Tesis -
Muñoz Delgado, Fco Javier

APROXIMACION CONSERVATIVA CON OPERADORES POLINOMIALES LINEALES.

FRANCISCO JAVIER MUÑOZ DELGADO

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

APROXIMACION CONSERVATIVA CON OPERADORES POLINOMIALES LINEALES

Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, codirigida por los profesores Victoriano Ramirez González y Paul Sablonnière.

Granada, Julio de 1991.

LOS DIRECTORES

Fdo: Victoriano Ramírez González

Fdo.: Paul Sablonnière

ASPIRANTE

Fdo.: Francisco Javier Muñoz Delgado.

A mis padres, Luis y Marisol,

Antonio y Paquita,

y a mi esposa.

En los últimos años se han realizado importantes estudios sobre diferentes operadores polinomiales lineales (OPL), al tiempo que ha crecido el interés por la aproximación conservativa. Aparecen problemas de aproximación de ciertos datos, a la vez que se exige la conservación de propiedades globales sobre la forma de la función tales como la positividad, el crecimiento o la convexidad, tanto individual como conjuntamente. En estos procesos existen una serie de propiedades consideradas como deseables. Por ejemplo, que:

i) Queden fijos los polinomios de cierto espacio $\mathbb{P}_k$ (polinomios en x de grado menor o igual que k) con k lo más grande posible.

ii) La función aproximante conserve el mayor número de propiedades de forma de las funciones aproximadas.

iii) La función aproximante verifique exactamente ciertos datos de la función aproximada.

iv) Al aumentar el grado del espacio de polinomios donde aproximamos se tenga una rápida convergencia a la función aproximada.

Nuestra investigación comenzó con la realización de un estudio acerca de los diferentes tipos de operadores polinomiales lineales con el propósito de encontrar operadores que presentasen algunas de las propiedades anteriores. Trabajamos con operadores como los que aparecen en el apartado V.3., para los cuales quedan libres una serie de coeficientes que intentábamos obtener de manera que se conservasen la positividad, el crecimiento, la convexidad, la simetría, el área, etc..., y quedasen fijos los polinomios de $\mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_1$,$\mathbb{P}_2$ y y en general de $\mathbb{P}_k$.

Este proceso de búsqueda de coeficientes resultaba bastante tedioso, aún para polinomios de grados bajos, ya que con frecuencia llegábamos a sistemas de ecuaciones e inecuaciones no lineales. Otra de las dificultades con que nos encontrábamos estaba en el desconocimiento de las limitaciones y posibilidades que existen y que hay que considerar en la construcción de operadores , es decir, qué propiedades resultaban compatibles y cuales no, tanto para OPL genéricos como para operadores que utilizan datos de momentos. Por ejemplo, con este tipo de operadores no conseguíamos encontrar operadores positivos que fijasen las rectas.

Situación análoga puede aparecer en problemas de aproximación conservativa con funciones splines, cuando se buscan funciones polinómicas a trozos que interpolen ciertos datos y que conserven algunas propiedades de forma.

El teorema de Korovkin nos proporcionaba una primera incompatibilidad: demuestra que un operador lineal que conserva la positividad y fija las parábolas tiene que ser la identidad. Este resultado si bien es muy importante, sin embargo resulta insuficiente para nuestra investigación. Necesitábamos por tanto, profundizar en la teoría de OPL.

El objetivo entonces se centró en el estudio del espacio de polinomios que podía quedar fijo mediante un OPL que conservase cierta propiedad o conjunto de propiedades sobre la forma de las funciones. Buscaríamos ejemplos de estos operadores que dejen fijos los polinomios de grado lo más alto posible y queríamos determinar las condiciones que debían verificar tales operadores.

Por ejemplo, sea $C = \{ f \in C^4[0,1] ; f \geq 0, Df \geq 0 \text{ y } D^4 f \leq 0 \}$ y consideremos operadores $K:C^4[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ que llevan las funciones de C en polinomios contenidos en C.

Surgen una serie de preguntas como:

1) ¿Es continuo ese operador?

2) ¿Cuál es el mayor espacio de polinomios $\mathbb{P}_k$ que puede quedar fijo?

3) ¿Podemos encontrar un ejemplo de dicho operador?

4) ¿Algún operador clásico conserva ese cono?

5) ¿Existe alguno que sea mejor, en algún sentido?

6) ¿Qué tipo de datos debe utilizar?

7) ¿Necesita interpolar algún dato?

8) Si una sucesión de operadores $K_m:C^4[0,1] \rightarrow C^4[0,1]$ conserva el cono C, ¿Podemos encontrar un conjunto de funciones, V, tal que la convergencia de $D^i K_m(f) \rightarrow D^i f$ uniformemente, para toda función de V obligue a la convergencia para toda función de $C^4[0,1]$?

Estas son algunas de las cuestiones sobre las que, en un intento de dar respuesta, hemos estado trabajando.

Comenzamos introduciendo en el primer capítulo algunas definiciones, notación y resultados previos que serán de utilidad para el resto del trabajo. Entre los conceptos básicos está el de i-convexidad, término introducido por Popoviciu para generalizar los conceptos de positividad, crecimiento y convexidad. También aparecen algunos resultados sobre funciones i-convexas.

Los operadores de Bernstein y de Lagrange constituyen dos ejemplos bien conocidos de operadores polinomiales lineales. Representan dos casos extremos porque aunque los dos utilizan datos lagrangianos, sin embargo el primero conserva todas las i-convexidades y fija sólo las rectas, el segundo fija los polinomios de $\mathbb{P}_n$ pero no conserva apenas propiedades de forma.

Además, si bien la velocidad de convergencia que presenta el operador de Bernstein es "muy lenta", sin embargo el teorema de Berens y DeVore muestra cómo esta velocidad es fruto de sus propiedades conservativas, y caracteriza este operador como el "más rápido" dentro de la clase de operadores polinomiales lineales que conservan todas las i-convexidades y fijan las rectas.

El estudio de estos operadores puede verse dentro de la teoría de conos. Por lo cuál, en el capítulo I se ven algunos resultados sobre la continuidad de operadores por el hecho de conservar algunos conos de funciones.

En el capítulo II, dados unos valores $\varepsilon_h = 1$ ó -1 para $h=0,\dots,n$, y unos valores i,j con $0 \le i \le j \le n$ se considera el cono $C(i,j,\varepsilon)$

$$C(i,j,\varepsilon) = \{ f \in C^n[0,1];\ \text{con } \varepsilon_h D^h f \ge 0 \text{ para } h=i,\dots,j \}$$

y estudiamos operadores $K:C^n[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ que conservan el cono $C(i,j,\varepsilon)$. Encontramos cómo el mayor espacio de polinomios $\mathbb{P}_k$ que puede quedar fijo es $\mathbb{P}_{j+1}$. Asímismo, introducimos una familia de operadores de Bernstein generalizado que conserva el cono $C(i,j,\varepsilon)$ y fija $\mathbb{P}_{j+1}$.

Se estudian algunas propiedades relativas a los polinomios propios y valores propios de los operadores conservativos. Se caracterizan los operadores de Bernstein generalizados en función de sus valores propios extendiendo el teorema de Berens y DeVore.

En la sección II.5 se estudian propiedades de interpolación para operadores que conserven los conos $C(i,j,\varepsilon)$. Aparecen, según el espacio de polinomios fijos, algunos datos referentes a derivadas que deben ser interpoladas en puntos concretos; llegándose incluso a caracterizar los datos que deben interpolarse en ciertos casos. Concluiríamos que para una "buena" aproximación debe de intervenir necesariamente la interpolación, pero en su justa medida, pues no pueden interpolarse nada más que los datos dados en el teorema II.6.1.

Las propiedades de interpolación resultan muy útiles, tanto a la hora de construir operadores con ciertas propiedades, como al estudiar los operadores polinomiales clásicos: Lagrange, Taylor, Hermite, mínimos cuadrados, etc., pues podemos encontrar conos que no se conservan con estos operadores.

En el capítulo III se consideran conos de funciones más arbitrarios que los C(i,j,ε) estudiados en el capítulo anterior. En concreto, serán los conos notados por C(ε,δ) y donde las propiedades referentes a las derivadas de las funciones no tienen que ser consecutivas. La razón del estudio por separado responde a que las propiedades son diferentes entre el caso consecutivo y el arbitrario, siendo el primero más fácil de considerar en un primer momento para el lector.

Tras exponer algunas de las diferencias con el caso consecutivo se establecen las incompatibilidades entre conservar un cono C(ε,δ) y fijar los polinomios de cierto espacio $\mathbb{P}_k$. Damos nuevamente para cada caso una generalización del operador de Bernstein que fija el máximo espacio $\mathbb{P}_k$ que la conservación del cono C(ε,δ) permite.

Igualmente, en este capítulo se muestran algunas propiedades de interpolación referentes a la conservación de estos conos.

El capítulo IV se presentan tres técnicas de construcción de OPL conservativos.

La primera consiste en partir de ciertos productos escalares, consiguiendo construir operadores polinomiales lineales que conservan todas las i-convexidades, y que tienen como funciones propias los polinomios ortogonales respecto del producto escalar. Como casos particulares, mediante este procedimiento pueden obtenerse los operadores de Durrmeyer-Derriennic, Bernstein-Jacobi y Bernstein-Hahn, (introducidos estos dos últimos por P.Sablonnière). Además, el operador que se construye verifica una propiedad de minimización que da pie a generalizar el proceso de minimización, siendo éste una variación del producto escalar que penaliza la variación de la función aproximante y permite la obtención de operadores conservativos, cosa que con la minimización del producto escalar no se obtiene. De hecho, probamos que la mayoría de los operadores conservativos pueden verse como la minimización de un producto escalar al que se modifica de la forma anterior.

La segunda técnica consiste en utilizar los operadores derivada e integral para pasar de un operador conocido con unas propiedades a otro con propiedades diferentes. Se obtienen así familias de operadores.

La tercera forma consiste en partir de un operador conservativo que tenga suficientes polinomios propios y modificar sus valores propios para conseguir otros operadores conservativos que fijen más polinomios, cediendo para ello la conservación de algunas propiedades de forma.

Como ejemplos de la construcción de este tipo de operadores obtenemos una sucesión de operadores cuasi-interpolantes de Bernstein y otra sucesión de operadores intermedios entre el de Durrmeyer-Derriennic y el de mínimos cuadrados continuos.

En el capítulo V estudiamos algunos aspectos referentes a operadores conservativos que utilizan un tipo de datos prefijado. Comenzamos encontrando los conos $C(\varepsilon,\delta)$ que los operadores de Lagrange, Taylor, Hermite y mínimos cuadrados continuos conservan.

En la segunda sección se consideran operadores polinomiales lineales que utilicen únicamente datos lagrangianos. Se estudian todos los casos de conservación de las propiedades más usuales en la práctica, positividad, crecimiento y convexidad, tanto de forma individual como conjunta encontrando el máximo espacio de polinomios $\mathbb{P}_k$ que puede quedar fijo y dando un ejemplo de operador en cada caso.

En la tercera sección se estudia una clase de operadores que sólo utiliza datos de momentos, encontrándose condiciones para la fijación de polinomios, la conservación del área, la conservación de la simetría y las i-convexidades. La conservación de las i-convexidades por parte de los operadores de Durrmeyer-Derriennic y Bernstein-Jacobi se obtiene de forma inmediata.

En el capítulo VI se estudian la convergencia y la interpolación para operadores lineales más generales. Ahora se pueden considerar operadores en varias variables y no necesariamente polinomiales.

Por un lado se da un teorema de interpolación para operadores lineales definidos sobre funciones de un compacto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, y que conserven ciertas funciones positivas. Por otra parte, se da una extensión del teorema de Korovkin.

Como aplicación de dicho teorema se obtienen funciones cuya convergencia obliga a la convergencia de todas las demás para operadores $K_m:C^n[0,1]\rightarrow C^n[0,1]$ que conserven el cono $C(\varepsilon,\delta)$. Esto es válido tanto para valores de la función como para ciertas derivadas.

Finalmente, quisiera manifestar mi agradecimiento a todos los que de una u otra forma han colaborado a la realización de esta memoria. En particular a sus Directores, Prof. Victoriano Ramírez y Prof. Paul Sablonnière quienes con su ayuda, estímulo y paciencia han hecho posible este trabajo.

Igualmente quiero manifestar mi gratitud a todos los demás compañeros del Departamento de Matemática Aplicada, en especial al Prof. Rafael Ortega por su valiosa ayuda durante la realización de este trabajo.

GRANADA, JULIO 1991
FRANCISCO JAVIER MUÑOZ DELGADO

INDICE

I. INTRODUCCION

En este capítulo introducimos algunas definiciones, notaciones y resultados preliminares que serán útiles en el resto de trabajo.

I.1 Funciones i-convexas

Popoviciu introdujo el término de i-convexidad para generalizar los conceptos de positividad, crecimiento y convexidad.

En lo sucesivo el término positivo se usará en sentido no estricto, es decir mayor o igual a cero. Lo mismo ocurrirá con los términos creciente o convexo.

Definición I.1.1. Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se denomina **i-convexa** si la diferencia dividida de cualesquiera $i+1$ puntos distintos en $[a,b]$ es positiva.

Notaremos por $C^i[a,b]$ el conjunto de funciones reales definidas en $[a,b]$ con derivada i-ésima continua. Diremos que un operador polinomial lineal (OPL) conserva la i-convexidad si transforma todas las funciones i-convexas en polinomios i-convexos.

Propiedad I.1.2. Sea $f \in C^i[a,b]$, f es i-convexa si y sólo si la derivada i-ésima es positiva.

Demostración: La diferencia dividida de i+1 puntos puede expresarse como la derivada i-ésima en un punto intermedio dividida por el factorial de i (ver por ejemplo Gasca [G]). Así, si f tiene derivada i-ésima positiva es i-convexa. Recíprocamente si f es i-convexa, entonces la derivada i-ésima no puede ser menor que cero. Si lo fuese, tendría que serlo en un entorno y escogiendo i+1 puntos en ese entorno tendría diferencia dividida menor que cero.

■

Propiedad I.1.3. Si una función $f \in C[a,b]$ es i-convexa entonces al interpolar f en i puntos cualesquiera de [a,b], $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_i \leq b$ por un polinomio p de $\mathbb{P}_{i-1}$ se tiene que f-p va cambiando alternativamente de mayor o igual que cero a menor o igual que cero en los intervalos $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$,...,$[x_i,b]$, siendo mayor o igual que cero en el último de ellos.

Demostración: El error en la interpolación lagrangiana viene dado por la expresión

$$f(x)-p(x) = f[x_1,x_2,\ldots,x_i,x]\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i).$$

Los cambios de signos de la diferencia f-p vienen dados por los cambios de signos del polinomio $(x-x_1)\ldots(x-x_i)$ llegándose a la obtención de la tesis.

■

I.2 Algunos ejemplos de OPL.

El operador de Bernstein $B_n:C[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ definido por

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(x)\, f(i/n) \quad \text{con} \quad b_{i,n}(x) = n!/((n-i)!\, i!)\ x^i (1-x)^{n-i}.$$

fue introducido por Bernstein [Be] para dar una demostración fácil del teorema de Weierstrass. Posteriormente su utilización se ha extendido a diferentes campos (Lorentz [L]).

Se comprueba fácilmente que B_n es un operador polinomial lineal positivo. Este puede reescribirse en la base usual (Kelisky y Rivlin [K-R]) de la forma

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i f(0)\, n!/((n-i)!\, i!)\ x^i$$

(donde $\Delta^i f(0)$ es la diferencia progresiva de orden i partiendo del punto 0 y paso 1/n)

De esta última expresión es inmediato que el operador de Bernstein no aumenta el grado de los polinomios, pues si $p \in \mathbb{P}_k$, entonces $\Delta^i p(0)=0$ para $i=k+1,..,n$.

Propiedad I.2.1. Si f es una función i-convexa para algún $i \in \{0,\ldots,n\}$ entonces $B_n(f)$ es i-convexo.

Demostración. Basta realizar las derivadas y se obtiene

$$D^i B_n(f)(x) = n!/(n-i)! \sum_{j=0}^{n-i} \Delta^i f(j/n)\, b_{j,n-i}(x)$$

donde $\Delta^i f(j/n)$ es la diferencia progresiva de orden i partiendo del punto j/n y paso $1/n$. Ahora estamos en condiciones de ver que el operador de Bernstein conserva las i-convexidades.

.

■

Propiedad I.2.2. El operador de Bernstein sólo interpola en los puntos 0 y 1. Además fija sólo los polinomios de $\mathbb{P}_1$.

Demostración. Basta evaluar B_n en 0 y en 1, y por otra parte aplicarlo a la función $f(x)=x^2$.

■

Propiedad I.2.3. El número de cambios de signo que presenta el polinomio $B_n(f)$ no es superior al número de cambios de signo en la sucesión $(f(0),f(1/n),...,f(1))$.
Demostración. Ver Goodman [Go] o Schoenberg [So].

■

Propiedad I.2.4. Si f es una función convexa entonces $B_n(f) \geq f$.
Demostración. Ver Davis [D].

■

Respecto a la velocidad de convergencia el operador de Bernstein parece demasiado "lento". Por ejemplo, para la función $f(x)=x^2$ se tiene que

$$\max_{[0,1]} |B_n(f)(x) - x^2| = \max_{[0,1]} |x(1-x)| \, (1/n) = 1/(4n)$$

Para obtener una precisión de 10^{-4} para una función tan sencilla como x^2, se necesita tomar $n>2500$.

Otro OPL clásico es el de Lagrange, el cual dados n+1 puntos distintos en el intervalo [0,1], asigna a cada función $f \in C[0,1]$ el polinomio del espacio $\mathbb{P}_n$ que interpola a f en los puntos escogidos.

$$L_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} ((x-x_j)/(x_i-x_j))$$

Propiedad I.2.5. El operador de Lagrange fija $\mathbb{P}_n$ y sólo conserva la n-convexidad.

Demostración. Puede verse en V.1

■

En relación a la convergencia del operador de Lagrange, se tiene el siguiente teorema [Su].

Teorema I.2.6. Consideremos un intervalo [a,b] y supongamos que para cada $n \geq 1$ consideramos una conjunto de puntos $x_{n1}<x_{n2}<\ldots<x_{nn}$ en [a,b]. Entonces existe una función continua en [a,b] tal que $\|f - L_n(f)\|_\infty \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

■

Estos dos operadores, el de Bernstein y el de Lagrange, son en cierta forma casos extremos con respecto a la conservación de i-convexidades y la fijación de polinomios.

I.3. Velocidad de convergencia.

Berens y DeVore [B-D] consideraron una clase de OPL, $\mathcal{L}$, de $C[0,1]$ en $\mathbb{P}_n$ donde $L_n \in \mathcal{L}$ si L_n fija los polinomios de $\mathbb{P}_1$ y conserva todas las i-convexidades. Dentro de esta clase se encuentra el operador de Bernstein como elemento destacado, pues demuestran Berens y DeVore que el operador de Bernstein tiene la convergencia más rápida dentro de la clase $\mathcal{L}$, siendo su orden de convergencia $O(1/n)$. La velocidad de convergencia viene dada por su tercer valor propio que es el mayor dentro de esta clase de operadores.

Resumiendo, la "lentitud" de convergencia del operador de Bernstein es una consecuencia de sus propiedades conservativas.

Buscando una convergencia más rápida, P.Sablonnière [S3] utiliza el hecho de que el operador de Bernstein es un operador diferencial lineal invertible y construye una sucesión de operadores cuasi-interpolantes $B_n^{(k)}$ para $k=0,\ldots,n$ intermedios entre el de Bernstein y el de Lagrange. En cada paso el espacio de polinomios que queda fijo es $\mathbb{P}_k$. Esta sucesión de operadores verifica que, siendo constante k, y haciendo tender n a infinito, la convergencia tiene lugar y la velocidad es mayor que la del operador de Bernstein, en concreto el operador $B_n^{(k)}$ que fija $\mathbb{P}_k$ converge con error de orden $O(n^{-[k/2]-1})$

Después del resultado de Berens y DeVore el intento de P.Sablonnière de encontrar operadores lineales de convergencia más rápida debe pasar por ceder en las propiedades de forma de la función. De hecho sus operadores intermedios no conservan todas las propiedades de forma.

I.4 Conos.

Definición I.4.1. Se dice que un subconjunto C de un espacio vectorial real E es un **cono** si $C + C \subset C$ y $\alpha C \subset C$, $\forall\ \alpha > 0$. Además, se dice que es punteado si el cero pertenece a C.

Lema I.4.2. Sea E un espacio vectorial topológico y A un cono punteado de E con interior no vacío. Cualquier aplicación lineal F de E en $\mathbb{R}$ tal que $F(f) \geq 0$ para cualquier elemento f de A, es continua.

Demostración. Ver Berberian [B]

■

De este resultado de continuidad automática tenemos que la conservación de las propiedades de forma puede implicar la continuidad de los operadores que intentamos estudiar.

Aunque la linealidad obliga a que la conservación de una i-convexidad implica la conservación de la opuesta, para la conservación de propiedades de forma conjunta habrá que precisar más. Así por ejemplo, la conservación de forma conjunta de la positividad y el crecimiento no implica, a priori, la conservación conjunta de la positividad y el decrecimiento, es decir, tendremos que precisar el signo de cada derivada a conservar. Para ello una sucesión de valores +1 ó -1 nos será útil para indicar el signo.

Teorema I.4.3. Sea $j\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon_h=1$ ó -1 para cada $h=0,\dots,j$. Sea $K:C^j[0,1]\to\mathbb{P}_n$ una aplicación lineal que verifica

$\forall f\in C^j[0,1]$ tal que $\varepsilon_h f^{h)}\geq 0$ $\forall h\in\{0,\dots,j\}$ se tiene que $\varepsilon_0 K(f)\geq 0$.

En estas condiciones K es continua con la norma $\|f\|_j=\text{máx}\{\|D^i f\|_\infty, i=0,\dots,j\}$

Demostración. $C=\{\ f\in C^j[0,1]$ tal que $\varepsilon_h D^h f\geq 0$ $\forall h\in\{0,\dots,j\}\}$ es un cono convexo punteado de interior no vacío con la norma $\|.\|_j$.

Sean $x_i\in[0,1]$, para $i=0,1,\dots,n$, $n+1$ puntos distintos. Definimos las aplicaciones $L_i(f)$ como $\varepsilon_o K(f)(x_i)$ para $i=0,\dots,n$. Por hipótesis, si $f\in C$ entonces $L_i(f)\geq 0$. Por el Lema I.4.2. tenemos que L_i es continua.

Consideremos como norma en $\mathbb{P}_n$ $\|p\|=\text{máx}\{|p(x_i)|, i=0,\ldots,n\}$. Veamos que K es continuo con esta norma

$$\begin{aligned}\|K(f)\| &= \text{máx}\{|K(f)(x_i)|,\ i=0,\ldots,n\} = \text{máx}\{|L_i(f)|,\ i=0,\ldots,n\} \leq \\ &\leq \text{máx}\{\ \|L_i\|\ \|f\|_j,\ i=0,\ldots,n\} = \|f\|_j\ \text{máx}\{\|L_i\|,\ i=0,\ldots,n\}\end{aligned}$$

■

Corolario I.4.4. Sea $j\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon_h=1$ ó -1 para cada $h \in A \subset \{0,\ldots,j\}$. Sea K una aplicación lineal $K:C^j[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ que verifica

$\forall f\in C^j[0,1]$ tal que $\varepsilon_h D^h f\geq 0$ para cada $h \in A$ se tiene que $\varepsilon_0 K(f)\geq 0$.

En estas condiciones K es continua con la norma $\|f\|_j=\text{máx}\{\|D^i f\|_\infty, i=0,\ldots,j\}$

■

En general, se puede demostrar el siguiente resultado relativo a la continuidad de operadores que lleven conos en conos.

Teorema I.4.5. Sean E_1 y E_2 dos espacios de Banach y K una aplicación lineal $K:E_1\rightarrow E_2$ tal que $K(C_1)\subset C_2$ siendo

C_1 un cono punteado de interior no vacío y tal que $C_1\cap(-C_1) =\{0\}$

C_2 un cono punteado con $C_2\cap(-C_2) = \{0\}$ y tal que existe $\delta >0$ verificando que si $e_1, e_2 \in C_2$ con $||e_1|| = ||e_2|| = 1$ entonces $||e_1+e_2|| \geq \delta$.

En estas condiciones K es continua.

Demostración. Ver Krasnoselskii [Kr]

■

I.5. Teorema de Korovkin

En principio sería deseable dejar fijos espacios de polinomios de grado alto y conservar las propiedades de forma más visuales: positividad, crecimiento y convexidad. El resultado de Berens y DeVore al demostrar que el tercer valor propio no puede superar al tercer valor propio del operador de Bernstein nos conduce a que dentro de la clase que ellos consideran, no es posible encontrar un operador que fije las parábolas. Para fijar espacios más grandes, podríamos pensar en ceder la conservación de las i-convexidades de grado alto, más difíciles de visualizar en la práctica y por ello menos interesantes.

En el libro de Korovkin [Ko] se demuestra el siguiente teorema.

Teorema I.5.1. Dada una sucesión de operadores lineales positivos $\{K_n\}$ tales que $K_n(x^i) \to x^i$ uniformemente en $[0,1]$ para $i=0,1,2$ entonces $K_n(f) \to f$ uniformementente para toda función continua en $[0,1]$.

Aparece así como incompatible la conservación de la positividad con la fijación de las parábolas. Una forma de ver esta incompatibilidad sería la siguiente. Al aplicar el espacio de las funciones continuas dentro del espacio de polinomios $\mathbb{P}_n$, muchas de las funciones continuas tienen que ir al polinomio cero. Consideremos una de estas funciones no nulas f_0, y un punto en que la función sea distinta de cero, x_0 (Ver Figura I.5.2). Dentro del conjunto de las parábolas podemos encontrar una, p_2, cuya gráfica esté por encima de la gráfica de la función f_0 y al mismo tiempo esté en el punto x_0 tan cerca como deseemos de f_0, $(p_2\text{-}f_0)(x_0)<\varepsilon$. Análogamente podemos hacer lo mismo por debajo del punto escogido. Si las parábolas quedasen fijas, la conservación de la positividad hace que la función no pueda aplicarse en el cero pues debería estar entre las dos parábolas.

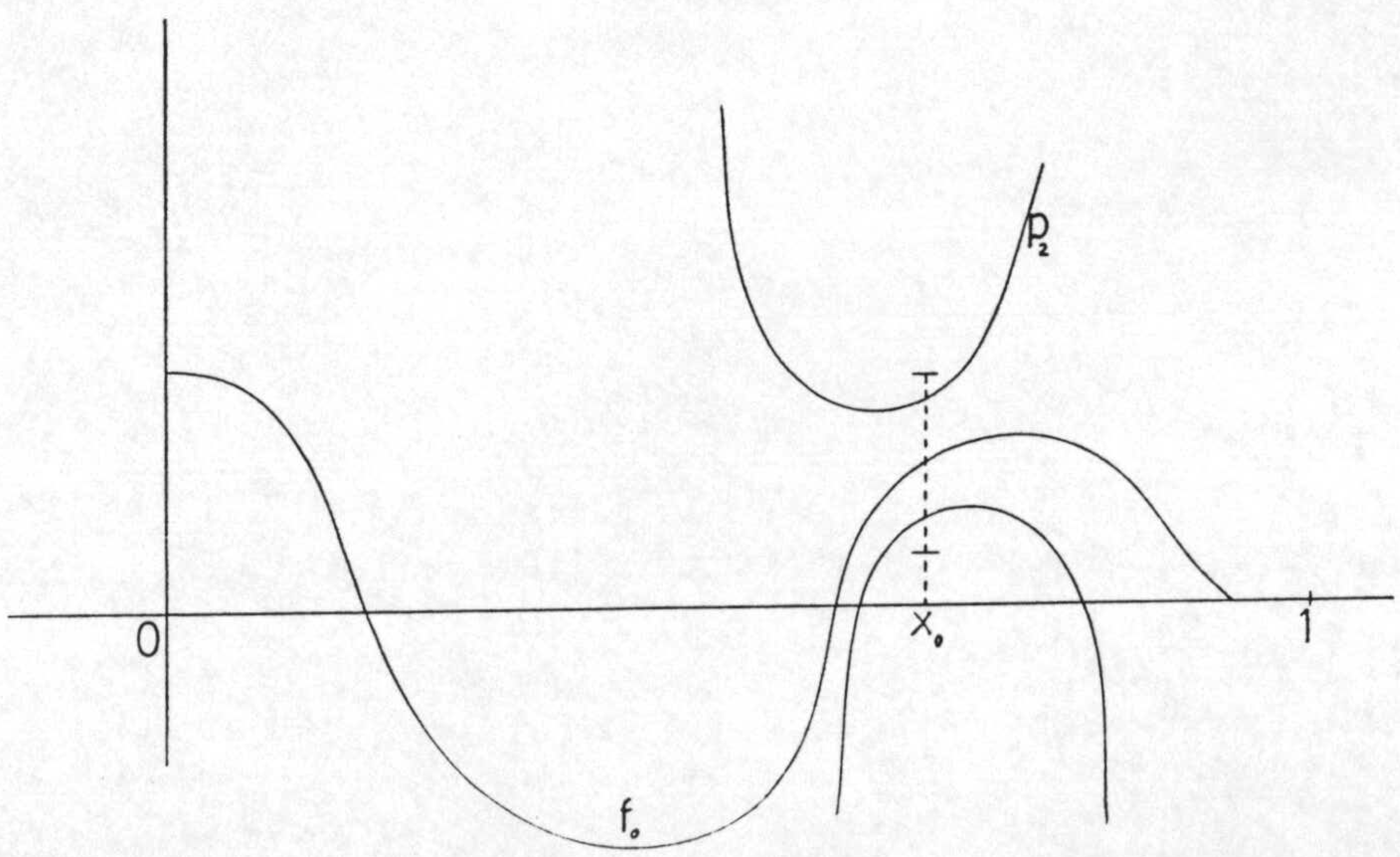

Figura I.5.2

A continuación, trabajaremos sobre la existencia de operadores polinomiales lineales que fijen cierto espacio de polinomios y además que conserven ciertos conos de funciones. Por ejemplo, los conos serán los de las funciones positivas, negativas, crecientes, decrecientes, convexas, cóncavas, etc. e intersecciones de estos conos.

II. CONSERVACION DE CONOS CONSECUTIVOS.

En primer lugar estudiaremos la conservación de los conos formados por funciones i-convexas para ciertos valores consecutivos de i. Dicho comportamiento resulta muy diferente al de los conos correspondientes a funciones i-convexas para valores no consecutivos de i.

Estudiaremos, fijados unos valores $\varepsilon_h=1$ ó -1 para $h \in \{0,1,\ldots,n\}$, la existencia de operadores polinomiales lineales $K: C^n[0,1]\to\mathbb{P}_n$ que verifiquen

a) $\forall p\in\mathbb{P}_k \; K(p)=p$

b) Conserven conos

$C(i,j,\varepsilon)=\{ f\in C^n[0,1];\ \varepsilon_h D^h f\geq 0$ para $h \in \{i,i+1,\ldots,j\}\}$, con $0\leq i\leq j\leq n$.

Por el Teorema de Korovkin [Ko] conocemos que es imposible dejar invariante $\mathbb{P}_2$ y conservar la positividad. Por tanto fijando las parábolas sólo podemos aspirar a conservar la positividad si esta propiedad no se presenta de forma aislada sino conjuntamente con alguna otra; trataremos por tanto propiedades de forma conjunta.

Un primer resultado mostrará la existencia de una incompatibilidad entre la conservación de ciertos conos y la fijación de un espacio de polinomios.

II.1 Incompatibilidad entre C(i,j,ε) y $\mathbb{P}_{j+2}$

Teorema II.1.1. Sea $K:F \to \mathbb{P}_n$ una aplicación lineal con $\mathbb{P}_{n+1} \subset F \subset C[0,1]$.

Supongamos que K verifica

$$K(\ C(0,j,\varepsilon)) \subset C(j,j,\varepsilon) \text{ para algún } j \leq n-2$$

entonces K no puede fijar $\mathbb{P}_{j+2}$ (y por tanto, tampoco $\mathbb{P}_k$ con $k \geq j+2$).

Nota: En particular el resultado será cierto si $K(C(i,j,\varepsilon)) \subset C(i,j,\varepsilon)$ con $i \leq j$.

Demostración: La idea en que se basa la demostración es similar al razonamiento expuesto anteriomente en I.5 para la positividad y las parábolas.

Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{P}_{j+2}$ es fijo. Ya que $\dim(\ker(K)) \geq 1$, existe un polinomio distinto de cero tal que la imagen mediante K es el polinomio cero y por la suposición anterior tendrá que ser de grado mayor que j+2 . Por tanto, existe un polinomio p de $\mathbb{P}_{n+1}$ tal que $K(p) \equiv 0$ y $\varepsilon_j D^j p(x) \geq M$ para todos los puntos de un entorno $[x_o-\delta, x_o+\delta]$, para ciertos M, $\delta > 0$ y $x_o \in (0,1)$. Por otra parte, existen unas constantes $N_h > 0$ para h=0,1,...,j tales que $|D^h p(x)| \leq N_h$,$\forall x \in [0,1]$.

Sea $q(x) \in \mathbb{P}_{j+2}$ tal que $D^j q(x) = \varepsilon_j((N_j+M/2)(x-x_0)^2/\delta^2-M/2)$ y sucesivamente $D^rq(0)=\varepsilon_r(N_r+Q_r)$ con $Q_r \geq |D^{r+1}q(x)|$ $\forall x \in [0,1]$, con $r=j-1,j-2,..,0$. Si comprobamos que $p+q\in C(0,j,\varepsilon)$, tendremos por hipótesis que $K(p+q) \in C(j,j,\varepsilon)$, pero si queda $\mathbb{P}_{j+2}$ fijo entonces $K(p+q)=q$ que no pertenece a $C(j,j,\varepsilon)$ y se llega a contradicción.

Veamos que $p+q\in C(0,j,\varepsilon)$.

$$\varepsilon_j(D^j(p+q))(x) = \varepsilon_j(D^jp(x)+D^jq(x)) \geq M - M/2 \geq 0 \text{ si } x \in [x_o-\delta,x_o+\delta]$$

Por otra parte si $x \notin [x_o-\delta,x_o+\delta]$ se tiene que

$$\varepsilon_j(D^jp(x)+D^jq(x)) \geq -N_j + N_j = 0$$

Para las derivadas de orden inferior se tiene

$$\varepsilon_r(D^r(p+q))(x) \geq \varepsilon_rD^rp(x) + \varepsilon_r(D^r(q))(0) - \text{máx}|D^{r+1}q| \geq -N_r + N_r + Q_r - Q_r = 0$$

■

II.2. Operadores de Bernstein generalizados.

En el siguiente resultado obtenemos que en las hipótesis del teorema II.1.1 sí es posible fijar P_{j+1}. Para ello construiremos un operador $B_{n,k}$, que llamaremos de Bernstein generalizado y probaremos que conserva todos los conos que el teorema II.1.1 permite.

Teorema II.2.1. Sea $2\leq k\leq n$, el operador $B_{n,k}:C^{k-1}[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ definido por

$$B_{n,k}(f)(x)= Q_{k-2}(f)(x) + \int_{x_0}^{x} \int_{x_1}^{t_{k-1}} \cdots\cdots \int_{x_{k-2}}^{t_2} B_{n-k+1}(D^{k-1}f)(t_1)\, dt_1 \ldots dt_{k-1}$$

con $x_i=(1-\varepsilon_i\varepsilon_{i+1})/2$ para $i=0,\ldots,k-2$, $Q_{k-2}(f)\in \mathbb{P}_{k-2}$ tal que $D^h Q_{k-2}(f)(x_h)=D^h f(x_h)$

$h=0,..,k-2$ y B_{n-k+1} el operador de Bernstein de grado $n-k+1$,

verifica

1) Si $f\in \mathbb{P}_k$ entonces $B_{n,k}(f)=f$

2) Conserva los conos $C(i,j,\varepsilon)$ con $i\leq j$, $j\geq k-1$.

Comentarios: Para $k=1$ ya se tiene el operador de Bernstein que cumple también las propiedades 1) y 2), por tanto el operador anterior puede considerarse una extensión del de Bernstein.

Por otra parte, el polinomio de interpolación que ha de construirse Q_{k-2} responde a un problema del tipo Abel-Gontscharoff y es unisolvente (Ver por ejemplo Davis [D]).

Demostración: 1) Sea $f\in \mathbb{P}_k$ entonces $D^{k-1}B_{n,k}(f)=B_{n-k+1}D^{k-1}f=D^{k-1}f$ y por los datos que se interpolan $B_{n,k}(f)=f$.

2) Sea en primer lugar el cono $C(j,j,\varepsilon)$ con $j\geq k-1$.

Si $D^jf\geq 0$, entonces $D^{j-k+1}g\geq 0$ con $g=D^{k-1}f$, luego $D^jB_{n,k}(f)=D^{j-k+1}B_{n-k+1}(g)\geq 0$.

Veamos ahora los conos $C(i,k-1,\varepsilon)$.

Para $i=k-1$ está demostrado y, en general por recurrencia supuesto para $i+1$ se puede demostrar para i.

Así, se tiene que si $\varepsilon_h D^h f \geq 0$ $\forall h \in \{i,\ldots,k-1\}$, entonces $\varepsilon_h D^h B_{n,k}(f) \geq 0$ $\forall h \in \{i+1,\ldots,k-1\}$. Además

$$\varepsilon_i D^i B_{n,k}(f)(x) = \varepsilon_i D^i B_{n,k}(f)(x_i) + \varepsilon_i \int_{x_i}^{x} D^{i+1} B_{n,k}(f) = \varepsilon_i D^i f(x_i) + \varepsilon_i \left(\int_{x_i}^{x} D^{i+1} B_{n,k}(f) \right) \geq 0$$

dado que si $x_i=0$ entonces $\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}$ y por tanto $\varepsilon_i\, D^{i+1} B_{n,k}(f) \geq 0$, y en cambio si $x_i=1$ entonces $\varepsilon_i=-\varepsilon_{i+1}$ y $\varepsilon_i\, D^{i+1} B_{n,k}(f) \leq 0$.

El resto de los conos se obtienen como intersecciones de los dos tipos anteriores.

■

II.3. Polinomios propios y valores propios de los operadores conservativos.

Los operadores de Bernstein generalizados $B_{n,k}$ pueden ser caracterizados en función de sus valores propios de forma similar a la caracterización del operador de Bernstein mediante el teorema de Berens y DeVore ya citado. Para la extensión de este resultado necesitamos estudiar algunas propiedades relativas a los polinomios y valores propios de los operadores que estamos considerando.

Propiedad II.3.1. Si K: $C(X) \rightarrow \mathbb{P}_n$ es un OPL y existe k con $0 \leq k \leq n-2$ que verifica

a) $K(f)=f$, $\forall f\in \mathbb{P}_k$.

b) Conserva el signo de la derivada j-ésima para $j=k+2,..,n$.

En estas condiciones K no aumenta el grado de los polinomios.

Demostración . Sea $p\in \mathbb{P}_j$ con $j>k \Rightarrow D^{j+1}p = 0 \Rightarrow$ (por conservar K la (j+1)-convexidad) $\Rightarrow D^{j+1}K(p) = 0 \Rightarrow K(p)\in \mathbb{P}_j$

■

En las condiciones anteriores el polinomio x^j se transformará por K en

$$K(x^j) = \lambda_j x^j + \text{ potencias de menor grado}$$

Propiedad II.3.2. Si $K:C[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ es un operador polinomial lineal verificando

a) $K(f)=f$, $\forall f\in \mathbb{P}_k$.

b) Conserva la j-convexidad para $j=k,...,n$

Entonces los valores propios λ_j del operador K verifican que

$$1=\lambda_0(K)=\lambda_1(K)=...=\lambda_k(K) \geq \lambda_{k+1}(K)\geq\lambda_{k+2}(K)\geq...\geq\lambda_n(K)\geq 0$$

Demostración: La demostración se basa en la realizada por Berens y DeVore [B-D] para $k=1$.

Sea $e_j(x)=x^j/(j!)$, por la propiedad II.3.1 se tiene que

$$K(e_j)= \lambda_j e_j + a_{j-1j}e_{j-1} +...+a_{0j}e_0$$

Tomando $j \geq k$ y dado que $D^h e_j(x) \geq 0$ en $[0,1]$ para $h=k,\ldots,n$, se tiene que $D^h K(e_j) \geq 0$ en $[0,1]$ y por tanto $\lambda_j, a_{j-1j},\ldots,a_{kj} \geq 0$ para todo $j \geq k$. Además, $D^j(e_j - e_{j+1}) \geq 0$ luego $\lambda_j - (\lambda_{j+1} x + a_{jj+1}) \geq 0$ en $[0,1]$ y por tanto para $x=1$,

$$\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq a_{jj+1} \geq 0, \text{ para todo } j \geq k.$$

■

Teorema II.3.3. Si un operador lineal $K: C[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ fija $\mathbb{P}_k$ y conserva las i-convexidades para $i=k-1,k,\ldots,n$, entonces existe una sucesión de polinomios propios $\{h_i\}$ con $i=0,\ldots,n$ y $gr(h_i)=i$.

Demostración: K restringido a $\mathbb{P}_n$ es una aplicación lineal que en la base canónica tiene una matriz triangular superior. En la diagonal principal se encuentran los valores propios λ_j de K. Los primeros k+1 son iguales a 1, el valor propio k+2 es menor que 1 por la extensión del teorema de Berens y DeVore, teorema II.4.1., que se verá posteriormente. El problema surge si se repite el mismo valor propio.

Supongamos que $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+h}$, en este caso demostraremos que para $p=1,\ldots,h$ y $q=p,\ldots,h$ se cumple que $a_{j+q-p,j+q}=0$. Por tanto al diagonalizar obtendremos h polinomios propios para λ_j y podemos escoger cada uno de un grado distinto.

Para $p=1$, $D^{j+q-1}(e_{j+q-1}(x) - e_{j+q}(x)) = 1-x \geq 0$ en $[0,1]$, luego $D^{j+q-1}K(e_{j+q-1} - e_{j+q}) = \lambda_j - (\lambda_j x + a_{j+q-1,j+q}) \geq 0$ en $[0,1]$. Por tanto, para $x=1$ se tiene que - $a_{j+q,j+q-1} \geq 0$, pero como debe ser positivo, según se vio en el teorema anterior se tiene que $a_{j+q-1,j+q}=0$ para q=1,...,h.

Apliquemos inducción sobre p, para ello, supongámoslo cierto hasta p-1 y demostrémoslo para p. $D^{j+q-p}(e_{j+q-p} - p!e_{j+q}) = 1 - x^p \geq 0$ en [0,1]. Luego $D^{j+q-p}K(e_{j+q-p}-p!e_{j+q}) = (\lambda_j - p!(\lambda_j x^p/p! + a_{j+q-1,j+q}x^{p-1}/(p-1)! + ...+a_{j+q-p,j+q})) = \lambda_j - p!(\lambda_j x^p/p! + a_{j+q-p,j+q}) \geq 0$ en [0,1] y evaluando en 1 se tiene $-p!\, a_{j+q-p,j+q} \geq 0$. Luego $a_{j+q-p,j+q} = 0$ para q=p,..,h

■

No es cierto, en general, que un operador polinomial lineal que fije $\mathbb{P}_k$ y que conserve las i-convexidades desde i=k,...,n tenga n+1 polinomios propios. Así por ejemplo, sea el operador lineal $K(f) = f(0) + f[0,0.5,1] + Df(0)(x-x^2/2) + Df(1)x^2/2$. Este operador fija $\mathbb{P}_1$ y conserva el crecimiento y la convexidad; sin embargo sólo existen dos polinomios propios linealmente independientes, que son por ejemplo 1 y x.

No obstante, se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema II.3.4. Si un operador fija $\mathbb{P}_0$ y conserva todas las i-convexidades entonces existe una sucesión de polinomios propios $\{h_i\}$ con i=0,...,n y $gr(h_i)=i$.

Demostración: El problema vendría cuando el segundo valor propio fuese también 1, pero en este caso basta considerar la imagen de los polinomios x y 1-x. Las imágenes serían $x + a_{01}$ y $1-(x+a_{01})$, y para que sean positivas en [0,1] es necesario que a_{10} sea 0 con los que las rectas quedarían fijas y se aplicaría el resultado anterior.

■

II.4. Caracterización de los operadores de Bernstein generalizados. Extensión del Teorema de Berens y DeVore.

Los operadores de Bernstein generalizados $B_{n,k}$ poseen valores propios, λ_i, iguales a 1 desde i=0 hasta i=k, mientras que para i>k, λ_i es el valor propio i-k+1 del operador de Bernstein B_{n-k+1}. En cierto sentido la velocidad de convergencia de sucesiones de este tipo de operadores depende de los valores propios; por ello es interesante su estudio. Aunque necesitaremos para la demostración resultados que veremos en la próxima sección podemos adelantar la extensión del resultado de Berens y DeVore referente al operador de Bernstein.

Teorema II.4.1. Sea $K:C^{k-1}[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ un operador polinomial lineal con k<n y verificando

a) $K(f)=f$, $\forall f\in \mathbb{P}_k$

b) Conserva los conos $C(i,j,\varepsilon)$, con $j\geq k-1$.

Entonces

i) $\lambda_{k+1}(K) \leq 1 - 1/(n-k+1)$.

ii) Si en i) se dé la igualdad se tiene que $K(f)=B_{n,k}(f)$.

Demostración. Ver final de la sección II.5.

■

II.5 Propiedades de interpolación.

En esta sección caracterizaremos los datos que tienen que interpolar ciertos operadores monótonos. Para ello veamos previamente algunas propiedades.

Lema II.5.1. Sea $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}$ creciente y sea el funcional $L(f) = \int_0^1 f\, d\alpha$, verificando $L(1)=1$. Entonces

a) Si $L(x^n)=0$ para algún $n>0$ entonces $L(f)=f(0)$ para toda función continua.

b) Si $L(x^n)=1$ para algún $n>0$ entonces $L(f)=f(1)$ para toda función continua.

Demostración: a) Sea $L(x^n)=0$ para algún $n>0$.

$$0\geq \int_\varepsilon^1 x^n\, d\alpha \geq \varepsilon^n \int_\varepsilon^1 d\alpha \geq 0 \ , \ \forall\, \varepsilon \in (0,1]$$

Luego $\int_\varepsilon^1 d\alpha = 0 \ , \ \forall\, \varepsilon \in (0,1] \Rightarrow \alpha$ es constante en $(0,1]$

Por ser $\int_0^1 d\alpha = 1 \Rightarrow d\alpha = d\delta_0$ (Delta de Dirac en el punto 0)$\Rightarrow$ L(f)=f(0) para toda función continua.

b) Sea $L(x^n)=1$ para algún n>0.

$$0 \geq \int_0^\varepsilon (1-x^n)\, d\alpha \geq (1-\varepsilon^n) \int_0^\varepsilon d\alpha \geq 0\ , \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1]$$

Luego $\int_0^\varepsilon d\alpha = 0$, $\forall\, \varepsilon \in [0,1)$ $\Rightarrow$ α es constante en [0,1)

Por ser $\int_0^1 d\alpha = 1 \Rightarrow d\alpha = d\delta_1$ (Delta de Dirac en el punto 1)$\Rightarrow$ L(f)=f(1) para toda función continua.

■

Lema II.5.2. Sea $K:C[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ un operador polinomial lineal. Sea $\|f\|=\text{máx}\{|f(x)|\}$. Supongamos que

$\forall f \in C[0,1]$ tal que $f\geq 0$ entonces $K(f)\geq 0$ en [0,1]

En estas condiciones K se puede representar como

$K(f)(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i(f)\, b_{n,i}(x)$ con $a_i(f) = \int_0^1 f\, d\alpha_i$, donde $\alpha_i \in$ BV (Funciones de variación acotada)

Demostración: K es continuo por el teorema I.4.3.

Sea $a_i(f)$ el coeficiente i-ésimo de K(f) en la base de Bernstein. Se trata de una aplicación lineal y continua de $C[0,1]$ en $\mathbb{R}$, entonces (ver por ejemplo Friedman [F]) existe $\alpha_i \in BV$ tal que $a_i(f) = \int_0^1 f\, d\alpha_i$, para toda $f \in C[0,1]$

■

En su trabajo, Berens y DeVore demuestran que los operadores de la clase que estudian tienen que interpolar los valores de cualquier función continua en los extremos 0 y 1.Concretamente obtienen el siguiente resultado.

Teorema II.5.3 (Berens y DeVore). Si $K:C[0,1]\mapsto \mathbb{P}_n$ verifica

a) $\forall f \in C[0,1]$ tal que $f \geq 0$ entonces $K(f) \geq 0$ en $[0,1]$

b) $\forall f \in \mathbb{P}_1$ se tiene que $K(f)=f$

Entonces $K(f)(0)=f(0)$ y $K(f)(1)=f(1)$, $\forall f \in C[0,1]$.

Demostración: Por el teorema I.4.3 se tiene que K es continuo con la norma del máximo.

Por el lema II.5.2 el operador K se puede representar como

$$K(f)(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i(f)\, b_{n,i}(x) \text{ con } a_i(f) = \int_0^1 f\, d\alpha_i \text{ donde } \alpha_i \in BV$$

Finalmente, $a_0(f)$ y $a_n(f)$ son positivos para toda f positiva y $a_0(1)=a_n(1)=1$,

$a_0(x)=0$ y $a_n(x)=1$. Por el lema II.5.1 se tiene que $a_0(f)=f(0)$ y $a_n(f)=f(1)$, $\forall f \in C[0,1]$

■

Otra demostración de este resultado, más gráfica, sería la siguiente (Ver figura II.5.4.

Demostración: Realizaremos la demostración para el punto 0, si bien se haría de forma análoga para el punto 1.

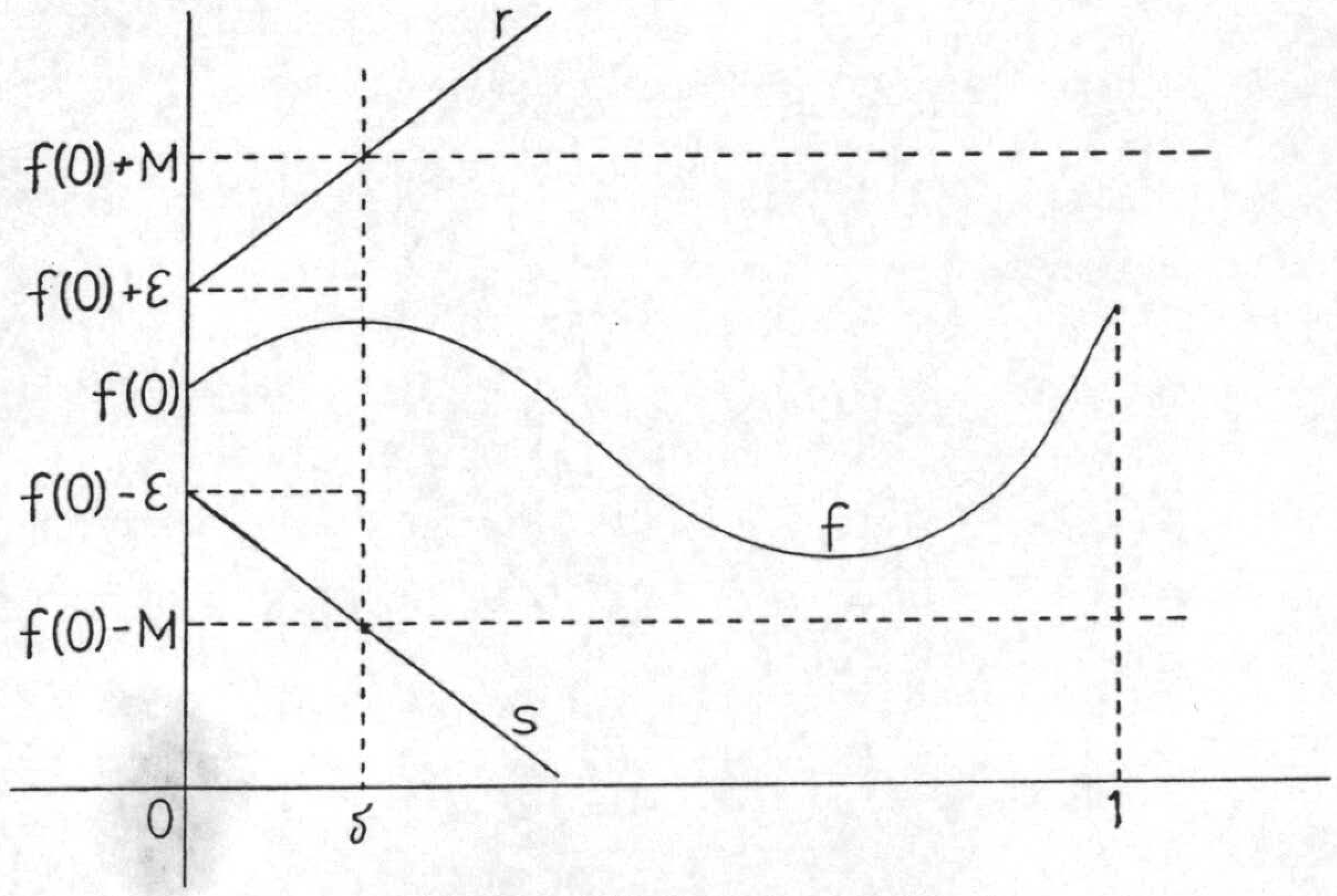

Figura II.5.4.

Sea f una función continua en [0,1]. Por la continuidad de f y la compacidad de [0,1] existe una constante M tal que $|f(x)-f(0)| < M$, además por la continuidad de f para cualquier valor de $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $x<\delta$ entonces $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

Consideremos dos rectas r y s que vendrán determinadas por sus valores en 0 y en δ, siendo estos $f(0)+\varepsilon$, $f(0)+M$ y $f(0)-\varepsilon$, $f(0)-M$ respectivamente. Las funciones r-f y f-s son positivas, por tanto sus imágenes lo serán y en particular en el punto cero se obtiene que $f(0)+\varepsilon \geq K(f)(0) \geq f(0)-\varepsilon$. Dado que se verifica la desigualdad para valores de ε tan pequeños como se desee, concluimos que $K(f)(0)=f(0)$.

■

Hemos construido dos rectas que en el punto cero están tan próximas a la función como deseemos y están por encima y por debajo respectivamente de la gráfica de la función escogida.

Un resultado más general sobre interpolación nos lo proporciona el siguiente teorema.

Teorema II.5.5. Sea $K:C^j[0,1]\to \mathbb{P}_n$ un operador lineal que verifica $K(f)=f$, $\forall f\in V$.

1) Si $K(C(i,j,\varepsilon))\subset C(k,k,\varepsilon)$, para algún k tal que $i\leq k\leq j-1$, y $V=<x^i,\ldots,x^j>$ entonces:

$$\forall f\in C^j[0,1] \quad D^kf(x_k)=D^kK(f)(x_k) \text{ con } x_k=(1-\varepsilon_k\varepsilon_{k+1})/2.$$

2) Si $K(C(0,j,\varepsilon)) \subset C(j,j,\varepsilon)$ y $V=<x^i,...,x^{j+1}>$, entonces:

$$\forall f\in C^j[0,1] \quad D^jK(f)(1)=D^jf(1) \text{ y } D^jK(f)(0)=D^jf(0)$$

3) Además, si $K(C(i,j,\varepsilon))\subset C(j,j,\varepsilon)$ y $V=<x^i,...,x^j>$ se tiene que

$$\|D^jK(f)\|_\infty \leq \|D^jf\|_\infty$$

Comentarios: Por ejemplo, podemos concluir que si $\mathbb{P}_2$ es fijo entonces un OPL que conserve alguna de las propiedades siguientes tiene que interpolar los datos que se relacionan:

SI CONSERVA:	TIENE QUE INTERPOLAR:
Positividad y crecimiento	$f(0)$, $Df(0)$ y $Df(1)$
Positividad y decrecimiento	$f(1)$,$Df(0)$ y $Df(1)$
Positividad, crecimiento y convexidad	$f(0)$,$Df(0)$
Positividad ,decrecimiento y convexidad	$f(1)$,$Df(1)$
Positividad, crecimiento y concavidad	$f(0)$,$Df(1)$
Crecimiento	$Df(0)$,$Df(1)$
Crecimiento y convexidad	$Df(0)$
Crecimiento y concavidad	$Df(1)$

Demostración:

1) Sea $f\in C^j[0,1]$ y sea $r(x)\in<x^i,...,x^{j-1}>$ tal que $D^hr(x_h)=D^hf(x_h)$ para $h=i,...,j-1$.

Sea $s(x)\in V$ tal que $D^h s(x_h)=0$, para $h=i,\dots,j-1$ y $D^j s=M\varepsilon_j$ con $M=\text{máx}|D^j f(x)|$

Definimos $w_1(x)=s+r-f$ y $w_2(x)=f+s-r$. Para estas funciones se verifica $\varepsilon_j D^j w_t(x)\geq 0$ con $t=1,2$.

Por recurrencia se tiene que, supuesto $\varepsilon_{h+1}D^{h+1}w_t(x)\geq 0$ para $t=1,2$.

Entonces, por un razonamiento análogo al del teorema II.2.1

$$\varepsilon_h D^h w_t(x) = \varepsilon_h D^h w_t(x_h) + \int_{x_h}^{x} \varepsilon_h D^{h+1} w_t \geq 0$$

Aplicando la hipótesis se tiene que $\varepsilon_k D^k K(w_t)(x)\geq 0$ para $t=1,2$, luego

$$\varepsilon_k D^k K(w_1)(x_k)=\varepsilon_k(D^k s(x_k)+D^k r(x_k)-D^k K(f)(x_k))=$$

$$= \varepsilon_k(D^k f(x_k)-D^k K(f)(x_k))\geq 0$$

$$\varepsilon_k D^k K(w_2)(x_k)=\varepsilon_k(D^k K(f)(x_k) + D^k s(x_k) - D^k r(x_k))=$$

$$= \varepsilon_k(D^k K(f)(x_k)-D^k f(x_k))\geq 0$$

Por tanto $D^k K(f)(x_k)=D^k f(x_k)$.

3) Además, si se cumple $K(C(i,j,\varepsilon))\subset C(j,j,\varepsilon)$, se tiene que

$$\varepsilon_j D^j K(w_1)(x)=\varepsilon_j(M\varepsilon_j - D^j K(f)(x))\geq 0$$

$$\varepsilon_j D^j K(w_2)(x)=\varepsilon_j(M\varepsilon_j + D^j K(f)(x))\geq 0$$

De donde $M=\text{máx}|D^j f(x)| \geq |D^j K(f)(x)|$.

2) Para el caso j=0 está demostrado. Veamos el caso general.

Sean $x_h=(1-\varepsilon_h\varepsilon_{h+1})/2$, $\forall h\in\{0,1,...,j-1\}$

Sea $L(g)(x) = D^j[\,K(\int_{x_0}^{x}\int_{x_1}^{t_j}.....\int_{x_{j-1}}^{t_2} g(t_1)\,dt_1...dt_j]$

L(g) es un operador polinomial lineal que lleva funciones positivas en funciones positivas y fija $\mathbb{P}_1$. Por tanto L interpola a toda función continua en 0 y en 1. De donde se obtiene que K debe interpolar la derivada j-ésima en 0 y en 1.

■

Estamos ahora en condiciones de demostrar la extensión que vimos en II.4 del teorema de Berens y DeVore .

Demostración del Teorema II.4.1:

Para k=1 es el Teorema de Berens y DeVore

Para k>1

$L(g)(x) = D^{k-1}\,K\,(\int_0^x \int_0^{t_{k-1}}.....\int_0^{t_2} g(t_1)\,dt_1...dt_{k-1})$

L es un operador polinomial lineal que verifica

i) $\forall g\in C^{n-k+1}[0,1]$ tal que $D^h g\geq 0$ para algún $h\in\{0,..,n-k+1\} \Rightarrow D^h\,L(g)\geq 0$

en [0,1].

ii) $\forall g \in \mathbb{P}_1 \Rightarrow L(g)=g$

Con estas condiciones aplicamos el Teorema de Berens y DeVore y obtenemos que

$\lambda_2(L) \le \lambda_2(B_{n-k+1}) = 1 - 1/(n-k+1)$

Además, si en la desigualdad anterior se da la igualdad entonces $L=B_{n-k+1}$

Por tanto $\lambda_{k+1}(K)= \lambda_2(L) \le \lambda_2(B_{n-k+1}) = \lambda_{k+1}(B_{n,k}) = 1 - 1/(n-k+1)$. Es decir,

$\lambda_{k+1}(K) \le 1 - 1/(n-k+1)$

Si se alcanza la igualdad en esta expresión entonces, $\lambda_2(L) = \lambda_2(B_{n-k+1})$ y por tanto $L=B_{n-k+1}$.

Sea $f\in C^{k-1}[0,1]$ y $g=D^{k-1}f$, entonces $L(g)=D^{k-1}K(f)=B_{n-k+1}(g)= =B_{n-k+1}(D^{k-1}f)=D^{k-1}B_{n,k}(f)$. Luego $K(f)-B_{n,k}(f) \in \mathbb{P}_{k-2}$, $\forall f \in C^{k-1}[0,1]$, pero por el teorema II.5.5 tanto $B_{n,k}$ como K tienen que interpolar a la derivada h-ésima de la función en el punto x_h, con $h=0,1,\ldots,k-2$, $D^h(K(f) - B_{n,k-1}(f))(x_h)=0$, luego $K(f)=B_{n,k}(f)$.

■

Nuestro interés ahora está en mostrar que sólo esos datos pueden interpolarse. Para ello veamos antes unas propiedades.

II.6. Caracterización de los datos interpolados.

En este apartado intentamos demostrar que para la clase de operadores con mayores propiedades conservativas los datos que se interpolan sólo son aquellos que el teorema anterior indica. De esta forma en la "buena aproximación" tiene que entrar la interpolación, pero en su justa medida, ni más ni menos.

Teorema II.6.1. Sea $K:C^{k-1}[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ un operador polinomial lineal verificando

a) $K(f)=f$, $\forall f\in \mathbb{P}_k$

b)$K(C(i,j,\varepsilon))\subset C(i,j,\varepsilon)$, para todo $j\geq k-1$

En estas condiciones K no puede interpolar más datos que $D^{k-1}f(0)$, $D^{k-1}f(1)$ y $D^h f(x_h)$ con $h=0,..,k-2$, siendo $x_h=(1-\varepsilon_h\varepsilon_{h+1})/2$

Demostración. Supongamos que K interpola otro dato más $D^rK(f)(\alpha)=D^rf(\alpha)$ $\forall f\in C^n[0,1]$.

Según los posibles valores de r podemos estudiar los siguientes casos:

Sea $r\geq k+1$, en este caso consideramos $f(x)=x^r$, entonces $D^rK(f)(\alpha) = r!\ \lambda_r =$ $= D^rf = r!$ de donde $\lambda_r=1$, pero esto no es posible por la propiedad II.3.2 y el

Teorema II.4.1.

Sea $r \leq k-1$, en este caso $\mathbb{P}_{k+1}$ quedaría fijo pues la propiedad II.3.1 nos dice que K no puede aumentar el grado de los polinomios y los k+2 datos que interpola K son unisolventes en $\mathbb{P}_{k+1}$. Llegamos otra vez a una contradicción.

Sea r=k, distinguimos dos casos

Si $\alpha \neq 1/2$ entonces el problema vuelve a ser unisolvente en $\mathbb{P}_{k+1}$ lo que nuevamente nos lleva a una contradicción.

Queda sólo el caso $\alpha=1/2$, consideremos $f(x)=x^{k+2}$, tendríamos que

$K(f)(x)=\lambda_{k+2}x^{k+2} + a\, x^{k+1} + bx^k + cx^{k-1} + \ldots$

Por interpolar la derivada (k-1)-ésima en cero y en uno, y la derivada k-ésima en 1/2 se tiene que c=0 y

$(k+2)!\,/\,3! = \lambda_{k+2}\,(k+2)!\,/\,3! + a\,(k+1)!\,/\,2! + b\,k!$

$(1/4)(k+2)!\,/\,2! = \lambda_{k+2}\,(1/4)(k+2)!\,/\,2! + a\,(1/2)(k+1)!\,/\,1! + b\,k!$

Restando las dos igualdades anteriores llegamos a

$(k+2)!(1/6 - 1/8) = \lambda_{k+2}\,(k+2)!\,(1/6 - 1/8) \Rightarrow \lambda_{k+2} = 1$

Lo que supone una contradicción con la propiedad II.3.2 y el teorema II.4.1

■

II.7. Otras incompatibilidades

Como consecuencia de los resultados de interpolación se obtiene un resultado de incompatibilidad entre la conservación de unos conos y de otros.

Teorema II.7.1. Si $K:C^k[0,1]\to \mathbb{P}_n$ es un operador polinomial lineal verificando

a) $K(f)=f$, $\forall f\in \mathbb{P}_k$

b) $K(C(i,j,\varepsilon)) \subset C(i,j,\varepsilon)$ para $i\le j$, $j\ge k-1$.

c) K conserva el cono $C(h,k-1,\varepsilon^*)$ para algún h, $0\le h\le k-1$ y ciertos valores de ε^*_i.

En estas condiciones se tiene que

$$C(h,k-1,\varepsilon)=C(h,k-1,\varepsilon^*) \text{ ó } C(h,k-1,\varepsilon)=-C(h,k-1,\varepsilon^*)$$

Demostración. Las propiedades de interpolación obligan a que los puntos x_j sean los mismos para los dos conos, con lo que los signos son todos iguales o todos distintos.

■

III. CONOS ARBITRARIOS

Una vez realizado el estudio de algunas cuestiones sobre la conservación de los conos con i-convexidades consecutivas pasaremos a estudiar la conservación de i-convexidades no consecutivas de forma conjunta.

III.1 Introducción. Ejemplos.

El estudio de este tipo de conos se hace de modo independiente porque las propiedades de los operadores lineales que los conservan son diferentes de las propiedades de los OPL que conservan conos con propiedades consecutivas. Como ilustración de las diferencias existentes veamos algunos ejemplos.

Ejemplo III.1.1: La conservación de la positividad y la convexidad no permite fijar los polinomios de $\mathbb{P}_2$ pero sí los de $\mathbb{P}_1$.

El operador de Bernstein conserva las dos propiedades de forma individual y por tanto conjuntamente, además de mantener fijos los polinomios de $\mathbb{P}_1$.

No es posible fijar $\mathbb{P}_2$ conservando positividad y convexidad conjuntamente. Una forma rápida de comprobarlo consiste en tomar una función cualquiera de clase 2 y para cada punto del intervalo $[0,1]$ construimos dos parábolas tan próximas a la función como deseemos, una por encima y otra por debajo de la gráfica, y de modo que tengan una gran convexidad y una gran concavidad respectivamente. La diferencia entre la primera parábola y la función y la diferencia entre la función y la segunda parábola serían positivas y convexas. Así un OPL que fije las parábolas y conserve positividad y convexidad tendría que ser la identidad.

■

Ejemplo III.1.2. La conservación de la positividad y la concavidad permite fijar los polinomios de $\mathbb{P}_3$.

El operador definido sobre las funciones de clase 2 sobre $\mathbb{P}_3$ que interpola los valores de la función y derivada segunda en 0 y 1, mantiene fijos los polinomios de $\mathbb{P}_3$ y conserva la positividad y la concavidad.

■

Ejemplo III.1.3. La conservación de la positividad y la 3-convexidad sólo permite fijar los polinomios de $\mathbb{P}_2$, pero no los de $\mathbb{P}_3$.

Consideremos el operador que lleva a cada función de clase 1 en el polinomio que en cero vale f(0) y cuya derivada es el polinomio de Bernstein aplicado a la función derivada. Este operador fija $\mathbb{P}_2$ y conserva positividad y 3-convexidad conjuntamente.

Veremos más adelante que no es posible fijar los polinomios de $\mathbb{P}_3$ conservando al mismo tiempo este cono.

■

Ejemplo III.1.4. La conservación de la positividad y la 3-concavidad permite fijar hasta $\mathbb{P}_2$.

El operador que a cada función de clase uno le asigna el polinomio que en 1 vale f(1) y cuya derivada es el polinomio de Bernstein asociado a la derivada de la función f, fija $\mathbb{P}_2$ y conserva positividad y 3-concavidad.

Veremos que no pueden quedar fijos todos los polinomios de $\mathbb{P}_3$.

■

Si analizamos los ejemplos expuestos, observamos lo importante y decisivo que es el signo correspondiente a la derivada a conservar. Así en el ejemplo III.1.1 sólo es posible fijar $\mathbb{P}_1$ y sin embargo al cambiar convexidad por concavidad, ejemplo III.1.2, se tiene que es posible fijar $\mathbb{P}_3$. Esto no ocurría en los conos con propiedades consecutivas donde el espacio de polinomios que permanecía fijo sólo dependía del orden de la propiedad más alta.

Por el contrario, comparando el ejemplo III.1.3 con el III.1.4 vemos que el espacio de polinomios fijos es el mismo aunque hemos cambiado el signo de la 3-convexidad. Es decir, la diferencia que aparecía entre el ejemplo III.1.1 y el III.1.2 no aparece entre el ejemplo III.1.3 y el III.1.4.

Por otra parte comparando el ejemplo III.1.2 con el III.1.4 se ve que al pasar de la concavidad a la 3-convexidad negativa no aumenta el espacio de polinomios. En el caso de propiedades consecutivas al pasar de una propiedad a otra superior se aumentaba el espacio de polinomios que quedaba fijo.

Otra diferencia entre el caso consecutivo y el arbitrario se produce dentro de las propiedades de interpolación. Al considerar un cono de propiedades consecutivas y un operador polinomial lineal que lo conserve al tiempo que fije el espacio de polinomios de mayor grado posible siempre obteníamos unas propiedades de interpolación. Como veremos más adelante un operador polinomial lineal que conserve el cono de las funciones positivas y convexas sólo puede dejar fijos los polinomios de $\mathbb{P}_1$ y para ello no es necesario interpolar ningún dato.

En efecto, consideremos el operador $K(f) = B_n(f) + f[0,1/2,1]$ que es lineal, fija las rectas, lleva funciones positivas y convexas en funciones positivas y convexas, y que sin embargo no interpola ningún dato de la función f.

Quedan, pues, de manifiesto algunas de las diferencias entre la conservación de i-convexidades consecutivas y las arbitrarias.

III.2 Incompatibilidades.

De forma análoga a lo expuesto sobre conos consecutivos, debemos fijar unos signos de las derivadas con objeto de determinar de modo preciso las propiedades que vamos a conservar en cada cono arbitrario.

Sea $\varepsilon=\{\varepsilon_i\}$ una sucesión con $\varepsilon_i=\pm 1$ y $\delta=\{\delta_i\}$ con $\delta_i=0$ ó ε_i para $i=0,\dots,n$

Nos proponemos estudiar la conservación de conos de la forma

$$C(\varepsilon,\delta)=\{f \in C^n[0,1] \text{ con } \delta_i D^i f \geq 0 \text{ para } i=0,\dots,n\}.$$

Aunque podría expresarse sólo en función de δ es útil la notación (ε,δ)

Teorema III.2.1. Sea $K:F \rightarrow \mathbb{P}_n$ una aplicación lineal con $\mathbb{P}_{n+1} \subset F \subset C^n[0,1]$.

Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_j \neq 0$ pero $\delta_h=0$ para $h=j+1,j+2,\dots,n$.

Supongamos que K verifica $K(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(j,j,\varepsilon)$.

En estas condiciones K no puede fijar $\mathbb{P}_{j+2}$

Nota: En particular el resultado será cierto si $K(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(\varepsilon,\delta)$.

Demostración. Es consecuencia del Teorema II.1.1

■

Teorema III.2.2. Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i \neq 0$ y $\delta_j \neq 0$ pero $\delta_h = 0$ para $h=0,1,\dots,i-1,j+1,j+2,\dots,n$, y también que existe r, $i<r<j$, tal que $\delta_r=0$ con $\delta_{r-1} = \varepsilon_{r+1} = 1$.

Sea $K: F \to \mathbb{P}_n$ una aplicación lineal con $\mathbb{P}_{n+1} \subset F \subset C[0,1]$ tal que $K(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(r-1,r-1,\varepsilon)$.

En estas condiciones K no puede fijar $\mathbb{P}_j$.

Nota: En particular el resultado será cierto si $K(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(\varepsilon,\delta)$.

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{P}_j$ es fijo. Ya que $\dim(\ker(K)) \geq 1$, existe un polinomio distinto de cero tal que la imagen mediante K es el polinomio cero y por la suposición anterior tendrá que ser de grado mayor que r. Por tanto, existe un polinomio p de $\mathbb{P}_{n+1}$ tal que $K(p)=0$ y $\varepsilon_{r-1} D^{r-1} p(x) \geq M$ para todos los puntos de un entorno $[x_o-\delta, x_o+\delta]$, y para ciertos M, $\delta > 0$ y $x_o \in (0,1)$. Por otra parte, existen $N_h > 0$ para $h=0,1,\dots,n$ tales que $|D^h p(x)| \leq N_h \; \forall x \in [0,1]$.

Sea $q(x) \in \mathbb{P}_j$ tal que $D^j q(x) = \varepsilon_j N_j$ y sucesivamente $D^h q(0) = \varepsilon_h (N_h + Q_h)$ con $Q_h \geq |D^{h+1} q(x)|$, $\forall x \in [0,1]$, con $h = j-1, j-2, \dots, r+1$. Obtenemos así que $D^{r+1} q(x) \geq N_{r+1}$, luego $D^{r-1} q$ será una función convexa estrictamente por lo que se puede escoger para que $D^{r-1}\,q(x_0)=0<D^{r-1}\,q(x)\ \forall x \in [0,1]-\{x_0\}$.

Consideramos ahora $q^*(x)$ un polinomio de $\mathbb{P}_j$ tal que

$$D^{r-1}q^* = A\,D^{r-1}q - M/2,$$

tomando A suficientemente grande para que $D^{r-1}(q^*+p)\geq 0$. Finalmente para $h=r-2, r-3,\ldots,0$, $D^h q^*(0)=\varepsilon_h(N_h+Q_h)$ con $Q_h \geq |D^{h+1}\,q^*|$. Puede verse que $p+q^* \in C(\varepsilon,\delta)$, por hipótesis $K(p+q^*) \in C(r-1,r-1,\varepsilon)$, pero si queda $\mathbb{P}_j$ fijo entonces $K(p+q^*)=q^* \notin C(r-1,r-1,\varepsilon)$ y se llega a contradicción.

■

Resulta interesante destacar cómo al trabajar sobre conos no consecutivos se presentan casos en los que el espacio de polinomios que puede quedar fijos no es $\mathbb{P}_{j+1}$ ni siquiera $\mathbb{P}_j$. Esto ocurre cuando existe un valor de r, $i<r<j$ tal que $\delta_r=0$ con $\delta_{r-1}=1=\varepsilon_{r+1}$, es decir, cuando hay un salto de más de una propiedad o bien salto de una sóla propiedad pero sin cambios de signo. La primera circunstancia aparece en los ejemplos III.1.3 y III.1.4, la segunda en el ejemplo III.1.1.

III.3. Operadores de Bernstein generalizados para conos arbitrarios.

A través del estudio realizado, hemos detectado unos obstáculos para la conservación de unos conos y la fijación de un espacio. A continuación, lo que nos interesa es comprobar si es posible llegar hasta donde el teorema anterior permite. Para ello construiremos unos operadores que tengan esas propiedades. Al igual que en el caso consecutivo, los operadores que construimos estarán basados en el operador de Bernstein.

Son dos las situaciones objeto de nuestro estudio:

1) Aquellos conos que presentan saltos de una sola propiedad y cambio de signo, es decir, donde $\delta_i \neq 0$ y $\delta_j \neq 0$ pero $\delta_h = 0$ para $h=0,1,\dots,i-1,j+1,j+2,\dots,n$, y tal que $\delta_h = 0$ implica $\delta_{h-1}\delta_{h+1} = -1$, para $i+1 \leq h \leq j-1$

2) Los conos que tienen saltos de más de una propiedad o de una sola pero sin cambio de signo. Es decir, donde $\delta_i \neq 0$ y $\delta_j \neq 0$, pero $\delta_h = 0$ para $h=0,1,\dots,i-1$, $j+1,j+2,\dots,n$, y también que existe un valor de r con $i<r<j$ con $\delta_r = 0$ y tal que $\delta_{r-1} = \varepsilon_{r+1} = 1$.

Para el primer tipo de conos el teorema III.2.1. obliga a que el espacio de polinomios que puede quedar fijo es, como máximo, $\mathbb{P}_{j+1}$. Un proceso con el que construir un operador conservando esta clase de conos es el siguiente: Se considera $D^jK(f) = B_{n-j}(D^jf)$. Para el cálculo de la derivada h-ésima con $h=j-1,\dots,i$, se integra la derivada h+1 interpolando la derivada h-ésima de la función f en el punto 0 si $\delta_h\delta_{h+1} = 1$, mientras que si $\delta_h\delta_{h+1} = -1$ la interpolación de la derivada h-ésima debe hacerse en el punto 1. Cuando δ_h =0 entonces la derivada h+1 se integra dos veces de forma que se interpole la derivada (h-1)-ésima de la función f en los puntos en 0 y en 1. Al ser opuestos δ_{h+1} y δ_{h-1} la interpolación en 0 y 1 garantiza la conservación de la (h-1)-convexidad con el signo correspondiente.

Para las derivadas inferiores se puede interpolar en cualquier punto. El objetivo en éstas es que el espacio $\mathbb{P}_{j+1}$ quede fijo, pero no afecta al cono que se conserva.

Ejemplos III.3.1.

a) Conservación de la positividad y la concavidad.

Correspondería al caso $\delta_0=1$, $\delta_1=0$, $\delta_2=-1$, j=2. Podemos construir un operador polinomial lineal $K_{n,\delta}$ que deje fijos los polinomios de $\mathbb{P}_3$. Para ello dada una función $f \in C^2[0,1]$ el operador la transforma en un polinomio de $\mathbb{P}_n$ cuya segunda derivada es $B_{n-2}(D^2f)$. Para determinar el polinomio $K_{n,\delta}(f)$ bastaría integrar dos veces e imponer que en los puntos 0 y 1 tome los valores f(0) y f(1), respectivamente.

b) Sea $\delta_0=1$, $\delta_1=1$, $\delta_2=0$, $\delta_3=-1$, $\delta_4=1$ y j=4, en estas condiciones podemos fijar $\mathbb{P}_5$. El proceso seguido para construir un operador que conserve el cono determinado por estos valores y fije $\mathbb{P}_5$ es el siguiente. $K_{n,\delta}(f)$ tiene como derivada cuarta $B_{n-4}(D^4f)$; para determinar la derivada tercera se integra interpolando $D^3f(1)$ (ya que $\delta_3\delta_4=-1$). La derivada primera se encuentra integrando dos veces imponiendo que $K_{n,\delta}(f)$ interpole $Df(0)$ y $Df(1)$, y finalmente $K_{n,\delta}(f)$ se halla integrando una vez más e interpolando $f(0)$ (pues $\delta_0\delta_1=1$).

■

Para el segundo tipo de conos, es decir, si $\delta_i\neq0$ y $\delta_j\neq0$ (valor éste último que podemos tomar igual a 1), pero $\delta_h=0$ para $h=0,...,i-1,j+1,...,n$ y existe un valor r, con $i<r<j$ tal que $\delta_r=\delta_{r+1}=0$ ó $\delta_r=0$, y $\delta_{r-1}\delta_{r+1}=1$ (saltos de más de una propiedad o con saltos de una propiedad sin cambio de signo) se tiene que podemos fijar $\mathbb{P}_{j-1}$. Para construir un operador con estas propiedades utilizaremos la propiedad I.2.4 referente al operador de Bernstein, a saber:

"Si f es una función convexa en [0,1] entonces $B_n(f)\geq f$".

Tomaremos como derivada j-2 del operador $K_{n,\delta}$ a $B_{n-j+2}(D^{j-2}f)$. Dado que $D^jf\geq0$ se tiene que $D^{j-2}f$ es convexa y por tanto $B_{n-j+2}(D^{j-2}f)\geq D^{j-2}f$. Para la derivadas inferiores debemos utilizar como elemento fundamental la desigualdad que nos proporciona la propiedad I.2.4 y que al integrar entre cero y x dicha desigualdad se mantiene mientras que si integramos entre 1 y x se invierte.

En general, conocida la derivada h-ésima con h=j,j-1,...,i+1 para conocer la derivada (h-1)-ésima se procede de la siguiente forma:

a) si $\delta_h\delta_{h-1}=1$ debemos integrar interpolando el valor $D^{h-1}f(0)$.

b) si $\delta_h\delta_{h-1}=-1$ debemos integrar interpolando el valor $D^{h-1}f(1)$

c) si $\delta_{h-1}=0$ podemos integrar interpolando bien $D^{h-1}f(0)$ ó bien $D^{h-1}f(1)$

(En realidad lo que es necesario es conservar una de las dos desigualdades $D^{h-1}K_{n,\delta}(f) \geq D^{h-1}f$ ó $D^{h-1}K_{n,\delta}(f) \leq D^{h-1}f)$

d) si $\delta_r=0$ y $\delta_{r-1}\neq 0$ debemos integrar interpolando $D^{r-1}f(0)$ ó $D^{r-1}f(1)$ para conseguir que $\delta_{r-1}\, D^{r-1}K_{n,\delta}(f) \geq \delta_{r-1}D^{r-1}f \geq 0$.

Para las derivadas inferiores podemos interpolar en cualquier punto.

Por la forma en que se construye, el operador así obtenido conserva el cono $C(\varepsilon,\delta)$. Además, si tomamos un polinomio de $\mathbb{P}_{j-1}$ se tiene que la derivada j-2 queda fija y las interpolaciones hacen que quede fijo dicho polinomio.

Ejemplo III.3.2. Sea $\delta_0=1$, $\delta_1=0$, $\delta_2=1$, $\delta_3=-1$, $\delta_4=0$, $\delta_5=0$, $\delta_6=1$ y j=6. Para este cono podemos fijar los polinomios de $\mathbb{P}_5$. Siguiendo el proceso de construcción anterior, sea $f \in C^4[0,1]$, la derivada cuarta del polinomio $K_{n,\delta}(f)$ será $B_{n-4}(D^4 f)$ y tenemos la desigualdad $D^4 K_{n,\delta}(f) \geq D^4 f$ (si f pertenece al cono)

Dado que $\delta_3=-1$ integramos entre 1 y x interpolando $D^3 f(1)$ pues así

$$D^3 K_{n,\delta}(f) \leq D^3 f \leq 0 \quad \text{(si la función pertenece al cono)}$$

A continuación tenemos $\delta_2=1=-\delta_3$; integramos entre 1 y x interpolando $D^2 f(1)$, así

$$D^2 K_{n,\delta}(f) \geq D^2 f \geq 0 \quad \text{(si la función pertenece al cono)}$$

Al ser $\delta_1=0$, podemos escoger entre interpolar $Df(0)$ y $Df(1)$.

En el primer caso tendremos

$$DK_{n,\delta}(f) \geq Df \quad \text{(si la función pertenece al cono)}$$

y en el segundo caso

$$DK_{n,\delta}(f) \leq Df \quad \text{(si la función pertenece al cono)}$$

Finalmente tenemos $\delta_0=1$. Si en el paso anterior interpolamos $Df(0)$ ahora tenemos que interpolar $f(0)$, si por el contrario se interpoló $Df(1)$ ahora hay que interpolar $f(1)$. En cualquier caso se llegará a

$$K_{n,\delta}(f) \geq f \geq 0 \quad \text{(si la función pertenece al cono)}$$

■

III.4. Propiedades de interpolación.

Como ya se comentó anteriormente en la introducción de este capítulo, algunos de los operadores que conservan conos no consecutivos y fijan los polinomios del espacio mayor posible no tienen porqué interpolar ningún dato. A continuación veremos cuáles serán estos operadores.

Teorema III.4.1. Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i \neq 0$ y $\delta_j \neq 0$ pero $\delta_h=0$ para $h=0,\ldots,i-1,j+1,\ldots,n$, y también que existe un valor r con $i<r<j$ tal que $\delta_r=0$ y $\delta_{r-1}=1=\varepsilon_{r+1}$.

Sea $K:C^n[0,1] \to \mathbb{P}_n$ un operador lineal tal que $K(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(\varepsilon,\delta)$ y que deja fijos los polinomios de $\mathbb{P}_{j-1}$. En estas condiciones K no tiene que interpolar ningún dato.

Demostración. El operador de Bernstein generalizado que hemos construido para este tipo de conos interpola la derivada j-2 en 0 y en 1 y otras derivadas inferiores en 0 y 1. Sin embargo, ni siquiera es necesario interpolar estos datos. Para demostrarlo consideremos un polinomio de $p \in \mathbb{P}_n$ que verifique $p \in \{f \in C^n[0,1]$ con $\varepsilon_h D^h f > 0$ para $h=0,\ldots,n\}$. El operador definido como $K^*(f) = K(f) + \delta_j p D^j f(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in [0,1]$ fija $\mathbb{P}_{j-1}$, conserva el cono $C(\varepsilon,\delta)$ y no interpola los datos anteriores.

■

Por el contrario los conos que presentan saltos de una sola propiedad y cambio de signo sí dan lugar a propiedades de interpolación.

Teorema III.4.2. Consideremos un cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i \neq 0$ y $\delta_j \neq 0$, pero $\delta_h=0$ para $h=0,\ldots,i-1,j+1,\ldots,n$ y si $\delta_h=0$ para algún h tal que $i<h<j$ implica $\delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$.

Sea $K:C^n[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ un operador lineal tal que $K(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(\varepsilon,\delta)$ y que fija los polinomios de $\mathbb{P}_{j+1}$. En estas condiciones

a) K tiene que interpolar $D^j f(0)$ y $D^j f(1)$

Si fija $\mathbb{P}_j$, se tiene que para $h=i,\ldots,j-1$

b) Si $\delta_h\delta_{h+1}=1$ entonces K interpola $D^h f(0)$

c) Si $\delta_h\delta_{h+1}=-1$ entonces K interpola $D^h f(1)$

d) Si $\delta_h=0$ entonces K interpola $D^{h-1}f(0)$ y $D^{h-1}f(1)$

Demostración. El apartado a) se obtiene como consecuencia del Teorema II.5.5. Así pues, nos centraremos en las otras propiedades.

Sea $f \in C^n[0,1]$ y sea $r(x) \in \mathbb{P}_{j-1}$ tal que interpole a la función f en los datos indicados en b), c) y d).

Sea $s(x) \in \mathbb{P}_j$ tal que es nulo en los datos indicados en b), c) y d) y $D^j s=\varepsilon_j M$ con $M=\text{máx}|D^j f(x)|$

Definimos $w_1(x)=s+r-f$ y $w_2(x)=f+s-r$. Se verifica que $\varepsilon_j D^j w_t(x) \geq 0$ con $t=1,2$. Podemos razonar por recurrencia de forma análoga a como se hizo en el teorema de interpolación II.5.5 pero teniendo en cuenta que si $\delta_h=0$ entonces al ser opuestos δ_{h+1} y δ_{h-1} para demostrar que $\delta_{h-1}D^{h-1}w_t(x)\geq 0$ basta comprobar que $\delta_{h-1}D^{h-1}w_t(1)\geq 0$ y $\delta_{h-1}D^{h-1}w_t(0)\geq 0$ lo cual es cierto, puesto que ambas cantidades son nulas.

Aplicando la hipótesis se tiene que $\delta_h D^h K(w_t)(x)\geq 0$ para $t=1,2$ y $h=i,\ldots,j$ luego si $\delta_h\delta_{h+1}\neq 0$ entonces para $x_h=(1-\delta_h\delta_{h+1})/2$ se tiene que

$$\delta_h D^h K(w_1)(x_h)=\delta_h(D^h s(x_h)+D^h r(x_h)-D^h K(f)(x_h))=\delta_h(D^h f(x_h)-D^h K(f)(x_h))\geq 0$$

$$\delta_h D^h K(w_2)(x_h)=\delta_h(D^h K(f)(x_h) + D^h s(x_h)-D^h r(x_h))=\delta_h(D^h K(f)(x_h) -D^h f(x_h))\geq 0$$

De donde se deduce que $D^h K(f)(x_h)=D^h f(x_h)$.

Si $\delta_{h+1}=0$ para algun $h \in \{i,\ldots,j-1\}$ entonces con $x_h=0,1$ se tiene que

$$\delta_h D^h K(w_1)(x_h)=\delta_h(D^h s(x_h)+D^h r(x_i)-D^h K(f)(x_h))=\delta_h(D^h f(x_h)-D^h K(f)(x_h))\geq 0$$

$$\delta_h D^h K(w_2)(x_h)=\delta_h(D^h K(f)(x_h) + D^h s(x_h)-D^h r(x_h))=\delta_h(D^h K(f)(x_h) -D^h f(x_h))\geq 0$$

Por tanto $D^h K(f)(0)=D^h f(0)$ y $D^h K(f)(1)=D^h f(1)$

■

IV. CONSTRUCCION DE OPERADORES

En los capítulos anteriores se han obtenido diversas propiedades de los OPL que conservan conos, referentes al espacio de polinomios que es posible fijar y a propiedades de interpolación. En este capítulo se presentan diversas técnicas de construcción de operadores conservativos. Estas técnicas no se deducen de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, sin embargo, dicha teoría es de gran utilidad ya que nos dice qué es posible y qué no es posible construir.

Los procesos constructivos pueden realizarse partiendo bien de productos escalares, o bien de otros operadores conservativos. En concreto, estudiaremos tres vías:

1) Utilizando productos escalares y polinomios ortogonales llegaremos a OPL que conservan todas las i-convexidades y fijan el espacio $\mathbb{P}_0$: Además, mostraremos una propiedad de minimización que nos permitirá generalizar el proceso. Como casos particulares aparecen diferentes operadores conocidos.

2) Utilizando el operador derivada y el operador integral podemos pasar de unos operadores a otros. Así del operador de Bernstein podemos pasar al de Bernstein-Kantorovich [K] y viceversa, o del operador de Durrmeyer-Derriennic [Du],[De] al estudiado por Chen [Hu].

3) Modificando los valores propios de ciertos operadores conservativos conocidos podemos obtener una sucesión de operadores intermedios entre el dado y

en cierto sentido el de proyección.

Finalmente, en este capítulo, introducimos dos sucesiones de operadores conservativos.

IV.1. Polinomios ortogonales, productos escalares, propiedades de minimización y operadores conservativos.

Comenzaremos con la construcción de operadores conservativos a partir de productos escalares. Inicialmente haremos el estudio para una clase especial de productos escalares en la que se incluyen los productos escalares más usuales.

Definición IV.1.1. Diremos que un producto escalar $<\cdot,\cdot>$ definido para funciones de $C[0,1]$ es **copositivo** si verifica que para cualesquiera dos funciones $f,g\in C[0,1]$ tales que $f(x)g(x)\geq 0$ en $[0,1]$ se tiene que $<f,g>\geq 0$.

Los productos escalares más usuales son ejemplos de productos escalares copositivos. En lo sucesivo trabajaremos con productos escalares copositivos y tales que sus polinomios ortonormales $\{h_i\}$ $i=0,\ldots,n$, cuyos coeficientes líderes son positivos, han de verificar: grado$(h_i)=i$ y h_i tiene i raíces simples en $(0,1)$.

Lema IV.1.2. Para toda función f i-convexa se tiene que $<f,h_i> \geq 0$.

Demostración: Sean $\{r_j\}$ con $j=1,\ldots,i$ las raíces de h_i y $p(x)$ el polinomio de

$\mathbb{P}_{i-1}$ que interpola a f en los puntos $\{r_j\}$. Entonces, $<f,h_i> = <f-p,h_i> \geq 0$ por ser copositivo el producto escalar y por la propiedad I.1.3 de las funciones i-convexas.

■

Lema IV.1.3. Para k>i existen constantes $A_{ik}>0$ tales que $h_i-A_{ik}h_k$ y $h_i+A_{ik}h_k$ tienen exactamente i raíces en (0,1) siendo el último signo que toman positivo.

Demostración: Teniendo en cuenta que los polinomios h_i tienen i raíces simples en (0,1) y utilizando la continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus argumentos se obtiene la tesis (Ver Henrici [He]).

■

Lema IV.1.4. Dadas las constantes A_{ik} del lema anterior, se verifica que para toda función f i-convexa, $<f,h_i> \geq A_{ik}|<f,h_k>|$.

Demostración: El polinomio $h_i-A_{ik}h_k$ tiene i raíces en [0,1]. Calculando el polinomio p de $\mathbb{P}_{i-1}$ que interpola a f en esas raíces se tiene

$$<f,h_i-A_{ik}h_k> = <f-p,h_i-A_{ik}h_k> \geq 0$$

Luego $<f,h_i> \geq A_{ik}<f,h_k>$.

Análogamente se puede razonar con la función $h_i+A_{ik}h_k$ llegándose a $<f,h_i>\geq-A_{ik}<f,h_k>$.

■

Teorema IV.1.5. Existe un operador polinomial lineal $K:C[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ tal que

a) Sus polinomios propios son los polinomios ortonormales $\{h_i\}$.

b) K conserva de forma individual las i-convexidades para i=0,...,n.

c) K fija las constantes.

Demostración. Buscaremos un operador K de la forma $K(f)=\sum_{i=0}^{n} B_i <h_i,f> h_i$ para unos valores de B_i. De esta forma, K será un operador polinomial lineal que verifica a). Veamos qué ocurre con b) y c).

Dado que el intervalo es acotado existen constantes $C_{ij} > 0$ tales que $|D^i h_j| \leq C_{ij}$ para $i<j$ y $C_i = D^i h_i$.

Para obtener los B_i, comenzamos por $i=n$. Si f es n-convexa $<f,h_n> \geq 0$ luego para que $D^n K(f)=B_n<f,h_n>D^n h_n$ sea mayor o igual que cero es suficiente que $B_n>0$.

Supongamos que existen constantes $B_j > 0$ para $j=i+1,\ldots,n$ tales que $D^j K(f) \geq 0$ para toda función f j-convexa con $j=i+1,\ldots,n$. Veamos que también se puede encontrar B_i tal que si f es i-convexa $D^i K(f) \geq 0$, con lo que por recurrencia será cierto para $i=0,\ldots,n$.

Sea f i-convexa, entonces $D^i K(f)(x)= B_i<f,h_i>D^i h_i + \sum_{j=i+1}^{n} B_j <f,h_j> D^i h_j(x)$.

Para que $D^i K(f)(x) \geq 0$ es suficiente que

$$\left| \sum_{j=i+1}^{n} B_j <f,h_j> D^i h_j(x) \right| \leq B_i <f,h_i> D^i h_i$$

Pero $\left|\sum_{j=i+1}^{n} B_j <f,h_j> D^i h_j(x)\right| \leq \sum_{j=i+1}^{n} B_j |<f,h_j>| \; |D^i h_j(x)| \leq \sum_{j=i+1}^{n} B_j <f,h_i> C_{ij}/A_{ij}$

Basta por tanto escoger $B_i \geq \sum_{j=i+1}^{n} B_j \; C_{ij}/(A_{ik}\, C_i)$

Se obtiene así el operador $K(f)= \sum_{i=0}^{n} B_i <f,h_i>h_i$, que conserva todas las i-convexidades con $B_i>0$. Si dividimos todos los B_i i=0,...,n obtenidos por B_0 se obtiene un operador que además fija las constantes.

■

Corolario IV.1.6. Podemos obtener operadores polinomiales lineales que tengan como polinomios propios $\{h_i\}$, que fijen $\mathbb{P}_k$ y conserven las i-convexidades para i=k,...,n

Demostración: Basta considerar la demostración del teorema anterior y detenernos en la etapa en que se halla B_k y tomar como $B_i=1$ para i=0,..,k-1 y $B_j = B_j/B_k$ para j=k,...,n.

■

Si quisiéramos que el operador K del teorema IV.1.5. dejase fijas las rectas, sería necesario por el teorema II.5.5. que K interpolase en los extremos del intervalo a toda función continua. La interpolación no suele tener lugar en este tipo de operadores ya que si tomamos el polinomio ortogonal h_{n+1}, no suele anularse en los extremos y en cambio se tiene que aplicar en el cero.

Ejemplo IV.1.7. Aplicando el teorema anterior y siguiendo el proceso indicado, vamos a construir un operador $K:C[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_1$ que fije la constantes y conserve la positividad y el crecimiento: tomaremos como producto escalar

$$\langle f,g\rangle = Af(0)g(0) + f(1/3)g(1/3) + Af(1)g(1) \text{ con } A>0$$

Los polinomios ortonormales son

$h_0(x) = (2A+1)^{-1/2}$

$h_1(x) = (2A+1)\,(2A^3 + 19/9\,A^2 + 5/9\,A)^{-1/2}\,(\,x - (1+1/3)/(2A+1)\,)$

A_{01} será una constante positiva tal que $h_0+A_{01}h_1$ y $h_0-A_{01}h_1$ sean positivos. La mayor posible es $(\,(2A^3 + 19/9\,A^2 + 5/9A\,)\,/\,(2A+1)\,)^{-1/2}\,/\,(A+2/3)$

C_0 es $(2A+1)^{-1/2}$

C_{01} es una cota de $|h_1(x)|$, la menor es $(A+2/3)\,/\,(2A^3 + 19/9\,A^2 + 5/9\,A)^{-1/2}$

En cuanto a los valores propios se tiene que

$B_1>0$ y $B_0 \geq B_1\,C_{01}\,/\,(\,A_{01}\,C_0)$

Si queremos que $B_0=1$ y que B_1 sea lo mayor posible tenemos que

$B_1=A_{01}\,C_0\,/\,C_{01} = (2A^3 + 19/9\,A^2 + 5/9A)\,/\,(\,(A+2/3)^2\,(2A+1)\,)$

Se obtiene así un OPL que conserva positividad y crecimiento, dejando fijas las constantes.Dicho operador se define como

$$K(f) = B_0\,\langle f,h_0\rangle\,h_0 + B_1\,\langle f,h_1\rangle\,h_1.$$

El valor propio B_1 es función creciente del valor A. Si A fuese 1 el segundo valor propio sería 14/25. Para intentar aumentar este segundo valor propio aumentamos el valor de A. De esta forma al aumentar el peso en los extremos el operador estaría "más cerca de interpolar" el valor de la función en los extremos que es lo que propicia fijar las rectas. De hecho cuando A tiende a infinito, B_1 tiende a 1.

■

IV.1.1 El proceso de aproximación.

Tradicionalmente para la aproximación de funciones por polinomios se han considerado normas, procedentes la mayoría de las ocasiones de productos escalares. Los trabajos en este campo han ido dirigidos a demostrar la existencia y unicidad de la mejor aproximación, y a construir algoritmos para calcular de forma fácil el polinomio de mejor aproximación.

Por otra parte se han construido y estudiado operadores polinomiales lineales que conserven propiedades de forma, tales como: positividad, crecimiento, convexidad, etc.

Se delimitan así dos caminos bastante diferenciados en cuanto a formas de abordar el problema de la aproximación de funciones. En el primero destaca el aspecto cuantitativo en el sentido de que la aproximación es exacta para un espacio lo más amplio posible, este es el caso de la aproximación por mínimos cuadrados continuo y discreto, con y sin función peso, Lagrange, Taylor, Hermite clásico, uniforme. En el segundo camino el aspecto cualitativo es más sobresaliente, ya que se persigue conservar propiedades relativas a la forma de la función, esto ocurre con los operadores de Bernstein, Bernstein-Durrmeyer, Bernstein-Jacobi [S1], Bernstein-Hahn [S2]. Sin embargo, estos dos caminos se presentan como contrapuestos, pues cuando la mejor aproximación procede de una norma o producto escalar no tiene porqué conservar las propiedades de forma de la función aproximada.

Intentaremos dar una propiedad de minimización para el operador K que hemos obtenido,alcanzando de esta forma un nexo de unión entre las dos formas de aproximación anteriores.

IV.1.2. Propiedad de minimización.

Teorema IV.1.2.1. El operador K obtenido en el teorema IV.1.1 asigna a cada función f el polinomio de $\mathbb{P}_n$ que hace mínimo

$$\langle f-p,f-p\rangle + \sum_{i=0}^{n} (1/B_i - 1) \langle p,h_i\rangle^2$$

Demostración. Basta expresar p en la base ortonormal $\{h_i\}$ y derivar.

■

Observación. La propiedad II.3.2 nos asegura que los valores propios del operador K son positivos, decrecientes y menores o iguales a 1.

La minimización de $\langle f-p,f-p\rangle$ conduce a un operador que al fijar $\mathbb{P}_n$ no puede conservar las i-convexidades con $i<n-1$, teniendo de este modo pocas propiedades de forma. En cambio, al variar el proceso de minimización sí vamos a llegar a un operador que conserve más propiedades de forma.

IV. 1.3. Interpretación de la propiedad de minimización.

De la expresión que se minimiza observamos que el polinomio K(f) por un lado debe estar próximo a f para que el primer sumando sea pequeño, pero también debe ser pequeño el segundo sumando. Buscamos interpretar el segundo sumando de la propiedad de minimización del teorema IV.1.2.1.

Si el producto escalar fuese el de L^2 el término $<p,h_0>$ es la integral entre 0 y 1 de p, es decir, el valor medio de f. Si fuese un producto escalar discreto el término $<p,h_0>$ será el valor medio de p (en el sentido discreto).

Normalmente, para referirnos al valor medio de una función f, tanto en el caso continuo como en el discreto, utilizamos el valor del polinomio constante que minimiza $<f-p,f-p>$, con $p\in \mathbb{P}_0$. Los polinomios de $\mathbb{P}_0$ tienen positividad constante, por ello para medir la positividad de una función f con un solo valor tomamos $<f,h_0>$.

En general, para definir i-convexidades medias podríamos considerar funciones con i-convexidad constante, es decir, los polinomios de $\mathbb{P}_i$, minimizar $<f-p,f-p>$ con $p\in \mathbb{P}_i$ y tomar como i-convexidad media, la derivada i-ésima de p, ó el coeficiente de x^i, o cualquier otra cantidad proporcional positiva. Por ejemplo, podemos adoptar $<f,h_i>$.

Así, el operador K aparece minimizando conjuntamente por un lado la distancia entre la función y el polinomio y por otra parte las i-convexidades medias del polinomio. Dependiendo de los valores de B_i se tendrán unas propiedades u otras; por ejemplo, si tomásemos $B_i=1$ para $i=0,\ldots,k$ los polinomios de $\mathbb{P}_k$ quedarían fijos.

Encontramos en la literatura situaciones similares, como por ejemplo el spline de ajuste estudiado por Wahba [W], Utreras [U], etc..., donde se minimiza por un lado la distancia en los puntos conocidos de la función y por otro lado la integral de la derivada segunda del spline al cuadrado.

IV.1.4. Generalización del proceso de minimización.

Sea V un conjunto de funciones definidas sobre un subconjunto X de la recta real R y con valores reales. Se intenta aproximar cada función de V por una del subespacio $\mathbb{P}_n$ de V. Como elemento métrico utilizaremos formas $<\cdot,\cdot>$,

$<\cdot,\cdot>:V\times V\rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

$<f,f> \geq 0, \forall f\in V$

$<f,g>=<g,f>, \quad \forall f,g\in V$ (1)

$<af+bg,h>=a<f,h>+b<g,h>, \quad \forall f,g,h\in V\ \forall a,b\in \mathbb{R}$

$<p,p>=0 \Rightarrow p=0 \ \forall p \in \mathbb{P}_n$ (Es decir es un producto escalar en $\mathbb{P}_n$).

Una primera forma de aproximar sería asociando a cada función f del espacio V aquel polinomio p que hace mínimo $<f-p,f-p>$. El operador correspondiente dejaría fijo $\mathbb{P}_n$, pero no conservaría las propiedades de forma.

Para conseguir que el operador de aproximación conserve propiedades de forma hemos modificado el proceso de optimización . Concretamente nos proponemos minimizar

$$<f-p,f-p> + V(p) \tag{2}$$

donde el término V(p) representa una cierta penalización del valor medio, del crecimiento medio, de la convexidad media, y en general de la i-convexidad media, etc. Se expresaría como

$$V(p)= \sum_{i=0}^{n} (c_i(p))^2 A_i \tag{3}$$

donde las A_i son constantes reales no negativas.

En el caso particular de que los A_i son todos cero el operador que se obtiene es el de proyección. Si sólo son nulos algunos de ellos entonces no todos los polinomios de $\mathbb{P}_n$ quedarán fijos, sólo aquellos para los que V(p) sea cero.

Si definimos $c_i(f)=<f,h_i>$ para i=0,...,n (es decir un múltiplo de la derivada i-ésima del polinomio de $\mathbb{P}_i$ que mejor aproxima a f en el sentido $<\cdot,\cdot>$) y $\{h_i\}$polinomios ortonormales con grado(h_i)=i,entonces el operador que minimiza (2) asigna a cada función f el polinomio $K_n(f)$ dado por

$$K_n(f)= \sum_{i=0}^{n} <h_i,f> h_i /(1+A_i) \qquad (4).$$

Propiedades IV.1.4.1. Es inmediato que el operador definido por (4) verifica

a) Es lineal.

b) Conserva el grado de los polinomios de $\mathbb{P}_n$.

c) Sus valores propios son $1/(1+A_i)$.

d) Sus funciones propias son los polinomios h_i.

e) Si A_i=0 para i=0,...,k entonces $\mathbb{P}_k$ es fijo.

■

Ejemplos IV.1.4.2. Algunos de los operadores conservativos están generados por polinomios ortogonales clásicos. Así, los polinomios de Legendre dan lugar al operador de Durrmeyer-Derriennic, los polinomios de Jacobi al operador de Bernstein-Jacobi introducido por Sablonnière [S1] y los polinomios de Hahn discretos al operador de Bernstein-Hahn introducido por Sablonnière [S2].

Efectivamente, en cada uno de los ejemplos anteriores si tomamos el producto escalar del que proceden los polinomios ortogonales y si consideramos A_i

como $(1/\lambda_i - 1)$ para $i=0,\ldots,n$, donde los λ_i son los valores propios del operador, al minimizar obtenemos el operador de partida. Es decir, que para los operadores conservativos usuales se tiene una propiedad de minimización y ésta procede de un producto escalar modificado en la forma (2).

■

La mayoría de los operadores conservativos poseen una sucesión de polinomios propios $\{h_i\}$ con grado$(h_i)=i$ y tienen valores propios positivos menores o iguales a 1. Estas dos propiedades harán que todos ellos puedan englobarse en el esquema de minimización pues, como veremos, puede definirse una forma $<.,.>$ verificando las propiedades (1) y unos valores A_i de forma que el operador verifique la propiedad de minimización.

Teorema IV.1.4.3. Sea K un operador polinomial lineal que tiene una sucesión de polinomios propios $\{h_i\}$ verificando $gr(h_i)=i$ con $i=0,\ldots,n$.y valores propios $\lambda_i>0$ positivos menores o iguales que 1. En estas circunstancias existe una función $<\cdot,\cdot>$ verificando las propiedades (1) anteriores y existen unas constantes A_i positivas para las que el operador K puede deducirse mediante el esquema de minimización (2)-(4).

Demostración: Escribiendo K(f) en la base $\{h_i\}$ se tiene $K(f)=\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i(f) h_i$.

Definimos la aplicación $<f,g> = \sum_{i=0}^{n} a_i(f)\, a_i(g)$ que cumple las condiciones impuestas en (1); además $<h_i, h_j>=1$ si i=j y 0 si son distintos y definiendo la i-convexidad media a partir de la minimización de $<f-p,f-p>$ con $p \in \mathbb{P}_i$ se tiene que $c_i(f) = <f,h_i>=a_i(f)$.

Si tomamos $A_i=(1-\lambda_i)/\lambda_i$ y hacemos el proceso de minimización llegamos al operador

$$K(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i c_i(f) h_i.$$

■

Al comienzo del capítulo estudiamos una clase de productos escalares, entre los que se incluyen los más usuales, que pueden conducir a operadores conservativos que además verifican una propiedad de minimización. Acabamos de ver cómo la mayoría de los operadores polinomiales lineales pueden incluirse dentro de este proceso de minimización.

Sin embargo, para generar un OPL conservativo, por la técnica de minimización, no es necesario que la forma $<\cdot,\cdot>$ sea un producto escalar copositivo, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.1.4.4. Para el operador de Bernstein B_2 se tiene que la función $<\cdot,\cdot>$ viene dada por,

$<f,g> = f(0)g(0) + (f(1)-f(0))(g(1)-g(0)) + 4(f(1)-2f(1/2)+f(0))(g(1)-2g(1/2)+g(0))$

Este no es copositivo, pues para $f(x)=2x+1$ y $g(x)=1-x$ se tiene que $f(x)g(x) \geq 0$ y sin embargo $<f,g> = -2$.

■

Hemos comprobado que otros productos escalares no copositivos pueden generar operadores conservativos. Sin embargo no todos las formas $<\cdot,\cdot>$ conducen a operadores conservativos de la forma anterior, como se verá con el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.1.4.5. Sea la forma $<\cdot,\cdot>$ dada por

$$<f,g> = f(0)g(0) + f(1)g(1) + A\, Df(1/2)Dg(1/2)$$

para alguna constante $A>0$.

En estas condiciones no existe ningún operador polinomial lineal $K:C^1[0,1] \to \mathbb{P}_1$ que fije constantes, conserve la positividad y sea de la forma

$$K(f)(x) = B_0 <f,h_0> h_0 + B_1 <f,h_1> h_1$$

siendo h_0 y h_1 polinomios ortonormales de grado 0 y 1.

La explicación de este hecho es que las funciones positivas pueden tener un gran valor positivo o negativo para la derivada en el punto 1/2 y el peso que tenga este dato, por pequeño que sea, hace que el segundo sumando sea una recta con valores tan negativos que la constante del primer término no pueda contrarrestar.

■

IV.2. Usando los operadores derivada e integral.

A continuación estudiaremos un segundo modo de construir operadores polinomiales lineales conservativos.La idea en que se basa este proceso ya ha sido utilizada en la demostración de algunos de los teoremas del capítulo II y, consiste en utilizar los operadores derivada e integral para pasar de unos operadores conocidos a otros con propiedades diferentes, estableciendo de alguna manera familias de operadores a partir de uno dado.

En concreto, sea K un OPL $K:C^n[0,1] \to \mathbb{P}_n$ y consideremos el operador $M=IKD: C^{n+1}[0,1] \to \mathbb{P}_{n+1}$ y el operador $L=DKI:C^{n-1}[0,1] \to \mathbb{P}_{n-1}$. En el primer caso, dada una función de clase n+1 se aplica K a la derivada de la función y posteriormente se integra. En el segundo caso, primero se integra la función y posteriormente se deriva el polinomio KI(f).

Respecto al operador derivada no existe ningún problema para su definición. Sin embargo, con el operador integral es necesario precisar la primitiva que consideramos, para lo cual estableceremos el valor que debe tomar en un cierto punto. De esta forma, cuando sea necesario precisar, notaremos por $I_{a,b}(f)$ a la primitiva de f que en el punto a vale b.

Teorema IV.2.1. Si K es un operador polinomial lineal $K:C^n[0,1] \to \mathbb{P}_n$ que conserva el cono $C(\varepsilon,\delta)$ y fija el espacio $\mathbb{P}_k$ entonces podemos considerar los operadores polinomiales lineales $L:C^{n-1}[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ y $M:C^{n+1}[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}$ que asignan a cada función el polinomio $L(f) = DKI(f)$ y $M(f) = I_{a,f(a)}\, KD(f)$ respectivamente, para cualquier a en $[0,1]$.

L fija el espacio $\mathbb{P}_{k-1}$ y conserva el cono $C(e,d)$ con $d_i=\delta_{i+1}$ para $i=0,..,n-1$.

M fija el espacio $\mathbb{P}_{k+1}$ y conserva el cono $C(e,d)$ con $d_i=\delta_{i-1}$ para $i=1,...,n$, y $d_0=0$.

Demostración: es inmediato por la construcción de los operadores L y M.

■

En el operador L no tenemos ninguna libertad, pues la integración queda determinada salvo una constante que se pierde al hacer la derivada. En cambio en el operador M podemos escoger el punto donde basamos la integración. Este hecho nos permitirá poder ganar alguna propiedad. Así, si M conserva el crecimiento de forma individual o conjuntamente con otras propiedades al integrar en el punto cero también la positividad se conservará conjuntamente con las otras propiedades. Análogamente si la propiedad fuese el decrecimiento, la interpolación en el punto 1 haría que la positividad también se conservase junto con las otras propiedades.

Corolario IV.2.2. Si K es un operador polinomial lineal $K:C^n[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_n$ que conserva el cono $C(\varepsilon,\delta)$ con $\delta_0 \neq 0$ y fija el espacio $\mathbb{P}_k$, entonces podemos considerar el OPL $M:C^{n+1}[0,1] \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}$ que asigna a cada función el polinomio $M(f)=I_{a,f(a)}KD(f)$ con $a \in [0,1]$.

M es un operador que fija el espacio $\mathbb{P}_{k+1}$ y conserva el cono C(e,d) con

$d_i=\delta_{i-1}$ para i=1,...,n, y $d_0=\delta_0$ si a=0 y $d_0=-\delta_0$ si a=1

Demostración: es inmediato por la construcción de M.

■

De esta forma podemos pasar de un operador que conserve la positividad a otro que conserve el crecimiento y además positividad y crecimiento ó positividad y decrecimiento, según se esté interpolando en 0 ó en 1. Repitiendo el proceso j veces e interpolando los datos adecuados podemos pasar de un operador positivo a otro que conserve los conos C(i,j,ε) para i≤j.

Ejemplos IV.2.3. a) Partiendo del operador de Bernstein B_n consideremos el operador DB_nI. Se obtiene el operador de Bernstein-Kantorovich [K], (Lorentz [L]) BK_{n-1}

$$DB_nI(f) = D\,B_n\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{in-1}\; n \int_{i/n}^{(i+1)/n} f(t)\,dt$$

b) Para un segundo ejemplo partiremos del operador de Durrmeyer-Derriennic [Du],[De]. Fue introducido por Durrmeyer para funciones integrables y viene dado por

$$M_n(f) = (n+1)\sum_{i=0}^{n} b_{in}(x) \int_0^1 b_{in}(t)\, f(t)\,dt$$

Si calculamos el operador $I_{0,f(0)}M_nD(f)$ se obtiene

$$f(0) + \int_0^x (n+1) \sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 Df(t)\; b_{in}(t)\; dt \right) b_{in}(s)\; ds$$

que puede verse que es igual a

$$f(0)b_{0n+1}(x) + n \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 f(t)\; b_{i-1n-1}(t)\, dt\right) b_{in+1}(x) + f(1)\, b_{n+1n+1}(x)$$

que es el operador H_{n+1} de Chen [Hu]

Es inmediato a partir de estas igualdades cómo el operador de Bernstein-Kantorovich fija las constantes y conserva todas las i-convexidades. Por otra parte el operador de Chen fija las rectas y conserva las i-convexidades para i=1,...,n+1.

Por la forma en que está definido el operador de Chen es inmediato su positividad. Esta propiedad no se deduce de la forma de construcción a partir del operador de Durrmeyer -Derriennic. Mediante esta técnica un operador positivo pasa a otro creciente pero no necesariamente positivo; podríamos preguntarnos porqué ocurrió esto en este caso. Por otra parte el operador de Bernstein es creciente y esta propiedad implica que el operador de Bernstein-Kantorovich sea positivo. ¿La positividad de Bernstein conducirá alguna propiedad en el operador de Bernstein-Kantorovich?.

Con estas preguntas estamos cuestionando la existencia de una propiedad que podríamos llamar (-1)-convexidad.

Teorema IV.2.4. Si un operador polinomial lineal K es positivo y fija las rectas el operador DKI fija las constantes y conserva el área.

Demostración. La integral entre 0 y 1 de DKI(f) es KI(f)(1)-KI(f)(0). Al interpolar K en 0 y 1 se tiene que KI(f)(1)-KI(f)(0) es la integral entre 0 y 1 de f.

■

Consecuencia. El operador de Bernstein-Kantorovich tiene que conservar el área.

Sin embargo, dado un operador K que conserve el área y fije constantes, $I_{0,f(0)}KD$ no tiene que conservar la positividad, por lo que debemos buscar otra propiedad. Por otra parte podemos afirmar que los operadores positivos que fijan las rectas conservan el valor medio de la derivada.

La derivada de una función convexa es otra creciente, la derivada de ésta última es una positiva. Las "(-1)-convexas" deberían ser las derivadas de las positivas. Es decir, para ver si una función es (-1)-convexa habría que comprobar si su primitiva es positiva. El problema radica en que la primitiva no es única por lo que debemos precisarla previamente.

Definición IV.2.5. Dada una función f integrable y una constante A≥0 diremos que una función f es **(-1,A)-convexa** si la primitiva que en cero vale A es positiva.

Definición IV.2.6. Un OPL es **(-1)-convexo** si lleva funciones (-1,A)-convexas en polinomios (-1,A)-convexos para cualquier valor de A≥0.

Teorema IV.2.7. Sea K un operador polinomial lineal positivo y que fija las rectas, entonces el operador DKI es (-1)-convexo.

Demostración. Sea f una función (-1,A)-convexa, debemos demostrar que DKI(f) es (-1,A)-convexo. Para ello es necesario que la primitiva de DKI(f) que en 0 vale A sea positiva. La primitiva que en cero vale A es A+KI(f)(x)-KI(f)(0). Tomamos como I(f) la primitiva de f que en cero vale A. Dado que K interpola en 0 y en 1, se tiene que

$$A+KI(f)(x)-KI(f)(0) = A+KI(f)(x)-A = KI(f)(x) \geq 0$$

ya que K es un operador positivo.

■

Corolario IV.2.8. Los operadores de Bernstein-Kantorovich y Durrmeyer-Derriennic son (-1)-convexos.

Demostración. Basta recordar que los operadores de Bernstein y Chen son positivos y fijan las rectas.

■

Teorema IV.2.9. Si un operador K es (-1)-convexo y fijas las constantes, entonces $I_{0,f(0)}KD$ es positivo y fija las rectas.

Demostración: Sea f una función positiva de $C^1[0,1]$, entonces Df(x) es una función (-1,f(0))-convexa, por tanto KD(f) es (-1,f(0))-convexo y consecuentemente $I_{0,f(0)}KD(f)$ es positiva.

En cuanto a las rectas, si $f \in \mathbb{P}_1$ tenemos que Df es constante y por tanto

KDf =Df. Finalmente al interpolar en 0 la recta queda fija.

■

El operador de Bernstein, a pesar de tener muchas propiedades en común con la función aproximada, no es (-1)-convexo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo IV.2.10. El polinomio $p(x) = -3x^2+4x-5/4$ es (-1,1/4)-convexo ya que la primitiva que en cero vale 1/4 es $(x-0.5)^2(1-x)$. Sin embargo la primitiva de $B_n(p)$ que en cero vale 1/4, cumple que al evaluarla en el punto 1 su valor es $-1/2n$.

IV.3. Modificación de los valores propios

A continuación trabajaremos sobre un tercer método para obtener operadores. Partiendo de un OPL conocido se irán realizando modificaciones que nos llevarán a la consecución de nuevos operadores con diferentes propiedades. Los operadores conservativos usuales conservan todas las i-convexidades y fijan el espacio de las funciones constantes o el de las rectas. Como ejemplos podemos citar Bernstein, Bernstein-Kantorovich, Durrmeyer-Derriennic, Chen, Bernstein-Jacobi, Bernstein-Hanh, así como los obtenidos con la técnica anterior para productos escalares copositivos. Intentaremos ahora obtener operadores intermedios en el sentido de que fijan un espacio de polinomios mayor que el de las constantes o que el de las rectas conservando al mismo tiempo ciertas i-convexidades. Para ello se toman operadores polinomiales lineales con polinomios propios y se modifican sus valores propios. Si lo vemos desde la propiedad de minimización estudiada en IV.1

podemos decir que modificaremos los valores de A_i.

Sea K_n un operador polinomial lineal que fija las constantes y conserva todas las i-convexidades. En este caso K_n tiene una sucesión de polinomios propios $\{h_i\}$ para i=0,...,n con $gr(h_i)=i$ por el teorema II.3.4., además el teorema IV.1.4.1. nos proporciona una expresión de K_n

$$K_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i <f,h_i> h_i$$

Para aumentar el grado de los polinomios fijos renunciaremos a la conservación de la positividad, el crecimiento, etc... dependiendo del espacio de polinomios que se quieran fijar.

Para que las rectas queden fijas es necesario hacer que el segundo valor propio λ_1 valga 1, pero al mismo tiempo intentamos que se conserven las i-convexidades desde i=1,...,n. Puesto que la conservación del crecimiento, convexidad, etc, depende sólo de los últimos n valores propios, y no del primero, podemos tomar el sumatorio desde i=1 y multiplicarlo por el inverso de λ_1.

$$K_{n,1}(f) = <f,h_0>h_0 + (1/\lambda_1) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i <f,h_i> h_i$$

De esta forma las rectas quedarán fijas, las i-convexidades se conservarán todas a excepción de la positividad y los valores propios habrán aumentado. Al aumentar los valores propios el error, desde el punto de vista del producto escalar, disminuye.

En general, si hemos partido de un operador polinomial lineal K_n de la forma

$$K_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i <f,h_i> h_i$$

se considera el operador

$$K_{n,i}(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j <f,h_j>h_j \quad \text{con } a_j=1 \text{ para } j=0,..,i \text{ y } a_j=\lambda_j/\lambda_i \text{ para}$$

$j=i+1,...,n$. Se verifica el siguiente

Teorema IV.3.1. Si K_n es un operador polinomial lineal de la forma anterior con $\lambda_0=1$ y $\lambda_j>0$ para $j=0,...,n$ que conserva todas las j-convexidades, entonces para cada $i\in\{1,...,n\}$ el operador $K_{n,i}$ verifica

1) $K_{n,i}$ fija $\mathbb{P}_i$

2) $K_{n,i}$ conserva las j-convexidades para $j=i,...,n$.

Demostración. Es inmediato por la forma de construcción del operador.

■

IV.4. Cuasiinterpolantes de Bernstein conservativos.

Utilizando la técnica basada en la modificación de los valores propios intentamos construir nuevos operadores partiendo del operador de Bernstein. De esta forma, se obtienen diferentes aproximaciones de funciones continuas mediante operadores lineales polinomiales usando datos lagrangianos en puntos equidistantes. Como es conocido, la interpolación nos permite verificar exactamente los datos de una función, pero no garantiza la conservación de las propiedades de forma de la misma, mientras que, por el contrario, el operador de Bernstein mantiene las propiedades de positividad, crecimiento, convexidad, etc... pero no fija más que $\mathbb{P}_1$.

P. Sablonnière [S3], basándose en el hecho de que el operador de Bernstein es un operador diferencial lineal, ha construido una sucesión de operadores intermedios entre el de Bernstein y el de Lagrange fijando en cada paso los polinomios de un grado mayor. Con este trabajo lo que pretendía era aumentar la velocidad de convergencia. Nuestro objetivo es igualmente la obtención de una sucesión de operadores intermedios, pero además se persigue conservar en cada paso todas las i-convexidades posibles.

La construcción de los operadores cuasiinterpolantes servirá para ejemplificar otros aspectos de IV.1.

IV.4.1. El operador de Bernstein

El operador de Bernstein restringido a $\mathbb{P}_n$ es una aplicación lineal que viene dada por una matriz A

$$B_n: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$$

$$(1, x, ..., x^n)\ (\beta_0,...,\beta_n)^T \quad \to \quad (1, x, ..., x^n)\, A\ (\beta_0,...,\beta_n)^T\ .$$

Es conocido que $A = (a_{ij})$, $i,j=0,...,n$, viene dada por $a_{ij} = \pi_i \sigma_{ij} n^{i-j}$, si $i \leq j$, y $a_{ij} = 0$, si $i>j$, donde $\pi_0=\pi_1=1$, y $\pi_q = (1-1/n)...(1-[q-1]/n)$, $q = 2,...,n$. y σ_{ij} son los números de Stirling de segunda especie (Kelisky y Rivlin [K-R]).

Para funciones continuas en $[0,1]$, $B_n(f) = B_n(L_n(f))$, donde $L_n(f)$ es el polinomio de $\mathbb{P}_n$ que interpola a f en los puntos $\{i/n\}$, $i = 0,..., n$.

Entonces podemos escribir

$$B_n(f) = (1, x, ..., x^n)\ A\ L\ (f_0,..,f_n)$$

con $f_i = f(\, i/n\,)$, y L la matriz del cambio de la base de Lagrange a la usual.

Diagonalizando la matriz A obtenemos $A = V\, D\, V^{-1}$, donde D es la matriz diagonal que se forma con los valores π_i y V es la matriz de vectores propios. Dado que los valores propios son distintos salvo $\pi_0=\pi_1$, los vectores propios están determinados salvo una constante desde i=2 hasta i=n. Escogemos las constantes de forma que la diagonal principal de V esté formada por 1. En cuanto a los dos primeros vectores propios tomamos el $(1, 0, ..., 0)^T$ y el $(0, 1, ..., 0)^T$.

IV.4.2. Un producto escalar para el operador de Bernstein.

Sean $h_j(x) = \sum_{i=0}^{n} v_{ij}\, x^i$, $j = 0,..,n$ $V=(v_{ij})$ los polinomios propios de B_n.

Definimos el producto escalar en $\mathbb{P}_n$

$$p,q \in \mathbb{P}_n \quad <p,q>_n = \sum_{i=0}^{n} p_i q_i \text{ , donde: } p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i h_i(x) \text{ , } q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i\, h_i(x)$$

Para funciones continuas utilizamos el operador de Lagrange

$$<f,g>_n = < L_n(f), L_n(f) >_n = (f_0,...,f_n)\ L^T (V^{-1})^T V^{-1} L\ (g_0,..,g_n)^T \ .$$

Para determinar la aproximación de funciones continuas por polinomios de P_n vamos a usar la aplicación $<.,.>_n$, como se hace en IV.1.

IV.4.3. El proceso de minimización.

Definición IV.4.3.1. Definimos la **i-convexidad media** de una función continua f, **respecto a** $<.,.>_n$, como el coeficiente de x^i en el polinomio de p(x) de

$\mathbb{P}_i$ que mejor aproxima a f en el sentido de $<.,.>_n$, i=0,...,n. La notaremos por $c_i(f)$.

Propiedad IV.4.3.2. $c_i(f) = <f,h_i>_n$, i=0,...,n.

Minimización. Dadas unas constantes $A_i \geq 0$, $i = 0,\dots,n$, se asigna a cada función $f \in C[0,1]$ el polinomio $K_n(f) \in \mathbb{P}_n$ que minimiza

$$\min_{p\in\mathbb{P}_n} \| f-p \|_n^2 + \sum_{i=0}^{n} A_i\,(C_i(p))^2$$

Propiedad IV.4.3.3.

$$K_n(f) = \sum_{i=0}^{n} (1/[1+A_i])\, h_i(x) <f,h_i>_n$$

Propiedad IV.4.3.4. El operador K_n verifica

i) Es un operador lineal

ii) Si $gr(p) = i \leq n$, $gr(K_n(p)) = i$

iii) Los polinomios propios son $\{h_i\}$, i=0,...,n

iv) Los valores propios son $\{ 1/(1+A_i) \}$, i=0,...,n

v) Si $A_k = 0$, $k = 0,\dots,i$, entonces deja fijo a $\mathbb{P}_i$

vi) Si $A_i = 0$, $i = 0,\dots,n$, entonces $K_n(f) = L_n(f)$ (El operador de Lagrange)

Propiedad IV.4.3.5. Existen unos valores de $A_i \geq 0$ para los que el operador K_n es el operador de Bernstein.

IV.4.4. Sucesión de operadores cuasi interpolantes

Definición IV.4.4.1. La sucesión de operadores cuasiinterpolantes viene dada por la expresión

$$B^i{}_n(f) = \sum_{k=0}^{i} \langle f,h_k\rangle_n h_k + \sum_{k=i+1}^{n} (\pi_k/\pi_i) \langle f,h_k\rangle_n h_k \ , \qquad i = 0,\ldots,n$$

Propiedad IV.4.4.2. La sucesión de operadores conecta el operador de Bernstein con el de Lagrange.

$$B_n = B^0{}_n = B^1{}_n, \quad B^n{}_n = L_n.$$

Teorema IV.4.4.3. El operador $B^i{}_n$ verifica

i) $f \in P_i$, $B^i{}_n(f) = f$

ii) Si $f[x_0,\ldots,x_k] \geq 0$, $\forall\, x_0,\ldots,x_k \in [0,1]$ con $k \geq i$, entonces

$$(B^i{}_n(f))^{k)}(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Teorema IV.4.4.4. No es posible conservar más i-convexidades de las que conserva $B^k{}_n$ con el tipo de datos que utilizan.

Demostración. $B_n = B^0{}_n = B^1{}_n$, por conservar todas las j-convexidades, con j=0,...,n no puede fijar $\mathbb{P}_2$.

$B^i{}_n$, i > 1 fija $\mathbb{P}_i$. Los operadores polinomiales lineales que fijan $\mathbb{P}_i$ no pueden conservar j-convexidades con $j < i-1$, y para conservar la (i-1)-convexidad necesita interpolar la derivada i-1 en 0 y en 1. Al ser los datos lagrangianos esto no es posible, por tanto sólo pueden conservarse las convexidades desde i hasta n.

∎

IV.4.5. Cálculo práctico.

Los operadores $B^i{}_n(f)$ pueden escribirse como

$$B^i{}_n(f) = (1, x, \ldots, x^n)\ V\ \mathrm{diag}(1,\ldots, 1, \pi_i/\pi_i, \ldots, \pi_n/\pi_i)\ V^{-1}\ L\ (f_0,\ldots,f_n)^T.$$

Una primera forma sería calcular V y V^{-1}. Teniendo en cuenta que A es una matriz triangular superior no resulta muy difícil diagonalizarla.

Para valores pequeños de i, respecto a n, no es necesario calcular todos los valores propios y se puede reducir el coste computacional.

$$B^i{}_n(f) = (1/\pi_i)B_n(f) + \sum_{k=0}^{i-1} (1-\pi_k/\pi_i) <f,h_k>_n h_k$$

Para calcular $<f,h_k>_n$ se puede tener en cuenta que A^T puede diagonalizarse

$$A^T = U\,D\,U^{-1}$$

Si tomamos $u_{ii} = 1$, $u_{01} = u_{10} = 0$ la matriz U queda determinada.

Además, $U = (V^{-1})^T$

$$< f, h_j >_n = (\, h_j(i/n))\ L^T (V^{-1})^T V^{-1} L\, (f_0,..,f_n)^T =$$

$$= (\, v_{0j}, \dots , v_{nj})\, (V^{-1})^T\ U^T L\, (f_0,..,f_n)^T =$$

$$= V^{-1} (\, v_{0j}, \dots , v_{nj})^T\, U^T\, L\, (f_0,..,f_n)^T =$$

$$= (0,..,\overset{j)}{1},..,0)^T\ U^T\ L\, (f_0,..,f_n)^T=$$

$$= (\text{ j-ésima columna de U })^T\ L\, (f_0,..,f_n)^T =$$

$$= (\text{ j-ésimo vector propio de } A^T)^T\ L\, (f_0,..,f_n)^T$$

$$< f, h_j >_n h_j = (\, \sum_{i=0}^{j} v_{ij}\, x^i\,)\ ((\, u_{0j}, \dots, u_{nj}\,)\ L\, (f_0,..,f_n)^T$$

donde $(\, v_{0j}, \dots, v_{nj}\,)^T$, y $(\, u_{0j}, \dots, u_{nj}\,)^T$, son el j-ésimo vector propio de A y de A^T, respectivamente.

Para el caso i=2 es posible dar una forma más fácil al operador cuasiinterpolante.

Propiedad IV.4.5.1. El operador $B^2{}_n$ verifica

$$B^2{}_n(f)(x)=(1/\pi_2)B_n(f(t)-f(0)-(f(1)-f(0))t) + f(0) + (f(1) - f(0))x.$$

Demostración: Si $p \in \mathbb{P}_n$ y $p(0)=p(1)=0$ entonces $p(x)= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\, h_i(x)$.

Efectivamente, ya que por ser $\pi_i < 1$ para $i=2,..,n$ se tiene que $h_i(0)=h_i(1)=0$ para $i=2,..,n$.

Por tanto dada una función f, $B^2{}_n(f) = B^2{}_n(L_n(f)) = B^2{}_n(L_n(f(x)-f(0)-(f(1)-f(0))x) + f(0) + (f(1)-f(0))x)) = B^2{}_n(L_n(f(x)-f(0)-(f(1)-f(0))x)) + f(0) + (f(1)-f(0))x = (1/\pi_2)\, B_n(L_n(f(x)-f(0)-(f(1)-f(0))x)) + f(0) + (f(1)-f(0))x = (1/\pi_2)\, B_n(f(x)-f(0)-(f(1)-f(0))x) + f(0) + (f(1)-f(0))x$

■

Corolario IV.4.5.2. El operador $B^2{}_n$ verifica

$B^2{}_n(f) \rightarrow f$ uniformemente en $[0,1]$ para cualquier función de $C[0,1]$.

Demostración. Basta observar la expresión dada en la propiedad anterior.

■

IV.5. Cuasiinterpolantes de Durrmeyer-Derriennic conservativos

Otro proceso análogo al desarrollado para el operador de Bernstein, puede realizarse para construir operadores intermedios entre el de Durrmeyer-Derriennic y el de proyección de $L^2[0,1]$.

En esta ocasión los elementos con los que trabajamos; el producto escalar y los polinomios propios son los mismos independientemente del valor de n, lo que facilitará la construcción.

La i-convexidad media será, según la definición dada anteriormente, el i-ésimo coeficiente de Fourier. Además, por la copositividad del producto escalar, cualquier función i-convexa tiene i-convexidad media positiva. El teorema IV.1.5 nos asegura que existe un operador polinomial lineal que tiene por polinomios propios los de Legendre, conserva todas las i-convexidades, fija las constantes y puede verse como la minimización de

$$\|f-p\| + \sum_{i=0}^{n} A_i \, (c_i(p))^2$$

El operador de Durrmeyer-Derriennic constituye un ejemplo de operador de este tipo. No es posible encontrar un operador con polinomios propios los de Legendre, que conserve todas las i-convexidades y fije las rectas ya que el polinomio ortogonal de grado n+1 se tiene que aplicar en cero y en los extremos no se anula, así al no interpolar en los extremos no puede fijar $\mathbb{P}_1$.

Una vez que se tiene el operador de Durrmeyer-Derriennnic podemos construir operadores intermedios, modificando los A_i, o equivalentemente los valores propios λ_i.

El operador de Durrmeyer-Derriennic puede adoptar la siguiente expresión en la base de Legendre [De].

$$M_n(f)=\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \ <f,\ell_i> \ell_i \text{ con } \lambda_i=(n+1)!\ n!\,/\,((n-i)!\ (n+i+1)!) \text{ para } i=0,..,n$$

Los operadores intermedios tienen la expresión

$$M_{n,i}(f)=\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ <f,\ell_j> \ell_j \text{ con } \alpha_j=1 \text{ para } j=0,..,i \text{ y } \alpha_j=\lambda_j\,/\,\lambda_i \ \ j=i,..,n$$

Teorema IV.5.1. Los operadores $M_{n,i}$ verifican

a) $M_{n,i}$ fija los polinomios de $\mathbb{P}_i$

b) $M_{n,i}$ conserva las j-convexidades para j=i,...,n

■

Supongamos que de una función conocemos sus momentos $m_i=<f,\ell_i>$ e intentamos aproximarla. Sin más datos no podemos asegurar que la función sea positiva, o creciente, o convexa, etc... , pero en cambio sí podemos afirmar en algunas ocasiones que no es positiva o no es creciente, etc.

Sabemos que si f es i-convexa en [0,1] entonces $M_n(f)$ tiene coeficientes en la base de Bernstein con diferencia progresiva de orden i positiva (Ver apartado V.3). Por tanto si los coeficientes en la base de Bernstein de $M_n(f)$ no tienen todos diferencia progresiva de orden i positiva entonces f no es i-convexa. En este caso no es necesario utilizar un operador que conserve la i-convexidad. Por otra parte si una función es "muy positiva" esto hará que no sólo $M_{n,0}$ sea positivo sino que también otros operadores aplicados a esa función den polinomios positivos en [0,1]

Dado un polinomio $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{in}(x)$ consideramos el vector V que viene dado por

$$v(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } \Delta^i a_j \geq 0 \text{ no todos nulos para } j=0,\ldots,n-i \\ -1 \text{ si } \Delta^i a_j \leq 0 \text{ no todos nulos para } j=0,\ldots,n-i \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Cuando el polinomio p es $M_n(f)$ entonces v(i)=0 significa que la función f no es i-convexa ni i-concava estrictamente y por tanto no es necesario tomar un operador que conserve esta propiedad.

Este operador $M_{n,i}$ puede escribirse en la base de Bernstein como

$M_{n,i}(f) = (b_{0n},..,b_{nn})\ A\ (\beta_0 m_0,..,\beta_n m_n)^T$ donde $m_j = <f, \ell_j>$ y β_j es el j-ésimo valor propio de $M_{n,i}$.

Algoritmo.

1) Dados $m_0,..,m_n$

2) Se multiplica A por $(\beta_0 m_0,..,\beta_n m_n)^T$ donde $\beta_0=\lambda_0,..,\beta_n=\lambda_n$ (los valores propios del operador de Durrmeyer-Derriennic)

3) Al vector obtenido se le calcula el vector v(0,i)=v(i) correspondiente a las diferencias progresivas de los coeficientes del polinomio $M_n(f)$.

4) Se busca el menor valor de i para el cual v(0,i) es no nulo. Llamamos k a dicho valor de i.

5) Si k=n entonces el operador es el de proyección.

6) Se multiplica A por $(\beta_0 m_0,..,\beta_n m_n)^T$ donde $\beta_i=1$ si $i \leq k+1$ y $\beta_i=\lambda_i/\lambda_{k+1}$ si $i>k+1$

7) Se calcula v(k+1,i) el vector de las diferencias progresivas.

8) Desde j=0 hasta j=n

En el caso de que v(0,j) ≠ 0 se compara v(0,j) con v(k+1,j).

Si son distintos se concluye que $K_{n,k}$ es el operador que hay que utilizar.

Si son iguales se toma otro j

9) Si v(0,j)=v(k+1,j) para todo j=0,1,...,n con v(0,j)≠0 se toma k=k+1 y se continua por el paso 5).

V.OPERADORES CON EL TIPO DE DATOS PREFIJADO.

En los capítulos anteriores hemos centrado nuestro estudio en operadores que conservaban ciertas propiedades, sin importarnos cómo debían de ser los datos de que se disponían. Aparecen así, operadores conservando muchos conos, pero que exigen conocer una serie de datos correspondientes a derivadas de diferente orden. Esta circunstancia no siempre será factible en la práctica, ya que podemos conocer una función sólo parcialmente y no siempre podemos acceder al tipo de datos que exige el operador.

Comenzaremos con los operadores clásicos y más adelante estudiaremos algunos ejemplos de datos prefijados.

V.1.Propiedades de conservación de los operadores clásicos.

Utilizando los resultados de incompatibilidad entre la conservación de conos y fijar espacios de polinomios y los de interpolación podemos obtener los conos que no pueden conservar ciertos operadores de interpolación clásicos.

V.1.1.Operador de Lagrange

Consideremos n+1 puntos distintos en [0,1] y consideremos el operador

$L:C[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ que a cada función continua le asigna el polinomio que interpola los valores de la función en esos puntos.

• Para n=0 obviamente L conserva $C(0,0,\varepsilon)$.

• Sea n=1, L conserva las positivas ($C(0,0,\varepsilon)$) si y sólo si los puntos son el 0 y el 1. Conserva las positivas y crecientes ($C(0,1,(1,1))$) si y sólo si uno de los puntos es el 0. Conserva las positivas y decrecientes ($C(0,1,(1,-1))$) si y sólo si uno de los puntos es el 1.Conserva siempre las crecientes.

• Sea n=2, L conserva siempre las convexas. L conserva las positivas y cóncavas si y sólo si interpola en 0 y en 1. No puede conservar ningún otro cono bien por el teorema II.1.1. o por las propiedades de interpolación a que obliga el teorema II.5.4.

• Sea n>2, entonces L conserva $C(n,n,\varepsilon)$ (el signo de la derivada n-ésima). Cualquier otro cono $C(i,j,\varepsilon)$ con $0\leq i\leq j\leq n$ no puede conservarse por los teoremas del capítulo II. Efectivamente si $j\leq n-2$ es imposible por el teorema II.1.1. Si $j=n-1$ el apartado 2) del teorema II.5.5. obligaría a interpolar la derivada (n-1)-ésima en 0 y en 1. Si $j=n$ con $i<n$ entonces debería interpolar una derivada (n-1)-ésima por el apartado 1) del teorema II.5.5.

Consideremos ahora conos no consecutivos $C(\varepsilon,\delta)$. Sea $k=\text{máx}\{i \in \{0,...,n\};\ \delta_i\neq 0\}$. Los dos tipos de conos que se presentan son:

a) Con saltos de más de una propiedad o sólo de una pero sin cambio de signo. En este caso el máximo espacio que se puede fijar es $\mathbb{P}_{k-1}$. Luego el operador de Lagrange no puede conservarlo.

b) Con saltos de una sola propiedad y cambio de signo ($\delta_h=0 \Rightarrow \delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$). En este caso es necesario que $k+1\geq n$.

Para n=k se tiene por el teorema III.4.2. que,

si $\delta_{n-1}\neq 0$ entonces se tiene que interpolar $D^{n-1}f(1)$ ó $D^{n-1}f(0)$ (lo que no es posible)

si $\delta_{n-1}=0$ entonces se tiene que interpolar $D^{n-2}f(1)$ y $D^{n-2}f(0)$ (tampoco sería posible)

Para n=k+1 se tiene que interpolar $D^{n-1}f(1)$ y $D^{n-1}f(0)$ por el teorema III.4.2. (por tanto tampoco se puede conservar este cono)

V.1.2.Operador de Hermite clásico.

Consideremos n+1 puntos distintos en [0,1] y el operador $H:C^1[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_{2n+1}$ que interpola el valor de la función y de la derivada en cada uno de los n+1 puntos.

• Para n=0, H conserva funciones positivas y crecientes si y sólo si el punto es el 0. Conserva positivas y decrecientes si y sólo si el punto es el 1. Conserva siempre las crecientes y nunca las positivas.

• Para $n=1$, H conserva la 3-convexidad. Además, por conservar la 3-convexidad e interpolar la derivada primera se tiene que conserva el cono de las funciones decrecientes y 3-convexas si y sólo si los puntos son el 0 y el 1. Además, por interpolar los valores de la función en 0 y en 1 se tiene que conserva el cono de las funciones positivas, decrecientes y 3-convexas y el de las negativas, decrecientes y 3-convexas.

Sea $n>0$ conserva $C(2n+1,2n+1,\varepsilon)$. Otro cono $C(i,j,\varepsilon)$ no puede conservarse con $j\leq 2n+1$ bien por la obstrucción del teorema II.1.1 o por las propiedades de interpolación a que obliga el teorema II.5.5.

Consideremos los conos $C(\varepsilon,\delta)$. Sea $k=\text{máx}\{i \in \{0,\ldots,2n+1\};\ \delta_i\neq 0\}$. Los dos tipos de conos que se presentan son

a) Con saltos de más de una propiedad ó solo de una pero sin cambio de signo. En este caso el máximo espacio que se puede fijar es $\mathbb{P}_{k-1}$. Luego el operador de Hermite no puede conservarlo.

b) Con saltos de una sola propiedad y cambio de signo ($\delta_h=0 \Rightarrow \delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$). En este caso es necesario que $k+1\geq 2n+1$.

Para $2n+1=k$ se tiene por el teorema III.4.2. que,

si $\delta_{2n}\neq 0$ entonces se tiene que interpolar $D^{2n}f(1)$ ó $D^{2n}f(0)$ (lo que no es posible con $n>0$)

si $\delta_{2n-1}=0$ entonces se tiene que interpolar $D^{2n-1}f(1)$ y $D^{2n-1}f(0)$ (tampoco sería posible con $n>1$)

Para $2n+1=k+1$ se tiene que interpolar $D^{2n}f(1)$ y $D^{2n}f(0)$ por el teorema III.4.2. (por tanto tampoco se puede conservar este cono para $n>0$)

V.1.3.Operador de Taylor.

Se considera un punto en $[0,1]$ y el operador $T: C^n[0,1] \to \mathbb{P}_n$ que interpola la función y las derivadas de orden menor o igual a n en el punto escogido.

Conserva siempre $C(n,n,\varepsilon)$.

Conserva los conos $C(i,n,\varepsilon)$ con $0 \leq i < n$ donde los ε_h para $h=i,\ldots,n$ son iguales si y sólo si el punto escogido es el cero.

Conserva los conos $C(i,n,\varepsilon)$ con $0 \leq i < n$ donde los ε_h para $h=i,\ldots,n$ son alternados si y sólo si el punto escogido es el uno.

Ningún otro cono $C(i,j,\varepsilon)$ con $j<n$ puede conservarse bien por la obstrucción del teorema II.1.1 o por las propiedades de interpolación a que obliga el teorema II.5.5.

Para los conos no consecutivos $C(\varepsilon,\delta)$, sea $k=\text{máx}\{i \in \{0,...,n\};\ \delta_i \neq 0\}$. Los dos tipos de conos que se presentan son

a) Con saltos de más de una propiedad o sólo de una pero sin cambio de signo. En este caso el máximo espacio que se puede fijar es $\mathbb{P}_{k-1}$. Luego el operador de Taylor no puede conservarlo.

b) Con saltos de una sola propiedad y cambio de signo ($\delta_h=0 \Rightarrow \delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$). En este caso es necesario interpolar alguna derivada en 0 y en 1, por tanto tampoco puede conservarse este cono.

V.1.4. Mínimos cuadrados continuos

Consideremos el operador $C_n:C[0,1]\rightarrow \mathbb{P}_n$ que asigna a cada función el polinomio de mejor aproximación por mínimos cuadrados.

C_n conserva la n-convexidad para cualquier n.

Cualquier cono $C(i,j,\varepsilon)$ con $j<n-1$ no puede conservarse pues $\mathbb{P}_n$ queda fijo.

Al fijar $\mathbb{P}_n$, la conservación de los conos $C(i,n-1,\varepsilon)$ exige interpolar $D^{n-1}f(0)$ y $D^{n-1}f(1)$. Luego no pueden conservarse.

La conservación de los conos $C(i,n,\varepsilon)$ con $i<n$ exigiría interpolar algunas derivadas, por lo que no pueden conservarse tampoco.

Consideremos los conos $C(\varepsilon,\delta)$. Sea $k=\text{máx}\{i \in \{0,\ldots,n\};\ \delta_i\neq 0\}$. Los dos tipos de conos que se presentan son

a) Con saltos de más de una propiedad o sólo de una pero sin cambio de signo. En este caso el máximo espacio que se puede fijar es $\mathbb{P}_{k-1}$. Luego el operador de mínimos cuadrados no puede conservarlo.

b) Con saltos de una sola propiedad y cambio de signo ($\delta_h=0 \Rightarrow \delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$). En este caso es necesario interpolar alguna derivada que el operador de mínimos cuadrados no puede interpolar.

V.2. OPL con datos lagrangianos.

En este apartado trataremos algunos aspectos de la conservación de i-convexidades con OPL que utilizan datos lagrangianos. Comenzaremos con propiedades individuales, para después considerar varias propiedades conjuntamente. En este último caso veremos sólo las propiedades más útiles en la práctica: positividad, crecimiento y convexidad.

Positividad

La conservación de la positividad permite dejar fijos los polinomios de $\mathbb{P}_1$ y esto se puede hacer con datos lagrangianos. Un ejemplo puede ser el conocido operador de Bernstein.

Crecimiento.

La conservación del crecimiento permite fijar los polinomios de $\mathbb{P}_2$. No obstante, para fijar los polinomios de $\mathbb{P}_2$ es necesario interpolar la derivada en 0 y en 1. Por tanto, con datos lagrangianos sólo es posible fijar $\mathbb{P}_1$ y esto se puede hacer con el operador de Bernstein.

I-Convexidad. (para $i>1$)

La conservación de la i-convexidad permite fijar $\mathbb{P}_{i+1}$, pero para ello es necesario interpolar la derivada i-ésima en 0 y en 1. Con datos lagrangianos ésto no es posible y sólo podemos fijar $\mathbb{P}_i$, por ejemplo con el operador B^i_n (el i-ésimo cuasiinterpolante de Bernstein estudiado en IV.4.).

Positividad y crecimiento

La conservación conjunta de la positividad y el crecimiento permite fijar $\mathbb{P}_2$, pero para ello hay que interpolar $f(0)$, $Df(0)$ y $Df(1)$, por lo que con datos lagrangianos sólo se puede fijar $\mathbb{P}_1$. Un ejemplo de este tipo de operador lo constituye el operador de Bernstein.

Positividad y decrecimiento

La conservación conjunta de la positividad y el decrecimiento permite fijar $\mathbb{P}_2$, pero para ello hay que interpolar $f(1)$, $Df(0)$ y $Df(1)$ razón por la que con datos lagrangianos sólo se puede fijar $\mathbb{P}_1$. Un ejemplo de este tipo de operador es el de

Bernstein.

Positividad, crecimiento y convexidad

La conservación de la positividad, el crecimiento y la convexidad permite fijar $\mathbb{P}_3$, pero hay que interpolar f(0), Df(0), $D^2f(0)$ y $D^2f(1)$. Si queremos fijar sólo $\mathbb{P}_2$ hay que interpolar Df(0), luego sólo podemos fijar $\mathbb{P}_1$. Esto puede hacerse con el operador de Bernstein.

Positividad, crecimiento y concavidad

La conservación de la positividad, el crecimiento y la concavidad permite fijar $\mathbb{P}_3$, pero hay que interpolar f(0), Df(1), $D^2f(0)$ y $D^2f(1)$. Si queremos fijar sólo $\mathbb{P}_2$ hay que interpolar f(0) y Df(1). Luego sólo podemos fijar $\mathbb{P}_1$, por ejemplo con el operador de Bernstein.

Positividad, decrecimiento y convexidad

La conservación de la positividad, el decrecimiento y la convexidad permite fijar $\mathbb{P}_3$, pero hay que interpolar f(1), Df(1), $D^2f(0)$ y $D^2f(1)$. Si queremos fijar sólo $\mathbb{P}_2$ hay que interpolar f(1) y Df(1). Luego sólo podemos fijar $\mathbb{P}_1$, por ejemplo con el operador de Bernstein.

Positividad, decrecimiento y concavidad

La conservación de la positividad, el decrecimiento y la concavidad permite fijar $\mathbb{P}_3$, pero hay que interpolar f(1), Df(0), $D^2f(0)$ y $D^2f(1)$. Si queremos fijar sólo $\mathbb{P}_2$ hay que interpolar f(1) y Df(0). Luego sólo podemos fijar $\mathbb{P}_1$, por ejemplo con el operador de Bernstein.

Positividad y convexidad

La conservación de la positividad y la convexidad sólo permite fijar $\mathbb{P}_1$ y ésto puede hacerse con el operador de Bernstein.

Positividad y concavidad

La conservación de la positividad y la concavidad permite fijar $\mathbb{P}_3$, pero para ello hay que interpolar $D^2f(0)$ y $D^2f(1)$. En cambio, sí es posible fijar $\mathbb{P}_2$ con OPL que utilicen datos lagrangianos. Por ejemplo, el operador $B^2{}_n$ fija las parábolas y al conservar la concavidad e interpolar a la función en los extremos conserva concavidad y positividad conjuntamente.

Crecimiento y convexidad

La conservación del crecimiento y la convexidad permite fijar los polinomios de $\mathbb{P}_3$. Para ello hay que interpolar la derivada segunda de la función en los puntos 0 y 1. Si queremos fijar $\mathbb{P}_2$ hay que interpolar Df(0). Luego sólo es posible fijar $\mathbb{P}_1$, por ejemplo con el operador de Bernstein.

Crecimiento y concavidad

La conservación del crecimiento y la convexidad permite fijar $\mathbb{P}_3$. Para ello debemos interpolar $D^2f(0)$ y $D^2f(1)$. Si queremos fijar $\mathbb{P}_2$ hay que interpolar $Df(1)$. Luego sólo es posible fijar $\mathbb{P}_1$, por ejemplo con el operador de Bernstein.

V.3. OPL con datos de momentos

Estudiaremos operadores polinomiales de una forma concreta, a saber,

$$K_n(f) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(x) \int_0^1 f(t)R_i(t)\,dt \quad \text{con } Q_i, R_i \in \mathbb{P}_n$$

Estos operadores así definidos son lineales. En el caso de que $Q_i=R_i=\ell_i$ polinomio i-ésimo de Legendre, el operador que se obtiene es el de proyección de L^2. Si $Q_i=(n+1)b_{n,i}$ y $R_i=b_{i,n}$ se obtiene el operador de Durrmeyer-Derriennic. Además de estos operadores existen otros que también responden a este tipo.

Si fijamos una base de $\mathbb{P}_n$, $\{h_i\}$ el operador K_n puede escribirse en la forma

$$K_n(f) = (h_0,..,h_n) \int_0^1 f(t)\, A\, (h_0,h_1,..,h_n)^T$$

donde A es una matriz (n+1)x(n+1).

En el caso de que la base sea la de Legendre $\{\ell_i\}$ llamaremos $L=(l_{ij})$ a la matriz que se obtiene, así mismo cuando la base sea la de Bernstein la matriz se denotará $B=(B_{ij})$.

Propiedad V.3.1. El operador K_n conserva el grado de los polinomios si y sólo si la matriz L es triangular superior y regular.

Demostración. Basta ver la imagen de los polinomios ℓ_i, $K_n(\ell_i)=\sum_{i=0}^{n} \ell_j \, l_{ji}$ por tanto para que tenga grado i es necesario que $l_{ji}=0$ para $j>i$ y $l_{ii}\neq 0$.

■

Propiedad V.3.2. El operador K_n fija el espacio $\mathbb{P}_k$ si $l_{ij}=\delta_{ij}$ para $i \in \{0,\dots,n\}$, $j\in\{0,\dots,k\}$.

Demostración. Basta ver la imagen de un polinomio de la base.

■

Propiedad V.3.3. Condición necesaria y suficiente para que K_n no aumente el grado de los polinomios de $\mathbb{P}_k$ es que

$$\sum_{j=0}^{n} (j+m)!\,/\,j! \;\; \Delta^m B_{ij} = \text{constante independiente de i para } m=0,\dots,k$$

Además K_n conserva el grado si la constante es distinta de cero.

Demostración. Basta demostrarlo para los polinomios x^m con $m=0,...,k$. En la base de Bernstein la imagen será de grado menor o igual que m si sus coeficientes están sobre un polinomio de grado menor o igual que m. Es decir, que la diferencia m-ésima progresiva de los coeficientes del polinomio en la base de Bernstein ha de ser constante. La diferencia progresiva de los coeficientes es

$$\int_0^1 x^m (\Delta^m B_{i0} b_{0n}(x) + \dots + \Delta^m B_{in} b_{nn}(x))\, dx = \sum_{j=0}^{n} (j+m)!\, n! / (j!\, (n+m+1)!)\, \Delta^m B_{ij}$$

El grado se conservará si la constante es distinta de cero.

■

Propiedad V.3.4. El operador K_n deja fijo el polinomio x^m si $\sum_{j=0}^{n} (j+m)! / j!\ B_{ij} = 0$ para $i=0,..,m-1$ y $\sum_{j=0}^{n} (j+m)!\, n! / (j!(n+m+1)!)\, \Delta^m B_{ij} = m!(n-m)! / n!$ para $i=0,..,n-m$

Demostración. Basta calcular la imagen de x^m e igualarla a x^m.

■

Definición V.3.5. Diremos que el operador K_n es **simétrico** si para toda función continua se tiene que $K_n(f(t))(x)= K_n(f(1-t))(1-x)$.

Proposición V.3.6. El operador K_n es simétrico si y sólo si

i) $\forall f \in C[0,1]$ tal que $f(x)=f(1-x) \Rightarrow K_n(f)(x)=K_n(f)(1-x)$

ii) $\forall f \in C[0,1]$ tal que $f(x)=-f(1-x) \Rightarrow K_n(f)(x)=-K_n(f)(1-x)$

Demostración. La necesidad es inmediata, para la suficiencia basta descomponer cualquier función $f(x)$ como $f(x)=(f(x)+f(1-x))/2 + (f(x)-f(1-x))/2$, es decir, como una función del tipo i) más otra del tipo ii).

■

Propiedad V.3.7. El operador K_n es simétrico si y sólo si $B_{ij}=B_{n-in-j}$ con $i,j=0,..,n$.

Demostración. Basta utilizar la igualdad $b_{i,n}(1-x)=b_{n-i,n}(x)$.

■

Propiedad V.3.8. El operador K_n es simétrico si y sólo si $l_{ij}=0$ para $i+j=$ impar $i,j=0,...,n$.

Demostración. Se utiliza el hecho de que $\ell_i(x)=(-1)^i\ell_i(1-x)$.

■

Propiedad V.3.9. El operador K_n conserva el área si y sólo si $B_{00}=1$ y $B_{0j}=0$ para $j=1,...,n$

Propiedad V.3.10. El operador K_n conserva el área si y sólo si $\sum_{i=0}^{n} B_{ij} = n+1$ para $j=0,..,n$.

Propiedad V.3.11. El operador adjunto del operador K_n es un operador del mismo tipo cuya matriz es la matriz traspuesta.

Propiedad V.3.12. El operador K_n es autoadjunto si y sólo si la matriz es simétrica respecto de cualquier base.

En la tesis de Derriennic [De] se demuestra la siguiente propiedad.

Propiedad V.3.13. Si H es un espacio de Hilbert y $\{H_m\}$ es una sucesión creciente de subespacios de H tales que dim H_m = m. Si L es un operador definido sobre H tal que $L(H_m) \subset H_m$ y $L^*(H_m) \subset H_m$, entonces la sucesión ortogonal $\{v_m\}$, con $v_m \in H_m$ y v_m ortogonal a H_{m-1} es una sucesión de vectores propios.

Propiedad V.3.14. Si tanto el operador K_n como su adjunto conservan el grado entonces los polinomios propios son los de Legendre. Además, se cumple que si los polinomios propios son los de Legendre entonces K_n conserva el grado y es autoadjunto.

Demostración. La primera parte es consecuencia del resultado anterior. La segunda parte es inmediata pues si los polinomios propios son los de Legendre entonces no se aumenta el grado de los polinomios y la matriz en la base de Legendre del operador K_n es diagonal, en consecuencia el operador es autoadjunto.

■

Propiedad V.3.15. Si K_n conserva el grado y respecto de alguna base de

$\mathbb{P}_n$ tiene matriz A entonces,

A es simétrica si y sólo si los polinomios propios son los de Legendre. Además, si en una base la matriz es simétrica en otra base cualquiera también lo es.

Demostración. Consecuencia de lo anterior.

■

Propiedad V.3.16. Para todo $p \in [1,\infty]$ se tiene que

$$\|K_n(f)\|_p \le (1/(n+1)) \, [\max_j \sum_{i=0}^{n} |B_{ij}| \,]^{1/p} \, [\max_i \sum_{j=0}^{n} |B_{ij}| \,]^{(p-1)/p} \, \|f\|_p$$

Demostración. La demostración se realiza para el caso p=1 y para el caso $p=\infty$. Aplicando el teorema de convexidad de Riesz [R-N] se tiene el resultado deseado.

p=1

$$\int_0^1 \Big| \sum_{i=0}^{n} b_{in}(x) \int_0^1 f(t) \, (\sum_{j=0}^{n} B_{ij} \, b_{jn}(t)) \, dt \, \Big| \, dx \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} b_{in}(x) \, \Big| \int_0^1 f(t) \, (\sum_{j=0}^{n} B_{ij} \, b_{jn}(t)) \, dt \, \Big| \, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} 1/(n+1) \, \Big| \int_0^1 f(t) \, (\sum_{j=0}^{n} B_{ij} \, b_{jn}(t)) \, dt \, \Big| \le$$

$$\le 1/(n+1) \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 | f(t)| \, \Big| \sum_{j=0}^{n} B_{ij} \, b_{jn}(t) \Big| \, dt \, | \le$$

$$\leq \; 1/(n+1) \int_0^1 |\, f(t)| \sum_{i,j=0}^{n} |B_{ij}|\, b_{jn}(t)\; dt \leq$$

$$\leq \; 1/(n+1) \; \| f(t)\|_1 \; \max_j \sum_{i=0}^{n} |B_{ij}|$$

$p=\infty$

$$|K_n(f)(x)| = \; |\sum_{i=0}^{n} b_{in}(x) \int_0^1 f(t) \,(\sum_{j=0}^{n} B_{ij}\, b_{jn}(t)\,)\, dt\,| \leq$$

$$\leq \max_i \; |\int_0^1 f(t) \,(\sum_{j=0}^{n} B_{ij}\, b_{jn}(t)\,)\, dt\,| \leq$$

$$\leq \max_i \int_0^1 |f(t)|\, |\sum_{j=0}^{n} B_{ij}\, b_{jn}(t)\,|\, dt \leq$$

$$\leq \max_i \; \|f\|_\infty \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} |B_{ij}\,|\, b_{jn}(t)\; dt =$$

$$= \|f\|_\infty \max_i \sum_{j=0}^{n} |B_{ij}\,|\; 1/(n+1)$$

■

Corolario V.3.17. Si K_n es autoadjunto entonces para todo $p \in [1,\infty]$ se tiene que

$$\|K_n(f)\|_p \leq (1/(n+1)) \max_i \sum_{j=0}^{n} |B_{ij}| \;\; \|f\|_p$$

Teorema V.3.18. Supongamos que K_n lleva $\mathbb{P}_k$ en $\mathbb{P}_k$, para algún $k\in\{0,\dots,n\}$.

Una condición suficiente para la conservación de la (k+1)-convexidad es que los vectores $v_i=(v_{i0},v_{i1},\dots,v_{in})$ $i=0,\dots,n-k-1$, donde v_{ij} es la diferencia progresiva de orden k+1 respecto de i de B_{ij}, tenga exactamente k+1 cambios de signo estrictos (excluidos los ceros) y siendo el último signo positivo.

Demostración. Para que se conserve la (k+1)-convexidad es suficiente que para toda función f, (k+1)-convexa los coeficientes en la base de Bernstein de $K_n(f)$ sean (k+1)-convexos. Es decir, que si $K_n(f)(x) = \Sigma\, a_i\, b_{in}(x)$ es suficiente que $\Delta^{k+1}a_i \geq 0$ para $i=0,\dots,n-k-1$. Luego es suficiente que

$$\int_0^1 f(t)\,(\Delta^{k+1}B_{i0},\dots,\Delta^{k+1}B_{in})(b_{0n}(t),\dots,b_{nn}(t))^T\,dt \geq 0$$

El polinomio $p_i(x)= (\Delta^{k+1}B_{i0},\dots,\Delta^{k+1}B_{in})(b_{0n}(x),\dots,b_{nn}(x))^T$ es ortogonal a $\mathbb{P}_k$ dado que K_n conserva $\mathbb{P}_k$. Por tanto el polinomio p_i se anula en k+1 ocasiones y tiene k+1 cambios de signo estrictos en (0,1) al menos. Por otra parte, dado que los coeficientes del polinomio en la base de Bernstein tiene sólo k+1 cambios de signo, por la propiedad de disminución de la variación de los polinomios de Bernstein se tiene que existen k+3 puntos distintos $0=r_0<r_1<\dots<r_{k+1}<r_{k+2}=1$ tales que $(-1)^j p_i(x)\geq 0$ para $x\in[r_{k-j+1},r_{k-j+2}]$. Consideremos el polinomio $q(x)\in\mathbb{P}_k$ que interpola a f en los puntos r_j para $j=1,\dots,k+1$. Dado que f es (k+1)-convexa se tiene que f-q toma signos alternos entre los puntos de interpolación de modo que $(f-q)p_i$ es positivo en [0,1]. Así

$$\int_0^1 f(x)\, p_i(x)\, dx = \int_0^1 (f(x)-q(x))p_i(x)\, dx \geq 0$$

■

Corolario V.3.19. Si K_n fuese un operador del tipo estudiado pero con función peso la tesis sigue siendo cierta bajo las mismas hipótesis.

Corolario V.3.20. Si el operador K_n viene dado por

$$K_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i\, b_{in}(x) \int_0^1 f(t)\ b_{in}(t)\ w(t)\ dt \quad \text{con } w(t) \geq 0.$$

con $A_i > 0$ y lleva $\mathbb{P}_k$ en $\mathbb{P}_k$ para algún $k< n$ se tiene que K_n conserva la $(k+1)$-convexidad.

Demostración. En este caso la matriz es diagonal. Dado que al efectuar las diferencias progresivas se hacen columna a columna y que para aplicar el resultado anterior no importan las cantidades que aparecen en los vectores v_i sino sólo su signo podemos tomar $A_i=1$ para $i=0,\ldots,n$. En estas condiciones se demuestra por inducción sobre k que $\Delta^{k+1} B_{ij} = (-1)^{k+j-i} k! /((j-1)!(k-j+i)!)$ para $0 \leq j-i \leq k$ y $i=0,\ldots,n-k$, fuera de este caso se tiene $\Delta^{k+1} B_{ij} = 0$.

Aparecen así $k+1$ números no nulos y que van cambiando de signo de forma alternada, el último de los cuales es positivo. Antes y después pueden aparecer ceros que no influyen. Al aplicar $\mathbb{P}_k$ en $\mathbb{P}_k$ se tiene por el teorema anterior la conservación de la (k+1)-convexidad.

■

Corolario V.3.21. El operador de Durrmeyer-Derriennic y los operadores de Bernstein-Jacobi introducidos por Sablonnière conservan todas las i-convexidades.

Demostración. Son operadores que conservan el grado y tiene matriz diagonal con coeficientes positivos.

■

VI. INTERPOLACION Y CONVERGENCIA EN VARIAS VARIABLES.

Los resultados de interpolación obtenidos en el capítulo II para operadores polinomiales lineales en el intervalo [0,1] nos llevaron a cuestionarnos si éstos podían extenderse a funciones de varias variables. De esta forma quedó delimitado uno de los objetivos del presente capítulo, el otro objetivo será el estudio de la convergencia de sucesiones de operadores, dando una extensión del teorema de Korovkin.

VI.1. Interpolación.

Propiedades de interpolación para OPL en varias variables. En primer lugar veamos algunas coincidencias para OPL en C[0,1].

La conservación de la positividad y fijación de las rectas implicaban la interpolación de los datos f(0) y f(1). Observemos que existen en $\mathbb{P}_1$ dos rectas, x y 1-x, positivas en todo el intervalo y que se anulan sólo en 0 y en 1, respectivamente. No existen otros puntos en [0,1] con esta propiedad.

Asimismo, la conservación de forma conjunta de la positividad y el crecimiento junto con la fijación de las rectas obliga al operador a interpolar f(0); y existe en $\mathbb{P}_1$ una función positiva y estrictamente creciente, g(x)=x, que se anula sólo en 0. Para ningún otro punto del intervalo [0,1] existe una función de $\mathbb{P}_1$ que sea positiva y estrictamente creciente anulándose sólo en aquel punto.

La conservación conjuntamente de la positividad y el crecimiento y fijar las parábolas obliga al operador a interpolar f(0), Df(0) y Df(1) (Ver Teorema II.5.5.). Existen en $\mathbb{P}_2$ tres funciones $4x - x^2$, x^2+1 y $2x-x^2+1$ que verifican que son positivas y con derivada positiva, además lo son estrictamente salvo: la primera función que se anula en el 0, la segunda función cuya derivada se anula en 0 y la tercera función cuya derivada se anula en 1.

Por tanto parece , que para la interpolación de un dato es necesario que en el espacio de funciones fijas exista una función que verifique estrictamente todas las i-convexidades del cono que se conserve excepto una de ellas, que también debe verificar estrictamente en todos los puntos salvo en el de interpolación. Dicha i-convexidad y dicho punto determinarían el dato de interpolación, es decir, si sólo la i-convexidad es no estricta en x=a, el dato de interpolación será $D^i f(a)$.

Intentemos realizar lo expuesto en regiones del plano comenzando con la conservación de la positividad y dejando fijos los planos.

Definición VI.1.1. Un punto z del subconjunto X del plano se dice que es un **vértice exterior** de X si existe una recta en el plano tal que X queda en uno de los semiplanos que la recta determina y sólo el punto z está en la recta.

Dicho de otra forma, z será un vértice exterior si existe una función f((x,y))= ax+by+c tal que f(z)=0 y f(w)>0 para todo w ∈ X-{z}.

Los vértices exteriores serán puntos frontera y en el caso de ser X un conjunto compacto y convexo los vértices exteriores serán puntos extremos (es decir que no pueden ser expresados en la forma

$$z = t\,w + (1\text{-}t)\,v \text{ con } 0<t<1,\ v \neq w\ ,\quad v,w \in X)$$

Si z es un vértice exterior existe una recta que pasa por z y deja el resto del conjunto X en uno de los semiplanos estrictamente. Cualquier otra recta que pase por z sólo puede intersectar al conjunto X en la semirecta del semiplano en que está X. Por tanto z no puede ser un punto interior a ningún segmento cuyos extremos estén en X y sean distintos.

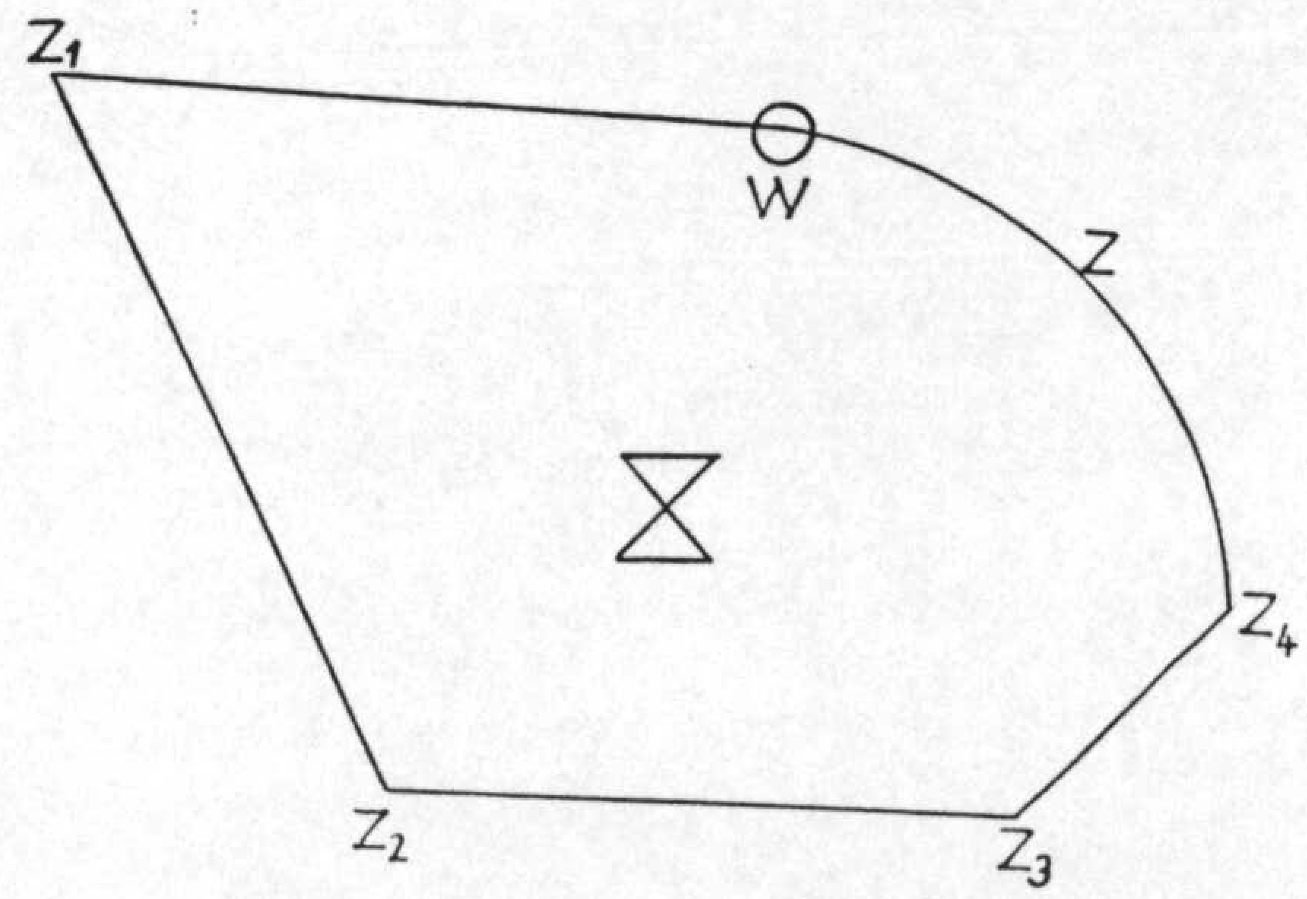

Figura VI.1.2

Por el contrario no todo punto extremo es vértice exterior. Por ejemplo, consideremos un compacto convexo cuya frontera tenga un segmento y un arco de curva que sea tangente al segmento. El punto donde se produce el cambio de la recta a la curva es un punto extremo que no es vértice exterior.(Ver figura VI.1.2)

Teorema VI.1.3. Sea X un subconjunto compacto del plano y sea K un OPL $K:C(X)\rightarrow \mathbb{P}_n$ positivo y que fije los polinomios de $\mathbb{P}_1$, entonces el operador interpola todas las funciones continuas en los vértices exteriores.

Demostración: Sea g una función de C(X) y z un vértice exterior de X. Por ser z vértice exterior, existe una función $f \in \mathbb{P}_1$ tal que f(z)=0 siendo mayor que cero en el resto de X. Por la continuidad de g, se tiene que escogido cualquier $\varepsilon>0$ existe un subconjunto cerrado y compacto $C_\varepsilon= \{w\in X ; |g(w) - g(z)| \geq \varepsilon\}$. Por ser f continua alcanza un valor mínimo en C_ε, denotémoslo m. Se tiene que m>0. Además, existe una constante M tal que $|g(w) - g(z)| \leq M$ en X. Si tomamos las funciones

$$p(w)= \varepsilon + g(z) + M/m\ f(w)$$

y

$$q(w)=g(z) - \varepsilon - M/m\ f(w)$$

se tiene que $p-g \geq 0$ y $g-q \geq 0$. Por la positividad de K se tiene que

$$K(p)\geq K(g)\geq K(q)$$

y por dejar los polinomios de $\mathbb{P}_1$ fijos, al evaluar en z se tiene

$$\varepsilon + g(z) \geq K(g)\,(z) \geq g(z) - \varepsilon$$

y se concluye la tesis sin más que hacer tender ε a 0.

■

Una vez que hemos obtenido un primer resultado en la linea de lo previsto según los ejemplos en una variable intentaremos hacer esto de forma general.

Necesitaremos considerar un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Con objeto de poder definir sin problemas derivadas parciales será el cierre de un dominio acotado.

En cuanto a los conos consideraremos funciones que tengan una cierta derivada parcial, $D^i f$, positiva y además pertenezcan a un cono cualquiera.

Para las propiedades de interpolación exigiremos que un espacio de funciones V quede fijo. En cuanto al punto donde tendrá lugar la interpolación de esa derivada parcial generalizaremos la definición de vértice exterior.

Definición VI.1.4. Un punto z del subconjunto X será un **vértice exterior** para la derivada parcial D^i con respecto a V. Si existe en V una función f tal que $D^i f(z)=0<D^i f(w)$ para cualquier otro punto w de X.

Teorema VI.1.5. Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ que sea cierre de un dominio acotado. Sea D^i una cierta derivada parcial y $C^i(X) = \{ f; D^i f \text{ continua} \}$

Sea $P = \{ f \in C^i(X) ; D^i f \geq 0 \}$ y D un cono de $C^i(X)$.

Sea V un subespacio de $C^i(X)$ y $z \in X$ verificando

$\exists\, p \in V$ tal que $D^i p = 1$

$\exists\, \varphi_z \in V \cap D$ tal que

a) $D^i \varphi_z(z) = 0 < D^i \varphi_z(x)$, $\forall x \in X - \{z\}$(es decir, vértice exterior de orden i respecto de V)

b) $\forall f \in C^i(X)\ \exists\, \alpha = \alpha(f) > 0$ tal que $\varphi_z + \varepsilon f \in D$, $\forall \varepsilon \in [0, \alpha]$

Sea K: $C^i(X) \to C^i(X)$ un operador lineal verificando:

a) $K(P \cap D) \subset P$

b) $\forall f \in V\ D^i K(f)(z) = D^i f(z)$

En estas condiciones $\forall f \in C^i(X)$ se tiene que $D^i K(f)(z) = D^i f(z)$

Comentarios: Por la hipótesis a) la función φ_z juega un papel similar al que hacía el plano f en el teorema anterior. La hipótesis b) está en similitud con lo que sucedía en una variable al imponer que todas las propiedades se verificasen estrictamente salvo una de ellas.

Demostración: Sea $f \in C^i(X)$ por la compacidad existe $M_1 > 0$ tal que

$$-M_1 < D^i f(z) - D^i f(x) < M_1 \ , \ \forall x \in X$$

Por la continuidad, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$-\varepsilon < D^i f(z) - D^i f(x) < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in B(z, \delta)$$

Dado que $D^i \varphi_z(x) \geq M_2$, $\forall\, x \in X - B(z,\delta)$ y para cierto $M_2 > 0$.

$$-\varepsilon - D^i \varphi_z(x) M_1/M_2 < D^i f(z) - D^i f(x) < \varepsilon + D^i \varphi_z(x) M_1/M_2, \forall x \in X$$

Así tenemos que $M\varphi_z(x) - f(x) + D^i f(z)p(x) + \varepsilon p(x) \in P \cap D$

$$M\varphi_z(x) + f(x) - D^i f(z)p(x) + \varepsilon p(x) \in P \cap D$$

haciendo $M > M_1/M_2$ y suficientemente grande. Aplicando K se obtiene que

$$-\varepsilon D^i K(p)(x) - D^i K(\varphi_z)(x) M < D^i f(z) D^i K(p)(x) - D^i K(f)(x) <$$

$$< \varepsilon D^i K(p)(x) + D^i K(\varphi_z)(x) M, \ \forall x \in X$$

En particular, para $x = z$ se tiene

$$-\varepsilon < D^i f(z) - D^i K(f)(z) < \varepsilon.$$

Dado que ε es arbitrario se concluye que $D^i K(f)(z) = D^i f(z)$.

■

En el caso en que sólo nos interese la conservación de una propiedad basta considerar como cono de funciones D el conjunto $C^i(X)$.

Corolario VI.1.. Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y z un punto de X verificando que existe una función φ_z de $\mathbb{P}_1$ tal que $\varphi_z(z)=0 < \varphi_z(x)$, para cualquier otro x de X.

Sea $K:C(X) \rightarrow C(X)$ un operador lineal positivo que fija elemento a elemento $\mathbb{P}_1$. Entonces para cualquier función f de C(X), K(f)(z)=f(z).

Demostración: Basta tomar D=C(X) y V=$\mathbb{P}_1$

■

En el plano se conoce el operador de Bernstein sobre el triángulo y por medio del producto tensorial se puede definir un operador de Bernstein sobre el cuadrado [0,1] x [0,1].

Las propiedades de interpolación nos pueden ayudar a determinar la existencia de ciertos operadores conservativos. El operador de Bernstein en el intervalo [0,1] tiene gran interés debido, entre otras razones a las siguientes propiedades:

a) Conservan la positividad de las funciones

b) No aumentan el grado de los polinomios

c) Fijan $\mathbb{P}_1$

A continuación abordaremos el problema de existencia de operadores polinomiales lineales en dominios más generales del plano que verifiquen las propiedades a), b) y c).

Teorema VI.1.7. Sea X un polígono convexo del plano con cinco ó más vértices exteriores. En esas condiciones no existe un OPL $K{:}C(X)\to \mathbb{P}_n$ que sea positivo, fije $\mathbb{P}_1$ y lleve $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_2$.

Demostración: Por el Teorema VI.1.3 el operador K tendría que interpolar en los cinco o más vértices exteriores que tiene X. Si los puntos no están sobre una cónica cualquier función de $\mathbb{P}_2$ quedaría fija.

Si los puntos se encuentran sobre una cónica entonces existen funciones en $\mathbb{P}_2$ que se anulan sobre todos los vértices exteriores con lo que no necesariamente tendrían que quedar fijos los polinomios de $\mathbb{P}_2$. La imagen de un polinomio de $\mathbb{P}_2$ será él mismo más un múltiplo de la cónica, C.

Consideremos las rectas que determinan dos lados del polígono r_1 y r_2. Por la convexidad del dominio se pueden escoger las rectas para que sobre el dominio X sea el producto positivo. Este producto, p, es una función de $\mathbb{P}_2$. Su transformado será p+AC.

Si A fuese negativo entonces el polinomio imagen sobre los lados r_1 y r_2 sería negativo.

Si algún A es positivo entonces podemos considerar un plano, q, que contenga la recta r_1 y verifique $q-p\geq 0$ en X. Entonces su imagen sería q-(p+AC) que no es positivo en el lado r_1.

Si A es cero para todas las posibles elecciones de dos lados, $\mathbb{P}_2$ quedaría fijo. Efectivamente, al tener 5 o más vertices siempre es posible encontrar tres lados no paralelos dos a dos.

Se realiza en el plano un movimiento afín para que uno de los lados esté sobre el eje horizontal. Las ecuaciones de los tres lados serán

$r_1 = y + C$ (al quedar fijo $\mathbb{P}_1$ no importa la constante)

$r_2 = y + ax + C$

$r_3 = y + bx + C$ (con $b \neq a$ por no ser rectas paralelas)

Si $r_1 r_2$, $r_2 r_3$ y $r_1 r_3$ quedan fijos entonces

$y^2 + ayx$; $y^2 + bxy$; $y^2 + (b+a)xy - abx^2$ (Al quedar fijo $\mathbb{P}_1$ no importan los otros términos)

Luego restando las dos primeras funciones llegamos a que xy queda fijo y por tanto tambien y^2 . Así mismo del tercer producto obtenemos que tambièn x^2 es fijo.

El teorema de convergencia que veremos más adelante nos asegurará que si $\mathbb{P}_2$ queda fijo el operador tiene que ser la identidad. Como esto no es posible se llega a que no podemos construir un operador que verifique las hipótesis.

■

Del teorema anterior resulta que los únicos polígonos convexos donde podríamos definir OPL positivos y que fijen los planos son de tres y de cuatro vértices. De tres vértices conocemos el de Bernstein. Para cuatro vértices no conocemos si existirá o no un operador con tales propiedades.

VI.2. Convergencia de operadores conservativos

En esta sección trataremos brevemente la convergencia de operadores lineales conservando ciertos conos. Para ello, consideraremos operadores que conserven las funciones que tienen varias propiedades.

Teorema VI.2.1: Sea X el cierre de un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea D^i una cierta derivada parcial $C^i(X) = \{ f; D^i f \text{ continua} \}$

Sea $P = \{ f \in C^i(X) ; D^i f \geq 0 \}$ y D un cono de $C^i(X)$.

Sea V un subespacio de $C^i(X)$ verificando

1) $\exists\, p \in V$ tal que $D^i p = 1$

2) Para todo punto $z \in X$, $\exists\, \varphi_z \in V \cap D$ tal que

a) $D^i \varphi_z(z) = 0 < D^i \varphi_z(x)$, $\quad \forall x \in X - \{z\}$

b) $\forall f \in C^i(X)$ $\exists\, \alpha = \alpha(f) > 0$ tal que $\varphi_z + \varepsilon f \in D$, $\forall \varepsilon \in [0, \alpha]$

Sea $K_n: C^i(X) \to C^i(X)$ una sucesión de operadores lineales verificando:

a) $K_n(P \cap D) \subset P$

b) $\forall f \in V \quad D^i K_n(f) \rightarrow D^i f$ uniformemente.

En estas condiciones $\forall f \in C^i(X) \quad D^i K_n(f) \rightarrow D^i f$ uniformemente

Demostración: Seguiremos un razonamiento similar al desarrollado en el teorema de interpolación.

Sea f una función cualquiera de $C^i(X)$. Por la continuidad de $D^i f$ y la compacidad de X, existe $M>0$ tal que $-M < D^i f(x) - D^i f(y) < M$, para cualesquiera dos puntos de X. Además, fijado un punto $z \in X$ y un $\varepsilon>0$ arbitrario, existe $\delta>0$ tal que $-\varepsilon < D^i f(x) - D^i f(z) < \varepsilon$ para todos los puntos de X que disten menos de δ del punto z.

Por la hipótesis 2) existe una función φ_z verificando a) y b). Consideremos M_δ el mínimo valor que toma la función $D^i \varphi_z$ fuera de la bola abierta de centro z y radio δ, entonces se verifica que

$$-\varepsilon - D^i \varphi_z(x)\, ML/M_\delta < D^i f(x) - D^i f(z) < \varepsilon + D^i \varphi_z(x)\, ML/M_\delta$$

para cualquier punto x de X y cualquier L mayor que 1.

Tomando L suficientemente grande se obtiene que las funciones $\varphi_z\, ML/M_\delta + \varepsilon p + f - pD^i f(z)$ y $\varphi_z\, ML/M_\delta + \varepsilon p - f + pD^i f(z)$ están en $P \cap D$. Luego la imagen por K_n será una función de P y tendremos que en el punto z

$$-\varepsilon D^i K_n(p)(z) - D^i K_n(\varphi_z)(z)\, ML/M_\delta < D^i f(z) D^i K_n(p)(z) - D^i K_n(f)(x) <$$

$$< \varepsilon D^i K_n(p)(z) + D^i K_n(\varphi_z)(z)\, ML/M_\delta$$

Teniendo en cuenta la convergencia para las funciones de V se llega a la conclusión de que $D^iK_n(f)(z)\to D^if(z)$.

Veamos la equicontinuidad de la sucesión $D^iK_n(f)$ en el punto z. Sea $\varepsilon>0$ ¿Existe $\delta>0$ tal que $|x-z|<\delta$ implica $|D^iK_n(f)(x)-D^iK_n(f)(z)|<\varepsilon$?. Consideremos las funciones

$$F(x)=A\ \varphi_z(x) + (\varepsilon/4 + D^if(z))p(x)$$

$$G(x)= p(x)(D^if(z)-\varepsilon/4) - A\ \varphi_z(x)$$

donde A es una constante positiva suficientemente grande para que F-f y f-G pertenezcan a $P\cap D$.

Por la continuidad de D^if y de $AD^i\varphi_z$ existe $\delta>0$ tal que $|D^if(x)-D^if(z)|<\varepsilon/8$ y $|AD^i\varphi_z(x)|<\varepsilon/8$ para $|x-z|<\delta$. Por la convergencia uniforme de $D^iK_n(F)$ y $D^iK_n(G)$ se tiene que existe un N tal que si $n\geq N$ entonces $|D^iK_n(F)-D^iF| < \varepsilon/8$ y $|D^iK_n(G)-D^iG| < \varepsilon/8$. Luego,

$$|D^iK_n(F)(x)-(D^if(z)+\varepsilon/4)| \leq |D^iK_n(F)(x)-D^iF(x)| + |D^iF(x)-(D^if(z)+\varepsilon/4)| \leq$$

$\varepsilon/4$ para $|x-z|<\delta$ y $n\geq N$

Análogamente $|D^iK_n(G)(x)-(D^if(z)-\varepsilon/4)| < \varepsilon/4$.

Finalmente dado que F-f y f-G pertenecen a $P\cap D$

$$D^iK_n(F)(x)\geq D^iK_n(f)(x) \geq D^iK_n(G)(x),$$

luego

$$D^i f(z)+\varepsilon/2 \geq D^i K_n(f)(x) \geq D^i f(z) - \varepsilon/2 \text{ para } |x-z| < \delta$$

Por tanto $|D^i K_n(f)(x)-D^i K_n(f)(z)| \leq \varepsilon$ con $|x-z|<\delta$, $n \geq N$.

Por el Teorema de Ascoli-Arzela (Ver por ejemplo[Br], o [Y]) se tiene la convergencia uniforme.

■

Corolario VI.2.2. Sea X el cierre de un dominio acotado en $\mathbb{R}^m$ y sea $\{K_n\}$ una sucesión de operadores lineales positivos $K_n : C(X) \rightarrow C(X)$. Sea V el espacio vectorial engendrado por las funciones 1, $x_1,..,x_m$, $x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_m{}^2$.

Si $K_n(f) \rightarrow f$ uniformemente para toda función del espacio V entonces converge para cualquier función de C(X).

Demostración. Sea $z=(z_1,...,z_m)$ un punto cualquiera de X. Consideremos la función $\varphi_z(x) = (x_1 - z_1)^2+...+(x_m - z_m)^2$. Observemos que $\varphi_z \in V$ y se verifican las hipótesis del teorema anterior.

■

Utilizando el teorema anterior podemos obtener condiciones suficientes para la convergencia de sucesiones de operadores que conserven conos de la forma $C(i,j,\varepsilon)$

y $C(\varepsilon,\delta)$ para funciones definidas en el intervalo $[0,1]$.

Corolario VI.2.3. Sea $K_n:C^j([0,1]) \to C^j([0,1])$ una sucesión de operadores lineales verificando:

$K_n(C(i,j,\varepsilon))\subset C(j,j,\varepsilon)$

$D^jK_n(x^h) \to D^jx^h$ uniformemente para $h=i,i+1,\ldots,j+2$.

entonces $D^jK_n(f) \to D^jf$ para toda función $f \in C^j([0,1])$.

Demostración : Sea z un punto cualquiera de $[0,1]$. En este caso $P=C(j,j,\varepsilon)$, $D=C(i,j-1,\varepsilon)$ y $V=<x^i,..,x^{j+2}>$. Definimos $\varphi_z \in V\cap C(i,j-1,\varepsilon)$ tal que $D^j\varphi_z(x)=\varepsilon_j(x-z)^2$ y sucesivamente $D^r\varphi_z(0)=\varepsilon_r(1+Q_r)$ con $Q_r\geq \left| D^{r+1}\varphi_z(x)\right|$ $\forall x \in [0,1]$, con $r=j-1,..,i$.
Veamos que se verifican las hipótesis del teorema de convergencia.

$\varepsilon_j(D^j\varphi_z)(z) = 0$ y si $x\neq z$ se tiene que

$\varepsilon_j(D^j\varphi_z(x)) > 0$

Para las derivadas de orden inferior se tiene

$\varepsilon_r(D^r\varphi_z)(x) \geq \varepsilon_r(D^r(\varphi_z))(0) - \text{máx}|D^{r+1}\varphi_z| \geq 1.$

Al ser mayores que 1 se verifica la segunda de las condiciones del teorema referentes a la función φ_z .

■

Corolario VI.2.4. Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i\neq0$ y $\delta_j\neq0$ pero $\delta_h=0$ para $h=0,1,\ldots,i-1,j+1,j+2,\ldots,n$, y tal que $\delta_h=0$ implica $\delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$, para $i+1\leq h\leq j-1$.

Sea $K_n:C^j[0,1] \to C^j[0,1]$ una sucesión de operadores lineales tales que

$K_n(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(j,j,\varepsilon)$.

$D^jK_n(x^h) \to D^jx^h$ uniformemente para $h=i,i+1,\ldots,j+2$.

entonces $D^jK_n(f) \to D^jf$ para toda función $f \in C^j([0,1])$

Demostración. Es consecuencia del corolario anterior, pues los operadores K_n llevan el cono $C(i,j,\varepsilon)$ en $C(j,j,\varepsilon)$.

■

Corolario VI.2.5. Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i\neq0$ y $\delta_j\neq0$ pero $\delta_h=0$ para $h=0,1,\ldots,i-1,j+1,j+2,\ldots,n$, y también que existe un valor r, $i<r<j$, tal que $\delta_r=0$ y $\delta_{r-1}=1=\varepsilon_{r+1}$.

Sea $K_n:C^j[0,1] \to C^j[0,1]$ una sucesión de operadores lineales tales que

$K_n(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(r-1,r-1,\varepsilon)$.

$D^{r-1}K_n(x^h) \to D^{r-1}x^h$ uniformemente para $h=i,i+1,\dots,j$.

entonces $D^{r-1}K_n(f) \to D^{r-1}f$ para toda función $f \in C^j([0,1])$

Demostración: En estas condiciones $V=<x^i,\dots,x^j>$, $P=C(r-1,r-1,\varepsilon)$ y $D=C(\delta^*,\varepsilon)$, siendo $\delta^*_{r-1}=0$ pero $\delta^*_h=\delta_h$, para $h\neq r-1$. Sea z un punto cualquiera de $[0,1]$ y sea $\varphi_z(x) \in V$ tal que $D^j\varphi_z(x)=\varepsilon_j$ y sucesivamente $D^h\varphi_z(0)=\varepsilon_h(1+Q_h)$ con $Q_h \geq | D^{h+1}\varphi_z(x) |$, $\forall x \in [0,1]$, con $h=j-1, j-2, \dots, r+1$. Obtenemos así que $\varepsilon_{r+1}D^{r+1}\varphi_z(x) \geq 1$, luego $D^{r-1}\varphi_z$ será una función convexa estrictamente por lo que se puede escoger para que $D^{r-1}\varphi_z(z)=0<D^{r-1}\varphi_z(x)$ $\forall x \in [0,1]-\{z\}$.

Finalmente para $h=r-2, r-3,\dots,i$, $D^h\varphi_z(0)=\varepsilon_h(1+Q_h)$ con $Q_h \geq |D^{h+1}\varphi_z|$. Puede verse que $\varphi_z \in C(\varepsilon,\delta^*)$, además al ser las derivadas referentes a δ mayores que 1 se tiene que la inclusión es de tal forma que se verifica la segunda de las hipótesis referentes a la función φ_z.

■

Nuestro objetivo es demostrar la convergencia de las derivadas de orden inferior.

Teorema VI.2.6. Sea $K_n:C^j([0,1]) \to C^j([0,1])$ una sucesión de operadores polinomiales lineales verificando:

$$K_n(\ C(i,j,\varepsilon)) \subset C(k,k,\varepsilon) \text{ con } i \le k < j$$

$$D^k K_n(x^h) \to D^k x^h \quad \text{en el punto } x_k=(1-\varepsilon_k\varepsilon_{k+1})/2 \text{ para } h=i,i+1,\dots,j.$$

entonces $D^k K_n(f)(x_k) \to D^k f(x_k)$ para toda función $f \in C^j([0,1])$.

Demostración: Siguiendo el teorema de interpolación II.5.5

Sea $f \in C^j[0,1]$ y sea $r(x) \in <x^i,\dots,x^{j-1}>$ tal que $D^h r(x_h)=D^h f(x_h)$ para $h=i,\dots,j-1$.

Sea $s(x) \in <x^i,\dots,x^j>$ tal que $D^h s(x_h)=0$, para $h=i,\dots,j-1$ y $D^j s=M\varepsilon_j$ con $M=\text{máx}|D^j f(x)|$

Definimos $w_1(x)=s+r-f$ y $w_2(x)=f+s-r$. Para estas funciones se verifica $\varepsilon_j D^j w_t(x) \ge 0$ con $t=1,2$ y por recurrencia se tiene que, $\varepsilon_h D^h w_t(x) \ge 0$ para $t=1,2$ y $h=i,\dots,j$.

Aplicando la hipótesis se tiene que $\varepsilon_k K(w_t)^{k)}(x) \ge 0$ para $t=1,2$, luego

$$\varepsilon_k D^k K_n(w_1)(x_k)=\varepsilon_k(D^k K_n(s)(x_k)+D^k K_n(r)(x_k)-D^k K_n(f)(x_k)) \ge 0$$

$$\varepsilon_k D^k K_n(w_2)(x_k)=\varepsilon_k(D^k K_n(f)(x_k) + D^k K_n(s)(x_k) - D^k K_n(r)(x_k)) \ge 0$$

Por tanto

$$\varepsilon_k D^k K_n(s)(x_k) \ge \varepsilon_k D^k K_n(f)(x_k) - \varepsilon_k D^k K_n(r)(x_k) \ge -\varepsilon_k D^k K_n(s)(x_k)$$

Luego

$$D^k K_n(f)(x_k) \to D^k f(x_k)$$

■

Teorema VI.2.7. Sea $K_n: C^j([0,1]) \to C^j([0,1])$ una sucesión de operadores polinomiales lineales verificando:

$$K_n(\, C(i,j,\varepsilon)) \subset C(k,j,\varepsilon) \text{ con } i \leq k < j$$

$$D^m K_n(x^h) \to D^m x^h \quad \text{uniformemente para } h=i,\dots,j+2 \text{ y } m=k,\dots,j.$$

entonces $D^m K_n(f) \to D^m f$ uniformemente para $m=k,\dots,j$, y toda función $f \in C^j([0,1])$.

Demostración. La convergencia de la derivada j-ésima y la puntual de las derivadas inferiores proporcionan la tesis.

■

Teorema VI.2.8. Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i \neq 0$ y $\delta_j \neq 0$ pero $\delta_h=0$ para $h=0,1,\dots,i-1,j+1,j+2,\dots,n$, y tal que $\delta_h=0$ implica $\delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$, para $i+1 \leq h \leq j-1$.

Sea $K_n: C^j[0,1] \to C^j[0,1]$ una sucesión de operadores lineales tales que

$$K_n(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(\varepsilon,\delta).$$

$$D^m K_n(x^h) \to D^m x^h \quad \text{uniformemente para } h=i,i+1,\dots,j+2, \text{ y } m=i,\dots,j.$$

entonces $D^m K_n(f) \to D^m f$ para toda función $f \in C^j([0,1])$ y para $m=i,\dots,j$.

Demostración. La demostración es similar a la del teorema anterior. En este caso se tiene también la convergencia de la derivada j-ésima y convergencia en algunos puntos de derivadas inferiores. Estas derivadas inferiores son las mismas que en el caso consecutivo salvo que existan saltos de algunas propiedades. Estos saltos se producen cuando para algún h $\delta_h=0$, pero entonces se tiene la convergencia de la derivada h-1 en los puntos 0 y 1. De esta forma podemos pasar de la convergencia de la derivada h+1 a la convergencia de la derivada h-1y de la derivada h.

■

Teorema VI.2.9. Consideremos el cono $C(\varepsilon,\delta)$, donde $\delta_i\neq 0$ y $\delta_j\neq 0$ pero $\delta_h=0$ para $h=0,1,\dots,i-1,j+1,j+2,\dots,n$, y también que existe un valor r (tomamos el mínimo de ellos), $i<r<j$, tal que $\delta_r=0$ y $\delta_{r-1}=1=\varepsilon_{r+1}$.

Sea $K_n:C^j[0,1] \to C^j[0,1]$ una sucesión de operadores lineales tales que

$$K_n(C(\varepsilon,\delta)) \subset C(\varepsilon,\delta).$$

$$D^mK_n(x^h) \to D^mx^h \quad \text{uniformemente para } h=i,i+1,\dots,j,\ m=i,\dots,r-1.$$

entonces $D^mK_n(f) \to D^mf$ para $m=i,\dots,r-1$ y para toda función $f \in C^j([0,1])$.

Demostración. En este caso tenemos la convergencia de la derivada (r-1)-ésima. Además razonamientos similares a los realizados en los teoremas anteriores se tiene la convergencia en algunos puntos de derivadas inferiores. Efectivamente, dado que $C(i,j,\varepsilon)\subset C(\varepsilon,\delta)$ y teniendo en cuenta la convergencia de las funciones de $V=\langle x^i,\dots,x^j\rangle$ se obtiene: Si $\delta_h\neq 0$ para todo $h=i,\dots,r-2$ se tiene la convergencia puntual de la derivada h-ésima en el punto $(1-\delta_h\delta_{h+1})/2$ con h=i,...,r-2. En el caso de que algún $\delta_h=0$ con $h\in\{i,...,r-2\}$ se tiene que $\delta_{h-1}\delta_{h+1}=-1$ y tendremos la convergencia de la derivada (h-1)-ésima en los puntos 0 y 1.

■

Ejemplos VI.2.10. De los teoremas anteriores se obtiene, por ejemplo:

a) Supongamos una sucesión de operadores que lleven positivas y crecientes en positivas y crecientes. Si converge uniformemente tanto en [0,1] la función como la derivada para los polinomios $1,x,x^2$ y x^3 entonces se obtiene la convergencia uniforme en [0,1] tanto para la función como para la derivada de cualquier función de clase 1.

b) Si tenemos una sucesión de operadores lineales que lleva las funciones positivas y convexas en positivas y convexas entonces si converge para las funciones $1,x,x^2$ también converge para cualquier función de clase 2.

c) Si tenemos una sucesión de operadores lineales que lleva las funciones positivas y cóncavas en positivas y cóncavas, entonces la convergencia para las funciones $1,x,x^2,x^3,x^4$ tanto de la función como de la derivada primera y segunda se obtiene la convergencia de la función, derivada primera y derivada segunda para cualquier función de clase 2.

■

Por último deseamos manifestar que no consideramos cerrada nuestra investigación en esta linea, sino que al contrario es un campo donde todavía esperamos obtener bastantes resultados de interés.

Así por ejemplo, algunos de los problemas que se piensa abordar serían:

Respecto de los operadores que hemos introducido se podría realizar un trabajo computacional, para comprobar la utilidad prácica que tienen.

Se debería intentar demostrar la posible convergencia de los cuasiinterpolantes de Bernstein. Si la respuesta fuese positiva tendríamos sucesiones de operadores similares a la introducida por Sablonnière pero conservando las i-convexidades posibles.

Profundizar el estudio en varias varables.

Se podrían estudiar nuevos conjuntos de funciones donde aproximar, polinomios trigonométricos, funciones splines, etc.

Se podrían considerar nuevos dominios. En la recta real podríamos considerar intervalos infinitos. Para mayor dimensión las posibilidades son aún mayores.

Se podrían considerar dominios diferentes para los dos espacios de funciones. Por ejemplo, aproximar la función en un subconjunto menor que aquel donde se toman los datos.

Otro problema interesante sería considerar prefijado tanto el tipo de datos como los datos en sí y estudiar y construir operadores conservativos. Buscaríamos por ejemplo generalizaciones del operador de Bernstein para particiones no uniformes del intervalo $[0,1]$.

BIBLIOGRAFIA.

[B] BERBERIAN, S. K. : "Lectures in Functional Analysis and Operator Theory". Springer-Verlag. New York Inc.(1974)

[B-D] BERENS, H., DEVORE, R.A. : "A characterization of Bernstein polynomials" in Approximation Theory III. Academic Press,(1980), pp. 213-219.

[Be] BERNSTEIN, S.: "Dèmonstration du théorème de Weierstrass, fundeé sur le calcul des probabilités". Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13,(1913) 1-2.

[Br] BREZIS, H.: "Análisis Funcional". Alianza Universidad Textos. Madrid. (1984)

[D] DAVIS, P. J. : Interpolation and Approximation. Dover Publications, Inc. New York.(1975).

[De] DERRIENNIC, M. M.: Sur l´approximation des fonctions d´une ou plusieurs variables par des polynômes de Bernstein modifiés et application au problème des moments. These devant l´universite de Rennes.(1978)

[Du] DURRMEYER, J.L: "Une formule d´inversion de la transformée de Laplace. Applications à la théorie des moments". Thèse 3e cycle, Fac. des Sciences de l´Université de Paris.(1967)

[F] FRIEDMAN, A.: Foundations of Modern Analysis. Dover (1982).

[G] GASCA GONZALEZ, M.: Cálculo Numérico. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid.(1988)

[Go] GOODMAN, T.N.T.: "Shape Preserving Representations". Computer Science Report.University of Dundee.(1988)

[He] HENRICI,P.:Applied and computational complex analysis, vol. one. John Wiley & Sons (1974)

[Hu] HU, Y.S.: "On iterates of Linear Variation diminishing operators and characterization of Bernstein-Type Polynomials". Multivariate Approximation Theory IV. Ed. Chui. Schempp. Zeller. Proceedings of the Conference at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach Black Forest.,pp.193-200. (1989)

[L] LORENTZ, G.G.: Bernstein Polynomials. Chelsea Publishing Company. New York.(1986)

[K] KANTOROVITCH, L.V.: "Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein" I,II, C.R. Acad. Sci. URSS.(1930)

[K-R] KELISKY, R.P. , RIVLIN, T.J.: "Iterates of Bernstein Polynomials". Pacific Journal of Mathematics, Vol 21, No 3 (1967).pp.511-520.

[Ko] KOROVKIN, P.P.: Linear Operators and Approximation Theory. Traducción de Edición rusa (1959). Hindustan Publishing Corp. (India).(1960)

[Kr] KRASNOSELSKII, M.A.: Positive Solutions of Operator Equations. Traducción de edición rusa. Edited by Leo F. Boron. Noordhoff.(1964)

[R-N] RIESZ, F. , NAGY, B.S.Z.: "Leçons d´analyse fonctionnelle". Ed. Gauthier Villers.(1972)

[S1] SABLONNIERE, P: "Opérateurs de Bernstein Jacobi et de Bernstein-Laguerre". Publications ANO 37 et 38, Université de Lille 1.(1981)

[S2] SABLONNIERE, P: "Hahn polynomials as eigenvectors of positive operators". Second International Symposium (Segovia). On Orthogonal polynomials and their applications. Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza, Spain, Nº1, pp. 139-146.(1988)

[S3] SABLONNIERE, P: "Bernstein quasi-interpolants on [0,1], in Multivariate Approximation IV, ed. by C.K.Chui, W. Schempp, K.Zeller, ISNM 90, Birkhäuser Verlag, Basel. pp. 287-294.(1989)

[So] SCHOENBERG, I.J.: "On variation diminishing approximation methods, on Numerical Approximation". R.E. Langer (ed.) University of Wisconsin Press. Madison. pp. 249-274.(1959)

[Su] SCHUMAKER, L. L. : "Spline functions : Basic Theory". John Wiley and Sons.(1981)

[U] UTRERAS DIAZ, F. : "Sur le choix du paramètre d´ajustement dans le dissage par fonctions spline". Numerische Mathematik, 34. pp. 15-28.(1980)

[W] WAHBA, G.: "Smoothing Noisy Data with Spline Functions". Numerische Mathematik, 24. pp. 383-393.(1975)

[Y] YOSIDA, K: Functional Analysis. Sixth Edition. Springer - Verlag Berlin.(1980)