Conocimiento intuitivo y formal en el aprendizaje de la probabilidad

Intuitive and formal knowledge in learning probability

Miguel R. Wilhelmi, Aitzol Lasa, Jaione Abaurrea y Olga Belletich

Universidad Pública de Navarra, España

Resumen

Frecuentemente, las respuestas a situaciones aleatorias están condicionadas por proposiciones parcialmente verdaderas. Estas proposiciones son muy resistentes al cambio puesto que, en general, están basadas en intuiciones, experiencias pasadas o conocimientos válidos en un campo restringido. Así, un conjunto grande de proposiciones parcialmente verdaderas se refieren a sucesos compuestos relacionados con la tarea objeto de análisis. Se muestran distintas situaciones. Se razona que los conocimientos parciales deben ser el origen de nuevos aprendizajes, evitando su rechazo basado en el conocimiento formal de la situación.

Palabras clave: Intuición, conocimiento formal, sucesos simples y compuestos, situaciones aleatorias.

Abstract

Frequently, responses to random situations are conditioned by partially true propositions. These propositions are very resistant to change since, in general, they are based on intuitions, past experiences or valid knowledge in a restricted field. Thus, large sets of partially true propositions refer to compound events related to the task under analysis. Different situations are shown. It is reasoned that partial knowledge must be the origin of new learning, avoiding its rejection based on formal knowledge of the situation.

Keywords: Intuition, formal knowledge, simple and compound events, random situations.

1. Introducción

Las respuestas a situaciones aleatorias están condicionadas por proposiciones parcialmente verdaderas. Estas proposiciones son muy resistentes al cambio puesto que en general están basadas en intuiciones, experiencias pasadas o conocimientos parciales. Se precisan pues intervenciones específicamente encaminadas a explicitar los conocimientos parciales y determinar su campo de validez restringido.

> La falacia del jugador supone erróneamente tomar una decisión según la ocurrencia en sucesos aleatorios pasados. En el juego del trile el tahúr callejero despluma al ingenuo transeúnte con halagos y señuelos y una pieza manipulada. En el sorteo con palillos el que toma el más corto pierde. Los boletos de lotería se compran por igual, por pares o nones, múltiplos de 3 o acabados en 5, por el número de miembros de una familia o porque el comprador tuvo una intuición. En sucesos aleatorios, las decisiones son espurias. El jugador vuelve a sus premisas más primitivas y viscerales, más impropias, anuméricas e irreflexivas. (Wilhelmi, 2017).

En este trabajo, tras una revisión de diversas situaciones, se analizan respuestas a cuestiones diversas de personas con una sólida formación científico-matemática y se valoran estrategias de enseñanza para la superación de obstáculos donde confluyen rasgos: *cognitivos* (significado atribuido por los sujetos a sucesos aleatorios), *afectivos* (expectativas, intereses y gustos que influyen en la toma de decisiones), *epistemológicos* (conocimientos matemáticos involucrados con la probabilidad), *instruccionales* (estrategias de intervención y resolución de conflictos semióticos, así como lenguajes natural y formalizado utilizados) y *mediacionales* (medios utilizados para la gestión y

Wilhelmi M. R., Lasa A., Abaurrea J., y Belletich, O. (2019). Conocimiento intuitivo y formal en el aprendizaje de la probabilidad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

control de procesos de estudio efectivos). Así se proponen orientaciones de cara a valorar la *idoneidad didáctica* de cierto tipo de intervenciones.

En la Sección 2 se analizan tomas de decisión en juegos de lotería, basadas en estrategias con conocimientos parcialmente ciertos que deben ser analizados. En la Sección 3, se describe el problema *Monty Hall*, que alcanzó entre los años 1990 y 1991 una gran notoriedad a través de la columnista Marilyn Vos Savant, del magazine Paradise y ha sido objeto de análisis didáctico por diversos autores (Wilhelmi, 2004; Batanero,Contreras,Díaz. y Cañadas, 2014). En la Sección 4 se analiza la situación *La varita más corta* y una experimentación con docentes en formación inicial y continua. Se termina con unas implicaciones para la docencia.

2. Loterías

En el juego de la lotería se prefieren números que no repiten cifras. Si se muestran dos billetes de lotería, uno que repite varias cifras y otro que tiene en las distintas unidades cifras distintas, ¿cuál prefiere comprar la gente? Por ejemplo, ¿qué conocimientos de base están en la preferencia del número 23721 sobre el número 37111? En esta preferencia, se tiene en cuenta que el suceso compuesto "números con cifras distintas en unidades contiguas" es más probable que el suceso también compuesto "números con cifras iguales en unidades contiguas". Este conocimiento es cierto, pero no atiende a que la probabilidad de cada número concreto de 5 cifras es la misma (1/10000).

Sin embargo, en la toma de decisiones, ¿se pueden utilizar ambos conocimientos, referidos a un suceso elemental o a sucesos compuestos, para determinar estrategias que optimicen una posible ganancia? Sí. Analicemos, por ejemplo, el juego de la Bonoloto. Se deben elegir 6 números sin repetición comprendidos entre 1 y 49, además se selecciona un número comprendido entre 1 y 9 para, en caso de acierto, devolución de la apuesta realizada (Figura 1). Nos centraremos únicamente en la combinación de los 6 primeros números.

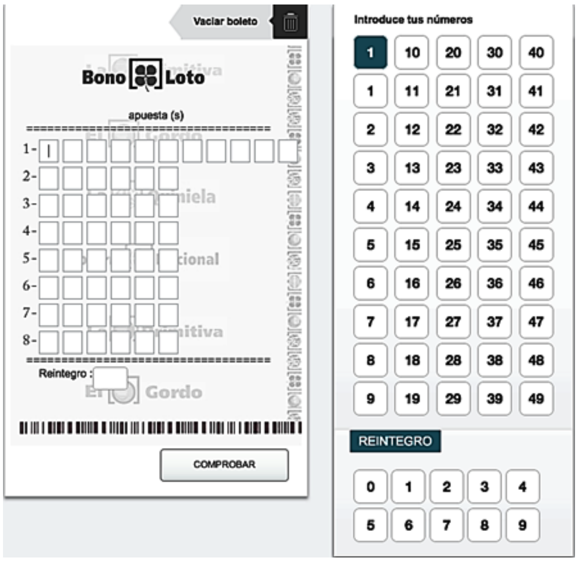


Figura 1. Bonoloto (https://www.loteriasyapuestas.es/es/bonoloto)

¿Tiene sentido pensar qué números elegir si todos tienen la misma probabilidad de ser sorteados? Veamos varias estrategias:

- *La estrategia de Pablo*: "Yo tengo en cuenta los números que han salido, para saber cuáles no escoger, porque todos los números tienen la misma probabilidad y si ya han salido tendrán que salir otros”.

- *La estrategia de Marta*: “Yo juego todas las semanas a la Bonoloto y siempre los mismos números: las fechas de cumpleaños de mis padres, mi esposo y mis hijos. Algún día me darán suerte.”
- *La estrategia de Eduardo*: “Yo juego a la Bonoloto únicamente cuando hay un bote muy grande, porque siempre acaba por salir el premio grande”.
- *La estrategia de Emma*: “Yo escojo siempre los primeros números, para así tener la opción de ganar más, porque la gente no entiende.”

La estrategia de Pablo supone relacionar dos *sucesos independientes* y se identifica con la *falacia del jugador*. Es tan extendida esta falacia que incluso está institucionalizada. Por ejemplo, *Loterías del Estado* publica en su página Web “estadísticas sobrelas bolillas que salieron en sorteos anteriores” induciendo a ciertos jugadores a tomar decisiones con base en estos resultados previos (Figura 2).

1. Revisa un las estadísticas de las bolillas que salieron en sorteos anteriores.
2. Entérate en qué meses reventó el pozo millonario de la Tinka.

Revisa cuántas veces fueron extraídas cada una de las 45 bolillas en el sorteo de la Tinka. Por Año: Todos

ESTADÍSTICA A LA FECHA

Bolilla	Veces	Bolilla	Veces	Bolilla	Veces
1	284	16	282	31	273
2	276	17	275	32	274
3	256	18	275	33	249
4	272	19	274	34	280
5	280	20	278	35	288
6	250	21	280	36	299
7	251	22	284	37	242
8	273	23	275	38	224
9	250	24	272	39	255
10	278	25	280	40	239
11	285	26	275	41	231
12	286	27	261	42	259
13	306	28	279	43	254
14	289	29	225	44	225
15	258	30	284	45	251

Entérate en qué meses reventó el pozo millonario de la Tinka.

ESTADÍSTICA A LA FECHA

Mes	Veces	Mes	Veces	Mes	Veces
Enero	6	Mayo	8	Setiembre	11
Febrero	12	Junio	4	Octubre	16
Marzo	9	Julio	10	Noviembre	13
Abril	9	Agosto	11	Diciembre	10

Figura 2. Estadísticas de “La Tinka” (https://www.latinka.pe/estadisticas-de-la-tinka/)

Sin embargo, la estrategia de Pablo se puede relacionar con sucesos compuestos. Si se lanza una moneda al aire y sale cara, no se puede decir nada *a priori* sobre el siguiente lanzamiento. En cambio, si se lanza 5 veces una moneda, es más probable que no salga cara todas las veces (31/32) que el suceso “5 caras” (1/32). Es decir, a pesar de que el conocimiento sobre secuencias de lanzamiento es un conocimiento válido, no aporta información relevante sobre lanzamientos consecutivos.

La estrategia de Marta tiene como sustrato un principio similar a la estrategia de Pablo.

Se puede pensar en el juego de la Bonoloto como conjunto muestral de todas las posibles combinaciones. Aquí podemos afirmar que si fuera posible jugar "infinitamente" en algún momento saldría la combinación de Marta. Este conocimiento no atiende al hecho de que se puede jugar un número finito de veces y que este número es "pequeño" en relación con el número de combinaciones posibles. El número total de posibles combinaciones es 10.068.347.520 (=49×48×47×46×45×44); si jugamos durante 80 años, todas las semanas, apostaríamos unas 4272 veces. Así, aunque el conocimiento de Marta encierra un principio cierto en un universo infinito supone, en la práctica, una decisión sin fundamento.

La estrategia de Eduardo de jugar cuando hay bote "porque siempre acaba por salir el premio grande" tiene una explicación sencilla. Cuando hay bote, la propaganda se intensifica y hace efecto en el principio psicológico que incentiva el juego: "por poco dinero, puedo ganar mucho". De esta forma, muchas más personas juegan y, por lo tanto, muchas más combinaciones se apuestan; es pues más probable que alguien acierte con la combinación ganadora. Sin embargo, este conocimiento no modifica la probabilidad de ganar con una combinación única. De tal forma que la estrategia de Eduardo carece de fundamento para sus intereses personales.

Finalmente, la estrategia de Emma busca maximizar la posible ganancia. La combinación (1, 2, 3, 4, 5, 6) tiene la misma probabilidad de ser elegida que, por ejemplo, la combinación (2, 5, 17, 32, 33, 42). Sin embargo, dado que se puede presuponer que la primera es menos elegida, se puede pensar que su elección puede reportar un premio mayor ya que en caso de salir es menos probable que dos personas la hayan marcado. Otra estrategia sería marcar una combinación de números frecuentemente menos elegidos; por ejemplo, (44, 45, 46, 47, 48, 49), dado que muchas personas escogen por la fecha de cumpleaños de seres queridos (números comprendidos entre 1 y 31) y, por lo tanto, los números mayores que 32 son elegidos menos. Esta última combinación sería pues una "mejora" de la misma estrategia de Emma.

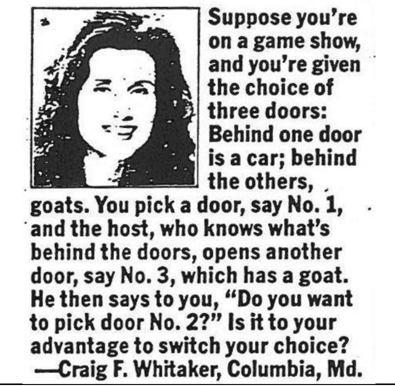
En resumen, aunque todas las combinaciones tienen la misma probabilidad de salir, no todas comparten la misma probabilidad de ser elegidas por los potenciales jugadores. Es decir, en la elección de juegos de azar pueden intervenir en la decisión aspectos no puramente matemáticos, pero que pueden tener influencia en las elecciones y sus consecuencias. Estos aspectos pueden suponer en la práctica una "graduación" de las elecciones asociadas a una situación. Sin embargo, la graduación basada en la probabilidad supone la preferencia de una decisión si tiene mayor probabilidad de ganar

> Para un juego de azar, se establece que la decisión D1 es mejor que la decisión D2, denotaremos D1 > D2 , para los intereses de un determinado sujeto, si P(G| D1) > P(G| D2), donde G representa el suceso "ganar". Dos decisiones D1 y D2 son equivalentes si P(G| D1) = P(G| D2) (Wilhelmi, 2004, p. 156).

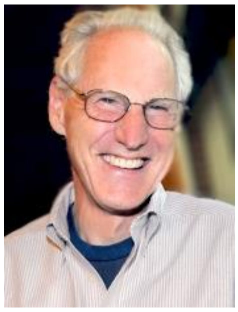
En la siguiente sección se ejemplifica este hecho en el célebre problema "Monty Hall".

3. El problema de Monty Hall

El estadístico Steve Selvin denominó un problema de probabilidades de "Monty Hall", utilizando el nombre de un célebre presentador televisivo que tuvo a cargo desde 1963 hasta 1986 el popular programa *Let's Make a Deal* ("Hagamos un trato") de la televisión estadounidense. El problema se hizo famoso cuando en 1990 Craig F. Whitaker remitió una carta a Marilyn Vos Savant consultando la solución del mismo. El problema apareció el 9 de septiembre de 1990 en la famosa columna *Ask Marilyn*, del magazín *Parade* (https://parade.com/) (Figura 3). Se trata de una situación paradójica, como otras muchas que frecuentemente se han discutido en la historia de la probabilidad y han contribuido al avance de este campo (Borovnick y Kapadia, 2014).


Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, "Do you want to pick door No. 2?" Is it to your advantage to switch your choice?
—Craig F. Whitaker, Columbia, Md.


Monty Hall (1921–2017)


Steve Selvin (1941 – -)

Traducción: Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la nº1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: "¿No prefieres escoger la nº2?". ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

Figura 3. El problema de *Monty Hall* en la columna *Ask Marilyn* de Marilyn Vos Savant (Parade, 9 septiembre, 1990 con fotografías de Monty Hall y Steve Selvin).

La solución del problema de Monty Hall es "cambiar siempre", puesto que la probabilidad de "ganar" si se cambia es 2/3 y de 1/3 si se mantiene la elección primera. En la tabla 2 se recogen todos los casos posibles. Suponiendo que hay tres puertas A, B y C, hay nueve casos posibles y únicamente se pierde en tres de ellos (3/9); a saber, en aquellos en los que la elección primera de la puerta coincidía con la puerta que albergaba el premio principal —el coche en la formulación original— (Tabla 1).

Tabla 1. Resultados posibles en al problema "Monty Hall"

Caso	Ubicación del premio	Elección	Puerta abierta	Nueva elección	¿Gana?
1	A	A	B o C	C o B (la puerta no abierta)	No
2	B	B	A o C	C o A (la puerta no abierta)	No
3	C	C	A o B	B o A (la puerta no abierta)	No
4	A	B	C	A	Sí
5	A	C	B	A	Sí
6	B	A	C	B	Sí
7	B	C	A	B	Sí
8	C	A	B	C	Sí
9	C	B	A	C	Sí

¿La demostración convence? La historia nos dice que no. Vos Savant (2006) tuvo que hacer durante 1990 y 1991 diversas entradas en su columna para convencer al gran público y a un amplio número de matemáticos profesionales de que la solución correcta era cambiar sistemáticamente de puerta, dado que la primera respuesta aportada el 9 de septiembre no fue por todos comprendida.

> Yes; you should switch. The first door has a 1/3 chance of winning, but the second door has a 2/3 chance. Here's a good way to visualize what happened. Suppose there are a million doors, and you pick door #1. Then the host, who knows what's behind the doors and will always avoid the

> one with the prize, opens them all except door #777,777. You'd switch to that door pretty fast, wouldn't you?[1] (Vos Savant, 2006)

Diversos matemáticos se apresuraron a mostrar su rechazo a la respuesta dada por Marilyn Vos Savant, exigiendo una corrección pública, basándose en la premisa falsa de que la apertura de la puerta dejaba una probabilidad de 1/2 a las dos puertas que quedaban cerradas. La respuesta de Robert Sachs, George Mason University:

> Since you seem to enjoy coming straight to the point, I'll do the same. You blew it! Let me explain. If one door is shown to be a loser, that information changes the probability of either remaining choice, neither of which has any reason to be more likely, to 1/2. As a professional mathematician, I'm very concerned with the general public's lack of mathematical skills. Please help by confessing your error and in the future being more careful[2]. (Vos Savant, 2006)

Tras otras réplicas, Vos Savant solicitó que se experimentara con la situación. Tanto matemáticos como docentes y estudiantes de Centros de Educación Secundaria jugaron sucesivamente al juego, concluyendo que efectivamente el cambio era ventajoso. Otra respuesta de Eloise Rudy, Furman University fue:

> The teachers in my graduate-level mathematics classes, most of whom thought you were wrong, conducted your experiment as a class project. Each of the twenty-five teachers had students in their middle or high school classes play at least 400 games. In all, we had 14,800 samples of the experiment, and we're convinced that you were correct —the contestant should switch![3] (Vos Savant, 2006)

Pero la experimentación no nos da únicamente una respuesta al problema, sino que centra el debate en la probabilidad frecuencial antes que en la laplaciana. Este "desplazamiento" hacia la experimentación permite abordar preguntas del tipo:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara con una moneda?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una moneda esté perfectamente equilibrada?

Todas las monedas están trucadas; también todas las ruletas. Parafraseando a Marilyn, diríamos: "Si no cree que esto es cierto, pregúntenselo a 'Los Pelayo'". Los Pelayo eran una banda que operó en España en los años 90 que, aprovechándose de las desviaciones de las ruletas, observando qué números salían más de lo esperado y cuáles menos, apostaban sistemáticamente a los primeros y ganaron sumas cuantiosas de dinero (García-Pelayo y García-Pelayo, 2003).

Volvamos al problema de Monty Hall. Las decisiones "quedarse siempre con la

[1] Sí; se debe cambiar. La primera puerta tiene una probabilidad de ganar de 1/3, pero la segunda de 2/3. Veamos una buena manera de visualizar lo sucedido. Supongamos que hay un millón de puertas, y escoges la puerta # 1. Entonces el anfitrión, que sabe lo que hay detrás de las puertas y siempre evitará abrir la que tiene el premio, las abre todas, excepto a la puerta nº 777.777. Cambiarías a esa puerta inmediatamente, ¿verdad?

[2] Ya que parece que le gusta ir directa al grano, haré lo mismo. ¡Lo arruinaste! Déjame explicarlo. Si se muestra que con una puerta se pierde, esta información cambia la probabilidad; así no hay ninguna razón para que la que queda ser más probable, a 1/2. Como matemático profesional, estoy muy preocupado por la falta de habilidades matemáticas del público en general. Por favor ayude confesando su error y en el futuro sea más cuidadosa.

[3] Los profesores en mis clases de matemáticas de Grado, la mayoría de los cuales pensó que te habías equivocado, hicieron tu experimento como un proyecto de clase. Cada uno de los veinticinco profesores tenía estudiantes en sus clases de ESO o Bachillerato que jugaron al menos 400 veces. En total, tuvimos 14.800 muestras del experimento, y estamos convencidos de que lo dicho por usted es correcto: ¡el participante debe cambiar!

elección primera" y "cambiar siempre" son extremas, en el sentido de que las probabilidades asociadas son la menor y mayor posibles, 1/3 y 2/3 respectivamente. Sin embargo, no son las únicas decisiones posibles. Wilhelmi (2004) identifica decisiones cuyas probabilidades están entre las anteriores, permitiendo una comparación graduada de decisiones, que se basan en otras intuiciones y conocimientos. De hecho establece una estrategia "gemela" de la mejor, es decir, que tiene también una probabilidad de 2/3. Asimismo, establece dos probabilidades "intermedias" de probabilidades 4/9 y 5/9, es decir, entre las observadas: no cambiar nunca (1/3=3/9) y cambiar siempre (2/3=6/9).

4. El juego de la varita más corta

En las situaciones anteriores se ha puesto de manifiesto cómo las intuiciones y expectativas condicionan las respuestas en tareas de proporcionalidad. Vayamos más allá: ¿el conocimiento teórico y la demostración formal modifican nuestras elecciones y decisiones?

En el juego de la varita más corta se colocan un número de varitas igual al de personas que están apostando. Todas las varitas son iguales, excepto una, que es más corta. Una persona las sujeta con una mano y deja sobresalir la misma longitud de todas (Figura 4). Por turno, cada persona extrae una varita; el que las sujeta se queda con la última. Pierde (o gana) quien toma la varita más corta.

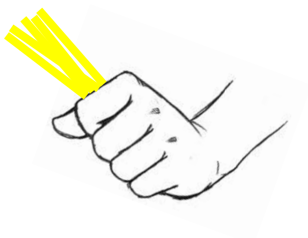


Figura 4. El juego de la varita más corta

¿Es más ventajoso sacar la varita el primero o ser quien las sujeta y, por lo tanto, quedarse con la última? ¿Es más fácil (difícil), probable (improbable) sacar la varita más corta si se saca una al principio o al final del juego? Responder a estas preguntas es, desde el punto de vista estrictamente matemático, sencillo: todas las personas, con independencia del orden en que lo hagan, tienen la misma probabilidad de sacar la varita más corta; a saber, $1/n$, donde n es el número de varitas y personas. La forma usual de demostrar esto es mediante un diagrama en forma de árbol (Figura 5).

$$\begin{cases} P(perder) = \frac{1}{5} \\ P(ganar) = \frac{4}{5} \begin{cases} P(perder) = \frac{1}{4} \\ P(ganar) = \frac{3}{4} \begin{cases} P(perder) = \frac{1}{3} \\ P(ganar) = \frac{2}{3} \begin{cases} P(perder) = \frac{1}{2} \\ P(ganar) = \frac{1}{2} \begin{cases} P(perder) = 1 \\ P(ganar) = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(perder\ 1°) &= \frac{1}{5} \\ P(perder\ 2°) &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \\ P(perder\ 3°) &= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \\ P(perder\ 4°) &= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \\ P(perder\ 5°) &= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Figura 5. Cálculo de probabilidad del juego de la varita más corta con n = 5.

Sin embargo, el conocimiento de la situación, incluida la demostración matemática, no tiene impacto en el criterio de elección, que sigue basándose en intuiciones del tipo: "al principio hay más varitas y es más difícil sacar la corta", "al final es muy probable que la varita corta ya no esté, puesto que se han sacado muchas y alguna de ellas habrá sido la más corta".

Para contrastar la afirmación "el conocimiento de la situación no tiene impacto en el criterio de elección", se plantea la elección efectiva a un grupo de docentes de matemáticas en formación inicial o continua. Se propuso la situación siguiente:

> **Situación:** Debéis elegir un orden de extracción, del 1 al 5. Los que hayáis elegido el turno en el que salga la varita más corta seréis eliminados. Los que no seáis eliminados podréis jugar en el siguiente juego. El que gane el último juego de la sesión se quedará con el premio.

La hipótesis que se desea contrastar es si la elección sigue una distribución uniforme, es decir, los porcentajes de estudiantes que deciden sacar en cada orden del juego son semejantes. Respondieron al juego 32 docentes en formación inicial (DFI) y 54 en formación continua (DFC) (Tabla 2).

Tabla 2. Elecciones en el juego de la varita más corta.

Respuesta	DFI	DFC	Total
Lugar 1º	13	17	30
Lugar 2º	8	15	23
Lugar 3º	0	2	2
Lugar 4º	5	8	13
Lugar 5º	6	12	18
Total	32	54	86

Para un nivel de significación igual a 0,05 (α=0,05), el test de bondad de ajuste χ^2permite rechazar la hipótesis nula, según la cual la elección de los docentes en formación inicial y continua sigue una distribución uniforme, dado que los *p*-valores para las tres muestras son menores que el nivel de significación (*p*-valor < α) (Figura 6).

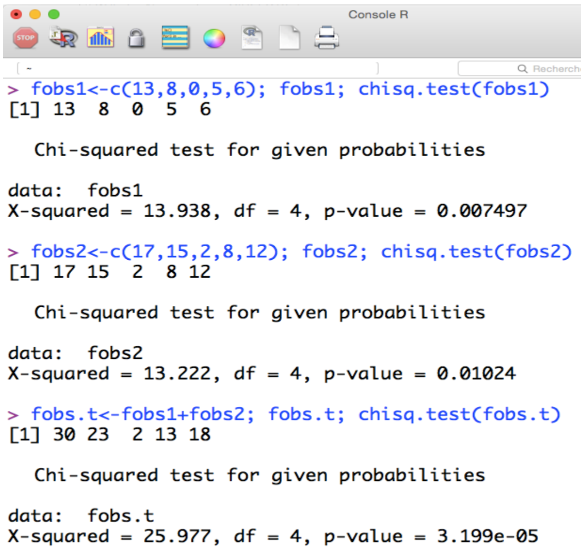


Figura 6. Test de bondad de ajuste[4]

[4] Cálculos realizados con R, https://www.r-project.org/), donde fobs_i<-c(fa_1, fa_2, fa_3, fa_4, fa_5); donde "i" es cada una de las 3 muestras (DFI, DFC y total) y fa_j (j=1,2,3,4,5) las frecuencias absolutas en cada una de las cinco categorías; chisq.test(fobs_i): test de bondad de ajuste para la muestra fobs_i. Por defecto, el ajuste del test se hace respecto a la distribución uniforme.

Así, se rechaza que los sujetos realicen una elección homogénea de los 5 órdenes de extracción de la varita. Con otras palabras, los docentes tienen una elección preferencial por algunos de los órdenes; a saber, por un lado, se relega la extracción en tercer lugar y, por otro lado, se observa una preferencia por los órdenes 1º, 2º y 5º.

¿Por qué los docentes eligen preferencialmente un orden de extracción cuando han demostrado que este orden es irrelevante? Siguen pesando ideas intuitivas del tipo:

- "Es más improbable que se tome la varita más larga en las dos primeras extracciones que en las (tres) siguientes".
- "Es más improbable que la varita más larga quede para quien las sujeta que alguien la tome en las (cuatro) anteriores".

Estas afirmaciones son ciertas, pero no se refieren a la probabilidad de cada una de las extracciones (sucesos simples). Se refieren a sucesos compuestos. ¿Es esta situación un caso anecdótico o un representante de un "conocimiento operatorio" en el análisis y toma de decisiones en situaciones de probabilidad? Según los ejemplos mostrados en las anteriores secciones, estas elecciones encierran el mismo principio; a saber: las elecciones de los sujetos se basan en conocimientos parcialmente ciertos, usualmente referidos a sucesos compuestos relacionados con la situación objeto de estudio.

5. Intervenciones docentes

Las situaciones mostradas permiten afirmar que las intervenciones docentes en la enseñanza de la probabilidad deben tener en cuenta las intuiciones, expectativas, conocimientos parciales. La dimensión epistemológica de la *idoneidad didáctica* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) queda fuertemente condicionada por los conocimientos parciales y, muy en particular, por el conocimiento de probabilidades en sucesos compuestos que se transfieren a sucesos simples.

Las estrategias de intervención y resolución de conflictos semióticos deben partir de estos conocimientos previos. La simulación, asociada a la probabilidad frecuencial, debe ser sistemática en el proceso de estudio, puesto que es una medio eficaz para modificar la experiencia de los sujetos. Esto ha sido especialmente claro en el problema de Monty Hall. Asimismo, en el juego de la varita más corta, si se juega reiteradamente a la extracción en tercer lugar se concluirá que se gana en la misma proporción que en cualquiera de los otros 4 lugares. Se contribuye pues desde lo empírico a reducir las creencias basadas en sucesos compuestos y extendidas de forma abusiva a sucesos elementales.

Los *medios* informáticos que permiten la simulación y reiteración de procesos son cruciales aquí. Las hojas de cálculo, por ejemplo, permiten una experimentación sistemática y abundante, que permite en un corto espacio de tiempo (marcado en la planificación anual según el currículo) encontrar datos empíricos suficientes que limiten las decisiones basadas en la intuición y las creencias

. Las situaciones no deben limitarse a propuestas docentes. Los estudiantes deben proponer situaciones que les parezcan atractivas o para las que tienen decisiones previamente tomadas. Esto es esencial dado que una de las dificultades de aprendizaje señaladas está en cómo los estudiantes toman decisiones basadas en un conocimiento parcial de una situación o en aplicación inadecuada de otras conocidas.

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto EDU2017-84979-R, del Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad.

Referencias

Batanero, C., Contreras, J.M., Díaz, C. y Cañadas, G. (2014). Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty hall problem. En T.Wassong, D. Frischemeier, P. Fischer, R. Hochmuth y P. Bender (Eds). *Mathematik- und Stochastiklernen mit Werkzeugen - using tools for learning mathematics and statistics* (pp. 363-376). Wiesbaden, Germany: Springer.

Batanero, C., Fernándes, J. A. y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. SUMA, 62, 11-18

Biography.com Editors (2017). Monty Hall Biography. Disponible en:https://www.biography.com/people/monty-hall-9542238.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 35-73). Berlin: Springer.

Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma* **XXVII**(2), 221-252.

García-Pelayo I., y García-Pelayo, G. (2003). *La fabulosa historia de los Pelayos.* Barcelona: Plaza & Janés.

Vos Savant, M. (2006). Game show problem. Disponible en, http://marilynvossavant.com/game-show-problem/

Wilhelmi M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en, https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/librowhilhelmi.pdf

Wilhelmi M. R. (2017 Agosto). Falacias, trileros, boletos y palillos. Ponencia invitada presentada en la *31ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa - Relme 31*, Universidad de Lima, Perú.