Indagando en la asignación de probabilidades en situaciones de incertidumbre por estudiantes de educación básica

Exploring the assignment of probabilities in situation of uncertainty by elementary student

Sergio Tapia Muñoz y Hugo Alvarado Martínez

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

Resumen

En este trabajo se analizan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en 331 estudiantes de primaria, por medio de un cuestionario de cinco ítems cerrados y se examinan las argumentaciones en un ítem abierto. Los resultados muestran una alta variación en la intuición probabilística en situaciones cotidianas y la existencia de intuiciones correctas e incorrectas de los estudiantes. Consideramos pertinente para la enseñanza de la probabilidad en este nivel profundizar en un acercamiento a la comprensión de experiencias de incertidumbre mediante la estimación de valores de probabilidad como grado de creencia personal.

Palabras clave: Probabilidad, incertidumbre, intuición, educación básica.

Abstract

In this paper probabilistic intuitions and heuristics are analyzed in 331 elementary school students by through a questionnaire with five closed items and the arguments in an open item are examined. The results show a high variation in the assignation of the probabilities in daily situation and the existence of correct and incorrect intuitions by the student. It is relevant to teach probabilities in this level to deepen into approaching the comprehension of uncertain experiences about and estimating the probability as a degree of personal belief.

Keywords: Probability, uncertainty, intuition, elementary student

1. Introducción

La enseñanza de la probabilidad en la etapa escolar generalmente no ~~se~~ atiende a las ideas informales y creencias que tienen los alumnos sobre las probabilidades (Kahneman y Tversky, 1972). Más aún, aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018). Una dimensión de indagación en educación estadística es estudiar las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico; en particular, investigar cómo las personas hacen juicios y toman decisiones cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre (Garfield y Ben-Zvi, 2008). En este trabajo se evalúan las intuiciones y heurísticas sobre probabilidad de un grupo de estudiantes de primaria (12 y 13 años) en situaciones de incertidumbre, analizando las respuestas a un cuestionario de cinco ítems y se analizan las soluciones de un ítem abierto.

2. Marco de referencia

2.1. Razonamiento probabilístico

Fischbein (1987) considera como un serio error no considerar la confianza que tienen los estudiantes en sus intuiciones, sugiriendo que hay que tomar conciencia en que se

Tapia, S. y Alvarado, H. (2019). Indagando en la asignación de probabilidades en situaciones de incertidumbre por estudiantes de educación básica. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

poseen intuiciones correctas y útiles, y que deben lograr ser capaces de controlar nuestras intuiciones de forma de llegar a comprender (asimilar) de manera adecuada las estructuras formales propias del razonamiento lógico. Fischbein y Schnarch (1997) sugerían que en el aprendizaje de la probabilidad los estudiantes debían crear nuevas intuiciones, y la enseñanza debía proveer de experiencias en que los estudiantes confrontasen sus esquemas intuitivos primarios y las causas de los conflictos y errores en los tipos de razonamiento específicos a las situaciones probabilísticas.

Nisbett y Ross (1980) señalan que es posible adquirir un correcto razonamiento estadístico intuitivo sobre conceptos abstractos, tales como la Ley de los grandes números y aplicarlo para resolver problemas cotidianos, siempre que reconozcamos la situación como aleatoria. Kahneman, Slovic y Tversky (1982) afirman que las heurísticas y sesgos son resistentes a la enseñanza e incluso se observa en sujetos con alta preparación matemática. Estos autores describen los sesgos de razonamiento que ocurren como resultado de un proceso cognitivo, como la heurística, que lleva a una solución inmediata del problema, pero no garantiza que la solución sea correcta, bien por usar un modelo inapropiado de la situación o por falta de estructuras cognitivas específicas. Una heurística puede entenderse como la estrategia utilizada por las personas al emitir un juicio, realizar una estimación, tomar una decisión, entre otras acciones, para descomplejizar un problema pero basándose en información limitada. Así, a través de heurísticas, las personas reducen la complejidad de calcular probabilidades y predecir valores, pero al no contar con toda la información requerida se producen sesgos de razonamiento en el juicio o decisión que se adopta.

2.2. Significados de la probabilidad

Gómez, Contreras y Batanero (2015) indican que la probabilidad, desde su emergencia, ha estado sujeta a diferentes interpretaciones y debates filosóficos que todavía continúan y se relacionan con la concepción y definición del azar en diferentes periodos históricos (Batanero, 2005, 2016; Batanero y Díaz, 2007; Borovcnik y Kapadia, 2014). Batanero (2005) realizó una caracterización de los diferentes significados de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Analiza los diferentes elementos de campos de problemas, procedimientos, lenguaje, propiedades y conceptos relacionados a los cinco significados de la probabilidad. A saber, significado de la probabilidad intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Este estudio aborda principalmente el significado intuitivo.

Significado intuitivo de la probabilidad. Las ideas intuitivas de probabilidad, como grados de creencia personal, es común encontrarlas al enfrentarse en diversos juegos de azar y también expresadas en noticias y en anuncios publicitarios a través de los medios de comunicación. Batanero (2005) indica que las ideas intuitivas sobre el azar aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, quienes usan frases y expresiones coloquiales como posible, previsible, presumible, para “cuantificar” sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos.

Significado frecuencial de la probabilidad. Al recoger datos a través de la experimentación, es posible determinar la probabilidad de un suceso mediante las frecuencias relativas. En este sentido, la probabilidad se define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad en las mismas condiciones del experimento aleatorio. Un aspecto importante en este enfoque es comprender la diferencia entre probabilidad teórica (valor teórico determinado) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). Este significado se presenta como la Ley de los Grandes Números. En este trabajo aportamos a investigaciones anteriores enfocándonos en el significado intuitivo que apenas ha sido considerado en la enseñanza de la probabilidad de la educación básica y del significado frecuencial (ítem 5). A continuación, describimos la metodología y los resultados obtenidos.

3. Metodología

Seis ítems fueron propuestos a una muestra constituida por 331 estudiantes de segundo ciclo escolar de primaria (156 alumnos de 12 años y 175 alumnos de 13 años). Los ítems 1 y 4 se seleccionaron de los estudios de Kahneman y Tversky (1972), el ítem 2 presenta relaciones de causalidad (Pollatsek, Well, Konold, Hardiman y Cobb, 1987; Tversky y Kahneman, 1974), el ítem 3 es una adaptación del problema de Gardner (1959) y hace mención a la confusión de probabilidades del producto y condicional. El ítem 5 estudia la frecuencia relativa de un suceso al aumentar el número de repeticiones y el ítem 6 fue elaborado por los autores. Un cuestionario más amplio que incluye estos ítems fue evaluado por cuatro especialistas de estadística y didáctica de la estadística y aplicado a estudiantes de 18 y 19 años (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018). Cabe señalar, que pretendemos explorar las intuiciones de los estudiantes de nivel escolar sobre estos ítems, que posteriormente en el nivel superior son formalizadas sus soluciones. A continuación, se describen los cinco ítems que presentan situaciones referidas a la estimación de probabilidad en escala ordinal con apreciación de 0 a 100.

Ítem 1. Visitar un hospital, seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino.

Este ítem puede ser relacionado con el experimento del lanzamiento de una moneda situando el cálculo de la probabilidad de que sea sello (masculino). Se tiene el espacio muestral Ω = {femenino, masculino} = {cara, sello} y la P(sello) = ½. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar un bebé varón corresponde a un 50%. También, otro argumento tiene en consideración que en Chile existen *más nacimientos de hombres que de mujeres*; el año 2016 de los 231.749 nacimientos un 50,83% correspondieron a varones y 49,15% a mujeres (Informe del Instituto Nacional de Estadística INE, 2018). Se espera entonces que la posibilidad de encontrar un bebé hombre esté entre 50 y 60 cada 100 nacimientos.

Ítem 2. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero.

Estudios que han explorado este tipo de preguntas han coincidido en que los encuestados generalmente se dejan llevar por un razonamiento causal (Pollatsek, et al. 1987; Tversky y Kahneman, 1980) cuantificando con un alto grado de probabilidad este tipo de pregunta. Cuando la probabilidad condicional es presentada en contextos sociales, el conocimiento previo de los eventos puede interferir con el cálculo de las probabilidades, especialmente si no hay una clara comprensión e interpretación del lenguaje condicional (Batanero, 2009). En este caso se espera que los estudiantes utilicen un razonamiento causal, estimando que en Chile es muy valorada la profesión de ingeniero se espera una asignación alta sobre el valor 75 (valor consensuado de la profesión de 79% por CONICYT, 2016).

Ítem 3. Una familia se proyecta tener tres hijos, ¿qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?

La solución del ítem 3 evoca la independencia de sucesos que se define mediante la regla del producto. Este ítem puede relacionarse con el experimento aleatorio de lanzar tres monedas y calcular la probabilidad que sea cara la primera moneda, cara la segunda y sello la tercera moneda. Al definir los sucesos A_i: el hijo i-ésimo es hombre, con $i = 1, 2, 3$ se determina la probabilidad que en un matrimonio con tres hijos los dos primeros sean varones y el tercero mujer, $P(A_1 \cap A_2 \cap A^c_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A^c_3) = ½ \times ½ \times ½ = 1/8$, esto es, 0,125 o 12,5%. Para este ítem se espera una asignación de a lo más 20.

Ítem 4. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formados de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.

El ítem 4 evalúa la heurística de la disponibilidad a través de un razonamiento combinatorio dada la situación que un profesor con 10 estudiantes dice obtener más grupos distintos de 2 estudiantes que de 8 estudiantes. Se espera una asignación baja, de valor a lo más 10, en correspondencia con los resultados de Tversky y Kahneman (1974) y Salcedo y Mosquera (2008). En efecto, de 10 estudiantes se obtiene la misma cantidad de grupos, sean de dos o de ocho estudiantes, es decir: $\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45$ y $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!8!} = 45$

Ítem 5. En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?

Asimismo, la solución del ítem 5 requiere relacionar la ley de los grandes números con la situación del experimento de las monedas, pues esta ley plantea que a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso tiende a su probabilidad teórica. La probabilidad de que al lanzar tres monedas, todas sean caras es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Así, aproximadamente un 12,5% de las 1000 personas del salón obtienen tres caras al lanzar las monedas. Se espera una asignación a lo más de 20.

Ítem 6. Resuelva. En una encuesta de opinión se consulta a tres alumnos del colegio si están o no de acuerdo con la portada de la página web del colegio. ¿Qué tan probable es que uno de los tres alumnos esté de acuerdo?

Este ítem tiene como finalidad medir y conocer los argumentos y razonamientos de los estudiantes, para ello es necesario que puedan visualizar el espacio muestral de la siguiente manera: Ω={AAA, AAN, ANA, NAA, ANN, NAN, NNA, NNN}. Es decir, los estudiantes deben señalar las ocho posibilidades y determinar las opciones que uno acepte el modelo de la página web del colegio, B= {ANN, NAN, NNA}. Así, para encontrar la probabilidad de que uno de los tres alumnos esté de acuerdo, debemos aplicar la fórmula de Laplace o probabilidad clásica: $P(B) = \frac{Nº\ de\ casos\ favorables}{Nº\ de\ casos\ posibles} = \frac{3}{8} = 0{,}375$. La probabilidad de que uno de los tres estudiantes esté de acuerdo con el diseño de la página web del colegio es de un 37,5% siendo esta la repuesta correcta de esta situación problemática, y luego lo esperado es una asignación de valor entre 30 y 40.

4. Resultados

El estudio inicial acerca de la asignación de probabilidades intuitivas se realizó con 331 estudiantes de primaria. La aplicación de un cuestionario fue contestada con lápiz y papel en una sesión de la jornada de la mañana en un establecimiento educacional. En lo que sigue se muestran los resultados de cada enunciado del ítem, representado en gráficos de barras con valores de asignación de probabilidad.

Ítem 1. *Visitar el hospital de Concepción, seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino*. En la Figura 1 se puede apreciar que un 71,9% de los estudiantes asignan un valor de 50 de probabilidad de elegir un bebé en el hospital y que sea varón. Como primera opción asignaron ½ al considerar que el espacio muestral es equiprobable (niña y niño). Tversky y Kahneman (1974) señalan que, ante este tipo de preguntas de simples respuestas, existe un sesgo predecible, en donde las personas obvian los datos estadísticos reales, para esta situación en Chile los recién nacidos correspondieron a un 50,83% fue para hombres y un 49,15% a mujeres (Informe INE, 2018). Se puede apreciar también que solo el 14,4% de los encuestados consideraron una opción bajo el valor 50.

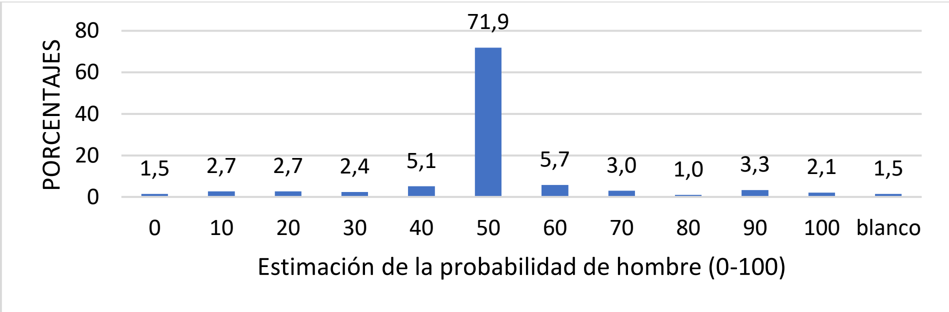

Figura 1. Porcentaje de respuestas al ítem 1 según estimación de la probabilidad *n* = 331 (respuesta esperada de 50)

Ítem 2. *Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero*. La Figura 2 indica que un 18,3% de los estudiantes exhiben un razonamiento causal, asignando valores al menos de 80 de la ocurrencia del suceso que un hijo sea ingeniero si su padre es ingeniero.

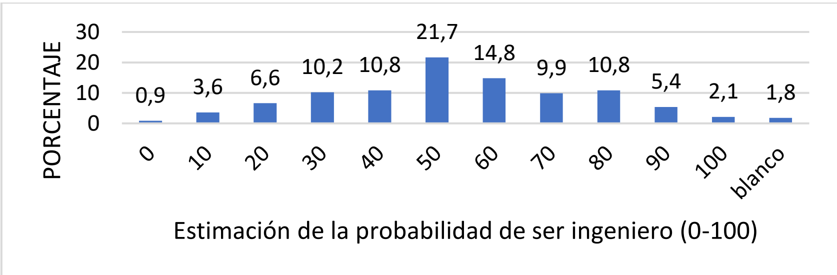

Figura 2. Porcentaje de respuestas al ítem 2 según estimación de la probabilidad *n* = 331 (respuesta esperada sobre 75)

Las respuestas de los estudiantes no concuerdan con lo que señala Pollatsek, et al. (1987), que indica que la mayoría de los encuestados encontraban altamente probable esta situación. Cabe señalar, que el 21,7% de los estudiantes asignaron un valor de 50 a este evento y un 32,1% del grupo asignó valores bajo 50. En consecuencia, los estudiantes de este nivel educativo no utilizan un razonamiento causal al estimar la probabilidad bajo la condición que el padre es ingeniero.

Ítem 3. *Una familia se proyecta tener tres hijos, ¿qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?* Se observa en la Figura 3 que el 25,6% de los estudiantes asigna erróneamente un valor de 50 a la probabilidad de ocurrencia de que el tercer hijo sea de sexo femenino, esta elección según Contreras, Batanero, Arteaga y Cañadas (2014) se debe a que la primera opción es elegir entre si es hombre o mujer, asignando el valor de ½ como sucesos independientes. Fox y Levav (2004) señalan que en problemas como este ítem existe confusión entre la probabilidad condicional y conjunta que puede llevar a que se cometa tal error. Es importante considerar que el 65,9% de los estudiantes asignaron un valor de probabilidad igual o inferior a 40. El 0,9% de los alumnos asignó un valor de 100 que el tercer hijo sea mujer. Un 20,7% de quienes respondieron el cuestionario asigna un valor igual o inferior a 20 de probabilidad. La respuesta correcta es de 1/8 o 0,125 al considerar la probabilidad del producto y la independencia de sucesos. La Figura 3 nos muestra que sólo un 18,3% de los estudiantes asignan valores entre 10 y 20. Otra dificultad que produjo errores es que no haya total comprensión de lo que se está leyendo en la información que el ítem proporciona, ya que tal como ocurrió en la investigación de Pollatsek et al. (1987) consideró que varias de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional puede ser por como son redactados los enunciados.

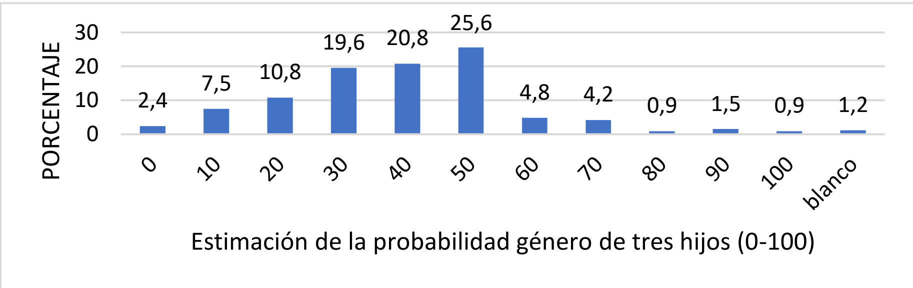

Figura 3. Porcentaje de respuestas al ítem 3 según estimación de la probabilidad n = 331 (respuesta esperada bajo 20)

Ítem 4. *Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formados de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.* Se observa en la Figura 4 que sólo un 4,2% de los estudiantes asignaron un valor menor o igual a 10, lo cual es cercano a la solución correcta utilizando la definición de combinatoria para indicar que hay la misma cantidad de subgrupos tomados de dos que de ocho estudiantes. Por otro lado, un 29,6% de los estudiantes asignaron un valor de 100 de probabilidad de ocurrencia del suceso indicado en el ítem. Un 24,3% de los alumnos considera que la posibilidad de ocurrencia oscilaría entre los valores 60 y 90, siendo valores muy dispersos en comparación al valor real.

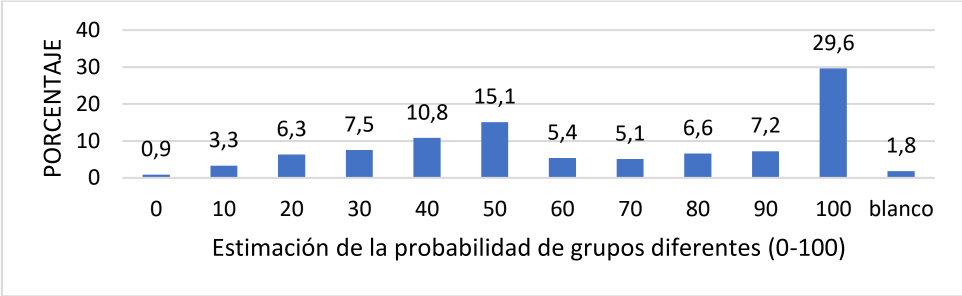

Figura 4. Porcentaje de respuestas al ítem 4 según estimación de la probabilidad *n* = 331 (respuesta esperada bajo 10)

Ítem 5. *En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?* En la Figura 5 se puede apreciar que solamente el 6,3% de los estudiantes asignaron un valor de 10 de probabilidad de que saldrán tres caras a un grupo de personas, respuesta correcta al considerar que hay un caso CCC de los ocho posibles del espacio muestral de las tres monedas. También, un 26,1% de los estudiantes asigna valores entre 30 y 40 a la probabilidad de ocurrencia de este evento. No obstante, un 54,5% asigna valores mayores o igual a 50. Según Parraguez, Gea, Díaz y Batanero (2017) los futuros profesores de la educación básica parecen no comprender la ley de los grandes números y le dificulta conectar la probabilidad experimental con la probabilidad teórica mediante el significado frecuencial de la probabilidad.

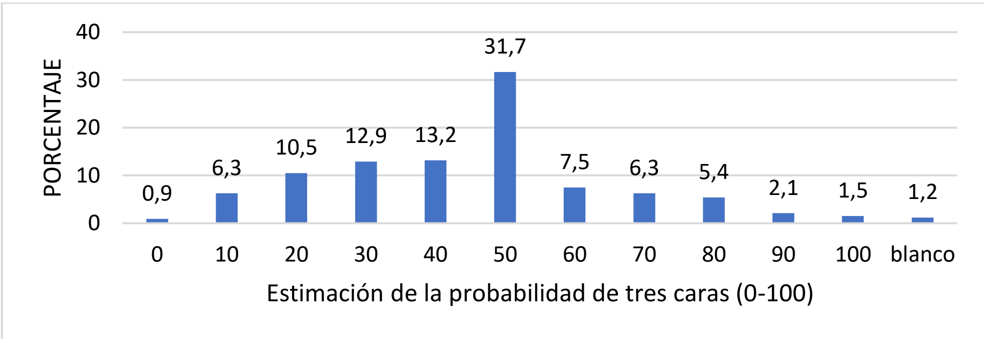

Figura 5. Porcentaje de respuestas al ítem 5 según estimación de la probabilidad *n* = 331 (respuesta esperada bajo 10)

Ítem 6. Resuelva. *En una encuesta de opinión se consulta a tres alumnos del colegio si están o no de acuerdo con la portada de la página web del colegio. ¿Qué tan probable es que uno de los tres alumnos esté de acuerdo?*

Los resultados de este ítem son diversos y de gran dificultad pues ninguno de los estudiantes logró llegar a la respuesta correcta. A continuación, se presentan las respuestas incorrectas señaladas por los estudiantes.

La respuesta más reiterativa de los estudiantes fue señalar que hay 1/3 de probabilidad de encontrar un alumno que esté de acuerdo con el diseño de la página del colegio, siendo esta la opción del 31,7% de los estudiantes. Al parecer este argumento está relacionado a la probabilidad clásica o de Laplace del cociente de casos favorables sobre los casos posibles del espacio muestral, ver Figura 6.

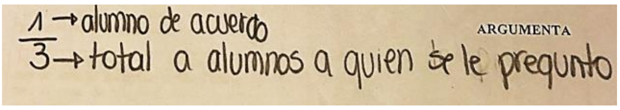

Figura 6. Solución incorrecta del ítem 6

La Figura 7 presenta una segunda respuesta incorrecta al ítem 6, contestada por el 9,6% de los estudiantes, en que señalan que hay 2/3 de probabilidad de encontrar a un estudiante que no esté de acuerdo con el diseño de la página web del colegio, utilizando la probabilidad del complemento del caso anterior. Un 13% de los estudiantes señalaron como respuesta que existe un 50% probabilidad de encontrar a alguien que esté de acuerdo con el diseño de la página del colegio, indicando que solamente pueden entregar dos respuestas: sí o no, siendo una la solución (Figura 8).

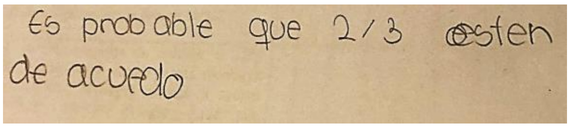

Figura 7. Solución incorrecta del ítem 6

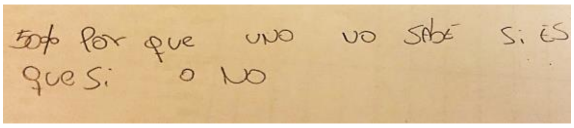

Figura 8. Solución incorrecta del ítem 6

La Tabla 1 deja de manifiesto que en este ítem hubo una gran diversidad de respuestas, mostrando un gran número de errores en este ítem, siendo el más frecuente el considerar 1/3 por el 32% de los estudiantes, seguido la respuesta errónea de ½. Un 16% de los estudiantes indicaron valores de probabilidad de 10%, 20%, 25%, 30%, 40%, 70% y 100% sin mayores argumentos.

Tabla 1. Respuestas al ítem 6 de estudiantes de primaria, n = 331

Solución	Frecuencia	Porcentaje
3/8	0	0
1/3	105	32
1/2	43	13
2/3	32	10
Otros valores	54	16
Omitidas	97	29
Total	331	100

5. Conclusiones

En este trabajo destacamos la importancia de atender a la intuición probabilística a temprana edad por su alcance en la construcción de los significados de la probabilidad en los niveles superiores. En particular, hemos ampliado el campo de aplicación de las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en este nivel educativo, limitado principalmente a los sorteos y juegos de azar presentes en la probabilidad informal. Esta experiencia, de iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades con asignación cualitativa, podría permitir al profesor de educación básica medir en una propuesta de enseñanza del tema la correspondencia de este significado personal de las intuiciones probabilísticas con el significado institucional pretendido (Godino, Batanero y Font, 2007).

Las investigaciones sobre razonamiento probabilístico señalan que ante preguntas de respuesta simple se produce un sesgo predecible de nuestra mente, donde la persona contesta obviando ciertos datos estadísticos. En nuestro estudio esta situación fue reflejada en los cinco ítems. Respecto al ítem 2 que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero (razonamiento causal) no encontramos coincidencias con las investigaciones de Pollatsek et al. (1987). Los resultados anteriores pueden ser tenido en cuenta en el primer ciclo escolar a la hora de enseñar las intuiciones sobre el azar y la probabilidad. Si bien, los estudiantes no tienen un pensamiento formal sobre el azar pueden desarrollar intuiciones relacionadas al azar, lo que favorecería la comprensión de los conceptos probabilísticos (Fischbein, 1975).

Debido a la débil preparación sobre pensamiento probabilístico que tienen los profesores de educación básica, consideramos necesario investigar y proponer alternativas de apropiación gradual de los distintos significados de probabilidad presente en el currículo de este nivel educativo. Comúnmente, los estudiantes de primaria no han sido confrontados a una enseñanza de la probabilidad que evalúe y realce las intuiciones probabilísticas. Como lo señalan Batanero, Contreras y Díaz (2015) los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad.

Referencias

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *21*(2), 131-156.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. Trabajo presentado en el *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola*. Universidade do Minho, Braga, Portugal. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Formprofesores.pdf.

Batanero, C. (2016). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). Prague: European Society for Research in Mathematics Education

Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2014). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *12*(2).

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Trabajo presentado en las *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada: Federación nacional de profesores de matemáticas.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

CONICYT (2016). Resumen ejecutivo encuesta nacional de percepción social de la ciencia y tecnología en Chile 2016. Disponible en: http://www.conicyt.cl/wp-content/uploads/2014/07/resumen-ejecutivo-encuesta-nacional-de-percepcion-social_web.pdf

Contreras, J.M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2014) La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. *14*(1).

Fischbein, H. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrect: Springer.

Fischbein, E., y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Fox, C.R., & Levav, J. (2004). Partition-edit-count: naive extensional reasoning in judgment of conditional probability. *Journal of experimental psychology. General*, 133 4, 626-642.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. New York: Springer.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, *219*, 180-182.

Gómez, E., Contreras, J. M., y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante: SEIEM.

Instituto Nacional de Estadísticas, Número de nacimientos en Chile descendió 5,6% entre 2015 y 2016. Disponible en: http://www.ine.cl/prensa/2018/08/31/número-de-nacimientos-en-chile-descendió-5-6-entre-2015-y-2016

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, 430–454.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition*, *11*, 143-157.

Nisbett, R., y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Parraguez, R., Gea, M., Díaz, D. y Batanero, C. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. *17*(2).

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., y Cobb, G. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255-269.

Salcedo, A. y Mosquera, J. (2008). Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. *Investigación y Postgrado, 23*(2).

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. *Science*, *185*, 1124-1131.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1980). Causal schemas in judgments under uncertainty. En E. M. Fishbein (Ed.), *Progress in Social Psychology*, (pp. 49-72). Hillsdale, NJ: Erlbaum.