

~~T. PROV. 21/35~~  
T 9/74

# DESARROLLOS SEMICLÁSICOS EN FÍSICA NUCLEAR RELATIVISTA

Memoria de Investigación  
presentada por  
José Caro Ramón  
para optar al título de  
Doctor en CC. Físicas.

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha ..... 13-05-96 .....  
ENTRADA NUM. .... 970 .....

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
2 MAYO 1996  
COMISION DE DOCTORADO



~~T. PROU 21/35~~  
+ 9/74

# DESARROLLOS SEMICLÁSICOS EN FÍSICA NUCLEAR RELATIVISTA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
GRANADA	
Nº Documento	615043538
Nº Copia	2 16280969

UNIVERSIDAD DE GRANADA	
Facultad de Ciencias	
Fecha	13-05-96
ENTRADA NUM.	970

Memoria de Investigación  
presentada por  
José Caro Ramón  
para optar al título de  
Doctor en CC. Físicas.

D. LORENZO LUIS SALCEDO MORENO y  
D. ENRIQUE RUIZ ARRIOLA,  
profesores titulares del Departamento de Física Moderna,

CERTIFICAN que esta memoria de investigación, *Desarrollos Semiclásicos en Física Nuclear Relativista*, ha sido realizada bajo nuestra dirección por JOSÉ CARO RAMÓN, alumno del programa de doctorado Física Teórica y Computacional, para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas.

Granada, a 30 de abril de 1996

E. Ruiz

Fdo.: E. Ruiz Arriola

Lorenzo Luis Salcedo

Fdo.: L.L. Salcedo Moreno

José Caro Ramón

Fdo: José Caro Ramón



*A la memoria de mi padre  
A mi madre*

# Contenidos

Agradecimientos	v
Introducción	vii
<b>I Desarrollos Semiclásicos ...</b>	<b>1</b>
<b>1 La aproximación semiclásica</b>	<b>3</b>
1.1 Reglas de cuantificación SWI	3
1.2 La aproximación WKB	4
1.2.1 Introducción	4
1.2.2 Soluciones WKB	4
1.2.3 Fórmulas de conexión	7
1.2.4 Espectro ligado WKB	9
1.2.5 Relación con las reglas de cuantificación SWI	10
1.2.6 Principio del argumento; método de Dunham	10
1.3 La aproximación Wigner-Kirkwood	11
1.3.1 Mar de Fermi	11
1.3.2 Método de Wigner-Kirkwood	12
1.3.3 El potencial químico semiclásico	18
1.3.4 Relación Wigner-Kirkwood con Thomas-Fermi	19
<b>2 El método semiclásico Traza-Logaritmo</b>	<b>21</b>
2.1 Introducción	21
2.2 El número de partículas	21
2.3 Método de Lai Him Chan	24
2.4 Método semiclásico TrLog en el caso no relativista	30
2.5 El potencial químico, la energía total y el proceso de truncamiento	36
2.6 Conexión entre WK y WKB	40



<b>3</b>	<b>Teoría del funcional del potencial en un modelo 1+1</b>	<b>47</b>
3.1	Introducción . . . . .	47
3.2	Modelo en 1+1 dimensiones . . . . .	48
3.3	Desarrollo semiclásico Wigner-Kirkwood autoconsistente . . . . .	50
3.3.1	Orden cero del desarrollo WK . . . . .	51
3.3.2	Orden segundo del desarrollo WK . . . . .	54
3.4	WKB autoconsistente . . . . .	56
3.5	Resultados numéricos . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Desarrollo semiclásico relativista</b>	<b>61</b>
4.1	Ecuación de Dirac independiente del tiempo y número de partículas .	61
4.2	Aplicación del método Tr-Log al caso relativista . . . . .	64
4.3	Límite no relativista . . . . .	71
4.4	Cálculo de densidades . . . . .	72
4.5	La energía total . . . . .	73
4.6	Un ejemplo analítico: Ecuación de Dirac con potenciales armónicos .	73
<b>II</b>	<b>... en Física Nuclear Relativista</b>	<b>81</b>
<b>5</b>	<b>Aplicación a potenciales relativistas</b>	<b>83</b>
5.1	Modelo de campo medio relativista . . . . .	83
5.1.1	Introducción . . . . .	83
5.1.2	El modelo de Walecka . . . . .	84
5.1.3	Resolución numérica . . . . .	87
5.1.4	Ajuste de parámetros . . . . .	89
5.1.5	Regresión Woods-Saxon de los potenciales autoconsistentes . .	90
5.2	Aplicación del desarrollo semiclásico relativista a potenciales Woods-Saxon . . . . .	93
5.2.1	Introducción . . . . .	93
5.2.2	Cálculo numérico de la aproximación semiclásica; tratamiento de las divergencias . . . . .	95
5.2.3	Resultados numéricos . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Mar de Dirac en Física Nuclear Relativista</b>	<b>101</b>
6.1	Introducción . . . . .	101
6.2	Aproximación de valencia . . . . .	102
6.3	Mar de Dirac y renormalización . . . . .	104
6.4	Desarrollo semiclásico del Mar de Dirac . . . . .	105
6.5	Cálculos perturbativos . . . . .	113

6.6	Ajuste de parámetros . . . . .	115
6.7	Resultados numéricos . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Eliminación de la inestabilidad de Landau en el modelo <math>\sigma</math>-<math>\omega</math></b>	<b>123</b>
7.1	Introducción . . . . .	123
7.2	Método de Redmond . . . . .	125
7.3	Inestabilidad de Landau en el modelo $\sigma$ - $\omega$ . . . . .	126
7.4	Eliminación de la inestabilidad . . . . .	128
7.4.1	Materia Nuclear . . . . .	130
7.5	Resultados numéricos . . . . .	132
	<b>Conclusiones</b>	<b>135</b>
A	Optimización algebraica de expresiones covariantes gauge	137
B	Relación entre el desarrollo TrLog y el desarrollo heat kernel	141
C	Desarrollo de las densidades relativistas	143
D	Desarrollo de las densidades relativistas del mar de Dirac	149
E	Propagadores bosónicos a 1-loop y punto de sustracción	153
E.1	Propagador escalar . . . . .	154
E.2	Propagador vectorial . . . . .	158
	<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>





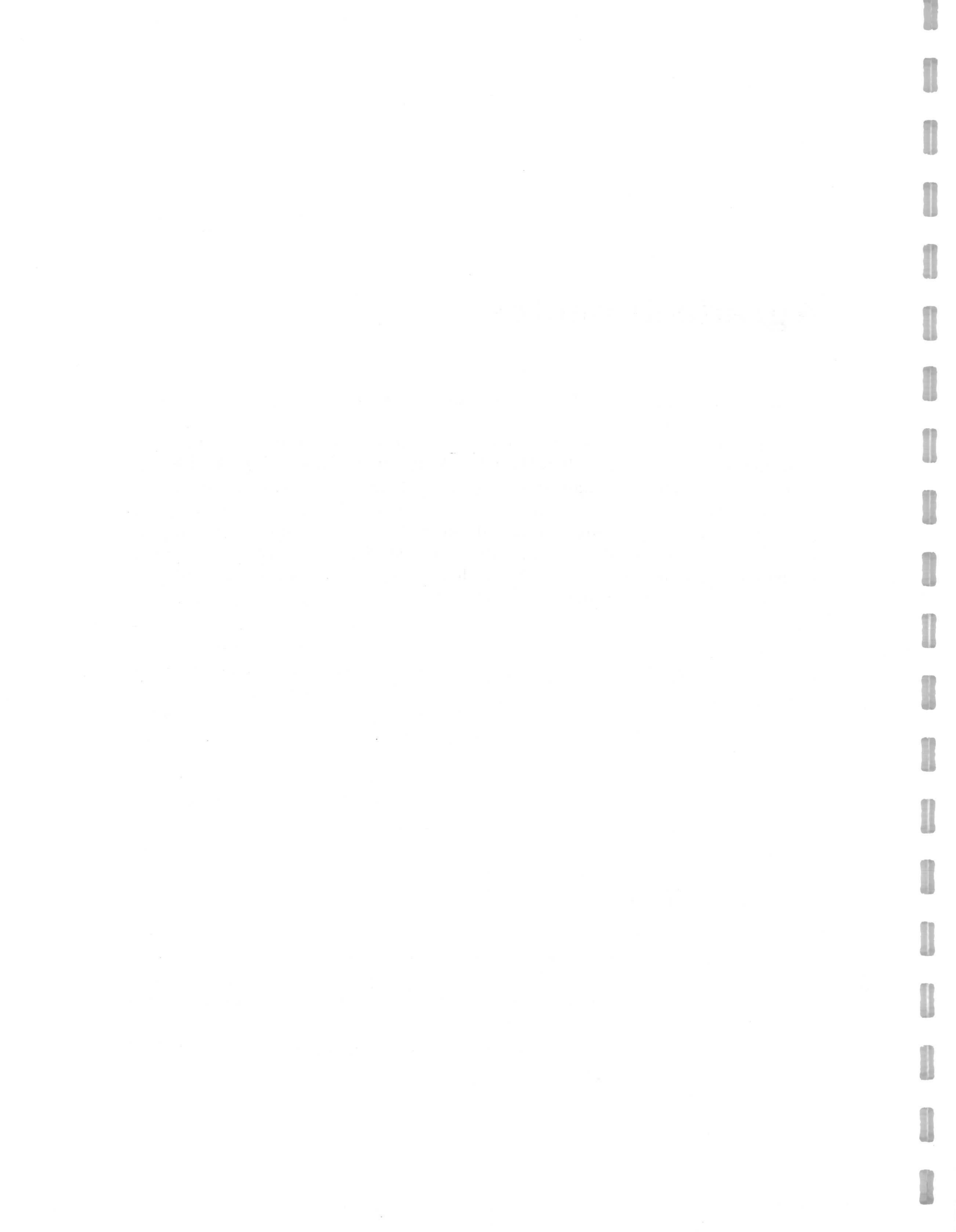
# Agradecimientos

Por muchas páginas que escribiese no dejaría de estar en deuda con Lorenzo Luis y Enrique. Gracias de corazón.

Carmen García Recio nos ayudó de forma inestimable en el proceso de reducción de la expresión presentada en la tabla 2.3. Además, su humanidad hace la vida más agradable a su alrededor. Juan Nieves me dió el último empujón al abismo.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el D.G.I.C.Y.T. mediante el proyecto PB92-0927, la Junta de Andalucía y el M.E.C. mediante una beca de Formación del Profesorado Universitario de la que disfruto, y ha sido realizado al amparo del Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada. Agradezco a todos sus miembros el apoyo brindado.







# Introducción

La Mecánica Cuántica se demuestra aplicable a ciertos sistemas para los que la Mecánica Clásica no proporciona descripciones adecuadas. Por otra parte existen multitud de fenómenos muy bien explicados en términos clásicos que no son abordables en la práctica como sistemas cuánticos. De esa forma se puede hablar de sistemas *cuánticos* y de sistemas *clásicos*. La constante de Planck,  $2\pi \hbar$ , fija una escala de acción en la que el mundo está dominado por efectos cuánticos; si sobrepasamos esa barrera en varios órdenes de magnitud los efectos de granularidad cuánticos pasan totalmente desapercibidos y nos movemos en un entorno puramente clásico. A modo de ejemplo el estado fundamental de un oscilador armónico monodimensional presenta una densidad de probabilidad de permanencia en un punto reñida con el tratamiento clásico, y sin embargo si se miran estados excitados suficientemente energéticos comparados con el producto de  $\hbar$  y la frecuencia de oscilación se obtienen densidades de probabilidad fuertemente oscilantes pero que en promedios cortos son compatibles con la predicción clásica (principio de correspondencia). Podría pensarse entonces que el problema de la obtención del mundo clásico a partir del cuántico es operacional y no fundamental. Esto es sólo parcialmente cierto. Al menos en su formulación actual, no se puede considerar la Mecánica Cuántica como una teoría completa de la que se deriva en forma límite la Mecánica Clásica, ya que el proceso de la medida no se entiende bien sin la coexistencia de un subsistema clásico con el cuántico.

Las aproximaciones semiclásicas, objeto fundamental de esta memoria, resuelven parcialmente el problema de la conexión entre lo clásico y lo cuántico en el sentido del principio de correspondencia. En efecto, las aproximaciones semiclásicas constituyen desarrollos en gradientes de los potenciales o equivalentemente en la constante de Planck. Decimos que la resolución del problema es parcial porque habitualmente tales desarrollos se efectúan a nivel formal, y las series que aparecen pueden no ser convergentes y resultar, a lo sumo, asintóticas. Por ello, si la magnitud que se aproxima contiene una dependencia no analítica en  $\hbar$ , la información asociada a esa dependencia se pierde al efectuar la aproximación.

Históricamente, la aproximación semiclásica fue muy importante para justificar



las primeras reglas de cuantificación (establecidas por Sommerfeld, Wilson e Ishiwara) a partir de la mecánica ondulatoria. Desde el punto de vista teórico la aproximación semiclásica es importante también por su relación con el teorema de Hohenber y Kohn. Este teorema establece que el estado fundamental de un sistema fermiónico no relativista con interacción a dos cuerpos es un funcional de la densidad del sistema. Desgraciadamente la demostración del teorema no da información sobre de qué modo se puede obtener la dependencia explícita del funcional. Los métodos semiclasicos permiten encontrar el desarrollo de dicho funcional en gradientes de la densidad (método de Thomas–Fermi extendido (ETF)).

Además de utilizarse a nivel teórico las técnicas semiclásicas han sido utilizadas con fines prácticos. La resolución de determinados sistemas, generalmente de muchas partículas, es muy complicada y se hace necesario utilizar técnicas de aproximación entre las que se encuentran los métodos semiclásicos. En ese sentido la aproximación de Thomas–Fermi–Dirac al problema atómico no sólo proporciona unos primeros resultados cuantitativos, sino que además supone un buen punto de partida para soluciones más elaboradas como la aproximación Hartree–Fock (HF).

En 1974 John Dirk Walecka introdujo en física nuclear la teoría renormalizable de la hadrodinámica cuántica (*QHD*). En ella los nucleones se consideran partículas Dirac elementales interaccionando a través de mediadores bosónicos que se acoplan a las densidades bariónicas adecuadas. Estos modelos son efectivos de modo que las constantes de acoplamiento se ajustan para reproducir algunas propiedades de núcleos finitos o de materia nuclear *dentro de una aproximación de muchos cuerpos concreta*. Imaginemos que las constantes de acoplamiento se ajustan en campo medio, a nivel Hartree y dentro de la aproximación de valencia. Si ahora evaluamos nuestro problema en la aproximación HF se obtiene un resultado apreciablemente distinto. Sin embargo, si ajustamos los parámetros directamente en la aproximación que se piensa utilizar, en este caso HF, los resultados obtenidos apenas cambian al compararlos con el cálculo Hartree. Por tales motivos, a nivel operacional y para núcleos esféricos está justificado trabajar en modelos relativistas de campo medio en la aproximación de valencia, donde no se tienen en cuenta ni los términos de intercambio ni las contribuciones dinámicas de la polarización de vacío. Estas condiciones son muy adecuadas para efectuar un acercamiento semiclásico al problema. De hecho las aplicaciones de técnicas semiclásicas a modelos relativistas de campo medio cuentan ya con una larga historia [Se86]. Sin embargo tradicionalmente se ha trabajado en el orden más bajo de la aproximación (Gas de Fermi) y sólo recientemente se ha abordado el problema de las correcciones relativistas a dicho orden. Distintos grupos [Ce90, Vo92a, Sp92] han conseguido las expresiones teóricas equivalentes al desarrollo de Wigner–Kirkwood (WK) y al de ETF hasta orden  $\hbar^2$  (el teorema de Hohenber y Kohn se ha podido generalizar a modelos relativistas de campo medio



[Sp92], lo que proporciona gran importancia al problema de encontrar alguna aproximación al funcional de la densidad). Estos resultados se han aplicado entre otros al problema nuclear relativista a nivel Hartree [Ce93, Sp93] y a nivel Hartree–Fock [Vo92b]. En el caso no relativista el desarrollo WK se conoce hasta orden  $\hbar^8$ , y en el problema atómico no relativista se ha considerado ETF hasta orden  $\hbar^4$  (órdenes siguientes presentan problemas de convergencia en los tratamientos que se realizan hasta la fecha). Las razones que justifican esta diferencia de conocimientos entre el caso relativista y el no relativista son varias. Por una parte el hamiltoniano de Dirac presenta una estructura espinorial no trivial que impide la aplicación directa de los métodos semiclásicos bien conocidos para el caso no relativista. Además la constante  $\hbar$  aparece a la primera potencia (en el operador de Schrödinger aparece a la segunda) lo que complica las expresiones intermedias necesarias para llegar a un orden dado del desarrollo (sólo sobreviven potencias pares en las fórmulas finales). Por último, en la descripción relativista de núcleos esféricos se necesitan dos potenciales, uno la componente temporal de un campo vectorial y el otro un campo escalar que se suma a la masa del nucleón dando lugar a una masa efectiva local. Al efectuar desarrollos semiclásicos aparecen gradientes sobre ambos potenciales, combinados de todas las formas posibles con la única restricción en un orden dado de homogeneidad en el número de derivadas en cada término. Esto multiplica el número de términos que aparecen en las expresiones semiclásicas, complicando aún más el resultado.

Esta memoria se estructura del siguiente modo. En el capítulo 1 se realiza una revisión de la aproximación semiclásica desde distintos formalismos, incluyendo la aproximación WKB y el método Wigner–Kirkwood. En el capítulo 2 se introduce en el marco no relativista un formalismo elegante que permite expresar sumas espectrales de operadores a un cuerpo en términos del número de partículas acumulado a través de la generalización del teorema de Hellmann–Feynman. Tras una regularización logarítmica de la función paso, el número de partículas para el operador de Schrödinger se escribe como la traza del logaritmo de un operador cuadrático en el operador momento. La aproximación semiclásica se consigue desarrollando de forma covariante la traza del logaritmo [Ru93]. Este desarrollo se realiza siguiendo un cálculo propuesto por L.H. Chan [Ch86] y posteriormente ampliado por nuestro grupo [Ca93a]. Por motivos didácticos se estudian las correcciones cuánticas hasta orden  $\hbar^4$  y se presenta una prescripción que da sentido convergente unívoco a las divergencias aparentes de los valores esperados semiclásicos a cuarto orden. Estas divergencias aparecen en el desarrollo Wigner–Kirkwood debido al carácter distributivo de la densidad de partículas en los puntos de retroceso clásicos. Además se utiliza nuestro formalismo para presentar el método del desarrollo perturbativo de la dependencia en  $\hbar$  del potencial químico formulado recientemente [Kr90, Sc93].



El capítulo 3 está dedicado al estudio del problema de la autoconsistencia dentro de una formulación semiclásica. Para ello se propone un modelo sencillo en 1+1 dimensiones a cuyo funcional de la energía se le aplican los resultados obtenidos en capítulos previos. El carácter autoconsistente de la aproximación cambia en algunos aspectos las consecuencias de los desarrollos semiclásicos respecto al caso de potenciales externos. En particular el contenido distributivo del desarrollo aumenta considerablemente. En el capítulo 4 se aplica el formalismo presentado en el capítulo 2 al hamiltoniano de Dirac con una masa efectiva local (potencial escalar) y un potencial asociado a la componente temporal de un campo vectorial (potencial vectorial). Tras una serie de manipulaciones se consigue escribir el número de partículas en la forma adecuada para aplicar el desarrollo de L.H. Chan. Aplicando este desarrollo hemos obtenido por vez primera la expresión semiclásica de las densidades bariónica, escalar y de energía fermiónica hasta orden  $\hbar^4$ . En ese orden del desarrollo relativista sólo existían resultados previos incluyendo únicamente uno de los potenciales: bien el potencial vectorial [Po91], bien el potencial escalar [Ch88]. Como en el caso no relativista presentamos una prescripción que permite eliminar las divergencias de los valores esperados semiclásicos. A modo de ejemplo se estudian las correcciones cuánticas para el problema de la ecuación de Dirac con potenciales armónicos y se encuentra que, al igual que en los problemas no relativistas, el desarrollo de Wigner-Kirkwood para la energía converge al promedio de Strutinsky. En el capítulo 5 se aplican nuestros resultados al modelo de Walecka para varios núcleos de doble capa cerrada en la parte de valencia. Además de introducir dicho modelo y ajustar los parámetros del lagrangiano, se presenta un método (aplicable a potenciales centrales) que permite eludir el carácter distributivo del orden cuarto del desarrollo semiclásico. Este método está basado en la extensión al plano complejo de los potenciales autoconsistente, que nosotros consideramos externos en lo que a la aproximación semiclásica se refiere.

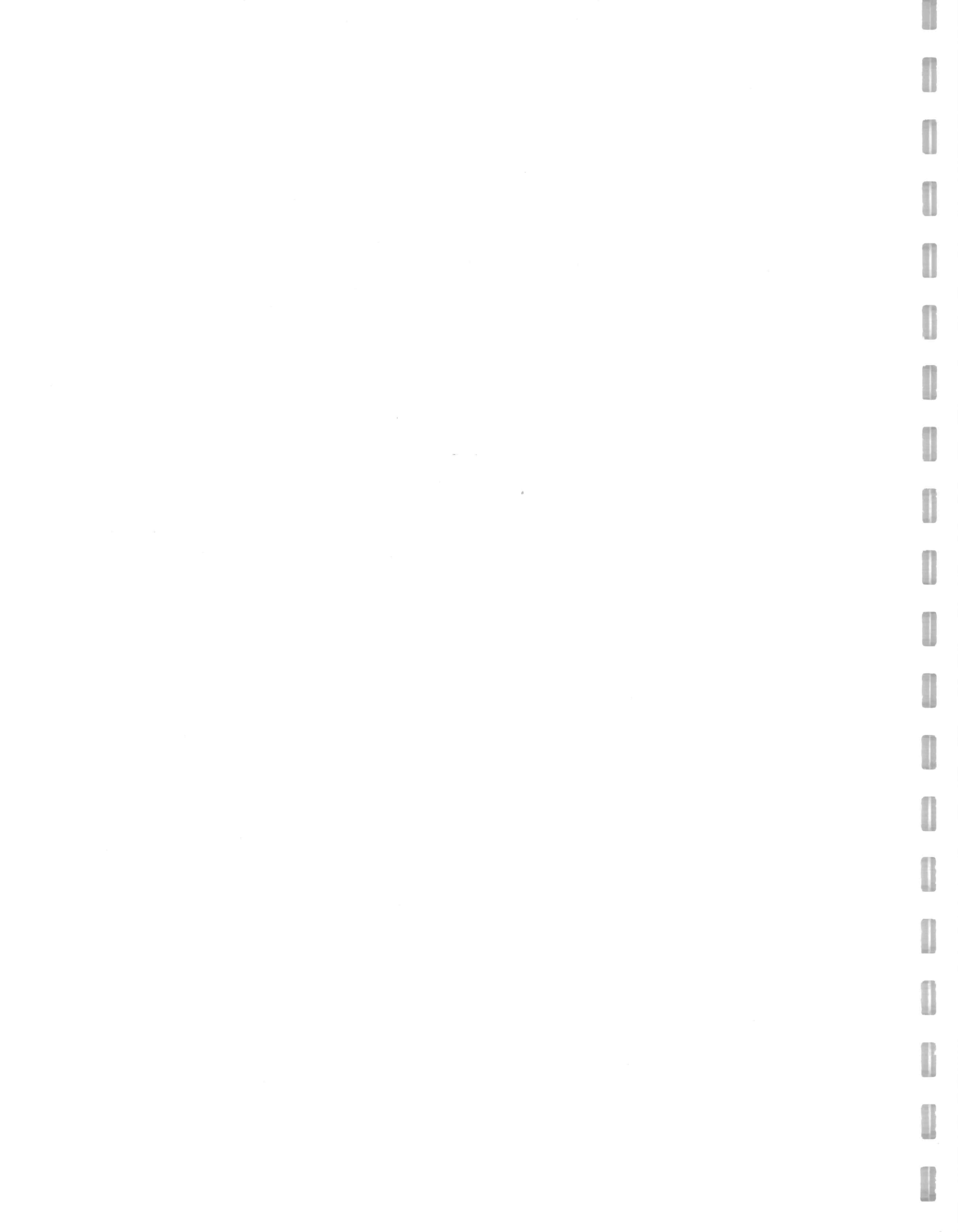
El modelo de Walecka,  $\sigma$ - $\omega$ , presenta una inestabilidad de tipo Landau cuando se incluyen los efectos del mar de Dirac en la aproximación a un loop, que resulta problemática cuando se consideran configuraciones espaciales con inhomogeneidades de 0.2 fm. Los desarrollos semiclásicos son desarrollos en gradientes, y por tanto son insensibles a ésta inestabilidad. En el capítulo 6 aplicamos nuestros resultados del desarrollo semiclásico relativista al sector del mar de Dirac y obtenemos las correcciones a la energía hasta cuarto orden. Como aplicación, realizamos cálculos numéricos para núcleos de doble capa cerrada, tratando la parte de valencia en la aproximación Hartree. El desarrollo semiclásico se muestra altamente convergente con una contribución prácticamente nula a cuarto orden, mucho más pequeña de lo que predice un cálculo de orden de magnitud. En el capítulo 7 abordamos el problema de la eliminación de la inestabilidad del modelo  $\sigma$ - $\omega$  utilizando el método de



Redmond, basado en la representación espectral de Källén-Lehmann de los propagadores bosónicos. A la acción efectiva resultante le hemos aplicado la aproximación semiclásica. En concreto, hemos encontrado una prescripción de reparametrización que nos permite obtener las correcciones del mar de Dirac en la teoría sin inestabilidad hasta segundo orden en el desarrollo en gradientes sin coste adicional respecto a lo que hacíamos en el capítulo anterior.

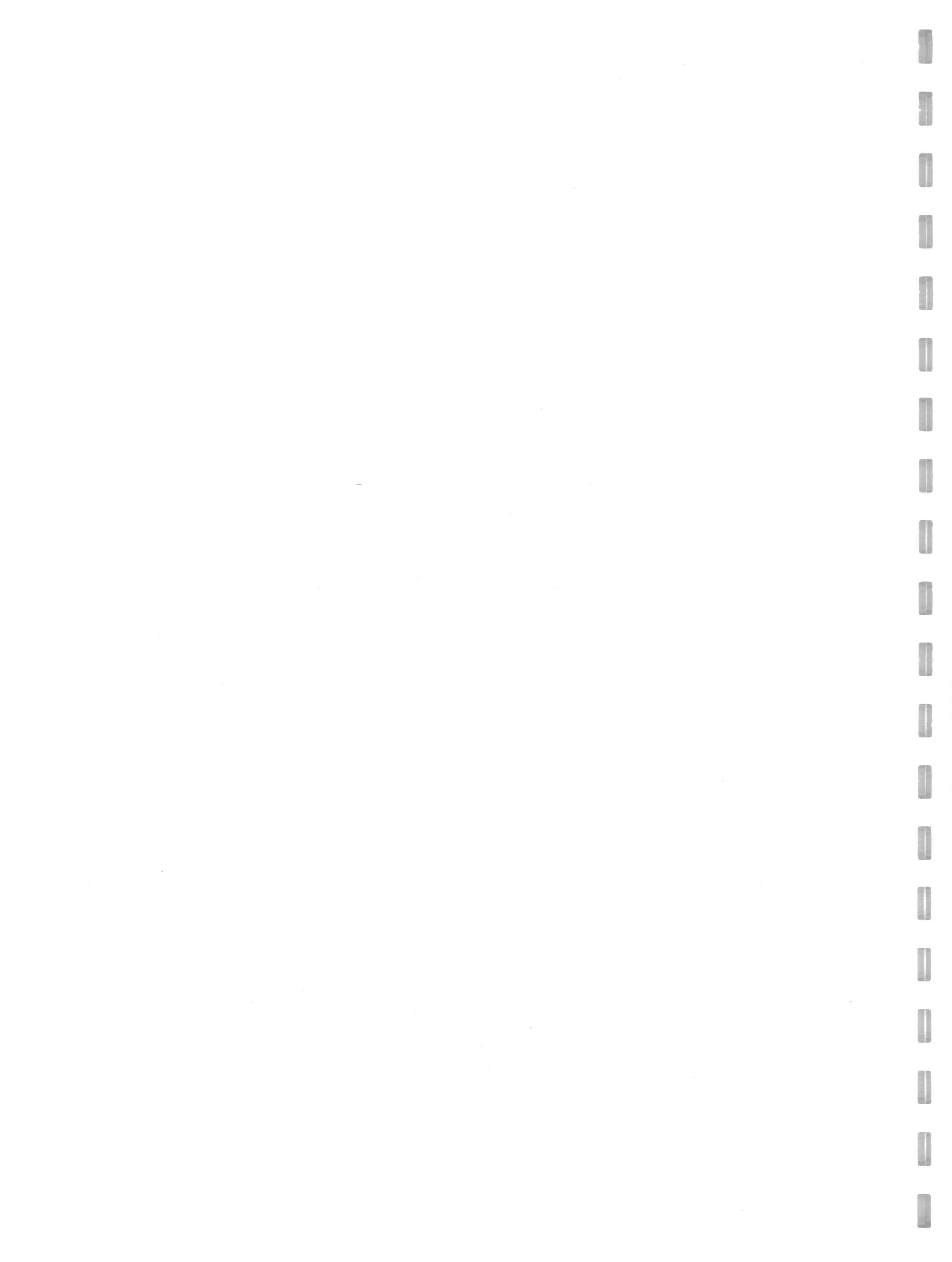
Por último, se presentan las conclusiones de esta memoria.





# Parte I

## Desarrollos Semiclásicos ...





# Capítulo 1

## La aproximación semiclásica

En este capítulo revisamos los aspectos fundamentales de la aproximación semiclásica, en concreto las reglas de cuantificación SWI, la aproximación WKB y la aproximación Wigner-Kirkwood.

### 1.1 Reglas de cuantificación SWI

En la segunda mitad de la década de los diez Sommerfeld [So16], Wilson [Wi15] e Ishiwara [Is15] generalizaron la regla de cuantificación del modelo del átomo de hidrógeno de Bohr (véase, por ejemplo, [Ga89]) a sistemas múltiplemente periódicos.

Sea un sistema con  $n$  grados de libertad tal que existe algún sistema de coordenadas canónicas  $(q,p)$  en el que un momento  $p_i$  sólo depende de su coordenada conjugada  $q_i$  y de constantes de integración  $\alpha_j$ ,  $p_i = p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Consideremos la trayectoria del punto figurativo del sistema en el espacio fásico y supongamos que su proyección en cada plano  $(q_i, p_i)$  da lugar a una figura cerrada o a funciones periódicas en la coordenada  $q_i$ . En ese caso decimos del sistema que es múltiplemente periódico. Para tales sistemas están bien definidas las variables de acción [Go88]

$$J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \oint dq_i p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (1.1)$$

(la integración corre a lo largo de un periodo). Lo que establecían las reglas de cuantificación SWI es que las  $J_i$  debían ser múltiplos enteros de la constante de Planck,

$$J_i = n_i h, \quad n_i \text{ entero.} \quad (1.2)$$

Estas reglas dieron resultados satisfactorios en la explicación de varios fenómenos como la estructura fina del átomo de hidrógeno y el efecto Stark.



## 1.2 La aproximación WKB

### 1.2.1 Introducción

El método WKB (Wentzel, Kramers y Brillouin) permite obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{p(x)}{\xi}\right)^2 \psi(x) = 0, \quad (1.3)$$

válidas para  $\xi$  pequeña. Aunque su origen es muy antiguo (se conocen trabajos en la primera mitad del s. XIX debidos a Carlini, Liouville y Green) Brillouin [Br26] Wentzel [We26] y Kramers [Kr26] lo aplicaron a la ecuación de Schrödinger monodimensional en 1926. El método había sido perfeccionado por Gans (1915), Jeffreys (1923) y el propio Kramers (1926) estableciendo de forma independiente las fórmulas de conexión que veremos más adelante.

En la aplicación a la teoría cuántica el parámetro de desarrollo es  $\hbar$ ; el límite  $\xi$  pequeña se corresponde con *acciones típicas del sistema grandes comparadas con  $\hbar$* , y en ese sentido la aproximación pretende conectar resultados cuánticos con el límite clásico (principio de correspondencia), por lo que el método también se denomina *semiclásico*.

Hay que notar que en las formulaciones más simples del método los desarrollos que se usan son formales y las series que aparecen son, a lo sumo, asintóticas. Existen otras formulaciones rigurosas pero que complican sobremanera la sencillez y aplicabilidad del método (véase [Fr65, Ma81]).

Para la introducción histórica véase [Fr65]. Los desarrollos teóricos se han extraído de [Fr65, Ga89, Mi69].

### 1.2.2 Soluciones WKB

Comenzamos proponiendo una solución del tipo

$$\psi(x) = \exp \left\{ i \int_{x_0}^x dt \frac{\varphi(\xi, t)}{\xi} \right\}, \quad (1.4)$$

donde  $\varphi$  depende de  $\xi$ . Tras sustituir en la ec. (1.3) se tiene que, para que  $\psi(x)$  sea solución,  $\varphi(x)$  debe satisfacer la ecuación de Ricatti,

$$i \xi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)^2 + p(x)^2 = 0. \quad (1.5)$$



Desarrollamos formalmente  $\varphi(\xi, x)$  en potencias de  $\xi$ ,

$$\varphi(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \xi^n, \quad (1.6)$$

y tras sustituir en la ec. (1.5) e igualar los coeficientes de cada potencia de  $\xi$  a cero se obtienen dos soluciones

$$\begin{aligned} \varphi_0^\pm &= \pm p(x), \\ \varphi_n^\pm &= \frac{i}{2} \frac{\varphi_{n-1}^\pm}{\varphi_0^\pm} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\varphi_m^\pm \varphi_{n-m}^\pm}{\varphi_0^\pm}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

con lo que expresamos todos los órdenes en función de  $p(x)$ . Nótese que dada la estructura de la recurrencia si  $\varphi_1^\pm = 0$  entonces  $\varphi_n^\pm = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

En particular hasta orden 2 se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_0^\pm(x) &= \pm p(x) \\ \varphi_1^\pm(x) &= \frac{i}{2} \frac{p'(x)}{p(x)} \\ \varphi_2^\pm(x) &= \mp \frac{1}{4} \frac{p''(x)}{p(x)^2} \pm \frac{3}{8} \frac{p'(x)^2}{p(x)^3} \\ &= \pm \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 p^{-\frac{1}{2}}}{dx^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

En las series asintóticas la aproximación óptima se consigue sumando términos hasta un orden concreto que depende del punto de estudio en cuestión; los términos siguientes son grandes y separan la suma del resultado correcto. Así, para que el desarrollo (1.6) sea válido hasta cierto orden debería ocurrir que hasta el orden siguiente los términos vayan decreciendo en valor absoluto. En primer orden exigimos pues,  $|\varphi_2(x) \xi^2| \ll |\varphi_1(x) \xi| \ll |\varphi_0(x)|$ , y aplicándolo a nuestro desarrollo se llega a la condición

$$\frac{1}{2} \left| \left( \frac{p}{\xi} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{p}{\xi} \right)^{-\frac{1}{2}} \right| \ll \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dx} \frac{\xi}{p} \right| \ll 1. \quad (1.9)$$

La expresión de la función problema inicial,  $\psi$ , se obtiene sustituyendo las ec. (1.8) hasta primer orden en la ec. (1.4),

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left\{ \mp i \int_{x_0}^x dt \frac{p(x)}{\xi} \right\}. \quad (1.10)$$



En el caso de la ecuación de Schrödinger monodimensional estos resultados se pueden aplicar identificando  $\xi = \hbar$  y  $p^2(x) = 2m(E - V(x))$ . Si la zona donde se realiza la aproximación es clásicamente accesible, (A),  $p^2(x)$  es de valor positivo; definimos entonces  $p_A(x) \equiv \sqrt{2m(E - V(x))}$ , que coincide con el momento clásico. Si la aproximación la estamos efectuando en una zona clásicamente inaccesible, (I),  $p^2(x)$  resulta negativo; en esta zona escribiremos las soluciones en términos de  $p_I(x) \equiv \sqrt{2m(V(x) - E)}$ .

En la tabla (1.1) se muestra la solución más general de la ecuación de Schrödinger en la aproximación WKB dependiendo de la accesibilidad clásica de la zona en que se aplique.

<p>A: clásicamente accesible (<math>E &gt; V(x)</math>)  <math>p_A(x) \equiv \sqrt{2m(E - V(x))} &gt; 0</math></p> $\psi_A(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{p_A(x)}} \exp\left\{-i \int_{x_0}^x dt p_A(t)\right\} + \frac{\beta}{\sqrt{p_A(x)}} \exp\left\{+i \int_{x_0}^x dt p_A(t)\right\}$ <p><math>\alpha</math> y <math>\beta</math> constantes complejas.</p>
<p>I: clásicamente inaccesible (<math>E &lt; V(x)</math>)  <math>p_I(x) \equiv \sqrt{2m(V(x) - E)} &gt; 0</math></p> $\psi_I(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{p_I(x)}} \exp\left\{- \int_{x_0}^x dt p_I(t)\right\} + \frac{\delta}{\sqrt{p_I(x)}} \exp\left\{+ \int_{x_0}^x dt p_I(t)\right\}$ <p><math>\gamma</math> y <math>\delta</math> constantes complejas.</p>

Tabla 1.1: Soluciones WKB

El punto  $x_0$  se puede escoger arbitrariamente (siempre que las integrales estén bien definidas), pero en cada caso la solución dentro de una zona es válida allí donde se cumplan las desigualdades (1.9). Estas desigualdades pueden expresarse en términos de la variación espacial de la longitud de onda de de Broglie reducida,  $\lambda(x) \equiv \frac{\hbar}{|p(x)|}$ ,

$$\frac{1}{2} \lambda^{\frac{3}{2}} \left| \frac{d^2}{dx^2} \lambda^{\frac{1}{2}} \right| \ll \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dx} \lambda \right| \ll 1. \quad (1.11)$$

La continuidad de la función de onda y de su derivada no permite en este caso



relacionar de forma inmediata las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  de una zona clásicamente accesible con las  $\gamma$  y  $\delta$  de la inaccesible contigua: en las proximidades de los puntos de retroceso clásicos (definidos por  $\{x_r/E = V(x_r)\}$ ), que separan las zonas accesibles e inaccesibles, la segunda de las desigualdades (1.11) no se mantiene; en particular  $p_I(x_r) = p_A(x_r) = 0$ , y la función de onda en los puntos de retroceso más externos sería divergente si las formas funcionales de la tabla 1.1 hubieran de mantenerse.

### 1.2.3 Fórmulas de conexión

La deseada conexión puede conseguirse suponiendo un comportamiento lineal de  $E - V(x)$  cerca del punto de retroceso,  $x_r$ , y (a) pasando de una zona a la otra en el plano complejo a cierta distancia de  $x_r$ , o (b) resolviendo de forma exacta la ecuación diferencial real en las proximidades de  $x_r$ . Aquí adoptaremos la primera de estas estrategias.

Antes de nada comprobemos si existe una zona donde la suposición de linealidad de  $E - V(x)$  y la aproximación semiclásica son compatibles. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que el punto de retroceso se encuentra en  $x_r = 0$ . Si  $E - V$  tiene un cero simple en el punto de retroceso, la aproximación lineal

$$2m(E - V(x)) = kx \quad (1.12)$$

( $k = -2mV'(0)$ ) será válida en un círculo complejo  $|x| \ll \ell$  (típicamente  $\ell \simeq |V'(0)/V''(0)|$  si  $V''(0) \neq 0$ ). Con este potencial, las desigualdades (1.11) se reducen a  $|x| \gg \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \left|\frac{\hbar^2}{k}\right|^{\frac{1}{3}}$  por lo que la aproximación lineal y la semiclásica son compatibles en

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \left|\frac{\hbar^2}{k}\right|^{\frac{1}{3}} \ll |x| \ll \ell, \quad x \text{ complejo}, \quad (1.13)$$

que será un anillo no vacío si se satisface

$$2m |V'(0)| \ell^3 \gg \hbar^2. \quad (1.14)$$

Centremos nuestro razonamiento considerando que la zona inaccesible está a la izquierda del punto de retroceso, es decir, en  $x < x_r = 0$ ; para que sea así la constante  $k$  ha de ser positiva. Tomaremos como origen de integración en los exponentes de la tabla 1.1 el propio punto de retroceso  $x_o = x_r = 0$ . Vamos a suponer que en la zona inaccesible tenemos como solución WKB la asociada a una exponencial decreciente<sup>1</sup>, es decir,  $\gamma \neq 0$ ,  $\delta = 0$ . Para salvar el punto de retroceso lo

<sup>1</sup>En este epígrafe y en el siguiente los términos *exponencial decreciente* y *exponencial creciente* están referidos al comportamiento al alejarnos del punto de retroceso.



rodeamos extendiendo analíticamente esa solución a la semicircunferencia de radio  $\rho$  en el semiplano de parte imaginaria positiva ( $z = \rho \exp \{i\theta\}$ ,  $\theta$  de  $\pi$  a 0, figura 1.1.a). Dicha extensión analítica es fácilmente calculable merced a la suposición de linealidad en el potencial, y lo que se obtiene es

$$\psi^{(a)}(z) = \gamma k^{-\frac{1}{4}} \rho^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ i \frac{\theta - \pi}{4} \right\} \exp \left\{ \frac{2}{3} k^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{3}{2}} \left( \sin \frac{3\theta}{2} - i \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \quad (1.15)$$

(nótese cómo en  $z = -\rho$  se tiene la solución de partida). Haciendo  $\theta = 0$  se consigue la solución WKB en la zona clásicamente accesible y en particular se llega a  $\alpha = \gamma \exp \{-i\pi/4\}$ ,  $\beta = 0$ . Sin embargo no podemos confiar en el coeficiente  $\beta$  que se ha obtenido. Para verlo lo mejor es partir de la zona clásicamente accesible con  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarios y seguir la semicircunferencia en el sentido opuesto; en seguida el coeficiente  $\alpha$  se ve afectado por una exponencial creciente y el  $\beta$  por una decreciente. Debido a la aproximación asintótica las exponenciales contienen errores, y los asociados al coeficiente  $\alpha$  enmascararán el término que contiene el coeficiente  $\beta$ . Para obtener  $\beta$  podemos seguir una semicircunferencia por el semiplano complejo inferior ( $z = \rho \exp \{i\theta\}$ ,  $\theta$  de  $-\pi$  a 0, figura 1.1.b), y con la extensión analítica

$$\psi^{(b)}(z) = \gamma k^{-\frac{1}{4}} \rho^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ i \frac{\theta + \pi}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{2}{3} k^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{3}{2}} \left( \sin \frac{3\theta}{2} - i \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \quad (1.16)$$

llegamos a  $\alpha = 0$  y  $\beta = \gamma \exp \{i\pi/4\}$ , donde ahora el coeficiente que no nos podemos creer es el  $\alpha$ .

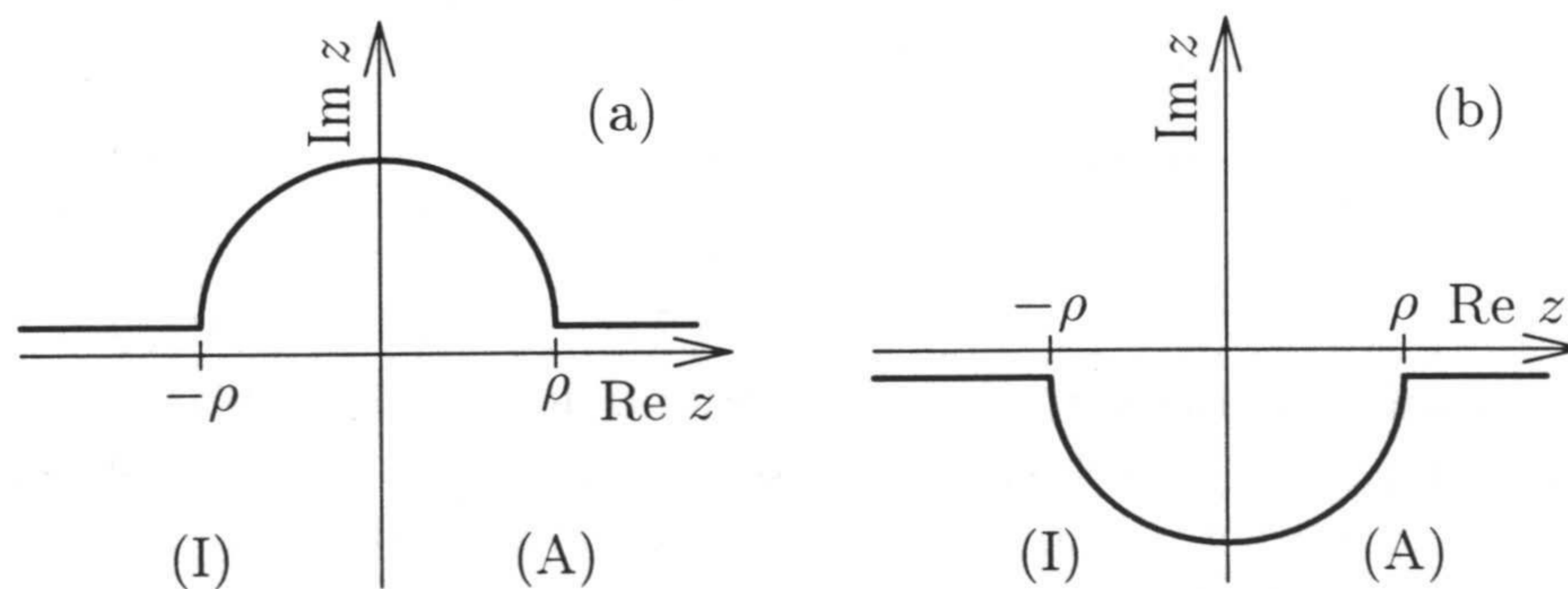


Figura 1.1: Contornos de conexión WKB.

Con la información proporcionada por ambos contornos se tiene la siguiente



fórmula de conexión

$$I \rightarrow A$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{p_I(x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left| \int_{x_0}^x dt p_I(t) \right| \right\} \longrightarrow \frac{2\alpha}{\sqrt{p_A(x)}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \left| \int_{x_0}^x dt p_A(t) \right| - \frac{\pi}{4} \right), \quad (1.17)$$

válida sólo en la dirección indicada (en el sentido inverso las exponenciales crecientes aparecidas en los contornos introducirían errores) y si se cumple la condición (1.14).

Análogamente se llega a la fórmula de conexión

$$A \rightarrow I$$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{p_A(x)}} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \left| \int_{x_0}^x dt p_A(t) \right| - \frac{\pi}{4} + \eta \right) \longrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{p_I(x)}} \operatorname{sen} \eta \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left| \int_{x_0}^x dt p_I(t) \right| \right\}, \quad (1.18)$$

válida si, además de las condiciones anteriormente indicadas, se cumple  $\operatorname{sen} \eta \neq 0$ .

### 1.2.4 Espectro ligado WKB

Supongamos que el potencial  $V(x)$  presenta un único pozo acotado inferiormente (figura 1.2) de modo que para cualquier energía candidata a pertenecer al espectro discreto existen dos únicos puntos de retroceso  $x_-(E) < x_+(E)$ . Para que el cuadrado de la función de onda asociada sea integrable, ésta ha de decaer exponencialmente en ambos extremos de la recta real. Podemos entonces aplicar la fórmula de conexión (1.17) en cada punto de retroceso, y encontramos compatibilidad sólo si desde cada lado se llega a la misma función de onda en la zona clásicamente permitida. Esto ocurrirá si en la zona  $x_- < x < x_+$  se cumple

$$\begin{aligned} \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{x_-}^x dt p_A(t) - \frac{\pi}{4} \right) &= \pm \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_+} dt p_A(t) - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \pm \cos \left( \frac{1}{\hbar} \int_{x_-}^x dt p_A(t) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_+} dt p_A(t) + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde el signo puede ser absorbido por el coeficiente de alguna de las exponenciales de las zonas clásicamente inaccesibles.

De la ecuación (1.19) se obtiene inmediatamente la condición de cuantificación WKB

$$\int_{x_-(E_n)}^{x_+(E_n)} dt \sqrt{2m (E_n - V(t))} = \hbar \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

válida si se cumplen las condiciones bajo las que se han obtenido la aproximación semiclásica y las fórmulas de conexión.



### 1.2.5 Relación con las reglas de cuantificación SWI

Si notamos

$$\begin{aligned} \int_{x_-}^{x_+} dt p_A(t) &= \frac{1}{2} \oint dq p_A(q) \\ &= \frac{1}{2} J, \end{aligned} \quad (1.21)$$

comprobamos que la condición de cuantificación WKB (ec. (1.20)) difiere de la SWI (ec. (1.2)) únicamente en el término  $\frac{1}{2}$ .

### 1.2.6 Principio del argumento; método de Dunham

En 1932 Dunham [Du32] aplicó el principio del argumento para obtener el desarrollo semiclásico WKB. El principio del argumento establece que si una función analítica  $f$  contiene  $n$  ceros y  $m$  polos en un contorno  $C$  cerrado simple y positivamente orientado, entonces se satisface

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{f'}{f} = n - m. \quad (1.22)$$

Por otra parte sabemos por el teorema de oscilación que para un potencial monodimensional la función de onda del estado ligado  $n$ -ésimo tiene  $n$  ceros en el eje real entre los puntos de retroceso más externos. Tomando entonces un contorno que envuelva el segmento  $[x_-, x_+]$  que no incluya otros ceros ni ninguna singularidad de la función de onda y aplicando el principio del argumento a la función de onda (1.10) se obtiene de nuevo y con gran sencillez la condición de cuantificación WKB (1.20).

Este método permite determinar de forma sistemática la contribución de órdenes superiores del desarrollo asintótico (1.6) a la condición de cuantificación WKB.

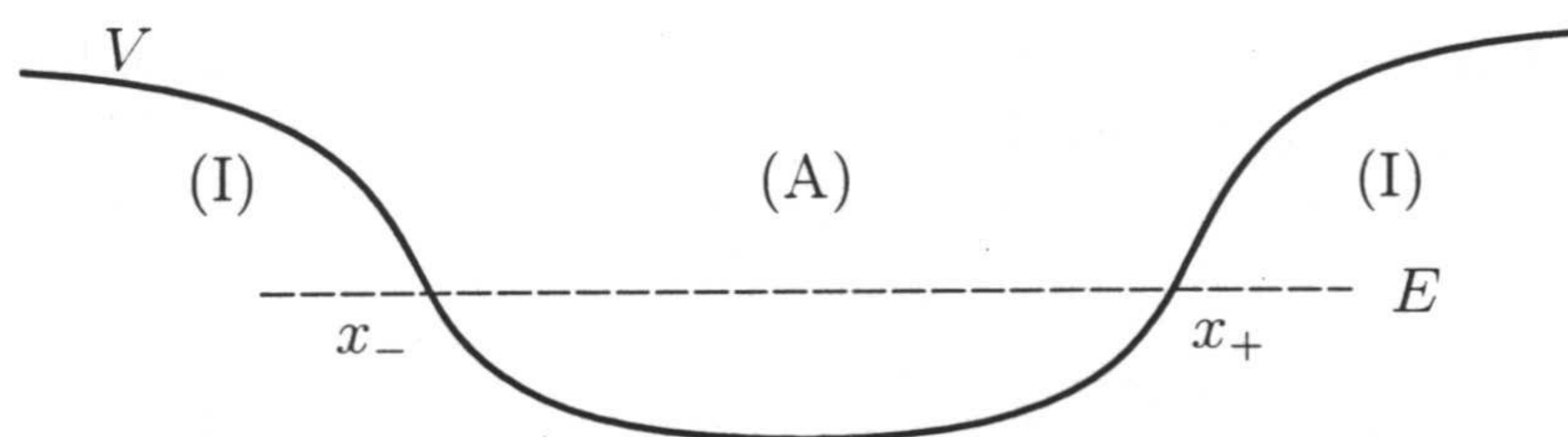


Figura 1.2: Potencial con un solo pozo.



## 1.3 La aproximación Wigner-Kirkwood

### 1.3.1 Mar de Fermi

Nos centraremos ahora en un sistema de fermiones idénticos, independientes y no relativistas en dimensión  $D$  arbitraria. Supongamos que el hamiltoniano monoparticular  $\widehat{H}$  no depende de grados de libertad internos, y que su restricción espacial  $\widehat{H} = \widehat{p}^2/(2m) + \widehat{V}$  tiene autovalores  $\{E_n \text{ real} / n = 0, \dots, \infty; E_n < E_{n+1}\}$  y autofunciones  $\{|\psi_{n,\alpha}\rangle / n = 0, \dots, \infty; \alpha = 1, \dots, g_n\}$  ( $g_n$  es la degeneración del nivel  $n$ -ésimo).

Por definición de fermión, la función de onda que representa el estado ha de ser antisimétrica ante trasposición de dos conjuntos de coordenadas monoparticulares. La conexión espín-estadística obliga a que el espín,  $s$ , sea semientero, por lo que el espacio de Hilbert espinorial tiene dimensión  $\nu = 2s + 1$  par.

A temperatura cero las partículas se agolpan en los niveles inferiores satisfaciendo el principio de exclusión y constituyendo lo que se denomina un *mar de Fermi*. El último de los niveles de energía ocupados, que vamos a suponer que se completa, coincide con el potencial químico y se suele llamar *nivel de Fermi*. La función de onda  $|\Psi\rangle$  que describe el sistema es el determinante de Slater de las funciones monoparticulares hasta el nivel de Fermi inclusive.

El número de partículas  $N$  asociado a un potencial químico  $\mu$  se escribe

$$N(\mu) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} g_n \Theta(\mu - E_n), \quad (1.23)$$

y la matriz densidad de primer orden es

$$\rho_1(x, x') \equiv \int d^D x_2 \dots d^D x_N \Psi^\dagger(x', x_2, x_3, \dots, x_N) \Psi(x, x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (1.24)$$

$$= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n,\alpha}^*(x') \psi_{n,\alpha}(x) \Theta(\mu - E_n). \quad (1.25)$$

A partir de la matriz densidad es inmediato calcular la densidad de fermiones,  $\rho$ , y de energía cinética,  $\rho_K$ ,

$$\rho(x, \mu) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{g_n} |\psi_{n,\alpha}(x)|^2 \Theta(\mu - E_n) \quad (1.26)$$

$$= \rho_1(x, x) \quad (1.27)$$

$$\rho_K(x, \mu) = \nu \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{g_n} |\nabla \psi_{n,\alpha}(x)|^2 \Theta(\mu - E_n) \quad (1.28)$$



$$= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x \cdot \nabla_{x'} \rho_1(x, x') \Big|_{x=x'}. \quad (1.29)$$

Con estas densidades la energía del sistema se escribe

$$\begin{aligned} E &= \langle \Psi | \widehat{H} | \Psi \rangle \\ &= \int d^D x [\rho_K(x) + V(x) \rho(x)]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

### 1.3.2 Método de Wigner-Kirkwood

E.P. Wigner [Wi32, Wi34] y J.G. Kirkwood [Ki33] idearon un método que proporcionaba el desarrollo en potencias de  $\hbar$  (o equivalentemente, en gradientes del potencial) de la matriz densidad. Siguiendo a [Pa89, Ri80], comenzamos definiendo la matriz densidad de Bloch

$$G(x, x'; \beta) = \langle x | \exp \{ -\beta \widehat{H} \} | x' \rangle \quad (1.31)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n,\alpha}^*(x') \psi_{n,\alpha}(x) \exp \{ -\beta E_n \}. \quad (1.32)$$

La función paso de Heaviside se puede expresar como la siguiente transformada de Laplace inversa

$$\Theta(\mu - E_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} d\beta \frac{e^{\beta\mu} e^{-\beta E_n}}{\beta}, \quad (1.33)$$

donde  $\gamma$  es cualquier real positivo. Para demostrarlo basta con usar el contorno de la figura (1.3.a), que encierra un polo en  $z = 0$ , si  $\mu > E_n$ , o el de la figura (1.3.b), que no contiene ningún polo, si  $\mu < E_n$ . En ambos casos la integral semicircular tiende a cero al aumentar el radio.

Usando las ecs. (1.33), (1.32) y (1.25) es inmediato comprobar que

$$\rho_1(x, x') = \frac{\nu}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} d\beta \frac{e^{\beta\mu}}{\beta} G(x, x'; \beta). \quad (1.34)$$

La aproximación se realiza sobre la transformada de Wigner de  $G(x, x'; \beta)$ ; dado cualquier operador  $\widehat{A}$  su transformada de Wigner se define

$$\widetilde{A}(x, p) = \int d^D s \langle x - \frac{s}{2} | \widehat{A} | x + \frac{s}{2} \rangle \exp \left\{ i \frac{p \cdot s}{\hbar} \right\}. \quad (1.35)$$

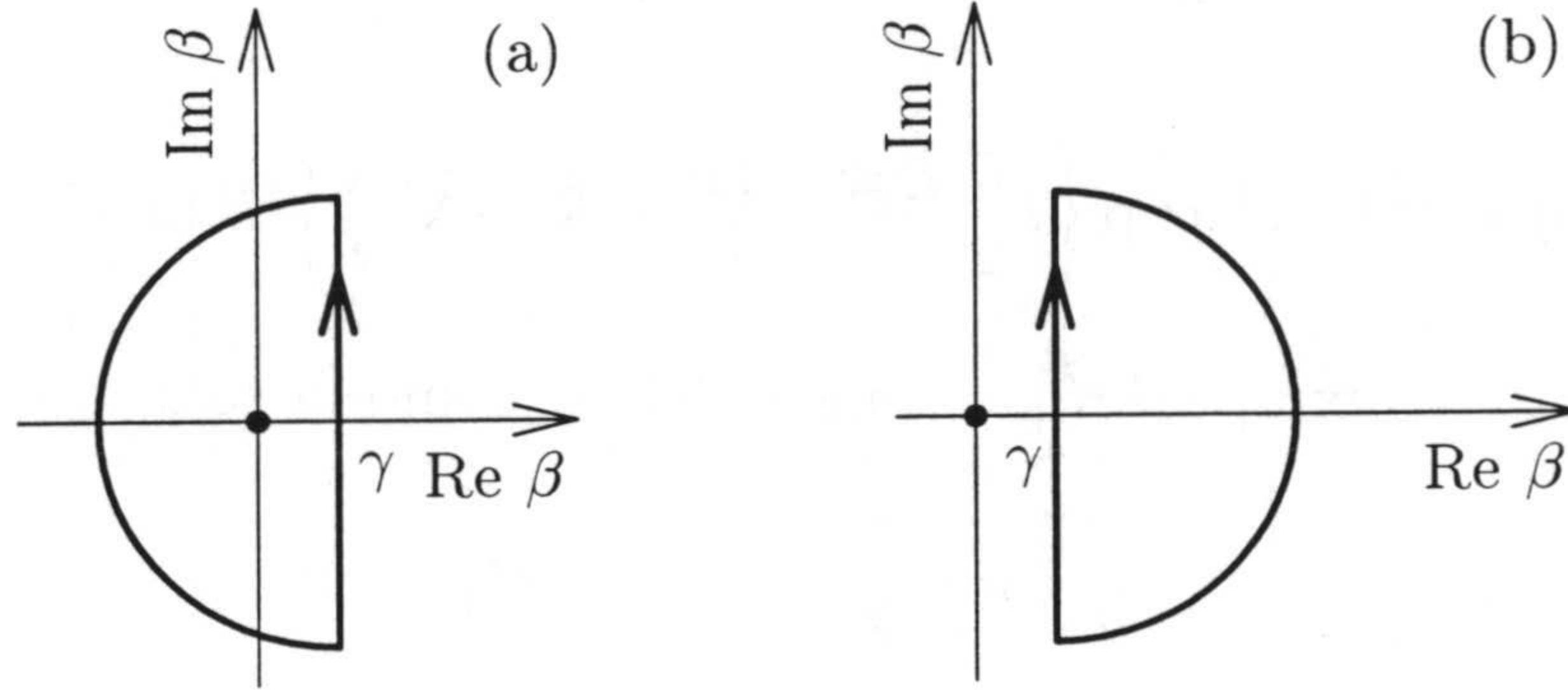


Figura 1.3: Regularización de la función paso.

La transformada inversa proporciona el elemento de matriz

$$A(x, x') \equiv \langle x | \hat{A} | x' \rangle \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} p \cdot (x' - x) \right\} \tilde{A} \left( \frac{1}{2}(x + x'), p \right). \quad (1.37)$$

Dado el producto de dos operadores,  $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ , se tiene

$$\tilde{C}(x, p) = \int d^D s d^D x' \langle x - \frac{s}{2} | \hat{A} | x' \rangle \langle x' | \hat{B} | x + \frac{s}{2} \rangle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p \cdot s \right\}, \quad (1.38)$$

y usando la ec. (1.37) conseguimos

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x, p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2D}} \int d^D s d^D x' d^D p_1 d^D p_2 \tilde{A} \left( \frac{x + x'}{2} - \frac{s}{4}, p_1 \right) \tilde{B} \left( \frac{x + x'}{2} + \frac{s}{4}, p_2 \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ p \cdot s - p_1 \cdot (x' - x + \frac{s}{2}) + p_2 \cdot (x' - x - \frac{s}{2}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para eliminar la dependencia de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  en  $x'$ ,  $s$ ,  $p_1$  y  $p_2$  podemos usar el desarrollo de Taylor formal

$$f(x + x', y + y') = \exp \{ x' \cdot \nabla_x + y' \cdot \nabla_y \} f(x, y) \quad (1.40)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{A} \left( \frac{x + x'}{2} - \frac{s}{4}, p_1 \right) &= \exp \left\{ \left( \frac{x' - x}{2} - \frac{s}{4} \right) \cdot \nabla_x + (p_1 - p) \cdot \nabla_p \right\} \tilde{A}(x, p) \\ \tilde{B} \left( \frac{x + x'}{2} + \frac{s}{4}, p_2 \right) &= \exp \left\{ \left( \frac{x' - x}{2} + \frac{s}{4} \right) \cdot \nabla_x + (p_2 - p) \cdot \nabla_p \right\} \tilde{B}(x, p). \end{aligned} \quad (1.41)$$



Si se introducen estas expresiones en la ecuación (1.39) y se realizan las integrales, se llega a

$$\tilde{C}(x, p) = \tilde{A}(x, p) \exp \left\{ i \frac{\hbar}{2} \left( \vec{\nabla}_p \cdot \overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x \cdot \overleftarrow{\nabla}_p \right) \right\} \tilde{B}(x, p). \quad (1.42)$$

El operador  $\hat{G} = \exp \{-\beta \hat{H}\}$  se puede definir como la solución de la ecuación de Bloch

$$\frac{d\hat{G}}{d\beta} = -\frac{1}{2} [\hat{H} \hat{G} + \hat{G} \hat{H}] \quad (1.43)$$

con condición inicial  $\hat{G}(\beta = 0) = \mathbf{1}$ . Hemos usado la conmutatividad de  $\hat{H}$  y de  $\hat{G}$  para escribir una expresión simétrica de la ecuación de Bloch; de esta forma, al realizar la transformada de Wigner de (1.43) las exponenciales se combinan para formar un coseno

$$\frac{\partial \tilde{G}(x, p)}{\partial \beta} = -\tilde{H}(x, p) \cos \left[ \frac{\hbar}{2} \left( \vec{\nabla}_p \cdot \overleftarrow{\nabla}_x - \overrightarrow{\nabla}_x \cdot \overleftarrow{\nabla}_p \right) \right] \tilde{G}(x, p). \quad (1.44)$$

Desarrollemos formalmente el coseno y  $\tilde{G}(x, p)$  en serie de potencias de  $\hbar$ ,

$$\tilde{G}(x, p; \beta, \hbar) = \tilde{G}^{(0)}(x, p; \beta) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{(n)}(x, p; \beta) \hbar^n \right]. \quad (1.45)$$

En esta serie sólo sobreviven potencias pares. Para verlo basta notar la paridad de la función coseno, y que tanto la condición inicial como la transformada de Wigner del hamiltoniano,

$$\tilde{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (1.46)$$

son de orden cero en  $\hbar$ .

El orden cero de la ecuación de Bloch se escribe

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \tilde{G}^{(0)}(x, p; \beta) = -\tilde{H}(x, p) \tilde{G}^{(0)}(x, p; \beta), \quad \tilde{G}^{(0)}(\beta = 0) = \mathbf{1}, \quad (1.47)$$

y tiene como solución

$$\tilde{G}^{(0)}(x, p; \beta) = \exp \{-\beta \tilde{H}(x, p)\}. \quad (1.48)$$

Para obtener el segundo orden de la ecuación diferencial hay que utilizar los resultados

$$\nabla_{p_i} \nabla_{p_j} \tilde{H}(x, p) = \frac{\delta_{ij}}{m}$$



$$\begin{aligned}
\nabla_{x_i} \nabla_{x_j} \widetilde{H}(x, p) &= \nabla_i \nabla_j V \\
\nabla_{p_i} \nabla_{x_j} \widetilde{H}(x, p) &= 0 \\
\nabla_{p_i} \nabla_{p_j} \widetilde{G}^{(0)}(x, p) &= \left( \frac{\beta^2}{m^2} p_i p_j - \frac{\beta}{m} \delta_{ij} \right) \widetilde{G}^{(0)}(x, p) \\
\nabla_{x_i} \nabla_{x_j} \widetilde{G}^{(0)}(x, p) &= \left( \beta^2 (\nabla_i V)(\nabla_j V) - \beta (\nabla_i \nabla_j V) \right) \widetilde{G}^{(0)}(x, p).
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Con ellos se llega a una ecuación diferencial de primer orden,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \beta} &= \frac{\hbar^2}{8} \left[ \frac{\beta^2}{m} (\nabla V)^2 - \frac{2\beta}{m} (\nabla^2 V) + \frac{\beta^2}{m^2} p_i p_j (\nabla_i \nabla_j V) \right] \\
\chi^{(2)}(\beta = 0) &= 0,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

cuya solución es inmediata. Hasta orden  $\hbar^3$  inclusive se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}^{sc}(x, p; \beta) &= \left\{ 1 + \hbar^2 \left[ \frac{\beta^3}{24m} \left( (\nabla V)^2 + \frac{p_i p_j}{m} (\nabla_i \nabla_j V) \right) \right] \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ -\beta \left( \frac{p^2}{2m} + V(x) \right) \right\},
\end{aligned} \tag{1.51}$$

donde el superíndice *sc* nos recuerda que hemos realizado una aproximación semiclásica. Nuestra intención es transmitir esta aproximación a la matriz densidad, cosa por otra parte sencilla pues a partir de la ec. (1.34) se tiene

$$\tilde{\rho}_1(x, p; \mu) = \frac{\nu}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} d\beta \frac{e^{\beta\mu}}{\beta} \widetilde{G}(x, p; \beta). \tag{1.52}$$

Para calcular las integrales utilizamos la relación

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} d\beta \beta^{n-1} e^{\beta\mu} e^{-\beta \widetilde{H}(x, p)} = \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \Theta(\mu - \widetilde{H}(x, p)), \tag{1.53}$$

que puede demostrarse a partir de la ecuación (1.33). En concreto, el desarrollo semiclásico de la matriz densidad hasta segundo orden queda

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_1^{sc}(x, p; \mu) &= \nu \left\{ 1 + \frac{\hbar^2}{24m} [(\nabla V)^2 \partial_\mu^3 + \frac{1}{m} p_i p_j (\nabla_i \nabla_j V) \partial_\mu^3 \right. \\
&\quad \left. - 3 (\nabla^2 V) \partial_\mu^2] \right\} \Theta \left( \mu - \frac{p^2}{2m} - V(x) \right).
\end{aligned} \tag{1.54}$$



Podemos calcular la densidad de fermiones en la aproximación semiclásica valiéndonos de la transformada de Wigner de la matriz densidad aproximada,

$$\rho^{sc}(x; \mu) = \int \frac{d^D p}{(2\pi\hbar)^D} \tilde{\rho}_1^{sc}(x, p; \mu). \quad (1.55)$$

Para realizar esta integración en dimensión arbitraria hay que tener en cuenta que para cualesquiera  $f$  y  $f_{ij}$  se satisface

$$\int d^D p f(p^2) = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dp p^{D-1} f(p^2) \quad (1.56)$$

$$\int d^D p p_i p_j f_{ij}(p^2) = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \delta_{ij} \int_0^\infty dp p^{D+1} f_{ij}(p^2), \quad (1.57)$$

y en particular

$$\begin{aligned} \int d^D p \Theta(2m(\mu - V(x)) - p^2) &= \\ &= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} (2m(\mu - V(x)))^{\frac{D}{2}} \Theta(\mu - V(x)) \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \int d^D p p_i p_j \Theta(2m(\mu - V(x)) - p^2) &= \\ &= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{2\Gamma(\frac{D}{2} + 2)} (2m(\mu - V(x)))^{\frac{D}{2}+1} \delta_{ij} \Theta(\mu - V(x)). \end{aligned} \quad (1.59)$$

El resultado que se obtiene para la densidad es un desarrollo en gradientes del potencial,

$$\rho^{sc}(x, \mu) = \rho_{(0)}^{sc}(x, \mu) + \rho_{(2)}^{sc}(x, \mu) + \dots \quad (1.60)$$

$$\rho_{(0)}^{sc}(x, \mu) = \frac{\nu}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \left(\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} (\mu - V(x))^{\frac{D}{2}} \Theta(\mu - V(x)) \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \rho_{(2)}^{sc}(x, \mu) &= \frac{1}{12} \frac{\nu}{\Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \left(\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \frac{\hbar^2}{2m} \{(\nabla V)^2 \partial_\mu^3 - 2(\nabla^2 V) \partial_\mu^2\} \\ &\quad \left[ (\mu - V(x))^{\frac{D}{2}} \Theta(\mu - V(x)) \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Generalmente no se tiene en cuenta la presencia de la función paso de Heaviside al calcular las derivadas en expresiones como las anteriores. Los resultados que se obtengan no serán entonces aplicables en la hipersuperficie de puntos de retroceso.



Dependiendo del observable que se vaya a calcular, de la dimensión del espacio, y del orden en  $\hbar$  que se esté usando, los términos puramente distributivos que se obvian pueden dar lugar a contribuciones divergentes. En particular puede ocurrir que los términos distributivos y los no distributivos sean divergentes por separado, pero que la expresión global sea finita. A título de ejemplo consideremos la integral

$$I_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \partial_{\mu}^2 \left[ \sqrt{\mu - x^2} \Theta(\mu - x^2) \right], \quad (1.63)$$

asociada a uno de los términos de orden  $\hbar^2$  en el cálculo de  $\langle x^2 \rangle_{sc}$  en dimensión uno para un potencial de tipo armónico  $V(x) = x^2$ . La integral está perfectamente definida si las derivadas respecto de  $\mu$  se calculan fuera del signo integral,

$$I_1(\mu) = \frac{d^2}{d\mu^2} \left( \frac{\pi}{8} \mu^2 \Theta(\mu) \right) = \frac{\pi}{4} \Theta(\mu). \quad (1.64)$$

En cambio, si derivamos antes de efectuar la integración nos encontramos con tres términos divergentes cuyas contribuciones por separado no están bien definidas; el resultado final sólo puede alcanzarse tras la adecuada resumación.

En general, fijado el orden  $\hbar$  de trabajo, hay una dimensión a partir de la cual todos los términos distributivos dan contribución nula en el cálculo de valores esperados; es entonces lícito olvidarse de ellos. Por otra parte, si se trabaja con una dimensión dada, como ocurre en la práctica, existe un orden en el desarrollo en  $\hbar$  a partir del cual los términos distributivos son divergentes y su consideración parece ineludible.

De lo anterior queda claro que las expresiones como la (1.62) son finitas en el sentido de distribuciones. En particular las derivadas que aparecen deben entenderse en su sentido distributivo. En la práctica esto da lugar a la regla de calcular derivadas respecto de potencial químico al final de todos los cálculos.

Con las salvedades indicadas escribimos la densidad de fermiones en dimensión  $D = 3$  hasta segundo orden en derivadas del potencial sin incluir los términos distributivos

$$\begin{aligned} \rho^{sc}(x, \mu) = & \frac{\nu}{6\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (\mu - V(x))^{\frac{3}{2}} \Theta(\mu - V(x)) \\ & - \frac{\nu}{48\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(\nabla V)^2}{4(\mu - V(x))^{\frac{3}{2}}} + \frac{(\nabla^2 V)}{(\mu - V(x))^{\frac{1}{2}}} \right] \Theta(\mu - V(x)) + \dots \end{aligned} \quad (1.65)$$

por lo que no es válida en los puntos de retroceso ni siquiera como distribución. Posteriormente desarrollaremos un método para calcular valores esperados a partir de expresiones que no incluyan los términos distributivos y que será aplicable al caso de potenciales esféricos (sección 5.2.2).



Ocupémonos ahora del desarrollo semiclásico de la densidad de energía cinética fermiónica hasta segundo orden inclusive. A partir de las expresiones (1.29) y (1.37) se tiene

$$\rho_K^{sc}(x, \mu) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \frac{\hbar^2}{2m} \int d^D p \left\{ \frac{p^2}{\hbar^2} \tilde{\rho}^{sc}(x, p) + \frac{1}{4} \nabla_x^2 \tilde{\rho}^{sc}(x, p) \right\}. \quad (1.66)$$

Esta integral no es muy distinta de las ya calculadas. Sólo hay que notar

$$\nabla_x^2 \tilde{\rho}^{sc}(x, p) = \nu \left[ (\nabla V)^2 \partial_\mu^2 - (\nabla^2 V) \partial_\mu \right] \Theta \left( \mu - \frac{p^2}{2m} - V(x) \right) + \dots \quad (1.67)$$

En dimensión  $D = 3$  todos los términos distributivos son nulos, pues van multiplicados por potencias positivas de  $\mu - V(x)$ . Se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \rho_K^{sc}(x, \mu) = & \frac{\nu}{10\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ (\mu - V(x))^{\frac{5}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{5}{8} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3}{4} \frac{(\nabla V)^2}{(\mu - V(x))^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{3} (\nabla^2 V) (\mu - V(x))^{\frac{1}{2}} \right) + \dots \right\} \Theta(\mu - V(x)). \end{aligned} \quad (1.68)$$

El cálculo de los órdenes siguientes del desarrollo en gradientes de las densidades no introduce nuevas dificultades más allá de la creciente complejidad de las expresiones intermedias y finales.

### 1.3.3 El potencial químico semiclásico

En la práctica el parámetro de la teoría no es el potencial químico sino su magnitud conjugada: el número de partículas (véase ec. (1.23)). En lo que respecta a la densidad de partículas, se relaciona a través de la condición de normalización

$$N(\mu) = \int d^D x \rho(x, \mu). \quad (1.69)$$

En la aproximación semiclásica la densidad exacta se sustituye por su desarrollo en gradientes hasta un orden dado y se fija el potencial químico para que se cumpla la condición de normalización. En general los distintos órdenes en el desarrollo de la densidad *no* son divergencias exactas, y sus integrales contribuyen de forma no nula a la normalización. Es entonces evidente que el potencial químico que se encuentre dependerá de a qué orden se trabaje, y de hecho contiene una dependencia no trivial en  $\hbar$ . Recientemente [Kr90, Sc93] se ha propuesto considerar esta dependencia para calcular de forma perturbativa la contribución de los distintos órdenes en el potencial químico. Volveremos a este punto en el capítulo siguiente. Comprobaremos también que lo que estamos llamando *potencial químico* lo es en su sentido termodinámico.



### 1.3.4 Relación Wigner-Kirkwood con Thomas-Fermi

La aproximación de Thomas-Fermi [Th27, Fe28] es el orden cero en el desarrollo de la energía de un mar de Fermi en gradientes de la densidad. El teorema de Hohenber-Kohn [Ho64] garantiza que el estado fundamental de un sistema fermiónico es un funcional de la densidad; el método de Thomas-Fermi extendido proporciona la aproximación semiclásica a ese funcional.

Se puede calcular el desarrollo de Thomas-Fermi de la energía y de la energía cinética a partir de la aproximación de Wigner-Kirkwood. En esta aproximación esas magnitudes son una función de  $\tilde{V}(x) \equiv \mu - V(x)$  y sus gradientes. Supongamos que queremos obtener el desarrollo de Thomas-Fermi hasta segundo orden; a partir de la expresión semiclásica de la densidad se calculan  $\rho^{sc}$ ,  $\nabla\rho^{sc}$  y  $\nabla^2\rho^{sc}$  en función de  $\tilde{V}$ ,  $\nabla\tilde{V}$  y  $\nabla^2\tilde{V}$  (despreciando órdenes superiores) y sin más que invertir esta relación podemos escribir las magnitudes calculadas anteriormente en términos de gradientes de la densidad. En dimensión  $D = 3$  y a excepción de en los puntos de retroceso, el resultado que se obtiene es

$$\mu - V = \left(\frac{6\pi^2}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{36} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2} - 2 \frac{\nabla^2\rho}{\rho} \right) \quad (1.70)$$

$$\nabla V = -\frac{2}{3} \left(\frac{6\pi^2}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla\rho}{\rho^{\frac{1}{3}}} \quad (1.71)$$

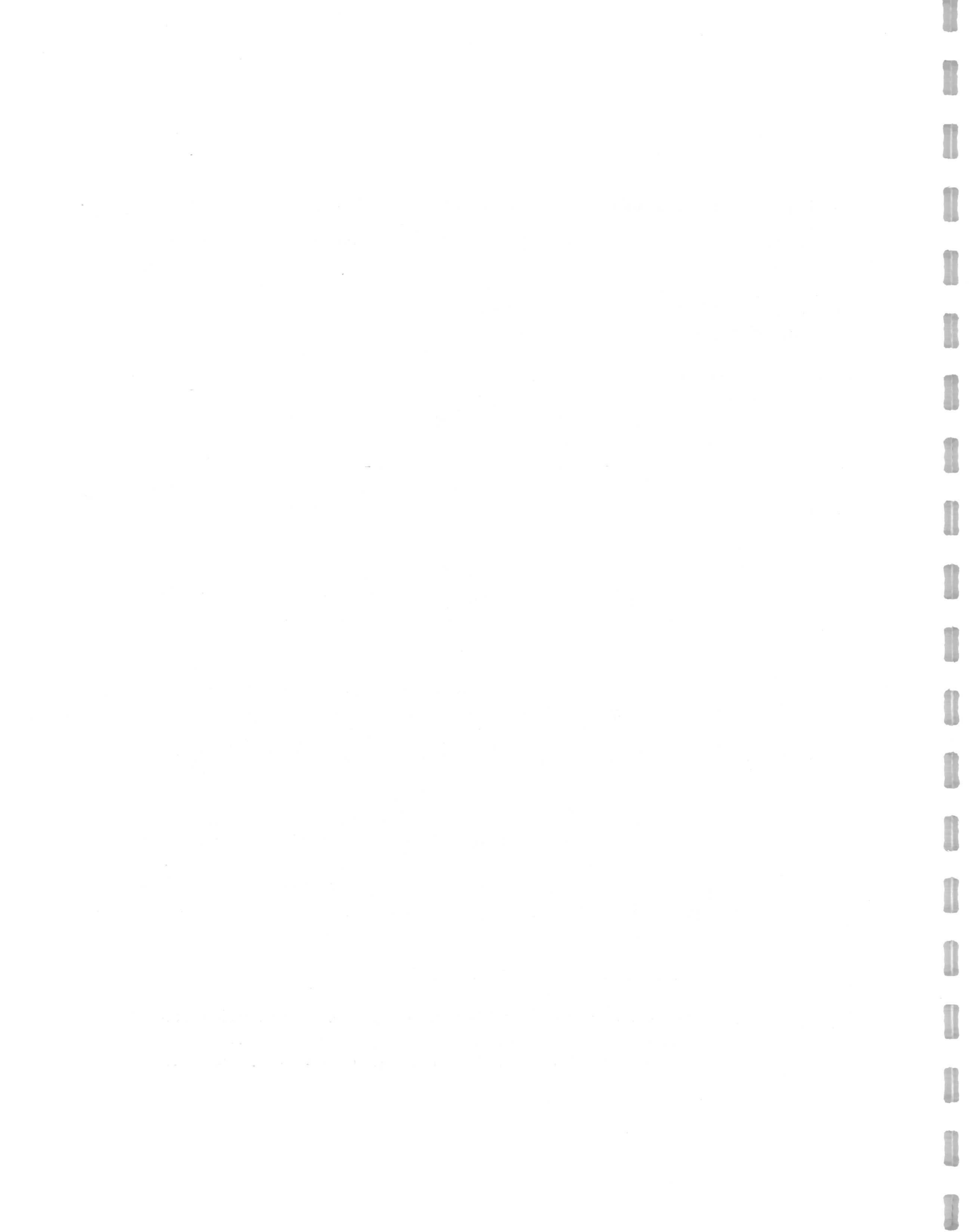
$$\nabla^2 V = -\frac{2}{3} \left(\frac{6\pi^2}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2\rho}{\rho^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{9} \left(\frac{6\pi^2}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^{\frac{4}{3}}}. \quad (1.72)$$

Sustituyendo estas expresiones en la densidad de energía cinética (ec. (1.68)) y tras un poco de álgebra se llega a la ecuación

$$\rho_K^{sc} = \frac{3}{5} \left(\frac{6\pi^2}{\nu}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{36} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} + \frac{1}{3} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\rho, \quad (1.73)$$

que expresa el desarrollo de la densidad de energía cinética en gradientes de la densidad fermiónica. De nuevo la ecuación no tiene por qué ser válida en la hipersuperficie de los puntos de retroceso.







## Capítulo 2

# El método semiclásico Traza-Logaritmo

### 2.1 Introducción

En 1986 Lai-Him Chan [Ch86] publicó un método para encontrar el desarrollo de acciones efectivas a un *loop* en derivadas covariantes de los potenciales. En la práctica la magnitud a tratar es la traza del logaritmo de un operador elíptico en el operador momento generalizado y sin restricciones en cuanto a posibles grados de libertad internos,  $\text{Tr} \log(P_\mu^2 + U(X))$ . Recientemente, E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo [Ru93] han aplicado el método de Chan al problema semiclásico tanto en el caso no relativista como en el relativista.

En este capítulo vamos a establecer el problema semiclásico en un formalismo elegante basado en el funcional *número de partículas*, el cual se expresará de un modo adecuado para aplicar los resultados de Chan. A continuación expondremos el método *traza-logaritmo* (TrLog) en su versión más general y lo aplicaremos al caso no relativista. Para terminar apuntaremos un método perturbativo que extrae parte de la dependencia del potencial químico en  $\hbar$  y que simplifica el cálculo numérico. La utilización del método TrLog en el caso relativista, donde evidenciará toda su potencia, se reservará para el capítulo 4.

### 2.2 El número de partículas

Seguimos interesados en un mar de Fermi de partículas de espín  $s$ , restricción espacial del hamiltoniano  $\widehat{H} = \widehat{p}^2/(2m) + \widehat{V}$ , con autovalores  $\{E_n \text{ real} / n = 0, \dots, \infty; E_n < E_{n+1}\}$  y autoestados  $\{|\psi_{n\alpha}\rangle / \langle \psi_{n\alpha} | \psi_{m\beta} \rangle = \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta}; n, m = 0, \dots, \infty; \alpha, \beta =$



$1, \dots, g_n\}$  ( $g_n$  es la degeneración del estado  $n$ -ésimo). La parte espinorial del hamiltoniano es la matriz identidad en dimensión  $\nu = 2s + 1$  par, es decir, suponemos un hamiltoniano global  $\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{H} \otimes \mathbf{1}_\nu$ . Esta suposición se realiza por sencillez; como veremos en el capítulo 4, el método de desarrollo semiclásico que vamos a utilizar permite tratar hamiltonianos con estructura espinorial arbitraria. En su momento definimos el número de partículas asociado a una energía como el recuento de autovalores del hamiltoniano, con su degeneración, menores que esa energía,

$$\begin{aligned} N(E) &= \nu \sum_{n=0}^{\infty} g_n \Theta(E - E_n) \\ &= \text{Tr} \Theta(E - \widehat{\mathbf{H}}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

La densidad de estados,  $g(E)$ , se define como la derivada del número de partículas respecto de la energía

$$g(E) = \frac{d}{dE} N(E) \quad (2.2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \nu g_n \delta(E - E_n) \quad (2.3)$$

(no debe confundirse con la degeneración,  $g_n$ ).

Si para calcular la traza de la ec. (2.1) queremos valernos de una base que no diagonalice el hamiltoniano es necesario regularizar la función paso de Heaviside,  $\Theta(x)$ . En el formalismo de Wigner-Kirkwood se usa la transformada de Laplace de  $\exp\{-\beta x\}/x$ . Para usar el método de Chan regularizamos a partir de la función logaritmo (seguimos [Ru93]).

Vamos a trabajar con la rama principal de la función logaritmo,

$$\begin{aligned} \log z &= \log |z| + i \arg z \\ 0 &\leq \arg z < 2\pi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

es decir, con el corte de rama en el semieje real positivo.

Usaremos la siguiente regularización de la función paso

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \text{Im} \log(-x + i\epsilon) \quad (2.5)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

(en lo que sigue sobrentenderemos  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$  cada vez que aparezca un  $\epsilon$ ).



Tomando la parte espinorial de la traza en la ec. (2.1) y aplicando la regularización indicada llegamos a

$$N(E) = \frac{\nu}{\pi} \text{Im Tr log} \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}) - E + i\epsilon \right). \quad (2.7)$$

Si ahora tenemos en cuenta que en la rama escogida se cumple  $\text{Im Tr log } 2m = 0$ , pues  $m$  es real, y redefinimos el regulador  $\epsilon$ , conseguimos una expresión del número de partículas,

$$N(E) = \frac{\nu}{\pi} \text{Im Tr log}(\hat{p}^2 + \hat{U}(\hat{x}))$$

$$\hat{U}(\hat{x}) \equiv 2m (\hat{V}(\hat{x}) - E) + i\epsilon, \quad (2.8)$$

a la que se le pueden aplicar los resultados de Chan. Antes de hacerlo vamos a justificar nuestro interés en el número de partículas usándolo como generador de otras magnitudes, tales como la densidad espacial de partículas, de energía y de energía cinética.

El número de partículas no sólo depende de a qué energía se calcula; simultáneamente debe verse como un funcional del potencial,  $V(x)\langle x| = \langle x|\hat{V}(\hat{x})$ . Esto se entiende fácilmente sin más que notar que tanto los autovalores como las autofunciones del hamiltoniano cambian si modificamos el potencial, y por tanto dependen funcionalmente del mismo.

Queremos calcular la derivada funcional del número de partículas. Vamos a comparar nuestro sistema inicial,  $\hat{H}$ , con el asociado a introducir una ligera variación en el potencial,  $\hat{H} + \delta\hat{V}$ . Centremos nuestra atención en el nivel  $E_n$  del hamiltoniano original con degeneración  $g_n$ . La perturbación puede reducir las simetrías del sistema con lo que la degeneración puede romperse. Llamemos  $E_{n\alpha}(\hat{V} + \delta\hat{V}) = E_n + \delta E_{n\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, g_n$ ) al espectro perturbado. El siguiente resultado

$$\sum_{\alpha=1}^{g_n} \delta E_{n\alpha} = \int d^D x \left[ \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^*(x) \psi_{n\alpha}(x) \right] \delta V(x) + \mathcal{O}(\delta V^2), \quad (2.9)$$

es independiente de la base ortonormal de autovalores del subespacio propio de  $E_n$  que se haya escogido, y constituye una generalización de la fórmula de Hellman-Feynman [He35, Fe39].

Ahora usamos esta ecuación junto con la regla de la cadena en el número de partículas (ec. (2.1)) y llegamos a un resultado de gran aplicabilidad,

$$\frac{\delta N(E)}{\delta V(x)} = -\nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^*(x) \psi_{n\alpha}(x) \delta(E - E_n), \quad (2.10)$$



que nos permite escribir la densidad espacial de fermiones (ec. (1.26)) y de energía total fermiónica,

$$\rho_E(x, \mu) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{g_n} E_n \psi_{n\alpha}^*(x) \psi_{n\alpha}(x) \Theta(\mu - E_n), \quad (2.11)$$

conocida la dependencia funcional explícita del número de partículas en el potencial,

$$\rho(x, \mu) = - \int dE \frac{\delta N(E)}{\delta V(x)} \Theta(\mu - E) \quad (2.12)$$

$$\rho_E(x, \mu) = - \int dE \frac{\delta N(E)}{\delta V(x)} E \Theta(\mu - E). \quad (2.13)$$

Por simple sustracción se puede obtener la densidad de energía cinética,

$$\rho_K(x, \mu) = \rho_E(x, \mu) - V(x) \rho(x, \mu) \quad (2.14)$$

$$= - \int dE \frac{\delta N(E)}{\delta V(x)} (E - V(x)) \Theta(\mu - E). \quad (2.15)$$

## 2.3 Método de Lai Him Chan

En el formalismo de integral de caminos de la teoría cuántica de campos se suele utilizar la aproximación de fase estacionaria también conocida como de punto de silla [Ra90]. Esta aproximación se efectúa en la amplitud vacío-vacío (funcional generador de las funciones de Green) y consiste en desarrollar la acción del sistema a partir de los campos que la minimizan (que se corresponden con la solución clásica). Los órdenes siguientes, de origen puramente cuántico, van incorporando sucesivamente *loops* en los diagramas de tipo árbol asociados al orden cero. En la primera corrección, que resume todos los diagramas a un *loop*, la acción es cuadrática en las variaciones de los campos respecto de la solución clásica. En sistemas bosónicos su contribución se calcula como el determinante de un operador diferencial elíptico,  $\text{Det}(P^2 + U(X))$ , donde  $P_\mu$  es el operador momento generalizado<sup>1</sup> (es decir, incluye posibles campos *gauge*). En el caso de sistemas fermiónicos la parte no anómala de la acción puede escribirse de la misma forma [Ba89]. La acción efectiva está directamente relacionada —a través de una transformada de Legendre— con el logaritmo de la amplitud vacío-vacío, y por tanto a nivel 1-*loop* hay que tratar con  $\log \text{Det}(P^2 + U(X))$ . Frecuentemente esta cantidad se calcula mediante un desarrollo en derivadas covariantes, que es válido para procesos a bajo momento. El método de Chan permite encontrar ese desarrollo.

<sup>1</sup>En esta sección no cubriremos los operadores con un sombrero.



Desde el punto de vista matemático lo que se quiere conseguir es un desarrollo en gradientes explícitamente covariante de la magnitud

$$\begin{aligned} W &= \log \text{Det} (P^2 + U(X)) \\ &= \text{Tr} \log(P^2 + U(X)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $P_\mu = i\hbar \partial_\mu + A_\mu(X)$  ( $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$  es el operador derivada en el espacio de posiciones y la identidad en el de simetría interna) y  $A_\mu(X)$  y  $U(X)$  son operadores multiplicativos en el espacio de posiciones y operadores arbitrarios en el espacio de simetría interna. El índice  $\mu$  va de 1 a  $D$ , la dimensión del espacio de posiciones, donde se ha establecido una métrica euclídea  $\delta_{\mu\nu}$ .

Vamos a operar a nivel formal, siguiendo y extendiendo [Ca93a] el trabajo de Chan [Ch86]. La magnitud  $W$  es divergente ultravioleta (UV) (aunque no su parte imaginaria, que en realidad es la que nos interesa al aplicarla al caso semiclásico) y debe regularse mediante la introducción de los contratérminos adecuados, que no vamos a escribir explícitamente. Nuestra hipótesis será que las propiedades formales que usaremos introducirían a lo sumo una redefinición de los contratérminos. De este modo obtenemos una expresión divergente UV pero manifiestamente invariante *gauge*. Valiéndonos de la propiedad cíclica de la traza y de las relaciones de conmutación  $[X_\mu, P_\nu] = -i\hbar\delta_{\mu\nu}$ , se tiene

$$\begin{aligned} W &= \text{Tr} \left( \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} kX \right\} \log(P^2 + U(X)) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} kX \right\} \right) \\ &= \text{Tr} \log \left( (P_\mu + k_\mu)^2 + U(X) \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $k_\mu$  es cualquier vector c-numérico. Si promediamos sobre  $k_\mu$  obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \Omega^{-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \text{Tr} \log \left( \Delta^{-1} + 2kP + P^2 \right) \\ \Omega &= \int \frac{d^D k}{(2\pi\hbar)^D}, \quad \Delta(X) = \left( k^2 + U(X) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\Omega$  presenta divergencia UV, pero veremos posteriormente que este factor se cancela. La expresión (2.18) de  $W$  es explícitamente invariante ante transformaciones de tipo *boost*,

$$P_\mu \rightarrow P_\mu + a_\mu \quad (2.19)$$

( $a_\mu$  vector numérico), que por otra parte supone la condición necesaria y suficiente para que haya invariancia *gauge*, es decir, para que el operador  $P_\mu$  aparezca sólo en el interior de conmutadores. De hecho, la prescripción utilizada,

$$\text{Tr} f(P, X) \rightarrow \Omega^{-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \text{Tr} f(P + k, X), \quad (2.20)$$



proyecta sobre la parte invariante *gauge* de  $\text{Tr } f(P, X)$ , aunque esta proyección es sólo formal ya que la integral en  $k$  podría ser divergente, en cuyo caso no se garantiza la invariancia ante la transformación (2.19). Podría pensarse en efectuar el promedio en  $k$  de forma ponderada para eliminar la divergencia de  $\Omega$ , pero entonces se perdería la invariancia *gauge*.

Para continuar usamos en ec. (2.18) la propiedad

$$\text{Tr } \log(AB) = \text{Tr} (\log(A) + \log(B)), \quad (2.21)$$

(esta propiedad se demuestra de  $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$  o a partir de la propiedad cíclica de la traza y la fórmula de Campbell–Hausdorff),

$$\begin{aligned} W &= \Omega^{-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \text{Tr} \left( \log(\Delta^{-1}) + \log(1 + \Delta(2kP + P^2)) \right) \\ &= \Omega^{-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \text{Tr} \left( \log(\Delta^{-1}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\Delta(2kP + P^2))^n \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora  $W$  puede organizarse en serie en potencias de  $P_\mu$ ,

$$W = \Omega^{-1} \int \frac{d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{2n}. \quad (2.23)$$

La tabla 2.1 muestra la expresión explícita de los  $\Theta_m$  hasta orden 6; los órdenes impares son nulos, como puede verse usando la simetría de  $W$  ante el cambio  $k_\mu \rightarrow -k_\mu$ . En la Tabla 2.1 y de ahora en adelante se identifican dos monomios cualesquiera que difieran por permutación cíclica, lo que formalmente es correcto dentro del operador traza.

Por desgracia, con el desarrollo en potencias de  $P$  se ha perdido la invariancia *gauge* explícita. Para restaurarla se siguen dos pasos. En primer lugar se realiza un promedio angular en  $k$  usando la identidad

$$\langle k_{\mu_1} k_{\mu_2} \cdots k_{\mu_{2n}} \rangle = \frac{\Gamma(\frac{D}{2})(k^2)^n}{2^n \Gamma(\frac{D}{2} + n)} \delta_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{2n}}, \quad (2.24)$$

donde  $\delta_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{2n}}$  es el producto sin normalizar y completamente simétrico de  $n$  deltas de Kronecker (es decir,  $(2n - 1)!!$  términos); por ejemplo,  $\delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$ . El segundo paso consiste en homogeneizar la forma de todos los monomios del mismo grado en  $P_\mu$ ; por ejemplo,  $O((k^2)^m, \Delta^{m+n}, (P^2)^n) \rightarrow O((k^2)^n, \Delta^{2n}, (P^2)^n)$ . Para conseguirlo se usan las identidades

$$(k^2)^n = \frac{1}{D + 2n} \frac{\partial}{\partial k_\mu} (k_\mu (k^2)^n), \quad -\frac{\partial}{\partial k_\mu} \Delta^n = 2nk_\mu \Delta^{n+1}, \quad (2.25)$$



$\Theta_2 = \text{Tr}[ ]$	
$\Delta P^2$	$-2 k_\alpha k_\beta \Delta P_\alpha \Delta P_\beta$
$\Theta_4 = \text{Tr}[ ]$	
$-\frac{1}{2} (\Delta P^2)^2$	$+4 k_\alpha k_\beta \Delta P^2 \Delta P_\alpha \Delta P_\beta$
$-4 k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta \Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta P_\gamma \Delta P_\delta$	
$\Theta_6 = \text{Tr}[ ]$	
$\frac{1}{3} (\Delta P^2)^3$	$-2 k_\alpha k_\beta \Delta P^2 \Delta P_\alpha \Delta P^2 \Delta P_\beta$
$-4 k_\alpha k_\beta (\Delta P^2)^2 \Delta P_\alpha \Delta P_\beta$	$+16 k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta \Delta P^2 \Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta P_\gamma \Delta P_\delta$
$-\frac{32}{3} k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta k_\epsilon k_\rho \Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta P_\gamma \Delta P_\delta \Delta P_\epsilon \Delta P_\rho$	

Tabla 2.1: Coeficientes del desarrollo  $\text{TrLog}$  hasta orden sexto.

tantas veces como sea necesario, así como integración por partes bajo la integral en  $k$ . Por ejemplo

$$\langle \Delta P^2 \rangle = \langle \Delta P^2 \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_\mu \rangle = \langle -\frac{k_\mu}{D} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Delta P^2 \rangle = \langle \frac{2k^2}{D} \Delta^2 P^2 \rangle, \quad (2.26)$$

donde ahora  $\langle \rangle$  significa promediar en momentos. Además usamos  $Y^{2n}$  con el significado  $(Y \cdot Y)^n$  para aquellos objetos provistos de índices libres; por ejemplo  $(\Delta P_\mu)^4 = \Delta P_\mu \Delta P_\mu \Delta P_\nu \Delta P_\nu$ .

Es interesante notar que  $W$  es invariante ante una transformación de inversión especular o trasposición

$$P_\mu \rightarrow P_\mu^T = P_\mu, \quad \Delta \rightarrow \Delta^T = \Delta, \quad YZ \rightarrow (YZ)^T = Z^T Y^T, \quad (2.27)$$

y que dicha simetría se conserva en todas las manipulaciones anteriores, por lo que en nuestras expresiones aparecen únicamente monomios simétricos o parejas de monomios, uno copia especular del otro, con el mismo coeficiente. Para sacar partido de esta propiedad a partir de ahora identificaremos un monomio y su traspuesto, por lo que, por ejemplo, escribiremos  $(\Delta P_\mu)^2 \Delta^2 P^2$  con el significado  $\frac{1}{2}((\Delta P_\mu)^2 \Delta^2 P^2 + \Delta(\Delta P_\mu)^2 \Delta P^2)$ . La tabla 2.2 muestra en esta notación la restauración de la invariancia *gauge* (ecs. (2.24–2.26)) de los coeficientes de la tabla 2.1. Han aparecido dos monomios de segundo orden, seis de cuarto orden y 28 de sexto orden.

Ahora la expresión de  $W$  es invariante ante la transformación (2.19) incluso sin efectuar la integración sobre  $k_\mu$ , y se puede llevar a una forma explícitamente invariante *gauge* con la derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu = -i[P_\mu, ]$  y el tensor  $F_{\mu\nu} = -i[P_\mu, P_\nu]$  como únicos componentes que incluyan el operador momento. Una vez que se realice este proceso las funciones que aparezcan dentro de la traza sólo dependerán del



$\Theta_2 = 2 \frac{k^2}{D} \text{Tr}[ ]$		
$\Delta^2 P^2$	$-$	$(\Delta P_\alpha)^2$
$\Theta_4 = 4 \frac{k^4}{D(D+2)} \text{Tr}[ ]$		
$-2$	$\Delta^2 (\Delta P^2)^2$	$-$ $(\Delta^2 P^2)^2$
$+2$	$\Delta P^2 \Delta P_\alpha \Delta^2 P_\alpha$	$-2$ $(\Delta P_\alpha)^4$
		$+4$ $\Delta^2 P^2 (\Delta P_\alpha)^2$
		$-$ $(\Delta P_\alpha \Delta P_\beta)^2$
$\Theta_6 = 32 \frac{k^6}{D(D+2)(D+4)} \text{Tr}[ ]$		
$\frac{3}{2}$	$\Delta^3 (\Delta P^2)^3$	$-2$ $\Delta^2 (\Delta P^2)^2 (\Delta P_\alpha)^2$
$-$	$(\Delta P^2)^2 \Delta P_\alpha \Delta^3 P_\alpha$	$+3$ $\Delta^2 (\Delta P^2)^2 \Delta^2 P^2$
$-$	$\Delta^3 P^2 (\Delta P_\alpha)^2 \Delta P^2$	$+2$ $\Delta^2 P^2 (\Delta P_\alpha)^4$
$-2$	$\Delta^2 P^2 (\Delta P_\alpha)^2 \Delta^2 P^2$	$+$ $\Delta P^2 (\Delta P_\alpha)^2 \Delta (\Delta P_\beta)^2$
$-$	$\Delta^2 P^2 \Delta P_\alpha \Delta P^2 \Delta^2 P_\alpha$	$+2$ $\Delta^2 P^2 (\Delta P_\alpha \Delta P_\beta)^2$
$+2$	$\Delta^2 P^2 \Delta P_\alpha (\Delta P_\beta)^2 \Delta P_\alpha$	$+2$ $\Delta P^2 \Delta P_\alpha (\Delta P_\beta)^2 \Delta^2 P_\alpha$
$+$	$\Delta P^2 \Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta^2 P_\beta \Delta P_\alpha$	$+$ $\Delta P^2 \Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta^2 P_\alpha \Delta P_\beta$
$-$	$\Delta^2 P^2 \Delta^2 P_\alpha \Delta P^2 \Delta P_\alpha$	$-$ $(\Delta^2 P^2 \Delta P_\alpha)^2$
$-2$	$(\Delta P_\alpha)^2 (\Delta P_\beta \Delta P_\gamma)^2$	$+\frac{1}{2}$ $(\Delta^2 P^2)^3$
$-\frac{1}{3}$	$(\Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta P_\gamma)^2$	$-$ $((\Delta P_\alpha)^2 \Delta P_\beta)^2$
		$-\frac{2}{3}$ $(\Delta P_\alpha)^6$
		$-$ $(\Delta P_\alpha \Delta P_\beta \Delta P_\alpha)^2$

Tabla 2.2: Coeficientes de la tabla anterior en forma homogénea.

operador posición y se podrá usar la propiedad

$$\text{Tr} f(X) = \Omega \int d^D x \text{tr} f(x), \quad (2.28)$$

donde  $\text{tr}$  indica traza en el espacio de simetría interna. Vemos entonces que, como habíamos indicado, los factores  $\Omega$  se cancelan (ec. ( 2.18)).

Tras llevar los coeficientes de la tabla 2.2 a una forma invariante obtenemos la tabla 2.3, nuestro resultado final [Ca93a]. Para aligerar la notación hemos usado  $Y_{I\mu}$  con el significado  $\mathcal{D}_\mu Y_I$  donde  $I$  es cualquier conjunto ordenado de índices Lorentz; por ejemplo,  $\Delta_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \Delta$  y  $F_{\mu\nu\rho} = \mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu}$ . El segundo orden y el cuarto ya fue obtenido por Lai-Him Chan y contienen respectivamente uno y seis términos. El orden sexto ha sido una contribución de nuestro grupo y contiene 45 términos.

La comprobación de que la tabla 2.3 y la 2.2 son equivalentes es un simple pero tedioso ejercicio algebraico; en el caso del sexto orden no recomendamos efectuar la comprobación a mano (al desarrollar los conmutadores de la tabla 2.3 en orden dos, cuatro y seis se obtienen respectivamente 2, 80 y 2880 monomios intermedios que hay que identificar y agrupar hasta llegar a la tabla 2.2). Sin embargo, la obtención de la tabla 2.3 a partir de la 2.2 *no* es un ejercicio trivial. Vamos a llamar *monomios* a los objetos del tipo de la tabla 2.2, donde aparecen los factores  $P$  de forma explícita, y *términos* a los del tipo de la tabla 2.3, construidos con



$\Theta_2 = \frac{k^2}{D} \Omega \int d^D x \text{tr} [ ]$			
$\Delta_\mu^2$			
$\Theta_4 = -2 \frac{k^4}{D(D+2)} \Omega \int d^D x \text{tr} [ ]$			
-2	$\Delta_\mu^4$	+	$(\Delta_\mu \Delta_\nu)^2$
-	$(F_{\mu\nu} \Delta^2)^2$	-4i	$\Delta F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\mu \Delta_\nu$
		+2	$(\Delta \Delta_{\mu\mu})^2$
$\Theta_6 = 32 \frac{k^6}{D(D+2)(D+4)} \Omega \int d^D x \text{tr} [ ]$			
$+\frac{5}{3}$	$\Delta_\mu^6$	$-\frac{1}{2}$	$(\Delta_\mu \Delta_\nu \Delta_\mu)^2$
$+\frac{1}{2}$	$(\Delta_\mu^2 \Delta_\nu)^2$	-	$\Delta_\mu^2 (\Delta_\nu \Delta_\rho)^2$
+4	$\Delta \Delta_\mu \Delta_\nu^2 \Delta_\rho \Delta_{\rho\mu}$	$+\frac{3}{2}$	$\Delta^2 \Delta_{\mu\mu} \Delta_\nu^2 \Delta_{\rho\rho}$
-2	$(\Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \mu)^2$	-4	$\Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \mu \Delta_\nu \Delta \Delta_{\rho\rho}$
+2	$\Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \Delta \Delta_{\rho\nu} \Delta_{\rho\mu}$	$+\frac{5}{3}$	$(\Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \nu)^2$
+2	$\Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \nu \Delta_\mu \Delta \Delta_{\rho\rho}$	$-\frac{3}{3}$	$(\Delta \Delta_{\mu\mu})^3$
$+\frac{3}{4}$	$(\Delta^2 \Delta_{\nu\nu\mu})^2$	+3	$\Delta^2 \Delta_{\mu\mu} \Delta_\nu \Delta \Delta_{\rho\rho\nu}$
+2i	$F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \Delta_\rho^2 \Delta$	+2i	$F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\mu \Delta_\rho \Delta_\nu \Delta_\rho \Delta$
-i	$F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\rho \Delta_\mu \Delta_\nu \Delta_\rho \Delta$	+2i	$F_{\mu\nu} \Delta_\rho \Delta \Delta_\mu \Delta_\nu \Delta \Delta_\rho$
+4i	$F_{\mu\nu} \Delta^2 \Delta_{\rho\mu} \Delta_\rho \Delta_\nu \Delta$	+4i	$F_{\mu\nu} \Delta^2 \Delta_\rho \Delta_\mu \rho \Delta \Delta_\nu$
+4i	$F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\mu \Delta \Delta_{\rho\rho} \Delta_\nu \Delta$	+2i	$F_{\mu\nu} \Delta^2 \Delta_{\rho\mu} \Delta_{\rho\nu} \Delta^2$
+4i	$F_{\mu\nu} \Delta^2 \Delta_{\rho\rho\mu} \Delta \Delta_\nu \Delta$	+2i	$\Delta^2 F_{\mu\nu\nu} \Delta^2 \Delta_\mu \Delta_{\rho\rho}$
$+\frac{1}{2}$	$(\Delta F_{\mu\nu} \Delta)^2 \Delta_\rho^2$	+	$F_{\mu\nu} \Delta^2 F_{\mu\rho} \Delta \Delta_\nu \Delta_\rho \Delta$
-4	$F_{\mu\nu} \Delta^3 F_{\mu\rho} \Delta_\rho \Delta \Delta_\nu$	+	$F_{\mu\nu} \Delta^2 \Delta_\rho F_{\mu\nu} \Delta_\rho \Delta^2$
-	$(\Delta F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\mu)^2$	$-\frac{1}{4}$	$(\Delta F_{\mu\nu} \Delta \Delta_\rho)^2$
-4	$F_{\mu\nu} \Delta^3 F_{\mu\rho\rho} \Delta^2 \Delta_\nu$	$-\frac{1}{2}$	$(\Delta^3 F_{\mu\nu\nu})^2$
$-\frac{1}{3} i$	$F_{\mu\nu} \Delta^2 F_{\mu\rho} \Delta^2 F_{\nu\rho} \Delta^2$		

Tabla 2.3: Coeficientes de la tabla anterior en forma explícitamente covariante. Los subíndices indican derivadas covariantes. Cada término indica la semisuma de él y su simétrico.





bloques covariantes. En primer lugar hay que notar que la tabla 2.2 es unívoca una vez realizadas las identificaciones de monomios que se han indicado, pero que el resultado invariante *gauge* admite múltiples expresiones de las cuales la tabla 2.3 es una elección concreta. Esto se debe a la libertad introducida por la regla de integración por partes y las identidades de Jacobi,

$$\text{Tr}(YZ_\mu + Y_\mu Z) = 0, \quad Z_{\mu\nu} - Z_{\nu\mu} - i[F_{\mu\nu}, Z] = 0, \quad F_{\mu\nu\rho} + F_{\nu\rho\mu} + F_{\rho\mu\nu} = 0, \quad (2.29)$$

para expresar un término covariante en función de otros. Por ejemplo, en orden dos vemos que bajo traza  $(\Delta_\mu)^2 = a(\Delta_\mu)^2 - (1-a)\Delta_{\mu\mu}\Delta$  para cualquier  $a$ . La elección  $a = 1$  (ó  $a = 0$ ) es particularmente interesante porque minimiza el número de términos utilizados para ajustar la combinación de monomios  $2\Delta^2 P^2 - 2(\Delta P_\alpha)^2$ .

El proceso de optimización en orden seis no es nada sencillo, pues en ese orden existen 1492 términos covariantes diferentes no idénticamente nulos (de los que 365 son independientes) y con ellos se han de ajustar los 28 monomios de  $\Theta_6$  de la tabla 2.2. En lugar de utilizar las identidades (2.29) parece más sistemático proponer todas las bases posibles de términos covariantes y quedarnos con aquella en la que el número de coeficientes nulos sea mayor; desgraciadamente el número de bases distintas, de naturaleza combinatoria, es claramente inabordable. En la práctica, para llegar al resultado de 45 términos de la tabla 2.3, utilizamos una mezcla de métodos aleatorios y algoritmos *divide y vencerás*, como se explica con cierto detalle en el apéndice A.

Para concluir nos remitimos al apéndice B donde se establece la relación entre el desarrollo TrLog y los coeficientes de heat-kernel [Ba89].

## 2.4 Método semiclásico TrLog en el caso no relativista

Hemos visto que partiendo de una regularización logarítmica de la función paso (ec. (2.5)) se puede escribir el número de partículas tomando la traza del logaritmo de un operador cuadrático en el momento (ec. (2.8)), a lo que se le puede aplicar el método de desarrollo en gradientes covariantes de Lai-Him Chan (ec. (2.23) y tabla 2.3). En nuestro caso la traza en grados de libertad internos de la tabla 2.3 ya se realizó (ec. (2.7)); en hamiltonianos dependientes de espín esta operación hay que efectuarla posteriormente (véase 4.2).

Vamos a suponer que el momento incluye un campo electromagnético vectorial ( $P_\mu = i\hbar \partial_\mu + A_\mu$ ) y que el potencial incluye un campo escalar introducidos por acoplamiento mínimo. Definiendo

$$v(x) \equiv 2mV(x)$$



$$e \equiv 2mE, \quad (2.30)$$

la función  $\Delta$  de la tabla 2.3 es (ecs. (2.8) y (2.18))

$$\Delta(x, k) \equiv \frac{1}{k^2 + v(x) - e + i\epsilon}. \quad (2.31)$$

Como se observa,  $\Delta$  no depende de grados de libertad internos, al igual que los bloques covariantes que utilizaremos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_i \Delta) &= \hbar (\nabla_i \Delta) \\ F_{ij} &= \hbar [(\nabla_i A_j) - (\nabla_j A_i)] \\ F^2 &\equiv F_{ij} F_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, D, \end{aligned} \quad (2.32)$$

por lo que, en este caso, los bloques de la tabla 2.3 conmutan. Usando esta conmutatividad el desarrollo asintótico de  $N(E)$  en derivadas covariantes se escribe

$$\begin{aligned} N(E) &= N_0(E) + N_2(E) + N_4(E) + \dots \\ N_0(E) &= \frac{\nu}{\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \log(k^2 + v(x) - e + i\epsilon) \\ N_2(E) &= \frac{\nu}{\pi} \frac{\hbar^2}{D} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} k^2 (\nabla \Delta)^2 \\ N_4(E) &= -\frac{\nu}{\pi} \frac{2\hbar^4}{D(D+2)} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} k^4 \left[ -(\nabla \Delta)^4 + \right. \\ &\quad \left. + 2(\Delta(\nabla^2 \Delta))^2 - \frac{F^2}{\hbar^4} \Delta^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} (\nabla_i \Delta) &= -\Delta^2 (\nabla_i v) \\ (\nabla^2 \Delta) &= 2\Delta^3 (\nabla v)^2 - \Delta^2 (\nabla^2 v), \end{aligned} \quad (2.34)$$

vemos

$$\begin{aligned} N_2(E) &= \frac{\nu}{\pi} \frac{\hbar^2}{D} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} k^2 \Delta^4 (\nabla v)^2 \\ N_4(E) &= -\frac{\nu}{\pi} \frac{2\hbar^4}{D(D+2)} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} k^4 \left[ 7\Delta^8 (\nabla v)^4 + \right. \\ &\quad \left. - 8\Delta^7 (\nabla v)^2 (\nabla^2 v) + 2\Delta^6 (\nabla^2 v)^2 - \frac{F^2}{\hbar^4} \Delta^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$



Ahora vamos a ocuparnos de las integrales en momentos. Como ya se ha indicado (ec. (1.56))

$$\int d^D k f(k^2) = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dk k^{D-1} f(k^2). \quad (2.36)$$

Con este resultado y la regularización de la función paso (ec. (2.5)) es inmediato

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} \int d^D k k^m \log(k^2 + v(x) - e + i\epsilon) = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{m+D} (e-v)^{\frac{D+m}{2}} \Theta(e-v). \quad (2.37)$$

Por otra parte, a partir de  $\frac{d\Delta}{de} = \Delta^2$  (aquí  $\frac{d}{de}$  se refiere a la dependencia explícita de  $\Delta$  en  $e$ ) es fácil comprobar

$$\begin{aligned} \Delta^n &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^{n-1}}{de^{n-1}} \Delta \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{de^n} \log(k^2 + v(x) - e + i\epsilon). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Uniendo estos resultados se llega a

$$I(s, n) \equiv \frac{1}{\pi} \text{Im} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^{2s} \Delta^n \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\pi\Gamma(n)} \frac{d^n}{de^n} \text{Im} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^{2s} \log(k^2 + v - e + i\epsilon) \\ &= -\frac{2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(2s+D)\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(n)} \frac{d^n}{de^n} \left[ (e-v)^{s+\frac{D}{2}} \Theta(e-v) \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si, como ocurre en nuestros cálculos,  $n$  es mayor o igual que  $s$ , se puede usar  $x^l \delta^{(j)}(x) = 0$  con  $l > j \geq 0$ , para demostrar

$$\begin{aligned} &\frac{d^n}{de^n} \left[ (e-v)^{s+\frac{D}{2}} \Theta(e-v) \right] = \\ &= \frac{\Gamma(s+\frac{D}{2}+1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{d^{n-s-1}}{de^{n-s-1}} \left[ (e-v)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(e-v) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Sustituyendo en ec. (2.40) y usando  $\frac{d}{de} = (2m)^{-1} \frac{d}{dE}$  se consigue

$$I(s, n) = -\frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(s+\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})^2 \Gamma(n)} (2m)^{\frac{D}{2}+s-n} \times$$



$$\times \frac{d^{n-s-1}}{dE^{n-s-1}} [(E - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(E - V)] . \quad (2.42)$$

Para realizar la integral en  $k$  en  $N_0(E)$  utilizamos la ec. (2.37) con  $m = 0$ . Para  $N_2(E)$  se usa  $I(1, 4)$  y para  $N_4(E)$  se necesita  $I(4, 8)$ ,  $I(4, 7)$ ,  $I(4, 6)$  e  $I(4, 4)$ . Tras un poco de álgebra se llega al resultado perseguido

$$\begin{aligned} N_0(E) &= \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \int d^D x (E - V)^{\frac{D}{2}} \Theta(E - V) \\ N_2(E) &= -\frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}-1} \int d^D x \frac{(\nabla V)^2}{12} \partial_E^2 [(E - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(E - V)] \\ N_4(E) &= \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \int d^D x \frac{1}{60} \left\{ \frac{1}{24} (\nabla V)^4 \partial_E^5 - \frac{1}{3} (\nabla V)^2 (\nabla^2 V) \partial_E^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\nabla^2 V)^2 \partial_E^3 - \frac{5}{\hbar^4} F^2 \partial_E \right\} [(E - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(E - V)] . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Las ecs. (2.43) son explícitamente convergentes si las derivadas respecto de  $E$  se calculan después de la integración (véanse comentarios en 1.3.2). Como ya hemos indicado posteriormente exponaremos un método que permite tomar las derivadas en el integrando y olvidarnos de los términos distributivos. En cualquier caso, por razones numéricas, conviene tomar el menor número posible de derivadas respecto de la energía. Para minimizar este número utilizamos

$$(\nabla_i V) \frac{d}{dE} f(E - V) = -[\nabla_i f(E - V)] , \quad (2.44)$$

de modo que bajo el signo integral (se usa integración por partes) se tiene

$$\begin{aligned} (\nabla V)^2 \partial_E^2 f(E - V) &= (\nabla^2 V) \partial_E f(E - V) \\ (\nabla^2 V) (\nabla V)^2 \partial_E^4 f(E - V) &= \left\{ (\nabla^2 V)^2 \partial_E^3 + (\nabla^4 V) \partial_E^2 \right\} f(E - V) \\ (\nabla V)^4 \partial_E^5 f(E - V) &= \left\{ 3 (\nabla^4 V) \partial_E^2 + 2 (\nabla_i \nabla_j V)^2 \partial_E^3 + \right. \\ &\quad \left. + (\nabla^2 V)^2 \partial_E^3 \right\} f(E - V) . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Usando estos resultados en las ecs. (2.43) se llega a

$$N_0(E) = \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \int d^D x (E - V)^{\frac{D}{2}} \Theta(E - V)$$



$$\begin{aligned}
N_2(E) &= -\frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}-1} \int d^D x \frac{(\nabla^2 V)}{12} \partial_E \left[ (E - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(E - V) \right] \\
N_4(E) &= \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \int d^D x \frac{1}{288} \left\{ (\nabla^2 V)^2 \partial_E^3 - (\nabla^4 V) \partial_E^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{5} (\nabla_i \nabla_j V)^2 \partial_E^3 - \frac{24}{\hbar^4} F^2 \partial_E \right\} \left[ (E - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(E - V) \right].
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Aunque el término en  $F^2$  que aparece en  $N_4$  tiene una potencia en  $\hbar$  dos unidades menor que el resto, contiene el cuadrado de la constante de acoplamiento. En realidad el desarrollo de Chan es homogéneo en el operador momento generalizado, es decir, en la suma de la potencia de  $\hbar$  y de la potencia de la constante de acoplamiento *gauge*. Pero como en QED dicha constante de acoplamiento es pequeña (en regímenes de momentos bajos), es aconsejable mantener este agrupamiento de términos, y eso es lo que haremos.

A modo de ejemplo, usemos el número de partículas para escribir la densidad espacial de fermiones hasta segundo orden. Para ello utilizamos  $\frac{\delta}{\delta V(x)} f(E - V(y)) = (\partial_E f) \delta(x - y)$  para obtener el resultado intermedio

$$\begin{aligned}
\frac{\delta N_0(E)}{\delta V(x)} &= -\frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \frac{d}{dE} \left[ (E - V(x))^{\frac{D}{2}} \Theta(E - V(x)) \right] \\
\frac{\delta N_2(E)}{\delta V(x)} &= -\frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}-1} \frac{d}{dE} \left\{ \frac{(\nabla V)^2}{12} \frac{d^2}{dE^2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} (\nabla^2 V) \frac{d}{dE} \right\} \left[ (E - V(x))^{\frac{D}{2}-1} \Theta(E - V(x)) \right],
\end{aligned} \tag{2.47}$$

donde se ha integrado por partes cuando ha sido necesario, y donde, por razones prácticas, se ha extraído una derivada respecto de la dependencia explícita en energía. Sin más que sustituir en la ec.(2.12) e integrar por partes en energía se llega a la densidad que se obtuvo con la aproximación Wigner-Kirkwood (ecs. (1.60-1.62), nótese que en el segundo orden de estas ecuaciones la potencia en  $(E - V)$  se puede bajar una unidad).

Hasta ahora se ha utilizado el método TrLog para obtener el cuarto orden del desarrollo Wigner-Kirkwood del número acumulado de partículas en el caso no relativista; en todo momento se ha considerado que la dimensión espacial,  $D$ , es arbitraria. El método TrLog utiliza los resultados del desarrollo en gradientes de la



acción efectiva bosónica propuesto por Chan, quien efectuó dicho desarrollo hasta cuarto orden. Lo que nos proponemos ahora es sacar partido de nuestra extensión hasta sexto orden del trabajo de Chan. Para ello vamos a obtener el desarrollo Wigner-Kirkwood hasta sexto orden en el caso monodimensional no relativista. Nos restringimos a dimensión  $D = 1$  porque en ese caso el número de términos involucrados en el desarrollo se restringe considerablemente. Por ejemplo, los términos  $(\nabla_i V \nabla_j V)^2$  y  $(\nabla_i V)^4$  —que aparacerían en orden cuatro— son indistinguibles en el caso monodimensional. Además, en una dimensión el tensor  $F_{ij}$  es trivialmente nulo debido a su carácter antisimétrico, lo que también elimina un número considerable de términos.

Para obtener hasta el orden cuarto nos basta con particularizar la ec. (2.46) a dimensión  $D = 1$ . Nos queda por determinar por tanto el sexto orden. Su cálculo se simplifica aplicando las restricciones sobre dimensión y campos *gauge* directamente al sexto orden del desarrollo de Chan (tabla 2.3). Si además tenemos en cuenta que los operadores que aparecen son conmutativos se pasa de los 45 términos iniciales a sólo 5. En concreto, con las suposiciones indicadas se tiene

$$\Theta_6 = \frac{32 k^6}{15} \Omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{5}{6} \Delta'^6 - 5 \Delta \Delta'^4 \Delta'' - \frac{2}{3} \Delta^3 \Delta''^3 + 3 \Delta^3 \Delta' \Delta'' \Delta''' + \frac{3}{4} \Delta^4 \Delta''^2 \right]. \quad (2.48)$$

Tras sustituir  $\Delta^{-1} \rightarrow (k^2 + v(x) - e + i\epsilon)$  y realizar las derivadas indicadas se tiene

$$N_6(E) = \frac{16 \hbar^5}{15 \pi^2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk k^6 \left[ \frac{77}{2} \Delta^{12} v'^6 - 80 \Delta^{11} v'^4 v'' + 36 \Delta^{10} v'^2 v''^2 + \frac{2}{3} \Delta^9 v''^3 + 15 \Delta^{10} v'^3 v''' - 12 \Delta^9 v' v'' v''' + \frac{3}{4} \Delta^8 v''^2 \right]. \quad (2.49)$$

Realizando ahora las integrales en momento (ec. (2.40)) y usando la libertad de integración por partes bajo la integral en posiciones ((ec. 2.44) y párrafo precedente) obtenemos el resultado buscado para el sexto orden. Además particularizamos a una dimensión las fórmulas obtenidas previamente en dimensión arbitraria hasta cuarto orden. El resultado final para el desarrollo semiclásico del número de partículas es

$$N_0(E) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (E - V)^{1/2} \Theta(E - V)$$

$$N_2(E) = \frac{1}{24\pi} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx V'' \partial_E \left( (E - V)^{-1/2} \Theta(E - V) \right)$$



$$\begin{aligned}
N_4(E) &= \frac{1}{2880\pi} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -5 V^{(4)} \partial_E^2 \right. \\
&\quad \left. + 7 V''^2 \partial_E^3 \right] (E - V)^{-1/2} \Theta(E - V) \\
N_6(E) &= \frac{1}{725760\pi} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^{5/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ -35 V^{(6)} \partial_E^3 + 8 V^{(3)2} \partial_E^4 \right. \\
&\quad \left. + 189 V'' V^{(4)} \partial_E^4 - 93 V'''^3 \partial_E^5 \right] (E - V)^{-1/2} \Theta(E - V). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

En una proxima sección encontraremos que este resultado es directamente aplicable para obtener la aproximación WKB hasta sexto orden.

## 2.5 El potencial químico, la energía total y el proceso de truncamiento

Para obtener la energía total fermiónica a partir del número de estados no es necesario calcular la densidad de energía (ec. (2.13)). En efecto: basta con tener en cuenta

$$E_T(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu g_n E_n \Theta(\mu - E_n) \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
&= \int dE \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \nu g_n \delta(E - E_n) \right] E \Theta(\mu - E) \\
&= \int dE g(E) E \Theta(\mu - E), \quad (2.52)
\end{aligned}$$

donde  $g(E)$ , la densidad de estados, ya fue definida anteriormente (ec. (2.3)). Integrando por partes en ec. (2.52) se tiene otra relación equivalente

$$E_T(\mu) = \mu N(\mu) - \int dE N(E) \Theta(\mu - E). \quad (2.53)$$

En concreto, hasta orden cuarto en el desarrollo semiclásico se tiene

$$\begin{aligned}
E_T(\mu) &= E_0(\mu) + E_2(\mu) + E_4(\mu) + \dots \\
E_0(\mu) &= \mu N_0(\mu) - \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 2\right)} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{D}{2}} \int d^D x (\mu - V)^{\frac{D}{2}+1} \Theta(\mu - V) \\
E_2(\mu) &= \mu N_2(\mu) + \\
&\quad + \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{D}{2}-1} \int d^D x \frac{(\nabla^2 V)}{12} (\mu - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(\mu - V)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
E_4(\mu) = & \mu N_4(\mu) - \frac{\nu}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \int d^D x \frac{1}{288} \left\{ (\nabla^2 V)^2 \partial_\mu^2 + \right. \\
& \left. - (\nabla^4 V) \partial_\mu + \frac{2}{5} (\nabla_i \nabla_j V)^2 \partial_\mu^2 - \frac{24}{\hbar^4} F^2 \right\} [(\mu - V)^{\frac{D}{2}-1} \Theta(\mu - V)].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

La ec. (2.52) nos permite afirmar que, como venimos diciendo,  $\mu$  es el potencial químico. El potencial químico se define como la derivada de la energía respecto del número de partículas cuando el hamiltoniano permanece constante [Ca60].<sup>2</sup> Por otra parte lo que llamamos  $\mu$  se calcula de modo que el número de partículas sea uno dado,  $A$ ,

$$N(\mu) = A, \tag{2.55}$$

donde el espectro monoparticular permanece fijo. Usando la regla de la cadena tenemos

$$\left(\frac{\partial E_T}{\partial N}\right)_V = \left(\frac{\partial E_T}{\partial \mu}\right)_V \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_V, \tag{2.56}$$

donde  $V$  (el potencial) no cambia, y por tanto tampoco lo hace el espectro. Aplicando la ec. (2.53) y, de nuevo, la regla de la cadena queda

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial E_T}{\partial N}\right)_V &= \mu \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_V \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_V \\
&= \mu,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

y comprobamos que  $\mu$  es el potencial químico.

Ya hemos indicado en el capítulo anterior (sección 1.3.3) que el potencial químico es una función de  $\hbar$ . Para calcularlo semiclásicamente se trunca la serie del número de partículas y se exige que se cumpla la condición de normalización. En esta sección vamos a separar la dependencia explícita en  $\hbar$  de cada uno de los órdenes del número de partículas introduciendo para ello nuevas funciones,  $\tilde{N}_j(E)$ , independientes de  $\hbar$

$$N_j(E) = \hbar^{j-D} \tilde{N}_j(E) \quad j = 0, 2, 4, \dots \tag{2.58}$$

Llamemos  $\mu^{Tj}$  al potencial químico que ajusta el número de partículas,  $N(E)$ , hasta orden  $j$ -ésimo. Así, hasta orden cuarto,

$$A\hbar^D = \tilde{N}_0(\mu^{T4}) + \tilde{N}_2(\mu^{T4}) \hbar^2 + \tilde{N}_4(\mu^{T4}) \hbar^4. \tag{2.59}$$

La expresión (2.59) es una ecuación implícita para  $\mu^{T4}$ , el cual dependerá de  $\hbar$  y  $A$  de forma no trivial,  $\mu^{T4} = \mu^{T4}(\hbar; A)$ . Para establecer una jerarquía en potencias

<sup>2</sup>La ec. (2.51) fija la temperatura a  $0K$  y no vamos a tratarla como variable.



de  $\hbar$  en lo que sigue supondremos que  $A$  tiene dependencia  $\hbar^{-D}$ . En ese caso, la diferencia entre  $\mu^{T4}$  y el  $\mu$  de la ec. (2.55) es de orden  $\hbar^6$ .

En la práctica, la obtención numérica de  $\mu^{T4}$  puede ser muy lenta, pues hay que calcular  $N_0 + N_2 + N_4$  para varios candidatos a potencial químico hasta encontrar el correcto dentro del orden de precisión admitido. Ya que los distintos órdenes del número de partículas se van haciendo más y más complejos, el tiempo de cálculo aumenta de forma notoria al considerar órdenes superiores. Para mayor desgracia, si se quiere comprobar el comportamiento asintótico del problema semiclásico hay que resolver la ecuación de normalización (2.55) con distintos truncamientos (es decir, hay que obtener  $\mu^{T0}$ ,  $\mu^{T2}$ ,  $\mu^{T4}$ , ...) pero con el método propuesto el cálculo del potencial químico con un truncamiento no se beneficia del cálculo con truncamientos a órdenes inferiores, a parte de proporcionar potenciales químicos de prueba en la búsqueda de raíces.

Para evitar estos inconvenientes se puede resolver la ec. (2.55) de forma perturbativa hasta llegar al orden requerido, como se indica en [Kr90, Sc93]. El orden inicial coincide con  $\mu^{T0}$ , que a partir de ahora llamamos  $\mu_0$ ,

$$A \hbar^D = \tilde{N}_0(\mu_0). \quad (2.60)$$

Truncamos a segundo orden y desarrollamos alrededor de  $\mu_0$ ,

$$A \hbar^D = \tilde{N}_0(\mu_0) + \tilde{N}'_0(\mu_0) (\mu^{T2} - \mu_0) + \mathcal{O}((\mu^{T2} - \mu_0)^2) \\ + \tilde{N}_2(\mu_0) \hbar^2 + \mathcal{O}((\mu^{T2} - \mu_0)\hbar^2) + \mathcal{O}(\hbar^4). \quad (2.61)$$

Nos olvidamos de los órdenes no explícitamente indicados y usamos la ec. (2.60), de modo que con la definición

$$\mu_2 \equiv -\frac{\tilde{N}_2(\mu_0)}{\tilde{N}'_0(\mu_0)} \hbar^2 \quad (2.62)$$

es fácil comprobar que  $\mu_0 + \mu_2$  se diferencian de  $\mu^{T2}$  en términos de orden  $\hbar^4$ ,

$$\mu_0 + \mu_2 = \mu^{T2} + \mathcal{O}(\hbar^4) \\ = \mu + \mathcal{O}(\hbar^4). \quad (2.63)$$

De forma análoga se define  $\mu_4$ , y se consigue

$$\mu = \mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \mathcal{O}(\hbar^6) \\ \mu_0 : N_0(\mu_0) = A \\ \mu_2 \equiv -\frac{N_2(\mu_0)}{N'_0(\mu_0)} \\ \mu_4 \equiv -\frac{N_4(\mu_0)}{N'_0(\mu_0)} + \frac{N_2(\mu_0) N'_2(\mu_0)}{[N'_0(\mu_0)]^2} - \frac{N''_0(\mu_0) [N_2(\mu_0)]^2}{2 [N'_0(\mu_0)]^3}. \quad (2.64)$$



Si no se supusiese la dependencia  $A \sim \hbar^{-D}$  no se podría afirmar que la serie (2.64) es un desarrollo en  $\hbar$  debido a la dependencia en  $\hbar$  de carácter no polinómico que adquiriría  $\mu_0 = \mu_0(\hbar; A)$ . En cualquier caso, como se ve de inmediato de las ecs. (2.64), con este método se evitan los problemas descritos anteriormente: sólo hay que resolver una ecuación implícita y a orden cero. Los órdenes superiores se consiguen perturbativamente, evaluando funciones una sola vez.

El cálculo de la energía semiclassical total también se simplifica con este método. Partiendo del desarrollo de la dependencia explícita de la energía total en  $\hbar$  (seguiremos tildando aquellas funciones independientes de  $\hbar$ )

$$\hbar^D E_T(\mu) = \tilde{E}_0(\mu) + \tilde{E}_2(\mu) \hbar^2 + \tilde{E}_4(\mu) \hbar^4 + \mathcal{O}(\hbar^6) \quad (2.65)$$

(ecs. (2.54)), y utilizando el desarrollo parcial (2.64) se consigue

$$\begin{aligned} \hbar^D E_T(\mu) &= \tilde{\mathcal{E}}_0(\mu_0) + \tilde{\mathcal{E}}_2(\mu_0) \hbar^2 + \tilde{\mathcal{E}}_4(\mu_0) \hbar^4 + \mathcal{O}(\hbar^6) \\ \tilde{\mathcal{E}}_0(\mu_0) &\equiv \tilde{E}_0(\mu_0) \\ \tilde{\mathcal{E}}_2(\mu_0) &\equiv \tilde{E}_2(\mu_0) + \tilde{\mu}_2(\mu_0) \tilde{E}'_0(\mu_0) \\ \tilde{\mathcal{E}}_4(\mu_0) &\equiv \tilde{E}_4(\mu_0) + \tilde{\mu}_4(\mu_0) \tilde{E}'_0(\mu_0) + \frac{1}{2} [\tilde{\mu}_2(\mu_0)]^2 \tilde{E}''_0(\mu_0) + \tilde{\mu}_2(\mu_0) \tilde{E}'_2(\mu_0). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Estas ecuaciones son válidas para cualquier función de  $\mu$ . Ahora aplicamos la relación entre la energía y el número de partículas (ec. (2.53)), de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{E}'_m(\mu) &= \mu \tilde{N}'_m(\mu) \\ \tilde{E}''_m(\mu) &= \tilde{N}'_m(\mu) + \mu \tilde{N}''_m(\mu). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Usando estas ecuaciones y sustituyendo la expresión de  $\mu_2$  y  $\mu_4$  (ec. (2.64)) se obtiene la expresión final [Ca93b]

$$\begin{aligned} E_T(\mu) &= \mathcal{E}_0(\mu_0) + \mathcal{E}_2(\mu_0) + \mathcal{E}_4(\mu_0) + \mathcal{O}(\hbar^{6-D}) \\ \mathcal{E}_0(\mu_0) &\equiv E_0(\mu_0) \\ \mathcal{E}_2(\mu_0) &\equiv E_2(\mu_0) - \mu_0 N_2(\mu_0) \\ \mathcal{E}_4(\mu_0) &\equiv E_4(\mu_0) - \mu_0 N_4(\mu_0) + \frac{1}{2} \frac{[N_2(\mu_0)]^2}{N'_0(\mu_0)}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Las ecs. (2.68) tampoco constituyen un desarrollo estricto en potencias de  $\hbar$  si se mantiene que  $A$  es un número independiente de  $\hbar$ , pero simplifican enormemente el



cálculo numérico de la aproximación semiclásica de los diferentes órdenes de la energía fermiónica; además de que sólo haya que resolver una ecuación autoconsistente en el orden más bajo (el más sencillo) para hallar  $\mu_0$ , las cancelaciones que aparecen en  $\mathcal{E}_4$  hacen que la única derivada del número de partículas que se tenga que calcular sea  $N'_0(\mu_0)$ . En el caso relativista el desarrollo del número de partículas es mucho más complejo y el valor práctico de este método se acrecienta notoriamente.

Como ejemplo se puede aplicar este método al problema del oscilador armónico tridimensional isótropo. Para este sistema se obtiene que el potencial químico de orden cero es

$$\mu_0 = \hbar\omega \left( \frac{6A}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.69)$$

La obtención de las diferentes contribuciones semiclásicas a la energía es inmediato,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(\mu_0) &= \frac{\nu}{8} \left( \frac{\mu_0}{\hbar\omega} \right)^3 \mu_0 \\ \mathcal{E}_2(\mu_0) &= \frac{\nu}{16} \left( \frac{\mu_0}{\hbar\omega} \right) \mu_0 \\ \mathcal{E}_4(\mu_0) &= \frac{13\nu}{1920} \hbar\omega. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sustituyendo la expresión para el potencial químico se llega al siguiente desarrollo en potencias

$$E_T(A) = \hbar\omega \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{6}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} A^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{8} \left( \frac{\nu}{6} \right)^{\frac{1}{3}} A^{\frac{2}{3}} + \frac{13\nu}{1920} \right]. \quad (2.71)$$

que en principio es válido en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  o equivalentemente  $A \rightarrow \infty$ . En este ejemplo en particular no hay correcciones a esta ecuación porque los órdenes siguientes son distribuciones puras centradas en  $\mu_0 = 0$  que no contribuyen numéricamente. En todo caso hay que resaltar que el desarrollo indicado en potencias de  $A$  no converge al resultado exacto. De hecho puede verse que los efectos de capas hacen que el segundo coeficiente no esté bien definido en el problema exacto.

## 2.6 Conexión entre WK y WKB

Hasta este momento nos hemos interesado por el desarrollo Wigner-Kirkwood (WK) de ciertas magnitudes cuánticas, como el número acumulado de niveles (o partículas), la densidad o la energía. Al efectuar este desarrollo se obtiene una serie de términos homogéneos en el número de gradientes del potencial, de modo que los órdenes superiores incluyen de forma progresiva las fluctuaciones del mismo. Como resultado de



esta aproximación las magnitudes consideradas son continuas en la energía, cosa que contradice la discretización cuántica del modelo de partida. Por ejemplo, el número acumulado de niveles,  $N(E)$ , antes de realizar la aproximación WK es una función discontinua en la energía a modo de escalera, y después de realizarla se convierte en una función continua salvo eventuales términos distributivos de tipo másico (deltas de Dirac y sus derivadas).

La celeberrima aproximación semiclassical WKB (Wentzel [We26], Kramers [Kr26] y Brillouin [Br26]), que se aplica a problemas monodimensionales o a problemas que se pueden reducir a uno monodimensional, nunca deja de considerar, en cambio, la discretización de los niveles. Dada la energía del problema exacto,  $E_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), se consigue una primera aproximación a este valor,  $E_n^{\text{WKB1}}$ , mediante la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{2m (E_n^{\text{WKB1}} - V(y))} \Theta(E_n^{\text{WKB1}} - V(y)) = \hbar\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.72)$$

(salvo el término  $1/2$  del miembro de la derecha esta ecuación coincide con la regla de cuantificación SWI de Sommerfeld, Wilson e Ishiwara). El calificativo de WKB1 a esta aproximación se comprenderá en breve. Una forma de entender la ec. (2.72) que nos va a permitir realizar la conexión con el desarrollo WK es la siguiente: nuestra hipótesis de partida es que en problemas monodimensionales existe una función  $\tilde{n}(E, \hbar)$  suficientemente suave y monótona en energía que proporciona la etiqueta correcta cuando la energía es del espectro

$$\tilde{n}(E_n, \hbar) = n. \quad (2.73)$$

Por ejemplo, para el oscilador armónico esta función existe, y resulta ser

$$\tilde{n}(E, \hbar) = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (2.74)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de oscilador.

Supuesta conocida la función  $\tilde{n}(E, \hbar)$ , se puede obtener el valor  $n$ -ésimo del espectro encontrando aquel valor de energía que hace que se satisfaga la ec. (2.73). Desde esta perspectiva, cualquier aproximación que realicemos sobre la función  $\tilde{n}$  se trasladará al espectro

$$\tilde{n}^{\text{aprox}}(E_n^{\text{aprox}}) = n, \quad (2.75)$$

y en ese sentido, la ecuación WKB1 se corresponde con aproximar

$$\tilde{n}(E, \hbar) \simeq \hbar^{-1} (\tilde{n}_0(E) + \hbar\tilde{n}_1(E)) \quad (2.76)$$

con

$$\tilde{n}_0(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{2m (E - V(t))} \Theta(E - V(t)) \quad (2.77)$$



y

$$\tilde{n}_1(E) = -\frac{1}{2}. \quad (2.78)$$

De forma inmediata se comprueba que la regla de cuantificación SWI es el resultado de olvidarnos de  $\tilde{n}_1(E)$ , es decir, coincide con lo que llamaríamos WKB0.

Como vimos en el capítulo 1, en la literatura se encuentran esencialmente dos formas de obtener la ecuación WKB (el método de Dunham [Du32] o mediante fórmulas de conexión); nuestro objetivo ahora es relacionar WKB con el desarrollo WK del número acumulado de estados, lo que puede considerarse una obtención independiente del desarrollo WKB.

Para conseguir esta conexión vamos a suponer que la función etiqueta existe y escribiremos  $N(E)$  a partir de dicha función. Por otra parte, con el desarrollo semiclásico de  $N(E)$  lo que se consigue es un desarrollo de Laurent en  $\hbar$  que en la práctica supone una suavización de la dependencia en energía; en realidad lo que se obtiene es tan solo la parte asintótica en  $\hbar$  de  $N(E)$ . Recordemos que dada una función, su desarrollo asintótico es único siempre y cuando exista dicho desarrollo. Para conectar el desarrollo semiclásico de  $\tilde{n}$  con el de  $N(E)$  lo que hacemos es proponer el desarrollo de Laurent más general posible para  $\tilde{n}$  en  $\hbar$  y obtener el  $N$  suavizado asociado. Comparando este  $N$  con el desarrollo semiclásico que se obtuvo al comienzo del capítulo (que en esta sección denotamos como  $N^{\text{WK}}(E)$ ) y exigiendo que sean compatibles podemos escribir el desarrollo de  $\tilde{n}$  en términos del de  $N(E)$ .

Así, supongamos que la función etiqueta  $\tilde{n}(E, \hbar)$  existe y que es monótona creciente en la energía (en realidad siempre puede *cocinarse* una función con esas propiedades si no exigimos nada más). El número acumulado de niveles

$$N(E) = \sum_{s=0}^{\infty} \Theta(E - E_s) \quad (2.79)$$

puede escribirse en función de  $\tilde{n}$  usando la propiedad de monotonía en energía

$$N(E) = \sum_{s=0}^{\infty} \Theta(\tilde{n}(E, \hbar) - s) \quad (2.80)$$

(hasta aquí la igualdad es exacta).

Un método alternativo de conseguir el desarrollo asintótico que supone la aproximación WK es utilizar la regla de suma de Euler-Maclaurin (EM). Esta regla establece [Ab70]

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \eta F(k\eta) &= \int_0^{\infty} F(t) dt + \frac{\eta}{2} \{F(0) + F(\infty)\} \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\eta^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \{F^{(2k-1)}(\infty) - F^{(2k-1)}(0)\} + \mathcal{O}(\eta^{2n+2}), \end{aligned} \quad (2.81)$$



donde  $B_m$  son los números de Bernoulli. Para aplicar esta fórmula a la ec. (2.80) usamos  $\eta = \hbar$  y  $F(t) = \Theta(\hbar\tilde{n}(E, \hbar) - t)/\hbar$ , con lo que se llega a

$$N^{\text{EM}}(E) = \left( \tilde{n}(E, \hbar) + \frac{1}{2} \right) \Theta(\tilde{n}(E, \hbar)) + \text{t.d.} \quad (2.82)$$

donde t.d. incluye términos distributivos en  $\delta$ -Dirac y sus derivadas procedentes de derivar la función paso. Todavía no podemos comparar  $N^{\text{WK}}(E)$  y  $N^{\text{EM}}(E)$  porque el primero tiene toda la dependencia en  $\hbar$  en serie de potencias, mientras que en el segundo aún hay que desarrollar la dependencia en  $\hbar$  de  $\tilde{n}(E, \hbar)$ . Para hacerlo suponemos que  $\tilde{n}(E, \hbar)$  es expresable como una serie de Laurent en cuanto a su dependencia en  $\hbar$

$$\tilde{n}(E, \hbar) = \hbar^{-q} \sum_{s=0} \hbar^s \tilde{n}_s(E). \quad (2.83)$$

Si ahora comparamos el desarrollo asintótico resultante para  $N^{\text{EM}}(E)$  con el obtenido previamente,  $N^{\text{WK}}(E)$ , vemos que para que exista compatibilidad ha de ocurrir

$$q = 1 \quad (2.84)$$

y

$$\tilde{n}_s(E) = \begin{cases} \hbar^{1-s} N_s^{\text{WK}}(E), & s = 2k \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ -1/2, & s = 1 \\ 0, & s = 2k + 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.85)$$

(Recordemos que  $N_s(E)$  es proporcional a  $\hbar^{s-1}$  de modo que  $\hbar^{1-s} N_s(E)$  es independiente de  $\hbar$ .) Por tanto, la conexión entre WK y WKB que encontramos es

$$N_0^{\text{WK}}(E_n^{\text{WKB}m}) + N_2^{\text{WK}}(E_n^{\text{WKB}m}) + \dots + N_m^{\text{WK}}(E_n^{\text{WKB}m}) = n + \frac{1}{2}. \quad (2.86)$$

De hecho, esta ecuación constituye un nuevo método de obtención del desarrollo WKB extendido. Se puede ir más lejos y utilizar esta fórmula en dimensión arbitraria, pero en ese caso sólo dará buenos resultados cuando el problema sea no degenerado y la función etiqueta, dependiente de un único parámetro, sea suave. El problema es bastante más complicado cuando los niveles están no trivialmente degenerados o, de forma más general, si existen constantes de movimiento extras con lo que los autovalores dependen de forma natural de dos o más etiquetas.

A modo de ejemplo, si el potencial es un oscilador armónico

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (2.87)$$

se obtiene

$$N_0(E) = \frac{E}{\hbar\omega} \Theta(E) \quad (2.88)$$



y los siguientes órdenes son puramente distributivos. Por tanto, la aproximación WKB1 (y superiores) proporciona los valores correctos del problema cuántico.

Un caso no trivial es el del potencial cuártico. Sea

$$V(x) = \alpha x^4. \quad (2.89)$$

En este caso el desarrollo semiclásico del número acumulado de estados hasta cuarto orden es

$$\begin{aligned} N_0(E) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{3\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{2m}{\alpha^{1/2}\hbar^2}\right)^{1/2} E^{3/4} \Theta(E) \\ N_2(E) &= -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{2m}{\alpha^{1/2}\hbar^2}\right)^{-1/2} E^{-3/4} \Theta(E) \\ N_4(E) &= \frac{11\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{1536\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{2m}{\alpha^{1/2}\hbar^2}\right)^{-3/2} E^{-9/4} \Theta(E) + \text{t.d.}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

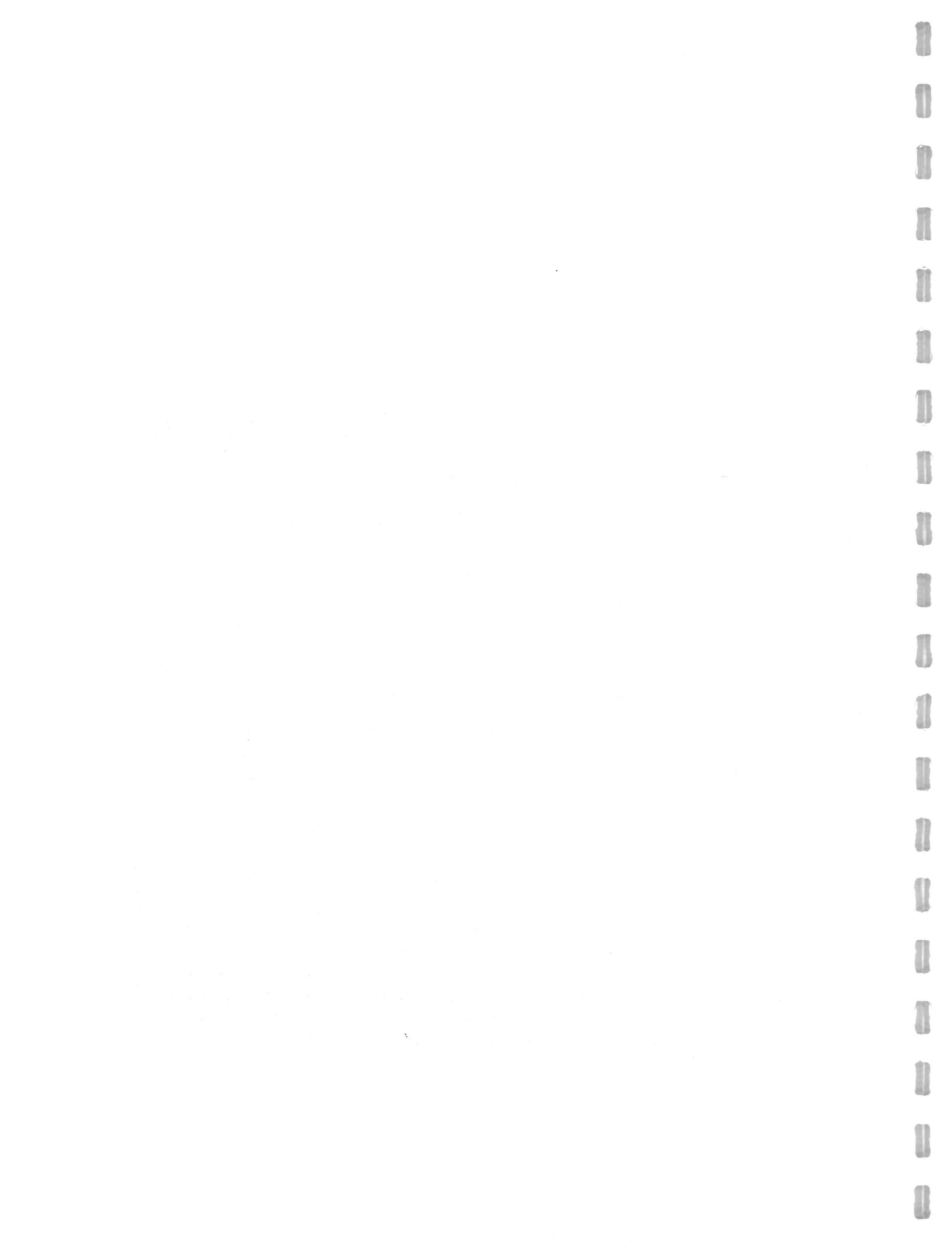
donde t.d. incluye términos puramente distributivos. En la tabla 2.4 se muestra la aproximación WKB en comparación con el resultado exacto para este potencial. Se observa que a partir del tercer nivel excitado la convergencia del desarrollo WKB es muy rápida. Para los primeros niveles (sobre todo para el fundamental) de los números mostrados no se podría concluir que la serie sea convergente. Habría que ir a órdenes superiores para determinar si el comportamiento es de tipo asintótico o no.



$n$	$E_n^{\text{ex}}$	$\varepsilon_n^1$	$\varepsilon_n^2$	$\varepsilon_n^4$
0	1.06036209	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$
1	3.79967303	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$-2.8 \cdot 10^{-3}$	$-2.3 \cdot 10^{-3}$
2	7.45569794	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$-1.3 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$
3	11.64474551	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	$-2.6 \cdot 10^{-6}$
4	16.26182602	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$-6.7 \cdot 10^{-6}$	$-9.9 \cdot 10^{-8}$
5	21.23837292	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$-2.8 \cdot 10^{-6}$	$-4.2 \cdot 10^{-8}$
6	26.52847118	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$-1.4 \cdot 10^{-6}$	$-1.4 \cdot 10^{-8}$
7	32.09859771	$6.3 \cdot 10^{-4}$	$-7.9 \cdot 10^{-7}$	$-6.0 \cdot 10^{-9}$
8	37.92300103	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$-4.0 \cdot 10^{-7}$	$-2.7 \cdot 10^{-9}$
9	43.98115810	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$-2.5 \cdot 10^{-7}$	$-1.4 \cdot 10^{-9}$

Tabla 2.4: Aproximación WKB extendido para el potencial cuártico en una una dimensión.  $n$  etiqueta el nivel  $n$ -ésimo,  $E_n^{\text{ex}}$  es la energía exacta del nivel  $n$ -ésimo en unidades  $\left(\frac{\alpha^{1/2}\hbar^2}{2m}\right)^{2/3}$  y  $\varepsilon_n^m$  es el error relativo asociado al cálculo WKBm, es decir  $\varepsilon_n^m = (E_n^{\text{ex}} - E_n^{\text{WKBm}})/E_n^{\text{ex}}$ .







## Capítulo 3

# Teoría del funcional del potencial en un modelo 1+1

### 3.1 Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio del problema de la autoconsistencia y los desarrollos semiclásicos en un modelo sencillo en 1+1 dimensiones. El modelo en cuestión lo hemos obtenido como cierto límite no relativista de la versión 1+1 del modelo de Walecka expuesto en el capítulo 5.

Analizaremos las características generales del modelo que se presenta (incluyendo sus propiedades en el límite de materia nuclear) y le aplicaremos el desarrollo semiclásico *a lo Wigner-Kirkwood* (WK) en el sector fermiónico. También pondremos un cálculo WKB autoconsistente que llevaremos a la práctica sólo en su orden más bajo. Al estudiar el segundo orden del desarrollo WK veremos que el contenido distribucional del desarrollo semiclásico en el caso autoconsistente es mucho más complicado que el asociado a potenciales externos; a pesar de ello podremos evaluar la corrección de segundo orden de un modo perturbativo.

Uno de los resultados más llamativos de este capítulo es el siguiente: al contrario de lo que sucedía en el caso de potenciales externos (capítulo 2) el parámetro de desarrollo semiclásico WK no es  $\hbar^2/M$ , sino que para separar las contribuciones semiclásicas en órdenes claros hay que reparametrizar el modelo en función del número de partículas ligadas. Esa reparametrización induce una dependencia polinómica de la energía en función del número de partículas. Cuando se compara con el resultado exacto se comprueba que la forma funcional obtenida es la adecuada, con una estimación perfecta del coeficiente del orden más bajo. Sin embargo, debido a efectos de capas, la estimación semiclásica del orden siguiente sólo es correcto en orden de magnitud.



### 3.2 Modelo en 1+1 dimensiones

Vamos a partir de la siguiente densidad lagrangiana en 1+1 dimensiones

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \Psi^\dagger \left\{ i\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g_s \phi \right\} \Psi \quad (3.1)$$

donde  $\mu$  corre de 0 (la variable temporal,  $t$ ) a 1 (la variable espacial,  $x$ ),  $\phi$  es un campo bosónico, y  $\Psi$  es un campo fermiónico. En la aproximación estacionaria y realizando las identificaciones  $V \equiv g_s \phi$  y  $g \equiv g_s^2$ , el funcional hamiltoniano toma la forma

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2g} [V'(x)^2 + m^2 V(x)^2] + \frac{\hbar^2}{2M} \partial_x \Psi^\dagger(x) \partial_x \Psi^\dagger(x) + V(x) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \right\}. \quad (3.2)$$

La aproximación Hartree a este funcional se consigue restringiendo el espacio variacional a estados coherentes en la parte bosónica (con lo que se pasa a una aproximación de campo medio), y en la parte fermiónica a determinantes de Slater de funciones de onda monoparticulares normalizadas a la unidad. (En realidad, una vez en campo medio la interacción es a un cuerpo, y la antisimetría no aporta nada esencial.) Directamente vamos a suponer que las funciones monoparticulares son reales, lo que no resta generalidad ya que nuestro espacio de coordenadas es de dimensión uno y por tanto los estados del mar de Fermi (del espectro discreto) son no degenerados. El funcional a minimizar queda

$$E[\{\phi_n\}_{n=1}^A, V] = E_F[\{\phi_n\}_{n=1}^A, V] + E_B[V] \quad (3.3)$$

donde

$$E_F[\{\phi_n\}_{n=1}^A, V] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n \leq A} \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \phi_n'(x)^2 + V(x) \phi_n(x)^2 \right\} \quad (3.4)$$

y

$$E_B[V] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2g} \{V'(x)^2 + m^2 V(x)^2\}. \quad (3.5)$$

Para encontrar las ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange asociadas se suelen utilizar multiplicadores de Lagrange que fijan la ortonormalidad de las funciones de onda monoparticulares; tales multiplicadores resultan ser las autoenergías fermiónicas, que llamaremos  $\varepsilon_n$ . Las ecuaciones que se obtienen son

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \phi_n''(x) + V(x) \phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x) \quad n \leq A, \quad (3.6)$$



junto con

$$V''(x) - m^2 V(x) = g \rho(x) \quad (3.7)$$

donde se ha definido la densidad fermiónica del sistema

$$\rho(x) \equiv \sum_{n \leq A} \varphi_n(x)^2, \quad (3.8)$$

que por construcción se supone normalizada al número de fermiones,  $A$ . Para potenciales que cumplen la ecuación de movimiento (3.7) la energía bosónica cumple la identidad

$$E_B[V] = -\frac{1}{2} \int dx V(x) \rho(x). \quad (3.9)$$

El funcional de la ec. (3.3) se puede escribir como una escala multiplicativa,  $g/m$ , con dimensiones de energía, y una función sin dimensiones que depende de dos parámetros no triviales: el número de partículas,  $A$ , y la combinación adimensional

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2 m^3}{2 M g}. \quad (3.10)$$

En concreto, la relación que se encuentra es

$$E(A, M; g, m, \hbar) = \frac{g}{m} E\left(A, \frac{1}{2\xi^2}; 1, 1, 1\right); \quad (3.11)$$

para comprobarlo basta con realizar en el funcional los cambios a las siguientes magnitudes reducidas:

$$x \rightarrow \frac{\tilde{x}}{m}, \quad V(x) \rightarrow \frac{g}{m} \tilde{V}(\tilde{x}) \quad \varphi(x) \rightarrow \sqrt{m} \tilde{\varphi}(\tilde{x}). \quad (3.12)$$

Las ecuaciones de movimiento pasan a ser

$$-\xi^2 \tilde{\varphi}_n''(\tilde{x}) + \tilde{V}(\tilde{x}) \tilde{\varphi}_n(\tilde{x}) = \tilde{\varepsilon}_n \tilde{\varphi}_n(\tilde{x}) \quad n \leq A, \quad (3.13)$$

y

$$\tilde{V}''(\tilde{x}) - \tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{\rho}(\tilde{x}) \quad (3.14)$$

donde  $\tilde{\varepsilon}_n = m \varepsilon_n / g$  y la densidad fermiónica reducida se define como

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}) \equiv \sum_{n \leq A} \tilde{\varphi}_n(\tilde{x})^2 = \frac{1}{m} \rho(x). \quad (3.15)$$

Nótese que la densidad reducida también está normalizada al número de partículas, siempre y cuando la variable de integración que se considere sea la coordenada espacial reducida.



### 3.3 Desarrollo semiclásico Wigner-Kirkwood autoconsistente

A este modelo le son directamente aplicables los resultados del capítulo 2 para obtener el desarrollo a lo Wigner-Kirkwood de la densidad y la parte fermiónica de la energía. Como hacíamos en dicho capítulo, introducimos un potencial químico para ajustar el número de partículas. El funcional a minimizar pasa a ser el de Helmholtz, que incluye la energía del sistema y el potencial químico como multiplicador de Lagrange. Hasta orden segundo, el desarrollo semiclásico de la densidad al que se llega es

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_0[\tilde{V}, \tilde{\mu}](\tilde{x}) &= \frac{1}{\pi \xi} \sqrt{\tilde{\mu} - \tilde{V}(\tilde{x})} \Theta(\tilde{\mu} - \tilde{V}(\tilde{x})) \\ \tilde{\rho}_2[\tilde{V}, \tilde{\mu}](\tilde{x}) &= \frac{\xi}{24 \pi} \left\{ -2 \tilde{V}''(\tilde{x}) \partial_{\tilde{\mu}} + \tilde{V}'(\tilde{x})^2 \partial_{\tilde{\mu}}^2 \right\} [(\tilde{\mu} - \tilde{V})^{-\frac{1}{2}} \Theta(\tilde{\mu} - \tilde{V})].\end{aligned}\quad (3.16)$$

La energía fermiónica del sistema en orden cero se escribe como

$$E_0^F[\tilde{V}, \tilde{\mu}] = \frac{1}{3\pi \xi} \int d\tilde{x} (\tilde{\mu} - \tilde{V})^{\frac{3}{2}} \Theta(\tilde{\mu} - \tilde{V}) + \int d\tilde{x} \tilde{\rho}_0[\tilde{V}, \tilde{\mu}](\tilde{x}) \tilde{V}(\tilde{x}). \quad (3.17)$$

Por la misma clase de argumentos que se daban en la sección 2.5 podremos calcular la contribución perturbativa de segundo orden a la energía una vez conocida la expresión del potencial bosónico y el potencial químico que resuelve el problema autoconsistente semiclásico a orden cero. Esa contribución será

$$\tilde{\mathcal{E}}_2[\tilde{V}_0, \tilde{\mu}](\tilde{x}) = \frac{\xi}{24 \pi} \int d\tilde{x} \tilde{V}_0'' (\tilde{\mu}_0 - \tilde{V}_0)^{-\frac{1}{2}} \Theta(\tilde{\mu}_0 - \tilde{V}_0). \quad (3.18)$$

Para llegar a esta ecuación hay que utilizar la estacionaridad del potencial de Helmholtz a orden cero en  $\tilde{V}$  y  $\tilde{\mu}$ .

En el orden cero del desarrollo semiclásico la teoría pierde dependencia en uno de los parámetros no triviales de los que hemos hablado en la sección anterior. Efectuando los cambios

$$\begin{aligned}\tilde{x} \rightarrow \bar{x}, \quad \tilde{V}(\tilde{x}) &\rightarrow \frac{1}{\pi^2 \xi^2} \bar{V}(\bar{x}), \quad \tilde{\mu} \rightarrow \frac{1}{\pi^2 \xi^2} \bar{\mu}, \\ \tilde{\rho}(\tilde{x}) &\rightarrow \frac{1}{\pi^2 \xi^2} \bar{\rho}(\bar{x}), \quad A \rightarrow \frac{1}{\pi^2 \xi^2} \bar{A},\end{aligned}\quad (3.19)$$

se llega a que la ecuación de movimiento a orden cero es sencillamente

$$\bar{V}''(\bar{x}) - \bar{V}(\bar{x}) = \sqrt{\bar{\mu} - \bar{V}(\bar{x})} \Theta(\bar{\mu} - \bar{V}(\bar{x})), \quad (3.20)$$



donde el potencial químico se define de modo que se cumpla la condición de que la nueva densidad

$$\bar{\rho}(\bar{x}) = \sqrt{\bar{\mu} - \bar{V}(\bar{x})} \Theta(\bar{\mu} - \bar{V}(\bar{x})) \quad (3.21)$$

esté normalizada al parámetro  $\bar{A}$ . Queda pues claro que con estas identificaciones tanto el potencial químico  $\bar{\mu}$  como el bosónico  $\bar{V}$  son función únicamente del parámetro  $\bar{A}$ . Haciendo el mismo cambio en el funcional de la energía se obtiene que el desarrollo semiclásico es un desarrollo en potencias de  $A/\bar{A}$  (equivalentemente, en potencias de  $\bar{\xi}$ ) **para un  $\bar{A}$  fijo**,

$$E^{\text{WK}} \left[ \frac{A}{\bar{A}}, \bar{A} \right] = \left( \frac{A}{\bar{A}} \right)^2 \bar{E}_0(\bar{A}) + \bar{\mathcal{E}}_2(\bar{A}) + \left( \frac{\bar{A}}{A} \right)^2 \bar{E}_4(\bar{A}) + \dots \quad (3.22)$$

Éste es un resultado nada trivial; aparte de fijar la dependencia funcional que aparece en el desarrollo semiclásico, muestra que el desarrollo no se corresponde con parámetros fijos del modelo. En la práctica, uno considera fijos los parámetros del lagrangiano, y realiza cálculos para valores diferentes del número de partículas: este proceso no tiene un desarrollo tan claro como el de cambiar los parámetros con  $A$  para mantener  $\bar{A}$  constante. Pudiera parecer que con la reparametrización indicada al comparar los resultados a nivel Hartree con los del desarrollo semiclásico se habría de conseguir una correspondencia total. Para hacer tal comparación podemos obtener los coeficientes del desarrollo en potencias de  $A/\bar{A}$  a partir del desarrollo semiclásico y ajustando los resultados Hartree. Notablemente, se observa que el resultado Hartree se comporta polinómicamente como se esperaba. En el primer orden la correspondencia es total hasta la precisión conseguida, como se puede ver de los datos que se muestran en la sección 3.5, pero el coeficiente numérico del orden siguiente es completamente diferente. Esta discrepancia se debe a los efectos de capa, que introducen términos no analíticos que se pierden en el desarrollo semiclásico.

### 3.3.1 Orden cero del desarrollo WK

El orden cero del desarrollo WK demuestra que el modelo propuesto es estable en el límite de materia nuclear. A continuación vamos a analizar dicho límite así como las particularidades de la solución de orden cero para núcleos finitos.

#### Solución tipo materia nuclear

De las ecuaciones de movimiento se puede ver que las soluciones de potencial constante cumplen  $\bar{V} = -\bar{\rho}$  y  $\bar{\mu} = \bar{\rho}^2 - \bar{\rho}$ . Por otra parte, la solución de tipo materia



nuclear es aquella configuración homogénea que minimiza la energía total del sistema por partícula, o lo que es lo mismo, la densidad espacial de energía dividida entre la densidad de fermiones,

$$\frac{\bar{E}}{\bar{A}} = \frac{1}{3}\bar{\rho}^2 - \frac{1}{2}\bar{\rho}. \quad (3.23)$$

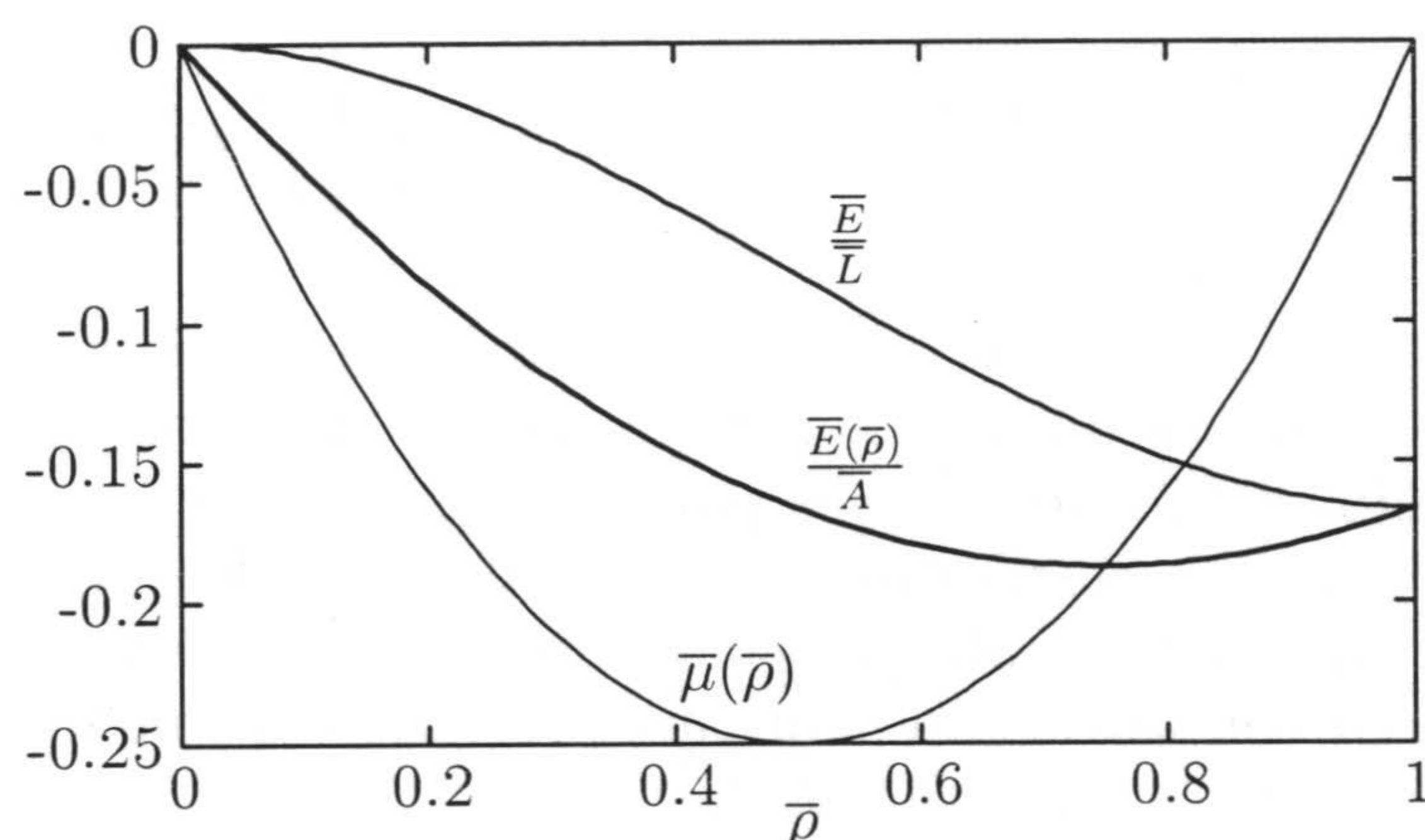


Figura 3.1: Algunas magnitudes en función de la densidad para soluciones de campo bosónico homogéneo. Nótese que las curvas  $\bar{\mu}(\bar{\rho})$  y  $\bar{E}(\bar{\rho})/\bar{A}$  se cruzan en la solución de materia nuclear ( $\bar{\rho}_{\text{MN}} = 3/4$ , con  $\mu_{\text{MN}} = -3/16$  y  $\bar{E}_{\text{MN}}/\bar{L} = -9/64$ ).

La solución de materia nuclear se consigue minimizando respecto de la densidad, obteniéndose que la máxima estabilidad se produce para la densidad  $\bar{\rho}_{\text{MN}} = 3/4$ . En la solución de materia nuclear el potencial químico y la densidad de energía por partícula coinciden,  $\mu_{\text{MN}} = \bar{E}_{\text{MN}}/\bar{A} = -3/16$ . Otro valor interesante es el de la densidad espacial de energía,  $\bar{E}_{\text{MN}}/\bar{L} = -9/64$ .

### Solución tipo núcleo finito

Ahora nos interesamos por soluciones de la ec. (3.20) con potencial yendo a cero en los extremos del dominio real. El único parámetro libre es el número de partículas reducido, o, si se prefiere, el potencial químico. La ec. (3.20) es traslacionalmente invariante; podemos fijar esa libertad para que nuestras soluciones sean funciones pares. Las soluciones no pueden ser positivas, ya que en ese caso  $\bar{V}''$  sería positivo y la función no podría anularse en el límite  $|x| \rightarrow \infty$ . Además el potencial químico



tiene que estar en algún valor entre el cero y el potencial químico de materia nuclear,

$$-\frac{3}{16} \leq \bar{\mu} < 0. \quad (3.24)$$

De hecho, si se usa el potencial químico de materia nuclear y se empieza a integrar desde un extremo con las condiciones iniciales correctas, lo que se encuentra es un potencial que tiende asintóticamente al valor del potencial de materia nuclear (vid. figura 3.2), que se corresponde con una solución de materia semiinfinita. Un potencial químico inferior nos produciría una solución con un potencial que divergería en alguno de los extremos del espacio.

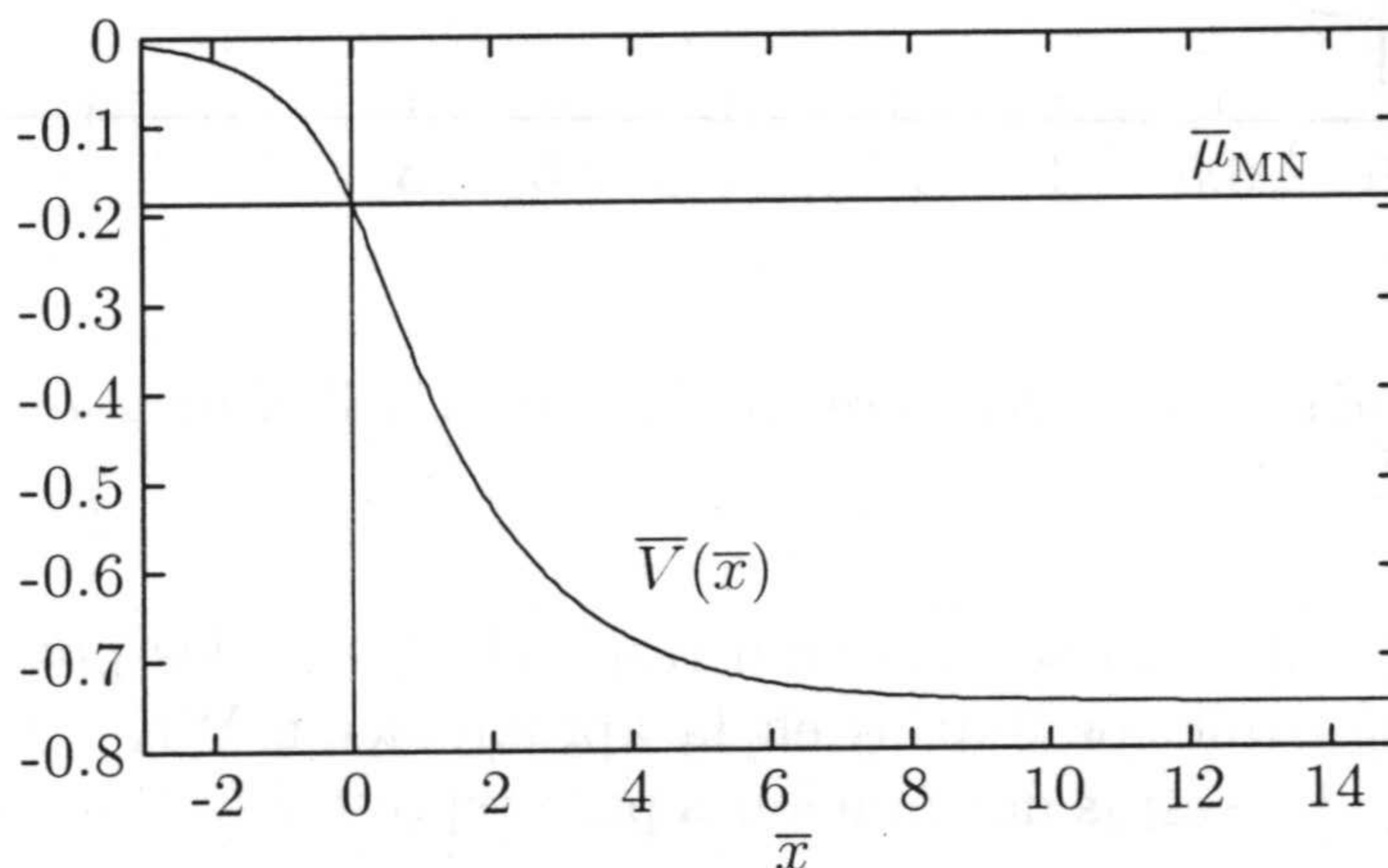


Figura 3.2: Solución de materia semiinfinita. Se ha escogido  $\bar{x} = 0$  como punto de retroceso.

De la expresión de la fuente de la ecuación diferencial (3.20) es evidente que las soluciones, que denominaremos  $\bar{V}_0(\bar{x})$ , no son funciones  $C_\infty$ , con puntos singulares en los puntos de retroceso clásicos. La solución fuera de la zona clásicamente accesible es trivial; si llamamos  $\bar{x}_+$  al punto de retroceso positivo se tiene,

$$\bar{V}_0(\bar{x}) = \bar{\mu} \exp\{-\bar{x} + \bar{x}_+\} \quad \bar{x} > \bar{x}_+. \quad (3.25)$$

Para comprobar esta expresión basta con sustituirla en la ecuación diferencial para el potencial. En la zona clásicamente prohibida la solución es no trivial. En la cercanía del punto de retroceso se tiene

$$\bar{V}_0(\bar{x}) = \bar{\mu} + \bar{\mu}(\bar{x}_+ - \bar{x}) + \frac{\bar{\mu}}{2}(\bar{x}_+ - \bar{x})^2 + \frac{4}{15}\sqrt{-\bar{\mu}}(\bar{x}_+ - \bar{x})^{\frac{5}{2}} + \mathcal{O}[(\bar{x}_+ - \bar{x})^3]. \quad (3.26)$$



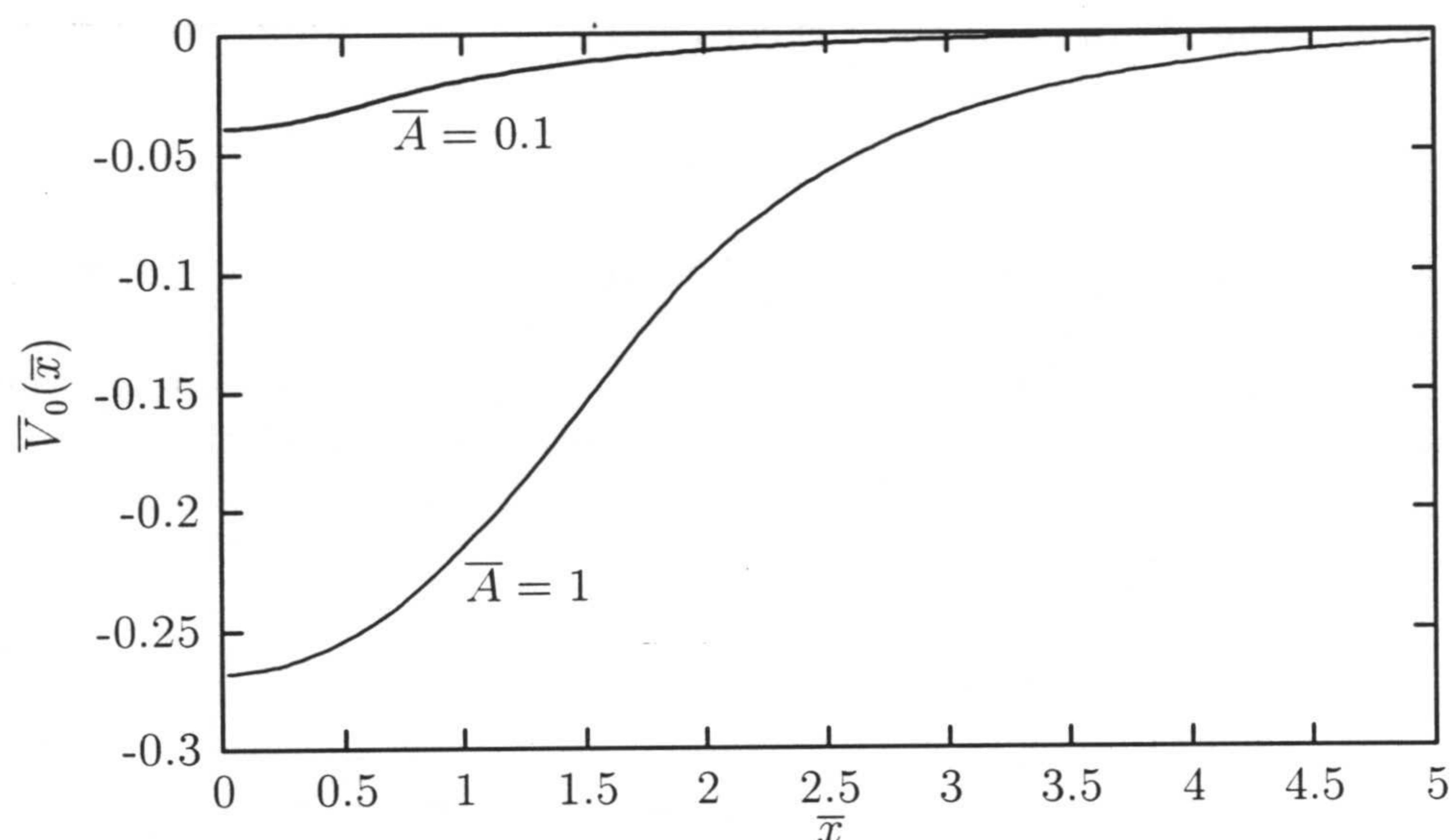


Figura 3.3: Potenciales de orden cero en el desarrollo WK para dos valores diferentes del parámetro  $\bar{A}$ .

En las figuras 3.3 y 3.4 se muestran respectivamente los potenciales y las densidades asociadas a núcleos finitos en la aproximación WK a orden cero. Se ha utilizado la paridad de estas dos funciones para representar únicamente la mitad del espacio.

### 3.3.2 Orden segundo del desarrollo WK

En la introducción de esta sección hemos indicado cómo se puede encontrar la corrección de segundo orden a la energía en el desarrollo semiclásico de Wigner-Kirkwood para el problema autoconsistente que nos ocupa. Lamentablemente, la obtención de la corrección hace uso expreso de que el funcional de la energía define los estados *físicos* en que se encuentra el sistema, y por consiguiente el método no es generalizable a observables arbitrarios.

Vamos a mostrar a qué ecuaciones se llega cuando se pretende obtener las correcciones de segundo orden al potencial bosónico. Para ello expresemos el potencial como

$$\tilde{V}(\tilde{x}) = \tilde{V}_0(\tilde{x}) + \tilde{V}_2(\tilde{x}) + \dots, \quad (3.27)$$

donde el potencial de orden cero es el que se obtiene de la ec. (3.20) con el  $\tilde{\mu}_0$  asociado a la normalización del número de partículas deseado. Introduciendo este



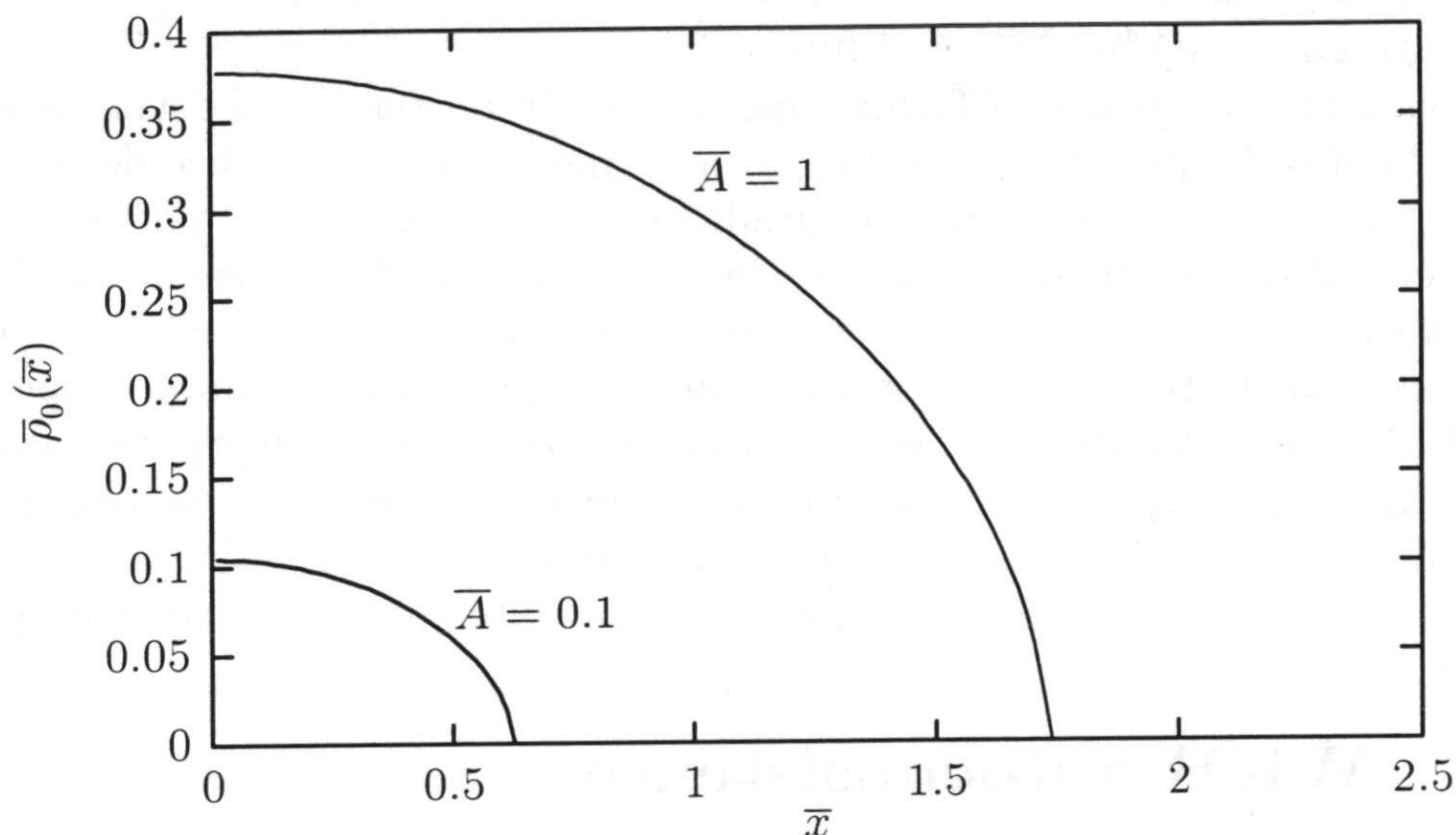


Figura 3.4: Densidades de orden cero en el desarrollo WK para dos valores diferentes del parámetro  $\bar{A}$ .

desarrollo y el de la densidad en la ec. (3.14) se llega a que la corrección de segundo orden cumple la ecuación diferencial

$$\tilde{V}_2''(\tilde{x}) - \tilde{V}_2(\tilde{x}) = \tilde{\rho}_2[\tilde{V}_0, \tilde{\mu}_0] + (\tilde{\mu}_2 - \tilde{V}_2)\partial_{\tilde{\mu}_0}\tilde{\rho}_0[\tilde{V}_0, \tilde{\mu}_0] \quad (3.28)$$

donde  $\tilde{\mu}_2$  se obtiene exigiendo que la normalización no cambie, lo que supone que la integral de  $\tilde{V}_2$  a todo el espacio se anule. La expresión de la ecuación que satisface  $\tilde{V}_2$  es más complicada de lo que ya de por sí representa, porque  $\tilde{V}_0$  contiene términos no analíticos en los puntos de retroceso clásicos. En la práctica  $\tilde{V}_0$  se puede expresar como tres funciones analíticas multiplicadas por funciones paso, funciones paso que generan distribuciones al tomar derivadas. En el caso de potenciales externos  $C_\infty$  los desarrollos semiclásicos de las densidades presentaban distribuciones puras, pero controladas, en los puntos de retroceso. Al introducir en esas densidades los potenciales semiclásicos con sus propias distribuciones el problema se complica enormemente, e incluso no descartamos que se involucren operaciones mal definidas entre distribuciones. Lo único que nos da esperanzas de que este problema sea soluble es que el comportamiento del potencial de orden cero a un lado y a otro de los puntos de retroceso es bien conocido (ecs. (3.25) y (3.26)). Por otra parte, la prescripción presentada en la sección 6.5<sup>1</sup> parece aliviar en algo el contenido distribu-

<sup>1</sup>Nótese que la notación cambia ligeramente de allí a aquí.



cional de las ecuaciones a resolver, pero aún así se trata de un problema complicado que trataremos de abordar en el futuro.

Generalmente se usa el formalismo de desarrollo semiclásico WK (en términos de gradientes del potencial) para llegar a un desarrollo semiclásico de tipo Thomas-Fermi Extendido (en términos de gradientes de la densidad); para eso se despeja el potencial de las densidades, y se reintroduce esta dependencia en el funcional semiclásico de la energía. Pero cuando se lleva a cabo ese proceso se ignoran los términos distributivos indicados. El argumento que se suele usar, si es que se repara en los términos distributivos, es que el funcional que se encuentra es correcto en la zona clásicamente permitida, y se espera que la expresión que se obtiene sea más general que las condiciones que han permitido obtenerla. Nuestro punto de vista es que los términos distributivos pueden ser importantes en este tipo de manipulaciones.

### 3.4 WKB autoconsistente

Si se aplica la aproximación WKB a las energías de los fermiones, se tiene que la parte fermiónica del funcional de la energía se escribe

$$\tilde{E}_F^{\text{WKB}}[\tilde{V}, A] = \sum_{n=1}^A \tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}}[\tilde{V}, A], \quad (3.29)$$

donde, en la aproximación de orden cero, las energías monoparticulas WKB cumplen la ec.(1.20),

$$\int d\tilde{x} (\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V})^{\frac{1}{2}} \Theta(\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V}) = \pi \xi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.30)$$

Aplicando el principio variacional respecto de cambios en el potencial se tiene que la ecuación de movimiento para el campo bosónico es

$$\tilde{V}''(\tilde{x}) - \tilde{V}(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^A \frac{1}{\lambda_n} \frac{\Theta(\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V}(\tilde{x}))}{(\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V}(\tilde{x}))^{\frac{1}{2}}} \quad (3.31)$$

donde

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \frac{\Theta(\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V}(\tilde{y}))}{(\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V}(\tilde{y}))^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.32)$$

Nótese que tanto las energías monoparticulares WKB como las constantes de normalización  $\lambda_n$  dependen del potencial, por lo que la ecuación de movimiento habrá de resolverse por un proceso de búsqueda de punto fijo tal y como se explica en la siguiente sección.



Una vez conseguida la autoconsistencia, la energía total del sistema y el *radio cuadrático medio* se podrán escribir respectivamente como

$$\tilde{E}_0^{\text{WKB}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^A \left( \frac{\pi \xi}{\lambda_n} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} \right) \quad (3.33)$$

y

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle = \frac{1}{A} \sum_{n=1}^A \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \frac{\tilde{x}^2}{(\tilde{\varepsilon}_n^{\text{WKB}} - \tilde{V}(\tilde{x}))^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.34)$$

### 3.5 Resultados numéricos

En todas las aproximaciones que vamos a considerar hay que resolver una ecuación para el potencial bosónico del tipo

$$V''_{\text{Aprox}} - V_{\text{Aprox}} = \rho_{\text{Aprox}}[V_{\text{Aprox}}] \quad (3.35)$$

donde la fuente (la densidad) depende del propio potencial. Nosotros vamos a abordar este problema como uno de punto fijo: dado un potencial semilla se calcula con él la densidad, y se resuelve la ecuación diferencial considerando el potencial fijo. El proceso continúa hasta que el cambio en el potencial de un paso al siguiente es más pequeño que un valor dado. Para pasar de un paso al siguiente usamos la función de Green de la ecuación diferencial que implementa las condiciones de contorno que nos interesan, a saber, caída exponencial en las colas y derivada cero en el origen, es decir,

$$V_{\text{Aprox}}^{[n+1]}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy G(x, y) \rho_{\text{Aprox}}[V_{\text{Aprox}}^{[n]}](y) \quad (3.36)$$

con

$$G(x, y) = -\frac{1}{2} \exp \{-|x - y|\}. \quad (3.37)$$

En concreto, las aproximaciones consideradas son:

- **Ex:** Indica cálculos realizados en la aproximación Hartree, que tomamos como solución *exacta* del problema en el sentido en que el resto de las aproximaciones lo que intentan es acercarse a este caso.
- **WKB0:** Aproximación WKB a orden cero (sección 3.4). Se diferencia de la WK0 en que allí la densidad fermiónica que se aproxima es la conjunta de todos los estados monoparticulares, y por tanto la pérdida de efectos de capas es total. En cambio, en WKB0 se hace una aproximación semiclásica (en el orden más bajo) a nivel de los estados monoparticulares. Los efectos de discretización nunca se dejan de tener en cuenta.



- **WK0**: Aproximación Wigner-Kirkwood a orden cero (sección 3.3.1). Coincide con la aproximación Thomas-Fermi en el orden más bajo.
- **WK2**: Corrección perturbativa de orden dos a la energía total obtenida en la aproximación WK0. El calculo del cambio de la densidad es complicado por las razones indicadas en la sección 3.3.2, y no lo hemos llevado a cabo.

A	M	Ex	WKB0	WK0	WK2
1	5	0.084027	0.082228	0.080573	0.078266
2	10	0.32564	0.32364	0.32229	0.31998
3	15	0.72843	0.72632	0.72516	0.72285
5	25	2.0176	2.0154	2.0143	2.0120
7	35	3.9513	3.9493	3.9481	3.9458

Tabla 3.1: *Energía de ligadura en diferentes aproximaciones. Se varía M (equivalentemente,  $\xi^2$ ) para mantener constante  $\bar{A} = \pi^2/10$ .*

En la tabla 3.1 se muestran los resultados para la energía de ligadura (menos la energía total) con una elección de parámetros  $g = \hbar = m = 1$  y  $M$  variable en función de  $A$  para mantener  $\bar{A} = \pi^2/10$ . En general se observa que el método WKB0 da mejores resultados que el el WK0, pero la mejora es tan pequeña de uno a otro que el error relativo no llega a decrecer ni en un orden de magnitud. Sistemáticamente, la inclusión perturbativa del orden segundo del desarrollo WK aleja la energía del valor exacto. Si se ajustan los datos exactos a una curva

$$E = C_0^{\text{Ex}} A^2 + C_2^{\text{Ex}} + \frac{C_4^{\text{Ex}}}{A^2} + \dots \quad (3.38)$$

se obtiene

$$C_0^{\text{Ex}} = 0.080572 \quad C_2^{\text{Ex}} = 0.00328 \quad \dots \quad (3.39)$$

Como se ve de la figura 3.5 el acuerdo de los datos con la dependencia indicada es magnífico. Sin embargo, el resultado que predice el desarrollo semiclásico es

$$C_0^{\text{WK}} = 0.080573 \quad C_2^{\text{WK}} = -0.00231 \quad \dots \quad (3.40)$$

El orden cero del desarrollo está correctamente obtenido, pero el orden siguiente, aunque del orden de magnitud adecuado, es de signo contrario. Estas mismas tendencias se han observado para otros valores del parámetro  $\bar{A}$ .

Nuestra conjetura es que el cálculo WKB autoconsistente a orden segundo sería capaz de extraer la dependencia correcta en este desarrollo.



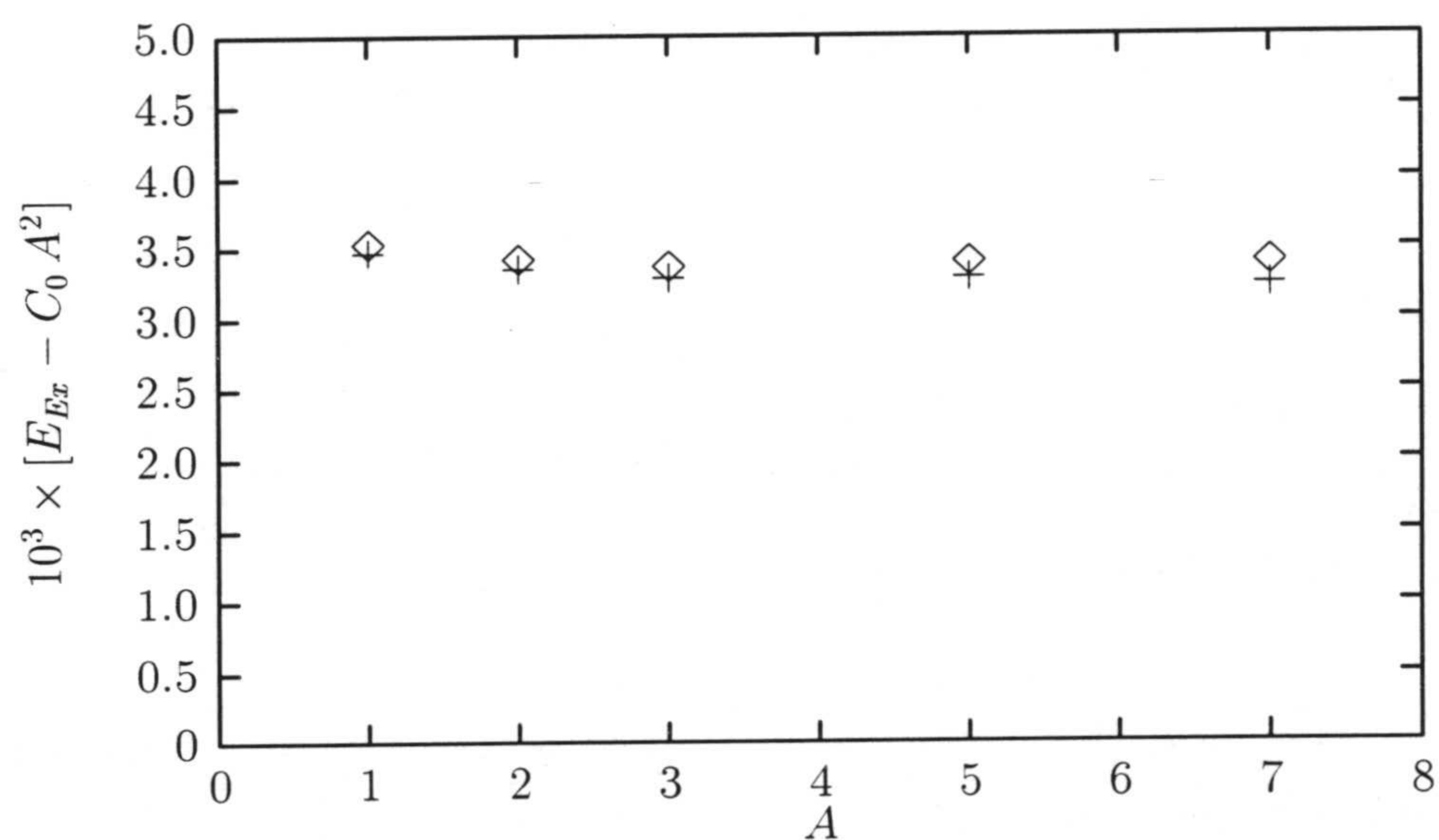
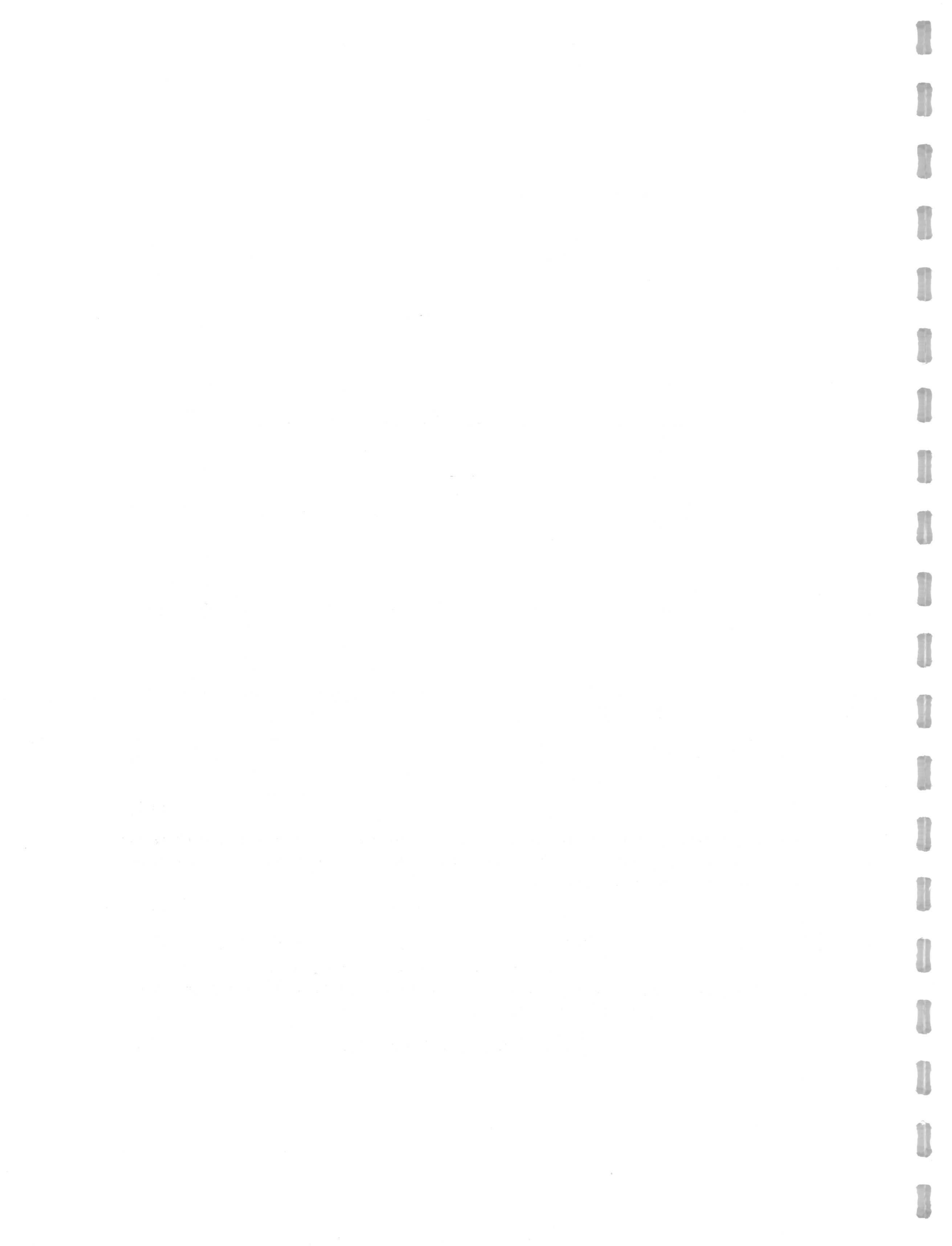


Figura 3.5: Energías de ligadura en la aproximación hartree con  $\bar{A} = \pi^2/10$  a las que se les ha extraído la dependencia  $A^2$ . Los símbolos  $\diamond$  se refieren a la extracción de forma estadística, mientras que los  $+$  se han obtenido eliminando la dependencia predicha semiclásicamente. De ahí se ve que los coeficientes  $C_0^{\text{WK}}$  y  $C_0^{\text{Ex}}$  coinciden. El siguiente coeficiente calculado en las dos aproximaciones es del mismo orden de magnitud, pero de signo contrario.







## Capítulo 4

# Desarrollo semiclásico relativista

### 4.1 Ecuación de Dirac independiente del tiempo y número de partículas

La ecuación de Dirac independiente del tiempo describe el comportamiento físico de una partícula material de espín 1/2 y de energía definida en el seno de potenciales localmente constantes. Podemos escribir una generalización a dimensión espacial  $D$  arbitraria,

$$\begin{aligned} H \psi_{n\alpha} &= E_n \psi_{n\alpha} \\ H &\equiv \alpha \cdot P + \beta \Phi(x) + V(x). \end{aligned} \quad (4.1)$$

En esta ecuación  $\alpha \cdot P \equiv \sum_{i=1}^D \alpha^i P^i$  con  $\alpha^i \equiv \gamma^0 \gamma^i$  y  $\beta \equiv \gamma^0$ , siendo  $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^D$  un conjunto de matrices complejas de  $T(D) \times T(D)$  componentes ( $T(1) = 2$ ,  $T(3) = 4$ ) que representan irreduciblemente el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es la métrica minkowskiana de traza  $-D + 1$ . Por otra parte  $P^i$  es la componente  $i$ -ésima del operador momento generalizado, que contiene un campo *gauge* de origen electromagnético,

$$P^i \equiv -i \hbar \partial_i - A^i(x), \quad (4.3)$$

$\Phi(x)$  es un campo escalar que incluye la masa en reposo de la partícula,  $m$ ,  $V(x)$  es la componente temporal de un campo vectorial (véase, por ejemplo, la sección 5.1.2),  $E_n$  es la energía de la partícula y  $\psi_{n\alpha}(x)$  es un espinor de  $T(D)$  componentes que representa la partícula con normalización

$$\int d^D x \psi_{n\alpha}^\dagger(x) \psi_{m\beta}(x) = \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.4)$$



El índice  $\alpha$  va de 1 a  $g_n$ , la degeneración de  $E_n$  que incluye espín.  $n$  pertenece a un conjunto de índices  $\Omega$  que consideraremos numerable. Vamos a suponer que existe una banda de energía prohibida (*gap*) de modo que el conjunto de índices  $\Omega$  tiene dos ramas,  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ , de modo que el subíndice '+' se refiere a la hoja de energías por encima del *gap* y el '-' a la de energías por debajo de éste.

El número de estados<sup>1</sup> de energía menor a una dada,  $E$ , se escribirá

$$N_D(E) = \sum_{n \in \Omega} g_n \Theta(E - E_n) \quad (4.5)$$

$$= \text{Tr} \Theta(E - H). \quad (4.6)$$

El operador hamiltoniano de Dirac no está acotado inferiormente, y por ese motivo el número de estados, tal y como se define en (4.5), sería divergente. Una manera práctica de eliminar esta divergencia es trabajar con la diferencia entre los números de estados asociados a dos niveles energéticos,  $N_D(E) - N_D(E_0)$ . Si el valor de energía  $E = 0$  se encuentra en el *gap* el vacío relativista (estado de menor energía) se caracteriza por tener ocupados todos los niveles de energía negativa (mar de Dirac), y por tanto un valor adecuado para realizar la sustracción de estados es cualquier energía,  $E_{\text{gap}}$ , del *gap*<sup>2</sup>. Llegamos entonces a un número de estados convergente

$$N(E) \equiv N_D(E) - N_D(E_{\text{gap}}) \quad (4.7)$$

$$= N_+(E) - N_-(E) \quad (4.8)$$

$$N_+(E) \equiv \sum_{n \in \Omega_+} g_n \Theta(E - E_n) \quad (4.9)$$

$$N_-(E) \equiv \sum_{n \in \Omega_-} g_n \Theta(E_n - E), \quad (4.10)$$

que escribimos como el número de partículas de energía positiva ( $N_+(E) \geq 0$ ) menos el número de huecos en el mar de Dirac ( $N_-(E) \geq 0$ ).

La densidad de estados se define como de costumbre

$$g(E) \equiv \frac{dN(E)}{dE} = \frac{dN_D(E)}{dE} \quad (4.11)$$

$$= \sum_{n \in \Omega} g_n \delta(E - E_n). \quad (4.12)$$

Al definir densidades sustraemos siempre la del mar de Dirac. Así la densidad de energía fermiónica será

$$\rho_E(x, \mu) = \rho_E^+(x, \mu) - \rho_E^-(x, \mu)$$

<sup>1</sup>El número de estados coincide con el número de partículas de un sistema de fermiones independientes.

<sup>2</sup>En realidad los potenciales suelen estar acoplados a los fermiones, y aparecen efectos dinámicos de polarización del vacío que habrían de ser incluidos en toda sustracción del mar de Dirac.



$$\rho_E^\pm(x, \mu) = \sum_{n \in \Omega_\pm} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^\dagger(x) E_n \psi_{n\alpha}(x) \Theta(\pm(\mu - E_n)), \quad (4.13)$$

y la densidad de energía cinética se escribirá

$$\begin{aligned} \rho_K(x, \mu) &= \rho_K^+(x, \mu) - \rho_K^-(x, \mu) \\ \rho_K^\pm(x, \mu) &= \sum_{n \in \Omega_\pm} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^\dagger(x) (\alpha \cdot P + \beta m - m) \psi_{n\alpha}(x) \Theta(\pm(\mu - E_n)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

En el caso relativista, además de la densidad espacial de partículas, que también se llama densidad vectorial,

$$\begin{aligned} \rho(x, \mu) &= \rho^+(x, \mu) - \rho^-(x, \mu) \\ \rho^\pm(x, \mu) &= \sum_{n \in \Omega_\pm} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^\dagger(x) \psi_{n\alpha}(x) \Theta(\pm(\mu - E_n)), \end{aligned} \quad (4.15)$$

se puede definir una densidad escalar

$$\begin{aligned} \rho_s(x, \mu) &= \rho_s^+(x, \mu) - \rho_s^-(x, \mu) \\ \rho_s^\pm(x, \mu) &= \sum_{n \in \Omega_\pm} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^\dagger(x) \beta \psi_{n\alpha}(x) \Theta(\pm(\mu - E_n)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

De forma similar a como se operó en el caso no relativista la fórmula de Hellmann-Feynman nos permite encontrar las relaciones

$$\frac{\delta N_\pm(E)}{\delta V(x)} = \mp \sum_{n \in \Omega_\pm} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^\dagger(x) \psi_{n\alpha}(x) \delta(E - E_n) \quad (4.17)$$

$$\frac{\delta N_\pm(E)}{\delta \Phi(x)} = \mp \sum_{n \in \Omega_\pm} \sum_{\alpha=1}^{g_n} \psi_{n\alpha}^\dagger(x) \beta \psi_{n\alpha}(x) \delta(E - E_n), \quad (4.18)$$

que se pueden aplicar al cálculo de las densidades anteriormente definidas

$$\rho_E^\pm(x, \mu) = \mp \int dE \frac{\delta N_\pm(E)}{\delta V(x)} E \Theta(\pm(\mu - E)) \quad (4.19)$$

$$\rho^\pm(x, \mu) = \mp \int dE \frac{\delta N_\pm(E)}{\delta V(x)} \Theta(\pm(\mu - E)) \quad (4.20)$$

$$\rho_s^\pm(x, \mu) = \mp \int dE \frac{\delta N_\pm(E)}{\delta \Phi(x)} \Theta(\pm(\mu - E)), \quad (4.21)$$



a excepción de la densidad de energía cinética que, como en el caso no relativista, puede encontrarse combinando las demás

$$\rho_K(x, \mu) = \rho_E(x, \mu) + (m - \Phi(x)) \rho_s(x, \mu) - (m + V(x)) \rho(x, \mu). \quad (4.22)$$

## 4.2 Aplicación del método Tr-Log al caso relativista

Vamos a seguir [Ru93] y aplicar el método Tr-Log al número de estados  $N_D(E)$ . Cuando encontremos la forma funcional de  $N_D(E)$  podremos distinguir las dos ramas,  $\Omega_+$  y  $\Omega_-$ , y efectuaremos la sustracción  $N_D(E_{\text{gap}})$  y la separación  $N_+(E) - N_-(E)$ .

Aplicando la regularización logarítmica de la función paso (ecs. (2.5) y (2.6)) al número de estados relativista se tiene

$$N_D(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im Tr log}(H - E + i\epsilon). \quad (4.23)$$

Esta expresión no está en la forma adecuada para utilizar el desarrollo de Lai-Him Chan, aplicable sólo a operadores de segundo orden en el operador momento generalizado. A partir de la identidad matricial  $\text{Tr log } M = \text{log det } M$ , se puede ver que el número de estados es proporcional a la fase del determinante,  $\arg \det(H - E + i\epsilon)$ . Si la dimensión espacial  $D$  es impar, la matriz  $\gamma_5 \equiv -i \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_D = \gamma_5^{-1}$  anticonmuta con cualquier  $\gamma_\mu$ ,  $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ , y se cumple la siguiente relación de semejanza

$$\tilde{H} \equiv (\beta \gamma_5) H (\beta \gamma_5)^{-1} \quad (4.24)$$

$$= -\alpha \cdot P - \beta \Phi(x) + V(x), \quad (4.25)$$

con la que se tiene

$$\arg \det(H - E + i\epsilon) = \frac{1}{2} \arg \det \left[ (H - E + i\epsilon) (\tilde{H} - E + i\epsilon) \right]. \quad (4.26)$$

Desarrollando el producto y sustituyendo en la ec. (4.23) llegamos a

$$N_D(E) = \frac{1}{2\pi} \text{Im Tr log}(-P^2 - U(X)), \quad (4.27)$$

donde hemos definido

$$U(X) \equiv \Phi^2 - (E - V - i\epsilon)^2 + i\hbar \alpha \cdot \nabla(V - \beta \Phi) - \frac{1}{2} \sigma_{ij} F_{ij}, \quad (4.28)$$



con  $\sigma_{ij} \equiv i [\gamma_i, \gamma_j] / 2$  y  $F_{ij} \equiv -i [P_i, P_j] = -\hbar (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i)$ . Nótese que  $U$  es una matriz compleja de  $T(D) \times T(D)$  componentes.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el método de Chan. Hasta orden cuarto en el desarrollo en derivadas covariantes se llega a

$$N_D(E) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \text{tr} \left\{ \log(-k^2 - U) + \frac{k^2 \hbar^2}{D} (\nabla_i \Delta)^2 + \right. \\ \left. - \frac{2k^4 \hbar^4}{D(D+2)} \left[ 2 (\Delta (\nabla^2 \Delta))^2 + ((\nabla_i \Delta) (\nabla_j \Delta))^2 - 2 (\nabla_i \Delta)^4 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\hbar^4} (F_{ij} \Delta^2)^2 - \frac{4}{\hbar^2} i F_{ij} \Delta (\nabla_i \Delta) (\nabla_j \Delta) \Delta \right] + \mathcal{O}(P^6) \right\}, \quad (4.29)$$

donde se ha definido

$$\Delta(x, k)^{-1} \equiv k^2 + U(x), \quad (4.30)$$

que es una matriz en el espacio de simetría interna. Aunque no es estrictamente cierto, consideraremos al tensor  $F_{ij}$  de orden  $\hbar^2$ ; se trata de una elección sensata pues en la práctica la constante de acoplamiento *gauge* es pequeña.

En  $U$ , y por lo tanto en  $\Delta$ , hay dependencia en  $\hbar$ . Si definimos

$$\Delta_o(x, k)^{-1} \equiv k^2 + \Phi^2 - (E - V - i\epsilon)^2 \quad (4.31)$$

$$B(x) = i\hbar \alpha \cdot \nabla(V - \beta\Phi) - \frac{1}{2} \sigma_{ij} F_{ij}, \quad (4.32)$$

se tiene  $\Delta(x, k)^{-1} = \Delta_o(x, k)^{-1} + B(x)$  con  $\Delta_o$  de orden cero en  $\hbar$ . Para desarrollar la dependencia de  $\Delta$  en  $\hbar$  usamos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

junto con

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

de modo que bajo traza

$$\log(-k^2 - U) = \log(-\Delta_o^{-1}) + \Delta_o B - \frac{1}{2} \Delta_o^2 B^2 \\ + \frac{1}{3} \Delta_o^3 B^3 - \frac{1}{4} \Delta_o^4 B^4 + \mathcal{O}(\hbar^5) \quad (4.33)$$

$$\Delta = \Delta_o - \Delta_o^2 B + \Delta_o^3 B^2 + \mathcal{O}(\hbar^3), \quad (4.34)$$



donde hemos tenido en cuenta que  $\Delta_o$  conmuta con  $B$ . Usamos las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \text{tr}(1) &= T(D), \quad \text{tr}(\gamma_{\alpha_1} \cdots \gamma_{\alpha_{2n+1}}) = 0, \quad \text{tr}(\sigma_{\alpha\beta}) = 0, \\ \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) &= T(D) g_{\alpha\beta}, \quad \text{tr}(\sigma_{\mu\nu} \sigma_{\rho\sigma}) = T(D) (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \\ \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= T(D) (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (4.35)$$

para comprobar

$$\begin{aligned} \text{tr} \Delta_o B &= 0 \\ \text{tr} \Delta_o^2 B^2 &= T(D) \left\{ \hbar^2 \left( (\nabla\Phi)^2 - (\nabla V)^2 \right) + \frac{1}{2} F^2 \right\} \Delta_o \\ \text{tr} \Delta_o^3 B^3 &= \mathcal{O}(\hbar^6) \\ \text{tr} \Delta_o^4 B^4 &= T(D) \hbar^4 \left\{ (\nabla V)^4 + (\nabla\Phi)^4 - 6 (\nabla\Phi)^2 (\nabla V)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4 (\nabla\Phi \cdot \nabla V)^2 \right\} \Delta_o^4 + \mathcal{O}(\hbar^6) \\ \hbar^2 \text{tr}(\nabla_i \Delta)^2 &= T(D) \left\{ \hbar^2 (\nabla_i \Delta_o)^2 - \hbar^4 \left[ \nabla_i (\Delta_o^2 \nabla_j V) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \hbar^4 (\nabla_i \Delta_o) \nabla_i \left[ \Delta_o^3 \left( (\nabla\Phi)^2 - (\nabla V)^2 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \hbar^4 \left[ \nabla_i (\Delta_o^2 \nabla_j \Phi) \right]^2 \right\} + \mathcal{O}(\hbar^6). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Bajo la integral en  $k$  el término  $T(D) F^2 \Delta_o^2/2$  se puede escribir

$$12 T(D) k^4 F^2 \Delta_o^4 / (D(D+2))$$

(véase la ec. (2.25)), y bajo la integral en  $x$  podemos integrar por partes el gradiente que afecta a  $\Delta_o^3 \left( (\nabla\Phi)^2 - (\nabla V)^2 \right)$  en la última ecuación de (4.36). Llevando los resultados anteriores a la ec. (4.29) y agrupando en  $\hbar$  hasta orden  $\hbar^{4-D}$  inclusive, se tiene

$$\begin{aligned} N^D(E) &= N_0^D(E) + N_2^D(E) + N_4^D(E) + \Theta(\hbar^{6-D}) \\ N_0^D(E) &= \frac{T(D)}{2\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \log(-\Delta_o^{-1}) \\ N_2^D(E) &= \frac{T(D)\hbar^2}{2\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\nabla V)^2 - (\nabla\Phi)^2 \right] \Delta_o^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{D} (\nabla\Delta_o)^2 \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
N_4^D(E) = & \frac{T(D)\hbar^4}{2\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \left\{ -\frac{1}{4} \Delta_o^4 [(\nabla V)^4 + (\nabla\Phi)^4 + \right. \\
& - 6(\nabla V)^2(\nabla\Phi)^2 + 4(\nabla V \cdot \nabla\Phi)^2] \\
& + \frac{k^2}{D} \left[ -(\nabla_i(\Delta_o^2 \nabla_j V))^2 + (\nabla_i(\Delta_o^2 \nabla_j \Phi))^2 + \right. \\
& \left. + 2\Delta_o^3(\nabla^2 \Delta_o) ((\nabla V)^2 - (\nabla\Phi)^2) \right] \\
& \left. - \frac{2k^4}{D(D+2)} \left[ 2\Delta_o^2(\nabla^2 \Delta_o)^2 - (\nabla \Delta_o)^4 + \frac{2}{\hbar^4} F^2 \Delta_o^4 \right] \right\}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

A partir de la definición (4.31) es fácil comprobar

$$\begin{aligned}
\nabla_i \Delta_o &= -2\Delta_o^2 [\Phi(\nabla_i \Phi) + (E - V)(\nabla_i V)] \\
\nabla^2 \Delta_o &= 8\Delta_o^3 [\Phi(\nabla_i \Phi) + (E - V)(\nabla_i V)]^2 + \\
& - 2\Delta_o^2 [(\nabla\Phi)^2 + \Phi(\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V)(\nabla^2 V)], \tag{4.38}
\end{aligned}$$

ecuaciones que usamos para llegar a

$$\begin{aligned}
N_2^D(E) &= \frac{T(D)\hbar^2}{2\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \left\{ \frac{1}{2} \Delta_o^2 [(\nabla V)^2 - (\nabla\Phi)^2] + \right. \\
& \left. + \frac{4k^2}{D} \Delta_o^4 [\Phi(\nabla_i \Phi) + (E - V)(\nabla_i V)]^2 \right\} \\
N_4^D(E) &= \frac{T(D)\hbar^4}{2\pi} \text{Im} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi\hbar)^D} \left\{ -\frac{1}{4} \Delta_o^4 [(\nabla V)^4 + (\nabla\Phi)^4 + \right. \\
& - 6(\nabla V)^2(\nabla\Phi)^2 + 4(\nabla V \cdot \nabla\Phi)^2] + \\
& + \frac{k^2}{D} \left[ 4\Delta_o^5 \left( 2[\Phi(\nabla_i \Phi) + (E - V)(\nabla_i V)] [(\nabla_j V)(\nabla_i \nabla_j V) - (\nabla_j \Phi)(\nabla_i \nabla_j \Phi)] + \right. \right. \\
& - [(\nabla\Phi)^2 + \Phi(\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V)(\nabla^2 V)] \times \\
& \left. \left. \times [(\nabla V)^2 - (\nabla\Phi)^2] \right) - \Delta_o^4 [(\nabla_i \nabla_j V)^2 - (\nabla_i \nabla_j \Phi)^2] \right] + \\
& - \frac{4k^4}{D(D+2)} \left[ 56\Delta_o^8 [\Phi(\nabla_i \Phi) + (E - V)(\nabla_i V)]^4 + \right. \\
& - 32\Delta_o^7 [\Phi(\nabla_i \Phi) + (E - V)(\nabla_i V)]^2 \times \\
& \left. \times [(\nabla\Phi)^2 + \Phi(\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V)(\nabla^2 V)] + \right. \\
& \left. + 4\Delta_o^6 [(\nabla\Phi)^2 + \Phi(\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V)(\nabla^2 V)]^2 + \right.
\end{aligned}$$



$$\left. + \frac{1}{\hbar^4} \Delta_o^4 F^2 \right\}. \quad (4.39)$$

Análogamente a como hicimos en el caso no relativista vamos a trabajar las integrales en  $k$ . Simplificamos el problema con la identidad

$$\Delta_o^n = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \partial_{\Phi^2}^n \log(-\Delta_o^{-1}), \quad (4.40)$$

donde  $\partial_{\Phi^2} \equiv \frac{\partial}{\partial \Phi^2}$  se refiere a la dependencia explícita de  $\Delta_o$  en  $\Phi^2$ . Además vamos a tener en cuenta la siguiente igualdad entre distribuciones

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \text{Im} \log(x - i y \epsilon) = 1 + \text{sign}(y) \Theta(x), \quad (4.41)$$

con  $x$  e  $y$  reales. Así pues, las integrales en  $k$  que necesitaremos tienen la forma

$$\begin{aligned} I_r^D(s, n) &= \frac{\text{Im}}{\pi} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^{2s} \Delta_o^n \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(n) \Gamma(\frac{D}{2})} \partial_{\Phi^2}^n \int_0^\infty dk k^{2s+D-1} [1 + \text{sign}(E - V) \Theta(p^2 - k^2)], \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde hemos usado la ec. (2.36), hemos definido

$$p^2 \equiv (E - V)^2 - \Phi^2, \quad (4.43)$$

y donde ahora  $\partial_{\Phi^2}$  se refiere a la dependencia explícita de  $p^2$  en  $\Phi^2$ . El corchete de la ec. (4.42) puede escribirse

$$\begin{aligned} 1 + \text{sign}(E - V) \Theta(p^2 - k^2) &= \\ &= 1 + \Theta(E - V - \sqrt{\Phi^2 + k^2}) - \Theta(-(E - V) - \sqrt{\Phi^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Vamos a suponer que el potencial escalar  $\Phi(x)$ , que incluye la masa en reposo del fermión, es definido positivo. Se tiene entonces que en la aproximación semiclásica el gap de energía prohibida es el intervalo local

$$[V(x) - \Phi(x), V(x) + \Phi(x)].$$

Para calcular la contribución de la rama negativa completa al número de estados en las integrales (4.42) hay que hacer la sustitución local  $E = V(x) - \Phi(x)$  y vemos que del corchete de (4.42) sólo queda el término 1. Si llamamos  $I_r(s, n)$  a las integrales en



que restamos la rama negativa completa, encontraremos dos tipos de contribuciones finitas, la '+' que cuenta estados en la rama positiva desde el gap, y la '-' que cuenta, también desde el gap, pero en la rama negativa,

$$I_r(s, n) = I_r^+(s, n) - I_r^-(s, n) \quad (4.45)$$

$$I_r^\pm(s, n) \equiv \frac{(-1)^{n-1} 2}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(n) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \partial_{\Phi^2}^n \int_0^\infty dk k^{2s+D-1} \Theta(\pm(E - V) - \sqrt{\Phi^2 + k^2}) \quad (4.46)$$

$$= \frac{(-1)^{n-s} \Gamma\left(s + \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(n) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)^2} \partial_{\Phi^2}^{n-s-1} \left[ p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \right]. \quad (4.47)$$

Para pasar de (4.46) a (4.47) hemos usado ecuaciones análogas a la (2.42). Vamos a utilizar estos resultados en el número de estados. Además usaremos que bajo el signo integral se cumple

$$\begin{aligned} & \{2 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (E - V) (\nabla_i V)] [(\nabla_j V) (\nabla_i \nabla_j V) - (\nabla_j \Phi) (\nabla_i \nabla_j \Phi)] \partial_{\Phi^2}^3 + \\ & + [(\nabla_i \nabla_j V)^2 - (\nabla_i \nabla_j \Phi)^2] \partial_{\Phi^2}^2 \} \left[ p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \right] = \\ & = \{2 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (E - V) (\nabla_i V)] [(\nabla_i V) (\nabla^2 V) - (\nabla_i \Phi) (\nabla^2 \Phi)] \partial_{\Phi^2}^3 \\ & + [(\nabla^2 V)^2 - (\nabla^2 \Phi)^2] \partial_{\Phi^2}^2 \} \left[ p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \right], \end{aligned} \quad (4.48)$$

como puede demostrarse mediante integración por partes y la identidad

$$\begin{aligned} & \nabla_i [f(p) \Theta(\pm(E - V) - \Phi)] = \\ & = 2 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (E - V) (\nabla_i V)] \partial_{\Phi^2} [f(p) \Theta(\pm(E - V) - \Phi)]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Esta identidad puede demostrarse fácilmente usando

$$\Theta(\pm(E - V) - \Phi) = \Theta(p^2) \Theta(\pm(E - V))$$

junto con  $\Theta(p^2) \delta(E - V) = 0$  en el sentido de distribuciones. Con todo esto se llega al siguiente resultado

$$\begin{aligned} N_0^\pm(E) &= \frac{T(D)}{2} \frac{1}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)} \int d^D x p^D \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \\ N_2^\pm(E) &= -\frac{T(D)}{2} \frac{\hbar^2}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \Phi)^2 - (\nabla V)^2] \partial_{\Phi^2} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} [\Phi (\nabla \Phi) + (E - V) (\nabla V)]^2 \partial_{\Phi^2}^2 \left. \right\} p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \\
N_4^\pm(E) = & - \frac{T(D)}{2} \frac{\hbar^4}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int d^D x \left\{ \right. \\
& \frac{1}{90} [\Phi (\nabla \Phi) + (E - V) (\nabla V)]^4 \partial_{\Phi^2}^5 + \frac{1}{12} [(\nabla^2 \Phi)^2 - (\nabla^2 V)^2] \partial_{\Phi^2}^2 + \\
& + \frac{1}{24} [(\nabla V)^4 + (\nabla \Phi)^4 - 6 (\nabla V)^2 (\nabla \Phi)^2 + 4 (\nabla V \cdot \nabla \Phi)^2] \partial_{\Phi^2}^3 + \\
& + \frac{1}{12} [(\nabla V)^2 - (\nabla \Phi)^2] [(\nabla \Phi)^2 + \Phi (\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V) (\nabla^2 V)] \partial_{\Phi^2}^3 + \\
& + \frac{1}{6} [(\nabla^2 \Phi) (\nabla_i \Phi) - (\nabla^2 V) (\nabla_i V)] [\Phi (\nabla_i \Phi) + (E - V) (\nabla_i V)] \partial_{\Phi^2}^3 + \\
& + \frac{2}{45} [\Phi (\nabla \Phi) + (E - V) (\nabla V)]^2 \times \\
& \quad \times [(\nabla \Phi)^2 + \Phi (\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V) (\nabla^2 V)] \partial_{\Phi^2}^4 + \\
& + \frac{1}{30} [(\nabla \Phi)^2 + \Phi (\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (E - V) (\nabla^2 V)]^2 \partial_{\Phi^2}^3 + \\
& \left. + \frac{1}{6} \frac{F^2}{\hbar^4} \partial_{\Phi^2} \right\} p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi). \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Nótese que lo que hemos desarrollado es la contribución por separado de las ramas de energía positiva y de energía negativa (ec. (4.8)) al número de estados definido en la ec. (4.7). A partir de estas ecuaciones es inmediata la obtención de la ec. (18) de la ref. [Ru93]; basta tener en cuenta que  $\Theta(E - V - \Phi) - \Theta(-E + V - \Phi) = \text{sign}(E - V) \Theta(p^2)$ .

Como ocurría en el caso no relativista, es deseable bajar el número de derivadas respecto de  $\Phi^2$  tanto como sea posible. Para conseguirlo utilizamos repetidamente la ec. (4.49) y se llega las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
N_0^\pm(E) &= \frac{T(D)}{2} \frac{1}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \int d^D x p^D \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \\
N_2^\pm(E) &= \frac{T(D)}{2} \frac{\hbar^2}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla V)^2 - (\nabla \Phi)^2] + \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{12} \nabla^2 p^2 \right\} \partial_{\Phi^2} p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \\
N_4^\pm(E) &= \frac{T(D)}{2} \frac{\hbar^4}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int d^D x \left\{ \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{288} [(\nabla^2 p^2) + 12 (\nabla\Phi)^2 - 12 (\nabla V)^2] (\nabla^2 p^2) \partial_{\Phi^2}^3 - \frac{1}{720} (\nabla_i \nabla_j p^2)^2 \partial_{\Phi^2}^3 + \\
& -\frac{1}{24} [(\nabla V)^4 + (\nabla\Phi)^4 - 6 (\nabla V)^2 (\nabla\Phi)^2 + 4 (\nabla V \cdot \nabla\Phi)^2] \partial_{\Phi^2}^3 + \\
& + \frac{1}{288} (\nabla^4 p^2) \partial_{\Phi^2}^2 + \frac{1}{12} [(\nabla_i \Phi) (\nabla_i \nabla^2 \Phi) - (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla^2 V)] \partial_{\Phi^2}^2 + \\
& - \frac{1}{6} \frac{F^2}{\hbar^4} \partial_{\Phi^2} \left. \right\} p^{D-2} \Theta(\pm(E - V) - \Phi) \\
p & \equiv \sqrt{(E - V)^2 - \Phi^2}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Las derivadas respecto de  $\Phi^2$  pueden realizarse después de la integración introduciendo un nuevo parámetro,  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned}
& \int d^D x g[x, \Phi] \partial_{\Phi^2}^n [f[\Phi^2] \Theta(\pm(E - V) - \Phi)] = \\
& = \partial_{\lambda^2}^n \int d^D x g[x, \Phi] f[\Phi^2 + \lambda^2] \Theta(\pm(E - V) - \sqrt{\Phi^2 + \lambda^2}) \Big|_{\lambda=0}, \tag{4.52}
\end{aligned}$$

que al final del cálculo desaparece proporcionando en principio resultados finitos.

Nótese que con el desarrollo semiclásico el número de estados pasa a ser una distribución.

### 4.3 Límite no relativista

A partir de la expresión del número de estados (ecs. (4.51)) y separando la masa en las magnitudes de primer orden en la misma,

$$\Phi = m + s, \quad E = m + \varepsilon, \tag{4.53}$$

podemos obtener el límite no relativista sin más que realizar un desarrollo en potencias de  $\frac{1}{m}$ . Para llevar correctamente la cuenta de las potencias de  $m$  hay que utilizar

$$\begin{aligned}
\partial_{\Phi^2} f(p) & = -\partial_{p^2} f(p) = -\frac{1}{2m-2V+2\varepsilon} \partial_{\varepsilon} f(p) \\
& = -\frac{1}{2m} \partial_{\varepsilon} f(p) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{m}\right)^2\right). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

El factor  $\frac{T(D)}{2}$  es la degeneración de espín,  $\nu$ , y el potencial efectivo no relativista resulta ser  $V' = V + s$ , de modo que  $p^n \Theta(E - V - \Phi) = ((2m)(\varepsilon - V'))^{n/2} \Theta(\varepsilon - V') + \mathcal{O}((2m)^{\frac{n-2}{2}})$ . Con todo esto el cálculo del límite no relativista de  $N^+(E)$  es inmediato, obteniéndose (2.46) (tras identificar  $\varepsilon$  con  $E$  y  $V'$  con  $V$ ) a excepción del



término en  $F^2$ . La discrepancia se debe a que el límite no relativista de la ecuación de Dirac con campo electromagnético no es la ecuación de Schrödinger, sino la ecuación de Pauli, que incorpora un término dipolar magnético extra,  $-\frac{\hbar}{2m} \sigma \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})$  en  $D = 3$ . Si no se tiene en cuenta, se obtiene

$$N_4^{mag}(E) = -\frac{1}{48 \pi^2 \hbar^3 \sqrt{2m}} \int d^3x \frac{F^2}{(E - V)^{1/2}} \Theta(E - V). \quad (4.55)$$

Sin embargo, si dicho término se introduce en el hamiltoniano de Schrödinger, se llega a

$$N_4^{mag}(E) = \frac{1}{24 \pi^2 \hbar^3 \sqrt{2m}} \int d^3x \frac{F^2}{(E - V)^{1/2}} \Theta(E - V), \quad (4.56)$$

que coincide con el límite no relativista del término en  $F^2$ .

## 4.4 Cálculo de densidades

La obtención de las densidades relativistas a través de las ecs. (4.19–4.21) y (4.51) no presenta ninguna dificultad, pues sólo hay que tener en cuenta que dado un funcional

$$F[g] = \int dx \mathcal{F}(g(x), \nabla_i g(x), \nabla_i \nabla_j g(x), \nabla_i \nabla_j \nabla_l g(x), \nabla_i \nabla_j \nabla_l \nabla_s g(x)), \quad (4.57)$$

su derivada funcional respecto de  $g(x)$  es

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[g]}{\delta g(x)} = & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nabla_i g} + \nabla_i \nabla_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nabla_i \nabla_j g} \\ & - \nabla_i \nabla_j \nabla_l \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nabla_i \nabla_j \nabla_l g} + \nabla_i \nabla_j \nabla_l \nabla_s \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nabla_i \nabla_j \nabla_l \nabla_s g}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Sin embargo, el volumen de las expresiones que aparecen hace totalmente inviable el cómputo manual de las mismas, y en la práctica se hace imprescindible la ayuda de paquetes informáticos de manipulación simbólica. En nuestro caso hemos utilizado la versión 2.0 del programa *MATHEMATICA* para llegar a la expresión explícita de las densidades hasta orden cuarto en dimensión espacial  $D = 3$ , que se encuentran recogidas en el apéndice C. El orden cero y el orden dos ya habían sido obtenidos previamente [Ce90, Vo92a, Ce93], y para el orden cuarto ya era conocida una expresión parcial para lagrangianos sin potencial escalar [Po91]. Hemos comprobado los términos del desarrollo de la densidad bariónica que sólo involucran gradientes del potencial vectorial con los de la citada referencia encontrándose un perfecto



acuerdo. Las expresiones del apéndice no muestran los términos distributivos en la superficie de puntos de retroceso, a no ser que se utilice el convenio de potencias negativas de  $k_F$  que se indicará a continuación.

## 4.5 La energía total

Al igual que en el caso no relativista, no es necesario calcular la densidad de energía para obtener la expresión de la energía total fermiónica. Análogamente a la ec. (2.51) se tiene

$$E_T(\mu) = E_T^+(\mu) - E_T^-(\mu) \quad (4.59)$$

$$E_T^\pm(\mu) = \int dE \frac{dN^\pm}{dE} E \Theta(\pm(\mu - E)) \quad (4.60)$$

$$= \pm \mu N^\pm(\mu) - \int dE N^\pm(E) \Theta(\pm(\mu - E)). \quad (4.61)$$

A excepción de la expresión explícita de  $E_T$ , el resto de los comentarios de la sección 2.5 son aplicables al caso relativista salvo cambios triviales en la notación. En la práctica para nuestros cálculos utilizaremos la integral a todo el espacio de la densidad de energía total fermiónica (apéndice C) particularizada al caso de potenciales centrales. Algunas de las integrales que aparecen son divergentes; para verlo basta con suponer que  $\mu - V(x) - \Phi(x)$  se anula linealmente en los puntos de retroceso, y los factores  $k_F^{-j}$  se encargan del resto. Estas divergencias aparecen porque se han omitido términos distributivos. Para considerarlos basta con practicar la siguiente sustitución en las fórmulas del apéndice C

$$x_F \rightarrow \frac{\mu - V}{k_F}$$

$$k_F^{-j} \Theta(\mu - V - \Phi) \rightarrow -2^j \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma(j)} \partial_{\Phi^2}^{\frac{j+1}{2}} [k_F \Theta(\mu - V - \Phi)]. \quad (4.62)$$

Para calcular las derivadas después de realizar la integral en  $x$  se puede usar la técnica de introducción de un nuevo parámetro (ec. (4.52)); se comprueba entonces que la energía total es finita.

## 4.6 Un ejemplo analítico: Ecuación de Dirac con potenciales armónicos

En [Ce90, Ce93] se utilizaron potenciales armónicos para ilustrar analíticamente los resultados de la aproximación semiclásica relativista hasta orden segundo y poste-



riormente en [Ru93] se estudió el orden cuarto. En concreto consideraron la ecuación de Dirac (4.1) con potenciales

$$V(x) = \Phi(x) - m = \frac{1}{2} kx^2, \quad A_i(x) = 0, \quad (4.63)$$

que puede resolverse de forma exacta [Sm71, Te90, Ce93] para los estados del espectro de energía positiva y sus autofunciones. La energía  $n$ -ésima ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) se obtiene de

$$(E_n^+ - m)(E_n^{+2} - m^2) = 4k\hbar^2 \left(n + \frac{3}{2}\right)^2, \quad (4.64)$$

y tiene degeneración  $g_n = (n+1)(n+2)$ , por lo que el número acumulado de estados se escribe

$$N^+(E) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \Theta(E - E_n^+). \quad (4.65)$$

Sustituyendo los potenciales (4.63) en las ecs. (4.51) del desarrollo semiclásico del número de estados, y definiendo  $x \equiv \frac{\mu-m}{2m}$ , se llega a<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} N_0^+(\mu) &= \frac{1}{3} m^3 \left(\frac{2m}{k\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (1+x)^{\frac{3}{2}} x^3 \Theta(\mu - m) \\ N_2^+(\mu) &= -\frac{1}{4} m \left(\frac{2m}{k\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} x \Theta(\mu - m) \\ N_4^+(\mu) &= \frac{17}{480} \left(\frac{2m}{k\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \delta(\mu - m). \end{aligned} \quad (4.66)$$

El cuarto orden es ya puramente distributivo.

Para obtener el desarrollo semiclásico de la energía acumulada aplicamos directamente (4.61), y obtenemos

$$\begin{aligned} E_0^+(\mu) &= \frac{64}{3465} m^4 \left(\frac{2m}{k\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{945}{32} x^5 + \frac{2905}{64} x^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1135}{64} x^3 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{1}{2} x + 1 - (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right] \Theta(\mu - m) \\ E_2^+(\mu) &= -\frac{2}{15} m^2 \left(\frac{2m}{k\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{9}{4} x^2 + \frac{11}{8} x + 1 + \right. \\ &\quad \left. - (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right] \Theta(\mu - m) \\ E_4^+(\mu) &= -\frac{17}{480} \left(\frac{2m}{k\hbar^2}\right)^{-\frac{1}{2}} [\Theta(\mu - m) - m \delta(\mu - m)]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

<sup>3</sup>El factor 2 de diferencia entre [Ce90, Ce93] y [Ru93] se debe a que allí se considera además degeneración de isoespín.



Nótese que el término distributivo de  $E_4^+$  desaparecería si se sustrajese la energía de las masas del sistema. En ese caso el orden cuarto sólo contribuiría bajando la energía una cantidad independiente del potencial químico, y por tanto del número de partículas.

El desarrollo semiclásico para este ejemplo (ecs. (4.66)) puede comprobarse usando la fórmula de Euler–Maclaurin [Br73, Kr90, Ru93] en el número de estados de la ec. (4.65). Dicha fórmula establece que [Sp68]

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} dt F(t) + \frac{1}{2} [F(0) + F(\infty)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} [F^{(2n-1)}(\infty) - F^{(2n-1)}(0)], \quad (4.68)$$

donde  $B_n$  son los números de Bernoulli. Con la ec. (4.64) se puede definir una función suave y monótona creciente,

$$\begin{aligned} n(E) &= \frac{\tilde{n}_0(E)}{\hbar} + \tilde{n}_1(E) \\ \tilde{n}_0(E) &= \frac{1}{2} (E - m) \sqrt{\frac{E + m}{k}} \Theta(E - m) \\ \tilde{n}_1(E) &= -\frac{3}{2}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

que al evaluarse en el estado  $j$ -ésimo del espectro proporciona el número de orden que lo etiqueta,  $j$ . Utilizando  $n(E)$  podemos escribir la función paso de la ec. (4.65) como

$$\begin{aligned} \Theta(E - E_n^+) &= \Theta(n(E) - n) \\ &= \Theta(\tilde{n}_0(E) + \hbar \tilde{n}_1(E) - \hbar n). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Llamando  $F(n) \equiv (n + 1)(n + 2)\Theta(n(E) - n)$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F(0) + \int_0^{\infty} dt F(t) &= \left[ \frac{1}{3} n(E)^3 + \frac{3}{2} n(E)^2 + 2n(E) + 1 \right] \Theta(\tilde{n}_0(E) + \hbar \tilde{n}_1(E)) \\ F'(0) &= 3\Theta(\tilde{n}_0(E) + \hbar \tilde{n}_1(E)) - 2\hbar \delta(\tilde{n}_0(E) + \hbar \tilde{n}_1(E)) \\ F'''(0) &= -6\hbar \delta(\tilde{n}_0(E) + \hbar \tilde{n}_1(E)) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ F^{(n)}(0) &= \mathcal{O}(\hbar^2) \quad \text{si } n > 3. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Ahora usamos la fórmula de Taylor en las distribuciones  $\Theta$  y  $\delta$  para extraer la dependencia en  $\hbar$  y usamos la propiedad ' $x^m \delta^{(n)}(x) = 0$  si  $m > n$ '. Definimos además  $\Theta_0 \equiv \Theta(\tilde{n}_0(E))$  y  $\delta_0 \equiv \delta(\tilde{n}_0(E))$ .

$$\frac{1}{2} F(0) + \int_0^{\infty} dt F(t) = \frac{1}{3} \frac{\tilde{n}_0^3}{\hbar^3} \left[ \Theta_0 + \frac{\hbar^4}{24} \tilde{n}_1^4 \delta_0''' \right] +$$



$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\tilde{n}_0^2 \tilde{n}_1}{\hbar^2} + \frac{3}{2} \frac{\tilde{n}_0^2}{\hbar^2} \right) \left[ \Theta_0 + \frac{\hbar^3}{6} \tilde{n}_1^3 \delta_0'' \right] + \\
& + \left( \frac{\tilde{n}_0 \tilde{n}_1^2}{\hbar} + 3 \frac{\tilde{n}_0 \tilde{n}_1}{\hbar} + 2 \frac{\tilde{n}_0}{\hbar} \right) \left[ \Theta_0 + \frac{\hbar^2}{2} \tilde{n}_1^2 \delta_0' \right] + \\
& + \left( \frac{1}{3} \tilde{n}_1^3 + \frac{3}{2} \tilde{n}_1^2 + 2 \tilde{n}_1 + 1 \right) [\Theta_0 + \hbar \tilde{n}_1 \delta_0] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
F'(0) & = 3 \Theta_0 + \hbar (3 \tilde{n}_1 - 2) \delta_0 + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
F'''(0) & = -6 \hbar \delta_0 + \mathcal{O}(\hbar^2). \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$  y que como distribución  $x^n \delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta(x)$  se llega a la ec. (4.66), como se quería. Es digno de mención el hecho de que, en general, en el desarrollo semiclásico aparecen términos en potencias alternas de  $\hbar$ ; al aplicar el desarrollo de Euler–Maclaurin a nuestro caso particular de los potenciales armónicos, los términos no deseados han desaparecido gracias a que se cumplen relaciones no triviales entre la degeneración y la función  $n(E)$ .

En la tabla 4.1 se muestran algunos resultados numéricos para los que se han considerado dos especies de nucleones de masa  $m = 939$  MeV. Para cada número de partículas,  $A$ , se fija la constante de oscilador,  $k = \frac{m\omega^2}{2}$ , con  $\hbar\omega = 41A^{-\frac{1}{3}}$  MeV [Ce90]. Se dan dos aproximaciones semiclásicas; en una el potencial químico se ajusta al orden al que se quiere llegar (NP) y se sustituye en la energía total hasta ese orden, y en la otra se hace un desarrollo perturbativo (P) en el potencial químico (véase sección 2.5). Como se esperaba, la diferencia entre ambos métodos es de orden superior. Se ve también de la tabla 4.1 que el cuarto orden supone una corrección ínfima al segundo, con lo que parece alcanzarse una cierta convergencia en el desarrollo asintótico. Sin embargo, la separación entre el resultado exacto y la energía a cuarto orden es más de 10 veces superior que la contribución neta del cuarto orden, así que la convergencia no se produce al resultado exacto (el error relativo va del 0.4 al 5 %). En realidad a lo que se tiende es al promedio de Strutinsky (SA) de la energía.

El promedio de Strutinsky [St67, Br73] se desarrolló para incorporar efectos de capas al modelo nuclear de la gota líquida. Esencialmente lo que se hace es suavizar hasta un cierto orden polinómico la densidad de estados de un sistema difuminando los niveles y exigiendo idempotencia, es decir, que la actuación sobre una densidad de estados ya suavizada sea ella misma [Ri80]. Matemáticamente se parte de una densidad de estados  $g(E)$  y se busca una distribución  $f$  con la que se obtenga la suavización mediante convolución

$$\tilde{g}_\gamma(E) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f\left(\frac{\varepsilon - E}{\gamma}\right), \tag{4.73}$$



A		WK <sub>0</sub>	WK <sub>2</sub>	WK <sub>4</sub>	SA	E <sub>ex</sub>
4	NP:	139.428	162.018	161.104	161.1	153.412
	P:	138.428	160.405	161.066		
16	NP:	557.711	592.013	591.437	591.44	579.979
	P:	557.711	591.011	591.427		
40	NP:	1394.28	1440.21	1439.78	1439.78	1424.52
	P:	1394.28	1439.47	1439.78		
80	NP:	2788.56	2846.08	2845.74	2845.74	2826.66
	P:	2788.56	2845.50	2845.74		
140	NP:	4879.97	4949.07	4948.79	4948.80	4925.89
	P:	4879.47	4948.59	4848.79		
224	NP:	7807.96	7888.63	7888.39	7888.39	7861.67
	P:	7807.96	7888.21	7888.39		

Tabla 4.1: Aproximación semiclásica para potenciales armónicos.  $WK_j$  se refiere al desarrollo de la energía fermiónica hasta orden  $j$ . Se compara el método no perturbativo en el potencial químico (NP) con el perturbativo (P). SA indica el promedio de Strutinski de la energía, y  $E_{\text{ex}}$  se refiere al resultado exacto. Todas las energías se dan en MeV. Se ha sustraído la energía de la masa en reposo de los fermiones.

donde  $\gamma$  controla el esparcimiento de los niveles. La condición de idempotencia

$$\tilde{g}_\gamma(E) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \tilde{g}_\gamma(\varepsilon) f\left(\frac{\varepsilon - E}{\gamma}\right), \quad (4.74)$$

supone una fuerte restricción sobre las distribuciones  $f$ . De hecho, para una  $\tilde{g}_\gamma$  arbitraria esta condición sólo podría satisfacerse si  $f$  fuese la distribución  $\delta$ -Dirac, y no se conseguiría suavización alguna. En la práctica se exige el cumplimiento de (4.74) para  $\tilde{g}_\gamma$  polinómicas de grado  $2M$ . Entonces, dada una función peso,  $\omega(x)$ , par y con momentos bien definidos, una  $f(x)$  de la forma

$$f(x) = P(x) \omega(x), \quad (4.75)$$

satisface (4.74) si  $P$  es un polinomio par de grado  $2M$  definido por

$$P(x) = \sum_{n=0}^M Q_{2n}(x) Q_{2n}(0), \quad (4.76)$$

donde  $Q_m(x)$  son los polinomios ortonormales asociados a  $\omega(x)$ ,

$$\int dx \omega(x) Q_m(x) Q_n(0) = \delta_{mn}. \quad (4.77)$$



A partir del número de estados promediado se define un potencial químico suavizado  $\tilde{\mu}_{\gamma M}$  ajustado al número de partículas deseado,

$$N = \int_{-\infty}^{\tilde{\mu}_{\gamma M}} dE \tilde{g}_{\gamma M}(E), \quad (4.78)$$

y una energía total suavizada,

$$\tilde{E}_{\gamma M}(\tilde{\mu}_{\gamma M}) = \int_{-\infty}^{\tilde{\mu}_{\gamma M}} dE \tilde{g}_{\gamma M}(E) E. \quad (4.79)$$

Para que el promedio tenga sentido, es decir, para filtrar las oscilaciones de  $g(E)$  debidas a las capas, el resultado debe ser lo más independiente posible del valor de  $\gamma$ . Esto nos lleva a buscar una condición de *plateau* en la dependencia de  $\tilde{E}$  en  $\gamma$  fijado  $M$ ,

$$\frac{\partial \tilde{E}_{\gamma M}}{\partial \gamma} = 0, \quad (4.80)$$

y estabilidad al aumentar  $M$ . Para que no haya problemas tienen que conocerse suficiente niveles ligados de energía por encima del nivel de Fermi. En el caso de pozos de profundidad finita el continuo puede estar demasiado cerca del último nivel ocupado con lo que no se observa un plateau sino sólo un punto de inflexión.

En nuestros cálculos hemos utilizado un peso gaussiano,  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-x^2\}$ , de modo que los polinomios ortogonales asociados son los de Hermite, y el polinomio  $P$  se escribe

$$P(x) = \sum_{n=0}^M \frac{1}{2^{2n}(2n)!} H_{2n}(x) H_{2n}(0). \quad (4.81)$$

Si para un nivel dado del espectro  $E_i$  (con degeneración  $g_i$ ) definimos  $t_i \equiv \frac{\tilde{\mu} - E_i}{\gamma}$ , tras operar en las ecs. (4.78) y (4.79) se llega a

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(t_i) + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m} m!} H_{2m-1}(t_i) \frac{e^{-t_i^2}}{\sqrt{\pi}} \right\} \\ \tilde{E}_{\gamma M} &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(t_i) \right) E_i - \frac{\gamma}{2} \frac{e^{-t_i^2}}{\sqrt{\pi}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m} m!} [(\gamma t_i + E_i) H_{2m-1}(t_i) + \gamma H_{2m-2}(t_i)] \frac{e^{-t_i^2}}{\sqrt{\pi}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (4.84)$$



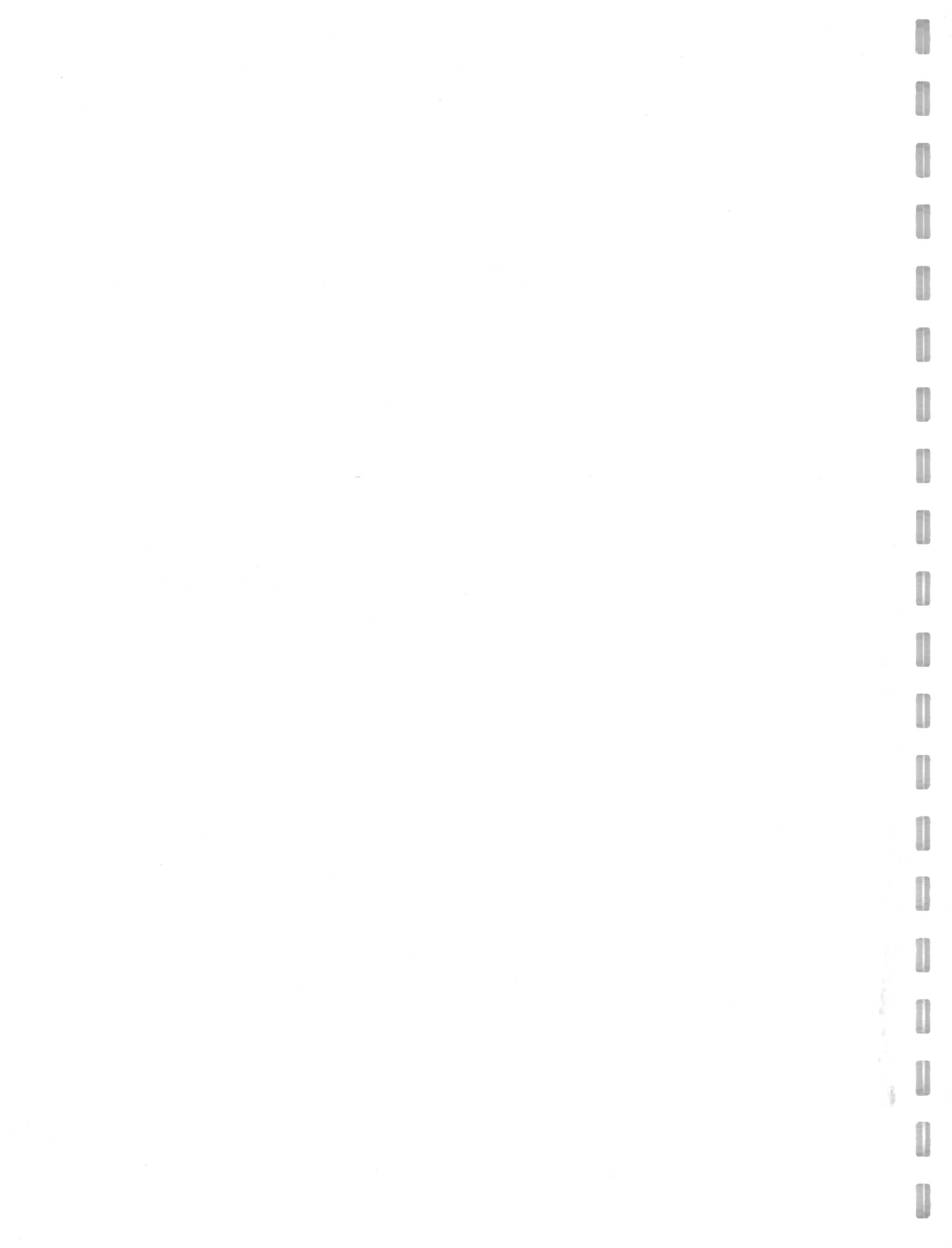
#### 4.6 Un ejemplo analítico

79

La equivalencia entre el promedio de Strutinsky y el desarrollo semiclásico fue demostrada analíticamente para el oscilador armónico no relativista [Br73]; en el caso general se pueden dar algunos argumentos semicuantitativos [Ri80].









**Parte II**  
**... en Física Nuclear Relativista**







## Capítulo 5

# Aplicación a potenciales relativistas

### 5.1 Modelo de campo medio relativista

#### 5.1.1 Introducción

La Hadrodinámica Cuántica (QHD, *Quantum Hadrodynamics*) es un modelo relativista covariante Lorentz y renormalizable en el que las partículas que constituyen el sistema son nucleones Dirac elementales (neutrones y protones) interaccionando mediante el intercambio de mesones [Se86, Re89, Se92]. Debe considerarse como una teoría efectiva a baja y media energía en el que los números cuánticos de los mesones se tiene en cuenta para establecer el tipo de acoplamiento con las densidades fermiónicas. Las mejoras del modelo incluyen términos de interacción no lineales.

Los modelos tradicionales de la estructura nuclear están basados en la ecuación de Schrödinger con interacciones nucleón–nucleón instantáneas ajustadas a datos de dispersión a dos cuerpos y a las propiedades del deuterón. Estas interacciones son típicamente repulsivas a corta distancia y atractivas a larga distancia e incorporan un término de acoplamiento espín–órbita de considerable intensidad que es particularmente importante para reproducir la estructura de capas con los números mágicos correctos. Con típicamente ocho parámetros los modelos tradicionales son tremendamente exitosos en la descripción de la estructura y dinámica nuclear a baja energía. Frente a este éxito la QHD aporta una descripción más fundamental y obvia de la interacción nuclear introduciendo la figura física del mediador. Algunas propiedades globales de la interacción nuclear, como la fuerza espín–órbita y la saturación, se obtienen con gran facilidad de incluso las versiones más sencillas de la



teoría.

Además de estos argumentos existen otros que justifican el estudio de modelos de tipo QHD. Por una parte, hay indicios [Er74, Ho81] de que la pequeñez de la energía de ligadura por nucleón (del orden de la decena de MeV) se debe a la gran cancelación de un potencial escalar con uno vectorial, cada uno de ellos de varios centenares de MeV, lo que podría suponer efectos relativistas importantes. Por otro lado para comprender y describir algunos sistemas nucleares de gran interés en los que se alcanzan grandes densidades (estrellas de neutrones, explosión de supernovas, colisión de iones pesados energéticos) no se puede prescindir de los efectos relativistas.

En lo que sigue nos vamos a centrar en el más sencillo de los modelos QHD, propuesto por Walecka en 1974; sólo incorpora nucleones, mesones  $\sigma$  y mesones  $\omega$ . Aun careciendo de elementos importantes –como la fuerza coulombiana, otros mediadores y términos no lineales– supondrá un banco de pruebas adecuado a nuestros propósitos. Además nos vamos a situar en la aproximación de campo medio, en la que los campos mesónicos son  $c$ -números y donde se omiten los efectos dinámicos de polarización del mar de Dirac. Para una descripción más detallada del modelo y de la validez de las aproximaciones consultense las referencias citadas al principio de esta introducción.

### 5.1.2 El modelo de Walecka

También conocido como QHD-I, fue introducido por Walecka en 1974 [Wa74]. Es el más sencillo de los modelos QHD: considera campos asociados a bariones (protones y neutrones), a un mesón neutro escalar ( $\sigma$ ) y a un mesón neutro vectorial ( $\omega$ ). La no incorporación de piones apenas afecta a propiedades globales debido a que sus efectos promedian prácticamente a cero, si bien deben incluirse en descripciones más elaboradas que precisan de fluctuaciones cuánticas de los campos mesónicos. La densidad lagrangiana del modelo es<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s \phi)] \Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) + \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu + \delta\mathcal{L} \\ F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \end{aligned} \tag{5.1}$$

En  $\delta\mathcal{L}$  se incluyen los contratérminos asociados a la renormalización, que nosotros no necesitaremos considerar. En la ec. (5.1)  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}$  incluye el tetraespinor del

<sup>1</sup>A partir de ahora trabajaremos en unidades  $\hbar = c = 1$



campo protónico y el del campo neutrónico,  $\phi$  se refiere al campo de la  $\sigma$  y  $V_\mu$  al campo de la  $\omega$ ,  $M$  es la masa del nucleón,  $m_s$  la de  $\sigma$  y  $m_v$  la de  $\omega$ . Por otro lado,  $g_v$  y  $g_s$  son las constantes de acoplamiento de los campos mesónicos con las densidades bariónicas.

Las ecuaciones de movimiento asociadas al lagrangiano son

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\phi = g_s \bar{\Psi} \Psi \quad (5.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \quad (5.3)$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v V_\mu) - (M - g_s \phi)] \Psi = 0. \quad (5.4)$$

La conservación de la corriente bariónica,  $B^\mu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ , y la ec. (5.3) conducen a  $\partial_\mu V^\mu = 0$ .

La resolución del sistema formado por las ecs. (5.2–5.4) es muy complicada y es necesario efectuar alguna aproximación. Dado que esperamos que las constantes de acoplamiento  $g_s$  y  $g_v$  sean grandes, no podemos recurrir a teoría de perturbaciones. En su lugar comenzamos realizando la aproximación de campo medio estático para los mesones, que consiste en sustituir los campos mesónicos por su valor esperado ( $\phi \rightarrow \phi_o \equiv \langle \phi \rangle$ ,  $V^\mu \rightarrow V_o^\mu \equiv \langle V^\mu \rangle$ ) y suponer que no hay dependencia temporal. Esta aproximación es válida cuando las fluctuaciones de los campos mesónicos sean despreciables, y esto será así cuando las densidades escalar y vectorial (fuentes de los mesones) sean grandes. Si además nos restringimos al estudio de núcleos de simetría esférica el único valor medio distinto de cero de  $V^\mu$  es  $V_o(\mathbf{r}) \equiv V_o^0(t, \mathbf{r})$ , y la densidad lagrangiana a considerar es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_o - (M - g_s \phi_o)] \Psi + \\ & - \frac{1}{2} [(\nabla \phi_o)^2 + m_s^2 \phi_o^2] + \frac{1}{2} [(\nabla V_o)^2 + m_v^2 V_o^2], \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $\phi_o(\mathbf{r})$  y  $V_o(\mathbf{r})$  son funciones  $c$ -numéricas de simetría radial que satisfacen

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - m_s^2)\phi_o(\mathbf{r}) &= -g_s \rho_s(\mathbf{r}) \equiv -g_s \langle : \bar{\Psi} \Psi : \rangle_F \\ (\nabla^2 - m_v^2)V_o(\mathbf{r}) &= -g_v \rho_B(\mathbf{r}) \equiv -g_v \langle : \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi : \rangle_F, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde  $|F\rangle$  es el estado fermiónico que se esté considerando. En la aproximación de Hartree, en la que nos situaremos,  $|F\rangle$  es un determinante de Slater de funciones de onda monoparticulares. El símbolo  $::$  representa orden normal respecto del vacío sin nucleones; en la práctica para calcularlo habría que tener en cuenta efectos dinámicos de polarización de vacío. Si se desprecian estos efectos, como haremos nosotros, las densidades escalar ( $\rho_s$ ) y bariónica ( $\rho_B$ ) definidas en las ecs. (5.6) se calculan sumando únicamente la contribución de los nucleones de energía positiva



(aproximación de valencia). El campo fermiónico del lagrangiano (5.5) satisface una ecuación de tipo Dirac,

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_o(\mathbf{r}) - (M - g_s \phi_o(\mathbf{r})) \right] \Psi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (5.7)$$

(no hay que olvidar que en esta ecuación  $\Psi$  es un campo). La resolveremos buscando modos normales de energía definida,

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \sum_n a_n \psi_{n+} e^{-iE_{n+}t} + \sum_n b_n^\dagger \psi_{n-} e^{-iE_{n-}t}, \quad (5.8)$$

donde  $a_n$  es el operador destrucción de una partícula de energía  $E_{n+}$  y  $b_n^\dagger$  es el operador creación de una antipartícula de energía  $E_{n-}$ . Los modos normales han de satisfacer la ecuación de Dirac monoparticular,

$$\begin{aligned} h \psi_{n\pm}(\mathbf{r}) &= E_{n\pm} \psi_{n\pm}(\mathbf{r}) \\ h &\equiv -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + g_v V_o + \beta(M - g_s \phi_o). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para encontrar las autofunciones asociadas definimos los número cuánticos usuales para la ecuación de Dirac radial:  $n$  (número cuántico principal),  $j$  (momento angular monoparticular),  $\kappa$  (autovalor de  $\gamma^0(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{J} - \frac{1}{2})$ ) y  $t$  (isoespín:  $t = 1/2$ , protón;  $t = -1/2$ , neutrón). De este modo las soluciones de la ec. (5.9) se escriben:

$$\begin{aligned} \psi_n(\mathbf{r}) \equiv \psi_{n\kappa m t}(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} i \frac{G_{n\kappa t}(r)}{r} \Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_{n\kappa t}(r)}{r} \Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \zeta_t \\ n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad m \in \{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm j\} \\ \kappa \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad t \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $\zeta_t$  es un biespinor de isoespín y

$$\begin{aligned} \Phi_{\kappa m}(\hat{r}) &= \sum_{m_s, m_l} C\left(\frac{1}{2}, l, j | m_s, m_l, m\right) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{m_s} \\ j &= |\kappa| - \frac{1}{2}, \quad l = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0 \\ -(\kappa + 1), & \kappa < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Calculamos los campos medios mesónicos usando la aproximación Hartree: suponemos que el estado fundamental del núcleo que consideremos se consigue llenando los orbitales más bajos completando capas hasta conseguir el número adecuado de protones y de neutrones. Llamemos  $\Omega = \Omega_P \cup \Omega_N$  al conjunto de índices asociados a



los orbitales ocupados (P: protones, N: neutrones). Las ecuaciones asociadas a la solución del problema son

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_s^2 \right) \phi_o(r) = -g_s \rho_s(r) \quad (5.12)$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_v^2 \right) V_o(r) = -g_v \rho_B(r) \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dr} G_\alpha + \frac{k}{r} G_\alpha(r) - [E_\alpha - g_v V_o(r) + M - g_s \phi_o(r)] F_\alpha(r) = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{d}{dr} F_\alpha - \frac{k}{r} F_\alpha(r) + [E_\alpha - g_v V_o(r) - M + g_s \phi_o(r)] G_\alpha(r) = 0 \quad (5.15)$$

$$\int_0^\infty dr (|G_\alpha(r)|^2 + |F_\alpha(r)|^2) = 1, \quad (5.16)$$

donde las densidades se calculan mediante

$$\left. \begin{array}{l} \rho_B(\mathbf{r}) \\ \rho_s(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \equiv \sum_{\alpha \in \Omega} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \begin{Bmatrix} \gamma_0 \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix} \psi_\alpha(\mathbf{r}) \\ = \sum_{\alpha \in \Omega} \frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} (|G_\alpha(r)|^2 \pm |F_\alpha(r)|^2). \quad (5.17)$$

La energía del sistema se puede descomponer en una parte fermiónica y otra bosónica

$$E = E_F + E_B \quad (5.18)$$

$$E_F = \sum_{\alpha \in \Omega} (2j_\alpha + 1) E_\alpha \quad (5.19)$$

$$E_B = \frac{1}{2} \int d^3x [(\nabla \phi_o)^2 + m_s^2 \phi_o^2] - \frac{1}{2} \int d^3x [(\nabla V_o)^2 + m_v^2 V_o^2] \quad (5.20)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 [g_s \rho_s(r) - g_v \rho_B(r)]. \quad (5.21)$$

La última ecuación es una particularización del teorema del virial, y puede ser demostrada fácilmente a partir de las ecs. (5.12) y (5.13). Nótese que la energía bosónica no es definida positiva. En este sentido las ecuaciones de movimiento (5.12-5.16) representan un extremal del funcional  $E$ . Un tratamiento canónico más elaborado lleva a la conclusión de que la energía  $E$  representa el valor esperado del Hamiltoniano cuántico siempre y cuando se satisfagan las ecuaciones de movimiento.

### 5.1.3 Resolución numérica

Las ecs. (5.12-5.17) constituyen un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales acopladas que ha de resolverse de forma autoconsistente. En nuestros cálculos



comenzamos proponiendo un  $\phi_o$  y un  $V_o$  de tipo Woods–Saxon y con las ecs. (5.14–5.17) se obtiene las funciones  $F_\alpha^{(0)}$ ,  $G_\alpha^{(0)}$ ,  $\rho_s^{(0)}$  y  $\rho_B^{(0)}$ . A partir de estas dos últimas y junto con las ecs. (5.12) y (5.13) se consiguen  $\phi_o^{(1)}$  y  $V_o^{(1)}$ , repitiéndose el proceso hasta que se alcanza la consistencia. Para integrar las ecuaciones diferenciales (5.14) y (5.15) se ha usado un método Runge–Kuta de cuarto orden; se integró desde una corta distancia (0.05 fm) y desde una grande (12 fm) exigiendo para fijar los autovalores continuidad en la derivada logarítmica en un punto intermedio. En concreto nuestra discretización tenía 512 puntos. Las condiciones asintóticas se fijaron suponiendo  $\phi_o^{(n)}$  y  $V_o^{(n)}$  constantes a corta distancia y nulas a grandes, de modo que

$$\begin{aligned}
 r \ll R, \quad \kappa > 0, \quad G &= \beta r^{\kappa+1}; \\
 F &= \beta \frac{2\kappa+1}{E-g_v V_o + M-g_s \phi_o} r^\kappa \\
 \kappa < 0, \quad G &= \beta \frac{-2\kappa+1}{M-g_s \phi_o - E+g_v V_o} r^{-\kappa}; \\
 F &= \beta r^{-\kappa+1} \\
 \\
 r \gg R, \quad \kappa > 0, \quad G &= \gamma e^{-x} \sum_{n=0}^{\kappa} a_n(\kappa) x^{-n}; \\
 F &= \frac{\gamma}{E+M} \frac{1}{r} e^{-x} \sum_{n=0}^{\kappa} (\kappa - x - n) a_n(\kappa) x^{-n} \quad (5.22) \\
 \\
 \kappa < 0, \quad G &= \frac{\gamma}{M-E} \frac{1}{r} e^{-x} \sum_{n=0}^{-\kappa} (-\kappa - x - n) a_n(-\kappa) x^{-n}; \\
 F &= \gamma e^{-x} \sum_{n=0}^{-\kappa} a_n(-\kappa) x^{-n}
 \end{aligned}$$

$$x \equiv \sqrt{M^2 - E^2} r$$

$$a_0(\kappa) \equiv 1; \quad a_n(\kappa) \equiv \frac{\kappa(\kappa+1) - n(n-1)}{2n} a_{n-1}(\kappa), \quad n > 0.$$

Para integrar las ecs. (5.12) y (5.13) hemos utilizado la función de Green del operador diferencial asociado [Ho81]

$$\begin{aligned}
 D(r, r'; m_i) &= -\frac{1}{m_i r r'} \sinh(m_i r_{<}) e^{-m_i r_{>}} \\
 \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_i^2 \right] D(r, r'; m_i) &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r'), \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

que asegura en los potenciales caída exponencial para  $r$  grande y derivada nula para  $r$  pequeña. Las integrales se han realizado a través del método de Simpson.

Hemos considerado que se ha alcanzado autoconsistencia cuando la energía bosónica (calculada con la ec. (5.21)) de un paso al siguiente cambiaba un factor menor que



$10^{-5}$ . En esas condiciones, los teoremas de virial asociados se satisfacían con un error relativo entre  $10^{-4}$  y  $10^{-5}$  (obviamente, hablamos de antes de integrar las ecs. (5.12) y (5.13)), lo que confirma la validez de la autoconsistencia.

#### 5.1.4 Ajuste de parámetros

Los parámetros de los modelos QHD no se suelen ajustar a las propiedades físicas de la dispersión  $NN$  debido a la laboriosidad del estudio de este proceso en dicha teoría. En su lugar se utilizan las propiedades de materia nuclear complementadas con la de algún observable en núcleos finitos, o bien se realiza una regresión de algunas propiedades nucleares para distintos núcleos [Re89]. Dado que el modelo utilizado, QHD-I, carece de importantes elementos físicos (fotones, mesones  $\pi$ , mesones  $\rho$ , etc.), y dado que estamos interesados en él para utilizar los potenciales que se obtengan como banco de pruebas para la aproximación semiclásica, no hemos realizado un estudio detallado de los resultados de distintos tipos de ajuste. Por sencillez hemos optado por el ajuste de Serot [Se92, Ho81] (véase la sección 6.6)

$$C_s^2 \equiv g_s^2 \frac{M^2}{m_s^2} = 357.4, \quad C_v^2 \equiv g_v^2 \frac{M^2}{m_v^2} = 273.8, \quad (5.24)$$

que reproduce las propiedades de materia nuclear en equilibrio con momento de Fermi  $K_F = 1.30 \text{ fm}^{-1}$  y energía de ligadura por nucleón  $B/A = 15.75 \text{ MeV}$ . Si además suponemos fijadas la masa del nucleón y del mesón  $\omega$ ,

$$M = 939 \text{ MeV}, \quad m_v \equiv m_\omega = 783 \text{ MeV}, \quad (5.25)$$

sólo nos queda por ajustar el parámetro  $m_s$ . Para fijarlo exigimos que el modelo reprodujera el radio de carga cuadrático medio del  $^{40}\text{Ca}$  (3.482 fm [Si71]) con lo que el conjunto de parámetros quedó fijado según la tabla 5.1.

QHD-I			
$M = 939 \text{ MeV}$	$m_s = 449.7 \text{ MeV}$	$g_s = 9.0547$	
	$m_v = 783 \text{ MeV}$	$g_v = 13.7997$	

Tabla 5.1: *Parámetros del modelo QHD-1*

Con estos parámetros se aplicó el modelo a distintos núcleos de doble capa cerrada o semicerrada (tabla 5.2, datos experimentales en [Ja74, Va72, Wa88a]). Vemos que el modelo es aceptable como *primera* aproximación a la estructura nuclear,



pero que está lejos de reproducir con precisión las propiedades estudiadas. El aspecto de los espectros (figuras 5.1 y 5.2) muestra la estructura de capas típica de acoplamiento espín-órbita intenso, que surge aquí de forma natural y con el signo correcto debido a la cancelación entre los potenciales escalar y vectorial. En las figuras 5.3 y 5.4 aparecen algunos de los potenciales autoconsistentes obtenidos. Las figuras 5.5 y 5.6 contienen gráficas de las densidades que se obtuvieron.

$\frac{A}{Z}X$	QHD-I		Woods-Saxon		Exp.	
	B/A	r.c.c.	B/A	r.c.c.	B/A	r.c.c.
$^{12}_6\text{C}$	1.81	2.69	1.77	2.69	7.68	2.45
$^{14}_6\text{C}$	2.51	2.70	2.53	2.70	7.52	2.56
$^{16}_8\text{O}$	3.33	2.84	3.38	2.83	7.98	2.73
$^{40}_{20}\text{Ca}$	6.27	3.48*	6.22	3.48	8.55	3.48
$^{48}_{20}\text{Ca}$	6.50	3.47	6.34	3.49	8.67	3.47
$^{56}_{28}\text{Ni}$	7.23	3.72	7.00	3.73	8.64	
$^{90}_{40}\text{Zr}$	8.35	4.22	8.10	4.21	8.71	4.27
$^{132}_{50}\text{Sn}$	8.80	4.60	8.58	4.63	8.36	
$^{208}_{82}\text{Pb}$	9.83	5.34	9.59	5.37	7.87	5.50

Tabla 5.2: Comparación del radio de carga cuadrático medio (r.c.c., en fm) y de la energía de ligadura por nucleón (B/A, en MeV) del modelo QHD-I con la aproximación Woods-Saxon de los potenciales autoconsistentes y con los datos experimentales (Exp.). El valor experimental del r.c.c. del  $^{40}\text{Ca}$  (\*) se usó para ajustar los parámetros de QHD-I.

### 5.1.5 Regresión Woods-Saxon de los potenciales autoconsistentes

Como vimos anteriormente las fórmulas semiclásicas requieren ciertas precauciones si se va a órdenes suficientemente altos en  $\hbar$ . La utilización de la prescripción (4.62) en las ecuaciones de la aproximación semiclásica proporciona resultados finitos a cualquier orden del desarrollo; sin embargo dicha prescripción no es adecuada para realizar cálculos numéricos. En su lugar vamos a utilizar otra técnica de cálculo manifiestamente finita que expondremos en la sección siguiente y que será válida para potenciales centrales de expresión conocida en cierto contorno complejo.

Dada una curva en el plano complejo, se nos ocurren dos formas inmediatas de conocer los potenciales relativistas sobre la misma. La primera sería resolver



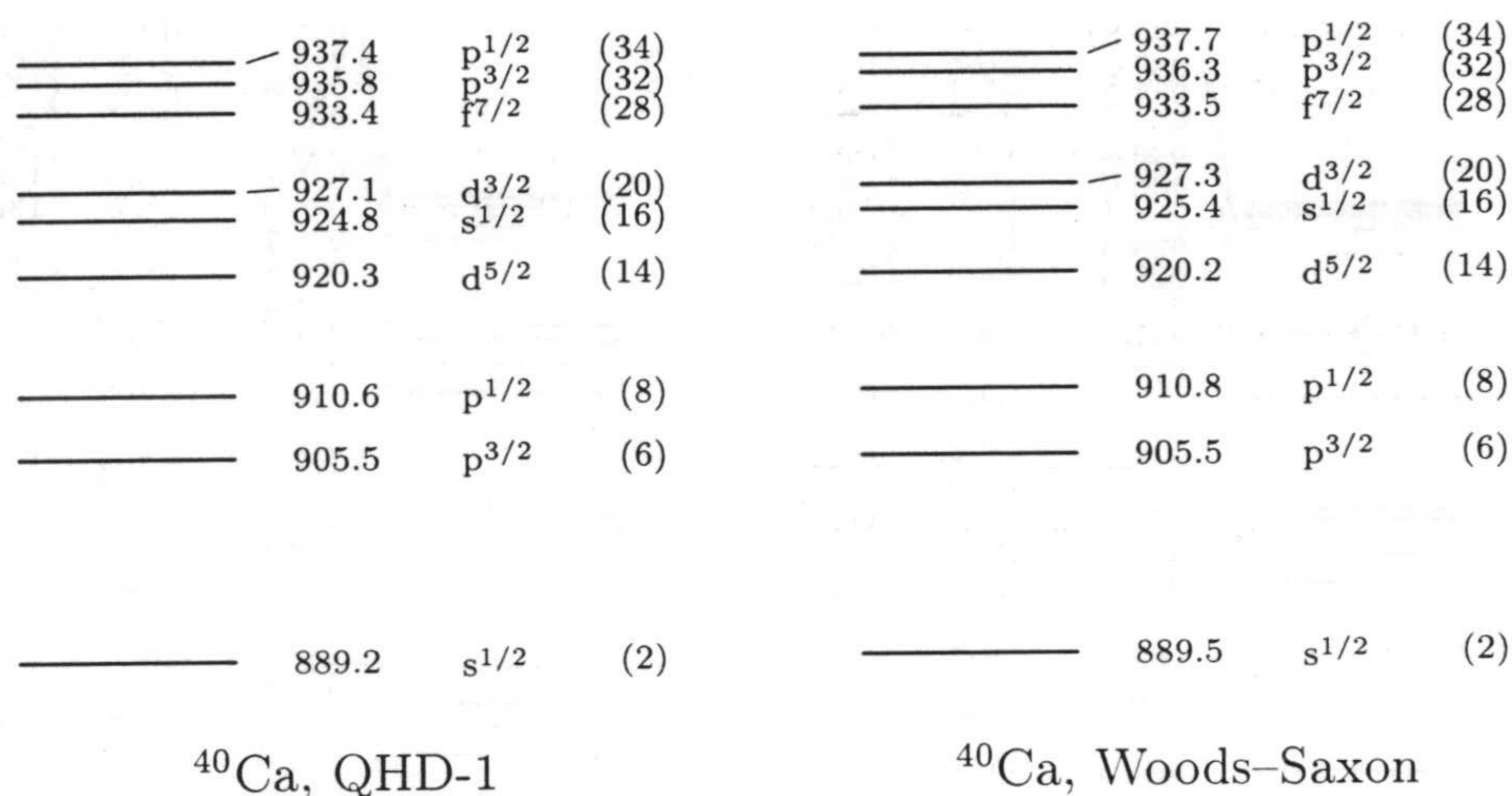


Figura 5.1: Espectro fermiónico (en MeV) para el núcleo  $^{40}\text{Ca}$  en el modelo QHD-I y en la regresión Woods-Saxon de los potenciales autoconsistentes. El modelo proporciona automáticamente la estructura de capas propia de acoplamiento espín-órbita intenso que da lugar a los números mágicos correctos.

las ecuaciones diferenciales directamente sobre la curva. La segunda consistiría en extender analíticamente la forma funcional de los potenciales desde el eje real al plano complejo, proceso trivial si se tiene una expresión analítica de los mismos.

Para simplificar al máximo el problema vamos a utilizar el segundo procedimiento, y para ello vamos a aproximar los potenciales autoconsistentes QHD-I por potenciales de tipo Woods-Saxon. De ese modo los potenciales nucleares que usaremos en la aproximación semiclásica incorporan aproximaciones en dos sentidos: a) provienen de aproximar potenciales autoconsistentes a curvas Woods-Saxon, b) además los potenciales autoconsistentes se han obtenido de un modelo extremadamente simplificado (QHD-I).

Así, dados unos potenciales,  $U_V(r) = g_v V(r)$  y  $U_\phi(r) = g_s \phi(r)$ , obtenidos en el proceso de autoconsistencia Hartree, los parametrizaremos mediante curvas Woods-Saxon

$$\tilde{U} = \frac{U_o}{1 + \exp\left\{\frac{r-R_o}{a_o}\right\}} \quad (5.26)$$

sin más que minimizar

$$\chi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\tilde{U}(r_i) - U(r_i))^2}{N}} \quad (5.27)$$



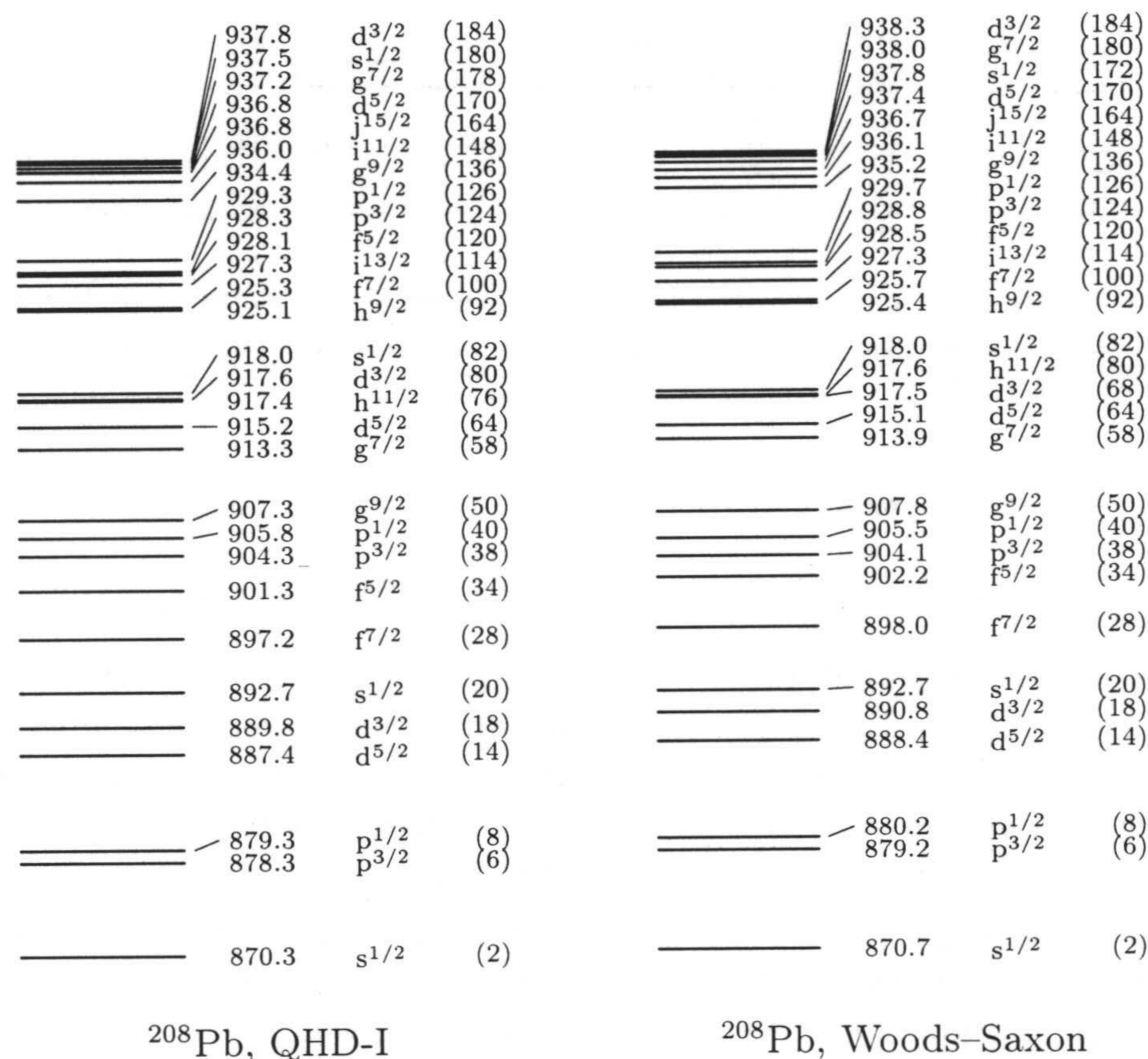


Figura 5.2: *Idem.* que figura anterior para el <sup>208</sup>Pb.

En la práctica usamos 49 puntos equidistantes entre 0.05 fm y 12 fm. Las parametrizaciones que conseguimos se encuentran recogidas en la tabla 5.3. Para los potenciales Woods-Saxon los teoremas del virial se cumplen típicamente con un error del 0.3%. La energía de ligadura asociada se indica en la tabla 5.2. En las figuras 5.1 y 5.2 se comprueba la validez de la aproximación para el <sup>40</sup>Ca y el <sup>208</sup>Pb.

A modo de ejemplo, para el ajuste del <sup>40</sup>Ca se tiene  $\chi_\phi = 5.19$  MeV y  $\chi_V = 5.76$  MeV mientras que para el <sup>208</sup>Pb se obtuvo  $\chi_\phi = 1.94$  MeV y  $\chi_V = 1.99$  MeV (ec. (5.27), tabla 5.3). Las figuras 5.3 y 5.4 contienen los potenciales autoconsistentes y los aproximados para estos núcleos. En las figuras 5.1 y 5.2 se estudian comparativamente los espectros fermiónicos del modelo QHD-I y su aproximación mediante potenciales Woods-Saxon. Por último, en las figuras 5.5 y 5.6 se muestran las densidades obtenidas en ambos modelos.

Es a los potenciales Woods-Saxon de la tabla 5.3 a los que les vamos a aplicar



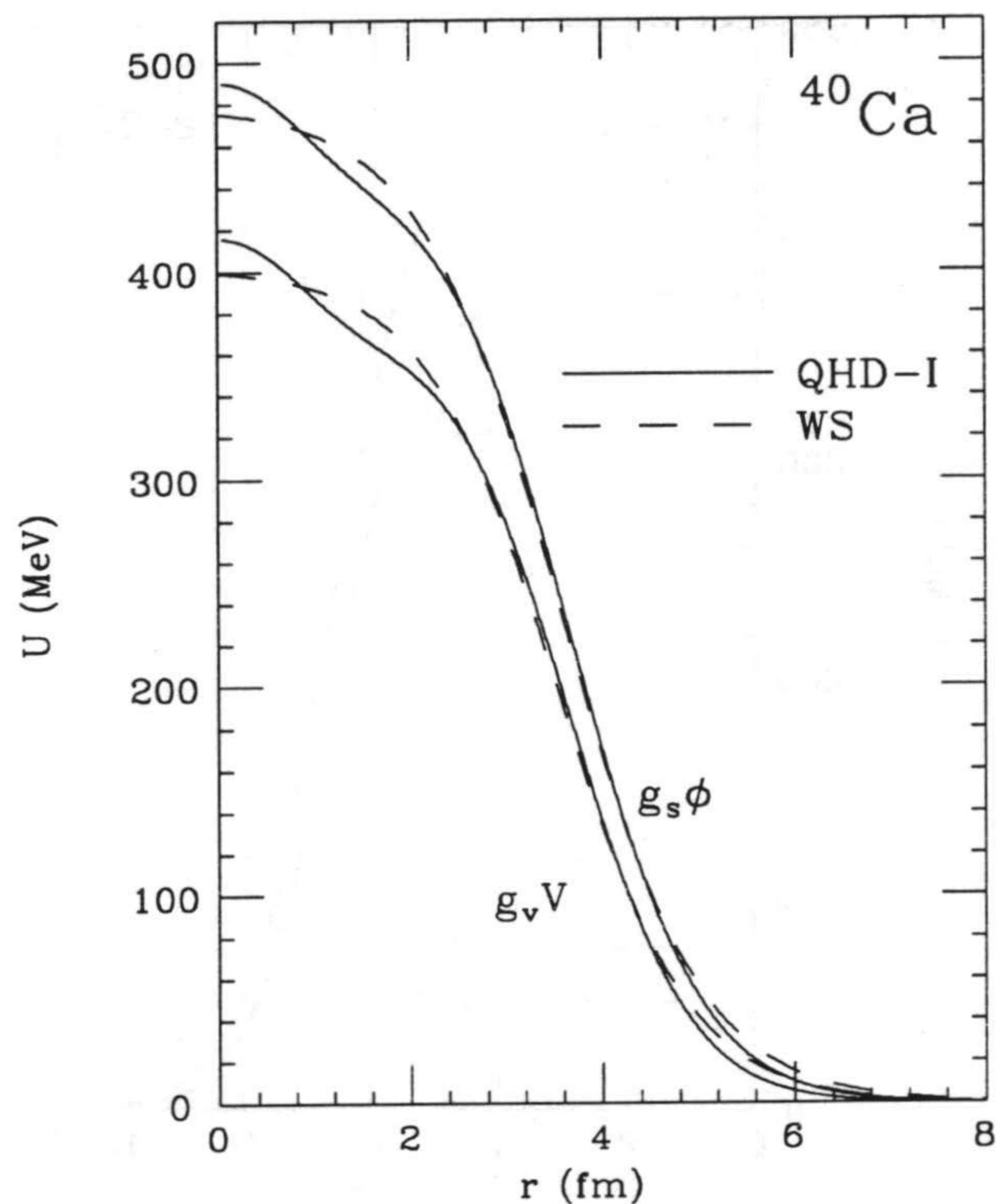


Figura 5.3: Potencial vectorial y escalar para el  $^{40}\text{Ca}$ . La línea continua se usa para el caso autoconsistente en el modelo QHD-I, y la discontinua para la regresión Woods-Saxon (WS) de los potenciales autoconsistentes.

la aproximación semiclásica.

## 5.2 Aplicación del desarrollo semiclásico relativista a potenciales Woods-Saxon

### 5.2.1 Introducción

En la sección anterior hemos aplicado el modelo QHD-I en la aproximación de campo medio, sin efectos dinámicos de polarización de vacío y a nivel Hartree a distin-



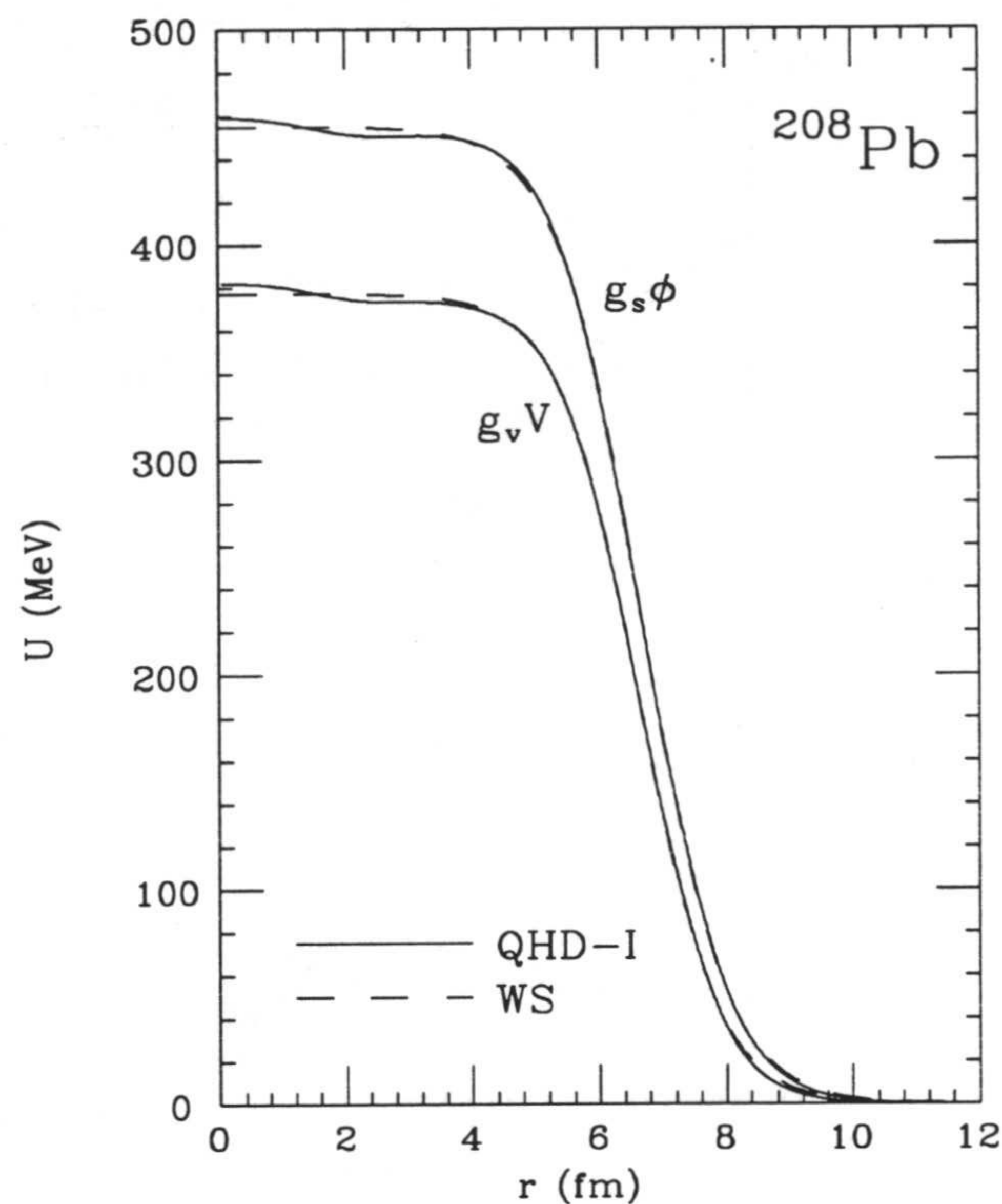


Figura 5.4: Potencial vectorial y escalar para el  $^{208}\text{Pb}$ .

tos núcleos de doble capa cerrada o pseudocerrada y a lo largo de toda la tabla de isótopos. Posteriormente, para simplificar el cálculo numérico que abordamos ahora, hemos aproximado los potenciales nucleares obtenidos en el proceso de autoconsistencia a los potenciales de tipo Woods-Saxon de la tabla 5.3. Comparando los hamiltonianos (4.1) y (5.9) comprobamos que para aplicar las ecuaciones del capítulo 4 hay que identificar

$$V(\mathbf{r}) = U_V(\mathbf{r}) \simeq g_V V_o(\mathbf{r}) \quad (5.28)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = M - U_\Phi(\mathbf{r}) \simeq M - g_s \phi_o(\mathbf{r}). \quad (5.29)$$

En lo que respecta a la aproximación semiclásica nos vamos a centrar en la parte fermiónica de la energía de ligadura, comparándola con la asociada al problema Woods-Saxon exacto. Posteriormente compararemos con el promedio de Strutinsky



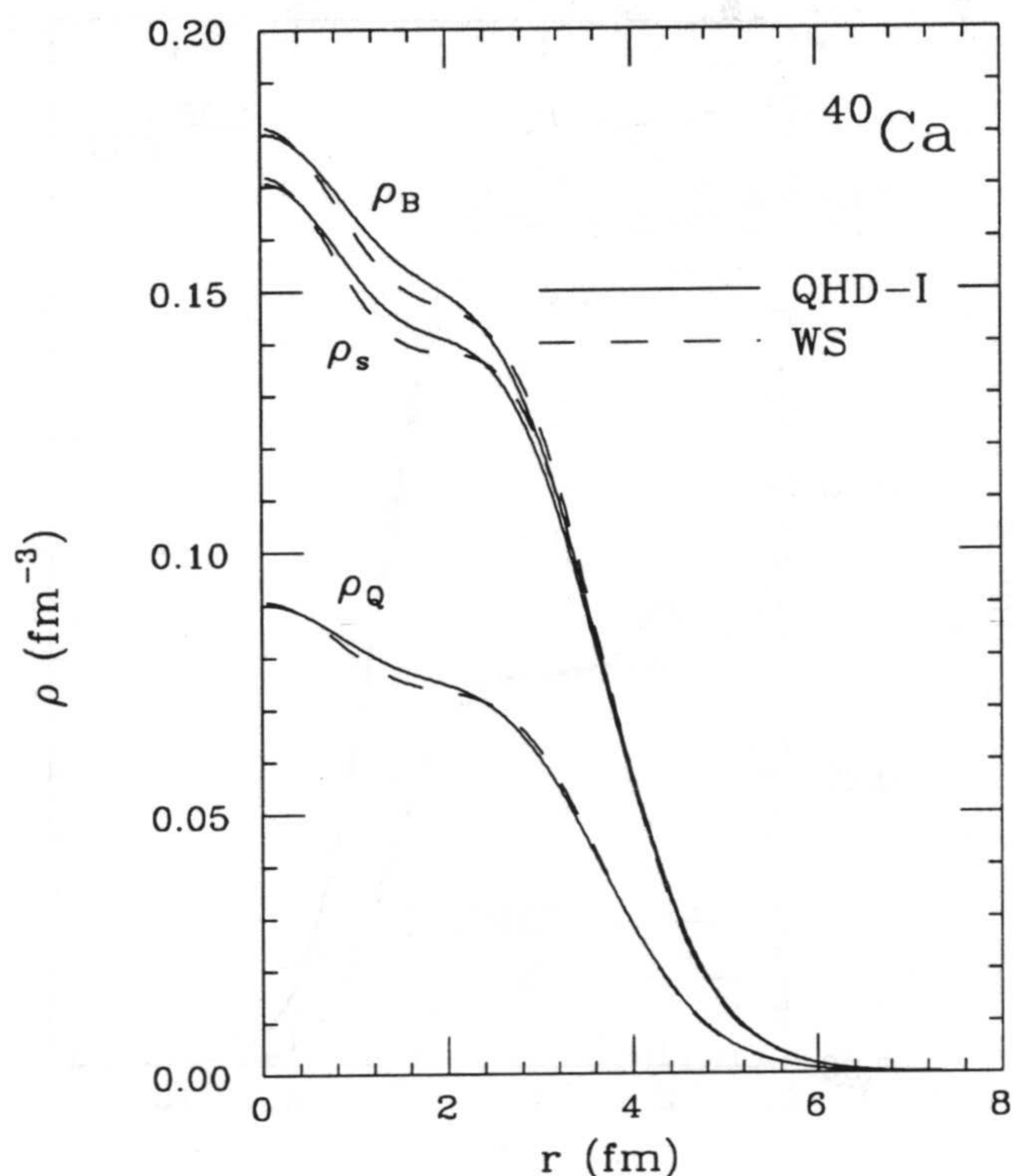


Figura 5.5: Densidad bariónica ( $\rho_B$ ), escalar ( $\rho_s$ ) y de carga ( $\rho_Q$ ) para el  $^{40}\text{Ca}$ . La línea continua se usa para el caso autoconsistente en el modelo QHD-I, y la discontinua para el caso con potenciales Woods–Saxon (WS).

en algunos núcleos concretos.

### 5.2.2 Cálculo numérico de la aproximación semiclásica; tratamiento de las divergencias

Para aplicar la aproximación semiclásica a distintos órdenes, hemos seguido el esquema perturbativo indicado en la sección 2.5 (ecs. (2.64) y (2.68)) para cada familia de fermiones (protones y neutrones). Puesto que nos ocupamos de un problema relativista con potenciales centrales, para calcular el desarrollo semiclásico del número de partículas y de la energía total hemos integrado a todo el espacio las densidades



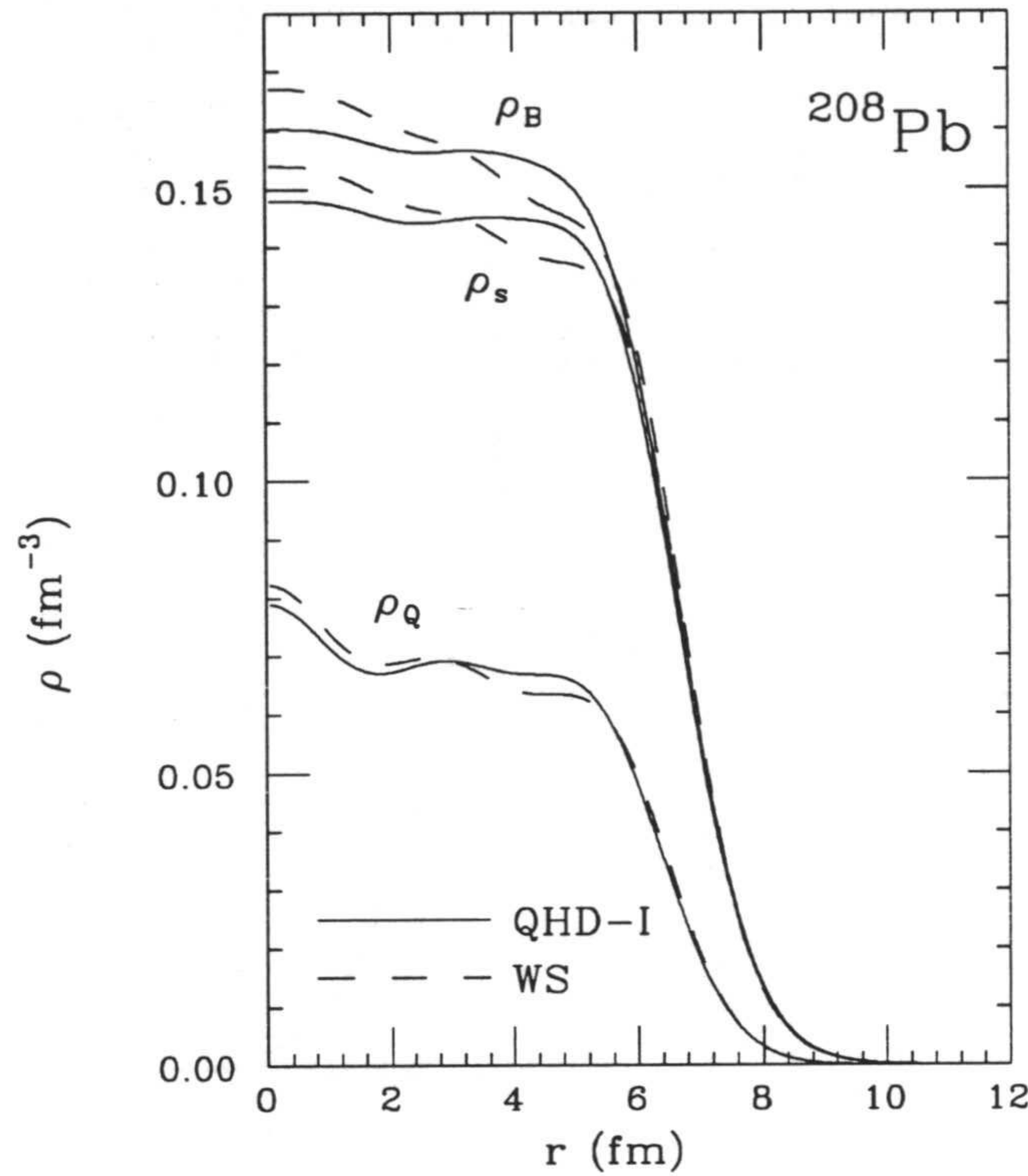


Figura 5.6: Densidad bariónica ( $\rho_B$ ), escalar ( $\rho_s$ ) y de carga ( $\rho_Q$ ) para el  $^{208}\text{Pb}$ .

correspondientes (apéndice C) particularizadas al caso radial.

Así pues, para cada núcleo se trabaja con dos potenciales químicos distintos, uno referido a protones y el otro a neutrones. El orden cero de dichos potenciales químicos se encuentra resolviendo una ecuación trascendente. Una vez fijado el orden cero del potencial químico para cada familia de fermiones,

$$\begin{aligned} N_0^+(\mu_0^Z) &= Z \\ N_0^+(\mu_0^N) &= N, \end{aligned} \quad (5.30)$$

los distintos órdenes de la energía fermiónica correspondiente se encuentran de forma aditiva sin necesidad de hallar la raíz de ninguna ecuación más (ec. (2.68)); esto es ventajoso porque, como ya hemos indicado, el cálculo de  $N_m^+$  y  $E_m^+$  se va complicando sustancialmente al aumentar el orden de la aproximación.



$\frac{A}{Z}X$	$U_o$	$R_o$	$a_o$	$\chi$	
$^{12}_6C$	$V$ :	390.8	2.126	0.6271	0.93
	$\phi$ :	474.1	2.100	0.6790	1.15
$^{14}_6C$	$V$ :	365.7	2.374	0.6082	1.06
	$\phi$ :	443.2	2.356	0.6632	1.14
$^{16}_8O$	$V$ :	343.8	2.630	0.5602	2.33
	$\phi$ :	415.4	2.624	0.6156	2.16
$^{40}_{20}Ca$	$V$ :	401.5	3.518	0.6831	5.76
	$\phi$ :	478.8	3.550	0.7175	5.19
$^{48}_{20}Ca$	$V$ :	386.7	3.880	0.6074	5.35
	$\phi$ :	464.5	3.902	0.6458	4.52
$^{56}_{28}Ni$	$V$ :	379.2	4.175	0.5265	4.97
	$\phi$ :	457.9	4.190	0.5698	4.57
$^{90}_{40}Zr$	$V$ :	374.0	4.954	0.5752	5.28
	$\phi$ :	452.2	4.973	0.6193	5.21
$^{132}_{50}Sn$	$V$ :	371.7	5.685	0.5745	1.86
	$\phi$ :	449.6	5.712	0.6151	2.88
$^{208}_{82}Pb$	$V$ :	377.0	6.634	0.6200	1.99
	$\phi$ :	455.0	6.669	0.6571	1.94

Tabla 5.3: Aproximación de los potenciales autoconsistente QHD-I por curvas Woods-Saxon.  $U_o$  y  $\chi$  se dan en MeV;  $R_o$  y  $a_o$  en fm.

Las integrales radiales empleadas en el cálculo no contienen los términos distributivos de la esfera de retroceso, y efectuadas directamente en el eje real conducen a resultados divergentes en el orden 4 (y en el orden 2 si no se utiliza integración por partes). Para reintroducir dichos términos distributivos se puede usar la prescripción (4.62). Las derivadas  $\partial_{\Phi^2}^n$  que aparecen se pueden intercambiar con el signo integral utilizando un parámetro extra  $\lambda$  que al final del cálculo desaparecerá (ec. (4.52)). En definitiva hay que tratar con expresiones del tipo  $(\partial_{\lambda^2}^n I(\lambda))_{\lambda=0}$  con

$$I(\lambda) = \int dr f(r, \lambda) \Theta \left( \mu - V(r) - \sqrt{\Phi(r)^2 + \lambda^2} \right)$$

$$f(r, \lambda) \equiv g(\Phi, V, r) \sqrt{(\mu - V(r))^2 - \Phi(r)^2 - \lambda^2}, \quad (5.31)$$

donde  $g(\Phi, V, r)$  es una función radial que depende de  $\Phi$ ,  $V$  y sus derivadas evaluadas en  $r$ . Para los potenciales típicos de la física nuclear la integral (5.31) se extiende desde  $r = 0$  hasta un radio de retroceso  $r_c(\lambda)$  que satisface

$$\mu - V(r_c(\lambda)) = \sqrt{\Phi(r_c(\lambda))^2 + \lambda^2}. \quad (5.32)$$



Supongamos que la función  $g$  es analítica en una zona del plano complejo de la variable  $r$  que incluya el intervalo de integración, y escojamos el corte de rama de la función raíz cuadrada en el semieje real positivo:

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \arg\{z\}/2}, \quad \arg\{z\} \in [0, 2\pi[. \quad (5.33)$$

En ese caso, en el integrando de  $I(\lambda)$  el corte de rama en el plano complejo de la variable  $r$  se extiende por el eje real desde el punto de retroceso hasta  $-\infty$  (figura 5.7).

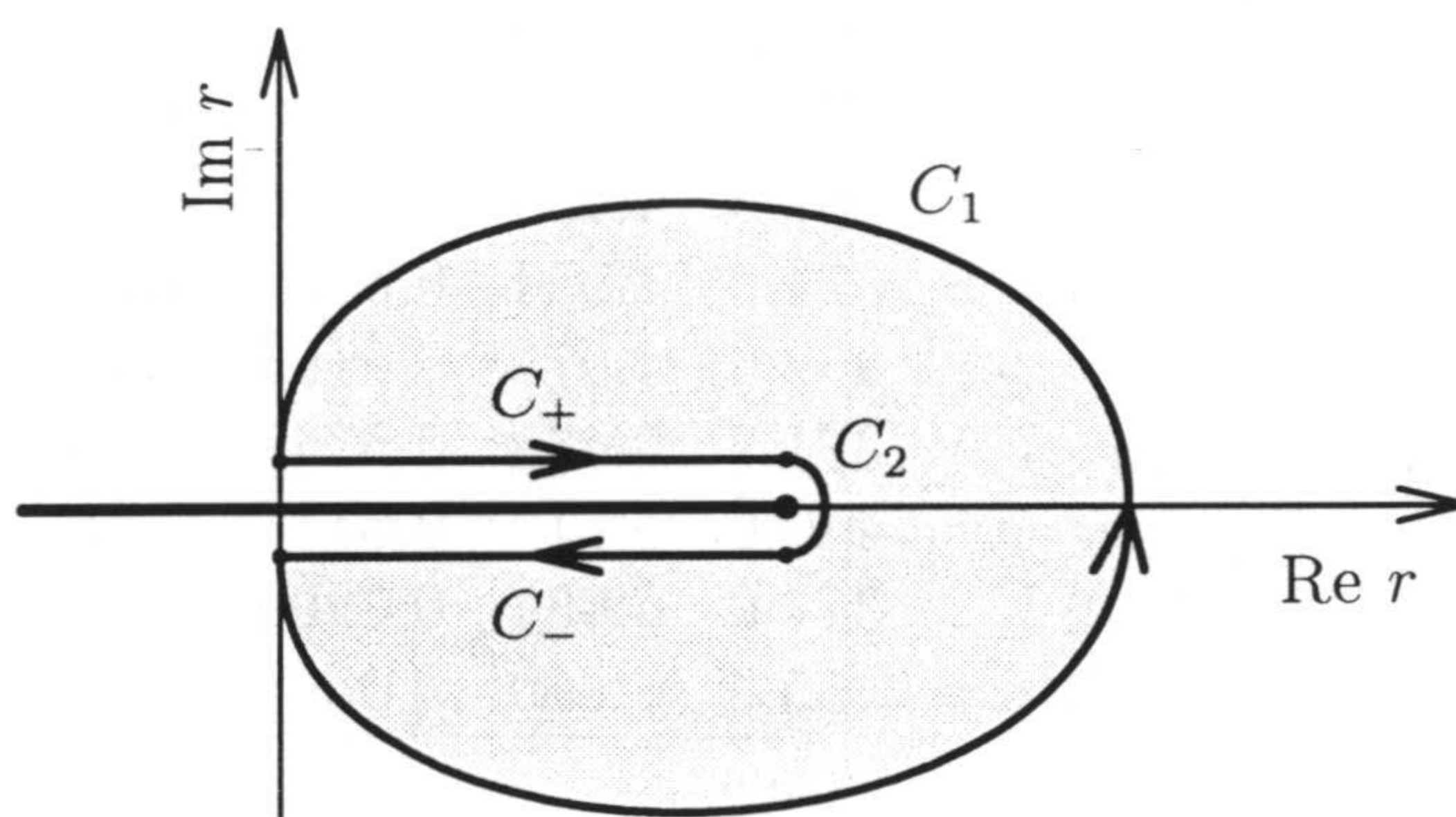


Figura 5.7: Regularización de las divergencias radiales; el punto de ramificación es  $r_c(\lambda)$ .

La integral  $I(\lambda)$  deseada ha de calcularse sobre la línea  $C_+$ , pero por la elección del corte de rama en la función raíz cuadrada esta integral coincide con la efectuada sobre la línea  $C_-$ . Por otra parte, la integración sobre  $C_2$  es nula (la curva se puede hacer tan pequeña como se quiera) si  $g$  no es singular en las cercanías del punto de retroceso. Si el integrando,  $f(r, \lambda)$ , es analítico en el interior del contorno cerrado  $C_+ \cup C_2 \cup C_- \cup C_1$  (zona sombreada de la figura 5.7), se puede aplicar el teorema de los residuos para llegar a

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_{C_+ \cup C_-} dz f(z, \lambda) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{C_1} dz f(z, \lambda). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Al calcular esta integral no nos acercamos al punto de retroceso, de modo que se pueden realizar las derivadas respecto de  $\lambda$  antes de la integración sin derivar la



función paso; los términos distributivos asociados tienen contribución nula en el contorno  $C_1$ ,

$$(\partial_{\lambda^2}^n I(\lambda))_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \int_{C_1} dz g(\Phi, V, z) \left( \partial_{\Phi^2}^n \sqrt{(\mu - V)^2 - \Phi^2} \right). \quad (5.35)$$

Esta prescripción es la que usaremos para dar significado finito unívoco a las ecuaciones radiales derivadas de la integración a todo el espacio de las densidades del apéndice C cuando los potenciales son centrales (el mismo truco puede emplearse cuando, en lugar de la raíz cuadrada, aparece un logaritmo neperiano).

Para comprobar si la línea  $C_1$  ha cruzado o no alguna singularidad no prevista, además de las técnicas analíticas usuales, podemos comparar la integral (5.31) (que no incluye términos distributivos) sobre el eje real y sobre el contorno  $C_1$  (ec. (5.34)). En el caso en que sus valores no coincidan podemos deformar el contorno apropiadamente para excluir singularidades.

Un modo alternativo de eludir el problema de las distribuciones es el siguiente. Bajo el signo integral se cumple la siguiente igualdad:

$$\partial_{\lambda^2} f[p(r)^2 - \lambda^2] = -\frac{1}{2p} \frac{1}{(\nabla p)^2} (\nabla p) \cdot (\nabla f[p(r)^2 - \lambda^2]) = -\frac{f'}{(p^2)'} \quad (5.36)$$

donde las primas indican derivación respecto a la coordenada radial. Tomando  $f = \sqrt{p(r)^2 - \lambda^2} \Theta(\sqrt{p(r)^2 - \lambda^2})$  e integrando por partes, se obtiene

$$\partial_{\lambda^2} I(\lambda) = -\int_0^R dr \frac{g}{2\sqrt{p^2 - \lambda^2}} + \int_R^{r_c} dr \left( \frac{g}{(p^2)'} \right)' \sqrt{p^2 - \lambda^2} + \frac{g\sqrt{p^2 - \lambda^2}}{(p^2)'} \Big|_{r=R} \quad (5.37)$$

donde  $r_c(\lambda)$  representa el punto de retroceso, y  $R$  es cualquier radio entre el origen y el punto de retroceso escogido de modo que los puntos críticos de  $p^2$  quedan fuera del dominio de integración de la segunda integral. Con estas consideraciones, se puede tomar el límite  $\lambda \rightarrow 0$  directamente en la ecuación anterior. Esta fórmula se puede generalizar a cualquier orden de derivadas respecto a  $\lambda^2$ . Además se puede aplicar si los potenciales sólo se conocen en un retículo. Hemos comprobado la estabilidad explícita del resultado ante cambios en  $R$ , aunque se espera que haya problemas numéricos si el orden de las derivadas es demasiado grande o si  $R$  se acerca a la zona de retroceso grande.

### 5.2.3 Resultados numéricos

Hemos aplicado la aproximación semiclásica a los potenciales de tipo Woods-Saxon de la tabla 5.3. Los resultados numéricos se encuentran recogidos en la tabla 5.4,



donde, además de la aproximación semiclásica, se muestra el resultado cuántico para los potenciales Woods–Saxon y el promedio de Strutinsky de la energía allí donde puede calcularse sin dificultades, es decir, cuando el número de estados ligados por encima del nivel de Fermi es suficientemente grande como para que aparezca un plateau al aumentar la anchura de los niveles.

		WK <sub>0</sub>	WK <sub>2</sub>	WK <sub>4</sub>	WS	SA
<sup>12</sup> C	$\pi, \nu$	-98.23	-99.86	-100.55	-99.08	
<sup>14</sup> C	$\pi$	-112.7	-113.1	-113.3	-112.5	
	$\nu$	-124.2	-126.0	-126.0	-128.3	
<sup>16</sup> O	$\pi, \nu$	-143.4	-143.9	-143.4	-146.6	
<sup>40</sup> Ca	$\pi, \nu$	-467.5	-475.2	-473.9	-476.4	
<sup>48</sup> Ca	$\pi$	-554.1	-561.2	-559.4	-562.0	
	$\nu$	-625.2	-639.0	-636.9	-639.1	
<sup>56</sup> Ni	$\pi, \nu$	-735.1	-749.0	-746.5	-751.0	
<sup>90</sup> Zr	$\pi$	-1182	-1196	-1193	-1193	-1193
	$\nu$	-1282	-1303	-1300	-1309	
<sup>132</sup> Sn	$\pi$	-1709	-1722	-1719	-1728	-1720
	$\nu$	-2060	-2097	-2092	-2106	
<sup>208</sup> Pb	$\pi$	-2848	-2868	-2864	-2878	-2866
	$\nu$	-3346	-3395	-3391	-3407	

Tabla 5.4: *Desarrollo semiclásico de la energía fermiónica. En WK<sub>j</sub> se incluyen correcciones a la energía hasta orden j. En la columna WS se encuentra el resultado Woods–Saxon exacto y en la SA el promedio de Strutinsky. Todas las energías se dan en MeV.  $\pi$  y  $\nu$  se refieren, respectivamente, a los subsistemas de protones y de neutrones.*

La tabla 5.4 nos muestra que el desarrollo semiclásico para los potenciales que hemos estudiado es, por lo general, rápidamente convergente. A excepción del caso <sup>16</sup>O, donde el orden cuarto es del mismo orden que el segundo, se observa que la contribución del cuarto orden es la mitad o menos que la del segundo orden. Se observa también que la convergencia mejora cuando el núcleo se hace más pesado. Por otra parte, se comprueba que el desarrollo semiclásico converge al promedio de Strutinsky cuando éste ha podido ser calculado.



## Capítulo 6

# Mar de Dirac en Física Nuclear Relativista

### 6.1 Introducción

La aproximación de teoría cuántica de campos a la Física Nuclear es la única que por el momento permite incluir correcciones relativistas de un forma sistemática en la descripción de los núcleos atómicos [Wa74, Ho81b, Se86, Re89, Se92]. La mayor parte de los trabajos se realizan en la aproximación de campo medio omitiendo los efectos del mar de Dirac. El mar de Dirac, necesario para preservar unitariedad, se ha estudiado en muchas menos ocasiones. En lo que respecta a materia nuclear, el mar se ha considerado incluyendo hasta un *loop* [Se86] y alguna [Fu89] o todas [Ta92] las correcciones de dos *loops*. Los efectos del mar de Dirac también se han tenido en cuenta en el contexto de núcleos finitos en la aproximación de densidad local [Ho84] e incluyendo las correcciones semiclásicas hasta segundo orden [Pe86, Wa88b, Fu90]. Sin embargo, incluso en el orden más bajo del desarrollo en *loops*, la relevancia física de los estados monoparticulares de energía negativa no se comprende del todo. En efecto, la inclusión explícita del mar presenta problemas tanto numéricos como conceptuales; los numéricos asociados a la diagonalización de un conjunto infinito de estados de colisión, y los conceptuales a la inestabilidad de tipo Landau que aparece por tratarse de una teoría de campos que no implementa libertad asintótica [Pe87, Co87, Fu88] (véase el capítulo 7).

En este capítulo vamos a aplicar nuestro formalismo de desarrollos semiclásicos en términos de TrLog al problema de las correcciones del mar de Dirac a la acción efectiva del modelo  $\sigma$ - $\omega$ : en concreto obtendremos la expresión de las contribuciones de cuarto orden para el mar de Dirac, la densidad bariónica y la densidad escalar [Ca96a]. Además, expondremos un método perturbativo que permite realizar



cálculos autoconsistentes hasta un orden dado. Uno de los ajustes de parámetros que utilizaremos se obtendrá usando la conexión entre renormalización en la capa másica con renormalización a momento cero y exigiendo que el polo del propagador de la  $\omega$  coincida con la masa física (apéndice E). Por último mostraremos y analizaremos los resultados obtenidos hasta orden cuarto en el desarrollo semiclásico del mar de Dirac para varios núcleos de doble capa cerrada [Ca96b].

## 6.2 Aproximación de valencia

El hamiltoniano de un sistema de fermiones relativistas no está acotado inferiormente, existiendo infinitos estados de energía negativa cuyo efecto conjunto en el valor esperado de un observable suele divergir. Esto por sí mismo no plantea un problema serio; en general, la medida de un observable físico en cierto estado se toma con respecto al valor medido en el vacío, de modo que lo que se entiende como valor esperado  $\bar{D}$  de un observable  $\widehat{D}$  en un estado  $|\Psi\rangle$  es

$$\bar{D} \equiv \langle \Psi | \widehat{D} | \Psi \rangle - \langle \Omega | \widehat{D} | \Omega \rangle, \quad (6.1)$$

donde  $|\Omega\rangle$  representa el estado asociado al vacío del sistema.

Si los campos medios que intervienen en el sistema nuclear no son muy fuertes, se observa que el espectro de energías monoparticulares fermiónicas presenta un *gap* que incluye el cero de energía, reminiscencia del *gap* debido a la energía de la masa del caso libre. La presencia del cero en ese *gap* permite hablar de estados monoparticulares de valencia (por encima del *gap*) y del mar de Dirac (por debajo del mismo). En la aproximación Hartree se considera que el estado fermiónico es producto tensorial de los estados monoparticulares con energía inferior al potencial químico (energía del último nivel ocupado). Si el operador que nos interesa es a un cuerpo, su valor esperado en la aproximación Hartree es la suma de los valores esperados del operador sobre cada una de las funciones monoparticulares, y se puede hablar sin ambigüedad de una contribución de valencia y otra del mar de Dirac a dicho valor esperado,

$$\bar{D} = \bar{D}_{\text{val}} + \bar{D}_{\text{mar}}, \quad (6.2)$$

donde

$$\bar{D}_{\text{val}} = \sum_{n, \mu \geq E_n > 0} \langle \psi_n(\mu) | \widehat{D} | \psi_n(\mu) \rangle \quad (6.3)$$

y

$$\bar{D}_{\text{mar}} = \sum_{n, E_n < 0} \langle \psi_n(\mu) | \widehat{D} | \psi_n(\mu) \rangle - \sum_{n, E_n < 0} \langle \psi_n(\Omega) | \widehat{D} | \psi_n(\Omega) \rangle. \quad (6.4)$$



Los campos bosónicos están acoplados a las densidades fermiónicas, que por otra parte dependen del número de partículas considerado o, equivalentemente, de su magnitud conjugada: el potencial químico. Es obvio entonces que los campos bosónicos asociados a cierto potencial químico,  $\mu$ , diferirán de los que resuelven el sistema en el vacío, y por tanto lo mismo ocurre con los orbitales monoparticulares correspondientes,  $|\psi_n(\mu)\rangle$  y  $|\psi_n(\Omega)\rangle$  respectivamente: se dice entonces que el mar se encuentra polarizado.

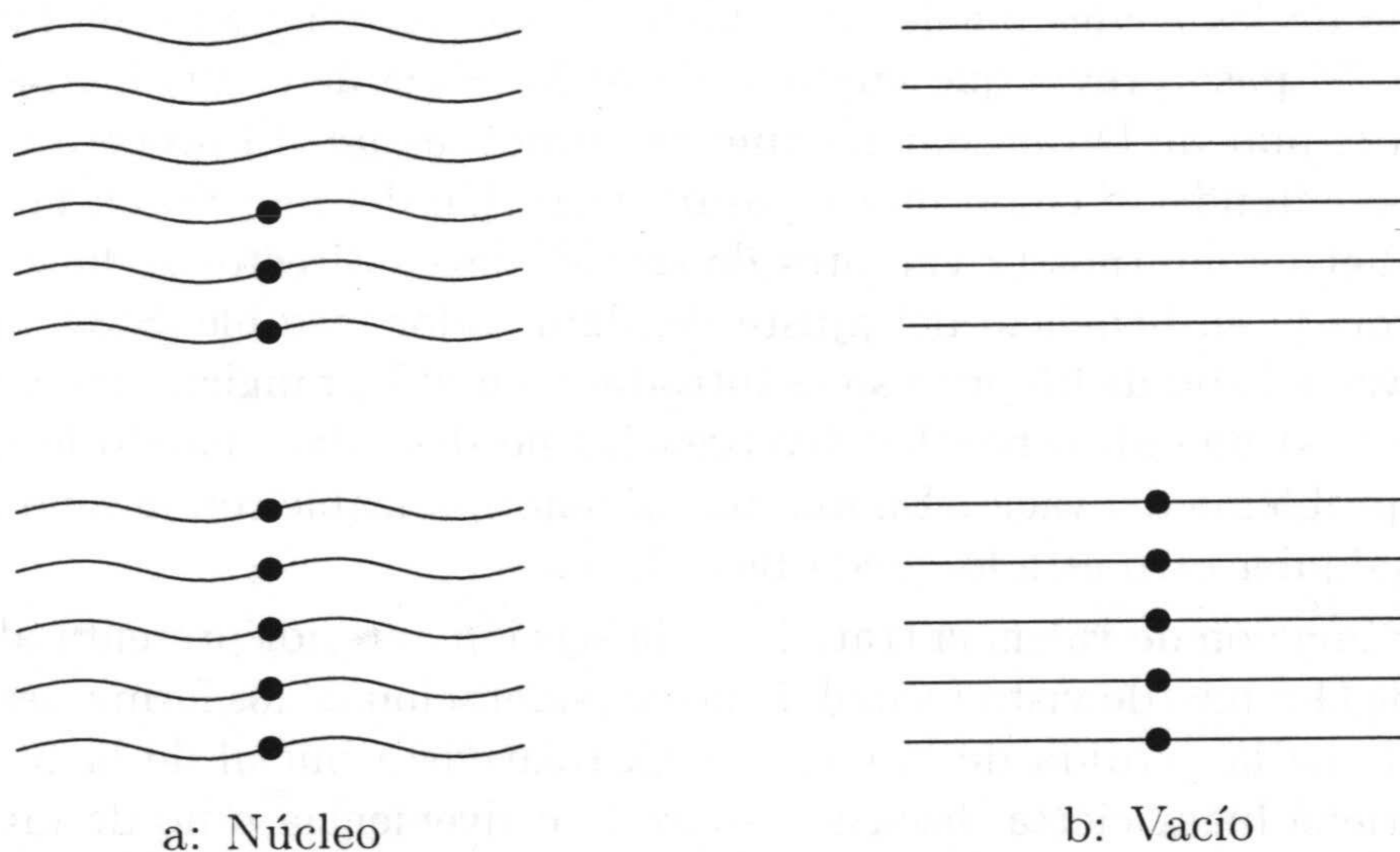


Figura 6.1: **Efecto del mar de Dirac a nivel Hartree.** En la aproximación de valencia se considera que los estados del mar de Dirac en el caso nuclear (a) son iguales a los del vacío (b), de modo que para obtener valores esperados de observables basta con tener en cuenta los niveles de valencia (por encima del gap). En realidad, los niveles del mar para el núcleo están polarizados de forma distinta que para el vacío debido a que los campos medios bosónicos son diferentes en los dos casos, y hay que llevar a cabo el proceso de sustracción.

Cuando se trabaja en la aproximación de valencia lo que se hace es despreciar las diferencias entre los orbitales  $|\psi_n(\mu)\rangle$  y  $|\psi_n(\Omega)\rangle$  en lo que respecta al sector del mar (véase figura 6.1) [Re89]. De ese modo, para calcular el valor esperado de un observable sólo hay que considerar los estados monoparticulares por encima del *gap*,  $\bar{D} \approx \bar{D}_{\text{val}}$ . Las ecuaciones de movimiento que rigen el modelo QHD-I en la aproximación de valencia ya se dedujeron en el capítulo 5. En éste nos vamos a limitar a utilizarlas para comparar los resultados del modelo usando diferentes niveles de incorporación del mar de Dirac.



### 6.3 Mar de Dirac y renormalización

Si se quieren calcular los efectos de polarización del mar de Dirac parecería que sólo hay que llevar a cabo el proceso de sustracción de la ec. (6.1). Para núcleos finitos eso supondría diagonalizar todos los estados monoparticulares del continuo de energía negativa, una tarea que sólo se ha llevada a cabo en modelos de dimensión  $1+1$  [Wa91]. Pero este proceso no basta para hacer finito el operador Hamiltoniano —que sustenta la dinámica de la teoría—, o, si se quiere, las funciones de Green —en término de las cuales pueden escribirse los valores esperados de las funciones respuesta—. El paso previo que vuelve a dotar la teoría de contenido físico cuando se considera el mar de Dirac se denomina *renormalización*. El proceso de renormalización debe entenderse como una reparametrización del modelo en la que alguno de los parámetros internos (y carentes de sentido físico directo) se hace infinito de forma controlada en beneficio del ajuste de algún valor medible [St83]. La manera usual de llevar a cabo dicho proceso es introducir en el lagrangiano nuevos términos (contratérminos) que absorben las divergencias no deseadas cuando lo que se considera es el problema del vacío. En una teoría renormalizable con la renormalización del vacío cualquier otro estado queda bien definido.

La aproximación de valencia tratada en la sección anterior presenta algunos problemas desde el punto de vista formal; la no consideración de los fermiones de energía negativa supone la pérdida de la covariancia relativista inicial de la teoría. En la actualidad tiene lugar cierta discusión sobre la conveniencia o no de introducir los efectos de polarización del mar en cálculos realistas. Los autores defensores de hacerlo ([Se92] y referencias contenidas) indican que es preferible incluir los estados de energía negativa a afrontar la pérdida de covariancia, invariancia gauge, causalidad y unitariedad que supone el no hacerlo. Además, mantienen que sin estas contribuciones no se pueden construir corrientes nucleares consistentes ni obtener respuestas nucleares sensatas. Otro argumento utilizado es que no se conoce la transformación que reduce QCD a QHD, y que por tanto, a priori, una teoría que incluya tanto los estados negativos como los positivos debe tener mejores propiedades que aquellas aproximaciones en las que los estados de energía negativa son despreciados de modo arbitrario. Los que se inclinan por no incluir la totalidad del mar ([Re89] y referencias allí indicadas) consideran que las teorías de hadrodinámica cuántica son efectivas; en ellas los nucleones se consideran partículas puntuales sin estructura y sin sus correspondientes estados bariónicos excitados. Por tanto mantienen que puede ser razonable trabajar en aproximación de valencia o con un *cut-off* en el espacio de momentos que no supere en energía la de las excitaciones no consideradas ni en posiciones el tamaño de los nucleones; de ese modo no se penetraría en una zona que la teoría no sería capaz de describir correctamente. Además, los efectos propios



del mar podrían estar descritos por la parte de valencia con un ajuste conveniente de los parámetros del lagrangiano. Entre las objeciones más fundamentales se encuentra la siguiente: las teorías relativistas que no incorporan libertad asintótica en el límite de momentos grandes (entre las que se encuentra QHD y QED) presentan una inestabilidad en el vacío a cortas distancias de tipo Landau cuando se tiene en cuenta la contribución del mar a nivel un *loop* fermiónico [Pe87, Co87]: ciertas configuraciones (traslacionalmente no invariantes) de un tamaño dado se ven favorecidas energéticamente. Se ignora si esto es una característica intrínseca de la teoría o un artefacto de la aproximación a un *loop*. En el caso de QED, la inestabilidad aparece a la escala de Planck, lo que la hace totalmente inaccesible experimentalmente. Sin embargo, en Física Nuclear Relativista aparece aproximadamente a 0.2 fm. En ese marco se ha sugerido recientemente una prescripción para eliminar la inestabilidad de Landau basada en la representación de Källen-Lehmann de las funciones de Green a dos puntos, que se había aplicado únicamente al estudio de materia nuclear [Ta91, Ta92] y su correspondiente aproximación de densidad local [Ta90]. Nosotros hemos extendido su aplicación a núcleos finitos, como se expone en el capítulo siguiente. Lamentablemente, el método presenta ambigüedades y su posible extensión a funciones de Green arbitrarias no se conoce [Bo60]. Ante el panorama descrito, la discusión de la inclusión o no del mar de Dirac no parece fácilmente zanjable, y todos los autores coinciden en que lo mejor es realizar cálculos concretos en todas las aproximaciones para concluir cuál de ellas proporciona mejores resultados al compararlos con los experimentales. En este capítulo y el siguiente se presentan resultados novedosos que deben tenerse en cuenta en dicha discusión.

Tanto para calcular los contratérminos como para realizar la sustracción que refiere una medida al vacío, hay que determinar la contribución del mar de Dirac cuando el sistema se encuentra en un estado dado. Cuando se trabaja en la aproximación de campo medio una de las formas usuales de llevar a cabo este cálculo es obtener la acción fermiónica efectiva a un *loop* en gradientes de los campos bosónicos medios. Este procedimiento también es adecuado para enfrentarse al problema de la inestabilidad de Landau, porque el desarrollo en gradientes es insensible al comportamiento a cortas distancias.

## 6.4 Desarrollo semiclásico del Mar de Dirac

En esta sección abordamos el cálculo explícito de las correcciones semiclásicas del mar de Dirac usando el formalismo introducido en los capítulos 2 y 4. Utilizaremos regularización dimensional y escogeremos como punto de sustracción el de momento transferido cero, que aparece de forma natural cuando lo que se calcula son correc-



ciones en gradientes; en la sección 6.6 (con resultados del apéndice E) veremos que fijando adecuadamente los parámetros del modelo se puede pasar a un esquema de renormalización en la capa másica (*on-shell*) sin coste adicional. En lo que sigue vamos a fijar la dimensión del espacio de coordenadas a tres salvo regulador.

En lo que respecta a los bosones seguimos situándonos en la aproximación de campo medio. Como ya hemos dicho, eso significa que sustituimos los campos bosónicos por su valor esperado, de modo que nuestro modelo depende de unos campos que en principio se consideran externos; después aplicaremos el principio variacional a los campos medios en la energía total del núcleo, incluyendo la parte bosónica, y eso terminará de fijar esos campos *externos*. Puesto que hemos de referir la energía del mar de un núcleo a la del vacío, se debe estudiar el modelo con dos configuraciones bosónicas distintas, una la que actuará como fuente del problema nuclear que se considera, y la otra la del vacío, que se corresponde con campos medios bosónicos nulos. Asociado a cada una de las dos configuraciones bosónicas se puede definir un estado de mínima energía fermiónica, que se obtiene llenando todos los estados fermiónicos de energía negativa; nótese que en el caso del núcleo los estados fermiónicos están sujetos a una polarización debida a los campos bosónicos, mientras que en el del vacío no (al menos dentro de la aproximación de campo medio). Llamemos  $|\Omega^{(0)}\rangle$  al estado de mínima energía para la configuración de vacío, y  $|\Omega^{(N)}\rangle$  al estado de mínima energía fermiónica del modelo con la configuración nuclear. Una vez que hemos congelado los campos bosónicos, la contribución puramente bosónica a la energía es aditiva y podemos olvidarla en el análisis que sigue para incorporarla al final del cálculo. Dejamos evolucionar uno de estos estados de mínima energía con los términos con contenido dinámico del hamiltoniano durante un tiempo  $2T$  y proyectamos sobre el propio estado para obtener

$$\langle \Omega | U_F(T, -T) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \Omega \rangle \exp \{-i2TE_\Omega\} \quad (6.5)$$

de modo que podemos escribir

$$E_{\text{mar}} = E_\Omega^{(N)} - E_\Omega^{(0)} = \frac{i}{2T} \log \frac{\langle \Omega^{(N)} | U_F^{(N)}(T, -T) | \Omega^{(N)} \rangle}{\langle \Omega^{(0)} | U_F^{(0)}(T, -T) | \Omega^{(0)} \rangle}. \quad (6.6)$$

$E_{\text{mar}}$  da cuenta de la energía debida al mar de Dirac. Para conseguir la energía completa del estado nuclear habría que sumar la parte bosónica de la energía (que depende exclusivamente de la configuración escogida) y habría que añadir los fermiones de valencia correspondientes con su consiguiente energía monoparticular (recordemos que nos situamos en la aproximación Hartree en lo que respecta a la parte fermiónica de nuestro modelo). Para encontrar las amplitudes que necesitamos nos valemos de la función de partición canónica en representación de caminos de



Feynman [Ra90]

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{Tr} \exp\{-\beta H\} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left\{i \int_T^T dt \int_V d^3x \mathcal{L}_F(\bar{\psi}, \psi, \phi_0, V_0)\right\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde  $\mathcal{L}_F$  es la primera línea de la ec. (5.1) (para escribir la segunda igualdad hemos efectuado la bien conocida rotación de Wick,  $\beta \rightarrow i2T$ , que relaciona temperatura finita con propagación cuántica). Teniendo en cuenta que la traza que aparece en la primera igualdad puede calcularse expresando el operador identidad en términos de los estados propios del hamiltoniano y que cuando se toma el límite de temperatura cero ( $\beta \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow -i\infty$ ) los estados excitados se encuentran exponencialmente suprimidos respecto del fundamental, podemos escribir

$$E_{\text{mar}} = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \frac{\mathcal{Z}^{(N)}}{\mathcal{Z}^{(0)}}. \quad (6.8)$$

La integración gaussiana en variables de Grassmann que hay que realizar es inmediata [Ra90], llegándose a

$$E_{\text{mar}} = \lim_{T \rightarrow -i\infty} \frac{i}{2T} \log \frac{\det[-i\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v V_0 \delta_{\mu 0}) + i(M - g_s \phi_0)]}{\det[-i\gamma_\mu i\partial^\mu + iM]}. \quad (6.9)$$

Nuestro objetivo ahora es transformar la expresión de  $E_{\text{mar}}$  hasta llevarla a una forma a la que le podamos aplicar el desarrollo TrLog del capítulo 2. El primer paso es utilizar la relación  $\log \det A = \text{Tr} \log A$ . De este modo los operadores que aparecen en  $E_{\text{mar}}$  son de la forma  $\text{Tr} \log[-\gamma_0(i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - \Phi)]$  (hemos introducido por conveniencia un factor  $-\gamma_0$ ) con  $\Phi = M - g_s \phi_0$  y

$$i\mathcal{D}_\mu = \begin{cases} i\partial_0 - g_v V_0, & \mu = 0, \\ i\partial_j, & \mu = j \neq 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

La traza a evaluar se puede factorizar en la parte de simetría interna (tr), la parte temporal y la parte espacial

$$\text{Tr}[f] = \text{tr} \int_{-T}^T dt \int_V d^3x \langle tx|f|tx \rangle. \quad (6.11)$$

Ya que consideramos el caso estacionario, la variable temporal juega un papel secundario en nuestras expresiones, y podemos eliminarla. Para ello separamos en la traza la parte temporal y la parte espacial, y realizamos la transformada de Fourier en



energía. Esto es equivalente a utilizar una representación mixta energía–posiciones. Así se obtiene

$$\text{Tr} \log[-\gamma_0(i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - \Phi)] = 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \widetilde{\text{Tr}} \log[(-i\alpha \cdot \nabla + \beta\Phi + (g_v V_0 - \omega))] \quad (6.12)$$

(implícitamente se ha considerado  $T$  grande). Aquí  $\widetilde{\text{Tr}}$  significa traza en la parte de grados de libertad internos y la parte espacial (sin incluir el tiempo).

A continuación, al igual que hicimos en el capítulo 4, usamos la propiedad

$$\log \det(A) = \frac{1}{2} \log(\det(A) \det(A))$$

junto con

$$\det(A) = \det((\gamma_0 \gamma_5)^{-1} A \gamma_0 \gamma_5).$$

De este modo se llega a

$$E_{\text{mar}} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [\widetilde{\text{Tr}} \log G(V_0, \phi_0) - \widetilde{\text{Tr}} \log G(0, 0)] \quad (6.13)$$

con la definición

$$G(V_0, \phi_0) \equiv \nabla^2 - U(x) \quad (6.14)$$

y

$$U(x) = (M - g_s \phi_0)^2 - (\omega - g_v V_0)^2 + i\alpha \cdot \nabla (g_v V_0 - g_s \beta \phi_0). \quad (6.15)$$

A partir de aquí el cálculo es paralelo al realizado en el capítulo 4 [Ru93, Ca96a]. En primer lugar utilizamos los resultados de la sección 2.3 para efectuar un desarrollo en gradientes del campo  $U(x)$ . En nuestro contaje en derivadas,  $U(x)$  contiene órdenes superiores, así que redesarrollamos esa dependencia. Para ello, definimos

$$\Delta(x, k)^{-1} = \Delta_0(x, k)^{-1} + B(x), \quad (6.16)$$

con

$$\Delta_0(x, k)^{-1} = k^2 + (M - g_s \phi_0)^2 - (\omega - g_v V_0)^2 \quad (6.17)$$

( $k^2$  se calcula con métrica euclídea) y

$$B(x) = i\alpha \cdot \nabla (g_v V_0 - g_s \beta \phi_0). \quad (6.18)$$

Las siguientes definiciones son convenientes para aligerar notación

$$\begin{aligned} V(r) &\equiv g_v V_0(r) \\ \Phi(r) &\equiv M - g_s \phi(r). \end{aligned} \quad (6.19)$$



Además definimos  $\gamma$  como la degeneración de espín-isoespín (ej.: si consideramos dos especies de nucleones  $\gamma = 4$ , y si sólo una  $\gamma = 2$ ). Tras realizar estos desarrollos y agrupar convenientemente según nuestro contaje, obtenemos

$$\begin{aligned}
E_0^{\text{mar}} &= \gamma i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi)^D} \log \frac{\Delta_0^{-1}}{k^2 + M^2 - \omega^2} \\
E_2^{\text{mar}} &= \gamma i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{1}{2} \Delta_0^2 [(\nabla V)^2 - (\nabla \Phi)^2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4k^2}{D} \Delta_0^4 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (\omega - V) (\nabla_i V)]^2 \right\} \\
E_4^{\text{mar}} &= \gamma i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ -\frac{1}{4} \Delta_0^4 [(\nabla V)^4 + (\nabla \Phi)^4 + \right. \\
&\quad \left. - 6 (\nabla V)^2 (\nabla \Phi)^2 + 4 (\nabla V \cdot \nabla \Phi)^2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2}{D} \left[ 4 \Delta_0^5 \left( 2 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (\omega - V) (\nabla_i V)] [(\nabla_j V) (\nabla_i \nabla_j V) - (\nabla_j \Phi) (\nabla_i \nabla_j \Phi)] + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - [(\nabla \Phi)^2 + \Phi (\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (\omega - V) (\nabla^2 V)] \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [(\nabla V)^2 - (\nabla \Phi)^2] \right) - \Delta_0^4 [(\nabla_i \nabla_j V)^2 - (\nabla_i \nabla_j \Phi)^2] \right] + \\
&\quad \left. - \frac{4k^4}{D(D+2)} \left[ 56 \Delta_0^8 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (\omega - V) (\nabla_i V)]^4 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 32 \Delta_0^7 [\Phi (\nabla_i \Phi) + (\omega - V) (\nabla_i V)]^2 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times [(\nabla \Phi)^2 + \Phi (\nabla^2 \Phi) - (\nabla_i V)^2 + (\omega - V) (\nabla^2 V)] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4 \Delta_0^6 [(\nabla \Phi)^2 + \Phi (\nabla^2 \Phi) - (\nabla V)^2 + (\omega - V) (\nabla^2 V)]^2 \right] \right\}. \quad (6.20)
\end{aligned}$$

El siguiente paso es efectuar la integración en  $\omega$  y en  $k$ . Un simple contaje dimensional revela que el orden 0 y el 2 son divergentes ultravioleta. Calcularemos las integrales mediante regularización dimensional sin más que suponer

$$D = 3 - 2\varepsilon \quad (6.21)$$

(el factor 2 se introduce por conveniencia), donde  $D$  se refiere a la dimensión espacial, esto es, sin incluir el tiempo. Una vez localizados y calculados los términos divergentes introduciremos los contratérminos oportunos para contrarrestarlos. Para reducir el tipo de integrales que hay que calcular vamos a eliminar en la ec. (6.20) los términos con factores  $(\omega - V)^q$ . Si el exponente  $q$  es un número impar, por simetría la contribución total del término es cero (el dominio de integración sobre  $\omega - V$  es simétrico). En el caso de que  $q$  sea par podemos relacionar el citado factor con  $\Delta_0$ ,



$k^2$  y  $\Phi$  mediante

$$(\omega - V)^2 = k^2 + \Phi^2 - \Delta_0^{-1}. \quad (6.22)$$

Tras esta manipulación, todas las integrales en  $\omega$  y  $k$  —a excepción de la de orden cero— toman la forma

$$I_D^{n,s} = i \int \frac{d\omega d^D k}{(2\pi)^{D+1}} k^{2s} \Delta_0^n. \quad (6.23)$$

En el orden cero, la integral que hay que calcular es

$$I_D^{0,0} \equiv i \int \frac{d\omega d^D k}{(2\pi)^{D+1}} \log \frac{\Delta_0^{-1}}{k^2 - \omega^2 + M^2}. \quad (6.24)$$

Estas integrales están bien definidas en un esquema de regularización dimensional siempre y cuando consideremos que, como suele hacerse en formalismo de integración de caminos, la masa del fermión contiene una pequeña componente imaginaria de signo negativo. En el caso de dimensión espacial  $D = 3$  las integrales son directamente convergentes cuando  $n > s + 2$ ; en caso contrario son divergentes, aunque aun así se obtiene una divergencia controlada en función del regulador de la dimensión,  $\varepsilon$ . El resultado general para  $n > 0$  es

$$I_{D-2\varepsilon}^{n,s} = -\frac{1}{(4\pi)^{(D+1)/2}} \frac{\Gamma\left(s + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(n - s - \frac{D+1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma(n)} (\Phi^2)^{\frac{D+1}{2} + s - n} \left(\frac{\mu^2}{\Phi^2}\right)^\varepsilon, \quad (6.25)$$

donde  $\mu$  es una escala de renormalización con dimensión de energía que hay que introducir para mantener la homogeneidad de las dimensiones del problema. La integral con  $s = 0$  y  $n = 0$  puede obtenerse, por ejemplo, desarrollando el logaritmo y utilizando el resultado anterior término a término. Para nuestros cálculos nos basta con los siguientes casos particulares

$(n, s)$	$I_{3-2\varepsilon}^{n,s}$
$(0, 0)$	$\frac{M^4}{16\pi^2} \left[ \frac{2g_s\phi M - g_s^2\phi^2}{M^2} \Gamma(-1 + \varepsilon) + \frac{(2g_s\phi M - g_s^2\phi^2)^2}{2M^4} \Gamma(\varepsilon) - 4 \left(\frac{\Phi}{M}\right)^2 \log \frac{\Phi}{M} + \frac{3}{4} \left(\frac{\Phi}{M}\right)^4 - \left(\frac{\Phi}{M}\right)^3 + 1/4 \right] \quad (6.26)$
$(n, n - 2)$	$-\frac{1}{4\pi^{5/2}} \frac{\Gamma(s + 3/2)}{\Gamma(n)} \left( \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2} - \log \frac{\Phi}{\mu} \right)$
$(n > s + 2, s)$	$-\frac{1}{8\pi^{5/2}} \frac{\Gamma(s + 3/2) \Gamma(n - s - 2)}{\Gamma(n)} \Phi^{4-2(n-s)}$



Con estos resultados obtenemos una energía asociada al mar que diverge para el vacío. Esto se soluciona introduciendo contratérminos en el lagrangiano en  $\phi$ ,  $\phi^2$ ,  $\phi^3$  y  $\phi^4$  (orden 0) y en  $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$  y  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  (orden 2). Pero no sólo hay que conseguir que la energía del vacío sea finita: también debemos fijar las condiciones de renormalización de forma unívoca. En nuestro caso estamos alterando las constantes de acoplamiento y las masas de las partículas a momento transferido cero, como consecuencia directa del desarrollo en gradientes considerado. Por tanto, si queremos que los parámetros originales del lagrangiano sean los físicos a momento nulo, hay que introducir contratérminos no divergentes que corrijan las contribuciones finitas del mar a los parámetros físicos.

Después de introducir los contratérminos se obtiene que la corrección a la energía debida a la contribución del mar hasta cuarto orden en el desarrollo en gradientes de los campos bosónicos es

$$\begin{aligned}
E_0^{\text{mar}} &= -\frac{\gamma}{16\pi^2} M^4 \int d^3x \left\{ \left(\frac{\Phi}{M}\right)^4 \log \frac{\Phi}{M} + \frac{g_s\phi}{M} - \frac{7}{2} \left(\frac{g_s\phi}{M}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{13}{3} \left(\frac{g_s\phi}{M}\right)^3 - \frac{25}{12} \left(\frac{g_s\phi}{M}\right)^4 \right\} \\
E_2^{\text{mar}} &= \frac{\gamma}{16\pi^2} \int d^3x \left\{ \frac{2}{3} \log \frac{\Phi}{M} (\nabla V)^2 - \log \frac{\Phi}{M} (\nabla\Phi)^2 \right\} \\
E_4^{\text{mar}} &= \frac{\gamma}{5760\pi^2} \int d^3x \left\{ -11 \Phi^{-4} (\nabla\Phi)^4 - 22 \Phi^{-4} (\nabla V)^2 (\nabla\Phi)^2 \right. \\
&\quad + 44 \Phi^{-4} ((\nabla_i\Phi)(\nabla_i V))^2 - 44 \Phi^{-3} ((\nabla_i\Phi)(\nabla_i V)) (\nabla^2 V) \\
&\quad - 8 \Phi^{-4} (\nabla V)^4 + 22 \Phi^{-3} (\nabla^2\Phi) (\nabla\Phi)^2 + 14 \Phi^{-3} (\nabla V)^2 (\nabla^2\Phi) \\
&\quad \left. - 18 \Phi^{-2} (\nabla^2\Phi)^2 + 24 \Phi^{-2} (\nabla^2 V)^2 \right\}. \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Se ha utilizado la libertad de integración por partes para simplificar en la medida de lo posible el resultado final. El orden cero y el dos ya eran conocidos (véase [Se92] y referencias contenidas). El cuarto orden es una aportación original de nuestro grupo de investigación [Ca96b]; sólo se conocían los casos límite  $V = 0$  [Ch88] y  $\Phi = M$  [Po91]. Los últimos dos términos de la contribución de cuarto orden ya se habían obtenido en [Pe86] donde se realizaba un desarrollo en potencias de  $\Phi^{-1}$ . Encontramos, sin embargo, que los términos despreciados en dicha referencia son de orden  $\Phi^{-3}$  en lugar de  $\Phi^{-4}$  como allí se indicaba (lo mismo podría deducirse comparando con [Ch88]). Además, el contaje que se realiza en [Pe86] no está bien definido, ya que no es estable ante integración por partes. Por ejemplo, bajo el signo integral el término  $\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi}$  es idéntico a  $\left(\frac{\nabla\Phi}{\Phi}\right)^2$ .



Por otra parte, a partir de la expresión del funcional de la energía del mar de Dirac en términos de los campos bosónicos es posible obtener la contribución del mar de Dirac a la densidad bariónica y a la densidad escalar mediante las expresiones

$$\rho^{\text{mar}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_v} \frac{\delta E^{\text{mar}}}{\delta V_0(\mathbf{r})} \quad (6.28)$$

y

$$\rho_s^{\text{mar}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{g_s} \frac{\delta E^{\text{mar}}}{\delta \phi(\mathbf{r})}. \quad (6.29)$$

De este modo, el desarrollo semiclásico de la contribución del mar de Dirac a la energía se traslada a las citadas densidades, obteniéndose hasta orden cuarto las expresiones que se muestran en el apéndice D. Al igual que para el potencial efectivo, el orden cero y dos de las densidades mostradas ya era conocido, mientras que para el orden cuarto se conocían los casos particulares enumerados previamente [Ch88, Po91], que se obtienen de nuestra expresión como casos particulares.

La contribución de cuarto orden del mar de Dirac a las densidades bariónica y escalar se puede obtener de forma sencilla a partir de las expresiones de las densidades semiclásicas de valencia logradas en el capítulo 4, donde se consideraba una única especie de fermiones. Para ello notemos que debido a la simetría de conjugación de carga se cumple

$$N_-(E, V) = N_+(-E, -V). \quad (6.30)$$

Con esta ecuación y las ecs. (4.19-4.21) se tiene que para las densidades (sin renormalizar) se satisface

$$\begin{aligned} \rho^-(x, \mu, V) &= \rho^+(x, -\mu, -V) \\ \rho_s^-(x, \mu, V) &= -\rho_s^+(x, -\mu, -V) \\ \rho_E^-(x, \mu, V) &= -\rho_E^+(x, -\mu, -V). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Por otra parte, las densidades de valencia de cuarto orden son ya convergentes en el ultravioleta (no precisan de renormalización) y además son de paridad definida ante la operación de conjugación de carga  $V \rightarrow -V$ . Con todo se llega a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho_4^{\text{mar}}(x) &= -\rho_4^+(x, \mu \rightarrow +\infty) \\ \rho_{s4}^{\text{mar}}(x) &= -\rho_{s4}^+(x, \mu \rightarrow +\infty) \\ \rho_{E4}^{\text{mar}}(x) &= -\rho_{E4}^+(x, \mu \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Las expresiones de las densidades de valencia de orden cuarto se encuentran en las tablas C.1-C.3 del apéndice C. El límite  $\mu \rightarrow +\infty$  se corresponde con  $k_F \rightarrow +\infty$  y  $x_F \rightarrow 1$ . Con esta receta, la obtención de la contribución del mar de Dirac



de cuarto orden a las densidades consideradas es un mero ejercicio algebraico. La contribución del mar de Dirac a la densidad bariónica debe ser una divergencia pura (es decir,  $\rho_4(x) = \nabla_i f_i(x)$ ) debido a que el número bariónico del vacío es cero. Como cada orden de nuestros desarrollos es homogéneo en el número de gradientes, esa propiedad debe mantenerse orden a orden. En los órdenes más bajos, ya conocidos, la propiedad se satisface. En el caso del orden cuarto, nuestra contribución original, hemos comprobado que la densidad bariónica es una divergencia pura, con expresión explícita

$$\begin{aligned} \rho_4^{\text{mar}} = & \frac{\gamma}{2160\pi^2} \nabla_i \left\{ 18\Phi^{-2} \nabla_i \nabla^2 V - 14\Phi^{-3} \nabla_i \Phi \nabla^2 V \right. \\ & - 22\Phi^{-3} \nabla_j \Phi \nabla_i \nabla_j V - 16\Phi^{-3} \nabla^2 \Phi \nabla_i V - 11\Phi^{-3} \nabla_i \nabla_j \Phi \nabla_j V \\ & \left. + 33\Phi^{-4} (\nabla \Phi)^2 \nabla_i V + 12\Phi^{-4} (\nabla V)^2 \nabla_i V \right\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Al contrario de lo que ocurre en el caso de valencia, el desarrollo semiclásico en el sector del mar de Dirac no presenta contribuciones distributivas puras debido a que no existe superficie de retroceso. Este hecho simplifica enormemente la aplicación de las ecuaciones obtenidas.

## 6.5 Cálculos perturbativos

Las fórmulas obtenidas en la sección anterior nos permiten evaluar la contribución del mar de Dirac al funcional de la energía del sistema nuclear QHD-I como un desarrollo en gradientes de los campos bosónicos; dependiendo de a qué orden cortemos el desarrollo obtendremos una aproximación u otra. El sector de los fermiones monoparticulares de valencia lo vamos a tratar siempre en la aproximación Hartree, gobernada por la ec. (5.9)

$$\begin{aligned} h \psi_{n\pm}(\mathbf{r}) &= E_{n\pm} \psi_{n\pm}(\mathbf{r}) \\ h &\equiv -i\alpha \cdot \nabla + g_v V_o + \beta(M - g_s \phi_o). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Las ecuaciones diferenciales para los bosones (5.12) y (5.13) seguirán siendo válidas si en las densidades que actúan como fuentes se tienen en cuenta las diferentes contribuciones asociadas al mar de Dirac (véase el apéndice D),

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - m_s^2) \phi_o(\mathbf{r}) &= -g_s [\rho_s^{\text{val}}(\mathbf{r}) + \rho_{s0}^{\text{mar}}(\mathbf{r}) + \rho_{s2}^{\text{mar}}(\mathbf{r}) + \dots] \\ (\nabla^2 - m_v^2) V_o(\mathbf{r}) &= -g_v [\rho^{\text{val}}(\mathbf{r}) + \rho_0^{\text{mar}}(\mathbf{r}) + \rho_2^{\text{mar}}(\mathbf{r}) + \dots]. \end{aligned} \quad (6.35)$$



Es únicamente en estas fuentes donde van a aparecer cambios debidos a la polarización del mar, por lo que la mayor parte del contenido de las secciones 5.1.2 y 5.1.3 sigue siendo válida.

Como hemos venido haciendo en capítulos anteriores vamos a estudiar únicamente núcleos de doble capa cerrada, donde se espera que la interferencia de los orbitales por encima del mar de Fermi sea mínima. Además en ese caso los potenciales son centrales y del campo medio vectorial sólo sobrevive la componente temporal.

La búsqueda de solución autoconsistente del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas resultantes plantea algunos problemas técnicos. En primer lugar, los nuevos términos de las fuentes en las ecuaciones para los campos bosónicos las convierten en ecuaciones no lineales. Además, si se quiere llegar de forma autoconsistente hasta cuarto orden hay que resolver ecuaciones diferenciales de orden cuarto para los campos bosónicos para las que no disponemos de suficiente información sobre condiciones de contorno, comprometiéndose la mera existencia de soluciones físicas. Una solución a este problema podría ser calcular la contribución del mar de forma perturbativa. Esto no es viable a orden cero, porque la primera corrección del mar al caso puro de valencia es muy importante, pero sí que es posible para los órdenes siguientes. De este modo las ecuaciones a resolver siguen sin ser lineales, pero al menos el problema se mantiene acotado en cuanto a condiciones de contorno. En cualquier caso, nunca vamos a realizar un cálculo completamente perturbativo debido a las complicaciones originadas en el sector de valencia; en principio uno podría utilizar teoría de perturbaciones estándar para los niveles fermiónicos, pero eso conllevaría varias sumas anidadas para los orbitales de la teoría (y no solamente los ocupados). En su lugar hemos optado por utilizar un esquema perturbativo que nos proporciona los potenciales hasta un orden dado pero que incluye restos de orden superior.

Para entender el procedimiento perturbativo que proponemos vamos a explicarlo en el caso simplificado del funcional

$$U[V] = E_F[V] + E_B[V] + E_0[V] + E_2[V] + \dots, \quad (6.36)$$

donde  $E_F$  representa la energía fermionica suma de autoenergías monoparticulares,  $E_B[V] = \frac{1}{2} \int \{(\nabla V)^2 + m_v^2 V^2\}$  es la energía usual de un campo bosónico y  $E_m[V]$  incluye correcciones a orden  $m$ . Hasta un orden dado,  $n$ , el potencial,  $V_n$ , que minimiza el funcional se obtiene resolviendo la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V_n - m_v^2 V_n = \rho_F[V_n] + \rho_0[V_n] + \dots + \rho_n[V_n]. \quad (6.37)$$

Supongamos que se ha encontrado el potencial a orden 0; la energía hasta ese orden será  $U_0 = E_F[V_0] + E_B[V_0] + E_0[V_0]$ . Llamemos  $\delta_2 V$  a la corrección de orden segundo



al potencial, de modo que, salvo órdenes superiores,  $V_2 = V_0 + \delta_2 V$ . La energía hasta orden segundo se obtiene como

$$U_2 = U_0 + \int \frac{\delta(E_F + E_B + E_0)[V]}{\delta V} \Big|_{V_0} \delta_2 V + E_2[V_0]. \quad (6.38)$$

Pero nótese que el integrando del segundo término se anula debido a la estacionaridad del funcional hasta orden cero en el potencial  $V_0$ ; así

$$U_2 = U_0 + E_2[V_0]. \quad (6.39)$$

Para encontrar  $\delta_2 V$  planteamos la ec. (6.37) hasta orden segundo y escribimos  $V_2$  como  $V_0 + \delta_2 V$ . Tras desarrollar y usar que  $V_0$  cumple la ecuación a orden cero se tiene que

$$\nabla^2 \delta_2 V - m_v^2 \delta_2 V = \int \frac{\delta(\rho_F + \rho_0)[V]}{\delta V} \Big|_{V_0} \delta_2 V + \rho_2[V_0]. \quad (6.40)$$

El cálculo de la derivada funcional de la densidad fermiónica es difícil y es lo que complica esta forma de proceder. Lo que proponemos nosotros en su lugar es calcular primero  $V_0$  y a continuación resolver la ecuación diferencial para un nuevo campo  $V_{0+2}$

$$\nabla^2 V_{0+2} - m_v^2 V_{0+2} = \rho_F[V_{0+2}] + \rho_0[V_{0+2}] + \rho_2[V_0], \quad (6.41)$$

que es del mismo tipo que la que cumple  $V_0$  con la salvedad de que hay una fuente adicional,  $\rho_2[V_0]$ , **fija**. Es evidente que  $V_{0+2} = V_2 = V_0 + \delta_2 V$  salvo órdenes superiores. También deben coincidir salvo orden cuarto las energías obtenidas introduciendo cualquiera de estos potenciales, e incluso el de orden cero, en el funcional  $U$  que incluye hasta el término de orden segundo. Para calcular un valor esperado que dependa de la densidad se puede usar  $\rho_F[V_{0+2}] + \rho_0[V_{0+2}] + \rho_2[V_0]$ ; el resultado será correcto salvo términos de orden cuarto.

Este método es generalizable al funcional que nos ocupa, QHD-I, y a órdenes superiores. En nuestro caso, somos capaces de resolver las ecuaciones diferenciales para obtener  $(\phi_0)_2$  y  $(V_0)_2$ ; hemos comparado estos campos con los resultantes de aplicar el método propuesto para hallar  $(\phi_0)_{0+2}$  y  $(V_0)_{0+2}$  y hemos comprobado que las diferencias son achacables a órdenes superiores. Posteriormente lo hemos usado para hallar  $(\phi_0)_{2+4}$  y  $(V_0)_{2+4}$ .

## 6.6 Ajuste de parámetros

Dado que el modelo QHD-I es un modelo efectivo las constantes de acoplamiento deben fijarse en virtud de resultados experimentales, y al introducir el mar hay que



reparametrizar el modelo. Para que la comparación sea sencilla conviene, cómo no, utilizar en los dos casos (con y sin mar) el mismo criterio para fijar los parámetros.

En la literatura se proponen múltiples métodos de ajuste de parámetros, algunos de ellos bastante sofisticados que tratan de utilizar la mayor cantidad posible de información experimental. Sin embargo, nosotros vamos a utilizar el método propuesto inicialmente por Horowitz [Ho81b, Se92] debido a su fácil aplicación al caso del modelo  $\sigma$ - $\omega$ . Además, este modelo es un banco de pruebas excelente para realizar estudios de implementación de aproximaciones en Física Nuclear Relativista, pero carece de grados de libertad fundamentales para ajustar correctamente los datos experimentales (fotón,  $\rho$ ,  $\pi$ , ...), por lo que no tiene mucho sentido complicar el sistema de ajuste si con ello oscurecemos las tendencias de las diferentes aproximaciones a estudiar.

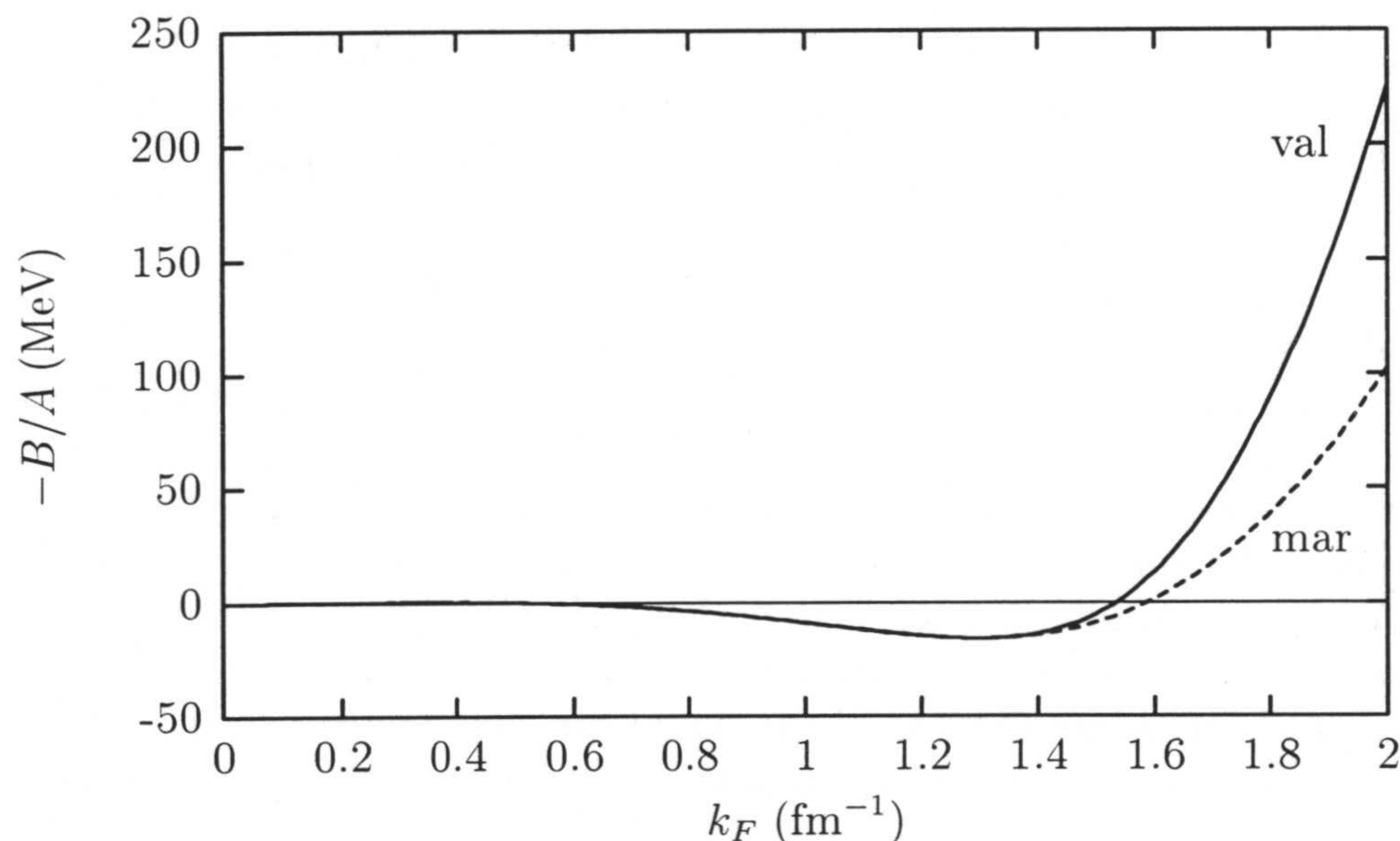


Figura 6.2: Energía por nucleón para materia nuclear en función del momento de Fermi (se ha sustraído la energía debida a la masa). La curva val (continua) se refiere al caso en el que sólo se consideran fermiones de valencia. La curva mar (a trazos) incluye el mar de Dirac. En cada caso se han utilizado los parámetros que reproducen las propiedades deseadas de materia nuclear.

Como dijimos en la sección 5.1.4, las propiedades de materia nuclear dependen



únicamente del valor numérico de los parámetros [Se86]

$$C_s^2 \equiv g_s^2 \frac{M^2}{m_s^2}, \quad C_v^2 \equiv g_v^2 \frac{M^2}{m_v^2}. \quad (6.42)$$

En efecto: la densidad de energía por unidad de volumen en la aproximación de campos homogéneos y densidad local (apéndice C) puede escribirse como

$$\frac{U}{L^3} = \frac{\gamma}{8\pi^2} \left\{ \epsilon_F^3 k_F + \epsilon_F k_F^3 - \Phi^4 l_F \right\} + \frac{M^2 (M - \Phi)^2}{2 C_s^2} + \frac{2 C_v^2 k_F^6}{9\pi^4 M^2} + \frac{E_0^{\text{mar}}}{L^3} \quad (6.43)$$

donde se ha usado la ecuación de movimiento del campo de la  $\omega$  para relacionar la densidad bariónica en esa aproximación,  $\rho = \gamma k_F^3 / (3\pi^2)$ , con el potencial  $V_0$ ,

$$-m_v^2 V_0 = -g_v \rho \quad (6.44)$$

(nótese que la ecuación es la misma se incluya el mar o no, pues no hay contribución del mar de Dirac a orden cero a la densidad bariónica). La expresión de  $E_0^{\text{mar}}$  se proporciona en la ec. (6.27), y debe incluirse sólo si se considera el mar de Dirac. Teniendo en cuenta que  $k_F^2 = \epsilon_F^2 - \Phi^2$ , y que  $l_F = \log[(\epsilon_F + k_F)/\Phi]$  la expresión (6.43) es una función únicamente de  $k_F$  y  $\Phi$  y de los parámetros  $C_s$ ,  $C_v$  y  $M$ . La ecuación de movimiento del campo escalar permite escribir una ecuación trascendente para despejar  $\Phi$  en función del resto de los parámetros,

$$M - \Phi = \frac{C_s^2}{M^2} \left[ \frac{\gamma}{2\pi^2} \left\{ \epsilon_F k_F \Phi - \Phi^3 l_F \right\} + \rho_{s0}^{\text{mar}} \right] \quad (6.45)$$

donde  $\rho_{s0}^{\text{mar}}$  (tabla D.2) se tiene en cuenta sólo si se considera el mar de Dirac. La solución de materia nuclear se corresponde a aquella densidad (o  $k_F$ ) que minimiza la energía por partícula, o lo que es lo mismo, la densidad espacial de energía dividida entre la densidad bariónica. Con esa densidad se puede obtener la energía por partícula de materia nuclear. En la práctica procedemos al revés: movemos los parámetros  $C_s$  y  $C_v$  para reproducir las propiedades de materia nuclear

$$\frac{U}{A} - M = -15.75 \text{ MeV} \quad k_F = 1.3 \text{ fm}^{-1}. \quad (6.46)$$

La figura 6.2 reproduce las curvas de energía por nucleón de materia nuclear para el caso de valencia y para el caso que incluye el mar de Dirac. En cada caso los parámetros se escogieron para reproducir las propiedades (6.46) (tabla 6.1), como puede verse del hecho de que la máxima estabilidad ocurre en el momento de Fermi deseado al igual que el valor de la energía por nucleón en el mínimo. El ajuste de  $C_s$



		$C_s^2$	$m_s$	$g_s$	$C_v^2$	$m_v$	$g_v$
Sin Mar		357.741	449.91	9.06242	274.106	783	13.8056
Naïve	Mar 0	227.840	368.37	5.92153	147.524	783	10.1281
	Mar 2	227.840	406.6	6.53607	147.524	783	10.1281
On-shell	Mar 0	227.840	382.80	6.15349	147.524	910.798	11.7812
	Mar 2	227.840	425.89	6.84616	147.524	910.798	11.7812

Tabla 6.1: Ajuste de los parámetros del modelo  $\sigma$ - $\omega$  para diferentes órdenes de inclusión del mar de Dirac. Cuando se introduce mar a algún orden se especifican dos esquemas de ajuste diferentes, como se explica en el texto.  $m_s$  y  $m_v$  se dan en MeV; el resto de los parámetros son adimensionales.

y  $C_v$  nos deja dos grados de libertad, uno para cada bosón. El del campo vectorial lo fijaremos con las propiedades físicas de la partícula  $\omega$ , mientras que el del campo escalar lo escogeremos para reproducir el radio de carga cuadrático medio del núcleo del  $^{40}\text{Ca}$  [Ho81b], en concreto 3.842 fm.

Vamos a presentar dos esquemas diferentes de ajuste de parámetros. El primero, que denominamos *Naïve*, consiste en ajustar las propiedades de materia nuclear considerando que el parámetro del lagrangiano denominado  $m_v$  se corresponde con la masa física de la  $\omega$ . Sabemos que esto no es correcto, ya que las expresiones del mar de Dirac se han obtenido renormalizando a momento cero. Conocido  $C_v^2$  inmediatamente se puede despejar  $g_v^2$ . En el segundo esquema de ajuste, denominado *On-shell*, se ha utilizado la ec. (E.43) para obtener el parámetro del lagrangiano ( $\tilde{m}_v$  en dicha ecuación) que reproduce las propiedades deseadas de materia nuclear y que hace que el propagador de la partícula  $\omega$  tenga un polo con residuo unidad justamente en el valor de la masa física experimental. Desde el punto de vista físico, éste es el esquema correcto. Una razón que nos ha llevado a estudiar también el *naïve* es que, por su sencillez, era el que se había utilizado en la literatura cuando se ha evaluado la contribución del mar de Dirac hasta orden cero o dos. Además, en el capítulo siguiente encontraremos que el ajuste *naïve* proporciona resultados indistinguibles de los que produce la mucho más elaborada prescripción de Rendmond-Tanaka, al menos cuando se aplica al modelo concreto que estamos considerando. En la tabla 6.1 se muestran los resultados que se derivan de los ajustes realizados cuando se consideran diferentes contribuciones del mar de Dirac. Se ha considerado como masa física de la  $\omega$  783 MeV, y como masa del nucleón se ha usado 939 MeV. Nótese que cuando no se considera mar de Dirac no distinguimos los dos esquemas de ajuste; en ese caso no tiene sentido utilizar el propagador calculado a 1-loop



para buscar sus polos. Se podría efectuar la siguiente crítica al sistema de ajuste: ¿Por qué, si se considera el mar de Dirac hasta un orden dado, no se aproxima el propagador hasta el mismo orden para buscar el polo físico? Creemos que tal crítica es infundada, ya que eso se correspondería a mezclar desarrollos diferentes. En el propagador, el parámetro de desarrollo sería  $m_w^2/M^2$ , mientras que la convergencia de los desarrollos semiclásicos realizados a lo largo de esta memoria está relacionada con la suavidad de los campos bosónicos autoconsistentes.

## 6.7 Resultados numéricos

En la tabla 6.2 presentamos los resultados para la energía de ligadura por nucleón y en la 6.3 para el radio cuadrático medio calculados para diferentes núcleos de doble capa cerrada en varias aproximaciones diferentes; cuando se incluye mar se utilizan los dos esquemas de ajuste explicados en la sección anterior. En todos los casos la parte de valencia se resuelve en aproximación Hartree. La entrada *Sin Mar* se aplica a la aproximación más elemental en la que no se considera para nada la presencia del mar de Dirac; nótese, como ya hemos discutido, que se usa un único esquema de ajuste. Las entradas *Mar 0* y *Mar 2* se refieren a cálculos autoconsistentes en los que se ha tenido en cuenta el mar hasta el orden indicado. En ambos casos se resuelven los potenciales sin realizar desarrollo perturbativo alguno; la técnica explicada en la sección 6.5 la reservamos para el orden 4 (donde se plantean problemas de condiciones de contorno), y la hemos usado en órdenes inferiores tan solo para comprobarla, donde hemos obtenido resultados plenamente satisfactorios. Los datos experimentales, *Exp.*, se proporcionan únicamente a modo ilustrativo, ya que el modelo  $\sigma$ - $\omega$  debe complementarse con grados de libertad adicionales para que sea realista. De las tablas 6.2 y 6.3 se puede ver que las correcciones debidas al mar de Dirac no son globalmente pequeñas, y por lo tanto no pueden despreciarse. Los efectos resultan más dramáticos en lo que respecta al ajuste de parámetros presentados en la tabla 6.1. Por último, en la tabla 6.4 se presentan los resultados para el cuarto orden del mar de Dirac en el esquema de ajuste *On-shell*.

En las tablas 6.2 y 6.3 se han omitido los resultados para el cuarto orden porque no modifican los de segundo orden: en todos los casos considerados (núcleos de doble capa cerrada) se encontró que la corrección relativa debido al cuarto orden era inferior a  $10^{-4}$ , tanto para la energía de ligadura como para el radio cuadrático medio. Éste es un resultado importante porque indica que el desarrollo semiclásico converge mucho más rápido que lo que uno esperaría ingenuamente: la contribución del cuarto orden al mar de Dirac a la energía de ligadura por nucleón puede estimarse dimensionalmente como  $\frac{1}{(RA)}$ , donde  $R$  es el radio nuclear y  $A$  el número másico.



$\frac{A}{Z}X$	B/A (MeV)					
	Sin Mar	Mar 0		Mar 2		Exp.
		Naïve	On-shell	Naïve	On-shell	
$^{40}_{20}\text{Ca}$	6.28	6.00	6.10	6.33	6.43	8.55
$^{56}_{28}\text{Ni}$	7.24	6.51	6.60	6.80	6.90	8.64
$^{90}_{40}\text{Zr}$	8.36	7.99	8.07	8.22	8.30	8.71
$^{132}_{50}\text{Sn}$	8.81	8.43	8.50	8.62	8.69	8.36
$^{208}_{82}\text{Pb}$	9.84	9.55	9.61	9.70	9.76	7.87

Tabla 6.2: Resultados obtenidos para la energía de ligadura por nucleón para diferentes núcleos de doble capa cerrada. El mar de Dirac se incluyó sucesivamente hasta cuarto orden, si bien éste último no cambió los resultados hasta segundo orden. Las columnas con entrada Naïve se calcularon usando la masa física de la  $\omega$  como parámetro del lagrangiano. En las entradas On-shell se usaron unos parámetros en el lagrangiano que sitúan el polo de la  $\omega$  en el sitio correcto.

Para el caso del calcio se correspondería con una corrección de 1 MeV. El hecho de que el resultado numérico sea mucho más pequeño es consecuencia directa del coeficiente global de la energía de cuarto orden (ec. (6.27)) así como de cancelaciones parciales que se producen entre varios de los términos en la integral de  $E_4$ . Curiosamente, estas cancelaciones son mucho más efectivas cuando los potenciales que se introducen en la ecuación son autoconsistentes. Se espera que los órdenes siguientes al cuarto también sean despreciables. Por ejemplo, dimensionalmente vemos que el sexto orden se encuentra suprimido por un factor extra del orden de  $\frac{1}{(UR)^2}$ , donde  $U$  es la profundidad de cualquiera de los campos,  $V$  o  $\Phi$ , lo que supone un uno por ciento en el caso del calcio.

Los números que se presentan para  $E_4$  en la tabla 6.4 son numéricamente estables (ante incremento del número de puntos del retículo de cálculo) dentro del esquema perturbativo utilizado, que consiste en introducir en la ec. (6.27) los potenciales autoconsistentes obtenidos hasta orden 2, es decir,  $(\phi_0)_2$  y  $(V_0)_2$  en la notación de la sección 6.5. Por lo dicho en esa sección, si en su lugar se introdujesen los potenciales  $(\phi_0)_{2+4}$  y  $(V_0)_{2+4}$  se deberían obtener los mismo resultados salvo órdenes superiores. Sin embargo, cuando lo hacemos se encuentran diferentes valores, siempre del mismo orden de magnitud. Este hecho, y la pequeñez de los propios resultados, nos sugieren que las verdaderas correcciones a la energía de cuarto orden son compatibles con cero.



$\begin{smallmatrix} A \\ Z \end{smallmatrix} X$	r.c.c.m. (fm)					Exp.
	Sin Mar	Mar 0		Mar 2		
		Naïve	On-shell	Naïve	On-shell	
$\begin{smallmatrix} 40 \\ 20 \end{smallmatrix} \text{Ca}^*$	3.48	3.48	3.48	3.48	3.48	3.48
$\begin{smallmatrix} 56 \\ 28 \end{smallmatrix} \text{Ni}$	3.72	3.79	3.79	3.79	6.80	
$\begin{smallmatrix} 90 \\ 40 \end{smallmatrix} \text{Zr}$	4.22	4.23	4.24	4.25	4.25	4.27
$\begin{smallmatrix} 132 \\ 50 \end{smallmatrix} \text{Sn}$	4.60	4.66	4.66	4.68	4.68	
$\begin{smallmatrix} 208 \\ 82 \end{smallmatrix} \text{Pb}$	5.35	5.39	5.39	5.41	5.41	5.50

Tabla 6.3: Lo mismo que la tabla anterior pero para el radio de carga cuadrático medio. El radio del  $^{40}\text{Ca}$  se usó como dato para ajustar los parámetros.

El desarrollo semiclásico de la energía en la aproximación de campo medio se muestra rápidamente convergente, pudiéndose cortar la serie en el segundo orden. Sin embargo, no debemos sentirnos extremadamente optimistas ante este resultado porque no se nos garantiza que la serie converja al resultado exacto: el desarrollo semiclásico es insensible a los términos no analíticos en  $\hbar$  que pueda contener el valor exacto de un observable, en cuyo caso existirán desviaciones sistemáticas entre ambos resultados. Sabemos que tales términos existen en modelos mecánico-cuánticos sencillos (secciones 2.5 y 3.5), donde se introduce un potencial químico [Ca96a]. El hecho de que en el mar de Dirac no exista tal potencial químico, junto con la renormalización, podría hacer que desapareciesen los posibles términos no analíticos. Sin embargo, parecen haberse observado discrepancias entre resultados semiclásicos y exactos en el sector del mar de Dirac en el modelo quiral solitónico de *quarks* [Me88].



$\begin{smallmatrix} A \\ Z \end{smallmatrix} X$	$K^{\text{val}}$	$-\frac{1}{2}\rho^{\text{val}} U$	$\frac{1}{2}\rho^{\text{mar}} U$	$E_0^{\text{mar}}$	$E_2^{\text{mar}}$	$E_4^{\text{mar}}$
$\begin{smallmatrix} 40 \\ 20 \end{smallmatrix} \text{Ca}$	14.62	-18.06	-5.39	1.71	0.691	$-5.6 \cdot 10^{-5}$
$\begin{smallmatrix} 56 \\ 28 \end{smallmatrix} \text{Ni}$	16.10	-19.52	-6.20	2.04	0.687	$9.1 \cdot 10^{-4}$
$\begin{smallmatrix} 90 \\ 40 \end{smallmatrix} \text{Zr}$	16.04	-20.28	-7.11	2.45	0.592	$1.4 \cdot 10^{-4}$
$\begin{smallmatrix} 132 \\ 50 \end{smallmatrix} \text{Sn}$	16.74	-21.05	-7.60	2.68	0.531	$7.0 \cdot 10^{-6}$
$\begin{smallmatrix} 208 \\ 82 \end{smallmatrix} \text{Pb}$	16.83	-21.72	-8.37	3.04	0.459	$-1.0 \cdot 10^{-4}$

Tabla 6.4: *En diferentes columnas, la energía cinética de valencia, la energía potencial de valencia, menos la energía potencial del mar y la energía total de mar por nucleón en la aproximación de cuarto orden del mar de Dirac. La suma de todas la columnas da la energía de ligadura por nucleón. Se usan los parámetros asociados a orden segundo en esquema on-shell.*



## Capítulo 7

# Eliminación de la inestabilidad de Landau en el modelo $\sigma$ - $\omega$

### 7.1 Introducción

En el capítulo anterior, hemos dicho que el mar de Dirac es necesario para mantener la unitariedad de la teoría a nivel de campo medio. Además, las correcciones asociadas al mar no pueden considerarse despreciables, dado que contribuyen en un 5% a la energía de ligadura por nucleón (tras el necesario reajuste de los parámetros del lagrangiano). De hecho, la aproximación semiclásica converge rápidamente cuando se aplica al cálculo de la energía del mar. Esto parece sugerir que desde un punto de vista tanto teórico como fenomenológico, la descripción de las propiedades globales de los núcleos finitos es satisfactoria en el marco de una teoría cuántica de campos relativista y en la aproximación de campo medio.

Sin embargo, desde hace una década se sabe que tal descripción es internamente inconsistente [Pe87, Co87, Fu88]. El vacío de la teoría es inestable debido a la existencia de *ghosts* de Landau taquiónicos en los propagadores mesónicos en la región euclídea de altos momentos. Puede demostrarse que el vacío traslacionalmente invariante y a nivel de campo medio no corresponde a un mínimo de la energía en dicha aproximación. Cálculos numéricos confirman la existencia de configuraciones de extensión finita (del orden de 0.2 fm) que minimizan configuraciones con número bariónico cero. Este resultado es físicamente inaceptable. Dado que se trata de una inestabilidad a distancias cortas, es inobservable a nivel de un loop y en la aproximación semiclásica (que corresponde a un desarrollo asintótico de distancias grandes). Por idéntico motivo tampoco se pone de manifiesto al estudiar materia nuclear si la invariancia traslacional se impone a mano. No obstante la inestabilidad aparece explícitamente tanto en un cálculo a nivel de campo medio exacto



(un loop fermiónico) para núcleos finitos como en la determinación de la energía de correlación para materia nuclear (un loop fermiónico y un loop bosónico). En electrodinámica cuántica también se presenta una inestabilidad de este tipo aunque la escala en distancias a la que ocurre es muchísimo menor que el dominio de aplicación de la teoría. En hadrodinámica cuántica la inestabilidad aparece a una escala comparable con el tamaño de la masa del nucleón. En consecuencia la existencia de la inestabilidad contradice la motivación original que condujo a la introducción del modelo mismo. En tales circunstancias surgen varias posibilidades: primeramente puede argumentarse que el modelo sólo tiene sentido como teoría efectiva sujeta a limitaciones inherentes relacionadas con el mar de Dirac. A saber, el mar tiene que ser tratado semiclásicamente en el mejor de los casos. Esto reduce el dominio de aplicación del modelo. Una interpretación de este tipo es insatisfactoria desde el punto de vista intelectual dado que un tratamiento semiclásico resultaría ser una aproximación a una descripción de campo medio del todo inexistente. Otro punto de vista alternativo teniendo en cuenta el éxito fenomenológico del modelo, consiste en tomar más seriamente el espíritu de la propuesta original. Es decir, usar lagrangianos renormalizables específicos donde los grados de libertad básicos vengán representados por campos nucleónicos y mesónicos. Esta alternativa ha sido explorada en una serie de trabajos que a su vez se basan en trabajos desarrollados por Redmond y Bogoliubov a final de los años cincuenta en el marco de teorías no libres asintóticamente. El aspecto clave de esta clase de teorías es que solamente están definidas en un sentido perturbativo. De acuerdo con los autores anteriormente citados es posible suplementar la teoría con una prescripción que verifica de forma exacta la representación de Källén-Lehmann de una función de Green a dos puntos. Una propiedad notable del método propuesto consiste en que los polos de Landau se eliminan de forma que el contenido perturbativo de la teoría permanece inalterado. En particular la renormalizabilidad perturbativa de la teoría se mantiene. Una desventaja de dicha prescripción es que, hasta la fecha, no se ha generalizado a las funciones de Green de tres y más puntos para conseguir así una teoría de campos completamente bien definida. A pesar de que la prescripción para eliminar los fantasmas puede parecer un tanto arbitraria, no hay duda de que incorpora de una forma efectiva la propuesta original y suministra un esquema de cálculo factible.

En el marco de la física nuclear relativista, el método citado anteriormente ha sido explorado en el estudio de la energía de correlación de materia nuclear en el modelo  $\sigma$ - $\omega$  [Ta90]. En este capítulo estudiamos dicho modelo y calculamos las modificaciones inducidas por la eliminación de los fantasmas [Ca96c].



## 7.2 Método de Redmond

La unitariedad, espectralidad, invariancia Lorentz, causalidad y estabilidad de una teoría física imponen fuertes restricciones en las funciones de Green de la misma. En concreto, el propagador de un campo bosónico debe satisfacer la denominada representación de Källén-Lehmann, que establece que

$$\Delta(x - x') = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta_0(x - x', \sigma), \quad (7.1)$$

donde

$$\Delta(x - x') \equiv -i \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle, \quad (7.2)$$

es el propagador completo de la teoría, y

$$\Delta_0(x - x', \sigma) \equiv \int dp \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2 - \sigma^2 + i\epsilon} \quad (7.3)$$

es el propagador libre de una teoría con masa  $\sigma$ . La función  $\rho$  es la amplitud espectral,

$$\rho(q) \equiv (2\pi^3) \sum_n \delta^4(p_n - q) |\langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle|^2 \quad (7.4)$$

que mide la contribución al propagador de todos los estados propios del hamiltoniano con valores propios de energía-momento  $q$ . La amplitud espectral es una distribución que se anula fuera del cono de luz y es semidefinida positiva en el cono causal.

Al igual que lo que ocurre en otras teorías, entre las que se encuentra QED, cuando se efectúan cálculos de los propagadores bosónicos a nivel de un loop en las teorías de campos de Física Nuclear Relativista se observa que se contradice la representación de Källén-Lehmann debido a que el propagador presenta un polo taquiónico de tipo *ghost* de Landau (es decir, con residuo negativo), y en consecuencia la teoría en la aproximación indicada es inestable. En la línea de pensamiento de que la inestabilidad se debe a un artefacto de la aproximación, Redmond propuso a mitad de siglo imponer sobre los propagadores defectuosos el requerimiento de que cumplan la representación de Källén-Lehmann. Al hacerlo se introducen singularidades esenciales en las constantes de acoplamiento que no se sabe en que medida incorporan efectos reales de la teoría. Además el método no es generalizable a funciones de Green cualesquiera, pero al menos no introduce parámetros extra, lo que le confiere poder predictivo. En la aproximación a un loop el método de Redmond consiste en calcular el propagador por medio de la ecuación de Schwinger-Dyson y eliminar el *ghost* restándole el polo con el residuo correspondiente,

$$\Delta^{NG} = \Delta - \frac{R_G}{p^2 + M_G^2}. \quad (7.5)$$



Hasta hace poco el método de Redmond sólo se había aplicado a teorías a densidad cero, pero recientemente Tanaka, Bentz y Arima lo han aplicado al caso de materia nuclear relativista a densidad finita [Ta91]. Su prescripción es que no hay que aplicar el método a los propagadores en densidad finita desde el principio, sino que lo que hay que hacer es eliminar la inestabilidad del propagador en el vacío y usar éste para construir las funciones de Green a densidad constante. Según ellos, el procedimiento contrario conllevaría contradicciones; entre ellas que se rompería conservación de la corriente bariónica.

En las próximas secciones vamos a aplicar el método de Redmond al modelo  $\sigma$ - $\omega$  junto con los desarrollos semiclásicos del mar de Dirac obtenidos en el capítulo anterior.

### 7.3 Inestabilidad de Landau en el modelo $\sigma$ - $\omega$

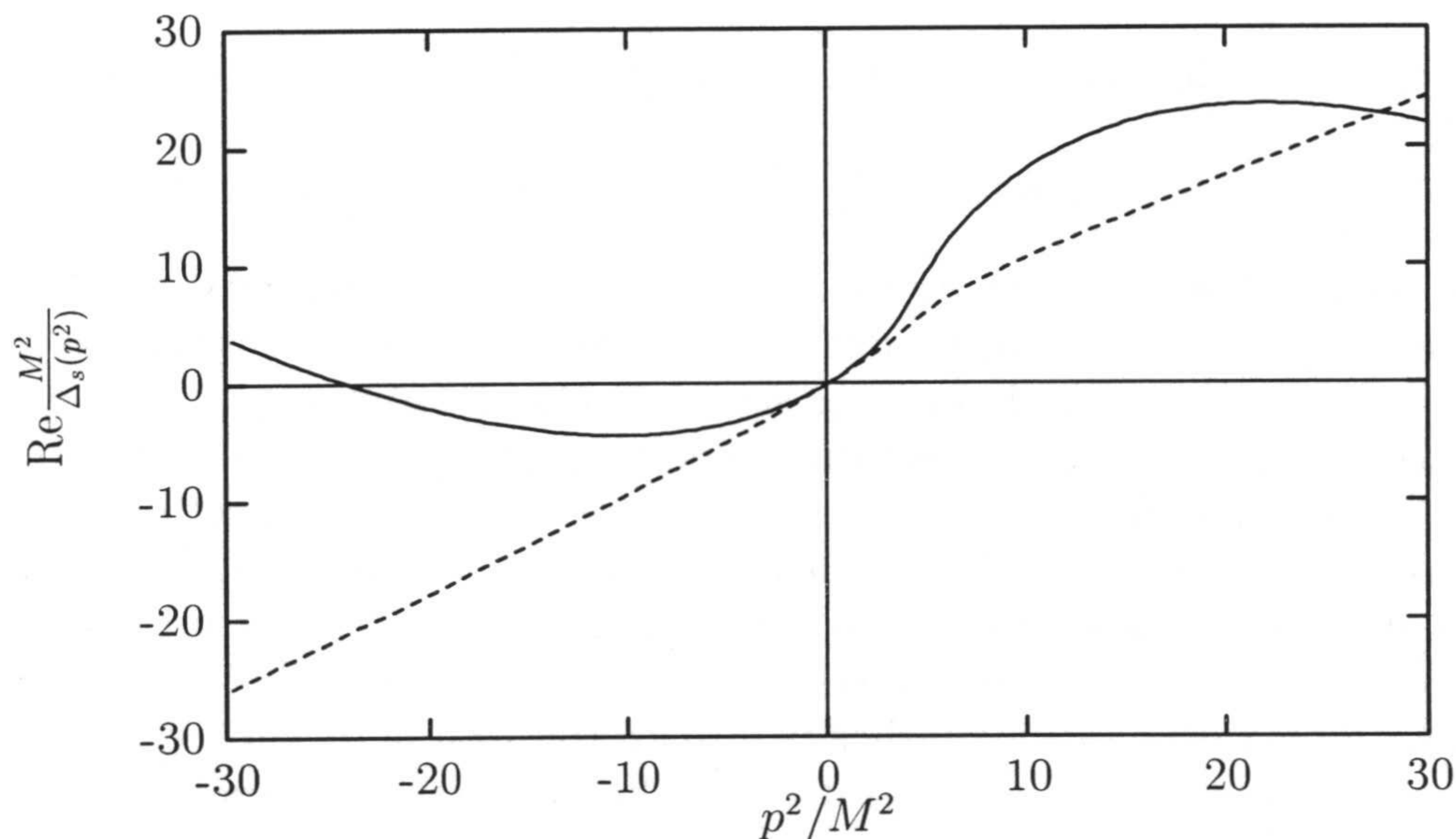


Figura 7.1: Parte real del inverso del propagador escalar. La línea continua se corresponde con el propagador a un loop con la ecuación de Schwinger-Dyson. La línea a trazos se corresponde con el método de Redmond.

En las figuras 7.1 y 7.2 representamos respectivamente la parte real y la parte imaginaria del inverso del propagador escalar libre calculado a un *loop* antes y después de eliminar la inestabilidad mediante el método de Redmond. Como se puede ver, el inverso del propagador antes de la sustracción presenta dos ceros de primer



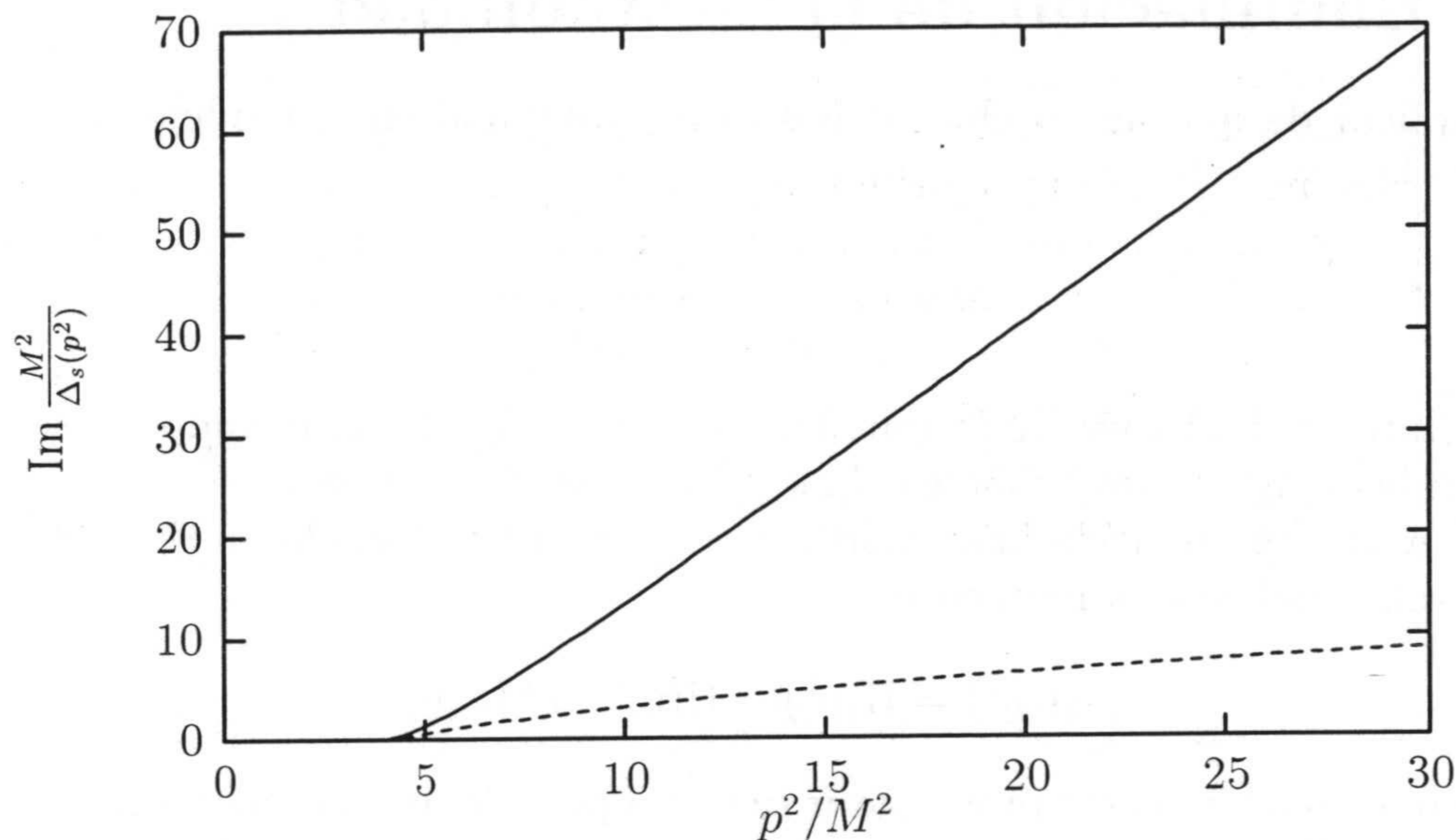


Figura 7.2: Parte imaginaria del inverso del propagador escalar. La línea continua se corresponde con el propagador a un loop con la ecuación de Schwinger-Dyson. La línea a trazos se corresponde con el método de Redmond. Nótese que en ambos casos la parte imaginaria comienza a ser diferente de cero para  $p^2 > 4 M^2$ .

orden; uno se corresponde con la partícula  $\sigma$ . El segundo cero se encuentra en la zona de momentos euclídeos, y por tanto la masa de la partícula asociada es imaginaria. En la práctica eso implica que su velocidad de propagación, que puede obtenerse de la relación de dispersión momento-energía, es superior a la velocidad de la luz, por lo que se le da el nombre de *polo taquiónico*. Además corta el eje de ordenadas con pendiente negativa; por ese motivo se dice que es un *ghost* de Landau. Ese polo es el que se elimina cuando se aplica el método de Redmond. La parte imaginaria de ambos propagadores sólo es diferente de cero más allá de dos veces la masa en energía. Eso era de esperar, porque sólo cuando la energía del bosón supera ese umbral se pueden generar pares fermión-antifermión, pasando el espectro de ser discreto a continuo.

El propagador de la partícula  $\omega$  presenta las mismas características generales que el de partícula  $\sigma$ .



## 7.4 Eliminación de la inestabilidad

Para explicar de que modo eliminamos la inestabilidad en el modelo  $\sigma$ - $\omega$  vamos a partir de la expresión del propagador

$$\Delta(p^2) = \frac{1}{p^2 - \tilde{m}^2 - \tilde{\Pi}(p^2)} \quad (7.6)$$

válida tanto para el caso de la partícula  $\sigma$  como para la  $\omega$ ; cuando no se indique índice en las magnitudes bosónicas quiere decir que los dos casos son prácticamente iguales. A lo largo de toda la sección vamos a considerar que la autoenergía propia,  $\tilde{\Pi}$ , está renormalizada a momento cero,

$$\tilde{\Pi}(p^2) = \Pi(p^2) - \Pi(0) - p^2 \Pi'(0). \quad (7.7)$$

Como hemos visto este propagador tiene un polo de masa imaginaria con residuo negativo que hace que la teoría sea inestable. La prescripción de Redmond consiste en eliminar la partícula por el procedimiento de restar la divergencia. Si llamamos  $M_G^2$  al opuesto de la posición del polo ( $M_G^2$  así definido es positivo) y  $R_G$  al residuo, el propagador sin la inestabilidad se escribe

$$\tilde{\Delta}^{\text{NG}}(p^2) = \tilde{\Delta}(p^2) - \frac{R_G}{p^2 + M_G^2}. \quad (7.8)$$

La forma cuadrática de la acción efectiva en el bosón correspondiente,  $\frac{1}{2}\tilde{K}(p^2)$ , está directamente relacionada con el inverso del propagador,

$$\tilde{K}(p^2) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(p^2)}; \quad (7.9)$$

si queremos eliminar la inestabilidad según la ec. (7.8) debemos introducir términos cuadráticos en la acción efectiva que produzcan el resultado deseado. En la práctica es equivalente estudiar cuál es la acción efectiva resultante tras la eliminación. Llamemos  $\tilde{K}^{\text{NG}}$  a la forma cuadrática cuando se ha sustraído el *ghost*,

$$\tilde{K}^{\text{NG}}(p^2) = \frac{(p^2 + M_G^2) \tilde{\Delta}^{-1}(p^2)}{p^2 + M_G^2 - R_G \tilde{\Delta}^{-1}(p^2)}, \quad (7.10)$$

y desarrollemos en momentos,

$$\tilde{K}^{\text{NG}}(p^2) = \sum_{n=0} \tilde{k}_n^{\text{ng}} p^n. \quad (7.11)$$



Los órdenes más bajos del desarrollo son

$$\begin{aligned}\tilde{k}_0^{\text{ng}} &= -\frac{M_G^2 \tilde{m}^2}{M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G} \\ \tilde{k}_2^{\text{ng}} &= \frac{M_G^4 - \tilde{m}^4 R_G}{(M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G)^2} \\ \tilde{k}_4^{\text{ng}} &= \frac{2(M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G)^2 R_G - M_G^4 (M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G) \Pi_0''}{2(M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G)^3}\end{aligned}\quad (7.12)$$

Esto significa que la parte cuadrática de la acción efectiva en el campo bosónico será de la forma

$$\tilde{A} = \dots + \frac{1}{2} \int \tilde{\phi} [\tilde{k}_0^{\text{ng}} + \tilde{k}_2^{\text{ng}} p^2 + \tilde{k}_4^{\text{ng}} p^4 + \dots] \tilde{\phi} + \int \tilde{g} \tilde{\phi} \rho + \dots \quad (7.13)$$

Al igual que hacemos en el apéndice E podemos reparametrizar el campo bosónico y la constante de acoplamiento para que el coeficiente en  $p^2$  sea la unidad. Para ello realizamos el cambio

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_2^{\text{ng}}}} \hat{\phi}, \quad \tilde{g} = \sqrt{\tilde{k}_2^{\text{ng}}} \hat{g}, \quad (7.14)$$

y definimos  $\hat{k}_n^{\text{ng}} \equiv \tilde{k}_n^{\text{ng}} / \tilde{k}_2^{\text{ng}}$ . Tras estas operaciones la acción efectiva puede escribirse como

$$\hat{A} = \dots + \frac{1}{2} \int \hat{\phi} [\hat{k}_0^{\text{ng}} + p^2 + \hat{k}_4^{\text{ng}} p^4 + \dots] \hat{\phi} + \int \hat{g} \hat{\phi} \rho + \dots \quad (7.15)$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar nuestros resultados semiclásicos del capítulo anterior. En primer lugar, notemos que las correcciones semiclásicas del mar a la energía son invariantes ante las transformaciones indicadas, pues un campo bosónico siempre aparece multiplicado por su constante de acoplamiento. Además hay que tener en cuenta que parte de la contribución de la forma cuadrática inicial ( $\tilde{K}$ ) a la energía está incluida en las correcciones semiclásicas, en concreto todas las contribuciones a partir de  $p^4$  inclusive.

De forma explícita, supongamos que  $\tilde{m}$  y  $\tilde{g}$  representan respectivamente la masa y la constante de acoplamiento de un bosón ajustados convenientemente para que la masa física,  $m$ , sea el polo del propagador con el residuo adecuado. En ese caso, hasta orden segundo en el desarrollo semiclásico del mar de Dirac, la supresión de la inestabilidad se consigue utilizando como parámetros del lagrangiano

$$\tilde{m}^2 = M_G^2 \tilde{m}^2 \frac{M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G}{M_G^4 - \tilde{m}^4 R_G} \quad (7.16)$$



como masa y

$$\widehat{g}^2 = \widetilde{g}^2 \frac{(M_G^2 + \widetilde{m}^2 R_G)^2}{M_G^4 - \widetilde{m}^4 R_G} \quad (7.17)$$

como constante de acoplamiento.

La forma general del funcional de la energía tras la eliminación de la inestabilidad es

$$E[\widetilde{g}, \widetilde{m}; \widehat{\phi}] = E_F[\widehat{g}; \widehat{\phi}] + E_B[\widehat{g}, \widehat{m}; \widehat{\phi}] + E_{\text{mar}}[\widehat{g}, \widehat{m}; \widehat{\phi}] + E_4^{\text{NG}}[\widehat{g}, \widehat{m}; \widehat{\phi}] + E_6^{\text{NG}}[\widehat{g}, \widehat{m}; \widehat{\phi}] + \dots \quad (7.18)$$

donde  $E_B$  se define en la ec. (5.20), y la expresión de  $E_4^{\text{NG}}$  que se obtiene de  $\widehat{k}_4^{\text{ng}}$  tras sustraer la parte incluida en  $E_4^{\text{mar}}$  es

$$E_4^{\text{NG}} = -\frac{1}{2} \widehat{\delta k}_4^s \int d^3x (\nabla^2 \widehat{\phi}_0)^2 + \frac{1}{2} \widehat{\delta k}_4^v \int d^3x (\nabla^2 \widehat{V}_0)^2 \quad (7.19)$$

donde

$$\widehat{\delta k}_4^s = \frac{R_{G_s}(M_{G_s}^2 + \widetilde{m}_s^2)^2}{(M_{G_s}^4 - \widetilde{m}_s^4 R_{G_s})(M_{G_s}^2 + \widetilde{m}_s^2 R_{G_s})} - \frac{\gamma \widetilde{g}_s^2}{160 \pi^2 M^2} \frac{2 \widetilde{m}_s^2 M_{G_s}^2 R_{G_s} + \widetilde{m}_s^4 R_{G_s}^2}{M_{G_s}^4 - \widetilde{m}_s^4 R_{G_s}} \quad (7.20)$$

y

$$\widehat{\delta k}_4^v = \frac{R_{G_v}(M_{G_v}^2 + \widetilde{m}_v^2)^2}{(M_{G_v}^4 - \widetilde{m}_v^4 R_{G_v})(M_{G_v}^2 + \widetilde{m}_v^2 R_{G_v})} - \frac{\gamma \widetilde{g}_v^2}{120 \pi^2 M^2} \frac{2 \widetilde{m}_v^2 M_{G_v}^2 R_{G_v} + \widetilde{m}_v^4 R_{G_v}^2}{M_{G_v}^4 - \widetilde{m}_v^4 R_{G_v}} \quad (7.21)$$

Podemos utilizar las ecs. (6.28) y (6.29) para calcular los cambios en la densidad vectorial y la densidad escalar inducidos por la sustracción. Con la reparametrización indicada las primeras correcciones aparecen en el orden cuarto, con

$$\rho_{v4}^{\text{NG}} = \frac{1}{\widehat{g}_v} \widehat{\delta k}_4^v \nabla^4 \widehat{V}_0 \quad (7.22)$$

y

$$\rho_{s4}^{\text{NG}} = \frac{1}{\widehat{g}_s} \widehat{\delta k}_4^s \nabla^4 \widehat{\phi}_0. \quad (7.23)$$

### 7.4.1 Materia Nuclear

Como ya hemos dicho en otros capítulos, las propiedades de materia nuclear del modelo  $\sigma$ - $\omega$  dependen únicamente de los parámetros  $C_s^2$  y  $C_v^2$  que se definen como

$$C_s^2 = g_s^2 \frac{M^2}{m_s^2}, \quad C_v^2 = g_v^2 \frac{M^2}{m_v^2}, \quad (7.24)$$



donde las masas bosónicas y las constantes de acoplamiento son las efectivas a momento cero. Estos dos parámetros son invariantes ante transformaciones de normalización de los campos bosónicos, como la indicada en la ec. (7.14), pero no lo son cuando se sustrae la inestabilidad. Nótese que, dadas unas propiedades de materia nuclear que se quieren reproducir, los valores numéricos que se obtienen para las  $C$ 's es siempre el mismo, independientemente de que se elimine o no la inestabilidad; lo que cambia es su relación con las propiedades físicas de las partículas.

En el caso de la supresión de la inestabilidad lo que se obtiene es

$$C^2 = \tilde{g}^2 M^2 \tilde{m}^2 \frac{M_G^2 + \tilde{m}^2 R_G}{\tilde{m}^2 M_G^2}, \quad (7.25)$$

con  $\tilde{g}$  y  $\tilde{m}$  la constante de acoplamiento calculadas a renormalización cero y  $R_G$  y  $M_G$  respectivamente el residuo y menos la masa del *ghost* asociados al propagador renormalizado a momento cero.

Vamos a suponer que, como haremos en la práctica, queremos imponer propiedades de materia nuclear (lo que fija el valor numérico de  $C_s$  y  $C_v$ ) y que el polo del propagador vectorial se encuentre en la masa física de la  $\omega$ ,  $m_v$ . Lo que hacemos para encontrar  $\tilde{m}_v$  y  $\tilde{g}_v$  es lo siguiente (las ecuaciones necesarias pueden deducirse del apéndice E):

1. Supongamos conocido  $\tilde{g}_v$ . Con ese valor podemos extraer el valor de  $\tilde{m}_v$  usando la ecuación

$$\tilde{m}_v^2 = m_v^2 + \frac{\gamma \tilde{g}_v^2}{8 \pi^2} M^2 \left\{ \frac{4}{3} + \frac{5}{9} \frac{m_v^2}{M^2} - \frac{2}{3} \left( 2 + \frac{m_v^2}{M^2} \right) \left( \frac{4 M^2}{m_v^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \arcsen \frac{m_v}{2 M} \right\}. \quad (7.26)$$

2. Con  $\tilde{g}_v$  y  $\tilde{m}_v$  se puede encontrar la posición y residuo del *ghost* taquiónico.  $M_{Gv}$  se despeja de

$$\kappa_v = \sqrt{1 + \frac{4 M^2}{M_{Gv}^2}} \quad (7.27)$$

donde  $f_v(\kappa_v) = 0$  con

$$f_v(\kappa) = -1 - \frac{\tilde{m}_v^2}{4 M^2} (\kappa^2 - 1) - \frac{\gamma \tilde{g}_v^2}{24 \pi^2} \left\{ \left( \frac{\kappa^3}{2} - \frac{3 \kappa}{2} \right) \log \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \kappa^2 + \frac{8}{3} \right\} \quad (7.28)$$

mientras que

$$\frac{1}{R_{Gv}} = 1 - \frac{\gamma \tilde{g}_v^2}{24 \pi^2} \left\{ \left( \frac{\kappa_v^3}{4} + \frac{3}{4 \kappa_v} \right) \log \frac{\kappa_v + 1}{\kappa_v - 1} - \frac{\kappa_v^2}{2} - \frac{1}{6} \right\}. \quad (7.29)$$



3. Con los valores de  $\tilde{g}_v^2$ ,  $\tilde{m}_v^2$ ,  $M_{Gv}^2$  y  $R_{Gv}$  se puede obtener el valor asociado de  $C_v(\tilde{g}_v)$ , que en general no coincidirá con el deseado. Se propone entonces un nuevo valor de  $\tilde{g}_v$  y se repite el proceso hasta que se llegue al valor correcto de  $C_v$ .

El caso del ajuste de la partícula  $\sigma$  es similar, aunque ligeramente más sencillo porque no hay que conseguir ningún valor concreto del polo físico. Por tanto, asociado a un  $\tilde{m}_s$  cualquiera se puede proponer un  $\tilde{g}_s$  y encontrar  $R_{Gs}$  y  $M_{Gs}$ . Con ellos se puede calcular  $C_s$  y ajustar  $\tilde{g}_s$  hasta obtener el valor de  $C_s$  correcto. El valor de  $\tilde{m}_s$  hay que fijarlo imponiendo algún criterio extra. Para obtener  $M_{Gs}$  buscamos el cero,  $\kappa_s$ , de la función

$$f_s(\kappa) = -1 - \frac{\tilde{m}_s^2}{4M^2}(\kappa^2 - 1) + \frac{\gamma \tilde{g}_s^2}{16\pi^2} \left\{ \kappa^3 \log \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - 2\kappa^2 - \frac{2}{3} \right\}. \quad (7.30)$$

La relación entre  $\kappa_s$  y  $M_{Gs}$  es la misma que en el caso vectorial. El valor del residuo del taquión escalar es

$$\frac{1}{R_{Gs}} = 1 + \frac{\gamma \tilde{g}_s^2}{16\pi^2} \left\{ \left( \frac{\kappa_s^3}{2} - \frac{3\kappa_s}{2} \right) \log \frac{\kappa_s + 1}{\kappa_s - 1} - \kappa_s^2 + \frac{8}{3} \right\}. \quad (7.31)$$

## 7.5 Resultados numéricos

Hemos realizado el mismo tipo de ajuste que se explicó en la sección 6.6, con las salvedades que acabamos de indicar. Por tanto los parámetros  $C_s^2$  y  $C_v^2$  son los que aparecen en la tabla 6.1 cuando se incluye el mar de Dirac. Antes de eliminar la inestabilidad, pero renormalizando correctamente, se encontraban los valores efectivos del lagrangiano,

$$\tilde{m}_v^{\text{In}} = 910.798 \text{ MeV}, \quad \tilde{g}_v^{\text{In}} = 11.7812.$$

Usando el proceso indicado en la sección anterior se encuentra

$$\tilde{m}_v = 978.592 \text{ MeV}, \quad \tilde{g}_v = 14.8635. \quad (7.32)$$

Los parámetros efectivos quedan

$$\widehat{m}_v = 786.094 \text{ MeV}, \quad \widehat{g}_v = 10.1681, \quad (7.33)$$

que se diferencian únicamente un 0.4% respecto de los parámetros obtenidos en lo que denominábamos *esquema Naïve* (véase la tabla 6.1). Con el ajuste realizado, las propiedades del taquión que se sustrae son

$$M_{Gv} = 1457.00 \text{ MeV}, \quad R_{Gv} = -0.609046. \quad (7.34)$$



Mar	$\tilde{m}_s$	$\tilde{g}_s$	$\widehat{m}_s$	$\widehat{g}_s$	$M_{G_s}$	$R_{G_s}$
0	370.88	5.99596	368.758	5.92777	4605.41	-1.74808
2	410.82	6.66388	407.081	6.54381	3863.04	-1.58440

Tabla 7.1: Ajuste de los parámetros de la partícula  $\sigma$ . Las magnitudes con tilde se asocian a parámetros a momento cero en el propagador inicial, mientras que los sombreros se refieren a los parámetros efectivos después de eliminar la inestabilidad.  $M_{G_s}^2$  es menos la masa al cuadrado del taquión que se elimina, y  $R_{G_s}$  es su residuo asociado al propagador a momento cero.

Las propiedades del propagador escalar asociadas a los órdenes cero y segundo en el desarrollo semiclásico del mar de Dirac se muestran en la tabla 7.1. Como se puede ver, los parámetros escalares efectivos también se diferencian muy poco (únicamente un 0.1%) de los asociados al esquema Näive.

Esta gran concordancia de parámetros efectivos sugiere que los cálculos semiclásicos incluyendo corrección del mar de Dirac y sustracción de la inestabilidad deben ser muy parecidos a aquellos conseguidos con el esquema de ajuste Näive. Y en efecto esto es lo que ocurre: hasta las cifras presentadas en las tablas 6.2 y 6.3 las dos aproximaciones son enteramente coincidentes.

Las corrección de cuarto orden debido a la supresión de la inestabilidad son despreciables, al igual que las debidas al mar de Dirac. Así pues, nuestra conclusión es que, al menos con el esquema de ajuste presentado y a nivel semiclásico, eliminar la inestabilidad de la teoría y ajustar usando las masas físicas como parámetros de momento cero es indistinguible hasta la cuarta cifra tanto para la energía como para el radio cuadrático medio.







## Conclusiones

Las conclusiones y logros más significativos de esta memoria de investigación son los siguientes:

- Hemos obtenido el sexto orden del desarrollo en derivadas covariantes de la traza del logaritmo de operadores elípticos en el momento generalizado,  $W = \text{Tr} \log [P^2 + U(X)]$ .
- Hemos relacionado los coeficientes del desarrollo de *heat kernel* con los del desarrollo de Chan.
- Hemos expresado el desarrollo semiclásico Wigner–Kirkwood del problema de muchos fermiones en términos del número de partículas, y éste como una traza de tipo  $W$ . Hemos obtenido dicho desarrollo semiclásico hasta cuarto orden en el caso no relativista en dimensión arbitraria.
- Se ha obtenido el sexto orden del desarrollo semiclásico del número de partículas en una dimensión.
- Hemos analizado en detalle los efectos de la inclusión perturbativa de la dependencia semiclásica del potencial químico.
- Se ha conectado Wigner–Kirkwood con WKB para problemas cuánticos sin degeneración.
- Hemos analizado la teoría del funcional del potencial autoconsistente en un modelo sencillo en 1+1 dimensiones. Hemos llegado a la conclusión que la autoconsistencia complica el contenido distributivo del desarrollo semiclásico y la dependencia funcional de la energía respecto al número de parámetros. Además hemos desarrollado un WKB autoconsistente. Se ha comprobado que sólo el primer orden semiclásico coinciden con el resultado cuántico.



- Se ha obtenido el desarrollo semiclásico hasta cuarto orden en sistemas fermiónicos relativistas con potencial escalar y potencial vector. En concreto se han proporcionado las formas explícitas de la densidad bariónica, la densidad escalar y la de energía. Hemos aplicado estos desarrollos al sector de valencia del modelo  $\sigma$ - $\omega$  con potenciales congelados y hemos encontrado una gran convergencia hacia el promedio de Strutinsky de la energía.
- Hemos dado una prescripción para reintroducir los términos distributivos que se ignoran cuando se escriben los desarrollos WK en su forma usual.
- Se han proporcionado dos prescripciones para tratar numéricamente las distribuciones en el cálculo de valores esperados semiclásicos.
- Hemos aplicado el desarrollo en derivadas de  $W$  a la renormalización de modelos relativistas de campo medio. Hemos obtenido la expresión de la contribución del mar de Dirac a la energía en el modelo de Walecka hasta cuarto orden en el desarrollo en gradientes de los potenciales bosónicos. Hemos calculado dicha contribución hasta orden cuarto, encontrando que el desarrollo ya ha convergido en el orden segundo.
- Hemos eliminado la inestabilidad de Landau del modelo  $\sigma$ - $\omega$  y hemos proporcionado una prescripción para incluir la sustracción del *ghost* y el mar de Dirac hasta segundo orden sin coste adicional.



## Apéndice A

# Optimización algebraica de expresiones covariantes gauge

En este apéndice vamos a explicar el proceso concreto que nos permitió escribir los coeficientes invariantes *gauge* de la tabla 2.2 de modo que los operadores momento únicamente aparecieran en el interior de conmutadores (tabla 2.3), esto es, mostrando explícitamente la invariancia. Seguiremos con la notación establecida en la sección 2.3, donde llamábamos *monomios* al producto de cierto número de operadores  $P_\mu$  y del mismo número de operadores  $\Delta$  y *términos* a aquellos objetos contruidos con bloques covariantes. Tanto monomios como términos se consideran módulo propiedad cíclica (aparecen dentro de una traza) y se identifican con la semisuma con sus simétricos ante transformación de trasposición.

Como ya indicábamos en la citada sección, las identidades de Jacobi (ecs. (2.29)) y la integración por partes inducían una gran dependencia lineal entre unos términos y otros, lo que dejaba gran libertad para expresar los mismos monomios con diferentes combinaciones de términos.

En la literatura ya se había resuelto el problema de los órdenes segundo y cuarto [Ch86]. Para tratar el orden sexto generamos mediante manipulación simbólica todos los términos posibles que involucrasen seis operadores momento, encontrando 1492 términos no nulos diferentes. Al efectuar su desarrollo en monomios se veía que sólo 365 eran independientes. El espacio de monomios es de dimensión 645, bastante mayor que 365 porque muchos monomios no admiten una expresión invariante *gauge*. En lugar de utilizar alguno de los programas de cálculo algebraico del mercado, encontramos más conveniente escribir programas en C para efectuar estas manipulaciones incorporando todas las simetrías que se iban necesitando: propiedad cíclica, simetría ante trasposición, etc.

Un método de fuerza bruta para expresar la combinación de monomios de la



tabla 2.2 en forma explícitamente invariante *gauge* sería coger un conjunto de 365 términos covariantes independientes —una base del subespacio invariante *gauge* del espacio de monomios— y ajustar los coeficientes invirtiendo la matriz del sistema de ecuaciones. Sin embargo, tal método produciría una expresión con unos trescientos términos no nulos; demasiados para que fuese útil al intentar aplicarla a casos prácticos. Para reducir el número de términos hay que utilizar la libertad de elección del conjunto de vectores independientes que forman la base. Una forma de hacerlo es la siguiente: sea  $x$  el vector combinación de monomios que queremos reproducir ( $\Theta_6$  en la tabla 2.2), y sea  $\{v_n, n = 1, \dots, N\}$  el conjunto de todos los términos invariante *gauge*,  $N = 1492$ . Entonces las relaciones

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^N a_n v_n, \\ a_m &= 0 \quad \text{si } v_m = \sum_{k < m} b_{mk} v_k, \end{aligned} \tag{A.1}$$

determinan los coeficientes  $a_n$  unívocamente. El conjunto  $\{a_n\}$  depende del orden de los vectores  $\{v_n\}$  que se haya escogido, ya que no constituyen un conjunto linealmente independiente. Un método práctico para encontrar una buena ordenación consiste en provocar trasposiciones a partir de un conjunto dado y mantener aquellas mutaciones que proporcionen una expresión mejor, esto es, que contengan un mayor número de coeficientes nulos. Ciertas particularidades del método, como el tipo de permutaciones admitidas y con que probabilidad se aceptaba un cambio que no fuese en la dirección buscada, fueron establecidas mediante ensayo y error. Por supuesto el método no garantiza que la solución encontrada sea óptima.

En la práctica el número de vectores asociado era demasiado grande y el proceso de optimización indicado era muy lento. Para mejorar el método inmediatamente uno trata de recurrir a las simetrías del problema. En efecto, una simetría introduce leyes de conservación que reducen los subespacios lineales involucrados, y por tanto el número de ecuaciones a resolver. Sin embargo, ya habíamos utilizado todas las simetrías obvias: (a) propiedad cíclica de la traza, (b) simetría ante trasposición, (c) invariancia *gauge*, (d) número de  $P_\mu$  y escala dimensional, (e) invariancia rotacional, paridad en el espacio de  $k_\mu$  e invariancia ante cambio de índices mudos. Es más, el conjunto de términos  $\{v_n, n = 1, \dots, 1492\}$  no admite una partición en subconjuntos mutuamente independientes: a partir de un término invariante se pueden generar todos los demás aplicando repetidamente integración por partes y las identidades de Jacobi.

Sin embargo, en el problema existen simetrías aproximadas que reflejan el hecho de que nuestra expresión no es un vector escogido al azar. Los 28 monomios que intervienen en  $\Theta_6$  tienen la particularidad de que en ellos los operadores  $P_\mu$  aparecen



o aislados o en bloques  $P^2$ , y no de otra forma como podría ser en grupos  $P_\mu P_\nu$  o con tres o más  $P_\mu$ 's. Como se puede ver del desarrollo teórico (ec. (2.22)) este resultado se mantiene a todos los órdenes. Esta regla de selección aproximada nos permitió encontrar una expresión de 51 términos aplicando el algoritmo explicado anteriormente restringiéndonos al subconjunto de 560 términos que no contienen en su desarrollo en monomios tres o más  $P_\mu$ 's juntos.

La estrategia que finalmente dió el mejor resultado fue la siguiente. Si debido a alguna simetría aproximada u oculta el número de términos requeridos fuese pequeño, entonces esto también habría de manifestarse en casos particulares del problema. Consideramos en primer lugar el caso en el que  $[P_\mu, P_\nu] = 0$ . Esto es equivalente a identificar términos que sólo se diferencien en el orden en el que se aplican derivadas acumuladas y eliminar aquellos que contengan algún tensor  $F_{\mu\nu}$ . En el espacio de monomios es equivalente a identificar monomios módulo trasposición de operadores  $P_\mu$  vecinos. En ese caso sólo aparecen 177 términos invariante *gauge* diferentes, de los cuales 77 son linealmente independientes. Aplicamos entonces nuestro algoritmo consiguiendo una expresión con 19 términos. A continuación escogimos un orden concreto para los índices Lorentz de esos 19 términos; en la mayoría de ellos la elección era única imponiendo unas pocas prescripciones como procurar simetría ante trasposición. Por construcción, el resto de sustraer del total esos 19 términos se puede expresar como combinación de términos que contienen al menos un tensor  $F_{\mu\nu}$ . Aplicamos la misma técnica de optimización al problema de reproducir ese resto. Para hacerlo se consideraron los 316 términos con sólo un factor  $F_{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu\rho}$  o  $F_{\mu\nu\rho\sigma}$  módulo  $[P_\mu, P_\nu] = 0$  en los otros factores. La mejor expresión que se consiguió tenía 20 términos. De nuevo se escogió un orden para los índices y se sustrajo la mejor expresión que incluía como mucho un tensor  $F_{\mu\nu}$ ; el resto debería poder ajustarse con términos que contuviesen al menos dos tensores. Este resto fue optimizado considerando todos los términos con dos o más  $F_{\mu\nu}$ , proporcionando la expresión final de  $\Theta_6$  con 45 términos invariantes *gauge* que se encuentra recogida en la tabla 2.3.







## Apéndice B

# Relación entre el desarrollo TrLog y el desarrollo heat kernel

El desarrollo en gradientes que se consiguió en la sección 2.3 es perturbativo en el operador  $P_\mu$  pero no lo es en el campo  $U(x)$  que en general es una matriz en el espacio de grados de libertad internos. El desarrollo *heat kernel* [Ba89] se obtiene redesarrollando en potencias de  $U(x)$ , lo que permite efectuar las integrales en momentos. Supongamos que  $P^2 + U(x)$  es hermítico y definido positivo, y sea  $U(x) = m^2 + Y(x)$ , donde  $m$  es una masa  $c$ -numérica. En ese caso se puede definir un operador  $F$  tal que se cumpla

$$\begin{aligned} \langle x | \exp \{-\tau (P^2 + U(X))\} | y \rangle &= \langle x | \exp \{-\tau (-\partial^2 + m^2)\} | y \rangle \langle x | F(\tau) | y \rangle \\ \langle x | \exp \{-\tau (-\partial^2 + m^2)\} | y \rangle &= (4\pi\tau)^{-D/2} \exp \left( -\frac{(x-y)^2}{4\tau} - m^2 \tau \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

El operador  $F$  admite un desarrollo asintótico alrededor de  $\tau = 0$ ,

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n, \quad (\text{B.2})$$

donde los operadores  $a_n$  son polinomios en  $P_\mu^d Y^q$ ,  $n = \frac{1}{2}d + q$ . Por medio de la identidad

$$\log(x) = \log(x_0) - \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} (e^{-\tau x} - e^{-\tau x_0}) \quad (\text{B.3})$$

válida para  $x_0, x > 0$ , se llega a

$$\text{Tr} \log (P^2 + U(X)) = \text{Tr} \log (-\partial^2 + m^2) - \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} (4\pi\tau)^{-D/2} e^{-m^2 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n. \quad (\text{B.4})$$



La masa  $m^2$  se introdujo para regular la divergencia infrarroja. La divergencia ultravioleta puede regularse, por ejemplo, dimensionalmente. Por otro lado, nuestra expresión covariante de  $\text{Tr log}(P^2 + U)$  (tabla 2.3) se puede desarrollar en potencias de  $Y$  usando  $\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Delta_o^{n+1} Y^n$  y  $\Delta_o = (k^2 + m^2)^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Tr log}(P^2 + U) &= \text{Tr log}(-\partial^2 + m^2) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{2n} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\Gamma(D/2) (k^2)^{d/2} \Delta_o^{n+d/2}}{2^{d/2} \Gamma((D+d)/2)} I_{n,d}(P, Y), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde  $I_{n,d}(P, Y)$  es de la forma  $Y^{n-d/2} P^d$  y  $d$  es par. Las integrales en momento pueden calcularse gracias a la regularización

$$\Delta_o^n = \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \frac{\tau^n}{\Gamma(n)} e^{-(k^2+m^2)\tau} \quad (\text{B.6})$$

y comparando con la expresión (B.4) se obtienen los coeficientes de Seeley-DeWitt  $b_n = \text{Tr } a_n$ ,

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_n &= - \sum_{d=0}^{2n} 2^{-d/2} \Gamma\left(n + \frac{d}{2}\right)^{-1} I_{n,d}(P, Y), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Ahora podemos hacer  $m^2 = 0$  e  $Y(x) = U(x)$ . Nuestra fórmula reproduce  $b_1, b_2, b_3$  [Ba89, Ve85] y también contiene aquellos elementos de hasta seis índices Lorentz que intervienen en los coeficientes de órdenes superiores. Hemos comprobado algunos de ellos con la referencia [Ve85].



## Apéndice C

# Desarrollo de las densidades relativistas

Con el método Tr-Log hemos conseguido un desarrollo en  $\hbar$  del número de estados (ecs. (4.50) ó (4.51)). Por otra parte, las ecs. (4.19-4.21) permiten calcular —conocida la dependencia funcional del número de estados en los potenciales vectorial y escalar— la densidad bariónica,  $\rho$ , la densidad escalar,  $\rho_s$ , y la densidad de energía,  $\rho_E$ . Utilizando en esas ecuaciones el desarrollo en  $\hbar$  del número de estados se transmite la aproximación semiclásica a las densidades.

Las derivadas funcionales se calculan a través de la ec. (4.58). Lamentablemente, conforme se incrementa el orden del desarrollo el número de términos generados se hace más grande, hasta el punto de que en el orden cuarto sólo es viable efectuar los procesos de manipulación computacionalmente. A continuación hay que efectuar las integrales en energía. En este punto conviene particularizar el problema a un espacio de dimensión dada; nosotros lo tomamos tridimensional. Estos procesos fueron implementados en rutinas para la versión 2.0 del programa *MATHEMATICA*. Las ecuaciones de partida fueron las (4.50).

Con todo esto llegamos al desarrollo de las densidades

$$\begin{aligned}\rho^+(x, \mu) &= \rho_0^+(x, \mu) + \rho_2^+(x, \mu) + \rho_4^+(x, \mu) + \dots \\ \rho_s^+(x, \mu) &= \rho_{s0}^+(x, \mu) + \rho_{s2}^+(x, \mu) + \rho_{s4}^+(x, \mu) + \dots \\ \rho_E^+(x, \mu) &= \rho_{E0}^+(x, \mu) + \rho_{E2}^+(x, \mu) + \rho_{E4}^+(x, \mu) + \dots, \end{aligned} \tag{C.1}$$

válidas para un espacio de dimensión tres. Los términos del desarrollo para la densidad bariónica, la escalar y la de energía fermiónica se encuentran recogidos, respectivamente, en las tablas C.1, C.2 y C.3. Los órdenes 0 y 2 ya habían sido calculados [Ce90, Vo92a, Ce93]. El orden 4 es un resultado original, si bien se



conocía la expresión de la densidad bariónica para el caso de hamiltonianos sin potencial escalar [Po91].

Se han utilizado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_F(x, \mu) &\equiv \mu - V(x) \\
 k_F(x, \mu) &\equiv \sqrt{\epsilon_F^2 - \Phi(x)^2} \\
 x_F(x, \mu) &\equiv \frac{\epsilon_F}{k_F} \\
 l_F(x, \mu) &\equiv \log \frac{\epsilon_F + k_F}{\Phi}.
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Es importante tener en cuenta que en esas expresiones se han omitido términos distributivos, por lo que estrictamente sólo son válidas para aquellos puntos que no pertenezcan a la superficie de retroceso, caracterizada por  $k_F^2 = 0$ . Si se quieren reintroducir hay que utilizar el convenio de potencias negativas de  $k_F$  (ec. (4.62)),

$$k_F^{-m} \Theta(\mu - V - \Phi) \rightarrow -2^m \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \partial_{\Phi^2}^{\frac{m+1}{2}} [k_F \Theta(\mu - V - \Phi)]. \tag{C.3}$$

Para utilizar este convenio hay que sustituir  $x_F$  por  $\epsilon_F/k_F$ . Al efectuar promedios, las derivadas que han aparecido se pueden conmutar con las integrales introduciendo un nuevo parámetro, como se explica al final de la sección 4.2, ec. (4.52):

$$\begin{aligned}
 &\int d^3x g[x, \Phi] \partial_{\Phi^2}^n [f[\Phi^2] \Theta(\pm(E - V) - \Phi)] = \\
 &= \partial_{\lambda^2}^n \int d^3x g[x, \Phi] f[\Phi^2 + \lambda^2] \Theta(\pm(E - V) - \sqrt{\Phi^2 + \lambda^2}) \Big|_{\lambda=0}.
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

En el caso en que se tenga simetría radial no es necesario utilizar el convenio de potencias negativas de  $k_F$ . En su lugar puede usarse la regularización indicada en la sección 5.2.2.



$\rho_0^+ = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \Theta(\mu - V - \Phi)$
$\rho_2^+ = \frac{1}{24\pi^2\hbar} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k_F} (2 - x_F^2) (\nabla\Phi)^2 + \frac{2}{\Phi} x_F (3 - x_F^2) (\nabla_i\Phi)(\nabla_iV) \\ & + \frac{1}{k_F} (3 - x_F^2) (\nabla V)^2 - \frac{2}{k_F} \Phi (\nabla^2\Phi) - 2(x_F + 2l_F) (\nabla^2V) \end{aligned} \right\} \Theta(\mu - V - \Phi)$
$\rho_4^+ = \frac{\hbar}{24\pi^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{10k_F^3} \Phi (\nabla^4\Phi) + \frac{1}{10\Phi^2} x_F (-5 + x_F^2) (\nabla^4V) \\ & + \frac{1}{20k_F^3} (-5 + 4x_F^2) (\nabla_i\nabla_j\Phi)^2 + \frac{1}{60k_F^3} (-19 + 12x_F^2) (\nabla_i\nabla_jV)^2 \\ & + \frac{1}{30\Phi^3} x_F (45 - 35x_F^2 + 12x_F^4) (\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_i\nabla_jV) \\ & + \frac{3}{10\Phi^3} x_F (5 - 5x_F^2 + 2x_F^4) (\nabla_iV)(\nabla_i\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{10k_F^3} (-7 + 6x_F^2) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i\nabla^2\Phi) + \frac{1}{5k_F^3} (-5 + 3x_F^2) (\nabla_iV)(\nabla_i\nabla^2V) \\ & + \frac{1}{5\Phi^3} x_F (15 - 10x_F^2 + 3x_F^4) (\nabla_i\nabla^2V)(\nabla_i\Phi) \\ & + \frac{1}{10k_F^5} \Phi (-14 + 15x_F^2) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{1}{10\Phi^4} x_F (-75 + 125x_F^2 - 102x_F^4 + 30x_F^6) (\nabla_iV)(\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{1}{30\Phi^4} x_F (-135 + 205x_F^2 - 159x_F^4 + 45x_F^6) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i\nabla_jV)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{3}{k_F^7} \Phi^3 (\nabla_iV)(\nabla_i\nabla_jV)(\nabla_j\Phi) + \frac{1}{80k_F^5} (96 - 280x_F^2 + 175x_F^4) (\nabla\Phi)^4 \\ & + \frac{1}{60\Phi^5} x_F (900 - 2455x_F^2 + 3351x_F^4 - 2145x_F^6 + 525x_F^8) (\nabla_i\Phi)(\nabla_iV)(\nabla\Phi)^2 \\ & + \frac{1}{8k_F^5} (18 - 55x_F^2 + 35x_F^4) (\nabla V)^2 (\nabla\Phi)^2 \\ & + \frac{1}{12\Phi^4} x_F (-54 + 73x_F^2 - 54x_F^4 + 15x_F^6) (\nabla^2V)(\nabla\Phi)^2 \\ & + \frac{1}{10k_F^5} \Phi (-13 + 15x_F^2) (\nabla_iV)(\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_jV) \\ & + \frac{1}{30\Phi^4} x_F (-90 + 185x_F^2 - 156x_F^4 + 45x_F^6) (\nabla_iV)(\nabla_i\nabla_jV)(\nabla_jV) \\ & + \frac{1}{20k_F^5} (89 - 275x_F^2 + 175x_F^4) (\nabla_i\Phi)(\nabla_iV)(\nabla_j\Phi)(\nabla_jV) \\ & + \frac{1}{60\Phi^5} x_F (675 - 2270x_F^2 + 3264x_F^4 - 2130x_F^6 + 525x_F^8) (\nabla V)^2 (\nabla_i\Phi)(\nabla_iV) \\ & + \frac{1}{10k_F^5} \Phi (-26 + 25x_F^2) (\nabla^2V)(\nabla_i\Phi)(\nabla_iV) \\ & + \frac{1}{80k_F^5} (63 - 270x_F^2 + 175x_F^4) (\nabla V)^4 \\ & + \frac{1}{20k_F^5} \Phi (-18 + 25x_F^2) (\nabla\Phi)^2 (\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{30\Phi^4} x_F (-135 + 265x_F^2 - 237x_F^4 + 75x_F^6) (\nabla_i\Phi)(\nabla_iV)(\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{4k_F^5} \Phi (-3 + 5x_F^2) (\nabla V)^2 (\nabla^2\Phi) + \frac{1}{20k_F^3} (-3 + 5x_F^2) (\nabla^2\Phi)^2 \\ & + \frac{1}{6\Phi^3} x_F (9 - 8x_F^2 + 3x_F^4) (\nabla^2V)(\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{60\Phi^4} x_F (-135 + 305x_F^2 - 261x_F^4 + 75x_F^6) (\nabla V)^2 (\nabla^2V) \\ & + \frac{1}{60k_F^3} (-26 + 15x_F^2) (\nabla^2V)^2 + \frac{1}{\hbar^4 k_F} F_{ij}^2 \end{aligned} \right\} \Theta(\mu - V - \Phi)$

Tabla C.1: Desarrollo semiclásico de la densidad bariónica relativista en dimensión tres.



$\rho_{s0}^+ = \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \{ \epsilon_F k_F \Phi - \Phi^3 l_F \} \Theta(\mu - V - \Phi)$
$\rho_{s2}^+ = \frac{1}{24\pi^2 \hbar} \left\{ -\frac{1}{\Phi} x_F (2 + x_F^2) (\nabla\phi)^2 - \frac{2}{k_F} \Phi (\nabla^2 V) - \frac{2}{k_F} (2 + x_F^2) (\nabla_i \Phi)(\nabla_i V) \right. \\ \left. + \frac{1}{\Phi} x_F (1 + x_F^2) (\nabla V)^2 + 2(-x_F + 3l_F) (\nabla^2 \Phi) \right\} \Theta(\mu - V - \Phi)$
$\rho_{s4}^+ = \frac{\hbar}{24\pi^2} \left\{ \frac{1}{10\Phi^2} x_F (2 + x_F^2) (\nabla^4 \Phi) + \frac{1}{10k_F^3} \Phi (\nabla^4 V) \right. \\ + \frac{1}{60\Phi^3} x_F (-21 - 13x_F^2 + 12x_F^4) (\nabla_i \nabla_j \Phi)^2 + \frac{5}{4k_F^5} \Phi x_F^2 (\nabla^2 V)(\nabla\Phi)^2 \\ + \frac{1}{10k_F^3} (1 + 4x_F^2) (\nabla_i \nabla_j \Phi)(\nabla_i \nabla_j V) + \frac{1}{20k_F^5} \Phi (3 + 25x_F^2) (\nabla V)^2 (\nabla^2 V) \\ + \frac{1}{60\Phi^3} x_F (-9 - 17x_F^2 + 12x_F^4) (\nabla_i \nabla_j V)^2 + \frac{1}{2k_F^3} x_F^2 (\nabla^2 V)(\nabla^2 \Phi) \\ + \frac{3}{5\Phi^3} x_F (-2 - x_F^2 + x_F^4) (\nabla_i \Phi)(\nabla_i \nabla^2 \Phi) \\ + \frac{1}{5k_F^3} (2 + 3x_F^2) (\nabla_i V)(\nabla_i \nabla^2 \Phi) + \frac{1}{10k_F^3} (-1 + 6x_F^2) (\nabla_i \nabla^2 V)(\nabla_i \Phi) \\ + \frac{3}{10\Phi^3} x_F (-1 - 3x_F^2 + 2x_F^4) (\nabla_i V)(\nabla_i \nabla^2 V) \\ + \frac{1}{30\Phi^4} x_F (60 + 35x_F^2 - 96x_F^4 + 45x_F^6) (\nabla_i \Phi)(\nabla_i \nabla_j \Phi)(\nabla_j \Phi) \\ + \frac{3}{5k_F^5} \Phi (2 + 5x_F^2) (\nabla_i V)(\nabla_i \nabla_j \Phi)(\nabla_j \Phi) \\ + \frac{1}{10k_F^5} \Phi (4 + 15x_F^2) (\nabla_i \Phi)(\nabla_i \nabla_j V)(\nabla_j \Phi) \\ + \frac{1}{10\Phi^4} x_F (15 + 35x_F^2 - 66x_F^4 + 30x_F^6) (\nabla_i V)(\nabla_i \nabla_j V)(\nabla_j \Phi) \\ + \frac{1}{80\Phi^5} x_F (-160 - 80x_F^2 + 507x_F^4 - 530x_F^6 + 175x_F^8) (\nabla\Phi)^4 \\ + \frac{1}{4k_F^5} (-8 - 18x_F^2 + 35x_F^4) (\nabla_i \Phi)(\nabla_i V)(\nabla\Phi)^2 \\ + \frac{1}{24\Phi^5} x_F (-30 - 85x_F^2 + 309x_F^4 - 315x_F^6 + 105x_F^8) (\nabla V)^2 (\nabla\Phi)^2 \\ + \frac{1}{30\Phi^4} x_F (30 + 40x_F^2 - 93x_F^4 + 45x_F^6) (\nabla_i V)(\nabla_i \nabla_j \Phi)(\nabla_j V) \\ + \frac{1}{2k_F^5} \Phi (1 + 3x_F^2) (\nabla_i V)(\nabla_i \nabla_j V)(\nabla_j V) \\ + \frac{1}{60\Phi^5} x_F (-165 - 415x_F^2 + 1542x_F^4 - 1575x_F^6 + 525x_F^8) ((\nabla_i \Phi)(\nabla_i V))^2 \\ + \frac{1}{4k_F^5} (-6 - 17x_F^2 + 35x_F^4) (\nabla V)^2 (\nabla_j \Phi)(\nabla_j V) \\ + \frac{1}{30\Phi^4} x_F^3 (130 - 183x_F^2 + 75x_F^4) (\nabla^2 V)(\nabla_j \Phi)(\nabla_j V) \\ + \frac{1}{240\Phi^5} x_F (-135 - 400x_F^2 + 1506x_F^4 - 1560x_F^6 + 525x_F^8) (\nabla V)^4 \\ + \frac{1}{60\Phi^4} x_F (120 + 50x_F^2 - 159x_F^4 + 75x_F^6) (\nabla\Phi)^2 (\nabla^2 \Phi) \\ + \frac{1}{10k_F^5} \Phi (11 + 25x_F^2) (\nabla_i \Phi)(\nabla_i V)(\nabla^2 \Phi) \\ + \frac{1}{12\Phi^4} x_F (6 + 13x_F^2 - 30x_F^4 + 15x_F^6) (\nabla V)^2 (\nabla^2 \Phi) \\ + \frac{1}{60\Phi^3} x_F (-33 - 14x_F^2 + 15x_F^4) (\nabla^2 \Phi)^2 \\ \left. + \frac{1}{60\Phi^3} x_F (18 - 31x_F^2 + 15x_F^4) (\nabla^2 V)^2 + \frac{1}{\hbar^4 \Phi} x_F F_{ij}^2 \right\} \Theta(\mu - V - \Phi)$

Tabla C.2: Desarrollo semiclásico de la densidad escalar relativista en dimensión tres.



$\rho_{E0}^+ = \frac{1}{8\pi^2 \hbar^3} \{ \epsilon_F^3 k_F + \epsilon_F k_F^3 - \Phi^4 l_F \} \Theta(\mu - V - \Phi) + \rho_0^+ V$
$\rho_{E2}^+ = \frac{1}{24\pi^2 \hbar} \left\{ 2\Phi(-x_F + l_F)(\nabla^2\Phi) - 2\frac{\Phi^3}{k_F^3}(\nabla_i\Phi)(\nabla_i V) - 2k_F(1+x_F^2)(\nabla^2 V) \right. \\ \left. + (x_F - x_F^3 - l_F)(\nabla\Phi)^2 + (2x_F - x_F^3 - 2l_F)(\nabla V)^2 \right\} \Theta(\mu - V - \Phi) + \rho_2^+ V$
$\rho_{E4}^+ = \frac{\hbar}{24\pi^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{10\Phi} x_F^3 (\nabla^4\Phi) & + & \frac{1}{10k_F} (-3 + x_F^2) (\nabla^4 V) \\ & + \frac{1}{60\Phi^2} x_F^3 (-23 + 12x_F^2) (\nabla_i\nabla_j\Phi)^2 + \frac{1}{30k_F^3} \Phi (-7 + 12x_F^2) (\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_i\nabla_j V) \\ & + \frac{1}{20\Phi^2} x_F^3 (-9 + 4x_F^2) (\nabla_i\nabla_j V)^2 + \frac{1}{10\Phi^2} x_F^3 (-11 + 6x_F^2) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{10k_F^3} \Phi (-1 + 6x_F^2) (\nabla_i V)(\nabla_i\nabla^2\Phi) & + & \frac{3}{5k_F^5} \Phi^3 (\nabla_i\nabla^2 V)(\nabla_i\Phi) \\ & + \frac{1}{5\Phi^2} x_F^3 (-7 + 3x_F^2) (\nabla_i V)(\nabla_i\nabla^2 V) \\ & + \frac{1}{30\Phi^3} x_F^3 (100 - 123x_F^2 + 45x_F^4) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{1}{10k_F^3} (1 - 36x_F^2 + 30x_F^4) (\nabla_i V)(\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{1}{6k_F^3} (1 - 12x_F^2 + 9x_F^4) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i\nabla_j V)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{1}{5\Phi^3} x_F^3 (35 - 42x_F^2 + 15x_F^4) (\nabla_i V)(\nabla_i\nabla_j V)(\nabla_j\Phi) \\ & + \frac{1}{48\Phi^4} x_F^3 (-208 + 444x_F^2 - 363x_F^4 + 105x_F^6) (\nabla\Phi)^4 \\ & + \frac{1}{20k_F^5} \Phi (-6 - 165x_F^2 + 175x_F^4) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i V)(\nabla\Phi)^2 \\ & + \frac{5}{24\Phi^4} x_F^3 (-40 + 87x_F^2 - 72x_F^4 + 21x_F^6) (\nabla V)^2(\nabla\Phi)^2 \\ & + \frac{1}{12k_F^3} (4 - 21x_F^2 + 15x_F^4) (\nabla^2 V)(\nabla\Phi)^2 \\ & + \frac{1}{6\Phi^3} x_F^3 (19 - 24x_F^2 + 9x_F^4) (\nabla_i V)(\nabla_i\nabla_j\Phi)(\nabla_j V) \\ & + \frac{1}{30k_F^3} (-8 - 57x_F^2 + 45x_F^4) (\nabla_i V)(\nabla_i\nabla_j V)(\nabla_j V) \\ & + \frac{1}{60\Phi^4} x_F^3 (-995 + 2172x_F^2 - 1800x_F^4 + 525x_F^6) ((\nabla_i\Phi)(\nabla_i V))^2 \\ & + \frac{1}{20k_F^5} \Phi (-19 - 160x_F^2 + 175x_F^4) (\nabla V)^2(\nabla_i\Phi)(\nabla_i V) \\ & + \frac{1}{10\Phi^3} x_F^3 (60 - 71x_F^2 + 25x_F^4) (\nabla^2 V)(\nabla_i\Phi)(\nabla_i V) \\ & + \frac{1}{80\Phi^4} x_F^3 (-285 + 689x_F^2 - 595x_F^4 + 175x_F^6) (\nabla V)^4 \\ & + \frac{1}{60\Phi^3} x_F^3 (140 - 189x_F^2 + 75x_F^4) (\nabla\Phi)^2(\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{10k_F^3} (-1 - 24x_F^2 + 25x_F^4) (\nabla_i\Phi)(\nabla_i V)(\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{12\Phi^3} x_F^3 (25 - 36x_F^2 + 15x_F^4) (\nabla V)^2(\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{60\Phi^2} x_F^3 (-19 + 15x_F^2) (\nabla^2\Phi)^2 & + & \frac{1}{6k_F^3} \Phi (-1 + 3x_F^2) (\nabla^2 V)(\nabla^2\Phi) \\ & + \frac{1}{60k_F^3} (-19 - 96x_F^2 + 75x_F^4) (\nabla V)^2(\nabla^2 V) \\ & + \frac{1}{20\Phi^2} x_F^3 (-12 + 5x_F^2) (\nabla^2 V)^2 & + & \frac{1}{\hbar^4} (x_F - l_F) F_{ij}^2 \end{aligned} \right\} \Theta(\mu - V - \Phi) + \rho_4^+ V$

Tabla C.3: Desarrollo semiclásico de la densidad de energía fermiónica relativista en dimensión tres.







## Apéndice D

# Desarrollo de las densidades relativistas del mar de Dirac

El desarrollo semiclásico de la contribución del mar de Dirac a la densidad fermiónica, la densidad escalar y la densidad de energía se representan respectivamente en las tablas D.1, D.2 y D.3. La dimensión del espacio de coordenadas se ha tomado igual a tres. La renormalización se ha llevado a cabo a momento cero.  $\gamma$  es la degeneración de espín-isospín de los fermiones ( $\gamma = 2$  para una única especie fermiónica,  $\gamma = 4$  para dos). La deducción de las densidades de orden cuarto puede hacerse siguiendo el capítulo 6.



$\rho_0^{\text{mar}} =$	0
$\rho_2^{\text{mar}} = -\frac{\gamma}{12\pi^2\hbar} \left\{$	$\log \frac{\Phi}{M} \nabla^2 V \quad + \quad \frac{1}{\Phi} \nabla_i \Phi \nabla_i V$
$\rho_4^{\text{mar}} = \frac{\gamma\hbar}{48\pi^2} \left\{$	$\frac{2}{5} \Phi^{-2} (\nabla^4 V) - \frac{11}{15} \Phi^{-3} (\nabla_i \nabla_j \Phi) (\nabla_i \nabla_j V) - \frac{3}{5} \Phi^{-3} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla^2 \Phi)$ $- \frac{8}{5} \Phi^{-3} (\nabla_i \nabla^2 V) (\nabla_i \Phi) + \frac{11}{5} \Phi^{-4} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla_j \Phi) (\nabla_j \Phi)$ $+ \frac{22}{15} \Phi^{-4} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i \nabla_j V) (\nabla_j \Phi) - \frac{44}{15} \Phi^{-5} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i V) (\nabla \Phi)^2 + \frac{5}{3} \Phi^{-4} (\nabla^2 V) (\nabla \Phi)^2$ $+ \frac{8}{15} \Phi^{-4} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla_j V) (\nabla_j V) - \frac{16}{15} \Phi^{-5} (\nabla V)^2 (\nabla_i \Phi) (\nabla_i V)$ $+ \frac{16}{15} \Phi^{-4} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i V) (\nabla^2 \Phi) - \frac{2}{3} \Phi^{-3} (\nabla^2 V) (\nabla^2 \Phi) + \frac{4}{15} \Phi^{-4} (\nabla V)^2 (\nabla^2 V)$

Tabla D.1: Desarrollo semiclásico de la contribución del mar de Dirac a la densidad bariónica en dimensión espacial tres.

$\rho_{s0}^{\text{mar}} = -\frac{\gamma M^3}{4\pi^2\hbar^3} \left\{$	$\frac{\Phi^3}{M^3} \log \frac{\Phi}{M} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad - \quad \frac{3\Phi}{2M} \quad + \quad 3\frac{\Phi^2}{M^2} \quad - \quad \frac{11\Phi^3}{6M^3}$
$\rho_{s2}^{\text{mar}} = -\frac{\gamma}{16\pi^2\hbar} \left\{$	$-\Phi^{-1} (\nabla \Phi)^2 \quad - \quad 2 \log \frac{\Phi}{M} \nabla^2 \Phi \quad - \quad \frac{2}{3} \Phi^{-1} \nabla_i \Phi \nabla_i V$
$\rho_{s4}^{\text{mar}} = \frac{\gamma\hbar}{48\pi^2} \left\{$	$-\frac{3}{10} \Phi^{-2} (\nabla^4 \Phi) + \frac{11}{30} \Phi^{-3} (\nabla_i \nabla_j \Phi)^2 + \frac{7}{30} \Phi^{-3} (\nabla_i \nabla_j V)^2$ $+ \frac{6}{5} \Phi^{-3} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i \nabla^2 \Phi) + \frac{3}{5} \Phi^{-3} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla^2 V) - \frac{22}{15} \Phi^{-4} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i \nabla_j \Phi) (\nabla_j \Phi)$ $- \frac{7}{5} \Phi^{-4} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla_j V) (\nabla_j \Phi) + \frac{11}{10} \Phi^{-5} (\nabla \Phi)^4 + \frac{2}{3} \Phi^{-5} (\nabla V)^2 (\nabla \Phi)^2$ $- \frac{11}{15} \Phi^{-4} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla_j \Phi) (\nabla_j V) + \frac{22}{15} \Phi^{-5} ((\nabla_i \Phi) (\nabla_i V))^2$ $- \frac{11}{15} \Phi^{-4} (\nabla^2 V) (\nabla_j \Phi) (\nabla_j V) + \frac{4}{15} \Phi^{-5} (\nabla V)^4 - \frac{43}{30} \Phi^{-4} (\nabla \Phi)^2 (\nabla^2 \Phi)$ $- \frac{1}{3} \Phi^{-4} (\nabla V)^2 (\nabla^2 \Phi) + \frac{8}{15} \Phi^{-3} (\nabla^2 \Phi)^2 - \frac{1}{30} \Phi^{-3} (\nabla^2 V)^2$

Tabla D.2: Desarrollo semiclásico de la contribución del mar de Dirac a la densidad escalar en dimensión tres.



$$\begin{aligned}
\rho_{E4}^{\text{mar}} = \frac{\gamma\hbar}{48\pi^2} \left\{ & -\frac{1}{10} \Phi^{-1} (\nabla^4 \Phi) + \frac{11}{60} \Phi^{-2} (\nabla_i \nabla_j \Phi)^2 + \frac{1}{4} \Phi^{-2} (\nabla_i \nabla_j V)^2 \right. \\
& + \frac{1}{2} \Phi^{-2} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i \nabla^2 \Phi) + \frac{4}{5} \Phi^{-2} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla^2 V) - \frac{11}{15} \Phi^{-3} (\nabla_i \Phi) (\nabla_i \nabla_j \Phi) (\nabla_j \Phi) \\
& - \frac{1}{3} \Phi^{-3} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla_j V) (\nabla_j \Phi) + \frac{11}{24} \Phi^{-4} (\nabla \Phi)^4 + \frac{5}{6} \Phi^{-4} (\nabla V)^2 (\nabla \Phi)^2 \\
& - \frac{2}{3} \Phi^{-3} (\nabla_i V) (\nabla_i \nabla_j \Phi) (\nabla_j V) + \frac{49}{30} \Phi^{-4} ((\nabla_i \Phi) (\nabla_i V))^2 \\
& - \frac{7}{5} \Phi^{-3} (\nabla^2 V) (\nabla_i \Phi) (\nabla_i V) + \frac{1}{5} \Phi^{-4} (\nabla V)^4 - \frac{13}{30} \Phi^{-3} (\nabla \Phi)^2 (\nabla^2 \Phi) \\
& \left. - \frac{1}{3} \Phi^{-3} (\nabla V)^2 (\nabla^2 \Phi) + \frac{1}{15} \Phi^{-2} (\nabla^2 \Phi)^2 + \frac{7}{20} \Phi^{-2} (\nabla^2 V)^2 \right\} + \rho_4^{\text{mar}} V
\end{aligned}$$

Tabla D.3: Desarrollo semiclásico de la contribución del mar de Dirac a la densidad de energía en dimensión tres.







## Apéndice E

# Propagadores bosónicos a 1-loop y punto de sustracción

Nuestro objetivo en este apéndice es obtener de forma explícita los propagadores bosónicos del modelo QHD-I asociados a renormalización en dos puntos de sustracción concretos: capa másica y cuadrimomento nulo. En lugar de utilizar el grupo de renormalización, útil para expresiones más generales, vamos a calcular explícitamente los casos que nos interesan. Nuestro interés en estos propagadores es doble: por una parte nos va a permitir relacionar los parámetros del lagrangiano a renormalización cero, que son los que aparecen en los desarrollos del mar de Dirac del capítulo 6, con las propiedades físicas de la partícula  $\omega$ ; y por otro lado los usaremos para detectar la inestabilidad de Landau y aplicar la prescripción de Källén-Lehmann.

Vamos a partir de la densidad lagrangiana de la ec. (5.1), donde  $\delta\mathcal{L}$  incluye los contratérminos necesarios cuya expresión es

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \frac{1}{2} A_s \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} B_s m_s^2 \phi^2 - \frac{1}{4} A_v F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} B_v m_v^2 V_\mu V^\mu \\ & + \alpha_1 \phi + \frac{\alpha_2}{2} \phi^2 + \frac{\alpha_3}{3!} \phi^3 + \frac{\alpha_4}{4!} \phi^4 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

La renormalización de los propagadores bosónicos fija la primera línea de contratérminos de esta ecuación. La determinación de los contratérminos de la segunda línea puede encontrarse en [Se86] o deducirse del capítulo 6.

Los propagadores van a ser calculados con la ecuación de Dyson en la que las autoenergías se introducirán en la aproximación 1-loop. Por lo tanto, las expresiones finales serán exactas en el límite  $N \rightarrow \infty$  con  $Ng^2$  constante, siendo  $N$  el número de especies fermiónicas. Recordemos que la aproximación 1-loop es también la que



aparece en nuestros desarrollos en punto de silla, lo que nos permite relacionarlos inmediatamente con los propagadores que vamos a obtener aquí.

## E.1 Propagador escalar

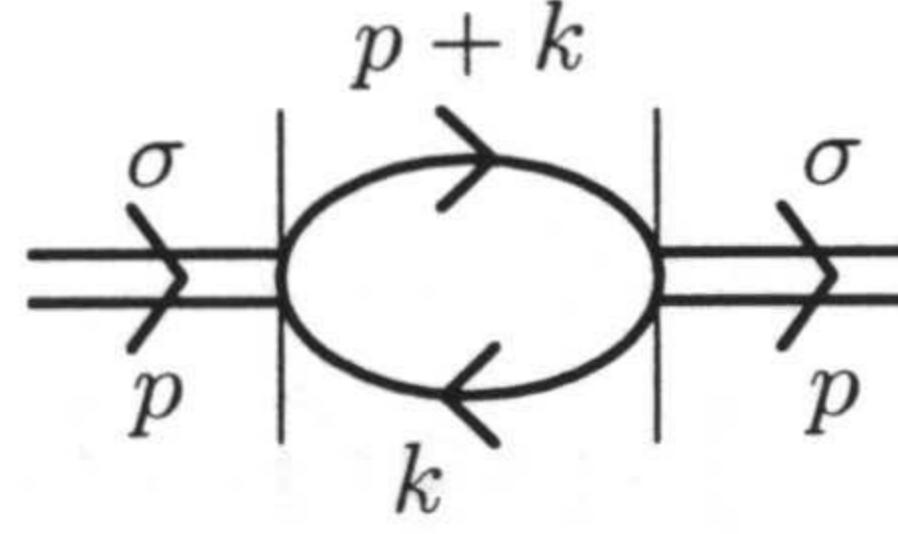


Figura E.1: Menos  $i$  veces la autoenergía de la partícula  $\sigma$  a un loop. Las líneas dobles representan a la partícula sigma; las líneas sencillas indican propagación de fermiones. Nótese que se han amputado las patas externas.

La autoenergía de la partícula escalar a un *loop* fermiónico,  $\Pi_s$ , se calcula como  $i$  veces el diagrama amputado de la figura E.1,

$$\begin{aligned} \Pi_s(p^2; M, \xi, \varepsilon) = & -i \xi^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \text{Tr} \left\{ \frac{i}{\not{p} + \not{k} - M + i\varepsilon} i g_s \times \right. \\ & \left. \times \frac{i}{\not{p} + \not{k} - M + i\varepsilon} i g_s \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Usamos métrica de Minkowski en el espacio de momentos, así como regularización dimensional, con  $d = 4 - 2\varepsilon$ , y  $\xi$  como escala de regularización con dimensión de momento. Efectuando la traza en el espacio de Dirac se llega a

$$\Pi_s(p^2) = -f(4 - 2\varepsilon) g_s^2 N \left\{ I_0(M, \xi, \varepsilon) + \left( 2M^2 - \frac{1}{2} p^2 \right) I_1(M, \xi, \varepsilon) \right\} \quad (\text{E.3})$$

donde  $N$  es el número de especies fermiónicas y  $Nf(4 - 2\varepsilon)$  es el número de grados de libertad internos en el espacio de Dirac (es decir,  $\text{Tr} 1$ ); trivialmente  $f(4 - 2\varepsilon) = 4 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . En las integrales  $I_0$  e  $I_1$  hemos absorbido el número imaginario puro  $i$ , con lo que se definen como

$$I_0(M, \xi, \varepsilon) = i \xi^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \quad (\text{E.4})$$

e

$$I_1(p^2; M, \xi, \varepsilon) = i \xi^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - M^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{E.5})$$



Calculemos primero  $I_0$ . Tras efectuar una rotación de Wick para pasar a una métrica euclídea en el espacio de momentos (de la variable de integración), y promediar la parte angular se llega a

$$I_0(M, \varepsilon, \xi) = \frac{(4\pi\xi^2)^\varepsilon}{8\pi^2\Gamma(2-\varepsilon)} \int_0^\infty dq q^{3-2\varepsilon} \frac{1}{q^2 + M^2}. \quad (\text{E.6})$$

La integral que queda se puede expresar en términos de la función Beta de Euler, obteniéndose

$$I_0(M, \xi, \varepsilon) = \frac{M^2}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\xi^2}{M^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon - 1) \quad (\text{E.7})$$

con desarrollo

$$I_0(M, \varepsilon, \xi) = \frac{M^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \Gamma_E + 2 \log \frac{M}{\xi} - \log(4\pi) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (\text{E.8})$$

Para calcular  $I_1$ , además de la rotación de Wick, usamos la parametrización de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}, \quad (\text{E.9})$$

de modo que tras efectuar la integración en momento se tiene,

$$I_1(p^2; M, \xi, \varepsilon) = -\frac{(4\pi)^\varepsilon}{8\pi^2\Gamma(2-\varepsilon)} \xi^{2\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx [M^2 - x(1-x)p^2 - i\epsilon]^{-\varepsilon}, \quad (\text{E.10})$$

que tras desarrollar en potencias de  $\varepsilon$  puede expresarse como

$$I_1(p^2; M, \xi, \varepsilon) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} + \Gamma_E + 2 \log \frac{M}{\xi} - \log(4\pi) + I_a \left( \frac{\xi^2 p^2}{M^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (\text{E.11})$$

donde  $\Gamma_E$  es la constante de Euler y

$$I_a(y) = \int_0^1 dx \log(1 - yx(1-x) - i\epsilon). \quad (\text{E.12})$$

Dado que  $p^2$  se calcula con métrica euclídea puede tomar valores negativos, de modo que hay que calcular  $I_a$  para todos los posibles valores reales de  $y$ , obteniéndose

$$I_a(y) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{4}{y}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{y}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4}{y}} - 1} - 2 & y < 0 \\ 2\sqrt{\frac{4}{y} - 1} \arcsen\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right) - 2 & 0 < y < 4 \\ \sqrt{1 - \frac{4}{y}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{y}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{y}}} - 2 - i\sqrt{1 - \frac{4}{y}} \pi & 4 < y \end{cases} \quad (\text{E.13})$$



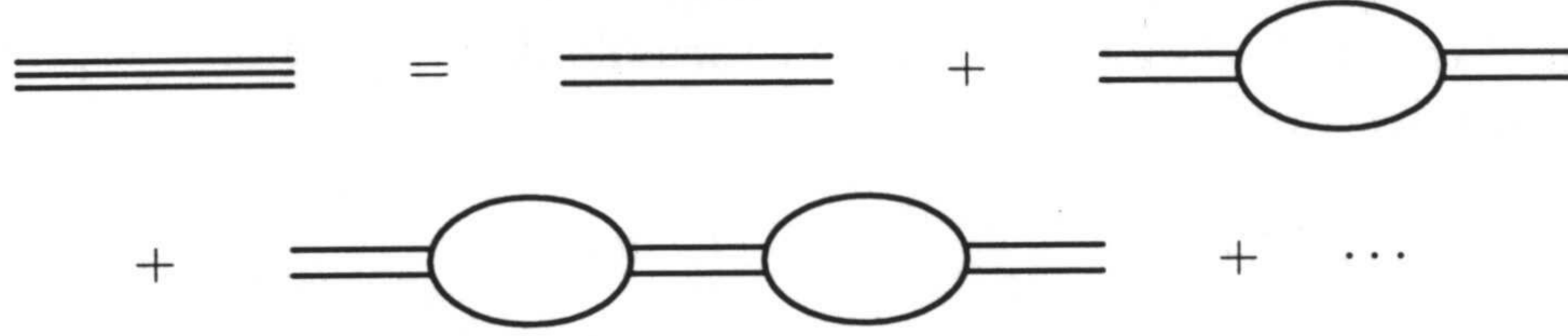


Figura E.2: Propagador de la partícula  $\sigma$  (línea triple) calculado a un loop a partir de la ecuación de Dyson.

Conocido  $\Pi_s$  podemos calcular el propagador a 1 loop mediante la ecuación de Dyson (figura E.2), que toma la forma

$$\Delta_s^{1L}(p^2) = \frac{1}{(1 + A_s) p^2 - (1 + B_s) m_s^2 - \Pi_s}. \quad (\text{E.14})$$

En el caso de la partícula escalar no tiene mucho sentido hablar de *masa física*; de todos modos vamos a emplear este lenguaje para tratar la  $\sigma$  y la  $\omega$  de la forma más simétrica posible. Así pues, supongamos que fijamos el esquema de renormalización (en este caso los coeficientes  $A_s$  y  $B_s$ ) exigiendo que el propagador tenga un polo *físico* en  $p^2 = m_s^2$  con residuo unidad, de lo que se obtiene

$$A_s = \partial_{p^2} \Pi_s |_{p^2=m_s^2} \quad (\text{E.15})$$

y

$$B_s m_s^2 = m_s^2 \partial_{p^2} \Pi_s |_{p^2=m_s^2} - \Pi_s(m_s^2). \quad (\text{E.16})$$

Con estas identidades el propagador se escribe

$$[\Delta_s^{1L}(p^2)]^{-1} = p^2 - m_s^2 - \Pi_s^R(p^2) \quad (\text{E.17})$$

donde  $\Pi_s^R(p^2)$  representa la autoenergía renormalizada en la capa másica,

$$\Pi_s^R(p^2) = [\Pi_s(p^2) - \Pi_s(m_s^2) - (p^2 - m_s^2) \Pi_s'(m_s^2)], \quad (\text{E.18})$$

que tras las sustituciones pertinentes se escribe como

$$\begin{aligned} \Pi_s^R(p^2) = & -\frac{g_s^2 N}{4\pi^2} \left\{ \left( 2M^2 - \frac{1}{2} p^2 \right) \left[ I_a \left( \frac{p^2}{M^2} \right) - I_a \left( \frac{m_s^2}{M^2} \right) \right] \right. \\ & \left. + (p^2 - m_s^2) \left( \frac{2M^2}{m_s^2} - \frac{1}{2} \right) I_b \left( \frac{m_s^2}{M^2} \right) \right\} \quad (\text{E.19}) \end{aligned}$$



donde

$$I_b(y) = -1 + \frac{1}{\frac{y}{4} \sqrt{\frac{4}{y} - 1}} \arcsen \frac{\sqrt{y}}{2}. \quad (\text{E.20})$$

El propagador puede desarrollarse en torno a momento nulo para dar

$$[\Delta_s^{1L}(p^2)]^{-1} = [1 - \Pi_s^{R'}(0)] p^2 - m_s^2 - \Pi_s^R(0) + \mathcal{O}(p^4). \quad (\text{E.21})$$

Este resultado es muy interesante porque nos permite relacionar los parámetros del modelo asociados a sustracción en la capa másica ( $p^2 = m_s^2$ ) con los asociados a sustracción a momento cero (estos últimos son los que aparecen como parámetros del lagrangiano en los desarrollos en gradientes realizados a lo largo del capítulo 6). En efecto: un propagador es dos veces el inverso de la forma cuadrática de la acción efectiva en el campo en cuestión, de modo que en nuestro caso

$$A = \dots + \frac{1}{2} \int \phi [\Delta_s^{1L}]^{-1} \phi + \int g_s \phi \rho_s + \dots \quad (\text{E.22})$$

Tildemos aquellas magnitudes que se comportan como queremos en el límite  $p^2 \rightarrow 0$ ,

$$\tilde{A} = \dots + \frac{1}{2} \int \tilde{\phi} (p^2 - \tilde{m}_s^2) \phi + \int \tilde{g}_s \tilde{\phi} \rho_s + \dots \quad (\text{E.23})$$

Recordemos ahora que en la acción efectiva los campos bosónicos son arbitrarios, por lo que pueden reescalarsse a nuestro antojo. En concreto, para relacionar  $A$  con  $\tilde{A}$  basta con identificar

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^2 &= (1 - \Pi_s^{R'}(0)) \phi^2 \\ \tilde{m}_s^2 &= \frac{m_s^2 + \Pi_s^R(0)}{1 - \Pi_s^{R'}(0)} \\ \tilde{g}_s^2 &= \frac{g_s^2}{1 - \Pi_s^{R'}(0)} \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

(notemos que la constante de acoplamiento siempre aparece multiplicando al campo escalar). Separemos en  $\Pi_s^R$  la dependencia explícita en la constante de acoplamiento,

$$\Pi_s^R(p^2; g_s, M, m_s) \equiv g_s^2 \bar{\Pi}_s^R(p^2; M, m_s). \quad (\text{E.25})$$

Con esta separación, junto con la definición

$$C_s^2 = \frac{\tilde{g}_s^2 M^2}{\tilde{m}_s^2}, \quad (\text{E.26})$$



es inmediato escribir

$$\tilde{m}_s^2 = \frac{m_s^2}{1 - \frac{C_s^2}{M^2} (\bar{\Pi}_s^R(0) + m_s^2 \bar{\Pi}_s^{R'}(0))}, \quad (\text{E.27})$$

que relaciona la masa a momento cero con la masa física y el parámetro  $C_s$  que se fija con las propiedades de materia nuclear. Explícitamente,

$$\tilde{m}_s^2 = \frac{m_s^2}{1 + \frac{N C_s^2}{4\pi^2} \left[ 4 - \frac{4}{3} \frac{m_s^2}{M^2} + \left( -4 + \frac{m_s^2}{M^2} \right) \sqrt{\frac{4M^2}{m_s^2} - 1} \arcsen \frac{m_s}{2M} \right]} \quad (\text{E.28})$$

que puede escribirse en serie de potencias de  $t_s \equiv \frac{m_s}{2M}$

$$\tilde{m}_s^2 = m_s^2 + \frac{4 N C_s^2 M^2}{5\pi^2} \left[ t_s^6 + \frac{2}{7} t_s^8 + \left( \frac{8}{63} + \frac{N C_s^2}{5\pi^2} \right) t_s^{10} \right] + \mathcal{O}(t_s^{12}). \quad (\text{E.29})$$

## E.2 Propagador vectorial

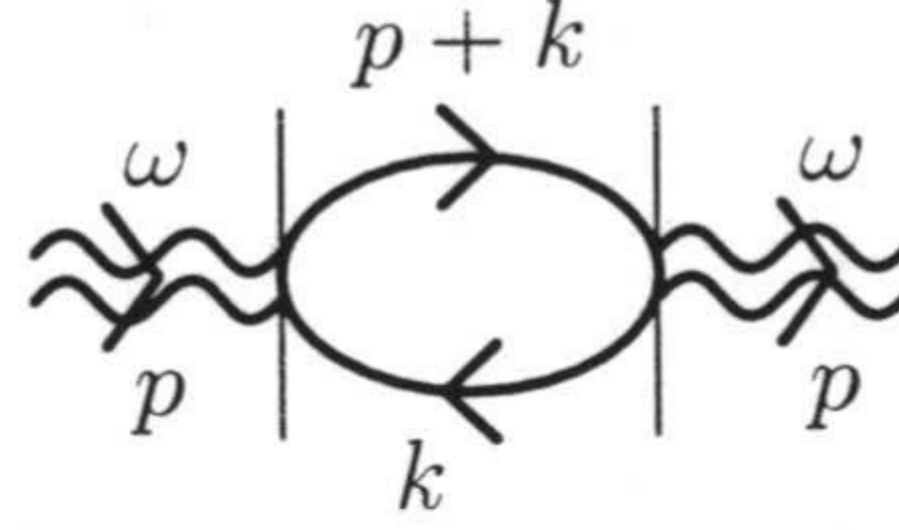


Figura E.3: Menos  $i$  veces la autoenergía a un loop de la partícula  $\omega$ . Las líneas onduladas dobles se refieren a la  $\omega$ , mientras que las normales simples indican propagación de fermiones. Las patas externas están amputadas.

El cálculo del propagador a un loop de la partícula  $\omega$  es análogo al realizado para la  $\sigma$ , con la complicación extra de que posee estructura tensorial debido al carácter vectorial de la partícula. El propagador a un loop puede expresarse en términos de la autoenergía  $\Pi_{\nu\mu\nu}$ , que se corresponde con el diagrama amputado de la figura E.3,

$$\begin{aligned} \Pi_{\nu\mu\nu}(p^2; M, \varepsilon, \xi) = & -i \xi^{2\varepsilon} \int \frac{d^{4-2\varepsilon} k}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \text{Tr} \left\{ \frac{i}{\not{p} + \not{k} - M + i\varepsilon} i g_\nu \gamma_\mu \times \right. \\ & \left. \times \frac{i}{\not{p} + \not{k} - M + i\varepsilon} i g_\nu \gamma_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Suponiendo la forma más general posible compatible con covariancia

$$\Pi_{\nu\mu\nu}(p^2) = a(p^2) g_{\mu\nu} + b(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (\text{E.31})$$



y multiplicando por  $p_\nu$  se obtiene

$$\Pi_{\nu\mu\nu}(p^2) = \frac{N g_v^2 f(4-2\varepsilon)}{3-2\varepsilon} \left[ (-2+2\varepsilon)I_0(M, \xi, \varepsilon) + (2M^2 + (1-\varepsilon)p^2)I_1(p^2; M, \xi, \varepsilon) \right] \quad (\text{E.32})$$

Hemos utilizado que  $g_\mu^\mu = 4 - 2\varepsilon$  junto con  $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4 - 2\varepsilon$  y  $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = (-2 + 2\varepsilon)\gamma_\nu$ .

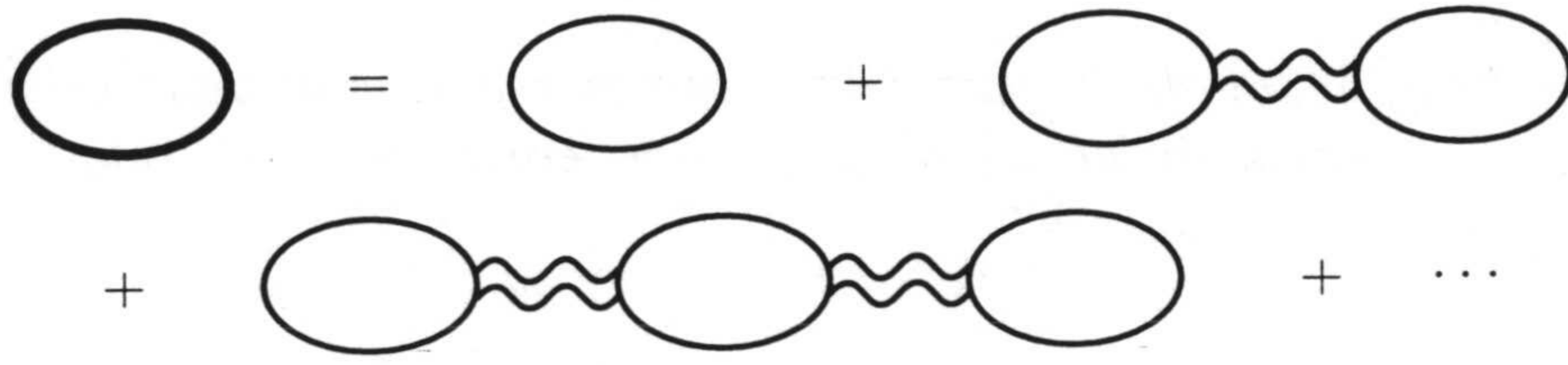


Figura E.4: Autoenergía propia de la partícula  $\omega$  (burbuja gruesa) calculada a un loop a partir de la ecuación de Dyson.

A continuación evaluamos la autoenergía propia,  $\Pi_{\nu\mu\nu}$ , usando la ecuación de Dyson (figura E.4). Para ello, se utiliza que el propagador libre de la  $\omega$  es

$$\Delta_{\omega\mu\nu}^0(p^2) = \Delta_v^0(p^2) A_{\mu\nu}, \quad (\text{E.33})$$

donde

$$\Delta_v^0(p^2) = \frac{1}{p^2 - m_v^2 + i\varepsilon} \quad (\text{E.34})$$

y

$$A_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_v^2}, \quad (\text{E.35})$$

junto con las propiedades

$$T_{\mu\nu} A^{\nu\rho} = -T_\mu{}^\rho, \quad T_{\mu\nu} T^{\nu\rho} = -T_\mu{}^\rho. \quad (\text{E.36})$$

La expresión de la autoenergía propia que se obtiene es

$$\Pi_{\nu\mu\nu}^P(p^2) = \frac{\Pi_v(p^2)}{1 - \Pi_v(p^2) \Delta_v^0(p^2)} T_{\mu\nu}. \quad (\text{E.37})$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de Dyson para el propagador (figura E.5), llegándose a

$$\Delta_{\nu\mu\nu}^{1L} = \Delta_v^{1L} T_{\mu\nu} + \frac{1}{(1 + B_v) m_v^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (\text{E.38})$$



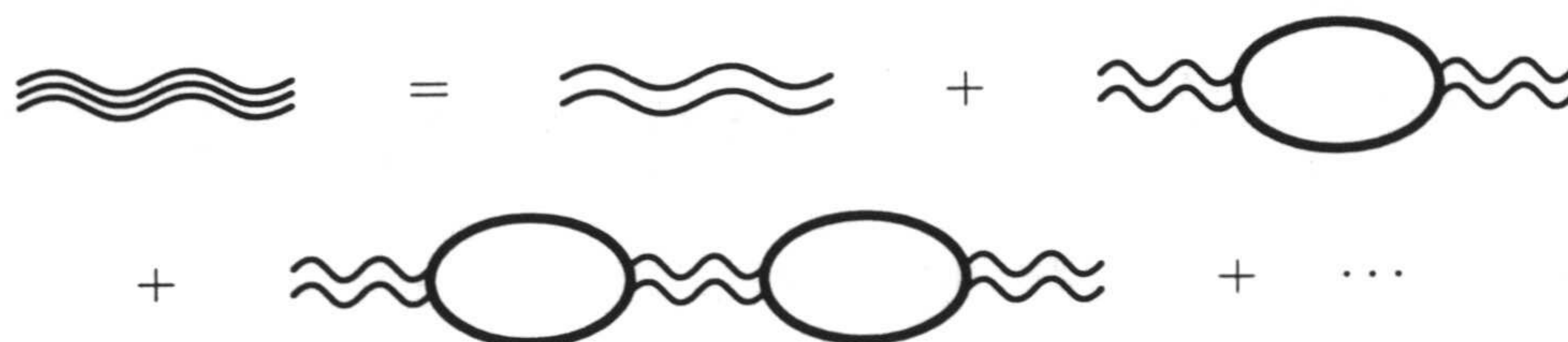


Figura E.5: Propagador de la partícula  $\omega$  (línea triple ondulada) calculado a un loop a partir de la ecuación de Dyson y la autoenergía propia (burbuja con la línea gruesa).

con

$$\Delta_v^{1L}(p^2) = \frac{1}{(1 + A_v) p^2 - (1 + B_v) m_v^2 - \Pi_v(p^2)}. \quad (\text{E.39})$$

Nótese que en estas ecuaciones hemos tenido en cuenta los contratérminos. Para fijarlos imponemos que la parte transversal del propagador (primer término de la ec. (E.38) tenga el comportamiento esperado en la capa másica, lo que se traduce en que  $\Delta_v^{1L}$  tenga un polo en  $p^2 = m_v^2$  con residuo unidad. Con esta información se fijan  $A_v$  y  $B_v$  del mismo modo que se hizo en el caso escalar. El resultado al que se llega es

$$\Delta_v^{1L}(p^2) = \frac{1}{p^2 - m_v^2 - \Pi_v^R(p^2)} \quad (\text{E.40})$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi_v^R(p^2) &= \Pi_v(p^2) - \Pi_v(m_v^2) - (p^2 - m_v^2) \Pi_v'(m_v^2) \\ &= -\frac{N g_v^2}{12\pi^2} \left\{ (2M^2 + p^2) \left[ I_a \left( \frac{p^2}{M^2} \right) - I_a \left( \frac{m_v^2}{M^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (p^2 - m_v^2) \left( 2 \frac{M^2}{m_v^2} + 1 \right) I_b \left( \frac{m_v^2}{M^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

La discusión realizada en la sección anterior es válida aquí, con el argumento adicional de que sí que tiene sentido hablar de la masa física de la  $\omega$ . Definiendo

$$C_v^2 = \frac{\tilde{g}_v^2 M^2}{\tilde{m}_v^2} \quad (\text{E.42})$$

se llega al resultado

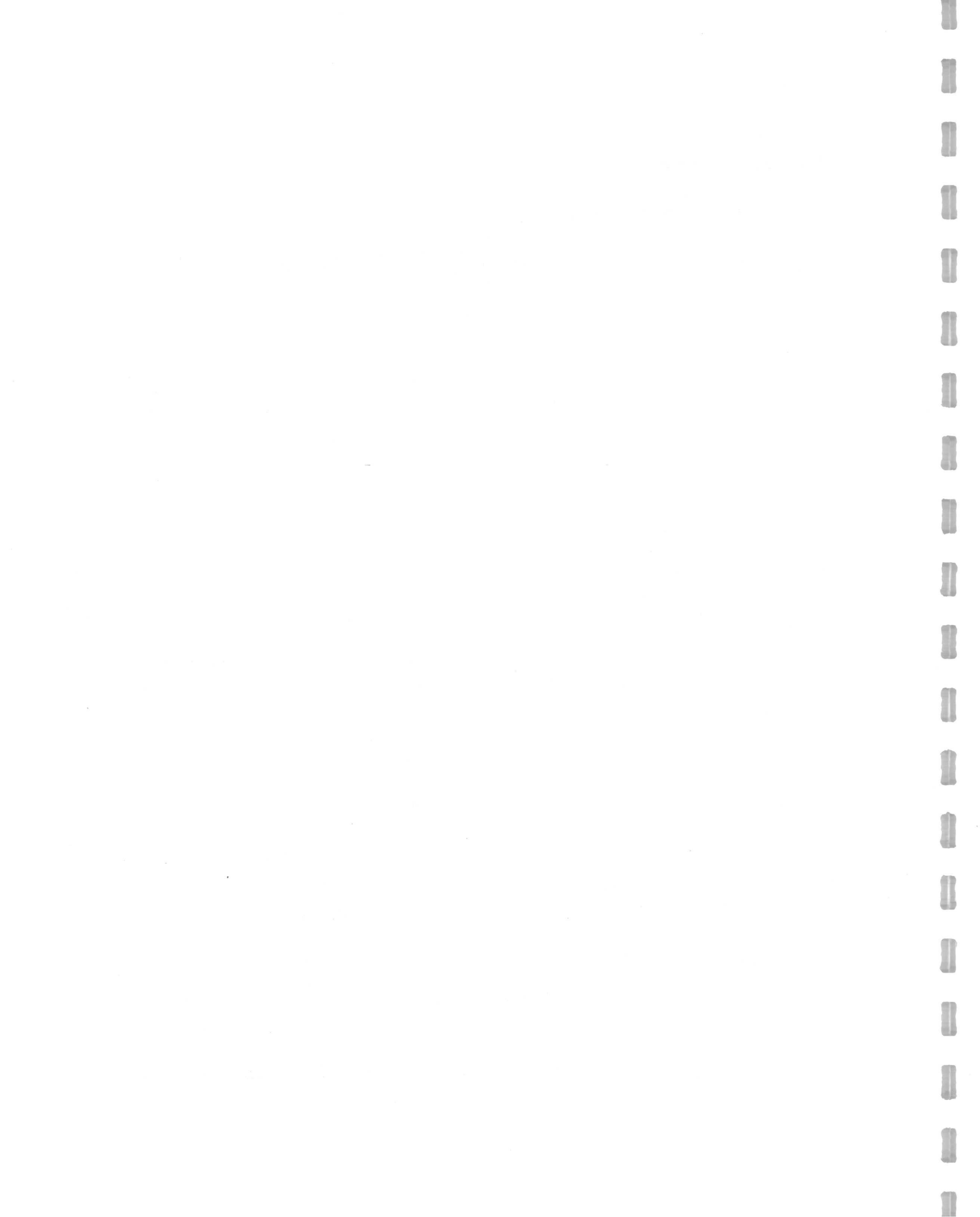
$$\tilde{m}_v^2 = \frac{m_v^2}{1 - \frac{N C_v^2}{4\pi^2} \left[ \frac{4}{3} + \frac{5}{9} \frac{m_v^2}{M^2} - \frac{2}{3} \left( 2 + \frac{m_v^2}{M^2} \right) \sqrt{\frac{4M^2}{m_v^2} - 1} \arcsen \frac{m_v}{2M} \right]} \quad (\text{E.43})$$



con desarrollo en potencias de  $t_v = \frac{m_v}{2M}$

$$\widetilde{m}_v^2 = m_v^2 + \frac{16 N C_v^2 M^2}{15\pi^2} \left[ t_v^6 + \frac{3}{7} t_v^8 + \left( \frac{16}{63} + \frac{4 N C_v^2}{15\pi^2} \right) t_v^{10} \right] + \mathcal{O}(t_v^{12}). \quad (\text{E.44})$$







## Bibliografía

- [Ab70] M. Abramowitz y I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- [Ba89] R.D. Ball, *Phys. Rep.* **182** (1989) 1.
- [Bo60] N.N. Bogolyubov, A.A. Logunov y D.V. Shirkov, *Sov. Phys. JETP* **37** (1960) 574.
- [Br26] L. Brillouin, *C. R. Acad. Sci.* **183** (1926) 24.
- [Br73] M. Brack y H.C. Pauli, *Nucl. Phys.* **A207** (1973) 401.
- [Br83] B.H. Bransden y C.J. Joachain, "Physics of Atoms and Molecules", Longman Scientific & Technical, 1983.
- [Br85] M. Brack, C. Guet y H.B. Håkansson, *Phys. Rep.* **123** (1985) 275.
- [Ca60] H.B. Callen, "Thermodynamics", John Wiley y Sons, Inc., New York, 1960.
- [Ca93a] J. Caro y L.L. Salcedo, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 359.
- [Ca93b] J. Caro, L.L. Salcedo y E. Ruiz Arriola, "Fourth order  $\hbar$  corrections to the extended relativistic Thomas-Fermi model", contribución en *Conference on Many Body Physics*, Coimbra, 20-25 de Septiembre, 1993.
- [Ca96a] J. Caro, E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo, *J. Phys.* **G** (in press).
- [Ca96b] J. Caro, E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo (sometido a *Phys. Lett.* **B**).
- [Ca96c] J. Caro, E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo (en preparación).
- [Ce90] M. Centelles, X. Viñas y M. Barranco, *Nucl. Phys.* **A519** (1990) 73c.
- [Ce93] M. Centelles, X. Viñas y M. Barranco, *Ann. Phys. (N.Y.)* **221** (1993) 165.



- [Ch86] L.H. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1199.
- [Ch88] L.H. Chan, *Phys. Rev.* **D38** (1988) 3739.
- [Co87] T.D. Cohen, M.K. Banerjee y C.Y. Ren, *Phys. Rev.* **C36** (1987) 1653.
- [Du32] J.L. Dunham, *Phys. Rev.* **41** (1932) 713.
- [Er74] K. Erkelenz, *Phys. Rep.* **C13** (1974) 191.
- [Fe28] E. Fermi, *Z. Phys.* **48** (1928) 73.
- [Fe39] R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **56** (1939) 340.
- [Fr65] N. Fröman y P.O. Fröman, "JWKB Approximation. Contributions to the Theory", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.
- [Fu88] R.J. Furnstahl y C.J. Horowitz, *Nucl. Phys.* **A485** (1988) 632.
- [Fu89] R.J. Furnstahl, R.J. Perry y B.D. Serot, *Phys. Rev.* **C40** (1989) 321.
- [Fu90] R.J. Furnstahl y C.E. Price, *Phys. Rev.* **C41** (1990) 1792.
- [Ga89] A. Galindo y P. Pascual, "Mecánica Cuántica", Eudema, S. A., Madrid (1989).
- [Go88] H. Goldstein, "Mecánica Clásica", Editorial Reverté, S. A., Barcelona (1988).
- [He35] Hellman, *Acta Physicochemica URSS* **16** (1935) 913, **IV 2**, (1936) 225.
- [Ho64] P. Hohenberg y W. Kohn, *Phys. Rev.* **B136** (1964) 864.
- [Ho81] K. Holinde, *Phys. Rep.* **C68** (1981) 121.
- [Ho81b] C.J. Horowitz y B.D. Serot, *Nucl. Phys.* **A368** (1981) 503.
- [Ho84] C.J. Horowitz y B.D. Serot, *Phys. Lett.* **B140** (1984) 181.
- [Is15] J. Ishiwara, *Tokyo Sugaku Buturigakkawi Kizi* **8** (1915) 106.
- [Ja74] C.W. Jager, H. de Vries y C. de Vries, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **14** (1974) 479.
- [Je73] B.K. Jennings, *Nucl. Phys.* **A207** (1973) 538.



- [Ki33] J.G. Kirkwood, *Phys. Rev.* **44** (1933) 31.
- [Kr26] H.A. Kramers, *Z. Phys.* **39** (1926) 828.
- [Kr90] H. Krivine, M. Casas y J. Martorell, *Anna. Phys.* **200** (1990) 304.
- [Ma81] V.P. Maslov y M.V. Federiuk, "Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, *Mathematical Physics and Applied Mathematics V.7*, 1981.
- [Me88] Th. Meißner, E. Ruiz Arriola, F. Grümmer, K. Goeke y H. Mavromatis, *Phys. Lett.* **B214** (1988) 312.
- [Mi69] A.B. Migdal y V.P. Krainov, "Approximation Methods in Quantum Mechanics", W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [Pa89] R.G. Parr y W. Yang, "Density-Functional Theory of Atoms and Molecules", Oxford University Press, New York, 1989.
- [Pe86] R.J. Perry, *Phys. Lett.* **B182** (1986) 269.
- [Pe87] R.J. Perry, *Phys. Lett.* **B199** (1987) 489.
- [Po91] W.F. Pohner y R.M. Dreizler, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 7165.
- [Ra90] P. Ramond, "Field Theory: a Modern Primer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Menlo Park, California, *Frontiers in Physics V.74*, (1990).
- [Re89] P-G Reinhard, *Rep. Prog. Phys.* **52** (1989) 439.
- [Ri80] P. Ring y P. Schuck, "The Nuclear Many-Body Problem", Springer-Verlag New York Inc., New York, *Texts and Monographs in Physics*, 1980.
- [Ru93] E. Ruiz Arriola y L.L. Salcedo, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 2061.
- [Sc93] P. Schuck y X. Viñas, *Phys. Lett.* **B302** (1993) 1.
- [Se86] B.D. Serot y J.D. Walecka, "The Relativistic Nuclear Many-Body Problem", Plenum Press, New York, *Advances in Nuclear Physics V.16*, 1986.
- [Se92] B.D. Serot, *Rep. Prog. Phys.* **55** (1992) 1855.
- [Si71] B.B.P. Sinha et al., *Phys. Lett.* **B53** (1971) 217.
- [Sm71] G.B. Smith y L.L. Tassie, *Ann. Phys. (N.Y.)* **61** (1971) 352.



- [So16] A. Sommerfeld, *Ann. Phys. (Leipzig)* **51** (1916) 1 y 125.
- [Sp68] M.R. Spiegel, "Mathematical Handbook", McGraw-Hill, Co. Inc., New York, 1968.
- [Sp92] C. Speicher, R.M. Dreizler y E. Engel, *Ann. Phys. (N.Y.)* **213** (1992) 312.
- [Sp93] C. Speicher, E. Engel y R.M. Dreizler, *Nucl. Phys.* **A562** (1993) 569.
- [St67] V.M. Strutinsky, *Nucl. Phys.* **A95** (1967) 420; **A122** (1968) 1.
- [St83] P.M. Stevenson, "An Introduction to the Renormalization-Scheme Ambiguity of Perturbation Theory", *Workshop on Radiative Corrections in  $SU(2)_L \times U(1)$* , Miramare, Trieste, Italia, del 6 al 8 de junio de 1983. Editado por B.W. Lynn y J.F. Wheeler, World Scientific.
- [Ta90] K. Tanaka, W. Bentz y A. Arima, *Nucl. Phys.* **A518** (1990) 229.
- [Ta91] K. Tanaka, W. Bentz, A. Arima y F. Beck, *Nucl. Phys.* **A528** (1991) 676;
- [Ta92] K. Tanaka y W. Bentz, *Nucl. Phys.* **A540** (1992) 383.
- [Te90] R. Tegen, *Ann. Phys. (N.Y.)* **197** (1990) 439.
- [Th27] L.H. Thomas, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **23** (1927) 542.
- [Va72] D. Vautherin y D.M. Brink, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 626.
- [Ve85] A.E.M. van de Ven, *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 593.
- [Vo92a] D. Von-Eiff, S. Haddad y M.K. Weigel, *Phys. Rev.* **C46** (1992) 230.
- [Vo92b] D. Von-Eiff y M.K. Weigel, *Phys. Rev.* **C46** (1992) 1797.
- [Wa74] J.D. Walecka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **83** (1974) 491.
- [Wa88a] A.H. Wapstra, G. Audi y R. Hoekstra, *Atomic Data and Nucl. Data Tables* **39** (1988) 281.
- [Wa88b] D.A. Wasson, *Phys. Lett.* **B210** (1988) 41.
- [Wa91] D.A. Wasson, *Nucl. Phys.* **A535** (1991) 456.
- [We26] G. Wentzel, *Z. Phys.* **38** (1926) 518.
- [Wi15] W. Wilson, *Phil. Mag.* **29** (1915) 795.



[Wi32] E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.

[Wi34] E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **46** (1934) 1002.