

La dispersión en estadística unidimensional: Análisis del lenguaje en libros de texto de bachillerato

Dispersion in one-dimensional statistics: Analysis of language in Spanish high school textbooks

Juan J. Ortiz¹, Felipe Castro², José Garzón¹, Veronica Albanese¹ y Nordin Mohamed¹

¹Universidad de Granada, ²Instituto Tecnológico de Sonora

Resumen

En este trabajo analizamos el lenguaje con el que los libros de texto se refieren a la dispersión, sea cual sea el sentido de uso del término, utilizado en el capítulo de estadística en tres libros de texto españoles de bachillerato, publicados recientemente, usando para ello la idea de significado de un objeto matemático propuesta en el Enfoque Onto-semiótico (EOS). Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje formal. Se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. En este análisis hemos encontrado varias definiciones y fórmulas de un mismo concepto sin aclarar su relación, que pueden provocar en el alumnado un conflicto semiótico.

Palabras clave: Dispersión, libros de texto, lenguaje matemático, bachillerato.

Abstract

In this paper we analyze the language with which the dispersion is referred to, whatever the meaning of the term dispersion is, used in the statistics chapter in three Spanish high school textbooks recently published, using the idea of meaning of a mathematical object proposed in the Onto-Semiotic Approach (OSA). The results show the great richness and diversity of verbal expressions and the predominance of formal language. There is also a wide use of tabular and graphic representations. In this analysis we have found several definitions of the same concept without clarifying their relationship, which can provoke a semiotic conflict in the students.

Keywords: Dispersion, textbooks, language of mathematics, high school.

1. Introducción

En los currículos vigentes en España han adquirido gran importancia la estadística y la probabilidad desde los primeros niveles educativos. En particular, en las asignaturas de Matemáticas para 3º y 4º de educación secundaria obligatoria (ESO) y 1º de bachillerato en la modalidad de humanidades y ciencias sociales (MEC, 2015), en el bloque de estadística y probabilidad, se incluyen los siguientes contenidos relacionados con la dispersión en estadística unidimensional (Tabla 1).

En ella se observa la presentación progresiva de los contenidos de estadística desde los cursos 3º y 4º de la ESO en la modalidad de enseñanzas académicas a 1º curso de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales. Aunque en Bachillerato se inicia la estadística bidimensional, la mayoría de libros de texto consultados incluyen un capítulo de estadística unidimensional, donde presentan un amplio repaso de los conceptos relacionados con el significado univariante de la dispersión, fundamental para el desarrollo de la estadística bidimensional.

Tabla 1. Contenidos relacionados con la dispersión en el currículo

Curso	Contenidos relacionados con la dispersión
3º ESO, enseñanzas académicas	Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas. Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades. Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.
4º ESO, enseñanzas académicas	Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
1º Bach	Estadística bidimensional. Tablas de contingencia. Distribución conjunta y distribuciones marginales.

La importancia del libro de texto ha sido destacada por numerosos autores. Stylianides (2009) considera que el libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos. Cordero y Flores (2007) resaltan su influencia en el discurso matemático escolar, que regula la enseñanza y aprendizaje. Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007).

Por otro lado, la variabilidad estadística y dispersión por su importancia forman parte de las ideas estadísticas fundamentales que se recomiendan ser incluidas en la mayoría de los currículos del mundo. Además la variabilidad está presente en otras ideas fundamentales como los conceptos de muestra y muestreo, o en el estudio de la probabilidad, sobre todo en el enfoque frecuencial de la misma (Batanero y Borovcnik, 2016). Reading y Shaughnessy (2004) mencionan a las medidas centrales y de dispersión como dos de los conceptos principales en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Por su parte Wild y Pfannkuch (1999) incluyen la percepción de la variabilidad como uno de los componentes básicos del pensamiento estadístico.

El objetivo de este trabajo, que continúa otros anteriores, es analizar el lenguaje de la dispersión que se presenta en una muestra de libros de texto de Bachillerato. A continuación se presentan los fundamentos, la metodología y los resultados del estudio.

2. Fundamentos

2.1. Marco teórico

La utilización con sentido de un lenguaje variado, que incluye el lenguaje verbal, los símbolos y expresiones algebraicas, las representaciones gráficas y las tablas, debe ser uno de los retos principales en la enseñanza de las matemáticas (Schelepppegrell, 2007). Dicho lenguaje es un elemento fundamental en el aprendizaje del alumnado, puesto que éste debe conocerlo, para ampliar su lenguaje cotidiano con otro de mayor nivel de abstracción.

Para realizar nuestro análisis en los libros de texto hemos utilizado el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), debido a la importancia que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. Dicho sistema de prácticas constituye el significado del objeto matemático implicado en la resolución de problemas. En este marco teórico es también fundamental

la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático, pues se trata de “cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)” (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Batanero, González-Ruiz, López-Martín y Contreras (2015) analizaron el currículo de secundaria en España, distinguiendo de acuerdo con el EOS los siguientes significados parciales de la dispersión, que denominaremos significado descriptivo univariante, descriptivo bivariante, probabilístico e inferencial. Cada uno de ellos viene definido por una configuración específica de objetos matemáticos (situaciones problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos).

2.2. Antecedentes

La investigación sobre la presentación de la estadística en los libros de texto es muy escasa y concentrada en la educación secundaria (por ejemplo, Cobo, 2003), siendo aún menor la que se centra en el lenguaje (por ejemplo, Ortiz, Mohamed, Serrano y Albanese, 2017).

En particular, sobre el tratamiento de la dispersión en los libros de texto encontramos el trabajo de Del Pino y Estepa (2017) donde analizaron el tratamiento de la dispersión en libros de texto españoles de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), dirigidos a estudiantes de 14 a 16 años. Los resultados muestran que en muchas ocasiones los textos presentan definiciones equivalentes del mismo concepto sin especificarlo, lo que puede generar confusión en los estudiantes. Hay un exceso de situaciones– problema para la desviación típica y muy pocas sobre el resto de medidas de dispersión, siendo también muy escasas las actividades de interpretación conjunta de la desviación típica y la media que facilita la comprensión del fenómeno de dispersión, y que además se recomiendan en las directrices curriculares. En algunos textos se incluyen gráficos de caja y bigotes con diversas imprecisiones, que pueden propiciar unas concepciones erróneas en los estudiantes. Todas estas cuestiones deberán ser tenidas en cuenta y corregidas por el profesorado que utilice los textos.

Un análisis detallado de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística se puede encontrar en Del Pino (2017).

3. Metodología

Se analizaron tres libros de texto españoles de primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales (dirigidos a estudiantes de 16 a 17 años), publicados en 2015, que se eligieron por ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional y muy utilizados por el profesorado. Se trata de una muestra intencional, puesto que el estudio es de tipo exploratorio, y no pretendemos generalizar las conclusiones. Se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido de la dispersión y contenidos relacionados con ella que se encuentran en el capítulo de estadística unidimensional, estudiando las variables establecidas en el estudio de Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales b) símbolos; c) representaciones tabulares y gráficas.

Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo. Por ejemplo, para la variable “expresiones verbales” se han diferenciado tres tipos: expresiones del lenguaje natural,

específicas del lenguaje estadístico de la dispersión y específicas de conceptos relacionados con ella. A través de la comparación del contenido de estos textos, se establece la presencia o ausencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra. Por último, se seleccionan ejemplos en los textos que ilustren las diferentes categorías y se elaboran unas tablas cuyo análisis cuidadoso facilita la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en los libros analizados. A continuación se presentan los resultados, utilizando ejemplos de los textos cuando sea necesario, mediante las tablas mencionadas anteriormente.

4. Resultados y discusión

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para cada una de las variables del lenguaje que se utilizan en los libros de texto analizados sobre la dispersión y contenidos relacionados en estadística unidimensional.

4.1. Lenguaje verbal

Siguiendo a Shuard y Rothery (1984), hemos tenido en cuenta las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, ya que pueden crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005). Dentro de las específicas, siguiendo a Ortiz, Mohamed, Serrano y Albanese (2017), hemos diferenciado en específicas de la dispersión y específicas de conceptos relacionados con ella.

Tabla 2. Expresiones diferentes y frecuencias en los textos según categoría

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
Expresiones lenguaje natural	45	48	19
Específicas de dispersión	17	15	7
Específicas de conceptos relacionados con ella	68	55	28

Hemos encontrado una gran variedad de expresiones cotidianas que se utilizan para indicar de forma resumida un procedimiento, como por ejemplo, calcular, clasificar, comparar, o que se refieren a conceptos o propiedades de estadística como por ejemplo rango, recorrido. El mayor número de expresiones diferentes son las específicas de la dispersión y las específicas de conceptos relacionados con ella, lo que indica un alto grado de formalización como ocurría en Ortiz et al. (2017). No obstante, aún hay una gran variedad de expresiones del lenguaje ordinario usadas con sentido específico, lo que puede ocasionar conflictos semióticos (Godino et al., 2007), debido a problemas de ambigüedad (Barwell, 2005).

Entre las específicas de la dispersión, las más utilizadas están relacionadas con las medidas de dispersión: desviación absoluta media, varianza y desviación típica, pero en ningún texto se facilita una definición de la dispersión respecto de la media, como ocurría en el estudio de Del Pino y Estepa (2017), utilizando términos como homogeneidad y concentración para referirse a ella, por ejemplo “*Calcula el coeficiente de variación y valora la homogeneidad del conjunto de datos*” (T1, p. 248). Para las medidas de dispersión se suele presentar la definición y la fórmula o en algunos casos dos fórmulas equivalentes, como por ejemplo para la varianza pero sin explicar su relación (T3, p.207) o, este mismo texto, para referirse a las medidas de dispersión, las denomina “*parámetros estadísticos de dispersión*” (T3, p. 206) sin explicar el significado de parámetro en ningún momento, lo que pueden ser motivos de dificultad

como indican Del Pino y Estepa (2017). El texto [T2] es el único que presenta dos ejemplos y tres ejercicios donde se deben interpretar de forma conjunta la media y la desviación típica (T2, pp.231 y 234), tal y como recomiendan las directrices curriculares. El coeficiente de variación aparece en todos los textos, en general con varios ejemplos y problemas, aunque solo el texto [T1] explica su utilidad y su significado.

En relación con las expresiones específicas de conceptos relacionados con la dispersión, las más utilizadas son los diferentes tipos de frecuencias, las medidas de centralización, las medidas de posición y los diferentes tipos de gráficos, diagramas de barras, de sectores e histogramas. El texto [T1] es el único que dedica un apartado a las técnicas de muestreo (T1, p.234), tema muy relacionado con la dispersión debido a la variabilidad presente en las distintas muestras obtenidas en la repetición de un experimento, y el único que para referirse a la media aritmética la denomina “media aritmética muestral” ([T1], p. 240) y también el único que en lugar de medidas de centralización las denomina “medidas de localización” ([T1], p.240). Otros términos utilizados son las distribuciones de datos y de frecuencias que aparecen solo en [T1], mientras que [T3] la denomina “distribución estadística”. [T3] es el único texto que utiliza la expresión “parámetros de centralización” (T3, p.205), en lugar de medidas de centralización.

En relación con las expresiones relacionadas con la tecnología y la simulación, indicar que el cálculo de medidas estadísticas con calculadora solo aparecen [T2] y [T3]. La tecla Ran de la calculadora solo aparece en un texto ([T1], p.234), indicando que se puede utilizar para obtener cada uno de los n elementos de una muestra. El texto [T2] es el único que dedica un amplio apartado denominado “Estadística con ordenador”, donde explica como calcular medidas estadísticas y realizar gráficos estadísticos con ordenador. En el texto [T1] en un apartado llamado MAT-TIC GeoGebra, propone utilizar la plataforma smSaviadigital.com para realizar prácticas sobre los conceptos tratados en el tema (p.239). Además en dos apartados: “Entorno matemático” propone trabajar con datos reales (p. 254) y en otro de “Autoevaluación” comprobar lo aprendido (p.255). Por último, en [T3] también hay acceso a una plataforma digital, con videotutoriales acerca del contenido y resolución de ejemplos.

4.2. Lenguaje simbólico

En los tres textos analizados aparece una gran diversidad de lenguaje simbólico. Se ha detectado el uso de símbolos de desigualdad solo en un texto “ $CV_A < CV_B$ ” ([T1], p. 243), para indicar que el coeficiente de variación del grupo A es menor que el del grupo B. En todos los textos analizados se encuentran expresiones de igualdad y de operaciones aritméticas. También ocurre lo mismo con la notación funcional y los símbolos literales, aunque existe una diferencia apreciable en la cantidad de veces que son usados en cada uno de los textos. Por ejemplo, en los tres aparece la definición funcional de varianza, desviación típica y coeficiente de variación, sin embargo sólo uno define funcionalmente el rango “ $R = Máx - Mín$ ” ([T2], p. 229).

El uso de conjuntos y sus símbolos aparecen en los textos para enumerar el conjunto total de datos con que se trabaja “ $C_I = \{3,4,4,5\}$ ” ([T1], p. 242) o para definir los intervalos de clases o datos en tablas de frecuencias “[2,4; 2,8]” ([T3], p. 207). También se encuentran las expresiones simbólicas de implicación, para indicar cálculos encadenados, por ejemplo para obtener el coeficiente de variación de una distribución “ $s_x = 7,38 \rightarrow CV = \frac{7,38}{35,0} = 0,21$ ” ([T1], p. 249), y de aproximación, aunque este último sólo en un texto para calcular el número de intervalos en los que se agrupan los datos

$(\sqrt{N} = \sqrt{24} = 4,9 \approx 5$ ([T2] p. 223).

Tabla 3. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Igualdad (=)	x	x	x
Desigualdad (<,>,<=,>=)	x		
Operaciones aritméticas, porcentajes	x	x	x
Conjuntos: ({...})	x		
Intervalos [...], (...]	x	x	x
Aproximación (≈)		x	
Sumatorio (Σ)	x	x	x
Implicación	x	x	
Símbolos literales, notación funcional	x	x	x

En la Tabla 3 se observa que, en general, los tres libros de texto utilizan un lenguaje simbólico muy formalizado, y solo hay pequeñas diferencias: el uso del lenguaje conjuntista que solo aparece en [T1] o el símbolo ≈ que solo aparece en [T2]. El texto [T3] es el que incluye una menor cantidad de expresiones simbólicas. Se observa una gran diversidad de símbolos y un nivel de formalización similar a Ortiz et al. (2017).

4.3. Lenguaje tabular

En los tres textos analizados predominan fundamentalmente dos tipos de tablas: tablas o listados de datos y tablas de frecuencias. En las primeras se muestran los datos experimentales de la variable que servirán para realizar el cálculo directo de parámetros de dispersión (Figura 1.a, [T3], p. 208) o para la construcción de una tabla de frecuencias previa (Figura 1.b, T2, p. 236). De esta última clase de tablas, abundan las de frecuencias absolutas (y acumuladas) en las que aparecen las distribuciones frecuenciales de la variable que pueden usarse para hallar las distintas medidas de dispersión a través de las expresiones simbólicas funcionales definidas en el texto (Figura 1.c, [T2] p. 236). Cabe destacar la menor aparición de las frecuencias relativas y de su representación en forma de porcentaje, ya que únicamente se encuentra en uno de los textos.

<table border="1"> <tr> <td>Planta</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Huerto 1</td> <td>2,1</td> <td>4,5</td> <td>3,8</td> <td>4,7</td> <td>5,2</td> <td>6,0</td> <td>4,9</td> </tr> </table> <p>(a) Tabla de datos</p>	Planta	1	2	3	4	5	6	7	Huerto 1	2,1	4,5	3,8	4,7	5,2	6,0	4,9	<p>0, 2, 4, 1, 5, 0, 0, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 4, 0, 1, 2, 2</p> <p>(b) Listado de datos</p>																																				
Planta	1	2	3	4	5	6	7																																														
Huerto 1	2,1	4,5	3,8	4,7	5,2	6,0	4,9																																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Provincia</th> <th>f_i</th> <th>h_i</th> <th>Porcentaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Albacete</td> <td></td> <td></td> <td>20%</td> </tr> <tr> <td>Ciudad Real</td> <td></td> <td>0,15</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cuenca</td> <td>21</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Guadalajara</td> <td></td> <td></td> <td>10%</td> </tr> <tr> <td>Toledo</td> <td></td> <td>0,2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>60</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>(c) Tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes (incompleta)</p>	Provincia	f_i	h_i	Porcentaje	Albacete			20%	Ciudad Real		0,15		Cuenca	21			Guadalajara			10%	Toledo		0,2		Total	60			<table border="1"> <thead> <tr> <th>Preocupación</th> <th>2004</th> <th>2014</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Desempleo</td> <td>57,3</td> <td>77</td> </tr> <tr> <td>Sanidad</td> <td>5,8</td> <td>8,6</td> </tr> <tr> <td>Corrupción</td> <td>0,4</td> <td>63,8</td> </tr> <tr> <td>políticos</td> <td>8,4</td> <td>23,3</td> </tr> <tr> <td>Economía</td> <td>12</td> <td>25,5</td> </tr> <tr> <td>Educación</td> <td>3,7</td> <td>7,7</td> </tr> <tr> <td>Terrorismo</td> <td>42,1</td> <td>0,1</td> </tr> </tbody> </table> <p>(d) Tabla de doble entrada</p>	Preocupación	2004	2014	Desempleo	57,3	77	Sanidad	5,8	8,6	Corrupción	0,4	63,8	políticos	8,4	23,3	Economía	12	25,5	Educación	3,7	7,7	Terrorismo	42,1	0,1
Provincia	f_i	h_i	Porcentaje																																																		
Albacete			20%																																																		
Ciudad Real		0,15																																																			
Cuenca	21																																																				
Guadalajara			10%																																																		
Toledo		0,2																																																			
Total	60																																																				
Preocupación	2004	2014																																																			
Desempleo	57,3	77																																																			
Sanidad	5,8	8,6																																																			
Corrupción	0,4	63,8																																																			
políticos	8,4	23,3																																																			
Economía	12	25,5																																																			
Educación	3,7	7,7																																																			
Terrorismo	42,1	0,1																																																			

Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos.

El texto [T2] muestra algunas tablas incompletas, por ejemplo Figura 1.c, ([T2] p. 236),

para que el alumno las complete. Aunque las tablas de doble entrada suelen aparecer en estadística bidimensional, en los libros analizados encontramos alguna para comparar dos variables unidimensionales, bien confrontando valores de dispersión y localización o bien mediante diagrama de barras adosadas.

En la Tabla 4 se observan pocas diferencias entre los textos analizados. El texto [T2] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje tabular. Un posible conflicto para el alumnado puede ser la lectura y en algunos casos la construcción de todos estos tipos de tablas, puesto que cada una de ellas tiene sus propios convenios y utilidad. En este estudio también aparece una gran diversidad de lenguaje tabular y de complejidad similar que en Ortiz et al. (2017).

Tabla 4. Lenguaje tabular

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Tablay listado de datos	x	x	x
Tabla de frecuencias absolutas	x	x	x
Tabla de frecuencias relativas	x	x	
Tabla de porcentajes		x	
Tabla de doble entrada	x	x	x

4.4. Lenguaje gráfico

Según Batanero et al. (2015), cualquier representación gráfica de una distribución de datos lleva implícita la idea de dispersión en los datos y en los rangos, aunque los gráficos de cajas constituyen la representación más adecuada para comparar distribuciones y estudiar la dispersión.

En este trabajo han aparecido una gran variedad de gráficos que permiten calcular o estimar la dispersión de la distribución propuesta: Diagramas de barras o gráfico de sectores que permiten representar las variables cualitativas, o diagrama de barras adosadas lo que supone un mayor nivel de complejidad, según Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), ya que representan conjuntamente dos distribuciones de datos, Figura 2.a (T2, p.224); polígonos de frecuencias para representar variables cuantitativas discretas. Histogramas de frecuencias absolutas, relativas o acumuladas que se utilizan para las variables continuas, debiendo tener en cuenta que su construcción puede tener cierta dificultad para los estudiantes en el caso de que los intervalos no sean de la misma longitud; polígonos de frecuencias correspondiente a un histograma de frecuencias absolutas o relativas, Figura 2.b (T1, p.239). En dos textos hemos encontrado un ejemplo de cómo se calcula la mediana en el caso de una variable continua con datos agrupados con la ayuda de un gráfico, Figura 2.c (T3, p.205). En T3 aunque cita los diagramas de barras, histogramas y gráficos de sectores solo aparecen dos ejemplos de gráficos de histogramas.

A pesar de las recomendaciones curriculares y de investigaciones como Batanero et al. (2015), la presencia de los gráficos de cajas es muy escasa. En [T1] hemos encontrado un ejemplo donde se utiliza el diagrama de caja para comparar las tasas de natalidad y mortalidad en España de 1976 a 2011, Figura 2.d ([T1], p.245) y posteriormente un problema ([T1], p.252). En [T2] hay un ejemplo y un ejercicio, pero solo se trata de interpretar la simetría o no de los datos de una distribución en situaciones descontextualizadas ([T2], p.233). En [T3] no se hace referencia a este tipo de gráfico.

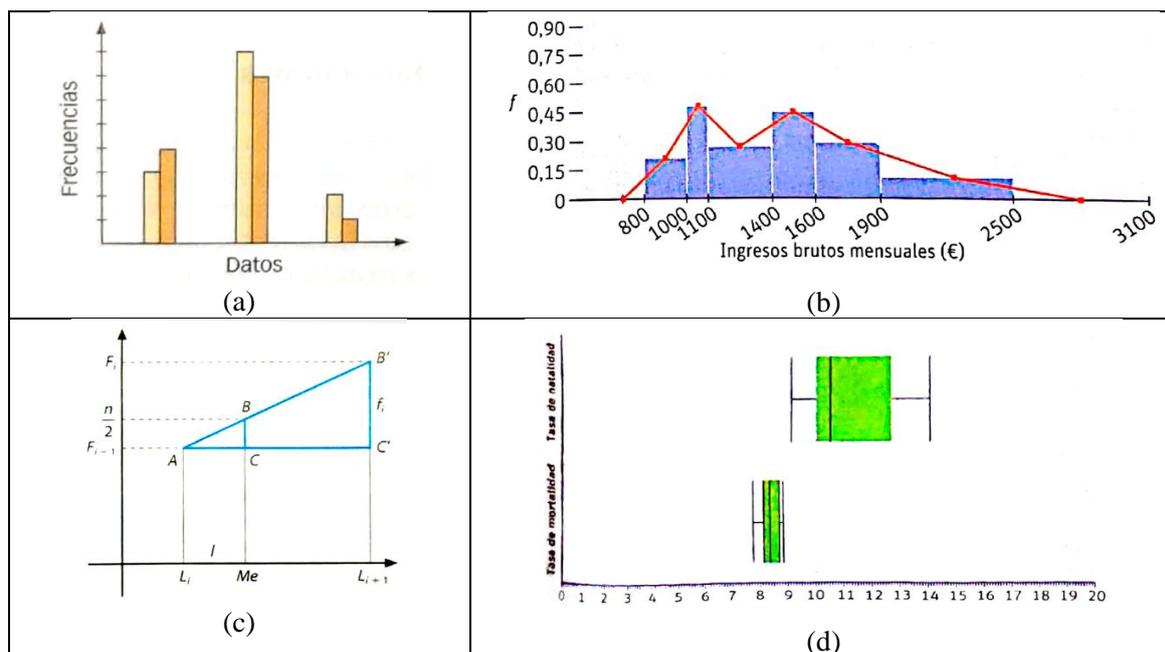


Figura 2. Distintos tipos de gráficos encontrados en los textos

Tabla 5. Lenguaje gráfico

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Diagrama de barras	X	X	
Diagrama de barras adosadas	X	X	
Gráfico de sectores	X	X	X
Gráfico cálculo mediana	X		X
Histograma	X	X	X
Polígono de frecuencias	X	X	
Polígono de frecuencias en histogramas	X	X	
Diagrama de caja	X	X	
Pirámide de población, Pictograma		X	
Fotos e imágenes	X	X	X

En la Tabla 5 se observan algunas diferencias entre los libros. Los textos [T1] y [T2] son los que presentan una mayor variedad de lenguaje gráfico. El texto T2 es el único donde aparecen un pictograma ([T2], p. 233) y pirámides de población ([T2], p. 233). El cálculo de la mediana con la ayuda de un gráfico solo se encuentra en [T1] y [T3]. En los tres textos aparecen fotos e imágenes relacionadas con el tema o con el contexto de los problemas. En el estudio de Ortiz et al. (2017) también aparecen diagramas de barra y adosados y representaciones icónicas, aunque hay gráficos más complejos relacionados con inferencia estadística, diferencias lógicas ya que son textos de segundo curso de bachillerato.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la gran diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que puede suponer para el alumnado. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de estadística.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la dispersión y de

conceptos relacionados con ella, siendo menor el número de expresiones cotidianas como ocurría en Ortiz et al (2017). En contra de las recomendaciones curriculares y de las investigaciones es muy escasa la presencia de los gráficos de caja, a pesar de su utilidad en el tema de la dispersión. Todos los textos remiten a plataformas que permiten realizar prácticas sobre lo estudiado.

Se han encontrado términos, como dispersión que no se definen, que pueden ser interpretados de una forma que no se corresponde con el significado matemático, y definiciones y fórmulas de un mismo concepto sin aclarar su relación, que pueden provocar en el alumnado un conflicto semiótico, que coincide con Del-Pino y Estepa (2017). Por ello, el profesorado debe estar vigilante y, en caso de que se produzca algún conflicto en el estudiante, aprovechar la oportunidad para dar sentido y significado al lenguaje que lo provoca.

Agradecimientos: Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Anexo: Textos empleados en el análisis.

- [T1] Alcaide, F., Sanz, L., y Hernández, J. (2015). *Matemáticas aplicadas a la Ciencias Sociales I, 1 Bachillerato*. Madrid: SM.
- [T2] Grence, T. (Dir.) (2015). *Matemáticas aplicadas a la Ciencias Sociales I, 1 Bachillerato*. Serie Resuelve. Madrid: Santillana.
- [T3] Bescós E. y Pena, Z. (2015). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, 1 Bachillerato*. Madrid: Oxford University Press.

Referencias

- Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education* 19(2), 118–126.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam. The Netherlands: Sense Publishers.
- Batanero, C., González-Ruiz, I., López-Martín, M. del M. y Contreras, J. M. (2015). La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad. *Epsilon*, 32(2), 7-20.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, 10(1), 7-38.
- Del-Pino, J. (2017). *Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.
- Del-Pino, J. y Estepa, A. (2017). Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. del M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, España. Disponible en: <http://digibug.ugr.es/handle/10481/45411>.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Ortiz, J. J., Mohamed, J. J., Serrano, L., y Albanese, V. (2017). La estimación de la media: Análisis del lenguaje en libros de texto de Bachillerato. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386). Zaragoza: SEIEM.
- Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Springer Netherlands.
- Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23, 139-159.
- Shuard, H. y Rothery, A (Eds) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.
- Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.