

Definiciones de estudiantes de bachillerato de conceptos probabilísticos

High school students' definitions of probabilistic concepts

Ana Isabel Megías, María Gea y Rafael Roa

Universidad de Granada, España

Resumen

El objetivo de este trabajo fue analizar las definiciones que una muestra de 52 estudiantes de primer y segundo curso de Bachillerato proporcionan sobre la probabilidad simple y condicional, así como sobre la dependencia e independencia de sucesos. Las definiciones de estos conceptos proporcionadas por los estudiantes se clasifican en correctas, imprecisas e incorrectas, comparando las que corresponden a cada uno de los conceptos y las ofrecidas en cada uno de los dos cursos. Aunque la mayoría de los estudiantes proporciona definiciones correctas, se observa una gran proporción de definiciones incorrectas e imprecisas, así como de estudiantes que no son capaces de dar una definición. No se observan diferencias en cuanto al concepto considerado, pero sí un mejor desempeño en los estudiantes de segundo curso.

Palabras claves: Definiciones, probabilidad, probabilidad condicional, dependencia, independencia.

Abstract

In this paper we analyse the definitions provided by 52 students in the first and second year of high school for the concepts of simple and conditional probability, dependence and independence. These definitions are classified in correct, imprecise and incorrect, and are compared for the different concepts, as well as for both groups of students. Although the majority of students provide correct definitions, we observe a high proportion of incorrect and imprecise definitions, as well as students who are unable to provide a definition. We did not observe difference in the type of definitions for the different concepts, although the second grade students provided more correct definitions.

Keywords: Definitions, probability, conditional probability, dependence, independence
Please write here the translation to Spanish of the keywords

1. Introducción

La probabilidad es, en la actualidad, un contenido importante de las orientaciones curriculares a lo largo de las diferentes etapas educativas. Observamos que en el cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria se incluye el estudio de la probabilidad condicional, compuesta y la independencia, que se refuerzan en el Bachillerato (MECD, 2015). Sin embargo, algunas investigaciones (Borovcnik, 2012; Fernandes, Correia y Contreras, 2013) sugieren dificultades con estos temas, cuya comprensión es necesaria en el estudio de la correlación y regresión, los teoremas de la probabilidad total y de Bayes y la inferencia estadística.

En este trabajo nos centramos en el análisis de las definiciones que una muestra de estudiantes de Bachillerato proporciona de los conceptos de probabilidad simple y condicional, dependencia e independencia de sucesos. El interés de que un estudiante sea capaz de proporcionar una definición adecuada de los conceptos que estudia fue resaltado por Zazkis y Leikin (2008), pues una definición adecuada, incluso usando un vocabulario informal, muestra la comprensión de un concepto. Este es además un tema escasamente tratado en la investigación previa, que se ha orientado preferentemente a

describir los sesgos de razonamiento de los estudiantes con estos conceptos (ver, por ejemplo, Díaz y de la Fuente, 2005).

2. Antecedentes y marco teórico

2.1. Papel de las definiciones en el estudio de las matemáticas

Son muchos los autores que destacan la importancia de las definiciones. Vinner (1991) indicó que las definiciones de los conceptos en el currículo y los libros de texto determinan el conjunto de propiedades que se incluirán en la enseñanza y modelan la imagen del concepto que crean los estudiantes. Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai y Tabach (2015) sugieren la importancia de que la imagen conceptual que crea el estudiante de los objetos matemáticos corresponda a las definiciones que es capaz de dar de dicho objeto. Las definiciones precisas de los conceptos proporcionan la base para la construcción posterior de las teorías y asegura coherencia en el uso de la matemática.

Las principales funciones de la definición en matemáticas es introducir los objetos matemáticos y capturar su esencia al caracterizar sus propiedades. Para enunciar correctamente una definición, según Leikin y Winicki-Landman (2001), además de nombrar los conceptos implicados en la misma y que previamente se encuentran definidos, se deben establecer sus condiciones necesarias y suficientes. Desde el punto de vista matemático, definir supone dar un nombre a un objeto que previamente existía y estaba caracterizado por unas propiedades (Zalavsky y Shir, 2005). Así, en la enseñanza, la definición da vida a algo que no existía para el estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997).

Aunque definir un concepto pueda parecer una actividad sencilla, en una investigación previa, donde se pidió definir la probabilidad simple y condicional a una muestra de profesores de educación secundaria obligatoria y bachillerato (Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas, 2013), se observaron errores o imprecisiones en ambas definiciones en el 25% de la muestra, lo que nos lleva a realizar este trabajo, para evaluar las definiciones proporcionadas por los estudiantes de Bachillerato.

2.2. Dificultades con la probabilidad condicional e independencia

A pesar de la importancia que para el trabajo con la estadística tienen la probabilidad condicional e independencia, la investigación previa describe numerosos errores y sesgos de razonamiento (Borovcnik, 2012; Díaz, Batanero y Contreras, 2010; Díaz y de la Fuente, 2005). Por ejemplo, se confunde probabilidad condicional y conjunta (Totahasina, 1992), o bien se asocian las situaciones causales y condicionales (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987). Otro error común es la falacia de la condicional transpuesta, es decir, el intercambio de los términos que definen una probabilidad condicional (Falk, 1986), o bien se supone que el suceso que condiciona debe ser anterior al condicionado (Gras y Totahasina, 1995).

Respecto a la comprensión de la independencia, hacemos notar que dicho concepto está ligado al de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si y sólo si la probabilidad de uno de ellos no cambia si se condiciona por el otro; es decir, dos sucesos A y B son independientes si y solo si $P(A/B)=P(A)$ o $P(B/A)=P(B)$; o lo que es lo mismo, $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$ (Borovcnik, 2012; Huerta y Arnau, 2017). Sin embargo, D'Amelio (2004) propuso un problema sobre independencia a estudiantes

universitarios, encontrando algunos que usaban la regla de adición de probabilidades, en lugar de utilizar la regla de la multiplicación, para probar la independencia de dos sucesos.

Dos sesgos bien conocidos sobre la independencia son la recencia positiva y negativa (Sánchez y Valdez, 2015; Tversky y Kahneman, 1982), es decir, suponer que la ocurrencia de un suceso cambia la probabilidad del mismo en siguientes repeticiones de un experimento. Otras investigaciones con estudiantes (Cordani y Wechsler, 2006) e incluso con futuros profesores (Sánchez, 1996) indican que muchos sujetos piensan que dos sucesos sólo pueden ser independientes si pertenecen al espacio muestral de experimentos aleatorios diferentes.

Los anteriores estudios de evaluación se realizan utilizando preguntas de opción múltiple, donde las posibles respuestas del estudiante están fijadas de antemano. Un tipo de investigación que permite profundizar mejor en la comprensión de estos conceptos es realizado por Kataoka, Hernandez y Borim (2010), con 34 alumnos de máster, 22 de grado y 27 de secundaria, a los que pide explicar el significado de un suceso independiente. Varios de estos estudiantes asociaron la independencia al hecho de que los experimentos fuesen sucesivos (y no simultáneos); otros no diferenciaron entre independencia y sucesos mutuamente excluyentes.

Nuestro trabajo utiliza preguntas abiertas; en concreto se pide definir la probabilidad simple y condicional, dependencia e independencia de sucesos para analizar las definiciones aportadas por los estudiantes. Con ello se completan las investigaciones anteriores y la desarrollada por Contreras et al. (2013), quienes analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional en una muestra de futuros profesores. En lo que sigue se describen los fundamentos y métodos utilizados, se presentan y discuten los resultados y se finaliza con algunas conclusiones.

3. Método

La muestra estuvo formada por 52 estudiantes, 21 de primer curso y 31 de segundo curso de Bachillerato, que realizaban sus estudios en tres centros distintos de la provincia de Málaga, uno de ellos privado y los otros dos públicos. El motivo de elegir estudiantes de Bachillerato fue tomar cursos en los que se había dado el tema de probabilidad condicional e independencia anteriormente y además, que tuviesen la madurez suficiente para dar una definición de los conceptos investigados usando sus propias expresiones. Las edades de los estudiantes se encuentran entre los 16 y 19 años, la mayoría de 17 y 18. La tarea propuesta a estos estudiantes se presenta a continuación y es similar a la utilizada por Contreras et al. (2013) en su investigación aunque, en su caso, se pregunta por la probabilidad simple y condicional y no por la independencia o dependencia.

1. Explica con tus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional
2. Explica con tus propias palabras la diferencia entre dos sucesos independientes y dos sucesos dependientes.

La tarea se realizó por escrito de forma individual por cada alumno, en cada uno de los institutos participantes, con la ayuda del profesor del grupo a quien agradecemos su colaboración. Para clasificar las respuestas se utiliza el análisis de contenido, que es un

estudio sistemático de documentos escritos, que permite identificar variables y categorías en los mismos para realizar inferencias (Sandín, 2003). En nuestro caso, las respuestas de los estudiantes se han clasificado en categorías, que parten de las determinadas en Contreras et al. (2013), y los códigos se asignaron a las categorías mediante varias revisiones y comparación de unas con otras, siguiendo el proceso cíclico típico de la investigación cualitativa (Sandín, 2003). A continuación se presentan y discuten los resultados.

4. Resultados

4.1. Categorías de respuesta

En primer lugar se clasificaron las definiciones aportadas por los estudiantes, diferenciando las respuestas dadas para los diferentes conceptos. Se obtuvieron las siguientes categorías:

Definiciones correctas: Para considerar la definición correcta, según Leikin y Winicki-Landman (2001), se comprobó que el estudiante incluyese las condiciones necesarias y suficientes para la definición, además de incluir otros conceptos previamente definidos.

Como ejemplo de definición correcta de probabilidad simple y condicionada podemos exponer el siguiente caso, donde se incluyen conceptos previos (suceso, resultado). Incluye una condición suficiente para definirlos (que no se haga depender de otro suceso, en el caso de la probabilidad simple). Sin embargo, el lenguaje utilizado por el estudiante es informal.

En una probabilidad simple no influye el resultado de la probabilidad anterior, mientras que en la probabilidad condicionada una de las probabilidades influye en la otra, es decir, sabiendo que pasa una que también ocurra la otra (E43).

En el siguiente ejemplo, el estudiante define correctamente tanto la independencia como la dependencia entre sucesos, pues incluye una condición necesaria y suficiente, que consiste en que, en el caso de dependencia de un suceso, su probabilidad influye en la de obtener el otro, que cambia como consecuencia de ello y en el caso de independencia, no existe esta influencia. Además, el estudiante incluye en la definición otros conceptos previos como el de suceso y probabilidad:

Dos sucesos dependientes son aquellos donde la probabilidad de que uno suceda influye en la probabilidad de que el otro suceda; sin embargo, en dos sucesos independientes, uno no influye en el otro para nada (E41).

Definiciones imprecisas. Hemos considerado que la definición aportada por el estudiante es imprecisa cuando cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001), al incluir condiciones necesarias o suficientes para definir la probabilidad, dependencia e independencia, pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias. Como ejemplo de definición correcta, pero imprecisa de probabilidad simple y condicional tenemos la siguiente respuesta, donde el estudiante no es capaz de dar la definición sin recurrir al ejemplo; en la investigación de Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) el 4,6% de participantes da un ejemplo en vez de la definición, y en nuestro caso ese porcentaje corresponde al 15,4%:

Una probabilidad simple es aquella que no se ve condicionada por otra probabilidad, es decir la probabilidad de sacar 6 en un dado y la condicionada dependerá de otra probabilidad (E50).

Otras respuestas imprecisas se deben a que el estudiante añade la idea de que todos los sucesos tienen la misma probabilidad en todos los casos. Serían los estudiantes que expresan el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992), que consiste en considerar equiprobables todos los resultados de cualquier experimento aleatorio.

Un ejemplo de definición imprecisa de dependencia e independencia se muestra a continuación, donde aparentemente el estudiante comprende el suceso e incluye una condición necesaria de la dependencia (la influencia del otro suceso), pero el vocabulario usado es muy pobre y no se llega a aludir a la probabilidad, que es lo que cambia en el caso de la definición de dependencia; en la definición de independencia no se indica que el cambio de la probabilidad condicionada se produce al incluir el suceso en la condición:

Dos sucesos independientes son aquellos en los que en la probabilidad condicionada no cambian son iguales, da lo mismo. En cambio dos sucesos dependientes dependen cada uno de ellos y si se hace algo cambia (E2).

Definición incorrecta: La definición sería incorrecta cuando no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes o se confunden conceptos implicados en las mismas. Uno de los fallos en la definición de probabilidad simple ha sido confundir la probabilidad simple con compuesta, al igual que ocurrió en el trabajo de Contreras et al. (2013) o dar ejemplos ajenos al cálculo de la probabilidad simple. En el siguiente ejemplo se confunde la probabilidad con el fenómeno que se estudia:

Una probabilidad simple es aquella en la que no se actúa y sale por naturaleza (E49).

Un ejemplo de definición incorrecta de dependencia e independencia se reproduce a continuación, donde se comete un error al aplicar la fórmula del producto para dar la definición. El estudiante indica que, en el caso de sucesos independientes, la probabilidad de la unión es igual a la probabilidad del suceso; sin embargo, la condición que se cumpliría en este supuesto es que la probabilidad condicionada sería igual a la probabilidad simple o bien que la probabilidad de la intersección sería igual al producto de probabilidades. Esta confusión en el uso de la regla del producto y la regla de la suma al definir la independencia de sucesos fue también encontrada entre estudiantes universitarios en la investigación de D'Amelio (2004):

Los sucesos son independientes cuando al realizar $P(A \cup B)$, el resultado es igual a $P(B)$. Por el contrario, dos sucesos son dependientes cuando $P(A \cup B) \neq P(B)$ (E4).

4.2. Definiciones de probabilidad simple y condicional

En la Tabla 1 se resumen los tipos de definiciones dadas a los conceptos de probabilidad simple y condicional, donde el porcentaje de definiciones correctas de la probabilidad simple es del 44,2%, algo menos que la mitad de los estudiantes. El porcentaje de definiciones incorrectas fue 23,1% mayor que el encontrado por Contreras et al. (2013), en cuyo trabajo el 9,7% de futuros profesores dio una definición incorrecta de la probabilidad simple. Hay que destacar que 17,1% no es capaz de dar la definición, frente al 8,7% del trabajo de Contreras et al. (2013).

Respecto a la probabilidad condicional, las definiciones correctas llegan al 48,1%, similar al trabajo de Contreras et al. (2013), donde alrededor del 50% da una definición incorrecta o imprecisa de la probabilidad condicionada. En nuestra investigación el porcentaje de definiciones imprecisas e incorrectas baja hasta 36,5%. Por otro lado, el

15,4% ha dejado la pregunta sin contestar y las definiciones correctas. En ambas definiciones las respuestas mejoran mucho en los estudiantes de segundo curso.

Tabla 1. Resultados en la definición de la probabilidad simple y condicional

	Probabilidad simple			Probabilidad condicional		
	1° Curso	2° Curso	Total	1° Curso	2° Curso	Total
Correcta	2	21	23	3	22	25
Correcta pero imprecisa	2	6	8	3	3	6
Incorrecta	11	1	12	9	4	13
Blanco	6	3	9	6	2	8

4.3. Definiciones de dependencia e independencia

Los resultados obtenidos en la definición de la dependencia e independencia de sucesos se presentan en la Tabla 2, en la que se observa que la mayor proporción de estudiantes ofrecen definiciones correctas (38,5%), a lo que podemos añadir otro 17,3% que da una definición básicamente correcta, aunque imprecisa. Por otro lado, el 23,1% responden incorrectamente y el 21,1% no es capaz de proporcionar una definición, por lo cual, sumados estos dos porcentajes, los resultados son bastante peores que los reportados por Contreras et al. (2013) en la definición de probabilidad condicional; aunque ello es lógico, teniendo en cuenta que dicha muestra estuvo constituida por futuros profesores.

Tabla 2. Frecuencia de tipo de definición de suceso dependiente por curso

	Dependencia			Independencia		
	1° Curso	2° Curso	Total	1° Curso	2° Curso	Total
Correctas	4	16	20	7	22	29
Correcta pero impreciso	4	5	9	3	3	6
Incorrecta	5	7	12	3	4	7
Blanco	8	3	11	8	2	10
Total	21	31	52	21	31	52

Respecto a las definiciones de sucesos independientes, son en su mayoría correctas (55,8%). En cuanto a las respuestas correctas pero imprecisas, representan el 11,5% y las incorrectas el 13,5% siendo el porcentaje más bajo que en la definición de dependencia. Por último, han contestado en blanco un 19,2%; sin embargo, hacemos notar que no hemos encontrado en las definiciones la confusión entre sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes que Cordani y Wechsler (2006), D'Amelio (2004), Kataoka et al. (2010) y Sánchez (1996) describen en sus investigaciones.

Interpretamos este hecho porque nosotros hemos pedido al estudiante dar la definición, mientras que en dichas investigaciones se propusieron ejemplos de sucesos independientes y mutuamente excluyentes que los estudiantes no discriminaron. Por el contrario, sí se ha confirmado la confusión entre la necesidad de que se cumpla la regla del producto y la regla de la suma en la definición de la independencia descrita por D'Amelio (2004), aunque esto ocurre en casos muy aislados.

Igual que en la definición de sucesos dependientes, los resultados son mucho mejores en el segundo curso. El 71% de las definiciones dadas por estos alumnos son correctas,

frente a sólo el 33% en los estudiantes de primer curso, lo que confirma el mejor conocimiento, a la vez que madurez, de los segundos. Además, estos apenas dejan las definiciones en blanco, lo que contrasta con el alto porcentaje de sus compañeros de primer curso (38,1%) que no llegan a dar la definición.

4.4. Síntesis y discusión

Para resumir los resultados, en la Figura 1 presentamos una comparación de los tipos de definiciones en los cuatro conceptos considerados en donde observamos unas proporciones bastante similares para cada tipo de definición (correctas, imprecisas, incorrectas o no definen) en los cuatro conceptos considerados. Se realizó un contraste Chi-cuadrado de independencia entre el tipo de definición (filas) y el concepto (columnas) que no fue estadísticamente significativo ($\chi^2=5,22$; g.l.=9; $p=0,8$). En todo caso, predominan las definiciones correctas, en una proporción entre el 38% y el 60%, que indica que una parte importante de los estudiantes son capaces de definir estos conceptos, aunque su lenguaje no esté muy formalizado.

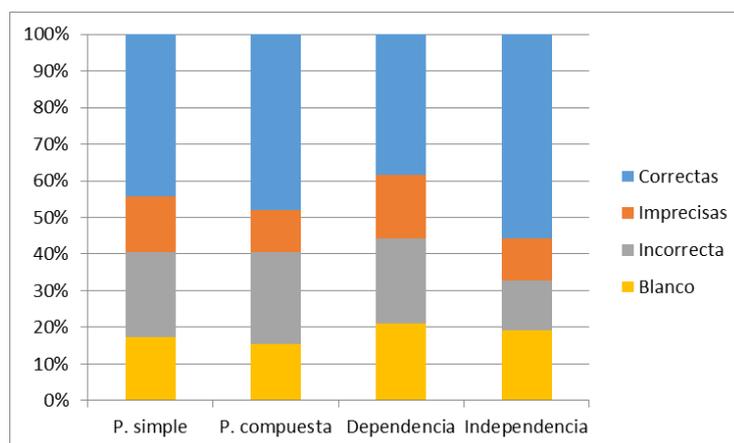


Figura 1. Distribución del tipo de definiciones por concepto

En la Figura 2 se presenta la distribución del tipo de respuestas en cada uno de los dos grupos de estudiantes, donde hemos considerado todas sus definiciones, sin tener en cuenta a qué concepto se refieren. Se obtiene ahora en el contraste Chi-cuadrado de independencia entre tipo de definición (filas) y grupo de estudiantes (columna) un valor estadísticamente muy significativo ($\chi^2=50,39$; d.g.=3, $p<0,001$). Estas diferencias se observan además en el gráfico, con una proporción mucho mayor de definiciones correctas (cercanas al 65%) en los estudiantes de segundo curso, respecto a sus compañeros que apenas llegan al 20%. Por otro lado, los estudiantes de primer curso tienden más a no dar la definición (30%) o a dar una definición incorrecta (35%).

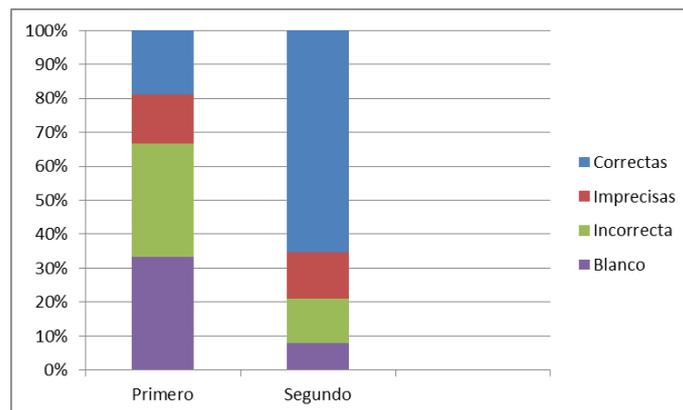


Figura 2. Distribución del tipo de definiciones por curso

Por otro lado, el análisis detallado de las definiciones incorrectas e imprecisas aportadas, permitió identificar los siguientes conflictos semióticos, que Godino (2002) define como disparidad entre el significado asignado a una expresión matemática por un estudiante respecto al significado institucional:

- Suponer que la probabilidad simple sólo se puede calcular cuando los sucesos son equiprobables. Pensamos que este conflicto aparece por el énfasis excesivo en la enseñanza de ejemplos de este tipo de sucesos y se podría implicar el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992).
- Falacia del eje temporal, descrita por Gras y Totohasina (1995). Es decir, suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional tiene que preceder temporalmente al condicionado.
- Pensar que sólo se puede definir la probabilidad condicionada cuando hay dependencia de sucesos. Este conflicto puede implicar la confusión entre condicionamiento y causación citada por Díaz y de la Fuente (2005).
- Confusión de la fórmula asociada a los sucesos independientes A y B, siendo la usada la siguiente: $P(A \cup B) = P(B) + P(A)$. Detrás de este conflicto puede haber una confusión entre producto y suma de probabilidades.
- No saber diferenciar entre probabilidad simple y condicionada o compuesta. Este conflicto aparece en la investigación de Contreras (2011).

5. Implicaciones docentes

En definitiva, aunque con carácter exploratorio, pues la muestra es pequeña, nuestros resultados indican que todavía en Bachillerato son muchos los estudiantes que tienen dificultad al definir conceptos probabilísticos elementales, como son los de probabilidad simple y condicional, dependencia e independencia. Aunque también se muestra mejores resultados en los estudiantes de segundo curso de Bachillerato, que en su mayoría fueron capaces de proporcionar definiciones correctas, es todavía alta la proporción de estudiantes que falla en las tareas propuestas. Es decir, la enseñanza recibida en primer curso ha mejorado el conocimiento de estos estudiantes, pero todavía ha sido insuficiente.

La principal razón de proporcionar una definición incorrecta fue añadir condiciones innecesarias que reflejan sus sesgos de razonamiento, en forma similar a otras

investigaciones, como las de Contreras et al. (2013). Respecto a la dependencia e independencia, el principal sesgo de confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes citado por Cordani y Wechsler (2006), D'Amelio (2004), Kataoka et al. (2010) y Sánchez (1996) no se refleja explícitamente en las definiciones. Además, con menor frecuencia se han manifestado una serie de conflictos semióticos que muestran que los estudiantes confunden conceptos o propiedades de los mismos.

Los temas analizados son importantes no sólo para la formación posterior del estudiante, sino para la vida cotidiana, donde con frecuencia nos enfrentamos a decisiones que implican la probabilidad condicional, dependencia e independencia. Será entonces necesario prestar mayor atención a la enseñanza de estos temas para superar las dificultades descritas en este trabajo.

Agradecimientos: Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM
- Cordani, L. K. y Wechsler, S. (2006). Teaching independence and exchangeability. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Brasil): International Association for Statistics Education. Available from: https://iase-web.org/documents/papers/icots7/3I1_CORD.pdf.
- D'Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 138-144). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 26(2), 149-162.
- Díaz C. y de la Fuente I., (2005) Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Fernandes, J. A., Correia, P. F. y Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 5-26.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Gras, R. y Totahasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources

- d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Huerta, P. H. y Arnau, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87-106.
- Kataoka, V., Hernandez, H. y Borim, C. (2010). Independence of events: analysis of knowledge level in different groups of students. En C. Reading (Ed.). *Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics*. Lubjana: International Statistical Institute. Available from: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C132_KATAOKA.pdf.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557-568.
- Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, 62–73.
- Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255- 269.
- Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México: Cinvestav.
- Sánchez, E. y Valdez, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Alicante: SEIEM.
- Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R. y Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, 47(3), 497-509.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D.O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.
- Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-346.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.