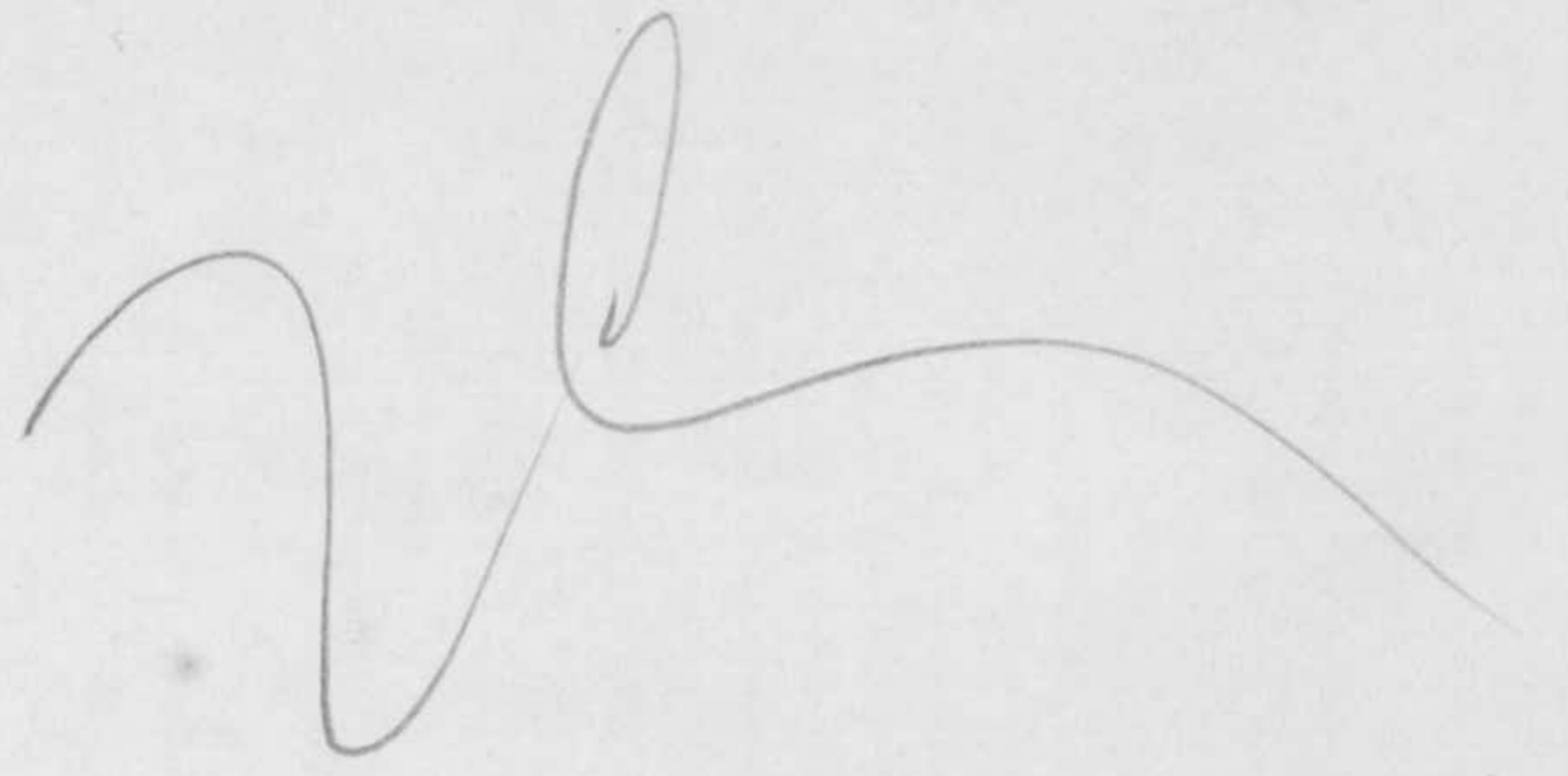


~~Prov. T 2-20~~

4/15/51

A handwritten signature or set of initials in dark ink, consisting of a large, sweeping 'v' shape followed by a loop and a horizontal line extending to the right.

R.50.506

TESIS DOCTORAL LEIDA POR
D. Francisco A. Triguero Ruiz
el día 6 de Febrero de 1982

ante el Tribunal constituido por:

Presidente: Francisco Azorín Poch

Vocales: Diego Ramirez Duro

Rafael Infantes Macías

Jose M^a. Otero Moreno

Secretario: Ramón Gutierrez Jaimez

Obtuvo la calificación de: SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
— GRANADA —
Sala B
Fondo 138
Número 200

R. 50.506

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA	
GRANADA	
Nº Documento	613544986
Nº Copia	61553232X

U N A C O N T R I B U C I O N
A L A M O D E L I Z A C I O N
D E L A T E N D E N C I A
E N S E R I E S
T E M P O R A L E S

MEMORIA que, para optar al
grado de Doctor, presenta
D. Francisco A. Triguero Ruiz

Vº. Bº.

Por la dirección de la Memoria:



I N D I C E

INTRODUCCION	V
CONCLUSIONES	XI
CAPITULO I	1
1.1 Introducci3n	2
1.2 Representaci3n de modelos dinámicos	5
1.3 Predictor lineal de Kalman. Filtro de Kalman	11
1.4 Análisis Bayesiano. Multifiltro.....	21
1.5 Filtro autosintonizable de Kalman. Modelos ARMA ..	41
CAPITULO II	54
2.1 Introducci3n	55
2.2 Estacionalidad	57
2.3 Análisis tendencia-ciclo	66
2.4 Análisis de la componente irregular	74
CAPITULO III	88
3.1 Introducci3n	89
3.2 Análisis preliminar de los datos mensuales sobre el consumo de gasolina-auto	93
3.3 Características de la implementaci3n y resultados de la aplicaci3n de la versi3n multifiltro de Kal- man propuesta	100
3.3.1 Implementaci3n	100
3.3.2 Los resultados y su análisis	104

3.3.3 Interpretación y justificación de las <u>per</u> turbaciones	109
3.3.4 Análisis de residuos y predicciones	112
3.4 Características de la implementación y resulta <u>do</u> s de la aplicación del sistema de predicción automática	115
3.4.1 Implementación	115
3.4.2 Los resultados y su análisis	117
3.4.3 Interpretación y justificación de la <u>exis</u> tencia de perturbaciones en los puntos de ruptura detectados	118
3.4.4 Análisis de residuos y predicciones	120
3.5 Consideraciones finales	123
3.6 Figuras y tablas estadísticas	128
APENDICE	A1
BIBLIOGRAFIA	142

La gran concentración de los recursos petrolíferos mundiales es uno de los datos más significativos desde el punto de vista económico a nivel internacional. Sin embargo, no es hasta 1973 coincidiendo con la guerra árabe-israelí que provocó el primer embargo de petróleo de importancia, cuando la opinión mundial comenzó a preocuparse por la importancia del dato señalado.

Por otra parte, dado el papel predominante que ha desempeñado el petróleo en los balances energéticos del mundo, puede comprenderse mejor la gravedad de la crisis energética en la que estamos inmersos. Así un 46 por ciento de las necesidades energéticas se satisfacían hasta hace pocas fechas, mediante el petróleo, cabiendo señalar que en el caso de España esta dependencia crecía hasta alcanzar un porcentaje algo inferior al 70; este hecho justifica el enorme impacto de cualquier problema que afecte a la Economía del petróleo, sobre todo en algunas áreas económicas y en particular en los países en vías de desarrollo no exportadores de crudo ya que no disponen de capacidad de respuesta al encarecimiento progresivo del petróleo vía las exportaciones de productos manufacturados, como sucede en el mundo ya industrializado.

El impacto del incremento del precio del crudo, es de presumir que haya generado cambios en el comportamiento

económico tanto en los países industrializados como en los que se encuentran en vías de serlo. Es necesario en estos casos la elaboración de metodologías de análisis que al aplicarlas a datos que presuntamente están generados por mecanismos de comportamiento económico sujetos a cambios estructurales, permitan y describan la trayectoria temporal de // las variables consideradas de manera ajustada a la realidad. Con ello se puede responder a cuestiones de cierta trascendencia económica, tales como: ¿a partir de qué momento el / consumo de energía en España ha acusado el impacto de la / crisis y en qué medida la ha hecho? La respuesta puede ser trascendental, por ejemplo, en la adopción de políticas de racionalización en el ahorro energético.

Por otra parte, es de esperar que modelos más flexibles y que explican mejor el pasado, por incorporar la posibilidad de cambios estructurales, sirvan para predecir mejor

En base a la necesidad expuesta nos propusimos construir métodos de análisis de series temporales que tengan / en cuenta la existencia de cambios estructurales en los mecanismos estocásticos que se supone generan los datos reales en las Ciencias Sociales.

En esta línea y en el capítulo I, hemos partido de un poderoso instrumento, como son los filtros de Kalman, completado con un análisis bayesiano, para construir en el espacio

de estado un filtro que nos permite tanto detectar como adaptar el modelos a los puntos de ruptura existentes en una serie temporal.

El estudio realizado en el capítulo I finaliza con la obtención de un interesante resultado cara a la estimación de los parámetros de un modelo ARMA; una estimación, que / respecto de la tradicional mediante mínimos cuadrados, mantiene la substancial ventaja de ser aplicable a series temporales que incorporan presuntos cambios estructurales, obteniendo así resultados predictivos de más significación.

La técnica de análisis propuesta en el capítulo II de la presente tesis, a diferencia de la propuesta y ya comentada del capítulo I, está basada en la sucesiva verifica- / ción estadística de distintas hipótesis referidas a las componentes tradicionales de una serie temporal y su correspondiente modelización.

La investigación realizada en esta tesis se encuentra en la línea de distintos trabajos cuyas diversas necesidades se encuentran sufragadas total o parcialmente por el Departamento de Defensa de E.E.U.U. en sus distintas ramas. Cabe señalar, por sus implicaciones con nuestro trabajo fundamentalmente, las llevadas a cabo por Gustafson, D.E. sobre el tema "Predicción de series temporales basada en modelos en el espacio de estado", sin poder olvidar la que conjuntamenen

te realizan Box,G.E. y Tiao,G.C. sobre "Metodos bayesianos, predicción y control en estadística e investigación operativa".

Tras señalar algunas de las líneas de investigación / coincidentes con la llevada a cabo en esta tesis, bien por sus objetivos, bien por sus métodos, nos permitimos a continuación citar, sin perjuicio de hacerlo notar también en sus correspondientes epígrafes o apartados, algunas de las posibles ampliaciones y mejoras de nuestro trabajo, algunas de las extensiones que a continuación detallamos se encuentran en fase de análisis e investigación por el autor de la presente tesis.

Además de la introducción de factores exógenos en el análisis propuesto en los capítulos I y II, podemos citar / como especialmente representativas la introducción en el sistema PREDAUTO, propuesto en el capítulo II, de un método de análisis e insensibilización del mismo respecto de los puntos atípicos, así como la extensión bayesiana del estadístico SAECT. Por otra parte el estudio realizado en el capítulo I en base a filtros de Kalman es susceptible de ser extendido a modelos ARMA escalares o matriciales, así como a la investigación y modelización de la estacionalidad.

En el capítulo III aplicamos los resultados obtenidos en capítulos anteriores al consumo de gasolina. Dicha aplicación consta de la elaboración, puesta a punto y ejecución

de los programas necesarios para la obtención de los resultados correspondientes. La elaboración y puesta a punto ha sido completamente realizada por el autor sobre un IBM modelo 5100 del Centro de Cálculo de la Universidad de Málaga y en lenguaje APL; diseñado y desarrollado de forma modular, por lo que es extensible de manera casi inmediata a cualquier // otro lenguaje de alto nivel.

El capítulo III puede separarse en tres grandes apartados, el primero de tratamiento preliminar, seguido de los datos y resultados obtenidos utilizando los filtros de Kalman, y por último el análisis relativo al sistema PREDAUTO.

Finaliza el capítulo III con un estudio comparado entre las distintas metodologías de análisis propuestas en la bibliografía y la propuesta en el presente trabajo.

No podemos terminar sin hacer mención explícita de // nuestro más sincero agradecimiento a los profesores Gutierrez Jaimez y Otero Moreno, por sus consejos y apoyo incondicional en la elaboración y labor de dirección de esta memoria.

Queremos hacer también extensible nuestro agradecimiento a los profesores de los Departamentos de Estadística de la Facultad de Económicas de Málaga, Estadística de la Facultad de Ciencias de Granada y en especial a los excepciona

les compañeros del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Económicas de Málaga que en extraordinario clima de / compañerismo y amistad han apoyado y estimulado el presente estudio.

Por último agradecer a todas aquellas entidades y personas que de una u otra forma hayan contribuido en la elaboración de este trabajo, en particular a la Srta. M. Cruz // Arroyo quien ha mecanografiado el texto.

C O N C L U S I O N E S
=====



CONCLUSIONES MAS RELEVANTES

- La situación económica actual exige la investigación y construcción de metodologías que detecten, analicen y modelicen // los puntos de rupturas con el comportamiento económico precedente (cambios estructurales).
- La representación de una serie temporal en el espacio de estado permite, gracias a la variables de estado, tener información sobre los parámetros estructurales de la misma en cada -/ instante.
- La utilización del predictor y filtro de Kalman permiten /// realizar un análisis dato a dato de la serie temporal, intro-// duciendo con ello la adaptabilidad a perturbaciones no esto-// cásticas en el modelo considerado.
- Los resultados obtenidos por Kalman presentan el grave incon- veniente de necesitar una estimación inicial de los parámetros que intervienen en el modelo así como una medida de la certi-// dumbre de los mismos. Reformulando el filtrado de Kalman como hemos propuesto evitamos la necesidad del conomimiento previo de la matriz de varianzas y covarianzas, al introducir en su / lugar la matriz de información, que en el instante inicial, se anula.
- Un modelo estructural tal como el propuesto en el epígrafe 3 del capítulo 1 puede ser representado en el espacio de estado, siendo las componentes de la variable de estado el nivel y la

pendiente en el instante considerado.

- La utilización de cuatro filtros simultaneos correspondientes cada uno a un estado posible del sistema, en base a las / situaciones provocadas por:

- 1.- Perturbaciones no estocásticas en el nivel.
- 2.- Perturbaciones no estocásticas en la tendencia.
- 3.- Perturbaciones instantaneas no estocásticas.
- 4.- Perturbaciones estocásticas.

permite un análisis de simulación coincidente en un instante

-La asignación e incorporación de probabilidades a las fil-//
tros simultaneos permite obtener, en base al análisis Bayesiano
propuesto junto con la simulación de comportamietno, las /
posibles trayectorias del sistema definidas por la evolución
temporal de la variable de estado, así como la probabilidad de
ocurrencia de cada una de ellas y los correspondientes de transi
ción.

- Las trayectorias temporales de la variable de estado del mode
lo, construidas en el capítulo I no dependen de la varianza
del proceso de ruido blanco incorporado en la generación de la
señal medida.

- Realizando una mixtura de las trayectorias ya obtenidas y /
utilizando las probabilidades calculadas, construimos unas medi
das de los parámetros estructurales con la particularidad /
de que:

1.- Detectan la existencia de observaciones que no / siguen el comportamiento tradicional, vía los incrementos significativos de la incertidumbre en/ la estimación de los parámetros.

2.- Se adaptan al nuevo comportamiento si este existe, o bien, vuelven al comportamiento clásico si la perturbación sufrida es instantánea.

- Dado el excesivo requerimiento de memoria para la aplicación informática del modelo propuesto en el capítulo I, debido al crecimiento exponencial del número de trayectorias temporales alternativas con el número de observaciones, es preciso reformular el modelo y realizar una mixtura, en cada instante, de las trayectorias que conducen al mismo estado final, obteniendo así un modelo tratable informáticamente.

- Dada la representabilidad de procesos ARMA en el espacio de estado, considerando los resultados generales de la reformulación propuesta del filtro de Kalman, construimos un método de estimación de los parámetros del modelo ARMA considerado. Esta estimación, como en cualquier aplicación de los filtros de Kalman, destaca por su adaptabilidad al comportamiento de las últimas observaciones de la serie.

- La estimación de los parámetros ARMA tal y como ha sido / propuesta en el capítulo I, no depende de la varianza de in

novación.

- Para un proceso ARMA estacionario las estimaciones de los parámetros en cada instante convergen en probabilidad, con el número de observaciones, a los valores reales de los mismos.

- Debido a la naturaleza de los procesos económicos, la hipótesis más admisible para la componente estacional de una serie temporal es la de variación progresiva y estocástica, siendo esta característica la que determina la elección del proceso de estimación de la estacionalidad.

- De entre los métodos de estimación y posterior eliminación de la estacionalidad de una serie temporal propuestos en la literatura al uso, podemos concluir que:

1.- Para una estacionalidad de periodicidad mensual, el método sugerido por Shiskin en 1967 resulta adecuado.

2.- Para una estacionalidad de periodicidad inferior a un mes, dada su continua variabilidad, el método X11 no es óptimo, siendo sin embargo, y en gran medida, la variante X11-ARIMA propuesta por E. Dagum en 1975.

- Bajo las hipótesis enunciadas en el apartado 3 del capítulo II, construimos un test estadístico que nos permite identifi-

car los puntos de ruptura en el comportamiento de la tendencia.

- El criterio de selección del orden de un proceso autorregresivo propuesto por Akaike, el criterio AIC, es asintóticamente eficiente en el sentido de Shibata, pero inconsistente en la clase de modelos autorregresivos.
- El criterio propuesto por el autor, criterio SAECT, además de poseer la propiedad de ser asintóticamente eficiente, resulta ser consistente; luego no existe una justificación racional para preferir el criterio AIC sobre la regla de decisión consistente propuesta en esta tesis.
- De la aplicación de la versión bayesiana multifiltro de / Kalman desarrollada en el capítulo I a la serie de consumo de gasolina-auto, periodo 1959-1980, podemos destacar los siguientes resultados:
 - 1.- En Agosto de 1959 comenzó un nuevo periodo en la estructura de consumo de la gasolina-auto, seguido de una época de inestabilidad, que consideramos de adaptación, que finaliza en Agosto de 1962
 - 2.- En Junio de 1972 hubo un incremento en el nivel de consumo, seguido de un ligero aumento en el incremento de consumo por unidad temporal.
 - 3.- Es en Marzo de 1974 cuando se detecta un descenso en el nivel de consumo, descenso que es muy acusado

do.

- 4.- En Enero de 1976 se supera el nivel de consumo perdido en el periodo anterior y se estabiliza.
- 5.- No es, sin embargo, hasta Julio de 1979 cuando se produce una brusca disminución del nivel de consumo, completado en Agosto del mismo año con una sensible desaceleración del consumo.
- 6.- En Julio de 1980 vuelve a disminuir sensiblemente el consumo y en Septiembre de 1980 comienza una progresiva recuperación en el crecimiento del consumo.

De las causas que provocaron dichas perturbaciones, analizadas en el capítulo III, podemos destacar la política de precios seguida por la Administración y a veces impuesta por los incrementos del precio del crudo en origen.

- Tras el análisis de los residuos obtenidos en la aplicación de la versión multifiltro de Kalman, del que hemos obtenido las conclusiones:

- 1.- La media de los residuos no es significativamente distinta de cero.
- 2.- No existe evidencia de autocorrelación al aplicarle el test de Box-Pierce, modificado por Ljung-Box
- 3.- El valor del coeficiente de determinación R^2 para nuestro análisis, resulta ser de 0.9987

- 4.- El análisis de los signos de los residuos pone de manifiesto la existencia de unas rachas de / signos tras los puntos de ruptura, de lo que podemos extraer la conclusión de la existencia de periodos de acomodación del modelo cada vez que detecta un punto de ruptura.

hemos construido las predicciones hasta con horizonte doce meses, utilizando el resultado de Granger-Newbold de predicción insesgada para series transformadas logarítmicamente, como es el caso que nos ocupa.

- En base a las verificaciones de hipótesis desarrolladas en el capítulo II, hemos diseñado y construido un sistema de predicción automática que denominaremos PREDAUTO, de cuya aplicación a la serie temporal en estudio podemos resaltar las siguientes consideraciones:

- 1.- La heterocedasticidad de la serie considerada hace que el sistema PREDAUTO resulte hiper-sensible, lo que es lógico dada la construcción de dicho sistema en base a pruebas estadísticas que incluyen la hipótesis de no modificación de la varianza en el periodo base.
- 2.- Amortiguando el efecto de la heterocedasticidad mediante la transformación logarítmica, podemos detectar periodos de especial inestabilidad con gran facilidad.

- 3.- La existencia de puntos atípicos en el periodo considerado de la serie temporal, provoca una distorsión de los resultados si las pruebas estadísticas se realizan al nivel del 5%, mientras que si las verificaciones de las hipótesis estadísticas se realizan al nivel del 1%, la técnica de análisis y predicción permanece más insensible a aquellos.
- 4.- El análisis de los residuos obtenidos tras la aplicación del sistema PREDAUTO, donde las verificaciones se realizaron al nivel del 1%, denota que el ajuste de los datos es correcto.
- 5.- Los puntos de ruptura detectados por el sistema de análisis y predicción automática propuesto en el capítulo II, son esencialmente los mismos que los obtenidos de la aplicación alternativa utilizando los resultados obtenidos en el capítulo I, hay que añadir no obstante, que el sistema PREDAUTO detecta la existencia de un / punto de ruptura en la observación 64, punto de ruptura en cuanto disminuye la varianza del ruido incorporado en la generación de la señal.
- 6.- Se han realizado igualmente predicciones de horizonte hasta doce meses, tanto cuando las pruebas



bas estadísticas se realizaron al nivel del / 5%, como cuando se realizaron al nivel del 1%, obteniendo que las estimaciones realizadas primero son superiores en magnitud a las obtenidas bajo la segunda hipótesis de trabajo.

Del análisis comparado entre los distintos modelos construidos para la serie mensual de consumo nacional de gasolina auto, incluidas las propuestas en esta tesis, podemos enunciar las siguientes conclusiones.

Además del distinto comportamiento de las técnicas de análisis, propuestas anteriormente, frente a la heterocedasticidad, hay que destacar, del tratamiento que las mismas hacen de los puntos de ruptura, que mientras la técnica basada en filtros de Kalman tras detectar un punto de ruptura necesita la información suministrada por observaciones posteriores, primero para identificar el tipo de punto de ruptura, y después para adaptarse a la nueva situación estructural, el sistema PREDAUTO actúa de forma directa en el sentido de no necesitar periodo de acomodación. Este distinto comportamiento tiene una especial significación si existe un punto de ruptura en el periodo final de la serie considerada, ya que puede truncarse el periodo de adaptación cuando este sea necesario.

De la obligada comparación de los métodos propuestos en esta tesis con los ya construidos por diversos autores para la serie temporal de consumo de gasolina auto en unidades físicas, podemos establecer, respecto del modelo de Peña, que no hemos encontrado evidencia de la sinusoidalidad del correlograma citada por el propio Peña, sinusoidalidad que, a nuestro juicio, es causada por la incorrecta modelización que hace de la tendencia mediante diferencias. Este hecho denota que una mala modelización de la tendencia puede causar una periodicidad no real.

Independiente de las ventajas argumentadas por Saleh para el uso de los procesos de difusión en la modelización de las series temporales, cabe señalar que ante continuadas perturbaciones que afecten a la tendencia, provocando modificaciones estructurales de la misma, el uso de los procesos de difusión puede no ser totalmente correcto, tal es el caso de la serie de consumos de gasolina-auto en la que a partir de 1974 se encuentran varios puntos de ruptura en el comportamiento de la tendencia. No obstante hemos de hacer notar que uniendo tanto la técnica propuesta por Saleh, como las propuestas por el autor, obtenemos un poderoso instrumento de análisis estructural de series temporales del que esperamos pueda ser mejorado y completado, como ya se indicó, en investigaciones posteriores.

C A P I T U L O I
=====

I.1	Introducción	2
I.2	Representación de modelos dinámicos ..	5
I.3	Predictor lineal de Kalman. Filtro de Kalman	11
I.4	Análisis Bayesiano. Multifiltro	21
I.5	Filtro autosintonizable de Kalman. Modelos ARMA	41

1- INTRODUCCION.

El tema de la predicción ha ocupado un importante papel en la teoría de procesos estocásticos y en el análisis / de series temporales. Así podemos encontrar numerosos trabajos dedicados a analizar el problema de la predicción en campos bien diversos, tales como Economía, Meteorología, telecomunicaciones, etc... En la mayoría de estos campos se estu- / diaba el problema estático y después, generalmente mediante extrapolación, pasaban a generalizar los resultados a situa- ciones posteriores, es con la potenciación de la electrónica y de la telecomunicación y en particular análisis y procesos de señales, cuando comienza a plantearse la necesidad de de- sarrollar metodologías que fuesen intrínsecamente dinámicas, es decir que partiesen de conceptos variantes en el tiempo y analizasen la evolución de éstos en el transcurso temporal. Así Samuelson (1947), en una importante contribución a la // aplicación de la teoría dinámica en la Economía, definía una sistema dinámico, como aquel, "en el cual el comportamiento de las variables en el tiempo, viene determinado por un con- junto de ecuaciones en las que los valores de las variables en distintos puntos se encuentran incluidos de manera esen- / cial". De esta manera la contribución de Samuelson revela // que tanto las ecuaciones diferenciales como en diferencias / suponen un poderoso instrumento en Economía.

En años anteriores, no obstante, Kolmogorov (1941) // había desarrollado una metodología para la predicción en procesos estocásticos discretos, basada en una representación / sugerida por Wold (1938), mientras que Wiener (1949) reduce el problema de la predicción de procesos estocásticos continuos a la resolución de una ecuación integral.

Así pues, durante esta segunda mitad de siglo, Samuellson (1947), las investigaciones de las ciencias sociales, // han venido intentando detectar y seguir la secuencia de estados que seguía un determinado proceso en el transcurso del // tiempo. La primera intentona de aplicar modelos dinámicos en Economía, sucede en Inglaterra durante la segunda guerra mundial, al intentar explicar los procesos económicos mediante la teoría de servomecanismos, dando origen al trabajo de Arnol Turtin (1953) titulado "The mechanisms of Economic System en el que su título explica completamente la intención de su autor.

Más tarde Kalman-Bucy (1961) generaliza los resulta-/ dos de Kolmogorov-Wiener llegando, como consecuencia, al trabajo de Kalman (1963) en el que formula una metodología cuya generalidad y su fácil implementación en ordenadores digitales han sido los factores que determinan su popularidad ac-/ tual y su aplicación a investigaciones en industrias puntas como por ejemplo la Aeroespacial.

Como consecuencia del origen histórico de la metodología de modelos dinámicos en la ingeniería, ésta nos ha cedido su terminología y por ello no es difícil encontrar términos como "filtro", "feedbacks", "self-tuning", "inputs" // "outputs" y otros que por su significado preciso hemos traducido por el vocablo comunmente usado por los ingenieros.

En general tratamos de detectar la trayectoria temporal del estado de un proceso en un espacio, que posteriormente denominaremos espacio de estado, para a continuación construir la trayectoria esperada que va a seguir el proceso en instantes no observados, obteniendo así una predicción del estado del proceso en instantes por observar.

Para ello es preciso definir una representación conceptual de modelos dinámicos y una notación habitual para poder introducir las técnicas de investigaciones matemáticas / en este campo.

2- REPRESENTACION DE MODELOS DINAMICOS

Los sistemas económicos se caracterizan por modelos /
construidos a partir de conceptos idealizados que pueden ser
definidos matemáticamente.

Básicamente existen dos métodos de describir los mode
los dinámicos, uno clásico, denominado modelo input-output,
en el que el análisis se centra sobre las inputs del sistema
y sobre variables que usualmente incluyen la información de
los outputs presentes y pasados del modelo, y por ello utili
zan únicamente un solo bloque de ecuaciones. Otro alternati-
vo, denominado técnica de la "variable de estado" que consis
te en introducir unas nuevas variables intermedias, denomina-
das de estado, que si bien, en algunos casos carece de inte-
rés por si misma, en todos los casos nos ayuda a describir la
configuración interna del modelo. Estas variables de estados
se relacionan, por una parte con las variables de inputs y /
por otra parte con las outputs, así pues los modelos de espa-
cios de estados utilizan para su descripción dos bloques de
ecuaciones.

Los modelos de espacios de estados para procesos esto
cásticos se basan en la propiedad de Markov, que en términos
simples nos indica que el estado del proceso resume toda la
información del pasado que es necesaria para predecir.

De manera formal la definición de un proceso discreto de Markov, es como sigue:

DEFINICION

Sea $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ tal que

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

y $\{x(t_i)\}_{i=1(1)n}$

Un conjunto de variables aleatorias asociadas al conjunto $\{t_i\}_{i=1(1)n}$

Diremos entonces que $\{x(t_i)\}$ es un proceso de Markov si para cada "n" tenemos que:

$$f(x(t_n) \mid x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1})) = f(x(t_n) \mid x(t_{n-1}))$$

donde por $f(\cdot)$ indicamos la función de densidad.

Proposición

Dado el proceso $\{x(t_i)\}$ si es un proceso de Markov entonces:

$$f(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)) = f(x(t_0)) \prod_{i=1}^n f(x(t_i) \mid x(t_{i-1}))$$

La demostración es inmediata pues como $\{x(t_i)\}$ es de Markov cumple:

$$f(x(t_n) \mid x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})) = f(x(t_n) \mid x(t_{n-1}))$$

y como

$$f(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)) = f(x(t_0), \dots, x(t_{n-1}))f(x(t_n) |$$

$$x(t_0), \dots, x(t_{n-1})) = f(x(t_0), \dots, x(t_{n-1})) f(x(t_n) | x(t_n))$$

reiterando convenientemente el método concluimos que

$$f(x(t_0), \dots, x(t_n)) = f(x(t_0)) \prod_{i=1}^n f(x(t_i) | x(t_{i-1}))$$

Una vez recordados estos conceptos estamos en condiciones de definir matemáticamente un modelo de espacio de estado lineal que recoja relaciones entre las inputs $u(t)$, las outputs $y(t)$, y las variables de estado $x(t)$ como describíamos antes, así como el estado inicial y la función de densidad conjunta de las variables aleatorias.

Definición

Sea $u(t)$ una variable de control, $y(t)$ la señal a estimar y $x(t)$ el estado en el instante (t)

En estas condiciones construimos el siguiente modelo:

$$x(t+1) = A(t) x(t) + C(t) W(t)$$

$$y(t) = D(t) x(t) + V(t) \quad (1.1)$$

donde $\{W(t)\}$, $\{V(t)\}$ son una sucesión de variables aleato-

(†) Algunos resultados interesantes sobre el control determinista de sistemas dinámicos, pueden verse en el Apéndice.

rias ruido blanco distribuidas normalmente con media cero y matriz de covarianza Q y L diagonales (ruido blanco).

Al ser $\{V(t)\}$ y $\{W(t)\}$ procesos estacionarios podemos sin pérdida de generalidad comenzar en el instante inicial / $t_0=0$ necesitando, entonces, conocer el estado inicial $x(0)$ y la matriz de covarianza inicial del proceso $P(0)$.

Propiedades muy importantes de la representación de modelos dinámicos estocásticos, mediante los espacios de estados son los llamados de observabilidad y controlabilidad; así pues / diremos:

Definición

Dado un modelo dinámico representado por (1.1) diremos que es observable si y solamente si el estado $x(k)$ puede ser reconstruido en media directamente a partir de la medida de la señal $\{y(t)\}$ en los "n" instantes que siguen al k ; es decir, por $\{y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+n)\}$.

Análogamente, la controlabilidad la podemos definir / como:

Definición

Dado un modelo dinámico representado por (1.1) diremos que es controlable si y solamente si situadas en el estado $x(k)$ podemos encontrar una sucesión finita de control $\{u(t)\}$ que

nos transfiera a un estado arbitrario dado $x(h)$ en media.

Para sistemas invariantes en el tiempo; esto es, con matrices A , C , D fijas, en la literatura se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad y la observabilidad.

Así en Fitts (1972) podemos encontrar los siguientes resultados.

Proposición

Dado que un modelo dinámico representado por (1.1) invariante en el tiempo una condición necesaria y suficiente para // que el modelo sea controlable es que:

$$\text{Rang} \left[C, AC, A^2 C, \dots, A^{n-1} C \right] = n$$

Un resultado similar podemos encontrar en las mismas referencias para la observabilidad.

Proposición

Dado un modelo dinámico representado por (1.1) invariante en el tiempo una condición necesaria y suficiente para que el / modelo sea observable es que:

$$\text{Rang} \left[D^t, (DA)^t, (DA^2)^t, \dots, (DA^{n-1})^t \right] = n$$

Una vez realizado este análisis previo, estamos en //
disposición de pasar a estudiar la técnica de estimación re-
cursiva de Kalman.

3- PREDICTOR LINEAL DE KALMAN. FILTRO DE KALMAN

Consideremos de nuevo un sistema dinámico representado en el espacio de estado y donde las ecuaciones que lo definen vienen dadas por (1.1), tratamos de encontrar un esquema recursivo que nos permita obtener el estado del sistema / en el instante t en base a su historia pasada y del imput ac tual.

Para ello necesitamos conocer el denominado principio de ortogonalidad.

Principio de ortogonalidad.

Dado el espacio vectorial sobre \mathbb{R} de las variables // aleatorias con norma dada por:

$$\| x \| = E \left[x^2 \right]^{1/2}$$

La variable \hat{x} es la estimación lineal mínimo cuadrática de / varianza mínima de la variable x condicionada a las varia-// bles Y_1, Y_2, \dots, Y_n si y solo si:

$$E \left[(x - \hat{x}) Y_i \right] = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

ó de manera equivalente:

$$E \left[(x - \hat{x}) Y \right] = 0$$

con

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \quad \text{para } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, n$$

En base a este principio y dado que tratamos de buscar un predictor lineal podemos conjeturar que el estimador de $\hat{x}(t+1)$ es:

$$\hat{x}(t+1) = F(t) \hat{x}(t) + K'(t) Z(t) \quad (2.1)$$

es decir, suponemos que el estimador de $x(t+1)$ es función lineal del estimador de $x(t)$ y de la medida de la señal $y(t)$. Con esta conjetura y apoyándose en el principio de ortogonalidad puede demostrarse, Nahí (1969), el siguiente resultado:

Teorema 1

El predictor $\hat{x}(t+1)$ dado por (2.1) es de varianza mínima si y solo si:

$$K'(t) = A(t) P(t) D^t(t) \left[D(t) P(t) D^t(t) + L(t) \right]^{-1}$$

$$\text{donde } P(t) = E \left[x(t) - \hat{x}(t) \right] \left[x(t) - \hat{x}(t) \right]^t$$

$$\text{y } F(t) = A(t) - K'(t) D(t) \quad (2.2)$$

satisfaciendo

$$P(t+1) = (A(t) - K'(t)D(t)) P(t) (A(t) - K'(t)D(t))^t + C(t)Q(t)C^t(t) + K'(t)L(t)K'^t(t)$$

Con las condiciones iniciales $X(0), P(0)$

Una elegante demostración alternativa para el teorema 1 previo, basandose en el proceso de innovación

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - D(t) \hat{X}(t)$$

Puede verse en Kailath (1969).

Una vez resuelto el problema de la predicción pasamos a analizar un nuevo problema cual es el del filtraje.

El problema del filtraje, que se puede considerar como un caso particular de alisamiento, consiste en determinar la estimación de $X(t)$ en base a las observaciones $Y(0), Y(1), \dots, Y(t)$ y dado que la información suministrada por $Y(0), Y(1), \dots, Y(t)$ se encontraba recogida por $\hat{x}(t+1)$, podemos conjeturar nuevamente que $X(t)$ es una función lineal de $\hat{x}(t+1)$, que denotamos por $X_F(t)$, que expresada en notación matricial sería:

$$X_F(t) = M(t) \hat{x}(t+1)$$

Por otra parte, como $\hat{x}(t+1)$ ha de ser tal que se pueda obte

ner a partir de $X_F(t)$ y dada la primera ecuación de (2.1) podemos decir que:

$$X_F(t) = A^{-1}(t) \hat{x}(t+1) \quad (2.3)$$

utilizando ahora el esquema (2.2) y dado (2.3) podemos obtener la siguiente:

Proposición

Dado un modelo dinámico representado en el espacio de estado (1.1) denotando como $P_F(t) = E \left[x(t) - x_F(t) \right] \left[x(t) - x_F(t) \right]^t$ obtenemos que el predictor lineal del estado en $t+1$ condicionado a la historia pasada y el estado filtrado en el instante junto con sus matrices de covarianzas se obtienen de manera recursiva con $P(0)$, $\hat{x}(0)$ conocidos.

Como

$$\hat{x}(t+1) = A(t) \begin{bmatrix} I - K(t) & D(t) \end{bmatrix} \hat{x}(t) + A(t) k(t) Y(t)$$

$$P(t+1) = A(t) \begin{bmatrix} I - K(t) & D(t) \end{bmatrix} P(t) A^t(t) + C(t) Q C^t(t)$$

y

$$X_F(t) = \begin{bmatrix} I - K(t) & D(t) \end{bmatrix} A(t) X_F(t-1) + K(t) Y(t)$$

$$P_F(t) = P(t) - K(t) D(t) P(t)$$

(2.4)

$$\text{con } K(t) = P(t) D^t(t) \left[D(t) P(t) D^t(t) + L \right]^{-1}$$

Demostración

A partir de las ecuaciones (2.2) tenemos que

$$\hat{x}(t+1) = F(t) \hat{x}(t) + K'(t) Y(t)$$

con

$$F(t) = A(t) - K'(t) D(t)$$

y

$$K'(t) = A(t) P(t) D^t(t) \left[D(t) P(t) D^t(t) + L \right]^{-1}$$

si denotamos

$$K(t) = P(t) D^t(t) \left[D(t) P(t) D^t(t) + L \right]^{-1}$$

tendremos que $K'(t) = A(t) K(t)$ y por tanto:

$$\hat{x}(t+1) = \left[A(t) - A(t) K(t) D(t) \right] \hat{x}(t) + A(t) K(t) Y(t)$$

$$= A(t) \left[I - K(t) D(t) \right] \hat{x}(t) + A(t) K(t) Y(t)$$

por otra parte, como;

$$\begin{aligned}
X_F(t) &= A^{-1}(t) \hat{x}(t+1) \\
&= A^{-1}(t) \left[A(t) \left[I-K(t) \ D(t) \right] \hat{x}(t) + A(t) K(t) Y(t) \right] \\
&= \left[I-K(t) \ D(t) \right] \hat{x}(t) + K(t) Y(t)
\end{aligned}$$

pero como:

$$\hat{x}(t) = A(t) X_F(t-1)$$

$$X_F(t) = \left[I-K(t) \ D(t) \right] A(t) X_F(t-1) + K(t) Y(t)$$

Pasemos a estudiar las matrices de covarianzas de $\hat{x}(t)$ y $X_F(t)$, $P(t)$ y $P_F(t)$ respectivamente.

Por (2.2)

$$\begin{aligned}
P(t+1) &= A(t) (I-K(t) \ D(t)) P(t) (I-K(t) \ D(t))^t A^t \\
&+ C(t) Q C^t(t) + A(t) K(t) L K^t(t) A^t \\
&= A(t) \left[P(t) + K(t) D(t) P(t) D^t(t) K^t(t) - P(t) D^t(t) K^t(t) \right. \\
&\left. - K(t) D(t) P(t) \right] A^t(t) + C(t) Q C^t(t) + A(t) K(t) L \\
&K^t(t) A^t(t) \\
&= A(t) \left[P(t) + K(t) (D(t) P(t) D^t(t) + L) K^t(t) - P(t) D^t(t) K^t(t) \right. \\
&\left. - K(t) D(t) P(t) \right] A^t(t) + C(t) Q C^t(t) \\
&= A(t) \left[P(t) + P(t) D^t(t) (D(t) P(t) D^t(t) + L)^{-1} (D(t) P(t) D^t(t) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L) K^t(t) - P(t) D^t(t) K^t(t) - K(t) D(t) P(t) \Big] A^t(t) \\
& + C(t) Q C^t(t) \\
& = A(t) \left[P(t) + P(t) D^t(t) K^t(t) - P(t) D^t(t) K^t(t) - K(t) D(t) P(t) \right] \\
& A^t(t) + C(t) Q C^t(t) \\
& = A(t) \left[P(t) - K(t) D(t) P(t) \right] A^t(t) + C(t) Q C^t(t) \\
& = A(t) \left[I - K(t) D(t) \right] P(t) A^t(t) + C(t) Q C^t(t)
\end{aligned}$$

Por otra parte, dado que:

$$P_F(t+1) = E \left[x(t+1) - x_F(t+1) \right] \left[x(t+1) - x_F(t+1) \right]^t$$

tendremos que al ser:

$$\begin{aligned}
x(t+1) - x_F(t+1) &= x(t+1) - \left\{ \left[I - K(t+1) D(t+1) \right] \hat{x}(t+1) + k(t+1) Y(t+1) \right\} \\
&= x(t+1) - K(t+1) D(t+1) x(t+1) - K(t+1) v(t+1) \\
&\quad - \left[I - K(t+1) D(t+1) \right] \hat{x}(t+1) \\
&= \left[I - K(t+1) D(t+1) \right] \left[x(t+1) - \hat{x}(t+1) \right] - K(t+1) v(t+1)
\end{aligned}$$

tomando valores esperados

$$\begin{aligned}
P_F(t+1) &= \left[I - K(t+1) D(t+1) \right] P(t+1) \left[I - K(t+1) D(t+1) \right]^t \\
&+ K(t+1) L(t+1) K^t(t+1)
\end{aligned}$$

(2.5)

ya que $x(t+1)$ es independiente de $v(t+1)$

operando en (2.5) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
P_F(t+1) &= P(t+1) + K(t+1) \left[D(t+1) P(t+1) D^t(t+1) + L \right] K^t(t+1) \\
&\quad - P(t+1) D^t(t+1) K^t(t+1) - K(t+1) D(t+1) P(t+1) \\
&= P(t+1) + P(t+1) D^t(t+1) K^t(t+1) - P(t+1) D^t(t+1) K^t(t+1) \\
&\quad - K(t+1) D(t+1) P(t+1) \\
&= P(t+1) - K(t+1) D(t+1) P(t+1)
\end{aligned}$$

Dado que para iniciar el proceso de recursión se necesita conocer $\hat{x}(0)$ y $P(0)$ donde $P(0)$ es la matriz de covariacio-//nes a priori, lo que implica la posibilidad de cometer un //error de apreciación en $P(0)$; para evitar esta posibilidad y dado que la inversa de $P(0)$ es la matriz de información, la cual podemos anular al comienzo del proceso, nos vamos a permitir reformular el filtro de Kalman como sigue:

Teorema

Consideremos un modelo dinámico representado en el espacio de estado donde las ecuaciones de predicción y filtra-je nos vienen dadas por (2.4); en éstas condiciones modificamos las ecuaciones de filtrado como:

$$X_F(t) = \hat{x}(t) + K(t) \left[Y(t) - D(t) \hat{x}(t) \right]$$

y

(2.6)

$$P_F(t) = \left\{ \left[P(t) \right]^{-1} + D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1} D(t) \right\}^{-1}$$

con

$$K(t) = \left\{ \left[P(t) \right]^{-1} + D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1} D(t) \right\} D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1}$$

$$= P_F^{-1}(t) D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1}$$

Demostración

Dado que $\hat{x}(t) = A(t) x_F(t-1)$

Tenemos que:

$$x_F(t) = \left[I - K(t) D(t) \right] \hat{x}(t) + K(t) Y(t)$$

$$= \hat{x}(t) + K(t) \left[Y(t) - D(t) \hat{x}(t) \right]$$

además dado que la igualdad (lema AI del Apéndice)

$$(M_1 + M_2^t M_3^{-1} M_2)^{-1} = M_1^{-1} - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1} \quad (2.7)$$

se satisface siempre que sean invertibles las matrices

$$(M_1 + M_2^t M_3^{-1} M_2), M_3, M_1 \text{ y } (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)$$

tenemos que como

$$K(t) = P(t) D^t(t) \left[D(t) P(t) D^t(t) + L \right]^{-1}$$

y

$$P_F(t) = P(t) - K(t) D(t) P(t)$$

$$= P(t) - P(t) D^t(t) \left[D(t) P(t) D^t(t) + L \right]^{-1} D(t) P(t)$$

entonces basándonos en (2.6):

$$P_F(t) = \left\{ \left[P(t) \right]^{-1} + D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1} D(t) \right\}^{-1}$$

Por otra parte como también se verifica (lema AII del Apéndice)

$$\begin{aligned} & M_3^{-1} M_2 \left[M_2^t M_3^{-1} M_2 + M_1 \right]^{-1} \\ &= \left\{ M_3 + M_2 M_1^{-1} M_2^t \right\}^{-1} M_2 M_1^{-1} \end{aligned}$$

tenemos que:

$$K(t) = \left\{ \left[P(t) \right]^{-1} + D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1} D(t) \right\}^{-1} D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1}$$

es decir

$$K(t) = P_F(t) D^t(t) \left[L(t) \right]^{-1}$$

Ahora las condiciones iniciales son $\hat{x}(0)$ y $P^{-1}(0) = \theta$

4- ANALISIS BAYESIANO. MULTIFILTRO

En base a los poderosos resultados de la sección previa de los que se deducen un gran número de modelos de predicción, vamos a describir, basándonos en principios Bayesianos, una aproximación a la predicción a corto plazo adaptativa, es decir que detecte las perturbaciones temporales y permita modelarlas, incorporando al modelo la capacidad de recoger la información precisa sobre las perturbaciones y adaptar sus predicciones a las mismas.

El método propuesto considera un modelo dinámico simple y en él establece varias posibles alternativas cuyas distribución de probabilidad varía en el tiempo y se adapta a las últimas ocurrencias temporales, de ahí que el modelo considerado sea adaptativo, además utilizando los filtros de Kalman obtenemos una medida de la señal así como una estimación adaptativa de la varianza de la misma, lo que nos permite establecer un intervalo de predicción para nuestra medida.

Otras técnicas adaptativas, tales como la máximo-verosímiles y otras, recogidas en Leondes (1973) obtienen resultados similares, no obstante éstas no poseen algunas de las propiedades que analizaremos a continuación.

Definición

Dada la serie temporal $\{y(t)\}$ consideremos que su evo

lución temporal viene expresada a través del modelo

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mu(t) s(t) + \varepsilon(t) \\
 \mu(t+1) &= \mu(t) + \beta(t+1) + \gamma(t) \\
 \mu(t+1) &= \beta(t) + \delta(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

donde $\varepsilon(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ son variables aleatorias incorreladas tanto serial como temporalmente, cuyas distribuciones de probabilidad son normales de media cero y de varianza V_ε , V_γ , V_δ respectivamente.

En el modelo descrito podemos observar como tanto el nivel μ como la pendiente β están sujetos a perturbaciones / continuamente además las perturbaciones sufridas por μ y β en el instante t , afectan la evolución temporal de la señal a partir de ese instante, no ocurre lo mismo con las perturbaciones sufridas directamente por $y(t)$; es decir $\varepsilon(t)$.

Todo lo expuesto nos lleva a considerar varios estados posibles, en los que el sistema se encuentra con una probabilidad determinada en cada instante de tiempo t :

- a) No hay cambio significativo.
- b) Transición a un cambio significativo en el nivel μ .
- c) Transición a un cambio significativo de la pendiente β .
- d) Cambio significativo en el estado y , provocado por /

una perturbación directa. Al presente estado le denominaremos transitorio, siguiendo con la terminología de los procesos de señales.

Antes de pasar a realizar el análisis Bayesiano del modelo / vamos a encontrar una representación en el espacio de estados para el modelo propuesto (3.1).

Teorema 1

Dado un sistema dinámico regido por el modelo (3.1) éste puede representarse en el espacio de estado como en (1.1).

Verificando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.3)

$$D(t) = (s(t), 0)$$

$$x(t) = (\mu(t), \beta(t))^t$$

$$w(t) = (\gamma(t), \vartheta(t))^t$$

$$v(t) = \varepsilon(t)$$

$$L = V_\varepsilon$$

$$Q = \begin{pmatrix} V_\gamma & 0 \\ 0 & V_\delta \end{pmatrix}$$

Demostración

En efecto dada la representación

$$x(t+1) = A x(t) + C w(t)$$

$$y(t) = D(t) x(t) + V(t)$$

tendremos:

$$\begin{pmatrix} \mu(t+1) \\ \beta(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (s(t), 0) \begin{pmatrix} \mu(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \epsilon(t)$$

es decir

$$\mu(t+1) = \mu(t) + \beta(t+1) + \gamma(t)$$

$$\beta(t+1) = \beta(t) + \delta(t)$$

$$y(t) = \mu(t) s(t) + \epsilon(t)$$

que efectivamente es el modelo que rige el sistema propuesto

Consideremos ahora la solución multiestado propuesto en (3.2) y determinemos las probabilidades de transición a posteriori de un estado a otro.

Lema 1

Sea un proceso dinámico representado en el espacio de

estado bajo la hipótesis de los estados alternativos de (3.2) en estas condiciones considerando para $s_k(t-1)$ cuatro filtros alternativos como:

$$\begin{aligned} x \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} &= A x \begin{bmatrix} s_k(t-1) \\ (t-1) \end{bmatrix} + C w^{(j)}(t-1) \\ y(t) &= D(t) x \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} + \varepsilon^{(j)}(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

con $j=1,2,3,4$

y $s_k(t-1) = (e(0), e(1), e(2), \dots, e(t-2), e(t-1))$

donde $e(i)$ representa el estado considerado en el instante / "i".

Para cada "j" las leyes de ajuste óptimo vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{x} \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} &= A x_F \begin{bmatrix} s_k(t-1) \\ (t-1) \end{bmatrix} \\ P \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} &= A P_F \begin{bmatrix} s_k(t-1) \\ (t-1) \end{bmatrix} A^t + Q^{(j)} \\ X_F \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} &= \hat{x} \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} + K(t) \left[Y(t) - D(t) \hat{x} \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} \right] \\ P_F \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} &= \left[I - K \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} D(t) \right] P \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} \\ K \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} D^t(t) \left[D(t) P \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} D^t(t) + V_{\varepsilon}^{(j)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $P(0)$, $X(0)$ conocidos.

Demostración

La demostración se sigue de considerar cada filtro // por separado y aplicarle los resultados (2.4), alternativa-// mente pudieron deducirse resultados similares a partir de la reformulación (2.6).

Calculemos ahora la probabilidad de transición de un estado a otro en cada instante "t" .

Lema 2

Sea un sistema dinámico representado en el espacio de estado y bajo las hipótesis de los estados alternativos (3.2) y de normalidad, considerando los filtros (3.4) con sus ajustes (3.5) y denotando por

$$q \begin{bmatrix} s_k(t-1) \\ (t-1) \end{bmatrix} = \Pr \left[e(0), e(1), \dots, e(t-1) \mid y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

tendremos que

$$q \begin{bmatrix} s_k(t-1), j \\ (t) \end{bmatrix} = \Pr \left[e(t)=j, s_k(t-1) \mid y(t), y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

$$= \frac{1}{\Pr \left[y(t) \mid y(t-1), \dots, y(1) \right]} \sqrt{\frac{1}{2\pi V_e \left[s_k(t-1), j \right]}}$$

(3.6)

$$\exp \left\{ - \frac{\left[y(t) - D(t) \hat{x}_{s_k(t)}^{[s_k(t-1), j]} \right]^2}{2 \left[D(t) P_{s_k(t)}^{[s_k(t-1), j]} D^t(t) + V_{\epsilon}^{(j)} \right]} \right\} \quad (3.6)$$

$$\pi_{s_k(t)}^{[s_k(t-1), j]} \quad \pi_{s_k(t-1)}^{[s_k(t-1), j]}$$

$$\text{donde } V_{\epsilon}^{[s_k(t-1), j]} = D(t) P_{s_k(t)}^{[s_k(t-1), j]} D^t(t) + V_{\epsilon}^{(j)}$$

$$\text{y } \pi_{s_k(t)}^{[s_k(t-1), j]} = \Pr \left[e(t) = j \mid s_k(t-1) \right]$$

para $k=1, 2, \dots, 4^{t-1}$, $j=1, 2, 3, 4$.

Demostración

Dado que

$$\Pr \left[e(t)=j, s_k(t-1) \mid y(t), \dots, y(1) \right] = \frac{1}{\Pr \left[y(t), y(t-1), \dots, y(1) \right]}$$

$$\Pr \left[y(t) \mid e(t) = j, s_k(t-1), y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

$$\Pr \left[e(t) = j \mid s_k(t-1), y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

$$\Pr \left[s_k(t-1) \mid y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

y ya que la verosimilitud a posteriori de $y(t)$ es:

$$L(y(t) \mid e(t) = j, s_k(t-1), y(t-1), \dots, y(1))$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi (D(t) P^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} D^t(t) + V_\epsilon^{(j)})}}$$

$$\exp \left\{ -\frac{\left[y(t) - D(t) \hat{x}^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} \right]^2}{2 \left[D(t) P^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} D^t(t) + V_\epsilon^{(j)} \right]} \right\}$$

puesto que

$$V \left[y(t) \mid e(t) = j, s_k(t-1), y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

$$= V \left[D(t) \hat{x}^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} + \epsilon^{(j)}(t) \right]$$

$$= D(t) V \left[\hat{x}^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} \right] D^t(t) + V_\epsilon^{(j)}(t)$$

$$\text{donde } \hat{x}^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} = A x_F^{[s_k^{(t-1),j]}(t-1)}.$$

y por tanto $\hat{x}^{[s_k^{(t-1),j]}(t)}$ solo depende de $\epsilon_{(t-h)}^{(j)}$ con $h \geq 1$

de todo ello

$$q^{[s_k^{(t-1),j]}(t)} = \frac{1}{\Pr \left[y(t) \mid y(t-1), \dots, y(1) \right]}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi V_e^{[s_k^{(t-1),j]}(t)}}$$

$$\exp \left\{ - \frac{[y(t) - D(t) \hat{x} [s_k^{(t-1),j} (t)]]^2}{2V_e [s_k^{(t-1),j}]} \right\}$$

$$\prod_q [s_k^{(t-1),j} (t)] \prod_q [s_k^{(t-1),j} (t-1)].$$

En base a los lemas previos, podemos establecer, bajo la hipótesis de que $X(t)$ sigue una distribución mixtura de las // distribuciones parciales de $x [s_k^{(t-1),j} (t)]$, el siguiente:

Teorema 2

Dado un proceso dinámico representado en el espacio de estado por (3.3)

si $(x(t-1) | y(t-1), \dots, y(1)) \sim$

$$\sim \sum_{k=1}^{4^{t+1}} q [s_k^{(t-1)} (t-1)] N(x_F [s_k^{(t-1)} (t-1)], P_F [s_k^{(t-1)} (t-1)]),$$

Entonces

$(x(t) | y(t), y(t-1), \dots, y(1))$

$$\sim \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{4^{t+1}} q [s_k^{(t-1),j} (t)] N(x_F [s_k^{(t-1),j} (t)], P_F [s_k^{(t-1),j} (t)]),$$

donde

$q [s_k^{(t-1),j} (t)]$ viene expresada por (3.6) y $x_F [s_k^{(t-1),j} (t)], P_F [s_k^{(t-1),j} (t)]$

por (3.5)

En este punto, aún nos queda por resolver algunos problemas, en primer lugar hemos de estimar los valores de $V_{\gamma}^{(j)}$, $V_{\delta}^{(j)}$, $V_{\epsilon}^{(j)}$ para cada estado, así como las condiciones iniciales; por otra parte un nuevo problema supone la determina-//ción de los valores de $s(t)$.

En cuanto al primero de los problemas, no parece irra-rracional suponer que los valores de V_{γ} , V_{δ} , V_{ϵ} son proporcionales de σ^2 en cada estado, donde σ^2 es la varianza del proceso de ruido blanco $\epsilon(t)$, con lo que para determinar los valores citados sólo necesitaremos construir un esquema de proporcionalidad que resulta ser independiente de la estimación de $\sigma < \hat{\sigma} >$ elegida; además resulta que en la hipótesis anterior no influye el valor de $\hat{\sigma}$ elegido para ajustar $x(t)$, lo que es un importante resultado recogido en el teorema 3. Antes de pasar al teorema propuesto, es conveniente realizar algunas consideraciones prévias relativas al significado de $\mu(t)$ y $\beta(t)$.

En efecto, dado que $\beta(t)$, la pendiente, nos da el incremento por unidad temporal que ha de incorporarse a la medida $y(t-1)$ para obtener $y(t)$, podemos suponer sin pérdida / alguna de generalidad que $\beta(1)=0$ con lo que consideramos el nivel inicial $\mu(1)$ como la medida de la señal en el instante 1; en estas condiciones dado que $\beta(1)$ es determinado // perfectamente y sin componente aleatorio, podemos suponer que

su varianza es nula; hechas las consideraciones oportunas, / pasamos a enunciar y demostrar el siguiente:

Teorema 3

Dado un proceso dinámico representado en el espacio / de estado por (3.3) suponiendo que V_γ , V_δ y V_ϵ son propor- / cionales en cada estado de (3.2) a σ^2 supuesto que $V_\gamma^{-1}(1)=0$ y $V_\delta(1)=0$ entonces

$(x(t) | y(t), y(t-1), \dots, y(1))$

$$\sim \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k(t-1),j]} N(x_F^{[s_k(t-1),j]}(t), P_F^{[s_k(t-1),j]}(t))$$

donde $q^{[s_k(t-1),j]}(t)$ viene expresado por (3.6) y $x_F^{[s_k(t-1),j]}(t)$, $P_F^{[s_k(t-1),j]}(t)$ por (3.5)

además:

$$P_A^{[s_k(t-1),j]}(t) = \sigma^{-2} P_F^{[s_k(t-1),j]}(t)$$

y no depende de σ .

Demostración

Aplicando (2.6), a cada j , tendremos que en $t=1$

$$P_F^{[s_j(1)]} = \left\{ \left[P^{[s_j(1)]} \right]^{-1} + D^t(1) \left[V_\epsilon^{(j)} \right]^{-1} D(1) \right\}^{-1}$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} k_\epsilon^{(j)} s^2(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $V_{\epsilon}^{(j)} = k_{\epsilon}^{(j)} \sigma^2$

$$\text{y } P_A \begin{bmatrix} s_j^{(1)} \\ s_j^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\epsilon}^{(j)} s^{2(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando ahora (3.5), junto con las hipótesis de inducción obtendremos que:

$$P \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} = A P_F \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t-1), j} \end{bmatrix} A^t + Q^{(j)}$$

como $Q^{(j)} = \sigma^2 R^{(j)}$ por las hipótesis

y dada la hipótesis de inducción

$$P \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} = \sigma^2 \left[A P_A \begin{bmatrix} s_k^{(t-1)} \\ s_k^{(t-1)} \end{bmatrix} A^t + R^{(j)} \right]$$

así pues, como

$$\begin{aligned} K \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} D^t(t) \left[D(t) P \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} D^t(t) + V_{\epsilon}^{(j)} \right]^{-1} \\ &= \sigma^2 \left[A P_A \begin{bmatrix} s_k^{(t-1)} \\ s_k^{(t-1)} \end{bmatrix} A^t + R^{(j)} \right] D^t(t) \sigma^{-2} \left[D(t) \sigma^{-2} P \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} D^t(t) + K_{\epsilon}^{(j)} \right]^{-1} \\ &= \left[A P_A \begin{bmatrix} s_k^{(t-1)} \\ s_k^{(t-1)} \end{bmatrix} A^t + R^{(j)} \right] D^t(t) \left\{ D(t) \left[A P_A \begin{bmatrix} s_k^{(t-1)} \\ s_k^{(t-1)} \end{bmatrix} A^t + R^{(j)} \right] D^t(t) + K_{\epsilon}^{(j)} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

y por tanto $K \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix}$ no depende de σ , y de ahí que:

$$P_F \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} = \left[I - K \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} D^t(t) \right] P \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix} = \sigma^2 P_A \begin{bmatrix} s_k^{(t-1), j} \\ s_k^{(t)}, j \end{bmatrix}$$

donde

$$P_A [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} = \begin{bmatrix} I - K [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} & D^t(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A P_A [s_k^{(t-1)}]_{(t-1)} & A^{t+R(j)} \end{bmatrix}$$

y por tanto $P_A [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)}$ no depende de σ .

Del teorema anterior se deduce el siguiente:

Corolario 1

Sea un proceso dinámico representado en el espacio de estado, bajo la hipótesis del teorema 2, en estas condiciones las leyes de ajuste óptimo para cada uno de los filtros alternativos (3.4) será:

$$\hat{x} [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} = A x_F [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)}$$

$$P_B [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} = A P_A [s_k^{(t-1)}]_{(t-1)} A^{t+R(j)}$$

$$x_F [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} = \hat{x} [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} + K [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} \left[y(t) - D(t) \hat{x} [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} \right]$$

$D(t)$

$$P_A [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} = \begin{bmatrix} I - K [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} & D(t) \end{bmatrix} P_B [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)}$$

$$K [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} = P_B [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} D^t(t) \left[D(t) P_B [s_k^{(t-1)}, j]_{(t)} D^t(t) + K_\epsilon^{(j)} \right]^{-1}$$

donde

$$R^{(j)} = \begin{pmatrix} k_Y^{(j)} & 0 \\ 0 & k_\delta^{(j)} \end{pmatrix}$$

y

$$Q^{(j)} = R^{(j)} \sigma^2$$

con

$$x_F \begin{bmatrix} s_1(1), 1 \\ (1) \end{bmatrix} = (y(1), 0) \quad y \quad P_A \begin{bmatrix} s_j(1) \\ (1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_\varepsilon^{(j)} s^2(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Demostración

La demostración resulta evidente de (3.5) y del teorema previo.

En cuanto al problema de la determinación de $s(t)$ en cada instante t , se nos ofrecen varias oportunidades, la primera de ellas, en fase de investigación, resulta de la aplicación de una extensión de filtrado, el alisamiento, al cálculo de los coeficientes de estacionalidad instantáneas; por otra parte una nueva alternativa consistirá en realizar un proceso de desestacionalización de la serie previo y determinar los valores de $s(t)$ para cada t ; una tercera opción consistirá en considerar que el valor $s(t)$ es combinación lineal convexa de $\hat{s}(t-12)$ y la estimación $\hat{s}(t)$, lo que nos va a permitir ajustar los valores de $s(t)$ de manera recursiva / utilizando de manera esencial la información suministrada //

por la historia pasada.

Por último, podríamos extender el análisis Bayesiano al cálculo de los coeficientes de estacionalidad, bajo la hipótesis de estacionalidad aditiva, pero dada la rigidez del componente estacional en la demanda de productos derivados / del petróleo que nos ocupa hemos optado por no realizarla, si bien el tratamiento técnico no requiere ningún aditamento especial.

Es notorio que además de la ventaja fundamental que incorpora el procedimiento Bayesiano, en cualquier caso se / ve aumentada por la posibilidad de introducir información re cogida por otros métodos sobre la naturaleza del proceso medido vía las probabilidades $\pi \begin{matrix} [s_k^{(t-1)}, j] \\ (t) \end{matrix}$, lo que en determinados procesos ó circunstancias nos puede permitir reali-/ zar ejercicios de simulación.

Hasta aquí hemos desarrollado y comentado el aspecto técnico del problema junto con sus aclaraciones y demostra-/ ciones, es conveniente ahora resaltar una seria dificultad / práctica que se nos presenta a la hora de la implementación y computación del método descrito; puesto que en el instante t la distribución de probabilidad, que hemos de recordar y / por tanto almacenar en memoria, consta de 4^t componentes, lo que nos lleva a concluir que el procedimiento propuesto re-/ sulta ya inviable para series temporales con un número de ob

servaciones reducido cuando disponemos de un computador digital de memoria limitada y escasa, como es nuestro caso.

Una solución, de entre varias, al problema planteado consiste en reducir después de cada proceso de ajuste el espacio muestral a 4 sucesos incompatibles, y por tanto condensar la distribución de probabilidad de forma que tenga 4 componentes, modificando de forma adecuada los valores esperados y sus matrices de covarianzas, como en el siguiente:

Lema 3

Dado un proceso dinámico representado en el espacio / de estado por (3.3) y donde el estado $x(t)$ condicionado a la historia actual y pasada de la señal $y(t)$ sigue una distribución como (3.7). Entonces

$$q^{(j)}(t) = \Pr \left[e(t)=j \mid y(t), y(t-1), \dots, y(1) \right] \sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k^{(t-1)}, j]} .$$

$$x_F^{(j)}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k^{(t-1)}, j]} x^{[s_k^{(t-1)}, j]}(t)}{q^{(j)}(t)} \quad (3.8)$$

$$P_F^{(j)}(t) = \frac{\sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k^{(t-1)}, j]} P_F^{[s_k^{(t-1)}, j]}}{q^{(j)}(t)} \left\{ P_F^{[s_k^{(t-1)}, j]} \right.$$

$$\left. + \left[x_F^{[s_k^{(t-1)}, j]}(t) - x_F^{(j)}(t) \right] \left[x_F^{[s_k^{(t-1)}, j]}(t) - x_F^{(j)}(t) \right]^t \right\}$$

Demostracion

Dado que

$$\begin{aligned}
q^{(j)}(t) &= \Pr \left[e(t)=j \mid y(t), y(t-1), \dots, y(1) \right] \\
&= \Pr \left[(e(t)=j) \cap \left(\bigcup_k s_k(t-1) \right) \mid y(t), \dots, y(1) \right] \\
&= \Pr \left[\bigcup_k (s_k(t-1) \cap (e(t)=j)) \mid y(t), \dots, y(1) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k(t-1), j]}
\end{aligned}$$

Por otra parte como:

$$\begin{aligned}
x_F^{(j)}(t) &= E \left[x(t) \mid e(t)=j, y(t), \dots, y(1) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{4^{t-1}} \Pr \left[s_k(t-1) \mid e(t), y(t), \dots, y(1) \right] \\
&\quad E \left[x(t) \mid s_k(t-1), e(t)=j, y(t), \dots, Y(1) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{4^{t-1}} \frac{q^{[s_k(t-1), j]}}{q^{(j)}(t)} x^{[s_k(t-1), j]}(t)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
P_F^{(j)}(t) &= E \left\{ \left[x(t) - x_F^{(j)}(t) \right] \left[x(t) - x_F^{(j)}(t) \right]^t \mid e(t)=j, y(t), \dots, y(1) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{4^{t-1}} \frac{q^{[s_k(t-1), j]}}{q^{(j)}(1)} \left\{ v \left[x(t) - x_F^{[s_k(t-1), j]}(t) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[x_F^{[s_k(t-1), j]}(t) - x_F^{(j)}(t) \right] \left[x_F^{[s_k(t-1), j]}(t) - x_F^{(j)}(t) \right]^t \right\}
\end{aligned}$$

De manera análoga puede demostrarse que:

Lema 4

Dado un proceso dinámico representado en el espacio / de estado por (3.3) y donde es estado $x(t)$ condicionado a la historia actual y pasada de la señal $y(t)$ sigue una distribución como (3.7). Entonces:

$$x_F(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k(t-1), j]} x_F^{[s_k(t-1), j]}(t)$$

y

(3.9)

$$P_F(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^{4^{t-1}} q^{[s_k(t-1), j]} \left\{ P_F^{[s_k(t-1), j]} + \left[x_F^{[s_k(t-1), j]} - x_F(t) \right] \left[x_F^{[s_k(t-1), j]} - x_F(t) \right]^t \right\}$$

De todo lo expuesto podemos concluir:

Teorema 4

Dado un proceso dinámico representado en el espacio / de estado por (3.3) y donde

$$(x(t-1) | y(t), \dots, y(1)) \sim \sum_{i=1}^4 q^{(i)}(t-1) N(x_F^{(i)}(t-1), P_F^{(i)}(t-1))$$

Entonces

$$(x(t) | y(t), y(t-1), \dots, y(1)) \sim \sum_{j=1}^4 q^{(j)} N(x_F^{(j)}(t), P_F^{(j)}(t))$$

$$\hat{x}^{(i,j)}(t) = A x_F^{(i)}(t-1)$$

$$P^{(i,j)}(t) = A P_F^{(i)}(t-1) A^t + Q^{(j)}$$

$$x_F^{(i,j)}(t) = \hat{x}^{(i,j)}(t) + K^{(i,j)}(t) \left[y(t) - D(t) \hat{x}^{(i,j)}(t) \right]$$

$$P_F^{(i,j)}(t) = \left[I - K^{(i,j)}(t) D(t) \right] P^{(i,j)}(t)$$

$$K^{(i,j)}(t) = P^{(i,j)}(t) D^t(t) \left[D(t) P^{(i,j)}(t) D^t(t) + V_\epsilon^{(j)} \right]^{-1}$$

$$q^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^4 q^{(i,j)}(t)$$

$$x_F^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^4 q^{(i,j)}(t) x_F^{(i,j)}(t) \frac{1}{q^{(j)}(t)} \quad (3.10)$$

$$P_F^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^4 \frac{q^{(i,j)}(t)}{q^{(j)}(t)} \left\{ P_F^{(i,j)}(t) + \left[x_F^{(i,j)}(t) - x_F^{(j)}(t) \right] \right.$$

$$x_F(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 q^{(i,j)}(t) x_F^{(i,j)}(t) \left. \left[x_F^{(i,j)}(t) - x_F^{(j)}(t) \right]^t \right\}$$

$$P_F(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 q^{(i,j)}(t) \left\{ P_F^{(i,j)}(t) + \left[x_F^{(i,j)}(t) - x_F(t) \right] \right.$$

$$\left. \left[x_F^{(i,j)}(t) - x_F(t) \right]^t \right\}$$

donde

$$q^{(i,j)}(t) = \frac{1}{\Pr \left[y(t) \mid y(t-1), \dots, y(1) \right]} \sqrt{\frac{1}{2\pi V_e^{(i,j)}(t)}}$$

$$\exp \left\{ - \frac{\left[y(t) - D(t) \hat{x}^{(i,j)}(t) \right]^2}{2V_e^{(i,j)}(t)} \right\} \pi^{(i,j)}(t) q^{(i)}(t-1)$$

y

$$\pi^{(i,j)}(t) = \Pr \left[e(t)=j \mid e(t-1)=i, y(t-1), \dots, y(1) \right]$$

$$V_e^{(i,j)}(t) = D(t) P^{(i,j)}(t) D^t(t) + V_\epsilon^{(j)}$$

para $i, j = 1, 2, 3, 4$.

$$x_F^{(j)}(1) = \begin{pmatrix} y(1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_F^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} s^2(1) & V_\epsilon^{(j)} & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$q^{(j)}(1) \text{ fijado, siendo } Q^{(j)} = R^{(j)} \hat{\sigma}^2 \text{ y } V_\epsilon^{(j)} = K_\epsilon^{(j)} \hat{\sigma}^2$$

Demostración

La demostración se sigue de aplicar el teorema 2 y // posteriormente los resultados de condensación del lema 3 y / lema 4 consecutivamente y las condiciones iniciales expresadas por el teorema 3 y las condiciones previas a dicho teorema.

Observese como a partir del teorema 4 reducimos la // distribución de probabilidad a cuatro componentes para cada "t" eliminando por tanto el problema computacional de cara a la aplicación que se nos planteó.

5- FILTRO AUTOSINTONIZABLE DE KALMAN MODELOS ARMA

En los contextos de los problemas de estimación en // Econometría ó análisis de series temporales tradicionalmente se han utilizado procedimientos que podríamos denominar "off line" para estimar parámetros, éstos procedimientos analizan en bloque los datos obtenidos experimentalmente y estiman // unos valores para los parámetros que tienen el grave inconveniente de no tener en cuenta las relaciones entre los estimadores obtenidos para el instante "n-1" y los obtenidos en // instantes posteriores; como consecuencia, los métodos de estimación que hemos denominado "off line" necesitan volver a calcular los estimadores de los parámetros cuando nos posicionamos en el instante "n" a partir del "n-1" recibiendo nueva información sobre él.

Basados en procedimiento de regulación y control utilizados ampliamente en análisis de señales y en telecomunicación se han desarrollado métodos recursivos para la estimación de parámetros; estos métodos algunos de los cuales se / encuentran desarrollados en Plackett (1950), O'REILLY (1980) permiten utilizar las relaciones ya mencionadas entre los estimadores de los parámetros en el instante "n-1" y, tras la recepción de la información relativa al instante citado, los del instante "n".

Posteriormente y también gracias a la electrónica y en particular a los sistemas analógicos, comenzó a introducirse en el análisis de las series temporales la teoría de filtros, de la que ya hemos citado algún importante ejemplo en epígrafes previos, y en particular la teoría de filtros / autosintonizables ASTROM (1970), cuyo espectacular desarrollo fue debido a la potenciación de los viajes espaciales y muy particularmente a la necesidad de diseñar sistemas receptores de las señales emitidas desde satélites artificiales, una importante contribución al tema, además de la ya citada, ha supuesto el trabajo de WITTENMARK (1974).

Como ya hemos indicado, la necesidad de la recepción de señales emitidas desde los satélites, cuya estructura se deriva de un sistema conocido, fue el origen de la teoría de filtros de autosintonización, es por ello que la hipótesis / básica de trabajo con estos filtros y la asunción de que la estructura del sistema que produce la señal es conocido, permitiendo no obstante, que los parámetros que intervienen en el diseño del filtro tengan valores desconocidos; lo que nos va a sugerir un esquema recursivo basado en los resultados / de Kalman para terminar los estimadores de las mismas.

En este epígrafe tratamos de construir un filtro autosintonizable para modelos ARMA, basándonos, claro está, en / los resultados de Kalman; en primer lugar encontraremos una representación en el espacio de estado para señales producidos por sistemas ARMA.

Proposición

Consideremos un modelo dinámico producido por un esquema AR-MA (p,q)

$$y(t) = \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^p a_i y(t-i) - \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon(t-j)$$

Entonces la representación mediante el predictor lineal de Kalman de dicho modelo será:

$$x(t+1) = F x(t) + K y(t)$$

$$y(t) = \beta^t x(t) + \varepsilon(t) \quad (4.1)$$

donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \dots \\ y(t-p) \\ \varepsilon(t-1) \\ \dots \\ \varepsilon(t-q) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \theta_{p-1}^t & 0 & \vdots & \theta_{q-1}^t & 0 \\ I_{p-1} & 0 & \vdots & \theta_{p-1,q-1}^0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{p-1}^t & 0 & \vdots & \theta_{q-1}^t & 0 \\ \theta_{q-1,p-1}^0 & \vdots & I_{q-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{p-1} \\ \dots \\ 0 \\ \theta_{q-1} \end{pmatrix} \beta^t \quad (4.2)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{p-1} \\ \dots \\ 1 \\ \theta_{q-1} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ \dots \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_q \end{pmatrix}$$

Demostración

Es inmediata ya que:

$$x(t+1) = F x(t) + Ky(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-p+1) \\ \dots \\ -\beta^t x(t) \\ \vdots \\ \varepsilon(t-q+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_{p-1} \\ \dots \\ 1 \\ \theta_{q-1} \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y(t-p+1) \\ \dots \\ \varepsilon(t) \\ \vdots \\ \varepsilon(t-q+1) \end{pmatrix}$$

Observemos como por la proposición 1 modelo dinámico que sigue un esquema ARMA, se comporta, en el espacio de estado, / como un modelo de ganancia invariante en el tiempo.

En otro orden de cosas, si bien la estructura del sistema suele ó puede ser conocida en (4.1), parece difícil asu

mir que se conocen los valores de β ; es por ello que establecemos la siguiente:

Definición

Dado un modelo dinámico y cuya representación en el espacio de estado viene dada a través de la variable de estado $x(t)$ con observaciones temporales $y(t)$, definimos filtro discreto condicional como

$$\begin{aligned} x(t+1 | \beta) &= F x(t | \beta) + K y(t) \\ y(t) &= \beta^t x(t | \beta) + \epsilon_c(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los parámetros están definidos como (4.2). Es ahora nuestra interés establecer un procedimiento mediante el cual podamos encontrar una estimación de β , y para ello vamos a construir, basándonos en los resultados de Kalman, un filtro que denominaremos Auto-sintonizable y que nos va a permitir adaptar la estimación de β a las últimas observaciones obtenidas soslayando por tanto el grave inconveniente de los métodos "off line" ya citados.

El primero que utilizó un procedimiento "on line", fue Plackett (1950), el cual construyó un estimador recursivo para los coeficientes de un modelo de regresión.

Definición

Dado un filtro discreto condicional (4.3) con paráme-

tros desconocidos β , llamaremos filtro autosintonizable de β a un filtro cuya variable de estado resulta ser los valores de β obtenidos en cada instante "t" y por tanto su representación en el espacio de estado sería.

$$\beta(t+1) = \beta(t)$$

$$y(t) = x^t(t | \beta(t)) \beta(t) + \varepsilon(t) \quad (4.4)$$

siendo $x(t | \beta(t))$ construido por (4.3)

y $\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma)$ ruido blanco.

Si aplicamos los resultados de Kalman y la reformulación del filtro obtenemos que:

Proposición

Dado un filtro autosintonizable como (4.4) el valor ajustado de $\beta(t+1)$, $\beta_F(t+1)$, tras conocer la medida $y(t+1)$ sería:

$$\beta_F(t+1) = \beta_F(t) + K(t+1) \left[y(t+1) - x^t(t+1 | \beta_F(t)) \beta_F(t) \right]$$

con

$$K(t+1) = P_F(t) x^t(t+1 | \beta_F(t)) \left[x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F(t) x^t(t+1 | \beta_F(t)) + \sigma^2 \right]^{-1}$$

y donde la matriz de covarianza de los parámetros se ajusta mediante la relación

$$P_F(t+1) = P_F(t) - K(t+1) x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F(t) \quad (4.6)$$

Demostración

La demostración se sigue de los resultados obtenidos en el apartado 2 y en particular de (2.4) teniendo en cuenta que:

$$\hat{\beta}(t+1) = \beta_F(t)$$

y

$$P(t+1) = P_F(t)$$

ya que la matriz C de (2.4) es idénticamente nula y $L = \sigma^2$

Como observaremos en la ecuación que determina la ganancia / se utiliza un nuevo parámetro desconocido σ , con lo que el filtro dependería del valor considerado para σ , para obviar este problema podría estimarse previamente el valor de σ y / así sustituirlo, no obstante hemos encontrado que en el proceso de adaptación a los parámetros $\beta(t)$ no influye el valor de σ , y por otra parte una estimación de σ , viene dada en función de los valores de los parámetros y de los residuos / obtenidos por Box-Jenkins (1976), luego podemos determinar el valor estimado de σ , $\hat{\sigma}$ tras haber encontrado los valores de $\hat{\beta}(t)$.

Teorema:

Dado un filtro autosintonizable como (4.4) el valor ajustado de $\beta(t+1)$, $\beta_F(t+1)$, tras conocer la medida $y(t+1)$ sería:

$$\beta_F(t+1) = \beta_F(t) + K(t+1) \left[y(t+1) - x^t(t+1 | \beta_F(t)) \beta_F(t) \right]$$

con

$$K(t+1) = P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) \left[x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) + 1 \right]^{-1}$$

y donde

$$P_F^1(t+1) = P_F^1(t) - K(t+1) x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F^1(t)$$

con información inicial nula sobre β .

Demostración

Si suponemos que no tenemos información inicial alguna, podemos aplicar el esquema recursivo inicial (2.6) basado en matrices de información. Así tendremos que:

$$P_F(t_0) = \left\{ \left[P(t_0) \right]^{-1} + x(t_0 | \beta(t_0)) \left[\sigma^2 I \right]^{-1} x^t(t_0 | \beta(t_0)) \right\}^{-1}$$

es decir como; $\left[P(t_0) \right]^{-1} = \theta$

$$P_F(t_0) = \sigma^2 \left\{ x(t_0 | \beta(t_0)) x^t(t_0 | \beta(t_0)) \right\}^{-1} = \sigma^2 P_F^1(t_0)$$

Haciendo hipótesis de inducción, podemos suponer que:

$$P_F(t) = \sigma^2 P_F^1(t)$$

y aplicando entonces (4.6)

$$\begin{aligned} P_F(t+1) &= \sigma^2 P_F^1(t) - K(t+1) x^t(t+1 | \beta_F(t)) \sigma^2 P_F^1(t) \\ &= \sigma^2 \left\{ P_F^1(t) - K(t+1) x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F^1(t) \right\} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 K(t+1) &= \sigma^2 P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) \left[x^t(t+1 | \beta_F(t)) \sigma^2 P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma^2 \right]^{-1} \\
 &= \sigma^2 P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) \sigma^{-2} \left[x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) \right. \\
 &\quad \left. + 1 \right]^{-1} \\
 &= P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) \left[x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F^1(t) x(t+1 | \beta_F(t)) + 1 \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

Así pues, haciendo:

$$P_F^1(t+1) = P_F^1(t) - K(t+1) x^t(t+1 | \beta_F(t)) P_F^1(t)$$

Tendremos de (4.7) que

$$P_F(t+1) = \sigma^2 P_F^1(t+1)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

COROLARIO

Dado el filtro autosintonizable (4.4) para un modelo ARMA, / (p,q) la matriz de varianzas-covarianzas de la estimación de los parámetros en el instante "t", es:

$$P_F(t) = \hat{\sigma}^2 P_F^1(t)$$

con

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{n=t_0}^t \hat{\varepsilon}_n^2}{(t-t_0+1)-p-q}$$

siendo

$$\hat{\varepsilon}_n^2 = y(n) - x^t(n | \beta_F(n-1)) \beta_F(n-1)$$

La demostración es inmediata del Teorema anterior y Box-Jenkins (1976).

Tras estos resultados estamos en disposición de obtener un algoritmo de estimación del valor de los parámetros β , así mediante un método recursivo vamos obteniendo distintas adaptaciones de los valores precedentes de β a los valores observados $y(t)$.

No obstante el hecho de que el proceso converja, no significa que converja al valor verdadero, es por ello necesario dar algunas condiciones para asegurarnos de su credibilidad.

Distintos autores Astrom (1973), Witternmark (1974), han obtenido condiciones bajo las cuales el proceso descrito converje, basadas en la teoría de martingales desde el punto de vista técnico muy interesante, pero algo engorroso en la práctica. A continuación analizamos la condición de estacionariedad, y veremos como bajo esta hipótesis podemos asegurar que cuando el proceso converge entonces los resultados /



obtenidos convergen en probabilidad

Teorema

Consideremos un proceso dinámico generado por una estructura ARMA (p,q) con parámetro β .

En estas condiciones si el filtro autosintonizable // (4.4) de (4.2) converge numéricamente, entonces converge en probabilidad al filtro condicional (4.3), si el proceso ARMA (p,q) es estacionario.

Demostración

Supongamos que $\{\beta(t)\}$ converge numéricamente a B entonces / por (4.3)

$$y(t) = B^t x(t | B) + \epsilon_c(t)$$

y como

$$\begin{aligned} x(t | B) &= F x(t-1 | B) + K y(t-1) = F x(t-1 | B) \\ &+ K B^t x(t-1 | B) + K \epsilon_c(t-1) \end{aligned}$$

tenemos:

$$y(t) = \epsilon_c(t) + B^t K \epsilon_c(t-1) + B^t (G + K B^t) x(t-1 | B)$$

por inducción

$$\begin{aligned} y(t) &= \epsilon_c(t) + B^t K \epsilon_c(t-1) + B^t (F + K B^t) K \epsilon_c(t-2) \\ &+ B^t (F + K B^t)^2 K \epsilon_c(t-3) + \dots \end{aligned}$$

Por otra parte dado que $x(t | \beta(t))$ se define a partir de $Y(t-1)$, y $(t-2), \dots$ de forma lineal y de

$$\epsilon(t) = Y(t) - \beta(t) x(t | \beta(t-1))$$

tendremos que

$$\beta^t(t) x(t | \beta(t)) = a_1 \epsilon_c(t-1) + a_2 \epsilon_c(t-2) + \dots$$

y por tanto dado que:

$$\epsilon(t) = Y(t) - \beta^t(t) x(t | \beta(t))$$

tendremos que

$$\epsilon(t) = \epsilon_c(t) + [B^t K - a_1] \epsilon_c(t-1) + [B^t (F + K B^t) K - a_2] \epsilon_c(t-2) + \dots$$

Es decir:

$$\epsilon(t) - \epsilon_c(t)$$

son media movil de ruido blanco y por tanto al ser su función de densidad conjunta:

$$f(\epsilon_c(t-1), \epsilon_c(t-2), \dots, \epsilon_c(t-n)) = \prod_{i=1}^n f(\epsilon_c(t-i))$$

tendremos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(|\epsilon(t) - \epsilon_c(t)| > k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^t f(\epsilon_c(t-i)) = 0$$

además dado que:

$$\epsilon(t) = Y(t) - \beta^t(t) x(t | \beta(t))$$

y

$$\varepsilon_c(t) = Y(t) - B x(t | B)$$

llegamos a que:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_c(t) = B x(t | B) - \beta^t(t) x(t | \beta(t))$$

y por ello:

$$p\text{-lim} \{ B x(t-B) - \beta^t(t) x(t | \beta(t)) \} = 0$$

es decir

$$p\text{-lim} \{ \beta^t(t) x(t | \beta(t)) \} = B x(t | B)$$

Del resultado obtenido deducimos que cuando el proceso de estimación recursiva converja entonces los valores que obtengamos tienden en probabilidad a ser correctos, y así el filtro autosintonizable (4.4) converge en probabilidad al // filtro discreto condicional (4.3).

C A P I T U L O I I
=====

II.1	Introducción	55
II.2	Estacionalidad	57
II.3	Análisis tendencia-ciclo	66
II.4	Análisis de la componente irregu- lar	74

1. INTRODUCCION

En la mayoría de las instituciones, tanto públicas como privadas, con gran volúmen de información en las que el ordenador ha hecho acto de presencia de una manera fundamental, deben realizar predicciones a corto, medio e incluso / largo plazo para establecer una planificación de sus operaciones.

La premura de tiempo a veces, la falta de formación / tecnológica precisa y sobre todo la ausencia de experiencia en la selección de la técnica de predicción adecuada, sugieren la necesidad de diseñar y utilizar técnicas que permitan obtener predicciones precisas sin intervención humana. No // obstante hemos de hacer notar que cada serie temporal presenta características diferenciadas, es por ello que somos partidarios de un análisis particularizado cuando ello sea posible.

Para resolver el problema planteado disponemos de varias alternativas. En primer lugar podríamos hablar de los / modelos simples tales como el modelo de alisamiento exponencial ó el modelo de tendencia. Los importantes avances en la tecnología computacional y como consecuencia la fácil disponibilidad de paquetes de programas y la reducción del costo de computación han permitido considerar y desarrollar una //

gran variedad de modelos capaces de recoger el comportamiento de las series; entre éstos los modelos ARIMA, cuya metodología fue desarrollada por Box y Jenkins hacia 1970. Esta alternativa presenta algunas serias dificultades, tales como / las características de selección de un modelo concreto entre los de la clase ARIMA ó la difícil interpretación del comportamiento de algunos modelos que se ajustan bien a los datos, Chatfield y Prothero (1973). Por último, basada en el principio enunciado por Reid (1969) y recogido por Granger-Newbald (1977), "Ningún procedimiento de modelización y predicción / recoge de forma general toda la información suministrada por una serie temporal" podemos, gracias a un lenguaje conversacional, simplificar la labor de selección del modelo y hacer más asequible al usuario la predicción, a través de una técnica que permita considerar una amplia gama de procesos de / modelización.

Una técnica tal ha sido desarrollada por Makridakis, et al. (1974), SIBYL-RUNNER, permitiendo al usuario experimentar inicialmente con métodos muy simples y aumentar progresivamente en la sofisticación del modelo, lo que indudablemente conlleva una importante dosis pedagógica.

Nuestro esfuerzo se dirige ahora a diseñar un sistema de análisis y predicción basado fundamentalmente en test estadísticos.

2. ESTACIONALIDAD

Proseguimos justificando razonadamente la elección de las técnicas para analizar la componente estacional de una / serie temporal.

Quizás de los tres o cuatro componentes, tendencia-ciclo, estacionalidad y componente irregular o menos usado tendencia, ciclo, estacionalidad y componente irregular, en las que la estadística descompone las series temporales para su análisis, la componente estacional es la que ha centrado y / aún centra gran cantidad de los esfuerzos de investigación / en este campo.

Las variaciones estacionales difieren de la tendencia por su carácter oscilatorio, del ciclo por su periodicidad / anual y de las variaciones irregulares por su naturaleza sistemática.

Las principales características de la estacionalidad son;

- 1.- La regularidad de su comportamiento, si bien debido a perturbaciones estructurales puede variar.
- 2.- Las variaciones son producidas por agentes exógenos y no controlables ni modificables a corto plazo.

Esta última característica justifica la eliminación / en las estadísticas de la componente estacional y el interés por parte de los estadísticos durante la última mitad de siglo por encontrar las técnicas óptimas de desestacionalización.

Por otra parte dado que los movimientos estacionales pueden evolucionar, no son observables y su estimación ha su puesto siempre un grave problema para los estadísticos.

Las variaciones de los fenómenos económicos, en parti cular, son debidas a un gran número de fuerzas de lo que se deduce que no son modelizables, en general, por una función determinista. No obstante la más simple hipótesis que pode- / mos asumir respecto de la estacionalidad es su estabilidad y como consecuencia su representabilidad a través de una fun- / ción periódica anual. Esta hipótesis no es admisible en la / mayoría de las series temporales por lo que una vez abandona da la hipótesis de estacionalidad estable es preciso conside rar distintos tipos de variación, lenta ó rápida, continua ó discreta, determinista o estocástica.

Debido a la naturaleza de los procesos económicos la hipótesis más admisible es la de variación estacional progre siva y estocástica, siendo la última característica, la que determina la elección del proceso de estimación de la esta- / cionalidad, por lo que resulta conveniente, para una acerta-

da elección, la intervención de un especialista, lo contrario puede generarnos problemas insolubles, Maravall (1980).

Los métodos aparecidos en la literatura específica podríamos dividirlos en tres grandes grupos:

- 1.- Métodos regresionistas.
- 2.- Técnicas de alisamiento lineal.
- 3.- Métodos de extracción de señal de una medida perturbada.

La mayoría de los métodos de desestacionalización, están basados en modelos univariantes, no obstante algunos autores, Mendershausen (1939) entre otros, han ensayado una regresión mensual de los factores de estacionalidad sobre algunas de las variables presumiblemente causales pero de hecho los resultados obtenidos no se han revelado demasiado fructíferos.

Entre los métodos regresionistas destacan como precursores Fisher (1937) y Mendershausen (1939), pero fue en los años 60 con el desarrollo de la informática y el interés de los modelos econométricos cuando afloró un sin fin de trabajos sobre el tema en cuestión, suponiendo todos ellos que la componente sistemática de una serie temporal puede ser expresada convenientemente por funciones polinómicas del tiempo, /

en particular los polinomios de bajo grado tratarían de modelizar la tendencia, mientras que polinomios trigonométricos buscarían anular el efecto de la componente estacional, más recientemente y entre otras especificaciones SCHWARZ, N (1977) utiliza una reformulación de la regresión según la contribución de sus elementos a la variación de la serie, en base a polinomios trigonométricos habiendo llegado a resultados extraordinariamente consistentes.

En realidad, son los filtros de alisamiento lineal o de medias móviles los que han alcanzado una gran aceptación gracias posiblemente a su masiva utilización computacional / por los Bancos centrales de los Estados. Es con el trabajo / de Shiskin en 1954 cuando surge el primer método implementado en un ordenador, basado en anteriores trabajos la mayoría desarrollados bajo el patrocinio del Federal Reserve Board / de EE.UU. Tras sucesivas modificaciones y mejoras, en la que es imprescindible citar la modelización de puntos extraños / dada la extrema sensibilidad de los métodos de media móvil / respecto de ellos, se obtuvo la variante X11, Shiskin (1967).

Las técnicas de alisamiento lineal consisten en tomar una media móvil de los datos y centrarla; en definitiva, se trata de construir una nueva serie filtrada de la anterior / según:

$$x_t^* = \sum_{k=n}^n c_k x_{t+k} \quad t=n+1, \dots, T-n$$

donde c_k son los coeficientes de ponderación elegidos constantes y $2n+1$ es el intervalo de la media móvil.

La principal característica de éste proceso radica en que para dos series relacionadas exclusivamente mediante el operador retardo el comportamiento del filtro es el mismo, / es decir, el comportamiento del filtro no cambia en función del tiempo.

Para determinar los coeficientes de ponderación Henderson (1916) detecta que el carácter liso del filtro depende del esquema de ponderaciones, lo que le condujo a encontrar una fórmula que minimice la suma de cuadrados de las diferencias de orden tres a la serie alisada, o de manera equivalente que minimizase la suma de los cuadrados de las diferencias de orden tres del conjunto de ponderaciones del filtro.

La fórmula encontrada es:

$$\frac{315 \{ (m-1)^2 - n^2 \} \{ m^2 - n^2 \} \{ (m+1)^2 - n^2 \} \{ (3m^2 - 16) - 11n^2 \}}{8m(m^2 - 1) (4m^2 - 1) (4m^2 - 9) (4m^2 - 25)}$$

para una media móvil de $2m-3$ términos, y "n" el valor del // término a considerar, para la fórmula dada y con 13 términos los utilizados por el programa X11, no modifican las curvas sinusoidales de periodicidad superior a un año, mientras que / elimina las componentes irregulares casi totalmente.

El gran inconveniente que presenta el método descrito además de la dificultad de tratamiento analítico, amortiguada en parte por el modelo de Cleveland-Tiao (1976) para el / X11, es la necesidad de información sobre el futuro de la serie temporal, lo que al predictor práctico le resulta difi- / cil conseguir, y por ello el programa X11 realiza una estima- ción poco justificada de los valores futuros de la serie, lo que se traduce en la utilización de un filtro asimétrico que no puede más que modelizar una tendencia lineal en la banda de alisamiento, amén de introducir desfases en las componen- tes periódicas no eliminadas.

Dado que los modelos ARIMA son robustos y en general una vez identificados son válidos para varios periodos, y // una vez asegurado que el modelo elegido recoge los movimien- tos de las últimas observaciones y de su buen comportamiento y puesto que el modelo dado por Cleveland-Tiao (1976) para el X11 es un modelo aproximable por los de la clase ARIMA, Da- / gum (1975) introdujo una modificación en el X11, de tal for- ma que mediante un modelo de la clase ARIMA, válido para los

datos disponibles, predecían valores futuros de la serie con siguiendo así simetrizar el filtro utilizado por el X11, así como eliminar efectos poco deseables sobre las primeras y últimas observaciones de la serie.

De las principales ventajas, citadas por la propia // DAGUM (1976), del método X11-ARIMA sobre el X11 destacamos /

- La existencia de un modelo que describe el comportamiento estocástico de la serie, permitiendo con ello eliminar valores atípicos.
- La estimación de la tendencia ciclo para las últi-mas observaciones se realiza con los coeficientes / de ponderación simétrica de Henderson, lo que hace se pueda detectar variación cúbica en la tendencia.

Por último respecto de los modelos basados en la ex-/tracción de la señal de una serie temporal podemos destacar los trabajos de Brewer (1979) y Pierce (1979).

El primero de ellos descompone, mediante fracciones / simples los modelos para series temporales estacionales de / Box-Jenkins-Bacon (1967), en términos a los que se les puede asignar un comportamiento de tendencia-ciclo, estacional o / irregular.

Esta descomposición puede ser usada pues para definir los tres componentes a partir de valores pasados y predichos de la serie estudiada.

Por su parte Pierce (1979) utilizando técnicas propias de la ingeniería y de otras áreas relacionadas, considera que una serie observada $\{x(t)\}$ es representable bajo la forma.

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

donde $S(t)$ es la señal o estacionalidad y $n(t)$ el ruido, o en el contexto adecuado la componente no estacional. El fin perseguido es la estimación de las componentes no observables $\{s(t)\}$ y $\{n(t)\}$. En base al análisis espectral de los modelos para $\{s(t)\}$ y $\{n(t)\}$ se estiman los parámetros que minimizan el error medio cuadrático de la extracción de la señal. En particular para el caso del análisis de la componente estacional estudia los modelos de Cleveland (1972) y Cleveland-Tiao (1976) concluyendo que el modelo del agregado monetario M1 es similar al expresado por Cleveland (1972), mientras que el modelo Cleveland-Tiao (1976) difiere significativamente del mismo.

Como conclusión de todo lo expuesto y dado que la técnica de extracción de señal necesita un análisis particulari

zado para cada serie, optamos por incluir en nuestro diseño el programa X11-ARIMA, que por otra parte es el que mejores resultados empíricos ha ofrecido tanto en trabajos personales como en comparaciones con series simuladas.

3- ANALISIS TENDENCIA-CICLO

De las tres componentes en que descompusimos las variaciones de una serie temporal hemos seleccionado una técnica para la desestacionalización de la serie debida a Dagum / (1975).

En lo que sigue construimos una metodología de análisis para la tendencia-ciclo en este apartado, y para el análisis de la componente estocástica en el siguiente.

Los recientes acontecimientos en la economía mundial han originado cambios tanto en la tecnología como en la mentalidad empresarial, y con ello variaciones estructurales en los modelos identificados para las series cronológicas, consideradas como indicadores.

El impacto que las citadas perturbaciones han originado en la metodología de predicción es enorme y podemos clasificarlas en dos grandes grupos:

- La necesidad de tomar en consideración las variaciones que pudieron producirse en la tendencia.
- La variación del modelo que genera la señal.

Nos centraremos en éste apartado en el primero de ellos y analizaremos como detector los posibles puntos de

ruptura a partir de un test adecuado.

El test estadístico que a continuación construimos // pretende verificar la hipótesis nula de que no ha habido cam bio en la estructura del modelo que genera la señal, para // ello es imprescindible enunciar las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1:

Suponemos que la tendencia ciclo es aproximable me-// diante una línea poligonal.

Hipótesis 2:

Dada la desestacionalización realizada previamente, supondremos que la señal no contiene componente es- tacional.

Hipótesis 3:

Consideramos que el modelo que genera la señal es de la forma:

$$y(t) = a^{(i)} + b^{(i)} t + e(t) \quad (3.1)$$

y $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ los parámetros mínimo-cuadráticos corres- pondientes al i -ésimo segmento de la línea poligonal al que el instante t pertenece; y $e(t)$ son variables aleatorias distribuidas normalmente y con varianza / σ_e^2 .

Hipótesis 4:

Las variables $e(t)$ son generados por un proceso // ARMA invertible, por lo que es representable mediante un modelo AR

$$e(t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i e(t-i) + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2 I) \quad (3.2)$$

o equivalentemente $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i (t-1) + \varepsilon(t)$ con $\pi_0 = 1$

Sobre esta base pretendemos construir un test estadístico que nos permita dilucidar sobre la existencia o no de / variaciones no estocásticas en los valores de los parámetros del modelo (3.1).

Lema:

Dada una señal estadística generada por el modelo // (3.1) y bajo la hipótesis 4, si no existen perturbaciones no estocásticas en la tendencia, entonces; Q definida, como sigue,

$$Q = \sigma_{\varepsilon}^{-2} \sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^m \left[y(t+j) - \hat{y}_t(j) \right] \left(\sum_{k=1}^{\min(h,j)} \pi_{\max(h,j)-k-|j-h|} \right) \left[y(t+h) - \hat{y}_t(h) \right] \quad (3.3)$$

se distribuye como una χ_m^2 con su grado de libertad, es decir,

$$Q \sim \chi_m^2$$

DEMOSTRACION:

Como

$$\begin{aligned}
 Q^0 &= \sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^m \left\{ \left[y(t+j) - \hat{y}_t(j) \right] \left(\sum_{k=1}^{\min(h,j)} \pi_{\max(h,j)-k} \pi_{\max(h,j)-k} |j,h| \right) \right. \\
 &\quad \left. \left[y(t+h) - \hat{y}_t(h) \right] \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left\{ \left[y(t+j) - \hat{y}_t(j) \right]^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} \left[y(t+j) - \hat{y}_t(j) \right] \right. \\
 &\quad \left. \sum_{k=1}^m \pi_{j-k} \pi_{h-k} \left[y(t+h) - \hat{y}_t(h) \right] \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left\{ \left[y(t+j) - \hat{y}_t(j) \right] + \sum_{h=1}^m \pi_{j-h} \left[y(t+h) - \hat{y}_t(h) \right] \right\}^2
 \end{aligned}$$

(3.4)

dado que:

$$y(t+k) = a^{(i)} + b^{(i)}(t+k) + e(t+k)$$

y

$$\hat{y}_t(k) = a^{(i)} + b^{(i)}(t+k) + \hat{e}_t(k)$$

tendremos que

$$y(t+k) - \hat{y}_t(k) = e(t+k) - \hat{e}_t(k)$$

pero por (3.2)

$$e(t+k) = - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{k-l} e(t+l) - \sum_{i=k}^{\infty} \pi_i e(t+k-i) + \varepsilon(t+k)$$

y

$$\hat{e}_t(k) = - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{k-l} \hat{e}_t(l) - \sum_{i=k}^{\infty} \pi_i e(t+k-i)$$

luego

$$e(t+k) - \hat{e}_t(k) = - \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{k-l} \left[e(t+l) - \hat{e}_t(l) \right] + \varepsilon(t+k)$$

además como

$$y(t+k) - \hat{y}_t(k) = e(t+k) - \hat{e}_t(k)$$

$$\begin{aligned}
 & y(t+k) - \hat{y}_t(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{k-l} \left[y(t+l) - \hat{y}_t(l) \right] \\
 & = e(t+k) - \hat{e}_t(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{k-l} \left[e(t+l) - \hat{e}_t(l) \right] = \varepsilon(t+k)
 \end{aligned}$$

de donde

$$Q^0 = \sum_{j=1}^m \varepsilon^2(t+j)$$

siendo σ_ε^2 la varianza de $\varepsilon(t)$, y por tanto

$$Q = \sigma_\varepsilon^{-2} Q^0$$

es la suma de m cuadrados de variables aleatorias distribuidos según normales tipificados y de ahí

$$Q \sim \chi^2$$

con m grados de libertad.

En base al lema considerado podremos construir el siguiente teorema:

Teorema:

Dada una señal estadística generada por el modelo // (3.1) y bajo la hipótesis 4, si no existen perturbaciones no estocásticas en la tendencia y si

$$S \sim \chi_k^2$$

entonces el estadístico $Q^1 = (s/k)^{-2} Q^0/m$ se distribuye según una F de Snedecor con m y k grados de libertad.

Del anterior teorema se desprende de forma inmediata que:

Corolario:

Dada n observaciones de una señal generada por el modelo (3.1) bajo la hipótesis 3, y no existiendo perturbaciones no estocásticas en la tendencia, entonces si:

$$Q^2 = \hat{\sigma}_\epsilon^{-2} Q^0/m$$

donde Q^0 está definido por (3.4) y $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ es un estimador insesgado de σ_ϵ^2 se verifica que:

$$Q^2 \sim F_{m, n-m-2}$$

Así para aplicar el test hemos de comparar el valor / obtenido experimentalmente con el correspondiente tabulado / al nivel de significación elegido y para sus grados de libertad, en el caso de que el valor experimental se mantenga por debajo del valor tabulado admitimos la hipótesis de que en / el periodo de prueba considerado las perturbaciones que pue

dan existir son estocásticas, en caso contrario rechazaremos la hipótesis.

En estas condiciones podemos utilizar el test estadístico propuesto para detectar los cambios producidos en la estructura dinámica del modelo mediante un contraste de hipótesis.

Por último nos resta estudiar con algún detalle la componente irregular.

4- ANALISIS DE LA COMPONENTE IRREGULAR.

Varios autores, entre los que destacan Hannan (1969) Box-Jenkins (1970), Parzen (1974) y Anderson (1977) han desarrollado métodos de estimación de parámetros de una serie // temporal estacionaria. Dichos métodos están basados en la hipótesis de que el proceso es bien descrito por un modelo AR, MA ó ARMA cuyos ordenes son conocidos, ésta hipótesis desde un punto de vista general, dado que para elegir los ordenes de los modelos considerados es necesario realizar un estudio particularizado y concreto, plantea serios problemas a la hora de realizar un análisis automático. Fue Akaike, primero / con su criterio F P E y posteriormente con el Criterio de Información de Akaike, (AIC), el que dió luz al problema planteado y estimó el mejor orden de un proceso autoregresivo // ajustado a una serie temporal. Con el tiempo Shibata (1976) estudia por simulación propiedades de la estimación del orden con AIC y encuentra al igual que OZAKI (1977) que la estimación del orden con el estadístico AIC es superior al // real con demasiada frecuencia, más adelante KASHYAP (1980.a) encuentra que la regla de decisión AIC para determinar el orden de un proceso autoregresivo ajustado a una serie temporal es inconsciente si el modelo es autoregresivo, lo que es / un muy serio reparo para utilizar el criterio AIC, luego no existe una justificación racional para preferir el criterio



AIC sobre las reglas de decisión consistentes, que el propio KASHYAP (1980.b) estudia.

Hemos de mencionar las recientes extensiones Bayesianas del criterio AIC realizadas por el propio AKAIKE (1980).

En base a las anteriores consideraciones nos propusimos construir un criterio de elección del orden de un modelo autorregresivo para ajustar a una serie temporal, que aunase ambas propiedades la de consistencia para un modelo de orden finito y la de eficiencia asintótica para un modelo lineal / estacionario infinito.

La estimación de los parámetros de un modelo autoregresivo de orden infinito y su función de densidad espectral ha sido estudiada por Parzen (1974) y Bhansali (1978). En // ellos las estimaciones se realizan ajustando un proceso autorregresivo de orden finito por mínimos cuadrados y anulando / los parámetros no estimados. Los resultados más relevantes / para nuestro estudio lo recogemos en el siguiente:

Teorema 4.1

Sea $\{x(t)\}$ un proceso Gaussiano generado por el modelo

$$x(t) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x(t-i) = \varepsilon(t) \quad (4.1)$$

donde $\{\varepsilon(t)\}$ son variables aleatorias normal e idénticamenu

te distribuidas con media nula y matriz de covarianzas $\sigma^2 I$.

Si $\{x(t)\}$ es un proceso estacionario:

bajo la hipótesis de ajustar un modelo autorregresivo de orden k , tendremos que

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= E \left[x(t+1) \mid x(t), \dots, x(t-k+1) \right] \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^{*k} x(t+1-i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$E \left[x(t+1) - \hat{x}(t+1) \right]^2 = \sigma^2 + \|\hat{a}^k - a\|_R$$

donde a_i^{*k} viene determinado por

$$R a^{*k} = -r$$

y \hat{a}_i^{*k} viene determinado por

$$\hat{R} \hat{a}^{*k} = -\hat{r}$$

siendo

$$R = (r_{|i-j|}, 1 \leq i, j < \infty) \quad r = (r_i, 1 \leq i < \infty)$$

con

$$r_1 = E \left[x_t x_{t+1} \right]$$

y \hat{a}^k la inmersión en el espacio vectorial normado, de \hat{a}^k

$$V(k) = \left\{ \alpha \mid \alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots) \right\} \quad (4.3)$$

subespacio de

$$V = \left\{ \alpha \mid \alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+2}, \dots) \right\}$$

con

$$\| \alpha \|_R = (\alpha^t R \alpha)^{1/2}$$

Analizamos a continuación el concepto de eficiencia asintótica enunciado por Shibata (1980).

Teorema 4.2

Dado un proceso $\{x(t)\}$ estacionario como en (4.1); verificando

$$1^\circ \sum_{j=i}^{\infty} |a_j| < \infty \quad (4.4)$$

2º Con a_i no nulo salvo en un número finito.

Entonces para cualquier sucesión $\{k_n\}$ tal que

$$1 \leq k_n \leq K$$

$$p\text{-lim} \left[\frac{\| \hat{a}^{k_n^*} - a \|_R^2}{\frac{k_n \sigma^2}{n-k_n} + \| a^{k_n^*} - a \|_R^2} \right] = 1$$

siendo $k_n = o(n^{1/2})$, con n el número de observaciones..

Por otra parte el propio Shibata (1980) enuncia y demuestra el siguiente teorema

Teorema 4.3

Dado que un proceso estacionario $\{x(t)\}$ como (4.1) / bajo las hipótesis (4.4) se verifica que:

Para cualquier sucesión $\{k_n\}$ tal que $1 \leq k_n \leq K_n$ y para cualquiera $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left(\| \hat{a}^{k_n} - a \|_R^2 / \frac{k_n^* \sigma^2}{n-k_n} + \| \hat{a}^{k_n^*} - a \|_R^2 \right) \geq 1 + \varepsilon \right] = 1$$

siendo

$$\frac{k_n^* \sigma^2}{n-k_n} + \| \hat{a}^{k_n^*} - a \|_R^2 = \min_{1 \leq k \leq K_n} \left[\frac{k \sigma^2}{n-k} + \| \hat{a}^k - a \|_R^2 \right]$$

(4.5)

Dado que por el teorema (4.3) el error cuadrático medio (4.2) se mantiene asintóticamente por encima del valor (4.5) que / por el teorema (4.2) es alcanzable, podemos dar la siguiente

Definición:

Diremos que un criterio de selección del orden de un proceso autorregresivo estacionario es asintóticamente eficiente bajo las hipótesis (4.4) si:

$$p \lim \left[\frac{\|\hat{a}^k - a\|_R^2}{\frac{k_n^*}{n-k_n} \sigma^2 + \|\hat{a}^{k_n^*} - a\|_R^2} \right] = 1$$

donde k_n^* viene definido por (4,5)

y k es el orden seleccionado.

Shibata (1980) en la sección 4 de su artículo enuncia una / serie de resultados que dan origen al siguiente teorema, que no enuncia:

Teorema:

Sea $\{x(t)\}$ un proceso Gaussiano generado por el mode lo (4.1) donde $\{\varepsilon(t)\}$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas e incorreladas normalmente con media cero y $\sigma^2 I$ de matriz de covarianzas bajo las hipótesis (4.4). Entonces

$$p\text{-lim} \left[\left(\frac{S_n(k) - S_n(k^*)}{k \sigma^2 + (n - k_n) \|a^k - a\|_R^2} \right) - \left(\frac{\frac{k^*}{n - k_n} \sigma^2 + \|a^{k^*} - a\|_R^2}{\frac{k}{n - k_n} \sigma^2 + \|a^k - a\|_R^2} \right) \right] = 0$$

donde k^* está definido como en (4.5), y

siendo

$$S_n(k) = (n - k_n + 2k) \hat{\sigma}_R^2$$

con

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\sum_{l=k_n}^{n-1} \left[x(t+l+1) + \hat{a}_1^k x(t+2) + \dots + \hat{a}_k^k x(t+l-k+1) \right]^2}{n - k_n} \quad (4.7)$$

su demostración se desprende, como ya hemos indicado, de los resultados parciales alcanzados por Shibata en la sección 4 de su artículo (la demostración puede verse en el Apéndice).

Como corolario del teorema 4.4 podemos establecer que:

Corolario 4.1

Si $\{x(t)\}$ es un proceso estacionario generado por // (4.1) donde $\varepsilon(t)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas, normales e incorrelados bajo las hipótesis (4.4).

Entonces

Si $S_n(k) < S(k_n)$

$$p\text{-lim} \left[\frac{k \sigma^2}{n-k_n} + \|a^k - a\|_R^2 / \frac{k^* \sigma^2}{n-k_n} + \|a^{k^*} - a\|_R^2 \right] = 1$$

En particular podemos encontrar que:

Teorema 4.5:

Si $\{x(t)\}$ es un proceso estacionario generado por / (4.1) donde $\varepsilon(t)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas, normales e incorreladas bajo las hipótesis (4.4). Entonces eligiendo k^0 tal que:

$$S_n(k^0) = \min_{1 \leq k \leq k_n} S_n(k)$$

tendremos que la selección es asintóticamente eficiente.

Su demostración se sigue de que por el corolario 4.1, son asintóticamente equivalentes

$$\frac{k \sigma^2}{n-k_n} + \|a^k - a\|_R^2$$

y

$$\frac{k \sigma^2}{n-k_n} + \|a^{k^*} - a\|_R^2$$

y por el teorema 4.2

$$\frac{k \sigma^2}{n-k_n} + \|a^k - a\|_R^2$$

y

$$\|\hat{a}^k - a\|_R^2$$

y por lo tanto la selección es asintóticamente eficiente.

En éste punto podemos concluir que:

Corolario 4.2

Dado un proceso Gaussiano $\{x(t)\}$ generado por (4.1) y bajo las hipótesis (4.4). Entonces si

$$k^{(1)} \text{ es tal que } S_n^{(1)}(k^{(1)}) = \min_{1 \leq k \leq K_n} S_n^{(1)}(k)$$

con la condición que

$$p\text{-} \lim \left[\max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\left[S_n(k) - S_n(k^*) \right] - \left[S_n^{(1)}(k) - S_n^{(1)}(k^*) \right]}{k \sigma^2 + (n-k_n) \|a^k - a\|_R^2} \right| \right] = 0$$

entonces k^1 también es una selección asintóticamente eficiente.

La demostración es clara del Teorema 4.4 y del teorema 4.5

Basándonos en los resultados aquí obtenidos podemos /

llegar a que:

Proposición 4.1

El criterio de selección de Akaike AIC, en la clase / de modelos autorregresivos es asintóticamente eficiente, bajo las hipótesis 4.4.

Demostración:

Observemos como el criterio AIC, puede transformarse en el criterio equivalente, dada la monotoneidad de la transformación utilizada, en

$$S_n^{(2)}(k) = n e^{2k/n} \hat{\sigma}_k^2$$

por lo que aplicando el corolario 4.2, a

$$\frac{n(e^{2k/n} - e^{2k^*/n}) - 2k + 2k^*}{k \sigma^2 + (n - k_n) \|a^k - a\|_R^2}$$

por ser

$$\lim n(e^{2k/n} - e^{2k^*/n}) = 2k - 2k^*$$

dado que

$$1 \leq k \leq K_n$$

con la condición de que

$$K_n = o(n^{1/2})$$

obtenemos que el criterio AIC es asintóticamente eficiente.

Tras la verificación de ésta importante propiedad para el criterio de información de Akaike (AIC), analizamos a continuación la consistencia del mismo.

En un muy reciente artículo de KASHYAP (1980.a) éste encuentra una cota positiva por encima de la cual se encuentra la probabilidad de que el orden elegido sea erróneo; es decir determina la inconsistencia de las reglas de decisión de Akaike y algunas de sus variantes. Bhansali, RJ. et al // (1977) no obstante el propio KASHYAP (1980.b) obtiene una // condición suficiente para la consistencia de una regla de de- / cisión del orden de un proceso autorregresivo generador de / los datos considerados; ambos resultados los enunciamos en / dos teoremas consecutivos.

Teorema 4.6

Para una serie temporal $x(t)$ con n observaciones, / generadas por un proceso autorregresivo de orden " m ", tene- / mos que

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\sqrt{f}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} f\right) \leq \int_{x(t) \in \Omega} p(x(t) | a_1, a_2, \dots, a_m)$$

donde

$$\Omega = \left\{ \{x(t)\} : n \ln \hat{\sigma}_m^2 + m f \geq n \ln \hat{\sigma}_k^2 + k f, k \neq m \right\}$$

para al menos un $k \neq m$

Corolario:

Las estimaciones basadas en el criterio AIC y sus variantes son inconsistentes en la clase de modelos autorregresivos.

Teorema 4.7

Un criterio de selección como

$$m = \arg \left[\min_{1 \leq k \leq r} n \ln \hat{\sigma}_k^2 + k f(n) \right]$$

es consistente en la clase de modelos autorregresivos si

1º) $f(n) > 0$

2º) $f(n)$ crece ilimitadamente con n

3º) $\lim f(n)/n = 0$

Para concluir proponemos como criterio de elección // del orden de un modelo autorregresivo ajustado a n observaciones:

$$m = \arg \left[\min_{1 \leq k \leq r} n \ln \hat{\sigma}_R^2 + 2k \sqrt{n} \right]$$

selección que, como veremos a continuación, tiene la propiedad de consistencia y la de eficiencia asintótica bajo las / condiciones adecuadas.

Teorema 4.8

Dado un proceso autorregresivo $\{x(t)\}$ vajo las hipótesis 4.4 la determinación del orden del modelo autorregresivo que genera el proceso $\{x(t)\}$

$$m = \arg \left[\min_{1 \leq k \leq r} n \ln \hat{\sigma}_R^2 + 2k \sqrt{n} \right]$$

es una selección consistente y asintóticamente eficiente // (SCAET)

Demostración:

dado que $\sqrt{n} > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$

por el teorema 4.7 la selección SCAET es consistente.

Por otra parte un criterio equivalente a SCAET es:

$$S_n^{(3)}(k^{(3)}) = \min_{1 \leq k \leq K_n} S_n^{(3)}(k)$$

donde

$$S_n^{(3)}(k) = \sqrt{n} e^{2k/\sqrt{n}} \sigma_k^2, \quad k_n = o(n^{1/2})$$

y dado que

$$\lim_n \sqrt{n} (e^{2k/\sqrt{n}} - e^{2k^*/\sqrt{n}}) = 2k - 2k^*$$

aplicando el Corolario 4.2 tendremos que la selección es //
asintóticamente eficiente.

Hemos obtenido así un estadístico SCAET, que mejora /
el propuesto por Akaike (A/C) en cuanto el propuesto por el /
autor es consistente, mientras que el propuesto por Akaike /
no, como hemos comprobado.

C A P I T U L O I I I
=====

III.1	Introducción	89
III.2	Análisis preliminar de los da - tos sobre consumo gasolina-auto	93
III.3	Características de la implemen- tación y resultados de la apli- cación de la version multifil - tro de Kalman	100
III.4	Características de la implemen- tación y resultados de la apli- cación del sistema de predic - ción automática (PREDAUTO)	115
III.5	Consideraciones finales	123
III.6	Apéndice	128

1. INTRODUCCION

Tras la elaboración teórica realizada en los capítulos precedentes, corresponde realizar la implementación y / aplicación de los resultados obtenidos.

La serie temporal elegida para la aplicación de las consideraciones contenidas en los capítulos I y II, es la / de consumos mensuales de gasolina-auto en unidades físicas, correspondientes al periodo 1959-1980.

La razón de esta elección ha de buscarse en las ca-/ racterísticas intrínsecas que posee la misma. En primer lu- gar es una serie de consumo, lo que nos permite aventurar / la existencia de una relación con la política de precios y su posterior adaptación a una variación de la misma.

En segundo lugar el período considerado incluye, por una parte la época de expansión industrial y correspondien- temente de crecimiento económico, y por otra la de creación de la OPEP y su paulatino control del mercado internacional con sus incrementos continuados del precio del crudo.

Además de las características citadas, cara a la apli- cación, es conveniente hacer notar la creciente preocupación social por el conocimiento de las características de la de- manda de energía, de las que en el presente trabajo modeli- zamos y medimos de forma especial la tendencia entre deter-

determinados subperiodos.

Sobre el mismo tema de consumo de gasolina auto se / han realizado distintos estudios basados en series temporales. El primero de ellos, cronologicamente hablando, fue de bido a Peña (1978), en el que eligió un modelo entre los de la clase ARIMA para analizar su comportamiento. Más adelante en 1979, tras realizar un análisis de las interrelaciones de la componente estacional e irregular, basado en el / trabajo de Hamilton et al. (1978), modificó la elección // del modelo para la serie en estudio, en una ponencia presentada al seminario Nuevos Enfoques en el Análisis de Series Temporales. El modelo elegido resulta ser un ARIMA (1,1,1)x SARI (2,1) para la serie de logaritmos neperianos de los da tos originales.

Por último cabe destacar dos tesis doctorales leídas en Facultades de Ciencias Económicas y Empresariales, una / de la Universidad Complutense de Madrid y otra de la Univer sidad de Málaga, respectivamente por García-Pardo García-Lo renzana (1980) y Saleh Mohammed (1981). En la primera de // ellas, la autora trata de integrar la Teoría Económica con una metodología adecuada, a su juicio, de análisis de datos el enfoque Box-Jenkins del análisis de series temporales, / llegando a conclusiones más propias de la Teoría Económica que de la Econometría y la predicción.

Sin embargo la tesis presentada en la Universidad de Málaga por Saleh Mohammed, se propone como el mismo indica: "Establecer una metodología de construcción de modelos económicos para la predicción de ciertas variables endógenas consideradas como aleatorias y dinámicas, basada en procesos estocásticos de difusión".

El período considerado por Saleh Mohammed 1965-1978, resulta ser un periodo de crecimiento continuado, a excepción de parte de 1974, en el consumo, lo que es el marco // idóneo de aplicación para los procesos de difusión.

Una última consideración a realizar antes de pasar a / analizar los resultados, corresponde a las características de la implementación en el ordenador.

El proceso de implementación ha sido realizado íntegramente sobre un micro-ordenador de la casa IBM modelo 5100 que soporta tanto el lenguaje BASIC, como el APL, ubicado en el Centro de Cálculo de la Universidad de Málaga.

Resaltamos el tipo de ordenador en el que se ha implantado, porque desde el punto de vista de utilización empresarial resulta muy útil, dadas las características, a // nuestro entender (*) del mismo, y por tanto asequible a una

(*) Aunque la relación potencia-coste para el IBM-5100 resulta favorable a la potencia, esta no es muy grande. El tamaño de memoria // principal es de 64K bytes y la única memoria auxiliar puede ser ca ssette de 216K bytes cada uno de acceso muy lento.

empresa de tamaño pequeño, por su bajo costo.

Por otra parte dadas las características del lenguaje APL, en el que ha desarrollado el autor de la presente tesis el software de la aplicación, es perfectamente transportable a cualquier otro lenguaje, especialmente a un lenguaje modular, del tipo A.D.A. ó PASCAL; ó a un lenguaje más difundido como FORTRAN VII ó ALGOL e incluso BASIC; aconsejamos, no obstante, seguir las directrices de utilización marcadas por la IFAC ó por un programador tan experto como Dijkstra, en cuanto a las instrucciones condicionales y de bifurcación.

2- ANALISIS PRELIMINAR DE LOS DATOS MENSUALES SOBRE EL CONSUMO DE GASOLINA-AUTO.

El primer tema a tratar será la existencia de puntos atípicos en el periodo considerado de la serie elegida. Fue Peña (1978) quien, en su primer trabajo y tras ponerse en contacto con las fuentes de Campsa e INE, descubrió que los da-tos correspondientes a Julio de 1970 y Julio-Agosto de 1973 no eran correctos, el primero de ellos debido a un error de impresión y el segundo provocado por la acumulación en Agosto del 73 del consumo entre el 27 al 31 de Julio del mismo / año tras el incremento de precios de la gasolina auto de // 26 - VII - 73 que entro en vigor el día 27 del mismo mes. La diferencia existente de 94.165 millones de litros que supone un 18% del valor correcto de Julio puede parecer excesivo si consideramos el corto espacio de tiempo que suponen las últimos cinco días del mes, es, no obstante, esta característica la de ser los últimos días de un mes en el que la movilidad de personas en España es enorme, lo que justifica esta cifra tan comparativamente grande. Ambos errores han sido corregidos antes de realizar el análisis correspondiente fundamen- / talmente por la sensibilidad a este tipo de errores que po- / seen los procesos de media movil utilizados en la desesta- / cionalización de la serie.

El siguiente problema a tratar y de capital importancia es la heterocedasticidad. Como ya es sabido Box-Cox // (1964) introdujeron una vasta clase de transformaciones, incluyendo a la transformación logaritmica, que permitían eliminar o al menos amortiguar en gran parte, la dependencia // que la varianza de la serie poseyera respecto del nivel. No obstante, la utilización de estas transformaciones puntuales, apoyadas por Wilson (1973) y Box-Jenkins (1973), pueden aumentar la imprecisión, como afirman Chatfield-Prothero (1973). Nelson-Granger (1979) realizan un análisis empírico sobre el uso de las transformaciones Box-Cox y afirman que otro de los grandes inconvenientes que presenta su uso es la no normalidad de los residuos obtenidos para el valor máximo verosímil del parámetro de la transformación. Este hecho lo hemos verificado en nuestra aplicación y efectivamente para el valor / máximo verosímil del parámetro de la transformación Box-Cox de nuestra serie mensual de consumo de gasolina auto, existen evidencias estadísticas de la no normalidad de los residuos obtenidos, en base a ello, consideramos la transforma- / ción logaritmica previa a la aplicación de los resultados obtenidos en capítulos anteriores, que nos genera residuos no significativamente diferentes de los producidos por una distribución normal, además la elección de esta transformación está de acuerdo con los resultados obtenidos por Saleh (1981).

A pesar de considerar la transformación logarítmica, hemos de hacer notar que en la aplicación utilizando multi-filtro no es imprescindible, ya que podemos considerar una varianza que varíe temporalmente, mientras que la utilización del sistema PREDAUTO, podemos obtener, eso sí, una estimación a trozos de la varianza de la serie, pero encubre esta variación todas las demás, por lo que es aconsejable eliminar previamente este inconveniente. Resaltamos, no obstante, el hecho de la utilización del sistema PREDAUTO como medio de obtener una estimación para cada periodo temporal de la varianza de la serie, estimación que podemos aplicar posteriormente al filtro de Kalman en una versión multifiltro / propuesta por el autor.

La última de las transformaciones preliminares realizadas sobre los datos consiste en la verificación de la existencia de una estacionalidad estable y posterior estimación de los coeficientes de estacionalidad.

Al no disponer del Software adecuado, hemos necesitado elaborar un programa siguiendo las directrices de Shiskin (1959) que son a su vez las que dan origen al paquete X-11 / variante del programa Census II de la Federal Reserve Board de EEUU. Básicamente el proceso puede considerarse iterativo cíclico en el que para cada ciclo se realiza:

A.- Media móvil centrada de 12 periodos. (primera esti-

de la tendencia).

- B.- Obtención de una serie sin tendencia por cociente (diferencia).
- C.- Obtención de la primera estimación de los índices / de estacionalidad por medio de una media móvil ponderada de cinco términos para cada mes.
- D.- Obtención por cociente (diferencia) entre las series obtenidas en B y C de una primera estimación / de los índices residuales y posterior media móvil / centrada de doce meses.
- E.- Eliminación y modelización de valores anormalmente distintos de 1 en los índices residuales.
- F.- Obtención de una segunda estimación de índices de / estacionalidad por cociente (diferencia) entre la / serie obtenida en B y la serie obtenida en D modificada según E.
- G.- Por último estimación mejorada de la tendencia aplicando una media móvil ponderada según Henderson de 13 términos a la serie original desestacionalizada según los índices obtenidos en F.

Tras la realización un número adecuado de veces del / anterior ciclo computacional, pasamos a establecer un diseño mediante análisis de la varianza para verificar la hipótesis

de no existencia de estacionalidad estable, conduciendo a // comparar el valor teórico de una F de Snedecer con 11 y n-12 grados de libertad, donde n es el número de observaciones de la serie, con el valor experimental obtenido mediante:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{12} n_i (\bar{s}_i - \bar{s})^2}{\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{n_i} (s_{ij} - \bar{s}_i)^2} \cdot \frac{n - 12}{11}$$

donde i indica el mes; j el año, n_i el número de observaciones disponibles para el mes i; s_{ij} los índices de estacionalidad estimados, \bar{s}_i la media para cada mes, mientras que \bar{s} la media total.

En estas condiciones cuando la estacionalidad no existe ó es errática el estadístico H sigue una distribución // $F_{11, n-12}$ y consecuentemente si el valor experimental es superior al valor teórico tabulado para un nivel de confianza fijado, podemos rechazar la hipótesis de la no existencia de / estacionalidad estable.

Aplicado el proceso descrito a los datos de la serie // temporal que nos ocupa transformada previamente, hemos obtenido un valor experimental del estadístico H igual a 3743.1 con 11 y 252 grados de libertad, lo que evidencia la existencia de una clara estacionalidad estable cuyos coeficientes /

mensuales, se encuentran recogidos en la tabla 1.

Recogemos finalmente en la tabla 2 las series de datos originales, transformados logarítmicamente y desestacionalizados por cociente mensual con los coeficientes de la tabla 1, mientras que en las figuras 1,2 y 3 representamos respectivamente la serie original, la serie transformada logarítmicamente y la serie transformada junto con la misma desestacionalizada.

En orden a la precisión de la predicción, podemos decir que la principal razón para el uso de las transformaciones de Box-Cox, siguiendo a Box-Jenkins, resulta ser la construcción de una predicción más eficiente, no obstante Nelson y Granger en un buen trabajo de 1979, concluyen, tras un análisis meramente empírico, que la predicción obtenida utilizando transformaciones del tipo Box-Cox no son significativamente mejores que los obtenidos directamente de la serie original; además nuevamente Granger esta vez en colaboración // con Newbold (1976) encuentran que las predicciones obtenidas de una serie transformada suelen ser sesgadas, produciendo / en consecuencia errores de predicción con media no nula. En concreto si la serie transformada se distribuye normalmente, entonces Granger-Newbold (1976), construyen una predicción / óptima como:

$$\lambda \neq 0. \quad E \left[x_{t+h} / x_t, \lambda \right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_{h,\lambda} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-1/2 \left(\frac{x - p(n,h,\lambda)}{\sigma_{h,\lambda}} \right)^2 \right] (\lambda x - 1)^{1/\lambda} dx$$

donde $p(n,h,\lambda)$ es la predicción basada en n observaciones, con horizonte h y parámetro de transformación λ , y $\sigma_{h,\lambda}$ el error de predicción con horizonte h y parámetro λ .

La integral obtenida que en general resulta de compli cada evaluación se reduce a una expresión simple en el caso de $\lambda = 0$; esta es:

$$E \left[x_{t+h} / x_t, 0 \right] = \exp \left(p(n,h,0) + \frac{\sigma_{h,0}^2}{2} \right)$$

obteniendo con esta transformación, aumentar considerablemente la eficiencia y la precisión de la predicción como demuestran Nelson y Granger en el análisis empírico realizado en / 1979.

3- CARACTERISTICAS DE LA IMPLEMENTACION Y RESULTADOS DE LA APLICACION DE LA VERSION MULTIFILTRO DE KALMAN PROPUESTA.

3.1 Implementación

Consideramos ahora la implementación de la versión // multifiltro propuesta en el capítulo I. En primer lugar comentamos las características de la implementación realizada en lenguaje APL, sobre un ordenador IBM-5100 del Centro de / Cálculo de la Universidad de Málaga.

La primera de las características a citar, es el diseño modular realizado (†) Consta el programa de tres bloques:

- A.- Iniciación
- B.- Elaboración del filtraje
- C.- Predicción.

A su vez el bloque de iniciación consta de:

- A1.- Cálculo coeficientes de estacionalidad
- A2.- Asignación inicial de valores a las variables globales.

El cálculo de los coeficientes de estacionalidad lo /

(†) Los programas construidos y probados, pueden verse en el Apéndice

realizamos a partir del análisis preliminar de los datos, ya comentado en el apartado 2 de este capítulo: Por lo que respecta al bloque A2, hemos de realizar las siguientes operaciones:

- a) Fijar las constantes de relación entre las varianzas de los parámetros y la varianza de la serie de innovación.
- b) Asignar las probabilidades de ocurrencia de cada estado para cualquier instante.
- c) Elegir los valores iniciales de $x_F(1)$ y $P_F(1)$ según el criterio dado en el Teorema 4 del epígrafe 3 capítulo I.
- d) Asignación de los valores iniciales de las probabilidades de ocurrencia de cada estado.
- e) Asignación del valor de la varianza de innovación para cada instante.

En cuanto a las constantes de relación entre las varianzas de innovación y de los parámetros, hemos comprobado empíricamente como los resultados obtenidos no dependen significativamente del criterio racional elegido, salvo para elecciones conceptuales inadecuadas, tal es el caso de constantes negativas ó excepcionalmente grandes y valores no nulos

en aquellos estados que lo exigen. El esquema elegido para / nuestro estudio es:

$$k_{\gamma}^{(1)} = 0 \quad , \quad k_{\gamma}^{(2)} = K \quad , \quad k_{\gamma}^{(3)} = 0 \quad , \quad k_{\gamma}^{(4)} = 0$$

$$k_{\delta}^{(1)} = 0 \quad , \quad k_{\delta}^{(2)} = 0 \quad , \quad k_{\delta}^{(3)} = K \quad , \quad k_{\delta}^{(4)} = 0$$

$$k_{\epsilon}^{(1)} = 1 \quad , \quad k_{\epsilon}^{(2)} = 1 \quad , \quad k_{\epsilon}^{(3)} = 1 \quad , \quad k_{\epsilon}^{(4)} = K$$

donde $K=100$ para nosotros.

Las probabilidades de ocurrencia inicial de cada estado, las hemos hecho coincidir con las probabilidades de ocurrencia en cualquier instante (operaciones d y e), siendo estas:

$$q^{(1)}(t) = 0.91$$

$$q^{(2)}(t) = q^{(3)}(t) = 0.005$$

$$q^{(4)}(t) = 0.08$$

La estimación de la varianza de innovación la obtuvimos aplicando los resultados del capítulo II previamente.

Para las operaciones b, d y e una elección adecuada / es importante. De los criterios de elección de b y d cabe de

cir que es importante tener información adicional sobre la / serie a tratar y en función del conocimiento obtenido originar así las probabilidades (observese la racionalidad en la asignación de las mismas para nuestro análisis), si bien pequeñas variaciones no afectan significativamente a los resultados obtenidos. Respecto de la estimación inicial de la varianza de innovación, los resultados se ven afectados para / una estimación pobre, sobre todo si la suboptimalidad es debida a una estimación por defecto.

En este punto es preciso hacer notar que la estima-// ción de la varianza de innovación puede ser considerada como independiente del tiempo o bien función del mismo. En algu-// nos de los análisis realizados se ha contemplado esta posibi- lidad, basándonos en la estimación de la misma hecha por // Saleh (1981) para el periodo 65-78, sin embargo dada la ruptura en el crecimiento del consumo en periodos posteriores, los resultados obtenidos no son todo lo válidos que cabría / esperar. Más adelante comentaremos algunas soluciones a este problema, resaltando aquí la dificultad que ello plantea y / los buenos resultados obtenidos utilizando la transformación logarítmica.

El bloque B del análisis operativo es la programa- ción directa de la tesis obtenida en el teorema 3.4 del capí- tulo I.

En cuanto al bloque C, y dado que supondremos no existen variaciones no estocásticas, podemos decir que aplicando el predictor lineal de Kalman, obtenemos tanto una estimación del valor de la señal para un horizonte de predicción / fijado, como un intervalo de confianza para el mismo horizonte, gracias a la estimación obtenida del error cuadrático medio de predicción.

3.2 Los Resultados y su análisis.

Recogemos aquí los datos más significativos de las // aplicaciones realizadas y las interpretamos conforme a su // significación económica.

Los resultados comentados en este apartado, han sido elegidos como representativos de varias aplicaciones en las que sus conclusiones son similares, siempre y cuando:

- a) Se utilice la transformación logarítmica previamente.
- b) La estimación de la varianza de innovación no sea inferior en 20% al valor fijado, ni superior en / un 250%.
- c) La probabilidad del estado 1, sea al menos del 90% y la del estado 4, superior a las del estado 2 y 3

en más de un 50%.

El valor de la varianza de innovación elegido es:

$$V = 0.0022$$

cuando hemos tomado logaritmos de las cifras de consumo en / unidades de millones de litros.

Dado que la matriz inversa de la de varianza covarianza de los parámetros es la matriz de información de las mismas y puesto que en nuestro caso es de orden 2 dicha matriz, podemos considerar la varianza estimada de cada parámetro como una medida de la incertidumbre del valor estimado para cada parámetro, en base a estas consideraciones y tras recoger en la tabla 3, las datos correspondientes a las observacio- / nes donde la incertidumbre en alguno de sus parámetros ha aumentado al menos en un 50% respecto del valor anterior, una variación menor la consideramos no significativa, podemos // concluir:

- 1- La incertidumbre en la pendiente de Agosto de 1959 es significativamente alta.
- 2- En Abril de 1967 existió una perturbación en la estructura de consumo de gasolina auto.
- 3- En Junio de 1971 existió un cambio de nivel, dado el incremento anormalmente alto de la incertidum- /

- bre en la estimación del mismo.
- 4- Hubo en Julio del 72 una nueva perturbación en la estructura de consumo de gasolina auto.
 - 5- En Marzo de 1974 se provocó un drástico cambio de nivel en la estructura de consumo.
 - 6- En Enero de 1975 hubo una acomodación de la tenden-/cia del consumo.
 - 7- En Enero de 1976 existió una nueva perturbación en /la estructura de consumo.
 - 8- Las observaciones en los meses de Marzo y Agosto de 1977 recogen la existencia de perturbaciones no estocásticas en el consumo de gasolina auto.
 - 9- Es, sin embargo, en Marzo del 78 y Julio del 79 cuando el análisis de las observaciones en dichos meses detecta la existencia de sendos bruscos cambios en /nivel de consumo.
 - 10- Por último en Agosto del 79 puede observarse una modificación en el crecimiento de consumo, observándose igualmente la presencia de una moderada perturba-ción en Julio de 1980.

Para completar el análisis previo recogemos en la tabla 4, las observaciones en las que la probabilidad de tran-



sición al estado de perturbación transitoria es superior al 2.5% haciendo notar que la probabilidad normal de transición no es superior al 1.5%.

Del análisis de la tabla 4, junto con el ya realizado de la tabla 3, podemos establecer las siguientes consideraciones:

- A.- En Agosto de 1959, comenzó un nuevo periodo en la estructura de consumo de gasolina-auto, seguido de una epoca de inestabilidad, considerada como de // adaptación de la economía; que finaliza en Agosto de 1962, con un crecimiento eufórico del consumo.
- B.- En Abril de 1967 hubo una desaceleración moderada en el consumo.
- C.- En Junio de 1972, hubo un incremento en el nivel de consumo, seguido de un ligero aumento en el incremento de consumo por unidad temporal.
- D.- Es en Marzo de 1974 cuando se detecta un descenso en el nivel de consumo muy acusado, acompañado de un inapreciable descenso en la pendiente del crecimiento.
- E.- En Septiembre de 1975 existe una ligera recesión de consumo.

- F.- En Enero de 1976 se supera el nivel de consumo perdido en el periodo anterior y se estabiliza.
- G.- En Marzo de 1977 hubo una disminución en el consumo disminución poco apreciable.
- H.- En Agosto de 1977 se complementa el efecto anterior con una, tambien muy ligera, desaceleración en el / consumo.
- I.- En Marzo de 1978 existió una perturbación en el nivel, perturbación considerable que provocó una disminución apreciable del nivel de consumo.
- K.- No es, sin embargo, hasta Julio de 1979 cuando se / produce una brusca disminución del nivel de consumo completado en Agosto de 1979 con una sensible desaceleración del mismo.
- L.- En Julio de 1980 vuelve a disminuir sensiblemente el consumo y en Septiembre de 1980 comienza una progresiva recuperación en el crecimiento del consumo.
- M.- Por otra parte existen algunos puntos de consumos / anormales recogidos en la tabla 4, pudiendo desta-/car un breve periodo en el segundo semestre de 1975 de inestabilidad.

3.3 Interpretación y justificación de las perturbaciones.

Cara a la búsqueda de las causas que provocaran las / perturbaciones más significativas recogidas en el epígrafe / 3.2, cabe resaltar la definitiva influencia del incremento / continuado de precios por parte de la OPEP y la actitud de / la Administración Pública Española , como vemos a continua- / ción.

En cuanto al periodo de inestabilidad existente desde Agosto de 1959 a Agosto de 1962, cabe justificarlo por la implantación de Estabilización Económica y el comienzo del re-lanzamiento de la Economía Española, pudiendo encontrarse en 1962 el punto de clarificación de la actividad económica.

Respecto de la desaceleración de 1967, provocada por el alarmismo por parte del consumidor, debido a los incrementos de precios de la OPEP con su repercusión interna reflejada en un aumento de precios con fecha Junio de 1967.

El incremento de precios con fecha Enero de 1971 fue asumido apenas sin impacto incluso en Junio de 1972, sin duda debido al turismo, hubo un incremento en el nivel de consumo.

Tras el impacto inicial de la subida de Agosto de 1973 podemos augurar que no existió evidencia de una variación //

significativa en la estructura de consumo de gasolina-auto. Hay que significar que tanto la subida de Enero de 1971 como la de Agosto de 1973 eran de 1 y 1.50 pesetas respectivamente por litro, lo que evidencia la pobreza del impacto en el consumo de dicho incremento.

Es, sin embargo con las subidas casi simultaneas de Enero de 1974 y Marzo del mismo, con un incremento acumulado de 6.50 en la gasolina de 96-N-octanos, cuando el consumidor dejó de consumir bruscamente manteniendo, no obstante, el // mismo ritmo de crecimiento.

En el periodo correspondiente al segundo semestre de 1975, se observa una ligera recesión en el consumo, que no cesa hasta principios de 1976, esta época, hay que recordarla es la correspondiente a la enfermedad del anterior Jefe de / Estado y su posterior fallecimiento, y la de la inestabili-/dad política que ello provocó, aunque no podemos olvidar el incremento de precios de Noviembre del mismo año.

A pesar del incremento de Marzo de 1976, como ya he-/mos dicho, se observa una recuperación del nivel de consumo a principios de año, que no se ve afectado por el incremento citado.

No ocurre lo mismo con el incremento de Marzo de 1977 que provocó una ligera disminución del nivel de consumo, com

plementado por una desaceleración del consumo en Agosto del mismo año, debida al nuevo incremento de precios con esa misma fecha.

Una mención destacada merece la observación 231 correspondiente a Marzo de 1978 en la que sin mediar variación alguna de precios, se produjo una sensible disminución del nivel de consumo. A pesar de no existir justificación aparente de este hecho, si analizamos la prensa de esa época podemos detectar un creciente interés por el tema energético, y en Febrero de 1978 encontramos recogida en la prensa diaria la actitud de la Administración pública en cuanto al control y disminución del consumo de gasolina por su parte, disminuyendo y remodelando el P.M.M. y comenzando una campaña de sensibilización pública respecto del tema; también hay que significar la elaboración del P.E.N. por estas fechas.

Otra de las posibles causas debe buscarse en el comportamiento turístico de ese año.

Podemos establecer que hasta el incremento de precios de Julio de 1979 no varía la estructura de consumo en todos sus aspectos. Es en el mismo mes de Julio cuando se produce una muy sensible disminución en el nivel de consumo acompañada de una, también muy sensible, disminución en la pendiente de la renta ajustada, es decir en el incremento por unidad temporal de consumo.

Por último los incrementos correspondientes al primer semestre de 1980 provocan una grave inestabilidad de la que no comienza a recuperarse hasta el verano del mismo año con el comienzo de las vacaciones, si bien el crecimiento es más lento, no obstante este análisis, dada la falta de disponibilidad de datos posteriores, está necesariamente incompleto en cuanto al segundo semestre de 1980.

3.4 Análisis de residuos y predicciones.

Tras la aplicación a los residuos obtenidos en el // proceso realizado de diversos test para verificar el buen // ajuste del modelo podemos concluir:

- A.- La media de los residuos no es significativamente / distinta de cero.
- B.- No existe evidencia de autocorrelación en los mis- / mos, tras aplicarle el test de Box-Pierce (1970), / modificado por Ljung-Box (1978).

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} r_k^2$$

donde

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n a_t a_{t-k}}{\sum_{t=1}^n a_t^2}$$

y $\{a_t\}$ los residuos.

- C.- El valor del coeficiente de determinación R para // nuestro análisis resulta ser 0,9987.
- D.- La aplicación de un test de signos a los residuos / denota la no existencia de signo preferente, lo que correspondería a una sobre ó infra estimación; mientras que pone de manifiesto la existencia de una racha de signos tras las modificaciones sensibles de nivel ó pendiente.

De este hecho, la existencia de rachas en los signos, hemos obtenido una información capital respecto del modelo / multifiltro, al menos como ha sido considerado por el autor, esta información revela que tras una modificación en los parámetros existe un periodo de adaptación del modelo, en el / que ajusta sus estimaciones a los nuevos valores. Debido a / esto y tras existir perturbaciones en los últimos meses de / 1980, podemos conjeturar, aunque más adelante comprobaremos, que el nivel y la tendencia estimada para la predicción pueden no ser totalmente correctas. A pesar de ello construimos las predicciones obtenidas

<u>Horizontes</u>	<u>Valor</u>
1	6.25255
2	6.15843
3	6.28309
4	6.32474

5	6.31246
6	6.33263
7	6.54871
8	6.62348
9	6.43282
10	6.39154
11	6.25685
12	6.21687

donde el coeficiente de variación en cada caso es inferior a 0.0002, lo que denota una buena predicción.

Para obtener, por último, los valores predichos del / consumo en millones de litros, y al haber tomado logaritmos neperianos inicialmente, aplicamos la fórmula.

$$x_t(h) = \exp(p_t(h) + \sigma_{h/2}^2)$$

obtendremos entonces:

	<u>1981</u>	
Enero		519.621
Febrero		472.945
Marzo		535.735
Abril		558.519
Mayo		551.703
Junio		562.943
Julio		698.726

Agosto	752.973
Septiembre	622.267
Octubre	597.103
Noviembre	521.860
Diciembre	501.407

4- CARACTERISTICAS DE LA IMPLEMENTACION Y RESULTADOS DE LA APLICACION DEL SISTEMA DE PREDICCIÓN AUTOMÁTICA. (PREDAUTO).

4.1 Implementación.

Como en el epígrafe 3, veremos en primer lugar las características y diseño de la implementación del sistema de análisis de series temporales construido en el capítulo II.

Al igual que la versión multifiltro, la implementación se ha realizado en lenguaje APL y el diseño ha sido modular(†)

El programa general puede ser dividido en cuatro bloques:

- A.- Inicialización
- B.- Verificación de la existencia de perturbación no aleatoria.
- C.- Modificación y consideración de punto de ruptura.
- D.- Predicción.

(†) Los programas en lenguaje APL desarrollados para este propósito, se encuentran recogidos en el Apéndice.

Como es lógico, el bloque de Inicialización se subdivide en:

- A1.- Cálculo coeficientes de estacionalidad.
- A2.- Análisis inicial del primer año, y estimación inicial en base a este año.

Las operaciones realizadas en el bloque A1 han sido / ya comentadas. Respecto de las operaciones realizadas en el bloque A2, podemos agruparlas en:

- a) Determinación del orden inicial del modelo autorregresivo a ajustar.
- b) Estimación Inicial de los parámetros de la recta de tendencia ajustada y su posterior utilización en la eliminación de la tendencia en el periodo inicial, fijado en 12 meses.
- c) Estimación inicial de los parámetros autorregresivos fijados por la determinación del orden en base al estadístico SAECT.

Respecto de los bloques B y D cabe resaltar que no // presentan dificultad alguna, en cuanto no es más que la computación del estadístico constuido en el Teorema 2. del capítulo II, mientras que la predicción no es más que la agrega-

ción de la componente estacional, previamente determinada, / con la componente de tendencia e irregular obtenida a partir del último punto de ruptura detectado.

Por lo que se refiere al bloque C, si la verificación de la existencia de perturbación no estocástica es negativa, repetimos el proceso donde el periodo base se aumenta en 6 / meses, de ser positiva disminuimos el periodo de investiga- / ción en un mes y repetimos el proceso de verificación, pu-// diendo detectar así los puntos de ruptura de la estructura / del modelo. Si detectamos un punto de ruptura, dado que he- / mos de estimar dos parámetros de la recta de tendencia, con- sideramos un periodo inicial, libre de prueba, de tres meses repitiendo entonces la verificación mientras poseamos obser- vaciones.

4.2 Los resultados y su análisis.

Utilizando el sistema de análisis PREDAUTO, hemos rea- lizado dos pruebas, una al nivel de significación del 5% y / otra al 1%. En ambos casos hemos obtenido que el proceso // autorregresivo que mejor se ajusta en cada periodo es de orden 1, y los resultados obtenidos para el nivel del 5% se encuentra recogido en la tabla 5, mientras que los obtenidos para el / nivel del 1% se pueden hallar en la tabla 6, todo ello apli-

cado a los datos originales con la transformación logarítmica.

En otro caso, es decir si no aplicamos la transformación logarítmica, además de no poseer las propiedades ya comentadas, el sistema de análisis PREDAUTO resulta hipersensible, lo cual era de esperar dada la construcción de dicho sistema en base a estadístico que incluyen la hipótesis de / no variación en la varianza en el periodo base.

De las tablas 5 y 6 podemos observar, como en la tabla 6 se observa que el sistema Predauto al 1% es menos sensible a los puntos atípicos que al 5%, obteniendo además mejores resultados, ya que al detectar los puntos atípicos // acorta los periodos base y por ello la influencia de dichos puntos atípicos es muy superior al caso de no ser considerado, donde en algunos de ellos su influencia es poco significativa, tal es el caso de la observación 168, mientras que / en otros la existencia y detección de dichos puntos puede // desvirtuar y encubrir el verdadero comportamiento del sistema; una observación de estas características resulta ser la 190 y más acuradamente la 243.

4.3 Interpretación y justificación de la existencia de perturbaciones en los puntos de ruptura detectados.

En este apartado y tras advertir que consideramos los resultados de la tabla 6, por los problemas ya expuestos al nivel del 5%, justificaremos y por ello interpretaremos los nuevos puntos de ruptura detectados; tales puntos coinciden con las observaciones 64, 105 y 195.

A.- En Abril de 1964 (observación 64) no existe una causa que explique la existencia de dicho punto de rupturas ahora bien, podemos observar en la tabla 7, como existe una modificación sensible en la varianza residual, disminuyendo esta y significando que el periodo de inestabilidad de los primeros años de la década de los 60 acaba y comienza un periodo de crecimiento más acelerado y estable.

B.- Una explicación similar cabe realizar de la observación 105, correspondiente a Octubre de 1967, así observamos en la tabla 7, que se estabiliza, disminuye la varianza resi-/dual, mientras que disminuye el incremento de consumo por // unidad temporal. Observar la contraposición de ambas observaciones 64 y 105 y la semejanza en cuanto a la estabilidad del crecimiento.

C.- Por lo que respecta a la observación correspondiente a Marzo de 1975, podemos considerar que es el comienzo de un nuevo periodo de inestabilidad en el consumo y de creci-/miento más amortiguado. La inestabilidad que se observa en / este periodo coincide con el crecimiento de la afluencia turística a España y su natural inestabilidad; mientras que en

1980 la inestabilidad disminuye, debido posiblemente a la // sustitución por parte del turista extranjero del medio de // transporte ó, lo que consideramos más justificado, por la // progresiva incorporación del español medio al movimiento turístico provocando esto una amortiguación considerable de la inestabilidad del consumo de gasolina para automovil.

4.4 Análisis de residuos y predicciones.

De la aplicación de varios test estadísticos, comentados en 3.4 de este capítulo, podemos concluir que no existe evidencia estadística de ningún tipo de que los residuos obtenidos para el nivel de 1% no sean ruido blanco, lo que es síntoma de buen ajuste de la serie de consumo de gasolina -// auto por parte del sistema PREDAUTO.

Unicamente hay que resaltar la existencia de residuos anormalmente grandes en las observaciones 168, 190, 243 y 260.

Por lo que respecta a la predicción usando el sistema PREDAUTO hemos obtenido los siguientes resultados, para un / horizonte de 12 meses, adelantando desde ahora que durante / 1981 hay previsiblemente puntos de ruptura significativos

Nivel del 5%	
<u>Horizontes</u>	<u>Valos serie transformada</u>
1	6.3350

2	6.3106
3	6.5405
4	6.6390
5	6.6916
6	6.7682
7	7.0721
8	7.1852
9	6.9532
10	6.8985
11	6.7684
12	6.8861

Aplicando la fórmula de predicción insesgada de Granger-Newbold (1976) y teniendo en cuenta que la varianza residual es 0.00236 obtendremos:

Nivel del 5%

<u>Horizontes</u>	<u>Predicción</u>
1	564.63528
2	551.0249
3	693.4506
4	765.23272
5	806.56138
6	870.77185
7	1180.01213
8	1321.31139

9	1047.72875
10	991.95724
11	870.94602
12	979.73292

Respecto del nivel del 1% podemos, utilizando el mismo procedimiento, agrupar los resultados obtenidos

<u>Horizonte</u>	<u>Valor de serie transformada</u>	<u>Predicción</u>
1	6.30738	549.215
2	6.27343	530.882
3	6.49213	660.600
4	6.57995	721.304
5	6.62230	752.507
6	6.68824	803.800
7	6.97843	1074.424
8	7.07983	1189.086
9	6.84186	936.894
10	6.77809	879.365
11	6.64107	766.765
12	6.74724	852.650

Error cuadrático medio de predicción: 0.0471.

5. CONSIDERACIONES FINALES.

Del análisis comparado entre las distintas aplicaciones realizadas con datos del consumo nacional de gasolina auto, expresados en unidades de millón de litros, pueden deducirse algunas consideraciones relevantes.

En primer lugar hay que destacar la fácil implementa ción de ambas aplicaciones en virtud de la sistemática que / impregna ambas técnicas. Esta facilidad da origen a la incorporación, a cualquier nivel, de estas técnicas en el mundo / empresarial y técnico.

Otra importante particularidad de las técnicas trata das consiste en su distinto comportamiento frente a la hete rocedasticidad. Mientras que el filtro de Kalman, habiendo / estimado previamente una función temporal de la varianza, no presenta una sensibilidad muy acusada, el sistema PREDAUTO / resulta ser hipersensible como ya indicamos en su momento. / No obstante combinando ambas técnicas, la PREDAUTO para esti mar la varianza a trozos y el filtro de Kalman para obtener los resultados deseados, se puede llegar a tener un potente instrumento de análisis de series temporales complicadas.

Desde la óptica de su sensibilidad a los puntos atí picos, recopilando los comentarios ya realizados, podemos //

concluir que mientras el filtro de Kalman en su versión multifiltro detecta y anula el efecto de los puntos atípicos, / el sistema PREDAUTO detecta los puntos atípicos pero no anula su efecto, incluso puede llegar este a provocar considerables errores, a pesar de ello puede decirse que al nivel de 1% la influencia de los puntos atípicos se amortigua obstentablemente. Otra posibilidad considerable desde el punto de vista de mejora del sistema, podría ser el tratamiento pre- / vio de dichos puntos, por ejemplo aplicando los recientes re- / sultados de ABRAHAM-BOX (1979).

En cuanto al tratamiento que dichas técnicas hacen // respecto de los puntos de ruptura, es completamente distinto. Mientras el filtro de Kalman tras detectar un punto de ruptu- / ra necesita el conocimiento de varias observaciones posterior- / es, primero para identificar que tipo de punto de ruptura / ha sido detectado, y en segundo lugar para adaptarse a la nue- / va situación, el sistema PREDAUTO actúa de forma directa en el sentido de que no necesite un periodo de acomodación. El distinto comportamiento es debido al método utilizado de aná- / lisis de datos. Usando la terminología introducida en el ca- / pítulo I, podemos indicar que mientras el procesamiento que hace de los datos el filtro de Kalman, versión multifiltro, es on-line, el que realiza el sistema PREDAUTO es off-line. / Este distinto comportamiento tiene especial significación si existe un punto de ruptura en el periodo final de la serie /

temporal considerada, como ejemplo puede observarse el dis- /
tinto tratamiento de la observación 258 de nuestra serie y /
su implicación en la obtención de predicciones según ambos /
métodos.

Resulta obligado, en definitiva, la comparación de los
modelos propuestos en esta tesis con los ya construidos y de-
sarrollados en los trabajos publicados sobre el tema.

Comenzaremos por el primero cronológico, el modelo de
Peña (1978). Tras resaltar que en nuestro análisis no existe
evidencia alguna de la existencia de un punto atípico en la
observación 164, como señala Peña, podemos considerar que el
punto citado por Peña como atípico no es más que la trasla- /
ción del punto de ruptura en la observación 162 por el efec-
to de las diferencias tomadas.

Otra consideración relativa al modelo construido por
Peña es la insistencia de éste en la ondulación que parece
apreciarse en el correlograma, tanto en su componente irregu-
lar como en su componente estacional. En cuanto a la compo- /
nente estacional podemos asegurar que no hemos encontrado //
evidencia de la existencia de la ondulación que Peña señala,
detectando, eso sí, un claro periodo de tendencia explosiva
hasta 1974, junto con otro periodo en el que parece advertir-
se uan desaceleración de la misma, pudiendo esto llevar a //
conclusiones equívocas respecto de la componente estacional.

Además hemos de recordar que verificamos la existencia de una estacionalidad estable en su momento.

Por lo que respecta a la componente irregular nos encontramos en la misma situación que comentamos ya en la componente estacional. Peña tanto en el interesante trabajo de 1978 como en su perspicaz análisis de 1979 insiste en modelizar la componente irregular por un ARMA (1.1) debido fundamentalmente a la oscilación del correlograma que él considera. Hemos de argumentar una vez más que en nuestro estudio // no hemos podido encontrar evidencia de la sinusoidalidad // del correlograma propuesta por Peña achacando esto a la incorrecta modelización que a nuestro juicio, hace Peña de la // tendencia mediante diferencia.

Nos queda por comentar la contribución de Saleh (1981) a la modelización de series temporales utilizando procesos // de difusión. Independientemente de las ventajas argumentadas que el propio Saleh cita cabe señalar que ante una variación continuada de la tendencia el uso de los procesos de difu-// sión puede no ser totalmente correcto, en particular para la serie de consumo de gasolina-auto, existen a partir de 1974 drásticos cambios en la estructura correspondiente a la tendencia. No obstante hemos de hacer notar que uniendo ambas // técnicas la propuesta por Saleh y la propuesta por el autor del presente trabajo, puede obtenerse un poderoso instrumen-

to de análisis estructural univariante de series temporales en base a procesos de difusión y filtros de Kalman respectivamente.

FIGURAS

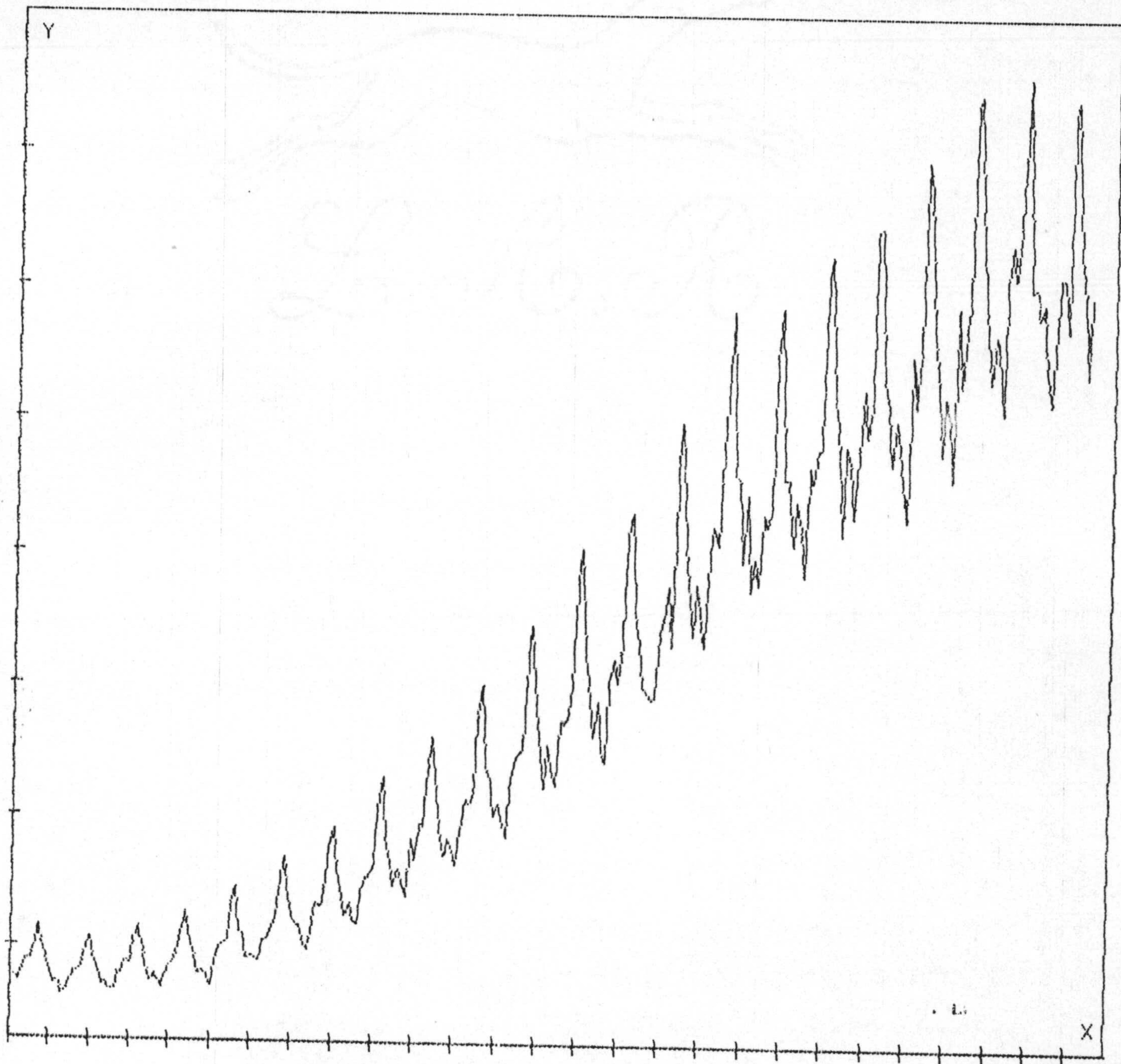
Y

TABLAS

ESTADÍSTICAS

FIGURA 1

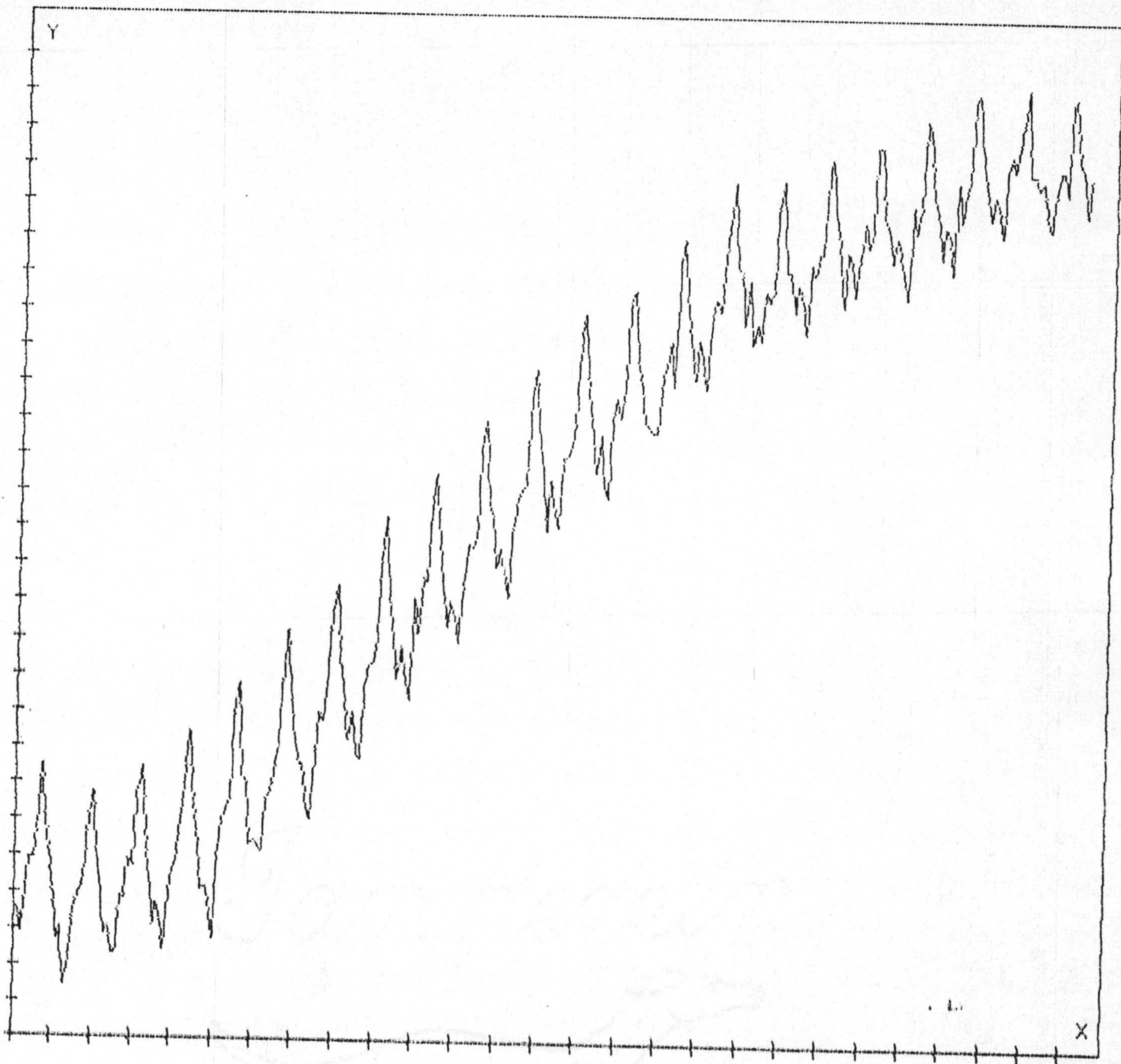
REPRESENTACION GRAFICA DE LA SERIE DE CONSUMO DE GASOLINA AUTO



Elaboración propia.

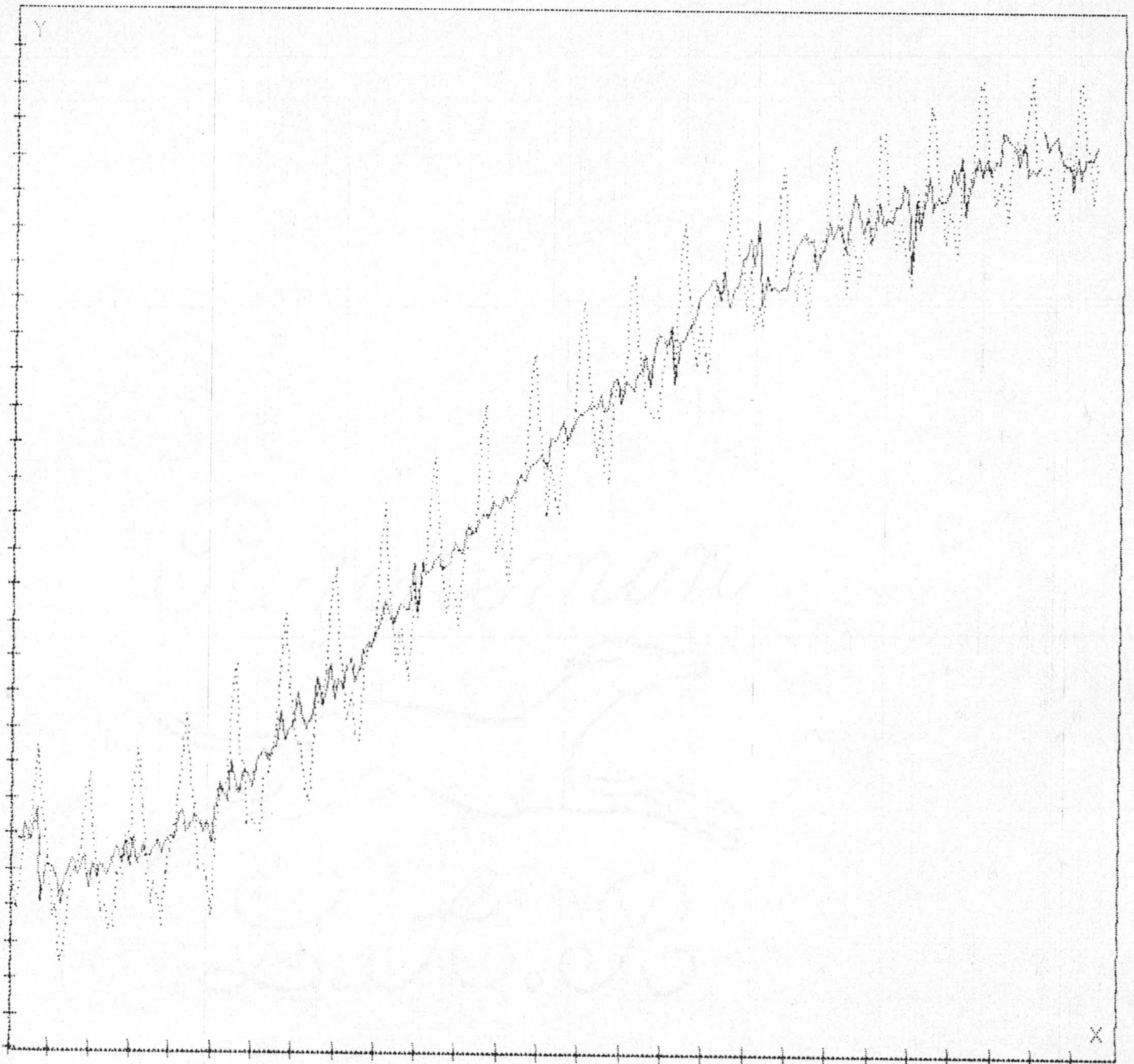
FIGURA 2

REPRESENTACION DE LA SERIE TRANSFORMADA LOGARITMICAMENTE



Elaboración propia.

FIGURA 3
REPRESENTACION CONJUNTA DE LA SERIE TRANSFORMADA Y DESESTACIONALIZADA



Elaboración propia.

COEFICIENTES PORCENTUALES DE ESTACIONALIDAD

MESES	COEFICIENTES
ENERO	97.04
FEBRERO	96.09
MARZO	98.99
ABRIL	99.87
MAYO	100.05
JUNIO	100.58
JULIO	104.46
AGOSTO	105.49
SEPTIEMBRE	101.47
OCTUBRE	100.07
NOVIEMBRE	97.60
DICIEMBRE	98.71

TABLA 1

INCREMENTO DE INCERTIDUMBRE SIGNIFICATIVO

OBS	INCR. NIVEL	INCR. PENDIENTE
8	52.9	100.0
100	53.7	80.0
162	285.0	166.0
175	115.0	117.0
183	324.0	125.0
193	77.0	140.0
205	113.0	101.0
219	82.0	65.0
224	.0	54.0
231	217.0	149.0
247	374.0	142.0
248	.0	271.0
258	.0	61.0

Elaboración propia.

OBS	ORIGINAL	TASNFORMADA	DESESTAC.
1	77.473	4.34993	4.48245
2	72.913	4.28927	4.46395
3	82.053	4.40737	4.45221
4	89.150	4.49032	4.49626
5	89.617	4.49555	4.49348
6	97.044	4.57516	4.54894
7	115.629	4.75039	4.54753
8	102.168	4.62662	4.38576
9	90.992	4.51077	4.44559
10	83.747	4.42780	4.42450
11	71.572	4.27070	4.37563
12	74.052	4.30477	4.36096
13	63.313	4.14809	4.27446
14	65.325	4.17937	4.34958
15	75.845	4.32869	4.37274
16	81.321	4.39840	4.40422
17	81.839	4.40475	4.40273
18	87.369	4.47014	4.44452
19	100.946	4.61459	4.41753
20	106.992	4.67275	4.42949
21	91.958	4.52133	4.45600
22	81.362	4.39891	4.39563
23	72.750	4.28703	4.39235
24	73.863	4.30221	4.35837
25	68.999	4.23409	4.36308
26	69.417	4.24013	4.41282
27	81.006	4.39452	4.43924
28	80.614	4.38967	4.39548
29	89.543	4.49472	4.49265
30	87.695	4.47386	4.44822
31	107.017	4.67299	4.47344
32	115.083	4.74565	4.49860
33	97.113	4.57588	4.50976
34	86.410	4.45910	4.45578
35	74.417	4.30968	4.41557
36	79.282	4.37301	4.43010
37	75.346	4.32209	4.45376
38	70.052	4.24924	4.42229
39	81.624	4.40212	4.44691
40	86.548	4.46070	4.46660
41	90.738	4.50798	4.50590
42	100.781	4.61295	4.58651
43	115.634	4.75043	4.54757
44	126.990	4.84411	4.59193
45	103.684	4.64135	4.57428
46	97.182	4.57659	4.57317
47	82.134	4.40835	4.51666
48	83.072	4.41971	4.47740
49	79.459	4.37524	4.50853
50	72.042	4.27725	4.45144

		TABLA 2 (CONT.)	
OBS	ORIGINAL	TRANSFORMADA	DESESTAC.
51	89.168	4.49052	4.53621
52	100.604	4.61119	4.61729
53	102.723	4.63204	4.62991
54	105.503	4.65874	4.63204
55	133.296	4.89257	4.68364
56	145.592	4.98081	4.72151
57	112.685	4.72460	4.65633
58	110.338	4.70355	4.70004
59	93.174	4.53447	4.64587
60	94.392	4.54746	4.60682
61	92.888	4.53139	4.66944
62	91.326	4.51444	4.69829
63	105.829	4.66182	4.70926
64	107.842	4.68067	4.68686
65	117.367	4.76531	4.76312
66	123.261	4.81430	4.78671
67	154.052	5.03729	4.82218
68	168.340	5.12599	4.85913
69	136.413	4.91569	4.84466
70	124.056	4.82073	4.81714
71	116.486	4.75777	4.87466
72	116.598	4.75873	4.82085
73	102.481	4.62968	4.77072
74	99.757	4.60274	4.79019
75	120.169	4.78890	4.83762
76	135.117	4.90614	4.91263
77	131.952	4.88244	4.88019
78	143.411	4.96571	4.93725
79	177.098	5.17670	4.95564
80	190.963	5.25208	4.97866
81	156.938	5.05585	4.98280
82	138.578	4.93143	4.92775
83	125.142	4.82945	4.94810
84	135.116	4.90613	4.97018
85	119.837	4.78613	4.93194
86	118.109	4.77161	4.96594
87	144.302	4.97191	5.02250
88	153.664	5.03477	5.04143
89	154.359	5.03928	5.03697
90	165.180	5.10704	5.07776
91	205.435	5.32513	5.09773
92	230.079	5.43842	5.15530
93	185.330	5.22214	5.14668
94	164.379	5.10217	5.09837
95	147.864	4.99629	5.11904
96	161.430	5.08407	5.15044
97	146.903	4.98977	5.14178
98	139.873	4.94073	5.14195
99	183.869	5.21422	5.26728
100	167.921	5.12349	5.13027

OBS	ORIGINAL	TABLA 2 TRANSFORMADA	(CONT.) DESESTAC.
101	194.825	5.27210	5.26968
102	193.303	5.26426	5.23408
103	240.134	5.48120	5.24713
104	260.763	5.56361	5.27398
105	215.290	5.37199	5.29436
106	191.355	5.25413	5.25021
107	170.063	5.13617	5.26236
108	182.653	5.20759	5.27557
109	175.718	5.16888	5.32635
110	163.652	5.09774	5.30535
111	189.534	5.24457	5.29793
112	214.321	5.36747	5.37458
113	211.154	5.35259	5.35013
114	218.817	5.38824	5.35735
115	278.578	5.62970	5.38929
116	301.706	5.70945	5.41222
117	238.335	5.47368	5.39458
118	230.625	5.44079	5.43673
119	200.573	5.30118	5.43142
120	211.132	5.35248	5.42235
121	200.130	5.29897	5.46039
122	185.544	5.22329	5.43602
123	221.752	5.40156	5.45652
124	243.399	5.49470	5.50197
125	249.141	5.51802	5.51548
126	252.416	5.53108	5.49937
127	326.076	5.78713	5.54000
128	346.874	5.84896	5.54447
129	282.806	5.64476	5.56320
130	263.077	5.57245	5.56829
131	222.498	5.40492	5.53771
132	256.398	5.54673	5.61914
133	232.330	5.44816	5.61413
134	224.661	5.41459	5.63511
135	273.213	5.61025	5.66733
136	272.140	5.60632	5.61374
137	282.249	5.64279	5.64020
138	299.926	5.70354	5.67084
139	380.216	5.94074	5.68705
140	404.168	6.00183	5.68938
141	325.568	5.78557	5.70197
142	304.455	5.71852	5.71426
143	262.211	5.56915	5.70597
144	290.018	5.66994	5.74396
145	250.635	5.52400	5.69228
146	243.467	5.49498	5.71877
147	305.263	5.72117	5.77939
148	321.881	5.77418	5.78182
149	304.972	5.72022	5.71759
150	334.733	5.81333	5.78001

OBS	ORIGINAL	TABLA 2 TRANSFORMADA	(CONT.) DESESTAC.
151	415.003	6.02829	5.77086
152	432.413	6.06938	5.75341
153	357.936	5.88035	5.79539
154	333.816	5.81059	5.80626
155	301.844	5.70991	5.85019
156	296.933	5.69351	5.76783
157	291.859	5.67627	5.84919
158	292.817	5.67955	5.91085
159	343.781	5.84000	5.89943
160	352.600	5.86533	5.87310
161	377.174	5.93271	5.92998
162	331.881	5.80478	5.77150
163	469.641	6.15197	5.88926
164	499.964	6.21454	5.89101
165	406.856	6.00846	5.92164
166	378.358	5.93584	5.93141
167	339.064	5.82619	5.96933
168	377.896	5.93462	6.01209
169	347.755	5.85150	6.02976
170	331.551	5.80378	6.04015
171	403.948	6.00129	6.06235
172	422.755	6.04679	6.05479
173	407.891	6.01100	6.00824
174	456.719	6.12407	6.08897
175	520.700	6.25517	5.98806
176	584.176	6.37020	6.03858
177	461.437	6.13435	6.04571
178	456.058	6.12262	6.11805
179	395.387	5.97987	6.12678
180	445.989	6.10029	6.17993
181	374.471	5.92551	6.10603
182	397.298	5.98469	6.22842
183	379.052	5.93767	5.99809
184	432.402	6.06936	6.07739
185	421.700	6.04429	6.04152
186	437.016	6.07997	6.04512
187	547.237	6.30488	6.03564
188	586.838	6.37475	6.04288
189	457.203	6.12513	6.03662
190	456.838	6.12433	6.11976
191	407.511	6.01007	6.15772
192	441.836	6.09094	6.17045
193	421.275	6.04329	6.22739
194	385.578	5.95474	6.19726
195	467.672	6.14777	6.21032
196	455.218	6.12078	6.12888
197	480.411	6.17464	6.17180
198	480.898	6.17566	6.14026
199	610.166	6.41373	6.13984
200	624.868	6.43754	6.10241



OBS	ORIGINAL	TABLA 2 TRANSFORMADA	(CONT.) DESESTAC.
201	519.373	6.25262	6.16227
202	497.866	6.21033	6.20570
203	415.408	6.02926	6.17739
204	483.317	6.18067	6.26135
205	469.700	6.15209	6.33951
206	428.657	6.06066	6.30748
207	478.371	6.17039	6.23317
208	525.891	6.26509	6.27338
209	489.129	6.19263	6.18978
210	514.558	6.24331	6.20752
211	644.019	6.46773	6.19154
212	646.754	6.47197	6.13504
213	531.293	6.27531	6.18464
214	512.444	6.23919	6.23454
215	469.430	6.15152	6.30265
216	503.296	6.22118	6.30239
217	481.547	6.17700	6.36518
218	443.000	6.09357	6.34174
219	426.623	6.05590	6.11752
220	550.394	6.31063	6.31899
221	511.823	6.23798	6.23511
222	552.294	6.31408	6.27789
223	696.339	6.54584	6.26631
224	675.910	6.51606	6.17684
225	565.442	6.33761	6.24603
226	544.684	6.30021	6.29551
227	476.971	6.16746	6.31898
228	520.944	6.25564	6.33730
229	501.271	6.21715	6.40655
230	456.840	6.12433	6.37375
231	588.077	6.37686	6.44174
232	528.993	6.27098	6.27927
233	573.627	6.35198	6.34906
234	589.773	6.37974	6.34317
235	737.712	6.60355	6.32156
236	746.594	6.61552	6.27112
237	625.245	6.43814	6.34512
238	586.159	6.37359	6.36884
239	531.967	6.27658	6.43079
240	566.937	6.34025	6.42301
241	554.430	6.31794	6.51041
242	508.717	6.23189	6.48569
243	609.606	6.41281	6.47806
244	634.410	6.45270	6.46123
245	609.338	6.41237	6.40943
246	649.754	6.47659	6.43947
247	693.064	6.54112	6.26180
248	759.139	6.63218	6.28692
249	600.830	6.39831	6.30586
250	603.340	6.40248	6.39771

OBS	ORIGINAL	TABLA 2 TRASNFORMADA	(CONT.) DESESTAC.
251	580.589	6.36404	6.52040
252	591.101	6.38199	6.46530
253	540.151	6.29185	6.48352
254	515.223	6.24460	6.49892
255	577.493	6.35870	6.42339
256	610.214	6.41381	6.42230
257	609.301	6.41231	6.40937
258	570.887	6.34719	6.31081
259	733.706	6.59811	6.31635
260	742.939	6.61061	6.26647
261	625.217	6.43810	6.34507
262	614.292	6.42047	6.41568
263	536.813	6.28565	6.44008
264	596.507	6.39109	6.47452

Fuente: Boletín mensual de Estadística.

Marzo de 1959 - Marzo de 1981

Elaboración propia.

TABLA 4		
OBS	PRUB.	TRANS.
2		.05640
8		.14810
13		.04710
16		.02820
18		.03200
29		.02580
42		.04790
44		.03000
48		.03130
50		.05050
56		.03740
73		.03770
100		.14650
132		.03440
149		.03530
155		.03150
158		.05590
162		.63680
168		.03810
173		.03550
175		.28100
176		.02650
180		.03570
183		.63000
191		.05330
193		.12680
196		.02820
200		.07330
204		.03560
205		.25770
209		.03690
212		.09450
215		.03680
217		.05630
219		.18870
220		.03280
224		.11320
229		.03450
231		.47280
236		.02770
241		.02670
243		.02730
247		.84630
248		.11280
249		.06500
258		.12510
260		.05840

Elaboración propia.

TABLA 5

OBS	A	B
64	4.39187	.00262
99	4.04664	.01110
105	7.31100	.05191
161	4.00348	.01197
168	3.88940	.05975
180	3.27399	.01629
183	15.93354	.05397
190	9.03944	.01613
195	7.50259	.03483
218	4.22878	.00972
223	6.71151	.05880
231	7.11056	.05933
243	1.12001	.03195
246	9.10282	.01088
257	2.37527	.01600
260	12.03968	.02217
264	4.41559	.04127

TABLA 6

OBS	A	B
64	4.39187	.00262
99	4.04664	.01111
105	7.03110	.05191
161	4.00348	.01197
174	2.41077	.02120
182	.94250	.00654
192	3.27855	.01491
195	8.15333	.01000
218	4.22878	.00972
223	6.71151	.05880
231	7.11056	.05933
246	.00391	.02674
257	2.37527	.01600
264	1.74107	.03107

Elaboración propia.

TABLA 7

OBS	VAR. RES.
64	.00204
99	.00191
105	.00199
161	.00176
174	.00174
182	.00200
192	.00201
195	.00203
218	.00216
223	.00222
231	.00225
246	.00238
257	.00237
264	.00222

Elaboración propia.

A P E N D I C E

Lema AI.1:

Dadas las matrices M_1, M_2 y M_3 , con M_1 y M_3 cuadradas y no singulares. Si las matrices:

$$M_1 + M_2^t M_3^{-1} M_2$$

y

$$M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3$$

son invertibles, entonces se satisface la siguiente relación

$$\begin{aligned} M_1^{-1} - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1} \\ = (M_1 + M_2^t M_3^{-1} M_2)^{-1} \end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & (M_1^{-1} - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1}) (M_1 + M_2^t M_3^{-1} M_2) \\ & = I - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 + M_1^{-1} M_2^t M_3^{-1} M_2 \\ & \quad - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1} M_2^t M_3^{-1} M_2 \\ & = I - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} (M_3 - (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3) \\ & \quad + M_2 M_1^{-1} M_2^t) M_3^{-1} M_2 \\ & = I - M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} (M_3 - M_3) M_3^{-1} M_2 \\ & = I \end{aligned}$$

Lema AI.2:

Dadas las matrices M_1, M_2 y M_3 , siendo M_1 y M_3 cuadradas y no singulares. Si existen:

$$(M_1 + M_2^t M_3^{-1} M_2)^{-1}$$

y

$$(M_3 + M_2 M_1^{-1} M_2^t)^{-1}$$

entonces:

$$M_3^{-1} M_2 (M_2^t M_3^{-1} M_2 + M_1)^{-1} = (M_3 + M_2 M_1^{-1} M_2^t)^{-1} M_2 M_1^{-1}$$

Demostración:

Por el lema AI.1, sabemos que se verifica:

$$\begin{aligned}
 M_3^{-1} M_2 (M_2^t M_3^{-1} M_2 + M_1)^{-1} &= M_3^{-1} M_2 (M_1^{-1} - M_1^{-1} M_2^t \\
 &\quad (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1}) \\
 &= M_3^{-1} M_2 M_1^{-1} - M_3^{-1} M_2 M_1^{-1} M_2^t (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1} \\
 &= (M_3^{-1} (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3) - M_3^{-1} M_2 M_1^{-1} M_2^t) (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1} \\
 &= (M_3^{-1} M_2 M_1^{-1} M_2^t + I - M_3^{-1} M_2 M_1^{-1} M_2^t) (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1} \\
 &= (M_2 M_1^{-1} M_2^t + M_3)^{-1} M_2 M_1^{-1}
 \end{aligned}$$

Teorema II-4.4:

Sea $\{x(t)\}$ un proceso Gaussiano generado por

$$x(t) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x(t-i) = \xi(t)$$

donde $\{\xi(t)\}$ son variables aleatorias normalmente distribuidas e incorreladas con media 0 y varianza σ^2 .

Si 1º) $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$

2º) a_i es no nulo salvo en número finito.

Entonces:

$$p\text{-}\lim \left[\left| \frac{S_n(k) - S_n(k_n^*)}{k\sigma^2 + (n-k_n)\|a^k - a\|_R^2} \right| - \left| 1 - \frac{\frac{k_n^* \sigma^2}{n-k_n} + \|a^{k_n^*} - a\|_R^2}{\frac{k}{n-k_n} \sigma^2 + \|a^k - a\|_R^2} \right| \right] = 0$$

con

$$\frac{k_n^*}{n-k_n} \sigma^2 + \|a^{k_n^*} - a\|_R^2 = \min_{1 \leq k \leq k_n} \frac{k}{n-k_n} \sigma^2 + \|a^k - a\|_R^2$$

siendo $S_n(k) = (n-k_n+2k) \hat{\sigma}_k^2$

donde

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\sum_{l=k_n}^{n-1} [x(t+l-1) - \hat{a}_1^k x(t+l) - \dots - \hat{a}_k^k x(t+l-k+1)]^2}{n-k_n}$$

y $\{K_n\}$ una sucesión divergente de números enteros y positivos, tal que $\{K_n n^{-1/2}\}$ es una sucesión nula, indicando aquella el orden máximo del proceso autorregresivo para el número de observaciones "n".

Demostración:

Puesto que

$$\begin{aligned} \|a^k - a\|_R^2 &= (a^k - a)R(a^k - a) = (a^k - a)^t E(X \cdot X^t) (a^k - a) \\ &= E[(a^k - a)^t X \cdot X^t (a^k - a)] \\ &= E[(a^k - a)^t X]^2 = a^t R a - a^{k^t} R a^k = \sigma^2 - \sigma_k^2 \end{aligned}$$

siendo X la realización del proceso. Análogamente obten-

dríamos:

$$\|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}}^2 = a^{k^T} \hat{R} a^k - \hat{a}^{k^T} \hat{R} \hat{a}^k = s_k^2 - \hat{\sigma}_k^2$$

operando obtendríamos; haciendo $N = n - K_n$

$$\begin{aligned} S_n(k) &= -k\sigma^2 - N\|a^k - a\|_R^2 + 2k\hat{\sigma}_k^2 + 3k\sigma^2 - 2k\sigma^2 \\ &\quad - N\|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}}^2 + N\sigma^2 + N(s_k^2 - \sigma_k^2) \\ &= (N + 2k)\hat{\sigma}_k^2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} S_n(k) &= -(k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2) + 2k(\hat{\sigma}_k^2 - \sigma^2) \\ &\quad + (3k\sigma^2 - N\|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}}^2 + N\sigma^2 + N(s_k^2 - \sigma_k^2)) \end{aligned}$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{S_n(k)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} &= -1 + \frac{2k(\hat{\sigma}_k^2 - \sigma^2)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} + \frac{3k\sigma^2 - N\|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}}^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \\ &\quad + \frac{N\sigma^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} + \frac{N(s_k^2 - \sigma_k^2)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \end{aligned}$$

y dado que:

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_k^2 - \sigma^2| &\leq |\hat{\sigma}_k^2 - s_k^2| + |s_k^2 - \sigma_k^2| + |\sigma_k^2 - \sigma^2| \\ &= \|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}}^2 + |s_k^2 - \sigma_k^2| + \|a^k - a\|_R^2 \end{aligned}$$

al verificarse:

$$\max_{1 \leq k \leq K_n} \|\hat{R} - R\|^2 = \max_{1 \leq k \leq K_n} \left[\sup_{\|a\| \leq 1} \left(\sum_i \left[\sum_j (\hat{r}_{ij} - r_{ij}) \alpha_j \right]^2 \right) \right] \leq \sum_i \sum_j (\hat{r}_{ij} - r_{ij})^2 \leq K_n^2 \frac{C}{N}$$

tendríamos que

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \|\hat{R} - R\|^2 \right\} = 0$$

y por ello:

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}-\hat{R}}^2 \right\} = 0$$

Ahora bien, por la proposición 3.2 de Shibata(1980)

$$p\text{-lim} \left[\max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\|\hat{a}^k - a\|_R^2}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \right] = 1$$

y como:

$$\|\hat{a}^k - a\|_R^2 = \|\hat{a}^k - a^k\|_R^2 + \|a^k - a\|_R^2$$

entonces

$$p\text{-lim} \left\{ \|\hat{a}^k - a^k\|_{\hat{R}}^2 \right\} = p\text{-lim} \left\{ \frac{k\sigma^2}{N} \right\} = 0$$

ya que $k \leq K_n$; además

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \frac{k\sigma^2 \|\hat{a}^k - a^k\|_R^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right\} = p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \frac{\|\hat{a}^k - a^k\|_R^2}{\sigma^2 + \frac{N}{k}\|a^k - a\|_R^2} \right\} = 0$$

y como

$$\frac{\|a^k - a\|_R^2}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} < 1$$

entonces

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \frac{k\|a^k - a\|_R^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right\} = p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left[\frac{k}{N} \frac{\|a^k - a\|_R^2}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right] \right\} = 0$$

pues $k \leq K_n = o(N^{1/2})$

Por otra parte:

$$E[S_k^2 - \sigma_k^2]^2 \leq \frac{C}{N}$$

y de ahí

$$\sum_{k=1}^{K_n} E[S_k^2 - \sigma_k^2]^2 \leq C \frac{K_n}{N}$$

y por tanto

$$0 \leq p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \frac{k|S_k^2 - \sigma_k^2|}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right\} \leq p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \frac{K_n|S_k^2 - \sigma_k^2|}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right\} = 0$$

de todo ello concluimos entonces, que:

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \frac{|\hat{\sigma}_k^2 - \sigma^2|}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right\} = 0$$

y además como

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \|\hat{a}^k - a^k\|_{R-\hat{R}}^2 \right\} = 0$$

y

$$\begin{aligned} \|\hat{a}^k - a^k\|_R^2 - \frac{3k\sigma^2}{N} &\leq \|\hat{a}^k - a^k\|_R^2 - \frac{k\sigma^2}{N} \\ &= \|\hat{a}^k - a\|_R^2 - \frac{k\sigma^2}{N} - \|a^k - a\|_R^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\|\hat{a}^k - a^k\|_R^2 - \frac{3k\sigma^2}{N}}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} \leq p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\|\hat{a}^k - a^k\|_R^2 - \frac{k\sigma^2}{N}}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \right\}$$

$$\leq p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\|\hat{a}^k - a\|_R^2 - \left(\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2 \right)}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = 0$$

por ser

$$p\text{-lim} \left\{ \frac{\|\hat{a}^k - a\|_R^2}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right\} = 1$$

obtenemos que

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{3k \frac{\sigma^2}{N} - \|\hat{a}^k - a\|_R^2}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = 0$$

y en consecuencia

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{S_n(k)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| 1 - \frac{N\sigma^2 + N(S_k^2 - \sigma_k^2)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\}$$

De aquí, podemos obtener, al verificarse por definición de k_n^*

que:

$$\frac{k^* \sigma^2 + N\|a^{k_n^*} - a\|_R^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \leq 1$$

la siguiente expresión

$$p\text{-lim} \left\{ \left| \frac{S_n(k_n^*)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = p\text{-lim} \left\{ \left| \frac{k_n^* \sigma^2 + N\|a^{k_n^*} - a\|_R^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} - \frac{N\sigma^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} - \frac{N(S_{k_n^*}^2 - \sigma_{k_n^*}^2)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\}$$

y por tanto

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{S_n(k) - S_n(k_n^*)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \left(1 - \frac{k_n^* \sigma^2 + N\|a^{k_n^*} - a\|_R^2}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} - \frac{N[(S_{k_n^*}^2 - \sigma_{k_n^*}^2) - (S_k^2 - \sigma_k^2)]}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right) \right| \right\}$$

es así que para obtener el resultado deseado, hemos de estudiar el comportamiento asintótico del segundo término de la derecha en la expresión anterior.

Para ello operando, llegamos a:

$$(S_{k_n^*}^2 - \sigma_{k_n^*}^2) - (S_k^2 - \sigma_k^2) = -(a^{k_n^*} - a^k)^t (\hat{r} - r) + (a^{k_n^*} - a^k)^t (\hat{R} - R)(a^{k_n^*} + a^k)$$

y dado que

$$E \left[\sum_i \sum_j \delta_i (\hat{r}_{ij} - r_{ij}) \eta_j \right]^4 \leq \left[C_1 \|\delta\|^3 \left(\sum_i |\delta_i| \right) \|\eta\| \left(\sum_j |\eta_j| \right)^3 + C_2 \|\delta\|^4 \left(\sum_j |\eta_j| \right)^4 \right] N^{-2} \\ + \left[C_3 \|\delta\|^4 \|\eta\|^4 + C_4 \|\delta\|^4 \|\eta\|^2 \left(\sum_j |\eta_j| \right)^2 + C_5 \|\delta\|^2 \left(\sum_i |\delta_i| \right)^2 \left(\sum_j |\eta_j| \right)^4 \right] N^{-3}$$

y por dominar asintóticamente el primer término al segundo, haciendo

$$\delta_i = (a^{k_n^*} - a^k)_i, \quad i > 0, \quad \delta_0 = 0$$

mientras que

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_i = 0 \quad \text{para } i > 0.$$

obtenemos que

$$E \left[\sum_i (a^{k_n^*} - a^k)_i (\hat{r}_i - r_i) \right]^4 \leq C \max(k, k_n^*)^2 \|a^{k_n^*} - a^k\|_R^4 N^{-2} + o(N^{-3})$$

pues

$$\left(\sum_i |a^{k_n^*} - a^k|_i \right)^2 \leq \max(k, k_n^*)^2 \|a^{k_n^*} - a^k\|_R^2$$

por otra parte

$$\max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\max(k, k_n^*) \|a^{k_n^*} - a^k\|_R^2 N^{-2}}{\left(\frac{k \sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2 \right)^2} \right| \\ \leq \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{\max(k, k_n^*) N^{-2}}{\left(\frac{k \sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2 \right)^2} \right|$$

ya que

$$\left| \frac{\|a^{k_n^*} - a^k\|_R^2}{\frac{k \sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \leq \left| \frac{\|a^{k_n^*} - a\|_R^2 - \|a^k - a\|_R^2}{\frac{k \sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right| \leq 1$$

además, como

$$(k \sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2)^2 \geq k^2 \sigma^4$$

y si $k \leq k_n^*$, entonces

$$\frac{k_n^*}{(k \sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2)^2} \leq \frac{k_n^*}{(k^* \sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2)^2} \leq \frac{k_n^*}{k_n^{*2} \sigma^4}$$

o bien, $k > k_n^*$

$$\frac{k}{(k\sigma^2 + \|a^k - a\|_R^2)} \leq \frac{k}{k^2\sigma^4} \leq \frac{1}{k_n^*\sigma^4}$$

luego

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} \left| \frac{\max(k, k_n^*) \|a^{k_n^*} - a^k\|_R^2 N^{-2}}{\left(\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2\right)^4} \right| \leq (k_n^*\sigma^4)^{-1}$$

y como $\{k_n^*\}$ es una sucesión divergente, por ser un proceso autorregresivo de orden infinito el que genera la señal, tenemos que

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \left| (a^{k_n^*} - a^k)^T (\hat{r} - r) \right| \right\} = 0$$

manteniendo ahora la definición anterior para δ_i , variamos la dada para η_j , como sigue:

$$\eta_j = (a^{k_n^*} + a^k)_j, \quad j > 0, \quad \text{y} \quad \eta_0 = 0$$

obteniendo del mismo modo que antes, que:

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \left| (a^{k_n^*} - a^k)^T (\hat{R} - R) (a^{k_n^*} + a^k) \right| / \frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2 \right\} = 0$$

y por tanto

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \frac{|(s_{k_n^*}^2 - r_{k_n^*}^2) - (s_k^2 - \sigma_k^2)|}{\frac{k\sigma^2}{N} + \|a^k - a\|_R^2} \right\} = 0$$

quedando demostrado entonces:

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \left| \frac{S_n(k) - S_n(k^*)}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} - \left(1 - \frac{k_n^*\sigma^2 + \|a^{k_n^*} - a\|_R^2}{k\sigma^2 + \|a^k - a\|_R^2} \right) \right| \right\} = 0$$

Proposición II.4.1:

El criterio de selección de Akaike (AIC), para la determinación del orden de un proceso autorregresivo, es asintóticamente eficiente.

Demostración:

Observese que la regla de decisión del orden de un proceso autorregresivo, propuesta por Akaike, utiliza el estadístico

$$A_n(k) = n \ln \hat{\sigma}_k^2 + 2k$$

que puede ser transformado, gracias a la monotoneidad de la función exponencial, en el equivalente:

$$\begin{aligned} S_n^{(2)}(k) &= n e^{\frac{2k}{n}} \hat{\sigma}_k^2 = \left[(N+2k) - (N+2k - n e^{\frac{2k}{n}}) \right] \hat{\sigma}_k^2 \\ &= S_n(k) - (n - k_n + 2k - n e^{\frac{2k}{n}}) \hat{\sigma}_k^2 \end{aligned}$$

y como

$$N \hat{\sigma}_k^2 = -(k\sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2) + k\sigma^2 - N \|\hat{a}^k - a\|_R^2 + N\sigma^2 + N(S_k^2 - \sigma_k^2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{(N+2k - n e^{\frac{2k}{n}}) \hat{\sigma}_k^2}{k\sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2} &= \frac{(N+2k - n e^{\frac{2k}{n}}) N\sigma^2 + (N+2k - n e^{\frac{2k}{n}}) [k\sigma^2 - N \|\hat{a}^k - a\|_R^2 - [k\sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2]] + (N+2k - n e^{\frac{2k}{n}}) N(S_k^2 - \sigma_k^2)}{N(k\sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2)} \end{aligned}$$

pero como

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \left| \frac{N \|\hat{a}^k - a\|_R^2 - k\sigma^2}{k\sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = 0$$

y

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq k_n} \left| \frac{|S_k^2 - \sigma_k^2|}{k\sigma^2 + N \|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = 0$$

al ser

$$\lim_n \frac{N+2k - n e^{\frac{2k}{n}}}{N} = 0$$

tendremos que

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{(S_n^{(2)}(k) - S_n(k)) - (S_n^{(2)}(k_n^*) - S_n(k_n^*))}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\}$$

$$= p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{(N+2k - ne^{\frac{2k}{n}}) - (N+2k_n^* - ne^{\frac{2k_n^*}{n}})}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \sigma^2 \right\}$$

pero

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{(2k - 2k_n^*) - n(e^{\frac{2k}{n}} - e^{\frac{2k_n^*}{n}})}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = 0$$

pues

$$\lim_n n(e^{\frac{2k}{n}} - e^{\frac{2k_n^*}{n}}) = 2k - 2k_n^*$$

y por tanto

$$p\text{-lim} \left\{ \max_{1 \leq k \leq K_n} \left| \frac{S_n^{(2)}(k) - S_n^2(k_n^*) - (S_n(k) - S_n(k_n^*))}{k\sigma^2 + N\|a^k - a\|_R^2} \right| \right\} = 0$$

y por el corolario II.4.2. el criterio $S_n^{(2)}(k)$ es asintoticamente eficiente.

Teorema AI.3

Con las hipótesis del teorema I.3.1, se verifica que:

1ª.- $\hat{x}(k|j) = E[x(k) | y(1), y(2), \dots, y(j)] = A(k, j) \hat{x}(j|j)$
para cualquier función de pérdida a minimizar.

2ª.- El proceso $\{\tilde{x}(k|j) = x(k) - \hat{x}(k|j)\}$ es un proceso gaussiano, donde su matriz de covarianzas satisface la relación recursiva:

$$P(k|j) = A(k, j) P(j|j) A^t(k, j) + A(k, i) C(i|i-1) Q(i-1) C^t(i|i-1) A^t(k, i)$$

conocida $P(0|0)$, o en su defecto utilizando la reformulación del filtro de Kalman propuesta en el capítulo I.

Demostración:

Es claro que

$$x(k) = A(k, j) x(j) + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i|i-1) w(i-1)$$

para $k > j$, luego:

$$\begin{aligned} E[x(k) | y(1), \dots, y(j)] &= E\left[A(k, j) x(j) + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i|i-1) w(i-1) \mid y(1), \dots, y(j)\right] \\ &= E[A(k, j) x(j) | y(1), \dots, y(j)] + E\left[\sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i|i-1) w(i-1) \mid y(1), \dots, y(j)\right] \\ &= A(k, j) E[x(j) | y(1), \dots, y(j)] + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i|i-1) E[w(i-1) | y(1), \dots, y(j)] \end{aligned}$$

como $\{w(i-1), i=j+1, \dots, k\}$ y $\{y(1), \dots, y(j)\}$ son incorreladas debido a las hipótesis del teorema, para $k > j$; y como son procesos normales, son independientes y por tanto

$$E[w(i-1) | y(1), \dots, y(j)] = E[w(i-1)] = 0$$

para $i=j+1, \dots, k$; luego

$$\hat{x}(k|j) = A(k, j) \hat{x}(j|j) \quad \text{para } k > j$$

así pues para $k > j$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k|j) &= x(k) - \hat{x}(k|j) \\
&= A(k, j) x(j) + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i, i-1) w(i-1) - A(k, j) \hat{x}(j|j) \\
&= A(k, j) \tilde{x}(j|j) + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i, i-1) w(i-1)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k|j) &= A(k, j) \tilde{x}(j|j) + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i, i-1) w(i-1) \\
&= A(k, k-1) A(k-1, j) \tilde{x}(j|j) + A(k, k) C(k, k-1) w(k-1) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{k-1} A(k, i) C(i, i-1) w(i-1) \\
&= A(k, k-1) [A(k-1, j) \tilde{x}(j|j) + \sum_{i=j+1}^{k-1} A(k-1, i) C(i, i-1) w(i-1) \\
&\quad + C(k, k-1) w(k-1)] \\
&= A(k, k-1) \tilde{x}(k-1|j) + C(k, k-1) w(k-1)
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
P(k|j) &= E[\tilde{x}(k|j) \tilde{x}^T(k|j)] = A(k, j) E[\tilde{x}(j|j) \tilde{x}^T(j|j)] A^T(k, j) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i, i-1) E[w(i-1) w^T(i-1)] C^T(i, i-1) A^T(k, i)
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
E[\tilde{x}(j|j) w^T(i-1)] &= E[x(j) w^T(i-1)] - E[\hat{x}(j|j) w^T(i-1)] \\
&= -\sum_{l=1}^i A(l) E[x(l) w^T(i-1)] = 0
\end{aligned}$$

luego

$$P(k|j) = A(k, j) P(j|j) A^T(k, j) + \sum_{i=j+1}^k A(k, i) C(i, i-1) Q(i-1) C^T(i, i-1) A^T(k, i)$$

para $k > j$.

Teorama AI.4:

Sea el sistema dinámico generado por

$$x(k+1) = A(k+1, k)x(k) + B(k+1, k)u(k)$$

$$y(k+1) = D(k+1)x(k+1) + v(k+1)$$

donde $\{v(k), k=1, 2, \dots\}$ es un proceso gaussiano ruido blanco y $\{u(k), k=1, 2, \dots\}$ una sucesión determinista de control del sistema, siendo además $\{x(k)\}$ e $\{y(k)\}$ estadísticamente independientes. En estas condiciones la sucesión de control que minimiza:

$$J_n(x, u) = \sum_{i=1}^n [x^t(i) \phi(i) x(i) + u^t(i) \Psi(i-1) u(i-1)]$$

siendo n el número de observaciones, vendrá dado por:

$$u(k) = S(k)x(k)$$

donde $S(k)$, la obtenemos de manera recursiva de:

$$W(k+1) = M(k+1) + \phi(k+1)$$

$$S(k) = - [B^t(k+1, k) W(k+1) B(k+1, k) + \Psi(k)]^{-1} B^t(k+1, k) \\ W(k+1) A(k+1, k)$$

$$M(k) = A^t(k+1, k) W(k+1) A(k+1, k) + A^t(k+1, k) W(k+1) \\ B(k+1, k) S(k)$$

para $k=n-1, n-2, \dots, 0$; con la condición inicial $W(n) = \phi(n)$ y cuando la matriz:

$$B^t(k+1, k) W(k+1) B(k+1, k) + \Psi(k)$$

sea definida positiva.

Además:

$$V_{n-k} = \min_{u(0)} \min_{u(1)} \dots \min_{u(n-k)} \sum_{i=1}^n [x^t(i) \phi(i) x(i) + M^t(i-1) \Psi(i-1) \\ u(i-1)] \\ = x^t(k) M(k) x(k)$$

Demostración:

La realizaremos por inducción, para ello supongamos que el problema de optimización es en una etapa, entonces

$$V_1 = \min_{u(n-1)} [x^t(n) \phi(n) x(n) + u^t(n-1) \psi(n-1) u(n-1)]$$

como

$$x(n) = A(n, n-1) x(n-1) + B(n, n-1) u(n-1)$$

operando, tenemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= \min_{u(n-1)} \left\{ [A(n, n-1) x(n-1) + B(n, n-1) u(n-1)]^t \phi(n) \right. \\ &\quad \left. [A(n, n-1) x(n-1) + B(n, n-1) u(n-1)] \right. \\ &\quad \left. + u^t(n-1) \psi(n-1) u(n-1) \right\} \\ &= \min_{u(n-1)} \left\{ x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) A(n, n-1) x(n-1) \right. \\ &\quad \left. + x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) u(n-1) \right. \\ &\quad \left. + u^t(n-1) B^t(n, n-1) \phi(n) A(n, n-1) x(n-1) \right. \\ &\quad \left. + u^t(n-1) [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \psi(n-1)] u(n-1) \right\} \end{aligned}$$

como ϕ es simétrica

$$\begin{aligned} V_1 &= \min_{u(n-1)} \left\{ x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) A(n, n-1) x(n-1) \right. \\ &\quad \left. + 2 x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) u(n-1) \right. \\ &\quad \left. + u^t(n-1) [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \psi(n-1)] u(n-1) \right\} \end{aligned}$$

optimizando obtenemos que los puntos críticos son tales que:

$$\begin{aligned} 2 x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) \\ + 2 u^t(n-1) [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \psi(n-1)] &= 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u(n-1) &= - [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \psi(n-1)]^{-1} B^t(n, n-1) \\ &\quad \phi(n) A(n, n-1) x(n-1) \end{aligned}$$

lo que significa que el control es realizable, dado que no depende de valores futuros.

Definiendo ahora:

$$\begin{aligned} S(n-1) &= - [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \psi(n-1)]^{-1} B^t(n, n-1) \\ &\quad \phi(n) A(n, n-1) \end{aligned}$$

podemos escribir que el control óptimo es:

$$u(n-1) = S(n-1) x(n-1)$$

Evaluando ahora V_1 , obtenemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) A(n, n-1) x(n-1) \\ &\quad - 2 x^t(n-1) A^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) S(n-1) x(n-1) \\ &\quad + x^t(n-1) S^t(n-1) [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \Psi(n-1)] S(n-1) x(n-1) \\ &= x^t(n-1) A^t(n, n-1) \left\{ \phi(n) - \phi(n) B(n, n-1) [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \Psi(n-1)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. B^t(n, n-1) \phi(n) \right\} A(n, n-1) x(n-1) \end{aligned}$$

haciendo $W(n)=A(n)$, y

$$M(n-1) = A^t(n, n-1) \left\{ \phi(n) - \phi(n) B(n, n-1) [B^t(n, n-1) \phi(n) B(n, n-1) + \Psi(n-1)]^{-1} \right. \\ \left. B^t(n, n-1) \phi(n) \right\} A(n, n-1)$$

obtenemos que:

$$V_1 = x^t(n-1) M(n-1) x(n-1)$$

siendo $M(n-1)$ una matriz simétrica.

Comprobemos ahora la veracidad del teorema, cuando el proceso de optimización se realiza en dos etapas, entonces:

$$V_2 = \min_{u(n-2)} \min_{u(n-1)} \left\{ [x^t(n-1) \phi(n-1) x(n-1) + u^t(n-2) \Psi(n-2) u(n-2)] \right. \\ \left. + [x^t(n) \phi(n) x(n) + u^t(n-1) \Psi(n-1) u(n-1)] \right\}$$

por el principio de optimalidad de Bellman

$$V_2 = \min_{u(n-2)} \left\{ [x^t(n-1) \phi(n-1) x(n-1) + u^t(n-2) \Psi(n-2) u(n-2)] + V_1 \right\}$$

luego

$$V_2 = \min_{u(n-2)} \left\{ [x^t(n-1) \phi(n-1) x(n-1) + u^t(n-2) \Psi(n-2) u(n-2) + x^t(n-1) M(n-1) x(n-1)] \right\}$$

si

$$W(n-1) = \phi(n-1) + M(n-1)$$

$$V_2 = \min_{u(n-2)} \left\{ x^t(n-1) W(n-1) x(n-1) + u^t(n-2) \Psi(n-2) u(n-2) \right\}$$

observese que V_2 es equivalente a V_1 en cuanto a la expresión a optimizar, variando únicamente el instante temporal y la matriz $\phi(n)$, por lo tanto realizando el mismo proceso, obtendríamos:

$$u(n-2) = S(n-2) x(n-2)$$

donde

$$S(n-2) = - [B^t(n-1, n-2) W(n-1) B(n-1, n-2) + \Psi(n-2)]^{-1} \\ B^t(n-1, n-2) W(n-1) A(n-1, n-2)$$

y

$$V_2 = x^t(n-2) M(n-2) x(n-2)$$

siendo ahora

$$\begin{aligned} M(n-2) &= A^T(n-1, n-2) \left\{ W(n-1) - W(n-1) B(n-1, n-2) \right. \\ &\quad \left. [B^T(n-1, n-2) W(n-1) B(n-1, n-2) + \Psi(n-2)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. B^T(n-1, n-2) W(n-1) \right\} A(n-1, n-2) \\ &= A^T(n-1, n-2) W(n-1) + A^T(n-1, n-2) W(n-1) B(n-1, n-2) \\ &\quad S(n-2) \end{aligned}$$

Suponiendo ahora, por hipótesis de inducción, que se verifica el teorema para la optimización en $j-1$ etapas, se verifica:

$$\begin{aligned} W(n-j+2) &= M(n-j+2) + \phi(n-j+2) \\ S(n-j+1) &= - \left[B^T(n-j+2, n-j+1) W(n-j+2) B(n-j+2, n-j+1) + \Psi(n-j+1) \right]^{-1} \\ &\quad B^T(n-j+2, n-j+1) W(n-j+2) A(n-j+2, n-j+1) \\ u(n-j+1) &= S(n-j+1) x(n-j+1) \\ M(n-j+1) &= A^T(n-j+2, n-j+1) W(n-j+2) A(n-j+2, n-j+1) \\ &\quad + A^T(n-j+2, n-j+1) W(n-j+2) B(n-j+2, n-j+1) S(n-j+1) \\ V_{j-1} &= x^T(n-j+1) M(n-j+1) x(n-j+1) \end{aligned}$$

y aplicando el principio de optimalidad de Bellman, obtenemos:

$$V_j = \min_{u(n-j)} \left[x^T(n-j+1) \phi(n-j+1) x(n-j+1) + u^T(n-j) \Psi(n-j) u(n-j) + V_{j-1} \right]$$

definiendo

$$W(n-j+1) = M(n-j+1) + \phi(n-j+1)$$

tenemos que

$$V_j = \min_{u(n-j)} \left[x^T(n-j+1) W(n-j+1) x(n-j+1) + u^T(n-j) \Psi(n-j) u(n-j) \right]$$

sin embargo, como:

$$x(n-j+1) = A(n-j+1, n-j) x(n-j) + B(n-j+1, n-j) u(n-j)$$

sustituyendo llegamos a:

$$\begin{aligned} V_j &= \min_{u(n-j)} \left\{ \left[A(n-j+1, n-j) x(n-j) + B(n-j+1, n-j) u(n-j) \right]^T \right. \\ &\quad \left. W(n-j+1) \left[A(n-j+1, n-j) x(n-j) + B(n-j+1, n-j) u(n-j) \right] \right. \\ &\quad \left. + u^T(n-j) \Psi(n-j) u(n-j) \right\} \\ &= \min_{u(n-j)} \left\{ x^T(n-j) A^T(n-j+1, n-j) W(n-j+1) A(n-j+1, n-j) x(n-j) \right. \\ &\quad \left. + x^T(n-j) A^T(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) u(n-j) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u^t(n-j) B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) A(n-j+1, n-j) x(n-j) \\
& + u^t(n-j) [B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) + \Psi(n-j)] u(n-j) \} \\
= \min_{u(n-j)} & \left\{ x^t(n-j) A^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) A(n-j+1, n-j) x(n-j) \right. \\
& + 2 x^t(n-j) A^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) u(n-j) \\
& \left. + u^t(n-j) [B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) + \Psi(n-j)] u(n-j) \right\}
\end{aligned}$$

Si ahora calculamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{u(n-j)} V_j & \equiv 2 x^t(n-j) A^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) \\
& + 2 u^t(n-j) [B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) + \Psi(n-j)] = 0
\end{aligned}$$

obtenemos

$$u(n-j) = - [B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) + \Psi(n-j)]^{-1} B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) A(n-j+1, n-j) x(n-j)$$

y definiendo

$$S(n-j) = - [B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) + \Psi(n-j)]^{-1} B^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) A(n-j+1, n-j)$$

entonces

$$u(n-j) = S(n-j) x(n-j)$$

luego

$$V_j = x^t(n-j) M(n-j) x(n-j)$$

donde

$$\begin{aligned}
M(n-j) & = A^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) A(n-j+1, n-j) \\
& + A^t(n-j+1, n-j) W(n-j+1) B(n-j+1, n-j) S(n-j)
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

```

VBYΔMF[]V
V RES+NB BYΔMF SERIE;OP;PRT;N;CS;A;JJ;J;KΔVARΔES0;PF1;PF2;PF3;PF4;PI;Q;RΔVARΔES0;VAR;XF1;XF2;XF3;XF4;PP1
[1] INITΔMF
[2] PREAMF
[3] FILΔKΔMF
[4] CONDΔMF
[5] Δ(PREPAΔCONT)/'+2'
[6] PREDICION

```

```

V:CALΔCOEFAEST[]V
V R1+CALΔCOEFAEST;CS
[1] Δ('S'=1+[])/'+1x12#ρR1+[],0ρ[]+'INTRODUCIRLOS EN ORDEN NATURAL''',0ρ[]+'DESEA INTRODUCIRLOS DIRECTAMENTE'
[2] R1+DESEM SERIE
[3] R1+CS

```

```

V:CALΔPAR[]V
V R+CALΔPAR X;C;N;[]IO;V;M1;H
[1] N+~1+X[1]+~1+X[2]-X[[]IO+1]
[2] C+(+/(SERIE[[]N]-M1+(+/(SERIE[[]N])÷ρN)xH+N-(+/X)÷2)÷ρN
[3] V+(+/H*2)÷ρN
[4] R+C÷V
[5] R+(M1-Rx(+/X)÷2),R

```


VCALAPARAAUTO[]V

V P←N CALAPARAAUTO ORD;R;I;S

S←N↑E

R←1 I←0

S1:→(ORD≥I+I+1)/S1, 0 ρR←R, (+/(N-I)↑S×IΦS)÷N-I

S2: P←(1↓R1)E(2ρORD)↑(ORD, 2×ORD-(ORD≠1)) ρ(ORD↑R1), Φ1↓R1←R+RC1]

VA←RC1]-PAR+, ×ORD↑1↓R

V

VCAMBAINT[]V

V CAMBAINT

R←R1

PAR←PARAPV

VA←VAPV

V

VCONDAMF[]V

V CONDAMF;I;H;AUX;Q1;Q2;Q3;Q4

I←1

S: Δ 'VE←((CSEJ]×CSEJ]×, PP', (↑I), 'E;1;1])+VAR×KAVARAESQ'

Δ 'Q', (↑I), '←(*-((SERIE[]]-CSEJ]×XP', (↑I), 'E1])*2)+2×VE)×PI×Q[]]+(Q2×VE)*0,

+(4≥I+I+1)/S

Q←Q÷+/+/Q+Q1, Q2, Q3, [1.5] Q4

VE←XF1, [2] XF2, [2] XF3, [1.5] XF4

ΔPF←PF1, [2] PF2, [2] PF3, [1.5] PF4

I←1

S1: Δ 'XF', (↑I), '←(Q[];]÷+/Q[];])+, ×VE[]; ; ;]'

Δ 'PF', (↑I), '←2 2 ρ0×H+1'

S2: Δ 'PF', (↑I), '←PF', (↑I), '←(Q[]; H]÷+/Q[];])+ΔPF[]; H ; ;]+AUX÷, ×AUX÷, (VE[]; H ; ;]

+(4≥H+H+1)/S2

+(4≥I+I+1)/S1

XF←(+/Q)+, ×XF1, [1] XF2, [1] XF3, [0.5] XF4

PF← 2 2 ρ0×I+H+1

S3: →(4≥H+H+1)/S3, 0 ρPF←PF+Q[]; H]×ΔPF[]; H ; ;]+AUX÷, ×AUX÷, VE[]; H ; ;]-XF

+(4≥I+I+1)/S3, H+1

V

VCONTAPREP[]V

V R←CONTAPREP

Δ ((ρSERIE)=J+H)/'→R←0'

J←(J+6)] ρSERIE

H←H+(ρSERIE)-(ρSERIE)] J+H

P←CALPAR(KK+1), J

E←RES, (KK↓(J+H)↑SERIE)-PC1]+PC2]×KK↓] J+H

PAR←J CALAPARAAUTO ORD

R←H>3

V

VDFIORDENCOJIV

V R←DETAORDEN N;I;COV;H;RO;PARAPV;R1;VAPV

COV←(H←0×I←2

S1:→(9≥H←H+1)/S1,0ρCOV←COV,(+/(N-H)↑E×HΦE)÷N-H

RO←COV←COV1J

R←(N×@VA←COV1J)-(PAR←ROE2J)+,×COV2J)+2×N*0,5

S2:PARAPV←(I↑1↓RO)E(2ρI)↑(I,2×I-1)ρ(I↑RO),Φ1↓I↑RO

↑(R>R1←(N×@VAPV←COV1J-PARAPV+,×I↑1↓COV)+2×(N*0,5)×I)/'CAMBAINT'

→(9≥I←I+1)/S2

R←ρ,PAR

V

VFILAKAMFCOJIV

V FILAKAMF;K;I;H

I←1

S:↑'K←PP',(↑I), 'E;;,1J×CSEJJJ'

H←(CSEJJJ×,KE;1;1J)+VAR×KAVARAESQ

H←4 2 1 ρ(Sρ 1 0)\H

HC;2;J←HC;1;J

K←K×H

↑'HC;2;J←(H←PP',(↑I), 'E;1;J'

↑'PF',(↑I), '←((K×CSEJJJ),K×CSEJJJ)×H'

↑'PF',(↑I), '←PP',(↑I), '←PF',↑I

↑'H←SERIECJJ-CSEJJJ×XP',(↑I), 'L1J'

H←4 2 1 ρ(Sρ 1 0)\H

HC;2;J←HC;1;J

↑'XF',(↑I), '←(4 2 1ρXP',(↑I), ')+K×H'

→(4≥I←I+1)/S

V

VIMPRECOJIV

V HEAD IMPR VARS;I

S:→(0=1↑ρVARS)/0

PRT←(5ρ[AVE157]),((10ρ' '),HEAD),[AVE157]

PRT←,((I,10)ρ' '), (3 0 16 3 16 5 16 5 ↑((I←50[1↑ρVARS), ~1↑ρVARS)↑VARS),[AVE1

PRT←(59-I)ρ[AVE157]

→S,0ρVARS←(I,0)↓VARS

V

```

VIMPRESIONC[]V
V IMPRESION;I;K;H
[1] PRT+(20p' '), 'ANALISIS DE LA OBSERVACION ',(rJ), ' DE LA SERIE TEMPORAL ',NB,[AVC156+I+1]
[2] S:H+( ' ESTADO ',(rI),110p' PROB. DE TR. ',(rI), ' AL :', ' ', ' 4:', ' 6 4 rQC4;I]
[3] HC34 64 94]+ '123'
[4] HC37 38 39 40 41 42 67 68 69 70 71 72 97 98 99 100 101 102]+ 6 4 r~14QC;I]
[5] PRT+(2p[AVC157]),H,[AVC157]
[6] PRT+[AVC157],(14p' '),111p(2p' '), ' XF ',(12p' '), ' PF ',(8p' ')
[7] K+(2 14 p' '), (8 5 10 3 8 3 rVEC1;I;;J,APFC1;I;;J),(2 4 p' '), (8 5 10 3 8 3 rVEC2;I;;J,APFC2;I;;J), 2 4 p' '
[8] PRT+(K,(8 5 10 3 8 3 rVEC3;I;;J,APFC3;I;;J),(2 4 p' '), 8 5 10 3 8 3 rVEC4;I;;J,APFC4;I;;J),[AVC157]
[9] r(4rI+I+1)/S
[10] PRT+4p[AVC157]
[11] H+[AVC157],(4p' '), (111p' PROBAB DEL ESTADO '),( ' 4 :', ' 6 4 r+/QC4;J]
[12] HC25 54 83]+ '123'
[13] HC26 55 84]+ ' '
[14] HC27 28 29 30 31 32 56 57 58 59 60 61 85 86 87 88 89 90]+ 6 4 r,+/QC1 2 3 ;J]
[15] PRT+[AVC157],H,[AVC157]
[16] PRT+[AVC157],(4p' '),111p(2p' '), ' XF ',(12p' '), ' PF ',(8p' ')
[17] K+(2 4 p' '), (8 5 10 3 8 3 rXF1,PF1),(2 4 p' '), (8 5 10 3 8 3 rXF2,PF2),(2 4 p' '), 8 5 10 3 8 3 rXF3,PF3
[18] PRT+(K,(2 4 p' '), 8 5 10 3 8 3 rXF4,PF4),[AVC157]
[19] PRT+(5p[AVC157]),(39p' '), 'NIVEL ESTIMADO :', (15 8 rXFC1;1]),(5p' '), ' TENDENCIA ESTIMADA :', 16 8 rXFC2;1]
[20] PRT+[AVC157],(49p' '), 'MATRIZ DE VARIANZAS-COVARIANZAS ',(2p[AVC157]),(61p' '), 'PF'
[21] PRT+[AVC157],((2 41 p' '), 14 5 14 5 rPF),[AVC157]
[22] PRT+[AVC157],((49p' '), 'EL COEFICIENTE DE ESTACIONALIDAD ESTIMADA ES:', 10 6 rCSEJJ]),17p[AVC157]
V

```

```

VIMPRESIONAPAL[]V
V IMPRESIONAPA;H
[1] H+'ANALISIS DE LA SERIE ',NB,[AVC157], 'OBS ORIGINAL DESEST. SIN TEND RESIDUOS'
[2] H IMPR(rSERIE),(SERIEx(pSERIE)pCS),SERIE,E,[1,5] RES+0,RES
[3] PRT+'LOS COEFICIENTES DE ESTACIONALIDAD ESTIMADOS SON :',[AVC157], 'MES ',(6 0 ,22p 8 0)r\12
[4] PRT+(7p' '), 8 2 r100xCS
[5] PRT+62p[AVC157]
[6] r(0=1+rBP)/'+0,0pPRT+' NO SE HAN DETECTADO PUNTOS DE RUPTURA SIGNIFICATIVOS ',65p[AVC157]
[7] 'OBS A + EXT ORDEN-AUTOR VA IMPR BP,[1](pSERIE),P,ORD,VA
V

```

```

VIMPRESIONC[]V
V IMPRESION;I;K;H
[1] PRT+(20p' '), 'ANALISIS DE LA OBSERVACION ',(rJ), ' DE LA SERIE TEMPORAL ',NB,[AVC156+I+1]
[2] S:H+( ' ESTADO ',(rI),110p' ' PROB. DE TR. ',(rI), ' AL :', ' ', ' 4:', ' 6 4 rQE4;I]
[3] HC34 64 94]e'123'
[4] HC37 38 39 40 41 42 67 68 69 70 71 72 97 98 99 100 101 102]e' 6 4 r~140E;I]
[5] PRT+(2p[AVC157]),H,[AVC157]
[6] PRT+[AVC157],(14p' '),111p(2p' '), ' XF ',(12p' '), ' PF ',(8p' ')
[7] K+(2 14 p' '), (8 5 10 3 8 3 rVEC1;I;;],APFC1;I;;],(2 4 p' '), (8 5 10 3 8 3 rVEC2;I;;],APFC2;I;;], 2 4 p' '
[8] PRT+,(K,(8 5 10 3 8 3 rVEC3;I;;],APFC3;I;;],(2 4 p' '), 8 5 10 3 8 3 rVEC4;I;;],APFC4;I;;], [AVC157]
[9] +(4eI+I+1)/S
[10] PRT+4p[AVC157]
[11] H+[AVC157],(4p' '), (111p' ' PROBAB DEL ESTADO ' '), ' 4 :', ' 6 4 r+/QE4;]
[12] HC25 54 83]e'123'
[13] HC26 55 84]e' : '
[14] HC27 28 29 30 31 32 56 57 58 59 60 61 85 86 87 88 89 90]e' 6 4 r,+/QE1 2 3 ;]
[15] PRT+[AVC157],H,[AVC157]
[16] PRT+[AVC157],(4p' '),111p(2p' '), ' XF ',(12p' '), ' PF ',(8p' ')
[17] K+(2 4 p' '), (8 5 10 3 8 3 rXF1,PF1),(2 4 p' '), (8 5 10 3 8 3 rXF2,PF2),(2 4 p' '), 8 5 10 3 8 3 rXF3,PF3
[18] PRT+,(K,(2 4 p' '), 8 5 10 3 8 3 rXF4,PF4),[AVC157]
[19] PRT+(5p[AVC157]),(39p' '), 'NIVEL ESTIMADO :',(15 8 rXFC1;1]),(5p' '), ' TENDENCIA ESTIMADA :', 16 8 rXFC2;1]
[20] PRT+[AVC157],(49p' '), 'MATRIZ DE VARIANZAS-COVARIANZAS ',(2p[AVC157]),(61p' '), 'PF'
[21] PRT+,[AVC157],((2 41 p' '), 14 5 14 5 rPF),[AVC157]
[22] PRT+[AVC157],((49p' '), 'EL COEFICIENTE DE ESTACIONALIDAD ESTIMADA ES:', 10 6 rCSEIJJ]),17p[AVC157]
V

```

```

VIMPRESIONAPAC[]V
V IMPRESIONAPA;H
[1] H+'ANALISIS DE LA SERIE ',NB,[AVC157], 'OBS : ORIGINAL DESEST, SIN TEND RESIDUOS'
[2] H IMPR(\pSERIE),(SERIEx(pSERIE)pCS),SERIE,E,[1.5] RES+0,RES
[3] PRT+'LOS COEFICIENTES DE ESTACIONALIDAD ESTIMADOS SON :',[AVC157], 'MES ',(6 0 ,22p 8 0)r\12
[4] PRT+(7p' '), 8 2 r100xCS
[5] PRT+62p[AVC157]
[6] ±(0=1↑pBP)/'+0,0pPRT+' NO SE HAN DETECTADO PUNTOS DE RUPTURA SIGNIFICATIVOS ',65p[AVC157]'
[7] 'OBS A + BxT ORDEN-AUTOR VA IMPR BP,[1](pSERIE),P,ORD,VA
V

```

```

V INITAMF;I
[1] A((V/0≠PRT,(0×IIO+1)ρPRT+'PRT')√2≠1 [SVO 'PRT']/'SAINITAMF+2,0ρI+' ERROR DE APERTURA DE LA VARIABLE DE IMPRESION
[2] N←ρSERIE+0×J+JJ+2×IIO+I+1
[3] RES←\0
[4] OP←I+0×ρI+'INTRODUCIR EL HORIZONTE DE PREDICCION'
[5] CS←CALACOEFAEST
[6] A← 2 2 ρ 1 1 0 1
[7] RAVARAESQ← 4 2 2 ρ(4ρ0), 100 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
[8] KAVARAESQ← 1 1 1 101
[9] VAR←I,0ρI+'VARIANZA DE LA SERIE'
[10] PI← 0,91 0,005 0,005 0,08
[11] Q← 0 0 0 1
[12] XF1←XF2←XF3←XF4←(SERIE[I]+CS[I]),0
[13] PF1←PF2←PF3←PF4← 2 2 ρ(CS[I]×CS[I]×VAR),3ρ0
[14] S: A(5≥I+I+1)/'→S,0ρPF',(τI),'+PF',(τI), '×KAVARAESQ[I-1]'

```

```

VINITAPREDAUTO[I]V
V INITAPREDAUTO
[1] BP← 0 5 ρRES←\KK←0×H←PP←12×IIO+1
[2] PRT←'PRT',0ρ1 [SVO 'PRT']
[3] A(Λ/0=PRT)/'I+' PRIMERA LINEA ''
[4] I
[5] SERIE←SERIE+(ρSERIE)ρCS←CALACOEFAEST
[6] P←CALAPAR 1,J+2×PP
[7] E←((J+12)↑SERIE)-PE[1]+PE[2]×\J+H
[8] ORD←DETAORDEN 2×PP

```

```

VMAC[I]V
V R←X MA P;I;FP
[1] R←\I←FP←0
[2] A(0=2IP)/'FP←1'
[3] S: +(((ρX)-P-1)×I+I+1)/S,0ρR←R,+/P↑IϕX
[4] R←R+P
[5] AFP/'R←((ρX)-P)↑(R+1ϕR)÷2'
[6] APR/'('OBS ''', (4ρ'' '''), ''SERIE ORIG.'', (5ρ'' '''), ''MEDIA MOVIL''', [AVL157])IMPR(P+ρR), ((ρR)↑(P+LP+2)↓X), [1.5]R

```

V MODABP [] V

V MODABP, I

```

[1] I←1
[2] S:→(~VERIFICARACAMBIO H-I)/MOD
[3] →(H>I+I+1)/S
[4] 'CAMBIO ESTRUCTURA PARAMETROS AUTORREGRESIVOS'
[5] ORD←DETAORDEN J
[6] MOD:BP←BP, [1](J+H-I), P, ORD, VA
[7] RES←RES, KK←(-I)↓E
[8] KK←J+H-I
[9] J←KK-3

```

V

VOBTARES [] V

V R←PAR, OBTARES X; N; I

```

[1] R←10
[2] N←Φ-1ρ, PAR
[3] I←XC[1]
[4] S:→(XC[2]≥I+I+1)/S, 0ρR←R, E[1]←+/PAR×E[1]+N]

```

V

VPRED [] V

V PRED; OP; N; R; I

```

[1] P←CALAPAR(KK+1), ρSERIE
[2] E←RES, (KK↓SERIE)-PC[1]+PC[2]×KK↓1ρSERIE
[3] ORD←DETAORDENρSERIE
[4] RES←PAR, OBTARES(1+ρ, PAR), ρSERIE
[5] IMPRESIONΔPA
[6] OP←0, 0ρ0←'HORIZONTE DE PREDICCION'
[7] R←10
[8] N←Φ-1ρ, PAR
[9] R←(-ρ, PAR)×I+1)↑E
[10] S:→(OP≥I+I+1)/S, 0ρR←R, +/PAR×(-ρ, PAR)↑R
[11] R←(-OP↑R)+PC[1]+PC[2]×(ρSERIE)+1OP
[12] ('HORIZ, PREDICCION ', DAVE157) IMPR(1OP), [1.5] R
[13] PRT←'EL VALOR CUADRATICO MEDIO DE PREDICCION ES: ', rVA*0.5

```

V



```

V PREDAUTO[ ] V
RES←NB PREDAUTO SERIE;R1;PP;CS;BP;E;J;ORD;P;PAR;VA;PRT;H;[ ]IO;KK;I
[ ] INITΔPREDAUTO
[ ] ←(VERIFICARACAMBIO H)/'MODΔBP'
[ ] →(CONTAPREP)/2
[ ] PRED
V

```

```

V PREDICCION[ ] V
PREDICCION;PT;I;PPF
[ ] PPF← 0 2 2 ρPT←\I←0,
[ ] S:PT←PT,(.XF←A+.XF)+.xCSEJJJ,0
[ ] JJ←1+(12≠JJ+1)×JJ
[ ] PPF←PPF,[ ] A+.xPF+.xQA
[ ] →(OP>I←I+1)/S
[ ] ('OPR PREDICCION DIFERENCIA ',[ ]AVE[157]) IMPR(\OP),PT,[ ]1.5] PPF
[ ] [ ]WA←[ ]EX 6 3 ρ'XP1XP2XP3XP4 XF PF '
V

```

[;1;1]

```

V PREPACONT[ ] V
R←PREPACONT;KJ
[ ] CSCJJJ←(CSCJJJ*0.8)×(SERIE[ ]JJ+XFC[ ]1;1])*0.2
[ ] CSEKJJ←CSEKJJ+(JJ≠\12)/\12]+(x/CS)*+11
[ ] IMPRESION
[ ] [ ]WA←[ ]EX 2 3 ρ'VEΔPF'
[ ] RES←RES,SERIE[ ]JJ-CSCJJJ×XFC[ ]1;1]
[ ] JJ←1+(13≠JJ+1)×JJ
[ ] Q←+/Q
[ ] R←N≧J←J+1
V

```

```

V PREAMF[ ] V
PREAMF;I
[ ] I←1
[ ] S:←(S≧I←I+1)/'→S,0ρXP',(τI),'←,A+.XF',τI
[ ] I←1
[ ] S1:←(S1≧I←I+1)/'→S1,0ρPP',(τI),'←(4 2 2ρA+.PF),(τI),'+.xQA)+VARXRAVARAESQ'
V

```

VINITAMFI[]V

V INITAMF; I

```

[1]  A((V/0≠PRT,(0×[ ]IO+1)ρPRT←'PRT')v2≠1 [ ]SVO 'PRT')/'SΔINITAMF←2,0ρ[ ]←''ERROR DE APERTURA DE LA VARIABLE DE IMPRESION
[2]  N←ρSERIE+0×J+JJ+2×[ ]IO+I+1
[3]  RES←\0
[4]  OP←[ ]+0×ρ[ ]←'INTRODUCIR EL HORIZONTE DE PREDICCION'
[5]  CS←CALACOEFAEST
[6]  A← 2 2 ρ 1 1 0 1
[7]  RΔVARΔESQ← 4 2 2 ρ(4ρ0), 100 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
[8]  KΔVARΔESQ← 1 1 1 101
[9]  VAR←[ ],0ρ[ ]←'VARIANZA DE LA SERIE'
[10] PI← 0,91 0,005 0,005 0,08
[11] Q← 0 0 0 1
[12] XF1←XF2←XF3←XF4←(SERIE[1]+CS[1]),0
[13] PF1←PF2←PF3←PF4← 2 2 ρ(CS[1]×CS[1]×VAR),3ρ0
[14] S: A(5≥I+I+1)/'→S,0ρPF',(τI),'+PF',(τI), 'xKΔVARΔESQ[1-1]'

```

V

VVERIFICARΔCAMBIO[]V

V R←VERIFICARΔCAMBIO K;RED;Q

```

[1] RED←PAR OBTΔRES J+1,K
[2] Q←(+/RED*2)÷VA×ρRED
[3] R←'S'=1↑[ ],[ ]←'VERIFICACION HIPOTESIS CAMBIO',[ ]AVC157J,'VALOR ',(τQ), ' CON ',(5 0 τK,J+K-2+ρ,PAR), ' GRADOS DE LIB

```

V

VAUTOΔSINT[]V

V AUTOΔSINT SERIE;PF;XF;K;BETA;I;PAR

```

[1] PAR←[ ],0ρ[ ]←'PARAMETROS ARMA'
[2] R←\0×I+2
[3] BETA←(+/PAR)ρ1
[4] XF←(PAR[1]↑SERIE),PAR[2]ρ0,1
[5] PF←BXF°,xXF
[6] S:XF←(SERIE[1],(1+PAR[1]↑XF),(τ1↑R+R,SERIE[1]-BETA+,xXF),τ1↓(-PAR[2])↑XF
[7] K←PF+,xXF+,x1+XF+,xPF+,xXF
[8] PF←PF-(K°,xXF)+,xPF
[9] BETA←BETA+K×τ1↑R
[10] →((ρSERIE)≥I+I+1)/S
[11] PRT←' EL VALOR DE LOS PARAMETROS ES : ',τBETA

```

V

B I B L I O G R A F I A
=====

BIBLIOGRAFIA

- ABRAHAM, B. (1980): "Intervention analysis and multiple time series". *Biometrika* 67(1): 73-78.
- ABRAHAM, B.- Box, G.E.P.(1979): "Bayesian analysis of some / outlier problems in time series". *Biometrika* 66(2): / 229-236.
- AITCHISON, J.-DUNSMORE, I.R.(1975): *Statistical Prediction Analysis*. CAMBRIDGE UNIV. Press. Cambridge.
- AKAIKE, H.(1974): "A new look at the statistical model identification". *IEEE Trans. Automatic Control* AC-19 716- / 723.
- AKAIKE, H.(1979): "A Bayesian extension of the minimum AIC // procedure of autoregressive model fitting". *Biometrika* 66(2): 237-242.
- AMEMIYA, T.(1977): "A note on a Heteroscedastic Model". *Journal of Econometrics* 6:365-370.
- ANDERSEN, A.P.-NELSON, H. (1980): "A look at the Stationarity of 14 Quarterly U.S. Economic Time Series". *Journal of the Operational Research Soc.* 31(4): 353-358.
- ANDERSON, O.D. (1979.a): "On realizations from Nonstationary Time Series". *Journal of the Operational Research Society*. 30(3): 253-258.

- ANDERSON, O.D. ed. (1979.b): Forecasting. Procc. of the Institute of Statisticians annual Conference. Cambridge 1976. North-Holland-Amsterdam.
- ANDERSON, O.D. (1980.a): Analysing Time Series. North-Holland Amsterdam.
- ANDERSON, O.D. ed. (1980.b): Time Series. Proceedings of // the international Conference held at Nottingham Uni-// versity. 1979. North-Holland Pb.- Amsterdam.
- ANDERSON, O.D.- GOOIJER, J.G.(1979): "On Discriminating Be-// tween IMA (1,1) and ARMA (1,1) Processes:Some exten-// sions to a Paper by Wichern". The Statistician 28(2): 119-133.
- ANDERSON, B.D.O.- HITZ, K.L.- DIEM, N.D. (1974): "Recursive Algorithm for Spectral Factorization". IEEE Transac-// tions on circuits and Systems 21(6): 742-750.
- ANSLEY, C.F. (1979): "An algorihm for the exact likelihood / of a mixed autoregressive-moving average process". Biometrika 66(1): 59-65.
- ANSLEY, C.F.-NEWBOLD, P. (1980): "Finite Sample properties of Estimators for autoregressive Moving Average Models" // Journal of Econometrics 13: 159-183.
- ANTONIOU, A. (1979): Digital Filters analysis and design. Mc Graw Hill Book Company.

- ASHLEY, B.-GRANGER, C.W.J.- SCHMALENSEE, R. (1980): "Advertiising and aggregate consumption: An analysis of Causality" *Econometrica* 48(5): 1149-1167.
- ASTRÖM, K.J. (1970): Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, New York.
- ASTRÖM, K.J.- WITTENMARK, B. (1973): "On Self Tuning Regulators" *Automatica* 9: 185-199.
- ATKINSON, A.C. (1980): "A note on the generalized information criterion for choice of a model" *Biometrika* 67(2): // 413-418.
- BAILLIE, R.T. (1980): "Predictions from ARMAX models". *Journal of Econometrics* 12: 365-374.
- BARTLETT, M.S. (1978): An introduction to Stochastic Processes. CAMBRIDGE Univ. Press. Cambridge.
- BHANSALI, R.J.- DOWNHAM, D.Y. (1977): "Some properties of // the order of on autoregressive model selected by a generalization of Akaike's FPE criteriom". *Biometrika* 64: 547-551.
- BHANSALI, R.J. (1978): "Linear prediction by autoregressive model fitting in the time domain". *The Annals of Statistics* 6: 224-231.
- BHATIA, N.P.- SZEGÖ, G.P. (1970): Stability Theory of dynamical Systems. Springer-Verlag.

- BOX, G.E.P.- COX, D.R. (1964): "An analysis of Transformations". Journal of the Royal Statistical Society. Serie B, 26(2): 211-243.
- BOX, G.E.P.- JENKINS, G.M.(1973): "Some Comments on a Paper by Chatfield and Prothero on a review by Kendall". // J.R. Statist. Soc. A. 136(3): 337-344.
- BOX, G.E.P.- JENKINS, G.M. (1976): Time Series Analysis: // Forecasting and Control. Holden-Day.
- BOX, G.E.P.- JENKINS, G.M.- BACON, D.W. (1967): Models for / Forecasting Seasonal and Non-Seasonal Time Series. // Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series. ed. Harris. John Wiley. New York.
- BOX, G.E.P.- PIERCE, D.A. (1970): "Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models". JASA 65(332): 1509-1526.
- BOX, G.E.P.- TIAO, G.C. (1975): "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems" / JASA 70(349): 70-79.
- BOX, G.E.P.- TIAO, G.C. (1977): "A canonical analysis of multiple time series". Biometrika 64(2): 355-365.
- BREUSCH, T.S.- PAGAN, A.R. (1979): "A simple test for Heteroscedasticity and random coefficient variation". Econometrica 47(5): 1287-1294.

- BREWER, K.R.W. (1979): "Seasonal adjustment of ARIMA series".
Economic Appliqueé 32(1): 7-22.
- CHATFIELD, C.- PROTHERO, D.L. (1973): "Box-Jenkins Seasonal
Forecasting: Problems in a Case-Study". J.R. Statis.
Soc. A. 136(3): 295-315.
- CHEN, C.T. (1970): Introduction to Linear System Theory. Holt
Rinehort and Winston, Inc. New York.
- CHOW, G.C. (1960): "Tests of Equality Between Sets of Coeffi
cients in Two Linear Regresions". Econometrica 28:591-
605.
- CHOW, G.C.- LIN, A. (1976): "Best linear Unbiased Estimation
of Missing Observations in a Economic Time Series. //
JASA 17(355): 719-721.
- CLEVELAND, W.P. (1972): Analysis and Forecasting of Seasonal
Time Series. Ph. D. Thesis, Statistics Department. Uni.
Wisconsin.
- CLEVELAND, W.P. - TIAO, G.C. (1976): "Descomposition of Sea-
sonal Time Series: A model for the census X-11 Pro-//
gram". JASA 71(355): 581-587.
- CLEVELAND, W.P.- TIAO, G.C. (1979): "Modeling seasonal time
series". Economic Appliqueé 32(1): 108-129.
- CONRAD, J.M. (1980): "Quasi-option value and the expected va
lue of information". The Quarterly Journal of Econo-/
mics 94(4): 813-820.



- CONTRERAS BAYARRI, D. (1977): "El tratamiento de la estacionalidad en las series de ventas". Cuadernos Universitarios de Planificación Empresarial y Marketing 3: // 291-300.
- CROOKES, J.G.- CROSTON, K.- SYPSAS, P.(1980): "Process Components for Multivariate Time Series Analysis". Journal of the Operational Research Society 31(4): 325-// 330.
- CUDDY, J.D.A.- VALLE, P.A. della (1978): "Measuring the instability of Time Series Data". Oxford Bulletin of Economics and Statistics 40(1): 79-85.
- DAGUM, E.B. (1975): "Seasonal Factor Forecasts from ARIMA models" Contributions libres de l'Institut International de Statistique 3: 40^e session: 206-219.
- DAGUM, E.B. (1976): Comments on the paper: "A survey and comparative Analysis of Variants Methods of Seasonal Adjustment." Procc. of the NBER/Bureau of the Census conference on Seasonal Analysis of Economic Time Series Washinton D.C.
- DAGUM, C. (1979): "A mean generating function for the assessment of estimator biases." Economic Apliqueé 32(1): 81-93.
- DAVIES, N.- TRIGGS, C.M.- NEWBOLD, P. (1977): "Significance levels of the Box-Pierce portmanteau Statistic in fini

- te samples". *Biometrika* 64(3): 517-522.
- DHRYMES, P.J. (1970): *Econometrics. Statistical Foundations and applications.* Harper & Row, Publishers.
- DUNSMVIR, W. (1979): "A central limit theorem for Parameter estimation in Stationary vector Time series and its application to models for a signal observed with noise". *The Annals of Statistics* 7(3):490-506.
- DYER, D.D.- KEATING, J.P. (1980): "On the Determination of // Critical Values for Bartlett's Test!" *JASA* 75 (370): / 313-319.
- DYNKIN, E. (1965): *Markov Processes.* Springer-Verlag.
- FAREBROTHER, R.W.(1980): "The Durbin-Watson test for serial correlation when there is no intercept in the regression". *Econometrica* 48(6): 1553-1563.
- FINDLEY, D.F. (1978): *Applied Time Series Analysis.* Academic Press. New York.
- FISHER, A. "A Brief Note on Seasonal Variation". *The Journal of Accountancy* 64: 174-199.
- FISHER, F.M. (1966): *A priori information and Time Series // Analysis.* North-Holland Pb. Amsterdam.
- FITTS, J.M. (1972): "On the Observability of Nonlinear System with Applications to Nonlinear Regression Analysis!" *Information Sciences* 4: 129-156.

- FORD, I.- SILVEY, S.D. (1980): "A segmentially constructed / design for estimating a nonlinear parametric function" *Biometrika* 67 (2): 381-388.
- FUJINO, Y. (1979): "Tests for the homogeneity of a set of va riances against ordered alternatives". *Biometrika* 66 (1): 133-139.
- FULLER, W.A. (1980): "The use of indicator variables in computing predictions". *Journal of Econometrics* 12: 231-243.
- GÄRDENFORS, P. (1980): "On the Information Provided by Fore casting Models". *Technological Forecasting and Social Change* 16(351): 351-361.
- GARDNER, G.- HARVEY, A.C.- PHILLIPS, G.D. (1980): "An algo- / rithm for Exact Maximun Likelihood Estimati^on of Autoregre sive-Moving Average Models by means of Kalman Fil- tering". *Applied Statistics* 29(3): 311-322.
- GNAD, W. (1975): "Regresi^on by Spline Functions". *Empirical Economics* 2(2): 69-77.
- GODFREY, L.G. (1979): "Testing the adequacy of a time series model". *Biometrika* 66(1): 67-72.
- GODOLPHIN, E.J. (1980): "A method for testing the order of / an autoregressive-moving average process". *BIOMETRIKA* 67(3): 699-703.

- GOMEZ, G.L.- TINTNER, B. (1979): "Aplicación de los procesos de difusión a la planificación del desarrollo económico". Cuadernos de Economía 7(20): 461.
- GRANGER, C.W.J.- ANDERSEN, A.P. (1978): An Introduction to / Bilinear Time Series Models. Wandengoeck & Ruprecht / in Gottingen.
- GRANGER, C.W.J.- HATANAKA, M. (1964): Spectral Analysis of Economic Time Series. Princeton University Press. New Jersey.
- GRANGER, C.W.J.- NEWBOLD, P. (1976): "The use of R^2 to determine the appropriate transformation of regression variables!" Journal of Econometrics 4:205-210.
- GRANGER, C.W.J.- NEWBOLD, P. (1977): Forecasting Time Series. Academic Press, New York.
- GUTHERY, S.B. (1974): "Partition Regression". JASA 69(348): 945-947.
- HAMILTON, D.C.- WATTS, D.G. (1978): "Interpreting partial // autocorrelation functions of seasonal time series models". Biometrika 65(1): 135-140.
- HANNAN, E.J. (1969): "The estimation of mixed moving average autoregressive systems!" Biometrika 56: 579-594.
- HANNAN, E.J. (1979): "A note an autoregressive-moving average identification". Biometrika 66(3): 672-674.

- HASZA, D.P. (1980): "The asymptotic Distribution of the Sample Autocorrelations for an Integrated ARMA Process." JASA 75(370): 341-352.
- HENDERSON, R. (1916): "Note on Graduation by Adjusted Average". Transactions of the Actuarial Society of America 17: 43-48.
- HINKLEY, D. (1979) "Predictive Likelihood". The Annals of // Statistics 7(4): 718-728.
- HOLT, CH. A. JR.- SHORE, R.W. (1980): Bayesian Analysis in / Economic Theory and Time Series Analysis. North-Ho-// lland. Amsterdam.
- HOYO, J.- TERCEIRO, J. (1978): "Causalidad en series temporales. Alguna evidencia empírica para la Economía Española". Cuadernos de Economía 6(17): 431-459.
- HOSKING, J.R.M.(1979): "The asymptotic distribution of R^2 for / autoregressive-moving average time series models // when parameters are estimated". Biometrika 66(1): 156 -157.
- HUOT, G.(1979): "Simulation stochastique des componentes des series temporelles" Economic Appliqueé 32(1): 95-106.
- IOSIFESCU, M. (1980): Finite Markov Processes and their Ap-// plications. John Wiley & Sons. Chichester.
- JAKEMAN, A.J.- STEELE, L.P.- YOUNG, P.C. (1980): "Instrumen-

- tal Variable Algorithms for Multiple Input Systems // Described by Multiple Transfer Functions". IEEE Trans. on Autom. Control. SMC. 10(10): 593-602.
- JENKINS, G.M.- WATTS, D.G. (1968): Spectral Analysis and its applications. Holden-Day.
- JONCKHEERE, E.A.- SILVERMAN, L.M.(1980): "Spectral Theory of the Linear-Quadratic Optimal Control Problems: A new Algorithm for Spectral Computations". IEEE Transac. / on Autom. Control 25(5): 880-888.
- JOYEUX, R. (1980): " Relationships Between Economic Time-Series and their anticipations". Quarterly Review of // Economics on Business 20(1): 7-15.
- KAILATH, T. (1968): "An innovations approach to least-squares estimation, part I: Linear filtering in additive white noise". IEEE Trans. Autom. Control. AC-13: 646-655.
- KALMAN, R. (1963): New Methods in Wiener Filtering Theory. / in: G.L. Bogdonoff and J. Kozin eds. Proc. First Symp. Eng. Appl. Randon Functions Theory Probability. Wiley New York.
- KALMAN, R.-BUCY, R. (1961): "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory". Trans. ASME, J. Basic Eng. 83 Serie D: 95-108.

- KASHYAP, R.L. (1980.a): "Inconsistency of the Akaike information criterion (AIC) rule and its variants for estimating the unknown order of the autoregressive model // obeyed by a time series. We also consider the case of time series which may not obey AR models" IEEE Transc. on Aut. Control 25(5): 996-998.
- KAYSHAP, R.L. (1980.b): Consistent estimation of the order of autoregressive models. Paper presented a IEEE contr./ Syst. Cont. Decision and Control.
- KENDALL, M.G.- STUART, A. (1966): The advanced Theory of Statistics. Carles Griffen & Company limited.
- KLOEK, T.- DIJK, H.K. Van (1978): "Bayesian estimates of // Equation System parameters: An application of integration by Monte Carlo" Econometrica 46(1): 1-19.
- KOHN, R. (1979): "Identification Result for ARMAX STRUCTURES" Econometrica 47(5): 1295-1304.
- KOLMOGOROV, A.N.(1941): "Interpolation and extrapolation of Stationary random sequences". Bull. Moscow Univ. Ser. Math. 5.
- KOOPMANS, L.H. (1974): The Spectral Analysis of Time Series. Academic Press. London.
- LEAMER, E.E.(1979): "Information criteria for choice of regression models: A comment". Econometrica 47(2): 507-510.

- LECLERC, G. (1979): "La desaisonnalisation en pratique". /
Economic Appliqueé 32(1): 73-80.
- LEE, T.C.- JUDGE, G.G.- ZELLNER, A.(1970): Estimating the Pa
rameters of the Markov Probabilidy Model from Aggrega
te Time Series Data. North-Holland- Amsterdam.
- LEONDES, C.T.- PEARSON, J.O.(1973): "Kalman filtering of Sys
tems with parameter uncertaintics - a survey!" Int. J.
Control 17(4): 785-801.
- LIN, CH.CH.- MUDHOLKAR, G.S. (1980): " A Simple test for nor
mality against asymmetric alternatives." Biometrika 67
(2): 455-461.
- LJUNG, G.M.- BOX, E.P. (1978). "On a measure of lack of fit
in time series models!" Biometrika 65(2): 297-303.
- MAKRIDAKIS, S.- HODGSDON, A.- WHEELWRIGHT, S.C.(1974): "An /
Interactive Forecasting System". The American Statis-
tician 28(4): 153-158.
- MALONEY, M.T.- IRELAND, M.E. (1980): "Fiscal Versus Monetary
Policy. An application of transfer functions". Jour-
nal of Econometrics 13: 253-266.
- MARAVALL, A. (1979): Identification in Dynamic Shock-Error /
Models. Springer-Verlag. Berlin.
- MARAVALL, A. (1980): "Effects of alternative seasonal adjust
ment procedures on monetary policy". Journal of Econo

- metrics 14: 115-136.
- MARSCHAK, J. (1974): Economic Information, Decision, and Prediction. D. Reidel Publishing C. Boston.
- MARTINEZ ECHEVARRIA, M.A.(1979): "La entropía como medida de la bondad de predicción en situaciones dinámicas". Estadística Española 84-85: 63-75.
- Mc CLAVE, J.T. (1978): "Estimating the Order of Autoregressive Models: The max χ^2 method!" Journal of the American Statistical Association 73(361): 122-128.
- Mc GARTY, T. (1974): Stochastic Processes and State Estimation. Wiley.
- Mc GEE, V.E.- CARLETON, W.T.(1970): "Piecewise Regression". JASA 65(331): 1109-1124.
- MENDERSHAUSEN, H. (1939): "Eliminating Changing Seasonals by Multiple Regression Analysis". The Review of Economic Studies 21: 171-177.
- MIESCKE, K.J. (1979): "Identification and Selection procedures based on tests. The Annals of Statistics 7(1): // 207-219.
- MURRAY, S.O.- RANKIN, J.H. (1980): "Use diffusion: An Extension and Critique". Technological Forecasting and Social Change. 16(4): 331-341.
- NAHI, N. (1969): Estimation Theory and its Applications. Wi-

ley. New York.

- NELSON, H.L.- GRANGER, C.W.T. (1979): "Experience with using the Box-Cox transformation When Forecasting Economic time series". Journal of Econometrics 10: 57-69'
- NELSON, CH.R.- SHEA, G.S.(1979): "Hypothesis Testing Based / on goodness of fit in the moving average time series model!". Journal of Econometrics 10: 221-226.
- NERLOVE, M.- GREYER, D.M.- CARVALHO (1979): Analysis of Eco nomic Time Series. A Synthesis. Academic Press. New // York..
- NEWBOLD, P.(1980): "The equivalence of two test of time series model adequacy!" Biometrika 67(2): 463-465.
- NEWTON, H.J.(1980): "Efficient estimation of multivariate mo ving-average autocovariances!" Biometrika 67(1): 227- / 31.
- OHTANI, K.- TOYODA, T.(1980): "Estimation of Regression Co- / fficients after a Preliminary Test for Homoscedastici i ty!" Journal of Econometrics 12: 151-159.
- O'REILLY, J. (1980): "On linear Least-Squares Estimators for Discrete-Time Stochastic Systems!" IEEE Trans. on Sys. man and Cybernetics SMC-10, N^o 5: 276-279.
- OZAKI, T. (1977): "On the Order Determination of ARIMA Mo-// dels". Applied Statistic 26(3): 290-301.

- PAPOULIS, A. (1965): Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Mc Graw-Hill. New York.
- PARZEN, E.(1974): "Some recent advances in time series modeling" IEEE trans. Automatic. Control AC-19: 723-730.
- PARZEN, E.- PAGANO, M. (1979): "An approach to modeling seasonally stationary time series" Journal of Econometrics 8: 137-153.
- PEELE, L.- KIMELFORF, G.(1979): "Time series prediction functions based on imprecise observations". The Annals of Statistics 7(4): 801-811.
- PEÑA, D. (1978): "La metodología Box-Jenkins. Una aplicación a la previsión del consumo de gasolina". Información Comercial Española 543: 135-152.
- PHILLIPS, C.B. (1979): "The Sampling Distribution of Forecasts from a first-order autoregression". Journal of Econometric 9: 241-261.
- PIERCE, D.A.(1979.a): "Signal extraction error in nonstationary time series." The Annals of Statistics 7(6): 1303-1320.
- PIERCE, D.A. (1979.b): "Seasonal adjustment of daily data with special reference to the US money supply". Economic Appliqueé 32(1): 49-72.
- PIERCE, D.A. (1980): "Data revisions with moving average seasonal adjustment procedures". Journal of Econometrics

- 14: 95-114.
- PIERCE, D.A.- HAUGH, L.D. (1977): "Causality in temporal Systems". Journal of Econometrics 5: 265-293.
- PIERCE, D.A.- HAUGH, L.D.(1979): "The characterization of // instantaneous Causality. A comment". Journal of Econometrics 10: 257-259.
- PLACKETT, R.L. (1950): "Some theorems in Least-Squares" Biometrika 37.
- PLOSSER, CH.I. (1979.a): "Short-term Forecasting and Seasonal Adjustment". JASA 74(365): 15-24.
- PLOSSER, CH.I. (1979.b): "The Analysis of Seasonal Economic Models". Journal of Econometrics 10: 147-163.
- POIRIER, D.J. (1976): The Econometrics of Structural Change North-Holland. Amsterdam.
- POSKITT, D.S. (1978): "Approximating the Exact finite Sample distribution of a Spectral Estimator" Econometrika 46 (1): 21-32.
- POSKITT, D.S.- TREMAYNE, A.R. (1980): "Testing the specification of a fitted autoregressive-moving average model. Biometrika 67(2): 359-363.
- POVEDA, V.- SANZ, R. (1978): "Análisis de regresión: Algunas consideraciones útiles para el trabajo empírico". Investigaciones Economicas 7: 103-128.

- PRICE, J.M. (1979): "The characterization of instantaneous / causality". Journal of Econometrics 10: 253-256.
- QUANDT, R.E. (1972): "A new approach to Estimating Switching Regressions". JASA 67(338): 306-310.
- RAVEH, A.- TAPIERO, CH.S. (1980): "Finding Common Seasonal / Patterns among Time Series". Journal of Econometrics / 12: 353-363.
- REID, D.J. (1969): A comparative Study of Time Series prediction techniques on economic data. Ph. D. Thesis Dept. of Mathematics. Univ. of Nottingham.
- REINSEL, G. (1979): FIML Estimation of the dynamic simulta- / neous equations model with ARMA disturbances". Jour- / nal of Econometrics 9: 263-281.
- ROSENBLATT, M. (1962): Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- RUPPERT, D. (1979): "A new dynamic stochastic approximation procedure". The Annals of Statistics 7(6): 1179-1195.
- SAMUELSON, P.A.(1947): Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press. Cambridge.
- SAUNDERS, R.- LAUD, P. (1980): "The multidimensional Kolmogorov goodness- of - fit test". Biometrika 67(1): 237.
- SAVIN, N.E.- WHITE, K.J.(1978): "Testing for Autocorrelation with missing observations." Econometrica 46(1):59-67.

- SCHWARZ, N. (1977): Trigonometrische Regression. Technical R. Programmes Trigo-II. Bochum.
- SHIBATA, R. (1976): "Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion". Biometrika 63: 117-126.
- SHIBATA, R. (1980): "Asymptotically Efficient Selection of / the order of the model for estimating parameters of a linear process". The Annals of Statistics 8(1): 147-// 164.
- SHISKIN, J. (1957): "Electronic Computers and Business Indicators". Journal of Business October 1957. 219-269.
- SHISKIN, J.- YOUNG, A.M.- MUSGROVE, J.C. (1967): The X-11 Variant of the census Method II Seasonal Adjustment Program. Bureau of the census. Technical paper n° 15.
- SIEGEL, A.F. (1980): "Testing for Periodicity in a Time Se-// ries". JASA 75(370): 345-348.
- STOKES, H.H. (1980): "Effects of alternative seasonal adjustment procedures on monetary policy-comment". Journal of Econometrics 14: 137-140.
- TANAKA, K (1977): "On a new estimation method for time se-// ries models". Economics Studies Quarterly 28(3): 220-232.

- THEIL, H. (1967): Economics and Information Theory. North-Holland Pb. Amsterdam.
- TIAO, G.C.- GRUPE, M.R. (1980): "Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data" *Biometrika* 67(2): 365-73.
- TIAO, G.C.- GUTTMAN, I. (1980): "Forecasting Contemporaneous Aggregates of Multiple Time Series". *Journal of Econometrics* 12: 219-230.
- TUSTIN, A. (1953): The Mechanism of Economic System; on Approach to the Problem of Economic Stabilization from the Point of View of Control-System Engineering. Harvard University Press. Cambridge.
- URIEL, JIMENEZ, E.- DE MIGUEL CASTAÑO, A. (1973): "Estudio // comparativo de dos métodos de desestacionalización de Series" *Estadística Española* 7: 73-113.
- VALLEE, R. (1979): "Aspect informationnel du problème de la prévision dans le cas d'une observation initiale imparfaite". *Economie Appliquée* 32 (2-3): 221-227.
- VEREDA, J. (1978): "Análisis espectral con funciones de transferencia simple" *Cuadernos de Economía* 7(17):515-529.
- WALLENSTEIN, S. (1980): "Distributions of some One-Sided k -sample Smirnov-Type Statistics" *JASA* 75(370):441-446.

- WELCH, P.D. (1967): "The use of fast Fourier Transform for // the Estimation of Power Spectra: A method based on ti me averaging over short, modified periodograms" IBM / Research Note (Marzo 1967)
- WIENER, N. (1949): The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary time series with Engineering Ap-/plications. Wiley. New York.
- WINOGRAD, S. (1967): "A new algoritm for inner product" IBM / research (Noviembre 67) RC-1943.
- WITTENMARK, B. (1974): "A Self-Tunning Predictor" IEEE Trans. on Automatic Control 19(6): 848-851.
- WOLD, H. (1938): A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Almqvist and Wiksell. Uppsala.
- ZABALZA, A. (1978): "Una regla lineal de decisión para el control de un modelo dinámico uniecuacional". Cuadernos / de Economía 7(17): 530-558.
- ZELLNER, A.- BARK, S. (1979): "Minimum Expected Loss (MEL0) Estimators for Functions of Parameters and Structural Coefficientes of Econometric Models". JASA 74(365): / 185-193.