

Una primera aproximación a la caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades

A first approach to characterizing a model for effective teaching of probability from the first ages

Claudia Vásquez Ortiz¹, Ángel Alsina², Nataly Pincheira³,

María Magdalena Gea⁴ y Eugenio Chandía⁵

^{1,3}Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile, ²Universidad de Girona, Universidad de Granada⁴, España, Universidad de Concepción⁵, Chile

Resumen

En este trabajo se realiza una primera aproximación a una caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades. Tomando como base el conocimiento matemático profesional del profesor, los significados de la probabilidad y el papel de los principios para una enseñanza y aprendizaje eficaz de las matemáticas; se han definido cinco dimensiones: tareas probabilísticas (para construir nuevo conocimiento asociado al azar y la probabilidad); razonamiento probabilístico (para formular, interpretar, obtener y validar enunciados y afirmaciones en las que la incertidumbre está presente); conexiones probabilísticas (vínculos con otros bloques de contenidos matemáticos); comunicación probabilística (interacción, negociación y diálogo en la clase de matemáticas); y lenguaje probabilístico (verbal, numérico, simbólico, tabular y gráfico).

Palabras clave: modelo, enseñanza eficaz, probabilidad, primeras edades

Abstract

In this work a first approximation to a characterization of a model for an effective teaching of probability from the first ages is made. Basing on the teacher's mathematical professional knowledge, the meanings of probability and principles for effective teaching and learning of mathematics, five dimensions have been defined: probabilistic tasks (to build new knowledge associated with chance and probability); probabilistic reasoning (to formulate, interpret, obtain and validate statements and statements in which uncertainty is present); probabilistic connections (links with other blocks of mathematical content); probabilistic communication (interaction, negotiation and dialogue in the math class); and probabilistic language (verbal, numerical, symbolic, tabular and graphic).

Keywords: model, effective teaching, probability, first ages

1. Introducción

En las últimas décadas se observa un creciente interés por el desarrollo de investigaciones en torno a la formación y desarrollo del profesorado sobre todo en el área de matemáticas (e.g. Even y Ball, 2009; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Hill, Ball y Schilling, 2008;). Esto ha sido producto de la necesidad de contar con profesores mejor preparados para la enseñanza de esta disciplina, sobre todo en los primeros niveles educativos, pues “los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas” (Even y Ball, 2009, p.1-2). Por ello, finalmente la calidad de la enseñanza depende de los profesores, de su conocimiento y su preparación para enseñar, la cual impacta directamente en el aprendizaje y desarrollo de

Vásquez, C., Alsina, A., Pincheira, N., Gea, M.M. y Chandía, E. (2019). Una primera aproximación a la caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

competencias matemáticas de los estudiantes (Hattie, 2012). Por tanto, si se desea mejorar la formación matemática de los estudiantes, es necesario prestar especial atención al conocimiento profesional del profesor, entendido este como “el conjunto de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional” (Climent, 2002, p.52-53).

En este sentido, surge la necesidad de comprender las características y la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar sobre todo en temas que poco a poco han ido adquiriendo una mayor consideración en la escuela, como es el caso de la probabilidad. Esta temática se ha incorporado con gran fuerza en el currículo escolar de diversos países (e.g. MEC, 2007; MINEDUC, 2012; NCTM, 2000), adelantando su enseñanza a los primeros niveles educativos. Esto se debe, por un lado, a su utilidad y aplicabilidad en diversos campos de conocimiento en los que su aprendizaje constituye una base para la comprensión y estudio de temas más avanzados al proporcionar modelos probabilísticos para medir la incertidumbre, sobre la que se fundamenta la teoría estadística (Scheaffer, Watkins y Landwehr, 1998). Por otro lado, el aprendizaje de la probabilidad contribuye al desarrollo de un pensamiento crítico, que permite a los ciudadanos comprender y comunicar la información procedente de las situaciones de la vida diaria en que los fenómenos aleatorios, el azar y la incertidumbre se hacen presentes (Everitt, 1999). En consecuencia, surge la necesidad de formar a los estudiantes desde temprana edad, para así, contar con ciudadanos alfabetizados probabilísticamente, entendida desde la perspectiva de Borovcnik (2016) como “la capacidad de utilizar métodos y conceptos relevantes en contexto y en problemas cotidianos” (p.100).

Si bien las investigaciones en torno al conocimiento para enseñar probabilidad han aumentado, éstas aún son escasas, sobre todo en lo que respecta al profesorado en ejercicio de educación primaria, pues la gran mayoría se centra en profesores en formación (e.g. Batanero, Godino y Cañizares, 2005; Batanero, Gómez, Conteras y Díaz, 2015; Sthol, 2005). Los resultados de estas investigaciones evidencian la necesidad de ofrecer una mejor preparación a los futuros profesores para que éstos logren una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula, y que a la vez impulse el desarrollo del razonamiento probabilístico y la alfabetización probabilística (Vásquez y Alsina, 2015). Por tanto, “es necesario prestar especial atención a los problemas prácticos y pedagógicos vinculados a la incorporación de la probabilidad en los planes de estudio” (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016). Pero, ¿cómo fortalecer la formación inicial docente en relación con la probabilidad y su enseñanza? ¿qué conocimientos deben tener los profesores para llevar a cabo su enseñanza?, ¿qué caracteriza dichos conocimientos?, ¿cómo deberían enseñar estos profesores la probabilidad? son algunos de los interrogantes que surgen a la hora de formar al profesorado de Educación Infantil y Primaria en esta área. Para dar respuesta a este tipo de interrogantes creemos que es necesario alcanzar una comprensión en profundidad de la naturaleza y las características del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad. Es en esta dirección que en los últimos años se observa un aumento de investigaciones cuyo foco es el profesor en ejercicio y sus prácticas de enseñanza, con la finalidad de analizar los conocimientos que éstos ponen en juego al enseñar matemáticas y, de este modo, obtener evidencias de la puesta en escena del conocimiento matemático para la enseñanza y por medio del análisis de tales evidencias, comprender las características y naturaleza de este conocimiento.

En este contexto y en el marco del proyecto FONDECYT 11150412 “Conocimiento matemático para la enseñanza: el caso de la probabilidad en el aula de Educación Primaria”, cuyo objetivo es *caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza que ponen en juego los profesores de Educación Primaria al enseñar probabilidad*, nos hemos planteado en una primera instancia, desde una perspectiva teórica, identificar aquellos elementos que caracterizan el conocimiento matemático para enseñar probabilidad. Para luego, contrastar dicha caracterización teórica con la puesta en escena del conocimiento matemático para enseñar probabilidad e incorporar, de ser necesario, aquellos elementos que emerjan del análisis de dichas prácticas de enseñanza. En lo que sigue, se presentan desde una perspectiva teórica, los cimientos que fundamentan nuestra propuesta para luego dar a conocer una primera aproximación a la caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad desde las primeras edades, y que en el contexto de un estudio más amplio servirán de base para definir aquello que se quiere observar y recoger información para analizar las prácticas de enseñanza en torno a la probabilidad.

2.¿Qué elementos caracterizan el conocimiento matemático para enseñar probabilidad?

Para dar respuesta a este interrogante consideramos los siguientes campos de estudio de la Educación Matemática que se encuentran interrelacionados: conocimiento matemático profesional del profesor (Blömeke et al., 2016); principios para una enseñanza y aprendizaje eficaz de la matemática (NCTM, 2014); y los significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar (Batanero, 2005).

2.1 Conocimiento matemático profesional del profesor

Son variadas las investigaciones que buscan explicar el conocimiento profesional que un profesor debe poseer para enseñar matemáticas (e.g. Ponte y Chapman, 2006; Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018). Sin embargo, aún no existe, en la comunidad científica, un consenso sobre cuál es el modelo teórico más apropiado para describir y analizar tales conocimientos. En el campo de la educación estadística y probabilística, es posible observar que son escasas las investigaciones que describen modelos referidos a los conocimientos de los profesores en relación con estos temas (Batanero, Godino y Roa, 2004; Garfield y Ben-Zvi, 2008). Consideramos el conocimiento profesional del profesor como las capacidades cognitivas y de habilidad para resolver problemas en el aula, tales como conocimiento de la disciplina, conocimiento pedagógico, conocimiento didáctico del contenido, y habilidades de percepción, interpretación y diagnóstico (Blömeke et al., 2016).

Sin embargo, “aun cuando el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que es, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores” (Silverman y Thompson, 2008, p.499). En este sentido Ball y su equipo se han centrado en desarrollar una visión multidimensional de la enseñanza, que permita comprender con mayor detalle el conocimiento que el profesor pone en juego durante el proceso de enseñanza, la cual denominan “*Mathematical Quality of Instruction*” y que consideran como “un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores

matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas, y observaciones relacionadas” (Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008, p. 431). Esta visión multidimensional permite acceder a la naturaleza del contenido matemático puesto en juego durante la enseñanza, permitiendo analizar las interacciones profesor-estudiantes, profesor-contenido, y estudiantes-contenidos, así como entre los propios estudiantes (Cohen, Raudenbush y Ball, 2003). En nuestra caracterización nos centramos en aquellos elementos vinculados específicamente a la enseñanza de la probabilidad.

2.2 Los significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar

Un componente esencial además de los elementos antes descritos, es focalizarnos en los significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar (Figura 1) (Batanero, 2005), puesto que todo el profesorado preocupado por mejorar la enseñanza de la probabilidad en sus aulas debería ser consciente de los distintos significados de la probabilidad. De lo contrario difícilmente se pueden comprender los obstáculos y dificultades a los que se pueden enfrentar los estudiantes, quienes en su proceso de construcción y aprendizaje de los conceptos vinculados a este bloque de contenidos “se encontrarán con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades” (Batanero, 2005, p. 28).

- a) Significado intuitivo: utiliza términos de uso común para referirse a la incertidumbre y expresar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación con sucesos inciertos;
- b) Significado laplaciano: considera la probabilidad de un suceso como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Esta definición predomina en el contexto escolar, dada su simplicidad, aun cuando no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito pero no simétrico;
- c) Significado frecuencial: plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso. Así, la “Ley de los Grandes Números”, indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a 1, sin más que aumentar el número de pruebas;
- d) Significado subjetivo: se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada. La probabilidad depende del observador y de lo que éste conoce del suceso en estudio;
- e) Significado axiomático: concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Este enfoque establece axiomas a satisfacer y, por la rigurosidad matemática que conlleva, solo se observan algunos matices de su estudio en la Educación Primaria.

Es necesario que los profesores sean conscientes de la naturaleza de la probabilidad, en el contexto de la matemática escolar, así como de los distintos sesgos y heurísticas que debido a ideas informales y juicios previos sobre el tema, se generan en los estudiantes. De acuerdo con Batanero (2005, p. 20), estos significados “determinan implícitamente

los comportamientos y respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de azar en las que deben poner en práctica sus intuiciones y conocimientos probabilísticos” y, por ende, deben ser tenidos en cuenta a la hora de enseñar este tema.



Figura 1. Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar (Batanero, 2005).

2.3. Principios para una enseñanza y aprendizaje eficaz de la matemática

En las últimas décadas diversos organismos (NCTM, 2000, 2014; OECD, 2017) han reflexionado y desarrollado investigaciones en torno a la enseñanza, y la forma en que el aprendizaje se desarrolla, y las prácticas de enseñanza que resultan más eficaces (Hill et al., 2008). Desde esta perspectiva, en las últimas décadas diversos organismos han ido extendiendo paulatinamente su reflexión sobre el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, “alertando sobre el problema que supone enseñar matemáticas, a partir de un currículo orientado exclusivamente a la adquisición de contenidos matemáticos” (Alsina, 2012, p. 2). Por tanto, es necesario cambiar la mirada hacia un proceso de enseñanza y aprendizaje eficaz, que “involucre a los estudiantes en un aprendizaje significativo mediante experiencias individuales y colaborativas que fomenten su habilidad para dar sentido a las ideas matemáticas y para razonar de una manera matemática” (NCTM, 2014, p. 7).

Desde este prisma el NCTM (2014) identifica ocho prácticas de enseñanza de las matemáticas que “representan un conjunto de prácticas de alto impacto y de habilidades esenciales para la enseñanza, que se requieren para desarrollar un profundo aprendizaje de las matemáticas” (p. 9-10), y se formulan en forma de acciones para mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas: establecimiento de metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje; implementación de tareas que promuevan el razonamiento y al resolución de problemas; uso y vinculación de las representaciones matemáticas; favorecimiento del discurso matemático significativo; planteamiento de preguntas deliberadas; elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual; apoyo al esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas; y obtención y utilización del pensamiento de los estudiantes.

En nuestro caso interesa focalizarnos desde la perspectiva del profesor, en los elementos vinculados a la enseñanza de la probabilidad y que el profesor pone juego en el proceso de instrucción, para lograr una comprensión en profundidad de la naturaleza y las características del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, puesto que el proceso de enseñanza y aprendizaje es complejo y “depende fundamentalmente de lo que acontece dentro de la sala de clases, en función de cómo

interactúan los profesores y los alumnos con el currículo” (Ball y Forzani, 2011, p. 17). Un elemento importante para motivar y ayudar a los estudiantes a construir conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas, son las tareas que se proponen y desarrollan (Hiebert y Wearne, 1993), ya que “dichas tareas alientan el razonamiento y el acceso a las matemáticas mediante diversas formas de abordar los problemas, que incluyen la utilización de variadas representaciones y herramientas, así como la resolución de problemas a través de diferentes estrategias de solución” (NCTM, 2014, p.18). Por tanto, es necesario que los profesores establezcan metas matemáticas claras concernientes con las matemáticas que los estudiantes están aprendiendo, utilizándolas como guía para las decisiones de enseñanza (NCTM, 2014), lo que permitirá que los alumnos se enfoquen de mejor manera y puedan seguir su propio aprendizaje (Clarke, Timperley y Hattie, 2004).

Otro eje central en las prácticas de enseñanza de las matemáticas es el uso y vinculación de diversas representaciones matemáticas, cuando los estudiantes aprenden a representar, analizar y hacer conexiones entre ideas, conceptos y procedimientos matemáticos de múltiples formas, demuestran una comprensión más profunda de las matemáticas al dar sentido a los problemas e involucrarlos con el discurso matemático (Fuson, Kalchman y Bransford, 2005). En este marco, el favorecimiento del discurso matemático significativo, el dialogo entre los estudiantes, es otro elemento esencial a fin de que los estudiantes puedan construir una comprensión compartida de las ideas matemáticas a través del análisis y comparación de sus enfoques y argumentos (NCTM, 2014). De acuerdo con Carpenter, Franke y Levi (2003) aquellos estudiantes que aprenden a articular y justificar sus propias ideas matemáticas, a razonar mediante explicaciones matemáticas, desarrollan una comprensión profunda fundamental para el éxito tanto en matemática como en otras áreas.

En este sentido, es importante que el profesor plantee preguntas deliberadas relevantes que permitan evaluar y orientar el razonamiento de los estudiantes, y que a la vez los estimulen a explicar y reflexionar sobre su propio pensamiento (Chapin y O’Connor, 2007), y a dar sentido a las ideas y relaciones matemáticas importantes (NCTM, 2014). Lo anterior, con el propósito de que los estudiantes vayan más allá de llevar a cabo procedimientos matemáticos, eligiendo con flexibilidad métodos y estrategias para resolver tareas matemáticas, entendiendo y explicando sus enfoques de modo eficiente (Fuson, Kalchman y Bransford, 2005). Para ello, el apoyo al esfuerzo productivo que se brinda a los estudiantes, ya sea de manera individual o colectiva, es fundamental que respalda a los estudiantes para que aprendan matemáticas comprendiéndolas (Hiebert y Grouws, 2007). Para que el profesor pueda brindar estos apoyos ha de utilizar evidencia del pensamiento de los estudiantes para evaluar el progreso en la comprensión matemática y adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoyen y extiendan en aprendizaje (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

Por último, un elemento clave en el contexto de la educación infantil y primaria, es el lenguaje, sobre todo en el caso de la probabilidad, ya que el lenguaje asociado al azar y a la probabilidad constituye un puente para que los alumnos logren alcanzar una comprensión adecuada, a partir de sus intuiciones probabilísticas (Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras, 2013). El NRC (2014) también señala la importancia de que los niños usen el lenguaje para hacer conexiones en diferentes dominios de las matemáticas, y entre las matemáticas y otras áreas de aprendizaje y la vida cotidiana. Para Clements, Sarama y DiBase (2004), el proceso de establecer conexiones merece una atención especial, ya que permite construir un sistema coherente de conocimientos matemáticos

así como mejorar el conocimiento de la amplia aplicabilidad de las matemáticas. La conexiones matemáticas reciben también un tratamiento considerable en la NRC (2014), donde se afirma que "cada idea matemática está incrustada en una larga cadena de ideas relacionadas" (NRC, 2014, p. 48).

En consecuencia, a partir de los referentes teóricos antes expuestos, se han definido (en una primera instancia) los siguientes cinco elementos que configuran nuestro modelo para caracterizar el conocimiento matemático para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades (Figura 2). A continuación se describen brevemente estas cinco dimensiones.

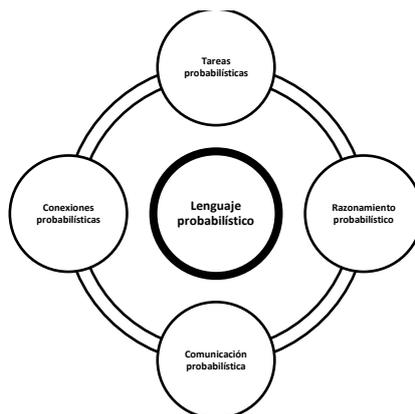


Figura 2. Elementos que caracterizan un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades.

Tareas probabilísticas: referido a los problemas, ejercicios, experimentos estocásticos, etc. utilizado en la construcción de nuevo conocimiento asociado al azar y la probabilidad. Estas tareas probabilísticas pretenden estimular el desarrollo del razonamiento probabilístico por medio de la exploración y de la reflexión en torno a la resolución de problemas en los que la incertidumbre está presente, por lo que deben ser tareas desafiantes que permitan contrarrestar los sesgos de razonamiento probabilístico. Asimismo, estas tareas muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad.

Razonamiento probabilístico: referido a la facultad para formular, interpretar, obtener y validar enunciados y afirmaciones en las que la incertidumbre está presente. Su finalidad es reconocer situaciones donde intervienen el azar y la probabilidad y poder modelarlas, escapando a los sesgos probabilísticos, así como a las creencias y concepciones previas.

Conexiones probabilísticas: referido a la conexión de ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y probabilidad con otros bloques de contenidos matemáticos. Además, de la conexión entre las ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos actuales, asociados al azar y probabilidad, con los de niveles escolares anteriores y/o posteriores.

Comunicación probabilística: referido a los procesos de comunicación por medio de la interacción, negociación y diálogo en la clase de matemáticas para promover el aprendizaje de las ideas, conceptos, definiciones, propiedades y procedimientos asociados al azar y a la probabilidad.

Lenguaje probabilístico: referido a los múltiples lenguajes (verbal, numérico, simbólico, tabular y gráfico) vinculados al azar y a la probabilidad utilizados para promover una comprensión adecuada de la probabilidad en sus estudiantes.

3. Consideraciones finales

En base a lo expuesto, se ha definido, en una primera instancia, un marco para caracterizar un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades y de este modo orientar acerca de los conocimientos que debe tener un profesor para enseñar matemáticas de forma idónea. Nos hemos centrados desde una perspectiva teórica, específicamente, en los elementos vinculados a la enseñanza de la probabilidad y que el profesor debería poner en juego al llevar a cabo el proceso de instrucción.

Los principios para una enseñanza y aprendizaje eficaz de la matemática por el NCTM (2014) han sido el eje que nos ha permitido formular las distintas dimensiones, al centrarse en la acción del profesorado en el aula, es decir, en la gestión de los contenidos (en nuestro caso de probabilidad) que se debe llevar a cabo para conseguir una enseñanza eficaz. Partiendo de estas consideraciones, consideramos que las cinco dimensiones del modelo (tareas probabilísticas, razonamiento probabilístico, conexiones probabilísticas, comunicación probabilística y lenguaje probabilístico) guardan una estrecha relación con las ocho prácticas para una enseñanza eficaz de la matemática planteados por el NCTM (2014).

En el marco de la agenda de investigación sobre el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, este modelo pretende ser un insumo clave y el punto de partida para el diseño de un instrumento en forma de rúbrica que, a través de las dimensiones descritas y sus respectivos componentes, sirva de base para analizar el conocimiento matemático que pone en juego el profesorado para enseñar probabilidad, y de esta manera contrastar dicha caracterización teórica con la puesta en escena del conocimiento matemático para enseñar probabilidad e incorporar, de ser necesario, aquellos elementos que emerjan del análisis de dichas prácticas de enseñanza.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT N° 11150412 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Referencias

- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Ball, D.L. y Forzani, F.M. (2011). Building a common core for learning to teach and connecting professional learning to practice. *American Educator* 35(2), 17–21.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Cham: Springer.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train pre-service school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. CD ROM. Johannesburg: International Commission on Mathematical Instruction.

- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teacher to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1). Disponible en: www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa* 10(1). Disponible en: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/>
- Blömeke, S., Busse, A., Kaiser, G., König, J. y Suhl, U. (2016). The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. *Teaching and Teacher Education*, 56, 35-46.
- Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1491-1516.
- Carpenter, T.P., Franke, M. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary schools*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Chapin, S.H., y O'Connor, C. (2007). Academically productive talk: Supporting students' learning in mathematics. En W. Gary y M. Strutchens (Eds.), *The Learning of Mathematics*, Sixty-ninth Yearbook (pp. 113-139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clarke, S., Timperley, H. y Hattie, J. (2004). *Unlocking formative assessment: practical strategies for enhancing students' learning in the primary and intermediate classroom*. Auckland, New Zealand: Hodder Moa Beckett.
- Clements, D. H., Sarama, J. y DiBiase, A.M. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: Un estudio de caso*. Tesis doctoral: Universidad de Huelva.
- Cohen, D., Raudenbush, S. y Ball, D. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25(2), 1-24.
- Even, R. y Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics the 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.
- Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. New York: Copemicus|Springer-Verlag.
- Fuson, K.C., Kalchman, M. y Bransford, J.D. (2005). Mathematical understanding: An introduction. En S. Donovan y J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: history, mathematics, and science in the classroom* (pp. 217-256). Washington, D.C.: National Academies Press.
- Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). *Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning*. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Disponible en: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T4P6_Garfield.pdf
- Godino, J. D.; Giacomone, B.; Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63 - 83.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Hattie, J. A. C. (2012). *Visible learning for teachers*. London: Routledge.

- Hiebert, J. y Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F- K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hiebert, J. y Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal* 30(2), 393-425.
- Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Jacobs, V.R., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education* 41(2), 169-202.
- MEC (2007). *Orden ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- MINEDUC (2012). *Bases curriculares 2012: Educación básica matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.:National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2014). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.
- NRC (2014). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(1), 21-48.
- OECD (2017). *PISA 2015 Assessment and analytical framework: science, reading, mathematic, financial literacy and collaborative problem solving*. París: OECD.
- Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of research of the psychology of mathematics education: past, present and future*. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.
- Scheaffer, R. L., Watkins, A. E. y Landwehr, J. M. (1998). What every high-school graduate should know about statistics. En S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching and assessment in Grades K-I2* (pp. 3-31). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 499-511.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). New York: Springer.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48.