

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada



ESTUDIO DE SOLUCIONES DÉBILES
DEL SISTEMA
DE VLASOV-POISSON-FOKKER-PLANCK

TESIS DOCTORAL
José Antonio Carrillo de la Plata

Granada, Marzo de 1996

CARRILLO DE LA PLATA, J. ANTONIO

CURSO 95-96

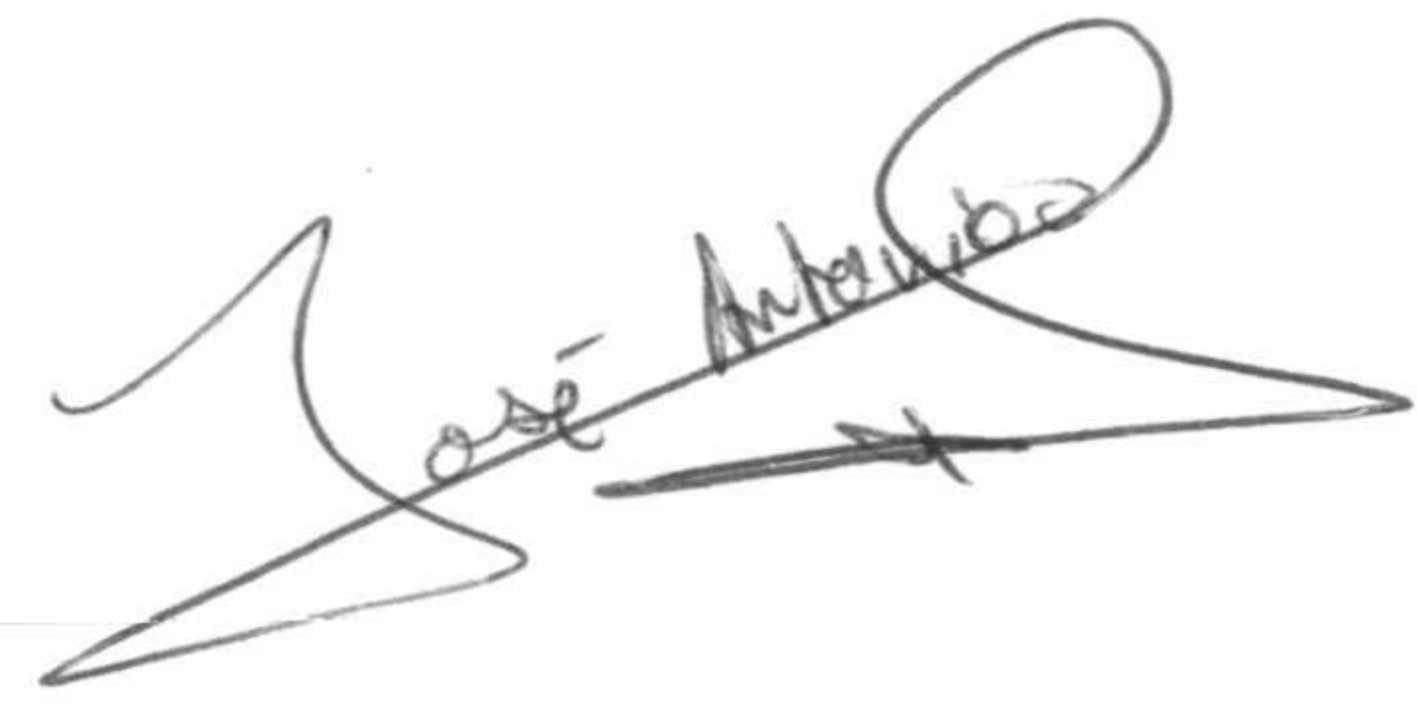
T. PROV. 21/17

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

ESTUDIO DE SOLUCIONES DÉBILES DEL SISTEMA
DE VLASOV-POISSON-FOKKER-PLANCK

TESIS DOCTORAL
realizada por
José Antonio Carrillo de la Plata
para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 22-04-96
ENTRADA NUM. 835



BIBLIOTECA UNIVERSIDAD DE GRANADA
GRANADA
N.º Documento 615052680
N.º Copia 1162/97829

Granada, Marzo de 1996

UNIVERSIDAD DE GRANADA
12 ABR. 1996
COMISION DE DOCTORADO

La presente memoria, *Estudio de soluciones débiles del sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck*, ha sido realizada por D. José Antonio Carrillo de la Plata bajo la dirección del Profesor Dr. Juan S. Soler Vizcaíno, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

V. B. Director,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Soler', with a stylized flourish at the end.

Juan S. Soler Vizcaíno

Quiero comenzar expresando mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de una forma u otra han colaborado en hacer posible este trabajo.

No es fácil expresar brevemente las razones por las cuales uno está agradecido a su director de tesis. Juan Soler me ha hecho partícipe a lo largo de estos años de su entusiasmo por la ciencia y el estudio de la matemática. Las largas y fructíferas discusiones se han sucedido dentro de una atmósfera de entrañable cordialidad y amistad. Su ayuda constante y su confianza en mis posibilidades han sido el principal acicate profesional que me ha servido para superar las contrariedades. Sin todo esto, simplemente, este trabajo no hubiera sido posible. Por último, he de agradecerle su visión científica más allá de las dificultades y su gran interés por considerar las aplicaciones en otros campos de la ciencia la fuente de problemas matemáticos de extraordinaria belleza.

Estoy también profundamente agradecido a los profesores Juan Luis Vázquez y Luis López Bonilla por su colaboración científica, de la cual he aprendido enormemente, y por haber accedido a ser miembros del tribunal. De la misma forma, muestro mi gratitud a los profesores Rafael Ortega, Benoît Perthame y Mario Pulvirenti por aceptar ser miembros del tribunal.

A todas las personas del grupo de investigación de Ecuaciones Diferenciales les muestro mi gratitud por su constante estímulo y por ver en la diversidad una fuente de enriquecimiento mutuo.

Al departamento de Matemática Aplicada por poner todos los medios para hacer posible este trabajo.

Y, por último a mi esposa y a mi familia sin cuyo apoyo, comprensión e ilusión difícilmente este pequeño trozo de ciencia estaría escrito.

Lo más bello que podemos experimentar es el lado misterioso de la vida. Es el sentimiento profundo que se encuentra en la cuna del arte y de la ciencia verdadera.
(Albert Einstein)

Ignoro que pensará la posteridad de mí. Pero me imagino haber sido un muchacho que ha jugado en la playa, ha encontrado a veces un guijarro muy pulido, una concha más graciosa mientras el gran océano de las verdades extendía ante él su misterio.
(Isaac Newton)

Índice

Capítulo 1. Introducción.	3
Capítulo 2. Soluciones débiles con datos iniciales en $L^1 \cap L^p$.	15
2.1 Introducción.	15
2.2 Estudio del problema regularizado.	18
2.3 Sucesión de soluciones aproximadas.	26
2.4 Existencia de solución.	32
Capítulo 3. Soluciones débiles con datos iniciales en espacios de Morrey en 3-D.	35
3.1 Introducción.	35
3.2 Solución fundamental y espacios de Morrey modificados.	40
3.3 Linealización del problema y estimaciones a priori.	43
3.4 Existencia de solución.	52
3.5 Unicidad y dependencia continua.	56
3.6 Otras propiedades de la solución.	57
Capítulo 4. Comportamiento asintótico de soluciones débiles del sistema de VPFP sin fricción.	63
4.1 Introducción.	63
4.2 Sistema reescalado y sus propiedades.	66
4.3 Estimaciones a priori.	70
4.4 Compacidad débil- \star y paso al límite.	76
4.5 Compacidad en L^1 .	81
4.6 Generalización al problema N -dimensional.	84

Capítulo 5. El sistema de VPFP en dominios acotados: Comportamiento asintótico.	87
5.1 Introducción.	87
5.2 Condiciones de contorno y operadores de traza.	95
5.3 Propiedades de la solución.	101
5.4 Definición y propiedades del funcional de Liapunov.	116
5.5 Comportamiento asintótico.	120
Apéndice A. La ecuación de VFP.	129
A.1 La ecuación lineal de Vlasov-Fokker-Planck en \mathbb{R}^{2N}	129
A.2 Teoremas de compacidad.	141
Bibliografía.	145

Capítulo 1

Introducción.

El objetivo de esta Tesis es estudiar el sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck en teoría cinética de partículas. Este sistema es una descripción de un plasma físico donde las partículas cambian débilmente su velocidad en las colisiones y que está inmerso en el propio campo que crean las partículas. Un ejemplo típico puede ser el comportamiento de una pequeña cantidad de un gas pesado en otro gas más ligero. La baja densidad de las partículas pesadas permite suponer que la probabilidad de la colisión entre partículas pesadas es nula y, por tanto, su velocidad cambia poco debido a las colisiones con las partículas ligeras que las envuelven. Bajo estas condiciones el núcleo de colisión de Boltzmann puede ser aproximado por el operador de Fokker-Planck [66]. El movimiento que realiza cada una de las partículas puede calcularse a partir de las leyes de la mecánica clásica donde la fuerza externa se supone aleatoria, es decir, las partículas seguirán las trayectorias de un movimiento browniano. Estas consideraciones fueron introducidas por A. D. Fokker (1914), y M. Planck (1917). El movimiento browniano fue introducido por A. Einstein (1907). La justificación física de ambas hipótesis: operador de Fokker-Planck como aproximación del núcleo de colisión y campo autogenerado, puede verse en [81].

Sean $x(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad de las partículas consideradas como variables aleatorias probabilísticamente independientes. Esta última suposición es consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg cuando se habla de partículas cargadas. Representaremos por $f(t, x, v)$ la densidad de probabilidad conjunta de estas variables aleatorias. Dichas variables aleatorias verifican la ecuación

$$x'' + \beta x' + \nabla \Phi_o(x) = \mathcal{P}(t), \quad (1.1)$$

donde $\beta \geq 0$ es el parámetro de fricción, $\Phi_o(x)$ es el potencial del campo que actúa sobre el sistema y $\mathcal{P}(t)$ es un proceso estocástico distribuido de forma Gaussiana con media cero y función de correlación $2\sigma\delta_o(t - t')$, donde δ_o es la distribución

delta de Dirac y $\sigma > 0$ es la varianza de la fuerza externa aleatoria $\mathcal{P}(t)$ en (1.1), que es llamado el coeficiente de difusión térmica. La ecuación diferencial estocástica (1.1) se conoce en la literatura como la ecuación de Langevin para el movimiento Browniano de las partículas. Utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas y la integral de Itô se puede calcular la ecuación que verifica la distribución de probabilidad f no normalizada (ver [45, 76]). Dicha ecuación se denomina la ecuación de Vlasov-Fokker-Planck (VFP) para f y viene determinada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f + \operatorname{div}_v((E_o - \beta v)f) - \sigma \Delta_v f = 0, \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N \quad (1.2)$$

donde $E_o = -\nabla \Phi_o(t, x)$ es el campo de fuerzas que actúa sobre el sistema y Ω es el dominio donde se encuentran las partículas.

El sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck aparece cuando consideramos un gran número de partículas que interaccionan mutuamente. El campo creado por las propias partículas puede ser de dos tipos: electrostático ($\theta = 1$) o gravitatorio ($\theta = -1$), dependiendo del tipo de interacción. En el primer caso, podemos suponer que estamos determinando la distribución de iones pesados cargados positivamente en un baño de electrones; mientras que en el segundo caso, estaríamos interesados en masas neutras pesadas dentro de un baño de otras más pequeñas (dinámica estelar). El potencial creado se calcula mediante la ecuación de Poisson

$$-\Delta \Phi = \theta \rho(f), \quad (1.3)$$

con $\nabla \Phi$ tendiendo a cero en infinito si Ω es no acotado o con condiciones de contorno si es un dominio acotado. El campo interno de fuerzas viene dado por $E(t, x) = -\nabla \Phi$. $\rho(f)$ representa la densidad de probabilidad de la distribución de masa o de carga del sistema y viene determinada por

$$\rho(f)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x, v) dv. \quad (1.4)$$

Como consecuencia, la ecuación diferencial estocástica (1.1) cambia a

$$x'' + \beta x' + \nabla \Phi_o(x) - E(t, x) = \mathcal{P}(t),$$

y la ecuación de VFP queda como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f + \operatorname{div}_v((E + E_o - \beta v)f) - \sigma \Delta_v f = 0, \quad \text{en } (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N,$$

donde $\Phi_o(t, x)$ es el potencial externo que actúa sobre el sistema y E_o el correspondiente campo de fuerzas.

Este sistema encuentra sus aplicaciones, por ejemplo, en teoría de semiconductores o luz láser. En [14, 76, 86] se puede encontrar una amplia discusión de la derivación del modelo, interpretación física y aplicaciones del mismo.

Esta Tesis pretende analizar algunos aspectos de existencia, unicidad y comportamiento asintótico del sistema de VPFP tanto en $\Omega = \mathbb{R}^N$ como en un dominio acotado. Preferentemente, nos concentraremos en el caso tres dimensional que es el más relevante desde un punto de vista físico.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, el sistema de VPFP sin potencial externo (1.2), (1.3) se reduce a la ecuación de Vlasov-Fokker-Planck (VFP)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f + \operatorname{div}_v((E - \beta v)f) - \sigma \Delta_v f = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^{2N} \quad (1.5)$$

acoplada con la ecuación de Poisson, que en este caso se simplifica a

$$E = \theta (K * \rho(f)) \quad (1.6)$$

donde $K = -\nabla \Gamma$ y Γ es la solución fundamental de $-\Delta$ en dimensión N .

El estado actual de la literatura sobre el estudio del problema de Cauchy para el sistema en todo \mathbb{R}^N puede resumirse en las siguientes aportaciones.

El caso de dimensión dos fue analizado por P. Degond y por H. Neunzert, M. Pulvirenti y L. Triolo en [33, 71] donde se prueba la existencia de una solución global regular del sistema de VPFP para dato inicial regular.

El primer resultado en el caso de tres dimensiones es debido a H. D. Victory y B. P. O'Dwyer [86] en el cual aseguran la existencia de una solución clásica local en tiempo del sistema (1.5)-(1.6) para dato inicial regular. Posteriormente, G. Rein y J. Weckler [75] dieron condiciones suficientes sobre la solución para que ésta sea una solución global.

Por otro lado, los trabajos de F. Bouchut [12, 13] analizan la regularidad de las soluciones del sistema de VPFP en espacios L^p y como consecuencia demuestran la existencia de una solución global regular dada una condición inicial $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ con momentos en v acotados para $k < m$, con $m > 6$, es decir, $|v|^k f_o(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$. F. Bouchut demostró que las soluciones cuya existencia local se aseguraba en [86] eran, de hecho, soluciones globales. En [13] se estudia el efecto regularizante del operador de Fokker-Planck, el cual será de extrema utilidad en muchos de nuestros resultados. Sin embargo, todas las cotas sobre f , $\rho(f)$

y E obtenidas son locales en tiempo. En estos trabajos se utilizan ideas similares a las utilizadas en otras ecuaciones cinéticas usando la acotación de los momentos en v de la distribución para obtener mayor regularidad de ésta [50, 68, 73, 74].

En cuanto a soluciones débiles, los primeros pasos se realizan en [85] donde H. D. Victory demostró la existencia de soluciones débiles globales con condición inicial $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ con energía y momento de inercia iniciales acotados. La demostración está basada fundamentalmente en un resultado análogo [56] de E. Horst y R. Hunze para el sistema de Vlasov-Poisson (VP) que formalmente se obtiene haciendo $\beta, \sigma = 0$ en (1.5).

En los dos primeros capítulos de esta tesis probaremos dos resultados sobre la existencia de solución para el sistema de VPFP que complementan a los resultados anteriores. Introduzcamos primeramente el concepto de solución débil del sistema que no será más que el concepto de solución distribucional. En lo que sigue denotaremos por L el operador que forma la parte lineal de la ecuación (1.5), es decir,

$$Lf = \frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)f - \beta \operatorname{div}_v(vf) - \sigma \Delta_v f.$$

Denotaremos por $\tilde{L}_1(Q_T)$ al espacio de las medidas de variación acotada en $Q_T = [0, T[\times \mathbb{R}^6$ y sea $L^1_{loc}(Q_T; f)$ el espacio localmente convexo de las funciones localmente integrables en Q_T con respecto a la medida f .

Definición 1.1. Diremos que f es una solución débil del sistema de VPFP si

$$f \in \tilde{L}_1(Q_T), \quad E = \theta(K * \rho(f)), \quad |E| \in L^1_{loc}(Q_T; f)$$

y la ecuación (1.5) se verifica en el sentido siguiente

$$\langle f, L^t \phi \rangle - \langle Ef, \nabla_v \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^6} f_o \phi(0, \cdot) d(x, v),$$

para cada $\phi \in C^1_0([0, T) \times \mathbb{R}^6)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la relación dual entre medidas de variación acotada y funciones continuas de soporte compacto en Q_T y L^t es el operador adjunto de L .

En primer lugar, estudiamos la existencia de soluciones débiles globales del sistema de VPFP con condición inicial en $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$ con energía y momento de inercia iniciales acotados. Para ello se utilizaron los argumentos usuales

de una prueba de existencia en ecuaciones cinéticas: regularización, estimaciones *a priori* de la solución y de su energía y paso al límite en la sucesión de sistemas regularizados.

De hecho, este resultado demuestra que las hipótesis mínimas bajo las cuales E. Horst y R. Hunze habían obtenido existencia de solución débil para el sistema de VP son similares para el sistema de VPFP. El punto crucial está en demostrar estimaciones *a priori* en L^p de la distribución de partículas f . $C_w(I, X)$ indica el espacio de las funciones continuas del intervalo I con la topología débil del espacio de Banach X .

Resultado 1. *Consideremos f_o como dato inicial para las ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, el cual supondremos que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$, con $p \geq p_o(N)$, y que tiene energía inicial acotada y momento de inercia inicial acotado, es decir, $|v|^2 f_o \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, $E_o \in L^2(\mathbb{R}^N)^N$ y $|x|^2 f_o \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$. Entonces, existe una solución débil $f \in C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N}))$ de las ecuaciones de VPFP en los siguientes casos:*

- *En el caso gravitacional ($\theta = -1$) para $N = 3$ y para $N = 4$, suponiendo en el último caso que la norma del dato inicial en $L^2(\mathbb{R}^8)$ es suficientemente pequeña.*
- *En el caso electrostático ($\theta = 1$) para cualquier dimensión $N \geq 2$.*

La demostración del resultado anterior es el objetivo del capítulo 2 junto con el estudio de las propiedades de la solución obtenida. También, puede verse en [20, 21]. El valor de $p_o(N)$ se puede ver en el segundo capítulo. Bajo estas condiciones, la unicidad de solución no está asegurada. Para probar la compacidad de la solución se utilizan el teorema de Dunford-Pettis de convergencia débil en L^1 y una generalización del teorema de Ascoli-Arzelà al espacio $C_w(I, X)$. Estos teoremas de compacidad pueden consultarse en la segunda sección del apéndice. Además, se demuestra que si los parámetros β y σ tienden a cero, las soluciones débiles del sistema de VPFP convergen a soluciones débiles del sistema de VP cuya existencia ya había sido obtenida en [56].

El siguiente capítulo está destinado a extender la teoría de existencia a datos iniciales que sean medidas de variación acotada que verifican algunas propiedades adicionales. La causa de la elección de datos iniciales tan débiles no es solamente interesante desde un punto de vista matemático, sino necesaria desde un punto de vista físico. De hecho, las "particle sheets" son distribuciones de probabilidad

cuya densidad de masa o carga está concentrada en superficies o curvas de \mathbb{R}^3 (ver [69, 87]) lo que conlleva matemáticamente al estudio de datos iniciales que son masas de Dirac concentradas en curvas o superficies. Datos iniciales similares fueron estudiados para las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos, ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, usando condiciones iniciales pertenecientes a unos espacios de medidas especiales, denominados espacios de Morrey [31, 48, 80].

En este capítulo se demuestra la existencia local de solución débil para datos iniciales en unos espacios derivados de los espacios de Morrey, $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$, cuya definición y necesidad se discutirá en dicho capítulo. Además, la existencia de solución es global si el dato inicial es suficientemente pequeño y se obtienen estimaciones globales sobre f y E que no se conocían hasta el momento. Dichas estimaciones muestran el efecto regularizante del operador de Fokker-Planck. De hecho, la solución f , para todo $t > 0$, deja de ser solamente una medida y es una función con densidad en L^1 que satisface mejores propiedades que el dato inicial y de las cuales se deduce que el campo de fuerzas E está acotado para todo $t > 0$. Nuestro resultado también se puede considerar como el estudio de las hipótesis mínimas sobre el dato inicial que aseguran que el campo de fuerzas E está acotado para $t > 0$.

La demostración de este resultado está basada en un argumento de punto fijo sobre la formulación integral del problema de Cauchy para el sistema de VFP. Para ello, es necesario analizar primero la ecuación lineal de VFP en el marco de los espacios de Morrey modificados para posteriormente obtener las estimaciones *a priori* necesarias que aseguren la existencia de un límite de la sucesión de soluciones aproximadas. Además, se analiza la unicidad, estabilidad y decrecimiento de la solución obtenida. El resultado (ver [22, 26, 27]) se puede resumir como sigue.

Resultado 2. *Si f_0 es una medida de Radon positiva tal que $f_0 \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_0}(\mathbb{R}^6)$, con $p_0 \geq \frac{9}{4}$, el problema (1.5)-(1.6) tiene una solución débil $f \in L^\infty(0, T; \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_0}(\mathbb{R}^6))$ en $[0, T]$ con $T < T^*$. T^* depende de f_0 y de las constantes σ , β y p_0 . $T^* = \infty$ si el dato inicial es suficientemente pequeño, con*

$$f \in L^\infty(0, \infty; M\tilde{L}_{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^6))$$

y

$$t^{\frac{1}{2}} E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3).$$

En los siguientes capítulos se trazó como objetivo estudiar propiedades cualitativas de las soluciones del sistema de VPFP. El capítulo cuarto se dedica a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones cuya existencia asegurábamos en el capítulo anterior pero considerando como dato inicial funciones en L^p en lugar de medidas.

Las propiedades cualitativas del sistema de VPFP en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ fueron estudiadas en un resultado reciente de F. Bouchut y J. Dolbeault [14] donde se supone la existencia de un potencial externo que actúa sobre el sistema impidiendo que las partículas se difundan hasta infinito. La existencia de este potencial externo es esencial en sus argumentos ya que confina las partículas en un dominio acotado y controla su expansión. Además, en el caso gravitacional necesitan suponer que la energía potencial de la solución no diverge cuando $t \rightarrow \infty$. Bajo estas condiciones probaron que la función de distribución f tiende a una distribución Maxwelliana determinada por el potencial externo, el potencial límite, la temperatura del baño de partículas que las rodea y la masa total del sistema.

En nuestro caso, no hay potencial externo que impida a las partículas su expansión, pero a cambio, supondremos que la solución verifica las cotas globales del teorema de existencia 2. Además, nuestras técnicas se aplican para $\beta = 0$. Demostraremos que, en este caso, la distribución de partículas f se difunde con la misma velocidad que la solución fundamental \bar{G} del operador L centrada en cero. Por tanto, aseguramos que, al menos para dato inicial pequeño, la influencia del campo de fuerzas interno se anula en infinito. El resultado exacto se puede concretar en el siguiente enunciado (ver [26, 27]). Denotaremos por $S_p(t)$ a

$$\max\{\|\rho_h(f)(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\},$$

para cada p , $1 \leq p \leq \infty$, donde

$$\rho_h(f)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x - hv, v) dv.$$

Resultado 3. *Supongamos que $f_o \geq 0$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^6)$ y tiene energía inicial, momento de inercia inicial y entropía inicial acotada, es decir, $(|x|^2 + |v|^2 + |\log f_o|)f_o \in L^1(\mathbb{R}^6)$ y $E_o \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$.*

Sea f una solución débil de (1.5)-(1.6) con $\beta = 0$ y dato inicial f_o que verifica

$$f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6)),$$

$$t^{\frac{1}{2}}E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3),$$

$$\max\{S_{\frac{g}{4}}(t), 0 \leq t < \infty\} < \infty,$$

la energía cinética y el momento de inercia son funciones continuas de $[0, \infty)$ en \mathbb{R} a lo sumo del orden de t y t^3 , respectivamente, cuando $t \rightarrow \infty$ y $f \log f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, \cdot) - M\bar{G}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = 0,$$

donde M es la masa total de f_0 .

En el caso $\beta = 0$ la función \bar{G} es autosemejante (ver apéndice). Métodos asintóticos basados en la autosemejanza de las ecuaciones son conocidos en la literatura [6, 7, 17, 46, 58]. El método de las cuatro etapas que seguimos en este capítulo: determinación del grupo de transformaciones de escala asociado al sistema, estimaciones *a priori*, compacidad e identificación del límite, fue propuesto por S. Kamin y J. L. Vázquez [59].

En un primer paso realizamos un cambio de escala en la Ecuación (1.5) mediante la definición de $f_\lambda(t, x, v)$ por

$$f_\lambda(t, x, v) = \lambda^{12} f(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v).$$

Este cambio de escala está motivado por la autosemejanza de la función \bar{G} . Estudiamos y analizamos las ecuaciones y las propiedades que verifican las cantidades reescaladas. Es importante destacar que, mediante el cambio de escalas, el estudio de la distribución de partículas $f(t, \cdot)$ para $t \rightarrow \infty$ se puede reducir a analizar el comportamiento de la distribución de partículas reescalada en tiempo $t = 1$, $f_\lambda(1, \cdot)$, cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Posteriormente, utilizamos criterios de compacidad en L^1 para obtener un límite de la sucesión en λ e identificamos la distribución límite. Este resultado parece ser la primera aplicación de técnicas de autosemejanza en el campo de las ecuaciones cinéticas.

El capítulo quinto de esta tesis está dedicado a analizar el comportamiento asintótico del sistema de VFP en dominios acotados. En primer lugar, al considerar el caso de un dominio acotado las condiciones sobre el sistema deben complementarse dando condiciones de contorno tanto sobre la ecuación de VFP (1.2) como sobre la ecuación de Poisson (1.3).

Nosotros consideramos condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas para el potencial, $\Phi(t, x) = 0$ en $\partial\Omega$, ($\partial\Omega$ es un conductor perfecto en el caso electrostático) y con condiciones de contorno para f dadas mediante un núcleo

general de reflexión. Las condiciones de contorno de reflexión para ecuaciones cinéticas son relaciones integrales entre la densidad de partículas que provienen de una sección infinitesimal de la frontera en un instante determinado y la densidad de partículas que chocan sobre la misma sección de la frontera. Más exactamente, definimos los conjuntos

$$\Gamma_{\pm}^x = \{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \text{signo}(v \cdot n(x)) = \pm 1\}$$

para $x \in \partial\Omega$, y

$$\Gamma_{\pm} = \{(x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \text{signo}(v \cdot n(x)) = \pm 1\},$$

donde $n(x)$ es el normal exterior unitario a la frontera del dominio Ω en $x \in \partial\Omega$. Denotemos por $\gamma_{\pm}f$ y γf las trazas de f sobre $\Sigma_{\pm} = [0, \infty) \times \Gamma_{\pm}$ y $\Sigma = [0, \infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^3$, respectivamente. Dado $x \in \partial\Omega$ y $t > 0$ supondremos que

$$\gamma_{-}f(t, x, v) = \int_{\Gamma_{+}^x} R(t, x; v, v^*) \gamma_{+}f(t, x, v^*) dv^*,$$

para cada $v \in \Gamma_{-}^x$. R representa la probabilidad de que una partícula con velocidad v^* que en el instante t choca con la frontera en x se refleje en el mismo instante con velocidad v . La reflexión especular es un caso concreto de estas condiciones de contorno. El estudio de las trazas de la distribución de partículas f en $\partial\Omega \times \mathbb{R}^3$ se basa en los resultados de trazas para el operador de transporte libre [29] que nos conduce a considerar el espacio $W^1(Q_T)$ (ver capítulo quinto).

El objetivo del capítulo quinto es estudiar la convergencia en tiempo de determinadas soluciones del problema de Cauchy para el sistema de VPFP con las condiciones de contorno descritas.

La existencia de soluciones débiles para el problema de contorno de ecuaciones cinéticas ha sido estudiada para la ecuación de Boltzmann y para el sistema de Vlasov-Poisson [1, 3, 28, 51]. En cuanto al comportamiento asintótico de estos sistemas debemos mencionar los trabajos de L. Desvillettes [33] y L. Desvillettes y J. Dolbeault [36] donde tratan las ecuaciones de Boltzmann y B.G.K y el sistema de Vlasov-Poisson-Boltzmann. Demuestran que la distribución en infinito tiende a ser una distribución Maxwelliana determinada por la masa inicial, la energía inicial y el potencial límite. Nosotros probaremos un resultado análogo en el caso del sistema de VPFP (ver [10, 11]).

Resultado 4. *Sea $f \in W^1(Q_T)$ una solución débil del sistema de VPFP con dato inicial f_0 que verifica*

1. $f \in C([0, \infty), L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3))$.
2. $|v|^2 f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, para cada $T > 0$.
3. $|v|^2 \gamma f, \gamma f^2 \in C([0, \infty), L^1(\Gamma_\pm; |v \cdot n(x)| dS dv))$.
4. $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \in C([0, T[, H^1_0(\Omega))$ y $E \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$, para cada $T > 0$.
5. $\nabla_v f \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$, para cada $T > 0$.
6. En el caso gravitacional, supondremos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx < \infty.$$

Entonces, para cada sucesión $\{t_n\} \rightarrow \infty$ existe una subsucesión (que denotaremos con el mismo índice) tal que

$$f(t_n, x, v) \rightarrow f_\infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

en $L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ con

$$f_\infty(x, v) = \left(\frac{2\pi\sigma}{\beta} \right)^{-\frac{3}{2}} \lambda \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi_\infty(x) \right) \right\},$$

donde $\Phi_\infty(x)$ es una solución débil de

$$-\Delta \Phi_\infty = \theta \lambda \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \Phi_\infty \right\} \quad (1.7)$$

en $H^1_0(\Omega)$, y

$$\lambda = \|f_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} \left(\int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \Phi_\infty(x) \right\} dx \right)^{-1}.$$

Además, en el caso electrostático, la solución del problema de Dirichlet para (1.7) en $H^1_0(\Omega)$ es única y, por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, \cdot) - f_\infty\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} = 0.$$

La ecuación estacionaria se analiza en dicho capítulo demostrando la unicidad de solución en el caso electrostático, con lo que en dicho caso la distribución límite queda completamente determinada. El caso gravitacional es más complicado.

La demostración de este resultado se basa en la construcción de un funcional de Liapunov para este sistema dinámico. Dicho funcional es la divergencia de entropía con respecto a \tilde{f}

$$\eta(t) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log \left(\frac{f}{\tilde{f}} \right) d(x, v),$$

donde \tilde{f} es una solución estacionaria del sistema de la ecuación de VFP que satisface la ecuación

$$(v \cdot \nabla_x) \tilde{f} + \operatorname{div}_v((E - \beta v) \tilde{f}) - \sigma \Delta_v \tilde{f} = 0$$

y

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{\partial \log \tilde{f}}{\partial t} d(x, v) = 0.$$

Posteriormente, se demuestra que dicho funcional se puede expresar como

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log f d(x, v) + \frac{\beta}{2\sigma} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) + \\ & \frac{\beta}{2\sigma} \theta \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Para probar que el funcional es decreciente sobre la solución, cuando $t \rightarrow \infty$, calculamos las identidades que verifican cada una de las cantidades involucradas en su expresión. Para ello, se demuestran rigurosamente las siguientes identidades: el balance de masa, el balance de energía y el balance de entropía.

Estas identidades permiten concluir que la derivada del funcional η es negativa y, por tanto, η es decreciente. La acotación inferior es debida a su expresión explícita. Finalmente, para tomar el límite cuando $t \rightarrow \infty$, necesitamos propiedades de compacidad de la sucesión $\{f_n(t, x, v) = f(t + t_n, x, v)\}$. La identificación de la distribución límite concluye la demostración del resultado.

La existencia de soluciones débiles del sistema de VFP en dominios acotados satisfaciendo las propiedades 1-6 del resultado 4 no se encuentra en la literatura. De hecho, la existencia de solución para el problema lineal es complicada (ver [34]). Un primer paso en esta dirección se realiza en [19] donde se prueba la existencia de solución débil del sistema de VFP verificando las propiedades 1,2,4 y 5 salvo la acotación de E y la regularidad de las trazas.

Para finalizar, resumamos la estructuración de esta tesis. En los dos primeros capítulos se demuestran los resultados de existencia 1 y 2. El capítulo cuarto está

dedicado a demostrar el resultado de comportamiento asintótico 3 y el capítulo quinto obtiene de manera rigurosa el comportamiento asintótico en dominios acotados 4. Por último, el apéndice de esta Tesis está dirigido a resumir los resultados de la literatura más importantes del problema de Cauchy para la ecuación lineal de VFP, propiedades y criterios de compacidad utilizados a lo largo de la Tesis. Dicho capítulo ha sido incluido por comodidad para el lector.

Capítulo 2

Soluciones débiles con datos iniciales en $L^1 \cap L^p$.

2.1 Introducción.

Como hemos comentado en el capítulo anterior, en esta Tesis estudiamos las soluciones débiles de las ecuaciones de VPFP. En este capítulo analizamos el caso en el que el dato inicial f_0 pertenece al espacio $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$.

La demostración sigue las líneas generales de las pruebas de existencia para ecuaciones cinéticas. Las etapas fundamentales pueden quedar resumidas en regularización del sistema, estimaciones *a priori* y paso al límite para encontrar una solución del sistema de partida.

La regularización del sistema se lleva a cabo en dos etapas. La primera está destinada a evitar la singularidad del núcleo K que define el campo de fuerza E pero manteniendo la ecuación de la energía (ver sección 2.3). Al sistema regularizado lo denotaremos por VPFP^ϵ . Este sistema, aún siendo no lineal, elimina ciertas dificultades típicas de las ecuaciones integrales con núcleo singular lo que nos permite, por ejemplo, que el campo de fuerza sea acotado y podamos obtener buenas acotaciones de la densidad de masa ρ y de la distribución de partículas f .

La otra regularización tiene por objetivo linealizar el sistema VPFP^ϵ retardando en tiempo el campo de fuerza E . A estos problemas aproximados los denotaremos como problemas VPFP_n^ϵ .

Posteriormente, obtendremos estimaciones sobre las soluciones de los problemas VPFP_n^ϵ , que son independientes del método de regularización, utilizando resultados clásicos de interpolación. Este proceso permitirá obtener cotas sobre f y ρ y como consecuencia sobre E y, por tanto, aplicar criterios de compacidad para obtener un límite de la sucesión de soluciones de los problemas regularizados. Dicho límite será el candidato a solución de nuestro problema y probaremos

que, efectivamente, es solución débil, Definición (1.1), obtenida como límite de los problemas aproximados.

En este proceso, necesitaremos que la energía total del sistema permanezca acotada. Para conseguir esta acotación supondremos que la energía del dato inicial es finita, es decir, que la energía cinética,

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |v|^2 f_o(x, v) d(x, v),$$

y la energía potencial,

$$\theta \int_{\mathbb{R}^N} |E_o(x)|^2 dx,$$

sean finitas.

Como veremos más adelante, para estimar ρ es esencial tener una cota de la energía cinética. En el caso de interacción de tipo electrostático ($\theta = 1$) esta acotación es siempre cierta independientemente de la dimensión N . Sin embargo, en el caso gravitacional ($\theta = -1$) la acotación de la energía cinética es más difícil de conseguir. Esto es debido a la negatividad de la energía potencial. Probaremos que en el caso tres dimensional es posible obtener esta cota; además, en el caso $N = 4$ demostraremos dicha cota para dato inicial suficientemente pequeño. En la Sección 2.2 analizaremos esta acotación.

En los cálculos de este capítulo nos restringiremos al caso de dimensión mayor o igual que dos. El caso uno dimensional es mucho más sencillo y no requiere el mismo tratamiento. De hecho, el campo de fuerzas siempre está acotado porque la Ecuación (1.6) se reduce a

$$E(t, x) = \theta \int_0^x \rho(f)(t, y) dy,$$

y tenemos la estimación

$$\|E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Un caso particular de nuestro problema ($p = \infty$) fue previamente resuelto por H. D. Victory [85]. El método que hemos descrito para probar la existencia de soluciones de ecuaciones cinéticas fue introducido por E. Horst [54] para estudiar soluciones clásicas del sistema sin colisión asociado (VP) donde las constantes β y σ son nulas. Posteriormente, dicho autor y R. Hunze analizaron la existencia de soluciones débiles para el sistema de VP. Demostraron que si el dato inicial $f_o \geq 0$

pertenece al espacio $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$, con $p \geq p_o(N)$, y tiene energía inicial acotada, entonces el sistema de VP tiene una solución débil.

El valor exacto de $p_o(N)$ está determinado por las cotas obtenidas para las soluciones de los problemas regularizados y viene dado por

$$p_o(N) = \frac{N(N + 5 + \sqrt{(N - 1)^2 + 16})}{6N + 4}.$$

Denotemos por $C_w([0, T], L^p(\mathbb{R}^{2N}))$ el espacio de las funciones de $[0, T]$ en $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ continuas para la topología débil de $L^p(\mathbb{R}^{2N})$. Sea $M^p(\mathbb{R}^N)$ el espacio de Marcinkiewicz de exponente p (ver [8]). El principal resultado que probaremos en este capítulo es el siguiente.

Teorema 2.1. *Consideremos f_o como dato inicial para las ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck, el cual supondremos que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$, con $p \geq p_o(N)$, y que tiene energía inicial acotada y momento de inercia inicial acotado, es decir, $|v|^2 f_o \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, $E_o \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $|x|^2 f_o \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$. Entonces existe una solución débil f de las ecuaciones de VPFP en los siguientes casos:*

- *En el caso gravitacional ($\theta = -1$) para $N = 3$ y para $N = 4$, suponiendo en el último caso que la norma del dato inicial en $L^2(\mathbb{R}^8)$ es suficientemente pequeña.*
- *En el caso electrostático ($\theta = 1$) para cualquier dimensión $N \geq 2$.*

La solución f verifica las siguientes propiedades:

- i) $f \in C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N}))$, para cada $T > 0$ con $f(0, \cdot) = f_o$. Además, la masa total del sistema se conserva, es decir,*

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}$$

y $f(t, \cdot)$ es positiva, para cada $t > 0$.

- ii) $\rho(f) \in C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{r(p)}(\mathbb{R}^N))$, para cada $T > 0$, donde $r(p)$, introducido en el Lema A.5, está dado por*

$$r(p) = \begin{cases} \frac{N(p-1)+2p}{N(p-1)+2} & \text{for } p < \infty \\ \frac{N+2}{N} & \text{for } p = \infty \end{cases}. \quad (2.1)$$

- iii) El campo de fuerzas $E(t, \cdot)$ está definido por (1.6) y pertenece al espacio de Marcinkiewicz $M^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)^N$ y a todos los espacios $L^q(\mathbb{R}^N)^N$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{r(p)} - \frac{1}{N}$, para cada $t \in [0, T]$.*

Además, las soluciones del sistema de VFPF cuando σ y β tienden a cero convergen hacia soluciones débiles del sistema de Vlasov-Poisson.

2.2 Estudio del problema regularizado.

Para estudiar el sistema de VFPF vamos a regularizarlo para poder obtener las estimaciones necesarias y posteriormente pasar al límite. Fijemos cualquier real positivo ϵ . Definimos la solución fundamental regularizada del $-\Delta$ por

$$\Gamma^\epsilon(x) = \frac{1}{(N-2)w_N} (|x|^2 + \epsilon)^{\frac{2-N}{2}} \quad (2.2)$$

y el núcleo regularizado por

$$K^\epsilon(x) = \frac{1}{w_N} (|x|^2 + \epsilon)^{-\frac{N}{2}} x \quad (2.3)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, donde w_N es el volumen de la bola euclídea N -dimensional. En el caso dos dimensional la solución fundamental regularizada viene dada por

$$\Gamma^\epsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \log(|x|^2 + \epsilon).$$

Usando el teorema de convergencia dominada y dividiendo el núcleo dentro y fuera de una bola es fácil observar la siguiente relación entre los núcleos regularizados K^ϵ y K (ver [56]).

Lema 2.1. Sea $s \in [1, \frac{N}{N-1}[$, entonces

$$\|K^\epsilon - K\|_{L^s(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Para resolver el problema aproximado regularizamos el dato inicial. Para ello, consideremos una función $\varphi(x)$ regular C^∞ con soporte compacto en \mathbb{R}^N tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi(x) = \varphi(|x|)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = 1.$$

Para cada $\epsilon > 0$ se define la sucesión $\varphi_\epsilon(x, v)$ como

$$\varphi_\epsilon(x, v) = \frac{1}{\epsilon^{2N}} \varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \varphi\left(\frac{v}{\epsilon}\right).$$

Definimos el dato inicial $f_o^\epsilon = f_o * \varphi_\epsilon$. Señalemos que la norma $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ de f_o^ϵ es igual a la masa inicial del sistema, es decir, la norma de f_o en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$.

El sistema de VPFP regularizado, que denotaremos por VPFP $^\epsilon$, consiste en la ecuación de VFP para determinar la distribución de partículas

$$\frac{\partial f^\epsilon}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f^\epsilon + \operatorname{div}_v((E^\epsilon - \beta v) f^\epsilon) - \sigma \Delta_v f^\epsilon = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^{2N}, \quad (2.4)$$

donde el campo de fuerzas viene dado por el potencial obtenido en la ecuación de Poisson

$$E^\epsilon(t, x) = \theta (K^\epsilon * \rho(f^\epsilon)(t, x)) \quad (2.5)$$

y como dato inicial tomamos

$$f^\epsilon(0, x, v) = f_o^\epsilon(x, v). \quad (2.6)$$

El sistema (2.4)-(2.6) sigue siendo no lineal. Sin embargo, la definición del núcleo regularizado K^ϵ implica que

$$\|E^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(\epsilon) \|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}.$$

El dato inicial aproximado f_o^ϵ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ y además $(|x|^2 + |v|^2) f_o^\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$. Las estimaciones de f_o^ϵ en los correspondientes espacios están acotadas independientemente de ϵ .

El problema regularizado VPFP $^\epsilon$ fue estudiado en [85]. La idea básica es linealizar el sistema retardando parte del término no lineal. El siguiente resultado está probado en [85], y se deduce aplicando las propiedades del lema A.3.

Proposición 2.1. *El problema VPFP $^\epsilon$ tiene una única solución f^ϵ que satisface*

- i) $f^\epsilon \in C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}^{2N})$, $E^\epsilon \in C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}^N)^N$.
- ii) $f^\epsilon(t, \cdot)$ tiene como dato inicial f_o^ϵ en $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$.
- iii) f^ϵ es positiva para cada $t \geq 0$.
- iv) Se conserva la masa total del sistema, es decir,

$$\|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Necesitamos obtener estimaciones *a priori* de la distribución de partículas, para ello, nos será útil recordar la demostración del resultado anterior. Consideremos el problema linealizado definido por inducción mediante las ecuaciones

$$\frac{\partial f_n^\epsilon}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f_n^\epsilon + \operatorname{div}_v((E_{n-1}^\epsilon - \beta v) f_n^\epsilon) - \sigma \Delta_v f_n^\epsilon = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \mathbb{R}^{2N} \quad (2.7)$$

donde el campo de fuerzas está dado por

$$E_n^\epsilon(t, x) = \theta (K^\epsilon * \rho(f_n^\epsilon)(t, x)) \quad (2.8)$$

y como dato inicial f_o^ϵ . En el paso inicial E_o^ϵ viene definido por (2.8) utilizando f_o^ϵ .

Dado cualquier campo E_o acotado, de clase 1 con derivadas acotadas, el operador

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot + (v \cdot \nabla_x) \cdot + \operatorname{div}_v((E_o - \beta v) \cdot) - \sigma \Delta_v \cdot$$

tiene una función de Green G_{E_o} (ver apéndice). Utilizando este hecho, es fácil probar por inducción que la sucesión f_n^ϵ está bien definida y viene dada por

$$f_n^\epsilon(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu) f_o^\epsilon(\xi, \nu) d\xi d\nu, \quad (2.9)$$

donde $G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu)$ es la correspondiente función de Green asociada a (2.7). Teniendo en cuenta alguna de las propiedades del Lema A.3 y de la Proposición A.3 podemos deducir el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Se verifican las siguientes propiedades:*

i) *La solución fundamental $G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu)$ es positiva y satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu) dx dv = 1$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu) d\xi d\nu = e^{N\beta t}$$

para cada $t \geq 0$.

ii) $f_n^\epsilon(t, \cdot)$ tiende a $f^\epsilon(t, \cdot)$ cuando $n \rightarrow \infty$ en $L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ para cada $t \geq 0$.

iii) Se conserva la masa total del sistema, es decir,

$$\|f_n^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}$$

y

$$\|f_n^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2N})} \leq e^{N\beta t} \|f_o^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2N})}.$$

iv) La norma de $f_n^\epsilon(t, \cdot)$ en $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ está acotada por

$$\|f_n^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} \leq e^{\frac{N\beta t}{p'}} \|f_o^\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Por lo tanto,

$$\|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} \leq e^{\frac{N\beta t}{p'}} \|f_o^\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Demostración. *i)* es la aplicación del lema A.3 *ii)* en nuestro caso. *ii)* se puede encontrar en [85] y [86]. Esbozemos la demostración. Teniendo en cuenta que

$$\|E_n^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(\epsilon) \|\rho(f_n^\epsilon)(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = C(\epsilon) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}$$

deducimos que el campo E_n^ϵ está acotado independientemente de t y de n . Esto permite (ver Proposición III.3 [86]) acotar la diferencia $f^{n+1} - f^n$ en espacios L^p para probar que la sucesión f^n es de Cauchy. *iii)* es una consecuencia directa de las propiedades de la solución fundamental *i)* y de la fórmula explícita de f_n^ϵ dada en (2.9). Probemos el último apartado *iv)*. Con este objetivo se definen, para cada $t > 0$, dos operadores

$$T_1 : L^1(\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^{2N})$$

$$T_1(g) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu) g(\xi, \nu) d\xi d\nu$$

y

$$T_\infty : L^\infty(\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$$

$$T_\infty(g) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_n^\epsilon(t, x, v, \xi, \nu) g(\xi, \nu) d\xi d\nu.$$

El apartado *iii)* nos asegura que estos operadores son lineales y continuos con

$$\|T_1\| \leq 1 = M_1, \quad \|T_\infty\| \leq e^{N\beta t} = M_\infty.$$

El teorema de interpolación de Riesz-Thorin (ver [15] lección IV) implica que el operador

$$T_p : L^p(\mathbb{R}^{2N}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^{2N})$$

definido, de igual forma que T_1 y T_∞ , es continuo y su norma está acotada por $M_1^a M_\infty^{1-a}$ con $a = \frac{1}{p}$. Por tanto, el resultado es cierto. \square

En el siguiente resultado probaremos que la energía cinética de las soluciones de los problemas regularizados (2.4)-(2.6) permanece acotada en intervalos $[0, T]$, con $T > 0$, independientemente de ϵ .

Denotemos por $K(f^\epsilon)(t)$, $P(f^\epsilon)(t)$ e $I(f^\epsilon)(t)$ la energía cinética, la energía potencial y el momento de inercia del sistema regularizado respectivamente, definidos para cada $t \geq 0$ por

$$K(f^\epsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} |v|^2 f^\epsilon(t, x, v) d(x, v), \quad (2.10)$$

$$P(f^\epsilon)(t) = \theta \int_{\mathbb{R}^{2N}} \Gamma^\epsilon(x - y) \rho(f^\epsilon)(t, x) \rho(f^\epsilon)(t, y) d(x, y) \quad (2.11)$$

y

$$I(f^\epsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} |x|^2 f^\epsilon(t, x, v) d(x, v). \quad (2.12)$$

Para poder acotar la energía potencial necesitaremos un resultado acerca de la acotación en espacios L^p del campo de fuerzas E definido en (1.6). Para ello utilizamos el siguiente resultado acerca de operadores integrales definidos por núcleos singulares que puede verse en [82].

Lema 2.3. *Sea $r, q \in]1, \infty[$, $\lambda \in [0, N[$ con $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{N} = 2$. Entonces, dado $\phi_1 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ y $\phi_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, se verifica que*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |x - y|^{-\lambda} |\phi_1(x)| |\phi_2(y)| d(x, y) \leq C \|\phi_1\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \|\phi_2\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Introduzcamos el concepto de *condición de energía* que nos permitirá escribir de forma más cerrada el teorema de existencia.

Definición 2.1. *Diremos que el dato inicial f_0 satisface la condición de energía si existe una función continua y no decreciente $\alpha(t)$ tal que*

$$K(f^\epsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} |v|^2 f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) \leq \alpha(t)$$

para $t \in [0, \infty)$, independientemente de $\epsilon > 0$.

En el resultado siguiente daremos algunos casos en los que la condición de energía se satisface.

Lema 2.4. *Dada f^ϵ la solución del sistema (2.4)-(2.6). Las siguientes propiedades son ciertas.*

i) *La densidad de masa $\rho(f^\epsilon)$ verifica la ecuación de continuidad*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(f^\epsilon) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^N} v f^\epsilon(t, x, v) dv \right) = 0.$$

Como consecuencia, la masa de la solución f^ϵ se conserva, es decir,

$$\|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})},$$

para cada $t > 0$.

ii) *Se verifica la siguiente identidad de producción de energía*

$$\frac{d}{dt} (K(f^\epsilon)(t) + P(f^\epsilon)(t)) = 2N\sigma \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} - 2\beta K(f^\epsilon)(t).$$

iii) *En el caso de interacción electrostática ($\theta = 1$) la energía potencial del sistema es positiva. Por tanto, la condición de energía siempre se satisface en cualquier dimensión N . Además, la energía cinética tiene un crecimiento a lo sumo lineal, cuando $t \rightarrow \infty$.*

iv) *En el caso de interacción gravitacional ($\theta = -1$) la energía potencial es negativa. Podemos distinguir los siguientes casos:*

- *Para $N = 3$, si $f_o \in L^{\frac{9}{7}}(\mathbb{R}^6)$, la condición de energía se satisface.*
- *Para $N = 4$, si f_o es suficientemente pequeña en $L^2(\mathbb{R}^8)$, entonces la condición de energía es cierta.*

Además, la energía cinética tiene un crecimiento a lo sumo lineal, cuando $t \rightarrow \infty$, si $\beta = 0$.

v) *El momento de inercia verifica la ecuación*

$$\frac{d}{dt} (I^\epsilon(t)) = 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} (x \cdot v) f^\epsilon(t, x, v) d(x, v).$$

vi) *Si f_o satisface la condición de energía, entonces el momento de inercia del sistema regularizado (2.4)-(2.6) está acotado en $[0, T]$ independientemente de ϵ . Además, el momento de inercia tiene un crecimiento a lo sumo de t^3 , cuando $t \rightarrow \infty$, suponiendo que el crecimiento de la energía cinética sea a lo sumo lineal.*

Demostración. Los apartados *i)*, *ii)* y *v)* se obtienen fácilmente multiplicando la Ecuación (2.4) por 1, $|v|^2$ y $|x|^2$ respectivamente, integrando y aplicando el teorema de la divergencia. Señalar que esto es posible ya que f^ϵ es solución clásica del problema regularizado VFPF $^\epsilon$ y tanto ella como todas sus derivadas son integrables.

Teniendo en cuenta que $\Gamma^\epsilon(x)$, dado por (2.2), es positiva, las primeras partes de *iii)* y *iv)* se deducen de la definición de la energía potencial (2.11). Demostremos la segunda parte de *iii)*.

Del apartado *ii)* se deduce que

$$K(f^\epsilon)(t) + P(f^\epsilon)(t) \leq K(f^\epsilon)(0) + P(f^\epsilon)(0) + 2N\sigma\|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}T, \quad (2.13)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Como la energía potencial $P(f^\epsilon)(t)$ es positiva, usando (2.13) tenemos que

$$K(f^\epsilon)(t) \leq K(f^\epsilon)(0) + P(f^\epsilon)(0) + 2N\sigma\|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}T.$$

Teniendo en cuenta que $\Gamma^\epsilon \leq \Gamma$ se tiene que

$$P(f^\epsilon)(0) \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \Gamma(x-y) \rho(f_o^\epsilon)(x) \rho(f_o^\epsilon)(y) dx dy.$$

Como $\text{div}(K * \rho(f_o^\epsilon)) = \rho(f_o^\epsilon)$ se tiene que

$$P(f^\epsilon)(0) \leq \|K * \rho(f_o^\epsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Puesto que E_o está en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y el dato inicial está regularizado por convolución con $\varphi_\epsilon(x, v)$ con las propiedades señaladas anteriormente, el segundo término de la desigualdad anterior está acotado independientemente de ϵ .

Estudiemos ahora el caso en que la energía potencial es negativa, apartado *iv)*. Como $\Gamma^\epsilon \leq \Gamma$ en $N = 3$, el Lema 2.3 con $p = q = \frac{6}{5}$, $\lambda = 1$ y $N = 3$, nos asegura que

$$|P(f^\epsilon)(t)| \leq C \|\rho(f^\epsilon)(t, \cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)}^2.$$

El lema de interpolación (Lema A.5) con $k = 2$, $k' = 0$ y $p = \frac{9}{7}$ nos permite acotar la energía potencial por

$$|P(f^\epsilon)(t)| \leq C \|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^{\frac{9}{7}}(\mathbb{R}^6)}^{\frac{3}{2}} (K(f^\epsilon)(t))^{\frac{1}{2}}.$$

Combinando las desigualdad anterior con la (2.13) obtenemos que $K(f^\epsilon)$ debe verificar

$$K(f^\epsilon)(t) \leq K(f^\epsilon)(0) + 2N\sigma \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} T + C \|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^{\frac{9}{7}}(\mathbb{R}^6)}^{\frac{3}{2}} (K(f^\epsilon)(t))^{\frac{1}{2}}.$$

El apartado *iv)* del Lema 2.2 nos permite acotar la norma de f^ϵ en $L^{\frac{9}{7}}(\mathbb{R}^6)$ por la norma correspondiente de la dato inicial f_o^ϵ que, teniendo en cuenta que es la convolución de una aproximación de la unidad con f_o , podemos acotar a su vez por la norma correspondiente de f_o . Por tanto, tenemos que

$$K(f^\epsilon)(t) \leq C_1 + C_2 (K(f^\epsilon)(t))^{\frac{1}{2}},$$

para cada $0 \leq t \leq T$, donde C_1, C_2 son constantes independientes de ϵ . En consecuencia, acabamos de comprobar que f_o verifica la condición de energía.

El caso de cuatro dimensiones se deduce análogamente eligiendo $p = q = \frac{4}{3}$ y $\lambda = 2$ en el Lema 2.3 y, posteriormente, aplicando el lema de interpolación (Lema A.5) con $k = 2$, $k' = 0$ y $p = 2$, para demostrar que

$$K(f^\epsilon)(t) \leq C_1 + C_2 \|f_o\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} K(f^\epsilon)(t),$$

para cada $0 \leq t \leq T$, donde C_1, C_2 son constantes independientes de ϵ . Por tanto, el resultado es cierto.

El último apartado se deduce fácilmente de la siguiente cota

$$\frac{d}{dt}(I^\epsilon(t)) \leq (I^\epsilon(t))^{\frac{1}{2}} (KE^\epsilon(t))^{\frac{1}{2}}.$$

y de la hipótesis de la condición de energía. \square

Para finalizar esta sección pondremos de manifiesto una estimación que es consecuencia directa del Lema 2.3 y del lema de interpolación (Lema A.5) y que será de gran utilidad para demostrar que el producto Ef es integrable.

Lema 2.5. Sean $p \in]1, \infty[$, $\phi_1, \phi_2 \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$, $\lambda \in [0, N[$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{r(p)} + \frac{\lambda}{N} = 2$ y $|v|^2 \phi_2 \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, entonces

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{\mathbb{R}^{2N}} |x - y|^{-\lambda} |\phi_1(x, v)| |\phi_2(y, w)| d(y, w) d(x, v) \\ & \leq C |A|^{\frac{1}{p'}} \|\phi_1\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} \|\phi_2\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}^{\frac{2p'}{N+2p'}} \| |v|^2 \phi_2 \|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}^{\frac{N}{N+2p'}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde A es cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R}^{2N} .

La condición

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r(p)} + \frac{\lambda}{N} = 2,$$

nos determina p que debe ser exactamente $p_o(N)$ dado por

$$p = p_o(N) = \frac{N(N + 5 + \sqrt{(N - 1)^2 + 16})}{6N + 4}.$$

En la siguiente sección demostraremos que estamos en las condiciones de aplicar determinados criterios de compacidad utilizando las propiedades vistas en esta sección para los problemas regularizados.

2.3 Sucesión de soluciones aproximadas.

En esta sección probaremos que podemos encontrar una subsucesión de las soluciones de los problemas VPFP $^\epsilon$ que converja, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, en algún sentido a determinar, a una solución f del sistema de VPFP.

Denotaremos por $\sigma(X, X')$ la topología débil del espacio de Banach X , siendo X' el dual de X . Más concretamente, $\sigma(p, p')$ representará la topología débil en $L^p(\mathbb{R}^{2N})$, donde $p < \infty$. Usaremos los criterios de compacidad de Ascoli-Arzelà generalizado (ver apéndice Teorema A.1) y de Dunford-Pettis (ver apéndice Teorema A.2).

Obtendremos una subsucesión, que denotaremos con el mismo índice, de forma que $\{f^\epsilon\} \rightarrow f$ en $C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N}))$ para cada $T > 0$. Este resultado será probado en una serie de etapas intermedias. Nuestro objetivo es aplicar el Teorema A.1 a los pares duales $(L^1(\mathbb{R}^{2N}), L^\infty(\mathbb{R}^{2N}))$ y $(L^p(\mathbb{R}^{2N}), L^{p'}(\mathbb{R}^{2N}))$, con $p_o(N) \leq p < \infty$. Demostremos la primera condición del Teorema A.1 para los pares duales referenciados.

Lema 2.6. *El conjunto $\mathcal{F} = \{f^\epsilon(t, \cdot), \epsilon > 0\}$ es relativamente compacto con la topología débil en $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ y $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ para cada $t \geq 0$.*

Demostración. El Lema 2.2 iv) implica que

$$\|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} \leq e^{\frac{N\beta t}{p'}} \|f_o\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Por tanto, el teorema de Banach-Alaoglu (ver [15], lección III) nos asegura que \mathcal{F} es relativamente compacto con respecto a la topología débil en $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ con $1 < p < \infty$ para cada $t > 0$.

Para probar que es débilmente relativamente compacto en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ usaremos la caracterización de estos conjuntos dada por el teorema de Dunford-Pettis, Teorema A.2. La conservación de la masa, Proposición 2.1 iii), nos demuestra que \mathcal{F} está acotado en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$. La condición de energía y el Lema 2.4 nos permiten obtener que

$$KE^\epsilon(t) + I^\epsilon(t) \leq C_T$$

donde C_T es una constante independiente de ϵ , con $t \in [0, T]$.

Elijamos $R > 0$ tal que $C_T R^{-2} < \delta$, con $\delta > 0$. Sea B_R la bola euclídea de centro 0 y radio R en \mathbb{R}^{2N} y \mathbb{R}^{2N}/B_R su conjunto complementario en \mathbb{R}^{2N} . Por tanto, tenemos que

$$R^2 \int_{\mathbb{R}^{2N}/B_R} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}/B_R} (|x|^2 + |v|^2) f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) \leq C_T < \delta R^2.$$

Finalmente, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}/B_R} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) < \delta,$$

para cada $\delta > 0$, con lo que la tercera condición del Teorema A.2 se satisface. Para probar la segunda condición de dicho teorema consideremos un conjunto de Borel acotado Ω . Notemos por \mathcal{X}_Ω la función característica del conjunto Ω . Con esta notación podemos escribir

$$\int_{\Omega} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{X}_\Omega f^\epsilon(t, x, v) d(x, v).$$

La desigualdad de Hölder nos permite deducir que

$$\int_{\Omega} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) \leq |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})},$$

y el Lema 2.2 iv) implica que

$$\int_{\Omega} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) \leq |\Omega|^{\frac{1}{p'}} e^{\frac{N\beta t}{p'}} \|f_0\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Por tanto, si $|\Omega| \rightarrow 0$ concluimos que

$$\int_{\Omega} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v)$$

tiende a cero uniformemente en $[0, T]$. Aplicamos el Teorema A.2 para concluir la demostración de este resultado. \square

En el próximo resultado obtenemos la equicontinuidad débil del conjunto \mathcal{F} .

Lema 2.7. *Sea $\Phi \in C_o^2(\mathbb{R}^{2N})$. Entonces, el conjunto de funciones dado por*

$$t \longrightarrow \Psi_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} f^\epsilon(t, x, v) \Phi(x, v) d(x, v) \quad (2.15)$$

es equicontinuo en $[0, T]$. El mismo resultado es cierto si tomamos $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$.

Demostración. Por C denotaremos varias constantes dependiendo sólo de Φ . Multiplicando (2.4) por Φ e integrando entre s y t obtenemos

$$\Psi_\epsilon(t) - \Psi_\epsilon(s) = \int_s^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} [(v \cdot \nabla_x) \Phi + ((E - \beta v) \cdot \nabla_v) \Phi + \sigma \Delta_v \Phi] f^\epsilon(\tau, x, v) d(x, v) d\tau$$

Fijemos $R > 0$ tal que $\text{soporte}(\Phi) \subset B_R$. Como $\Phi \in C_o^2(\mathbb{R}^{2N})$ y la masa de $f^\epsilon(t, x, v)$ se conserva, deducimos que

$$\begin{aligned} |\Psi_\epsilon(t) - \Psi_\epsilon(s)| &\leq C((1 + \beta)R + \sigma) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} |t - s| \\ &\quad + C \int_s^t \int_{B_R} |E^\epsilon(\tau, x)| f^\epsilon(\tau, x, v) d(x, v) d\tau, \end{aligned}$$

donde C depende sólo de las normas $L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ de Φ y de sus derivadas. Para estimar el segundo miembro usamos el Lema 2.5 obteniendo que

$$\begin{aligned} \int_s^t \int_{B_R} |E^\epsilon(\tau, x)| f^\epsilon(\tau, x, v) d(x, v) d\tau &\leq \\ \int_s^t C |B_R|^{\frac{1}{p_o}} \|f^\epsilon(\tau, \cdot)\|_{L^{p_o}(\mathbb{R}^{2N})}^{1 + \frac{2p_o'}{N+2p_o'}} K E^\epsilon(\tau)^{\frac{N}{N+2p_o'}} d\tau. \end{aligned}$$

La desigualdad de interpolación en espacios $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ nos permite acotar la norma de f en $L^{p_o}(\mathbb{R}^{2N})$. Además, teniendo en cuenta la condición de energía concluimos finalmente que

$$\int_s^t \int_{B_R} |E^\epsilon(\tau, x)| f^\epsilon(\tau, x, v) d(x, v) d\tau \leq C R^{\frac{3}{p_o}} \pi(f_o) |t - s|,$$

donde $\pi(f_o)$ depende solamente del dato inicial.

Consideremos el caso en que $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^{2N})$. Usando argumentos similares a los del Lema 2.6 probamos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}/B_R} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) = 0.$$

Dado $\delta > 0$, fijamos R y tomamos una función $\Phi_\delta \in C^2(B_R)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}/B_R} f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) < \delta$$

y

$$\int_{B_R} f^\epsilon(t, x, v) |\Phi - \Phi_\delta|(x, v) d(x, v) < \delta.$$

Un sencillo argumento de aproximación termina la demostración. \square

Como consecuencia de los lemas anteriores tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Existe una subsucesión de soluciones de los problemas regularizados VPFP $^\epsilon$ f^ϵ tal que*

- i) $f^\epsilon \rightarrow f$ en $C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N}))$, con $f \geq 0$. Además, la masa total del sistema se conserva, es decir,

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})},$$

para cada $t > 0$.

- ii) $\rho(f^\epsilon) \rightarrow \rho(f)$ en $C_w([0, T], L^s(\mathbb{R}^N))$, para cada $s \in [1, r(p)]$, con $r(p)$ dado por (2.1).

- iii) $E(t, \cdot) \in M^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)^N \cap L^q(\mathbb{R}^N)^N$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{r(p)} - \frac{1}{N}$. Además, $E^\epsilon(t, \cdot) \rightarrow E(t, \cdot)$ en la topología débil de $L^p(\mathbb{R}^N)$ para cada $p \in]\frac{N}{N-1}, q]$.

- iv) La energía cinética de la función f está acotada.

Demostración. La parte i) es consecuencia directa del Teorema A.1 cuyas dos hipótesis han sido probadas en los Lemas 2.6 y 2.7. Como los conjuntos convexos de un espacio de Banach son débilmente cerrados si y sólo si son cerrados en la topología fuerte, deducimos que f es positiva. La conservación de la masa de

los problemas regularizados en la Proposición 2.1 junto con el Teorema A.3 de Prohorov implican la conservación de la masa para f .

La compacidad débil del apartado *ii*) para $p > 1$ se deduce fácilmente del lema de interpolación (Lema A.5) y la condición de energía lo que permite poder aplicar el teorema de Banach-Alaoglu. La compacidad en $p = 1$ se deduce directamente del primer apartado ya que $f^\epsilon \rightarrow f$ débilmente en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$. Además, este hecho nos permite identificar el límite como $\rho(f)$.

La primera parte de *iii*) se deduce directamente de las inclusiones de Sobolev teniendo en cuenta la definición de E (1.6). La segunda parte es más delicada. Probémosla en el caso en que $p > p_o(N)$. Sea $\Phi(x) \in C_o^1(\mathbb{R}^N)$; debemos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x) E^\epsilon(t, x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x) E(t, x) dx.$$

Usando las definiciones de E y E^ϵ tenemos la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x) (E^\epsilon(t, x) - E(t, x)) dx = I_1 + I_2,$$

donde

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x) (K^\epsilon(x-y) - K(x-y)) \rho(f^\epsilon)(t, y) dx dy$$

y

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x) K(x-y) (\rho(f^\epsilon)(t, y) - \rho(f)(t, y)) dx dy.$$

Para acotar I_1 usamos el Lema 2.1 y la desigualdad de Young con s dado por $\frac{1}{r(p)} + \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{p'}$. Como $p > p_o(N)$ se puede ver que $s < \frac{N}{N-1}$. Por tanto, tenemos que

$$|I_1| \leq \|K^\epsilon - K\|_{L^s(\mathbb{R}^N)} \|\rho(f^\epsilon)(t, \cdot)\|_{L^{r(p)}(\mathbb{R}^N)} \|\Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Como se ha indicado anteriormente, el lema de interpolación y la condición de energía implican que $\|\rho(f^\epsilon)(t, \cdot)\|_{L^{r(p)}(\mathbb{R}^N)}$ está acotada independientemente de ϵ . Por tanto, el Lema 2.1 nos asegura que $I_1 \rightarrow 0$.

Estimemos I_2 . Para ello, primero lo acotamos de la forma siguiente

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x) K_R(x-y) (\rho(f^\epsilon)(t, y) - \rho(f)(t, y)) dx dy \\ &\quad + 2R^{1-N} \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde hemos dividido el núcleo como $K = K_R + K'_R$, siendo K_R el núcleo K en el interior de la bola de centro 0 y radio R , y K'_R es el núcleo en el complementario de dicha bola.

Para acotar el primer término de (2.16) utilizaremos el resultado de compacidad que se puede ver en [7, Lema 4.3] que nos asegura que el operador

$$T_g^A : L^{r(p)}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^N)$$

dado por

$$T_g^A(f) = \mathcal{X}_A(g * f)$$

es compacto, donde A es cualquier conjunto compacto, $g \in L^s(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq s \leq \frac{N}{N-1}$.

Por tanto, usamos el apartado *ii*), que nos afirma que $\rho(f^\epsilon) \rightarrow \rho(f)$ débilmente en $L^{r(p)}(\mathbb{R}^N)$, para tomar una subsucesión, la cual denotaremos con el mismo índice, tal que

$$\|T_{K_R}^{B_R}(\rho(f^\epsilon)(t, \cdot) - \rho(f)(t, \cdot))\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$$

tiende a cero, cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Por consiguiente, acotamos I_2 como

$$\begin{aligned} |I_2| \leq & \|T_{K_R}^{B_R}(\rho(f^\epsilon)(t, \cdot) - \rho(f)(t, \cdot))\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \|\Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \\ & 2R^{1-N} \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta que (2.17) es cierto para cada $R > 0$, deducimos que $I_2 \rightarrow 0$.

El caso $p = p_o(N)$ se demuestra utilizando un argumento de densidad. Se construye una sucesión de datos iniciales f_o^n , L^∞ acotados, tal que $f_o^n \leq f_o$ y aproximen el dato f_o en todos los $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ con $1 \leq p \leq p_o$. Posteriormente, se puede ver fácilmente usando las cotas obtenidas en los lemas previos que tanto I_1 como I_2 se pueden aproximar por I_1^n y I_2^n y, por tanto, tienden a cero cuando ϵ tiende a cero (ver [56]).

Demostremos la última afirmación de este lema. Fijemos una bola B_R en \mathbb{R}^{2N} de centro 0 y radio R . Es evidente que

$$\int_{B_R} |v|^2 f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \Phi(x, v) f^\epsilon(t, x, v) d(x, v),$$

donde $\Phi(x, v) = |v|^2 \mathcal{X}_{B_R}$. Como $f^\epsilon(t, \cdot) \rightarrow f(t, \cdot)$ débilmente en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_R} |v|^2 f^\epsilon(t, x, v) d(x, v) = \int_{B_R} |v|^2 f(t, x, v) d(x, v).$$

Por tanto, la condición de energía implica que la energía cinética de la distribución de partículas límite f está acotada. \square

2.4 Existencia de solución.

Para finalizar la demostración de nuestro resultado basta que probemos que la Ecuación (1.5) se verifica en el sentido distribucional. Esta demostración sigue los mismos pasos que la proposición anterior, por lo que daremos un esquema de la demostración.

Teniendo en cuenta el primer apartado de la Proposición 2.2 el paso al límite de la parte lineal de la Ecuación (1.5) es fácil. Para la parte no lineal debemos comprobar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2N} \times [0, T]} \phi(t, x, v) E^\epsilon(t, x) f^\epsilon(t, x, v) d(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N} \times [0, T]} \nabla_v \phi(t, x, v) E(t, x) f(t, x, v) d(t, x, v),$$

para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2N} \times [0, T])$ con $\phi(T, \cdot) = 0$.

Para ello, utilizando la definición de E y E^ϵ escribimos la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^{2N} \times [0, T]} \nabla_v \phi(t, x, v) (E^\epsilon f^\epsilon - E f) d(t, x, v) = J_1 + J_2 + J_3,$$

donde

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^{2N} \times [0, T]} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_v \phi(t, x, v) (K^\epsilon - K)(x - y) \rho(f^\epsilon)(t, y) f^\epsilon(t, x, v) dy d(t, x, v),$$

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}^{2N} \times [0, T]} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_v \phi(t, x, v) K(x - y) (\rho(f^\epsilon) - \rho(f))(t, y) f^\epsilon(t, x, v) dy d(t, x, v)$$

y

$$J_3 = \int_{\mathbb{R}^{2N} \times [0, T]} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_v \phi(t, x, v) K(x - y) \rho(f)(t, y) (f^\epsilon - f)(t, x, v) dy d(t, x, v).$$

Con J_1 se realizan los mismos pasos que para I_1 en la Proposición 2.2 y con J_2 y J_3 se procede análogamente a I_2 en la misma proposición (ver [56]). Con ello se termina la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea $f_o \in L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$, con $p \geq p_o(N)$, y $(|x|^2 + |v|^2)f_o \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$. Si el dato inicial verifica la condición de energía, entonces existe una solución débil f del sistema de VPFP con las siguientes propiedades:*

- i) $f \in C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N}))$, para cada $T > 0$ y $f(0, \cdot) = f_o$.*
- ii) $\rho(f) \in C_w([0, T], L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{r(p)}(\mathbb{R}^N))$, para cada $T > 0$.*
- iii) $E(t, \cdot) \in M^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)^N \cap L^q(\mathbb{R}^N)^N$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{r(p)} - \frac{1}{N}$, para cada $t \in [0, T]$.*

Finalmente, el resultado principal de este capítulo (Teorema 2.1) se deduce directamente del teorema anterior y el Lema 2.4 que nos dice bajo qué hipótesis sobre el dato inicial la condición de energía se verifica. Por último, señalar que este resultado generaliza la teoría de existencia de soluciones débiles del sistema de VP al sistema de VPFP, y constituye el resultado con dato inicial más débil en la literatura a nuestro conocimiento.

Observación 2.1. Suponiendo que tengamos un conjunto de soluciones $f_{\sigma, \beta}$ de las ecuaciones de VPFP para $0 < \sigma \leq \sigma_o$ y $0 < \beta \leq \beta_o$, se puede probar que todas las cotas de los lemas de la sección segunda y de esta sección no dependen de σ y β . Por tanto, se pueden tomar sucesiones con las constantes σ y β tendiendo a cero tal que las funciones límite son soluciones débiles del sistema de VP.

Capítulo 3

Soluciones débiles con datos iniciales en espacios de Morrey en 3-D.

3.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es extender la teoría de existencia del sistema de VPFP para datos iniciales medidas de Radon positivas. Existen determinados datos iniciales que son interesantes desde un punto de vista físico para este sistema y cuyo análisis no estaba recogido en la teoría de existencia que hasta el momento se conocía. Por ejemplo, lo que técnicamente se conoce como "particle sheet", donde la densidad de masa de las partículas se encuentra concentrada en superficies o curvas, es decir, la densidad de masa ρ es una Delta de Dirac sobre una curva o superficie. Este tipo de datos iniciales está contenido en unos espacios de medidas, llamados espacios de Morrey, y que constituyen una generalización de los espacios L^p (ver [48]).

Dado que la ecuación de VFP es la ecuación de evolución dada por un operador hipoeĺptico, también llamado elĺptico degenerado en la literatura, dicha ecuación tiene una solución fundamental (ver apéndice). Por tanto, cabe esperar que el sistema regularize el dato inicial. No obstante, como el sistema de VPFP no es simétrico respecto a sus variables (posición y velocidad), veremos que la regularidad obtenida depende de las variables. De hecho, necesitamos que la densidad de masa, cantidad macroscópica, se regularize. La razón es la siguiente, si queremos obtener regularidad sobre el potencial necesitamos cierta regularidad sobre ρ que en principio sólo es una medida de Radon positiva. Clásicamente, este problema se ha resuelto probando la acotación de algunos momentos de la distribución de partículas en todo tiempo si se supone que están acotados para el dato inicial. Nosotros abordaremos esta cuestión suponiendo que la densidad de masa inicial pertenece a un determinado espacio de Morrey. Sin embargo, con este método

sólo probamos existencia local de solución o global si el dato inicial es pequeño. No obstante, deducimos estimaciones de E y ρ para $t \in [0, \infty)$ que no existían hasta el momento incluso en las propiedades conocidas para el caso de existencia de solución con datos iniciales en espacios L^p .

Como hemos dicho anteriormente, la elección de medidas como datos iniciales es interesante desde un punto de vista físico. En el marco de la mecánica de fluidos la distribución de vorticidad juega el papel de la distribución de partículas y podemos considerar "vortex sheets" como datos iniciales para la vorticidad del fluido. La ecuación de Navier-Stokes fue estudiada con este tipo de datos iniciales por G. H. Cottet y J. Soler [31] y por Y. Giga y T. Miyakawa [48]. Para el estudio de estos datos iniciales se tomaron como marco funcional los espacios de Morrey. Algunas de las ideas de este capítulo se inspiraron en [31], [48] y [80]. Estas ideas se basan en trazar un paralelismo entre las ecuaciones de Navier-Stokes en formulación velocidad-vorticidad y el sistema de VPFP. Consideramos que el papel de la velocidad del fluido la realiza el campo E y el de la vorticidad lo ejecuta la densidad de masa $\rho(f)$.

Datos iniciales de este tipo han sido muy recientemente estudiados por Y. Zheng and A. Majda [87] y por G. Majda, A. Majda y Y. Zheng [69]. En el primero de ellos probaron la existencia de soluciones medida globales para el sistema de VPFP en 1-D. Ellos utilizan ese paralelismo entre el sistema de VP y la ecuación de Euler [87]. En [69] se realiza el estudio de algunas soluciones explícitas con datos iniciales medidas que producen singularidades.

Recordemos la definición de los espacios de Morrey. Sea $B(a, r)$ la bola euclídea de centro a y radio r . Una medida de Radon μ pertenece al espacio de Morrey $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^N)$ si

$$TV(\mu)(B(a, r)) \leq Cr^{\frac{N}{p'}} \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

con C independiente de a y r . $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach dotado de la norma

$$\|\mu\|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^N)} = \sup\{r^{-\frac{N}{p'}}TV(\mu)(B(a, r)) : a \in \mathbb{R}^N, r > 0\},$$

donde $1 \leq p \leq \infty$ y $TV(\mu) = |\mu|$ es la variación total de la medida μ . Observar que $\tilde{L}_1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ es el espacio de las medidas de Radon de variación total acotada y $\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^N) = L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Vamos a introducir el tipo de dato inicial que vamos a considerar en este capítulo. Sea $f_o \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6)$. Definimos la densidad inicial $\rho(f_o)$ por $\rho(f_o)(A) =$

$f_o(A \times \mathbb{R}_v^3)$ siendo A cualquier conjunto de Borel acotado. Es fácil ver que $\rho(f_o) \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^3)$.

Como la parte lineal de (1.5) no es simétrica y es un operador elíptico degenerado de segundo orden veamos que no es suficiente suponer que $\rho(f_o) \in \tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$ para poder analizar el problema. Además, el semigrupo correspondiente no puede escribirse en forma de convolución aunque sí de forma integral como veremos. Esta dificultad se supera observando que la solución fundamental de este operador en v se asemeja al núcleo de la ecuación del calor clásica. Este hecho fue señalado previamente en [12]. Todo esto nos conduce a tener que estimar funciones de la forma

$$\rho_h(f_o)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f_o(x - hv, v) dv, \quad \text{con } h \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Necesitaremos un control uniforme en $h \in \mathbb{R}$ de las normas de $\rho_h(f_o)(x)$ en $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$.

Introduzcamos un nuevo espacio que llamaremos espacio de Morrey modificado que incluye a las funciones f_o tal que $\rho_h(f_o)(x) \in \tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$, para cada $h \in \mathbb{R}^3$. Sea $B(a, r, h)$ el conjunto de puntos $(x, v) \in \mathbb{R}^6$ tales que $\|x + hv - a\| \leq r$. Si f_o perteneciera a $L^1(\mathbb{R}^6)$ podríamos escribir la norma $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$ de $\rho_h(f_o)$ como

$$\int_{B(a,r)} \int_{\mathbb{R}^3} f_o(x - hv, v) dv dx = \int_{B(a,r,h)} f_o(x, v) d(x, v) = TV(f_o)(B(a, r, h)),$$

donde hemos realizado el cambio de variable $x' = x - hv$, $v' = v$.

Sea $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ el espacio de todas las medidas de Radon μ tales que la cantidad

$$\|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} = \sup\{ r^{-\frac{3}{p}} TV(\mu)(B(a, r, h)) : h \in \mathbb{R}_o^+, a \in \mathbb{R}^3, r > 0\} \quad (3.2)$$

sea finita, donde $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $ML_p(\mathbb{R}^6) = M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^6)$. Observar que $ML_\infty(\mathbb{R}^6)$ es el espacio de las funciones localmente integrables f_o tales que sus densidades $\rho_h(f_o)$ están acotadas independientemente de h .

Podemos resumir las propiedades de estos espacios cuya demostración puede verse en [48] en el caso de los espacios de Morrey usuales.

Proposición 3.1. *El conjunto $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ tiene las siguientes propiedades:*

- i) $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$, $ML_p(\mathbb{R}^6)$ son espacios de Banach con la norma dada por (3.2).
- ii) Si $\mu \in M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^6)$, entonces $\mu \in M\tilde{L}_r(\mathbb{R}^6)$, con r dado por $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. Además,

$$\|\mu\|_{M\tilde{L}_r(\mathbb{R}^6)} \leq \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)}^{1-\theta} \|\mu\|_{M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^6)}^\theta. \quad (3.3)$$

Señalar que $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ verifica que tanto sus densidades con respecto a v como sus densidades con respecto a x , definidas análogamente a (3.1), pertenecen a $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$. Sin embargo, este no es todo el espacio; veámoslo en el siguiente ejemplo. Sea α_γ una medida cuyo soporte sea la recta γ que pasa por el origen y dirigida por un vector no nulo del subespacio $x_i + hv_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Si $h > 0$ es evidente que $\alpha_\gamma \notin \tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ ya que $|\alpha_\gamma|(B(0, r, h)) = |\alpha_\gamma|(\mathbb{R}^6)$. Es fácil pensar en una medida de este tipo α_γ tal que sus densidades en x y en v pertenezcan a $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$. Nuestro espacio es el de todas las medidas tales que sus densidades ρ_h pertenezcan a $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$.

Desde ahora supondremos que $f_o \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$ para algún p_o a determinar. Las hipótesis usuales de acotación de momentos en velocidad hechas en la literatura previa ([56], [12],...) son sustituidas por $f_o \in M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$. En la última sección de este capítulo veremos la relación entre ambas hipótesis. Sea $\pi(f_o)$ el máximo de las normas de f_o en los espacios $\tilde{L}_1(\mathbb{R}^6)$ y $M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente.

Teorema 3.1. *Dada una medida de Radon positiva f_o tal que $f_o \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$, con $p_o \geq \frac{9}{4}$, entonces el problema (1.5)-(1.6) tiene una solución débil e integral f en $[0, T]$ con $T < T^*$ con las siguientes propiedades:*

- i) $f \in L^\infty(0, T; \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)) \cap BC((0, T], L^1(\mathbb{R}^6) \cap ML_{p_o}(\mathbb{R}^6))$. Además, f pertenece a $BC((0, T], ML_r(\mathbb{R}^6))$, para algún $r > 3$ suficientemente cercano a 3.
- ii) Si $p_o \geq 3$, entonces $E \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$. Si $p_o < 3$, entonces $t^{(\frac{9}{2p_o} - \frac{3}{2})} E$ pertenece a $BC((0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$. Además, $E \in BC((0, T], C(\mathbb{R}^3)^3)$.
- iii) $f(t)$ tiende a f_o cuando t tiende a cero débil- \star en medidas. De hecho, f pertenece a $C_{w^*}([0, T], \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6))$.
- iv) La solución $f(t, \cdot)$ es positiva para cada $t > 0$.
- v) La solución f verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^6} f(t, x, v) dx dv = \|f_o\|_{\tilde{L}_1(\mathbb{R}^6)},$$

para cada $t > 0$.

T^* depende de $\pi(f_o)$ y de las constantes σ , β y p_o . $T^* = \infty$ si el dato inicial es suficientemente pequeño, con

$$f \in L^\infty(0, \infty; M\tilde{L}_{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^6))$$

y

$$t^{\frac{1}{2}} E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3).$$

Utilizando hipótesis sobre momentos podemos también demostrar que si el dato inicial f_0 pertenece a $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ y los momentos en v están acotados para todo $k < m$, con $m > \frac{15}{4}$, $|v|^k f_0(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$, entonces existe una única solución f de (1.5)-(1.6) tal que

$$f \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6))$$

y

$$t^{\frac{1}{2}} E \in BC((0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$$

para cada $T > 0$. Este resultado complementa uno previo debido a F. Bouchut [13].

Este teorema de existencia se demostrará siguiendo los siguientes pasos. Consideraremos de manera análoga al capítulo anterior una regularización (sección 3.3) del sistema de VPFP. En este caso, como no necesitamos en principio una acotación de los momentos, no hace falta hacer la ϵ regularización, es decir, podemos linealizar directamente el sistema de VPFP retardando el término no lineal.

Para resolver el problema lineal y estudiar la ecuación de VFP en el marco de los espacios de Morrey modificados, estudiaremos en la sección dos el operador integral dado por la solución fundamental del operador lineal L (ver apéndice) en espacios de Morrey modificados.

Posteriormente, usaremos estas cotas para obtener estimaciones a priori de las soluciones aproximadas utilizando la ecuación integral equivalente que verifican. Estas estimaciones nos permitirán, de una parte, tener bien definida la sucesión de soluciones aproximadas y, de otra parte en la cuarta sección, demostrar que la sucesión de soluciones aproximadas es de Cauchy en determinados espacios lo que hará posible pasar al límite en la formulación integral y débil de la ecuación.

En las siguientes secciones, estudiaremos la unicidad y continuidad con respecto a datos iniciales de las soluciones encontradas. Por último, relacionaremos este resultado con el teorema de existencia debido a F. Bouchut [12] y con las hipótesis sobre momentos. Además, analizaremos las propiedades fundamentales de estas soluciones que serán de utilidad en el capítulo siguiente.

Por último, señalar que todos los resultados de este capítulo son ciertos para cualquier dimensión $N \geq 2$ donde basta sustituir p_0 por $3N/4$. Nosotros nos



centramos en el caso 3-D por fijar ideas y por ser el caso que desde el punto de vista físico tiene mayor interés.

3.2 Solución fundamental y espacios de Morrey modificados.

Como puede verse en el apéndice, la solución fundamental de la ecuación de VFP en todo \mathbb{R}^{2N} viene dada por

$$G(t, x, v, \xi, \nu) = G_o \left(t, x - \xi - \left(\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \right) \nu, v - e^{-\beta t} \nu \right) \quad (3.4)$$

donde $x, v, \xi, \nu \in \mathbb{R}^N, t \geq 0$,

$$G_o(t, x, v) = \frac{1}{(4\pi\sigma)^N D(t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{4\sigma} \varphi_o(t, x, v)}.$$

La fórmula explícita de φ_o y $D(t)$ está desarrollada en [86] y puede verse en el apéndice. Para cada $\mu \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^{2N})$, denotaremos por $G[\mu]$ el operador

$$G[\mu](t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) d|\mu|(\xi, \nu). \quad (3.5)$$

En el próximo resultado deduciremos las propiedades más importantes del operador $G[\mu]$ en espacios de Morrey modificados. Estimaciones análogas en el caso de espacios L^p han sido obtenidas en [13].

Lema 3.1. *Si $\mu \in \tilde{L}_1(\mathbb{R}^{2N}) \cap M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces se verifica que*

$$\|G[\mu]\|_{M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^{2N})} \leq C d_o(t)^{-\frac{1}{2}(\frac{N}{p} - \frac{N}{q})} \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})}$$

y

$$\|\nabla_\nu G[\mu]\|_{M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^{2N})} \leq C t^{-\frac{1}{2}} d_o(t)^{-\frac{1}{2}(\frac{N}{p} - \frac{N}{q})} \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})},$$

donde C es independiente de μ y $d_o(t)$ (ver apéndice) está definido por

$$d_o(t) = \int_0^t \left(\frac{1 - e^{-\beta s}}{\beta} \right)^2 ds.$$

Demostración. Probaremos las estimaciones para $q = p$ y $q = \infty$, para posteriormente usar la propiedad de interpolación (3.3) y deducir el resultado descrito.

Para el caso $q = p$ basta simplemente usar la definición de la norma en los espacios $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})$ dada por (3.2) y la solución fundamental G (3.4) para deducir que

$$\begin{aligned} & \int_{B(a,r,h)} \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_o(t, x - \xi - \eta(t)\nu, v - e^{-\beta t}\nu) d|\mu|(\xi, \nu) d(x, v) = \\ & \int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{B(a,r,h)} G_o(t, x - \xi - \eta(t)\nu, v - e^{-\beta t}\nu) d(x, v) d|\mu|(\xi, \nu), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini. Haciendo el cambio de variables $k = x - \xi - \eta(t)\nu$ y $l = v - e^{-\beta t}\nu$ encontramos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{B(a,r,h)} G_o(t, x - \xi - \eta(t)\nu, v - e^{-\beta t}\nu) d(x, v) d|\mu|(\xi, \nu) = \\ & \int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{B(a-\xi-\eta(t)\nu-he^{-\beta t}\nu,r,h)} G_o(t, k, l) d(k, l) d|\mu|(\xi, \nu). \end{aligned}$$

Si denotamos por \mathcal{X}_A la función característica del conjunto A , podemos obtener que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{X}_{B(a-\xi-\eta(t)\nu-he^{-\beta t}\nu,r,h)}(k, l) d|\mu|(\xi, \nu) G_o(t, k, l) d(k, l) = \\ & \int_{\mathbb{R}^{2N}} TV(\mu)(B(a - k - hl, r, \eta(t) + he^{-\beta t})) G_o(t, k, l) d(k, l). \end{aligned}$$

La definición de la norma $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})$, dada por (3.2), implica que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{2N}} TV(\mu)(B(a - k - hl, r, \eta(t) + he^{-\beta t})) G_o(t, k, l) d(k, l) \leq \\ & \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})} r^{\frac{N}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_o(t, k, l) d(k, l). \end{aligned}$$

La propiedad *i*) del Lema A.1 termina la demostración del caso $q = p$. Para el caso $q = \infty$ realizamos el cambio de variables $x = x' - hv$, $v' = v$ en (3.6) para obtener

$$\int_{B(a,r,h)} \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) d|\mu|(\xi, \nu) d(x, v) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{B(a,r)} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv dx d|\mu|(\xi, \nu) =$$

$$\int_{B(a,r)} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv d|\mu|(\xi, \nu) dx,$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini. Por tanto, para obtener una cota en $M\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^{2N})$ es suficiente estimar

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv d|\mu|(\xi, \nu)$$

en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ independientemente de h .

Para realizar este paso, usamos la función de distribución de μ y la expresión explícita de la integral en v de $G(t, x - hv, v, \xi, \nu)$ dada en A.1 iii) para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv d|\mu|(\xi, \nu) =$$

$$\frac{1}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N}{2}}} \int_0^1 TV(\mu)(\{(\xi, \nu) / e^{-\frac{|x-\xi-\eta_h(t)\nu|^2}{2\sigma d_h(t)}} > s\}) ds.$$

Por tanto, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv d|\mu|(\xi, \nu) \leq$$

$$\frac{1}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N}{2}}} \int_0^1 TV(\mu)(\{(\xi, \nu) / |x - \xi - \eta_h(t)\nu| < (-2\sigma d_h(t) \log s)^{\frac{1}{2}}\}) ds.$$

Como μ pertenece a $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})$, deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv d|\mu|(\xi, \nu) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N}{2}}} \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})} \int_0^1 (-2\sigma d_h(t) \log s)^{\frac{N}{2p'}} ds =$$

$$= C (2\sigma d_h(t))^{-\frac{N}{2p}} \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})} \leq C d_o(t)^{-\frac{N}{2p}} \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})},$$

donde hemos aplicado que $d_o(t) \leq d_h(t)$. Por tanto, la definición del espacio $M\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^{2N})$ implica que

$$\|\mu\|_{M\tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^{2N})} \leq C d_o(t)^{-\frac{N}{2p}} \|\mu\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})}.$$

La otra afirmación del lema se deduce directamente de las propiedades de G dadas en el Lema A.1 ii). \square

Por último, recordar la relación de los espacios de Morrey con los operadores de convolución con un núcleo singular dado en [48].

Lema 3.2. *Sea $\rho \in \tilde{L}_p(\mathbb{R}^3) \cap \tilde{L}_q(\mathbb{R}^3)$ con $\frac{1}{p} + \frac{2}{3} < 1 < \frac{1}{q} + \frac{2}{3}$, entonces $E = K * \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ y*

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C \|\rho\|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)}^{\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \|\rho\|_{\tilde{L}_q(\mathbb{R}^3)}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}},$$

donde C es independiente de ρ .

3.3 Linealización del problema y estimaciones a priori.

Al igual que en el capítulo segundo, para demostrar la existencia de solución construiremos una sucesión de problemas aproximados. En este caso no necesitamos tener un control uniforme de la energía. Por lo tanto, linealizamos directamente el sistema, retardando el término no lineal.

Formalmente, consideramos el siguiente problema linealizado, donde determinamos la densidad f^{n+1} mediante la ecuación de VFP

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f^{n+1} - \beta \operatorname{div}_v(v f^{n+1}) - \sigma \Delta_v f^{n+1} = -(E^n \cdot \nabla_v) f^n, \quad (3.7)$$

el campo de fuerzas E^n viene dado por

$$E^n = \theta(K * \rho(f^n)) \quad (3.8)$$

y la condición inicial

$$f(0, \cdot) = f_o, \quad (3.9)$$

para cada $n \geq 0$, con $f^0 = G[f_o]$. Para resolver este problema regularizado no podemos utilizar directamente los resultados visto en el apéndice ya que las hipótesis sobre f_o y las propiedades de los segundos miembros $(E^n \cdot \nabla_\nu) f^n$ en principio no lo permiten. Por tanto, consideraremos la formulación integral de (3.7) y veremos que la sucesión f^n está bien definida. Posteriormente, analizaremos la regularidad de la sucesión f^n y probaremos que, de hecho, son soluciones débiles de la Ecuación (3.7) y clásicas para todo $t > 0$.

Definamos iterativamente la sucesión f^n como

$$f^{n+1}(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_\nu G(t-s, x, v, \xi, \nu) E^n(s, \xi) f^n(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds, \quad (3.10)$$

para cada $n \geq 0$ con $f^0 = G[f_o]$.

Vamos a obtener estimaciones sobre f^n y E^n que nos probarán la buena definición de la sucesión f^n y que, posteriormente, serán de extrema utilidad para probar la existencia de solución del sistema de VPFP.

Previamente, pongamos de manifiesto la utilidad de los espacios de Morrey modificados para resolver el sistema de VPFP. Para obtener estimaciones de la solución f^n en función de iteraciones anteriores debemos estimar el campo de fuerzas E^n en función de la densidad de masa $\rho(f^n)$ (ver Lema 3.2). Para estimar la densidad de masa $\rho(f^n)$ podemos proceder, al menos formalmente, de la forma siguiente. De la Ecuación (3.10) podemos escribir f^{n+1} como $f^{n+1} = f_1^{n+1} + f_2^{n+1}$ donde f_1^{n+1} y f_2^{n+1} son respectivamente el primer y segundo términos de (3.10). Sea $h \in \mathbb{R}$. La definición de las densidades nos permite expresar $\rho_h(f_1^{n+1})(t, x)$ como

$$\rho_h(f_1^{n+1})(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_1^{n+1}(t, x - hv, v) dv = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v - hv, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu dv$$

Usando las propiedades de G dadas en el Lema A.1 iii), tenemos que

$$\rho_h(f_1^{n+1})(t, x) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{1}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N}{2}}} N\left(\frac{x - \xi - \mu_h(t)\nu}{\sqrt{2\sigma d_h(t)}}\right) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu.$$

Haciendo el cambio de variables $\xi = \xi - \eta_h(t)\nu$, se deduce que

$$\rho_h(f_1^{n+1})(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N}{2}}} N\left(\frac{x - \xi}{\sqrt{2\sigma d_h(t)}}\right) \int_{\mathbb{R}^N} f_o(\xi - \eta_h(t)\nu, \nu) d\nu d\xi.$$

De manera análoga, podemos escribir $\rho_h(f_2^{n+1})(t, x)$ como

$$\rho_h(f_2^{n+1})(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{-\mu_h(t-s)}{(2\sigma d_h(t-s))^2} \nabla N\left(\frac{x - \xi}{\sqrt{2\sigma d_h(t-s)}}\right) \int_{\mathbb{R}^N} E^n(s, \xi - \mu_h(t)\nu) f^n(s, \xi - \eta_h(t)\nu, \nu) d\nu d\xi ds.$$

De estas expresiones, se deduce que si pretendemos estimar $\rho_h(f^{n+1})$ es necesario considerar espacios del tipo $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^{2N})$. De hecho, incluso para controlar $\rho_o(f^{n+1})$ debemos estimar términos de la forma $\rho_h(f^n)$. Desde ahora supondremos que $N = 3$; en la última sección del capítulo cuarto trataremos el caso general. Obtengamos las estimaciones en $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ que son necesarias para demostrar la existencia de solución.

Teorema 3.2. *Sea $\pi(f_o)$ el máximo de las normas del dato inicial f_o en $M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$ y $\tilde{L}_1(\mathbb{R}^6)$, donde $p_o \geq \frac{9}{4}$. Entonces se verifica que*

$$\|f^n(t, \cdot)\|_{\tilde{L}_1 \cap M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)} \leq C\pi(f_o). \quad (3.11)$$

$$\text{Si } p_o \leq 3, \text{ entonces } \|E^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C\pi(f_o)t^{\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2p_o}\right)}. \quad (3.12)$$

$$\text{Si } p_o \geq 3, \text{ entonces } \|E^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C\pi(f_o). \quad (3.13)$$

(3.11), (3.12) y (3.13) se verifican para cada t en $(0, T^*)$. T^* depende de $\pi(f_o)$ y de las constantes σ y β . $T^* = \infty$ para dato inicial suficientemente pequeño con respecto a $\pi(f_o)$. C es independiente de la iteración y de $\pi(f_o)$.

Demostración. Usaremos los Lemas 3.1 y 3.2 para estimar la norma $L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ del campo E . Con este objetivo elegimos q entre $\frac{3}{2}$ y 3 y $p_o \leq 3$ tal que $q < p_o < 2q$. Utilizaremos la expresión (3.10), para obtener estimaciones de $f^n(t, \cdot)$ en $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$, con $p = q, 2q, p_o$ y 1 . La última parte de la demostración se dedica a comprobar que las normas de $f^n(t, \cdot)$ en $M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$ y de $E^n(t, \cdot)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ se mantienen acotadas en un cierto intervalo $(0, T^*)$.

Usando el Lema 3.2 y el hecho de que la norma $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^3)$ de $\rho(f^n)(t, \cdot)$ está acotada por la norma $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ de $f^n(t, \cdot)$, concluimos que

$$\|E^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C \|f^n(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^6)}^{\theta-1} \|f^n(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{2q}(\mathbb{R}^6)}^{2-\theta}, \quad (3.14)$$

con $\theta = \frac{2q}{3}$.

Gracias al Lema 3.2 y a la expresión de f_1^{n+1} , dada por (3.10), podemos deducir que

$$\|f_1^{n+1}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{2q}(\mathbb{R}^6)} \leq C d_o(t)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)} \|f_o\|_{M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)}.$$

Para estimar f_2^{n+1} , definido en (3.10), utilizamos el Lema 3.1 con el operador $\nabla_v G$ para obtener

$$\|f_2^{n+1}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|E^n f^n(s, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} ds.$$

Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} \|f_2^{n+1}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \\ &\max_{0 \leq \tau \leq T} \{ \|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \|E^n(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \} ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La Desigualdad (3.15) se verifica para todo p . Combinando (3.15) y el Lema 3.1 concluimos las siguientes estimaciones para $p = p_o, q$ y 1,

$$\begin{aligned} \|f^{n+1}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} &\leq \|f_o\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} + \\ &C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \max_{0 \leq \tau \leq T} \{ \|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \|E^n(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \} ds, \\ \|f^{n+1}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{2q}(\mathbb{R}^6)} &\leq C d_o(t)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)} \|f_o\|_{M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)} + \\ &C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \max_{0 \leq \tau \leq T} \{ \|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{2q}(\mathbb{R}^6)} \|E^n(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \} ds. \end{aligned}$$

Señalar que $\|f_o\|_{M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^6)}$ está acotada debido a la propiedad de interpolación (3.3) para $1 < q < p_o$. Sea $K_p^o = \|f_o\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)}$, $K_p^n = \max\{K_p^n(t), 0 \leq t \leq T\}$ con

$$K_p^n(t) = \begin{cases} \|f^n(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} d_o(t)^{\left(\frac{3}{2p_o} - \frac{3}{2p}\right)}, & \text{para } p > p_o \\ \|f^n(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)}, & \text{para } p \leq p_o \end{cases}.$$

Con esta notación podemos reescribir las anteriores estimaciones de la forma

$$K_{p_o}^{n+1}(t) \leq K_{p_o}^o + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} d_o(s)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)(2-\theta)} ds K_{p_o}^n [K_q^n]^{\theta-1} [K_{2q}^n]^{2-\theta},$$

$$K_1^{n+1}(t) \leq K_1^o + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} d_o(s)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)(2-\theta)} ds K_1^n [K_q^n]^{\theta-1} [K_{2q}^n]^{2-\theta},$$

$$K_q^{n+1}(t) \leq K_q^o + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} d_o(s)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)(2-\theta)} ds [K_q^n]^\theta [K_{2q}^n]^{2-\theta}$$

y

$$K_{2q}^{n+1}(t) \leq K_{2q}^o + C d_o(t)^{\left(\frac{3}{2p_o} - \frac{3}{4q}\right)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} d_o(s)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)(3-\theta)} ds [K_q^n]^{\theta-1} [K_{2q}^n]^{3-\theta}.$$

Sea $B(a, b)$ la función beta definida por

$$B(a, b) = \int_0^t (t-s)^{a-1} s^{b-1} ds.$$

Es conocido que $B(a, b)$ está bien definida para $a, b > 0$ y $B(a, b)$ viene dada por $C(a, b) t^{a+b-1}$, donde $C(a, b)$ es una constante que depende de a y b . Teniendo en cuenta el Lema A.2 se tiene que

$$\int_0^t (t-s)^{a-1} d_o(s)^c ds \leq CB(a, 3c+1),$$

para cada $a > 0$ y $3c+1 > 0$. Por tanto, si suponemos que

$$1 + \left(\frac{9}{4q} - \frac{9}{2p_o}\right)(2-\theta) > 0 \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{9}{4q} - \frac{9}{2p_o}\right)(3-\theta) > 0,$$

las funciones de beta que aparecen anteriormente son convergentes. Es fácil ver que para $p_o > \frac{9}{4}$, eligiendo q suficientemente cercano a $\frac{3}{2}$ las desigualdades anteriores se cumplen.

Elijamos

$$B(T) = \max\left\{B\left(\frac{1}{2}, 1 + \left(\frac{9}{4q} - \frac{9}{2p_o}\right)(2-\theta)\right),\right. \\ \left. d_o(t)^{\left(\frac{3}{2p_o} - \frac{3}{4q}\right)} B\left(\frac{1}{2}, 1 + \left(\frac{9}{4q} - \frac{9}{2p_o}\right)(3-\theta)\right), 0 \leq t \leq T \right\}$$

y $K^n = \max\{K_{p_o}^n, K_1^n, K_q^n, K_{2q}^n\}$. Entonces

$$K^{n+1} \leq \pi(f_o) + CB(T) [K^n]^2.$$

Denotemos por K el supremo de todos los K^n para cada n . Entonces, se tiene que

$$K \leq \pi(f_o) + CB(T) K^2. \quad (3.16)$$

Por tanto, tomando $\pi(f_o) \leq \frac{1}{4CB(T)}$ deducimos que

$$K \leq \frac{1 - (1 - 4CB\pi(f_o))^{\frac{1}{2}}}{2CB} = \lambda < \frac{1}{2CB}. \quad (3.17)$$

Como consecuencia, obtenemos la estimación (3.11). Utilizando (3.14), (3.11) y la definición de K_{2q}^n se tiene que

$$\|E^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq d_o(t)^{\left(\frac{3}{4q} - \frac{3}{2p_o}\right)(2-\theta)} 2 \pi(f_o).$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de $d_o(t)$ en cero (Lema A.2) y haciendo tender $q \rightarrow \frac{3}{2}$, obtenemos la estimación sobre E . Esto completa la demostración en el caso de $\frac{9}{4} < p_o \leq 3$. Si $p_o > 3$, la demostración se sigue de (3.14), (3.15) y de la propiedad de interpolación (3.3). De esta forma, obtenemos la desigualdad

$$K \leq \pi(f_o) + CT^{\frac{1}{2}} K^2,$$

y, por tanto, para $\pi(f_o) \leq \frac{1}{4CT^{\frac{1}{2}}}$ la demostración se termina de manera análoga a (3.17).

Acabamos de ver que $p_o = \frac{9}{4}$ es, en cierto sentido, el índice límite en las estimaciones anteriores. Veamos que podemos mejorar algunas de las estimaciones para incluir a este valor y además veremos que la cota correspondiente a (3.16) no depende de T con lo que concluiremos la estimación global en tiempo.

Los pasos de la demostración son prácticamente los mismos que en el caso anterior pero indicaremos las principales diferencias. Para simplificar un poco la escritura, tomaremos en este caso usando el Lema A.2 y sin pérdida de generalidad t^3 en lugar de $d_o(t)$.

Sea q entre $\frac{9}{4}$ y 3, tomemos $\frac{4q}{3}$ que varía entre 3 y 4. La conclusión del Lema 3.2 implica que

$$\|E^n(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C \|f^n(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_q(\mathbb{R}^6)}^\alpha \|f^n(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{\frac{4q}{3}}(\mathbb{R}^6)}^{1-\alpha},$$

donde $\alpha = \frac{4q}{3} - 3$.

Teniendo en cuenta el Lema 3.1 deducimos que

$$\|f^{n+1}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{\frac{4q}{3}}(\mathbb{R}^6)} \leq Ct^{(\frac{27}{8q}-2)}\|f_o\|_{M\tilde{L}_{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^6)} +$$

$$C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}(\frac{1}{r}-\frac{3}{4q})} \max_{0 \leq \tau \leq T} \{\|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_r(\mathbb{R}^6)}\|E^n(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3}\} ds,$$

donde $r \leq \frac{4q}{3}$. La Proposición 3.1 nos asegura que

$$\|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_r(\mathbb{R}^6)} \leq \|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^6)}^{\alpha'} \|f^n(\tau, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{\frac{4q}{3}}(\mathbb{R}^6)}^{1-\alpha'},$$

donde α' está determinado por

$$\frac{4\alpha'}{9} + \frac{3(1-\alpha')}{4q} = \frac{1}{r}.$$

La notación anteriormente introducida y las igualdades

$$\left(\frac{27}{8q} - 2\right)(1 - \alpha') = \frac{9}{2r} - 2 \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{9}{2q} - 2\right)\alpha + \left(\frac{27}{8q} - 2\right)(1 - \alpha) = \frac{1}{2},$$

nos permiten escribir las estimaciones anteriores en la forma

$$K_{\frac{9}{4}}^{n+1}(t) \leq \pi(f_o) + C B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) K_{\frac{9}{4}}^n [K_q^n]^\alpha [K_{\frac{4q}{3}}^n]^{1-\alpha},$$

$$K_q^{n+1}(t) \leq \pi(f_o) + C t^{(2-\frac{9}{2q})} B\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{9}{2q}\right) [K_q^n]^{1+\alpha} [K_{\frac{4q}{3}}^n]^{1-\alpha}$$

y

$$K_{\frac{4q}{3}}^{n+1}(t) \leq \pi(f_o) + Ct^{(2-\frac{27}{8q})} B\left(\frac{1}{2} + \frac{27}{8q} - \frac{9}{2r}, -\frac{3}{2} + \frac{9}{2r}\right) [K_{\frac{9}{4}}^n]^{\alpha'} [K_q^n]^\alpha [K_{\frac{4q}{3}}^n]^{2-\alpha-\alpha'}.$$

Por tanto, si suponemos que

$$-\frac{3}{2} + \frac{9}{2q} > 0, \quad \frac{1}{2} + \frac{27}{8q} - \frac{9}{2r} > 0 \quad \text{y} \quad -\frac{3}{2} + \frac{9}{2r} > 0,$$

las funciones beta arriba escritas son convergentes. Para q fijo, podemos comprobar que para $\frac{36}{13} < r < 3$ las estimaciones se verifican. Sea

$$B(T) = \max\left\{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), t^{(2-\frac{9}{2q})} B\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{9}{2q}\right)\right\},$$

$$t^{(2-\frac{27}{8q})} B\left(\frac{1}{2} + \frac{27}{8q} - \frac{9}{2r}, -\frac{3}{2} + \frac{9}{2r}\right), \quad 0 \leq t \leq T \}$$

y $K = \max\{K_{\frac{9}{4}}^n, K_q^n, K_{\frac{4q}{3}}^n\}$. Usando la expresión de las funciones beta es fácil ver que $B(T)$ no depende de T , es decir, $B(T)$ es constante $B(T) = B$ y depende solamente de q y r . Deducimos que

$$K \leq \pi(f_o) + CB K^2,$$

análogamente a (3.16). Por tanto, si el dato inicial es suficientemente pequeño, es decir,

$$\pi(f_o) \leq \frac{1}{4CB},$$

obtenemos una cota global en tiempo para $p_o = \frac{9}{4}$. Como

$$1 + \left(\frac{9}{2q} - 2\right)\alpha + \left(\frac{27}{8q} - 2\right)(1 - \alpha) = \frac{1}{2},$$

concluimos que

$$\|E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \pi(f_o).$$

Esto termina la demostración del lema. \square

Como consecuencia del anterior teorema, la sucesiones f^n y E^n están bien definidas. De la definición de la sucesión f^n es fácil observar que es solución débil de la Ecuación (3.7) con condición inicial (3.9). De hecho, en general toda solución integral con cierta regularidad es solución débil (ver apéndice). En el próximo resultado demostraremos que para cada $t > 0$ la sucesión f^n posee mejores propiedades de regularidad. Este hecho es consecuencia del carácter hipoeĺptico del operador L . En este resultado utilizaremos fuertemente el efecto regularizador de este operador probado en [13].

Denotaremos por $S_p(f^n)(t)$ a la cantidad

$$\max\{\|\rho_h(f^n)(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\},$$

para cada $1 \leq p \leq \infty$ y $t > 0$. Se pueden estudiar el operador $G[f]$ con estimaciones en espacios L^p análogas a las del Lema 3.1. Estas estimaciones pueden encontrarse en [13] y las recordaremos en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

i) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} - 1 \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ y $-\frac{1}{3} < \frac{1}{q}$. Entonces,

$$S_q(f_1^n)(t) \leq C t^{-\frac{9}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} S_p(f_0), \quad C = C(p, q, \sigma).$$

ii) Si además, $\frac{1}{p} - \frac{1}{9} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ y $0 \leq \delta < 1$, entonces,

$$S_q(f_2^{n+1})(t) \leq C t^{-\gamma} \max\{t^\delta \|E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} S_p(f^n)(t), 0 \leq t \leq T\},$$

donde $C = C(p, q, \sigma)$ y $\gamma = \delta - \frac{9}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{9})$.

iii) Las estimaciones anteriores son válidas sustituyendo $S_p(f^n)(t)$ por el gradiente de $E^n(t)$.

Señalemos que en el lema anterior q puede tomar valores negativos. En ese caso, se tiene que $\frac{1}{q} \in [-\frac{1}{3}, 0[$ e identificamos los espacios $L^q(\mathbb{R}^3)$ y $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ con $-\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{p}$.

Proposición 3.2. Sea f_0 verificando las hipótesis del Teorema 3.2. Las funciones f^n tienen la siguiente regularidad:

- i) f^n es de clase uno con respecto a las variables (t, x) y de clase dos con respecto a v en $(0, \infty) \times \mathbb{R}^6$. Además, f^n y sus derivadas están acotadas en $[\epsilon, T] \times \mathbb{R}^6$ con $0 < \epsilon < T < \infty$, verifican la ecuación $L f^{n+1} = -(E^n \cdot \nabla_v) f^n$ y $f^n \in C((0, \infty), L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6))$.
- ii) $S_p(f^n)(t)$ está acotado en $[\epsilon, T]$ con $0 < \epsilon < T < \infty$, para todo $t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ o bien $\frac{1}{p} \in]-\frac{1}{9}, 0[$.
- iii) $E^n \in C([\epsilon, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^6))$ con $0 < \epsilon < T < \infty$.
- iv) La masa de f^n se conserva, es decir,

$$\|f^n(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = \|f_0\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^6)},$$

para cada $t > 0$.

Demostración. Las propiedades i) y ii) de la proposición para f^0 se deducen directamente de la Proposición A.1 y de la parte i) del Lema 3.3. La parte iii) es consecuencia directa de las inclusiones de Sobolev y del lema de Calderon-Zygmund (ver [82]). La conservación de masa para f^0 es evidente de las propiedades de G (ver Lema A.1).

Utilizando que G es solución fundamental del operador L y que f^0 es regular, tenemos que

$$f^1(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^6} G(t - \epsilon_o, x, v, \xi, \nu) f^1(\epsilon_o, \xi, \nu) d\xi d\nu + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^6} G(t - s, x, v, \xi, \nu) E^0(\epsilon_o + s, \xi) \nabla_\nu f^0(\epsilon_o + s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds,$$

con $0 < \epsilon_o < \epsilon < t$.

Teniendo en cuenta que $f^1(\epsilon_o, \xi, \nu) \in L^1(\mathbb{R}^6)$ y la regularidad de E^0 y f^0 , podemos aplicar la Proposición A.2 y la afirmación del apartado i) es cierta para f^1 . La segunda afirmación se deduce directamente del Lema 3.3 aplicado a la expresión anterior de la solución e iterando los resultados ya que ϵ_o y t son arbitrarios. De nuevo, las inclusiones de Sobolev y el lema de Calderon-Zygmund implican la regularidad de E^1 .

La conservación de la masa para f^1 se deduce integrando la expresión (3.10) en (x, v) , utilizando las propiedades de G (Lema A.1) y aplicando el teorema de la divergencia para $t > 0$, que es posible por la regularidad de f^0 y E^0 , para tener que

$$\int_{\mathbb{R}^6} \int_{\mathbb{R}^6} G(t - s, x, v, \xi, \nu) E^0(s, \xi) \nabla_\nu f^0(s, \xi, \nu) d(\xi, d\nu) d(x, v) = 0,$$

para cada $0 < s < t$. La demostración se finaliza con un sencillo argumento de inducción. \square

Las estimaciones del Teorema 3.2 nos permitirán en la próxima sección obtener una solución del sistema de VFPF demostrando que las sucesiones de soluciones aproximadas f^n y de campos aproximados E^n son convergentes fuertemente en los espacios necesarios.

3.4 Existencia de solución.

Demostremos que $\{f^n\}$ y $\{E^n\}$ son sucesiones de Cauchy en los espacios adecuados para poder dar sentido a la solución límite.

Lema 3.4. *Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

- i) $\{f^n\}$ es una sucesión de Cauchy $L^\infty(0, T; \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_0}(\mathbb{R}^6))$.
- ii) La sucesión $\{t^{(\frac{9}{2p_0}-\frac{3}{2})} E^n\}$ es de Cauchy, para $p_0 < 3$, en el espacio $BC((0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$.
- iii) $\{E^n\}$ es una sucesión de Cauchy, para $p_0 \geq 3$, en $L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$.
- iv) $\{f^n\}$ es una sucesión de Cauchy en $BC((0, T], ML_r(\mathbb{R}^6))$, con $r > 3$ cercano a 3. Si $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^6)$, entonces $\{f^n\}$ es una sucesión de Cauchy en $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6))$.
- v) $\{E^n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $C((0, T], C(\mathbb{R}^3)^3)$.

Demostración. Utilicemos la notación y técnicas introducidas en el Teorema 3.2. Consideremos la diferencia $f^{n+1} - f^n$ en la norma de los espacios $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ para $p = p_0, q, 2q$ y 1. Podemos estimar estas normas como

$$\begin{aligned} & \| (f^{n+1} - f^n)(t, \cdot) \|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \leq \\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \| (E^n f^n)(s, \cdot) - (E^{n-1} f^{n-1})(s, \cdot) \|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} ds. \end{aligned}$$

Sumando y restando el término $(E^n f^{n-1})(s, \cdot)$ en la expresión anterior deducimos que

$$\begin{aligned} & \| (f^{n+1} - f^n)(t, \cdot) \|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \leq \\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \max_{0 \leq \tau \leq T} \{ \| (f^n - f^{n-1})(\tau, \cdot) \|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \| E^n(\tau, \cdot) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \} ds + \\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \max_{0 \leq \tau \leq T} \{ \| f^{n-1}(\tau, \cdot) \|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)} \| (E^n - E^{n-1})(\tau, \cdot) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \} ds. \end{aligned}$$

Razonando como en el Teorema 3.2, elegimos

$$\begin{aligned} J_p^n(t) &= \| (f^{n+1} - f^n)(t, \cdot) \|_{M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)}, \quad J_p^n = \max\{J_p^n(t), 0 \leq t \leq T\}, \\ J^n(t) &= \max\{J_{p_0}^n(t), J_1^n(t), J_q^n(t), J_{2q}^n(t)\} \quad \text{y} \quad J^n = \max\{J^n(t), 0 \leq t \leq T\}. \end{aligned}$$

Exactamente los mismos argumentos del Teorema 3.2 implican que

$$J^n \leq 2CBKJ^{n-1}, \quad (3.18)$$

donde K , B y C vienen definidos como en el Teorema 3.2. Iterando la cota anterior tenemos que $J^n \leq (2CBK)^{n-1} J^1$. Por consiguiente, la cota (3.17) demuestra el primer apartado del lema.

El segundo y tercer apartado del lema se demuestran fácilmente de las cotas (3.12) y (3.13). La última parte se deduce análogamente a las anteriores cambiando la definición de L^n por la del supremo en $(0, T]$ y teniendo en cuenta que los elementos de la sucesión f^n son funciones continuas en t para $t > 0$ y los elementos de la sucesión E^n son continuas en t y en x para $t > 0$ según la Proposición 3.2. \square

Denotemos por E y f los límites de las sucesiones respectivas que nos proporciona el lema anterior. Demostremos que E viene dado por (1.6) y que f es una solución débil de (1.5).

Como $\{f^n\}$ converge a f en $BC((0, T], ML_r(\mathbb{R}^6))$ se tiene por la definición de los espacios de Morrey modificados que $\{\rho(f^n)\}$ converge a $\rho(f)$ en el espacio $BC((0, T], L_r(\mathbb{R}^6))$. Teniendo en cuenta que $r > 3$, del Lema 3.2 se deduce que $\{K * \rho(f^n)\}$ converge a $K * \rho(f)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ para cada $t > 0$. Por consiguiente, E debe ser $\theta(K * \rho(f))$.

Vamos a obtener que f es solución débil de (1.5). Para ello pasaremos al límite en la ecuación que verifica f^n cuando $n \rightarrow \infty$ con el objetivo de probar la identidad

$$\int_0^T \langle f, L^t \phi \rangle dt - \int_0^T \langle Ef, \nabla_v \phi \rangle dt = \int_{\mathbb{R}^6} f_o \phi(0, x, v) d(x, v),$$

para cada $\phi \in C_o^1([0, T] \times \mathbb{R}^6)$. Como f^{n+1} es solución débil del problema linealizado (3.7)-(3.9) tenemos que

$$\int_0^T \langle f^{n+1}, L^t \phi \rangle dt - \int_0^T \langle (E^n f^n), \nabla_v \phi \rangle dt = \int_{\mathbb{R}^6} f_o \phi(0, x, v) d(x, v).$$

El término lineal no tiene ningún problema en pasar al límite porque $\{f^n\}$ converge a f en $L^\infty(0, T; \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6))$ y se tiene

$$\left| \int_0^T \langle f^{n+1} - f, L^t \phi \rangle dt \right| \leq \|f^{n+1} - f\|_{L^\infty(0, T; \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6))} \|L^t \phi\|_{L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^6))}.$$

Análogamente con el término en el que está implicada la condición inicial f_o .

En cuanto al término no lineal, debemos estimar

$$\int_0^T \{ \langle E^n f^n, \nabla_v \phi \rangle - \langle Ef, \nabla_v \phi \rangle \} dt.$$

Escribiendo $E^n f^n - Ef = E^n(f^n - f) + (E^n - E)f$ y teniendo en cuenta las cotas obtenidas en el Teorema 3.2 se tiene que

$$C(T, f_o) \|f^n - f\|_{L^\infty(0, T; \tilde{L}_1(\mathbb{R}^6))} \|\nabla_v \phi\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^6))} +$$

$$C(T, f_o) \|t^{(\frac{9}{2p_o} - \frac{3}{2})}(E^n - E)\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^6))} \|\nabla_v \phi\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^6))},$$

para $p_o < 3$ (para $p_o \geq 3$ no aparecería la potencia de t). Por tanto, usando las propiedades de convergencia demostradas en el Lema 3.4, el término no lineal también converge.

Observación 3.1. Sabemos que f^n es solución de la Ecuación integral (3.10). Los Lemas 3.1 y 3.2 junto con los argumentos del Teorema 3.2 implican que f es solución integral del sistema de VFPF, es decir,

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_v G(t-s, x, v, \xi, \nu) E(s, \xi) f(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds. \quad (3.19)$$

Finalmente, debemos comprobar que $f(t)$ tiende a f_o cuando t tiende a 0 débil en medidas. Usando la observación anterior y teniendo en cuenta que G es la solución fundamental de la parte lineal de la Ecuación (1.5) se deduce que $f(t)$ converge a f_o en la topología distribucional. La acotación de $f(t, \cdot)$ en $\tilde{L}_1(\mathbb{R}^6)$ nos asegura que $f(t)$ tiende a f_o cuando t tiende a cero débil- \star en medidas. La conservación de la masa en la solución se deduce de la misma propiedad para la sucesión f^n vista en la Proposición 3.2. La positividad de la solución, que no es evidente puesto que las soluciones aproximadas no tienen porqué ser positivas, se deduce del Lema A.4 para la ecuación de VFP.

Con esto, queda finalizada la demostración del Teorema 3.1.

Observación 3.2. Iterando k veces las estimaciones (3.4) del Teorema 3.2 se puede deducir fácilmente que la solución mantiene la cota (3.4) de dicho teorema para $p \geq \frac{9}{4}$ en el intervalo $(0, T_p^*)$ con

$$T_p^* = \frac{1}{(4C\pi(f_o))^{\frac{2p}{4p-9}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{2p}{4p-9}}\right)^{-n}.$$

Observación 3.3. Hemos probado que el campo de fuerzas $E(t, \cdot)$ decae en tiempo del orden de $t^{-\frac{1}{2}}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$. Además, este decrecimiento en el caso de $p_o = \frac{9}{4}$ con dato inicial suficientemente pequeño se verifica para todo tiempo

$t > 0$. Este hecho será fundamental en el capítulo siguiente para obtener el comportamiento asintótico de estas soluciones en las que la influencia del campo desaparecerá en infinito. Por otro lado, como se conserva la masa del sistema entonces se tiene que $E(t, \cdot) \in M^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)^3$ y con norma acotada uniformemente. Por tanto, un sencillo argumento de interpolación nos dice que $E(t, \cdot)$ decae en tiempo del orden de $t^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4p}}$ en $M^p(\mathbb{R}^3)^3$ con $\frac{3}{2} < p \leq \infty$.

Observación 3.4. Si $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6)$ entonces f pertenece a $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6))$.

3.5 Unicidad y dependencia continua.

Teniendo en cuenta la regularidad de las soluciones demostrada en el Teorema 3.1 y la expresión de la solución (3.19), podemos rehacer las estimaciones del Teorema 3.2 para probar la unicidad de solución con la regularidad del Teorema 3.1 y tal que (3.19) se verifica.

Proposición 3.3. *Supongamos que f y \tilde{f} son soluciones del sistema (1.5)-(1.6) con condición inicial f_o y \tilde{f}_o respectivamente. Los datos iniciales pertenecen a $\tilde{L}_1(\mathbb{R}^6) \cap M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$, con $p_o \geq \frac{9}{4}$. Además, suponemos que las soluciones f y \tilde{f} tienen la regularidad del Teorema 3.1 y satisfacen la expresión (3.19). Entonces, existe T^* tal que para cualquier $t \in (0, T^*)$ deducimos que*

$$\|f(t, \cdot) - \tilde{f}(t, \cdot)\|_{\tilde{L}_1(\mathbb{R}^6)} \leq C\pi(f_o - \tilde{f}_o),$$

$$\|f(t, \cdot) - \tilde{f}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)} \leq C\pi(f_o - \tilde{f}_o).$$

Si $p_o \leq 3$, entonces $\|E(t, \cdot) - \tilde{E}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C\pi(f_o - \tilde{f}_o)t^{-(\frac{9}{2p_o} - \frac{3}{2})}$.

Si $p_o \geq 3$, entonces $\|E(t, \cdot) - \tilde{E}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C\pi(f_o - \tilde{f}_o)$.

Además, $T^* = \infty$ cuando el dato inicial es suficientemente pequeño con $p_o = \frac{9}{4}$.

Demostración. Tenemos que acotar $\|f(t, \cdot) - \tilde{f}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)}$. Para ello consideremos la cantidad

$$J = \max_{0 < s < T} \{\|f(t, \cdot) - \tilde{f}(t, \cdot)\|_{M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)}\}.$$

Las mismas estimaciones del Teorema 3.2 y la expresión de la solución dada en (3.19) implican que

$$J \leq \|f_o - \tilde{f}_o\|_{M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)} + 2CB \max\{K, \tilde{K}\}J$$

donde K , \tilde{K} , C y B se definen como en el Teorema 3.2 para las soluciones f y \tilde{f} . Realizando las mismas estimaciones que en el Teorema 3.2, se demuestra que si

$$\max\{\pi(f_o), \pi(\tilde{f}_o)\} < \frac{1}{4CB},$$

entonces existe T^* tal que $2CB \max\{K, \tilde{K}\}$ es menor que 1 (ver relación (3.17)). De lo cual se concluye el resultado anunciado. \square

3.6 Otras propiedades de la solución.

Se puede demostrar fácilmente que todo lo probado en este capítulo es igualmente válido si en lugar de espacios de Morrey tomamos espacios L^p . Así, el espacio de Morrey modificado $M\tilde{L}_p(\mathbb{R}^6)$ se sustituiría por el espacio de las funciones $f(x, v)$ tales que todas sus densidades $\rho_h(f)$ dadas por (3.1) estén en $L^p(\mathbb{R}^3)$ y tengan una cota global independiente de h .

Para obtener existencia global de este tipo de ecuaciones se ha utilizado en trabajos previos el argumento de la acotación de determinados momentos de f . Veamos que relación existe entre estas hipótesis y las que nosotros hemos considerado en este capítulo. Ésta viene dada por el lema de interpolación (Lema A.5) que nos permite asegurar en nuestro caso lo siguiente:

Corolario 3.1. *Si $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6)$, $p > \frac{9}{4} = q_o$, con $f_o \geq 0$, y $J_k = |v|^k f_o(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$, para algún $k > 3 \frac{(p-1)(q_o-1)}{(p-q_o)}$, entonces $\rho_h(f_o) \in L^r(\mathbb{R}^3)$ con*

$$r = \begin{cases} \frac{3(p-1)+kp}{3(p-1)+k} & \text{for } p \neq \infty \\ \frac{3+k}{3} & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

y

$$\|\rho_h(f_o)\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f_o\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}^{\frac{kp'}{3+kp'}} \|J_k\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}^{\frac{3}{3+kp'}},$$

donde C es independiente de h .

Es evidente que si f_o verifica las condiciones del resultado anterior, entonces $f_o \in M\tilde{L}_r(\mathbb{R}^6)$. Por tanto, podemos escribir el Teorema 3.1 con datos iniciales f_o en espacios L^p .

Corolario 3.2. *El sistema de VPFP con dato inicial f_o en $L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^p(\mathbb{R}^6)$, con $p > \frac{9}{4} = q_o$, y $J_k = |v|^k f_o(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$, para algún $k > 3 \frac{(p-1)(q_o-1)}{(p-q_o)}$, tiene una única solución f en el intervalo $[0, T]$, con $T < T^*$, que verifica las propiedades dadas en el Teorema 3.1. Además, si f_o es suficientemente pequeño en $L^p(\mathbb{R}^6)$ entonces la solución es global en tiempo.*

Usando la demostración del teorema de existencia obtenida por F. Bouchut en [12] se puede deducir que, imponiendo al dato inicial que ciertos momentos en v estén acotados, la solución es global. El Corolario 3.1 implica que si f_o satisface $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ y los momentos en v acotados para $k < m$, con $m > \frac{15}{4}$, $|v|^k f_o \in L^1(\mathbb{R}^6)$, entonces $f_o \in M\tilde{L}_{p_o}(\mathbb{R}^6)$ con $p_o > \frac{9}{4}$. Por tanto, se puede deducir el siguiente resultado.

Corolario 3.3. *Supongamos que f_o satisface $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ y sus momentos en v están acotados para $k < m$, con $m > \frac{15}{4}$, $|v|^k f_o(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$. Entonces, existe una única solución f de (1.5)-(1.6) tal que*

$$f \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)),$$

$$t^{\frac{1}{2}} E \in BC((0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$$

y E pertenece a $C((0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$, para cada $T > 0$. Además, si el dato inicial es suficientemente pequeño (en el sentido del Teorema 3.2), entonces

$$t^{\frac{1}{2}} E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3).$$

Demostración. Bajo estas condiciones se demostró en [12] que

$$\sup\{ \|\rho_h(t, \cdot)\|_p, h \geq 0, 0 \leq t \leq T\} < \infty,$$

con $p > \frac{9}{4}$. Este hecho junto con el Teorema 3.1 con condición inicial $f(t, \cdot)$, para cada $t \in [0, \infty)$, y la unicidad de solución, con esta regularidad (ver [12], Proposición 6), finaliza el resultado. \square

Del teorema anterior la novedad reside en que se tiene que el campo de fuerzas está acotado en $L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ para cada $t > 0$ con momentos de orden menor que $\frac{15}{4}$. Este resultado complementa el resultado de F. Bouchut [12], donde, suponiendo que los momentos están acotados para $k < m$, con $m > 6$, se obtuvo un resultado análogo probando, además, que

$$E \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3),$$

para cada $T > 0$.

En este último caso se pueden obtener más propiedades de la solución, como estimaciones L^p para f (Lema 2.2), la acotación de la energía cinética, la identidad de energía y la identidad de producción de entropía. Simplemente las recordaremos sin demostración y referimos a [12] sección V y a [14].

Desde ahora, supondremos que f_o satisface $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ y sus momentos en v acotados para $k < m$, con $m > 6$, $|v|^k f_o(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$. La identidad de la energía se verifica de forma clásica y los momentos en v permanecen acotados en intervalos de tiempo acotados.

Lema 3.5. *La solución f satisface que*

$$t \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, d(x, v)$$

es absolutamente continua y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, d(x, v) + \frac{\theta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E|^2 \, dx \right) = -\beta \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f \, d(x, v) + 3\sigma M.$$

Análogamente, se demuestra que

$$\frac{d}{dt} m_k(f)(t) = -\beta k m_k(f)(t) + k(k+1)\sigma m_{k-2}(f)(t) +$$

$$k \int_{\mathbb{R}^6} (E \cdot v) |v|^{k-2} f \, dx \, dv,$$

para $k \geq 2$ donde

$$m_k(f)(t) = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^k f(t, x, v) \, d(x, v).$$

Por tanto, las conclusiones del Lema 2.4 son válidas para la solución f y todos los momentos en v están acotados, suponiendo su acotación para el dato inicial.

También podemos tener una relación sobre la entropía del sistema.

Lema 3.6. Sea $E_o(t, x) \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$ para cada $T > 0$ y $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6)$ positiva tal que

$$\int_{\mathbb{R}^6} (|v|^2 + |\log f_o|) f_o(x, v) d(x, v) < \infty.$$

Si $f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$ es solución de la ecuación de VFP (1.5) con $E = E_o$ y dato inicial f_o , entonces

- i) $f \log f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$.
- ii) $\sqrt{f} \in C([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^6))$.
- iii) $\nabla_v \sqrt{f} \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^6)$, para cada $T > 0$.
- iv) $\nabla_v f \in L^1(]0, T[\times \mathbb{R}^6)$, para cada $T > 0$ con

$$\nabla_v f = 2\sqrt{f} \nabla_v \sqrt{f}.$$

v) Se verifica que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^6} f \log f d(x, v) = 3\beta M - 4\sigma \int_{\mathbb{R}^6} |\nabla_v \sqrt{f}|^2 d(x, v).$$

Todo lo anterior podemos resumirlo en el siguiente corolario.

Corolario 3.4. Supongamos que f_o satisface $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6)$ con los momentos en v acotados para $k < m$, con $m > 6$, $|v|^k f_o(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^6)$ y entropía inicial acotada. Entonces, existe una única solución f de (1.5)-(1.6) tal que

$$f \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6))$$

y

$$E \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3),$$

para cada $T > 0$, satisfaciendo que

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^6)} \leq e^{\frac{3\beta t}{p'}} \|f_o\|_{L^p(\mathbb{R}^6)},$$

la identidad de energía del Lema 3.5 y la identidad de producción de entropía en Lema 3.6. Además, las estimaciones del Lema 2.4 son válidas en cuanto al

crecimiento de la energía cinética y del momento de inercia, es decir, $K(f)(t)$ y $I(f)(t)$ tienen un crecimiento a lo sumo del orden de t y t^3 respectivamente cuando $t \rightarrow \infty$.

Además, si el dato inicial es suficientemente pequeño (en el sentido del Teorema 3.2), entonces

$$t^{\frac{1}{2}} E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3) \quad (3.20)$$

y

$$\max\{\|\rho_h(f)(t, \cdot)\|_{L^{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\} \leq C, \quad (3.21)$$

para todo $t > 0$.

La última parte es consecuencia del Teorema 3.1 y del resultado de unicidad de solución del sistema de VFPF suponiendo que $f \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6))$ y $E \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$, para cada $T > 0$, probado en la Proposición 6 de [12].

En el próximo capítulo vamos a estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones definidas en el corolario anterior que verifican (3.20) y (3.21). La existencia de este tipo de soluciones está asegurada al menos para dato inicial suficientemente pequeño debido al Corolario 3.4.

Capítulo 4

Comportamiento asintótico de soluciones débiles del sistema de VPFP sin fricción.

4.1 Introducción.

En este capítulo pretendemos analizar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema de VPFP en tres dimensiones en el caso sin fricción, es decir, para la constante $\beta = 0$, que fueron construidas en el Corolario 3.4. Demostraremos que la distribución de partículas converge cuando $t \rightarrow \infty$ hacia $\bar{G}(t, x, v) = G(t, x, v, 0, 0)$, donde G (ver apéndice sección 1) es la solución fundamental del operador lineal

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f - \sigma \Delta_v f.$$

Nuestro resultado es válido para soluciones débiles, que son soluciones integrales con la regularidad que le exigimos (ver apéndice), del sistema de VPFP (1.5)-(1.6) con dato inicial f_o y con $\beta = 0$, es decir, f es solución de la ecuación integral

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^6} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_\nu G(t-s, x, v, \xi, \nu) E(s, \xi) f(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds. \quad (4.1)$$

Como en el capítulo anterior, denotaremos por $S_p(t)$ a

$$\max\{\|\rho_h(f)(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\},$$

para cada p , $1 \leq p \leq \infty$. Por $S_p^o = S_p(0)$ denotaremos la anterior cantidad para el dato inicial.

El resultado fundamental de este capítulo es el siguiente.

Teorema 4.1. *Supongamos que $f_o \geq 0$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^6)$ y tiene energía inicial, momento de inercia inicial y entropía inicial acotada, es decir, $(|x|^2 + |v|^2 + |\log f_o|)f_o \in L^1(\mathbb{R}^6)$ y $E_o \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Sea f una solución débil de (1.5)-(1.6) con $\beta = 0$ y dato inicial f_o que verifica*

$$f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6)), \quad (4.2)$$

$$t^{\frac{1}{2}} E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3), \quad (4.3)$$

$$\max\{S_{\frac{3}{4}}(t), 0 \leq t < \infty\} < \infty, \quad (4.4)$$

$K(f)(t)$ y $I(f)(t)$ son funciones continuas de $[0, \infty)$ a \mathbb{R} que tienen un crecimiento a lo sumo del orden de t y t^3 respectivamente cuando $t \rightarrow \infty$ y $f \log f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, \cdot) - M\bar{G}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = 0,$$

donde M es la masa total de f_o .

El Corolario 3.4 afirma la existencia de soluciones integrales del sistema de VPFP verificando todas las hipótesis del teorema anterior cuando el dato inicial es suficientemente pequeño en el sentido del Teorema 3.2. Debemos también señalar que, bajo las hipótesis del teorema anterior, si f es una solución débil, entonces es solución integral (ver apéndice).

Se pueden eliminar las hipótesis sobre el crecimiento de la energía cinética y el momento de inercia ya que según el Lema 3.5 la identidad de energía es cierta para $t > 0$. Por tanto, los argumentos del Lema 2.4 se aplican y se obtiene el crecimiento de la energía cinética y el momento de inercia. Por simplicidad hemos optado por escribir el resultado de esta forma.

El comportamiento asintótico del sistema de VPFP fue propuesto como problema abierto en [12]. F. Bouchut y J. Dolbeaut [14] estudiaron el comportamiento asintótico de este sistema en el caso $\beta > 0$ suponiendo la acción de un potencial externo sobre el sistema. La herramienta fundamental que se usa en [14] es la construcción de un funcional de Liapunov. Desde un punto de vista físico, el potencial externo confina las partículas, impide que éstas se difundan a infinito y hace que la solución tienda a un estado estacionario. Nuestro resultado demuestra que al menos para dato inicial pequeño el efecto del potencial interno disminuye con el paso del tiempo, con lo que la distribución de partículas se difunde en tiempo con

la misma rapidez que la solución fundamental de la correspondiente ecuación lineal. Por tanto, nuestro resultado puede considerarse en cierta medida complementario al resultado en [14]. En resumen, probamos que una solución del sistema de VFP con las hipótesis del teorema anterior se simplifica asintóticamente.

En nuestro caso el tipo de interacción ($\theta = \pm 1$) no influye. Esta consecuencia podría sorprender en el caso gravitacional; sin embargo, la solución sólo existe para dato inicial pequeño.

El proceso de demostración puede resumirse en las siguientes etapas. En un primer paso realizamos un cambio de escala en la Ecuación (1.5) mediante la definición de $f_\lambda(t, x, v)$ por

$$f_\lambda(t, x, v) = \lambda^{12} f(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v).$$

Este cambio de escala está motivado por la autosemejanza de la función \bar{G} . Estudiamos y analizamos las ecuaciones y las propiedades que verifican las cantidades reescaladas. Es importante destacar que el estudio de la distribución de partículas $f(t, \cdot)$ para $t \rightarrow \infty$ se puede reducir a analizar el comportamiento de la distribución de partículas reescalada en tiempo $t = 1$, $f_\lambda(1, \cdot)$, cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Esta etapa se desarrollará en la sección 2.

En una segunda etapa (véase la sección tercera) establecemos estimaciones *a priori* del sistema reescalado independientes de la constante de escala λ . Para ello usaremos las propiedades del operador integral definido por G y su gradiente $\nabla_\nu G$ vistas en el caso de espacios de Morrey en la sección dos del capítulo anterior y que directamente se puede aplicar en espacios L^p con análogas propiedades (ver [13], [22]). En particular, observaremos la dependencia de estas estimaciones respecto de λ para obtener estimaciones independientes de λ .

Finalmente, tomaremos el límite $\lambda \rightarrow \infty$ en la constante de escala usando criterios de compacidad para la sucesión $\{f_\lambda\}$. Probamos que el término no lineal de la Ecuación (1.5) se anula en el límite, es decir, el efecto de este término es prácticamente despreciable al cabo de un cierto tiempo. La compacidad se prueba primero de forma débil y posteriormente en la norma L^1 . Finalmente, hay que identificar el límite. Demostramos que, de hecho, es la función \bar{G} , que no es más que la solución fundamental de la parte lineal de la Ecuación (1.5) centrada en $(0,0)$, multiplicada por la masa total del sistema. Esta última parte se probará en la sección cuarta.

Métodos asintóticos basados en la autosemejanza de las ecuaciones son conocidos en la literatura desde los trabajos pioneros de G. I. Barenblatt [6]. Este tipo

de técnicas se ha utilizado con éxito para ecuaciones de difusión no lineales como la ecuación de los medios porosos, $u_t = \Delta u^m$, $m > 1$: G. I. Barenblatt y Y. B. Zeldovich [7], S. Kamin [58], A. Friedman y S. Kamin [46], L. A. Caffarelli, J. L. Vázquez y N. I. Wolanski [17]. El método de las cuatro etapas: reescalado, estimaciones, compacidad e identificación del límite, fue propuesto por S. Kamin y J. L. Vázquez [59] y aplicado a la ecuación de evolución del p -Laplaciano $u_t = \Delta_p(u)$, $p > 2$. Ha sido utilizado en otros contextos: M. Escobedo, J. L. Vázquez y E. Zuazua [43], V. A. Galaktionov y J. L. Vázquez [47]. A. Carpio usó este tipo de técnicas en [18] para estudiar las tasas de decrecimiento de la velocidad y vorticidad para el problema de Navier-Stokes en dimensión tres.

4.2 Sistema reescalado y sus propiedades.

Uno de los ingredientes fundamentales en el método arriba descrito es la autosemejanza de la solución fundamental \bar{G} del operador L . Recordemos la definición de solución autosemejante.

Definición 4.1. $f(t, x, v)$ es una solución autosemejante de (1.5) si existen constantes a, b, c, d tal que

$$f(t, x, v) = \lambda^a f(\lambda^b t, \lambda^c x, \lambda^d v)$$

para cada $\lambda > 0$ y para cada $x, v \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$.

Es fácil comprobar que la solución fundamental del operador de VFP (A.3) no es autosemejante cuando $\beta > 0$. Sin embargo, para $\beta = 0$ la función \bar{G} verifica que

$$G(t, x, v) = \lambda^{12} G(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v). \quad (4.5)$$

Usando esta autosemejanza podemos definir una sucesión de problemas que nos permitirá estudiar el comportamiento de la distribución de partículas en infinito. Dado $\lambda \geq 1$ tomamos

$$f_\lambda(t, x, v) = \lambda^{12} f(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v), \quad (4.6)$$

para cada $x, v \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$. También consideramos

$$E_\lambda(t, x) = \theta(K * \rho(f_\lambda)). \quad (4.7)$$

Lema 4.1. *Las siguientes igualdades son ciertas para $t > 0$, $\lambda \geq 1$ y $1 \leq p \leq \infty$:*

i) *La norma de f_λ en espacios L^p viene dada por*

$$\|f_\lambda(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^6)} = \lambda^{\frac{12}{p}} \|f(\lambda^2 t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}.$$

ii) *$\rho(f_\lambda)$ está dada por $\rho(f_\lambda)(t, x) = \lambda^9 \rho(f)(\lambda^2 t, \lambda^3 x)$. Por tanto,*

$$\|\rho(f_\lambda)(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \lambda^{\frac{9}{p}} \|\rho(f)(\lambda^2 t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

iii) *E_λ se escribe como $E_\lambda(t, x) = \lambda^6 E(\lambda^2 t, \lambda^3 x)$. Como consecuencia,*

$$\|E_\lambda(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)^3} = \lambda^{\frac{6}{p}} \|E(\lambda^2 t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)^3}.$$

Demostración. Las primeras dos partes son inmediatas sin más que hacer un obvio cambio de variable. Usando la definición de E_λ en (4.7) tenemos que

$$E_\lambda(t, x) = \frac{\theta}{3w_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(f_\lambda)(t, y) dy.$$

Sustituyendo ii) en esta fórmula y haciendo el cambio de variable $z = \lambda^3 y$ se deduce el resultado. \square

Como f es solución débil del sistema (1.5)-(1.6) ($\beta = 0$) con la regularidad del Teorema 4.1 tenemos que

$$\int_{Q_\infty} \left(f \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(v \cdot \nabla_x) \Phi + f(E \cdot \nabla_v) \Phi + f \sigma \Delta_v \Phi \right) d(t, x, v) + \quad (4.8)$$

$$\int_{\mathbb{R}^6} \Phi(0, x, v) f_o(x, v) d(x, v) = 0,$$

para cada $\Phi \in C_o^\infty(Q_\infty)$, donde $Q_\infty = [0, \infty[\times \mathbb{R}^6$.

Obtengamos la ecuación que verifican f_λ y E_λ .

Lema 4.2. *Para cada $\lambda \geq 1$ fijo, el par (E_λ, f_λ) es una solución débil del problema*

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f_\lambda + \lambda^{-5} \operatorname{div}_v (E_\lambda f_\lambda) - \sigma \Delta_v f_\lambda = 0, \quad \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^6 \quad (4.9)$$

con E_λ dado por (4.7). Además, f_λ verifica

$$f_\lambda(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^6} G(t, x, v, \xi, \nu) f_{o\lambda}(\xi, \nu) d\xi d\nu + \quad (4.10)$$

$$\lambda^{-5} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_\nu G(t-s, x, v, \xi, \nu) E_\lambda(s, \xi) f_\lambda(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds.$$

Demostración. Tenemos que probar la siguiente igualdad

$$\int_{Q_\infty} (f_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f_\lambda (v \cdot \nabla_x) \varphi + \lambda^{-5} f_\lambda (E_\lambda \cdot \nabla_v) \varphi + f_\lambda \sigma \Delta_v \varphi) d(t, x, v) + \quad (4.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(0, x, v) f_{o\lambda}(x, v) d(x, v) = 0,$$

para cada $\varphi \in C_o^\infty(Q_\infty)$, partiendo de (4.8). Para ello, definimos

$$\Phi(t, x, v) = \varphi(\lambda^{-2}t, \lambda^{-3}x, \lambda^{-1}v)$$

y la usamos como función test en (4.8). La Ecuación (4.11) se deduce después de hacer los cambios de variables $t' = \lambda^2 t$, $x' = \lambda^3 x$ y $v' = \lambda v$. Por tanto,

$$\int_{Q_\infty} f \frac{\partial \Phi}{\partial t} d(t, x, v) = \lambda^{14} \int_{Q_\infty} f(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v) d(t, x, v).$$

Usando la relación

$$\lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v) = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, v)$$

y la definición de f_λ (4.6) tenemos que

$$\int_{Q_\infty} f \frac{\partial \Phi}{\partial t} d(t, x, v) = \int_{Q_\infty} f_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} d(t, x, v).$$

Análogamente se procede con los otros términos de (4.8). La forma integral de la Ecuación (4.9) se obtiene de la misma forma. \square

Los momentos de la distribución f_λ cambian de la forma siguiente.

Lema 4.3. Para cada $T > 0$ y λ suficientemente grande (dependiendo de T), existe una constante K , que depende de f_0 y de T pero no de λ , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^6} (|x|^2 + |v|^2) f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq K \quad (4.12)$$

para cada $0 \leq t \leq T$.

Demostración. Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} KE(f_\lambda, t) &= \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f_\lambda(t, x, v) d(x, v) = \\ &\lambda^{-2} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f(\lambda^2 t, x, v) d(x, v) = \lambda^{-2} KE(f, \lambda^2 t). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la energía cinética tiene un crecimiento a lo sumo del orden de t en infinito, tenemos que $KE(f, t) \leq A + Bt$, donde A y B son constantes dependiendo de f_0 y del caso en que nos encontremos, electrostático o gravitacional (ver Lemas 3.5 y 2.4). Concluimos que $KE(f_\lambda, t)$ está acotado, independientemente de λ , por

$$\int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq \lambda^{-2} C_1 + C_2 t.$$

Destaquemos que este crecimiento lineal de la energía cinética es justo el crecimiento de la energía cinética de \bar{G} .

Análogos argumentos para el momento de inercia nos dan que

$$I(f_\lambda, t) = \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f_\lambda(t, x, v) d(x, v) = \lambda^{-6} \int_{\mathbb{R}^6} |x|^2 f(\lambda^2 t, x, v) d(x, v) = \lambda^{-6} I(f, \lambda^2 t).$$

Como el momento de inercia crece del orden de t^3 tenemos que $I(f, t) \leq A' + B't$, donde A' y B' son constantes dependiendo de f_0 y del caso en que nos encontremos, electrostático o gravitacional (ver Lemas 2.4 y 3.5). \square

Observación 4.1. Las estimaciones en $KE(f, t)$ e $I(f, t)$ se pueden considerar como hipótesis sobre la evolución de la desviación media de la velocidad, $\langle v \rangle$, y desviación media de la posición, $\langle x \rangle$, ya que

$$\langle v \rangle := \left(\int v^2 f d(x, v) \right)^{1/2} = KE(f, t)^{1/2} = O(t^{1/2})$$

y

$$\langle x \rangle := \left(\int x^2 f d(x, v) \right)^{1/2} = I(f, t)^{1/2} = O(t^{3/2}).$$

Señalemos que estas estimaciones son exactas para $\bar{G}(t, x, v)$ que, de acuerdo con nuestro resultado principal, va a ser el atractor de nuestro sistema. Esto se deduce fácilmente de (A.6) y (A.7).

4.3 Estimaciones a priori.

Estimaciones uniformes como (4.12) son esenciales para poder estudiar la compacidad de la sucesión f_λ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Para obtener las estimaciones a priori necesarias aplicaremos las mismas ideas del Teorema 3.2 en la ecuación integral (4.10) verificada por f_λ . En este caso, realizamos las estimaciones en espacios L^p . Definamos para cada $h \geq 0$ las funciones

$$\rho_h^1(f_\lambda)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^6} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) f_{o\lambda}(\xi, \nu) d\xi d\nu dv \quad (4.13)$$

y

$$\rho_h^2(f_\lambda)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_\nu G(t-s, x-hv, v, \xi, \nu) E_\lambda(s, \xi) f_\lambda(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds dv. \quad (4.14)$$

Consideremos los valores

$$S_p^i(t) = \max\{\|\rho_h^i(f)(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\}$$

para cada $p, 1 \leq p \leq \infty$, e $i = 1, 2$. Recordemos que S_p^o denota

$$\max\{\|\rho_h(f_o)(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\}.$$

El siguiente resultado puede ser probado de forma totalmente análoga a las estimaciones del operador G definido en la sección dos del capítulo anterior, pero aplicado al caso de espacios L^p siendo alguno de sus apartados utilizado en el Lema 3.3 del capítulo anterior. Estas estimaciones pueden verse en [13].

Lema 4.4. *Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

i) Sea $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces,

$$S_q^1(t) \leq C t^{-\frac{9}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} S_p^o, \quad C = C(p, q, \sigma).$$

ii) Si además, $\frac{1}{p} - \frac{1}{9} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ y $0 \leq \delta < 1$, entonces,

$$S_q^2(t) \leq C t^{-\gamma} \max\{t^\delta \|E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} S_p(t), 0 \leq t \leq T\},$$

donde $C = C(p, q, \sigma)$ y $\gamma = \delta - \frac{9}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{9})$.

iii) Sea

$$\Psi(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^6} \nabla_\nu G(t, x, v, \xi, \nu) g(\xi, \nu) d\xi d\nu,$$

entonces, para cada $1 \leq p \leq q < \infty$ y $C = C(p, q, \sigma)$, se verifica que

$$\max\{\|\rho_h(\Psi)(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\} \leq C t^{-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \max\{\|\rho_h(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, h \geq 0\}.$$

El Lema 3.2 también es cierto en el marco de los espacios L^p y por tanto, la relación elíptica entre E y ρ nos permite asegurar el siguiente resultado (ver [82]).

Lema 4.5. Si $\rho \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ y $1 \leq q < 3 < p \leq \infty$, entonces $E = K * \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ y

$$\|E\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C \|\rho\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}^\alpha \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{1-\alpha},$$

donde C es independiente de ρ y

$$\alpha = \frac{\frac{1}{p'} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Denotaremos por $S_{p,\lambda}^i(t)$ las cantidades $S_p^i(t)$ aplicadas a la solución f_λ de los problemas reescalados. El siguiente lema prueba que para $S_{9/4,\lambda}^o$ suficientemente pequeño podemos obtener estimaciones *a priori* de E_λ y ρ_λ . Posteriormente, aplicaremos este resultado a problemas en los que la condición inicial verificará esta hipótesis para λ suficientemente grande.

Proposición 4.1. *Si $\lambda^{-5} S_{9/4,\lambda}^o$ es menor que C_o , entonces las siguientes estimaciones son ciertas para t en $(0, \infty)$:*

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq 2S_{\frac{9}{4},\lambda}^o,$$

y

$$\|E_\lambda(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq C t^{-\frac{1}{2}} S_{\frac{9}{4},\lambda}^o,$$

siendo C_o y C constantes independientes de λ .

Demostración. Las estimaciones son completamente análogas a las realizadas en el Teorema 3.2 en el caso $p = \frac{9}{4}$ pero en el marco de espacios L^p . Por tanto, destacaremos solamente las diferencias.

Consideremos

$$K_p^\lambda(t) = \begin{cases} S_{p,\lambda}(t) t^{(2-\frac{9}{2p})}, & \text{for } p > \frac{9}{4} \\ S_{p,\lambda}(t), & \text{for } p \leq \frac{9}{4} \end{cases},$$

$$K_p^\lambda = \max\{K_p^\lambda(t), 0 \leq t \leq T\}$$

y $K^\lambda = \max\{K_{\frac{9}{4}}^\lambda, K_q^\lambda, K_{\frac{4q}{3}}^\lambda\}$. Repitiendo exactamente las mismas estimaciones que en el Teorema 3.2, usando en este caso los Lemas 4.4 y 4.5, podemos demostrar que

$$K^\lambda \leq S_{\frac{9}{4},\lambda}^o + CB\lambda^{-5} (K^\lambda)^2. \quad (4.15)$$

Suponiendo que

$$\lambda^{-5} S_{\frac{9}{4},\lambda}^o \leq \frac{1}{4CB} = C_o, \quad (4.16)$$

obtenemos la estimación

$$K^\lambda \leq \frac{1 - (1 - 4CB\lambda^{-5} S_{\frac{9}{4},\lambda}^o)^{\frac{1}{2}}}{2CB\lambda^{-5}} < \frac{1}{2CB\lambda^{-5}}. \quad (4.17)$$

Por tanto, sustituyendo (4.17) en (4.15), la estimación sobre E queda probada. La estimación sobre E_λ se deduce análogamente al Teorema 3.2. \square

En el próximo resultado se utiliza fuertemente la regularidad probada en el Lemma 4.4.

Lema 4.6. *Sea $t > 0$ y ϵ tal que $0 < \epsilon < t$, entonces*

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq M(f, E, t) \lambda^{\frac{9}{p'}}.$$

y

$$\|E_\lambda(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq \epsilon^{-\frac{1}{2}} M(f, E, \epsilon) \lambda^{\frac{9}{p'}},$$

para cada $\frac{9}{5} < p < \frac{9}{4}$ y λ suficientemente grande, donde $M(f, E, \epsilon)$ es una constante que depende de la solución (E, f) y de ϵ pero es independiente de λ .

Demostración. Estimemos $S_{\frac{9}{4},\lambda}(t)$. Usando el Lema 4.4 *ii)* y *iii)* con $q = \frac{9}{4}$ y $\delta = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq C t^{(2-\frac{9}{2p})} S_{p,\lambda}^o + \lambda^{-5} C t^{-\gamma} \max\{\tau^\delta \|E_\lambda(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} S_{p,\lambda}(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Teniendo en cuenta $t^{\frac{1}{2}} E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$ y el Lema 4.1 *iii)*, resulta

$$\|E_\lambda(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} = \lambda^6 \|E(\lambda^2 \tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3}$$

Por tanto, deducimos que

$$\max\{\tau^\delta \|E_\lambda(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3}, 0 \leq \tau \leq t\} \leq$$

$$\lambda^5 \max\{\tau^\delta \|E(\tau, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3}, 0 \leq \tau \leq \lambda^2 t\} \leq \lambda^5 \|t^{\frac{1}{2}} E\|_{L^\infty([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)}.$$

Combinando la desigualdad de interpolación en espacios L^p entre 1 y $\frac{9}{4}$, el Lema 4.1 *ii)* y la hipótesis (4.4) resulta

$$\max\{S_{p,\lambda}(\tau), 0 \leq \tau \leq t\} \leq \max\{\|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} S_{\frac{9}{4}}(\tau), 0 \leq \tau < \infty\} \lambda^{\frac{9}{p'}}.$$

En conclusión, tenemos que

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq C t^{(2-\frac{9}{2p})} \lambda^{\frac{9}{p'}} S_p^o + C t^{-\gamma} \lambda^{-5} \lambda^5 \pi(E, f) \lambda^{\frac{9}{p'}},$$

donde $\pi(E, f)$ es una constante que depende de la solución (E, f) . Por tanto, la primera parte del lema está probada tomando

$$M(f, E, t) = C t^{(2-\frac{9}{2p})} S_p^o + C t^{-\gamma} \pi(E, f).$$

Para demostrar la segunda parte aplicamos la Proposición 4.1 con dato inicial $f_\lambda(\frac{\epsilon}{2}, x, v)$ en lugar de f_o . Debemos verificar que

$$\lambda^{-5} S_{\frac{9}{4}, \lambda}(\frac{\epsilon}{2})$$

es suficientemente pequeño. Con este objetivo usamos la primera parte de este lema para tener que

$$\lambda^{-5} S_{\frac{9}{4}, \lambda}(\frac{\epsilon}{2}) \leq C M(f, E, \frac{\epsilon}{2}) \lambda^{-5 + \frac{9}{p'}}.$$

Eligiendo $\frac{9}{5} < p < \frac{9}{4}$, se tiene $-5 + \frac{9}{p'} < 0$ y para λ suficientemente grande y dependiendo de ϵ deducimos que

$$\lambda^{-5} S_{\frac{9}{4}, \lambda}(\frac{\epsilon}{2})$$

es suficientemente pequeño. Como consecuencia, aplicamos la Proposición 4.1 con dato inicial $f_\lambda(\frac{\epsilon}{2}, x, v)$ y tenemos que

$$\|E_\lambda(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq (t - \frac{\epsilon}{2})^{-\frac{1}{2}} C S_{\frac{9}{4}, \lambda}(\frac{\epsilon}{2}).$$

Usando la primera parte de este lema y el hecho de que $t > \epsilon$, se finaliza la demostración del resultado. \square

El lema anterior tiene como corolario el siguiente resultado.

Corolario 4.1. *Sea ϵ tal que $0 < \epsilon < t$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^6} |E_\lambda(t, x)| f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq M'(f, E, \epsilon) \lambda^{\frac{9}{p'}},$$

para cada $\frac{9}{5} < p < \frac{9}{4}$ y λ suficientemente grande. $M'(f, E, \epsilon)$ es una constante que depende de la solución (E, f) y ϵ pero es independiente de λ .

Demostración. Acotamos la anterior integral por la norma L^∞ de E_λ y la norma L^1 de $f_\lambda(t, x, v)$. Usando el Lema 4.1 ii) deducimos que

$$\|f_\lambda(t, x, v)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}.$$

Combinando este hecho con el lema anterior se deduce el resultado. \square

Obsérvese que el procedimiento aplicado en el Lemma 4.6 nos da el orden de decrecimiento del término no lineal en la Ecuación (1.5) con $\beta = 0$. Con este objetivo, vamos a mejorar la cota de $S_{\frac{9}{4},\lambda}(t)$ obtenida en el Lema 4.6 en el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Sea ϵ_o tal que $0 < 6\epsilon_o < t$, entonces*

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq M''(f, E, \epsilon_o),$$

con M'' independiente de λ .

Demostración. La demostración consiste en la aplicación iterativa de las ideas del Lema 4.6. Usamos el Lema 4.4 y los argumentos del Lema 4.6 para obtener

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq C\epsilon_o^{(2-\frac{9}{2p_1})} S_{p_1,\lambda}(t - \epsilon_o) +$$

$$C \|t^{\frac{1}{2}} E\|_{L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)} \epsilon_o^{-\gamma_1} \max\{S_{p_1,\lambda}(\tau), t - \epsilon_o \leq \tau \leq t\},$$

con $\frac{9}{5} < p_1 < \frac{9}{4}$, γ_1 dado por el Lema 4.4, donde la constante C no depende de λ . Luego, desarrollamos el mismo tipo de estimaciones para acotar $S_{p_1,\lambda}(\tau)$ y concluimos que

$$S_{p_1,\lambda}(\tau) \leq C\epsilon_o^{(\frac{9}{2p_1} - \frac{9}{2p_2})} S_{p_2,\lambda}(t - 2\epsilon_o) +$$

$$C \|t^{\frac{1}{2}} E\|_{L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)} \epsilon_o^{-\gamma_2} \max\{S_{p_2,\lambda}(\tau'), t - 2\epsilon_o \leq \tau' \leq \tau\},$$

para cada $t - \epsilon_o \leq \tau \leq t$ con $\frac{9}{6} < p_2 < \frac{9}{5}$. Además, eligiendo p_1 cercano a $\frac{9}{5}$ podemos elegir p_2 cercano a $\frac{9}{6}$. Combinando las anteriores estimaciones tenemos que

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq C(f, E, \epsilon_o) S_{p_2,\lambda}(t - 2\epsilon_o) + C(f, E, \epsilon_o) \max\{S_{p_2,\lambda}(\tau), t - 2\epsilon_o \leq \tau \leq t\}.$$

Procediendo iterativamente, concluimos que

$$S_{\frac{9}{4},\lambda}(t) \leq C(f, E, \epsilon_o) S_{1,\lambda}(t - 6\epsilon_o) + C(f, E, \epsilon_o) \max\{S_{1,\lambda}(\tau), t - 6\epsilon_o \leq \tau \leq t\}.$$

La conservación de masa concluye la demostración del resultado. \square

Observación 4.2. Estimemos la velocidad de decrecimiento del término no lineal. El corolario anterior nos asegura que el término $\operatorname{div}_v E_\lambda f_\lambda$ en la Ecuación (4.9) tiene un decaimiento del orden de λ^{-6} . De hecho, usando el corolario anterior y los argumento del Corolario 4.1 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^6} |E(\lambda^2 t, x)| f(\lambda^2 t, x, v) d(x, v) \leq M''(f, E, \epsilon_o) \lambda^{-6}.$$

Por consiguiente, para $t = 1$ y $\lambda = t^{\frac{1}{2}}$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^6} |E(t, x)| f(t, x, v) d(x, v) \leq M''(f, E, \epsilon_o) t^{-3}.$$

En la próxima sección usaremos estas estimaciones para pasar al límite cuando $\lambda \rightarrow \infty$ en el sistema reescalado. El punto crucial es la compacidad.

4.4 Compacidad débil- \star y paso al límite.

Para obtener compacidad de la sucesión $\{f_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$, usaremos análogas ideas a las de la sección tercera y aplicaremos el teorema generalizado de Ascoli-Arzelà y el teorema de compacidad de Prohorov (ver apéndice).

En este caso, consideraremos el conjunto de funciones $\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq 1\}$ como subconjunto del espacio de medidas de Radon de variación acotada $X' = \mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$. Para comprobar las hipótesis del teorema de Ascoli-Arzelà generalizado, necesitaremos el resultado de compacidad en la topología débil- \star de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$ debido a Prohorov (ver Teorema A.3 del Apéndice).

Lema 4.7. *El conjunto $\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq 1\}$ es débil- \star relativamente compacto en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$ para cada $t \geq 0$.*

Demostración. El Lema 4.1 i) implica que

$$\|f_\lambda(t, x, v)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}.$$

Por tanto, verifica la primera propiedad del teorema de compacidad de Prohorov. El Lema 4.3 nos permite considerar una constante C dependiendo del dato inicial y de t pero no de λ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^6} (|x|^2 + |v|^2) f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq C.$$

Tomando $\delta > 0$ y $R > 0$ con $CR^{-2} < \delta$, tenemos que

$$R^2 \int_{\mathbb{R}^6/B_R} f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq \int_{\mathbb{R}^6/B_R} (|x|^2 + |v|^2) f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq C < \delta R^2.$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^6/B_R} f_\lambda(t, x, v) d(x, v) < \delta$$

para cada $\delta > 0$. Concluimos que \mathcal{F} es débil- \star relativamente compacto en el espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$. \square

Como f_λ es positiva, tenemos que cualquier valor de adherencia del conjunto \mathcal{F} en la topología débil- \star es una medida positiva. Probemos la equicontinuidad en la topología débil- \star de la sucesión f_λ necesaria para aplicar el teorema de Ascoli-Arzelà.

Lema 4.8. Consideremos $\Phi \in C_o^2(\mathbb{R}^6)$. El conjunto de funciones

$$t \longrightarrow \Psi_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^6} f_\lambda(t, x, v) \Phi(x, v) d(x, v)$$

es equicontinuo en $[0, T]$. El mismo resultado se verifica para $\Phi \in C_o(\mathbb{R}^6)$.

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 2.7 del capítulo segundo. Sea $R > 0$ tal que soporte(Φ) $\subset B_R$. Como $\Phi \in C_o^2(\mathbb{R}^{2N})$ y f_λ es solución débil del problema (4.9) deducimos que

$$\begin{aligned} |\Psi_\lambda(t) - \Psi_\lambda(s)| &\leq C(R + \sigma) \|f_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} |t - s| \\ &+ \lambda^{-5} \|\nabla_v \Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \int_s^t \int_{B_R} |E_\lambda(\tau, x)| f_\lambda(\tau, x, v) d(x, v) d\tau, \end{aligned}$$

donde C depende solamente de la norma $L^\infty(\mathbb{R}^6)$ de Φ y de sus derivadas. El Lema 4.1 i) implica que

$$\|f_\lambda(t, x, v)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}.$$

Para estimar el segundo miembro utilizamos la Proposición 4.1 para asegurar que

$$\int_s^t \int_{B_R} |E_\lambda(\tau, x)| f_\lambda(\tau, x, v) d(x, v) d\tau \leq$$

$$CR \|t^{\frac{1}{2}} E_\lambda(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \|f_\lambda(t, x, v)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

Procediendo de manera análoga al Lema 4.6 tenemos que

$$\int_s^t \int_{B_R} |E_\lambda(\tau, x)| f_\lambda(\tau, x, v) d(x, v) d\tau \leq$$

$$CR \lambda^5 \|t^{\frac{1}{2}} E\|_{L^\infty(0, \infty, L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)} \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} |t - s|^{\frac{1}{2}},$$

donde hemos usado el Lema 4.1 *ii*). Por tanto,

$$|\Psi_\lambda(t) - \Psi_\lambda(s)| \leq C(R + \sigma) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} |t - s| +$$

$$\|\nabla_v \Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} CR \|t^{\frac{1}{2}} E\|_{L^\infty(0, \infty, L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)} \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} |t - s|^{\frac{1}{2}},$$

y, como consecuencia, el conjunto es equicontinuo. La última parte de la demostración se sigue de un argumento de aproximación similar al realizado en el Lema 2.7 del capítulo segundo. \square

Los resultados anteriores nos permiten aplicar el Teorema generalizado de Ascoli-Arzelà para tomar de cada sucesión $\{\lambda_n\}$ una subsucesión, que denotaremos con el mismo índice, tal que

$$f_{\lambda_n} \rightarrow g \quad \text{en } C_{w^*}([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^6)) \text{ cuando } \lambda_n \rightarrow \infty.$$

Identifiquemos el límite g . El próximo resultado nos demostrará que la sucesión $\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq 1\}$ tiene un único valor de adherencia cuando λ tiende a ∞ .

Lema 4.9. *El límite de la sucesión $\{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq 1\}$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ es $M\bar{G}$ donde M es la masa total del sistema, es decir, la norma L^1 de f_o .*

Demostración. Consideremos cualquier sucesión $\{\lambda_n\} \rightarrow \infty$ tal que $f_{\lambda_n} \rightarrow g$. El Lema 4.2 implica que f_{λ_n} satisface la ecuación

$$\int_{Q_T} (f_{\lambda_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f_{\lambda_n} (v \cdot \nabla_x) \varphi + \lambda_n^{-5} f_{\lambda_n} (E_{\lambda_n} \cdot \nabla_v) \varphi + f_{\lambda_n} \sigma \Delta_v \varphi) d(t, x, v) +$$

$$\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(0, x, v) f_{o\lambda_n}(x, v) d(x, v) = 0,$$

donde $Q_T = [0, T[\times \mathbb{R}^6$, para cada $\varphi \in C_o^\infty(Q_T)$. Consideremos $\varphi \in C_o^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^6)$, entonces

$$\int_{Q_T} (f_{\lambda_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f_{\lambda_n} (v \cdot \nabla_x) \varphi + \lambda_n^{-5} f_{\lambda_n} (E_{\lambda_n} \cdot \nabla_v) \varphi + f_{\lambda_n} \sigma \Delta_v \varphi) d(t, x, v) = 0.$$

Como f_{λ_n} converge hacia g en $C_{w\star}([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^6))$ se tiene que

$$\int_{Q_T} (f_{\lambda_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f_{\lambda_n} (v \cdot \nabla_x) \varphi + f_{\lambda_n} \sigma \Delta_v \varphi) d(t, x, v)$$

tiende hacia

$$\int_{Q_T} (g \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g (v \cdot \nabla_x) \varphi + g \sigma \Delta_v \varphi) d(t, x, v),$$

cuando $\lambda_n \rightarrow \infty$. Por otra parte, el Corolario 4.1 o la Observación 4.1 implica que

$$\int_{Q_T} \lambda_n^{-5} f_{\lambda_n} (E_{\lambda_n} \cdot \nabla_v) \varphi d(t, x, v) \leq M'(f, E, \epsilon) \lambda_n^{-5 + \frac{9}{p}},$$

para algún $\epsilon > 0$ con λ_n suficientemente grande, donde hemos usado que $\varphi \in C_o^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^6)$. En consecuencia, como $\frac{9}{5} < p < \frac{9}{4}$ deducimos que

$$\int_{Q_T} \lambda_n^{-5} f_{\lambda_n} (E_{\lambda_n} \cdot \nabla_v) \varphi d(t, x, v)$$

tiende a cero cuando n tiende hacia infinito. Por tanto, g satisface

$$\int_{Q_T} (g \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g (v \cdot \nabla_x) \varphi + g \sigma \Delta_v \varphi) d(t, x, v) = 0,$$

para cada $\varphi \in C_o^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^6)$. Como consecuencia, hemos obtenido que g es una solución distribucional de la ecuación

$$\frac{\partial g}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) g - \sigma \Delta_v g = 0, \quad \text{on } (0, T) \times \mathbb{R}^6. \quad (4.18)$$

Como f_{λ_n} converge a g en $C_{w\star}([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^6))$, entonces $f_{o\lambda_n}$ converge a $g(0, \cdot)$ en la topología débil- \star de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$. Teniendo en cuenta que

$$f_{o\lambda}(x, v) = \lambda^{12} f_o(\lambda^3 x, \lambda v),$$

es fácil ver que $f_{o\lambda_n}$ converge a $M\delta_o$ en la topología débil- \star de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^6)$, donde δ_o es la distribución Delta de Dirac en cero. Por tanto, g es solución distribucional

de (4.18) con $g \in C_{w^*}([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^6))$ y con dato inicial $g(0, \cdot) = M\delta_o$. Por otro lado, la teoría clásica de distribuciones (ver apéndice, Proposición A.1) implica que la ecuación lineal (4.18) tiene una única solución en el sentido distribucional $g \in C([0, \infty), S'(\mathbb{R}^6))$ donde $S'(\mathbb{R}^6)$ es el espacio de las distribuciones temperadas. Por tanto, $g(t, x, v)$ debe ser $M\bar{G}(t, x, v)$ porque $\bar{G}(t, x, v)$ es la solución fundamental del operador lineal en cero. \square

Como conclusión, podemos resumir el resultado hasta ahora obtenido.

Teorema 4.2. *Sea f una solución débil del sistema (1.5)-(1.6) con dato inicial f_o que satisface las hipótesis del Teorema (4.1) salvo la acotación de la entropía inicial. Entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^6} [f(t, x, v) - M\bar{G}(t, x, v)] \Phi(t^{-\frac{3}{2}}x, t^{-\frac{1}{2}}v) d(x, v) = 0,$$

para cada $\Phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^6)$.

Demostración. El lema anterior asegura que el límite débil- \star en medidas de la familia

$$\{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq 1\}$$

cuando λ tiende a ∞ , es $M\bar{G}(t, x, v)$. Sea $t = 1$, entonces el límite de

$$\int_{\mathbb{R}^6} [f_\lambda(1, x, v) - M\bar{G}(1, x, v)] \Phi(x, v) d(x, v)$$

es cero cuando λ tiende a ∞ . Usando la definición de f_λ en (4.6) y tomando $\lambda = t^{\frac{1}{2}}$ deducimos que el límite de

$$\int_{\mathbb{R}^6} [t^6 f(t, t^{\frac{3}{2}}x, t^{\frac{1}{2}}v) - M\bar{G}(1, x, v)] \Phi(x, v) d(x, v)$$

es cero cuando t tiende a ∞ . La autosemejanza de \bar{G} (4.6) implica que

$$t^6 \bar{G}(t, t^{\frac{3}{2}}x, t^{\frac{1}{2}}v) = \bar{G}(1, x, v).$$

Por tanto, el límite de

$$\int_{\mathbb{R}^6} [t^6 f(t, t^{\frac{3}{2}}x, t^{\frac{1}{2}}v) - Mt^6 \bar{G}(t, t^{\frac{3}{2}}x, t^{\frac{1}{2}}v)] \Phi(x, v) d(x, v)$$

es cero cuando t tiende a ∞ . Realizando el cambio de variables $x' = t^{\frac{3}{2}}x$ y $v' = t^{\frac{1}{2}}v$, el resultado queda probado. \square

4.5 Compacidad en L^1 .

En esta sección, obtenemos la compacidad en L^1 bajo las suposición de que la solución tenga entropía inicial acotada y que $f \log f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$. Para ello, usaremos el resultado acerca de la conservación de la entropía debido a F. Bouchut y J. Dolbeault [14] y recordado en el Lema 3.6 del capítulo tercero.

Usaremos las ideas de los Lemas 4.6 y Corolario 4.1 para deducir cotas sobre la entropía de los sistemas reescalados.

Lema 4.10. *Para cada $0 < \epsilon < T$ se verifican las siguientes propiedades:*

i) $\sqrt{f_\lambda} \in C([\epsilon, T], L^2(\mathbb{R}^6))$ y $\nabla_v \sqrt{f_\lambda} \in L^2([\epsilon, T] \times \mathbb{R}^6)$ con

$$\nabla_v f_\lambda = 2\sqrt{f_\lambda} \nabla_v \sqrt{f_\lambda}$$

y

$$\|f_\lambda(t, \cdot) \log f_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq (\|f_o \log f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + 12 \log(\lambda) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}) + C$$

para cada $t \geq 0$, donde C no depende de λ .

ii) Denotemos por $h_\lambda(t, x, v) = \lambda^{-5}(E_\lambda \cdot \nabla_v) f_\lambda$, entonces para λ suficientemente grande, se tiene

$$\|h_\lambda\|_{L^2([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))} \leq C,$$

donde C es una constante independiente de λ . De hecho, h_λ tiende a cero cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

Demostración. Como $E_\lambda(t, x) \in L^\infty([\epsilon, T], L^\infty(\mathbb{R}^3)^3)$ por la hipótesis (4.3), entonces la primera parte del primer apartado del lema es consecuencia directa del Lema 3.6. Además,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^6} f_\lambda \log f_\lambda d(x, v) = -4\sigma \int_{\mathbb{R}^6} |\nabla_v \sqrt{f_\lambda}|^2 d(x, v) \leq 0, \quad (4.19)$$

para cada $0 < \epsilon \leq t \leq T$. Teniendo en cuenta que $f \log f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^6} f_\lambda(t, x, v) \log f_\lambda(t, x, v) d(x, v) \leq \int_{\mathbb{R}^6} f_{o\lambda}(x, v) \log f_{o\lambda}(x, v) d(x, v).$$

Para acotar la norma L^1 de la entropía $f_\lambda \log f_\lambda$ utilizamos la estimación (13) en [37] que nos asegura que

$$\|f_\lambda(t, \cdot) \log f_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \int_{\mathbb{R}^6} f_\lambda(t, x, v) \log f_\lambda(t, x, v) d(x, v) + \int_{\mathbb{R}^6} (|x|^2 + |v|^2) f_\lambda(t, x, v) d(x, v) + C,$$

donde C es una constante independiente de f , de λ y de T . Debido a la cota uniforme de la energía cinética y momento de inercia en λ (Lema 4.3) tenemos que

$$\|f_\lambda(t, \cdot) \log f_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \|f_{o\lambda} \log f_{o\lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + C,$$

para cada $t \geq 0$, donde C depende de f y T pero no de λ . La definición de $f_{o\lambda}$, implica haciendo el cambio de escala, que

$$\|f_{o\lambda} \log f_{o\lambda}\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq (\|f_o \log f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + 12 \log(\lambda) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}).$$

Finalmente, combinando las anteriores estimaciones resulta

$$\|f_\lambda(t, \cdot) \log f_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq (\|f_o \log f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + 12 \log(\lambda) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}) + C,$$

para cada $t \geq 0$.

Para demostrar la segunda parte del lema utilizamos el Lema 4.6 para deducir que si λ es suficientemente grande

$$\|E_\lambda(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} \leq M(f, E, \epsilon) \lambda^{\frac{9}{p'}},$$

para cada $\frac{9}{5} < p < \frac{9}{4}$ y $\epsilon \leq t \leq T$. La desigualdad de Hölder implica que

$$\|h_\lambda\|_{L^2([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))} \leq \lambda^{-5} \|E_\lambda\|_{L^\infty([\epsilon, T] \times \mathbb{R}^3)} \|\nabla_v f_\lambda\|_{L^2([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))}.$$

La primera parte del lema y de nuevo la desigualdad de Hölder nos aseguran que

$$\|\nabla_v f_\lambda\|_{L^2([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))} \leq C \|\sqrt{f_\lambda}\|_{L^2([\epsilon, T] \times \mathbb{R}^6)} \|\nabla_v \sqrt{f_\lambda}\|_{L^2([\epsilon, T] \times \mathbb{R}^6)}.$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (4.19) y las anteriores estimaciones concluimos que

$$\|h_\lambda\|_{L^2([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))} \leq C \lambda^{-5 + \frac{9}{p'}} \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} 2(\|f_o \log f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + 12 \log(\lambda) \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}) +$$

$$2C\lambda^{-5+\frac{9}{p}}\|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}.$$

Como $\frac{9}{5} < p < \frac{9}{4}$ el resultado está demostrado. \square

Para obtener la compacidad en L^1 de la sucesión f_λ utilizaremos el resultado de compacidad debido a F. Bouchut y J. Dolbeaut para la ecuación lineal de Vlasov-Fokker-Planck [14]. Un resultado similar fue usado por R. DiPerna y P. L. Lions en el estudio de la ecuación de Fokker-Planck-Boltzmann [37]. Este resultado puede verse en el apéndice, Teorema A.4. Aplicamos este resultado al conjunto $\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq \lambda_o\}$ con λ_o suficientemente grande para demostrar el Teorema 4.1.

Demostración del Teorema 4.1. Combinando el Lema 4.10 y el Lema 3.6 todas las hipótesis del criterio de compacidad, Teorema A.4, se satisfacen siendo

$$F = \{f_\lambda(\epsilon, \cdot), \lambda \geq \lambda_o(\epsilon)\},$$

con ϵ fijo, $0 < \epsilon < T$, y

$$H = \{h_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq \lambda_o(\epsilon)\}.$$

El Teorema A.4 implica que

$$\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq \lambda_o(\epsilon)\}$$

es compacto en $C([\eta, T], L^1(\omega))$, para cada $0 < \epsilon < \eta < T$, siendo ω cualquier subconjunto acotado de \mathbb{R}^6 . Como consecuencia,

$$\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq \lambda_o(\epsilon)\}$$

es compacto en $C([\epsilon, T], L^1(\omega))$, para cada $0 < \epsilon < T$. Como

$$\int_{\mathbb{R}^6} (|x|^2 + |v|^2) f_\lambda(t, x, v) d(x, v) < K,$$

para cada $t \in [0, T]$, dependiendo K solamente de f_o y de T , se deduce que

$$\mathcal{F} = \{f_\lambda(t, \cdot), \lambda \geq \lambda_o(\epsilon)\}$$

es compacto en $C([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))$ para cada $0 < \epsilon < T$.

Los mismos argumentos del Lema 4.9, nos aseguran que el único valor de adherencia posible de la familia f_λ , cuando $\lambda \rightarrow \infty$, en $C([\epsilon, T], L^1(\mathbb{R}^6))$ es $M\bar{G}$. De nuevo, las mismas ideas del Teorema 4.2 nos permiten concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, \cdot) - M\bar{G}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = 0,$$

y el resultado principal de este capítulo queda demostrado. \square

4.6 Generalización al problema N -dimensional.

El análisis realizado en este capítulo y en el anterior puede llevarse a cabo para el sistema de VPFP con $N \geq 2$ con hipótesis similares adaptadas a la dimensión. Concretamente tenemos el siguiente resultado:

Sea (E, f) una solución integral de sistema (1.5)-(1.6) con $\beta = 0$ en \mathbb{R}^{2N} tal que

$$f \in C_w([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N})) \cap BC((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N})), \quad (\text{H-1})_N$$

$$t^{\frac{1}{2}}E \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N)^N) \quad (\text{H-2})_N$$

y

$$\max\{S_{\frac{3N}{4}}(t), 0 \leq t < \infty\} < \infty, \quad (\text{H-3})_N$$

supongamos que el dato inicial satisface las hipótesis del Teorema 4.1, $f \log f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^6))$ y que la energía cinética $KE(f, t)$ es tal que

$$KE(f, t) \leq A + Bt, \quad \text{para cada } t \geq 0. \quad (4.20)$$

Entonces, la conclusión del Teorema 4.1 es cierta.

La condición (4.20) se satisface para cualquier dimensión en el caso electrostático como vimos en la última sección del capítulo tercero. En el caso gravitacional debemos realizar convenientes hipótesis sobre f_0 para asegurar que (4.20) se

verifica. Para ello, basta recordar los resultados de los Lemas 3.5 y 2.4 en los que si $f_o \in L^{9/7}(\mathbb{R}^6)$ se verifica la condición (4.20) para $N = 3$. En $N = 4$ la correspondiente condición es que: la norma de f_o en $L^2(\mathbb{R}^8)$ sea suficientemente pequeña. Finalmente, señalemos que la hipótesis $(H-2)_N$ implica que $E(t, \cdot)$ decae en tiempo del orden de t elevado a $-\frac{1}{2} + \frac{N}{2(N-1)p}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)^N$ con $\frac{N}{N-1} < p \leq \infty$. Por tanto, se tiene que la energía potencial decae del orden de t elevado a $-\frac{1}{2} + \frac{N}{4(N-1)}$, esta hipótesis basta para tener la condición de energía al menos para intervalos del tipo $[\epsilon, T]$.

En cuanto a los detalles de la demostración señalar que el sistema reescalado para dimensión N viene dado por la expresión

$$f_\lambda(t, x, v) = \lambda^{4N} f(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v),$$

que concuerda de nuevo con la invarianza de la función

$$\bar{G}(t, x, v) = \lambda^{4N} \bar{G}(\lambda^2 t, \lambda^3 x, \lambda v).$$

Por tanto, se prueba que el término no lineal en la Ecuación 4.9 está multiplicado por el factor λ^{4-3N} que tiende a cero para $N \geq 2$. La fuerza de interacción Ef decae en norma L^1 como $O(t^{-3(N-1)/2})$, que concuerda con lo obtenido en el caso $N = 3$, es decir, t^{-3} .

Capítulo 5

El sistema de VPFP en dominios acotados: Comportamiento asintótico.

5.1 Introducción.

En este último capítulo analizaremos el comportamiento asintótico del sistema de VPFP en dominios acotados. Primeramente, recordemos el sistema de VPFP en dominios acotados. Al igual que en el caso general, que hasta ahora nos ocupaba, el sistema de VPFP en dominios acotados consta de la ecuación de VFP para determinar la distribución de partículas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f + \operatorname{div}_v((E - \beta v) f) - \sigma \Delta_v f = 0, \quad (5.1)$$

en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$, $T > 0$, donde Ω es un dominio acotado regular, por ejemplo $\Omega \in C^2$. Las constantes $\beta \geq 0$ y $\sigma > 0$ son constantes físicas relacionadas con la fricción y difusión de las partículas, las cuales deben satisfacer la ley de Einstein $\frac{\sigma}{\beta} = \frac{\kappa \Lambda}{m}$, donde κ es la constante de Boltzmann, Λ la temperatura media del entorno y m la masa de las moléculas. Esta ley es necesaria si queremos que el equilibrio térmico sea solución de la ecuación de VFP.

El campo creado por la interacción de las propias partículas lo calculamos utilizando la ecuación de Poisson:

$$E(t, x) = -\nabla_x \Phi(t, x), \quad -\Delta_x \Phi(t, x) = \theta \rho(f)(t, x), \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \quad (5.2)$$

donde $\Phi(t, x)$ es el potencial interno del sistema. No consideraremos la acción de un potencial externo sobre nuestro sistema aunque los argumentos y resultados son totalmente aplicables en tal caso.

Pretendemos probar que la distribución de partículas $f(t, \cdot)$ tiende a un estado estacionario del sistema de VPFP cuando $t \rightarrow \infty$ en el correspondiente marco

funcional que posteriormente explicitaremos. La demostración se basa en obtener leyes de conservación de la masa y de producción de energía y entropía de la solución y en utilizar el funcional de energía libre como funcional de Liapunov del sistema. Antes de escribir de manera rigurosa el resultado veamos la idea formal de la demostración.

Se conoce que la divergencia de entropía o entropía relativa de un sistema es el funcional de Liapunov apropiado para demostrar la convergencia hacia estados estacionarios de la ecuación de VFP lineal (ver [65, 76]). Como el sistema de VFPF es no lineal no podemos en principio utilizar el mismo funcional de Liapunov. Ejemplos de ecuaciones de Fokker-Planck no lineales con funcionales de Liapunov conocidos pueden encontrarse en el campo de modelos de sincronización de osciladores acoplados (ver [4, 5, 78, 79]). Derivaremos un funcional de Liapunov para el sistema de VFPF usando el mismo tipo de ideas que en estos modelos y que se puede resumir en los siguientes pasos:

- i) Definir una entropía relativa con respecto a una distribución no normalizada

$$\eta(t) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log \left(\frac{f}{\tilde{f}} \right) d(x, v), \quad (5.3)$$

donde \tilde{f} satisface la ecuación

$$(v \cdot \nabla_x) \tilde{f} + \operatorname{div}_v((E - \beta v) \tilde{f}) - \sigma \Delta_v \tilde{f} = 0,$$

$E = -\nabla \Phi(t, x)$ viene determinado por la Ecuación (5.2) y la distribución \tilde{f} se define como

$$\tilde{f}(t, x, v) = \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi(t, x) - \frac{1}{M} \mu(t) \right) \right\}, \quad (5.4)$$

donde $\exp\{u\} = e^u$ denota la función exponencial y M es la masa total del sistema.

- ii) Encontrar $\mu(t)$ introducido en (5.4) tal que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{\partial \log \tilde{f}}{\partial t} d(x, v) = 0,$$

para, de esa forma, eliminar uno de los términos que aparecen en la derivada del funcional $\eta(t)$.

- iii) Demostrar que $\eta'(t) \leq 0$.
- iv) Probar que $\eta(t)$ está acotado inferiormente.

Ilustremos el procedimiento derivando de modo formal el funcional de Liapunov del sistema. En estos cálculos no consideraremos los términos de frontera que posteriormente en la sección cuarta serán rigurosamente tratados. Derivando el funcional (5.3) encontramos que

$$\eta'(t) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t} \log\left(\frac{f}{\tilde{f}}\right) d(x, v) + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t} d(x, v) - \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{\partial \log(\tilde{f})}{\partial t} d(x, v).$$

Los dos últimos términos se anulan debido a la conservación de la masa en el sistema y a la definición de $\eta(t)$. La ecuación de VFP la podemos escribir como

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sigma \operatorname{div}_v \{ \nabla_v f - f \nabla_v \log(\tilde{f}) - \frac{f}{\beta} \nabla_x \log(\tilde{f}) \} + \frac{\sigma}{\beta} \nabla_v \log(\tilde{f}) \cdot \nabla_x f,$$

y, por tanto, aplicando el teorema de la divergencia obtenemos que

$$\eta'(t) = -\sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f |\nabla_v \log(\frac{f}{\tilde{f}})|^2 d(x, v) \leq 0.$$

Para obtener $\mu(t)$ y, por tanto, el funcional de energía libre $\eta(t)$, escribimos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma}{\beta} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{\partial \log(\tilde{f})}{\partial t} d(x, v) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left\{ f \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{f}{M} \mu' \right\} d(x, v) \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \frac{\partial \Phi}{\partial t} d(x, v) - \mu' \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \Phi d(x, v) - \mu \right\} - \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \Phi \frac{\partial f}{\partial t} d(x, v). \end{aligned}$$

El último término es igual a

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \Phi (v \cdot \nabla_x) f d(x, v) = \int_{\Omega} \Phi \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^3} v f dv \right) dx$$

más términos de frontera que no consideramos en este desarrollo formal. Usando la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} f dv + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^3} v f dv \right) = 0,$$

y la ecuación de Poisson, deducimos que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \Phi \frac{\partial f}{\partial t} d(x, v) &= - \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial \rho(f)}{\partial t} dx \\ &= \theta \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial \Delta_x \Phi}{\partial t} dx = - \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\nabla_x \Phi(t, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido que

$$\mu(t) = \int_{\Omega} \{ \Phi(t, x) \rho(f)(t, x) - \frac{\theta}{2} |\nabla_x \Phi(t, x)|^2 \} dx = \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} |\nabla_x \Phi(t, x)|^2 dx, \quad (5.5)$$

donde de nuevo hemos tenido en cuenta la ecuación de Poisson y aplicado el teorema de la divergencia.

Suponiendo que $\eta(t)$ sea un funcional de Liapunov del sistema, f tenderá a una función $f_{\infty}(t, x, v)$ tal que

$$\eta'(t) = -\sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_{\infty}(t, x, v) |\nabla_v \log(\frac{f_{\infty}}{\tilde{f}}(t, x, v))|^2 d(x, v) = 0.$$

Esta ecuación implica que f_{∞}/\tilde{f} no puede depender de v . Por tanto,

$$f_{\infty}(t, x, v) = \exp\left\{-\frac{\beta|v|^2}{2\sigma}\right\} g_{\infty}(t, x).$$

Insertando esta expresión de f_{∞} en el sistema de VPFP, deducimos que

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{\infty} = -v \cdot \left\{ \nabla_x g_{\infty} + \frac{\beta}{\sigma} g_{\infty} \nabla_x \Phi_{\infty} \right\},$$

donde Φ_{∞} es la solución de la ecuación de Poisson (5.2) asociado a $\rho(f_{\infty})$. Como $g_{\infty}(t, x)$ no depende de v , deberíamos tener que

$$\nabla_x g_{\infty} + \frac{\beta}{\sigma} g_{\infty} \nabla_x \Phi_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{\infty} = 0,$$

y por tanto,

$$g_{\infty} = C_{\infty} \exp\left\{-\frac{\beta\Phi_{\infty}}{\sigma}\right\},$$

siendo C_{∞} una constante de normalización de la distribución f . Por consiguiente, f_{∞} es una solución estacionaria límite del sistema de VPFP.

Este capítulo está dedicado a expresar y resolver las anteriores consideraciones de manera rigurosa. Primeramente, analizaremos las condiciones de contorno que consideraremos para la distribución f y el potencial Φ .

Las Ecuaciones (5.1) y (5.2) se consideran con condiciones iniciales para f dadas por f_0 , con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas para el potencial ($\partial\Omega$ es un conductor perfecto en el caso electrostático),

$$\Phi(t, x) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (5.6)$$

y con condiciones de contorno para f dadas mediante un núcleo general de scattering.

En cuanto a las condiciones de contorno para el potencial debemos destacar que el resultado también es cierto para condiciones de tipo Neumann y de tipo mixto como veremos en las notas finales.

De entre los núcleos de scattering para definir las condiciones de contorno para f elegiremos aquellos que conserven la masa del sistema y nos permitan relacionar la energía y la entropía del sistema. Las condiciones de contorno para ecuaciones cinéticas son relaciones integrales entre la densidad de partículas que provienen de una sección infinitesimal de la frontera en un instante determinado y la densidad de partículas que chocan sobre la misma sección de la frontera. Más exactamente, definimos los conjuntos

$$\Gamma_{\pm}^x = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \text{signo}(v \cdot n(x)) = \pm 1 \right\}$$

para $x \in \partial\Omega$, y

$$\Gamma_{\pm} = \left\{ (x, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \text{signo}(v \cdot n(x)) = \pm 1 \right\},$$

donde $n(x)$ es el normal exterior unitario a la frontera del dominio Ω en $x \in \partial\Omega$. Denotemos por $\gamma_{\pm}f$ y γf las trazas de f sobre $\Sigma_{\pm} = [0, \infty) \times \Gamma_{\pm}$ y $\Sigma = [0, \infty) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^3$, respectivamente. En la sección dos estudiaremos cuando tienen sentido estas trazas. Introduzcamos los conjuntos $Q_T = [0, T[\times \Omega \times \mathbb{R}^3$, $\Sigma_{\pm}^T = [0, T] \times \Gamma_{\pm}$ y $\Sigma^T = [0, T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^3$. Dado $x \in \partial\Omega$ y $t > 0$ supondremos que

$$\gamma_- f(t, x, v) = \int_{\Gamma_+^x} R(t, x; v, v^*) \gamma_+ f(t, x, v^*) dv^*, \quad (5.7)$$

para cada $v \in \Gamma_-^x$. R representa la probabilidad de que una partícula con velocidad v^* que en el instante t choca con la frontera en x se refleje en el mismo instante

con velocidad v . La reflexión especular es un caso particular de las condiciones de contorno (5.7). En la sección segunda analizaremos las propiedades fundamentales de estas condiciones de contorno.

Denotaremos por $L^p(\Sigma_{\pm}^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$ al conjunto de todas las funciones f en Σ_{\pm}^T tales que $|f|^p$ es integrable con respecto a la medida cinética usual $|v \cdot n(x)| dS dv dt$, donde dS es la medida de Lebesgue sobre $\partial\Omega$. Consideraremos el espacio de funciones

$$W^1(Q_T) = \{f \in L^1(Q_T) \text{ tales que } \frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f \in L^1(Q_T)\}.$$

En la sección dos demostraremos que las funciones de $W^1(Q_T)$ tienen traza en la frontera de Ω en el espacio $L^1(\Sigma_{\pm}^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$. El concepto de solución débil que utilizaremos en este capítulo se concreta en la siguiente definición. Denotaremos por $W_o^{1,p}(\Omega)$ el espacio de Sobolev con exponente p y valor nulo en la frontera de Ω y $H_o^1(\Omega) = W_o^{1,2}(\Omega)$.

Definición 5.1. Dado $f_o \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ diremos que f es una solución débil del sistema de VPFP (5.1)-(5.2) con dato inicial f_o si

$$f \in C([0, \infty), L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)) \cap W^1(Q_T), \quad \gamma_{\pm} f \in L^1(\Sigma_{\pm}^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt),$$

para cada $T > 0$, la condición de contorno (5.7) se verifica, para cada $\Psi \in C_o^{\infty}(Q_T)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi - \beta (v \cdot \nabla_v) \Psi + (E \cdot \nabla_v) \Psi + \sigma \Delta_v \Psi \right) d(t, x, v) \quad (5.8) \\ + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_o \Psi(0, x, v) d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f \Psi dS dv dt \end{aligned}$$

y $E = -\nabla_x \Phi$, donde $\Phi \in L^{\infty}([0, T[, H_o^1(\Omega))$ es una solución débil de la ecuación de Poisson (5.2).

Como ya hemos comentado, el objetivo de este capítulo es el de estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones débiles del sistema (5.1)-(5.2) con condiciones de contorno (5.6) y (5.7). Nuestras hipótesis sobre las soluciones débiles son las siguientes:

Una solución débil (E, f) de las ecuaciones (5.1), (5.2), (5.6) y (5.7) con dato inicial f_o verificará

1. $f \in C([0, \infty), L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3))$.
2. $|v|^2 f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, para cada $T > 0$.
3. $|v|^2 \gamma f, \gamma f^2 \in C([0, \infty), L^1(\Gamma_\pm; |v \cdot n(x)| dS dv))$.
4. $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \in C([0, T[, H^1_0(\Omega))$ y $E \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$, para cada $T > 0$.
5. $\nabla_v f \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$, para cada $T > 0$.
6. En el caso gravitacional, supondremos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx < \infty.$$

Para simplificar la notación denotaremos en lo que sigue por (P) al problema (5.1), (5.2), (5.6) y (5.7). Cuando tratemos de soluciones del problema (P), supondremos siempre que se verifican las hipótesis 1-6. Estas propiedades desde un punto de vista físico son razonables, aunque matemáticamente encontrar las condiciones sobre el dato inicial que permitan demostrar la existencia de solución que verifique todas las propiedades es un problema abierto. Un primer paso en esta dirección puede verse en [18] donde se prueba la existencia de solución del problema (P) verificando las condiciones 1,2,4 y 5 salvo la acotación del campo E y la regularidad de las trazas $f \in W^1(Q_T)$.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 5.1. *Bajo las hipótesis 1-6 sobre la solución débil f , para cada sucesión $\{t_n\} \rightarrow \infty$ existe una subsucesión (que denotaremos con el mismo índice) tal que*

$$f(t_n, x, v) \rightarrow f_\infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

en $L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ con

$$f_\infty(x, v) = \left(\frac{2\pi\sigma}{\beta} \right)^{-\frac{3}{2}} \lambda \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi_\infty(x) \right) \right\},$$

donde $\Phi_\infty(x)$ es una solución débil de

$$-\Delta \Phi_\infty = \theta \lambda \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \Phi_\infty \right\} \quad (5.9)$$

en $H^1_0(\Omega)$, y

$$\lambda = \|f_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} \left(\int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \Phi_\infty(x) \right\} dx \right)^{-1}.$$

Además, en el caso electrostático, la solución del problema de Dirichlet para (5.9) en $H^1_0(\Omega)$ es única y, por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, \cdot) - f_\infty\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} = 0.$$

Como consecuencia, el comportamiento asintótico de la distribución de partículas en el espacio de fase está determinada estudiando los potenciales límite que son soluciones débiles de la ecuación

$$-\Delta u + \theta \alpha \left(\int_{\Omega} e^u dx \right)^{-1} e^u = 0, \quad (5.10)$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (5.11)$$

con $\alpha > 0$. En las notas finales analizaremos el problema estacionario. La Ecuación (5.10) es conocida como la ecuación de Poisson-Boltzmann (PB). En el caso electrostático fue estudiada por K. Dressler [41] y J. Dolbeault [40] en $\Omega = \mathbb{R}^3$ y en presencia de un potencial externo. En dominios acotados D. Gogny y P.L. Lions [49] demostraron la existencia de una única solución regular del problema (5.10)-(5.11) en el caso electrostático en $H^1_0(\Omega)$. Algunos aspectos del caso gravitacional fueron analizados por A. Krzywicki y T. Nadzieja en [60, 61]. Al final del capítulo estudiaremos más profundamente los aspectos de existencia de los estados estacionarios.

Destacaremos que la hipótesis sexta sobre la solución del sistema de VPPF puede ser sustituida por la siguiente

6'. *El potencial $\Phi(t, x)$ pertenece a $L^\infty(0, \infty; W^{1,3}_0(\Omega))$*

que implica 6, pero además asegura que la ecuación de PB está bien definida en L^1 debido a la desigualdad de Moser-Trudinger (ver sección 5.4).

Comentemos brevemente algunas de las técnicas e ideas de la demostración del Teorema 5.1. Un primer paso en la demostración del resultado consiste en derivar las ecuaciones que verifican las cantidades físicas relevantes del sistema: balance de masa, energía y entropía. Estas identidades nos permite comprender los efectos de las condiciones de contorno en los flujos de partículas, energía y entropía a través de la frontera del dominio. Se probarán de manera rigurosa las siguientes relaciones.

- Balance de masa:

$$\frac{d}{dt} \|f(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} = - \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f(t, x, v) dv dS.$$

- Balance de energía:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) + \theta \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx \right) \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) |v|^2 f dS dv - \beta \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) + 3\sigma M, \end{aligned}$$

- Balance de entropía:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log f d(x, v) = 3\beta M \\ & - \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) f(t, x, v) \log f dS dv - 4\sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left| \nabla_v \sqrt{f} \right|^2 d(x, v). \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores juegan un importante papel para demostrar que el funcional $\eta(t)$ es decreciente. Posteriormente, para tomar el límite cuando $t \rightarrow \infty$, necesitamos propiedades de compacidad de la sucesión $\{f_n(t, x, v) = f(t+t_n, x, v)\}$. Como paso intermedio probaremos la compacidad de $\sqrt{f_n}$ en $L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$. Este hecho implicará la compacidad de $\{f_n\}$ en $C([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. Finalmente, la identificación de la distribución límite concluye la demostración del Teorema 5.1.

El capítulo se estructura como sigue. En la sección segunda estableceremos las hipótesis necesarias sobre las condiciones de contorno y estudiaremos la existencia de trazas de las funciones $W^p(Q_T)$. La sección tercera se dedica a probar las identidades del balance de masa, energía y entropía. En la sección cuarta demostramos que la energía libre es un funcional de Liapunov y finalmente, en la última sección probaremos el resultado fundamental de este trabajo usando un resultado de compacidad en L^1 (Teorema A.4).

5.2 Condiciones de contorno y operadores de traza.

Para introducir las condiciones de contorno de f , debemos analizar la existencia de trazas de f en la frontera de \bar{Q}_T , adherencia de Q_T . El problema

de determinar las trazas de este tipo de ecuaciones fue primeramente estudiado por S. Ukai [84] en el contexto de la ecuación de Boltzmann. Posteriormente, M. Cessenat [30] lo realizó en la ecuación de transferencia de neutrones. Compendios de estos resultados pueden consultarse en [29, 37].

Revisemos los conceptos fundamentales de esta teoría, cuyas demostraciones y detalles más precisos pueden consultarse en [29]. Sea \mathcal{T} el operador de transporte libre definido por

$$\mathcal{T}f = \frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)f.$$

Asociado a cada punto $r = (t, x, v)$ de la frontera de Q_T , consideramos $R^s(r)$ la característica del operador de transporte libre que comienza en r , es decir,

$$R^s(r) = R^s(t, x, v) = (t + s, x + sv, v), \text{ con } t_-(r) \leq s \leq t_+(r),$$

donde $t_{\pm}(r)$ representan los instantes de entrada y salida de la característica de Q_T : $t_+(r)$ es el ínfimo de los instantes con respecto a $s > 0$ en los que $R^s(r)$ pertenece a la frontera de Q_T . Análogamente, $t_-(r)$ es el supremo de los instantes con respecto a $s < 0$ en los que $R^s(r)$ pertenece a la frontera de Q_T . Más concretamente, están definidos por

$$t_-(r) = \max \{-t, \inf\{s \leq 0 \text{ tales que } x + \tau v \in \Omega \text{ para todo } \tau \in [s, 0]\}\}$$

y

$$t_+(r) = \min \{T - t, \sup\{s \geq 0 \text{ tales que } x + \tau v \in \Omega \text{ para cada } \tau \in [0, s]\}\}.$$

El resultado de trazas se verifica entre el espacio

$$W^p(Q_T) = \{f \in L^p(Q_T) \text{ tales que } \mathcal{T}f \in L^p(Q_T)\}$$

y el espacio $L^p(\Sigma_{\pm}^T; \tau(x, v)|v \cdot n(x)|dSdvdt)$, donde $\tau(x, v) = \min\{1, t_-(r) + t_+(r)\}$. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si las trazas $\gamma_{\pm}f$, γf para $f \in C_o^1(Q_T)$ están definidas por restricción, entonces el operador de trazas tiene una extensión acotada de $W^p(Q_T)$ a $L^p(\Sigma_{\pm}^T; \tau(x, v)|v \cdot n(x)|dSdvdt)$.*

Concentraremos nuestro interés en el caso $p = 1$. La idea principal de la demostración del teorema anterior es demostrar que f es absolutamente continua en s a través de las características $R^s(r)$ casi por doquier en r . Denotemos por $\hat{f}(s, r) = f(R^s(r))$ y por g la función de $L^1(Q_T)$ tal que $\mathcal{T}f = g$. Entonces, para cada $r \in Q_T$ es posible probar (ver [29]) que

$$\hat{f}(s', r) = \hat{f}(s, r) + \int_s^{s'} \hat{g}(\tau, r) d\tau \quad (5.12)$$

con $t_-(r) \leq s, s' \leq t_+(r)$. Por tanto, la definición de trazas está dada por

$$\gamma_{\pm} f(t, x, v) = \hat{f}(t_{\pm}(r), r)$$

donde $(t, x, v) \in \Sigma_{\pm}^T$ y $r \in Q_T$ se elige de forma que (t, x, v) es su punto de entrada o de salida, es decir, r satisface $R^s(r) = (t, x, v)$ con $s = t_{\pm}(r)$. Finalmente, destaquemos que el espacio $L^1(\Sigma_{\pm}^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$ está incluido en $L^1(\Sigma_{\pm}^T; \tau(x, v) |v \cdot n(x)| dS dv dt)$.

Además, se demuestra la siguiente identidad de integración por partes.

Lema 5.1. *Sea $f \in W^1(Q_T) \cap C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ y supongamos que $\gamma_+ f$ pertenece a $L^1(\Sigma_+^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$. Entonces, $\gamma_- f \in L^1(\Sigma_-^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$ y, para cada $\Psi \in C_0^\infty(Q_T)$, se verifica*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} f \mathcal{T}\Psi d(t, x, v) + \int_{Q_T} \mathcal{T}f \Psi d(t, x, v) \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} [(f\Psi)(T, x, v) - (f\Psi)(0, x, v)] d(x, v) + \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f \Psi dS dv dt. \end{aligned}$$

La demostración de este resultado se hace integrando en (5.12). Finalmente, necesitamos conocer las trazas de funciones no lineales de f en la frontera. El próximo resultado demuestra la existencia de trazas para determinadas funciones no lineales de f .

Lema 5.2. *Sea $f \in W^1(Q_T) \cap C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. Si $\xi \in C^2(\mathbb{R})$ con $\xi'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $\xi(0) = 0$, entonces $\xi(f) \in W^1(Q_T)$. Como consecuencia, tenemos que $\gamma_{\pm} \xi(f) \in L^1(\Sigma_{\pm}^T; \tau(x, v) |v \cdot n(x)| dS dv dt)$ y*

$$\gamma_{\pm} \xi(f) = \xi(\gamma_{\pm} f).$$

Demostración. Consideremos una sucesión regularizante $\delta_n^{t,x} = \delta_n^t \delta_n^x$ que aproxima la unidad de convolución, es decir, la delta de Dirac en el origen. El soporte de δ_n^x es $B(0, \frac{1}{n})$ y $\delta_n^x(x) = \delta_n^x(-x)$. δ_n^t tiene su soporte en el eje real negativo de longitud $\frac{1}{n}$. Denotemos por \bar{f} la extensión por cero de la función f a todo $[0, T] \times \mathbb{R}^6$. Sea $f_n = \delta_n^{t,x} \star \bar{f}$. Para cada n , consideremos el conjunto

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega \text{ tales que } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Como $f \in W^1(Q_T)$ se obtiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f = g$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$, con $g \in L^1(Q_T)$.

Sea $\Psi \in C_o^\infty((\frac{1}{m}, T) \times \Omega_m \times \mathbb{R}^3)$. Si $n \geq m$, tenemos que

$$\int_{Q_T} f_n \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi \right) d(t, x, v) = \int_{Q_T} f \left(\frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \right) (\delta_n^{t,x} \star \Psi) d(t, x, v).$$

Teniendo en cuenta que $\delta_n^{t,x} \star \Psi \in C_o^\infty((0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$, deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f_n \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi \right) d(t, x, v) &= - \int_{Q_T} g (\delta_n^{t,x} \star \Psi) d(t, x, v) \\ &= - \int_{Q_T} g_n \Psi d(t, x, v), \end{aligned}$$

donde $g_n = \delta_n^{t,x} \star g$.

Por tanto, obtenemos que

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f_n = g_n$$

de forma clásica en $(\frac{1}{n}, T) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3$. Multiplicando por $\xi'(f_n)$, encontramos que

$$\frac{\partial \xi(f_n)}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \xi(f_n) = \xi'(f_n) g_n.$$

Por lo tanto, si consideramos $\Psi \in C_o^\infty((0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$, entonces para n suficientemente grande tenemos que $\Psi \in C_o^\infty((\frac{1}{n}, T) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3)$, y

$$\int_{Q_T} \xi(f_n) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi \right) d(t, x, v) = - \int_{Q_T} \xi'(f_n) g_n \Psi d(t, x, v).$$

Las hipótesis sobre f y ξ y el teorema de convergencia dominada implican que $\xi(f_n)$ converge hacia $\xi(f)$ en $L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. Por otra parte, como $\xi'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$|\xi'(f_n)| \leq a + bf_n.$$

Usando que $f \in C([0, T], L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, $\xi'(f_n)\Psi$ está acotada independientemente de n . Como g_n tiende hacia g en $L^1(Q_T)$, podemos concluir que

$$\int_{Q_T} \xi(f) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi \right) d(t, x, v) = - \int_{Q_T} \xi'(f) g \Psi d(t, x, v).$$

Finalmente, tenemos

$$\frac{\partial \xi(f)}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \xi(f) = g \xi'(f),$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$, con $g \xi'(f) \in L^1(Q_T)$. Como consecuencia, $\xi(f) \in W^1(Q_T)$. La última afirmación del lema se deduce fácilmente de la definición de los operadores de traza γ_\pm . \square

Una vez que conocemos como definir las trazas de una distribución de partículas f , podemos estudiar un poco más a fondo las condiciones de contorno que ya fueron introducidas previamente. C. Cercignani, R. Illner y M. Pulvirenti [29] discuten la elección de las condiciones de contorno adecuadas para la ecuación de Boltzmann. Las mismas consideraciones físicas son relevantes en este caso. Para poder definir las condiciones de contorno supondremos que $f \in W^1(Q_T)$ para cada $T > 0$. Dado $x \in \partial\Omega$ y $t > 0$ exigimos que la distribución de partículas satisfaga las condiciones de contorno (5.7) en $\partial\Omega$:

$$\gamma_- f(t, x, v) = \int_{\Gamma_+^x} R(t, x; v, v^*) \gamma_+ f(t, x, v^*) dv^*,$$

para cada $v \in \Gamma_-^x$, donde, como ya comentamos en la introducción, R representa la probabilidad de que una partícula con velocidad v^* , que en el instante t choca con la frontera en x , reaparezca en el mismo instante y posición con velocidad v . Supondremos en todo lo que sigue las siguientes propiedades acerca de R :

- i) R es no negativo.
- ii) R verifica la normalización

$$|v^* \cdot n(x)| = \int_{\Gamma_-^x} R(t, x; v, v^*) |v \cdot n(x)| dv. \quad (5.13)$$

para cada $v^* \in \Gamma_+^x$.

- iii) El principio de reciprocidad integral se verifica, es decir, si denotamos por $M(v)$ la distribución Maxwelliana del entorno (ésta viene determinada por la temperatura de las partículas que rodean el sistema), R satisface

$$M(v) = \int_{\Gamma_+^x} R(t, x; v, v^*) M(v^*) dv^*. \quad (5.14)$$

para cada $v \in \Gamma_-^x$. En el caso de la ecuación de Boltzmann $M(v)$ puede depender de t y x . Sin embargo, para el sistema de VPFP la distribución Maxwelliana del entorno viene dada por la temperatura del baño térmico en el que se suponen que están las partículas, que es $\frac{\sigma}{\beta}$, es decir,

$$M(v) = \left(\frac{2\pi\sigma}{\beta} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{\beta|v|^2}{2\sigma} \right\}.$$

Podemos reescribir las condiciones de contorno (5.7) en términos de un operador \mathcal{K}

$$\gamma_- f = \mathcal{K}[\gamma_+ f], \quad (5.15)$$

dado por

$$(\mathcal{K}[\gamma_+ f])(t, x, v) = \int_{\Gamma_+^x} R(t, x; v, v^*) \gamma_+ f(t, x, v^*) dv^*,$$

para cada $(t, x, v) \in \Sigma_-^T$. De la propiedad (5.13) es fácil observar que \mathcal{K} es un operador lineal acotado de $L^1(\Sigma_+^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$ en $L^1(\Sigma_-^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$.

Señalemos que R puede ser incluso una medida de variación acotada, por ejemplo, una delta de Dirac. De hecho, hemos escrito las hipótesis mínimas sobre R para tener las condiciones de contorno (5.7) bien definidas y con propiedades básicas sobre los flujos de masa, energía y entropía. Como ejemplo, R podría pertenecer al espacio de funciones $L_{t,x}^\infty([0, \infty) \times \partial\Omega; L^1(\Gamma_-^x, \mathcal{M}^+(\Gamma_+^x)))$, donde $\mathcal{M}^+(\Gamma_+^x)$ es el conjunto de medidas de Radon de variación acotada en Γ_+^x .

Este tipo de condiciones de contorno incluyen las condiciones de reflexión clásicas: especular e inversa. Por ejemplo, si tomamos $v' = v - 2(v \cdot n(x))n(x)$, para cada $v \in \Gamma_-^x$, y elegimos $R(t, x; v, v^*) = \delta_{v'}$, donde $\delta_{v'}$ es la delta de Dirac centrada en $v^* = v'$, obtenemos que

$$f(t, x, v) = f(t, x, v') \quad \text{para cada } (x, v) \in \Gamma_-.$$

Una construcción similar conduce a la condición de reflexión inversa $f(t, x, v) = f(t, x, -v)$ en Γ_- . En los trabajos [28, 29, 51] se pueden encontrar más propiedades de las condiciones de contorno y diversas discusiones sobre la validez física de las mismas. Las propiedades relacionadas con los flujos de masa, energía y entropía serán deducidas en la siguiente sección.

5.3 Propiedades de la solución.

Nuestro primer objetivo será estudiar la influencia de las condiciones de contorno (5.7) sobre los flujos de partículas, energía cinética y entropía a través de la frontera del dominio. Posteriormente, obtendremos las leyes del balance de energía y entropía, las cuales son de extrema importancia para demostrar que el funcional η sea un funcional de Liapunov para el sistema.

Recordemos que estamos trabajando con las soluciones del problema (P) que son soluciones débiles en el sentido de la Definición 5.1 y que satisfacen las hipótesis 1-6 de la introducción y con condiciones de contorno definidas por un núcleo de scattering R con las hipótesis señaladas en la sección anterior.

Lema 5.3. *La solución del problema (P) verifica que la función*

$$t \longrightarrow \|f(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)}$$

es absolutamente continua en t y satisface la ecuación de continuidad en forma integral (balance de masa):

$$\frac{d}{dt} \|f(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} + \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f(t, x, v) dv dS = 0.$$

Además, f satisface

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f(t, x, v) dv = 0 \quad (5.16)$$

para cada $t \geq 0$ y $x \in \partial\Omega$. Como consecuencia, la masa de f se conserva, es decir, para cada $t > 0$,

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} = \|f_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} = M. \quad (5.17)$$



Demostración. Demostremos (5.16) en primer lugar. Como f verifica la condición de contorno dada por el núcleo de scattering R , multiplicando (5.7) por $|v \cdot n(x)|$ e integrando en Γ_-^x se tiene

$$\int_{\Gamma_-^x} |v \cdot n(x)| \gamma_- f(t, x, v) dv = \int_{\Gamma_-^x} |v \cdot n(x)| \int_{\Gamma_+^x} R(t, x; v, v^*) \gamma_+ f(t, x, v^*) dv^* dv.$$

El teorema de Fubini demuestra que

$$\int_{\Gamma_-^x} |v \cdot n(x)| \gamma_- f(t, x, v) dv = \int_{\Gamma_+^x} \int_{\Gamma_-^x} |v \cdot n(x)| R(t, x; v, v^*) dv \gamma_+ f(t, x, v^*) dv^*.$$

Por otro lado, la segunda propiedad de R , (5.13), nos asegura que

$$\int_{\Gamma_-^x} |v \cdot n(x)| \gamma_- f(t, x, v) dv = \int_{\Gamma_+^x} |v^* \cdot n(x)| \gamma_+ f(t, x, v^*) dv^*.$$

Finalmente, es fácil ver que el flujo de partículas a través de $\partial\Omega$ se compensa:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f(t, x, v) dv = 0,$$

debido a la definición de Γ_{\pm}^x .

La ecuación del balance de masa se obtiene formalmente integrando la Ecuación (5.1) en $\Omega \times \mathbb{R}^3$ y aplicando el teorema de la divergencia. Para obtenerla de manera rigurosa, utilizamos funciones test especiales en la definición de solución débil (5.8).

Sea $h(t) \in C_0^\infty([0, T])$ y $\chi(s)$ una función $C_0^\infty(\mathbb{R})$ positiva con

$$\chi(s) = 1 \text{ en } |s| \leq 1, \quad \chi(s) = 0 \text{ en } |s| \geq 2,$$

y definimos $\psi_R(v) = \chi(\frac{|v|}{R})$. Por tanto, $\psi_R(v) = 1$ en $|v| \leq R$, $\psi_R(v) = 0$ en $|v| \geq 2R$ y $R\nabla_v \psi_R$ está acotado independientemente de $R \geq 1$. Usando las funciones test $\Psi = h\psi_R$ en (5.8) se tiene que

$$\int_{Q_T} f \left(\frac{dh}{dt} \psi_R - \beta h(v \cdot \nabla_v) \psi_R + h(E \cdot \nabla_v) \psi_R + h\sigma \Delta_v \psi_R \right) d(t, x, v) + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_0 h(0) \psi_R d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f h \psi_R dS dv dt.$$

Como $\psi_R \rightarrow 1$ casi por doquier y cualquiera de sus derivadas converge a cero casi por doquier cuando $R \rightarrow \infty$, mostremos que podemos tomar el límite cuando $R \rightarrow$

∞ término a término en la ecuación anterior. Teniendo en cuenta las propiedades de la función ψ_R junto con las hipótesis

$$f \in C([0, \infty), L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$$

y

$$E \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$$

podemos utilizar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada para demostrar que

$$\int_{Q_T} f \frac{dh}{dt} d(t, x, v) + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_0 h(0) d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f h dS dv dt. \quad (5.18)$$

Por tanto, de la Ecuación (5.18) deducimos que

$$\frac{d}{dt} \|f(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)} = - \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f dv dS = 0$$

en el sentido distribucional en $(0, T)$. De esta forma, la definición de solución débil y las hipótesis de la solución implican que la función

$$t \longrightarrow \|f(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)}$$

pertenece a $W^{1,1}(0, T)$ y, por consiguiente, las inclusiones de Sobolev implican que es absolutamente continua en t . El resto de las afirmaciones son evidentes. \square

El próximo resultado será fundamental para tener bien definido el flujo de entropía a través de la frontera. Denotaremos por $\log^+ f = \max\{0, \log f\}$ y por $\log^- f = |\log f| - \log^+ f$. El siguiente resultado es una adaptación directa de un resultado análogo en [14] para el caso $x \in \mathbb{R}^3$.

Lema 5.4. *Supongamos que f es una función positiva tal que $(1 + |v|^2)f \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$. Entonces, $f \log^- f \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ y*

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^- f d(x, v) \leq C(b, \Omega, f_0) + \frac{1}{2b} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v),$$

para cualquier $b > 0$. Análogamente, si $(1 + |v|^2)f \in L^1(\Gamma; |v \cdot n(x)| dS dv)$, entonces $f \log^- f \in L^1(\Gamma; |v \cdot n(x)| dS dv)$.

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$A_1 = \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3 : f(x, v) \geq e^{-1}\},$$

$$A_2 = \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3 : \exp\{-1 - \frac{|v|^2}{2b}\} \leq f(x, v) < e^{-1}\}$$

y

$$A_3 = \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^3 : f(x, v) < \exp\left\{-1 - \frac{|v|^2}{2b}\right\}\}.$$

Es fácil comprobar que $f \log^- f \leq f$ en A_1 y $f \log^- f \leq f(1 + \frac{|v|^2}{2b})$ en A_2 . En el conjunto A_3 usamos el hecho de que la función $f \log^- f$ es creciente para probar que

$$f \log^- f \leq (1 + \frac{|v|^2}{2b}) \exp\left\{-1 - \frac{|v|^2}{2b}\right\}.$$

Combinando estas relaciones tenemos que

$$f \log^- f \leq f + f(1 + \frac{|v|^2}{2b}) + (1 + \frac{|v|^2}{2b}) \exp\left\{-1 - \frac{|v|^2}{2b}\right\}.$$

Integrando en $\Omega \times \mathbb{R}^3$ y aplicando el Lema 5.3, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^- f \, d(x, v) &\leq 2M + e^{-1}|\Omega| \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \frac{|v|^2}{2b}) \exp\left\{-1 - \frac{|v|^2}{2b}\right\} \, dv \\ &\quad + \frac{1}{2b} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f \, d(x, v). \end{aligned}$$

□

La próxima propiedad será crucial para controlar los flujos de energía y entropía a través de la frontera que aparecerán en la derivada del funcional de energía libre $\eta(t)$.

Lema 5.5. *La solución del problema (P) verifica que $\gamma f \log \gamma f \in L^1(\Sigma^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$ para cada $T > 0$. Además, para cada $0 < t < T$*

$$\int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \left(\frac{\beta}{2\sigma} |v|^2 + \log \gamma f \right) \gamma f \, dS \, dv \geq 0. \quad (5.19)$$

Demostración. Señalar que $x \log^+ x \leq x^2$, para cada $x \geq 0$. Utilizando la hipótesis 3 sobre la solución, es decir,

$$\gamma f^2 \in C([0, \infty), L^1(\Gamma_{\pm}; |v \cdot n(x)| dS dv)),$$

tenemos que $\gamma f \log^+ \gamma f \in L^1(\Sigma^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$. Por otro lado, el lema anterior nos asegura que $\gamma f \log^- \gamma f \in L^1(\Sigma^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$.

La desigualdad (5.19) es clásica y se sigue del principio de reciprocidad integral (5.14) satisfecho por R y de la desigualdad de Jensen. Su demostración puede encontrarse en [29] (página 241; señalar que para estos autores $n(x)$ es el normal interior a $\partial\Omega$). \square

Observación 5.1. En el caso de las condiciones clásicas de reflexión: especular e inversa, los flujos de partículas, energía y entropía a través de la frontera son nulos. Este hecho es evidente ya que las funciones $(v \cdot n(x)) \gamma f$, $|v|^2 (v \cdot n(x)) \gamma f$ y $(v \cdot n(x)) \gamma f \log \gamma f$ son impares con respecto a $|v \cdot n(x)|$.

El siguiente resultado es consecuencia directa del lema de interpolación (Lema A.5) para estimar la densidad de partículas $\rho(f)$ y la densidad de flujo $j(f)$,

$$j(f)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv.$$

Lema 5.6. *Sea*

$$J_k(x) = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^k f dv.$$

Supongamos que $f(x, v) \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, con $f \geq 0$, y $0 \leq k' \leq k$. Si $J_k \in L^1(\Omega)$, entonces $J_{k'} \in L^r(\Omega)$ con $r = \frac{3+k}{3+k'}$. Como consecuencia, la solución del problema (P) satisface, para cada $T > 0$,

$$\rho(f) \in L^\infty([0, T], L^{\frac{5}{3}}(\Omega)) \quad , \quad j(f) \in L^\infty([0, T], L^{\frac{5}{4}}(\Omega)).$$

Para obtener la identidad del balance de energía necesitamos primero derivar la ecuación de continuidad que verifica $\rho(f)$.

Lema 5.7. *La solución del problema (P) satisface la ecuación de continuidad en $(0, T) \times \Omega$ en el sentido distribucional, es decir,*

$$\frac{d\rho(f)}{dt} + \operatorname{div}_x j(f) = 0.$$

Demostración. Esta propiedad se deduce formalmente de la Ecuación (5.1) integrándola con respecto a v y aplicando el teorema de la divergencia. Utilizando ideas similares a las del Lema 5.3, usamos como funciones test en (5.8) $\Psi = \varphi(t, x)\psi_R(v)$, donde $\varphi \in C_o^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[)$ y ψ_R está definida como en el Lema 5.3. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi_R + \psi_R (v \cdot \nabla_x) \varphi - \beta \varphi (v \cdot \nabla_v) \psi_R \right) d(t, x, v) + \\ & \int_{Q_T} f (\varphi (E \cdot \nabla_v) \psi_R + \varphi \sigma \Delta_v \psi_R) d(t, x, v) + \\ & \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_o \varphi(0, x) \psi_R(v) d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f \varphi \psi_R dS dv dt. \end{aligned}$$

De nuevo, usamos las hipótesis sobre las soluciones $f \in C([0, \infty), L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, $E \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$, las propiedades de ψ_R y el teorema de la convergencia dominada para obtener la igualdad

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \varphi \right) d(t, x, v) + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_o \varphi(0, x) d(x, v) \\ & = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f \varphi dS dv dt, \end{aligned}$$

cuando $R \rightarrow \infty$.

Finalmente, la relación (5.16) nos permite concluir que

$$\int_{\Omega \times [0, T]} \left(\rho(f) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (j(f) \cdot \nabla_x) \varphi \right) d(t, x) + \int_{\Omega} \rho_o \varphi(0, x) dx = 0.$$

Por tanto, el resultado queda probado. \square

En el siguiente lema obtenemos el balance de energía potencial.

Lema 5.8. *La solución del problema (P) verifica que la función*

$$t \longrightarrow \int_{\Omega} \Phi \rho(f) dx$$

es absolutamente continua y

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi \rho(f) dx = 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho(f) dx = -2 \int_{\Omega} E \cdot j(f) dx.$$

Demostración. La relación anterior se deduce formalmente multiplicando la Ecuación (5.1) por Φ , integrando el resultado en x y v y aplicando el teorema de la divergencia. Como

$$\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \in C([0, T], H_o^1(\Omega))$$

y $E = -\nabla_x \Phi \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$, entonces un argumento de densidad nos permite considerar una sucesión de funciones Φ_n de clase $C_o^\infty([0, T] \times \Omega)$ que converge a Φ mientras que sus derivadas $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}$ convergen a $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ en $C([0, T], H_o^1(\Omega))$. Además, podemos suponer que la sucesión $E_n = -\nabla_x \Phi_n$ converge hacia E en $L^\infty([0, T], L^q(\Omega))$ para cada $2 \leq q < \infty$. Por tanto, podemos utilizar como función test en el Lema 5.7 $\varphi = \Phi_n(t, x)h$, donde $h(t) \in C_o^\infty([0, T])$, para obtener

$$\int_{\Omega \times [0, T]} \left(\rho(f) \frac{\partial h}{\partial t} \Phi_n + \rho(f) \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} h + h(j(f) \cdot \nabla_x) \Phi_n \right) d(t, x) + \int_{\Omega} \rho_o \Phi_n(0, x) h(0) dx = 0.$$

Utilizando que $\rho(f) \in L^\infty([0, T], L^{\frac{5}{3}}(\Omega))$ y $j(f) \in L^\infty([0, T], L^{\frac{5}{4}}(\Omega))$ (Lema 5.6) junto con la convergencia de las sucesiones $\Phi_n \rightarrow \Phi$, $\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, en el espacio $L^\infty([0, T], H_o^1(\Omega))$ y $E_n \rightarrow E$ en $L^\infty([0, T], L^5(\Omega)^3)$, concluimos que

$$\int_{\Omega \times [0, T]} \left(\rho(f) \frac{\partial h}{\partial t} \Phi + \rho(f) \frac{\partial \Phi}{\partial t} h + h(j(f) \cdot \nabla_x) \Phi \right) d(t, x) + \int_{\Omega} \rho_o \Phi(0, x) h(0) dx = 0.$$

Por consiguiente, acabamos de probar que, en el sentido distribucional en $(0, T)$, se verifica

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi \rho(f) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rho(f) dx - \int_{\Omega} E \cdot j(f) dx.$$

Aplicando las hipótesis sobre las soluciones tenemos que el término de la derecha de la igualdad anterior pertenece a $L^1_{loc}([0, T])$. Por lo tanto, la función

$$t \longrightarrow \int_{\Omega} \Phi \rho(f) dx$$

es absolutamente continua. La definición de solución débil del problema de Dirichlet para la Ecuación (5.2) implica que

$$\int_{\Omega} \Phi \rho(f) dx = \theta \int_{\Omega} |E|^2 dx.$$

Como consecuencia, debido a que E y su derivada respecto a t pertenecen respectivamente a $L^{\infty}([0, T], L^2(\Omega)^3)$ y $L^{\infty}([0, T], L^2(\Omega)^3)$, la derivada débil con respecto a t de $\int_{\Omega} |E|^2 dx$ es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |E|^2 dx = 2 \int_{\Omega} E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} dx.$$

Teniendo en cuenta de nuevo que Φ es solución débil de (5.2)-(5.6), concluimos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |E|^2 dx = 2 \int_{\Omega} \rho(f) \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx,$$

y el lema queda probado. \square

En el próximo resultado obtenemos la identidad del balance de energía.

Lema 5.9. *La solución del problema (P) satisface que la función*

$$t \longrightarrow \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v)$$

es absolutamente continua y que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} |E|^2 dx \right) = \\ & - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) |v|^2 \gamma f dS dv - \beta \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) + 3\sigma M. \end{aligned}$$

Demostración. De una forma totalmente análoga a la demostración de identidades anteriores, el balance de energía se puede obtener formalmente multiplicando la Ecuación (5.1) por $|v|^2$, integrando el resultado con respecto a x y v y aplicando el teorema de la divergencia. Como los argumentos son exactamente los mismos que en lemas anteriores, esbozaremos la demostración. Elijamos en (5.8) como función test a $\Psi = |v|^2\psi_R(v)h(t)$, donde ψ_R y h se definen como en el Lema 5.3, para obtener

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} |v|^2 f \left(\frac{dh}{dt} \psi_R - \beta h (v \cdot \nabla_v) \psi_R - 2\beta h \psi_R \right) d(t, x, v) + \\ & \int_{Q_T} |v|^2 f (h (E \cdot \nabla_v) \psi_R + h \sigma \Delta_v \psi_R) d(t, x, v) + \\ & \int_{Q_T} (6\sigma f h + 4\sigma f h (v \cdot \nabla_v) \psi_R + 2h f (E \cdot v) \psi_R) d(t, x, v) + \\ & \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_0 |v|^2 \psi_R(v) h(0) d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) |v|^2 \gamma f h \psi_R dS dv dt. \end{aligned}$$

Utilizando las hipótesis 2, 3 y 4 sobre las soluciones, es decir, teniendo en cuenta que $|v|^2 f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, $|v|^2 \gamma_\pm f \in C([0, \infty), L^1(\Gamma_\pm; |v \cdot n(x)| dS dv))$ y $E \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$; usando también el Lema 5.8 y pasando al límite cuando $R \rightarrow \infty$, se deducen las afirmaciones del lema. \square

Nuestro objetivo ahora es obtener el balance de entropía. Para ello, necesitamos realizar una serie de etapas intermedias. Primero, analizaremos la ecuación que verifican algunas funciones no lineales de f (comenzando por f^2), para posteriormente, demostrar que la entropía está bien definida y de estos hechos obtener la identidad requerida.

Lema 5.10. *La solución del problema (P) verifica que la función*

$$t \longrightarrow \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f^2 d(x, v)$$

es absolutamente continua y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f^2 d(x, v) \right) &= - \int_{\partial \Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f^2 dS dv + \\ & 3\beta \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f^2 d(x, v) - 2\sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |\nabla_v f|^2 d(x, v). \end{aligned}$$

Demostración. Esta relación se obtiene formalmente de la Ecuación (5.1) multiplicándola por f , integrándola en x y v y aplicando el teorema de la divergencia. Consideremos una sucesión regularizante $\delta_n = \delta_n^t \delta_n^x \delta_n^v$ que aproxima la delta de Dirac con soporte de δ_n^x y δ_n^v en la bola $B(0, \frac{1}{n})$ y tales que $\delta_n^x(x) = \delta_n^x(-x)$ y $\delta_n^v(v) = \delta_n^v(-v)$. Además, supondremos que δ_n^t tiene su soporte en el eje real negativo de longitud $\frac{1}{n}$. También, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\|\nabla_x \delta_n\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + \|\nabla_v \delta_n\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq Cn \quad (5.20)$$

donde C es independiente de n . Denotaremos por \bar{f} y \bar{E} las extensiones por cero de la función f y el campo E a \mathbb{R}^6 y \mathbb{R}^3 respectivamente. Sea $f_n = \delta_n \star \bar{f}$. Usaremos la notación introducida en el Lemma 5.2 para los dominios Ω_n .

Eligiendo una función test Ψ en (5.8) con soporte compacto en $(\frac{1}{n}, T) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3$ y usando análogos argumentos a los del Lema 5.2 se puede probar que

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f_n + \operatorname{div}_v((E - \beta v) f_n) - \sigma \Delta_v f_n = h_n \quad (5.21)$$

se verifica de forma clásica en $(\frac{1}{n}, T) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3$, donde

$$h_n = \operatorname{div}_x [v f_n - \delta_n \star (v \bar{f})] + \operatorname{div}_v [(E - \beta v) f_n - \delta_n \star ((\bar{E} - \beta v) \bar{f})],$$

que se puede simplificar en la forma

$$h_n = [(\operatorname{div}_x - \beta \operatorname{div}_v)(v \delta_n)] \star \bar{f} + [E(\nabla_v \delta_n \star \bar{f}) - \nabla_v \delta_n \star (\bar{E} \bar{f})].$$

Multiplicando la Ecuación (5.21) por f_n deducimos que

$$\begin{aligned} L[f_n^2] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_n^2}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f_n^2 + \operatorname{div}_v((E - \beta v) f_n^2) - \sigma \Delta_v f_n^2 = \\ 2h_n f_n + 3\beta f_n^2 - 2\sigma |\nabla_v f_n|^2 \end{aligned}$$

en $(\frac{1}{n}, T) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, para cada función test Ψ con soporte compacto en $(\frac{1}{m}, T) \times \Omega_m \times \mathbb{R}^3$, con $n \geq m$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f_n^2 L^t[\Psi] d(t, x, v) = - \int_{Q_T} 2h_n f_n \Psi d(t, x, v) - \\ 3\beta \int_{Q_T} f_n^2 \Psi d(t, x, v) + 2\sigma \int_{Q_T} |\nabla_v f_n|^2 \Psi d(t, x, v), \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde hemos denotado por L^t al operador adjunto de L .

Como $f \in C([0, \infty), L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, $f_n = \delta_n \star \bar{f}$ tiende hacia f en $C([0, \infty), L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. Luego, las sucesiones

$$\left\{ \int_{Q_T} f_n^2 L^t[\Psi] d(t, x, v) \right\}, \quad \left\{ \int_{Q_T} f_n^2 \Psi d(t, x, v) \right\}$$

convergen hacia

$$\left\{ \int_{Q_T} f^2 L^t[\Psi] d(t, x, v) \right\}, \quad \left\{ \int_{Q_T} f^2 \Psi d(t, x, v) \right\}.$$

El término de h_n en (5.21) es tratado análogamente a [14], Proposición 2.2. Escribimos $h_n = h_n^{(1)} + h_n^{(2)}$ con

$$h_n^{(1)} = [(\operatorname{div}_x - \beta \operatorname{div}_v)(v \delta_n)] \star \bar{f}$$

y

$$h_n^{(2)} = [E(\nabla_v \delta_n \star \bar{f}) - \nabla_v \delta_n \star (E \bar{f})].$$

Como la integral de $(\operatorname{div}_x - \beta \operatorname{div}_v)(v \delta_n)$ es cero, podemos escribir $h_n^{(1)}$ como

$$h_n^{(1)} = \delta_n^t \star \int_{\mathbb{R}^6} [(\operatorname{div}_x - \beta \operatorname{div}_v)(v \delta_n^{x,v})] (x-x', v-v') [\bar{f}(t, x', v') - \bar{f}(t, x, v)] dx' dv'.$$

Por tanto, lo estimamos como

$$\|h_n^{(1)}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^6))} \leq \|(\operatorname{div}_x - \beta \operatorname{div}_v)(v \delta_n^{x,v})\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}$$

$$\max \left\{ \|\bar{f}(t, x+h, v+h) - \bar{f}(t, x, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^6)}, \quad \text{con } |h| \leq \frac{1}{n}, \quad 0 \leq t \leq T + \frac{1}{n} \right\}.$$

Como el soporte de $\delta_n^{x,v}$ es $B(0, \frac{1}{n})$, la desigualdad (5.20) implica que

$$\|(\operatorname{div}_x - \beta \operatorname{div}_v)(v \delta_n^{x,v})\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq$$

$$\|v \nabla_x \delta_n\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + \|v \nabla_v \delta_n\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + 3\beta \|\delta_n\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq C$$

donde C es independiente de n . Como $f \in C([0, \infty), L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ deducimos que $h_n^{(1)}$ tiende hacia 0 en $L^\infty([0, T], L^2(\Omega \times \mathbb{R}^3))$.

Debido a que $\nabla_v f \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ (hipótesis 5 sobre las soluciones), tenemos que cada término en $h_n^{(2)}$ tiende hacia $(E \cdot \nabla_v) f$ en $L^2((0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$. Como consecuencia, $h_n^{(2)}$ tiende hacia 0 en $L^2((0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$.

Ahora, tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la identidad (5.22) para obtener

$$\int_{Q_T} f^2 L^t[\Psi] d(t, x, v) = -3\beta \int_{Q_T} f^2 \Psi d(t, x, v) + 2\sigma \int_{Q_T} |\nabla_v f|^2 \Psi d(t, x, v),$$

para cada función test con soporte compacto en $(\frac{1}{m}, T) \times \Omega_m \times \mathbb{R}^3$. Por tanto, hemos probado que en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\frac{\partial f^2}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f^2 + \operatorname{div}_v((E - \beta v) f^2) - \sigma \Delta_v f^2 = 3\beta f^2 - 2\sigma |\nabla_v f|^2.$$

Usando el resultado de trazas de funciones no lineales (Lema 5.2) tenemos que $f^2 \in W^1(Q_T)$. Por consiguiente, teniendo en cuenta que

$$\gamma f^2 \in C([0, \infty), L^1(\Gamma_{\pm}; |v \cdot n(x)| dS dv)),$$

la ecuación verificada por f^2 y la identidad de Green (Lema 5.1), concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} f^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi - \beta (v \cdot \nabla_v) \Psi + (E \cdot \nabla_v) \Psi + \sigma \Delta_v \Psi \right) d(t, x, v) + \\ \int_{Q_T} (3\beta f^2 \Psi - 2\sigma |\nabla_v f|^2 \Psi) d(t, x, v) + \\ \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f^2 \Psi(0, x, v) d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma f^2 \Psi dS dv dt \end{aligned}$$

para cada $\Psi \in C_o^\infty(Q_T)$.

Para finalizar el lema procedemos como en los lemas anteriores: consideremos la función test $\Psi = h(t)\psi_R(v)$ definida como en el Lema 5.3. Usando que $f \in C([0, \infty), L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, $|v|f$ pertenece a $L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ y $\nabla_v f \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$, es fácil finalizar la demostración via el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada. \square

El lema anterior se puede aplicar para obtener el balance de funciones no lineales de la distribución de partículas.

Lema 5.11. *Sea $\xi \in C^2(\mathbb{R})$ con $\xi'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $\xi(0) = 0$. La función $\xi(f)$ pertenece a $L^\infty([0, \infty), L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ y verifica, para cada $\Psi \in C_o^\infty(Q_T)$,*

$$\int_{Q_T} \xi(f) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \Psi - \beta \operatorname{div}_v(v \Psi) + (E \cdot \nabla_v) \Psi + \sigma \Delta_v \Psi \right) d(t, x, v)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{Q_T} (3\beta f \xi'(f) \Psi - \sigma \xi''(f) |\nabla_v f|^2 \Psi) d(t, x, v) \\
& + \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \xi(f_0) \Psi(0, x, v) d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma \xi(f) \Psi dS dv dt
\end{aligned}$$

Además, la siguiente ecuación se verifica en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi(f)}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \xi(f) + \operatorname{div}_v [(E - \beta v) \xi(f)] - \sigma \Delta_v \xi(f) = & \quad (5.23) \\
3\beta f \xi'(f) - 3\beta \xi(f) - \sigma \xi''(f) |\nabla_v f|^2. &
\end{aligned}$$

Demostración. La demostración sigue exactamente los mismos pasos que en el Lema 5.10. Mantendremos la misma notación introducida en ese lema. Multiplicando la ecuación

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f_n + \operatorname{div}_v ((E - \beta v) f_n) - \sigma \Delta_v f_n = h_n \quad \text{en } \left(\frac{1}{n}, T\right) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3$$

por $\xi'(f_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi(f_n)}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) \xi(f_n) + \operatorname{div}_v (E \xi(f_n)) - \beta (v \cdot \nabla_v) \xi(f_n) - \sigma \Delta_v \xi(f_n) = \\
3\beta f_n \xi'(f_n) - \sigma \xi''(f_n) |\nabla_v f_n|^2 + h_n \xi'(f_n)
\end{aligned}$$

en $(\frac{1}{n}, T) \times \Omega_n \times \mathbb{R}^3$. Como $\xi(f)$ tiene segunda derivada acotada y $\xi(0) = 0$, $\xi(f_n) \in L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ y $\xi'(f_n) \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$. Combinando estos hechos, los razonamientos de los Lemas 5.10 y 5.2 el resultado se deduce. \square

Finalmente, obtenemos el balance de entropía.

Lema 5.12. *La solución del problema (P) satisface, para cada $T > 0$, que*

$$f \log f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)).$$

La función

$$t \longrightarrow \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log f d(x, v)$$

es absolutamente continua, $\nabla_v f = 2\sqrt{f}\nabla_v\sqrt{f}$, $\nabla_v\sqrt{f} \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log f \, d(x, v) &= - \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma f \log \gamma f \, dS \, dv + \\ &3\beta M - 4\sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left| \nabla_v \sqrt{f} \right|^2 \, d(x, v). \end{aligned}$$

Demostración. El balance de entropía se obtiene formalmente multiplicando la Ecuación (5.1) por $1 + \log f$, integrando el resultado en x y v y aplicando el teorema de la divergencia. Como las ideas son similares a las del Lema 2.3 de [14], daremos un esbozo de la demostración. Primeramente, demostraremos que $f \log f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. El Lema 5.4 y la hipótesis

$$|v|^2 f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)),$$

nos permiten demostrar que $f \log^- f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. Por tanto, usando la desigualdad $x \log^+ x \leq x^2$ y la hipótesis

$$f \in C([0, \infty), L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^3)),$$

tenemos que $f \log^+ f \in L^\infty([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$. De nuevo el Lema 5.5 implica que

$$\gamma f \log \gamma f \in L^1(\Sigma^T; |v \cdot n(x)| \, dS \, dv \, dt).$$

Para probar el balance de entropía utilizamos el Lema 5.11 con la sucesión de funciones

$$\xi_\epsilon(f) = (\epsilon + f) \log \left(1 + \frac{f}{\epsilon} \right) + f \log \epsilon.$$

Procediendo de manera análoga a los lemas anteriores, utilizamos la función $\Psi = \psi_R(v)h(t)$ como función test y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \xi_\epsilon(f) \left(\frac{dh}{dt} \psi_R - \beta h \operatorname{div}_v(v \psi_R) + h(E \cdot \nabla_v) \psi_R + \sigma h \Delta_v \psi_R \right) \, d(t, x, v) + \\ \int_{Q_T} \left(3\beta f \xi'_\epsilon(f) \psi_R h - \sigma \xi''_\epsilon(f) |\nabla_v f|^2 \psi_R h \right) \, d(t, x, v) + \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \xi_\epsilon(f_0) h(0) \psi_R d(x, v) = \int_{\Sigma^T} (v \cdot n(x)) \gamma \xi_\epsilon(f) h \psi_R dS dv dt.$$

Pasando al límite cuando $R \rightarrow \infty$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \xi_\epsilon(f) d(x, v) = 3\beta \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left(f - \epsilon \log \left(1 + \frac{f}{\epsilon} \right) \right) d(x, v) -$$

$$\int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \gamma \xi_\epsilon(f) dS dv - \sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{|\nabla_v f|^2}{\epsilon + f} d(x, v).$$

Debido al teorema de Lebesgue de convergencia dominada se tiene

$$\xi_\epsilon(f) \rightarrow f \log f$$

en $L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ y

$$\gamma \xi_\epsilon(f) \rightarrow \gamma f \log \gamma f$$

en $L^1(\Sigma^T; |v \cdot n(x)| dS dv dt)$. El resultado se demuestra pasando al límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, donde de nuevo se usa el teorema de convergencia dominada y monótona de Lebesgue.

Falta por probar que $\nabla_v \sqrt{f} \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ y deducir la fórmula para $\nabla_v \sqrt{f}$.

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, se puede demostrar que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \frac{|\nabla_v f|^2}{\epsilon + f} d(x, v)$$

está acotada independientemente de ϵ . Por tanto,

$$\frac{|\nabla_v f|^2}{f} \in L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3).$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla_v (\sqrt{\epsilon + f} - \sqrt{\epsilon}) = \frac{\nabla_v f}{\sqrt{\epsilon + f}},$$

y pasando al límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se termina la demostración. \square

En la próxima sección usaremos las identidades anteriores para probar que el funcional de energía libre $\eta(t)$ es un funcional de Liapunov.

5.4 Definición y propiedades del funcional de Liapunov.

El funcional de energía libre $\eta(t)$ se define como

$$\eta(t) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log \left(\frac{f}{\tilde{f}} \right) d(x, v),$$

donde f es la solución del problema (P) y \tilde{f} depende de f y está dada por

$$\tilde{f}(t, x, v) = \exp \left\{ -\frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi(t, x) - \frac{1}{M} \mu(t) \right) \right\},$$

donde M es la masa total, y

$$\mu(t) = \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} |\nabla_x \Phi(t, x)|^2 dx.$$

Demostremos que el funcional $\eta(t)$ está bien definido y obtengamos su derivada.

Lema 5.13. *Para cada $t > 0$ el funcional $\eta(t)$ está bien definido y su derivada viene dada por*

$$\begin{aligned} \eta'(t) = & -\sigma \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left| 2\nabla_v \sqrt{f} + \frac{\beta}{\sigma} v \sqrt{f} \right|^2 d(x, v) - \\ & \int_{\partial\Omega \times \mathbb{R}^3} (v \cdot n(x)) \left(\frac{\beta}{2\sigma} |v|^2 + \log f(t, x, v) \right) f(t, x, v) dS dv \end{aligned}$$

Demostración. Primero, veamos que η está bien definido. Desarrollando el logaritmo de \tilde{f} tenemos que

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log f d(x, v) + \frac{\beta}{2\sigma} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) + \\ & \frac{\beta}{2\sigma} \theta \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Esta fórmula explícita de $\eta(t)$ y los balances de energía y de entropía (Lemas 5.9 y 5.12) nos aseguran que $\eta(t)$ es absolutamente continua con respecto a t .

Además, multiplicando la identidad del balance de energía (Lemma 5.9) por $\frac{\beta}{\sigma}$ y sumándole la identidad del balance de entropía (Lemma 5.12), se obtiene la derivada del funcional η realizando algunos cálculos simples. Aquí obtenemos un nuevo término, debido a las condiciones de contorno, en $\eta'(t)$ con respecto a la derivación formal que hicimos en la introducción. \square

La fórmula (5.24) muestra que $\eta(t)$ se puede considerar como el funcional de energía libre: es igual a la entropía menos la energía interna dividida por la temperatura. Un funcional muy parecido fue utilizado en [14] para estudiar el comportamiento asintótico en $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Usando la relación entre el flujo de entropía y de energía a través de la frontera (5.19) probamos que $\eta'(t) \leq 0$. Por tanto, $\eta(t)$ es una función no creciente. Probaremos que $\eta(t)$ está acotado inferiormente bajo hipótesis razonables. Por tanto, $\eta(t)$ es un funcional de Liapunov y tendrá un límite finito cuando $t \rightarrow \infty$. Este es el resultado fundamental para probar la convergencia hacia un estado estacionario de la solución.

Lema 5.14. *El funcional η está acotado inferiormente. Además se verifican las siguientes propiedades:*

i) *Las siguientes cantidades están acotadas independientemente de t ,*

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^+ f \, d(x, v), \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f \, d(x, v), \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 \, dx.$$

ii) *El funcional η tiene límite cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. Primero, consideremos el caso electrostático $\theta = 1$. Para obtener una cota del funcional usamos la expresión de η obtenida en (5.24) para deducir que

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^+ f \, d(x, v) + \frac{\beta}{2\sigma} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f \, d(x, v) + \\ &\quad \frac{\beta}{2\sigma} \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 \, dx - \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^- f \, d(x, v). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^+ f \, d(x, v) + \frac{\beta}{2\sigma} \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 \, dx \geq 0$$

y usando el Lema 5.4, demostramos que

$$\eta(t) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - \frac{1}{b} \right) \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) - C, \quad (5.25)$$

donde $C = C(f_0, b, \Omega)$ es la constante del Lema 5.4. Eligiendo b tal que $b > \frac{\sigma}{\beta}$ obtenemos que $\eta(t) \geq -C$.

Para probar la primera afirmación del lema basta usar el carácter no creciente de η para probar que

$$0 \leq \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^+ f d(x, v) + \frac{\beta}{2\sigma} \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - \frac{1}{b} \right) \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f d(x, v) \leq \eta(t) + C \leq \eta(0) + C.$$

Con lo que la primera afirmación se deduce fácilmente. La afirmación segunda es consecuencia trivial de la monotonía del funcional y de ser acotado inferiormente.

En el caso gravitacional $\theta = -1$ todos los argumentos son válidos excepto que al ser la energía potencial negativa debemos usar la hipótesis 6 sobre la solución, es decir, que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |E(t, x)|^2 dx$$

es finito. \square

Como ya se indicó en la introducción, la hipótesis 6 sobre la solución se puede sustituir por la hipótesis 6'. Para ello, recordaremos una desigualdad debida a N. S. Trudinger y J. Moser (ver [2] y [70]). Este resultado nos permitirá analizar bajo que condiciones la función $\exp\{\frac{\beta}{\sigma}\Phi\}$ es integrable en Ω . Aunque este hecho no se necesita directamente para terminar la demostración del Teorema 5.1, es interesante por sí mismo porque puede simplificar el paso al límite, como veremos más tarde, y se puede utilizar para estudiar la ecuación estacionaria (5.10).

Teorema 5.3. (Trudinger-Moser) *Sea $u \in W_o^{1,3}(\Omega)$ con Ω acotado y suficientemente regular. Supongamos que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^3 dx \leq 1.$$

Entonces, existe una constante C independiente de u tal que

$$\int_{\Omega} \exp\{a|u(x)|^{\frac{3}{2}}\} dx \leq C|\Omega|$$

donde $a \leq a_0$ y $a_0 > 0$ depende solamente de Ω . Además, a_0 es optimal, es decir, para $a > a_0$ la desigualdad es falsa.

El próximo resultado nos afirma cuando $\exp\{\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ es integrable.

Lema 5.15. *Se verifican las siguientes propiedades:*

- i) *En el caso electrostático, $\exp\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ pertenece a $L^1(\Omega)$ para cada $t > 0$. Si la solución satisface δ' , entonces $\exp\{\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ pertenece a $L^1(\Omega)$ para cada $t > 0$.*
- ii) *En el caso gravitacional, $\exp\{\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ pertenece a $L^1(\Omega)$ para cada $t > 0$. Si la solución satisface δ' , entonces $\exp\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ pertenece a $L^1(\Omega)$ para cada $t > 0$.*

Demostración. Demostremos la primera parte del lema, la segunda se obtiene de forma totalmente análoga. Como f es positiva, el principio del máximo implica que Φ es siempre positiva. Luego, $\exp\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ está acotado por la hipótesis 1. Por lo tanto, $\exp\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ pertenece a $L^1(\Omega)$.

Sea ν cualquier real positivo. Usando la desigualdad $\alpha \leq \alpha^{\frac{3}{2}} + 1$ para $\alpha \geq 0$, tenemos que

$$\frac{\beta}{\sigma}\Phi = \frac{\beta\nu}{\sigma\nu}\Phi \leq \frac{\beta}{\sigma}\nu^{-\frac{1}{2}}\Phi^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta\nu}{\sigma}. \quad (5.26)$$

Tomando ν suficientemente grande deducimos

$$\frac{\beta}{\sigma}\nu^{-\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^\infty([0, \infty), W_0^{1,3}(\Omega))}^{\frac{3}{2}} \leq a_0.$$

Aplicando la desigualdad de Trudinger-Moser (Teorema 5.3) concluimos que

$$\int_{\Omega} \exp\left\{\frac{\beta}{\sigma}\nu^{-\frac{1}{2}}|\Phi(x)|^{\frac{3}{2}}\right\} dx \leq C|\Omega|.$$

La prueba se termina usando (5.26). \square

Observación 5.2. La hipótesis 6', $\Phi \in L^\infty([0, \infty), W_o^{1,3}(\Omega))$ implica la hipótesis 6 sobre la solución en el caso gravitacional. Por lo tanto, con la hipótesis 6' el funcional η está acotado inferiormente. Este hecho se puede probar directamente. Demos un esbozo de la demostración. La desigualdad $\alpha \log(\alpha) \geq \alpha - 1$ para cada $\alpha > 0$ implica que

$$\eta(t) = \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log\left(\frac{f}{\tilde{f}}\right) d(x, v) \geq \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (f - \tilde{f}) d(x, v).$$

Por ello, basta probar que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} (f - \tilde{f}) d(x, v) \geq C_o$$

con C_o constante. Realizando algunos cálculos sencillos y teniendo en cuenta la conservación de la masa, la última desigualdad es equivalente a probar que $\exp\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\}$ pertenece a $L^1(\Omega)$.

Por tanto, el Lema 5.15 nos asegura que la hipótesis 6' en el caso gravitacional implica que $\exp\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi(t, x)\} \in L^1(\Omega)$. Como conclusión, η está acotado.

5.5 Comportamiento asintótico.

En esta sección demostraremos el Teorema 5.1. En el Lema 5.14 de la sección anterior, hemos demostrado la existencia del límite de η cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, es fácil deducir, para cada $T > 0$, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^T \eta'(t+s) ds = 0.$$

La desigualdad (5.19) implica que el segundo término de la derivada de η en Lema 5.13 es negativo. Como el primer término es obviamente negativo, entonces la integral de este primer término en tiempo debe tender a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, hemos probado que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|2\nabla_v \sqrt{f_t} + \frac{\beta}{\sigma} v \sqrt{f_t}\|_{L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)} = 0 \quad (5.27)$$

donde f_t está definida por $f_t(s, x, v) = f(t+s, x, v)$. Esta relación será importante en lo que sigue.

Dada cualquier sucesión $\{t_n\} \rightarrow \infty$, denotaremos por f_n a las funciones f_{t_n} . Análogamente definimos E_n y Φ_n . Discutiremos primero la compacidad en el espacio $L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ de la sucesión $\{f_n\}$. Como las cantidades

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f \log^+ f \, d(x, v), \quad \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f \, d(x, v), \quad \int_{\Omega} |E(t, x)|^2 \, dx.$$

están acotadas independientemente de t (Lema 5.14), y la masa de f se conserva, el teorema de Dunford-Pettis (Teorema A.2) y el teorema de Banach-Alaoglu prueban que la sucesión $\{f_n\}$ es débilmente relativamente compacta en $L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$, y la sucesión $\{E_n\}$ débilmente relativamente compacta en $L^2([0, T] \times \Omega)$. Para obtener la distribución de partículas límite, tenemos que tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la Ecuación (5.1) satisfecha por (E_n, f_n) . La compacidad anterior no es suficiente para poder pasar al límite la parte no lineal de esta ecuación. Por esta razón debemos de probar que $\{f_n\}$ es fuertemente compacta en $L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$. Este hecho tampoco da directamente la convergencia del término no lineal de la Ecuación (5.1). Por tanto, tendremos que usar una ecuación para $\sqrt{f_n}$ donde si podremos pasar al límite el término no lineal.

Las ideas anteriores fueron introducidas en [14]. Como se puede aplicar el mismo procedimiento allí expuesto, indicaremos las principales diferencias y argumentos. Usaremos el criterio de compacidad (Teorema A.4) para probar la compacidad fuerte de la sucesión f_n .

Lema 5.16. *La sucesión $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacta en el espacio $C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$.*

Demostración. Debido a la acotación de

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f_n \log^+ f_n \, d(x, v) \text{ y } \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} |v|^2 f_n \, d(x, v),$$

independientemente de t y a la conservación de masa, la demostración se reduce a probar la existencia de una subsucesión de $\{f_n\}$ convergente casi por doquier en $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3$. Esto es una consecuencia directa del teorema de Vitali. De manera equivalente, basta comprobar la existencia de una subsucesión de

$$\varphi_\epsilon(f_n) = \sqrt{\epsilon + f_n} - \sqrt{\epsilon}.$$

que converja casi por doquier en $[0, T] \times \omega \times \mathbb{R}^3$, donde ϵ es un número positivo fijo.

Para evitar el problema de las condiciones de contorno multiplicaremos esta sucesión por funciones C^∞ de soporte compacto convenientes. Consideremos dos funciones $\chi_1(x) \in C^\infty(\Omega)$ y $\chi_2(v) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Aplicaremos el criterio de compacidad (Teorema A.4) a la sucesión de funciones $g_n = \chi_1(x)\chi_2(v)\varphi_\epsilon(f_n)$. Las funciones $\chi_1(x)$ nos permiten trabajar en \mathbb{R}^6 para poder aplicar el referido criterio de compacidad. $g_n(0, \cdot)$ está acotada en $L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ independientemente de n ya que

$$\varphi_\epsilon(f_n) \leq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} f_n.$$

Por otro lado, podemos calcular el operador L aplicado a g_n para deducir que

$$\begin{aligned} L_o[g_n] &= \chi_1(x)\chi_2(v)L_o[\varphi_\epsilon(f_n)] - \sigma\chi_1(x)(\nabla_v\varphi_\epsilon(f_n) \cdot \nabla_v\chi_2) + \\ &\chi_1(x)\varphi_\epsilon(f_n)(-\beta(v \cdot \nabla_v)\chi_2 - \sigma\Delta_v\chi_2) + (v \cdot \nabla_x)\chi_1(x)\chi_2(v)\varphi_\epsilon(f_n). \end{aligned} \quad (5.28)$$

La conservación de la masa implica de nuevo que $\varphi_\epsilon(f_n)$ está acotada en $L^2([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ independientemente de n y, por tanto, los últimos dos términos en (5.28) están acotados en $L^2([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ independientemente de n .

Aplicando la ecuación del cambio no lineal de variables, Ecuación (5.23) del Lema 5.11, a $\varphi_\epsilon(f_n)$, obtenemos que

$$L[\varphi_\epsilon(f_n)] = 3\beta \left(\frac{f_n}{2\sqrt{\epsilon + f_n}} - \varphi_\epsilon(f_n) \right) + \frac{\sigma}{4} \frac{|\nabla_v f_n|^2}{(\epsilon + f_n)^{\frac{3}{2}}} - (E_n \cdot \nabla_v)\varphi_\epsilon(f_n) \quad (5.29)$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$. Como

$$\nabla_v \sqrt{f} = \frac{\nabla_v f}{2\sqrt{f}} \in L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3), \quad (5.30)$$

podemos deducir del Lema 5.12 que $\nabla_v \varphi_\epsilon(f_n)$ está acotado en $L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$ independientemente de n . Por consiguiente, el segundo término de la Ecuación (5.28) está acotado en $L^2([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ independientemente de n .

La Ecuación (5.27) implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|4|\nabla_v \sqrt{f_n}|^2 - \left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2 |v|^2 f_n\|_{L^1([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)} = 0. \quad (5.31)$$

Por tanto, las relaciones (5.27), (5.30), (5.31) y la cota global de la energía cinética (ver [14] para más detalles), permiten demostrar que $\chi_1(x)\chi_2(v)L[\varphi_\epsilon(f_n)]$ está acotada en $L^2([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ independientemente de n .

Por tanto, aplicando el Teorema A.4 hemos probado que la sucesión $g_n(t, x, v)$ es relativamente compacta en $C([\tau, T], L^1(\omega))$ para cada ω estrictamente contenido en $\Omega \times \mathbb{R}^3$. Como las funciones $\chi_1(x)$ y $\chi_2(v)$ son arbitrarias, la existencia de una subsucesión de f_n que converge casi por doquier en $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3$ se prueba fácilmente. \square

Nuestro objetivo ahora es obtener la distribución límite. El lema anterior nos demuestra la existencia de una subsucesión de t_n , que denotaremos con el mismo índice, y una función $f_\infty \in C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ tal que

$$f_n \rightarrow f_\infty, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

en $C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ para cada $T > 0$. Como consecuencia

$$\sqrt{f_n} \rightarrow \sqrt{f_\infty}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

en $L^2([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3)$. Seguiremos ahora prácticamente los mismos pasos que en la derivación formal realizada en la introducción, excepto que lo aplicaremos a $\sqrt{f_\infty}$ en lugar de a f_∞ .

Usando la Ecuación (5.27) concluimos que

$$2\nabla_v \sqrt{f_\infty} + \frac{\beta}{\sigma} v \sqrt{f_\infty} = 0, \quad (5.32)$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$. Multiplicando la Ecuación (5.32) por $\exp\left\{\frac{\beta|v|^2}{4\sigma}\right\}$, tenemos que

$$\nabla_v \left(\exp\left\{\frac{\beta|v|^2}{4\sigma}\right\} \sqrt{f_\infty} \right) = 0,$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$, lo cual implica la existencia de una función $g_\infty(t, x) \in L^1_{\text{loc}}([0, T] \times \Omega)$ tal que

$$\sqrt{f_\infty} = \sqrt{g_\infty(t, x)} \exp\left\{-\frac{\beta|v|^2}{4\sigma}\right\}. \quad (5.33)$$

Esta ecuación nos permite obtener que

$$f_n \rightarrow g_\infty(t, x) \exp\left\{-\frac{\beta|v|^2}{2\sigma}\right\} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

en $C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$, con $g_\infty(t, x)$ una función a determinar. Por otro lado, como

$$\int_{\Omega} |E(t, x)|^2 dx$$

está uniformemente acotada en tiempo (Lema 5.14), podemos extraer una subsecuencia $E_n \rightarrow E_\infty$ que converge débil en $L^2([0, T] \times \Omega)$.

Nuestro próximo paso es describir $g_\infty(t, x)$. Para ello, tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la Ecuación (5.29) para $\varphi_\epsilon(f_n)$, encontrando que

$$L[\varphi_\epsilon(f_\infty)] = 3\beta \left(\frac{f_\infty}{2\sqrt{\epsilon + f_\infty}} - \varphi_\epsilon(f_\infty) \right) + \frac{\beta^2}{4\sigma} \frac{|v|^2 f_\infty^2}{(\epsilon + f_\infty)^{\frac{3}{2}}} - (E_\infty \cdot v) \frac{\beta}{\sigma} \frac{f_\infty}{\sqrt{\epsilon + f_\infty}},$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$, donde hemos usado (5.27), (5.31) y la convergencia débil de E_n . Usando el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada podemos tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, obteniendo que

$$L[\sqrt{f_\infty}] = -\frac{3}{2}\beta \sqrt{f_\infty} + \frac{\beta^2}{4\sigma} |v|^2 \sqrt{f_\infty} + (E_\infty \cdot v) \frac{\beta}{\sigma} \sqrt{f_\infty},$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3$. Introduciendo

$$f_\infty = g_\infty(t, x) \exp\{-\beta|v|^2/(2\sigma)\}$$

en la última fórmula, encontramos que

$$\frac{\partial \sqrt{g_\infty}}{\partial t} = v \cdot \left(\frac{\beta}{2\sigma} E_\infty \sqrt{g_\infty} - \nabla_x \sqrt{g_\infty} \right).$$

Por tanto, g_∞ no depende de t , y debe satisfacer

$$\nabla_x \sqrt{g_\infty(x)} = \frac{\beta}{2\sigma} E_\infty \sqrt{g_\infty(x)}, \quad (5.34)$$

en el sentido distribucional en $(0, T) \times \Omega$.

Para identificar $g_\infty(x)$ tomamos el límite en la ecuación de Poisson (5.2) con condiciones de Dirichlet. La convergencia de $f_n \rightarrow f_\infty$ en $C([0, T], L^1(\Omega \times \mathbb{R}^3))$ implica que $\rho(f_n) \rightarrow \rho(f_\infty)$ en $C([0, T], L^1(\Omega))$. Definamos Φ_∞ como la única solución en $W_o^{1,q}(\Omega)$ para cada $1 \leq q < \frac{3}{2}$ de la ecuación

$$-\Delta \Phi_\infty(x) = \theta \rho(f_\infty)(x), \text{ en } \Omega,$$

con condiciones de Dirichlet (ver [16], Teorema 8). Además, la dependencia continua de esta ecuación con respecto al segundo miembro implica que $\Phi_n \rightarrow \Phi_\infty$ en $C([0, T], W_o^{1,q}(\Omega))$ para cada $1 \leq q < \frac{3}{2}$. Además, E_∞ debe ser $-\nabla_x \Phi_\infty$, y como consecuencia $\nabla_x \Phi_\infty \in L^2(\Omega)$ y $\Phi_\infty \in H_o^1(\Omega)$.

Resolvamos la Ecuación (5.34). Formalmente, multiplicando (5.34) por la función $\exp\{\beta\Phi_\infty/(2\sigma)\}$, podemos identificar g_∞ como

$$g_\infty(x) = C_\infty \exp\left\{-\frac{\beta}{2\sigma}\Phi_\infty\right\},$$

donde C_∞ es una constante. En el caso gravitacional este paso se puede justificar rigurosamente ya que el Lema 5.15 demuestra que $\exp\{\beta\Phi_\infty/(2\sigma)\}$ es integrable. Sin embargo, en el caso electrostático esta propiedad no es conocida a priori. Este problema se supera usando los argumentos en ([14]; final del apartado II.2) o bien suponiendo la hipótesis 6' en lugar de la 6, lo cual implica (Lema 5.15) que $\exp\{\beta\Phi_\infty/(2\sigma)\}$ es integrable.

Como la masa se conserva, finalmente identificamos la constante C_∞ para tener

$$f_\infty(x, v) = \lambda \exp\left\{-\frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{|v|^2}{2} + \Phi_\infty(x)\right)\right\}, \quad (5.35)$$

donde $\Phi_\infty(x)$ es una solución débil de

$$-\Delta\Phi_\infty = \theta \|f_o\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^6)} \left(\int_\Omega \exp\left\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi_\infty(x)\right\} dx\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{\beta}{\sigma}\Phi_\infty\right\}$$

en $H_o^1(\Omega)$. Esto finaliza la demostración del Teorema 5.1.

Observación 5.3. Es fácil comprobar que el mismo resultado es cierto si en lugar de condiciones de Dirichlet para el potencial tuviésemos condiciones de Neumann. De hecho, la demostración no cambia en nada salvo las correspondientes hipótesis sobre el potencial solución que deben de pertenecer al espacio $H^1(\Omega)$. En la demostración del Lema 5.8 aparecería otro término en la ecuación del balance de energía potencial de la forma

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(j(f) \cdot n(x)) dS,$$

que es nulo debido a la hipótesis segunda del núcleo de scattering R .

Observación 5.4. Nuestro resultado principal puede considerarse también un teorema de existencia de solución débil para el problema estacionario. Las propiedades de existencia del problema estacionario (5.10) con condiciones de Dirichlet dependen fuertemente del tipo de interacción.

- i) *Caso electrostático:* en este caso el funcional de Euler-Lagrange del operador es estrictamente convexo (ver [6, 49]). Como consecuencia se demuestra la existencia de un único estado estacionario y por tanto, en este caso en el Teorema 5.1 toda la sucesión $f(t, x, v)$ tiende al mismo límite f_∞ dado por la Ecuación (5.35) donde Φ_∞ es el único estado estacionario.
- ii) *Caso gravitacional:* Usando la Ecuación (5.10) la función $u = -\frac{\beta}{\sigma}\Phi_\infty$ satisface

$$-\Delta u = \alpha \frac{e^u}{\int_\Omega e^u dx} \quad (5.36)$$

con condiciones de Dirichlet, donde $\alpha = \frac{\beta}{\sigma}M$. El hecho de que la Ecuación (5.36) tenga solución depende de la topología del dominio Ω (ver [60, 61, 64]). De hecho, si Ω es la bola unidad $B(0, 1)$, se tienen los siguientes resultados:

- Existe un valor del parámetro α_* tal que la Ecuación (5.36) con condiciones de contorno de Dirichlet tiene al menos una solución para cualquier $0 \leq \alpha < \alpha_*$ y no tiene solución para $\alpha > \alpha_*$.
- Para $\alpha = \alpha_o = 2 |\partial B(0, 1)|$, la Ecuación (5.36) tiene infinitas soluciones acotadas y una única solución radial no acotada $u = U(x) = -2 \log |x|$.
- Para α suficientemente pequeño, la solución es única.

Por otro lado, si Ω es un anillo, la Ecuación (5.36) tiene al menos una solución para cualquier valor de α (ver [60]).

Estos hechos nos aseguran que en caso de que no haya solución estacionaria la energía potencial del sistema no puede ser acotada, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla_x \Phi(t, x)|^2 dx = \infty,$$

porque en caso contrario nuestro teorema se aplicaría y el problema estacionario debería tener solución. Por ejemplo, en el caso de la bola unidad si $\frac{\beta}{\sigma}M > \alpha_*$.

Cuando α es tal que el problema de Dirichlet para la Ecuación (5.36) tiene más de una solución es un problema abierto determinar el comportamiento dinámico de la solución $f(t, x, v)$ cuando t tiende a infinito. Por ejemplo, no sabemos si podría ocurrir que existieran dos sucesiones de tiempos para los que las correspondientes sucesiones tendieran a distintos estados estacionarios.

Apéndice A

La ecuación de VFP.

A.1 La ecuación lineal de Vlasov-Fokker-Planck en \mathbb{R}^{2N} .

Desde un punto estocástico, la ecuación de Vlasov-Fokker-Planck (VFP) caracteriza la evolución de la densidad probabilística de las partículas en el espacio de fase. En este modelo, la posición y la velocidad de las partículas son independientes debido a fluctuaciones estocásticas de las magnitudes. De hecho, el principio de incertidumbre de Heisenberg, en el caso de interacciones electrónicas, nos afirma que la posición y la velocidad de un electrón no puede ser determinada simultáneamente. Por tanto, si consideramos a la posición de cada partícula $x(t)$ y a su velocidad $v(t)$ variables aleatorias, $f(t, x, v)$ es la densidad de probabilidad de estas magnitudes. Además, $x(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial estocástica

$$x'' + \beta x' + \nabla \Phi_o(x) = \Gamma(t) \quad (\text{A.1})$$

donde $\beta \geq 0$ es el parámetro de fricción entre las partículas, $\Phi_o(x)$ es el potencial externo que actúa sobre el sistema y $\Gamma(t)$ es un proceso estocástico con distribución gaussiana de media cero y coeficiente de correlación en tiempo del tipo $2\sigma\delta_o(t-t')$, donde δ_o es la función Delta de Dirac y $\sigma > 0$ es la varianza de la fuerza externa aleatoria en (A.1), también llamada el coeficiente de difusión térmica. De hecho, el coeficiente de correlación anterior significa que los procesos estocásticos $\Gamma(t)$ y $\Gamma'(t)$ son estadísticamente independientes. La ecuación diferencial estocástica (A.1) es conocida como la ecuación de Langevin para el movimiento browniano de la partícula. Utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas y la integral de Ito, (ver [45]), se puede calcular la ecuación en derivadas parciales que verifica la distribución de partículas f , que es llamada la ecuación de Vlasov-Fokker-Planck, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)f + \text{div}_v((E_o - \beta v)f) - \sigma \Delta_v f = h, \quad \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^{2N} \quad (\text{A.2})$$

donde $E_o = -\nabla\Phi_o(t, x)$ es el campo externo de fuerzas y h es una inyección o salida de partículas del medio.

El sistema de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck aparece cuando se considera un conjunto de partículas que interactúan de manera mutua produciendo que éstas se muevan de forma browniana. Debido a la interacción mutua de las partículas, debemos considerar en el modelo el campo de fuerzas generado por el propio sistema en cada partícula. El potencial de este campo de fuerzas satisface la ecuación de Poisson

$$-\Delta\Phi = \theta\rho(f),$$

y en la ecuación de VFP aparece el campo de fuerzas interno $E = -\nabla_x\Phi$ además de E_o .

Las anteriores consideraciones físicas sobre el modelo del cual proviene la ecuación de VFP, la veracidad del modelo y su utilidad en diversos campos como luz láser, semiconductores, etc... puede verse ampliamente comentada en [76].

En esta sección, nos concentraremos en resolver la ecuación lineal VFP, es decir, suponemos conocido el campo de fuerzas que actúa sobre las partículas $E_o(t, x)$. Más concretamente, revisaremos los resultados fundamentales acerca del problema de Cauchy para la Ecuación (A.2) con condiciones iniciales para f dadas por f_o donde $\beta \geq 0$ y $\sigma > 0$.

Comenzaremos estudiando la ecuación lineal sin interacción externa, es decir, $E_o = 0$. La ecuación lineal correspondiente viene dada por el operador diferencial

$$Lf = \frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)f - \operatorname{div}_v(\beta v \cdot f) - \sigma\Delta_v f. \quad (\text{A.3})$$

Recordemos la definición de solución débil para el problema de Cauchy de la Ecuación (A.2). Sea $S(\mathbb{R}^{2N})$ el espacio localmente convexo de las funciones de clase infinito y crecimiento lento en infinito y $S'(\mathbb{R}^{2N})$ su dual, llamado el espacio de las distribuciones temperadas (ver [77]).

Definición A.1. Dada $f_o \in S'(\mathbb{R}^{2N})$, diremos que f es una solución débil de la Ecuación (A.2) si

$$f \in C([0, \infty), S'(\mathbb{R}^{2N})) \cap C_w((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N})) \quad , \quad |E_o| \in L^1_{loc}(Q_T; f)$$

y la Ecuación (A.2) se verifica en el sentido siguiente

$$\int_{Q_T} f L^t\phi \, d(t, x, v) - \int_{Q_T} f (E_o \cdot \nabla_v)\phi \, d(t, x, v) = \int_{Q_T} f_o \phi(0, \cdot) \, d(x, v),$$

para cada $\phi \in C_0^\infty(Q_T)$ con $\phi(T, \cdot) = 0$ y $Q_T = [0, T] \times \mathbb{R}^{2N}$, donde L^t es el operador adjunto de L , para cada $T > 0$.

La mayor parte de los resultados que vamos a exponer acerca del problema de Cauchy para la ecuación de VFP están recogidos en la literatura (véase [12], [13], [72], [75], [86], [85]). Posteriormente, en cada resultado indicaremos la referencia exacta donde se puede encontrar.

El operador L es un operador hipoeĺptico en el sentido de L. Hormander [52] o también llamado ultraparabólico (ver [44], [57]). Aunque, el operador es degenerado en los términos de segundo orden, el término $(v \cdot \nabla_x)f$ produce una difusión "indirecta" en la variable x que *a priori* no es evidente de la forma de la ecuación. De hecho, este operador admite una solución fundamental G (ver [12] sección 2, [86] sección 2) que viene dada por

$$G(t, x, v, \xi, \nu) = \bar{G}(t, x - \xi - \eta(t)\nu, v - e^{-\beta t}\nu) \quad (\text{A.4})$$

donde $x, v, \xi, \nu \in \mathbb{R}^N, t \geq 0$ y

$$\eta(t) = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta},$$

para cada $\beta > 0$.

La función \bar{G} , que es la solución fundamental centrada en cero, tiene por fórmula

$$\bar{G}(t, x, v) = \frac{1}{(4\pi\sigma)^N D(t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{4\sigma}\varphi_0(t, x, v)}, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\varphi_0(t, x, v) = \frac{1}{D(t)} \int_0^t |\eta(s)v - e^{-\beta s}x|^2 ds$$

y

$$D(t) = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\eta(2t)}{2}t - \eta(t)^2 \right].$$

En [86] se puede ver la fórmula explícita de φ_0 que está dada por

$$\begin{aligned} & \varphi_0(t, x - \xi - \eta(t)\nu, v - e^{-\beta t}\nu) = \\ & = \frac{|\beta(x - \xi) + (v - \nu)|^2}{t} + \frac{|\frac{e^{\beta t}-1}{t}(x - \xi + \frac{v-\nu}{\beta}) + (v - e^{\beta t}\nu)|^2}{[\frac{e^{2\beta t}-1}{2\beta} - \frac{(e^{\beta t}-1)^2}{\beta^2 t}]} \end{aligned}$$

La solución fundamental en el caso $\beta = 0$ se deduce de las fórmulas anteriores haciendo el límite cuando β tiende a cero. Se comprueba que, en ese caso, la solución fundamental, que continuaremos llamando G , se expresa como

$$G(t, x, v, \xi, \nu) = \bar{G}(t, x - \xi - t\nu, v - \nu),$$

donde en este caso \bar{G} vale

$$\bar{G}(t, x, v) = \frac{3^{\frac{N}{2}}}{(2\pi\sigma)^N t^{2N}} \exp\left\{-\frac{3|x|^2 + 3|x - tv|^2 - t^2|v|^2}{2\sigma t^3}\right\}.$$

Estas fórmulas se obtienen mediante la aplicación de la transformada de Fourier a la operador L y aplicando el método de las características para la ecuación hiperbólica que se obtiene (ver [52], [57], [76]). Obsérvese que la solución fundamental al ser integrada en x o v resultan funciones que son "prácticamente" la solución fundamental de la ecuación del calor,

$$\mathcal{H}_x(t, x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x, v, \xi, \nu) dv = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\sigma t^3\right)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x - \xi - t\nu|^2}{\frac{4}{3}\sigma t^3}\right\} \quad (\text{A.6})$$

y

$$\mathcal{H}_v(t, v, \nu) = \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x, v, \xi, \nu) dx = \frac{1}{(4\pi\sigma t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{|v - \nu|^2}{4\sigma t}\right\}. \quad (\text{A.7})$$

Dentro de la teoría de procesos estocásticos, a G se le suele llamar un proceso de difusión de Ornstein-Uhlenbeck (ver [76]). En el próximo resultado incluimos las propiedades más relevantes de G . Parte del apartado *i*) puede verse en el Lema 1 de [13], parte del apartado *i*) y los apartados *ii*) y *iii*) pueden consultarse en la sección II de [86] y por último, el apartado *iv*) está demostrado en [12] sección 2.

Lema A.1. *La solución fundamental del operador (A.3) satisface las siguientes propiedades.*

i) G es de clase infinito en todas sus variables para $t > 0$ y

$$\partial_t^k \partial_{x,v}^\alpha G \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}_{x,v}^{2N}; S(\mathbb{R}_{\xi,\nu}^{2N})),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y α, γ multíndice. De hecho, para cada $n, k \in \mathbb{N}$, α, γ multíndices y $0 < \epsilon < T < \infty$, se tiene que

$$\frac{(1 + |\xi| + |\nu|)^n}{(1 + |x| + |v|)^{n+2(|\alpha|+|\gamma|+2k)}} |\partial_t^k \partial_{x,v}^\alpha \partial_{\xi,\nu}^\gamma G|$$

está acotada en $[\epsilon, T] \times \mathbb{R}^{4N}$. Además, verifica la ecuación $LG = 0$ para cada $t > 0$ y para cada función continua $\Psi(x, v)$ y de soporte compacto se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) \Psi(\xi, \nu) d\xi d\nu \rightarrow \Psi(x, v),$$

cuando $t \rightarrow 0$, es decir, G es la solución fundamental del operador L .

ii) G es positiva y verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) d(\xi, \nu) = e^{N\beta t}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) d(x, v) = 1,$$

para cada $t > 0$, $x, v, \xi, \nu \in \mathbb{R}^N$.

iii) Para cada $t > 0$ y $x, v, \xi, \nu \in \mathbb{R}^N$ obtenemos las siguientes estimaciones

$$|\nabla_\nu G(t, x, v, \xi, \nu)| \leq C(\sigma t)^{-\frac{1}{2}} G(t, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}),$$

$$|\nabla_v G(t, x, v, \xi, \nu)| \leq C(\sigma t)^{-\frac{1}{2}} G(t, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}),$$

$$|\nabla_x G(t, x, v, \xi, \nu)| \leq C(\sigma t)^{-\frac{3}{2}} G(t, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2})$$

y

$$|\Delta_\nu G(t, x, v, \xi, \nu)| \leq C(\sigma t)^{-1} G(t, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}).$$

iv) Sean

$$d_h(t) = \int_0^t \eta_h(\tau)^2 d\tau \quad , \quad \eta_h(t) = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + h e^{-\beta t}$$

y

$$e^\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}},$$

para cada $h \geq 0$, entonces se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv = \frac{1}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N}{2}}} e^\Delta \left(\frac{x - \xi - \eta_h(t)\nu}{\sqrt{2\sigma d_h(t)}} \right)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_{\nu} G(t, x - hv, v, \xi, \nu) dv = \frac{-\eta_h(t)}{(2\sigma d_h(t))^{\frac{N+1}{2}}} \nabla e^{\Delta} \left(\frac{x - \xi - \eta_h(t)\nu}{\sqrt{2\sigma d_h(t)}} \right).$$

Usando las propiedades de la solución fundamental G y la teoría clásica de distribuciones, se puede demostrar el siguiente resultado acerca de la ecuación $Lf = 0$ con f_o como dato inicial (ver [13] sección 2). Denotemos por $C_o(\mathbb{R}^{2N})$ el espacio de las funciones continuas con límite cero en infinito.

Proposición A.1. *Dado f_o en $S'(\mathbb{R}^{2N})$ existe una única solución débil perteneciente a $C([0, \infty), S'(\mathbb{R}^{2N}))$ que satisface la Ecuación (A.2) con condición inicial f_o y $E_o = 0$, que está dada por*

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu.$$

Además, f pertenece a $C^{\infty}((0, \infty) \times \mathbb{R}^{2N})$. Si $f_o \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$, entonces $f \in C_w([0, \infty), \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})) \cap C((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ y f y cualquiera de sus derivadas respecto a x o v pertenecen a $C((0, \infty), L^p(\mathbb{R}^{2N})) \cap C((0, \infty), C_o(\mathbb{R}^{2N}))$, para $1 \leq p \leq \infty$. Si, además, $f_o \geq 0$, entonces $f \geq 0$.

Observación A.1.- Como consecuencia del anterior lema y del apartado *iv)* del Lema A.1 es evidente que si $f_o \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$, entonces $\rho(f) \in C^{\infty}((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ y $\rho(f)$ y cualquiera de sus derivadas respecto a x pertenece a $C((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap C_o(\mathbb{R}^{2N}))$. Análogamente, para $\rho_h(f)$ y la cota es independiente de $h > 0$.

De igual forma, el problema no homogéneo se puede resolver obteniendo el siguiente resultado que se deduce de la Proposición A.1 y la teoría general de distribuciones aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. La última parte es consecuencia de la Proposición II.5 en [86].

Proposición A.2. *Dado f_o en $S'(\mathbb{R}^{2N})$ y $h \in C([0, \infty), L^{\infty}(\mathbb{R}^{2N}))$. Entonces, existe una única solución débil $f \in C([0, \infty), S'(\mathbb{R}^{2N}))$ que satisface la Ecuación (A.2) con condición inicial f_o y $E_o = 0$ dada por*

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu +$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t-s, x, v, \xi, \nu) h(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds.$$

Si $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ y $h \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^{2N}))$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^{2N}))$. Además, si $f_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$ y $h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, continua, Hölder-continua en x uniformemente en t y v , con exponente mayor que $\frac{1}{3}$ para cada $T > 0$, y $h \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}))$, entonces $f(t, x, v)$ es de clase 1 con respecto a las variables (x, t) y de clase dos con respecto a v , para cada $t > 0$, y f y sus derivadas son acotadas, f verifica la ecuación de forma clásica, para cada $t > 0$, y $f(t, x, v) \in C((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N}))$.

Por último, el próximo lema nos da estimaciones de integrales relacionadas con la función d_0 definida en el Lema A.1 y que son importantes para obtener estimaciones necesarias para el desarrollo del capítulo tercero.

Lema A.2. Existe una constante C dependiendo sólo de β y de los exponentes $a > 0$ y $-\frac{1}{3} < c < 0$ tal que

$$\int_0^t (t-s)^{a-1} d_0(s)^c ds \leq C B(a, 3c+1),$$

donde $B(a, b)$ es la función beta de exponentes a y b .

Demostración. Denotaremos por C varias constantes dependiendo sólo de β y de los exponentes a y c . Teniendo en cuenta la fórmula explícita de d_0 dada en el Lema A.1, debe existir $t_\beta > 0$ tal que $d_0(t) > \frac{t^3}{3}$ para $0 < t < t_\beta$.

Por tanto si $0 < t < t_\beta$ tenemos que

$$\int_0^t (t-s)^{a-1} d_0(s)^c ds \leq C \int_0^t (t-s)^{a-1} s^{3c} ds,$$

y se ha demostrado la cota.

Si $t > t_\beta$, podemos dividir la integral para tener

$$\int_0^t (t-s)^{a-1} d_0(s)^c ds \leq \int_0^{t_\beta} (t-s)^{a-1} d_0(s)^c ds + \int_{t_\beta}^t (t-s)^{a-1} d_0(s)^c ds.$$

En la primera parte usamos la cota $d_0(t) > \frac{t^3}{3}$ y se obtiene de forma fácil la acotación por $C B(a, 3c+1)$. En la segunda parte, tenemos en cuenta que $d_0(t)$

es creciente y deducimos que

$$\int_{t_\beta}^t (t-s)^{a-1} d_o(s)^c ds \leq d_o(t_\beta)^c \frac{(t-t_\beta)^a}{a}.$$

Como $B(a, 3c+1) = C(a, c)t^{a+3c}$, deducimos que

$$\int_{t_\beta}^t (t-s)^{a-1} d_o(s)^c ds \leq d_o(t_\beta)^{3c} \frac{(t-t_\beta)^a}{a} \leq C \frac{1}{t_\beta^{3c}} B(a, 3c+1).$$

Con lo que el lema queda probado. \square

Destinaremos el resto de esta sección a resolver el problema de Cauchy para la ecuación de VFP (A.2) donde el campo de fuerzas E_o es conocido. La primera herramienta para resolver este problema es obtener una solución fundamental del operador (ver [86] sección 2). Para ello, es necesario suponer que E_o pertenece a $L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3))$. La solución fundamental G_{E_o} que buscamos debe verificar que $LG_{E_o} = -(E_o \nabla_v)G_{E_o}$ con lo que debe satisfacer que

$$G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu) = G(t - \tau, x, v, \xi, \nu) - \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t - \tau', x, v, \xi', \nu') E_o(\tau', \xi') \nabla_{\nu'} G_{E_o}(\tau', \xi', \nu', \tau, \xi, \nu) d\xi' d\nu' d\tau',$$

o bien que

$$G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu) = G(t - \tau, x, v, \xi, \nu) + \int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_{\nu'} G(t - \tau', x, v, \xi', \nu') E_o(\tau', \xi') G_{E_o}(\tau', \xi', \nu', \tau, \xi, \nu) d\xi' d\nu' d\tau'.$$

Esta expresión motiva construir un esquema iterativo para calcular G_{E_o} que converge bajo la hipótesis de que E_o pertenezca a $L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3))$. En el próximo resultado recogemos las principales propiedades de esta solución fundamental (ver [86] sección 2).

Lema A.3. *Si $E_o \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3))$, entonces existe $G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu)$ con $0 \leq \tau < t \leq T$ que satisface las siguientes propiedades.*

- i) G_{E_o} verifica la Ecuación (A.2) de forma clásica para cada $t > 0$ y para cada función continua $\Psi(x, v)$ y de soporte compacto se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu) \Psi(\xi, \nu) d\xi d\nu \rightarrow \Psi(x, v),$$

cuando $t \rightarrow \tau$, es decir, G_{E_o} es la solución fundamental de la Ecuación (A.2).

ii) G_{E_o} es positiva y verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu) d(\xi, \nu) = e^{N\beta(t-\tau)}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu) d(x, v) = 1,$$

para cada $t > \tau$, $x, v, \xi, \nu \in \mathbb{R}^N$.

iii) Para cada $t > \tau$ y $x, v, \xi, \nu \in \mathbb{R}^N$ obtenemos las siguientes estimaciones

$$G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu) \leq C G(t - \tau, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}),$$

$$|\nabla_\nu G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu)| \leq C (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} G(t - \tau, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}),$$

$$|\nabla_v G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu)| \leq C (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} G(t - \tau, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}),$$

$$|\nabla_x G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu)| \leq C (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} G(t - \tau, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2})$$

y

$$|\Delta_v G_{E_o}(t, x, v, \tau, \xi, \nu)| \leq C (t - \tau)^{-1} G(t - \tau, \frac{x}{2}, \frac{v}{2}, \frac{\xi}{2}, \frac{\nu}{2}),$$

donde C depende de la norma de E_o en $L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^3))$.

Las anteriores propiedades de G_{E_o} nos permiten deducir el siguiente resultado para la Ecuación (A.2) análogo al obtenido en los Lemas A.1 y A.2. La última parte es consecuencia de la Proposición II.5 en [86].

Proposición A.3. Dado f_o en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$, $h \in C([0, \infty), L^\infty(\mathbb{R}^{2N}))$ y E_o perteneciendo a $L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\mathbb{R}^3))$ para cada $T > 0$, entonces existe una única solución débil $f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ que satisface la Ecuación (A.2), con condición inicial f_o y segundo miembro h , dada por

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_{E_o}(t, x, v, 0, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu +$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_{E_o}(t, x, v, s, \xi, \nu) h(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds.$$

Si $f_o \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ y $h \in C([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^{2N}))$, con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in C([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^{2N}))$. Además, si $f_o \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$ y $h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, continua, Hölder-continua en x uniformemente en t y v , con exponente mayor que $\frac{1}{3}$ para cada $T > 0$, y $h \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}))$, entonces $f(t, x, v)$ es de clase 1 con respecto a las variables (x, t) y de clase dos con respecto a v , para cada $t > 0$, y f y sus derivadas son acotadas, verifica la ecuación de forma clásica, para cada $t > 0$, y $f(t, x, v) \in C((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2N}))$. Si $f_o \geq 0$, la solución f es positiva.

Definamos ahora un nuevo concepto de solución para la ecuación de VFP.

Definición A.2. Dada $f_o \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$, diremos que f es una solución integral de la ecuación de VFP (A.2) si

$$f \in C_{w^*}([0, \infty), \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})) \cap BC((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N})),$$

$$t^{\frac{1}{2}} E_o \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

para cada $T > 0$, y se verifica

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_\nu G(t-s, x, v, \xi, \nu) E_o(s, \xi) f(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds.$$

Es fácil de la definición, demostrar que toda solución integral de la ecuación de VFP es una solución débil de dicha ecuación. Las hipótesis sobre E_o pueden debilitarse en el resultado de existencia Lema A.3 y se puede demostrar el siguiente resultado (véase [12] sección 2) utilizando un argumento de punto fijo.

Proposición A.4. Dada $f_o \geq 0$ en $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ y $E_o \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$ para cada $T > 0$. Entonces, existe una única solución débil $f \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ positiva

que satisface la Ecuación (A.2) con condición inicial f_o , que es solución integral, es decir,

$$f(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o(\xi, \nu) d\xi d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_\nu G(t-s, x, v, \xi, \nu) E_o(s, \xi) f(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds.$$

Además, bajo estas hipótesis los conceptos de solución débil e integral son equivalentes.

Aplicando un argumento de punto fijo análogo se puede demostrar la existencia de una única solución integral para dato inicial una medida $f_o \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$ dado $t^{\frac{1}{2}} E_o \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^N))$ con norma suficientemente pequeña. Además, se puede probar la unicidad de solución débil de la Ecuación (A.2) con

$$t^{\frac{1}{2}} E_o \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

para cada $T > 0$, suponiendo que la solución f verifica la regularidad de una solución integral, es decir,

$$f \in C_{w^*}([0, \infty), \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})) \cap BC((0, \infty), L^1(\mathbb{R}^{2N})).$$

Este hecho implica que los conceptos de solución integral y débil son equivalentes para soluciones con la regularidad arriba indicada. La unicidad de solución débil de la Ecuación (A.2) con $t^{\frac{1}{2}} E_o \in BC(0, T; BC(\mathbb{R}^N))$, para cada $T > 0$, suponiendo que la solución $f \in C_{w^*}([0, \infty), \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N}))$ también es cierta. La demostración de la unicidad de la solución débil en las hipótesis detalladas anteriormente sigue las ideas clásicas de unicidad de solución para leyes de conservación, ecuaciones de la mecánica de fluidos o de transporte (ver [62], [63], [39]). Para ello se considera como función test en la definición de solución débil una aproximación de la función signo de la solución. Clásicos argumentos de paso al límite y la desigualdad de Kato terminan la demostración. Para más detalles, referimos a [62, 63].

Por último, obtendremos un resultado acerca de la positividad de las soluciones integrales dado un dato inicial positivo, lo cual no es evidente de su definición.

Lema A.4. Sea $f_o \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$ una medida positiva y $t^{\frac{1}{2}} E_o \in BC((0, T) \times \mathbb{R}^N)$. Si f es una solución integral de la ecuación de VFP, entonces $f \geq 0$.

Demostración. Para su demostración regularizamos el dato inicial por convolución con una aproximación de la identidad. Así, tendremos un dato inicial regularizado f_o^ϵ positivo que converge en la topología débil- \star de medidas hacia f_o cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por otra parte, regularizamos el campo E_o por convolución en espacio y en tiempo utilizando el retardamiento M^ϵ (véase [31]), para tener E_o^ϵ que pertenece a $L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))$ para cada $T > 0$, y converge hacia E_o en compactos de $(0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ uniformemente.

Sea f^ϵ la solución integral positiva de la Ecuación (A.2) con dato inicial f_o^ϵ y campo externo E_o^ϵ , cuya existencia asegura la Proposición A.4. Por tanto, tenemos que

$$f^\epsilon(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G(t, x, v, \xi, \nu) f_o^\epsilon(\xi, \nu) d\xi d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla_\nu G(t-s, x, v, \xi, \nu) E_o^\epsilon(s, \xi) f^\epsilon(s, \xi, \nu) d\xi d\nu ds.$$

Teniendo en cuenta que tanto f_o^ϵ como E_o^ϵ son regulares, tenemos que f^ϵ lo es y satisface

$$f^\epsilon(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} G_{E_o^\epsilon}(t, x, v, \xi, \nu) f_o^\epsilon(\xi, \nu) d\xi d\nu.$$

La propiedad segunda del Lema A.3 implica que

$$\|f^\epsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} = \|f_o\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})},$$

para cada $t \geq 0$. Un argumento totalmente análogo al del Lema 2.7 nos permite demostrar que la sucesión f^ϵ es relativamente compacta en $C_{w^*}([0, \infty), \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N}))$. Por tanto, podemos tomar una subsucesión convergente débil- \star hacia g perteneciente a $C_{w^*}([0, \infty), \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N}))$. Como f^ϵ son todas positivas, g debe ser positiva. Teniendo en cuenta que E_o^ϵ converge hacia E_o en compactos de $(0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ uniformemente, es fácil ver que g es una solución débil de la Ecuación (A.2) con dato inicial f_o y campo externo E_o .

Por último, la unicidad de solución débil implica que $g = f$, ya que toda solución integral es solución débil. Por tanto, la solución f positiva. \square

Para finalizar esta sección, incluiremos un resultado que permite obtener estimaciones sobre la densidad $\rho(f)$ a partir de estimaciones sobre f y de acotación de momentos en v de f . El siguiente resultado es clásico en la literatura y se conoce como lema de interpolación (ver [56]).

Lema A.5. Sea $f(x, v) \in L^1(\mathbb{R}^{2N}) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$ una función positiva con $1 < p \leq \infty$ y $|v|^k f \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$, entonces para cada $0 \leq k' < k$ el momento de orden k' de f definido por

$$j_{k'}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{k'} f(x, v) dv,$$

verifica que $j_{k'}(f) \in L^{r_k(p)}(\mathbb{R}^N)$ con $r_k(p)$ dado por

$$r_k(p) = \frac{N + kp'}{N + k'p' + (k - k')(p' - 1)}, \quad (\text{A.8})$$

y

$$\|j_{k'}(f)\|_{L^{r_k(p)}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})}^{\frac{(k-k')p'}{N+k'p'}} \| |v|^k f \|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}^{\frac{N+k'p'}{N+k'p'}}.$$

El mismo resultado es cierto si partimos de una función $f(x, v)$ definida en $\Omega \times \mathbb{R}^N$ con Ω cualquier dominio en \mathbb{R}^N .

A.2 Teoremas de compacidad.

En esta sección exponemos algunos de los teoremas de compacidad utilizados a lo largo de esta memoria. El primero es una generalización del teorema de Ascoli-Arzelà al caso en que se consideran funciones de un intervalo compacto en un espacio de Banach que son continuas con la topología débil del espacio de Banach. Este teorema se puede encontrar en [56] y en las obras allí referenciadas, y su demostración sigue pasos análogos a los de la demostración del teorema de Ascoli-Arzelà clásico.

Teorema A.1. Supongamos que I es un espacio topológico separable y X un espacio de Banach. Consideremos $\mathcal{F} \subset X^I$, donde X^I es el conjunto de funciones de I en X , tal que

- i) El conjunto $\{g(t), g \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto $\sigma(X, X')$ para cada $t \in I$.
- ii) El conjunto $\{x' \circ g, g \in \mathcal{F}\}$ es equicontinuo para cada $x' \in X'$.

Entonces, para cada $\{g_n\} \subset \mathcal{F}$, existe una subsucesión $\{g_{\sigma(n)}\}$ y $g_o : I \rightarrow (X, \sigma(X, X'))$ continua tal que $\{x' \circ g_{\sigma(n)}\}$ tiende a $x' \circ g_o$ uniformemente en I para cada $x' \in X'$.

Además, el resultado es también cierto si tomamos $\mathcal{F} \subset X^I$ donde X es un espacio de Banach separable y X' su dual y las dos propiedades anteriores son ciertas en la topología débil- \star $\sigma(X', X)$ de X' intercambiando los papeles de X y X' .

Recordemos la siguiente caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^1(\mathbb{R}^N)$ conocido como el teorema de Dunford-Pettis (ver [15], capítulo IV).

Teorema A.2. Sea $\mathcal{F} \subset L^1(\mathbb{R}^N)$. \mathcal{F} es débilmente relativamente compacto en $L^1(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si

- i) \mathcal{F} está acotado.
- ii) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es tal que $|\Omega| \rightarrow 0$, se tiene que

$$\int_{\Omega} |f(z)| dz$$

tiende a cero uniformemente para $f \in \mathcal{F}$.

- iii) Si $R \rightarrow \infty$, entonces

$$\int_{|z| \geq R} |f(z)| dz$$

tiende a cero uniformemente para $f \in \mathcal{F}$.

El próximo resultado de compacidad, debido a Prohorov, nos caracteriza los subconjuntos débil- \star relativamente compactos de $\mathcal{M}(Q_T)$. Este resultado puede verse en [9].

Teorema A.3. Sea $B > 0$ una constante y $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}(Q_T)$ tal que

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(Q_T)} = B$$

para cada $\mu \in \mathcal{S}$. Entonces, \mathcal{S} es débil- \star relativamente compacto en $\mathcal{M}(Q_T)$ si y sólo si para cada $\delta > 0$ existe un conjunto compacto $X \subset Q_T$ tal que

$$\mu(X) > B - \delta$$

para cada $\mu \in \mathcal{S}$. Además, los límites en la topología débil- \star tienen B como norma en $\mathcal{M}(Q_T)$.

Por último, veamos un resultado de compacidad debido a F. Bouchut y J. Dolbeault ([14] Apéndice 1), para la Ecuación (A.3), que constituye una ampliación de un resultado previo de R. J. DiPerna y P. L. Lions [37].

Teorema A.4. Sea $T > 0$ y $f_o \in L^1(\mathbb{R}^6)$, $h \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}^6)$. Si f es solución de

$$Lf = h,$$

con $f \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^6))$ y dato inicial $f_o \in F$, siendo F un subconjunto acotado de $L^1(\mathbb{R}^6)$, con $h \in H$, subconjunto de $L^2(0, T; L^1(\mathbb{R}^6))$, entonces para cada $\eta > 0$ y ω dominio acotado de \mathbb{R}^6 , f es compacto en

$$C([\eta, T], L^1(\omega)).$$

Bibliografía

- [1] N. B. ABDALLAH, *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **17**, 451-476 (1994).
- [2] D. R. ADAMS, *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives*, Annals of Mathematics **128**, 385-398 (1988).
- [3] R. ALEXANDRE, *Weak solutions of the Vlasov-Poisson initial boundary value problem*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **16**, 587-607 (1993).
- [4] A. ARNOLD, L. L. BONILLA, P. A. MARKOWICH, *Lyapunov functionals and large-time-asymptotics of mean-field nonlinear Fokker-Planck equations*, Transp. Theory and Stat. Phys., sometido.
- [5] L. L. BONILLA, J. M. CASADO, *Dynamics of a soft-spin van Hemmen model. I. Phase and bifurcation diagrams for stationary distributions*, J. Stat. Phys. **56**, 113-125 (1989).
- [6] G. I. BARENBLATT, *Similarity, self-similarity and intermediate asymptotics*, Consultants Bureau, New York 1978.
- [7] G. I. BARENBLATT, Y. B. ZELDOVICH, *The asymptotic properties of self-modeling solutions of the nonstationary gas filtration equations*, Soviet Phys. Dok. **3**, 44-47 (1958).
- [8] P. BENILAN, H. BREZIS, M. CRANDALL, *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$* , Analli della Scuola Norm. Sup. di Pisa **4**, 523-555 (1975).
- [9] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York 1968.
- [10] L. L. BONILLA, J. A. CARRILLO, J. SOLER, *Asymptotic behaviour of the initial boundary value problem for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, sometido.
- [11] L. L. BONILLA, J. A. CARRILLO, J. SOLER, *An H-theorem for electrostatic and self-gravitating Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems*, Physics Letters A **212**, 55-59 (1996).

- [12] F. BOUCHUT, *Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in three dimensions*, J. Func. Anal. **111**, 239-258 (1993).
- [13] F. BOUCHUT, *Smoothing effect for the non-linear Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, J. Diff. Eqn. **122**, 225-238 (1995).
- [14] F. BOUCHUT, J. DOLBEAULT, *On long asymptotics of the VFP equation and of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with coulombic and newtonian potentials*, Diff. and Integ. Equations **8**, 487-514 (1995).
- [15] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris 1983.
- [16] H. BREZIS, W. A. STRAUSS, *Semilinear second-order elliptic equations in L^1* , J. Math. Soc. Japan **25**, 565-590 (1973).
- [17] L. CAFFARELLI, J. L. VÁZQUEZ, N. I. WOLANSKI, *Lipschitz-continuity of solutions and interfaces of the N -dimensional porous medium equation*, Indiana Univ. Math. Journal **36**, 373-401 (1987).
- [18] A. CARPIO, *Asymptotic behaviour for the vorticity equations in dimensions two and three*, Comm. P.D.E. **19**, 827-872 (1994).
- [19] J. A. CARRILLO, *Global weak solutions of the absorption and reflection-type initial-boundary value problems for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, en preparación.
- [20] J. A. CARRILLO, J. SOLER, *Sobre las ecuaciones de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck con datos iniciales medidas*, Actas XIII CEDYA, 292-297 (1993).
- [21] J. A. CARRILLO, J. SOLER, *On the initial value problem for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system with initial data in L^p spaces*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **18**, 825-839 (1995).
- [22] J. A. CARRILLO, J. SOLER, *On the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equations with measures in Morrey spaces as initial data*, sometido.
- [23] J.A. CARRILLO, J. SOLER, *Global existence of functional solutions for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in 3-D with bounded measures as initial data*, in Calculus of Variations, Applications and Computations, C. Bandle et al ed., Pitmann Research Notes in Mathematical Series 326, Pont-à-Mousson 1994, 41-54.
- [24] J. A. CARRILLO, J. SOLER, *Functional solutions for the Vlasov-Poisson system*, por aparecer en Appl. Math. Letters.
- [25] J. A. CARRILLO, J. SOLER, *On functional solutions for three dimensional kinetic equations of Vlasov type with bounded measures as initial data*, sometido.

- [26] J. A. CARRILLO, J. SOLER, J. L. VÁZQUEZ, *Asymptotic behaviour for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, C. R. Acad. Sci. Paris **321**, 1195-1200 (1995).
- [27] J. A. CARRILLO, J. SOLER, J. L. VÁZQUEZ, *Asymptotic behaviour and selfsimilarity for the three dimensional Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, por aparecer en J. Funct. Anal.
- [28] C. CERCIGNANI, *On the initial-boundary value problem for the Boltzmann equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **116**, 307-315 (1992).
- [29] C. CERCIGNANI, R. ILLNER, M. PULVIRENTI, *The mathematical theory of dilute gases*, Springer series in Applied Mathematical Sciences, vol 106, Springer-Verlag 1994.
- [30] M. CESSENAT, *Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique*, C. R. Acad. Sci. Paris **299**, 831-834 (1984).
- [31] G. H. COTTET, J. SOLER, *Three-dimensional Navier-Stokes equations for singular filament data*, J. Diff. Eqn. **74**, 234-253 (1988).
- [32] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique*, vol 9, Masson 1988.
- [33] P. DEGOND, *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **19**, 519-542 (1986).
- [34] P. DEGOND, S. MAS-GALLIC, *Existence of solutions and diffusion approximation for a model Fokker-Planck equation*, Transp. Theory and Stat. Phys. **6**, 589-636 (1987).
- [35] L. DESVILLETES, *Convergence to equilibrium in large time for Boltzmann and BGK equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **110**, 73-91 (1990).
- [36] L. DESVILLETES, J. DOLBEAULT, *On long time asymptotics of the Vlasov-Poisson-Boltzmann equations*, Comm. P.D.E. **16**, 451-489 (1991).
- [37] R. DIPERNA, P. L. LIONS, *On the Fokker-Planck-Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **120**, 1-23 (1988).
- [38] R. DIPERNA, P. L. LIONS, *Global weak solutions of kinetic equations*, Sem. Matematico Torino **46**, 259-288 (1988).
- [39] R. DIPERNA, P. L. LIONS, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98**, 511-547 (1989).
- [40] J. DOLBEAULT, *Stationary states in plasma physics: maxwellian solutions of the Vlasov-Poisson system*, Math. Mod. and Meth. Appl. Sci. **1**, 183-208 (1991).

- [41] K. DRESSLER, *Steady states in plasma physics - The Vlasov-Fokker-Planck equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **12**, 471-487 (1990).
- [42] M. ESCOBEDO, J. L. VÁZQUEZ, E. ZUAZUA, *Asymptotic behaviour and source-type solutions for a diffusion-convection equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **124**, 43-65 (1993).
- [43] M. ESCOBEDO, J. L. VÁZQUEZ, E. ZUAZUA, *Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity*, Trans. AMS **343**, 829-842 (1994).
- [44] A. FRIEDMAN, *Uniqueness for the Cauchy problem for degenerate parabolic equations*, Pacific J. Math. **46**, 131-147 (1973).
- [45] A. FRIEDMAN, *Stochastic differential equations and applications*, Academic Press 1975.
- [46] A. FRIEDMAN, S.KAMIN, *The asymptotic behavior of gas in an n dimensional porous medium*, Trans. Amer. Math. Soc. **262**, 551-563 (1980).
- [47] V. A. GALAKTIONOV, J. L. VÁZQUEZ, *Asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations with critical exponents. A dynamical system approach*, J. Func. Anal. **100**, 435-462 (1991).
- [48] Y. GIGA, T. MIYAKAWA, *Navier-Stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces*, Comm. in P.D.E. **14**, 577-618 (1989).
- [49] D. GOGNY, P. L. LIONS, *Sur les états d'équilibre pour les densités électroniques dans les plasmas*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **23**, 137-153 (1989).
- [50] F. GOLSE, P. L. LIONS, B. PERTHAME, R. SENTIS, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal. **76**, 110-125 (1988).
- [51] K. HAMDACHE, *Initial-boundary value problems for the Boltzmann equation: global existence of weak solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **119**, 309-353 (1992).
- [52] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic Second Order Differential Equations*, Acta Math. **119**, 147-171 (1967).
- [53] E. HORST, *Global Strong Solutions of Vlasov's Equations, Necessary and Sufficient Conditions for their Existence*, P.D.E. Banach Center publications Warsaw **19**, 143-153 (1987).
- [54] E. HORST, *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov Equations. I: General theory.*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **3**, 229-248 (1981).

- [55] E. HORST, *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov Equations. II: Special cases.*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **4**, 19-32 (1982).
- [56] E. HORST, R. HUNZE, *Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **6**, 262-279 (1984).
- [57] A. M. IL'IN, *On a class of ultraparabolic equations*, Sov. Math. Doklady **5**, 1673-1676 (1964).
- [58] S. KAMIN, *Similar solutions and the asymptotics of filtration equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60**, 171-183 (1976).
- [59] S. KAMIN, J. L. VÁZQUEZ, *Asymptotic behaviour of the solutions of the porous medium equation with changing sign*, SIAM Jour. Math. Anal. **42**, 34-45 (1991).
- [60] A. KRZYWICKI, T. NADZIEJA, *Some results concerning the Poisson-Boltzmann equation*, Zastosowania Matematyki **21,2**, 265-272 (1991).
- [61] A. KRZYWICKI, T. NADZIEJA, *A note on the Poisson-Boltzmann equation*, Zastosowania Matematyki **21,4**, 591-595 (1993).
- [62] S. N. KRUKHOV, *Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for nonlinear equations of first order*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **187**, 29-32 (1969).
- [63] S. N. KRUKHOV, J. SOLER, *On a class of weak solutions for the two dimensional Euler system with order preserving and L^1 -stable vorticities*, preprint.
- [64] D. JOSEPH, T. S. LUNDGREN, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. **49**, 241-269 (1973).
- [65] J. LEBOWITZ, P. G. BERGMANN, *Irreversible Gibbsian ensembles*, Ann. Phys. **1**, 1-23 (1957).
- [66] E. M. LIFSHITZ, L. P. PITAEVSKII, *Physical Kinetics*, Pergamon Press, New York 1981.
- [67] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer Verlag, Berlin 1961.
- [68] P. L. LIONS, B. PERTHAME, *Propagation of Moments and Regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson System*, Inventiones Math. **105**, 415-430 (1991).
- [69] A. MAJDA, G. MAJDA, Y. ZHENG, *Concentrations in the one-dimensional Vlasov-Poisson equations, I: Temporal development and non-unique weak solutions in the single component case*, Physica D **74**, 268-300 (1994).

- [70] J. MOSER, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20**, 1077-1092 (1971).
- [71] H. NEUNZERT, M. PULVIRENTI, L. TRIOLO, *On the Vlasov-Fokker-Planck equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **6**, 527-538 (1984).
- [72] B. P. O'DWYER, *On the linear Vlasov-Fokker-Planck equation in kinetic theory*, Master of Science Thesis (1989).
- [73] B. PERTHAME, *Higher moments for kinetic equations; Applications to Vlasov-Poisson and Fokker-Planck equations*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **13**, 441-452 (1990).
- [74] B. PERTHAME, M. PULVIRENTI, *Weighted L^∞ bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model*, Arch. Rat. Mech. Anal. **125**, 289-295 (1993).
- [75] G. REIN, J. WECKLER, *Generic global classical solutions of the Vlasov-Fokker-Planck-Poisson system in three dimensions*, J. Differential Equations **99**, 59-77 (1992).
- [76] H. RISKEN, *The Fokker-Planck equation*, Springer series in synergetics, vol **18**, Springer-Verlag 1989.
- [77] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann 1966.
- [78] S. SHIINO, *H-theorem and stability analysis for mean-field models of nonequilibrium phase transitions in stochastic systems*, Phys. Lett. A **112**, 302-306 (1985).
- [79] S. SHIINO, *Dynamical behavior of stochastic systems of infinitely many coupled nonlinear oscillators exhibiting phase transitions of mean-field type: H-theorem on asymptotic approach to equilibrium and critical slowing-down of order parameter fluctuations*, Phys. Rev. A **36**, 2393-2412 (1987).
- [80] J. SOLER, *L^∞ stability for weak solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 with singular initial data in Morrey spaces*, J. Math. Anal. and Appl. **187**, 513-525 (1994).
- [81] H. SPOHN, *Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits*, Rev. Mod. Phys. **53**, 569-615 (1980).
- [82] E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press 1970.
- [83] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam 1984.
- [84] S. UKAI, *Solutions of the Boltzmann equation*, Patterns and Waves Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations, 37-96 (1986).

- [85] H. D. VICTORY, *On the existence of global weak solutions for Vlasov-Poisson-Fokker-Planck Systems*, J. Math. Anal. and Appl. **160**, 515-553 (1991).
- [86] H. D. VICTORY, B. P. O'DWYER, *On classical solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems*, Indiana Univ. Math. J. **39**, 105-157 (1990).
- [87] Y. ZHENG, A. MAJDA, *Existence of global weak solutions to one-component Vlasov-Poisson and Fokker-Planck-Poisson systems in one space dimension with measures as initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **47**, 1365-1401 (1994).