Una experiencia de enseñanza para abordar la variable aleatoria con estudiantes de secundaria

A teaching experience to approach the random variable with secondary-school students

Valeria Bizet Leyton y Elisabeth Ramos Rodríguez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Resumen

Este estudio aborda la enseñanza del concepto variable aleatoria desde su carácter funcional en educación secundaria considerando como fundamento teórico elementos de la teoría de situaciones didácticas. Desde el paradigma cualitativo, los sujetos informantes fueron 22 estudiantes de 15-16 años de un colegio de Chile. Como instrumento de recogida de datos se empleó una situación didáctica sobre variable aleatoria, cuyo análisis a priori nos permitió definir categorías para el análisis. Los resultados evidencian los conceptos matemáticos y diferentes tipos de sistemas de representaciones usados por los estudiantes, además de los obstáculos asociados a estos.

Palabras clave: Variable aleatoria, teoría de situaciones didácticas, situación didáctica, carácter funcional

Abstract

This study tackles the way the random variable concept is taught from its functional feature in secondary education, by taking into account theoretical elements from the theory of didactical situations. From a qualitative paradigm, the informant subjects were 22 students (15 to 16 years old) from a Chilean school. The data collection instrument was a didactic situation on a random variable, whose prior analysis allowed us to define categories for its study. The results evince mathematical concepts and the different kinds of representational systems used by the students, besides the obstacles associated with them.

Keywords: Random variable, theory of didactical situations, didactic situation, functional feature

1. Introducción

En los últimos veinticinco años, el tratamiento de la probabilidad se ha ido incorporando progresivamente a lo largo de los distintos niveles educativos del currículo de matemáticas en gran parte de los países desarrollados (Vásquez y Alsina, 2014). En este contexto, uno de los contenidos fundamentales respecto al aprendizaje de la probabilidad en educación secundaria es el de variable aleatoria, lo que se justifica gracias a su utilidad para comprender otros temas vinculados a ella como el de función de probabilidad, de distribución y variados modelos teóricos como la distribución normal.

Diversos autores (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016; Heitele, 1975;) proponen a la variable aleatoria entre los conceptos fundamentales en la enseñanza de la probabilidad, posicionándola como un conocimiento esencial y relevante de la educación escolar, para entender situaciones de la vida real.

De esta forma, el lugar de la probabilidad se ha consolidado curricularmente y ha establecido nuevos desafíos para el campo de investigación en didáctica de la probabilidad. Particularmente, el estudio de la variable aleatoria es un tema que juega

Bizet, V. y Ramos, E. (2019). Una experiencia de enseñanza para abordar la variable aleatoria con estudiantes de secundaria. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

un papel a nivel internacional (NCTM, 2000) y local, por ejemplo, en Chile, su tratamiento empezó a estar a nivel escolar (como función) en el sistema escolar desde el año 2009 (MINEDUC, 2009). Aun así investigaciones alertan dificultades en su comprensión a nivel escolar.

Para Jiménez y Rupin (2013) algunos errores de estudiantes de secundaria pueden provenir de una inadecuada comprensión del concepto de función. Para Pérez y Parraguez (2013) la variable aleatoria al ser enseñada en el nivel secundario presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas, existiendo "poca claridad de la noción de variable aleatoria, lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio)" (p. 590). Además, desde la perspectiva de la epistemología de la matemática, para Ruiz (2006) los estudiantes evidencian "dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad" (p.156).

Según Landín y Salinas (2016), en su investigación centrada en describir el desempeño de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas de libro de textos, antes y después de un periodo de enseñanza-aprendizaje, pocos estudiantes lograron identificar y representar una variable aleatoria mediante notación algebraica -en el sentido de lenguaje simbólico-.

Bajo este escenario, nuestro estudio aborda la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes de educación secundaria para comprender la naturaleza funcional del concepto variable aleatoria. Para ello planteamos como objetivo diseñar, implementar y analizar los datos de la puesta en práctica de una propuesta de enseñanza, considerando como fundamento teórico elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007).

A continuación se describe el marco teórico utilizado, resaltando los elementos de la teoría de situaciones didácticas aplicados. Posteriormente, se detalla la metodología empleada en el proceso de implementación, el instrumento utilizado y los sujetos informantes. Luego damos a conocer la sección de descripción y discusión de resultados y finalmente, se concluye con algunas reflexiones finales.

2. Marco teórico

La teoría de situaciones didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (2007), busca indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes profesor- estudiantes- saber y sus interacciones, focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica vinculada a la construcción del conocimiento matemático. Para Brousseau (2007), "una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado" (p. 17). En nuestro contexto, educación escolar, consideramos una situación como un entorno del estudiante diseñado y manipulado por el profesor, que pretende ser utilizado como una herramienta en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Uno de los conceptos fundamentales de esta teoría es el de situación a-didáctica, referida a la situación donde el sujeto (estudiante) aprende por interacción con el medio, sin intervención del profesor, cuyo propósito es poner en juego los conocimientos antiguos y generar en los estudiantes la necesidad de aprender algo nuevo. No obstante, como el estudiante no siempre logra resolver cualquier situación a-didáctica, es el profesor quien debe identificar aquellas que están a su alcance. En este caso, la situación o problema elegida por el profesor, que lo involucra a él en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio, se denomina situación didáctica (Brousseau, 2007). De esta manera, una situación a-didáctica es parte de una situación didáctica.

Brousseau (2007), introduce tres tipos principales de situaciones que conducen gradualmente al estudiante a especificar el conocimiento utilizado para resolver un problema: situación de acción, situación de formulación y situación de validación.

1. Situación de acción: el estudiante interactúa por primera vez con el medio, intenta dar respuesta al problema propuesto poniendo en acción sus conocimientos previos y organizando una estrategia.
2. Situación de formulación: esta situación relaciona al menos dos estudiantes con el medio. El estudiante comunica a sus compañeros de equipo la estrategia de resolución y discuten entre pares para generar una estrategia común.
3. Situación de validación:

> En este tipo de situación, los alumnos (…) aprenden cómo convencer a los demás (…). Las razones que un alumno puede dar para convencer a otro, o las que pueda aceptar para cambiar de punto de vista, serán aceptadas progresivamente, construidas, puestas a prueba, debatidas y convenidas (Brousseau, 2007, p. 23).

Las tres situaciones descritas anteriormente, conforman una situación a-didáctica. El producto de esta situación es un conocimiento, que interpretamos como una estrategia que permite resolver el problema. En estas instancias, el profesor debe restringirse a alentar al estudiante a resolver el problema, hacer que este reconozca las acciones que puede realizar sobre el medio y decida si pudo lograrlo.

Finalizada la situación a-didáctica, se lleva a cabo una situación de institucionalización, proceso en que el profesor debe explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por el estudiante en dicha situación y el saber que desea enseñar. La interacción entre situación a-didáctica y didáctica descrita previamente se puede apreciar en la Figura 1.

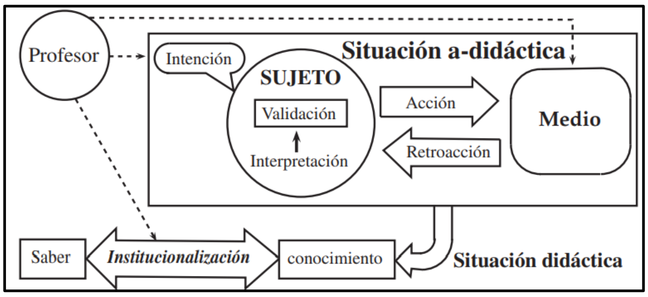


Figura 1. Relación entre situación a-didáctica y situación didáctica (Acosta, Monroy y Rueda, 2010, p. 177)

Otro elemento importante de esta teoría es el concepto de devolución, comprendido como "acto por el cual el profesor hace que el estudiante acepte la responsabilidad de un problema cuya respuesta desconoce y acepte el mismo las consecuencias de esta transferencia" (Brousseau, 2007, p. 87).

3. Metodología

Este estudio se aborda por medio de un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Los sujetos informantes fueron 22 estudiantes de 2° grado de secundaria (15 a 16 años) de un establecimiento educacional subvencionado de la región de Valparaíso (Chile), esta muestra fue por disposición. Como instrumento de recogida de datos se empleó una situación didáctica sobre la variable aleatoria (ver Figura 2) y un video de su implementación, la clase tuvo una duración de 90 minutos. Se desarrolló un análisis a priori de la situación didáctica.

Desafío

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de apoderados	8	13	7	2
Número de estudiantes	1	2	3	4

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero éstas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por

A: el conjunto de 30 apoderados del taller.

B: el conjunto de cantidad de estudiantes.

C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación.

Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

Figura 2. Instrumento de recogida de datos

La situación didáctica propuesta, expuesta en la Figura 2, tiene como propósito abordar el concepto de variable aleatoria enfatizando su carácter funcional. Por ello, la intención es que los estudiantes logren reconocer y representar las relaciones entre los conjuntos A y B y entre los conjuntos B y C, para posteriormente darles a conocer que en el contexto de probabilidad esas relaciones son funciones y reciben el nombre de variable aleatoria y función de probabilidad, respectivamente. De esta manera, se pretende introducir al escolar en el estudio de nuevos conceptos probabilísticos, a saber, el de variable aleatoria y su vínculo directo con la función de probabilidad.

Tabla 1. Categorías de análisis en la situación de acción

Categoría	Descripción	Concepto matemático
C_1: El estudiante identifica el espacio muestral asociado al experimento.	El estudiante determina todos los elementos del conjunto A como una colección de elementos, representado por ejemplo A= {apoderado1, …, apoderado 30}	Exprimento aleatorio y espacio muestral
C_2: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral según la característica del problema.	El estudiante agrupa los elementos del espacio muestral según la cantidad de estudiantes que posee un apoderado.	Partición de un conjunto y suceso compuesto
C_3: El estudiante identifica que los elementos del conjunto C son probabilidades.	El estudiante identifica los cuatro elementos del conjunto C y expresa la probabilidad de ocurrencia de cada suceso.	Definición clásica de probabilidad: asignación de probabilidad
C_4: El estudiante identifica que la relación entre los conjuntos A y B está representada en la tabla dada.	Es estudiante afirma que el conjunto A está representado en la primera fila de la tabla y el conjunto B en la segunda fila.	Función: dominio y recorrido

En relación a la técnica para extraer información se empleó el de análisis de contenido (Flick, 2004), para analizar el contenido de las respuestas de las producciones entregadas por los estudiantes, poniendo atención a los conceptos matemáticos y representaciones elegidas por los estudiantes para resolver el desafío. La simplificación de contenidos a categorías es de acuerdo a algunos elementos de la TSD respecto a la situación de acción y situación de formulación del desafío diseñado, pues es donde el estudiante tiene un mayor rol protagonista.

En la situación de acción el procedimiento se realiza a partir de la identificación preliminar de elementos conceptuales que pueden contribuir a la resolución del desafío. Estos conceptos matemáticos posibilitaron establecer cuatro categorías de análisis (ver Tabla 1).En la situación de formulación, se procede con base en el reconocimiento de las posibles estrategias de resolución del desafío. Se determinaron tres posibles estrategias de resolución, que hicieron posible establecer seis categorías de análisis (ver Tabla 2).

Tabla 2. Categorías de análisis en la situación de formulación

Categoría	Descripción	Estrategia de resolución
C_5: El estudiante identifica y registra en lenguaje natural la relación entre los conjuntos A y B	El estudiante expresa en lenguaje cotidiano la característica o cualidad que permite vincular a cada suceso (elemental) con un valor numérico.	Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural
C_6: El estudiante representa la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje figural	El estudiante utiliza un diagrama sagital o esquema en el que representar los conjuntos A y B y relaciona cada elemento del conjunto A (suceso elemental) con un único elemento de B (valor de la variable {1,2,3,4})	Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural (diagrama sagital o esquema)
C_7: El estudiante representa la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje tabular.	El estudiante realiza una tabla de valores donde la primera columna corresponde al número de apoderados y la segunda columna al número de estudiantes	Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular
C_8: El estudiante identifica y registra en lenguaje natural la relación entre los conjuntos B y C	El estudiante expresa en lenguaje cotidiano la correspondencia que permite asignar a cada valor de la variable aleatoria un valor de probabilidad.	Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural
C_9: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos B y C en lenguaje figural	El estudiante utiliza un diagrama sagital o esquema en el que representar los conjuntos B y C y relaciona cada elemento del conjunto B (valor de la variable aleatoria {1,2,3,4}) con un único elemento de C (valor de probabilidad)	Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural (diagrama sagital o esquema)
C_{10}: El estudiante representa la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje tabular	El estudiante realiza una tabla de valores donde la primera columna corresponde al número de estudiantes y la segunda columna a la probabilidad asociada.	Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular

4. Descripción de los resultados

Las respuestas a la situación didáctica de cinco grupos de estudiantes organizados como: G_1 (5 estudiantes), G_2 (5 estudiantes), G_3 (4 estudiantes), G_4 (3 estudiantes) y G_5 (5 estudiantes), fueron clasificadas en las diez categorías anteriormente expuestas (ver Tabla 1 y Tabla 2). Cabe mencionar que este proceso se realizó a partir de estrategias dadas por grupos de alumnos, posterior a que fueron planteadas algunas devoluciones por parte del docente.

4.1. Situación de acción

Inicialmente cuatro grupos (G_1, G_2, G_3 y G_5) identificaron como espacio muestral la cardinalidad de los cuatro sucesos elementales que lo conforman (cantidad de apoderados según número de estudiantes matriculado), como se aprecia en la Figura 3, observándose la identificación y la partición incorrecta del espacio muestral.

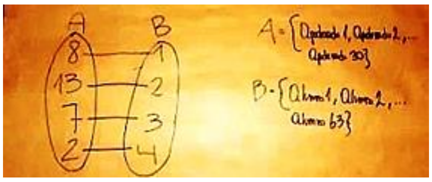


Figura 3. Identificación del espacio muestral de G_5 antes de plantear devolución al curso

El profesor realizó las devoluciones prevista en el plan de clase como ¿Cuántos apoderados tienen inscritos en el taller a estudiantes? ¿Cuáles son los elementos del conjunto?, estas preguntas permitieron a los estudiantes a identificar su error. Luego, fue posible clasificar a cuatro grupos en la categoría C_1, aunque dos de ellos (G_1 y G_4), identificaron el espacio muestral asociado al experimento como una colección de números (ver Figura 4).

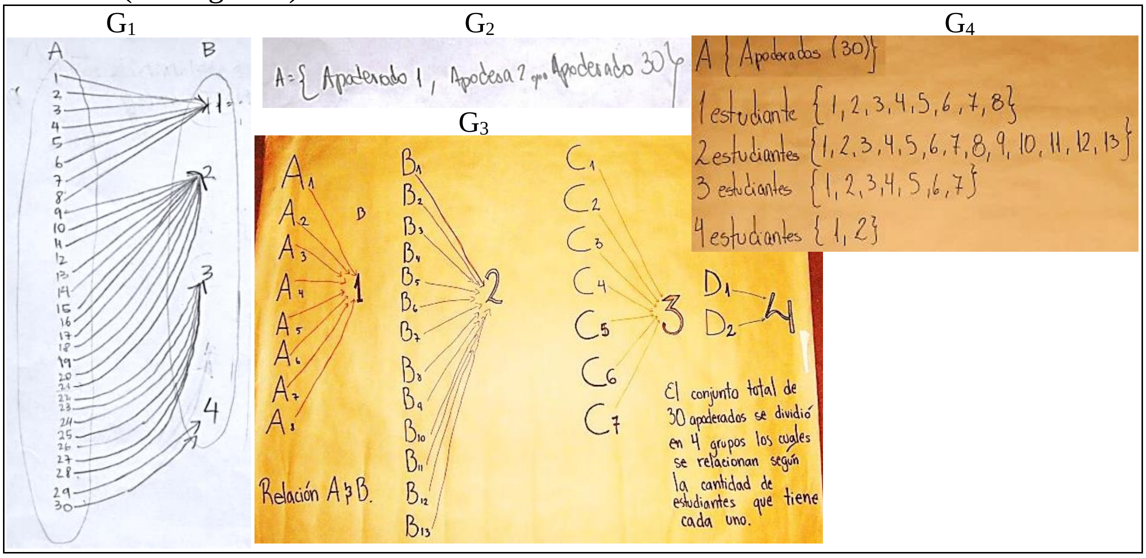


Figura 4. Identificación del espacio muestral en los grupos después de plantear devolución al curso

Además en la situación de acción, solo tres grupos (G_1, G_2, G_4) identificaron que el conjunto C está compuesto por las probabilidades de los sucesos elementales y las determinaron, clasificándolos en la categoría C_3. Dos grupos (G_2 y G_4) representaron las probabilidades a través de porcentajes y un grupo (G_1) como cociente entre el número de casos favorables del suceso y número de casos posibles, según se expone en la Figura 5.

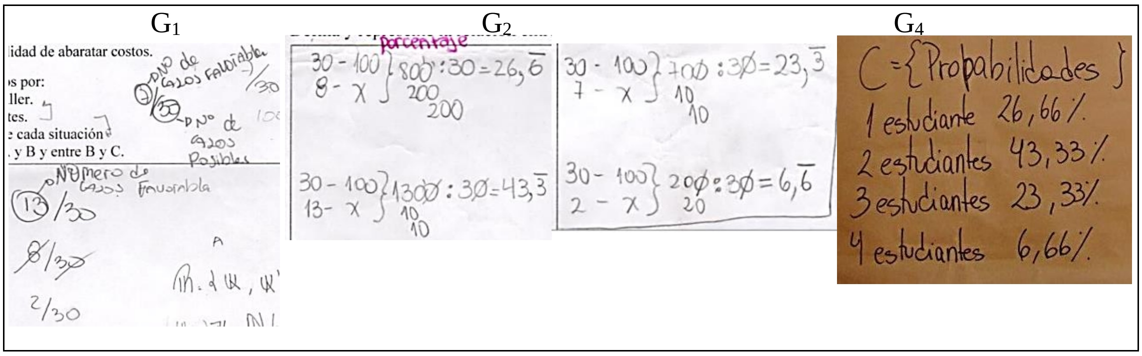


Figura 5. Identificación del conjunto C en los grupos

4.2. Situación de formulación

En la segunda situación, solo tres grupos (G_1, G_2, G_3) identificaron en el desafío la variable aleatoria, y dos de ellos (G_1 y G_3) representaron la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje natural (C_5) y lenguaje figural (C_6) a través de un diagrama sagital o esquema. Además solo un grupo (G_2) representó dicha relación a través de una tabla (C_7), como se muestra en la Figura 6.

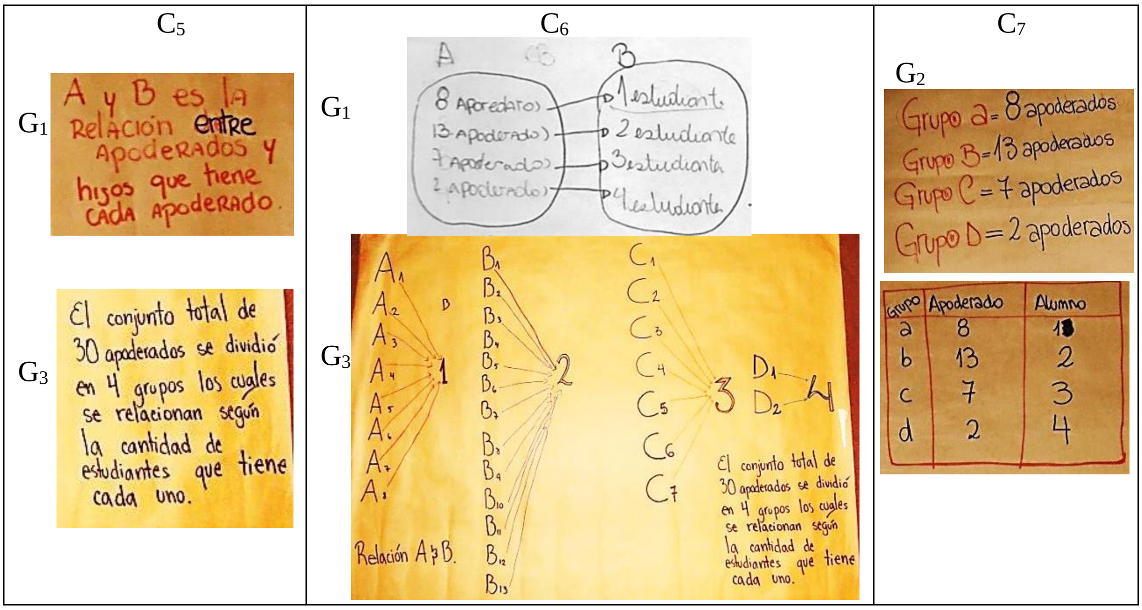
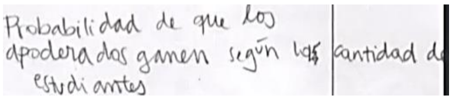


Figura 6. Identificación de la relación entre los conjuntos A y B en los grupos

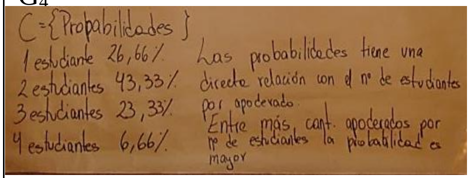
También en la situación de formulación, sólo tres grupos (G_1, G_2 y G_4) reconocieron la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria, y dos de ellos (G_1 y G_4) representaron la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje natural (C_8). Además el grupo G_1 representó la relación en lenguaje figural mediante un diagrama sagital (C_9), (ver Figura 7). Es importante destacar que la respuesta del grupo G_2, Figura 7 (derecha), fue clasificada en la categoría C_{10}, ya que se identificaron en ella elementos de la estrategia 2, como el hecho de que una de las columnas de la tabla corresponde a la probabilidad, aunque en la tabla representaron la función compuesta entre el espacio muestral y la probabilidad.

C_8

G_1

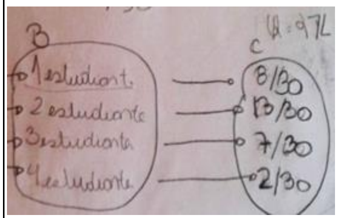


G_4



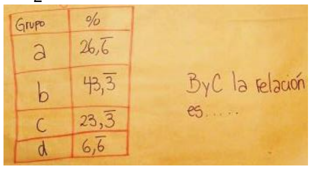
C_9

G_1



C_{10}

G_2



"Por ejemplo la probabilidad de un apoderado que tiene un hijo gane la rifa".

Figura 7. Identificación de la relación entre los conjuntos B y C en los grupos

4.3. Situación de validación

En la tercera situación, tres grupos seleccionados por el profesor explicaron al grupo curso la estrategia empleada para resolver el desafío, el primer grupo (G_3) y segundo grupo (G_2) con respuestas incompletas y el tercer grupo (G_1) con respuesta completa correcta. El profesor moderó la discusión del grupo curso, fue haciendo preguntas a cada grupo con el objetivo de que quedara en evidencia las estrategias usadas por ellos, sus diferencias y similitudes, como por ejemplo ¿cómo determinaron la(s) relación(es)?, ¿cómo encontraron los elementos del conjunto C?, ¿es posible representar en un solo esquema / dibujo/ tabla las dos relaciones?, ¿existe alguna diferencia o similitud entre esta estrategia y la del grupo G_1/ G_2/ G_3? El grupo curso logró consensuar que la respuesta correcta al desafío es la propuesta por el grupo G_1.

4.4. Situación de institucionalización

En la cuarta situación, el profesor utilizó la estrategia propuesta por el grupo G_1 y a partir de las ideas que propusieron previamente los estudiantes, mostró la correspondencia entre elemento de los conjunto A y B y entre los elementos de los conjunto B y C. Luego el profesor planteó al grupo de curso las siguientes interrogantes: ¿La relación entre los elementos de dos conjuntos del desafío podría ser una función?; ¿Por qué? ;¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función? Una de las justificaciones propuesta por los grupos G_1 y G_2 fue que, "la relación entre el conjunto A y B es función, porque a cada elemento del conjunto de partida, conjunto A, le corresponde un único elemento del conjunto de llegada, conjunto B, lo mismo ocurre entre los conjunto B y C". El profesor basado en las ideas que surgieron desde los estudiantes, institucionaliza los conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad.

5. Discusión de los resultados

Este estudio cualitativo es una contribución al campo de la didáctica de la probabilidad, en tanto indaga los distintos conceptos matemáticos y estrategias puestas en juego por estudiantes de secundaria para abordar una situación didáctica sobre la variable aleatoria, como función.

Los estudiantes al abordar el desafío propuesto, inicialmente presentaron dificultad para identificar elementos del espacio muestral, como también se evidencia en el trabajo de

Batanero (2001), luego que el profesor realizó la devolución prevista en el plan de clase ellos lograron superar esta dificultad.

Sobre los tipos de sistemas de representación usados por los estudiantes para representar la variable aleatoria asociada al desafío, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Respecto a la construcción de tablas, Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora (2011) afirman que genera un obstáculo cuando los estudiantes agrupan los elementos del espacio muestral en subconjuntos excluyentes para generar una partición. Persiste la idea de que la relación que se busca establecer se da en términos de los valores de la variable aleatoria con los cardinales de los subconjuntos correspondientes de la partición. A partir de los resultados de este estudio, concordamos con lo señalado por dichos autores, pues un grupo de estudiantes (G_2) al utilizar una tabla para representar la relación entre el recorrido de la variable aleatoria (conjunto B) y el conjunto de probabilidades que esta toma en cada uno de sus posibles valores (conjunto C) presentó dificultad, ya que en realidad representó la función compuesta entre el espacio muestral (conjunto A) y las probabilidades (conjunto C).

Acerca del uso de diagramas sagitales para la representación de la partición del espacio muestral, Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora (2011) señalan que generan dificultades, ya que lo que se ilustra en ellos son la correspondencia si acaso la relación de dependencia entre magnitudes o variables. Nuestros resultados se contraponen con la afirmación anterior, pues a dos grupos (G_1 y G_3) el uso de diagrama sagital, les permitió realizar la correcta partición del espacio muestral, luego representar la relación de correspondencia entre elementos del conjunto A y elementos del conjunto B y finalmente a uno de estos grupo (G_1) les ayudó a reconocer que dicha relación es una función, recordando el concepto de función real.

6. Conclusiones

Según señalamos en la introducción, diversos autores (Jiménez y Rupin 2013; Pérez y Parraguez, 2013; Ruiz, 2006;) alertan de las dificultades en la comprensión de la variable aleatoria, principalmente asociadas a su significado función. La propuesta de enseñanza presentada, aborda dicho concepto enfatizando en su carácter funcional, además admite diversas estrategias de resolución, cada una asociada a un diferente registro de representación de la variable aleatoria, lo cual puede contribuir a que los estudiantes comprendan el concepto en cuestión.

Se aprecia una tendencia en los resultados en relación a confirmar la presencia de dificultades reportadas previamente en la literatura relacionada con la comprensión de la variable aleatoria. En particular, los alumnos de 2° grado de secundaria al enfrentarse a una situación didáctica sobre variable aleatoria presentaron dificultad en identificar elementos del espacio muestral, como también se evidencia en el trabajo de Batanero (2001).

Además se pudo observar, el importante rol que cumple el profesor en las instancias de realizar las devoluciones previstas en el plan de clase, pues al comienzo los estudiantes identificaban incorrectamente el espacio muestral y las preguntas planteadas por el profesor, guió el trabajo de los estudiantes y permitió subsanar la dificultad.

En relación a la respuesta, los estudiantes emplearon diferentes estrategias de resolución: representar la variable aleatoria y/o función de probabilidad en lenguaje natural, en lenguaje figural o en lenguaje tabular, las cuales fueron previstas en el análisis a priori desarrollado al desafío. La mayoría de las respuestas fueron parcialmente correctas, pues gran parte de los grupos representaron solo una relación, la variable aleatoria asociada al desafío o en un caso solo la función de probabilidad.

Finalmente, es posible concluir que el desafío diseñado es una buena situación didáctica, la que permitió al profesor abandonar su rol de comunicador del saber y a los estudiantes construir su propio conocimiento como una experiencia grupal y colaborativa, con la cual el docente podrá conectar el saber institucional. De esta forma, la proyectamos como un recurso valioso para profesores en ejercicio o formación, que tengan la tarea de enseñar este concepto.

7. Referencias

Acosta, M., Monroy, L. y Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración Escuela de Matemáticas*, *28*(2), 173–189

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability.* New York: Springer.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Fernández, F., Andrade, L., Montañez, J., Beltrán, J. y Zamora, S. (Junio, 2011*).* Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria. Comunicación presentada en la XIII *Conferência Interamericana de Educação Matemática* (XIII CIAEM), Recife, Brasil.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa.* Madrid: Ediciones Morata.

Heitele, D. (1975). Un punto de vista epistemológico sobre las ideas fundamentales estocásticas. *Estudios de la Educación en Matemáticas,* 6, 187-205.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Jiménez, L. y Rupín, P. (2013). *Matemática 2° medio guía didáctica del docente*. Santiago: Ediciones SM.

Landín, P. y Salinas, J. (2016). Probabilistic reasoning of high school students on sample space and probability of compound events. Trabajo presentado en el *13th International Congress on Mathematical Education*. Hamburgo, Alemania: ICMI.

MINEDUC (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*.Ministerio de Educación: Chile.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorios y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 589-598.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria.* Tesis de maestría. Universidad de Granada.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números,* 85, 5-23.