Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

AUTOVALORES DEL LAPLACIANO DE LAS SUBVARIEDADES MINIMALES

ANTONIO ROS MULERO

AUTOVALORES DEL LAPLACIANO DE LAS SUBVARIEDADES MINIMALES

POR

ANTONIO ROS MULERO

Tesis doctoral dirigida por el Profesor Dr. D. Luís Esteban Carrasco, Catedrático de Geometría II (Geometría Analítica y Topología) del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Fue leída el día 25 de Mayo de 1984, ante el Tribunal formado por los profesores: José Javier Etayo Miqueo, Luís Esteban Carrasco, Francisco Javier Echarte Reula, Antonio Martínez Naveira y Manuel Barros Díaz. Obtuvo la calificación de Sobresaliente "cum laude".

INDICE

CAPITULO III

GEOMETRIA ESPECTRAL PARA SUBVARIEDADES MINIMALES DE LA ESFERA

INTRODUCCION

El Laplaciano de una variedad de Riemann compacta, actuando sobre funciones diferenciables, tiene por valores propios un conjunto numerable infinito y discreto de números reales positivos y la multiplicidad de cada uno de estos valores propios es finita. El espectro de una variedad de Riemann compacta M, que se designa por

$$\mathrm{Spec}(M) = \{ 0 = \lambda_0 < \lambda_1, \ldots, \lambda_1 < \lambda_2, \ldots, \lambda_2 < \ldots \},$$

es el conjunto de los valores propios del Laplaciano, junto con sus multiplicidades respectivas.

A partir de esta situación se plantea de forma natural la cuestión de estudiar el comportamiento de los valores propios así como la de relacionarlos con las distintas propiedades geométricas o topológicas clásicas de la geometría de Riemann. Este tipo de cuestiones se conocen con el nombre genérico de <u>Geometría espectral</u>. Examinamos a continuación algunos de los principales problemas que se presentan en este campo.

o) <u>Dada una variedad de Riemann compacta calcular su espectro</u>. Este problema sólo está resuelto para algunas variedades localmente simétricas. Por ejemplo Berger, Gauduchon y Mazet [BGM] calculan el espectro de los espacios simétricos compactos de rango 1 y de los toros llanos. En [N] Nagano calcula el espectro de los espacios simétricos clásicos de tipo compacto.

o) <u>Encontrar intervalos de variación de los valores propios en función de otros invariantes geométricos</u>. Los mejores resultados, en este problema, se han obtenido para el primer valor propio. Los primeros resultados son de Lichnerowicz [Lc] y Obata [O1], en los que se obtiene una cota inferior de λ_1 para variedades con curvatura de Ricci mayor o igual que una constante positiva y la igualdad ocurre sólo para la esfera. De entre los trabajos posteriores destacamos los de Cheng [Cg], Li [L1], Li y Yau [LY1]. Combinando los resultados obtenidos por estos autores se tiene para una variedad de Riemann compacta con curvatura de Ricci no negativa la acotación

$$\frac{\pi^2}{4} \leqq \lambda_1 d^2 \leqq n\pi^2,$$

donde d es el diámetro de la variedad y n su dimensión.

o) <u>Encontrar regularidades de la sucesión de los valores propios en el infinito</u>. Este problema ha sido bastante estudiado y se tienen para él algunas soluciones satisfactorias, vease por ejemplo [BGM]. La idea central se puede describir como sigue: dada una variedad de Riemann compacta, consideramos la función

$$Z(t) = \sum_{u=0}^{\infty} m_u e^{-\lambda_u t},$$

donde los λ_u son los valores propios de la variedad y los m_u sus multiplicidades respectivas. Entonces Z(t) está definida para todo $t > 0$ y admite un desarrollo asintótico cuando $t \to 0^+$, cuyos coeficientes vienen dados por integrales de expresiones en las que intervienen sólo la curvatura de la variedad y sus derivadas sucesivas. Como caso particular se tiene la famosa fórmula de Weyl que expresa el volumen de la variedad como límite de una sucesión construida a partir de los valores propios de la misma.

o) <u>Dadas dos variedades de Riemann compactas con el mismo espectro estudiar si son o no isométricas</u>. Este problema se conoce con el nombre de problema inverso y en su forma general tiene una respuesta negativa. El primer contraejemplo es de Milnor [M] quien encuentra dos toros llanos de dimensión 16 con el mismo espectro pero no isométricos. Entre los contraejemplos obtenidos posteriormente destacamos el de Vigneras [V], que encuentra dos superficies de Poincaré (esto es, con curvatura constante igual a -1) con el mismo espectro y no isométricas. Para algunas variedades concretas la respuesta es afirmativa. Por ejemplo Berger [B1] demuestra que si una variedad de Riemann compacta tiene el mismo espectro que una esfera 2-dimensional con la métrica standard, entonces es isométrica a esta esfera. En otra linea Guillemin y Kazhdan [GK] demuestran que, bajo ciertas condiciones, toda deformación isoespectral de una variedad de curvatura negativa es isométrica.

o) Estudiar que tipo de propiedades geométricas o topológicas dependen sólo del espectro del Laplaciano. Como ilustración puede sevir el trabajo de Duistermaat y Guillemin [DG] en el que se demuestra que la propiedad de que todas las geodésicas de una variedad sean periódicas es una propiedad espectral.

En esta memoria nosotros estudiamos los valores propios de las subvariedades minimales del espacio proyectivo complejo (con la métrica de Fubini-Study) y de la esfera (con la métrica standard). El primer resultado sobre la geometría espectral de las subvariedades es un teorema de Takahashi [Ta] en el que se demuestra que las funciones coordenadas de una inmersión isométrica y minimal en una esfera son propias con valor propio n/r^2, donde n es la dimensión de la subvariedad y r es el radio de la esfera. Así el espectro de una variedad contiene información acerca de los radios de las esferas en las que ésta puede ser inmersa minimalmente. Otro resultado conocido, que fué encontrado inicialmente por Bleecker y Weiner [BW] y tratado posteriormente por Reilly [R]y Chen [Ch2], es una aplicación del principio del mínimo a las funciones coordenadas de una inmersión isométrica de una variedad de Riemann compacta, M, en el espacio Euclídeo. Si H es el vector curvatura media de la inmersión, vol(M) el volumen de M y n su dimensión, entonces el primer valor propio del espectro de M, λ_1, verifica la desigualdad

$$(0.1) \qquad \int_M |H|^2 \geqq (\lambda_1/n)\mathrm{vol}(M).$$

Si se da la igualdad, entonces M es minimal en una esfera del espacio Euclídeo de radio $\sqrt{n/\lambda_1}$. Más recientemente Yang y Yau [YY] obtienen una desigualdad, en la que intervienen los k primeros autovalores, para una subvariedad minimal de la esfera. Sin embargo esta desigualdad es débil, en el sentido de que la igualdad no se alcanza. En [He] y [YY] Hersch y los autores anteriores, utilizando la invarianza conforme de la integral de Dirichlet y el teorema de Riemann-Roch, obtienen para toda superficie compacta una cota para el primer valor en función del volumen y del género de la superficie. Como caso particular en [YY] se obtiene, para una curva compleja en el espacio proyectivo complejo, que $\lambda_1 \leqq 2$. Nosotros, vease el corolario II.3.5, generalizamos el resultado anterior para una subvariedad compleja del espacio proyectivo complejo, con dimensión compleja n, y obtenemos para el primer valor propio la desigualdad $\lambda_1 \leqq n+1$.

En otra linea, utilizando los coeficientes del desarrollo asintótico, Barros y Chen [BC] obtienen diversas caracterizaciones espectrales de la quádrica compleja y Barros y Romero [BR] una caracterización del mismo tipo para el embebimiento de Veronese dentro de la familia de las subvariedades complejas del espacio proyectivo. Nosotros en esta memoria, utilizando métodos diferentes, generalizamos los resultados anteriores a otras subvariedades Kaehlerianas con segunda forma fundamental paralela. Por último señalamos el reciente trabajo de Choi y Wang [CW] que obtienen una cota inferior para el primer valor propio de una hipersuperficie minimal en una variedad de Riemann compacta con curvatura de Ricci positiva, resolviendo así parcialmente una conjetura de Yau [Y4] acerca del primer valor propio de las hipersuperficies minimales de la esfera.

Respecto de la geometría de las subvariedades del espacio proyectivo complejo, las primeras en ser estudiadas, desde el punto de vista métrico, fueron las subvariedades Kaehlerianas, esto es, aplicaciones $i:M^n \longrightarrow CP^m$ donde M^n es una variedad Kaehleriana, i es una inmersión holomorfa e isométrica. Esta familia es la mejor conocida, en lo que respecta a su geometría de Riemann. Los primeros resultados fueron obtenidos por Calabi [C1]: una caracterización intrínseca de aquellas variedades que admiten una inmersión Kaehleriana en el espacio proyectivo complejo, y un teorema de rigidez local para estas subvariedades, que asegura que dos inmersiones Kaehlerianas cualesquiera de una misma variedad en el espacio proyectivo son congruentes,es decir,existe una isometría holomorfa del proyectivo que transforma una en otra. Estos dos teoremas ocupan un lugar central en el estudio de estas subvariedades. Probablemente el problema más conocido en esta teoría sea el estudio de las hipersuperficies complejas verificando buenas condiciones de curvatura. En [Sm] Smyth demuestra que una hipersuperficie compleja Einstein completa y simplemente conexa es una subvariedad lineal o la cuádrica compleja. La correspondiente versión local fué demostrada por Chern [Cr]. Estos resultados fueron extendidos posteriormente por Nomizu y Smyth [NS] y Kobayashi [Ko]. Algunos problemas acerca de las subvariedades complejas con curvatura positiva han sido estudiados sistemáticamente por Ogiue [Og]. Más tarde Nakagawa y Takagi [NT] clasifican las subvariedades Kaehlerianas localmente simétricas. En particular clasifican las subvariedades con segunda forma fundamental paralela, que resultan ser los abiertos de los espacios simétricos Hermíticos de tipo compacto y rango menor o igual que dos, inmersos de determinada forma. Finalmente destacamos el trabajo de Takeuchi [Ti] en el que generalizando los métodos utilizados en [NT], clasifica las subvariedades homogeneas y Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo. Otra familia interesante de subvariedades son la llamadas totalmente reales. Son aquellas subvariedades del proyectivo para las que la estructura compleja transforma el espacio tangente a la subvariedad en un subespacio del normal a la subvariedad. esta familia ha sido estudiada por ejemplo por Chen y Ogiue [CO], Yau [Y1],[Y2], Naithot [Nt]y Naithot y Takeuchi [NhT]. Más recientemente Bejancu[Bu1],[Bu2] introduce el concepto de CR-subvariedad para aquellas subvariedades cuyo fibrado tangente se descompone como suma de dos distribuciones, una holomorfa y otra totalmente real, que engloba al de subvariedad Kaehleriana, totalmente real y al de hipersuperficie real. Algunos resultados acerca de estas subvariedades pueden encontrarse en [Ch4].

Respecto de las subvariedades minimales de la esfera, señalaremos sólo algunos de los muchos resultados conocidos. En un trabajo clásico Simons [Si] demuestra que si la longitud de la segunda forma fundamental de una subvariedad compacta y minimal de la esfera es menor que una cierta constante positiva, entonces la subvariedad es totalmente geodésica. Por tanto estas últimas subvariedades no se pueden deformar dentro de la familia de las subvariedades minimales. Calabi [C2] demuestra que el area de una superficie minimal compacta de la esfera es un múltiplo entero de una cierta constante. Chern, Do Carmo y Kobayashi [CDK] retoman el problema de Simons y clasifican las subvariedades para las que se alcanza la igualdad en la cota mencionada anteriormente. En la misma linea Yau [Y1],[Y2] estudia este tipo de problemas con acotaciones para la curvatura seccional. Destacamos finalmente los trabajos de Ferus [F], en el que se clasifican las subvariedades de la esfera con segunda forma fundamental paralela, y the Sakamoto [S2], en el que se estudian las subvariedades minimales que verifican que todas sus geodésicas son curvas congruentes en la esfera.

Tras esta presentación de los dos tópicos sobre los que se centra nuestro trabajo, la geometría de los autovalores de Laplaciano y la teoría de las subvariedades minimales, pasamos a exponer los métodos utilizados y los resultados obtenidos en esta memoria.

Utilizando ciertas inmersiones isométricas del espacio proyectivo complejo y de la esfera en el espacio Euclídeo, E^N, podemos asociar a cada subvariedad de los espacios anteriores una inmersión isométrica en E^N. Por otra parte, estudiando el comportamiento del Laplaciano de una subvariedad de E^N sobre las funciones coordenadas de la inmersión, conseguimos obtener información acerca de los autovalores de la misma.

La técnica que utilizamos para obtener información sobre el espectro de una subvariedad del espacio Euclídeo está descrita en el capítulo I y es una generalización de los métodos utilizados en [BW], [R] y [Ch2]. Recientemente Chen ha obtenido resultados paralelos a los que aparecen en este trabajo [Ch5]. Si $\phi : M^n \longrightarrow E^N$ es una inmersión isométrica de una variedad de Riemann compacta en el espacio Euclídeo y Δ es el Laplaciano de M, obtenemos una serie de desigualdades espectrales, la más sencilla de las cuales es (0.1). Junto con ésta, la desigualdad que más utilizaremos en este trabajo es la siguiente

$$(0.2) \qquad \int_M \langle \Delta^2\phi, \phi\rangle - (\lambda_1+\lambda_2)\int_M \langle \Delta\phi, \Delta\phi\rangle + \lambda_1\lambda_2\int_M \langle \Delta\phi, \phi\rangle \geqq 0,$$

donde λ_1 y λ_2 son el primer y el segundo valor propio del espectro de M y $\langle , \rangle$ es la métrica Euclidea. La igualdad en (0.2) implica la siguiente igualdad funcional

$$(0.3) \qquad \Delta^2\phi = a\Delta\phi + b(\phi - \phi_0),$$

donde a y b son constantes reales y ϕ_0 es el centro de gravedad de la inmersión ϕ. Los resultados anteriores se obtienen utilizando propiedades elementales de la teoría de espacios de Hilbert.

La elección de las subvariedades minimales para nuestro estudio se basa en el siguiente hecho: si $x:M \longrightarrow \tilde{M}$ es una inmersión isométrica y minimal entre dos variedades de Riemann y $f:\tilde{M} \longrightarrow R$ es una función diferenciable sobre $\tilde{M}$, entonces el Laplaciano de M aplicado a la restricción de f a M sólo depende de Hessiano de f sobre $\tilde{M}$ y del tangente de M en $\tilde{M}$ para cada punto. En el caso general, por supuesto el Laplaciano de una función depende, para cada punto,de los valores de la función en un entorno de dicho punto.

Para nuestro estudio de la geometría espectral de las subvariedades minimales del espacio proyectivo complejo, capítulo II, utilizamos un embebimiento isométrico de este espacio en un cierto espacio Euclídeo. Este embebimiento aparece descrito por primera vez por Tai en [T] y ha sido estudiado tambien por Little [Le] y Sakamoto [S1]. Nosotros, en esta memoria, hacemos un estudio completo de esta inmersión, desde un punto de vista distinto al de estos autores. A este estudio hemos dedicado la sección 1 del capítulo II.Geométricamente el embebimiento puede ser descrito de la siguiente forma: Sea C^{m+1} el espacio Euclideo complejo (m+1)-dimensional. El espacio proyectivo complejo m-dimensional, CP^m, viene definido como el conjunto de todas las rectas vectoriales complejas de C^{m+1}. Si consideramos como coordenadas de cada una de estas rectas las coordenadas de algún vector no nulo que pertenezca a la recta, éstas estarán determinadas salvo un factor de proporcionalidad $\lambda \in C-\{0\}$; son las llamadas coordenadas homogeneas de CP^m. Existe, sin embargo, la posibilidad de hacerle corresponder a cada una de estas rectas un único elemento de un cierto espacio vectorial de forma natural: a cada recta compleja $\Pi \in CP^m$, la proyección ortogonal de C^{m+1} sobre Π, que es un elemento de $End(C^{m+1})$. Esta aplicación que asocia a cada punto del espacio proyectivo una cierta aplicación lineal resulta ser un embebimiento isométrico,para las métricas standard en cada uno de los espacios, que, en diversos sentidos es la inmersión más simple del espacio proyectivo complejo en el espacio Euclideo.

Utilizando el embebimiento anterior cada subvariedad del espacio proyectivo complejo puede ser considerada como un subvariedad del espacio Euclideo. Así podemos aplicarle a estas subvariedades los métodos desarrollados en el capítulo I.

En la sección 2 del capítulo II definimos algunos tipos de subvariedades del espacio proyectivo y damos la primera aplicación del embebimiento de este espacio en el espacio Euclídeo: Utilizando un resultado de Chen [Ch1] para subvariedades del espacio Euclídeo obtenemos dos acotaciones del volumen de las subvariedades minimales compactas de CP^m, una para el caso general y otra, más fina para el caso en que la subvariedad es CR. La primera acotación ha sido mejorada recientemente por Chen [Ch6].

En la sección 3 de este capítulo obtenemos, utilizando (0.1), dos acotaciones del primer valor propio de una subvariedad compacta y minimal de CP^m, una para el caso general y otra para el caso en la subvariedad es CR. La segunda desigualdad ha sido obtenida simultaneamente por Ejiri [E] y la primera ha sido mejorada posteriormente, utilizando nuestros resultados, por Chen [Ch6]. Para averiguar en que casos se alcanza la igualdad clasificamos las subvariedades CR-minimales del espacio proyectivo que son minimales en alguna esfera del espacio Euclídeo vía el embebimiento de CP^m en E^N (teorema II.3.1). Con este teorema de clasificación y con la desigualdad anterior obtenemos varios resultados entre los que destacamos los siguientes

Corolario II.3.5. Sea M^n una subvariedad compacta y Kaehleriana, con dimensión compleja n, del espacio proyectivo complejo. Entonces

$$\lambda_1 \leqq n+1,$$

donde λ_1 es el primer valor propio del espectro de M. La igualdad ocurre si y sólo si M es totalmente geodésica.

Para $n=1$ este resultado había sido demostrado por Yang y Yau [YY]. Para n cualquiera ha sido obtenido independientemente por Ejiri [E].

Corolario II.3.6. Sea M^p una subvariedad totalmente real compacta y minimal, con dimensión p, de CP^m.

1) Si existe una subvariedad lineal CP^p de CP^m tal que M^p es una subvariedad totalmente real de CP^p, entonces $\frac{1}{2}(p+1)$ está en Spec(M).

2) Si $\lambda_1 = \frac{1}{2}(p+1)$, entonces existe una subvariedad lineal CP^p de CP^m tal que M^p es una subvariedad totalmente real de CP^p.

En la sección 4 recogemos las propiedades fundamentales de la geometría de las subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo. Damos algunos ejemplos importantes de subvariedades Kaehlerianas compactas, así como la clasificación de las subvariedades Kaehlerianas con segunda forma fundamental paralela obtenida por Nakagawa y Tagaki [NT].

En la sección 5 estudiamos las subvariedades Kaehlerianas compactas de CP^m que son de orden $\{u_1, u_2\}$ en el espacio Euclídeo correspondiente, esto es, subvariedades tales que todas sus funciones coordenadas son suma de dos funciones propias asociadas a los valores propios λ_{u_1} y λ_{u_2} respectivamente. Estas subvariedades están caracterizadas por la igualdad funcional (0.3). Demostramos que una subvariedad Kaehleriana es de orden $\{u_1,u_2\}$ si y sólo si verifica una condición intrínseca, la subvariedad es Einstein, y otra extrínseca, cierto tensor en el fibrado normal es proporcional a la métrica. Exponemos con detalle el ejemplo de la cuádrica compleja, que es de orden $\{1,2\}$, y obtenemos algunos resultados relacionados que serán útiles en la sección siguiente. Señalemos que, a partir de nuestra caracterización, el hecho de ser subvariedad Kaehleriana de orden $\{u_1,u_2\}$ está próximo a la condición de tener segunda forma fundamental paralela.

La sección 6 es la última del segundo capítulo. En esta sección demostramos fundamentalmente una desigualdad para toda subvariedad Kaehleriana compacta del espacio proyectivo complejo en la que intervienen sólo los invariantes espectrales más sencillos de la subvariedad: la dimensión, el primer y el segundo valor propio, el volumen y la integral de la curvatura escalar. Si la igualdad ocurre la inmersión en el espacio Euclídeo correspondiente es de orden $\{1,2\}$. Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos los siguientes

Corolario II.6.2. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana, de dimensión compleja n, inmersa en CP^m. Sean λ_1, λ_2 el primer y el segundo valor propio del Laplaciano de M, ρ la curvatura escalar y vol(M) su volumen. Si $\lambda_1 = (\int_M \rho)/(n\mathrm{vol}(M))$ y M no es totalmente geodésica, entonces

$$\lambda_2 \leqq n+2.$$

Si la igualdad ocurre, entonces M es Einstein y la segunda forma fundamental de la inmersión es paralela.

Señalemos que la hipótesis $\lambda_1 = (\int_M \rho)/(n\mathrm{vol}(M))$ se cumple por ejemplo para toda variedad Kaehleriana compacta Einstein con grupo de isometrías no discreto.

Corolario II.6.3. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta n-dimensional embebida en CP^{n+p}. Si M^n es una intersección completa de p hipersuperficies algebraicas no singulares de grados $a_1, \ldots, a_p$ en CP^{n+p}, entonces

$$(n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2) \geqq p - \sum_\alpha a_\alpha .$$

La igualdad ocurre si y sólo si $M = CP^n$ es una subvariedad lineal de CP^{n+p} o $M = Q^n$ es la cuádrica compleja en alguna subvariedad lineal CP^{n+1} de CP^{n+p}.

Las subvariedades Kaehlerianas Einstein con segunda forma aparecen descritas en la tabla 1 (pg. 54). Nosotros demostramos que si una subvariedad Kaehleriana compacta del espacio proyectivo complejo tiene el mismo espectro que alguna de estas subvariedades entonces es congruente con el embebimiento standard de esta variedad. Este tipo de resultados se conocen en geometría con el nombre de teoremas espectrales inversos. El primer resultado de este tipo fué encontrado por Kac [K] en un trabajo clásico.

Pasamos a exponer los resultados obtenidos en el capítulo III para las subvariedades minimales de la esfera.

Para obtener información acerca de los valores propios de las subvariedades minimales de la esfera utilizamos los métodos desarrollados en el capítulo I, y obtenemos resultados paralelos a algunos de los obtenidos en el capítulo II para subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo. Veamos en primer lugar las diferencias fundamentales con respecto a este caso.

En el capítulo II utilizamos la inmersión más simple del espacio proyectivo complejo en el espacio Euclídeo. La inmersión más simple de la esfera en el Euclídeo es evidentemente la inmersión como el lugar de puntos que equidistan de uno dado. Sin embargo el teorema de Takahashi [Ta] nos asegura que toda inmersión minimal de una variedad de Riemann compacta en la esfera verífica que sus funciones coordenadas son propias, con valor propio n/r^2, donde n es la dimensión de la variedad y r el radio de la esfera. La información que obtenemos para las subvariedades del espacio proyectivo complejo está basada en el hecho de que las funciones altura asociadas a la inmersión no tienen el mismo comportamiento respecto del Laplaciano para todas las subvariedades. Esto nos permite diferenciar unas subvariedades de otras en función del espectro de su Laplaciano. Puesto que esto no ocurre para las subvariedades minimales de la esfera la inmersión standard de ésta en el Euclídeo no sirve para obtener los resultados que buscamos. Las funciones coordenadas de esta inmersión de la esfera son propias y su valor propio es el primero de la esfera. La inmersión que utilizamos en este capítulo es la segunda inmersión más simple de la esfera en el espacio Euclídeo. Tiene segunda forma fundamental paralela y aparece descrita por primera vez en [T]. Viene dada, a grosso modo, por todos los productos posibles de las funciones altura de la esfera S^m en E^{m+1}. A partir de este hecho nuestro estudio se puede plantear de la siguiente forma: sea M^n un subvariedad compacta de la esfera S^m. Sea V_u el espacio de las funciones propias de M asociadas al valor propio λ_u. ¿Qué se puede decir acerca del comportamiento del Laplaciano de M sobre el producto de dos funciones de V_u?. Si tomamos como modelo a las funciones asociadas al primer valor propio sobre un espacio simétrico compacto de rango 1 se tiene que el buen comportamiento viene dado por

$$V_1 V_1 \subset V_0 + V_1 + V_2. \tag{0.4}$$

En el caso de que el subespacio propio sea el conjunto de funciones coordenadas asociadas a la inmersión minimal en la esfera, podemos "organizar" estos productos como una nueva inmersión isométrica en un cierto espacio Euclídeo y podemos aplicarle a esta nueva inmersión las técnicas desarrolladas en el capítulo I.

En la sección 1 estudiamos con detalle esta nueva inmersión de la esfera en el espacio Euclídeo.

En la sección 2 demostramos fundamentalmente que la vérsión correspondiente de (0.4) para una subvariedad minimal de la esfera ocurre si y sólo si la subvariedad es Einstein y su fibrado normal verifica cierta condición. Asimismo obtenemos algunos resultados técnicos que serán utilizados en la siguiente sección.

La sección 3 es la última y la más inportante de este capítulo. Obtenemos para toda subvariedad compacta y minimal de la esfera una desigualdad en la que intervienen solamente invarantes espectrales y en la que la igualdad se alcanza si y sólo si (0.4) ocurre. Así, en este caso particular, (0.4) es una propiedad que sólo depende del espectro de la subvariedad.

Especial interés tienen, dentro de la familia de las inmersiones minimales en la esfera, las inmersiónes de orden 1, esto es, aquellas para las que las que las funciones coordenadas asociadas a la inmersión de la esfera como hipersuperficie umbilical del Euclídeo, son propias con valor propio el primero de la subvariedad. Si además se tiene que la inmersión es de la forma $k(f_1,\ldots,f_{m_1})$, donde k es una constante real y $\{f_i\}$ es una base ortonormal, respecto de la métrica L^2, del espacio V_1, decimos que la inmersión de orden 1 es standard. Dos interesantes familias de variedades de Riemann compactas que admiten una inmersión standard de orden 1 son los espacios homogeneos irreducibles compactos [Wa] y las variedades fuertemente armónicas [Be].

Destacamos las siguientes consecuencias de la desigualdad espectral mencionada anteriormente.

Corolario III.3.2. Sea M^n una variedad de Riemann compacta que admite una inmersión de orden 1 en una esfera. Entonces

$$\frac{n}{4}\{2(n+5)\lambda_1 - (n+2)\lambda_2\}\mathrm{vol}(M) \geqq \int_M \rho .$$

Corolario III.3.3. Sea M^n una variedad de Riemann compacta que admite una inmersión standard de orden 1. Entonces

$$\frac{n+2}{n}\,\frac{2\,m_1}{m_1+1}\,\lambda_1 \geqq \lambda_2,$$

donde m_1 es la dimensión del λ_1-autoespacio.

Si la igualdad ocurre en alguna de las desigualdades anteriores, entonces M es Einstein y cierto tensor en el fibrado normal es es proporcional a la métrica. Terminamos la sección demostrando que en el caso de que la variedad sea fuertemente armónica, la igualdad en las anteriores desigualdades ocurre si y sólo si la variedad es un espacio simétrico compacto de rango 1. Recordemos que una conocida conjetura [Be] asegura que todas las variedades fuertemente armónicas son de este tipo. Así,este último resultado debe interpretarse como una contribución a la solución de este problema.

Deseo hacer constar mi agradecimiento al Prof. L. Esteban Carrasco, Director de esta memoria y del Departamento de Geometria y Topología de la Universidad de Granada, así como a todos mis compañeros de departamento por su estimulo y apoyo durante la realización de la misma.

CAPITULO I

EL LAPLACIANO DE LAS SUBVARIEDADES

En las primeras secciones de este capítulo presentamos brevemente los resultados básicos de las dos ramas de la geometría que nos interesan en nuestro trabajo: De un lado la teoría de subvariedades, y de otro la geometría del operador de Laplace definido sobre una variedad de Riemann compacta. En la última sección exponemos el método que nos permite, a partir de una inmersión de una variedad de Riemann compacta en el espacio Euclideo, obtener información acerca de los autovalores del Laplaciano de dicha variedad. Esencialmente el método consiste en estudiar el comportamiento de las funciones altura de la inmersión, es decir, de las funciones más simples desde el punto de vista de la inmersión, respecto de las potencias sucesivas del Laplaciano. Definimos qué se entiende, en este contexto,por una <u>inmersión buena</u> , y utilizando resultados elementales de la teoría de espacios de Hilbert obtenemos dos resultados técnicamente fundamentales en esta memoria: Una caracterización de las inmersiones buenas que será muy util en los próximos capítulos, y una desigualdad integral en la que intervienen algunos autovalores del Laplaciano y en la que la igualdad ocurre cuando la inmersión es buena.

1. Generalidades sobre subvariedades.-

Empezamos recordando brevemente las ecuaciones fundamentales de la teoría de subvariedades. Una exposición detallada de estas puede encontrarse en [Ch 1].

Sean M^n y $\tilde{M}^{n+p}$ dos variedades de Riemann de dimensiones n y n+p respectivamente (todas las variedades en esta memoria se supondrán conexas, paracompactas, de clase C^∞ y dimensión ≥ 2, salvo mención expresa). Sean ∇ y $\tilde{\nabla}$ las conexiones Riemannianas de M y $\tilde{M}$, y $f: M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}$ una inmersión isométrica. El espacio tangente a M,en un punto $x \in M$,será designado por $T_x(M)$. De la misma forma el espacio normal de la inmersión,en un punto $x \in M$, será designado por $T^{\perp}_x(M)_f$ (Cuando no haya lugar a confusión , la referencia expresa a la inmersión f será suprimida). Designaremos por $\nabla^{\perp}$ la conexión en el fibrado normal determinado por f. Sea $\chi(M)$ el álgebra de los campos tangentes a M y $\chi(M)^{\perp}$ el espacio de los campos normales a M para la inmersión f.

La segunda forma fundamental de la inmersión viene dada por

(I.1.1) $$\sigma(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y , \quad \text{para todo } X, Y \in \chi(M).$$

Así $\sigma(X,Y)$ es la componente normal de $\tilde{\nabla}_X Y$. El endomorfismo de Weingarten de f viene definido por

(I,1.2) $$A_\xi X = \nabla^{\perp}_X \xi - \tilde{\nabla}_X \xi , \quad \text{para todo } X \in \chi(M), \ \xi \in \chi(M)^{\perp},$$

y por tanto $A_\xi X$ es,salvo el signo, la componente tangencial de $\tilde{\nabla}_X \xi$. Se tiene la relación

(I.1.3) $$g(A_\xi X, Y) = g(\sigma(X,Y), \xi),$$

para todo $X, Y \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)^{\perp}$, donde g representa la métrica de Riemann sobre $\tilde{M}$ ó M indistintamente. El vector curvatura media de la inmersión es el campo $H \in \chi(M)^{\perp}$ definido por

(I.1.4) $$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma(E_i,E_i),$$

donde $\{E_i\}_{i=1..n}$ es una base ortonormal en el espacio tangente a M en cada punto $x \in M$. Por último, la derivada covariante de la segunda forma fundamental es el tensor definido por

$$(\nabla\sigma)_X(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\sigma(Y,Z) - \sigma(\nabla_X Y,Z) - \sigma(Y,\nabla_X Z), \tag{I.1.5}$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Si $\sigma = 0$ se dice que la inmersión es totalmente geodésica. Si $H = 0$ se dice que la inmersión es minimal. Finalmente si $\nabla\sigma = 0$ se dice que la inmersión es paralela.

Si R es el tensor curvatura de M se utilizará la notación

$$R(X,Y,U,V) = g(([\nabla_X,\nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})U , V),$$

para todo $X,Y,U,V \in \chi(M)$.

Las ecuaciones de Gauss y Codazzi vienen dadas, respectivamente, por

$$\tilde{R}(X,Y,U,V) = R(X,Y,U,V) + g(\sigma(X,U),\sigma(Y,V)) - g(\sigma(X,V),\sigma(Y,U)), \tag{I.1.6}$$

$$(\tilde{R}(X,Y)U)^{\perp} = (\nabla\sigma)_X(Y,U) - (\nabla\sigma)_Y(X,Z), \tag{I.1.7}$$

para todo $X, Y, U, V \in \chi(M)$, donde $\tilde{R}$ es el tensor curvatura de $\tilde{M}$ y $(\tilde{R}(X,Y)U)^{\perp}$ representa la componente normal de $\tilde{R}(X,Y)U$.

Sea $R^{\perp}$ el tensor curvatura de la conexión $\nabla^{\perp}$ en el fibrado normal, es decir

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = ([\nabla^{\perp}_X, \nabla^{\perp}_Y] - \nabla^{\perp}_{[X,Y]})\xi ,$$

$X, Y \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)^{\perp}$. La ecuación de Ricci es la siguiente

$$\tilde{R}(X,Y,\xi,\eta) = R^{\perp}(X,Y,\xi,\eta) - g([A_\xi,A_\eta]X,Y), \tag{I.1.8}$$

para todo $X, Y \in \chi(M)$, $\xi, \eta \in \chi(M)^{\perp}$.

2. El Laplaciano y el espectro de una variedad de Riemann.-

En esta sección presentamos algunos de los resultados fundamentales acerca del Laplaciano en una variedad de Riemann compacta. Una exposición detallada de estos puede encontrarse en [BGM] y [W].

Sea M^n una variedad de Riemann compacta con métrica g y conexión Riemanniana ∇. Designamos por $C^\infty(M)$ el algebra de las funciones diferenciables sobre M. Definimos en $C^\infty(M)$ el producto escalar

$$\text{(I.2.1)} \qquad \ll f,h \gg = \int_M fh , \qquad \text{para todo } f, h \in C^\infty(M).$$

El completado de $C^\infty(M)$ respecto del producto anterior es $L^2(M)$.

Para toda función $f \in C^\infty(M)$ consideramos la diferencial y el Hessiano de f, designados por df y Hessf respectivamente, definidos de la siguiente forma

$$df(X) = Xf,$$
$$\mathrm{Hess}f(X,Y) = XYf - (\nabla_X Y)f , \qquad X, Y \in \chi(M).$$

Así df es una 1-forma sobre M y Hessf es un tensor 2-covariante y simétrico sobre M. El Laplaciano de f viene definido por

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}f(E_i,E_i) ,$$

donde $\{E_i\}_{i=1...n}$ es una base ortonormal en cada punto $x \in M$. Por tanto $\Delta: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ es un operador lineal. Además Δ es autoadjunto respecto del producto (I.2.1), es un operador elíptico y su nucleo son las funciones constantes . Decimos que $\lambda \in R$ es un autovalor de Δ si existe $f \in C^\infty(M)$, $f \neq 0$, tal que

$\Delta f = \lambda f$. De f diremos que es una λ-autofunción de Δ. Designaremos por $V_\lambda = \{ f \in C^\infty(M) \ / \ \Delta f = \lambda f \}$ el espacio de todas las λ-autofunciones. Entonces V_λ es un subespacio finito-dimensional de $C^\infty(M)$. Al número natural dim V_λ lo llamaremos la multiplicidad de λ. Si $\lambda, \mu, \lambda \neq \mu$, son dos autovalores de Δ, los subespacios V_λ y V_μ son ortogonales. El conjunto de los autovalores de Δ forma un subconjunto discreto y no acotado de $[0,\infty)$ y el subespacio $\bigoplus_\lambda V_\lambda$ es denso en $C^\infty(M)$ en el sentido de la convergencia uniforme y por tanto en el sentido de la L^2-convergecia. El espectro de M viene dado por

$$\mathrm{Spec}(M) = \{ 0=\lambda_0 < \lambda_1 \ldots \lambda_1 < \lambda_2 \ldots \lambda_2 < \ldots \}$$

donde λ_u es un autovalor de Δ, cada uno de los cuales aparece repetido tantas veces como indica su multiplicidad.

Como consecuencia de todo lo anterior cada función $f \in C^\infty(M)$ se puede escribir, de manera única de la forma $f = \sum_u f_u$, donde $f_u \in C^\infty(M)$ es una λ_u-autofunción (f_u es la proyección ortogonal de f sobre V_{λ_u}), y la serie es convergente en el sentido de la L^2-convegencia. La descomposición anterior para la función Δf será $\Delta f = \sum_u \lambda_u f_u$.

La serie $Z(t) = \sum_u m_u e^{-\lambda_u t}$ es convergente para todo $t > 0$, donde m_u es la multiplicidad de λ_u. Además $Z(t)$ admite un desarrollo asintótico $Z(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-(n/2)}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k + \ldots)$.
Los a_k son entonces invariantes espectrales que sólo dependen de la curvatura de la variedad y de sus derivadas sucesivas.
A partir de este desarrollo se demuestra que la dimensión, el volumen y la integral de la curvatura escalar son invariantes espectrales, es decir, solo dependen del espectro de la variedad.

3. Subvariedades del espacio Euclídeo y geometría del Laplaciano.-

Sea $\phi: M^n \longrightarrow E^m$ una inmersión isométrica de una variedad de Riemann compacta en el espacio Euclídeo. Designamos por ∇ y D las conexiones Riemannianas de M y E^m respectivamente. Identificamos, como es habitual, el espacio tangente a M en un punto $x \in M$ con su imagen mediante la diferencial de ϕ. Si Δ es el Laplaciano de M actuando sobre funciones, designamos por el mismo símbolo a la extensión natural de este operador al espacio de las aplicaciones diferenciables de M en E^m, esto es:
Si $F: M \longrightarrow E^m$ es una aplicación diferenciable y si $F = (F^1, .., F^m)$, donde F^i es la i-ésima función coordenada de F, definimos el Laplaciano de F por $\Delta F = (\Delta F^1, .., \Delta F^m)$. Evidentemente ΔF no depende de la base elegida en E^m y $\Delta\langle a,F\rangle = \langle a, \Delta F\rangle$, donde a es un vector fijo de E^m y $\langle , \rangle$ designa la métrica Euclídea en E^m.

Sea H el vector curvatura media de la inmersión ϕ. Entonces tenemos la siguiente relación

$$\text{(I.3.1)} \qquad \Delta\phi = -nH.$$

En efecto $(d\langle a,\phi\rangle)(X) = \langle a,X\rangle$ y $(\mathrm{Hess}\langle a,\phi\rangle)(X,Y) = Y\langle a,X\rangle - \langle a,\nabla_X Y\rangle = \langle a, D_X Y - \nabla_X Y\rangle = \langle a, \sigma(X,Y)\rangle$, para todo $X, Y \in \chi(M)$. Tomando trazas y teniendo en cuenta que la igualdad obtenida es cierta para todo $a \in E^m$ concluimos (I.3.1).

Como consecuencia de lo expuesto en la sección 2, tenemos la siguiente descomposición para la inmersión ϕ:

$$\text{(I.3.2)} \qquad \phi = \textstyle\sum_u \phi_u,$$

donde $\phi_u: M^n \longrightarrow E^m$ es diferenciable, $\Delta\phi_u = \lambda_u\phi_u$ y la serie es convergente, coordenada a coordenada, para la L^2-topología en $C^\infty(M)$.

Además ϕ_0 es una aplicación constante, más precisamente, ϕ_0 es el centro de gravedad de la inmersión ϕ, esto es

(I.3.3) $$\phi_0 = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M \phi ,$$

donde vol(M) designa el volumen de M. Las aplicaciones $\{\phi_u\}_{u \in N}$ son ortogonales, es decir

(I.3.4) $$\int_M <\phi_u, \phi_v> = 0 , \quad \text{para todo } u \,;\, v \,,\, u \neq v.$$

Tenemos las relaciones

(I.3.5) $$\Delta\phi = -nH = \textstyle\sum_{u \geqq 1} \lambda_u \phi_u ,$$

(I.3.6) $$\Delta^k \phi = \textstyle\sum_{u \geqq 1} \lambda_u^k \phi_u , \quad \text{para todo } k \in N,$$

sindo las series anteriores L^2-convergentes.

Sea $\Omega \subset N$ un subconjunto finito. Diremos que <u>la inmersión</u> ϕ <u>es de orden</u> Ω si $\phi_u = 0$ para todo $u \in N - \Omega \cup \{0\}$. Si $\Omega = \{u\}$ y si ϕ es una inmersión de orden Ω diremos simplemente que ϕ es de <u>orden u</u>.

Con las definiciones anteriores el conocido teorema de Takahashi [Ta] se puede enunciar como sigue:

" Sea $\phi: M^n \longrightarrow E^m$ una inmersión isométrica de una variedad de Riemann compacta en el espacio Euclídeo. Entonces ϕ es de orden u, para algún $u \geqq 1$, si y sólo si ϕ es minimal en alguna esfera de E^m. Además si ϕ es de orden u se tiene la relación $\lambda_u = n/r^2$, donde r es el radio de la esfera."

Por tanto el espectro de M contiene información acerca de las esferas en las que M admite una inmersión isométrica y minimal.

Pasamos ahora a exponer los resultados fundamentales de esta sección. Resultados similares a estos han sido obtenidos recientemente por B. Y. Chen [Ch 5].

Proposición I.3.1. Sea $\phi: M^n \longrightarrow E^m$ una inmersión isométrica de una variedad de Riemann compacta en el espacio Euclídeo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) ϕ es una inmersión de orden Ω, para un cierto $\Omega \subset N$ finito, con cardinal$(\Omega) = k$, $k \geq 1$.

ii) Existen números reales $a_0, \ldots, a_{k-1}$ tales que

$$\Delta^k \phi = a_0(\phi - \phi_0) + a_1 \Delta\phi + \ldots + a_k \Delta^{k-1}\phi ,$$

donde ϕ_0 es el centro de gravedad de la inmersión .

Demostración. i) $\Longrightarrow$ ii). Sea $\Omega = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset N$. Sea S_r el polinomio elemental de grado r en las variables $\lambda_{u_1}, \ldots, \lambda_{u_k}$, es decir $S_1 = \lambda_{u_1} + \ldots + \lambda_{u_k}$, $S_2 = \lambda_{u_1}\lambda_{u_2} + \lambda_{u_1}\lambda_{u_3} + \ldots + \lambda_{u_{k-1}}\lambda_{u_k}, \ldots,$ $S_k = \lambda_{u_1}\lambda_{u_2}\ldots\lambda_{u_k}$.

Si ϕ es de orden Ω, tenemos $\phi = \phi_0 + \phi_{u_1} + \ldots + \phi_{u_k}$, y $\Delta^r\phi = \lambda_{u_1}^r \phi_{u_1} + \ldots + \lambda_{u_k}^r \phi_{u_k}$, para todo r N, $r \geq 1$. Por tanto, mediante un cálculo directo, obtenemos

$$\Delta^k \phi = S_1 \Delta^{k-1}\phi - S_2 \Delta^{k-2}\phi + \ldots + (-1)^{k-1} S_k(\phi - \phi_0).$$

ii) $\Longrightarrow$ i). Supongamos $\Delta^k\phi = a_0(\phi - \phi_0) + a_1\Delta\phi + \ldots + a_{k-1}\Delta^{k-1}\phi$ para ciertos $a_r \in R$. A partir de (I.3.2) y (I.3.6) obtenemos

$$\sum_{u \geq 1} \lambda_u^k \phi_u = a_0 \sum_{u \geq 1} \phi_u + a_1 \sum_{u \geq 1} \lambda_u \phi_u + \ldots + a_{k-1} \sum_{u \geq 1} \lambda_u^{k-1} \phi_u .$$

Por tanto

$$\sum_{u \geqq 1} (\lambda_u^k - a_0 - a_1 \lambda_u - \ldots - a_{k-1} \lambda_u^{k-1}) \phi_u = 0,$$

siendo la serie anterior L^2-convergente. Sea $v \in N$, $v \geqq 1$. Aplicando $\int_M <\phi_v, -\!>$ a ambos lados de la igualdad anterior, y teniendo en cuenta (I.3.4) obtenemos

$$(\lambda_v^k - a_0 - a_1 \lambda_v - \ldots - a_{k-1} \lambda_v^{k-1}) \int_M <\phi_v, \phi_v> = 0.$$

En consecuencia $\phi_v = 0$ para todo $v \geqq 1$, salvo, a lo sumo, para k valores distintos de v (aquellos para los cuales λ_v sea una raiz del anterior polinomio con coeficientes a_r)

C.Q.D.

<u>Proposición</u>. I.3.2. <u>Sea</u> $\phi : M^n \longrightarrow E^m$ <u>una inmersión isométrica de una variedad de Riemann compacta en el espacio Euclídeo, y y sean</u> $k, t \in N$, $k, t \geqq 1$. <u>Entonces se tiene la siguiente desigualdad</u>

$$\text{(I.3.7)} \quad \int_M \{ <\Delta^{k+t} \phi, \phi> - S_1 <\Delta^{k+t-1} \phi, \phi> + S_2 <\Delta^{k+t-2} \phi, \phi> + \ldots + (-1)^k S_k <\Delta^t \phi, \phi> \} \geqq 0,$$

<u>donde</u> S_r <u>es el polinomio elemental de grado</u> r <u>en las variables</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (<u>esto es</u>, $S_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, $S_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \ldots + \lambda_{k-1} \lambda_k$, $\ldots$, $S_k = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k$). <u>La igualdad ocurre si y sólo si</u> ϕ <u>es una inmersión de orden</u> $\{1, 2, .., k\}$.

<u>Demostración</u>. Utilizando (I.3.6) obtenemos , mediante un cálculo directo

$$\Delta^{k+t}\phi - S_1\Delta^{k+t-1}\phi + S_2\Delta^{k+t-2}\phi +\ldots+ (-1)^k S_k\Delta^t\phi =$$

$$= \sum_{u \geqq 1} \lambda_u^t(\lambda_u - \lambda_1)(\lambda_u - \lambda_2)\ldots(\lambda_u - \lambda_k)\phi_u =$$

$$= \sum_{u \geqq k+1} \lambda_u^t(\lambda_u - \lambda_1)\ldots(\lambda_u - \lambda_k)\phi_u .$$

Por tanto aplicando $\int_M <\phi,->$ en los dos miembros de la igualdad anterior obtenemos, utilizando (I.3.4)

$$\int_M \{<\Delta^{k+t}\phi,\phi> - S_1<\Delta^{k+t-1}\phi,\phi> + S_2<\Delta^{k+t-2}\phi,\phi> +\ldots+ (-1)^k S_k<\Delta^t\phi,\phi>\} =$$

$$= \sum_{u \geqq k+1} \lambda_u^t(\lambda_u - \lambda_1)\ldots(\lambda_u - \lambda_k)\int_M <\phi_u,\phi_u> \geqq 0.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $\phi_u = 0$ para todo $u \in N$, $u > k$, es decir si y sólo si ϕ es de orden $\{1,\ldots,k\}$.

C.Q.D.

El siguiente resultado justifica la elección de las subvariedades minimales para el estudio que hacemos en esta memoria.

<u>Lema</u> I.3.3. <u>Sea</u> ϕ: $M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}$ <u>una inmersión isométrica y minimal entre dos variedades de Riemann</u>. <u>Sea</u> $f: \tilde{M} \longrightarrow R$ <u>una función diferenciable</u>. <u>Entonces</u>

$$\Delta(f\circ\phi) = -\,\text{traza}\,(\,\text{Hess}f_{|TM}).$$

<u>Demostración</u>. Sean X, $Y \in \chi(M)$. Entonces $d(f\circ\phi)(X) = df(X)$, y $\text{Hess}(f\circ\phi)(X,Y) = Y(d(f\circ\phi)(X)) - d(f\circ\phi)(\nabla_Y X) =$

$= Y(df(X)) - df(\nabla_Y X) = \text{Hess}f(X,Y) + df(\tilde{\nabla}_Y X) - df(\nabla_Y X) =$

$= \text{Hess}f(X,Y) + df(\sigma(X,Y))$.

Tomando trazas concluimos el lema C.Q.D.

CAPITULO II

GEOMETRIA ESPECTRAL PARA SUBVARIEDADES DEL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO

1. Un embebimiento del espacio proyectivo complejo en el espacio Euclídeo.

El embebimiento que presentamos en esta sección es la inmersión natural del espacio proyectivo en el espacio Euclídeo. Además desde el punto de vista del espacio Euclídeo este embebimiento convierte al espacio proyectivo en una de las "mejores" subvariedades del Euclídeo (es una subvariedad paralela). El embebimiento aparece descrito por primera vez en [T] y ha sido estudiado tambien en [Le] y [S1] . Nosotros haremos aquí un estudio completo con un enfoque distinto al de estos autores. Geométricamente el embebimiento puede describirse de la siguiente forma:

Sea C^{m+1} el espacio Euclídeo complejo con dimensión compleja m+1. En este espacio tenemos definido el producto escalar $\langle x,y\rangle = \mathrm{Real}\, x\bar{y}^t$, para todo $x = (x^0,..,x^m)$, $y = (y^0,..,y^m)$ en C^{m+1}, donde $(^-)$ indica conjugación y $()^t$ trasposición. El espacio proyectivo complejo, CP^m, de dimensión (compleja) m viene definido como el espacio de todas las rectas complejas de C^{m+1}, considerado como espacio vectorial. Consideremos el espacio vectorial de todos los endomorfismos lineales y complejos de C^{m+1}, que designaremos por $End(C^{m+1})$. Definimos ahora la aplicación $\phi: CP^m \longrightarrow End(CP^m)$ como sigue: Si $\Pi \in CP^m$ es una recta compleja de C^{m+1}, $\phi(\Pi): C^{m+1} \longrightarrow C^{m+1}$ designa la proyección ortogonal sobre la recta Π. Como consecuencia inmediata de esta definición se tienen las siguientes propiedades

1) ϕ es inyectiva,

2) $\phi(\Pi)$ es idempotente para todo $\Pi \in CP^m$,

3) rango $\phi(\Pi) = 1$ " " " ,

4) $\phi(\Pi)$ es autoadjunta " " " .

Reciprocamente, no es difícil ver que cada elemento de $End(C^{m+1})$ cumpliendo las propiedades 2), 3) y 4) es la proyección ortogonal sobre alguna recta compleja de C^{m+1}. La condición 3) se puede sustituir (en presencia de las otras dos) por una equivalente y más manejable

3') traza $\phi(\Pi) = 1$, para todo $\Pi \in CP^m$.

Si $z = (z^0,..,z^m) \in \Pi$, $z \neq 0$, siendo Π un elemento de CP^m, se comprueba facilmente que la expresión matricial de la proyección $\phi(\Pi)$ viene dada por $(1/z\bar{z}^t)\bar{z}^t z$. Todo lo expuesto anteriormente justifica la siguiente definición:

Sea $HM(m) = \{ A \in gl(m,C) \,/\, \bar{A}^t = A \}$ el conjunto de las matrices Hermíticas de orden m. HM(m) es un subespacio lineal de gl(m,C) de dimensión m^2. Definimos en HM(m) la métrica

$$(II.1.1) \qquad g(A,B) = 2\,\mathrm{tr}\,AB, \text{ para todo } A, B \in HM(m).$$

Definimos $CP^m = \{ A \in HM(m+1) \,/\, AA = A,\ \mathrm{tr}\,A = 1 \}$ y sea U(m) el grupo unitario. Es conveniente, para nuestra exposición, interpretar el espacio proyectivo complejo como espacio simétrico (un estudio detallado de este enfoque puede encontrarse en [K-N]).

Lema II.1.1. CP^m es una subvariedad de HM(m+1) difeomorfa al espacio homogéneo U(m+1)/U(1)xU(m).

Demostración. Sea $A \in CP^m$. Puesto que A es una matriz Hermítica existe $P \in U(m+1)$ tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} h_0 & & \\ & \ddots & \\ & & h_m \end{pmatrix}.$$

Como $(PAP^{-1})^2 = PAP^{-1}$, tenemos que $h_i^2 = h_i$, esto es, $h_i = 0$ ó $h_i = 1$. Por otra parte $tr(PAP^{-1}) = 1$. Por tanto existe un indice i_0 tal que $h_{i_0} = 1$ y $h_i = 0$ para todo $i \neq i_0$. Así, existirá $P \in U(m+1)$ tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots_0 \end{pmatrix} = B.$$

Diremos que B es el origen de CP^m. Hemos demostrado que CP^m es la orbita de B para la acción de $U(m+1)$ sobre $HM(m+1)$ definida por $(P,A) \longmapsto PAP^{-1}$, donde $P \in U(m+1)$ y $A \in HM(m+1)$. El subgrupo de isotropía de B es $U(1)xU(m)$. Por tanto CP^m es una subvariedad de $HM(m+1)$ y además $CP^m \cong U(m+1)/U(1)xU(m)$.

C.Q.D.

Para cada A en CP^m, designamos por $T_A(CP^m)$ el espacio tangente a CP^m en A, identificado mediante la inmersión con un subespacio de $HM(m+1)$. De la misma forma designaremos por $T_A^{\perp}(CP^m)$ al espacio normal a CP^m, en $HM(m+1)$, en el punto A.

<u>Lema II.1.2. Para cada punto A en CP^m, tenemos</u>

(II.1.2) $\qquad T_A(CP^m) = \{ X \in HM(m+1) \ / \ XA + AX = X \},$

(II.1.3) $\qquad T_A^{\perp}(CP^m) = \{ Z \in HM(m+1) \ / \ AZ = ZA \}.$

<u>Demostración</u>. Sea $\alpha : \Gamma \longrightarrow CP^m$ una curva tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha'(0) = X$, donde Γ designará un intervalo abierto de R, con $0 \in \Gamma$. De la relación $\alpha(t)\alpha(t) = \alpha(t)$ obtenemos $XA + AX = X$. Por tanto tenemos una inclusión. Puesto que las aplicaciones de $HM(m+1)$ en si mismo dadas por $A \longmapsto PAP^{-1}$, donde $P \in U(m+1)$, son isometrías

basta con establecer la igualdad (II.1.2) en el origen de CP^m. Para ello calculamos la dimensión del subespacio $\{X \in HM(m+1) \ / \ XB + BX \}$. Para cada $X \in HM(m+1)$ escribimos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b}^t & c \end{pmatrix}, \text{ donde } a \in R,\ b \in C^m \text{ y } c \in HM(m)=$$

Entonces $XB + BX = X$ si y solo si $a = 0$ y $c = 0$, es decir

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \bar{b}^t & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in C^m.$$

La dimensión real de este subespacio es $2m = \dim U(m+1)/U(1)xU(m) = = \dim T_A(CP^m)$ y por tanto tenemos (II.1.2).

Un vector Z está en $T_B^{\perp}(CP^m)$ si y sólo si $g(X,Z) = 0$ para todo $X \in T_B(CP^m)$. Sea

$$Z = \begin{pmatrix} x & y \\ \bar{y}^t & z \end{pmatrix}.$$

Entonces $g(X,Z) = 4 \operatorname{Real} b\bar{y}^t$. Por tanto $g(X,Z) = 0$ para todo X en $T_B(CP^m)$ si y sólo si $y = 0$. Por otro lado $ZB = BZ$ si y sólo si $y = 0$, de donde se sigue (II.1.3)

C.Q.D.

Nota. Los campos de vectores a lo largo de CP^m dados por $A \longmapsto A$ y $A \longmapsto I$ (donde I designa la matriz identidad en $HM(m+1)$) son normales a CP^m. Los campos de vectores dados por $A \longmapsto AQ + QA - 2AQA$ son tangentes a CP^m, para todo $Q \in HM(m+1)$.

En adelante utilizaremos las siguientes relaciones, que pueden obtenerse mediante un simple cálculo: Sea $A \in CP^m$ y $X, Y \in T_A(CP^m)$. Entonces

$$AXY = XYA,$$

$$AXA = 0,$$

$$X(I - 2A) = -(I - 2A)X,$$

$$(I - 2A)^2 = I,$$

$$(I - 2A)XY = XY(I - 2A).$$

Proposición II.1.3. Sea D la conexión de Riemann de $HM(m+1)$, $\tilde{\nabla}$ la conexión inducida en CP^m, $\tilde{\sigma}$ la segunda forma fundamental de la inmersión, $\tilde{\nabla}^{\perp}$ y $\tilde{A}$ la conexión normal y el endomorfismo de Weingarten, y $\tilde{H}$ el vector curvatura media de CP^m. Entonces

$$\tilde{\nabla}_X Y = A(D_X Y) + (D_X Y)A - 2A(D_X Y)A, \tag{II.1.4}$$

$$\tilde{\sigma}(X,Y) = (XY + YX)(I - 2A), \tag{II.1.5}$$

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_X Z = D_X Z + 2A(D_X Z)A - (D_X Z)A - A(D_X Z), \tag{II.1.6}$$

$$\tilde{A}_Z X = (XZ - ZX)(I - 2A), \tag{II.1.7}$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}[I - (m+1)A], \tag{II.1.8}$$

donde X e Y son campos tangentes a CP^m, y Z es un campo normal a CP^m.

Demostración. Sean $\tilde{\nabla}$ y $\tilde{\sigma}$ definidos por (II.1.4) y (II.1.5). Sea X un vector tangente en $T_A(CP^m)$ e Y un campo tangente a CP^m. Si $\alpha : I \longrightarrow CP^m$ es una curva que satisface $\alpha(0) = A$ y $\alpha'(0) = X$, tenemos $\alpha(t)Y(t) + Y(t)\alpha(t) = Y(t)$. Por tanto de $D_X Y = \frac{d}{dt}Y(0)$ obtenemos

$$XY + YX + A(D_X Y) + (D_X Y)A = D_X Y.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(X,Y) &= (XY + YX)(I - 2A) = [D_X Y - A(D_X Y) - (D_X Y)A](I - 2A) = \\ &= -A(D_X Y) - (D_X Y)A + D_X Y + 2A(D_X Y)A + 2(D_X Y)A - 2(D_X Y)A = \\ &= -[A(D_X Y) + (D_X Y)A - 2A(D_X Y)A] + D_X Y = D_X Y - \tilde{\nabla}_X Y.\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta la ecuación (I.1.1), es suficiente con demostrar que $\tilde{\nabla}_X Y$ (respectivamente $\tilde{\sigma}(X,Y)$) es tangente (resp. normal) a CP^m. En efecto

$$\begin{aligned}A(\tilde{\nabla}_X Y) + (\tilde{\nabla}_X Y)A &= A[A(D_X Y) + (D_X Y)A - 2A(D_X Y)A] + \\ &+ [A(D_X Y) + (D_X Y)A - 2A(D_X Y)A]A = A(D_X Y) + A(D_X Y)A - 2A(D_X Y)A + \\ &+ A(D_X Y)A + (D_X Y)A - 2A(D_X Y)A = \tilde{\nabla}_X Y.\end{aligned}$$

Así hemos demostrado (II.1.1). (II.1.5) es inmediato.

De la misma forma sean $\tilde{\nabla}^{\perp}$ y $\tilde{A}$ definidos por (II.1.6) y (II.1.7). Sea Z un campo normal a CP^m. Tenemos $\alpha(t)Z(t) = Z(t)\alpha(t)$, y por tanto, derivando

$$XZ + A(D_X Z) - (D_X Z)A - ZX = 0.$$

Así

$$\tilde{A}_Z X = (XZ - ZX)(I - 2A) = \{(D_X Z)A - A(D_X Z)\}(I - 2A) =$$

$$= (D_X Z)A - A(D_X Z) - 2(D_X Z)A + 2A(D_X Z)A = \tilde{\nabla}^{\perp}_X Z - D_X Z.$$

A partir de (I.1.2) es suficiente demostrar que $\tilde{\nabla}^{\perp}_X Z$ (resp. $\tilde{A}_Z X$) es normal (resp. tangente) a CP^m. Esto se sigue, de forma análoga a la demostración de las identidades anteriores, de (II.1.2) y (II.1.3).

Puesto que las aplicaciones de HM(m+1) en si mismo dadas por $A \longmapsto PAP^{-1}$, donde $P \in U(m+1)$, son isometrías basta con verificar (II.1.8) en el origen.

Sea $\{E_1,\ldots,E_m,E_1^*,\ldots,E_m^*\}$ una base ortonormal de $T_B(CP^m)$ definida por

$$E_k = \frac{1}{2}\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \qquad\qquad (k) \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ldots 0\,1\,0\ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 1 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \end{array},$$

$$E_k^* = \frac{\sqrt{-1}}{2}\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \qquad\qquad (k) \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ldots 0\,1\,0\ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ -1 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \end{array}.$$

Se puede comprobar directamente que

$$\tilde{H}_B = \frac{1}{2m}\left(\begin{array}{c|ccc} -m & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{2m}[I - (m+1)B] .$$

C.Q.D.

Lema II.1.4. Sea f el difeomorfismo obtenido en el lema II.1.1. Entonces f es una isometría cuando se considera sobre $U(m+1)/U(1)xU(m)$ la métrica de Fubini-Study con curvatura seccional holomorfa constante $c = 1$, y sobre CP^m la métrica inducida por la de $HM(m+1)$.

Demostración. Puesto que ambas métricas son $U(m+1)$- invariantes, es suficiente demostrar que la diferencial de f en el origen es una isometría entre los espacios tangentes correspondientes.

Sea $[P]$ la clase de $P \in U(m+1)$ en $U(m+1)/U(1)xU(m)$. Entonces $f([P]) = PBP^{-1}$. Además si $o = [I]$, donde I es la matriz identidad en $U(m+1)$, sabemos que

$$T_o(U(m+1)/U(1)xU(m)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix} / a \in C^m \right\}.$$

La métrica de Fubini-Study con curvatura seccional holomorfa $c = 1$ viene dada por

$$g_o\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\bar{b}^t & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \text{ traza} \begin{pmatrix} a\bar{b}^t & 0 \\ 0 & \bar{a}^t b \end{pmatrix}.$$

Sea $\alpha : r \longrightarrow U(m+1)$ una curva tal que $\alpha(0) = I$, $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}$.

Consideramos la curva $\beta : r \longrightarrow U(m+1)/U(1)xU(m)$ dada por $\beta(t) = [\alpha(t)]$.

Entonces

$$df_o \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix} = (f \circ \beta)'(0) = \alpha'(0)B\alpha(\overline{0})^t + \alpha(0)B\,\alpha'(\overline{0})^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}, \text{ y por tanto}$$

$$g_B\left(df_o \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}, df_o \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\bar{b}^t & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \text{ traza} \begin{pmatrix} a\bar{b}^t & 0 \\ 0 & \bar{a}^t b \end{pmatrix},$$

y el lema está demostrado.

Lema II.1.5. La estructura compleja inducida por la isometría f en CP^m viene dada por

$$JX = \sqrt{-1}(I - 2A)X, \quad \text{para todo } X \in T_A(CP^m). \tag{II.1.9}$$

Demostración. Es suficiente demostrar (II.1.9) en el origen. La estructura compleja $\tilde{J}$ en el origen de $U(m+1)/U(1)xU(m)$ viene dada por

$$\tilde{J}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a}^t & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}$ un vector en $T_B(CP^m)$. La estructura compleja inducida en CP^m vendrá dada por

$$J\begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix} = (df_o)\tilde{J}(df_o)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte

$$\sqrt{-1}(I - 2B)\begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ \bar{a}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

C.Q.D.

Alguna de las propiedades geométricas del embebimiento del espacio proyectivo complejo en el espacio Euclideo están recogidas en la siguiente

Proposición II.1.6. La inmersión de CP^m en $HM(m+1)$ verifica las siguientes propiedades:

a) Es un embebimiento isométrico $U(m+1)$-equivariante.

b) $\tilde{\sigma}(JX,JY) = \sigma(X,Y)$ para todo $X, Y \in T_A(CP^m)$, y $\tilde{\nabla}\tilde{\sigma} = 0$, es decir, el embebimiento es paralelo.

c) Es minimal en la esfera S, cuyo centro es $[1/(m+1)]I$ y cuyo radio es $\sqrt{2m/(m+1)}$. Por tanto es un embebimiento de orden 1.

Demostración. a) es una consecuencia de los lemas II.1.1 y II.1.4. Recordemos que la propiedad de ser $U(m+1)$-equivariante significa que cada isometría de CP^m determinada por los elementos de $U(m+1)$, se puede obtener como la restricción de una isometría de $HM(m+1)$ al espacio proyectivo complejo.

b) Un simple cálculo demuestra que $\tilde{\sigma}(JX,JY) = \tilde{\sigma}(X,Y)$.

Veamos que la inmersión es paralela. Sean X, Y_1, Y_2 tres campos de vectores tangentes a CP^m. Entonces se tiene

$$(\tilde{\nabla}\tilde{\sigma})_X(JY_1,JY_2) = \tilde{\nabla}^{\perp}_X \tilde{\sigma}(JY_1,JY_2) - \tilde{\sigma}(\tilde{\nabla}_X JY_1,Y_2) - \tilde{\sigma}(JY_1,\tilde{\nabla}_X JY_2) =$$

$$= \tilde{\nabla}^{\perp}_X \tilde{\sigma}(Y_1,Y_2) - \tilde{\sigma}(\tilde{\nabla}_X Y_1,Y_2) - \tilde{\sigma}(Y_1,\tilde{\nabla}_X Y_2) = (\tilde{\nabla}\tilde{\sigma})_X(Y_1,Y_2),$$

donde hemos utilizado que $\tilde{\sigma}(JY_1,JY_2) = \tilde{\sigma}(Y_1,Y_2)$ y el hecho de que CP^m es una variedad Kaehleriana. Así para cada vector tangente Y a CP^m tenemos $(\tilde{\nabla}\tilde{\sigma})_X(Y,JY) = 0$, y utilizando la ecuación de Codazzi $(\tilde{\nabla}\tilde{\sigma})_Y(JY,X) = 0$. Si tomamos $X = JY$ nos queda $0 = (\tilde{\nabla}\tilde{\sigma})_Y(JY,JY) = (\tilde{\nabla}\tilde{\sigma})_Y(Y,Y)$. Por tanto $\tilde{\nabla}\tilde{\sigma} = 0$.

c) Si A está en CP^m, entonces $g(A - \frac{1}{m+1}I,\ A - \frac{1}{m+1}I) = \frac{2m}{m+1}$.

Por tanto CP^m está incluido en S. Sea $\tilde{H}$ el vector curvatura media de CP^m en $HM(m+1)$.

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}[I - (m+1)A] = -\frac{m+1}{2m}(A - \frac{1}{m+1}I).$$

Así teniendo en cuenta el teorema de Takahashi, concluimos que CP^m es minimal en S. Como el primer valor propio del espectro de CP^m es $\lambda_1 = m+1$ (vease [BGM]) el embebimiento es de orden 1.

C. Q. D.

A partir de la introducción geométrica del embebimiento que hicimos al comienzo de esta sección, obtenemos fácilmente que la proyección standard de $C^{m+1}-\{0\}$ sobre CP^m viene dada por

(II.1.10) $$z \longmapsto (1/z\bar{z}^t)\bar{z}^t z,$$

donde $z = (z^0,\ldots,z^m)$ está en $C^{m+1}-\{0\}$.

Lema II.1.7. Para el embebimiento del espacio proyectivo complejo en el espacio Euclídeo se cumplen las siguientes relaciones:

$$(\text{II.1.11})\qquad g(\tilde\sigma(X,Y),\tilde\sigma(V,W)) = \tfrac{1}{2}g(X,Y)g(V,W) + $$
$$+\ \frac{1}{4}\{g(X,W)g(Y,V) + g(X,V)g(Y,W) + g(X,JW)g(Y,JV) + g(X,JV)g(Y,JW)\},$$

$$(\text{II.1.12})\qquad \tilde A_{(X,Y)}V = \tfrac{1}{2}g(X,Y)V + \frac{1}{4}\{g(Y,V)X + g(X,V)Y + g(JY,V)JX + $$
$$+\ g(JX,V)JY\},$$

$$(\text{II.1.13})\qquad g(\tilde\sigma(X,Y),I) = 0,$$

$$(\text{II.1.14})\qquad g(\tilde\sigma(X,Y),A) = -g(X,Y),$$

donde X, Y, V, W son vectores tangentes a CP^m en el punto A.

Demostración. Puesto que el embebimiento es U(m+1)-equivariante basta con comprobar las anteriores relaciones en el origen de CP^m. Sean X, Y, V, W, en $T_B(CP^m)$ de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \bar x^t & 0 \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ \bar y^t & 0 \end{pmatrix},\quad V = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \bar v^t & 0 \end{pmatrix},\quad W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ \bar w^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\tilde\sigma(X,Y) = \begin{pmatrix} -(x\bar y^t + y\bar x^t) & \\ & \bar x^t y + \bar y^t x \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$g(\tilde\sigma(X,Y),\tilde\sigma(V,W)) = 2\ (x\bar y^t + y\bar x^t)(v\bar w^t + w\bar v^t) + \mathrm{tr}\,(\bar x^t y + \bar y^t x)(\bar v^t w + \bar w^t v) =$$
$$= 2(x\bar y^t + y\bar x^t)(v\bar w^t + w\bar v^t) + 2(y\bar v^t w\bar x^t + y\bar w^t v\bar x^t + x\bar v^t w\bar y^t + x\bar w^t v\bar y^t).$$

Por otro lado

$$g(X,Y)g(V,W) = 4(x\bar y^t + y\bar x^t)(v\bar w^t + w\bar v^t),$$

$$g(X,JW)g(Y,JV) = 2\sqrt{-1}\,(x\bar w^t - w\bar x^t)(y\bar v^t - v\bar y^t) =$$
$$= -4(x\bar w^t y\bar v^t - x\bar w^t v\bar y^t - w\bar x^t y\bar v^t + w\bar x^t v\bar y^t).$$

A partir de estas igualdades obtenemos fácilmente (II.1.11).

(II.1.12) es una consecuencia de (II.1.11) y (I.1.13).

(II.1.13) y (II.1.14) se obtienen de forma similar a (II.1.11).

Lema II.1.8. Sean E_1, E_2 dos vectores de $T_A(CP^m)$ tales que $g(E_1,E_2)=0$ y $g(E_1,E_1) = g(E_2,E_2) = 1$. Entonces

(II.1.15) $\quad g(\tilde{\sigma}(E_1,E_1),\tilde{\sigma}(E_1,E_1)) = 1,$

(II.1.16) $\quad \frac{1}{2} \leqq g(\tilde{\sigma}(E_1,E_1),\tilde{\sigma}(E_2,E_2)) \leqq 1.$

Además si se cumple que $g(E_1,JE_2) = 0$, entonces

(II.1.17) $\quad g(\tilde{\sigma}(E_1,E_1),\tilde{\sigma}(E_2,E_2)) = \frac{1}{2},$

(II.1.18) $\quad g(\tilde{\sigma}(E_1,E_2),\tilde{\sigma}(E_1,E_2)) = \frac{1}{4}.$

Demostración. (II.1.15), (II.1.17) y (II.1.18) son casos particulares de (II.1.11). Veamos (II.1.16). De (II.1.11) se tiene

$$g(\tilde{\sigma}(E_1,E_1),\tilde{\sigma}(E_2,E_2)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}g(E_1,JE_2)^2,$$

y el lema está demostrado teniendo en cuenta que $g(E_1,JE_2)^2$ varía entre 0 y 1.

C. Q. D.

2. Subvariedades del espacio proyectivo complejo.-

Sea $x:M^n \longrightarrow CP^m$ una inmersión isométrica de una variedad de Riemann M^n en CP^m. Para todos los resultados locales identificamos los elementos de M con sus correspondientes imágenes en CP^m. Decimos que M es una subvariedad Kaehleriana de CP^m si para todo $x \in M$ se verifica

$$JT_xM = T_xM,$$

donde J es la estructura compleja de CP^m y T_xM es el espacio tangente a M en x.

Decimos que M es una subvariedad totalmente real de CP^m si para todo $x \in M$ se verifica

$$JT_xM \subset T_x^{\perp}M,$$

donde $T_x^{\perp}M$ es el espacio normal de M en CP^m, en el punto x.

Decimos que M es una CR-subvariedad de CP^m si existen sobre M dos distribuciones $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^{\perp}$ ortogonales y complementarias tales que $\mathcal{D}$ es holomorfa y $\mathcal{D}^{\perp}$ es antiholomorfa, es decir

$$\mathcal{D}_x \perp \mathcal{D}_x^{\perp},$$
$$\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_x^{\perp} = T_xM,$$
$$J\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x,$$
$$J\mathcal{D}_x^{\perp} \subset T_x^{\perp}M,$$

para todo $x \in M$. En lo sucesivo, para una CR-subvariedad adoptaremos la notación M^{2n+p}, donde 2n es la dimensión de la distribución holomorfa y p la de la distribución antiholomorfa. Evidentemente toda subvariedad Kaehleriana ó totalmente real es una CR-subvariedad.

Lema II.2.1. a) Sea M^n una subvariedad n-dimensional de CP^m. Sea $H^{\perp}$ la componente normal a CP^m del vector curvatura media de M^n en HM(m+1). Entonces

(II.2.1) $$\frac{n+1}{2n} \leqq g(H^{\perp},H^{\perp}) \leqq 1.$$

b) Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad de CP^m. $H^{\perp}$ denota el mismo vector que en el apartado anterior. Entonces

(II.2.2) $$g(H^{\perp},H^{\perp}) = \frac{(2n+p)^2+4n+p}{2(2n+p)^2}.$$

Demostración. a) Sea $\{E_1,\ldots,E_n\}$ una base ortonormal de T_AM^n, donde A es un punto de M^n. Sea $\tilde{\sigma}$ la segunda forma fundamental de CP^m en HM(m+1). Entonces $H^{\perp} = \frac{1}{n}\sum_i \tilde{\sigma}(E_i,E_i)$. De esta expresión, utilizando el lema II.1.8, obtenemos (II.2.1).

b) En este caso podemos elegir una base ortonormal de T_AM de la forma $\{E_1,\ldots,E_n,JE_1,\ldots,JE_n,F_1,\ldots,F_p\}$, donde E_i está en la distribución holomorfa y F_j está en la distribución antiholomorfa. Así concluimos (II.2.1) utilizando el lema II.1.8.

C. Q. D.

Lema II.2.2. Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad de CP^m. Sea $\tilde{\sigma}_M$ la restricción de la segunda forma fundamental de CP^m en $HM(m+1)$ al fibrado tangente de M. Entonces

$$g(\tilde{\sigma}_M,\tilde{\sigma}_M) = \frac{1}{4}\{(2n+p)^2+4n+3p\} . \tag{II.2.3}$$

La demostración se obtiene a partir del lema II.1.8.

Corolario II.23. Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad de CP^m. Sea H el vector curvatura media de M^{2n+p} en CP^m, ρ la curvatura escalar de M^{2n+p} y σ la segunda forma fundamental de M^{2n+p} en CP^m. Entonces

$$\rho = \frac{(2n+p)^2+4n-p}{4} + (2n+p)^2 g(H,H) - \|\sigma\|^2. \tag{II.2.4}$$

Demostración. Para una subvariedad n-dimensional del espacio Euclídeo se tiene la relación [Ch 1]

$$\rho = n^2 g(\tilde{H},\tilde{H}) - \|\tilde{\sigma}\|^2,$$

donde ρ es la curvatura escalar de la subvariedad y $\tilde{H}$ y $\tilde{\sigma}$ son la segunda forma fundamental de la inmersión. Así teniendo en cuenta (II.2.2) y (II.2.3) obtenemos (II.2.4)

C. Q. D.

Como una primera aplicación de los resultados obtenidos hasta ahora daremos a continuación ciertas acotaciones del volumen de una subvariedad compacta y minimal del espacio Euclídeo.

B. Y. Chen ha demostrado el siguiente teorema

Teorema [Ch1]. Sea M una subvariedad compacta n-dimensional del espacio Euclídeo. Entonces se tiene

$$\text{(II.2.5)} \qquad \int_M |H|^n \geqq c_n,$$

donde $|H|$ es la curvatura media de M y c_n es el volumen de la esfera unidad n-dimensional. La igualdad ocurre si y sólo si M está embebida como una esfera standard en un subespacio afín (n+1)-dimensional de E^m.

El siguiente teorema ha sido mejorado recientemente por B. Y. Chen [Ch6].

Teorema II.2.4. Sea M^n una subvariedad compacta y minimal de CP^m. Entonces tenemos

$$\text{(II.2.6)} \qquad \mathrm{vol}(M) \geqq c_n,$$

donde vol(M) designa el volumen de M y c_n es el volumen de la esfera unidad n-dimensional.

Demostración. Sea H el vector curvatura media de M en HM(m+1). Sea $H^{\perp}$ el campo de vectores que se define en el lema II.2.1. Puesto que M^n es minimal en CP^m, tenemos $H = H^{\perp}$. Así, obtenemos (II.2.6) a partir de (II.2.1) y (II.2.5)

C. Q. D.

Teorema II.2.5. Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad compacta y minimal de CP^m. Entonces se tiene

$$\text{(II.2.7)} \qquad \left(\frac{(2n+p)^2+4n+p}{2(2n+p)^2}\right)^{\frac{1}{2}(2n+p)} \mathrm{vol}(M) \geqq c_{2n+p},$$

donde vol(M) es el volumen de M y c_{2n+p} el volumen de la esfera unidad (2n+p)-dimensional. La igualdad en (II.2.7) ocurre si y sólo si $M = CP^1$ está embebida como una subvariedad Kaehleriana y totalmente geodésica de CP^m.

Demostración. Por un argumento similar en el teorema II.2.4 y teniendo en cuenta (II.2.2) obtenemos la desigualdad en (II.2.7). Supongamos que se da la igualdad. Entonces M es isométrica a una esfera de radio R. Por tanto $vol(M) = R^{2n+p}c_{2n+p}$, de donde se concluye que

$$R^2 = \frac{2(2n+p)^2}{(2n+p)^2+4n+p} .$$

Sean c y ρ las curvaturas seccional y escalar de M respectivamente. Entonces $c = 1/R^2$ y

$$\rho = c(2n+p-1)(2n+p). \tag{II.2.8}$$

A partir del corolario II.2.3, se tiene

$$\rho \leqq \frac{1}{4}\{(2n+p)^2+4n-p\} . \tag{II.2.9}$$

De (II.2.8) y (II.2.9) se concluye que

$$\{(2n+p)^2+4n\}(2n+p-2) + p(6n+3p-2) \leqq 0.$$

Pero la anterior desigualdad ocurre si y sólo si n=1 y p=0. Para estos valores R = 1. Así M es una esfera unidad de dimensión 2 embebida como una subvariedad Kaehleriana. Puesto que M y CP^m tienen la misma curvatura seccional holomorfa c = 1, se tiene que M es una subvariedad totalmente geodésica en CP^m. El inverso se sigue del hecho de que CP^1 está embebida en HM(2) como una esfera standard.

C. Q. D.

3. El primer valor propio para subvariedades minimales del espacio proyectivo complejo.-

En esta sección obtenemos una cota superior para el primer valor propio del espectro del Laplaciano de una subvariedad de CP^m, y estudiamos con detalle cuando se da la igualdad en la anterior acotación. Comenzamos clasificando las CR-subvariedades minimales de CP^m que son minimales en alguna esfera de HM(m+1).

Teorema II.3.1. Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad minimal de CP^m. Entonces M^{2n+p} es minimal en alguna esfera de HM(m+1) si y sólo si uno de los siguientes casos ocurre:

a) $p = 0$ y M^{2n} es una subvariedad Kaehleriana y totalmente geodésica de CP^m.

b) $n = 0$ y M^p es una subvariedad totalmente real de CP^m para la cual existe una subvariedad lineal CP^p de CP^m, tal que M^p es una subvariedad totalmente real de CP^p.

Demostración. Supongamos que M^{2n+p} es minimal en una cierta esfera S de HM(m+1). Si Q designa el centro de la esfera, podemos suponer que Q es una matriz diagonal (en otro caso podemos utilizar una isometría de HM(m+1) del tipo $A \longmapsto PAP^{-1}$, donde $P \in U(m+1)$). Sea H el vector curvatura media de M en HM(m+1). Por la minimalidad de M en S, teniendo en cuenta el teorema de Takahashi, sabemos que $H = h(A - Q)$, para todo A de M, donde h es un número real no nulo. Puesto que H y A son normales a CP^m se tiene que $Q \in T_A^{\perp}(CP^m)$ para todo A de M. Así de (II.1.3) se tiene que $AQ = QA$, para todo A de M. Dicho de otra forma, M está contenida en el subespacio lineal L de HM(m+1) definido por la ecuación

$$L = \{A \in HM(m+1) \ / \ AQ = QA \}.$$

La matriz Q será de la forma

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_1 & & & \\ & & & a_r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_r \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$CP^m \cap L = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} \Big/ \begin{array}{l} A_i A_i = A_i \\ \sum_i \text{traza}\, A_i = 1 \end{array} \right\}.$$

Puesto que A_i es una matriz Hermítica e idempotente su traza es un número natural. Así, para cada A de M, existirá un índice j tal que $\operatorname{tr} A_j = 1$ y $\operatorname{tr} A_i = 0$ para todo $i = j$. Una matriz verificando las propiedades anteriores y con traza cero es nula, y por tanto se tiene

$$CP^m \cap L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & A_j & \\ & & 0 \end{pmatrix} \Big/ \begin{array}{l} A_jA_j = A_j \\ \operatorname{tr} A_j = 1 \end{array} \right\}.$$

Puesto que M es conexa, M estará contenida en una componente conexa de $CP^m \cap L$. Cada una de estas componentes conexas es una subvariedad lineal de CP^m (es un CP^q, con $q \leqq m$) y M es minimal en la esfera $S \cap L$. En consecuencia el problema queda reducido a estudiar CR-subvariedades de CP^q que sean minimales en una esfera de $HM(q+1)$, tal que el centro de dicha esfera sea de la forma aI, donde a es un número real e I es la matriz identidad de orden $(q+1)x(q+1)$.

Tenemos $H = h(A - aI)$. Como M está contenida en la esfera sabemos que

(II.3.1) $$g(H, A - aI) = -1,$$

y puesto que M es una CR-subvariedad minimal de CP^q

(II.3.2) $$g(H,H) = \frac{(2n+p)^2+4n+p}{2(2n+p)^2}.$$

Multiplicando (II.3.1) por h, obtenemos de (II.3.2) que

$$h = -\frac{(2n+p)^2+4n+p}{2(2n+p)^2},$$

y por tanto

(II.3.3) $$g(A - aI, A - aI) = \frac{2(2n+p)^2}{(2n+p)^2+4n+p},$$

para todo A de M. Por otro lado

(II.3.4) $$g(A - aI, A - aI) = g(A,A) - 2ag(A,I) + a^2 g(I,I) = \\ = 2(q+1)a^2 - 4a + 2.$$

Así de (II.3.3) y (II.3.4) obtenemos

$$(q+1)\{(2n+p)^2+4n+p\}a^2 - 2\{(2n+p)^2+4n+p\}a +4n + p = 0.$$

Puesto que el discriminante de esta ecuación en a debe ser $\geqq 0$, tenemos que

$$(2n+p)^2 + 4n + p - (q+1)(4n+p) \geqq 0,$$

esto es

(II.3.5) $$(2n+p)^2 \geqq q(4n+p).$$

Pero

(II.3.6) $$q \geqq n + p,$$

y por tanto $(2n+p)^2 \geqq (4n+p)(n+p)$. Así $4np \geqq 5np$, de donde se deduce que $n = 0$ ó $p = 0$.

Supongamos que $p = 0$. De (II.3.5) y (II.3.6) se tiene que $n = q$, y por tanto M^{2n} es un abierto de CP^n.

Supongamos que $n = 0$. De la misma forma se obtiene que $p = q$.

Hemos demostrado hasta aquí una de las implicaciones del teorema. Veamos la implicación inversa.

Si M^{2n} es una subvariedad Kaehleriana y totalmemte geodésica (esto es, si M^{2n} es un abierto de una subvariedad lineal CP^n de CP^m), por la proposición II.1.6, apartado c, M es minimal en alguna esfera.

Sea M^p una subvariedad totalmente real y minimal de CP^p. Para cada A de M sea $\{E_1,..,E_p\}$ una base ortonormal de $T_A(M)$. Entonces $\{E_1,..,E_p,JE_1,..,JE_p\}$ es una base ortonormal de $T_A(CP^p)$. Por tanto si H es el vector curvatura media de M en HM(p+1), teniendo en cuenta la proposición II.1.6 apartado b y (II.1.8),

$$H = \frac{1}{2p}\{I - (p+1)A\},$$

de donde M es minimal en cierta esfera.

C. Q. D.

Si tomamos $k=1$ y $t=1$ en la proposición I.3.2, obtenemos la desigualdad

(II.3.7) $$\int_M <\Delta^2 x, x> - \lambda_1 \int_M <\Delta x, x> \geqq 0,$$

y la igualdad ocurre si y sólo si la inmersión es de orden 1. Así teniendo en cuenta que el Laplaciano es autoadjunto y que $\Delta x = -nH$ obtenemos

(II.3.7) $$n\int_M <H,H> + \lambda_1 \int_M <H,x> \geqq 0,$$

para toda subvariedad compacta y n-dimensional del espacio Euclídeo. Por otro lado mediante un simple cálculo se tiene que

$$\Delta <x,x> = -2n(1+g(H,x)),$$

y teniendo en cuenta que la integral de un Laplaciano es cero se concluye que

(II.3.8) $$n\int_M <H,H> - \lambda_1 \mathrm{vol}(M) \geqq 0.$$

La anterior desigualdad fue demostrada inicialmente, utilizando métodos más complicados, por Reilly [R].

Corolario II.3.2. *Sea* M^n *una subvariedad compacta y minimal de* CP^m. *Entonces tenemos*

(II.3.9) $$\lambda_1 \leqq n.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $M = CP^1$ *está embebida como una subvariedad Kaehleriana y totalmente geodésica de* CP^m.

Demostración. Se tiene de (II.2.1) que $g(H,H) \leqq 1$ y la igualdad se alcanza si y sólo si M es una subvariedad Kaehleriana de dimensión compleja 1. De (II.3.8) se obtiene

$$(n-\lambda_1)\mathrm{vol}(M) \geqq 0,$$

de donde se deduce (II.3.9). Si la igualdad ocurre M es una curva compleja y la inmersión de M en HM(m+1) es de orden 1. Por el teorema II.3.1, M es totalmente geodésica. El reciproco es bien conocido.

C. Q. D.

El corolario anterior ha sido mejorado recientemente por B. Y. Chen [Ch6].

Corolario II.3.3. Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad compacta y minimal de CP^m. Entonces se tiene

$$\lambda_1 \leqq \frac{(2n+p)^2 + 4n + p}{2(2n+p)} . \tag{II.3.10}$$

Si la igualdad ocurre entonces $p = 0$ y M^{2n} es una subvariedad Kaehleriana y totalmente geodésica de CP^m, ó $n = 0$ y M^p es una subvariedad totalmente real de cierta subvariedad lineal CP^p de CP^m.

Demostración. Con el mismo razonamiento que en el corolario anterior (II.3.10) se sigue de (II.2.2) y (II.3.8). Si la igualdad ocurre entonces la inmersión es de orden 1. En particular es minimal en una esfera de HM(m+1). Así terminamos la demostración teniendo en cuenta el teorema II.3.1.

C. Q. D.

Corolario II.3.4. Sea M^{2n+p} una CR-subvariedad compacta y minimal de CP^m. Si M está en los casos a) ó b) del teorema II.3.1 entonces $[(2n+p)^2+4n+p]/2(2n+p)$ es un autovalor de Spec(M).

Demostración. Si M está en los casos a) ó b) del teorema II.3.1 entonces por el teorema de Takahashi $(2n+p)/R^2$ es un autovalor del espectro de M, donde R es el radio de la esfera en la cual M es minimal. De (II.3.3) sabemos que $R^2 = 2(2n+p)^2/[(2n+p)^2+4n+p]$ y concluimos la demostración.

Corolario II.3.5. Sea M^{2n} una subvariedad Kaehleriana compacta de CP^m. Entonces se tiene

$$\lambda_1 \leqq n+1. \tag{II.3.11}$$

La igualdad ocurre si y sólo si M^{2n} es totalmente geodésica en CP^m.

Demostración. Estamos en un caso particular del corolario II.3.3, teniendo en cuenta que el primer valor propio del espectro de CP^n es $n+1$.

C. Q. D.

El corolario anterior ha sido obtenido independientemente por Ejiri [E].

Corolario II.3.6. Sea M^p una subvariedad totalmente real compacta y minimal de CP^m.

1) Si existe una subvariedad lineal CP^p de CP^m tal que M^p es una subvariedad totalmente real de CP^p, entonces $(p+1)/2$ es un autovalor de Spec(M).

2) Si $\lambda_1 = (p+1)/2$, entonces existe una subvariedad lineal CP^p de CP^m tal que M^p es una subvariedad totalmente real de CP^p.

Demostración. Consideramos los corolarios II.3.3 y II.3.4 para el caso particular de ser M totalmente real.

Más adelante daremos otra demostración del corolario II.3.5. El espacio proyectivo real de curvatura 1/4 admite una inmersión totalmente real y totalmente geodésica con codimensión mínima en CP^p. Además su primer valor propio es $(p+1)/2$, siendo p la dimensión del espacio proyectivo real.

4. Subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo.-

Esta sección está dedicada a exponer las propiedades fundamentales de la geometría de las subvariedades Kaehlerianas en el espacio proyectivo complejo. Asimismo daremos algunos ejemplos de subvariedades Kaehlerianas paralelas de CP^m. Una demostración de los resultados aquí expuestos puede encontrarse en [Og], [NT] y [Ti].

Sea M^n una subvariedad Kaehleriana de CP^{n+p} de dimension compleja n, esto es, una subvariedad compleja con la estructura Kaehleriana inducida. Denotemos por $A: M^n \longrightarrow CP^{n+p}$ a la inmersión. Sea $E_1,..,E_n,E_{1*}=JE_1,..,E_{n*}=JE_n,\xi_1,..,\xi_p,\xi_{1*}=J\xi_1,..,\xi_{p*}=J\xi_p$ una base local de campos ortonormales en CP^{n+p}, tales que restringidos a M^n, $E_1,..,E_n,E_{1*},..,E_{n*}$ sean tangentes a M.

Para el rango de los indices utilizaremos en esta sección y y en la próxima la siguiente convención:

$a, b = 1,..,n$

$i, j, k,r,s = 1,..,n,1*,..,n*.$

$\alpha, \beta = 1,..p.$

$\lambda,\mu,x,y = 1,..,p,1*,..,p*$

$$i^* = \begin{cases} a^* & \text{si } i=a \\ a & \text{si } i=a^* \end{cases} \qquad \lambda^* = \begin{cases} \alpha^* & \text{si } \lambda=\alpha \\ \alpha & \text{si } \lambda=\alpha^* \end{cases}$$

Sean ∇, σ, $\nabla^{\perp}$ y Λ la conexión de Riemann, la segunda forma fundamental, la conexión normal y el endomorfismo de Weingarten de M^n en CP^{n+p} respectivamente. Evidentemente el fibrado normal de M^n en CP^{n+p}, que designaremos por $T^{\perp}M$, es holomorfo. Las estructuras complejas inducidas en el fibrado tangente a M, TM, y en $T^{\perp}M$ serán designadas simplemente por J. El vector curvatura media de M^n en HM(n+p+1) será designado por H. Escribiremos Λ_λ para designar a Λ_{ξ_λ} y utilizaremos la expresión $\sigma(E_i,E_j) = \sum_\lambda h^\lambda_{ij}\xi_\lambda$.

De la definición de σ se obtienen las relaciones

$$\sigma(JX,Y) = \sigma(X,JY) = J\sigma(X,Y), \quad \text{para todo } X,\ Y \in TM,$$

y por tanto teniendo en cuenta que $g(\sigma(X,Y),\xi) = g(\Lambda_\xi X,Y)$ se sigue

$$\Lambda_{J\xi} = J\Lambda_\xi \quad \text{y} \quad J\Lambda_\xi = -\Lambda_\xi J, \qquad \xi \in T^\perp M.$$

En particular $\sum_i \sigma(E_i,E_i) = \sum_a \sigma(E_a,E_a) + \sum_a \sigma(E_{a*},E_{a*}) = 0$,

y por tanto toda subvariedad Kaehleriana es minimal. La ecuación de Gauss se escribe

$$\text{(II.4.1)} \qquad R(X,Y,Z,W) = g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)) - g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) +$$
$$+ \frac{1}{4}\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) + g(JX,W)g(JY,Z) -$$
$$- g(JX,Z)g(JY,W)+2g(X,JY)g(JZ,W)\}, \qquad X,Y,Z,W \in TM,$$

donde R es el tensor curvatura de M^n.

De (II.4.1) se tiene que el tensor de Ricci de M viene dado por

$$\text{(II.4.2)} \qquad S(X,Y) = \frac{n+1}{2} g(X,Y) - \sum_\lambda g(\Lambda_\lambda^2 X,Y),$$

y la curvatura escalar ρ de M por

$$\text{(II.4.3)} \qquad \rho = n(n+1) - \|\sigma\|^2,$$

donde $\|\sigma\|$ es la longitud de la segunda forma fundamental, esto es

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{ij\lambda} h^\lambda_{ij}h^\lambda_{ij} = \operatorname{tr} \sum_\lambda \Lambda_\lambda^2 .$$

Por último la curvatura seccional holomorfa determinada por un vector unitario $X \in TM$ viene dada por

$$1 - 2\|\sigma(X,X)\|^2.$$

A partir de (II.4.1) y (II.4.2) se obtiene

$$\text{(II.4.4)} \qquad \|S\|^2 = \tfrac{1}{2}n(n+1)^2 - (n+1)\|\sigma\|^2 + \operatorname{tr}(\sum_\lambda \Lambda_\lambda^2)^2,$$

$$\text{(II.4.5)} \qquad \|R\|^2 = 2n(n+1) - 4\|\sigma\|^2 + 2\sum_{\lambda\mu}(\operatorname{tr}\Lambda_\lambda\Lambda_\mu)^2.$$

De fundamental importancia es la siguiente relación

$$\text{(II.4.6)} \qquad -\tfrac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 = \|\nabla\sigma\|^2 + \frac{n+2}{2}\|\sigma\|^2 - 2\operatorname{tr}(\textstyle\sum_\lambda A_\lambda^2)^2 - \sum_{\lambda\mu}(\operatorname{tr} A_\lambda A_\mu)^2.$$

Además, con las mismas notaciones, para cada variedad Kaehleriana se tiene

$$\text{(II.4.7)} \qquad \tfrac{1}{2}(n+1)n\|R\|^2 \geqq 2n\|S\|^2 \geqq \rho^2.$$

La primera igualdad ocurre si y sólo si M tiene curvatura seccional holomorfa constante y la segunda igualdad ocurre si y sólo si M es Einstein.

De (II.4.3), (II.4.4) y (II.4.7) se obtiene

$$\text{(II.4.8)} \qquad \operatorname{tr}(\textstyle\sum_\lambda A_\lambda^2)^2 \geqq \frac{1}{2n}\|\sigma\|^4.$$

La igualdad ocurre si y sólo si M es Einstein.

Damos a continuación algunos ejemplos importantes de subvariedades compactas del espacio proyectivo complejo. El ejemplo más sencillo es de las subvariedades lineales, esto es, subespacios proyectivos complejos de CP^{n+p}. Se tiene el siguiente hecho: Una subvariedad Kaehleriana completa de CP^{n+p} es totalmente geodésica si y sólo si es una subvariedad lineal.

El siguiente ejemplo es la cuádrica compleja (standard). Si tomamos en CP^{n+1} el sistema de coordenadas homogeneo $(z^0,..,z^{n+1})$ determinado por la proyección (II.1.10), la cuádrica compleja Q^n viene dada por el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $\sum_i (z^i)^2 = 0$. Entonces Q^n es una hipersuperficie Kaehleriana de CP^{n+1}, holomorficamente isométrica al espacio simétrico Hermítico $SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$. De (II.1.10) se obtiene fácilmente que

$$\text{(II.4.9)} \qquad Q^n = \{ A \in CP^{n+1} \,/\, AA^t = 0 \}.$$

Además Q^n es una subvariedad paralela de CP^{n+1}. Las únicas hipersuperficies completas Einstein del espacio proyectivo complejo son las subvariedades lineales y la cuádrica compleja, salvo congruencia, esto es, salvo una isometría holomorfa de CP^{n+1}.

Veamos otros ejemplos . Sea $S_k(C^{n+1})$ el espacio vectorial complejo de los polinomios homogeneos sobre C^{n+1} de grado k, y sea S_k^* el dual de S_k. Sea $d = \dim S_k - 1$ y CP^d el espacio proyectivo complejo construido sobre S_k^*. Cada punto z de C^{n+1} define una aplicación lineal $F(z): S_k \longrightarrow C$, dada por $F(z)(P) = P(z)$ para cada polinomio P de S_k. Si $\lambda \in C$ entonces $F(\lambda z)(P) = \lambda^k P(z)$. Por tanto F induce una aplicación racional $f: CP^n \longrightarrow CP^d$ la cual es un embebimiento holomorfo. Si consideramos en CP^d la métrica de Fubini-Study con curvatura seccional holomorfa constante igual a 1, la métrica inducida por f en CP^n el la de Fubini-Study con curvatura seccional holomorfa $c = 1/k$. Cuando $k = 2$, la inmersión es paralela, $CP^n(\frac{1}{2}) \longrightarrow CP^{n+\frac{1}{2}n(n+1)}$. Llamaremos a este embebimiento <u>el embebimiento de Veronese</u>.

Otro ejemplo. Consideremos la aplicación producto tensorial $C^{n+1} x C^{m+1} \longrightarrow C^{n+1} \otimes C^{m+1} = C^{nm+n+m+1}$ definida por $(z,w) \longmapsto z \otimes w$. Si $\lambda, \mu \in C$, $(\lambda z, \mu w) \longmapsto \lambda\mu(z\otimes w)$, y por tanto la aplicación producto tensorial induce una aplicación holomorfa, que además es un embebimiento, de $CP^n x CP^m$ en CP^{nm+n+m}, que llamaremos <u>el embebimento de Segre</u>. Si en CP^{nm+n+m} consideramos la métrica usual con $c = 1$, la métrica inducida por este embebimiento en $CP^n x CP^m$ es el producto de las métricas de Fubini-Study sobre CP^n y CP^m, ambas con curvatura seccional holomorfa $c = 1$. El embebimiento de Segre es paralelo. Además $CP^n x CP^m$ es Einstein si y sólo si $n = m$.

Terminamos con el siguiente ejemplo. La Grassmanniana compleja de los dos planos viene definida de la siguiente forma

$$G(2,n,C) = \{ \Pi \in C^{n+2} \,/\, \Pi \text{ es un subespacio vectorial complejo 2-dimensional} \}.$$

Sea $\Lambda^2(C^{n+2})$ el espacio vectorial complejo producto exterior de C^{n+2} de orden 2. Sean $z, w \in C^{n+2}$ linealmente independientes y sea $(z,w) \longmapsto z\wedge w$ el producto exterior. z, w generan un 2-plano complejo $\Pi \in G(2,n,C)$. Sea $\tilde{z} = az + bw$, $\tilde{w} = cz + dw$, otra base de Π, $a,b,c,d \in C$, y $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. Entonces $\tilde{z}\wedge\tilde{w} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z\wedge w$.

Por tanto la aplicación producto exterior induce una aplicación holomorfa, que además es un embebimiento de $G(2,n,C)$ en $CP^{\frac{1}{2}n(n+2)-1}$. Llamaremos a este embebimiento el <u>embebimiento de Plüker</u>. La métrica inducida en la Grassmanniana es la standard (esto es, la única bi-invariante) y el embebimiento es paralelo.

En [NT] Nakagawa y Tagaki, vease tambien Takeuchi[Ti], dan una clasificación de las subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo con segunda forma fundamental paralela. A partir de su resultado se tiene que una subvariedad Kaehleriana M, compacta y Einstein del espacio proyectivo complejo es paralela si y sólo si M es una subvariedad lineal o M es una subvariedad embebida congruente con el embebimiento standard de alguna subvariedad M_i de la tabla 1.

En la siguiente tabla las subvariedades M_i, $i = 1,..,4$ son las que han sido descritas en los ejemplos anteriores. Las subvariedades M_5 y M_6 son, al igual que las anteriores, espacios simétricos Hermíticos de tipo compacto y de rango 2. Los embebimientos concretos de estos espacios se obtienen utilizando la teoría de representación de grupos de Lie y pueden encontrarse en [NT] o en [Ti]. n representa la dimensión compleja de la subvariedad, p la codimensión compleja plena, ρ la curvatura escalar y λ_1, λ_2 el primer y el segundo valor propio del espectro del Lapaciano de la subvariedad.

Para cada variedad Kaehleriana homogenea compacta y Einstein con curvatura escalar mayor que cero Obata[O2] demuestra que $\lambda_1 = \rho/n$. Por otro lado los autovalores de los espacios simétricos clásicos de tipo compacto están calculados por Nagano [N]. El autor no conoce el segundo valor propio de la subvariedad M_6.

TABLA 1

Subvariedad	n	p	ρ	λ_1	λ_2
$M_1 = CP^n(\frac{1}{2})$	n	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$\frac{1}{2}(n+1)$	n+2
$M_2 = Q^n,\ n \geqq 3$	n	1	n^2	n	n+2
$M_3 = CP^n x CP^n$	2n	n^2	2n(n+1)	n+1	2n+2
$M_4 = G(2,s,C)$ $s \geqq 3$	2s	$\frac{1}{2}s(s-1)$	2s(s+2)	s+2	2s+2
$M_5 = SO(10)/U(5)$	10	5	80	8	12
$M_6 = E_6/Spin(10)xT$	16	10	192	12	

5. Subvariedades Kaehlerianas de orden $\{u_1, u_2\}$.-

En la sección 3 hemos visto como el hecho de que una subvariedad Kaehleriana compacta del espacio proyectivo complejo fuese de orden u en el espacio de las matrices Hermíticas correspondiente equivalía a que esta subvariedad fuese totalmente geodésica en CP^m, esto es, a que fuese una subvariedad lineal.

La familia "más sencilla", después de la de las subvariedades totalmente geodésicas, entre las subvariedades Kaehlerianas de CP^m es la de las subvariedades paralelas, esto es, con $\nabla\sigma = 0$.

El proposito fundamental de esta sección es demostrar que el hecho de que una subvariedad Kaehleriana M^n de CP^m sea de orden $\{u_1, u_2\}$ en HM(M+1) equivale a que M sea Einstein y que cierto tensor en el fibrado normal de M^n en CP^m sea proporcional a la métrica. Como veremos, esta condición está próxima a la de ser una subvariedad paralela. Comenzamos con un ejemplo.

Como sabemos la cuádrica compleja Q^n es una hipersuperficie compleja de CP^{n+1}. Por tanto Q^n puede ser vista como una subvariedad de HM(n+2). Vamos a demostrar que Q^n es una subvariedad de orden $\{1,2\}$ del espacio Euclideo HM(n+2).

Recordemos que $Q^n = \{A \in CP^{n+1} \,/\, AA^t = 0\}$. La acción de SO(n+2) sobre Q^n viene dada por $(P,A) \longmapsto PAP^{-1}$, donde P está en SO(n+2) y A está en Q^n. Por tanto el embebimiento de Q^n en HM(n+2) en SO(n+2)-equivariante. Elegimos C en HM(n+2) como sigue

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad c = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces C está en Q^n y

$$T_C(Q^n) = \{ X \in T_C(CP^{n+1}) \,/\, XC^t + CX^t = 0 \}.$$

Sea $\{E_i, JE_i\}_{i=2,..,n+2}$ la base ortonormal de $T_C(Q^n)$ definida por

$$E_i = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{array}{ccccccc} 0 & .. & 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & & -\sqrt{-1} & & ... & 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array}\right).$$
$$\qquad\qquad (i)$$

Sea H el vector curvatura media de Q^n en HM(n+2). Como Q^n es minimal en CP^{n+1}, utilizando la proposición II.1.6, apartado b), tenemos que

$$H_C = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n+2} \tilde{\sigma}(E_i, E_i).$$

Entonces se comprueba directamente que

$$H_C = \frac{1}{2n} = \left(\begin{array}{c|c} -nc & \cdots 0 \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & I_{nxn} \\ 0 & \end{array}\right) = \frac{1}{2n}\{I - (n+1)C - C^t\},$$

y puesto que el embebimiento es equivariante obtenemos

$$H = \frac{1}{2n}\{I - (n+1)A - A^t\}, \text{ para todo } A \in Q^n.$$

Por tanto

$$\Delta\, \tfrac{1}{2}(A - A^t) = -2n\tfrac{1}{2}(H - H^t) = n\tfrac{1}{2}(A - A^t),$$

$$\Delta\{\tfrac{1}{2}(A + A^t) - \frac{1}{n+2}I\} = -2n\tfrac{1}{2}(H + H^t) = (n+2)\{(A + A^t) - \frac{1}{n+2}I\},$$

donde Δ es el Laplaciano de Q^n. Además

$$A = \frac{1}{n+2}I + \tfrac{1}{2}(A - A^t) + \{\tfrac{1}{2}(A + A^t) - \frac{1}{n+2}I\}.$$

Así, teniendo en cuenta que para la cuádrica compleja $\lambda_1 = n$ y $\lambda_2 = n+2$ (ver tabla 1), hemos demostrado que el embebimiento de Q^n en $HM(n+2)$ es de orden $\{1,2\}$. En los siguientes lemas utilizamos la notación establecida en la sección anterior.

Lema II.5.1. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana inmersa en CP^{n+p}. Sea H el vector curvatura media de M^n en $HM(n+p+1)$. Entonces se tienen las siguientes relaciones:

(II.5.1) $$H = \frac{1}{2n}\sum_i \tilde{\sigma}(E_i,E_i),$$

(II.5.2) $$\Delta H = (n+1)H + \frac{1}{n}\sum_{ij}\tilde{\sigma}(A_{\sigma(E_i,E_j)}E_i,E_j) - \frac{1}{n}\sum_{ij}\tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_i),\sigma(E_j,E_j)).$$

Demostración. Puesto que toda subvariedad Kaehleriana es minimal tenemos (II.5.1).

Calculemos la diferencial de la aplicación $H:M^n \longrightarrow HM(n+p+1)$.

$$dH(E_j) = D_{E_j}H = \frac{1}{2n}\sum_i[\tilde{\nabla}^{\perp}_{E_j}\tilde{\sigma}(E_i,E_i) - \tilde{A}_{\tilde{\sigma}(E_i,E_i)}E_j] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i \tilde{\sigma}(\tilde{\nabla}_{E_j}E_i,E_i) - \frac{1}{2n}\sum_i \tilde{A}_{\tilde{\sigma}(E_i,E_i)}E_j =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i \tilde{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i + \sigma(E_i,E_j),E_i) - \frac{n+1}{2n}E_j,$$

donde hemos utilizado la proposición II.1.6 apartado b) y (II.1.12).

Demostramos ahora que $\sum_i \tilde{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i) = 0$. En efecto, de (II.1.11) se obtiene

$$g(\sum_i\tilde{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i),\tilde{\sigma}(E_r,E_s)) = 0, \text{ para todo } j,r,s.$$

Así $\sum_i \tilde{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i)$ pertenece al espacio engendrado por los vectores $\{\tilde{\sigma}(E_r,E_s)\}_{r,s}$ y es ortogonal a estos vectores, de donde se deduce que es el vector cero.

Por tanto tenemos que

$$dH(E_j) = \frac{1}{n}\sum_i \tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i) - \frac{n+1}{2n}E_j.$$

Sea x un punto arbitrario de M. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $\nabla_{E_j}E_i = 0$ en x, para todo i,j. Calculamos ΔH en x.

$$\Delta H(x) = -\sum_j D_{E_j}(dH(E_j)) = -\frac{1}{n}\sum_{ij}D_{E_j}\tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i) + \frac{n+1}{2n}\sum_j D_{E_j}E_j =$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{ij}[\tilde{\nabla}^{\perp}_{E_j}\tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i) - \tilde{A}_{\tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i)}E_j] +$$

$$+ \frac{n+1}{2n}\sum_j[\tilde{\sigma}(E_j,E_j) + \sigma(E_j,E_j)] .$$

Como $\tilde{\nabla}\tilde{\sigma} = 0$ se tiene

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_{E_j}\tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i) = \tilde{\sigma}(\tilde{\nabla}_{E_j}\sigma(E_i,E_j),E_i) + \tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),\tilde{\nabla}_{E_j}E_i) =$$

$$= \tilde{\sigma}(\nabla^{\perp}_{E_j}\sigma(E_i,E_j) - A_{\sigma(E_i,E_j)}E_j,E_i) + \tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_i,E_j)).$$

De (II.1.12) se concluye que

$$\sum_{ij} \tilde{A}_{\tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i)} E_j = \sum_j \sigma(E_j,E_j) = 0.$$

Finalmente

$$\frac{n+1}{2n} \sum_j [\sigma(E_j,E_j) + \tilde{\sigma}(E_j,E_j)] = (n+1)H.$$

Con todo lo anterior llegamos a la siguiente expresión

$$\Delta H(x) = -\frac{1}{n} \sum_{ij} \tilde{\sigma}((\nabla\sigma)_{E_j}(E_i,E_j),E_i) + \frac{1}{n} \sum_{ij} \tilde{\sigma}(A_{\sigma(E_i,E_j)} E_j,E_i) -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{ij} \tilde{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_i,E_j)) + (n+1)H.$$

Por tanto es suficiente con demostrar que

$$\sum_{ij} \tilde{\sigma}((\nabla\sigma)_{E_j}(E_i,E_j),E_i) = 0.$$

De la ecuación de Codazzi se tiene que

$$(\nabla\sigma)_{E_j}(E_i,E_j) = (\nabla\sigma)_{E_i}(E_j,E_j) = -(\nabla\sigma)_{E_i}(E_{j*},E_{j*}).$$

Al sumar en j tenemos que el vector anterior es cero y concluimos (II.5.2).

C. Q. D.

Notese que los campos de vectores definidos a lo largo de M, A, H y ΔH son normales a CP^{n+p}, esto es, pertenecen a $T^{\perp}_{A(x)}(CP^{n+p})$ para todo x de M. Si escribimos $\sigma(E_i,E_j) = \sum_\lambda h^\lambda_{ij}\xi_\lambda$, se tiene

$$\text{(II.5.3)} \qquad \Delta H = (n+1)H + \frac{1}{n} \sum_{ijk\lambda} h^\lambda_{ij} h^\lambda_{ik} \tilde{\sigma}(E_j,E_k) -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{ij\lambda\mu} h^\lambda_{ij} h^\mu_{ij} \tilde{\sigma}(\xi_\lambda,\xi_\mu).$$

Lema II.5.2. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana inmersa en CP^{n+p} y sea $A:M^n \longrightarrow CP^{n+p}$ la inmersión. Entonces se tienen las siguientes relaciones

$$g(A,A) = 2, \tag{II.5.4}$$

$$g(A,H) = -1, \tag{II.5.5}$$

$$g(A,\ H) = -(n+1), \tag{II.5.6}$$

$$g(H,H) = (n+1)/2n, \tag{II.5.7}$$

$$g(H,\Delta H) = (n+1)^2/2n + (1/2n^2)\|\sigma\|^2, \tag{II.5.8}$$

$$g(\Delta H,\Delta H) = (n+1)^3/2n + [(n+1)/n^2]\|\sigma\|^2 + \\ + (1/n^2)\textstyle\sum_{\lambda\mu}(\mathrm{tr}\Lambda_\lambda\Lambda_\mu)^2 + (1/n^2)\mathrm{tr}(\sum_\lambda \Lambda_\lambda^2)^2. \tag{II.5.9}$$

La demostración puede obtenerse a partir del lema II.5.2 y de un uso sistemático de las relaciones (II.1.11), (II.1.13) y (II.1.14).

El espacio normal de M^n en CP^{n+p} en un punto $x \in M$ será designado por $T_x^\perp(M^n)$. Definimos el tensor $T:T_x^\perp(M) x T_x^\perp(M) \longrightarrow R$ de la siguiente forma

$$T(\xi,\eta) = \mathrm{tr}(\Lambda_\xi\Lambda_\eta) \qquad \text{para todo } \xi,\ \eta \in T_x^\perp(M).$$

Lema II.5.3. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana inmersa en CP^{n+p}. Entonces se tienen las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2p}\|\sigma\|^4 \leqq \|T\|^2 \leqq \tfrac{1}{2}\|\sigma\|^4. \tag{II.5.10}$$

La primera igualdad ocurre si y sólo si $T = kg$, donde k es un número real y g es la métrica restringida a $T_x^\perp(M)$.

Demostración. Tenemos $\|T\|^2 = \sum_{\lambda\mu}(\mathrm{tr}\Lambda_\lambda\Lambda_\mu)^2$, $\|\sigma\|^2 = \sum_\lambda \mathrm{tr}\Lambda_\lambda^2$. Sea G la métrica extensión de la métrica g, restringida al espacio $T_x^\perp(M)$, al espacio de las formas bilineales simétricas sobre $T_x^\perp(M)$.

Evidentemente T y g pertenecen a este espacio. De la desigualdad de Schwartz tenemos

$$G(g,T)^2 \leqq \|T\|^2 \|g\|^2.$$

Ahora bien, $\|g\|^2 = 2p$, $G(T,g) = \sum_{\lambda\mu} T_{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} = \mathrm{tr}\, T = \|\sigma\|^2$. Por tanto se tiene la primera desigualdad y la igualdad ocurre si y sólo si T y g son proporcionales. La segunda desigualdad está demostrada en [Og].

C. Q. D.

A continuación caracterizamos las subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo (n+p)-dimensional que son subvariedades de orden $\{u_1,u_2\}$ de HM(n+p+1). Recordemos que esto ocurre si y sólo si

$$\Delta H = aH + b(A - Q),$$

donde a, b son dos constantes reales y Q es el centro de gravedad de M^n en HM(n+p+1) (proposición I.3.1)

<u>Teorema</u> II .5.4. <u>Sea</u> M^n <u>una subvariedad Kaehleriana compacta</u>, <u>de dimensión compleja</u> n, <u>de</u> CP^{n+p} <u>tal que la inmersión</u> $A:M^n \longrightarrow CP^{n+p}$ <u>es plena. Entonces</u> M <u>es una subvariedad de orden</u> $\{u_1,u_2\}$<u>de</u> HM(n+p+1) <u>para ciertos números naturales</u> u_1, u_2 <u>si y sólo si</u> M <u>es una subvariedad Einstein con</u> T = kg.

<u>Demostración.</u> Supongamos que M^n es de $\{u_1,u_2\}$ en HM(n+p+1). Entonces existen constantes a, b tales que $\Delta H = aH + b(A - Q)$, donde Q es el centro de gravedad de M. Si b = 0, por la proposición I.1.3, M es de orden u en HM(n+p+1). En particular, por el teorema de Takahashi, es minimal en una esfera de HM(n+p+1), y por el teorema II.3.1 M^n es totalmente geodésica en CP^{n+p}. Como la inmersión

es plena $p = 0$ y $M^n = CP^n$.

Así supondremos $b \neq 0$. Como A, H y ΔH están en $T^{\perp}_{A(x)}(CP^{n+p})$, para todo $x \in M$, se tiene que $Q \in T^{\perp}_{A(x)}(CP^{n+p})$, para todo $x \in M$.

De (II.1.3) se tiene que

$$QA = AQ, \qquad \text{para todo } x \in M.$$

En otras palabras, si L es el subespacio lineal de $HM(n+p+1)$ definido por $L = \{A \in HM(n+p+1) \,/\, AQ = QA\}$, entonces $A(M) \subset L$.

Podemos suponer que Q es una matriz diagonal (en otro caso utilizamos una isometría de $HM(n+p+1)$ del tipo $A \longmapsto PAP^{-1}$, donde P está en $U(n+p+1)$). Escribimos

$$Q = \begin{pmatrix} \overbrace{a_1 \ \ddots \ a_1}^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{a_r \ \ddots \ a_r}^{m_r} \end{pmatrix}, \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j).$$

Como vimos en la demostración del teorema II.3.1 $CP^{n+p} \cap L$ es una unión disjunta de subvariedades lineales $S_1, \ldots, S_r$ con $\dim S_i = m_i$. Puesto que M es conexa y la inmersión es plena, concluimos que Q es una matriz escalar. Pero $\operatorname{tr} A = 1$ para todo A de CP^{n+p}. Entonces $Q = \frac{1}{n+p+1} I$, donde I es la matiz identidad en $HM(n+p+1)$. Por tanto

$$\text{(II.5.11)} \qquad \Delta H = aH + b\left(A - \frac{1}{n+p+1} I\right).$$

Sean r, s tales que $r \neq s, s^*$. Aplicando $g(\tilde{\sigma}(E_r, E_s), -)$ a los dos miembros de la igualdad (II.5.11) se obtiene teniendo en cuenta (II.1.11), (II.1.13), (II.1.14) y (II.5.3) que $\sum_{i\lambda} h^{\lambda}_{ir} h^{\lambda}_{is} = 0$.

Por otro lado una subvariedad Kaehleriana del espacio proyectivo complejo verifica siempre que $\sum_{i\lambda} h^{\lambda}_{ir} h^{\lambda}_{ir^*} = 0$. Por tanto la matriz $\sum_{\lambda} A^2_{\lambda}$ es una matriz diagonal.

Aplicando $g(\tilde{\sigma}(E_r,E_r),-)$ a los dos miembros de (II.5.11) se obtiene

$$\frac{(n+1)^2}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{i\lambda} h^{\lambda}_{ir}h^{\lambda}_{ir} = \frac{n+1}{2n}a - b.$$

Por tanto

$$\text{(II.5.12)} \qquad \sum_\lambda \Lambda_\lambda^2 = [\frac{n+1}{2}a - nb - \frac{(n+1)^2}{2}]\, I_{2nx2n}.$$

De (II.4.2) y (II.5.12) se concluye que M es Einstein.

Elegimos x,y tales que $x \neq y, y^*$. Aplicando $g(\tilde{\sigma}(\xi_x,\xi_y),-)$ a los dos miembros de (II.5.11) obtenemos que $\sum_{ij} h^x_{ij}h^y_{ij} = 0$. Por otra parte $\sum_{ij} h^x_{ij}h^{x*}_{ij} = 0$ para toda subvariedad Kaehleriana. Vemos por tanto que la matriz $(\mathrm{tr}\Lambda_\lambda\Lambda_\mu)_{\lambda\mu}$ es una matriz diagonal.

Aplicando $g(\tilde{\sigma}(\xi_x,\xi_x),-)$ a los dos miembros de la ecuación (II.5.11) obtenemos

$$\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{ij} h^x_{ij}h^x_{ij} = \tfrac{1}{2}a - b.$$

Así

$$\mathrm{tr}\,\Lambda_x\Lambda_x = \tfrac{1}{2}n(n+1-a+2b),$$

y finalmente

$$\text{(II.5.13)} \qquad T = \tfrac{1}{2}n(n+1-a+2b)g.$$

Esto concluye la demostración de una de las implicaciones.

Reciprocamente, supongamos que M^n es una subvariedad Kaehleriana Einstein con $T = kg$. Entonces si $\sum_\lambda \Lambda_\lambda^2 = hI_{2nx2n}$, se tiene que

$$\Delta H = (n+1)H + \frac{1}{n}\sum_{ijk\lambda} h^\lambda_{ij}h^\lambda_{ik}\tilde{\sigma}(E_k,E_j) - \frac{1}{n}\sum_{ij\lambda\mu} h^\lambda_{ij}h^\mu_{ij}\tilde{\sigma}(\xi_\lambda,\xi_\mu) =$$

$$= (n+1)H + \frac{h}{n}\sum_j \tilde{\sigma}(E_j,E_j) - \frac{k}{n}\sum_\lambda \tilde{\sigma}(\xi_\lambda,\xi_\lambda) =$$

$$= (n+1)H + \frac{h+k}{n}\sum_j\tilde{\sigma}(E_j,E_j) - \frac{k}{n}[\sum_j\tilde{\sigma}(E_j,E_j) + \quad \tilde{\sigma}(\xi_\lambda,\xi_\lambda)] =$$

$$= [n+1+2(h+k)]H - \frac{2k(n+p)}{n}\tilde{H},$$

donde $\tilde{H}$ es el vector curvatura media de CP^{n+p} en $HM(n+p+1)$.

Ahora de (II.1.8) se tiene

$$\Delta H = [n+1+2(n+k)]H + \frac{k}{n}(n+p+1)(A - \frac{1}{n+p+1} I).$$

Finalmente de la proposición I.3.1 se tiene que M^n es de orden $\{u_1, u_2\}$ para ciertos números naturales u_1, u_2.

C. Q. D.

Corolario II.5.5. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta, de dimensión compleja n, de CP^{n+p} tal que la inmersión es plena. Supongamos que M es Einstein y T = kg. Entonces

$$\frac{1}{2}\left\{n+1 + \frac{p+n}{pn}\|\sigma\|^2 \pm \sqrt{(n+1-\frac{n+p}{pn}\|\sigma\|^2)^2 + \frac{4}{n}\|\sigma\|^2}\right\} \tag{II.5.14}$$

son autovalores del Laplaciano de M.

Demostración. Supongamos que M es Einstein con T = kg. Entonces por el teorema anterior tenemos

$$\Delta H = aH + b(A - \frac{1}{n+p+1} I) \quad \text{para ciertos } a, b \in \mathbb{R}. \tag{II.5.15}$$

Aplicando $g(A,-)$ y $g(H,-)$ a los dos miembros de (II.5.15) obtenemos

$$\begin{aligned} a &= n + 1 + \frac{p+n}{pn}\|\sigma\|^2, \\ b &= \frac{p+n+1}{2pn}\|\sigma\|^2. \end{aligned} \tag{II.5.16}$$

Puesto que la inmersión de M^n en $HM(n+p+1)$ es de orden $\{u_1, u_2\}$ tenemos

$$\begin{aligned} &A - \frac{1}{n+p+1} I = A_{u_1} + A_{u_2}, \qquad -2nH = \lambda_{u_1}A_{u_1} + \lambda_{u_2}A_{u_2}, \\ &-2n\Delta H = \lambda_{u_1}^2 A_{u_1} + \lambda_{u_2}^2 A_{u_2}. \end{aligned} \tag{II.5.17}$$

De (II.5.15) y (II.5.17) se obtiene

$$a = \lambda_{u_1} + \lambda_{u_2},$$

$$b = \frac{1}{2n} \lambda_{u_1} \lambda_{u_2}.$$

Así, de (II.5.16) y (II.5.18) se concluye (II.5.14).

C. Q. D.

Como hemos visto las subvariedades Einstein con $T = kg$ tienen desde el punto de vista de la geometría del Laplaciano un comportamiento simple. Veamos que esas condiciones están proximas a un comportamiento simple de la segunda forma fundamental: $\nabla\sigma = 0$.

Lema II.5.6. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana, con dimensión compleja n, de CP^{n+p} tal que la inmersión es plena.

i) Si M es Einstein y $T = kg$, entonces tenemos

$$\|\sigma\|^2 \geqq \frac{np(n+2)}{2p+n}. \tag{II.5.20}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $\nabla\sigma = 0$, esto es la segunda forma fundamental de M en CP^{n+p} es paralela.

ii) Si $\|\sigma\|^2 = pn(n+2)/(2p+n)$, entonces $\nabla\sigma = 0$ si y sólo si M es Einstein con $T = kg$.

Demostración. Si M es Einstein sabemos por (II.4.8) que $tr(\sum_\lambda A_\lambda^2)^2 = \frac{1}{2n}\|\sigma\|^4$. Asimismo si $T = kg$ se tiene de (II.5.10) que $\sum_{\lambda\mu}(trA_\lambda A_\mu)^2 = \frac{1}{2p}\|\sigma\|^4$. Entonces la ecuación (II.4.6) se puede escribir como

$$\|\nabla\sigma\|^2 = \left(\frac{2p+n}{2pn}\|\sigma\|^2 - \frac{n+2}{2}\right)\|\sigma\|^2,$$

y se tiene i).

ii) Teniendo en cuenta que $\Delta\|\sigma\|^2 = 0$,

$$\frac{1}{2p}\|\sigma\|^4 \leqq \sum_{\lambda\mu}(\mathrm{tr}\,A_\lambda A_\mu)^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2n}\|\sigma\|^4 \leqq \mathrm{tr}(\sum_\lambda A_\lambda^2)^2,$$

de la ecuación (II.4.6) se obtiene

$$0 \leqq \|\nabla\sigma\|^2 = 2\mathrm{tr}(\sum_\lambda A_\lambda^2)^2 + \sum_{\lambda\mu}(\mathrm{tr}\,A_\lambda A_\mu)^2 - \tfrac{1}{2}(n+2)\|\sigma\|^2,$$

y la igualdad se da si y sólo si M^n es Einstein con $T = kg$.

C. Q. D.

En el caso $\nabla\sigma = 0$, $\sigma \neq 0$, los autovalores de (II.5.14) quedan de la forma

$$\frac{n(n+p+1)}{2p+n} \quad \text{y} \quad n+2.$$

Del lema II.5.6 apartado ii) y de la tabla 1 se deduce que el embebimiento de Veronese $CP^n(\frac{1}{2}) \longrightarrow CP^{n+\frac{1}{2}n(n+1)}$ es de orden $\{1,2\}$ en $HM(n+\frac{1}{2}n(n+1)+1)$.

<u>Lema</u> II.5.7. <u>Sea</u> M^n <u>una subvariedad Kaehleriana compacta de</u> CP^{n+p} <u>tal que la inmersión es plena. Supongamos que</u> M <u>es Einstein</u> <u>con</u> $T = kg$. <u>Entonces</u>

(II.5.21) $$\tfrac{1}{2}n(n+1) \geqq p.$$

<u>La igualdad ocurre si y sólo si</u> M <u>es la subvariedad de Veronese</u>.

<u>Demostración</u>. De (II.4.3), (II.4.5), (II.4.7) y (II.5.10) se deduce (II.5.21). La igualdad ocurre si y sólo si M^n tiene curvatura seccional holomorfa constante. Pero la única posibilidad para esta codimensión es el embebimiento de Veronese, (ver [NO] o [C1]).

6. El primer y el segundo valor propio de una subvariedad Kaehleriana.

Sabemos que el primer valor propio de una subvariedad Kaehleriana del espacio proyectivo complejo se acota superiormente en función de la dimensión y la igualdad ocurre si y sólo si la subvariedad es totalmente geodésica. En esta sección demostramos fundamentalmente una desigualdad espectral en la que intervienen los cinco invariantes espectrales más sencillos: La dimensión, el primer valor propio, el segundo valor propio, el volumen y la integral de la curvatura escalar. La igualdad equivale a que la inmersión de la subvariedad en el espacio de las matrices Hermíticas correspondiente sea de orden $\{1,2\}$. Por los resultados de la sección anterior sabemos que esto implica que la subvariedad es Einstein con $T = kg$ en el espacio proyectivo complejo. Damos asimismo una interesante variante de la desigualdad anterior en la que la igualdad ocurre solo cuando la subvariedad es paralela.

Si en la proposición I.3.2 tomamos $k = 2$ y $t = 1$ nos queda

$$\text{(II.6.1)} \qquad \int_M \langle \Delta^3\phi, \phi\rangle - (\lambda_1+\lambda_2)\int_M \langle \Delta^2\phi, \phi\rangle + \lambda_1\lambda_2\int_M \langle \Delta\phi, \phi\rangle \geqq 0.$$

La igualdad ocurre si y sólo si ϕ es de orden $\{1,2\}$.

Así para una subvariedad Kaehleriana compacta del espacio proyectivo complejo, de dimensión compleja n, teniendo en cuenta la relación $\Delta A = -2nH$ y el hecho de que el Laplaciano es un operador autoadjunto, tenemos de (II.6.1)

$$\text{(II.6.2)} \qquad 4n^2\int_M g(\Delta H,H) - 4n^2(\lambda_1+\lambda_2)\int_M g(H,H) - 2n\lambda_1\lambda_2\int_M g(H,A) \geqq 0,$$

y la igualdad ocurre si y sólo si la subvariedad Kaehleriana es de orden {1,2} en espacio de las matrices Hermíticas.

Teorema II.6.1. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta de dimensión compleja n inmersa en CP^m. Entonces

$$n[\, n+1 + (n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2)]\mathrm{vol}(M) \geqq \int_M \rho , \qquad \text{(II.6.3)}$$

donde λ_1 y λ_2 son el primer y el segundo valor propio del Laplaciano de M, vol(M) el volumen de M y ρ la curvatura escalar de M. Si la igualdad ocurre entonces M es Einstein y (si la inmersión es plena) T = kg.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema II.5.2 y (II.6.2) se obtiene

$$\int_M [\,(n+1)^2 + \frac{\|\sigma\|^2}{n} - (n+1)(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2\,] \geqq 0.$$

Ahora de la relación $\rho = n(n+1) - \|\sigma\|^2$ se concluye (II.6.3).

Si la igualdad ocurre sea CP^{n+p} la menor subvariedad lineal de CP^m que contiene a A(M). Como la inmersión de M en CP^{n+p} es plena y la de M en HM(n+p+1) es de orden {1,2} , por el teorema II.5.4 concluimos la demostración.

C. Q. D.

Damos a continuación una demostración diferente del corolario II.3.5. De la proposición I.3.2, considerando k = 1 , t = 1 y K = 1, t = 2, obtenemos

$$\int_M < \Delta^2\phi,\phi> - \lambda_1\int_M <\phi,\Delta\phi> \geqq 0,$$

$$\int_M < \Delta^3\phi , \phi > - \lambda_1 \int_M <\Delta^2 \phi , \phi> \geqq 0.$$

La igualdad en cada una de las desigualdades anteriores ocurre si y sólo si ϕ es de orden 1.

Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta inmersa en CP^m. Por el II.5.2, el hecho de ser Δ autoadjunto y la relación $\Delta A = -2nH$, las desigualdades anteriores aparecen de la forma

(II.6.4) $$2n(n+1-\lambda_1)\mathrm{vol}(M) \geqq 0,$$

(II.6.5) $$2n(n+1)(n+1-\lambda_1)\mathrm{vol}(M) + 2\int_M \|\sigma\|^2 \geqq 0.$$

De (II.6.4) se concluye que $\lambda_1 \leqq n+1$. Si la igualdad ocurre tenemos la igualdad en (II.6.4) y por tanto en (II.6.5). Así $\|\sigma\|^2 = 0$ y M^n es totalmente geodésica en CP^m.

Corolario II.6.2. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta inmersa en CP^m y con dimensión compleja n. Sean λ_1 y λ_2 el primer y el segundo valor propio del Laplaciano de M. Si

$$\lambda_1 = (\int_M \rho)/(n\mathrm{vol}(M))$$

y M no es totalmente geodésica, entonces

(II.6.6) $$n+2 \geqq \lambda_2.$$

Si la igualdad ocurre entonces M es Einstein y la segunda forma fundamental de la inmersión es paralela.

Demostración. Por (II.6.3) se tiene

$$n+1 + (n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2) \geqq (\int_M \rho)/(n\mathrm{vol}(M)) = \lambda_1.$$

Por tanto $(n+1-\lambda_1)(n+2-\lambda_2) \geqq 0$. Si M no es totalmente geodésica $n+1-\lambda_1 > 0$ por el corolario II.3.5. Así tenemos (II.6.6).

Supongamos que la igualdad ocurre en (II.6.6). Entonces se da la igualdad en (II.6.3) y M es Einstein con $T = kg$. De (II.5.16) y (II.5.18) y teniendo en cuenta que $\lambda_1 = \rho/n = n+1-\frac{1}{n}\|\sigma\|^2$ y $\lambda_2 = n+2$, se tiene

$$(n+1-\frac{1}{n}\|\sigma\|^2) + n+2 = n+1 + \frac{p+n}{pn}\|\sigma\|^2, \text{ se donde}$$

$\|\sigma\|^2 = \frac{np(n+p)}{2p+n}$. Por último utilizando el lema II.5.6 apartado i) se concluye que $\nabla\sigma = 0$.

C. Q. D.

Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta de CP^{n+p} determinada por p polinomios homogeneos $P_1,\ldots,P_p$. Si la matriz Jacobiana asociada a $P_1,\ldots,P_p$ sobre los puntos $\pi^{-1}(M^n)$, donde π es la proyección standard, es siempre de rango máximo decimos que M es una intersección completa. Para intersecciones completas tenemos el siguiente resultado.

Corolario II.6.3. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta con dimensión compleja n embebida en CP^{n+p}. Si M^n es una intersección completa de p polinomios homogeneos de grados $a_1,\ldots,a_p$ en CP^{n+p}, entonces

$$(II.6.7) \qquad (n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2) \geqq p - \sum_\alpha a_\alpha .$$

La igualdad ocurre si y sólo si $M = CP^n$ es una subvariedad lineal de CP^{n+p} o $M = Q^n$ es la cuádrica compleja en alguna subvariedad lineal de CP^{n+1} de CP^{n+p}.

Demostración. Para intersecciones completas K. Ogiue ha demostrado la fórmula [Og]

$$\int_M \rho = n(n+p+1-\textstyle\sum_\alpha a_\alpha)\mathrm{vol}(M). \tag{II.6.8}$$

De (II.6.3) y (II.6.8) se obtiene (II.6.7). Si la igualdad ocurre entonces M es Einstein. En este caso por un resultado de J. Hano [H] se tiene que M es una subvariedad lineal o la cuádrica compleja en alguna subvariedad lineal (n+1)-dimensional de CP^{n+p}.

El inverso se sigue de la tabla 1.

C. Q. D.

Puesto que el volumen, la dimensión y la integral de la curvatura escalar son invariantes espectrales, del corolario II.6.2 se obtiene el siguiente resultado inverso

Corolario II.6.2. Sea M^n una subvariedad Kaehleriana compacta, con dimensión compleja n, inmersa en CP^m. Si $\mathrm{Spec}(M) = \mathrm{Spec}(M_i)$ para algún $i=1,..,5$ entonces M es una subvariedad embebida congruente con el embebimiento standard de M_i.

Demostración. Examinando la tabla 1 se tiene, comparando por ejemplo la dimensión y el primer valor propio que si $\mathrm{Spec}(M_i) = \mathrm{Spec}(M_j)$ para algún $i,j=1,..,6$, entonces $i=j$.

Por otro lado las subvariedades M_i están en las hipótesis de corolario II.6.2 y para $i=1,..,5$ se alcanza la igualdad en (II.6.6). Como la hipótesis $\lambda_1 = (\int_M \rho)/(n\mathrm{vol}(M))$ y la igualdad $\lambda_2 = n+2$ son espectrales, si M tiene el mismo espectro que M_i, entonces M está en las hipótesis del corolario II.6.2 y alcanza la igualdad en (II.6.6). Por tanto M es una subvariedad Einstein con segunda forma fundamental paralela.

Evidentemente M no es una subvariedad lineal ($\lambda_1 \neq n+1$), por tanto M es congruente con algún M_j. Por la primera observación $i = j$.

C. Q. D.

Por último consideremos en la proposición I.3.2 $t = 1$ y $k = 3$.

$$\int_M \langle\Delta^4\phi,\phi\rangle - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\int_M \langle\Delta^3\phi,\phi\rangle + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\int_M \langle\Delta^2\phi,\phi\rangle -$$

$$- \lambda_1\lambda_2\lambda_3\int_M \langle\Delta\phi,\phi\rangle \geqq 0.$$

Para una subvariedad Kaeheriana, de dimensión compleja n, de CP^m la desigualdad anterior con las transformaciones habituales queda de la forma

$$\text{(II.6.9)} \qquad 4n^2\int_M g(\Delta H,\Delta H) - 4n^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\int_M g(\Delta H,H) +$$

$$+ 4n^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\int_M g(H,H) + 2n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\int_M g(H,A) \geqq 0.$$

Tenemos así el siguiente

<u>Teorema</u> II.6.5. <u>Sea</u> M^n <u>una subvariedad Kaehleriana compacta inmersa en</u> CP^m <u>y con dimensión compleja</u> n. <u>Entonces se tiene la desigualdad</u>

$$\text{(II.6.10)} \qquad \int_M \Big\{ n(n+1)^3 + 2(n+1)\|\sigma\|^2 + 2\sum_{\lambda\mu}(\mathrm{tr}\,\Lambda_\lambda\Lambda_\mu)^2 + 2\,\mathrm{tr}(\sum_\lambda\Lambda_\lambda^2)^2 -$$

$$-(n(n+1)^2+\|\sigma\|^2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + n(n+1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3) - n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big\} \geqq 0.$$

Demostración. Basta con considerar la desigualdad (II.6.9) y el lema II.5.2.

C. Q. D.

CAPITULO III

GEOMETRIA ESPECTRAL PARA SUBVARIEDADES MINIMALES DE LA ESFERA

En este capítulo, utilizando la técnica con la que venimos trabajando, exponemos algunos resultados acerca de los pequeños autovalores del Laplaciano de las subvariedades minimales de la esfera. Veamos en primer lugar las diferencias fundamentales con respecto al caso de las subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo.

Para obtener información acerca de los primeros autovalores de las subvariedades Kaehlerianas utilizamos la inmersión más simple del espacio proyectivo complejo en el espacio Euclídeo. La inmersión más simple de la esfera en el espacio Euclídeo es evidentemente la inmersión como hipersuperficie determinada por el lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno dado. Ahora bien, el teorema de Takahashi [Ta] nos asegura que toda inmersión minimal de una variedad compacta en una esfera m-dimensional, considerada como una inmersión en el espacio Euclideo (m+1)-dimensional correspondiente, es de orden u para algún entero natural u. Además se tiene que $\lambda_u = n/r^2$, donde r es el radio de la esfera y n la dimensión de la subvariedad. En otras palabras, para una cierta elección del origen de coordenadas en el espacio Euclídeo (m+1)-dimensional, todas las funciones altura son propias con valor propio n/r^2.

El estudio que realizamos para subvariedades del espacio proyectivo complejo se basaba en el hecho de que las funciones altura asociadas a la inmersión no tenían el mismo comportamiento para todas las subvariedades, lo cual nos pemitía diferenciar a ciertas familias de subvariedades como más idoneas. Puesto que esto no ocurre para las subvariedades minimales de la esfera, la inmersión standard de ésta en el espacio Euclídeo no sirve para obtener la información que buscamos. La inmersión standard de la esfera en el espacio Euclídeo es de orden 1.

La inmersión que vamos a utilizar es de orden 2 y tiene segunda forma fundamental paralela (aparece descrita por primera vez en [T]). Viene dada, a grosso modo, por todos los productos posibles de las funciones altura de S^m en E^{m+1}. Así nuestro estudio se puede plantear de la siguiente forma:

Si M^n es una variedad de Riemann compacta y V_u el espacio de todas las funciones propias del Laplaciano de M asociadas al valor propio λ_u, ¿ Qué se puede decir acerca del comportamiento espectral del producto de dos funciones de V_u?. Si tomamos como modelo el espacio de las funciones asociadas al primer valor propio sobre un espacio simétrico compacto de rango 1, se tiene que el buen comportamiento viene dado por

(III.0.0) $$V_1 V_1 \subset V_0 + V_1 + V_2.$$

Nosotros estudiaremos el problema anterior sólo en un caso muy especial: Cuando M admite una inmersión isométrica y minimal en una esfera, y cuando las autofunciones son las funciones coordenadas asociadas a dicha inmersión.

En este caso podemos "organizar" el producto de las autofunciones como una nueva inmersión isométrica en un cierto espacio

Euclídeo. Encontramos que la correspondiente versión de (III.0.0) ocurre si y sólo si M verifica una condición intrínseca (M es Einstein) y otra extrínseca (cierto tensor en el fibrado normal es proporcional a la métrica). Además probamos algunas desigualdades en las que intervienen sólo invariantes espectrales y en las cuales se da la igualdad si y sólo si se cumple (III.0.0). Así, en este caso particular (III.0.0) es una propiedad spectral.

En un sentido distinto este problema ha sido tratado por Yang y Yau [YY] .

1. Una inmersión isométrica de la esfera en el espacio Euclídeo.-

Consideramos en E^m la métrica $<x,y> = xy^t$, para todo $x,y \in E^m$, donde $()^t$ indica trasposición. Sea $c \in R$, $c > 0$. Entonces la esfera

$$S^m(c) = \{x \in E^{m+1} / <x,x> = \frac{1}{c} \},$$

con la métrica inducida tiene curvatura seccional constante igual a c. El espacio tangente en un punto x de $S^m(c)$ viene dado por

$$T_x(S^m(c)) = \{ X \in E^{m+1} / <x,X> = 0 \} .$$

Sean D y $\bar{\nabla}$ las conexiones de Riemann de E^{m+1} y $S^m(c)$ respectivamente. Entonces para cada par de campos tangentes a $S^m(c)$, X , Y tenemos

$$\text{(III.1.1)} \qquad D_X Y = \bar{\nabla}_X Y - c<X,Y>x.$$

Sea $SM(m) = \{ P \in gl(m,R) / P = P^t \}$ el espacio de las matrices simétricas de orden m. Definimos sobre SM(m) la métrica

$$g(P,Q) = \frac{c}{2} trPQ, \qquad \text{para todo } P, Q \text{ de } SM(m).$$

Definimos ahora la inmersión de la esfera que ya anunciamos como "producto organizado de funciones coordenadas". Sea $f:S^m(c) \longrightarrow SM(m+1)$ la aplicación dada por $f(x) = x^t x$. La diferencial de f viene dada por

$$f_*(X) = x^t X + X^t x, \qquad \text{para todo} \quad X \in T_x(S^m(c)).$$

Por tanto para todo $X,Y \in T_x(S^m(c))$ se tiene

$$g(f_*(X),f_*(Y)) = \frac{c}{2}\,tr(x^t X + X^t x)(x^t Y + Y^t x) =$$
$$= \frac{c}{2}\,tr(x^t X Y^t x + X^t x x^t Y) = \frac{c}{2}\{ X,Y\ tr x^t x + \frac{1}{c} tr X^t Y \} = < X,Y>.$$

Vemos pues que f es una inmersión isométrica. Sea $X \in T_x(S^m(c))$ y $P \in SM(m+1)$. Entonces

$$g(f_*(X),P) = \frac{c}{2}tr(X^t xP + x^t XP) = \frac{c}{2}\{<X,xP> + <XP,x>\} =$$
$$= c<X,xP> \text{ , ya que } P \text{ es simétrica.}$$

Si designamos por $T_x^\perp(S^m(c))_f$ al espacio normal a $S^m(c)$ para la inmersión f en x se tiene

$$T_x^\perp(S^m(c))_f = \{P \in SM(m+1)/\ g(f_*(X),P) = 0, \text{para todo } X \in T_x(S^m(c))\},$$

y por la expresión calculada anteriormente, P pertenece a este subespacio si y sólo si $xP = \lambda x$ para cierto λ real, así

$$\text{(III.1.2)} \qquad T_x^\perp(S^m(c))_f = \{P \in SM(m+1)/\ xP = \lambda x, \text{para algún } \lambda \text{ real}\} .$$

Denotaremos tambien por D la conexión Riemanniana de $SM(m+1)$. Para cada dos campos tangentes a $S^m(c)$ X, Y se tiene

$$D_{f_*(X)}f_*(Y) = X^t Y + Y^t X - 2c<X,Y>x^t x + (\bar\nabla_X Y)^t x + x^t(\bar\nabla_X Y) =$$
$$= X^t Y + Y^t X - 2c<X,Y>f(x) + f_*(\bar\nabla_X Y).$$

De (I.1.1) se tiene que la segunda forma fundamental para la inmersión f, que designaremos, por $\bar\sigma$, viene dada por

$$\text{(III.1.3)} \qquad \bar{\sigma}(X,Y) = X^tY + Y^tX - 2c\langle X,Y\rangle f(x),$$

para todo $X,\ Y \in T_x(S^m(c))$. Sean X, Y, Z tres campos tangentes a la esfera. Calculemos el valor de la expresión $D_Z\bar{\sigma}(X,Y)$.

$$D_Z\bar{\sigma}(X,Y) = (D_ZX)^tY + X^t(D_ZY) + (D_ZY)^tX + Y^t(D_ZX) -$$

$$- 2c\langle X,Y\rangle f_*(Z) - 2c\langle\bar{\nabla}_ZX,Y\rangle f(x) - 2c\langle X,\bar{\nabla}_ZY\rangle f(x) =$$

$$= (\bar{\nabla}_ZX)^tY + X^t(\bar{\nabla}_ZY) + (\bar{\nabla}_ZY)^tX + Y^t(\bar{\nabla}_ZX) -$$

$$- c\{\langle Z,X\rangle x^tY + \langle Z,Y\rangle X^tx + \langle Z,Y\rangle x^tX + \langle Z,X\rangle Y^tx\} -$$

$$- 2c\{\langle X,Y\rangle f_*(Z) - \langle\bar{\nabla}_ZX,Y\rangle f(x) - \langle X,\bar{\nabla}_ZY\rangle f(x)\} =$$

$$= \bar{\sigma}(\bar{\nabla}_ZX,Y) + \bar{\sigma}(X,\bar{\nabla}_ZY) - c\langle Z,X\rangle f_*(Y) - c\langle Z,Y\rangle f_*(X) - 2c\langle X,Y\rangle f_*(Z).$$

Por tanto si $\bar{\nabla}^{\perp}$ representa la conexión normal de $S^m(c)$ en $SM(m+1)$ se tiene

$$\bar{\nabla}^{\perp}_Z\,\bar{\sigma}(X,Y) = \bar{\sigma}(\bar{\nabla}_ZX,Y) + \bar{\sigma}(X,\bar{\nabla}_ZY),$$

o dicho de otra forma, la inmersión f es paralela, esto es

$$\text{(III.1.4)} \qquad \bar{\nabla}\bar{\sigma} = 0.$$

Directamente se obtiene la identidad

$$\text{(III.1.5)} \qquad g(\bar{\sigma}(X,Y),\bar{\sigma}(V,W)) = 2c\langle X,Y\rangle\langle V,W\rangle + c\langle X,V\rangle\langle Y,W\rangle +$$

$$+ c\langle X,W\rangle\langle Y,V\rangle\ ,\ \text{para todo } X,Y,V,W \text{ tangentes a } S^m(c),$$

de donde se tiene

$$\text{(III.1.6)} \qquad \bar{A}_{\bar{\sigma}(X,Y)}V = 2c\langle X,Y\rangle V + c\langle X,V\rangle Y + c\langle Y,V\rangle X,$$

donde $\bar{A}$ es el endomorfismo de Weingarten de f. Hagamos notar asimismo las relaciones

$$\text{(III.1.7)} \qquad g(f(x),\bar{\sigma}(X,Y)) = -\langle X,Y\rangle,$$

(III.1.8) $$g(I,\bar{\sigma}(X,Y)) = 0,$$

para todo X, Y de $T_x(S^m(c))$, donde I es la matriz identidad en SM(m+1). Calculemos finalmente el Laplaciano de f.

Sea $\{E_i\}_{i=1,\ldots,m}$ una base ortonormal de $T_x(S^m(c))$ y designemos por E_0 a $\sqrt{c}\,x$. Entonces $\{E_i\}_{i=0,\ldots,m}$ es una base ortonormal de E^{m+1}. La expresión $\sum_{i=0}^{m} E_i^t E_i$ es independiente de la base ortonormal elegida en E^{m+1} y por tanto $\sum_{i=0}^{m} E_i^t E_i = I$.

Así tenemos la siguiente expresión

(III.1.9) $$\Delta f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \bar{\sigma}(E_i,E_i) = -2\sum_{i=1}^{m} E_i^t E_i + 2cmf(x) =$$

$$= -2\sum_{i=0}^{m} E_i^t E_i + 2E_0^t E_0 + 2cmf(x).$$

$E_0^t E_0 = cx^t x = cf(x)$, y por tanto

(III.1.9) $$\Delta f(x) = 2c(m+1)f(x) - 2I.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\Delta\left(f(x) - \frac{1}{c(m+1)}I\right) = 2c(m+1)\left(f(x) - \frac{1}{c(m+1)} I\right),$$

$$\Delta f(x) = \frac{1}{c(m+1)}I + \left(f(x) - \frac{1}{c(m+1)}I\right),$$

concluimos que f es una de orden 2 de la esfera (el segundo autovalor de $S^m(c)$ es $2c(m+1)$).

2. Subvariedades minimales de la esfera.

En esta sección, utilizando la inmersión de orden 2 de la esfera que acabamos de estudiar, demostramos fundamentalmente que las subvariedades minimales de la esfera tales que el producto de sus funciones coordenadas tiene un buen comportamiento respecto del Laplaciano (recordemos la inclusión (III.0.0)) son las subvariedades Einstein que verifican cierta propiedad extrínseca.

Sea $\psi: M^n \longrightarrow S^{n+p}(c)$ una inmersión isométrica y minimal de una variedad de Riemann en una esfera. Identificamos $\psi(x)$ con x. Sea $\{E_1,..,E_n,\xi_{n+1},..,\xi_{n+p}\}$ una base local de campos ortonormales en $S^{n+p}(c)$ tales que restringidos a M $E_1,..,E_n$ sean tangentes a M. Denotaremos por ∇ y $\nabla^{\perp}$ la conexión de Riemann y la conexión en el fibrado normal de ψ , y por σ y Λ la segunda forma fundamental y el endomorfismo de Weingarten de ψ respectivamente. Consideramos la inmersión isométrica asociada

$$\phi = f \circ \psi \ : M^n \longrightarrow SM(n+p+1),$$

donde f es la inmersión del apartado anterior.

Para el rango de los índices en este capítulo utilizamos la siguiente convención

$i,j,k,r,s = 1,..n \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta = n+1,..,n+p.$

<u>Lema</u> III.2.1 <u>Sea</u> $\psi: M^n \longrightarrow S^{n+p}(c)$ <u>una inmersión isométrica y minimal de una variedad de Riemann en la esfera. Entonces con las notaciones anteriores se tienen las siguientes relaciones</u>

(III.2.1) $$\Delta\phi(x) = -\textstyle\sum_i \bar{\sigma}(E_i,E_i)_x$$

(III=2.2) $$\Delta^2\phi(x) = 2(n+1)c\Delta\phi(x) + 2\textstyle\sum_{ij} \bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_i,E_j))_x - 2\textstyle\sum_{ij} \bar{\sigma}(\Lambda_{\sigma(E_i,E_j)}E_i,E_j)_x ,$$

<u>para cada</u> x <u>de</u> M.

<u>Demostración</u>. Puesto que M^n es minimal en $S^{n+p}(c)$ y la segunda forma fundamental de ϕ es la suma de la segunda forma fundamental de ψ y de la de f se tiene (III.2.1).

Calculemos ahora la diferencial de la aplicación $\Delta\phi : M^n \longrightarrow SM(n+p+1)$.

$$(\Delta\phi)_*(E_j) = -\textstyle\sum_i D_{E_j}\bar{\sigma}(E_i,E_i) = \phi_*(\sum_i \bar{A}_{\bar{\sigma}(E_i,E_i)}E_j) -$$

$$- 2\textstyle\sum_i \bar{\sigma}(\bar{\nabla}_{E_j}E_i,E_i) = 2(n+1)c\phi_*(E_j) - 2\sum_i \bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i) -$$

$$- 2\textstyle\sum_i \bar{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i),$$

donde hemos utilizado (III.1.4) y (III.1.6).

De (III.1.5) obtenemos para todo j,r,s

$$g(\textstyle\sum_i \bar{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i),\bar{\sigma}(E_r,E_s)) = 2c\sum_i \langle\nabla_{E_j}E_i,E_i\rangle\langle E_r,E_s\rangle +$$

$$+ c\textstyle\sum_i\langle\nabla_{E_j}E_i,E_r\rangle\langle E_i,E_s\rangle + c\sum_i\langle\nabla_{E_j}E_i,E_s\rangle\langle E_i,E_r\rangle =$$

$$= c\{\langle\nabla_{E_j}E_s,E_r\rangle + \langle E_r,\nabla_{E_j}E_s\rangle\} = cE_j\langle E_r,E_s\rangle = 0.$$

Así $\sum_i\bar{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i)$ es ortogonal a todos los elementos de la forma $\bar{\sigma}(E_r,E_s)$, al tiempo que es combinación lineal de ellos, de donde $\sum_i \bar{\sigma}(\nabla_{E_j}E_i,E_i) = 0$ y por tanto

$$(\Delta\phi)_* = 2(n+1)c\phi_*(E_j) - 2\textstyle\sum_i \bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i).$$

Sea x un punto arbitrario de M. Podemos suponer,sin perdida de generalidad, que $\nabla_{E_j}E_i = 0$ en x. Calculemos $\Delta^2\phi$ en x.

$$(\Delta^2\phi)(x) = -\textstyle\sum_j D_{E_j}(\Delta\phi)_*(E_j) = -2(n+1)c\sum_j D_{E_j}\phi_*(E_j) +$$

$$+ 2\textstyle\sum_{ij}D_{E_j}\bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i) = 2(n+1)c(\Delta\phi)(x) -$$

$$- 2\phi_*(\textstyle\sum_{ij}\bar{A}_{\bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i)}E_j) + 2\sum_{ij}\bar{\sigma}((\nabla\sigma)_{E_j}(E_i,E_j),E_i) +$$

$$+\ 2\sum_{ij}\bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),\sigma(E_i,E_j)) - 2\sum_{ij}\bar{\sigma}(A_{\sigma(E_i,E_j)}E_i,E_j).$$

De la ecuación de Codazzi se tiene

$$\sum_j (\nabla\sigma)_{E_j}(E_i,E_j) = \sum_j (\nabla\sigma)_{E_i}(E_j,E_j) = 0,$$

puesto que M es minimal. Por otro lado de (III.1.6)

$$\sum_{ij}\bar{A}_{\bar{\sigma}(\sigma(E_i,E_j),E_i)}E_j = c\sum_i \sigma(E_i,E_i) = 0,$$

y concluimos finalmente (III.2.2).

C. Q. D.

Si utilizamos la expresión $\sigma(E_i,E_j) = \sum_\alpha h^\alpha_{ij}\xi_\alpha$, se obtiene para (III.2.2) la forma

$$\text{(III.2.3)}\qquad (\Delta^2\phi)(x) = 2(n+1)c(\Delta\phi)(x) + 2\sum_{ij\alpha\beta} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}\bar{\sigma}(\xi_\alpha,\xi_\beta) - $$
$$- 2\sum_{ijk\alpha} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ik}\bar{\sigma}(E_j,E_k).$$

Consideramos el tensor T en el fibrado normal de la inmersión ψ definido por $T: T^\perp_x M \times T^\perp_x M \longrightarrow R$

$$T(\xi,\eta) = \operatorname{tr} A_\xi A_\eta \quad , \text{ para todo } \quad \xi,\eta \in T^\perp_x M.$$

Si S es el tensor de Ricci de M, de la ecuación de Gauss tenemos la identidad

$$\text{(III.2.4)}\qquad \sum_{i\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik} = (n-1)c\langle E_j,E_k\rangle - S(E_j,E_k) \ ,$$

y por tanto de (III.2.3) y (III.2.4)

$$\text{(III.2.5)}\quad \Delta^2\phi = 4nc\Delta\phi + 2\sum_{\alpha\beta}T(\xi_\alpha,\xi_\beta)\bar{\sigma}(\xi_\alpha,\xi_\beta) + $$
$$+\ 2\sum_{jk} S(E_j,E_k)\bar{\sigma}(E_j,E_k).$$

Lema III.2.2. Sea $\psi: M^n \longrightarrow S^{n+p}(c)$ una inmersión isométrica y minimal de una variedad de Riemann en la esfera. Entonces, con las notaciones anteriores, se tienen las siguientes relaciones

$$g(\phi,\phi) = \frac{1}{2c}, \tag{III.2.6}$$

$$g(\phi,\Delta\phi) = n, \tag{III.2.7}$$

$$g(\Delta\phi,\Delta\phi) = 2n(n+1)c, \tag{III.2.8}$$

$$g(\Delta^2\phi,\Delta\phi) = 4(n+1)^2nc^2 + 4c\|\sigma\|^2. \tag{III.2.9}$$

La demostración se obtiene directamente a partir del lema III.2.1 y (III.1.5), (III.1.7) y (III.1.8).

Enunciamos a continuación el resultado central de esta sección: Una caracterización de las subvariedades minimales de la esfera para las cuales existen números naturales u_1, u_2 tales que el producto de cada dos funciones coordenadas asociadas a la inmersión pertenece a $V_0 + V_{u_1} + V_{u_2}$. Evidentemente si $\psi: M^n \longrightarrow S^{n+p}(c)$ es la inmersión, lo que acabamos de exponer es equivalente al hecho de que la inmersión asociada $\phi = f\circ\psi$ es de orden $\{u_1,u_2\}$.

Teorema III.2.3. Sea $\psi: M^n \longrightarrow S^{n+p}(c)$ una inmersión isométrica y minimal de una variedad de Riemann compacta en la esfera tal que la inmersión es plena. Entonces la inmersión $\phi = f\circ\psi$ es de orden $\{u_1,u_2\}$ para algunos números naturales $u_1,u_2 \geqq 1$ si y sólo si M es Einstein y $T = k\langle,\rangle$, donde k es una constante real y $\langle,\rangle$ es la métrica restringida al fibrado normal de ψ.

Demostración. Supongamos que ϕ es una inmersión de orden $\{u_1,u_2\}$, esto es $\phi = \phi_0 + \phi_{u_1} + \phi_{u_2}$. Entonces

$$\Delta\phi = \lambda_{u_1}\phi_{u_1} + \lambda_{u_2}\phi_{u_2},$$

$$\Delta^2\phi = \lambda_{u_1}^2\phi_{u_1} + \lambda_{u_2}^2\phi_{u_2}.$$

Por tanto obtenemos

$$\text{(III.2.10)} \qquad \Delta^2\phi = (\lambda_{u_1}+\lambda_{u_2})\Delta\phi - \lambda_{u_1}\lambda_{u_2}(\phi - \phi_0).$$

Recordemos que ϕ_0 es una aplicación constante. Como ϕ, $\Delta\phi$ y $\Delta^2\phi$ son normales a $S^{n+p}(c)$ para la inmersión f, concluimos que $\phi_0 \in T^{\perp}_{(x)}(S^{n+p}(c))_f$, para todo x de M. Así para todo x de M existe un $\lambda \in R$ tal que $x\phi_0 = \lambda x$. Puesto que M es conexa $\psi(M)$ está contenido en $S^{n+p}(c)\cap V$, donde V es un subespacio propio de la aplicación lineal $x \longmapsto x\phi_0$ en E^{n+p+1}. Como ψ es plena concluimos que ϕ_0 es una matriz escalar. Sea I la matriz identidad en SM(n+p+1). Aplicando g(I,-) a los dos miembros de la identidad (III.2.10) obtenemos

$$\phi_0 = \frac{1}{(n+p+1)c}I.$$

Por tanto

$$\text{(III.2.11)} \qquad \Delta^2\phi = (\lambda_{u_1}+\lambda_{u_2})\Delta\phi - \lambda_{u_1}\lambda_{u_2}\left(\phi - \frac{1}{(n+p+1)c}I\right).$$

Mediante un cálculo directo, utilizando el lema III.2.1, (III.1.5), (III.1.7), (III.1.8) y (III.2.5) obtenemos

$$g\left(\bar\sigma(E_r,E_s),\phi - \frac{1}{(n+p+1)c}I\right) = -\langle E_r,E_s\rangle,$$

$$g(\bar\sigma(E_r,E_s),\Delta\phi) = -2(n+1)c\langle E_r,E_s\rangle,$$

$$g(\bar\sigma(E_r,E_s),\Delta^2\phi) = -4n(n+3)c^2\langle E_r,E_s\rangle + 4c\bar{S}(E_r,E_s).$$

De (III.2.11) y de las relaciones anteriores concluimos que

$$\text{(III.2.12)} \qquad S(E_r,E_s) = \frac{1}{4c}\{\lambda_{u_1}\lambda_{u_2} - 2(n+1)c(\lambda_{u_1}+\lambda_{u_2}) + 4n(n+3)c^2\}<E_r,E_s> .$$

Así M es Einstein. De la misma forma

$$g(\bar{\sigma}(\xi_\gamma,\xi_\delta),\phi - \frac{1}{(n+p+1)c} I) = - <\xi_\gamma,\xi_\delta>,$$

$$g(\bar{\sigma}(\xi_\gamma,\xi_\delta),\Delta\phi) = -2nc<\xi_\gamma,\xi_\delta>,$$

$$g(\bar{\sigma}(\xi_\gamma,\xi_\delta),\Delta^2\phi) = - 4n(n+1)c^2<\xi_\gamma,\xi_\delta> + 4cT(\xi_\gamma,\xi_\delta).$$

Por tanto, como antes, obtenemos

$$\text{(III.2.13)} \qquad T(\xi_\gamma,\xi_\delta) = \frac{1}{4c}\{\lambda_{u_1}\lambda_{u_2} - 2nc(\lambda_{u_1}+\lambda_{u_2}) + 4n(n+1)c^2\}<\xi_\gamma,\xi_\delta>.$$

Recíprocamente, supongamos que M^n es Einstein y que $T = k<,>$. Entonces como $S(E_i,E_j) = \frac{\rho}{n}<E_i,E_j>$ y $T(\xi_\gamma,\xi_\delta) = \frac{1}{p}||\sigma||^2<\xi_\gamma,\xi_\delta>$, donde ρ es la curvatura escalar de M, tenemos a partir de (III.2.5)

$$\Delta^2\phi = 4nc\Delta\phi + \frac{2||\sigma||^2}{p}\sum_\alpha\bar{\sigma}(\xi_\alpha,\xi_\alpha) + \frac{2\rho}{n}\sum_j\bar{\sigma}(E_j,E_j) =$$

$$= 4nc\Delta\phi + \frac{2||\sigma||^2}{p}(\sum_\alpha\bar{\sigma}(\xi_\alpha,\xi_\alpha) + \sum_j\bar{\sigma}(E_j,E_j)) + (\frac{2\rho}{n} - \frac{2||\sigma||^2}{p})\sum_j\bar{\sigma}(E_j,E_j).$$

Finalmente de (III.1.9) se tiene

$$\Delta^2\phi = (4nc - \frac{2\rho}{n} + \frac{2||\sigma||^2}{p})\Delta\phi - \frac{4||\sigma||^2}{p}(n+p+1)c(\phi - \frac{1}{(n+p+1)c}I),$$

y concluimos de la proposición I.3.1 que ϕ es una inmersión de orden $\{u_1,u_2\}$ para ciertos naturales $u_1,u_2 \geqq 1$.

C. Q. D.

3. El primer y el segundo valor propio para subvariedades minimales de la esfera.

Como ya anunciamos la correspondiente versión de las desigualdades que obtuvimos para subvariedades Kaehlerianas del espacio proyectivo complejo, admiten en este caso la siguiente interpretación: La igualdad en cada una de las desigualdades ocurre si y sólo si el producto de cada dos funciones coordenadas de la inmersión pertenece a $V_0 + V_1 + V_2$. Puesto que en la desigualdad solo aparecen invariantes espectrales, la propiedad anterior es una propiedad espectral.

Teorema III.3.1. Sea M^n una subvariedad compacta de $S^m(c)$ isométricamente inmersa, tal que la inmersión es minimal. Entonces

$$\{n[2(n+1)c - \lambda_1][2(n+1)c - \lambda_2] + 4n(n-1)c^2\}\mathrm{vol}(M) \geqq \int_M \rho \,, \tag{III.3.1}$$

donde λ_1 y λ_2 son el primer y el segundo valor propio de M, vol(M) el volumen de M y ρ la curvatura escalar de M. Si la igualdad ocurre entonces M es Einstein y (si la inmersión es plena) $T = k\langle\, ,\rangle$.

Demostración. Si en (II.6.1) tenemos en cuenta que Δ es un operador autoadjunto nos queda para cualquier subvariedad compacta y minimal $\psi : M^n \longrightarrow S^m(c)$

$$\int_M g(\Delta^2\phi, \Delta\phi) - (\lambda_1+\lambda_2)\int_M g(\Delta\phi, \Delta\phi) + \lambda_1\lambda_2\int_M g(\Delta\phi, \phi) \geqq 0, \tag{III.3.2}$$

donde $\phi = f\circ\psi$. Así teniendo en cuenta la relación $\rho = n(n-1)c - \|\sigma\|^2$ y el lema III.2.2 obtenemos (III.3.1).

Si la igualdad ocurre, consideramos $S^{n+p}(c)$ la menor subvariedad totalmente geodésica de $S^m(c)$ que contiene a $\psi(M)$ y teniendo en cuenta el teorema III.2.3 concluimos la demostración.

C. Q. D.

Corolario III.3.2. *Sea M^n una variedad de Riemann compacta que admite una inmersión de orden 1 en el espacio Euclideo. Entonces*

$$\frac{n}{4}\{2(n+5)\lambda_1 - (n+2)\lambda_2\}\mathrm{vol}(M) \geqq \int_M \rho . \tag{III.3.3}$$

Demostración. Toda inmersión de orden 1 es una inmersión minimal en una esfera de curvatura $c = \lambda_1/n$. Así (III.3.3) se sigue de (III.3.1)

C. Q. D.

Decimos que una inmersión $\psi : M^n \longrightarrow E^m$ de orden u es standard si es de la forma $\psi = k(f_1, \ldots, f_{m_1})$, donde k es una constante real y $\{f_i\}$ es una base ortonormal, para la métrica L^2 en $C^\infty(M)$, de V_u. Para una inmersión standard de orden 1 en el espacio Euclideo obtenemos una desigualdad en la que intervienen sólamente el primer y el segundo valor propio, la dimensión del primer espacio propio y la dimensión de la subvariedad.

Corolario III.3.3. *Sea M^n una variedad de Riemann compacta que admite una inmersión standard de orden 1. Entonces*

$$\frac{n+2}{n}\,\frac{2\,m_1}{m_1+1}\lambda_1 \geqq \lambda_2, \tag{III.3.4}$$

donde m_1 es la dimensión del λ_1-autoespacio.

Demostración. Sea $\psi : M^n \longrightarrow S^{m_1-1}(\lambda_1/n)$ la correspondiente inmersión minimal. Si escribimos $\psi = (x_1, \ldots, x_{m_1})$, al ser la inmersión standard tenemos

$$\int_M x_i x_j = k\delta_{ij} ,$$

para cierta constante real k. Así el centro de gravedad para la inmersión asociada $\phi = f\circ\psi$ es una matriz escalar, de traza n/λ_1. Por tanto $\phi_0 = \frac{n}{m_1 \; 1} I$. De forma similar a(III.3.2) obtenemos

$$\text{(III.3.5)} \qquad \int_M <\Delta\phi,\Delta\phi> - (\lambda_1+\lambda_2)\int_M <\Delta\phi,\phi-\frac{n}{m_1 \; 1}I> +$$

$$+ \lambda_1\lambda_2\int_M <\phi-\frac{}{m_1 \; 1}I, \phi - \frac{}{m_1 \; 1}I> = \sum_{u\geqq 3}(\lambda_u-\lambda_1)(\lambda_u-\lambda_2)a_u \geqq 0.$$

La igualdad ocurre si y sólo si ϕ es una inmersión de orden $\{1,2\}$. Utilizando el lema III.2.2 y (III.3.5) obtenemos (III.3.4).

C. Q. D.

Si la igualdad ocurre en (III.3.3) o (III.3.4) concluimos como en el teorema (III.3.1) que la subvariedad es Einstein y que, si la inmersión es plena, $T = k<,>$ para ψ. Dos interesantes familias de variedades de Riemann que admiten inmersiones standard de orden 1 son los <u>espacios homogeneos irreducibles compactos</u>, esto es espacios homogéneos compactos tales que la acción del subgrupo de isotropía sobre el tangente sea irreducible, vease Wallach [Wa] y Li[L2] y las <u>variedades fuertemente armónicas</u>, esto es variedades de Riemann compactas tales que el nucleo del operador del calor depende solo del tiempo y de la distancia entre los puntos, vease Besse [Be]pg. 174 y Sakamoto [S2]. Los únicos ejemplos conocidos de variedades fuertemente armónicas son los espacios simétricos compactos de rango 1. Una conocida conjetura asegura que las únicas variedades fuertemente armónicas son los ejemplos anteriores.

Como consecuencia de los corolarios III.3.2 y III.3.3 obtenemos el siguiente

Corolario III.3.4 Sea M^n una variedad fuertemente armónica. Entonces.

(III.3.6) $\quad \frac{n}{4}\{2(n+5)\lambda_1 - (n+2)\lambda_2\} \geqq \rho,$

(III.3.7) $\quad \frac{n+2}{n}\frac{2m_1}{m_1+1}\lambda_1 \geqq \lambda_2.$

La igualdad en (III.3.6) o (III.3.7) ocurre si y sólo si M es un espacio simétrico compacto de rango 1.

Demostración. Toda variedad fuertemente armónica es Einstein. Por tanto de (III.3.3) y (IIII.3.4) obtenemos (III.3.6) y (IIII.3.7) ya que toda variedad fuertemente armónica admite una inmersión standard de orden 1. Además la correspondiente inmersión minimal $\psi: M^n \longrightarrow S^{m_1-1}(\lambda_1/n)$ es isotropíca, ver[S2].
Si alguna de las igualdades ocurre, entonces $T = k\langle , \rangle$. De Nakagawa [Na]pg. 517 se concluye que M es localmente simétrica. Por [Be] sabemos que en este caso M es un espacio simétrico compacto de rango 1.

C. Q. D.

BIBLIOGRAFIA

[BC] M. BARROS, B. Y. CHEN, " Complex spheres and spectral geometry", Geom. Dedicata, 11, 1981, 337-340.

[BR] M. BARROS, A. ROMERO, "Sur un invariant spectral pour les sous-variétés complexes de l'espace projectif complexe", C.R.Acad. Sci. Paris, 292, 1981, 523-525.

[Bu1] A. BEJANCU, "CR-submanifolds of a Kaehler manifold I", Proc. AMS, 69, 1978, 135-142.

[Bu2] ————, "CR-submanifolds of a Kaehler manifold II", Trans. AMS, 250, 1979, 21-24.

[B1] M. BERGER, "Eigenvalues of the Laplacian", Proc. Symp. Pur.Math. AMS, 16, 1970, 121-125.

[B2] ———— , "Les premières valeurs propes des variétés Riemanniennes", Compositio Math., 26, 1973, 129-149.

[BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, "Le spectre d'une variété Riemannienne", Lecture Notes in Math., 194, Springer-Verlag

[Be] A. BESSE, "manifolds all of whose geodesic are closed", Ergebnisse der Math., 93, 1978, Springer-Verlag.

[BW] D. BLEECKER, J. WEINER, "Extrinsic bound of λ_1 of Δ on a compact manifold", Comment. Math. Helv., 51, 1976, 601-609.

[C1] E. CALABI, "Isometric imbedding of complex manifolds", Ann. of Math., 58, 1953, 1-23.

[C2] ————,"Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres", J. Diff. Geom.,1,1967,111-125.

[Ch1] B. Y. CHEN,"Geometry of submanifolds",M. Dekker,New York,1973.

[Ch2] ———— ,"On the total curvature of inmersed manifold,IV: Spectrum and total mean curvature",Bull. Math. Acad. Sinica 7,1979,301-311.

[Ch3] ———— ,"Conformal mappings and first eigenvalue of Laplacian on surfaces",Bull. Math. Acad. Sinica,7,1979,395-400.

[Ch4] ——— ,"Geometry of submanifolds and its applications", Science Univ. of Tokyo,1981.

[Ch5] ———,"On the total curvature of immersed manifold,VI: Submanifolds of finite type and their applications", Bull. Math. Acad. Sinica,11,1983,309-328.

[Ch6] ———— ,"On the first eigenvalue of Laplacian of compact minimal submanifolds of rank one symmetric spaces"(aparecerá).

[CO] B. Y. CHEN,K. OGIUE,"On totally real submanifolds",Trans. AMS 193,1974,257-266.

[Cg] S. Y. CHENG,"Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications",Math. Z.,143,1975,289-297.

[Cr] S. S. CHERN,"On Einstein hypersurfaces in a Kaehlerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature",J. Diff. Geom.1,1967, 21-31.

[CDK] S. S. CHERN, M. DO CARMO, S. KOBAYASHI, "Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length", Functional Analisis and related fields, 1970, 59-75.

[CW] H. I. CHOI, A.N. WANG, "A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces", J. Diff. Geom., 1983, 559-562.

[DG] J. J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN, "The spectrum of positive elliptic operators and closed geodésics", Invent. Math. 29, 1975, 39-79.

[E] N. EJIRI, "The first eigenvalue of Δ for compact minimal submanifolds in a complex projective space", (aparecerá).

[F] D. FERUS, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", Math. Ann., 247, 1980, 81-93.

[GK] V. GUILLEMIN, D. KAZHDAN, "Some inverse spectral results for negatively curved n-mamifolds", AMS Symp. on Geom. Laplace operator, XXXVI, Hawaii, 1979, 153-180.

[H] J. HANO, "Einstein complete intersections in compex projective space", Math. Ann., 216, 1975, 197-208.

[He] J. HERSCH, "Quatre propiétés isoperimetriques de membranes spheriques homogènes", C.R. Acad. Sci. Paris, 270, 1970, 1645-1648.

[K] M. KAC, "Can one hear the shape of a drum?", Amer. Math. Montly, 73, 1966, 1-23.

[Ko] S. KOBAYASHI, "Hypersurfaces of complex projective space with constant scalar curvature", J. Diff. Geom., 1, 1967, 369-370.

[KN] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU,"Foundations of differential geometry", Wiley interscience,New York,1963, tomos I y II.

[Kon] M. KON,"Complex submanifolds with constant scalar curvature in a Kaehler manifold", J. Math. Soc. Japan,27,1975, 76-80.

[L1] P. LI,"A lower bound for the first eigenvalue of the Laplacian on a compact Riemannian manifold", Indian. J. Math., 28,1979,1013-1019.

[L2] ——— ,"Minimal immersions of compact irreducible homogeneous Riemannian manifolds", J. Diff. Geom.,16,1981,105-115.

[LY1] P. LI, S-T. YAU,"Eigenvalues of a compact Riemannian manifold", AMS Symp. Geom. Laplace operator XXXVI,Hawaii, 1979,205-240.

[LY2] ——————,"A new conformal invariant and its applications to Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces",Invent. Math.,69,1982,269-291.

[Lc] A. LICHNEROWICZ,"Geometrie des groupes de transformations", Dunod,1958.

[Le] J. A. LITTLE,"Manifold with planar geodesic",J.Diff. Geom., 11,1976,265-285.

[M] J. W. MILNOR,"Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds", Proc. Nat. Acad. Sci. USA,51,1964,542.

[N] T. NAGANO,"On the minimum eigenvalues of the Laplacians in Riemannian manifolds",Sci. Papers Coll.Gen.Ed.Univ.Tokyo, 11,1961,177-182.

[Nh] H. NAITOH,"Totally real parallel submanifolds in $P^n(c)$", Tokyo J. Math.,4,1981.

[NhT] H. NAITOH,M. TAKEUCHI,"Totally real submanifolds and symmetric bounded domains",Osaka J. Math.,19,1982,717-731.

[Na] H. NAKAGAWA,"A characterization of the 3rd standard immersions of spheres into a sphere",J. Diff. Geom.,16,1981, 511-527.

[NO] H. NAKAGAWA,K. OGIUE,"Complex space forms immersed in complex space forms", Trans. AMS,219,1976,289-297.

[NT] H. NAKAGAWA,R. TAKAGI,"On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space",J. Math. Soc. Japan, 28,1976,638-667.

[NS] K. NOMIZU,B. SMYTH,"Differential geometry of complex hypersurfaces II",J. Math. Soc. Japan,20,1968,498-527.

[O1] M. OBATA,"Certain condition for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere",J. Math. Soc. Japan,14,1962,333-340.

[O2] ——————,"Riemannian manifolds admitting a solution of a certain system of differential equations", Proc. U. States--Japan Sem. Diff. Geom., Kyoto,Japan,1965.

[Og] K. OGIUE,"Differential geometry of Kaehler submanifolds" Advances Math.,13,1974,73-114.

[R] R. C. REILLY,"On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space",Comment. Math. Helv.,52,525-533,1977.

[Rom] A. ROMERO,"El espectro de una variedad de Riemann", Pub. Dep. Geom. Univ. Granada,3,1980.

[Ro1] A. ROS,"Spectral geometry of CR-minimal submanifolds in the complex projective space",Kodai Math. J.,6,1983,88-99.

[Ro2] ———,"On spectral geometry of Kaehler submanifolds" (aparecerá).

[Ro3] ————,"Eigenvalue inequalities for minimal submanifolds and P-manifolds",(aparecerá).

[S1] K. SAKAMOTO,"Planar geodesic immersions",Tohoku Math. J. 29,1977,25-56.

[S2] ——————,"Helical immersions into a unit sphere",Math. Ann. ,1982,63-80.

[Si] J. SIMONS,"Minimal varieties in Riemannian manifolds", Ann. of Math.,88,1968,62-105.

[Sm] B. SMYTH,"Differential geometry of complex hypersurfaces", Ann. of Math.,85,1967,246-266.

[T] S. S. TAI,"Minimum imbedding of compact symmetric spaces of rank one symmetric spaces",J. Diff. Geom.,2,1968,55-66.

[Ta] T. TAKAHASHI,"Minimal immersions of Riemannian manifolds", J. Math. Soc. Japan,18,1966,380-385.

[Ti] M. TAKEUCHI,"Homogeneous Kaehler submanifolds in complex projective spaces",Japan J. Math.,4,1978,171-219.

[V] M. VIGNERAS,"Variétés Riemanniennes isospectrales et non isometriques",Ann. of Math.,112,1980,21-32.

[Wa] N. R. WALLACH,"Minimal immersions of symmetric spaces into spheres",ed. by W. M. Bootby,Marcel Dekker,New York,1972,1-40.

[W] F. W. WARNER,"Foundations of differentiable manifolds and Lie groups", Editorial series of I. M. Singer,1971.

[Y1] S-T. YAU,"Submanifolds with constant mean curvature I", Amer. J. Math.,96,1974,346-366.

[Y2] ———,"Submanifolds with constant mean curvature II", Amer. J. Math.,97,1975,76-100.

[Y3] ———,"Survey on partial differential equations in differential geometry",Sem. Diff. Geom.,Ann. Math. Studies, 102,1982,3-71.

[Y4] ———,"Problem section",Sem. Diff. Geom., Ann. Math. Studies, 102,1982,669-706.

[YY] P. YANG,S-T. YAU,"Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds", Ann. della scuola Sup. di Pisa,7,1980,55-63.