véase al respecto [38], [40]).

**4.2.2.** Nuestro objetivo a continuación es, siguiendo un procedimiento en cierto sentido dual al de considerar las categorías  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ , tomar la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  cuyos objetos tienen complejo de Moore trivial (es decir, sólo identidades) en dimensiones

menores que  $r$ , para  $r \geq 0$  un entero dado. Sus objetos son grupoides simpliciales de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & s_{n-1} & & & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ & & s_0 & & & & \\ \cdots & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \cdots & X_r & \xrightarrow{\quad} & O \cdots & O = O \\ & \downarrow s \downarrow t & \xrightarrow{d_0} & \downarrow s \downarrow t & & \downarrow s \downarrow t & \parallel & \parallel & \parallel \\ \cdots & O & \xrightarrow{\quad} & O & \cdots & O & \xrightarrow{\quad} & O \cdots & O = O \end{array}$$

donde cada grupoide  $X_i \xrightarrow[s]{s} O$  es necesariamente totalmente desconexo si  $r \geq 1$ . Denotaremos esta categoría por  $[_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})$ , y sus objetos serán llamados *grupoides simpliciales  $r$ -reducidos*, esto es, con sólo identidades en dimensiones menores que  $r$ .

Notemos que si  $X$  es un grupoide simplicial  $r$ -reducido se tiene que

$$\begin{array}{ccccccc} & & s_{n-1} & & & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ & & s_0 & & & & \\ \cdots & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \cdots & X_r & \xrightarrow{\quad} & O \cdots & O = O \\ & \downarrow s \downarrow t & \xrightarrow{d_0} & \downarrow s \downarrow t & & & \downarrow s \downarrow t & \parallel & \parallel & \parallel \end{array}$$

es un conjunto simplicial que es la unión disjunta de los grupos simpliciales de automorfismos  $X(p)$ ,  $p \in O$  y éstos son asimismo grupos simpliciales  $r$ -reducidos, esto es de la forma

$$X(p) : \begin{array}{ccccccc} & & s_{n-1} & & & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ & & s_0 & & & & \\ \cdots & X_n(p) & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1}(p) & \cdots & X_r(p) & \xrightarrow{\quad} & \{p\} \cdots & \{p\} = \{p\} \\ & \downarrow s \downarrow t & \xrightarrow{d_0} & \downarrow s \downarrow t & & & \downarrow s \downarrow t & \parallel & \parallel & \parallel \end{array}$$

La categoría  $[_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})$  es una categoría correflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , donde el funtor correflector,  $E_r$ , adjunto por la derecha al funtor de inclusión  $J : [_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , puede ser descrito como  $E_r(X) = \text{Ker}(X \rightarrow \text{Cosk}^{r-1}(X))$ , calculado este núcleo dimensión a dimensión. Observemos que para cada  $p$  se tiene una identificación  $E_r(X)(p) = E_r(X(p))$ , esto es, el grupo de automorfismos de la  $r$ -reducción de  $X$  es igual a la  $r$ -reducción del grupo de automorfismos de  $X$ .

Si definimos equivalencias débiles en  $[_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})$  como aquellos morfismos  $f$  tales que  $J(f)$  es una equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , el funtor  $E_r$  preserva equivalencias débiles y si  $\text{Ho}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* | r\text{-conexos})$  es la subcategoría plena de  $\text{Ho}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*)$  cuyos objetos son los grupoides simpliciales  $r$ -conexos, resulta una equivalencia de categorías

$$\text{Ho}([_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})) \cong \text{Ho}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* | r\text{-conexos})$$

dado que para grupoides simpliciales  $r$ -conexos la counidad de la adjunción  $J \vdash E_r$  es una equivalencia débil.

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Ahora, si tenemos en cuenta las equivalencias de categorías (veáse [25], [51], [56] )

$$Ho(\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \cong Ho(\text{Simp}(\mathbf{Set})) \cong Ho(\mathbf{Top}) \cong Ho(\mathbf{CW})$$

donde  $Ho(\mathbf{CW})$  es la categoría de homotopía de CW-complejos, resulta, por restricción de éstas, que

$$Ho(\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_* | r - \text{conexos}) \cong Ho(\mathbf{CW} | \pi_i = 0, 1 \leq i \leq r + 1)$$

y concluimos entonces que

$$Ho({}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})) \cong Ho(\mathbf{CW} | \pi_i = 0, 1 \leq i \leq r + 1) \quad (1).$$

**4.2.3.** Consideremos ahora para cada  $r, n$ , con  $0 \leq r \leq n$ , la categoría

$${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd}) = {}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd}) \cap \mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$$

que resulta una subcategoría plena y reflexiva de  ${}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})$ , vía la adjunción restringida  $\mathcal{P}_n \vdash J$ , donde, recordemos,  $\mathcal{P}_n$  preserva equivalencias débiles.

Si  $n = 0$  entonces  ${}_0\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd}) = \mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  y si  $n \rightarrow \infty$  entonces se tiene  ${}_r\mathbf{T}_\infty(\mathbf{Gpd}) = ({}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd}))$ . Si  $r = n > 0$  entonces  ${}_n\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  es equivalente a la subcategoría plena de  $\mathbf{Gpd}$  cuyos objetos son los grupoides abelianos totalmente desconexos, en tanto que  ${}_0\mathbf{T}_0(\mathbf{Gpd})$  es equivalente a la categoría de grupoides.

Definiendo equivalencias débiles en  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  como aquellos morfismos  $f$  tales que  $J(f)$  lo es, se tiene que si  $X \in {}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd})$  es  $n$ -coconexo, la unidad de la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  es una equivalencia débil y, en consecuencia se induce una equivalencia de categorías

$$Ho({}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})) \cong Ho({}_r\mathbf{T}(\mathbf{Gpd}) | n - \text{coconexos})$$

Ahora, la equivalencia (1) junto con la anterior determinan una otra

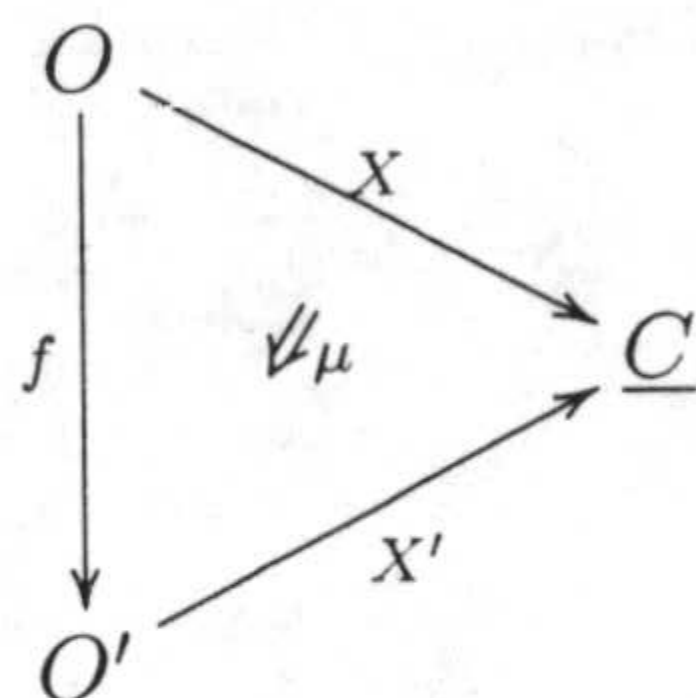
$$Ho({}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})) \cong Ho(\mathbf{CW} | \pi_i = 0 = \pi_j, 1 \leq i \leq r + 1, j \geq n + 2).$$

Después de lo visto en la sección 4.1 tenemos que en el caso  $r = 0$  y  $n = 1$ , la categoría  ${}_0\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$  es una categoría de modelos. El objetivo de lo que sigue es demostrar que con la clase de equivalencias débiles definidas anteriormente en  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ ,  $1 \leq r \leq n$ , dicha categoría puede ser dotada de una estructura de modelos cerrada. Para ello comenzamos dando la siguiente:

**Definición 4.2.4.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría. Definimos la categoría  $\underline{\mathbf{C}}^{(-)}$  como aquella cuyos objetos,  $(O, X)$ , son los funtores  $X : O \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ , donde  $O$  es un conjunto visto como una



categoría discreta, y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos, esto es, diagramas



en los que  $f : O \rightarrow O'$  es una aplicación y  $\mu = (\mu_p : X(p) \rightarrow X'(f(p)))_{p \in O}$  una familia de morfismos en  $\underline{C}$ .

**Proposición 4.2.5.** Para cada  $r, n$  con  $1 \leq r \leq n$ , existe una equivalencia de categorías

$$[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd}) \cong [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$$

*Demostración:*

Dado un grupoide simplicial  $X$  con conjunto de objetos  $O$ , el funtor  $H : [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gpd}) \rightarrow [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  definido por

$$\begin{array}{ccc}
 H(X) = (O & \longrightarrow & [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})) \\
 & & p \longmapsto X(p)
 \end{array}$$

establece la equivalencia. ■

Puesto que  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  es una categoría de modelos cerrada, proponemos la siguiente estructura en la categoría  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ :

**Definición 4.2.6.** Sea  $(f, \mu) : (O, X) \rightarrow (O', Y)$ , un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ .

- El morfismo  $(f, \mu)$  es una fibración si para cada  $p \in O$  el morfismo  $\mu_p$  es una fibración en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ .
- El morfismo  $(f, \mu)$  es una equivalencia débil si  $f : O \rightarrow O'$  es una biyección y, para cada  $p \in O$ , el morfismo  $\mu_p$  es una equivalencia débil en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ .
- El morfismo  $(f, \mu)$  es una cofibración si tiene la LLP respecto a las fibraciones triviales.

Podemos inmediatamente probar la siguiente caracterización, que es aplicable a una amplia gama de cofibraciones:

**Proposición 4.2.7.** Un morfismo  $(f, \mu) : (O, X) \rightarrow (O', Y)$  en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ , con  $f : O \rightarrow O'$  inyectiva, es una cofibración si, y sólo si, para cada  $p \in O$ ,  $\mu_p$  es una cofibración y para cada  $p' \notin \text{Imag}(f)$  el objeto  $Y(p')$  es cofibrante en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ .

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

*Demostración:*

Supongamos que  $(f, \mu)$  es una cofibración y supongamos dado, para cualquier  $p \in O$  un diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} X(p) & \xrightarrow{a} & Z \\ \mu_p \downarrow & & \downarrow c \\ Y(f(p)) & \xrightarrow{b} & T \end{array}$$

donde  $c$  es una fibración trivial.

Consideramos entonces  $(O', Z) \in [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  donde es  $Z(f(p)) = Z$ , y  $Z(p') = 0$  si  $p' \neq f(p)$ , y el morfismo  $(f, \alpha) : (O, X) \rightarrow (O', Z)$  dado por  $\alpha_p = a$ ,  $\alpha_q = 0 \forall q \neq p$ .

Análogamente consideremos el objeto de  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ ,  $(O', T)$ , con  $T(f(p)) = T$ , y  $T(p') = 0$  si  $p' \neq f(p)$ , y sean los morfismos  $(id_{O'}, \beta) : (O', Y) \rightarrow (O', T)$  y  $(id_{O'}, \gamma) : (O', Z) \rightarrow (O', T)$  dados por  $\beta_{f(p)} = b$ ,  $\gamma_{f(p)} = c$  y  $\beta_{p'} = 0 = \gamma_{p'} \forall p' \neq f(p)$ . De esta manera se tiene un diagrama en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  (que es conmutativo por ser finyectiva)<sup>(-)</sup>

$$\begin{array}{ccc} (O, X) & \xrightarrow{(f, \alpha)} & (O', Z) \\ (f, \mu) \downarrow & & \downarrow (id_{O'}, \gamma) \\ (O', Y) & \xrightarrow{(id_{O'}, \beta)} & (O', T) \end{array}$$

en el cual, el morfismo  $(id_{O'}, \gamma)$  es una fibración trivial. Puesto que  $(f, \mu)$  es una cofibración, existirá un levantamiento de  $(O', Y)$  en  $(O', Z)$  que necesariamente será de la forma  $(id_{O'}, \lambda)$ . El morfismo de  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ ,  $\lambda_{f(p)} : Y(f(p)) \rightarrow Z$  proporciona entonces un levantamiento en el diagrama inicial, y así cada  $\mu_p$  es una cofibración en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  (nótese que  $p$  es un objeto arbitrario).

Hemos de probar también que para cada  $p' \notin \text{Imag}(f)$ ,  $Y(p')$  es cofibrante en la categoría  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ . Supongamos, para ello, dado un diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & Z \\ 0 \downarrow & & \downarrow c \\ Y(p') & \xrightarrow{b} & T \end{array}$$

con  $c$  una fibración trivial.

Podemos construir el siguiente diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (O, X) & \xrightarrow{(f, \alpha)} & (O', Z) \\ (f, \mu) \downarrow & & \downarrow (id_{O'}, \gamma) \\ (O', Y) & \xrightarrow{(id_{O'}, \beta)} & (O', T) \end{array}$$

donde  $(O', Z)$  y  $(O', T)$  son respectivamente definidos por  $Z(p') = Z$ ,  $T(p') = T$  y  $Z(q') = 0 = T(q')$  si  $q' \neq p'$ . El morfismo  $(f, \alpha)$  es dado por  $\alpha_p = 0 \forall p \in O$ , el morfismo  $(id_{O'}, \beta)$  es dado por  $\beta_{p'} = b$  y  $\beta_{q'} = 0$  si  $q' \neq p'$  y el morfismo  $(id_{O'}, \gamma)$  por  $\gamma_{p'} = c$  y  $\gamma_{q'} = 0$  si  $q' \neq p'$ .

Como es claro que  $(id_{O'}, \gamma)$  es una fibración trivial en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  ha de existir un levantamiento de  $(O', Y)$  en  $(O', Z)$ , que, necesariamente será de la forma  $(id_{O'}, \lambda)$  con  $\lambda_{q'} = 0 \forall q' \neq p'$ . Entonces el morfismo  $\lambda_{p'} : Y(p') \rightarrow Z$  es un levantamiento en el diagrama que determina el carácter cofibrante de  $Y(p')$  para cada  $p' \notin \text{Imag}(f)$ .

Recíprocamente, supongamos dado un diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (O, X) & \xrightarrow{(g, \alpha)} & (K, Z) \\ (f, \mu) \downarrow & & \downarrow (j, \gamma) \\ (O', Y) & \xrightarrow{(h, \beta)} & (K', T) \end{array}$$

donde  $(j, \gamma)$  es una fibración trivial, esto es  $j : K \rightarrow K'$  es una biyección y, para cada  $k \in K$  el morfismo  $\gamma_k : Z(k) \rightarrow T(j(k))$  es una fibración trivial en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ .

Definimos entonces un levantamiento  $(j^{-1}h, \lambda) : (O', Y) \rightarrow (K, Z)$  como sigue:

Si  $p' \in \text{Imag}(f)$  y  $p \in O$  es tal que  $f(p) = p'$  consideramos el diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} X(p) & \xrightarrow{\alpha_p} & Z(g(p)) \\ \mu_p \downarrow & & \downarrow \gamma_{g(p)} \\ Y(p') & \xrightarrow{\beta_{p'}} & T(jg(p)) \end{array}$$

en el cual, al ser  $\mu_p$  una cofibración y  $\gamma_{g(p)}$  una fibración trivial, existe un levantamiento  $\lambda_{p'} : Y(p') \rightarrow Z(g(p))$  (nótese que  $g(p) = j^{-1}h(p')$  pues  $jg(p) = h(p')$ ). Ahora, si  $p' \notin \text{Imag}(f)$  sabemos que  $Y(p')$  es cofibrante y, por tanto, existe un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & Z(j^{-1}h(p')) \\ 0 \downarrow & & \downarrow \gamma_{j^{-1}h(p')} \\ Y(p') & \xrightarrow{\beta_{p'}} & T(h(p')) \end{array}$$

esto es, existe  $\lambda_{p'} : Y(p') \rightarrow Z(j^{-1}h(p'))$  con  $\lambda_{j^{-1}h(p')} \lambda_{p'} = \beta_{p'}$ .

Tenemos así definido  $\lambda = (\lambda_{p'})_{p' \in O'}$  y es claro, desde la forma de obtenerlo, que  $(j^{-1}h, \lambda)$  es un levantamiento en el diagrama inicial. ■

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

**Corolario 4.2.8.** *Un objeto  $(O, X) \in [r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  es cofibrante si, y sólo si,  $X(p)$  lo es en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  para cada  $p \in O$ .*

Una de las factorizaciones requeridas en el axioma  $CM5$  para que una categoría sea de modelos cerrada es obtenida en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  como sigue:

**Proposición 4.2.9.** *Todo morfismo  $(f, \mu) : (O, X) \rightarrow (O', Y)$  en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  se factoriza como la composición de una cofibración trivial seguida de una fibración.*

*Demostración:*

Consideremos, para cada  $p \in O$ , el morfismo en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$   $\mu_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))$ . Puesto que  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  es de modelos cerrada, este puede factorizarse en la forma

$$\begin{array}{ccc} X(p) & \xrightarrow{\mu_p} & Y(f(p)) \\ & \searrow \alpha_p & \nearrow \beta_p \\ & Z(p) & \end{array}$$

donde  $\alpha_p$  es una cofibración trivial y  $\beta_p$  una fibración.

Si consideramos el objeto de  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ ,  $(O, Z)$ , donde para cada  $p \in O$ ,  $Z(p)$  es el obtenido por cada una de las anteriores factorizaciones, y los morfismos  $(id_O, \alpha) : (O, X) \rightarrow (O, Z)$  y  $(f, \beta) : (O, Z) \rightarrow (O', Y)$ , resulta que  $(f, \mu) = (f, \beta) \circ (id_O, \alpha)$ , siendo esta una factorización en los términos requeridos. ■

Podemos también demostrar que:

**Proposición 4.2.10.** *Las cofibraciones triviales en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ , tienen la LLP respecto a las fibraciones.*

*Demostración:* Supongamos dado un diagrama conmutativo en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (O, X) & \xrightarrow{(g, \alpha)} & (K, Z) \\ (f, \mu) \downarrow & & \downarrow (j, \gamma) \\ (O', Y) & \xrightarrow{(h, \beta)} & (K', T) \end{array}$$

donde  $(f, \mu)$  es una cofibración trivial y  $(j, \gamma)$  una fibración.

En particular, se tiene que  $f : O \rightarrow O'$  es una biyección y cada  $\mu_p$  una cofibración trivial en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ . Si  $f(p) = p'$ , considerando el diagrama en  $[r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} X(p) & \xrightarrow{\alpha_p} & Z(g(p)) \\ \mu_p \downarrow & & \downarrow \gamma_{g(p)} \\ Y(p') & \xrightarrow{\beta_{p'}} & T(h(p')) \end{array}$$

y usando que  $\gamma_{g(p)}$  es una fibrición, encontramos un levantamiento  $\lambda_{p'} : Y(p') \rightarrow Z(g(p))$ .

Entonces  $(gf^{-1}, \lambda) : (O', Y) \rightarrow (K, Z)$  es el levantamiento requerido para el diagrama inicial. ■

Las fibriciones (fibraciones triviales) en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ , están caracterizadas (ver [40]) por tener la RLP respecto a las familias de morfismos  $F\Delta[q, k] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq k \leq q$ ,  $r+1 \leq q \leq n+1$  y  $F\Delta[n+2, i] \hookrightarrow F\dot{\Delta}[n+2]$ ,  $0 \leq i \leq n+2$  (respectivamente  $F\Delta[r+1, i] \hookrightarrow F\dot{\Delta}[r+1]$ ,  $0 \leq i \leq r+1$  y  $F\dot{\Delta}[q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $r+1 \leq q \leq n+1$ ). Ésta propiedad permite ahora caracterizar también las fibriciones y las fibriciones triviales en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  en unos términos semejantes.

Denotaremos en lo que sigue por  $*$  un conjunto unitario fijo y  $* \amalg *$  un conjunto con dos elementos, que usaremos también como dado. En la categoría  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  el vacío  $\emptyset$  es el objeto inicial y  $(*, 0)$  el final. Se tiene entonces que:

**Proposición 4.2.11.** *Sea  $(f, \mu) : (O, X) \rightarrow (O', Y)$  un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ . Entonces:*

a)  $(f, \mu)$  es una fibrición si, y sólo si, tiene la RLP respecto a las familias de morfismos

- $(*, F\Delta[q, k]) \hookrightarrow (*, F\Delta[q])$ ,  $0 \leq k \leq q$ ,  $r+1 \leq q \leq n+1$ ,
- $(*, F\Delta[n+2, i]) \hookrightarrow (*, F\dot{\Delta}[n+2])$ ,  $0 \leq i \leq n+2$ .

b)  $(f, \mu)$  es una fibrición trivial si, y solo si, tiene la RLP respecto a los morfismos

- $(*, F\Delta[r+1, i]) \hookrightarrow (*, F\dot{\Delta}[r+1])$ ,  $0 \leq i \leq r+1$ ,
- $(*, F\dot{\Delta}[q]) \hookrightarrow (*, F\Delta[q])$ ,  $r+1 \leq q \leq n+1$ ,
- $\emptyset \rightarrow (*, 0)$ ,
- $(* \amalg *, 0) \rightarrow (*, 0)$ .

*Demostración:*

a) Si  $(f, \mu)$  es una fibrición y suponemos dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (*, F\Delta[q, k]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\Delta[q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad 0 \leq k \leq q, \quad r+1 \leq q \leq n+1$$

tenemos, para cada  $p \in O$ , un diagrama en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[q, k] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array} \quad 0 \leq k \leq q, \quad r+1 \leq q \leq n+1$$

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

en el que, por ser  $\mu_p$  una fibrición, existe un levantamiento  $\lambda : F\Delta[q] \rightarrow X(p)$  y entonces, si denotamos por  $p : * \rightarrow O$  la aplicación determinada por cada  $p \in O$ , se tiene que  $(p, \lambda) : (*, F\Delta[q]) \rightarrow (O, X)$  es un levantamiento en el diagrama inicial.

El mismo razonamiento es válido si partimos de un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} (*, F\Delta[n+2, i]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\dot{\Delta}[n+2]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad 0 \leq i \leq n+2$$

Recíprocamente, supongamos que  $(f, \mu)$  tiene la RLP respecto de la familia de morfismos considerada. Veamos que  $(f, \mu)$  es una fibrición, para lo cual hemos de probar que para cada  $p \in O$ ,  $\mu_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una fibrición en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ . Si consideramos en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[q, k] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array} \quad 0 \leq k \leq q, \quad r+1 \leq q \leq n+1$$

o de la forma

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n+2, i] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\dot{\Delta}[n+2] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array} \quad 0 \leq i \leq n+2$$

éste determina un diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (*, F\Delta[q, k]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\Delta[q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad 0 \leq k \leq q, \quad r+1 \leq q \leq n+1$$

respectivamente

$$\begin{array}{ccc} (*, F\Delta[n+2, i]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\dot{\Delta}[n+2]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad 0 \leq i \leq n+2$$

que, por hipótesis, tiene un levantamiento, que a su vez proporciona un correspondiente para el diagrama inicial.

b) Supuesto que  $(f, \mu)$  es una fibrición trivial y dados diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} (*, F\Delta[r+1, i]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\dot{\Delta}[r+1]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array}, \quad 0 \leq i \leq r+1,$$

y

$$\begin{array}{ccc} (*, F\dot{\Delta}[q]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\Delta[q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array}, \quad r+1 \leq q \leq n+1,$$

se determinan entonces otros en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[r+1, i] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\dot{\Delta}[r+1] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array}, \quad 0 \leq i \leq r+1, \text{ y}$$

$$\begin{array}{ccc} F\dot{\Delta}[q] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array}, \quad r+1 \leq q \leq n+1,$$

donde, al ser  $\mu_p$  fibrición trivial, existe levantamiento para cada uno de ellos. Estos proporcionan a su vez correspondientes para los diagramas iniciales respectivos.

Ahora, dado un diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, 0) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array}$$

dar un levantamiento para éste es equivalente a proporcionar un correspondiente para el diagrama de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & O \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & O' \end{array}$$

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

lo cual está asegurado por el carácter sobreyectivo de  $f$ . Por otro lado, dado un diagrama conmutativo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (* \amalg *, 0) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, 0) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array}$$

asegurar que existe un levantamiento para él, equivale a asegurar lo mismo para el diagrama en conjuntos

$$\begin{array}{ccc} * \amalg * & \longrightarrow & O \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & O' \end{array}$$

que se tiene desde el carácter inyectivo de  $f$ .

Recíprocamente, si  $(f, \mu)$  tiene la *RLP* respecto a  $\emptyset \rightarrow (*, 0)$ , es claro después del razonamiento anterior que  $f$  es sobreyectiva y, del mismo modo, que  $f$  es inyectiva por la *RLP* respecto a  $(* \amalg *, 0) \rightarrow (*, 0)$ ; se tiene así que  $f$  es biyectiva.

Además, para cada  $p \in O$ ,  $\mu_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))$  es una fibración trivial pues dados diagramas conmutativos en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[r+1, i] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\dot{\Delta}[r+1] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array}, \quad 0 \leq i \leq r+1, \text{ y}$$

$$\begin{array}{ccc} F\dot{\Delta}[q] & \longrightarrow & X(p) \\ \downarrow & & \downarrow \mu_p \\ F\Delta[q] & \longrightarrow & Y(f(p)) \end{array}, \quad r+1 \leq q \leq n+1,$$

en cada uno de ellos existe un levantamiento, pues dichos diagramas determinan unos correspondientes en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (*, F\Delta[r+1, i]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F\dot{\Delta}[r+1]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array}, \quad 0 \leq i \leq r+1,$$



y

$$\begin{array}{ccc} (*, F \overset{\bullet}{\Delta} [q]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F \Delta [q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad , \quad r + 1 \leq q \leq n + 1,$$

en los que existe levantamiento, por hipótesis, y estos a su vez determinan los correspondientes levantamientos para los diagramas iniciales respectivos. ■

Esta caracterización de las fibraciones triviales en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  permite ahora, utilizando el argumento del objeto pequeño, demostrar la factorización, requerida en el axioma *CM5*, de cualquier morfismo como composición de una cofibración seguida de una fibration trivial. Nótese que, utilizando la caracterización de las fibraciones, podría hacerse un argumento análogo para la otra factorización, lo que daría una demostración alternativa a la proposición 4.2.9.

**Proposición 4.2.12.** *Todo morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  puede ser factorizado como una cofibración seguido de una fibration trivial.*

*Demostración:* Consideremos todos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} (*, F \Delta [r + 1, i]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & \lambda_1 & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F \overset{\bullet}{\Delta} [r + 1]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad , \quad 0 \leq i \leq r + 1,$$

$$\begin{array}{ccc} (*, F \overset{\bullet}{\Delta} [q]) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & \lambda_2 & \downarrow (f, \mu) \\ (*, F \Delta [q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad , \quad r + 1 \leq q \leq n + 1,$$

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & \lambda_3 & \downarrow (f, \mu_p) \\ (*, 0) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} (* \amalg *, 0) & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & \lambda_4 & \downarrow (f, \mu_p) \\ (*, 0) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array}$$

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

y formemos los coproductos de los morfismos de la izquierda que figuran en cada diagrama, esto es

$$A = \coprod_{\lambda_1} (\ast, F\Delta[r+1, i]) \coprod \coprod_{\lambda_2} (\ast, F\dot{\Delta}[q]) \coprod \emptyset \coprod \coprod_{\lambda_3} (\ast \amalg \ast, 0)$$

$$\downarrow$$

$$B = \coprod_{\lambda_1} (\ast, F\dot{\Delta}[r+1]) \coprod \coprod_{\lambda_2} (\ast, F\Delta[r+1]) \coprod \coprod_{\lambda_3} (\ast, 0) \coprod \coprod_{\lambda_4} (\ast, 0)$$

Se nos induce un morfismo canónico  $A \rightarrow (O, X)$  y construimos el diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & (O, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & P_1 \end{array}$$

Puesto que el morfismo  $A \rightarrow B$  es una cofibración, al ser coproducto de cofibraciones, es claro entonces que  $(O, X) \rightarrow P_1$  es también una cofibración.

Observamos además que  $P_1$  es un objeto de  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  indizado en un conjunto  $\bar{O}'$  biyectivo a  $O$ . En efecto, si  $\tilde{A}$  es el conjunto de índices de  $A$  y  $\tilde{B}$  el de  $B$ , entonces  $\bar{O}'$  es el pushout en conjuntos

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \longrightarrow & O \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{B} & \longrightarrow & \bar{O}' \end{array}$$

que se obtiene haciendo la unión disjunta de  $\tilde{B}$  y  $O$  e identificando todas las parejas en que los dos elementos son imágenes de un mismo elemento de  $\tilde{A}$ .

Ahora,

$$\tilde{A} = \coprod_{\lambda_1} (\ast) \coprod \coprod_{\lambda_2} (\ast) \coprod \coprod_{\lambda_4} (\ast \amalg \ast)$$

y

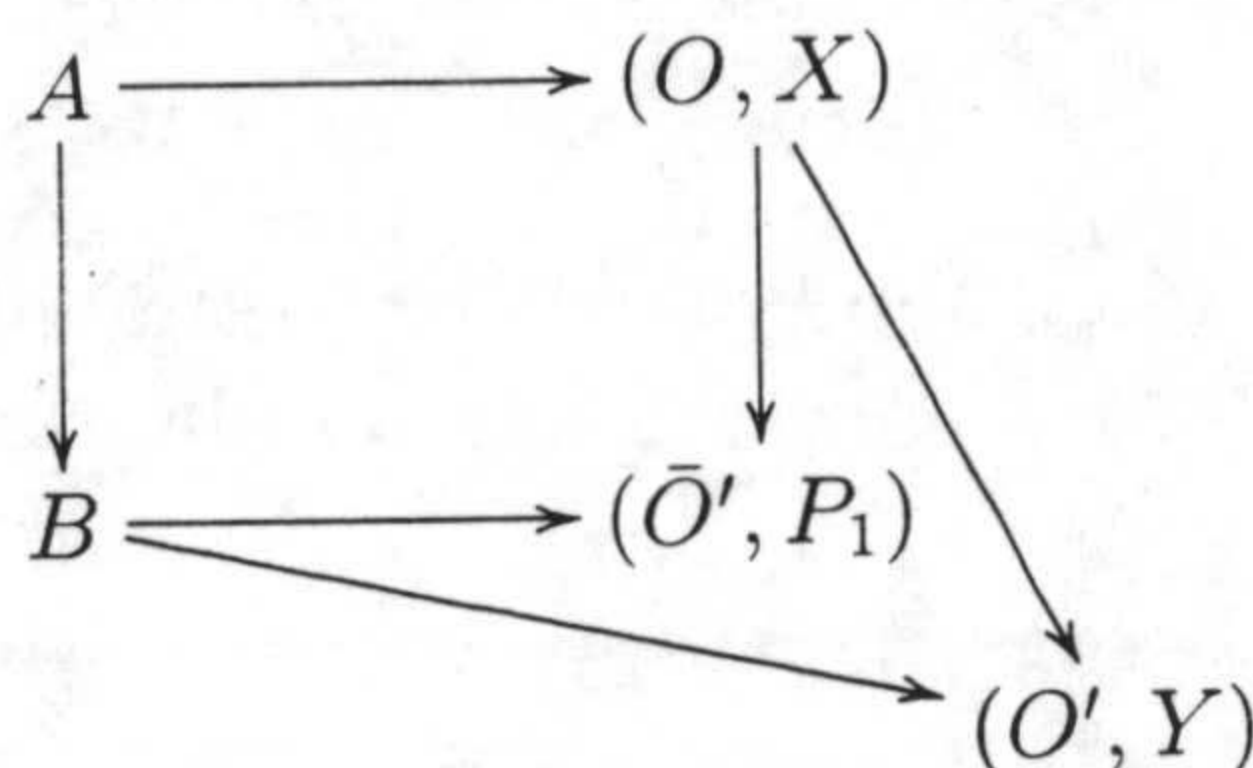
$$\tilde{B} = \coprod_{\lambda_1} (\ast) \coprod \coprod_{\lambda_2} (\ast) \coprod (O' - \text{Imag}(f)) \coprod \coprod_{\lambda_4} (\ast)$$

Si  $\tilde{B}_1 = \coprod_{\lambda_1} (\ast) \coprod \coprod_{\lambda_2} (\ast)$  y  $\tilde{B}_2 = \coprod_{\lambda_4} \ast$ , al identificar las parejas de elementos de  $\tilde{B}_1$  y  $O$ , es claro que se obtiene un conjunto biyectivo a  $O$ , y al identificar entonces las de  $\tilde{B}_2$  y

$O$  se obtiene un conjunto biyectivo a  $Imag(f)$ , pues elementos de  $O$  con la misma imagen bajo  $f$  también han de ser identificados.

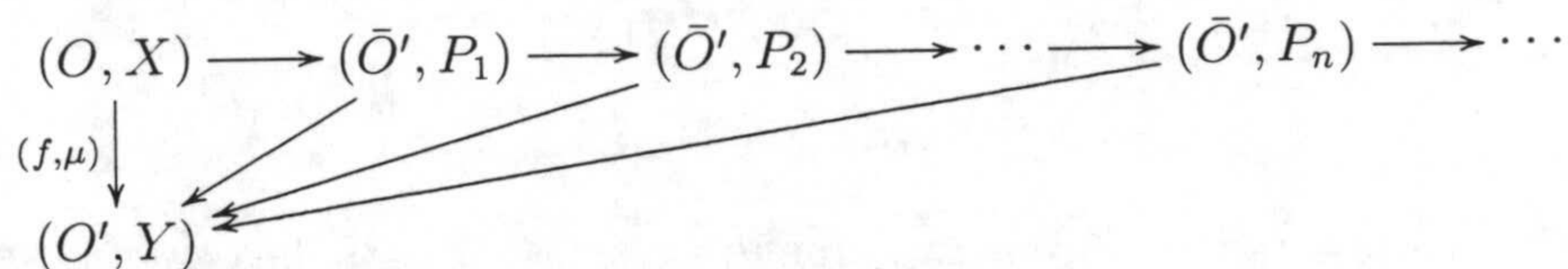
Por otro lado, se observa que ninguna pareja de elementos de  $O' - Imag(f)$  y  $O$  se identifica. Por consiguiente  $\bar{O}' \cong (O' - Imag(f)) \amalg f_*(O) = O'$  con  $b\bar{f} = f$ .

Considerando ahora el morfismo inducido  $B \rightarrow (O', Y)$ , éste y  $(f, \mu)$  determinan, según el diagrama



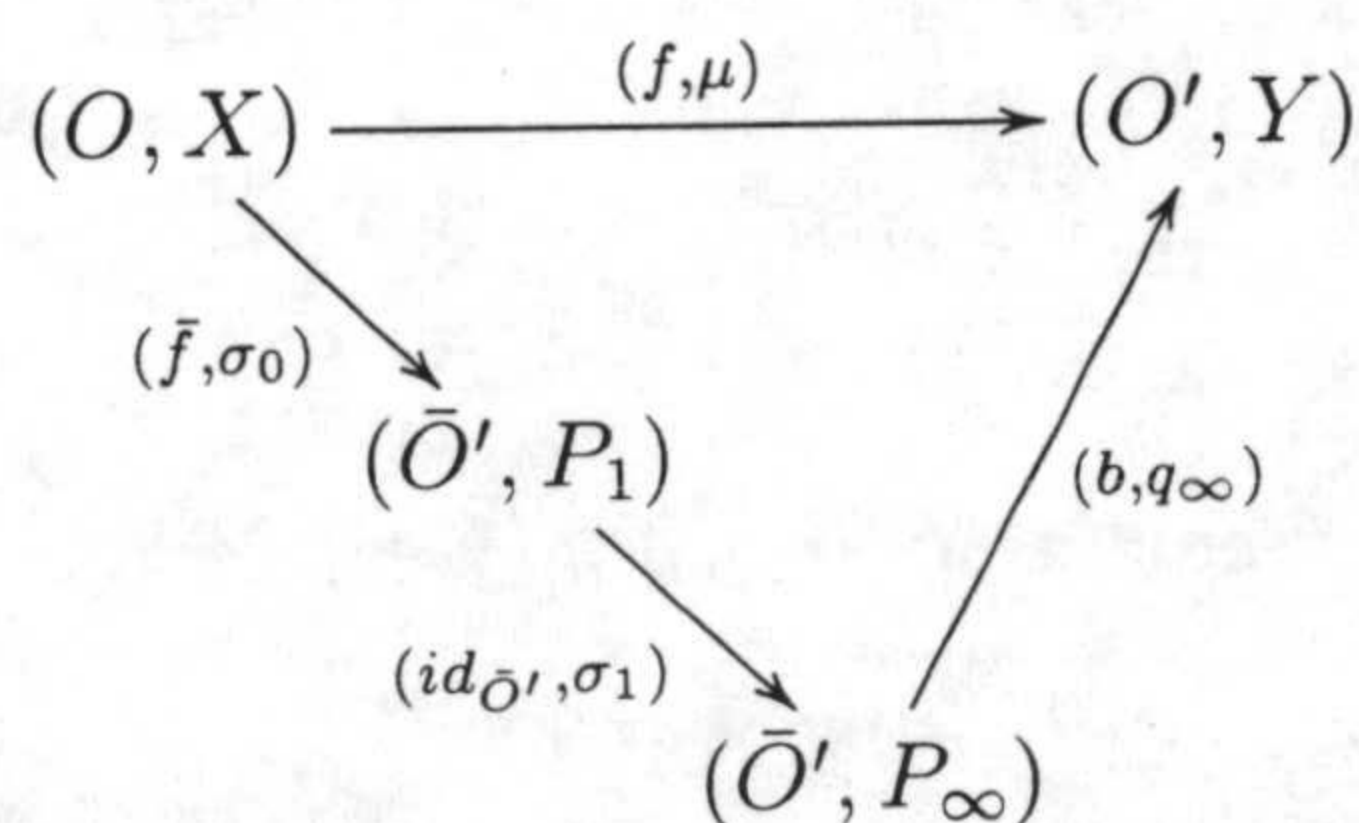
un único morfismo  $(\bar{O}', P_1) \rightarrow (O', Y)$  a través del cual factoriza  $(f, \mu)$ .

Reiterando el proceso para este morfismo y sucesivos, se tiene un diagrama



y si tomamos entonces el  $\lim_{\rightarrow} (\bar{O}', P_n) = (\bar{O}', P_\infty)$ , obtenemos un objeto de  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ , indizado en  $\bar{O}'$ , donde  $P_\infty = \lim_{\rightarrow} P_n(q)$ ,  $q \in \bar{O}'$ .

Además, si llamamos  $(\bar{f}, \sigma_0)$  al morfismo obtenido  $(O, X) \rightarrow (\bar{O}', P_1)$ , y  $(b, q_n)$  a  $(\bar{O}', P_n) \rightarrow (O', Y)$  y  $(b, q_\infty) = \lim_{\rightarrow} (b, q_n)$ , se tiene la factorización



donde  $(\bar{f}, \sigma_0)$  es una cofibración y  $(id_{\bar{O}'}, \sigma_1)$  también lo es, como puede comprobarse fácilmente desde que cada  $(\bar{O}', P_n) \rightarrow (\bar{O}', P_{n+1})$  lo es.

Queda pues probar que  $(b, q_\infty)$  es una fibración trivial, y para ello veremos que existe levantamiento en cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 (*, F\Delta[r+1, i]) & \longrightarrow & (\bar{O}', P_\infty) \\
 \downarrow & & \downarrow (b, q_\infty) \\
 (*, F\dot{\Delta}[r+1]) & \longrightarrow & (O', Y)
 \end{array} \quad , \quad 0 \leq i \leq r+1,$$

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

y

$$\begin{array}{ccc} (*, F \overset{\bullet}{\Delta} [q]) & \longrightarrow & (\bar{O}', P_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow (b, q_\infty) \\ (*, F \Delta [q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad , \quad r + 1 \leq q \leq n + 1,$$

Razonemos por ejemplo con el último (en el otro caso se haría igual). Dar un tal diagrama conmutativo en  $[_r \mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  es realmente dar un diagrama conmutativo en  $[_r \mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} F \overset{\bullet}{\Delta} [q] & \longrightarrow & P_\infty(p') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F \Delta [q] & \longrightarrow & Y(b(p')) \end{array}$$

y como  $F \overset{\bullet}{\Delta} [q]$  es un objeto pequeño y  $P_\infty(p') = \varinjlim P_n(p')$ , el morfismo  $t : F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \rightarrow P_\infty(p')$  factorizará a través de algún  $P_n(p')$ . Entonces se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F \overset{\bullet}{\Delta} [q] & \longrightarrow & P_n(p') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F \Delta [q] & \longrightarrow & Y(b(p')) \end{array}$$

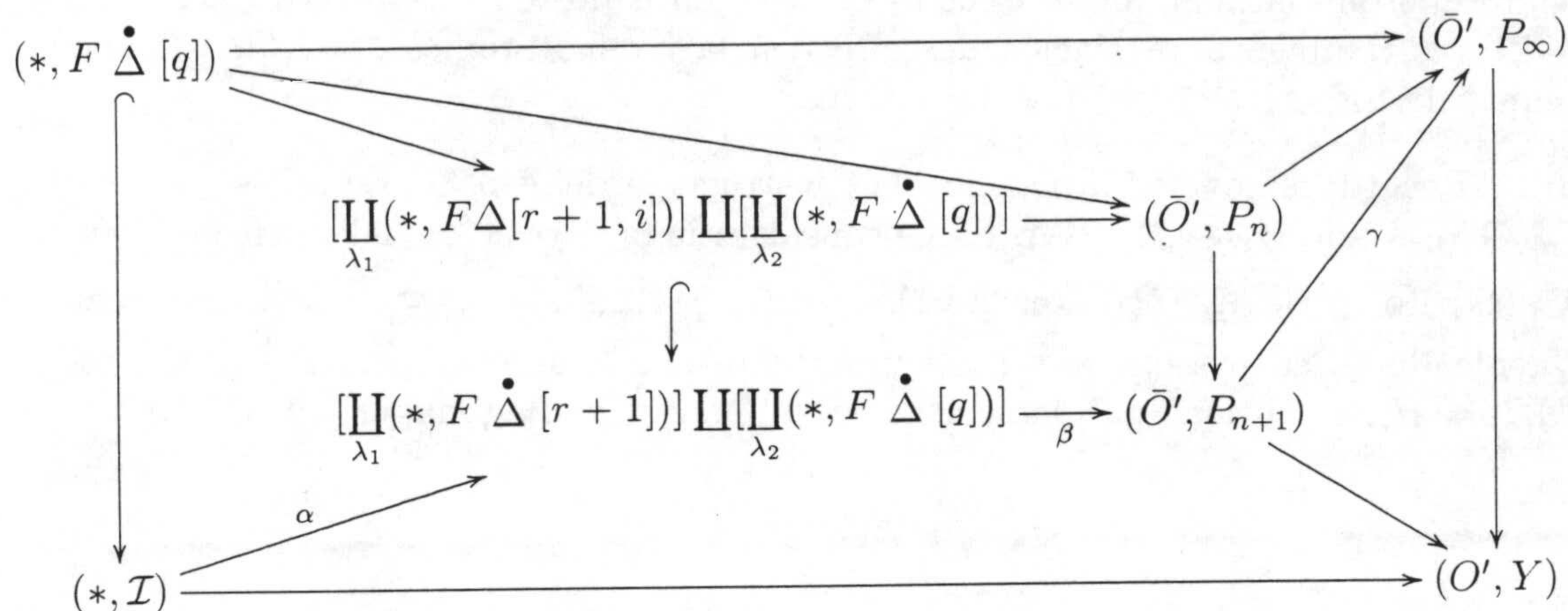
en  $[_r \mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ , o equivalentemente uno en  $[_r \mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

$$\begin{array}{ccc} (*, F \overset{\bullet}{\Delta} [q]) & \longrightarrow & (\bar{O}', P_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (*, F \Delta [q]) & \longrightarrow & (O', Y) \end{array} \quad , \quad r + 1 \leq q \leq n + 1,$$

que es uno de los considerados en la definición de  $(\bar{O}', P_{n+1})$ .

Entonces, para el índice en el coproducto correspondiente a este último diagrama se

tiene, considerando las inyecciones en el coproducto, un diagrama conmutativo



y el morfismo composición  $\gamma \circ \beta \circ \alpha$  es el levantamiento requerido. ■

De los requisitos axiomáticos pertinentes para que  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})^{(-)}$ , sea una categoría de modelos cerrada, los correspondientes a los axiomas *CM1*, *CM2* y *CM3* se muestran claros, o rutinarios. La parte no trivial de *CM4* es justamente la proposición 4.2.10, y las factorizaciones requeridas en *CM5* son dadas en las proposiciones 4.2.9 y 4.2.12. Tenemos entonces que:

**Teorema 4.2.13.** *La categoría  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})^{(-)}$ , con la estructura dada en la definición 4.2.6, es de modelos cerrada.*

**Corolario 4.2.14.**  *${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  es una categoría de modelos cerrada.*

*Demostración:* Utilícese la equivalencia de categorías  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})^{(-)} \cong {}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  mostrada en 4.2.5. ■

### 4.3 Construcciones homotópicas

Desarrollaremos en esta sección algunas construcciones homotópicas asociadas a la estructura de modelos en la categoría  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})^{(-)}$ , y su equivalente  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ , estudiada en la sección precedente.

Comenzaremos dando la siguiente:

**Definición 4.3.1.** *Dados objetos  $(O, X), (O', X') \in {}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})^{(-)}$ , dos morfismos  $(f, \alpha), (g, \beta) : (O, X) \rightarrow (O', X')$  son homotópicos si  $f = g$  y para cada  $p \in O$  existe una homotopía por la derecha en  ${}_r\mathbf{T}_n(\mathbf{Gp})$ ,  $\tau^p : \alpha_p \Rightarrow \beta_p$ . En tal caso  $\tau = (\tau_p)_{p \in O}$  será llamada una homotopía de  $(f, \alpha)$  a  $(g, \beta)$ .*

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Puesto que la relación de homotopía por la derecha en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  es de equivalencia, es claro que la definida en el conjunto de morfismos en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ , de  $(O, X)$  en  $(O', X')$ , es también una relación de equivalencia y denotaremos por  $[(O, X), (O', X')]$  al conjunto de todas las clases de equivalencia.

**4.3.2.** Recordaremos a continuación la construcción del espacio de arcos en la categoría  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ . Dado  $H_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ , si se considera la factorización del morfismo diagonal en  $[_0\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$  o en  $\text{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver 2.3.1)  $H_\bullet \xrightarrow{\beta} H_\bullet^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$  y se le aplica el funtor  $E_r$ , teniendo en cuenta que al ser  $E_r$  un adjunto por la derecha preserva productos y que  $E_r(H_\bullet) = H_\bullet$ , se obtiene una factorización del morfismo diagonal en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$

$$H_\bullet \xrightarrow{E_r\beta} E_r(H_\bullet^I) \xrightarrow{E_r(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$$

En [52] se vio que  $H_\bullet^I = E_r(H_\bullet^I)$  era un espacio de arcos para  $H_\bullet$  en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ .

Una construcción del espacio de arcos en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  es dada como sigue:

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $(O, X) \in [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ . El objeto de  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$   $(O, X)^I$  definido por  $(O, X)^I = (O, X(-)^I)$  es un espacio de arcos para  $(O, X)$ .*

*Demostración:*

Hemos de demostrar que existe una factorización del morfismo diagonal

$$(O, X) \xrightarrow{\beta'} (O, X)^I \xrightarrow{(\partial'_0, \partial'_1)} (O, X) \times (O, X)$$

con  $\beta'$  una equivalencia débil y  $(\partial'_0, \partial'_1)$  una fibración. Para ello consideremos, para cada  $p \in O$ , la factorización del morfismo diagonal de  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ ,  $\Delta : X(p) \rightarrow X(p) \times X(p)$ , de la forma

$$X(p) \xrightarrow{\beta_p} X(p)^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)_p} X(p) \times X(p)$$

donde, según hemos visto en 4.3.2, se tiene que  $X(p)^I = E_r(X(p)^I)$ . Ahora, puesto que  $(O, X) \times (O, X) = (O \times O, X \times X)$ , basta considerar los morfismos  $\beta' = (id_O, \beta)$  y  $(\partial'_0, \partial'_1) = (id_O \times id_O, (\partial_0, \partial_1))$ . ■

La construcción anterior nos permite fácilmente concretar la relación de homotopía:

**Proposición 4.3.4.** *Dados morfismos  $(f, \alpha), (f, \beta) : (O, X) \rightarrow (O', Y)$ , en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ , dar una homotopía  $\tau : (f, \alpha) \Rightarrow (f, \beta)$  es equivalente a dar un morfismo  $(f, \gamma) : (O, X) \rightarrow (O', Y)^I$  tal que  $\partial_0(f, \gamma) = (f, \beta)$  y  $\partial_1(f, \gamma) = (f, \alpha)$  (esto es, una homotopía por la derecha de  $(f, \alpha)$  a  $(f, \beta)$ ).*

*Demostración:* Dar una homotopía  $\tau : (f, \alpha) \Rightarrow (f, \beta)$  es, por definición, dar una  $\tau^p : \alpha_p \Rightarrow \beta_p$  para cada  $p \in O$ . Pero conocemos que, entonces, esto es equivalente a dar un morfismo  $\gamma_p : X(p) \rightarrow Y(f(p))^L$ , para cada  $p \in O$ , tal que  $\partial_0 \gamma_p = \beta_p$  y  $\partial_1 \gamma_p = \alpha_p$ . La colección de estos  $(\gamma_p)_{p \in O}$  es claramente equivalente al morfismo  $(f, \gamma)$  del enunciado. ■

4.3.5. Recordemos ahora que dado  $G_\bullet \in [_rT_n](Gp)$  cofibrante, si se considera la factorización del morfismo codiagonal en  $\mathbf{Simp}(Gp)_r$ ,  $G_\bullet \amalg G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma} G_\bullet$  (ver 2.3.7), y utilizando que  $\mathcal{P}_n$  preserva coproductos y que  $\mathcal{P}_n(G_\bullet) = (G_\bullet)$ , se obtiene una factorización del morfismo codiagonal en  $[_rT_n](Gp)$  de la forma

$$G_\bullet \amalg G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes I) \xrightarrow{\sigma} G_\bullet$$

El grupo simplicial  $G_\bullet \otimes I = \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes I)$  es un cilindro para  $G_\bullet$  en  $[_rT_n](Gp)$  (ver [52]).

A continuación daremos una construcción de cilindro en  $[_rT_n](Gp)^{(-)}$ .

Si  $(O, X) \in [_rT_n](Gp)^{(-)}$ , podemos considerar, para cada  $p \in O$ , el cilindro en  $[_rT_n](Gp)$ ,  $X(p) \otimes I$ , dado en 4.3.5, lo cual da una factorización del morfismo codiagonal de la forma

$$X(p) \amalg X(p) \xrightarrow{(i_0+i_1)_p} X(p) \otimes I \xrightarrow{\sigma_p} X(p)$$

donde el primero es una cofibración y el segundo una equivalencia débil.

Podemos entonces considerar el objeto de  $[_rT_n](Gp)^{(-)}$  definido por

$$(O, X) \otimes I = (O, X(-) \otimes I)$$

y se tiene que:

**Proposición 4.3.6.** Si  $(O, X)$  es un objeto cofibrante de  $[_rT_n](Gp)^{(-)}$ , entonces  $(O, X) \otimes I$  es un objeto cilindro para  $(O, X)$  en  $[_rT_n](Gp)^{(-)}$ .

*Demostración:* Notemos en principio que  $(O, X)$  es cofibrante si, y sólo si, cada  $X(p)$  es cofibrante en  $[_rT_n](Gp)$ , y entonces conocemos que  $X(p) \otimes I$  es un objeto cilindro en  $[_rT_n](Gp)$  para  $X(p)$ .

Ahora, el coproducto  $(O, X) \amalg (O, X)$  es el objeto de  $[_rT_n](Gp)^{(-)}$  que, estando indizado en  $O \amalg O$  es definido por  $(X \amalg X)(p) = X(p)$ ,  $\forall p \in O \amalg O$ . Observamos entonces la existencia de la factorización

$$\begin{array}{ccc} (O \amalg O, X \amalg X) & \xrightarrow{\nabla} & (O, X) \\ & \searrow (id_O + id_O, \tau) & \nearrow (id_O, \sigma) \\ & & (O, X) \otimes I \end{array}$$

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

donde  $\tau_p : X(p) \rightarrow X(p) \otimes I$  es  $i_{0_p}$  si  $p$  está en el primer término de  $O \amalg O$  y es  $i_{1_p}$  si está en el segundo. Es claro que  $(id_0, \sigma)$  es una equivalencia débil en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$

Veamos que  $(id_O + id_O, \tau)$  es una cofibración. Supongamos que es dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (O \amalg O, X \amalg X) \xrightarrow{(g, \alpha)} & (K, Z) \\ \downarrow (id_O + id_O, \tau) & \downarrow (j, \gamma) \\ (O, X) \otimes Y \xrightarrow{(h, \beta)} & (K', T) \end{array}$$

donde  $(j, \gamma)$  es una fibración trivial. Para cada  $p \in O$ , se tienen dos diagramas conmutativos en  $\mathbf{C}$

$$\begin{array}{ccc} X(p) \xrightarrow{\alpha_p} Z(g(p)) & & X(p) \xrightarrow{\bar{\alpha}_p} Z(g(p)) \\ \downarrow i_{0_p} & \downarrow \gamma_{g(p)} & \downarrow \gamma_{g(p)} \\ X(p) \otimes I \xrightarrow{\beta_p} T(jg(p)) & & X(p) \otimes I \xrightarrow{\beta_p} T(jg(p)) \end{array}$$

que corresponden al objeto  $p \in O$ , según se mire en cada término del coproducto  $O \amalg O$  (nótese que  $j$  es una biyección, y entonces  $g(p)$  es el mismo elemento de  $K$  independientemente de donde se considere  $p$  como elemento de  $O \amalg O$ ).

Estos diagramas inducen uno conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X(p) \amalg X(p) \xrightarrow{\alpha_p + \bar{\alpha}_p} & Z(g(p)) \\ \downarrow i_{0_p} + i_{1_p} & \downarrow \gamma_{g(p)} \\ X(p) \otimes I \xrightarrow{\beta_p} & T(jg(p)) \end{array}$$

y, puesto que  $i_{0_p} + i_{1_p}$  es una cofibración y  $\gamma_{g(p)}$  una fibración trivial en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})$ , existe levantamiento  $\lambda_p : X(p) \otimes I \rightarrow Z(g(p))$ , que lo es también para cada uno de los diagramas anteriores. Se tiene así que  $(j^{-1}h, \lambda) : (O, X(-) \otimes I) \rightarrow (K, Z)$  es un levantamiento en el diagrama inicial y, consecuentemente,  $(id_O + id_O, \tau)$  es una cofibración. ■

**Corolario 4.3.7.** Si  $(O, X)$  es un objeto cofibrante en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  y  $(f, \alpha), (g, \beta) : (O, X) \rightarrow (O', X')$  son dos morfismos, éstos son homotópicos por la izquierda si, y sólo si, lo son por la derecha y si, y sólo si, son homotópicos.

**Corolario 4.3.8.** Si  $(O, X)$  es un objeto cofibrante en  $[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  y  $(O', X')$  es cualquier otro objeto, entonces

$$\text{Hom}_{\text{Ho}([_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)})}((O, X), (O', X')) = [(O, X), (O', X')]$$



Notemos que las construcciones dadas de espacios de arcos y cilindro determinan funtores

$$(-, -)^I : [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)} \rightarrow [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}, \quad (-, -) \otimes I : [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)} \rightarrow [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$$

y teniendo en cuenta que para cada  $p \in O$  se verifica que

$$\text{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})}(X(p) \otimes I, Y(f(p))) \cong \text{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})}(X(p), Y(f(p))^I)$$

se tiene que:

**Corolario 4.3.9.** *El funtor  $(-, -)^I : [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)} \rightarrow [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$  es adjunto derecha al funtor  $(-, -) \otimes I : [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)} \rightarrow [_r\mathbf{T}_n](\mathbf{Gp})^{(-)}$ .*

## 4.4 Las categorías $[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gpd})$ . Clasificación de clases de homotopía

En esta sección estudiaremos con más detalle las categorías  $[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gpd})$  y estableceremos equivalencias de las mismas con versiones “no conexas” de las categorías de módulos cruzados de grupos trenzados o simétricos.

**4.4.1.** Comenzaremos recordando las equivalencias existentes entre las categorías  $[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gp})$  y otras categorías.

El caso  $r = 0$  y  $n = 1$  ya fue visto en la sección 4.1.

Para  $r = 0$  y  $n = 2$ , se tiene una equivalencia de categorías (véase [22])

$$[_0\mathbf{T}_2](\mathbf{Gp}) \cong \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$$

donde  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  es la categoría de 2-módulos cruzados de grupos en el sentido de Conduché, [22].

Esta última equivalencia determina, por restricción, equivalencias de categorías (véase [22], [14])

$$[_1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gp}) \cong \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp}) \cong \mathbf{BCat}(\mathbf{Gp}) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  es la categoría de 2-módulos cruzados reducidos de grupos ([22], [13]) y  $\mathbf{BCat}(\mathbf{Gp})$  la de cat-grupos trenzados ([45], [14]).

Recordemos que un 2-módulo cruzado reducido es un sistema  $(\mathcal{L}, \{-, -\})$  que consiste en un módulo cruzado  $\mathcal{L} = (L \xrightarrow{\rho} M)$ , junto con un operador  $\{-, -\} : M \times M \rightarrow L$  satisfaciendo:

1.  $\rho\{m, m'\} = m + m' - m - m'$ .
2.  $\{\rho(l), m\} = l - {}^m l$ .
3.  $\{m, \rho(l)\} = {}^m l - l$ .

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

$$4. \{m, m' + m''\} = \{m, m'\} +^{m'} \{m, m''\}.$$

$$5. \{m + m', m''\} =^m \{m', m''\} + \{m, m''\}.$$

Un morfismo en esta categoría es un morfismo de módulos cruzados compatible con los operadores, en el sentido que  $f_2(\{m, m'\}) = \{f_1(m), f_1(m')\}$ .

Es claro entonces la existencia de un funtor de olvido  $U : \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ .

Por otro lado, recordemos que un cat-grupo trenzado, es un cat-grupo  $A \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} O$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{Id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$  junto con una aplicación  $\tau : O \times O \rightarrow A$ ,  $(p, q) \mapsto \tau_{p,q}$ , llamada trenza, que satisface:

a)  $s\tau_{p,q} = p + q$ ;  $t\tau_{p,q} = q + p$ :

b) Naturalidad:

Dados  $x, y \in A$ ;  $x : p \rightarrow p'$ ,  $y : q \rightarrow q'$ , el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p + q & \xrightarrow{x+y} & p' + q' \\ \tau_{p,q} \downarrow & & \downarrow \tau_{p',q'} \\ q + p & \xrightarrow{y+x} & q' + p' \end{array}$$

c) axioma del hexágono:

Para cada  $p, q, n \in O$  los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & p + (q + n) & \\ & \parallel & \\ (p + q) + n & \xleftarrow{Id_p + \tau_{n,q}} & p + (n + q) \\ \tau_{(p+q),n} \uparrow & & \parallel \\ n + (p + q) & & (p + n) + q \\ & \parallel & \\ & \tau_{n,p} + Id_q & \\ & (n + p) + q & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (p + q) + n & \\ & \parallel & \\ p + (q + n) & \xleftarrow{\tau_{q,p} + Id_n} & (q + p) + n \\ \tau_{(q+n),p} \uparrow & & \parallel \\ (q + n) + p & & q + (p + n) \\ & \parallel & \\ & Id_q + \tau_{n,p} & \\ & q + (n + p) & \end{array}$$

d)  $\tau_{0,p} = \tau_{p,0} = Id_p$

Un morfismo en esta categoría es un morfismo de cat-grupos compatible con las trenzas, en el sentido que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} O \times O & \xrightarrow{\tau} & A \\ f_1 \times f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ O' \times O' & \xrightarrow{\tau'} & A' \end{array}$$

Existe de nuevo, de forma clara, un functor de olvido  $U : \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ .

Si  $\chi\mathbf{M}_{st}(\mathbf{Gp})$  denota ahora la subcategoría plena de  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{red}(\mathbf{Gp})$  cuyos objetos, llamados modulos cruzados estables (véase [22]) son aquellos  $(\mathcal{L}, \{-, -\})$  tales que  $\{m, m'\} + \{m', m\} = 0$ , y si  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  denota la subcategoría plena de  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  cuyos objetos, llamados cat-grupos simétricos (véase [14]), son los que verifican la condición  $\tau_{p,q}^{-1} = \tau_{q,p}$ , se tienen equivalencias de categorías para cada  $r \geq 2$  (véase [22], [14], [52])

$$[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gp}) \cong \chi\mathbf{M}_{st}(\mathbf{Gp}) \cong \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \quad (3)$$

La estructura de modelos en  $[_1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gp})$  determina, vía las equivalencias (2), una estructura de modelos tanto en la categoría  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$ , como en la categoría  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{red}(\mathbf{Gp})$  que, considerando los funtores de olvido  $U : \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  y  $U : \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{red}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  puede ser descrita (véase [38]) como sigue:

- Un morfismo  $f$  en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp. en  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{red}(\mathbf{Gp})$ ) es una fibración, cofibración o equivalencia débil si el correspondiente  $U(f)$  lo es.

De forma análoga, la estructura de modelos en  $[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gp})$ , para cada  $r \geq 2$ , determina via las equivalencias (3), estructuras de modelos en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  y en  $\chi\mathbf{M}_{st}(\mathbf{Gp})$ , que pueden ser descritas por:

- Un morfismo  $f$  en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  (resp. en  $\chi\mathbf{M}_{st}(\mathbf{Gp})$ ) es una fibración, cofibración o equivalencia débil si lo es como morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp. en  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{red}(\mathbf{Gp})$ ).

4.4.2. Recordemos que  $[_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gpd})$  es la subcategoría plena de  $[_r\mathbf{T}](\mathbf{Gpd})$ , cuyos objetos tienen complejo de Moore trivial (esto es, con solo identidades) en dimensiones  $> r + 1$ . Un objeto  $X \in [_r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gpd})$  adopta la forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & s_{n-1} & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ & & s_0 & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ \cdots & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \cdots & X_r & \xrightarrow{\quad} & O \cdots & O = O \\ & s \downarrow t & \xrightarrow{d_0} & s \downarrow t & & s \downarrow t & \parallel & \parallel & \parallel \\ \cdots & O = O & & O = O & \cdots & O = O & & O = O & \end{array}$$

donde el conjunto simplicial

$$\begin{array}{ccccccc} & & s_{n-1} & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ & & s_0 & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ \cdots & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \cdots & X_r & \xrightarrow{\quad} & O \cdots & O = O \\ & & \xrightarrow{d_0} & & & & & & \end{array}$$

es la unión disjunta de los grupos simpliciales

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

$$X(p) : \dots X_n(p) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_{n-1}(p) \cdots X_r(p) \rightrightarrows \{p\} \cdots \{p\} = \{p\}$$

$\begin{array}{c} s_{n-1} \\ \curvearrowright \\ s_0 \end{array}$

para  $p \in O$ . Es claro además que  $\forall p \in O$ ,  $X(p) \in [r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gp})$ .

Si  $r = 0$ , lo visto en la sección 4.1 determina equivalencias de categorías

$$\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{2} - \mathbf{Gpd} \cong [0\mathbf{T}_1](\mathbf{Gpd})$$

**4.4.3.** Para  $r > 1$  denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathbf{2} - \mathbf{Gpd})$  a la categoría cuyos objetos son aquellos 2-grupoides

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} s_0 \\ \curvearrowright \\ d_0 \end{array} & \\ X_1 & \xrightarrow{\quad} & X_0 \\ \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array}$$

tales que cada  $X_i \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$ ,  $i = 0, 1$ , es un grupoide totalmente desconexo y,

además, para cada  $p \in O$ ,  $X_1(p) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_0(p)$  es un cat-grupo trenzado. Si

$\tau = (\tau^p : X_0(p) \times X_0(p) \rightarrow X_1(p))_{p \in O}$  es la respectiva colección de trenzas, un morfismo  $\varphi : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  es un morfismo de 2-grupoides  $\varphi : X \rightarrow Y$ , que es compatible con las trenzas, en el sentido de que cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0(p) \times X_0(p) & \xrightarrow{\tau^p} & X_1(p) \\ \varphi_{01} \times \varphi_{01} \downarrow & & \downarrow \varphi_{11} \\ Y_0(\varphi_{00}(p)) \times Y_0(\varphi_{00}(p)) & \xrightarrow{\sigma^{\varphi_{00}(p)}} & Y_1(\varphi_{00}(p)) \end{array}$$

es conmutativo.

Notemos que existe un functor de olvido, prescindiendo del trenzamiento,  $U : \mathcal{B}(\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}) \rightarrow \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$ .

Notaremos  $\mathcal{S}(\mathbf{2} - \mathbf{Gpd})$  a la subcategoría plena de  $\mathcal{B}(\mathbf{2} - \mathbf{Gpd})$  cuyos objetos son aquellos  $(X, \tau)$  tales que  $\tau^2 = Id$ , esto es para cada objeto  $p$  y cada  $x, y \in X_0(p)$  es  $(\tau_{x,y}^p)^{-1} = \tau_{y,x}^p$ .

Puesto que la categoría de cat-grupos trenzados es equivalente a la de 2-módulos cruzados reducidos de grupos, la equivalencia  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$ , determina una equivalencia de categorías

$$\mathcal{B}(\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd})$$

donde  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd})$  es la categoría cuyos objetos son aquellos módulos cruzados sobre un grupoide

$$\mathcal{L} = \left( \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ O & \xlongequal{\quad} & O \\ \downarrow t & & \downarrow t \end{array} \right)$$

tales que  $M \xrightleftharpoons[t]{s} O$  es un grupoide totalmente desconexo y además, para cada  $p \in O$ ,  $L(p) \xrightarrow{\rho} M(p)$  es un 2-módulo cruzado reducido de grupos. Si  $\{-, -\} = (\{-, -\}^p)_{p \in O}$  es la colección de todos los correspondientes operadores  $\{-, -\}^p : M(p) \times M(p) \rightarrow L(p)$ , y denotamos un objeto de  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd})$  por  $(\mathcal{L}, \{-, -\})$ , un morfismo  $f : (\mathcal{L}, \{-, -\}) \rightarrow (\mathcal{L}', \{-, -\})$  es un morfismo  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ , de módulos cruzados sobre grupoides, compatible con los operadores, es decir, para cada  $p \in O$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M(p) \times M(p) & \xrightarrow{\{-, -\}^p} & L(p) \\ \downarrow f_1 \times f_1 & & \downarrow f_2 \\ M'(f_0(p)) \times M'(f_0(p)) & \xrightarrow{\{-, -\}^{f_0(p)}} & L'(f_0(p)) \end{array}$$

es conmutativo.

De la misma forma, y puesto que la categoría de cat-grupos simétricos es equivalente a la de módulos cruzados estables de grupos, la equivalencia  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  determina una correspondiente equivalencia de categorías

$$\mathcal{S}(\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}) \cong \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gpd})$$

donde esta última es la subcategoría plena de la categoría  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd})$  cuyos objetos son aquellos  $(\mathcal{L}, \{-, -\})$  tales que cada  $(L(p) \rightarrow M(p), \{-, -\}^p)$  es un módulo cruzado estable de grupos, esto es,  $\{a, b\}^p + \{b, a\}^p = 0$ ,  $\forall a, b \in M(p)$ .

4.4.4. Por otro lado, recordemos que  $[_1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gp}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$ , donde la equivalencia está dada por  $\Psi(G_\bullet) = (N_2(G_\bullet) \rightarrow N_1(G_\bullet), \{-, -\})$  con

#### 4. Álgebra homotópica en subcategorías de $\text{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

$\{x, y\} = s_1(x + y - x) + s_0(x) - s_1(y) - s_0(x)$ . Entonces, si  $X \in [1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gpd})$  y consideramos

$$\begin{array}{ccc} N_2(X) & \xrightarrow{\rho=\bar{d}_2} & N_1(X) \\ \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array}$$

éste es un objeto de  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd})$  con  $N_1(X) \xrightleftharpoons[t]{s} O$  totalmente desconexo, y tal que para cada  $p \in O$ ,  $N_2(X)(p) \rightarrow N_1(X)(p)$  es un 2-módulo cruzado reducido de grupos, ya que  $X(p) \in [1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gp})$  y  $N_i(X(p)) = N_i(X)(p)$ ,  $i = 1, 2$ .

Por tanto, se tiene un funtor  $\Psi : [1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gpd}) \rightarrow \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd})$  dado por

$$\Psi(X) = \left( \begin{array}{ccc} N_2(X) & \xrightarrow{\rho} & N_1(X) \\ \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} , \{-, -\} \right)$$

Este funtor es una equivalencia de categorías, pues dado  $(\mathcal{L}, \{-, -\}) \in \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd})$ , entonces  $\Psi^{-1}((L(p) \rightarrow M(p), \{-, -\}^p) \in [1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gp})$  y la unión de todos estos grupos simpliciales determina un grupoide simplicial en  $[1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gpd})$ , y entonces un funtor, cuasi-inverso de  $\Psi$ ,  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd}) \rightarrow [1\mathbf{T}_2](\mathbf{Gpd})$ .

Si recordamos también (véase [52]) que, para cada  $r \geq 2$ , se tienen equivalencias de categorías  $[r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gp}) \xrightarrow{\Psi} \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  dadas por  $\Psi(G_\bullet) = (N_{r+1}(G_\bullet) \rightarrow N_r(G_\bullet), \{-, -\})$  con  $\{x, y\} = s_r(x + y - x) + s_{r-1}(x) - s_r(y) - s_{r-1}(x)$ , un razonamiento análogo al anterior determina de nuevo, para cada  $r \geq 2$ , equivalencias de categorías

$$[r\mathbf{T}_{r+1}](\mathbf{Gpd}) \cong \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gpd})$$

Todos nuestros razonamientos anteriores pueden resumirse en el siguiente:

**Teorema 4.4.5.** *Existe un diagrama conmutativo de funtores*

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ [r\mathbf{T}_{r+1}] \\ \downarrow \\ [r-1\mathbf{T}_r] \\ \vdots \end{array} & \xrightarrow{\Psi} & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gpd}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}(2 - \mathbf{Gpd}) \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gpd}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}(2 - \mathbf{Gpd}) \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gpd}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}(2 - \mathbf{Gpd}) \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gpd}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}(2 - \mathbf{Gpd}) \\
 & & \downarrow \text{In} & & \downarrow \text{In} \\
 & & \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gpd}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B}(2 - \mathbf{Gpd}) \\
 & & \downarrow U & & \downarrow U \\
 & & \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gpd}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{2} - \mathbf{Gpd} \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ [3\mathbf{T}_4] \\ \downarrow \\ [2\mathbf{T}_3] \\ \downarrow \\ [1\mathbf{T}_2] \\ \downarrow \\ [0\mathbf{T}_1] \end{array} & & & & 
 \end{array}$$

en el que todas las flechas horizontales son equivalencias de categorías.

Recordemos finalmente que, desde lo establecido en la sección 4.2, se tiene una equivalencia

$$Ho([r\mathbf{T}_{r+1}] (\mathbf{Gpd})) \cong Ho(\mathbf{CW} | \pi_i = 0 = \pi_j, 1 \leq i \leq r, j \geq r+3)$$

y, en consecuencia se tienen equivalencias de categorías

$$Ho(\underline{\mathbf{C}}^{(-)}) \cong Ho(\mathbf{CW} | \pi_i = 0 = \pi_j, 1 \leq i \leq r, j \geq r+3)$$

para cada  $r \geq 1$ , donde  $\underline{\mathbf{C}}$  denota respectivamente  $[r\mathbf{T}_{r+1}] (\mathbf{Gp})$  o cualquiera de sus equivalentes.

La descripción del conjunto  $Hom_{Ho([r\mathbf{T}_n] (\mathbf{Gp})^{(-)})}(-, -)$  dada en el corolario 4.3.8 nos permite entonces establecer una clasificación puramente algebraica del conjunto  $[W, W']$ , de clases de homotopía de aplicaciones continuas entre dos CW-complejos no necesariamente conexos con únicos grupos de homotopía no nulos en dimensiones  $r$  y  $r+1$ , para  $r$  un entero dado mayor o igual a uno.

En efecto, si  $\rho(W)$  denota de forma generica el modelo algebraico en la categoría  $[r\mathbf{T}_{r+1}] (\mathbf{Gp})^{(-)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 [W, W'] &\cong Hom_{Ho(\mathbf{CW} | \pi_i=0=\pi_j, 1 \leq i \leq r, j \geq r+3)}(W, W') \cong \\
 &\cong Hom_{Ho([r\mathbf{T}_{r+1}] (\mathbf{Gp})^{(-)})}(\rho(W), \rho(W')) = [\rho(W), \rho(W')]
 \end{aligned}$$

donde  $[\rho(W), \rho(W')]$  es el conjunto de clases de homotopía de morfismos en  $[r\mathbf{T}_{r+1}] (\mathbf{Gp})^{(-)}$  de  $\rho(W)$  a  $\rho(W')$ .

# Bibliografía

- [1] D.W. ANDERSON, Axiomatic homotopy theory, *Springer L.N. in Math.* 741 (1978), 520-547.
- [2] H.J. BAUES, Algebraic homotopy, *Cambridge University Press*, 1989.
- [3] K.S. BROWN, Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology, *Trans. Amer. Soc.* 186 (1973), 419-458.
- [4] R. BROWN, Fibrations of groupoids, *J. of Algebra* 15 (1970), 103-132.
- [5] R. BROWN, Some non-abelian methods in homotopy theory and homological algebra, *Cat. Topology Proc. Conf. Toledo* (1984).
- [6] R. BROWN, N.D. GILBERT, Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules, *Proc. London Math. Soc.* (3) 59 (1989), 51-73.
- [7] R. BROWN, M. GOLASINSKI, A model structure for the homotopy category of crossed complexes, *Cahiers Topologie Géom. Diff. Catégoriques* XXX (1989), 61-82.
- [8] R. BROWN, P.J. HIGGINS, The equivalence of  $\infty$ -groupoids and crossed complexes, *Cahiers de Top. et Géom. Diff. Cat.* 22 (1981), 370-386.
- [9] R. BROWN, P.J. HIGGINS, Crossed complexes and chain complexes with operators. *Math Proc. Camb. Phil. Soc.* 107 (1990), 33-57.
- [10] R. BROWN, P.J. HIGGINS, The classifying space of a crossed complex, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1991), 95-119.
- [11] R. BROWN, C.B. SPENCER,  $G$ -groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group. *Proc. Kon. Ned. Acad. v. Wet.* 79 (1976), 296-302.
- [12] R. BROWN, C.B. SPENCER, Double groupoids and crossed modules, *Cah. de Top. et Geom. Diff.* vol. XVII-4 (1987), 343-362.
- [13] M. BULLEJOS, A.M. CEGARRA, A 3-dimensional non-abelian cohomology with applications to homotopy classification of continuous maps, *Canadian Journal of Mathematics*, 43 (2) (1991), 265-296.



- [14] M. BULLEJOS, P. CARRASCO, A.M. CEGARRA, Cohomology with coefficients in symmetric cat-groups. An extension of Eilenberg-MacLane's classification theorem, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 114 (1993), 163-189.
- [15] J.G. CABELLO, Estructuras de modelos de Quillen para categorías que modelan algebraicamente tipos de homotopía de espacios, *Tesis doctoral de la Univ. de Granada* (1993).
- [16] J.G. CABELLO, A.R. GARZON, Quillen's theory for algebraic models of  $n$ -types, *Extracta Mathematicae* 9 (1) (1994), 42-47.
- [17] J.G. CABELLO, A.R. GARZON, Closed model structures for algebraic models of  $n$ -types, *J. Pure Appl. Algebra* 103 (1995), 287-302.
- [18] J. CABEZA, Homologías y cohomologías propias y de la forma, *Tesis doctoral de la Univ. de Zaragoza* (1995).
- [19] P. CARRASCO, A.M. CEGARRA, Group theoretic algebraic models for homotopy types, *J. Pure Appl. Algebra* 75 (1991), 195-235.
- [20] P. CARRASCO, A.M. CEGARRA, (Braided) tensor structures on homotopy groupoids and nerves of (braided) categorical groups, *Comm. in Algebra* 24 (13) (1996), 3995-4058.
- [21] A.M. CEGARRA, M. BULLEJOS, A.R. GARZON, Higher dimensional obstruction theory in algebraic categories, *J. Pure and Appl. Algebra* 49 (1987), 43-102.
- [22] D. CONDUICHE, Modules croisés généralisés de longueur 2, *J. Pure Appl. Algebra* 34 (1984), 155-178.
- [23] S.E. CRANS, On combinatorial models for higher dimensional homotopies, *Univ. of Utrecht Ph. D. thesis*, (1995).
- [24] E.B. CURTIS, Simplicial homotopy theory, *Advances in Math* 6 (1971), 107-209.
- [25] W. G. DWYER, D.M. KAN, Homotopy theory and simplicial groupoids, *Proc. Konink. Neder. Akad.* 87 (1984), 379-389.
- [26] D.A. EDWARDS, H.M. HASTINGS, Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology, *Springer L.N. in Math.* 542 (1976).
- [27] S. EILENBERG, S. MAC LANE, Relations between homology and homotopy groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 29 (1943).
- [28] S. EILENBERG, S. MAC LANE, On the groups  $H(\pi, n)$  III, *Annals of Math.* 58 (1953), 513-557.

- [29] C. ELVIRA,  $n$ -tipos y cohomotopía, *Tesis doctoral de la Universidad de Zaragoza* (1991).
- [30] C. ELVIRA, L.J. HERNANDEZ, Closed model categories for the  $n$ -type of spaces and simplicial sets, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 118 (1995), 93-103.
- [31] J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNANDEZ, M.T. RIVAS, A closed model category for  $(n - 1)$ -connected spaces, *Math. Proc. of the A.M.S.* 124 (11) (1996), 3545-3553.
- [32] J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNANDEZ, M.T. RIVAS, Closed model categories for  $[n,m]$ -types, *Theory Appl. Categ.* 3 (10) (1997), 250-268.
- [33] P. GABRIEL, M. ZISMAN, Calculus of fractions and homotopy theory, *Springer, Berlin*, (1967).
- [34] J. M. GARCIA CALCINES, Homotopía propia simplicial, *Tesis doctoral de la Univ. de La Laguna*, (1998).
- [35] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Models for homotopy  $n$ -types in diagram categories, *Applied Categorical Structures* 4 (1996), 213-225.
- [36] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Closed model structures for algebraic models of  $r$ -connected spaces, *Math. Rep. Acad. Sci. Canada XVIII* (1) (1996), 27-32.
- [37] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Closed model structures for  $n$ -types of simplicial groups, *Math. Rep. Acad. Sci. Canada XVIII* (1) (1996), 33-38.
- [38] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Homotopy theory for (braided) cat-groups, *Cahiers Top. Geom. Dif. Cat.* XXXVIII (2) (1997), 99-139.
- [39] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Homotopy theory for truncated weak equivalences of simplicial groups, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 121 (1997), 51-74.
- [40] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Serre homotopy theory in subcategories of simplicial groups, *J. Pure Appl. Algebra* (1998).
- [41] A. HELLER, Homotopy theories, *Memoirs A.M.S.* 383 (1988).
- [42] L.J. HERNANDEZ, T. PORTER, Categorical models of  $n$ -types for pro-crossed complexes and  $J_n$ -prospaces, *Springer L.N. in Math* 1509 (1992), 148-185.
- [43] P.J. HIGGINS, Notes on Categories and Groupoids, *Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies* 32 (1971).
- [44] P. HILTON, Homotopy theory and duality, *Nelson, Gordon Breach* (1965).
- [45] A. JOYAL and R. STREET, Braided tensor categories, *Advances in Math.* (1) 82 (1991), 20-78.

- [46] D.M. KAN, A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.* 67 (2) (1958), 282-312.
- [47] D.M. KAN, On homotopy theory and c.s.s. groups, *Ann. of Math.* 68(1) (1958), 38-53.
- [48] J.L. LODAY, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982), 179-202.
- [49] S. MAC LANE, J.H.C. WHITEHEAD, On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 30 (1956), 41-48.
- [50] J.A. MARTIN NUÑEZ, Teoría de homotopía de n-cat-grupoides, *Tesis doctoral de la Univ. de Granada*, (1996).
- [51] J.P. MAY, Simplicial objects in Algebraic Topology, *Van Nostrand*, (1967).
- [52] J. G. MIRANDA, Estructuras de modelos y teoría de homotopía en categorías de grupos y grupoides simpliciales, *Tesis Doctoral Univ. Granada*, (1995).
- [53] I. MOERDIJK, Lectures on 2-dimensional groupoids, *Seminaire Mathématique Institut de Math. Pure et Applique Rapport n° 175*, Univ. Catholique de Louvain (1990).
- [54] I. MOERDIJK, J. SVENSSON, Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types I, *J. Pure Appl. Algebra* 89 (1993), 187-216.
- [55] J.C. MOORE, *Seminar on algebraic homotopy theory*, Princeton, (1956).
- [56] D. QUILEN, Homotopical Algebra, *Springer L.N. in Math.* 43 (1967).
- [57] D. QUILEN, Rational homotopy theory, *Annals of Math.* 90 (1969), 205-295.
- [58] R. RUIZ, Liftings in categorical homotopy, *J. Pure Appl. Algebra* 96 (1994), 157-172.
- [59] J.P. SERRE, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Annals of Math.* 58 (2) (1953), 258-294.
- [60] A. STRØM, The homotopy category is a homotopy category, *Arch. Math.* 23 (1973), 435-441.
- [61] R.W. THOMASON, Cat as closed model category, *Cahiers Top. Geom. Dif.* XXXI (3) (1980).
- [62] J.H.C. WHITEHEAD, Combinatorial homotopy I, *Bull. A.M.S.* 55 (1949) , 213-245.
- [63] J.H.C. WHITEHEAD, Combinatorial homotopy II , *Bull. A.M.S.* 55 (1949), 496-543.
- [64] J.H.C. WHITEHEAD, Algebraic homotopy theory, *Proc. Int. Cong. of Mathematics, Harvard 2*, 354-357.
- [65] G.W. WHITEHEAD, Elements of homotopy theory, Springer (1978).



Biblioteca Universitaria de Granada



01066999