Aprendizajes logrados por estudiantes de secundaria con “el juego de las tres tarjetas”

Secondary school students’ learning after analysing the “three cards game”

Ivonne Latorre-Verano y Emilse Gómez-Torres

Universidad Nacional de Colombia

Resumen

Este artículo presenta el análisis de los resultados de un grupo de 26 estudiantes colombianos, de educación secundaria obligatoria (entre 14 y 16 años), mientras desarrollan actividades tendientes a construir la noción de probabilidad condicional. Las actividades formativas se basan en una variante de la paradoja de la caja de Bertrand, el “juego de las tres tarjetas”. Concluimos que esta actividad formativa fue exitosa, porque la mayoría de estudiantes lograron una comprensión de la condicionalidad, aunque unos pocos persisten en razonamientos errados, y todos los participantes se mostraron altamente motivados durante la clase.

Palabras clave: paradoja como estrategia didáctica, dependencia entre sucesos, independencia estadística, sesgos en el razonamiento probabilístico condicional, enfoque ontosemiótico.

Abstract

In this paper we analyse the responses given by 26 Colombian secondary school students (14-16 years old), while they were developing a set of activities directed to build a notion of conditional probability. The formative activities are based on a paradoxical situation, named “the three cards game”, a modification of Bertrand’s box paradox. We conclude that this activity was successful, because most students reached a good understanding of conditionality, although a few of them still made mistakes, and all of them were highly motivated during the lesson.

Keywords: paradox as didactic strategy, dependence among events, statistical independence, bias in conditional probability reasoning, onto-semiotic approach.

1. Introducción

Arteaga, Batanero, Contreras y Díaz (2012) afirman que, en la mayoría de casos, la toma de decisiones asertivas en situaciones de incertidumbre se basa en el razonamiento condicional. Este tipo de razonamiento debe ser trabajado en los últimos años escolares según los lineamientos curriculares de muchos países. En el caso colombiano, el Ministerio de Educación Nacional - MEN - (2006) sugiere desarrollar el razonamiento probabilístico condicional en el último ciclo de la enseñanza secundaria obligatoria, es decir, en estudiantes de 14 a 16 años aproximadamente, considerando que un ciudadano debería estar bien informado para tomar la mejor decisión. Sin embargo, la enseñanza de la probabilidad condicional es una tarea compleja como refieren diversos autores. En particular, Borovnick (2012) analiza, desde un punto de vista conceptual, diversos aspectos ligados a la probabilidad condicional, como su epistemología y algunas dificultades frecuentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y finaliza con una agenda de investigación relacionada con este tema.

En tal sentido, un desafío en el trabajo docente es proporcionar a los estudiantes espacios de experimentación y análisis que favorezcan la construcción de objetos matemáticos primarios significativos (utilizando la terminología del enfoque

Latorre-Verano, D. I. y Gómez-Torres, E. (2019). Aprendizajes logrados por estudiantes de secundaria con “el juego de las tres tarjetas”. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

ontosemiótico EOS; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). El propósito de la investigación fue analizar el aprendizaje de condicionalidad, independencia y dependencia de eventos logrado por estudiantes de 14-16 años cuando se enfrentan a una adaptación del juego de las tres tarjetas, a partir de la versión expuesta en Contreras (2011).

La estrategia didáctica que se usó en esta investigación articula dos recursos que permiten generar estos espacios: el juego, el cual favorece que el estudiante se involucre directamente y experimente situaciones reales en las que interviene el azar, y una paradoja sencilla, la cual resulta ser motivante y retadora para los estudiantes según Lesser (1998) y Borovnick y Kapadia (2014). Estos autores invitan a utilizar las paradojas en el aula como una forma de pedagogía constructivista, indicando que se logra un aprendizaje significativo a partir del análisis argumentado de las creencias a priori, teniendo en cuenta que el resultado paradójico suele ser contraintuitivo.

El artículo está organizado en cuatro secciones. La primera presenta los antecedentes relacionados con la enseñanza de la probabilidad condicional usando paradojas, la segunda expone la metodología que se utilizó en el estudio, la tercera muestra los resultados obtenidos mediante el análisis de las producciones de los participantes en el estudio y la cuarta expone las conclusiones del trabajo.

2. Antecedentes

A continuación se resumen brevemente las publicaciones relacionadas con el uso de paradojas para la enseñanza de la probabilidad que fueron relevantes en el diseño de nuestra actividad formativa.

Contreras, Batanero, Arteaga y Cañadas (2012) exponen algunas paradojas de la historia como recurso para la enseñanza de la probabilidad. Se tomó una de las variantes de la paradoja descrita en el artículo, llamada las tres tarjetas, y basado en ésta se construyó un taller cuyo propósito radica en la comprensión de la noción de condicionalidad. Según Batanero, Contreras, Díaz y Arteaga (2009), además de hacer parte de la historia de la probabilidad, las paradojas resultan interesantes y motivadoras, dado que desafían la lógica humana, tanto que llegaron a desafiar la lógica de grandes matemáticos. Según estos autores, la paradoja de las tres tarjetas es un excelente experimento para tratar la probabilidad condicional y los eventos dependientes. Por otro lado, puesto que las paradojas llegan a tener un efecto motivador en los estudiantes, el trabajo propuesto facilita explorar la probabilidad condicional de manera formal ya que implica una conciencia de las estrategias de razonamiento personal, dando paso a la capacidad de abstracción. Los autores citados mencionan que el uso de paradojas habitualmente genera un efecto motivador dado que se obtienen resultados inesperados y sorprendentes, que anima al estudiante a explorar el problema de manera formal.

Batanero, Contreras y Cañadas (2012) proponen el uso de paradojas sencillas como una forma de introducir la probabilidad condicional de manera interesante y motivadora para los estudiantes, pues desarrolla el razonamiento probabilístico condicional en los estudiantes y exige el análisis de diversos elementos y relaciones; en particular, se ponen en juego los conceptos de independencia y dependencia estadística, que son fundamentales para la comprensión de la condicionalidad y para posteriores procesos de inferencia estadística.

Batanero, Contreras, Cañadas y Gea (2012) presentan una recopilación de investigaciones sobre la importancia de usar paradojas sencillas como situaciones motivadoras en clase y su influencia potencial en la comprensión de conceptos matemáticos por parte del estudiante, así como de las relaciones entre estos conceptos y situaciones problema extra-matemáticos, al realizar una conexión entre la cotidianidad y la historia. Estos autores presentan y analizan la paradoja llamada el dilema de los prisioneros, y algunas de sus variantes, identifican los objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) y muestran cómo esta paradoja evidencia la influencia de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades. Asimismo exponen posibles dificultades que se pueden presentar al momento de abordar las paradojas y sus implicaciones en la enseñanza. Finalmente, discuten el efecto de la manera de formular los problemas en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

3. Método

El grupo de estudiantes participantes en esta experiencia de aula estaba conformado por 13 hombres y 13 mujeres con edades entre 14 y 16 años, quienes estaban matriculados en una asignatura electiva para fortalecer el pensamiento aleatorio en una institución de educación pública de Bogotá, Colombia. La institución se ubica en un barrio pobre de la ciudad con muchas problemáticas socio-económicas. La asignatura incluye probabilidad condicional entre sus temáticas y al contar con un micro-currículo alterno al tradicional, permite que se tenga el tiempo suficiente para llevar a cabo esta práctica de aula. El curso en su totalidad se desarrolla en 4 meses, esta actividad formativa se llevó a cabo al final de ese período. Como la mayoría de estudiantes solo tenían nociones de probabilidad al inicio del curso, la docente empezó con las bases de la probabilidad en el contexto de experimento aleatorio simple, desde un enfoque clásico y frecuencial, luego introdujo experimentos aleatorios compuestos, usando como representaciones diagrama de árbol y tablas cruzadas, finalmente aplicó esta actividad.

El recurso didáctico para este trabajo es una variante de la paradoja la caja de Bertrand, llamada “la paradoja de las tres tarjetas”, descrita en Contreras, 2011 quien indica que ha sido usada en el campo de la psicología para indagar los razonamientos de las personas al tomar decisiones. Esta variante se ha utilizado en investigaciones de didáctica de la estadística para evaluar la comprensión de conceptos probabilísticos, por ejemplo en Batanero, Godino y Roa (2004). El eje central de nuestra investigación es una adaptación de la versión en español, publicada en Contreras (2011, p. 315), quien la traduce de Batanero, Godino y Roa (2004):

> Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y seleccionamos una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados y se pregunta a los jugadores por el color de la cara oculta. Se repite el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Se hacen predicciones sobre el color del lado oculto y se gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta.

Inspirados en estos trabajos se construyó un taller (ver guía para el estudiante en el anexo) cuyo propósito es promover en los estudiantes la comprensión de la noción de condicionalidad. Este taller tiene siete tareas que se reproducen en la sección de resultados y cuya complejidad aumenta gradualmente, como se observa a continuación en la descripción de su propósito y en la identificación de objetos y significados puestos en juego (Tabla 1). La primera tarea se propone para determinar si el estudiante hace uso de alguna noción de probabilidad para dar solución a la pregunta o si simplemente utiliza su intuición. Por otro lado permite establecer si la actividad funciona como recurso para el aprendizaje de la noción de condicionalidad, ya que en el análisis de las producciones de los estudiantes se compara lo que el estudiante responde al inicio y al final del taller.

La segunda busca que el estudiante represente por medio del diagrama de árbol el espacio muestral del experimento aleatorio identificando cada una de sus etapas. Las tareas tres y cuatro se proponen para que los estudiantes identifiquen la dependencia entre los eventos, teniendo en cuenta los resultados de los ensayos que se llevan a cabo en la tarea tres, logren identificar la probabilidad mayor de los eventos presentados en la tarea 4. Las actividades cinco y seis se realizan en grupos, en la cinco comparan sus resultados obtenidos en cada ensayo, en la seis se busca que, a partir de la discusión, identifiquen el evento que tiene mayor probabilidad. Finalmente, la séptima está compuesta por dos preguntas cuyo propósito es hallar dos probabilidades condicionales, indicadas en el enunciado (ver la guía en el anexo), se espera que utilicen el diagrama de árbol.

La situación problemática común a todas las tareas es utilizar información previa para predecir el resultado en una segunda etapa de un experimento compuesto cuyas probabilidades cambian según el resultado observado en la primera etapa. Alrededor de esta situación se identifican los objetos probabilísticos que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Objetos matemáticos reconocidos en el taller propuesto alrededor del juego de las tres tarjetas

Tipo	Objetos matemáticos	Tarea						
		1	2	3	4	5	6	7
Lenguaje	Verbal	x		x				
	Gráfico: Diagrama de árbol		x					x
	Tabular: Tabla de resultados en el juego			x				
	Simbólico							x
	Numérico				x	x	x	
Conceptos	Experimento aleatorio compuesto			x				
	Sucesos			x				x
	Espacio muestral		x					
	Frecuencia relativa			x				
	Convergencia			x	x			
	Intersección de sucesos							x
	Probabilidad clásica							x
	Estimación frecuencial						x	
	Probabilidad condicional							x
	Regla de la suma	x						x
	Regla del producto							x
	Variable aleatoria			x				
	Distribución discreta uniforme		x	x				
Procedimientos	Enumeración del espacio muestral.		x					
	Construcción de un diagrama de árbol.		x					
	Cálculo de probabilidades							x
Propiedades	Los experimentos son dependientes			x				x
	Reducción del espacio muestral							x
Argumentos	Razonamiento deductivo							x
	Razonamiento empírico					x	x	

4. Resultados

En esta sección se presenta el análisis de las producciones (soluciones) de los estudiantes a cuatro de las siete tareas propuestas en el taller, exponiendo las categorías de análisis de las mismas. Se eligieron las tareas y ejemplos de respuesta que ilustraban mejor tanto los aprendizajes logrados como las conclusiones expuestas en este artículo.

Primera tarea: ¿Te inclinarías a elegir el mismo color de la cara mostrada o el color contrario? ¿Te daría lo mismo? ¿por qué?

El 54% de los estudiantes (14) expresan que se inclinarían por elegir el color de la cara mostrada, con dos tipos de argumentos. En la mayoría de estos casos (10 estudiantes) se observa un razonamiento probabilístico incipiente, utilizan frases como "elegiría el mismo color porque es más probable" sin realizar un proceso probabilístico que sustente su afirmación. Los 4 estudiantes restantes de este grupo se basan en creencias personales para esta elección, tal y como se evidencia a continuación:

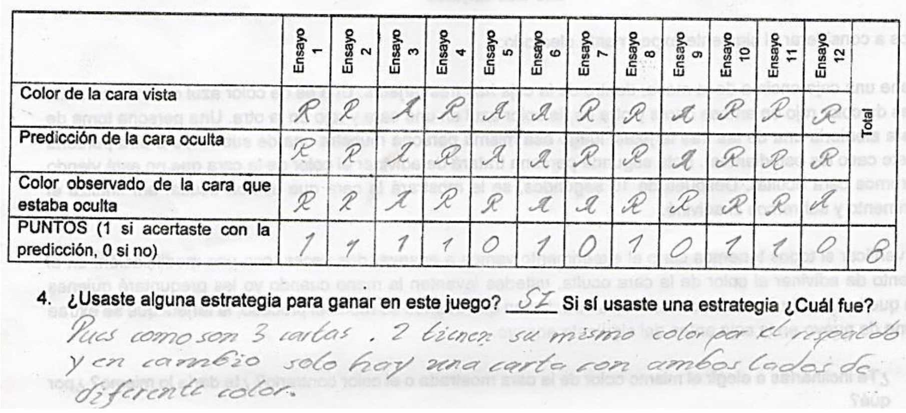
> Elegiría el mismo color de la cara mostrada, podría ser que me dé el mismo, como puede que no, y elijo el mismo porque me da presentimiento.

Al 46% restante le es indiferente la elección de cualquier color, dado que considera que la elección de cualquier color tiene la misma probabilidad. Por ejemplo, "si me daría igual porque hay 1/3 de posibilidades de escoger una al azar y 1/3 de la roja y 1/3 de las dos". Se evidencia que algunos de estos estudiantes caen en el sesgo de equiprobabilidad (descrito en Contreras, 2011) y por tanto, falta comprensión en el significado de experimento aleatorio compuesto. Estos estudiantes posiblemente asumen el experimento aleatorio como simple y no compuesto, además no identifica la dependencia del color que se muestra con el color oculto. Otro argumento es "por las dos ya que podría ser cualquier resultado", el cual podría corresponder a un sesgo de equiprobabilidad, aunque el argumento del estudiante carece de bases probabilísticas.

Cuarta tarea; ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? _____ Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?

Aunque 16 estudiantes aciertan en la mayoría de ensayos, únicamente dos de ellos identifican y/o construyen una estrategia para ganar el juego. En la Figura 1 se evidencia que el estudiante reconoce de manera empírica la dependencia del color de la cara mostrada con el color oculto. Los 14 estudiantes restantes no reconocen haber utilizado una estrategia para acertar con su pronóstico, esto puede suceder por la falta de identificación de la dependencia de eventos en cada ensayo (Batanero, Contreras y Díaz, 2012) o porque la estrategia fue intuitiva y les faltó argumentación para redactar el procedimiento seguido.

Diez estudiantes predicen incorrectamente la mayoría de ensayos, nueve expresan no haber usado una estrategia, sólo uno menciona que su estrategia es el azar (Figura 2). Esta persona puede estar confundiendo azar con equiprobabilidad como una característica de un experimento aleatorio, ya que sus respuestas en la fila de "predicción de la cara oculta" tienden a compensar la aparición de los dos posibles resultados, mostrando una forma de la heurística de representatividad, la falacia del jugador (ver descripción en Contreras, 2011).

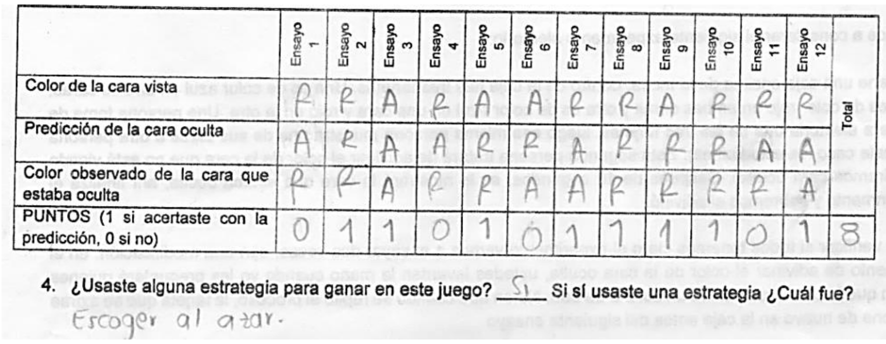


	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5	Ensayo 6	Ensayo 7	Ensayo 8	Ensayo 9	Ensayo 10	Ensayo 11	Ensayo 12	Total
Color de la cara vista	R	R	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	
Predicción de la cara oculta	R	R	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	
Color observado de la cara que estaba oculta	R	R	A	R	R	A	A	R	R	R	R	A	
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	8

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? SI Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?

Pues como son 3 cartas . 2 tienen su mismo color por el respaldo y en cambio solo hay una carta con ambos lados de diferente color.

Figura 1. Ejemplo de estrategia personal para ganar el juego



	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5	Ensayo 6	Ensayo 7	Ensayo 8	Ensayo 9	Ensayo 10	Ensayo 11	Ensayo 12	Total
Color de la cara vista	R	R	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	
Predicción de la cara oculta	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	A	A	
Color observado de la cara que estaba oculta	R	R	A	R	R	A	A	R	R	R	R	A	
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	8

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? Si Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?

Escoger al azar.

Figura 2. Ejemplo de uso del azar como estrategia personal para ganar el juego

Es importante resaltar que, cuando los estudiantes predecían el color oculto (en los ensayos) se escucharon opiniones como: “si sale rojo hay que escoger rojo porque es más probable” o “si sale azul escojo azul porque tiene más posibilidades”. Este tipo de frases muestran que tienen una idea implícita (o intuitiva) de lo que pueda pasar. Prefieren decir que no identificaron ninguna estrategia, ya sea por falta de confianza en su argumento o no saber cómo expresarlo con una fundamentación probabilística.

Sexta tarea: Teniendo en cuenta los puntajes (tras reunirse en grupos de 4) ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?

Según las instrucciones de la actividad, este ítem se responde después de una breve socialización de los resultados previos en grupos conformados por 4 estudiantes, de manera que cuenten con más elementos de análisis y argumentación.

Se observa que la mayoría de los estudiantes (62%) llegan a la solución empírica del experimento. El estudiante al analizar detalladamente cada uno de los ensayos de él y sus tres compañeros, usa los datos registrados en la tabla y llega a la solución correcta estimando las probabilidades a partir de la frecuencia relativa. Estos estudiantes reconocen que escoger el color de la cara mostrada en las tarjetas tiene mayor probabilidad en el experimento que escoger el otro color. Sin embargo, faltan argumentos para justificar esta relación, posiblemente esto se deba a una baja comprensión de conceptos, tales como la dependencia de eventos o la restricción del espacio muestral.

Después de analizar los datos obtenidos en la tarea 3, 10 estudiantes no llegan a establecer ninguna estrategia para ganar el juego, posiblemente esto se asocia con el sesgo de equiprobabilidad o a la falacia del eje temporal, donde no se encuentra natural que se condicione un suceso por otro que ha ocurrido con anterioridad (sesgo descrito en Contreras, 2011). Por ejemplo, la respuesta dada por un grupo: “tener suerte”.

Un estudiante percibe de manera inadecuada la independencia de cada ensayo, este estudiante tiene tendencia a predecir el resultado de cada ensayo en función de los resultados anteriores, buscando un patrón dentro de los resultados antepuestos. Este razonamiento conduce a la heurística de la representatividad, en la que se espera que una serie pequeña de ensayos llegue a una convergencia rápida (descrita en Contreras, 2011).

Séptima tarea, primera pregunta: Teniendo en cuenta los resultados de la tabla y/o el diagrama de árbol responde a la siguiente pregunta: Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción)

Catorce estudiantes se basan en el diagrama de árbol para dar la probabilidad pedida de manera correcta. La figura 3 es un ejemplo de este tipo de respuesta, se refleja cómo el estudiante reconoce que hay limitación en los sucesos posibles (sólo se consideran cartas azules en la cara mostrada), y en consecuencia identifica la restricción del espacio muestral en la segunda ramificación del árbol que el mismo estudiante construyó en la tarea 2. Partiendo de los sucesos posibles (denominador) hallan los casos favorables, con la tercera ramificación del árbol, de este razonamiento se deduce que el estudiante comprende la dependencia de los sucesos.

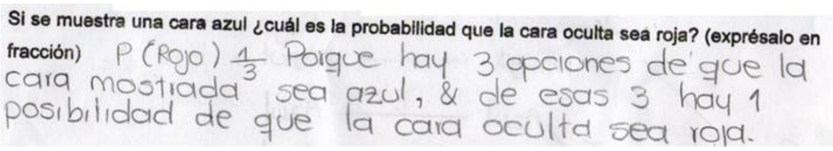

Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción) P (Rojo) $\frac{1}{3}$ Porque hay 3 opciones de que la cara mostrada sea azul, & de esas 3 hay 1 posibilidad de que la cara oculta sea roja.

Figura 3. Ejemplo de respuesta correcta

Se produce un conflicto al identificar las probabilidades de los sucesos en el espacio muestral producto: en las tareas cinco y seis, la mayoría de los estudiantes identificaron correctamente los sucesos del experimento; aunque esto no asegura que se asigne la probabilidad condicional en forma correcta. Ocho estudiantes dan argumentos como el que se muestra en la figura 4, en la que se asigna la misma probabilidad a los sucesos y no se reconoce que los sucesos (R-R) y (A-A) tienen el doble de probabilidad que el suceso (R-A). Es una muestra de que el sesgo de equiprobabilidad está presente en el razonamiento de los estudiantes.

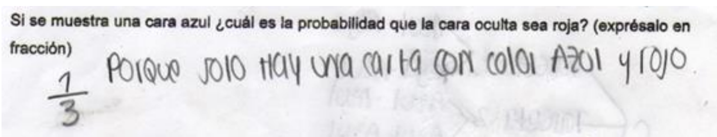

Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción) Porque solo hay una carta con color azul y rojo. $\frac{1}{3}$

Figura 4. Ejemplo de interpretación inadecuada

En general, se observó que una mayoría de estudiantes identificaron como estrategia ganadora para este juego, elegir el mismo color de la cara mostrada para predecir el color de la cara oculta, y poco más de la mitad encontraron el argumento probabilístico de esta elección. Esta identificación fue relativamente rápida, primero sólo dos estudiantes expresaron tener una estrategia (tarea 4) y tras compartir resultados en grupos aumenta a 16 (tareas 6 y 7).

5. Conclusiones

El objetivo del trabajo fue analizar el aprendizaje de condicionalidad, independencia y dependencia de eventos logrado por estudiantes de 14-16 años cuando se enfrentan a una adaptación del juego de las tres tarjetas. El análisis de respuestas dadas por los estudiantes muestra diferentes niveles de aprendizaje, como se describió en la sección Resultados. En líneas generales destacamos los siguientes hallazgos:

- El sesgo de equiprobabilidad estuvo presente, indicando que es difícil para algunos estudiantes comprender que los diversos sucesos que se presentan en un experimento aleatorio pueden tener probabilidades distintas, quizá esto sea consecuencia de una asociación inadecuada entre azar y equiprobabilidad, como se ha observado en investigaciones previas.
- La paradoja presentada como juego de las tres tarjetas facilitó el desarrollo de la actividad, los estudiantes se mostraron entusiasmados por predecir exitosamente el color de la cara oculta. Se notó la importancia de dar más tiempo para que cada uno analice el total de sus propias predicciones y para realizar más ensayos en el juego, ya que pocos estudiantes tuvieron en cuenta sus predicciones durante el juego para generar una estrategia que les permitiera predecir con éxito. Por otro lado, es interesante para el estudiante descubrir que la estrategia que parecía tener poca lógica (contra-intuitiva) al comienzo del juego, resultó ser la ganadora, reafirmando lo propuesto por Lesser (1998).
- La mayoría de estudiantes llegaron a una argumentación probabilística con respecto a la estrategia para ganar el juego. La comparación entre las respuestas a esta pregunta al iniciar la actividad de las tres tarjetas y al terminar mostró que: (a) Estudiantes que se inclinaron por el mismo color en el primer ítem, finalizaron rectificado su estrategia (escoger el mismo color) usando argumentos probabilísticos que estuvieron ausentes en el comienzo de la misma, como por ejemplo dependencia de eventos. (b) Estudiantes que manifestaron que les era indiferente la escogencia del color, cambiaron su percepción, inclinándose por el color de la cara mostrada, con argumentos que involucran la restricción del espacio muestral y la identificación de la dependencia de los eventos a partir de las ramas del diagrama de árbol. (c) Pocos estudiantes tuvieron dificultades para argumentar probabilísticamente su estrategia.

De lo anterior, se concluye que el taller propuesto es un instrumento de enseñanza que facilita comprender la noción de condicionalidad (tareas 6 y 7), la independencia entre los ensayos en un experimento aleatorio (tareas 3 y 4) y la dependencia entre los eventos de cada ensayo (tareas 2, 4, 6 y 7).

Los resultados también indican que se requiere un refuerzo del tema para los estudiantes que replicaron los procedimientos sin lograr una comprensión de los conceptos y para quienes permanecieron en su postura inicial de ausencia en el reconocimiento de una estrategia ganadora. Cabe notar que nuestros resultados no son comparables con investigaciones previas que usan esta paradoja con fines evaluativos, debido a los cambios que se introdujeron para adaptarla como una actividad formativa para estudiantes de secundaria obligatoria.

Finalmente, se destaca el papel del docente como orientador de todo el proceso, puesto que el objetivo de aprendizaje se puede perder durante el desarrollo de la actividad, por dos motivos: el juego puede convertirse en un distractor, cuando la atención se centra en ganar, más que en identificar una estrategia y su argumentación, y la complejidad propia del tema, la solución contraintuitiva puede causar confusión en el estudiante.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER).

Anexo. Guía para el estudiante[1]

Vamos a considerar el siguiente experimento aleatorio:

> **Experimento.** Se tiene una caja encima de la mesa, dentro de la caja hay tres tarjetas. Una es de color azul en ambas caras, otra es de color rojo en ambas caras y otra es de color azul en una cara y rojo en la otra. Una persona toma de manera aleatoria una de las tres tarjetas, luego esa misma persona muestra una de sus caras a otra persona (en este caso los estudiantes). Esta segunda persona tratará de adivinar el color de la cara que no está viendo (le diremos cara oculta). Después de 10 segundos, se le mostrará la cara que estaba oculta, ahí finaliza el experimento y sabremos si adivinó.

Para verificar si todos tenemos claro el experimento vamos a ensayar dos veces, con una modificación: en el momento de adivinar el color de la cara oculta, ustedes levantan la mano cuando yo les preguntaré quienes creen que la cara oculta es de un color o de otro. Noten que cuando se repite el proceso, la tarjeta que se extrae se pone de nuevo en la caja antes del siguiente ensayo.

1. ¿Te inclinarías a elegir el mismo color de la cara mostrada o el color contrario? ¿Te daría lo mismo? ¿por qué?
2. Utilizando el diagrama de árbol, ¿cuáles son los posibles resultados que se pueden dar en el experimento?

Confirmado que se entendió el experimento, vamos a plantear un juego, en el que repetiremos el experimento 12 veces (ensayos). Cada vez que aciertes ganas un punto.

3. En la siguiente tabla lleva el registro de tus predicciones (usa A para Azul y R para Rojo) y puntaje.

	Experimento										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Color de la cara vista											
Predicción de la cara oculta											
Color observado de la cara que estaba oculta											
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)											

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? _____ Si usaste una estrategia ¿Cuál fue?
5. Reúnete con 4 compañeros más, ¿quién obtuvo mayor puntaje?

[1] Actividad tomada de Batanero, Godino y Roa (2004).

6. Teniendo en cuenta los puntajes ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?
7. Teniendo en cuenta los resultados de la tabla y/o el diagrama de árbol responde las siguientes preguntas:
    - Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción)
    - Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea azul? (exprésalo en fracción)

Pregunta para discusión general: ¿Cuál es la probabilidad de ganar un punto en un ensayo?

Referencias

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. y Arteaga, P. (2009). Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico. En C. Cañadas, J. M. Contreras (Eds). *Actas de las XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Dimensión Histórica, Social y Cultural de las Matemáticas. Granada*: Sociedad Thales de Educación Matemática. Disponible en, http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TallerParadojas.pdf

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas, 261*, 78-84.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet, 12(2)*. doi: 10.18845/rdmei.v12i2.1673

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1). doi: 10.1080/10691898.2004.11910715

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática*, 2, 5-27

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), Probabilistic thinking: presenting plural perspectives (pp. 35-73). New York: Springer.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2012). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon, 28*(2), 7-20. Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27*(2), 151-169.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in

Lesser, L. M. (1998). Countering indifference using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, 20 (1), 10-12.

Ministerio de Educación Nacional - MEN (2006). *Estándares Curriculares de Matemáticas*. Colombia.