

Explorando las ideas en la E.S.O. sobre probabilidad condicionada

Exploring the ideas in the E.S.O. about conditional probability

Purificación Rastrollo¹ y José María Cardeñoso²

¹ IES Francisco Javier de Uriarte, El Puerto de Santa María,

²Universidad de Cádiz, España

Resumen

Debido a los escasos conocimientos en probabilidad de los alumnos de la educación básica obligatoria actualmente, se pretende con este trabajo explorar los conocimientos sobre probabilidad condicionada de los alumnos, a través del uso de la paradoja de Monty Hall, en un estudio de caso realizado en un IES de Cádiz al término de la ESO de Matemáticas Académicas. La investigación se ha llevado a cabo mediante una metodología que comprende diferentes etapas, usando el portafolio para recoger todas las respuestas y razonamientos de los aprendices. Se concluye la mejora en las respuestas y en los sistemas de ideas que las sustentan, cuando se realiza simulaciones y generaliza la paradoja.

Palabras clave: Probabilidad condicional, razonamiento, paradoja, espacio muestral, tendencias pensamiento.

Abstract

Due to the limited probability knowledge of compulsory basic education students at present, this work is intended to explore students' knowledge in conditional probability through the use of the Monty Hall paradox, in an IES of Cádiz at the end of the ESO academic mathematics. The research has been carried out through a methodology in different stages, where we use the portfolio through which we will collect all the students' answers and reasoning. We conclude the improvement in the answers and the systems of ideas supporting them, when simulations are carried out and the paradox is generalized.

Keywords: Conditional probability, stochastic, paradox, sample space, thought tendencies.

1. Introducción

La probabilidad en la educación actual es desconocida por muchos alumnos que cursan matemáticas en la educación secundaria obligatoria. Así, es importante mostrar estrategias en las que a través de actividades diferentes a las comunes que se realizan en un aula, se puedan explorar y desarrollar conceptos relacionados con la misma, en este caso, en torno a la probabilidad condicionada. Este trabajo aporta los resultados de un análisis exploratorio sobre los conocimientos probabilísticos finalizando la ESO a través de la identificación, clasificación y tipificación de sus respuestas a la paradoja de *Monty Hall*, usada desde un punto de vista educativo (Batanero, Fernandes y Contreras, 2009). Con ello se pretende que la enseñanza esté basada en provocar el conflicto constructivista y para ello la paradoja es fundamental, pues invita a la reflexión individual por parte del alumno.

La paradoja será llevada a cabo de tal manera que este trabajo sea visto como una forma no sólo de poder acercar las matemáticas a los estudiantes, sino un ejemplo para futuros docentes en el cambio de metodologías entorno a nuestra materia. Además, se espera que pueda servir de motivación para aquellos que encuentran en la probabilidad una parte secundaria o de menor importancia, y que haga que quede relegada a un segundo plano en la educación de los estudiantes en todas las etapas. Finalmente, todos los elementos anteriormente señalados en conjunto pretenden buscar una motivación en el

alumno hacia la actividad matemática en el aula de la ESO, de tal forma que se posibilite el aprendizaje de la probabilidad a través de esta práctica. Son varias las soluciones correctas y las diferentes maneras en las que ésta puede venir dada. Por un lado, de manera intuitiva y por otro lado de manera más formal o matemática.

2. Justificación del estudio

Previamente a diseñar e implementar la planificación diseñada en el aula como un taller, nos planteamos que uso de las *apps* en la sociedad actual, donde los alumnos están usando dispositivos móviles constantemente, hace que se pueda mostrar al alumno una nueva utilidad de estos recursos y enseñándoles una parte divertida, a la vez que académica, de usar dichos dispositivos. Por un lado, y como eje fundamental de la investigación, ver cuáles son los conocimientos de los alumnos en probabilidad condicionada. En particular, nos interesamos por las diferentes soluciones y respuestas que los alumnos dan a la paradoja de Monty Hall, y detectar dificultades que puedan encontrar ante la misma. Junto a ello y como parte importante de la exploración nos planteamos si el aumento del número de puertas en la realización de la actividad produce un efecto relevante en la respuesta de los alumnos.

Respecto a la paradoja de *Monty Hall* que nos ocupa, existen trabajos que realizan un análisis del mismo. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por Batanero, Fernandes y Contreras, (2009), donde ponen de manifiesto los objetos matemáticos implicados en dicha paradoja; también analizan el significado que estos objetos tienen en la situación y asociándolos con las diferentes soluciones dadas con anterioridad en Escrich, Gigante y García (2015). Nos apoyaremos en Agnelli y Peparrelli (2011) a la hora de identificar las etapas del proceso de realización del experimento de enseñanza (Osorio, Suárez y Uribe, 2013). Por otro lado, para el diseño del taller de enseñanza, nos ayudó Azcárate y Cardeñoso (2011), Batanero et al. (2012) y Díaz, Batanero y Contreras, (2010).

3. Fundamentación teórica

Nos hemos basado en investigaciones previas sobre la paradoja de *Monty Hall*, para posteriormente poder conformar un marco teórico adecuado a la situación y poder sacar conclusiones exploratorias de la realidad del caso de IES gaditano. De esa forma, tras realizar un análisis de las diferentes fuentes teóricas y posibles soluciones a la paradoja (Contreras, Batanero y Fernández, 2010, y Contreras, 2011), se elaboró el sistema de categorías para interpretar las respuestas encontradas. También se elaboró un segundo sistema de categoría atendiendo a las potenciales tendencias de pensamientos de los estudiantes (Cardeñoso, 2001; Cardeñoso y Azcárate, 2004) como emergente operativo para la comprensión de los datos obtenidos. Esta fase nos permitió conceptualizar el campo e identificar resultados relacionados en otros autores, como Batanero, Contreras y Díaz (2014), Batanero, Fernandes y Contreras (2009), Borovcnik (2012) o Cardeñoso et al. (2017). El estado del arte conlleva una reflexión detallada sobre este tópico escolar (Rastrollo, 2018). Gracias a ello, hemos podido también conocer las dificultades que nos podríamos encontrar en el desarrollo de la práctica con los alumnos y tenerlas en cuenta para responder a las preguntas que nos hacemos en esta investigación, teniendo en cuenta los resultados de Correia y Fernandes (2013), Fernandes et al. (2011) y Fernandes, Correia y Contreras (2013).

4. Diseño metodológico y secuenciación

Para llevar a cabo esta actividad de enseñanza, se contó con el apoyo del profesorado de matemáticas, así como el de la directora del mismo del centro ÍES. *Francisco Javier de Uriarte*, donde se decide realizar dicha actividad por facilidad de acceso. La actividad se trabajó con alumnos de entre 15 y 17 años que cursan Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Hemos contado con la participación de 63 alumnos, distribuidos en tres grupos correspondientes a los cursos de 4^o de la E.S.O, acabando el año académico, donde ningún alumno posee conocimientos previos en estadística y probabilidad. La actividad ha sido programada para una duración de 50 minutos desarrollándose íntegramente en el aula, las cuales están dotadas con pizarra digital y conexión a Internet. Para recabar los datos necesarios hemos elaborado un portafolio que era entregado a los alumnos al inicio de cada sesión.

Cada una de las dos sesiones está dividida en tres etapas. Una primera etapa en la que a través de un código QR que se encuentra en el portafolio que se les entrega a los alumnos, éstos pueden acceder a una aplicación realizada en Geogebra sobre la paradoja de Monty Hall, donde pueden simularla tantas veces como quieran (Batanero, 2009). Dicha simulación está realizada con tres puertas y cuenta con contadores que proporcionan el número de intentos, los fallos y los éxitos. En una segunda sesión, se utiliza un dispositivo realizado para la actividad con 5 puertas y con la ayuda de todos los alumnos se simula dicha paradoja, en primer lugar, con 4 puertas, posteriormente, con 5 puertas. Una vez realizadas dichas simulaciones llegamos a la tercera etapa donde se les propone generalizar a los alumnos al caso de tener n puertas en la paradoja.

La metodología investigativa es de carácter exploratorio, en la modalidad de estudio de caso, que trata de obtener, reducir y clasificar las respuestas obtenidas mediante la técnica de análisis de contenido de las respuestas de los aprendices. Estas respuestas son recogidas en el portafolio diseñado a tal efecto, mientras avanza en la realización de las actividades que configuran el experimento de enseñanza. Una vez identificadas las respuestas existentes en la literatura sobre probabilidad condicional relacionadas con esta paradoja, se analiza el posible sistema de ideas desde donde se sustentan las respuestas dadas por los estudiantes.

La metodología seguida para poder realizar este análisis está basada en un sistema de categorías, centrándonos en las diferentes vertientes que tiene la pregunta que se les plantea a los alumnos: *cuando el presentador te da la opción de cambiar, ¿es mejor mantener tu elección inicial o cambiarla?* Se pretende identificar los errores que Contreras (2011) establece como los más comunes en el desarrollo de esta paradoja, y que hemos tenido en cuenta también en la elaboración del sistema de categorías.

C1. Identificación de la influencia de la probabilidad. La primera pregunta que aparece en el portafolio está relacionada con la identificación de la probabilidad en la paradoja. Es importante conocer previamente cuál es el punto de partida de cada estudiante, de cara a realizar un análisis de los razonamientos que realicen posteriormente, teniendo en cuenta que los conocimientos previos son escasos o prácticamente nulos.

C2. Solución basada en la falacia del eje temporal. Por su parte, esta categoría se encuentra relacionada con unas dificultades relacionadas con la paradoja en las que el error es no tener en cuenta la puerta que el presentador abre y, por lo tanto, cómo influye este hecho en considerarlos como sucesos independientes.

C3. Solución basada en la equiprobabilidad apriorística. En este caso, englobaríamos aquellas respuestas que consideran como solución a la paradoja la igual probabilidad de ganar el premio. Es decir, los razonamientos que estén basados en considerar que las

probabilidades de ganar son iguales que las de no ganarlo. Distinguiremos entre:

C.3.1. *No comprensión del espacio muestral.* El razonamiento que se lleva a cabo lleva a la conclusión de que mantener tu elección o cambiarla no aumenta ni disminuye tus posibilidades de ganar, es decir, un problema con el espacio muestral en cada situación.

C.3.2. *Incorrecta asignación de probabilidades.* Esta respuesta está relacionada con una incorrecta asignación de probabilidades en la puerta que el presentador muestra como no premiada.

C4. *Solución basada en la creencia de la ley de los pequeños números.* Es la respuesta dada por los alumnos que, realizando pocas repeticiones en la simulación de la paradoja, creen estable la estimación; en general, está relacionada con la idea de que cambiar o no la puerta, no implica ningún cambio en tus probabilidades de ganar premio.

C5. *Solución basada en la simulación.* Son aquellas soluciones que se dan a partir de cuantificar la frecuencia en función de los resultados obtenidos de la simulación del experimento un número suficiente de veces; consideran que pueden obtener una buena aproximación de la frecuencia con la que cada uno de los sucesos ocurre.

C6. *Solución basada en la regla de Laplace.* En este caso, distinguimos entre las dos siguientes categorías, ambas teniendo en cuenta la relación aditiva o multiplicativa entre casos favorables, desfavorables y los totales del espacio muestral del fenómeno.

C.6.1. *Laplaciana.* En este caso se proporciona una solución más formal, basada en la relación multiplicativa expresada por la regla de Laplace, entre casos favorables y casos totales en la asignación de probabilidades.

C.6.2. *Contingencia.* En este caso, se realiza en base a la relación aditiva entre los casos favorables y desfavorables del espacio muestral simple del fenómeno.

C7. *Solución basada en el azar o incertidumbre intrínseca del fenómeno.* Las respuestas basadas en el azar y que no encuentran ningún patrón a los distintos resultados que van sucediéndose. Argumentan en base a la aleatoriedad de la situación, ya que es imprevisible una respuesta correcta, puesto que ninguna de ellas nos garantiza el éxito.

C8. *Soluciones basadas en la causalidad.* Que está sustentada en la inexistencia de un patrón en la solución de la paradoja, esto es, que existen factores externos que no permiten el control de la elección final. No existe una causa aparente que nos permita controlar los diferentes sucesos o simplemente que no se posee la suficiente información como para dar una regla o solución al problema planteado.

C9. *Expresión de la solución.* A la hora de realizar la expresión de la solución final, hemos considerado aquellos que simplemente expresan con lenguaje cotidiano dicha solución, usan un gráfico o aquellos que utilizan el lenguaje matemático para expresarlo.

C.9.1. *Haciendo uso un diagrama o dibujo.* Realizan una representación de la solución haciendo uso de dibujos, diagramas o esquemas.

C.9.2. *Verbal.* Realizan una explicación de la situación sin hacer uso de ningún concepto que implique a la probabilidad.

C.9.3. *Usando lenguaje matemático.* Se identifican los elementos de la paradoja, como es el espacio muestral, los sucesos, los casos posibles y totales.

Debemos añadir también los casos de los alumnos que no contestan a las preguntas

planteadas o que declaran que, simplemente, no saben la respuesta. A la luz de las tendencias de pensamiento establecidas por Cardeñoso (2001), Cardeñoso y Azcárate (2004) podemos clasificar los razonamientos a las respuestas en función de diferentes tipos: Determinista, Causalidad, Personalista, Incertidumbre y Contingente. Además, en cada una de las etapas y con el objetivo de poder contestar a las preguntas de investigación y cubrir los objetivos de la misma, hemos recogido información acerca de la influencia del número de puertas en la paradoja y la solución que los alumnos dan, si es mantener la elección inicial o cambiarla cuando tiene oportunidad.

5. Resultados y discusión

Mostramos las respuestas por categorías. La respuesta a la categoría 1 sobre el reconocimiento de la incertidumbre de la situación, arroja un 45% de casos favorables en el grupo A, un 42,86% en el B y un 9,09% en el C. Respecto al lenguaje utilizado para las soluciones aportadas, es muy dominante el verbal, independientemente de la etapa del experimento o grupo aula, llegando a sobrepasar el 70% en varias ocasiones. En la figura 1 se muestra el uso de cada categoría, con su código de color correspondiente, en cada uno de los grupos, A, B y C, respectivamente. Su porcentaje se indica en el eje horizontal y en el vertical, los tres momentos de toma de datos.

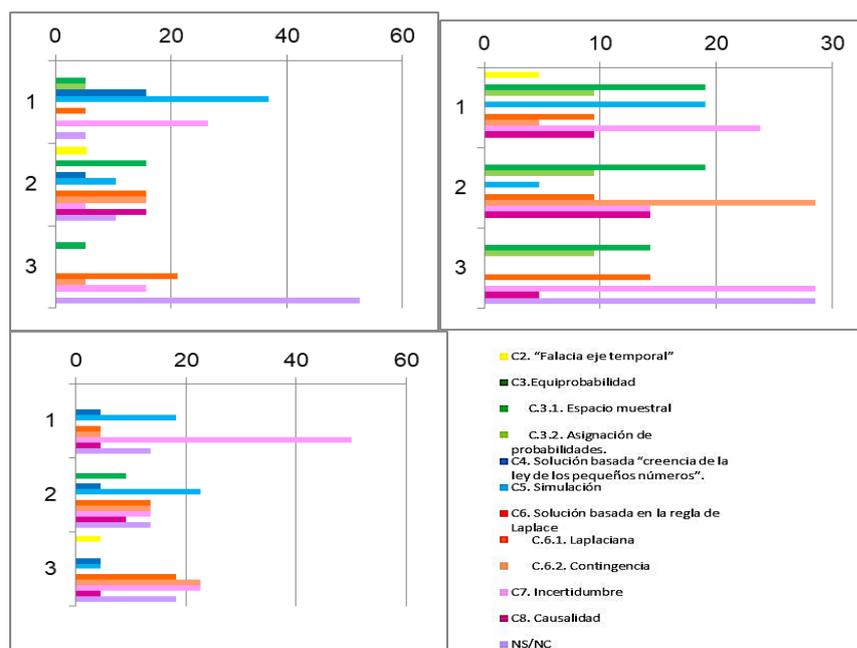


Figura 1. Datos por grupo aula y categorías

Tras el análisis de los datos observamos una mala concepción, y falta de conocimientos sobre el concepto de probabilidad condicionada. Este hecho se ve reflejado en que pocos alumnos han sabido dar una respuesta correcta a la paradoja, como hemos visto en el análisis de resultados. Además, muchas de las tendencias de pensamiento que se ven reflejadas en sus respuestas, tales como la relacionada con la *falacia de eje temporal*, como en las respuestas basadas en una mala concepción del espacio muestral y aquellas que definíamos como soluciones basadas en la contingencia, lleva implícitamente dicho concepto de probabilidad condicionada como erróneo.

Al estudiar cómo el aumento del número de puertas repercutía en las respuestas de los

alumnos, nos propusimos ver el progreso de un alumno a lo largo de las tres etapas, para ver la evolución que éste presenta en cuanto a sus razonamientos en las respuestas. La simple ojeada a la Figura 2 no nos permite dicha afirmación, apareciendo una gran diversidad de reacciones, algunas seriamente involutivas.

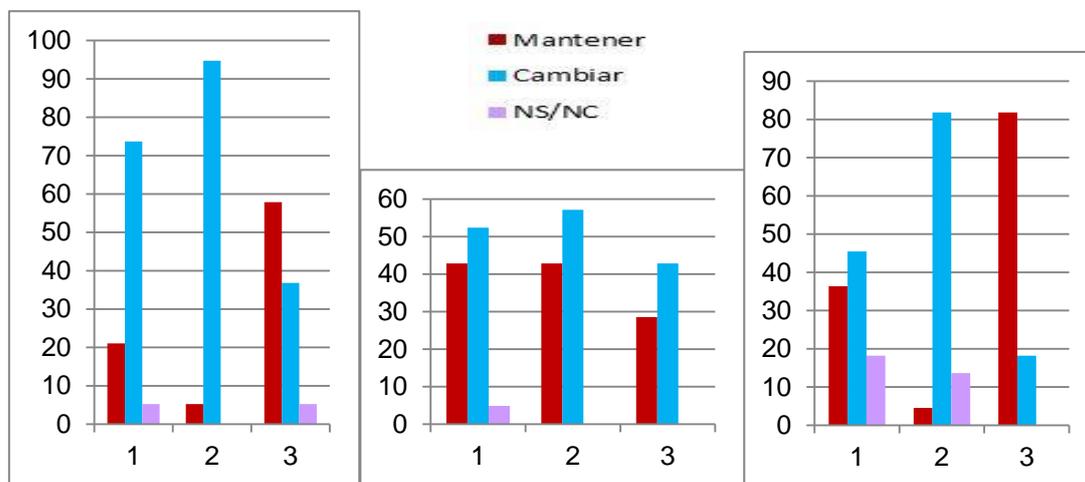


Figura 2. Respuestas por momento y grupo

Como ejemplo de evolución vamos a mostrar el seguimiento de los razonamientos de un alumno a lo largo de todo el taller. Se trata del alumno 4C3. Este alumno en la primera etapa proporciona la siguiente respuesta en relación con la opción de mantener o cambiar de puerta: *“Mi respuesta es que el azar rige el juego. Es aleatorio. Sin embargo, veo que mantendría mi opción porque es el primer ‘instinto’ que me ha dado”* (Alumno 4C3). Este alumno, realiza el experimento con la aplicación 16 veces de las cuales la mitad gana el premio y la mitad lo pierde. Cuando se le pregunta sobre la comparación de resultados con los compañeros, argumenta que no ha cambiado su postura, luego sigue creyendo que mantener es la mejor opción. Sin embargo, cuando llegamos a la segunda etapa sus argumentaciones comienzan a ser más formales. En el caso de 4 puertas, cuando se le pregunta sobre si el número de puertas influye en la elección, afirma: *“Sí, porque hay más opciones y dudas cual coger”* (Alumno 4C3).

Cuando se le pregunta por el caso de 5 puertas, su argumentación es idéntica, de manera que cuando se le pide generalizar en la tercera fase, continúa pensando que cambiar es la mejor opción que tomar. Se ve reflejado en su respuesta la comprensión de cómo a mayor número de puertas, mejor es la comprensión de la paradoja, pues comenta: *“Con 100 puertas es aún más evidente que habría que cambiar”*. En el caso de n puertas, argumenta de manera idéntica que en la etapa dos, con el matiz de que n no puede valer 2. Así, vemos la evolución de un alumno que, tras su propia experiencia, la realizada en el aula y el debate con el resto de compañeros presenta una evolución en su respuesta, que inicialmente consideraba azarosa y que llega a fundamentar posteriormente.

Otro objetivo era estudiar cómo el debate que se plantea en las dos primeras etapas influye en el cambio de opinión de los alumnos. Estos debates se encuentran influenciados por la disposición de los alumnos en el aula. Así, algunas de las respuestas que los alumnos proporcionan en cuanto al cambio de opinión respecto a su experiencia y tras compartirla con sus compañeros, en general, son que no cambian de opinión. Sin embargo, muchos de ellos, tras el debate sí lo hacen. Algunas de las respuestas más significativas, incluidas a continuación, ilustran lo evidenciado.

Como consecuencia de realizar este experimento hemos podido comprobar la influencia

de las creencias y la intuición en la respuesta de los alumnos. Nos encontramos con respuestas de los estudiantes como las siguientes: “No he seguido ninguna estrategia, lo único que he hecho ha sido nunca escoger el mismo número dos veces seguidas” (Alumno 4C10). Algunos incluso desconfían del presentador y basan en ello sus decisiones: “No hacer caso al presentador porque puede que escojas la puerta correcta y él te haga cambiarla para no ganar el premio” (Alumno 4A1), considerando, por tanto, que mantener tu puerta inicial es la mejor de las opciones.

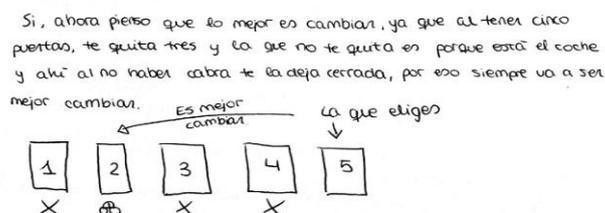


Figura 3. Respuesta de 4A19 tras la comparación de resultados con los compañeros

El uso de la paradoja para la comprensión de los conceptos probabilísticos es otro de los objetivos específicos marcados que se han quedado fuera de nuestro alcance ya que, a pesar de dar la solución al final de cada sesión explicando los conceptos matemáticos que se encuentran detrás, no hemos podido comprobar con posterioridad si esas ideas han sido adquiridas por parte los alumnos y si el uso de la paradoja ha ayudado a este propósito. Por último, pretendíamos con esta investigación ver cómo la manera en la que los estudiantes expresaban sus respuestas tenían relación con las mismas.

6. Segundo nivel de reflexión y conclusiones

Por otro lado, nos planteamos otra serie de cuestiones de investigación, y que han sido influyentes en los resultados obtenidos en el aula. El lenguaje utilizado por parte del docente en el aula, el cual no es el mismo en todas ellas, ya que tras realizar el taller en cada clase se perciben sensaciones de cómo los alumnos han asimilado la actividad y se realizan modificaciones con respecto a las siguientes, simplemente en gestos o información que los estudiantes demanden.

También la actitud de los diferentes grupos es distinta, aunque todos ellos cursan matemáticas académicas, no todos pretenden estudiar una carrera técnica donde las matemáticas jueguen un papel importante. El profesor de matemáticas ya nos comentó que en concreto el grupo B no presentaba en general un gran interés hacía ninguna de las actividades planteadas ni hacia la materia en sí, como sí ocurría en el resto de grupos. Esto se ha visto reflejado en los resultados como se ha comentado anteriormente, pues la poca motivación hacía la actividad, repercutió en la falta de participación cuando se requería y, por lo tanto, la no simulación suficiente con el dispositivo, lo que no les permitió sacar otras conclusiones al respecto, obteniéndose respuestas más superficiales y poco profundas.

Nos preguntábamos a cerca de las ventajas y desventajas que el llevar la probabilidad condicionada al aula en forma de simulación en una aplicación, y posteriormente en el aula han tenido en las respuestas de los estudiantes. Hay que tener en cuenta que las elecciones realizadas por los estudiantes no eran las mismas y el tiempo que se ha invertido en realizar la simulación a través del dispositivo, ha sido, por cuestiones relacionadas con el ritmo del aula distinta en cada uno de los grupos. Esto nos ha llevado a tener en unos grupos un mayor número de simulaciones que en otros, lo cual

tiene una repercusión directa en la respuesta de los estudiantes. Este es uno de los motivos por los que sacar conclusiones en conjunto, puede llevar a error, ya que las condiciones en las que se ha realizado el experimento, aunque se ha intentado que los tiempos fueran lo más parecido posibles, no ha podido realizarse así, ya que fueron modificados en función de la demanda de los alumnos de cada grupo. También plantear la actividad como paradoja presenta limitaciones en su aplicación en el aula y tienen repercusión en los datos que hemos obtenido.

A la luz de las tendencias establecidas por Cardeñoso (2001) podemos clasificar las respuestas de los alumnos en función de las diferentes tendencias presentadas: Determinista, Causalidad, Personalista, Incertidumbre y Contingente. Además, vamos a identificar los errores que Contreras (2011) establece como los más comunes en el desarrollo de esta paradoja, tenida en cuenta también en el sistema de categorías.

Para la primera de ellas, la tendencia Determinista se corresponderá con aquellos estudiantes que no consideran la paradoja algo aleatorio, sino que realizan el cálculo de probabilidades apropiado para llegar a una conclusión algorítmicamente correcta. Se encontrarían en este grupo alguno de los estudiantes que dan una solución basada en la regla de Laplace. Aunque otros, parecen razonar su uso, como se puede ver en la respuesta del alumno 4B16: *“tienes que cambiarlo porque así tienes más probabilidades de que te toque el coche, si tú eliges la del coche hay 1 probabilidad entre 3 de que te toque el coche, mientras que si eliges una cabra te van a quitar la otra cabra. Por lo que, si eliges una de las dos te toca el coche, con una probabilidad de 2 entre 3”*.

Tabla 1. Porcentajes de las concepciones en base a las soluciones del alumnado

Concepción o sistema de ideas	1º etapa	2º etapa	3º etapa
Tendencia Determinista	9.7	32.3	27.2
Tendencia Causalidad	17.7	30.7	30.7
Tendencia Personalista	41.9	16.1	25.8
Tendencia Incertidumbre	24.2	12.9	1.6
Tendencia Contingente	3.2	19.4	9.7

La tendencia Causal recogerá a todos los alumnos que den una respuesta en que las soluciones estén basadas en la causalidad y en la equiprobabilidad. Un ejemplo de este tipo de respuesta dada por el alumno 4B10 es la siguiente argumentación: *“...Me han hecho dudar y he llegado a la conclusión de que tienes al principio un 50%, ya que sabes que te van a quitar una cabra, con lo que siempre vas a acabar eligiendo entre una cabra y un coche”*. Aquí vemos un error dentro del espacio muestral.

Por su parte, en la tendencia Personalista incluimos las respuestas basadas en el azar subjetivo, en la *falacia del eje temporal* y en las dadas según la *ley de los pequeños números*. En esta tendencia se encuentra los razonamientos que Contreras (2011) incluye dentro de los errores relacionados con una mala percepción de la independencia. Los estudiantes consideran sucesos independientes el suceso de elegir la puerta inicialmente y el suceso de la puerta que abre el locutor. Sobre las respuestas basadas en la incertidumbre encontramos algunas como la siguiente: *“Elegir una puerta al azar y después cambiar de elección”* (Alumno 4C6).

Pero también otras, relacionadas con la *ley de los pequeños números*, como la afirmación del alumno 4C5, *“No tengo estrategia, siempre que no cambio me sale una cabra. Por eso creo que hay que cambiar para que te salga el coche”*. Se encuentra

relacionado con un razonamiento erróneo basado en la interpretación incorrecta de la convergencia, ya que como afirma Contreras (2011), la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad se cumple a largo plazo, pero no en pequeñas series de ensayos (p. 300), como es el caso de las simulaciones que realizan nuestros estudiantes.

La tendencia a la Incertidumbre la asociamos con las respuestas basadas en la simulación. Pertenecen a esta tendencia respuestas como la siguiente: “*la estrategia es cambiar de puerta, ya que después de repetirlo he cambiado de opinión. He observado que se obtienen mejores resultados*” (Alumno 4A19).

Por último, la tendencia Contingente, no se corresponde con ninguna de las respuestas dadas en general, sino con la respuesta de la subcategoría considerada en las respuestas dadas según la Regla de Laplace y que, por lo tanto, viene dado por 3.22%, 19.35% y 9.67%, como podemos observar en la tabla 1.

Por su parte, en el caso de la tendencia Personalista incluimos las respuestas basadas en el azar, en la *falacia del eje temporal* y en las dadas según la *ley de los pequeños números*. En esta tendencia se encuentra los razonamientos que Contreras (2011) incluye dentro de los errores relacionados con una mala percepción de la independencia. Los estudiantes consideran sucesos independientes el suceso de elegir la puerta inicialmente y el suceso de la puerta que abre el locutor. Sobre las respuestas basadas en la incertidumbre encontramos algunas como la siguiente: “*Elegir una puerta al azar y después cambiar de elección*” (Alumno 4C6).

Finalmente, en relación a lo citado por Cardeñoso *et al.*, (2017) en el capítulo sobre fundamentación teórica, existía en sus estudios una relación entre la equiprobabilidad y las tendencias deterministas e incertidumbre, donde se encontraban los porcentajes de mayor respuesta a base a dicha equiprobabilidad. En nuestro caso, la categoría relacionada con la equiprobabilidad, se encuentra dividida en dos subcategorías, relacionadas con errores dentro del espacio muestral y una incorrecta asignación de probabilidades.

De ese modo, y prestando atención a lo desarrollado en este apartado, vemos que existe una relación con aquella tendencia determinista, en la que se producen errores con los experimentos y el espacio muestral, y donde se producen, de entre el resto de tendencias los porcentajes más altos, sobre todo en la segunda y tercera etapa. Por otro lado, si fijamos nuestra atención en la tendencia incertidumbre, estos porcentajes de alumnos con argumentos donde la equiprobabilidad se encuentra detrás no son tan altos. Destacar cómo el porcentaje más alto se encuentra en la tendencia personalista, que guardaba relación con la *falacia del eje temporal* y, por tanto, con incorrectas las concepciones sobre el espacio muestral y que tienen su efecto en la equiprobabilidad, según Cardeñoso *et al.*, (2017); luego los resultados obtenidos guardan relación con lo esperado.

Referencias

- Agnelli, H., y Peparrelli, S. (2011). Las paradojas, un vehículo para superar obstáculos en el aprendizaje de la probabilidad. *Revista de Educación Matemática*, 26, 1-12.
- Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (2011). La enseñanza de la estadística a través de escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Bolema*, 24(40), 789-810.
- Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 37-54.

- Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2014). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet* 12(2).
- Batanero, C., Fernandes, J. A., y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62, 11-18.
- Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas*, 261, 78-84.
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-23.
- Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Cádiz: Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Cardeñoso, J. M., y Azcárate, P. (2004). Las concepciones de los profesores de primaria ante el conocimiento probabilístico: implicaciones para su formación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 17, 11-35.
- Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, y E. Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación Educación Matemática*. 11, 145-166.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Contreras, J. M., Batanero, C., y Fernández, J. A. (2010). Problema de Monty Hall. Un análisis semiótico. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander: SEIEM.
- Correia, P. F., y Fernandes, J. A. (2013). Caracterização das intuições de alunos do 9º ano em independência e probabilidade condicionada. *III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 47-68). Braga: Centro Investigação Educação Univ. do Minho. Disponible en, <http://hdl.handle.net/1822/23124>
- Díaz, C., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 26 (2), 149-162.
- Escrich, S.G., Gigante, B.G., y García, M.G. (2015). The Monty Hall Game: una propuesta de Mobile Learning para el aprendizaje de la probabilidad. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*, 32, 1-12.
- Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. D. C., y Contreras, J. M. (Eds.). (2011). Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12º ano através do ensino. En *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. 1-13.
- Fernandes, J.A., Correia, P.F., y Contreras, J.M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 5-26.
- Osorio, M.A., Suárez, A., y Uribe, C.C. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (38), 127- 142.
- Rastrollo, P. (2018). *Exploración de las ideas en probabilidad condicionada de*

alumnos de 4º E.S.O. Tesis de Máster. Universidad de Cádiz: Disponible en <http://hdl.handle.net/10498/20525>