UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTRIBUCION A LOS METODOS DE GENERACION DE DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES DISCRETAS

JOSE RODRIGUEZ AVI

TESIS DOCTORAL

SECCION DE MATEMATICAS

T. P. 14/6

CONTRIBUCION A LOS MÉTODOS DE GENERACION DE DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES DISCRETAS

Memoria que para optar al grado de Doctor en Ciencias, sección Matemáticas presenta José Rodríguez Avi

V° B°
Director de la Tesis:

Prof. Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA E INVESTIGACIOM OPERATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a D. Ramón Gutiérrez Jáimez, director de este trabajo, por su inestimable ayuda así como por su constante apoyo, tanto en el aspecto investigador como, sobre todo, en el aspecto humano.

INDICE.

1. INTRODUCCION.

Dentro de la Estadística, el Cálculo de Probabilidades es la Teoría Matemática que permite modelizar y sistematizar las poblaciones objeto de estudio. Por tanto, uno de sus objetivos básicos es el encontrar modelos de los diversos fenómenos aleatorios. Esto lo logra mediante la determinación de distribuciones teóricas que permitan asignar probabilidades a todos y cada uno de los posibles sucesos que puedan interesar en la población estudiada.

A tal fin, históricamente se comenzó trabajando sobre la generación de distribuciones continuas. Sin embargo, y debido al amplio campo de aplicación dentro de los fenómenos reales, se está profundizando cada vez más en la obtención de distribuciones teóricas discretas, con el consiguiente desarrollo de los métodos empleados para ello. Es es este campo de estudio donde se enmarca este trabajo, y por ello se ha creido conveniente dibujar una breve reseña histórica en donde se describan algunos métodos que se han empleado o se emplean para obtener distribuciones teóricas. El tratar de establecer el modelo matemático, nos conducirá, a veces, a una ecuación funcional, diferencial o en diferencias que será resuelta para obtener de forma explícita la ley de probabilidades.

PEARSON (1895) fue el primero que propuso el estudio de una familia de distribuciones contínuas que verifica una ecuación diferencial del tipo:

$$y'(x) = \frac{x - a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\, y(x)$$

en donde a, b_0, b_1, b_2 son parámetros reales.

Este sistema de Pearson, que supuso el primer intento de sistematización de distribuciones de probabilidad a partir de la forma de generarlas, y que incluye a distribuciones tan importantes como es la distribución Normal, desempeñó un papel destacado en la Estadística durante muchos años. Aún en la actualidad, los sistemas generadores de distribuciones de probabilidad que han seguido esta línea son conocidos como *Pearsonianos.*

Por su primacía histórica ha sido bien estudiado. Así las propiedades más destacadas de este sistema, como ocurre con las relaciones de recurrencia entre momentos, ecuación diferencial que verifica la función característica de las distribuciones que satisfacen el sistema de Pearson, clasificación de las distribuciones pertenecientes al sistema, ajuste de momentos, etc, han sido objeto de numerosos trabajos, de entre los que podemos destacar CANSADO (1947, 1950), ELDERTON & JHONSON (1969) y KENDALL & STUART (1967-1969), entre otros.

Como extensión de estos sistemas de Pearson, se pensó en estudiar otras opciones que condujesen a otras distribuciones no clasificables como Pearsonianas. Así, por ejemplo, se consideró la ecuación diferencial:

$$\frac{d \ln f(x)}{d(x)} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

en donde N y D son polinomios en x, de órdenes n y d, en principio cualesquiera. Casos concretos de este último sistema fueron considerados por diversos autores. Así, para n=1,2;d=3 por MOUZON (1930) y ZOCH (1935), y para n=1, d=4 por HANSMANN (1934).

ROY (1971) consideró el caso n=2, d=3 indicando que dicha ecuación diferencial puede obtenerse al tomar logaritmos y derivar en la función

$$f(x) = Cx^{r_1}(a_1 + a_2x)^{r_2}(b_1 + b_2x)^{r_3}$$

con C, a_1, a_2, b_1, b_2, r_1, r_2 y $r_3 \in \mathbb{R}$

HERRERIAS (1975) generaliza a su vez el sistema de Pearson, introduciendo una ecuación diferencial análoga a la de Pearson pero con operadores derivadas más generales.

PEARSON (1923) propuso para el caso multivariante el estudio de distribuciones de probabilidad continuas que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{L(x,y)}{G(x,y)} f(x,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{N(x,y)}{H(x,y)} f(x,y)$$

en donde L, N son funciones cúbicas y G, H son funciones cuárticas en x,y; tales que se verifica la condición

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$$

En particular, en 1947 y 1948 VAN UVEN estudió con amplitud el caso en que L y N son funciones lineales; G y H son funciones cuadráticas en x,y respectivamente para el cual obtuvo relaciones entre momentos, líneas de regresión y clasificación de las distribuciones pertenecientes al sistema.

En 1981, FERNANDEZ extiende el sistema de Van Uven tomando L y N funciones cuadráticas y G, H funciones cúbicas, realizando un estudio similar al de Van Uven.

En 1956, STEYN da un importante resultado, indicando que para cualquier función de densidad es posible obtener la ecuación diferencial que verifica su función característica y a partir de ella caracterizar sus funciones de regresión.

En 1960, STEIN aplica el resultado anterior a las funciones de densidad que satisfacen el sistema multivariante

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{a_{i0} + \mathbf{a}'_i\mathbf{x}}{b_{i00} + \mathbf{b}'_{i0}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{B}_i\mathbf{x}}\, f \qquad i=1,\dots,k$$

en donde $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_{i0}$, $\mathbf{x}$ son vectores k×1; $\mathbf{B}_i$ son matrices simétricas k×k con elementos reales b_{ilj}, demostrando que esta generalización del sistema de Pearson tiene funciones de regresión lineal de la forma:

$$(a_{ii} + 2b_{iii})\hat{X}_i = -(a_{i0} + b_{ii0}) - \sum_{j\neq i} (a_{ij} + 2b_{ilj})x_i$$

Extensiones más recientes han sido dadas por HERRERIAS (1975) que generaliza los sistemas de Van Uven y Steyn a través de los operadores en derivadas generalizadas.

El estudio de familias exponenciales, cuyas funciones de densidad son de la forma:

$$\ln f(x,\theta) = t(x)\, q(\theta) + A(x) + B(\theta)$$

donde t, q son funciones monótonas en x, θ respectivamente, y $\theta \in \Omega$, donde $\Omega = \{ \theta \mid B(\theta) < \infty \}$, han sido consideradas por diversos autores destacando entre ellos WANI & PATIL (1974), (que unifican los resultados de WANI (1968), PATIL (1963), DOSS (1969), etc, obteniendo una caracterización de la distribución exponencial y una extensión de los resultados de Doss al caso multivariante) y BASU & BLOCK (1975) que discuten caracterizaciones de las distribuciones exponenciales univariantes y varias distribuciones exponenciales multivariantes y extensiones, así como aplicaciones de estas caracterizaciones.

Todo esto se refiere al caso continuo. Un camino paralelo se ha desarrollado en el estudio de familias o sistemas de distribuciones discretas, tomando como modelo el caso continuo. El propio PEARSON en 1985 propuso el estudio de una ecuación en diferencias análoga al caso continuo, de la forma:

$$\Delta f_{r-1} = \frac{a - r}{b_0 + b_1 r + b_2 r(r-1)}\, f_{r-1} \qquad r \in T \subseteq \mathbb{Z}$$

donde a y b_i son parámetros reales.

En 1967, ORD estudia ampliamente el sistema de Pearson discreto, obteniendo relaciones de recurrencias entre momentos factoriales, clasificación de algunas distribuciones discretas en diversos tipos atendiendo a los coeficientes de asimetría y curtosis.

En 1976, HERRERIAS estudia una extensión del sistema de Pearson, siguiendo el modelo de Roy en el caso continuo, y obtiene distribuciones que no pertenecen al sistema de Ord.

Mención especial merece, dentro de la línea de sistemas discretos, el estudio de familias generadas a partir de series de potencias generalizadas, cuyas funciones de probabilidad discreta vienen definidas por:

$$f_r = a(r) \frac{\theta^r}{A(\theta)}$$

donde $r \in \Omega$ rango de la variable aleatoria R y θ es un parámetro. El estudio de sus propiedades y estimaciones de los parámetros han sido discutidos en diversos trabajos, destacando entre ellos PATIL & JOSHI (1968) y KEMP (1968).

En el caso multivariante, cuyas funciones de probabilidad vienen definidas por:

$$f(r_1, \ldots, r_m / \theta_1, \ldots, \theta_m) = a(r) \frac{\theta_1^{r_1} \ldots \theta_m^{r_m}}{A(\theta)}$$

a partir de series de potencias generalizadas multivariantes, ha sido discutido por PATIL (1965), JOSHI & PATIL (1970).

Dentro de este contexto podríamos citar a KEMP (1968) en el estudio de leyes de probabilidad discreta cuyas funciones generatrices son series hipergeométricas en el caso univariante, y a

STEIN (1951, 1955) en el caso multivariante.

En los último años han aparecido un considerable número de trabajos, tanto en distribuciones continuas como discretas, que han sido recogidas en libros, cursos, monografías.... Entre ellas, podemos destacar las de PATIL & JOSHI(1968), JHONSON & KOTZ (1969-1970), ORD (1972), PATIL, KOTZ & ORD (1975) (patrocinados por la NATO SCIENTIFICS AFFAIRS DIVISION) y JHONSON & KOTZ (1983).

Volviendo a los sistemas Pearsonianos, y como antecedente más inmediato de este trabajo, podemos referirnos a FAJARDO (1985). Su estudio se encuadra en la línea de generalizar los sistemas de Pearson discretos aportando una metodología, tanto para la construcción en sí de dichas familias, como en el estudio de las propiedades probabilísticas y estadísticas de las distribuciones agrupadas en cada una de ellas.

Igualmente, y como principal vía de expansión de los resultados obtenidos en este trabajo es destacable la tesis de HERMOSO (1987) en la cual se extienden la función hipergeométrica de Gauss y su generalización multivariante $F_D^{(n)}$ a funciones de argumento matricial, para lo que se emplea como herramienta el uso de polinomios zonales, que generalizan la función potencial

$$f_k(x) = x^k$$

al caso en que X, argumento de la función, es una matriz; permaneciendo la nueva función real-valuada (MUHIRHEAD (1982); TAKEMURA (1984)). Estas nuevas funciones hipergeométricas de argumento matricial sirven como generadores de distribuciones discretas de probabilidad.

En este trabajo, pues, avanzamos en el estudio de las distribuciones discretas Pearsonianas, generadas por funciones hipergeométricas fundamentalmente. En el capítulo 2 exponemos brevemente los principales resultados previos y la metodología que vamos a seguir en cada caso concreto, así como los resultados fundamentales conocidos y que nos interesan sobre las funciones hipergeométricas.

En el capítulo 3, comparamos las ecuaciones diferenciales que ha de verificar la función generatriz de probabilidad en el caso discreto, según la metodología empleada por FAJARDO (1985), en aquellos casos en que ésta viene expresada como una función hipergeométrica concreta: (función de Kummer, de Gauss o $F_D^{(n)}$) con las ecuaciones diferenciales que tales funciones hipergeométricas verifican como tales funciones.

En el capítulo 4 comenzamos el estudio concreto de distribuciones discretas. En primer lugar incluimos dentro de la clasificación general dada por FAJARDO, para posteriormente aplicarles los resultados que éste obtiene, a dos familias de distribuciones discretas que vienen generadas por la función hipergeométrica de Gauss, como son las de Kemp y Kemp y de Waring generalizada.

A continuación vemos las distribuciones de probabilidad que resultan generadas por distribuciones hipergeométricas univariantes extensiones de la función de Gauss, las cuales estan siendo cada vez más empleadas. Nos centramos en las distribuciones generadas por la función hipergeométrica

$$ {}_{p+1}F_p\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+1};\gamma_1,\ldots,\gamma_p;\ x) $$

concretando en los casos en que p=2 y p=3. (el caso p=1 es la función de Gauss). Para p=2 obtenemos una distribución de 6 parámetros, y tras estudiar sus funciones generatrices y sus momentos, añadimos una clasificación de todas las posibles variables obtenidas, atendiendo al valor de los parámetros y al recorrido de la variable aleatoria resultante.

Estas distribuciones se obtienen como solución de una ecuación en diferencias en donde los coeficientes son funciones entero-valuadas. Habitualmente, y desde el modelo de Pearson, estas funciones han sido consideradas como polinómicas. Sin embargo, el procedimiento es aplicable a cualesquiera otras funciones, siempre que verifiquen determinada condición. Por tanto, para finalizar el capítulo, proponemos una variable que encaja dentro del modelo de Pearson discreto, en donde las funciones coeficientes de la ecuación en diferencias son exponenciales.

En el capítulo 5 realizamos un estudio similar al visto en las primeras secciones del capítulo anterior. Así, empezamos por incluir a la distribución bivariante generalizada de Waring dentro de la familia de distribuciones discretas generadas por la función hipergeométrica bivariante $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta';\ \gamma;\ \lambda_1,\lambda_2)$, lo que permite estudiar las características poblacionales, así como la regresión y la correlación.

En la sección siguiente se estudia la familia de distribuciones discretas bivariantes generada por la función hipergeométrica $F_3(\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta';\ \gamma,\ \lambda_1,\lambda_2)$. de la que igualmente se aporta una clasificación de las posibles distribuciones resultantes para el caso en que $\lambda_1=\lambda_2=1$. Dada la falta de resultados analíticos para esta distribución, (como la existencia de una fórmula de sumación general) encontramos una fórmula de sumación para ciertas relaciones entre los parámetros, lo que nos permite desarrollar totalmente el estudio de una subclase de esta familia de distribuciones, de rango infinito en ambas variables. Para finalizar, se estudia la familia de distribuciones generada por la función hipergeométrica $F_4(\alpha,\beta;\ \gamma,\gamma';\ \lambda,\ \lambda')$

En el último capítulo, nos centramos en las distribuciones multidimensionales. Así, proponemos una extensión multivariante para la distribución generalizada de Waring, en la que calculamos tanto los momentos, como las distribuciones marginales y condicionadas o las curvas de regresión y los coeficientes de correlación.

Del mismo modo se estudia la familia de distribuciones multivariantes generada por la extensión multidimensional de la función hipergeométrica bidimensional F_3.

Tras el estudio de estas familias de distribuciones, quedan abiertos múltiples caminos de investigación. Un primer paso teórico consiste en estudiar las correspondientes funciones ${}_{p+1}F_p$ y F_3 como funciones hipergeométricas de argumento matricial, y construir las familias de distribuciones de probabilidad así generadas. El problema principal consiste en la falta de resultados analíticos existentes sobre estas funciones y que son necesarios para el desarrollo probabilístico.

Otro camino consiste en estudiar, dentro de las situaciones reales, aquellas reales que puedan ser modelizadas por estas variables aleatorias introducidas, así como desarrollar toda la teoría inferencial necesaria. Un primer paso viene ya dado por las relaciones de recurrencia entre momentos, que permite aplicar el método de los momentos para la estimación de los parámetros. Igualmente, es un problema la falta de resultados, como por ejemplo de fórmulas de sumación similares a las de Gauss para la función F_1. No obstante, este problema puede aliviarse mediante el cálculo de tales sumas por medio de programas de ordenador, lo que permite aplicar, por ejemplo, test de bondad de ajuste.

Esta es, a grandes rasgos, la estructura de este trabajo. No obstante, cada capítulo comienza con una introducción donde de manera más detallada se relacionan los objetivos concretos de cada uno de ellos, señalando los resultados más relevantes que se han obtenido.

2.- RESULTADOS BASICOS SOBRE EXTENSIONES DE SISTEMAS DE PEARSON DISCRETOS. FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS MULTIVARIANTES.

2.1 Introducción.

Este capítulo, en donde exponemos los principales resultados que vamos a emplear en el desarrollo del resto del trabajo, se encuentra dividido en dos secciones, cada una de las cuales responde a un tipo de proceso seguible para la extensión de los sistemas de Pearson discretos.

En la sección 2.2 presentamos una metodología de trabajo válida para la generalización de los resultados obtenidos por diversos autores, algunos de los cuales nos hemos referido en el capítulo anterior. Ahora, para comenzar, introduciremos las notaciones, terminología, conceptos y proposiciones que emplearemos posteriormente.

Estos resultados permiten la generalización de los sistemas de Pearson discretos. Comenzaremos con el caso univariante, en donde tal generalización se produce a partir de la ecuación en diferencias

$$G(r)\, f_{r+1} - L(r)\, f_r = 0 \qquad r\in\mathbb{Z}^{+}$$

donde

$$L : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$G : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

son funciones dadas, en principio cualesquiera.

Dentro de los resultados que enumeramos en esta sección y para este caso univariante, se tiene la caracterización de la ecuación en diferencias que pueden ser generadoras de distribuciones discretas. Esto nos permite clasificar las distribuciones pertenecientes al sistema a partir del estudio de las funciones empleadas como coeficientes de la ecuación en diferencias anteriormente citada, restringiéndonos en particular al caso, más estudiado, en que ambas funciones sean polinómicas.

Una vez encontrada la función de masa de probabilidad, y supuesto L y G polinomios en r y (r+1) respectivamente, se obtiene la expresión general de las ecuaciones diferenciales que verifican las principales funciones generatrices asociadas a una variable aleatoria discreta, como son la función generatriz de probabilidad; función generatriz de momentos; función generatriz de cumulantes y función característica.

Conocidas las funciones generatrices enunciaremos un teorema que nos permite obtener relaciones de recurrencia de momentos, válido para el cálculo de tales características poblacionales y que a su vez son útiles para el tratamiento inferencial, por proporcionar una vía de proponer estimadores para los parámetros por el método de los momentos, el más práctico en estos casos en los que la estimación por máxima verosimilitud encuentra grandes dificultades de obtención por la complejidad de los cálculos.

En 2.2.2 consideraremos resultados similares válidos para distribuciones bidimensionales de tipo discreto generadas por un sistema de dos ecuaciones en diferencias parciales. Comenzaremos exponiendo la condición necesaria que deben verificar las funciones coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias mencionado con anterioridad para que éste tenga solución, y obtendremos tal solución en el caso de que exista.

Restringiéndonos al caso de coeficientes polinomiales expondremos el sistema de ecuaciones diferenciales que verifican las funciones generatrices asociadas a la variable aleatoria bidimensional y las relaciones de recurrencia entre momentos respecto al origen, lo que permitirá la estimación de los parámetros por el método de los momentos.

La principal novedad respecto al caso univariante es, naturalmente, la existencia de las distribuciones marginales y condicionadas, las cuales pueden obtenerse y caracterizarse a partir de los coeficientes de la ecuación en diferencias, así como el estudio de la regresión, -particularizando al caso en que la curva de regresión sea una función racional- y correlación.

Seguidamente centraremos la atención en los resultados válidos para el caso multivariante. Éste es en todo similar al bidimensional. La diferencia fundamental aparece en el concepto de distribuciones condicionadas, que tiene una mayor riqueza aunque en esencia sea la misma. Lo mismo ocurre con las distribuciones marginales o con la regresión y correlación, en donde puede hablarse de casos dos a dos, múltiple o parcial.

En la sección 2.3 pasamos a enumerar los resultados básicos válidos para la segunda vía de trabajo que consiste en trabajar a partir de las funciones hipergeométricas. Por tanto en ella se definen, sitúan y relacionan tales funciones así como se describen sus principales propiedades.

Se parte de la Función hipergeométrica de Gauss y de sus principales propiedades para continuar con la exposición de las distintas generalizaciones que ha tenido esta función, tanto en el caso univariante como multivariante.

Entre las funciones de dos variables que generalizan la función de Gauss destacan las cuatro funciones encontradas en 1880 por Apell (APELL (1926); ELDERYI (1953, 1955); BAILEY (1935)) que fueron a su vez generalizadas a funciones de n variables por Lauricella (LAURICELLA (1893)), entre las que propuso 14 funciones hipergeométricas de tres variables. En el curso de nuevas investigaciones sobre estas 14 funciones hipergeométricas de Lauricella de tres variables, Srivastava advirtió la existencia de otras tres funciones hipergeométricas triples (SRIVASTAVA (1964); lo que da idea del número de posibles extensiones de la función de Gauss a n variables cuando n no sea un valor pequeño.

De todas las generalizaciones de la función hipergeométrica de Gauss es la función $F_D^{(n)}$ la que ha sido más estudiada y empleada como función generadora de distribuciones discretas de probabilidad. No obstante, a lo largo de este trabajo emplearemos otras funciones hipergeométricas bivariantes y multivariantes, en especial la función $F_B^{(n)}$ como generadora de distribuciones discretas bivariantes y multivariantes de probabilidad.

2.2 Algunos resultados básicos sobre sistemas de Pearson discretos multivariantes.

El primer camino para la generalización de los sistemas de Pearson en general es el variar los coeficientes polinomiales del sistema de ecuaciones en diferencias que deben verificar. Vamos a verlo dividido en tres casos, según el número de variables que intervienen:

2.2.1 Caso univariante:

Para el caso univariante, el sistema se reduce a:

$$G(r)\, f_{r+1} - L(r)\, f_r = 0 \qquad r\in\mathbb{Z}^+ \qquad (1)$$

donde

$$L : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$G : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

son funciones en principio cualesquiera, de modo que si L y G son polinomios en r, las funciones generatrices de probabilidad son series hipergeométricas (ORD (1967), HERRERIAS (1976),...); y si L y G pueden descomponerse como producto de monomios, las funciones de probabilidad son series de potencias generalizadas (PATIL

(1965), etc). Igualmente, en teoría, se pueden construir otras extensiones con L y G funciones no polinómicas[1].

Lo que hay que encontrar en este caso son las condiciones que deben verificar 2 funciones dadas, G y L, para que al solucionar la ecuación en diferencias de las que son coeficientes, el resultado dé una auténtica distribución de probabilidad.

Es conocido (por JORDAN (1965), GUELFOND (1963)) que la función

$$f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

solución de la ecuación en diferencias (1) viene dada por:

$$f_r = \begin{cases} f_0 \displaystyle\prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} & r \geq 1 \\ f_0 & r = 0 \end{cases} \tag{2}$$

con f_0 constante inicial distinta de cero. Y se demuestra (FAJARDO (1985)) que:

2.2.1.1 Teorema :

Sea el conjunto $H = \{ r \in \mathbb{Z}^+ \; ; \; L(r) = 0 \}$. La c.n.s. para que la función $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, solución de la ecuación en diferencias (1) sea función de probabilidad discreta, es que verifique las condiciones:

i) a) $L(r)\,G(r) > 0 \qquad \forall r \in \mathbb{Z}^+ \qquad$ si $H = \emptyset$

[1] Como, por ejemplo, funciones exponenciales. Ver 4.5.

b) $L(r)\ G(r) \geq 0 \qquad r = 0,1,\ldots,m$ si $H \neq \emptyset$ con $m = \min\{H\}$

ii) $$\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} < \infty$$

iii) $$f_0 = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)}}$$

El caso más estudiado es aquél en que las funciones L y G son polinomios. En tal caso se demuestra que la función generatriz de probabilidad asociada a la ecuación en diferencias (siempre que se verifiquen las condiciones del teorema anterior) es:

2.2.1.2 Teorema:

Si en la ecuación en diferencias (1) tomamos las funciones L y G como polinomios en r y r+1 respectivamente, y se verifican las condiciones dadas en el Teorema 1, entonces la función generatriz de probabilidad asociada a la solución de la ecuación en diferencias (1), g(t), verifica la ecuación diferencial:

$$G(\theta)\ g(t) \;-\; t\ L(\theta)\ g(t) \;-\; b_0 f_o = 0 \qquad (3)$$

para $|t|<1$; $\theta = t \dfrac{d}{dt}$; $\theta^0 = 1$ es el operador identidad y b_0 es el término independiente del polinomio G(r+1).

Una vez obtenida la ecuación diferencial anterior es inmediato encontrar la ecuación diferencial que verifica la función generatriz de momentos, función característica y función generatriz de cumulantes; así como encontrar una relación de recurrencia entre momentos respecto al origen $\alpha_{(r)}$ supuesto exista. Esto se refleja en el siguiente Corolario (FAJARDO,1985):

2.2.1.3 Corolario

Si g(t) verifica la ecuación diferencial dada en (4), entonces:

a) La función generatriz de momentos respecto al origen,

$$\Psi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r e^{tr}$$

verifica la siguiente ecuación diferencial:

$$G[D]\Psi(t) - e^{t}L[D]\Psi(t) - b_0 f_0 = 0$$

con $D = \dfrac{d}{d(t)}$

b) La función característica, $\Phi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r e^{itr}$ verifica:

$$G[\theta_1]\Phi(t) - e^{it}L[\theta_1]\Phi(t) - b_0 f_0 = 0$$

con $\theta_1 = \dfrac{1}{i} D$

c) La función generatriz de cumulantes, $k(t) = \ln\Phi(t)$, verifica la ecuación diferencial:

$$G[\theta_1]e^{k(t)} - e^{it}L[\theta_1]e^{k(t)} - b_0 f_0 = 0$$

A partir de estas funciones se pueden establecer los momentos y cumulantes, si existen las derivadas y son finitas en t=1 para la f.g.p.; y en t=0 para las restantes. Para ello, se describen los momentos a través de los operadores D, θ, θ_1 (JORDAN, 1965). Así, el momento respecto al origen de orden r, $\alpha_{(r)}$ es, si existe:

$$\alpha_{(r)} = \left[\theta^r g(t) \right]_{/t=1} = \left[D^r \Psi(t) \right]_{/t=0} = \left[\theta_1^r \Phi(t) \right]_{/t=0}$$

y se obtiene la siguiente ecuación en recurrencias (FAJARDO, 1985):

2.2.1.4 Teorema:

Si en la ecuación en diferencias (1) tomamos las funciones L y G como polinomios en r y r+1 respectivamente, se verifican las condiciones del Teorema 1 y existe el momento respecto al origen de orden k, $\alpha_{(k)}$, con $k \geq q$ (orden de G); entonces los momentos respecto al origen $\alpha_{(r)}$, $r \leq k$, verifican la relación de recurrencias:

$$\sum_{j=0}^{q} b_j \alpha_{(j+h)} = \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \alpha_{(i+m)} \right) + \sum_{j=0}^{q} b_j \theta^{i+h} (f_0)_{/t=1}$$

para h = 0,1,2,...,k-q [2].

(Si f_r es de rango finito, se verifica para todo h∈ℕ).

A partir de tales relaciones en recurrencias, es posible estimar los parámetros de la distribución perteneciente al sistema por el método de los momentos; es decir, considerando tantas relaciones como parámetros debamos estimar, de forma que que dichos momentos existan y sean finitos y que el sistema sea compatible y

[2] Si $b_0 = 0$ la relación anterior será de momentos, si es distinto es además de probabilidad f_0

determinado. Resolviendo el sistema, despejando los parámetros en función de los momentos poblacionales, y luego sustituyendo éstos por los muestrales, podemos obtener la estimación.

Aún cuando este método tiene grandes limitaciones en cuanto a la eficiencia del estimador, es el mejor a emplear en este caso ya que el método de máxima verosimilitud implica un enorme dificultad de cálculo, lo que lo hace impracticable. Sin embargo, parte de los inconvenientes del método de los momentos pueden evitarse tomando muestras de tamaño muy elevado. GUERLAND (1977) no obstante estudia en familias discretas el método de la mínima χ^2 como alternativo al de máxima verosimilitud, empleando la eficiencia relativa asintótica para estudiar el comportamiento de los estimadores.

Por último para estudiar la exactitud del ajuste, se puede usar el test χ^2 de bondad de ajuste.

2.2.2 Caso bidimensional.

El siguiente paso natural en el camino de la extensión de los sistemas de Pearson es el incrementar el número de variables, primero a dos y luego a n. Esta parada en el caso bidimensional permite estudiar una serie de propiedades, como la regresión y el condicionamiento, que no existían en el caso univariante y que son fácilmente generalizables al caso multivariante. Por otra parte, esta extensión es, en múltiples aspectos, formalmente semejante al caso univariante. Vamos seguidamente a resumir los principales resultados en este caso:

Partimos ahora de 2 ecuaciones en diferencias parciales, de la forma:

$$\begin{aligned} G(r,s)\, f_{r+1,s} - L(r,s)\, f_{r,s} &= 0 \\ H(r,s)\, f_{r,s+1} - N(r,s)\, f_{r,s} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} L,N &: \mathbb{Z}^{+}\times \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R} \\ G,H &: \mathbb{Z}^{+}\times \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

siendo $f: \mathbb{Z}^{+}\times \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función incógnita.

La condición necesaria para que la función f anterior sea solución del sistema es que verifique:

$$\frac{L(r,s+1)}{G(r,s+1)}\ \frac{N(r,s)}{H(r,s)} = \frac{N(r+1,s)}{H(r+1,s)}\ \frac{L(r,s)}{G(r,s)} \qquad (2)$$

$\forall r,s \in \mathbb{Z}^{+}$ tal que $f_{r,s} \neq 0$

2.2.2.1 Teorema:

Si la función $f: \mathbb{Z}^{+}\times \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución del sistema (1), entonces dicha función puede escribirse de la forma:

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \dfrac{L(t,s)}{G(t,s)}\ \dfrac{N(0,t')}{H(0,t')} & r,s \geq 1 \\ f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \dfrac{L(t,0)}{G(t,0)} & r \geq 1 \quad s = 0 \\ f_{0,0} \prod_{t'=0}^{s-1} \dfrac{N(0,t')}{H(0,t')} & r = 0 \quad s \geq 1 \\ f_{0,0} & r = 0 \quad s = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

fijada $f_{0,0}$ para que sea distinta de cero.

2.2.2.2 Teorema:

Si : $f:\mathbb{Z}^{+}x\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función dada en (3), donde

$$L,N:\mathbb{Z}^{+}x\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R};$$
$$G,H:\mathbb{Z}^{+}x\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

son funciones dadas que verifican la condición (2), entonces f satisface el sistema (1).

Para que la solución sea distribución de probabilidad es preciso que verifique otras condiciones, como que

$$\sum_{r}\sum_{s} f_{r,s} = 1 \ ; \ f_{r,s} \geq 0 \quad \forall\ r,s$$

eso se resume en el siguiente teorema:

2.2.2.3 Teorema.

Sea el conjunto

$$\mathcal{H} = \{\ r,s \in \mathbb{Z}^{+}x\ \mathbb{Z}^{+}\ ;\ f_{r,s} \neq 0\ \}$$

La condición necesaria y suficiente para que

$$f:\mathbb{Z}^{+}x\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sea solución del sistema (1) dada en (3) sea una función de masa de probabilidad es que verifique las siguientes condiciones:

a) Condición de positividad

$$L(r,s)G(r,s) \geq 0 \qquad \forall\ r,s \in \mathcal{H} \qquad (4)$$
$$N(r,s)H(r,s) \geq 0$$

b) Condición de convergencia:

$$\sum_{\substack{r=0 \\ r,s\in\mathcal{H}}}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)} \frac{N(0,t')}{H(0,t')} < \infty \qquad (5)$$

c) Condición de normalidad:

$$f_{0,0} = \frac{1}{1 + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)} \frac{N(0,t')}{H(0,t')}} \qquad (6)$$

$\mathcal{H}$, $r + s \neq 0$

Estos resultados son válidos para cualesquiera funciones L, G, N, H que verifiquen las condiciones convenientes. Sin embargo el estudio se ha centrado más en el caso que sean polinomios en las variables r,s; ya que entonces se pueden caracterizar la función generatriz de probabilidad y de momentos, así como la función característica de la f.m.p. solución del sistema (1) a través de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que verifican.

2.2.2.4 Teorema:

Sean las funciones L, N polinomios en las variables (r,s); G polinomio en (r+1, s) y H polinomio en (r, s+1) ,de órdenes cualesquiera y tal que verifiquen las condiciones dadas en el teorema 3 para que la solución del sistema (1) sea una función de probabilidad. Entonces su f.g.p. $g(t_1,t_2)$ verifica el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} G(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_1L(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) &= G(\theta_1,\theta_2)\left(\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}t_2^s\right) \\ H(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) - t_2N(\theta_1,\theta_2)g(t_1,t_2) &= H(\theta_1,\theta_2)\left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r\right) \end{aligned} \qquad (7)$$

para $|t_1|<1$; $|t_2|<1$; $\theta_i = \frac{\delta}{\delta t}$; $i= (1,2)$

2.2.2.5 Corolario:

Si $g(t_1,t_2)$ verifica (7), entonces:

a) La función generatriz de momentos respecto al origen,

$$\Psi(t_1,t_2) = \sum_r \sum_s f_{r,s}\, e^{t_1r + t_2s}$$

verifica:

$$\begin{aligned} G(D_1,D_2)\Psi(t_1,t_2) - e^{t_1}L(D_1,D_2)\Psi(t_1,t_2) &= G(D_1,D_2)\left(\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{t_2s}\right) \\ H(D_1,D_2)\Psi(t_1,t_2) - e^{t_2}N(D_1,D_2)\Psi(t_1,t_2) &= H(D_1,D_2)\left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}e^{t_1r}\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

con $D_i = \frac{\delta}{\delta t_i}$, $i=\{1,2\}$

b) La función característica $\phi(t_1,t_2) =\sum_r \sum_s f_{r,s}\, e^{i(t_1r+t_2s)}$

verifica:

$$\begin{aligned} G(\theta'_1,\theta'_2)\Phi(t_1,t_2) - e^{it_1}L(\theta'_1,\theta'_2)\Phi(t_1,t_2) &= G(\theta'_1,\theta'_2)\left(\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}e^{it_2s}\right) \\ H(\theta'_1,\theta'_2)\Phi(t_1,t_2) - e^{it_2}N(\theta'_1,\theta'_2)\Phi(t_1,t_2) &= H(\theta'_1,\theta'_2)\left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}e^{it_1r}\right) \end{aligned} \qquad (9)$$

con $\theta'_j = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta t_j}$; $j=1,2.$

A partir de aquí pueden obtenerse los momentos respecto al origen de orden r,s, $\alpha_{(r,s)}$ por derivación de cualquiera de las funciones anteriores, para $t_i=1$ en el caso de la f.g.p. y para $t_i=0$ en las otras; siempre que existan dichas derivadas y sean finitas. Así, a través de los operadores D_i, θ_i, θ'_i se pueden definir los momentos de la forma:

$$\alpha_{(r,s)} = \Big[\theta_1\theta_2 g(t_1,t_2)\Big]_{\substack{t_1=1\\t_2=1}} = \Big[D_1D_2\Psi(t_1,t_2)\Big]_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \Big[\theta'_1\theta'_2\Phi(t_1,t_2)\Big]_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}$$

lo que permite obtener la siguiente relación de recurrencia:

2.2.2.6 Teorema:

En las condiciones dadas para L, N, G, H en el teorema (4) y si existen los momentos respecto al origen $\alpha_{(r,s)}$ de cualquier orden r,s; entonces éstos verifican:

$$\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(k_1+f)(k_2+m)}\right] -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1,i_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\alpha_{(i_1+h)(i_2+m)}\right] =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\theta_1^{(k_1+f)}\theta_2^{(k_2+m)}\left(\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}t_2^s\right)\right]_{\substack{t_1=1\\t_2=1}}$$

$$\sum_{l_1=0}^{q_1}\sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(l_1+h)(l_2+g)}\right] -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{h_1} \sum_{j_2=0}^{h_2} c_{j_1,j_2} \left[\sum_{h=0}^{f} \sum_{m=0}^{g} \binom{f}{h} \binom{g}{m} \alpha_{(j_1+h)(j_2+m)} \right] =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2} \left[\sum_{h=0}^{f} \binom{f}{h} \theta_1^{(l_1+h)} \theta_2^{(l_2+g)} \left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0} t_1^r \right) \right]_{\substack{t_1=1 \\ t_2=1}}$$

para $f,g \in \mathbb{Z}^+$, y siendo:

$$L(r,s) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1,i_2} r^{i_1} s^{i_2} \qquad a_{i_1,i_2} \in \mathbb{R};\ a_{m,m_2} \neq 0$$

$$N(r,s) = \sum_{j_1=0}^{h_1} \sum_{j_2=0}^{h_2} c_{j_1,j_2} r^{j_1} s^{j_2} \qquad c_{j_1,j_2} \in \mathbb{R};\ c_{h_1,h_2} \neq 0$$

$$G(r,s) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2} (r+1)^{k_1} s^{k_2} \qquad b_{k_1,k_2} \in \mathbb{R};\ b_{p_1,p_2} \neq 0$$

$$H(r,s) = \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2} r^{l_1} (s+1)^{l_2} \qquad d_{l_1,l_2} \in \mathbb{R};\ d_{q_1,q_2} \neq 0$$

De forma análoga al caso univariante, la estimación de los parámetros puede hacerse por el método de los momentos. Para ello basta considerar un sistema lineal formado por tantas relaciones de recurrencia independientes entre momentos como parámetros tenga la distribución, siempre que los momentos existan y sean finitos, y el sistema lineal sea compatible y determinado.

La principal novedad que presentan estos sistemas bivariantes es que en ellos se pueden estudiar las funciones de masa de probabilidad condicionadas y marginales, que pasan a ser funciones univariantes estudiables por los resultados del caso anterior. También es aplicable una versión para el caso discreto del teorema de Steyn (1957) de caracterización de líneas de regresión racionales a partir de las ecuaciones diferenciales que verifican las funciones generatrices de momentos. Estos resultados son:

2.2.2.7 Teorema:

Si la función de probabilidad $f_{r,s}$ solución del sistema (1) se puede escribir como producto de sus probabilidades condicionadas por sus correspondientes marginales, es decir:

$$f_{r,s} = f_{r/s}\, f_s \qquad \text{y} \qquad f_{r,s} = f_{s/r}\, f_r$$

entonces:

a) Las funciones de probabilidad condicionadas verifican las ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)f_{r+1/s} - L(r,s)\, f_{r/s} = 0 \qquad \text{si } f_s > 0$$

$$H(r,s)f_{s+1/r} - N(r,s)\, f_{s/r} = 0 \qquad \text{si } f_r > 0$$

respectivamente.

b) Calculadas las anteriores, sus funciones de probabilidad marginales verifican las ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)f_{s/r+1}\, f_{r+1} - L(r,s)\, f_{s/r}\, f_r = 0$$

$$H(r,s)f_{r/s+1}\, f_{s+1} - N(r,s)\, f_{r/s}\, f_s = 0$$

2.2.2.8 Corolario:

Si L, N, G, H son los polinomios definidos en el teorema 4 entonces las funciones generatrices de probabilidad condicionada $g_{r/s}(t_1)$ y $g_{s/r}(t_2)$, verifican las ecuaciones diferenciales:

$$G(\theta_1,s)g_{r/s}(t_1) - t_1L(\theta_1,s)g_{r/s}(t_1) = G(\theta_1,s)f_{0/s}$$

$$H(r,\theta_2)g_{s/r}(t_2) - t_2N(r,\theta_2)g_{s/r}(t_2) = H(r,\theta_2)f_{0/r}$$

para $|t_1|<1$; $|t_2|<1$, $\theta_i = t_i \frac{\delta}{\delta t_i}$; i = 1,2 respectivamente

2.2.2.9 Teorema:

Sea $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ la v.a. discreta bidimensional cuya distribución de probabilidad asociada $f_{r,s}$ es solución del sistema (1). Entonces, la c.n.s. para que la línea de regresión de la v.a. ξ_1 sobre ξ_2, cuando $\xi_2 = s$, sea una función racional en s, es decir:

$$\hat{\xi}_1 = \frac{Q(s)}{R(s)}$$

es que la f.g.p condicionada de $\xi_{1/\xi_2=s}$, $g_{r/s}(t_1)$, verifique:

$$\theta_1\ R(s)\ g_{r/s}(t_1)\ /_{t_1=1} = Q(s)\ g_{r/s}(t_1)/_{t_1=1}$$

siempre que dicha derivada exista y sea finita.

Análogamente, para $\hat{\xi}_1 = \frac{Q(r)}{R(r)}$ se tendrá:

$$\theta_2\ R(r)\ g_{s/r}(t_2)\ /_{t_2=1} = Q(r)\ g_{s/r}(t_2)/_{t_2=1}$$

2.2.2.10 Corolario:

En las condiciones del teorema anterior, la c.n.s para que la línea de regresión de ξ_1 sobre ξ_2 con ξ_2 = s sea una función racional en s, es que la f.g.p. conjunta $g(t_1,t_2)$, verifique:

$$\theta_1 \, R(\theta_2) \, g(t_1,t_2)/_{t_1=1} = Q(\theta_2) \, g(t_1,t_2)/_{t_1=1}$$

siempre que dichas derivadas existan y sean finitas.

Análogamente, para ξ_2 sobre ξ_1 cuando ξ_1= r, es:

$$\theta_2 \, R(\theta_1) \, g(t_1,t_2)/_{t_2=1} = Q(\theta_1) \, g(t_1,t_2)/_{t_2=1}$$

siempre que dichas derivadas existan y sean finitas.

2.2.3 CASO N-DIMENSIONAL.

Este caso es prácticamente similar en todo al caso bivariante, y en esencia, no se produce ninguna modificación importante en los resultados vistos, salvo que ahora habrá sistemas de ecuaciones mayores. Lo más destacable es la aparición de una mayor cantidad de posibles distribuciones marginales y condicionadas, según el número de variables que consideremos o a las que condicionemos. Igualmente, el concepto de línea de regresión se generaliza a superficies de regresión, mientras que el concepto de regresión lineal se traduce en hiperplanos de regresión. También se enriquece el concepto de correlación, que ahora puede ser múltiple o parcial.

La extensión se produce pasando a un sistema de n ecuaciones en diferencias parciales

$$G_i(r_1, \ldots, r_n) f_{r_1,\ldots,r_i+1,\ldots,r_n} - L_i(r_1,\ldots,r_n) f_{r_1,\ldots,r_i,\ldots r_n} = 0 \quad (1)$$

donde

$$L_i : (\mathbb{Z}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G_i : (\mathbb{Z}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

son funciones dadas, con i=1,2,...,n.

2.2.3.1 Proposición:

Las condiciones necesarias para que la función $f:(\mathbb{Z}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sea solución del sistema (1) es que las funciones L_i y G_i verifiquen las igualdades:

$$E_{r_i}\left[E_{r_j}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right)\right] = E_{r_j}\left[E_{r_i}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right)\right] \qquad i\neq j=\{1,\ldots,n\}$$

$$E_{r_i}\left[E_{r_j}\left[E_{r_k}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right)\right]\right] = E_{r_j}\left[E_{r_i}\left[E_{r_k}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right)\right]\right] =$$

$$=E_{r_k}\left[E_{r_j}\left[E_{r_i}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right)\right]\right] \qquad i\neq j\neq k=\{1,\ldots,n\}$$

....

....

$$E_{r_1}\left[E_{r_2} \ldots \left[E_{r_n}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right) \right]\ldots\right] = \ldots\ldots =$$

$$=E_{r_n}\left[E_{r_{n-1}} \ldots \left[E_{r_1}\left(f_{r_1,\ldots,r_n}\right) \right]\ldots\right]$$

$$f_{r_1,\ldots,r_n} \neq 0$$

2.2.3.2 Teorema.

Si la función $f : (\mathbb{Z}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución del sistema (1), entonces f puede escribirse:

$$f_{r_1,\ldots,r_n} = f_{0,\ldots,0} \prod_{t_1=0}^{r_1-1} \frac{L_1(t_1,r_2,\ldots,r_n)}{G_1(t_1,r_2,\ldots,r_n)} \cdots$$

$$\prod_{t_i=0}^{r_i-1} \frac{L_i(0,\ldots,0,t_i,\ldots,r_n)}{G_i(0,\ldots,0,t_i,\ldots,r_n)} \cdots\cdots \prod_{t_n=0}^{r_n-1} \frac{L_n(0,\ldots,0,t_n)}{G_n(0,\ldots,0,t_n)} \qquad (2)$$

para $r_i \geq 1$, $i=1,\ldots,n$.

Por comodidad de notación indicaremos que si algún $r_i=0$, entonces:

$$\prod_{t_i=0}^{r_i-1} \frac{L_i(0,\ldots,0,t_i,\ldots,r_n)}{G_i(0,\ldots,0,t_i,\ldots,r_n)} = 1$$

2.2.3.3 Teorema:

Si la función $f : (\mathbb{Z}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por (2), con L_i, G_i verificando las condiciones dadas en la proposición 4.1.3.1, entonces la función f satisface el sistema (1).

2.2.3.4 Teorema:

Sea

$$H = \left\{ (r_1,\ldots,r_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n \ / \ f_{r_1,\ldots,r_n} \neq 0 \right\}$$

La c.n.s. para que la función f : $(\mathbb{Z}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}$, solución del sistema (1) dado en (2) sea una solución de probabilidad multivariante discreta, es que se verifique:

i) Condición de positividad:

$$L_i(r_1,\ldots,r_n)\,G_i(r_1,\ldots,r_n) \geq 0, \qquad (r_1,\ldots,r_n)\in H$$

ii) Condición de convergencia:

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{t_1=0}^{r_1-1}\cdots\prod_{t_n=0}^{r_n-1}\frac{L_1(t_1,r_2,\ldots,r_n)}{G_1(t_1,r_2,\ldots,r_n)}\cdots\frac{L_n(0,\ldots,0,t_n)}{G_n(0,\ldots,0,t_n)} < \infty$$

$$r_1+\ldots+r_n\neq 0;\quad (r_1,\ldots,r_n)\in H$$

iii) Condición de normalización:

$$f_{0,\ldots,0}=\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{t_1=0}^{r_1-1}\cdots\prod_{t_n=0}^{r_n-1}\frac{L_1(t_1,\ldots,r_n)}{G_1(t_1,\ldots,r_n)}\cdots\frac{L_n(0,\ldots,0,t_n)}{G_n(0,\ldots,0,t_n)}}$$

Si las funciones $L_i(r_1,\ldots,r_n)$, $G_i(r_1,\ldots,r_n)$ $i=1,\ldots n$ son polinomios en $r_1,\ldots,r_n$, entonces las funciones generatrices de probabilidad pueden ser caracterizadas a partir de las ecuaciones en derivadas parciales que satisfacen

2.2.3.5. Teorema:

Si $g(t_1,\ldots,t_n)$ es la función generatriz de probabilidad de la función f solución del sistema (1), y si los L_i, G_i son polinomios en $(r_1,\dots,r_i,\dots r_n)$ y $(r_1,\dots,r_i+1,\dots r_n)$ respectivamente, para $i=1,\dots,n$; entonces $g(t_1,\dots,t_n)$ verifica el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$G_i\left[\theta_1,\dots,\theta_n\right]g(t_1,\dots,t_n) - t_i L_i\left[\theta_1,\dots,\theta_n\right]g(t_1,\dots,t_n) =$$

$$= G_i\left[\theta_1,\dots,\theta_n\right]\left[\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{i-1}=0}^{\infty}\ \sum_{r_{i+1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} f_{r_1,\dots,r_{i-1},0,r_{i+1},\dots,r_n}\right.$$

$$\left. t_1^{r_1},\dots,t_{i-1}^{r_{i-1}},t_{i+1}^{r_{i+1}},\dots,t_n^{r_n}\right]$$

con $|t_i| <1$, y $\theta_i = \dfrac{\partial}{\partial t_i}$.

De forma análoga a lo visto en 2.2.2 pueden definirse los momentos factoriales, así como los momentos con respecto al origen. Se define el momento con respecto al origen de orden $(r_1,\dots.r_n)$, que denotaremos $\alpha_{(r_1,\dots,r_i,\dots r_n)}$, como:

$$\alpha_{(r_1,\dots,r_i,\dots r_n)} = \left\{\left[\theta_1^{r_1}, \ \dots \ ,\theta_n^{r_n}\right]g(t_1,\dots,t_n)\right\} \Big/ \ t_i= 1$$

siempre que las derivadas existan y sean finitas en el punto $t_i= 1$ con $i=1,\dots,n$.

Igualmente se puede definir el momento con respecto al origen a partir de la función generatriz de momentos:

$$\alpha_{(r_1,\dots,r_i,\dots r_n)} = \left\{\left[D_1^{r_1}, \ \dots \ ,D_n^{r_n}\right]\psi(t_1,\dots,t_n)\right\} \Big/ \ t_i= 0$$

siempre que las derivadas existan y sean finitas en el punto $t_i = 0$ con $i=1,\ldots,n$.

Si nos referimos a la función generatriz de cumulantes, el momento con respecto al origen de orden $(r_1,\ldots,r_i,\ldots r_n)$ se define como:

$$\alpha_{(r_1,\ldots,r_i,\ldots r_n)} = \left\{ \left[\theta_1^{r_1}, \ \ldots \ ,\theta_n^{r_n} \right] \phi(t_1,\ldots,t_n) \right\} \Big/ \ t_i = 0$$

siempre que las derivadas existan y sean finitas en el punto $t_i = 0$ con $i=1,\ldots,n$.

De forma análoga al caso bivariante podemos establecer relaciones de recurrencia entre momentos siempre que éstos existan, lo que nos permite encontrar una estimación de los parámetros por el método de los momentos.

A partir del estudio del sistema (1) pueden ser calculadas las funciones de probabilidad condicionadas, así como las ecuaciones diferenciales que verifican sus funciones generatrices de probabilidad y superficies de regresión si son racionales. De esta manera el conocimiento de las probabilidades condicionadas nos permite calcular las funciones marginales a partir del sistema (1).

2.2.3.6. Teorema:

Si la función de probabilidad solución del sistema (1), puede escribirse como producto de una condicionada por su marginal correspondiente de la forma:

$$f_{r_1,\dots,r_n} = f_{r_1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n} \, f_{r_{k+1},\dots,r_n}$$

con $1 \le k \le n-1$, entonces se tiene:

a) La función de probabilidad condicionada verifica el sistema de ecuaciones parciales:

$$G_i(r_1,\dots,r_n) f_{r_1,\dots r_i+1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n} -$$

$$- L_i(r_1,\dots,r_n) f_{r_1,\dots r_i,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n} = 0$$

para $i=1,\dots,k$ y $f_{r_{k+1},\dots,r_n} > 0$.

b) Calculadas las condicionales, las funciones de probabilidad marginales verifican el sistema de ecuaciones en diferencias:

$$G_j(r_1,\dots,r_n) f_{r_1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_j+1,\dots,r_n} \, f_{r_{k+1},\dots,r_j+1,\dots,r_n} -$$

$$- L_i(r_1,\dots,r_n) f_{r_1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_j,\dots,r_n} \, f_{r_{k+1},\dots,r_j,\dots,r_n} = 0$$

con $j = k+1,\dots,n$.

2.2.3.7. Corolario:

Si las funciones L_i, G_i, $i=1,\dots,k$ son polinomios en las variables $(r_1,\dots,r_i,\dots r_n)$ y $(r_1,\dots,r_i+1,\dots r_n)$ respectivamente entonces las funciones generatrices de probabilidad condicionadas

$$g_{r_1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n}(t_1,\dots,t_k)$$

verifican el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$G_i(\theta_1,\dots,\theta_k,r_{k+1},\dots,r_n)g_{r_1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n}(t_1,\dots,t_k) -$$

$$- t_i L_i(\theta_1,\dots,\theta_k,r_{k+1},\dots,r_n)g_{r_1,\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n}(t_1,\dots,t_k) =$$

$$= G_i(\theta_1,\dots,\theta_k,r_{k+1},\dots,r_n)\left[\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_{i-1}=0}^{\infty}\sum_{r_{i+1}=0}^{\infty}\dots\right.$$

$$\left.\dots\sum_{r_k=0}^{\infty} f_{r_1,\dots,r_{i-1},0,r_{i+1},\dots,r_k / r_{k+1},\dots,r_n} t_1^{r_1},\dots,t_{i-1}^{r_{i-1}},t_{i+1}^{r_{i+1}},\dots,t_k^{r_k}\right]$$

para $|t_i|<1$, $\theta_i = t_i \dfrac{\partial}{\partial t_i}$, $i = 1,\dots,k$

2.2.3.8. Corolario:

Si la función de probabilidad solución del sistema (1) puede escribirse de la forma:

$$f_{r_1,\dots,r_n} = f_{r_1} f_{r_2 / r_1} \dots f_{r_{n-1} / r_1,\dots,r_{n-2}} f_{r_n / r_1,\dots,r_{n-1}}$$

entonces cada función producto verifica la ecuación en diferencias:

$$G_1(r_1,\dots,r_n)f_{r_1+1}f_{r_2/_{r_1+1}}\dots f_{r_n/_{r_1+1\dots r_{n-1}}} -$$
$$- L_1(r_1,\dots,r_n)f_{r_1}f_{r_2/_{r_1}}\dots f_{r_n/_{r_1,\dots,r_{n-1}}} = 0$$

$$G_2(r_1,\dots,r_n)f_{r_2+1/_{r_1}}\dots f_{r_n/_{r_1,r_2+1\dots r_{n-1}}} -$$
$$- L_1(r_1,\dots,r_n)f_{r_2/_{r_1}}\dots f_{r_n/_{r_1,\dots,r_{n-1}}} = 0 \qquad (f_{r_1}>0)$$

....

$$G_n(r_1,\dots,r_n)\, f_{r_n+1/_{r_1,\dots,r_{n-1}}} - L_1(r_1,\dots,r_n).f_{r_n/_{r_1,\dots,r_{n-1}}} = 0$$

$$\text{si } f_{r_1,\dots,r_{n-1}} > 0.$$

y pueden calcularse recursivamente.

2.2.3.9. Teorema:

Sea $(\xi_1, \dots , \xi_n)$ la v.a. discreta n-dimensional cuya función de probabilidad asociada es solución del sistema (1). Entonces la c.n.s. para que las superficies de regresión de la v.a. ξ_i sobre $(\xi_1,\dots,\xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots \xi_n)$ cuando $\xi_j = r_j$ $j\neq i$ sea una función racional en $(r_1,\dots,r_{i-1}, r_{i+1}, \dots r_n)$; es decir:

$$\hat{\xi}_i = \frac{Q(r_1,\dots,r_{i-1}, r_{i+1}, \dots r_n)}{R(r_1,\dots,r_{i-1}, r_{i+1}, \dots r_n)}$$

es que la función generatriz de probabilidad condicionada correspondiente verifique la igualdad:

$$\theta_i R(r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots r_n) g_{r_i/r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots r_n}(t_i)/_{t_i=1} =$$

$$= Q(r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots r_n) g_{r_i/r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots r_n}(t_i)/_{t_i=1}$$

siempre que exista dicha derivada y sea finita para $t_i = 1$, con i variando de 1 hasta n.

2.2.3.10. Corolario:

En las condiciones del teorema anterior, la c.n.s. para que la superficie de regresión de ξ_i respecto a las restantes componentes sea una función racional,

$$\hat{\xi}_i = \frac{Q(r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots r_n)}{R(r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots r_n)}$$

es que la función generatriz de probabilidad conjunta verifique la igualdad:

$$\theta_i R(\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_{i+1},\ldots\theta_n) g(t_1,\ldots,t_n)/_{t_i=1} =$$

$$= Q(\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_{i+1},\ldots\theta_n)\ g(t_1,\ldots,t_n)/_{t_i=1}$$

siempre que existan dichas derivadas y sean finitas para $t_i = 1$, con i variando de 1 hasta n, y

$$\theta_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i}$$

2.3. Extensión de los sistemas de Pearson discretos vía generalización de las funciones hipergeométricas.

Otra posible extensión del sistema de Pearson consiste en trabajar directamente sobre las funciones hipergeométricas y sus extensiones, convirtiéndolas en funciones generatrices de probabilidad. Por este camino, se parte de la función ${}_2F_1$ de Gauss, y se continúa mediante las extensiones de esta función, tanto univariantes como multivariantes. Vamos a resumir las propiedades principales de estas funciones.

2.3.1 FUNCION HIPERGEOMÉTRICA DE GAUSS.

Se define la función hipergeométrica de Gauss como:

$$ {}_2F_1\ (\alpha,\beta,\gamma;\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n\ (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad (1)$$

con $z \in \mathbb{C}$; $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$; y $(a)_n$ es el símbolo de Pochhamer o coeficiente hipergeométrico, donde

$$(a)_n = a(a + 1)\ldots(a + n - 1)$$
$$(a)_0 = 1$$

y dado que esta serie se reduce a la serie geométrica elemental

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots$$

en determinados casos (con $\alpha = \gamma$, $\beta = 1$; ó $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$); se llama *serie* o *función hipergeométrica.* Con más propiedad se denomina función hipergeométrica de Gauss desde que el matemático alemán Carl Fiedrich Gauss (1777-1855) la estudió en el año 1812.

Esta función hipergeométrica verifica la ecuación diferencial:

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\right]\frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0 \qquad (2)$$

o, equivalentemente:

$$\left[\theta(\theta + \gamma - 1) - z(\theta + \alpha)(\theta + \beta)\right]w = 0 \qquad (3)$$

en donde $\theta = z\dfrac{d^2}{dz}$.

Aplicando el criterio de la razón de D'Alembert se observa que la función hipergeométrica de Gauss converge absolutamente si $|z|<1$, (supuesto $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$) ; diverge si $|z|>1$; y por otros criterios, si $|z|=1$ es:

a) absolutamente convergente si $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$.
b) condicionalmente convergente si $-1<\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)\leq 0$; $z\neq 1$
c) divergente si $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) \leq -1$.

(si α ó β son enteros negativos la discusión de la convergencia no tiene sentido ya que la serie se reduce a un polinomio).

Por el teorema de sumación de Gauss:

$$ {}_2F_1\ (\alpha,\beta,\gamma;\ 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (4) $$

$$ \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0 $$

Un caso especial de (4) ocurre si un parámetro del numerador es entero negativo, -n. En ese caso:

$$ {}_2F_1\ (-n\ ,\ \beta,\ \gamma,\ 1) = \frac{(\gamma - \beta)_n}{(\gamma)_n} \qquad \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ \gamma \neq 0,-1,-2... \end{array} $$

2.3.1.2 Extensión analítica de ${}_2F_1$.

Ya hemos dicho que esta serie hipergeométrica converge absolutamente si $|z|<1$ y así, ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ es analítica en $|z|<1$ ($\gamma \neq 0,-1,-2,...$). Esta función es la llamada función hipergeométrica de Gauss. Sin embargo, ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ puede extenderse analíticamente fuera del círculo unidad de varias formas, una de las cuales es la *Transformación integral de Euler:*

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\ (1-zt)^{-\beta}\ dt \qquad (5) $$

$$ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \\ |\arg(1-z)| < \pi \end{array} $$

ó

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt \qquad (6) $$

$Re(\gamma) > Re(\beta) > 0$

$|arg(1-z)| < \pi$

(ya que ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = {}_2F_1(\beta,\alpha,\gamma,z)$).

Ambas integrales definen funciones analíticas de z univaluadas en el dominio $|arg(-z)| < \pi$; es decir, en todo $\mathbb{C}$ a excepción de los puntos del eje real no negativo. Dado que la función de Gauss ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ está definida en el interior del círculo unidad (incluyendo los puntos del eje real no negativo de 0 a $1-\varepsilon$, con ε arbitrariamente pequeño), podemos usar (1) y (5) ó (6) para realizar la extensión analítica de la función hipergeométrica a todo $\mathbb{C}$, salvo el semieje real de $z=1$ a $z=\infty$. Esta extensión analítica de ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ se conviene en notarla del mismo modo.

2.3.1.3 Transformaciones de Euler.

Las transformaciones lineales de las funciones hipergeométricas de la forma ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ denominadas *Transformaciones de Euler* son:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}) \qquad (7) $$

$\gamma \neq 0,-1,-2...$

$|arg(1-z)| < \pi$

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{-\beta}\ {}_2F_1(\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}) \qquad (8) $$

$\gamma \neq 0,-1,-2...$

$|arg(1-z)| < \pi$

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,z) \tag{9}$$

$\gamma \neq 0,-1,\ldots$

$|\arg(1-z)| \quad \pi$

Para probar las dos primeras basta hacer t=1-s en las representaciones integrales de Euler (5) y (6). La última se obtiene realizando las dos primeras sucesivamente.

2.3.1.4 Ecuación diferencial de Kummer

Si en la ecuación hipergeométrica de Gauss (2) sustituimos z por z/β, la ecuación resultante tendrá 3 singularidades para z=0, $z=\beta$ y $z=\infty$. Si hacemos tender $|\beta| \longrightarrow \infty$ la ecuación se reduce a:

$$ z\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\gamma - z\right]\frac{dw}{dz} - \alpha w = 0 \tag{10}$$

o equivalentemente a:

$$ \left[\theta(\theta + \gamma - 1) - z(\theta + \alpha)\right]w = 0 \tag{11}$$

con $\theta = z\dfrac{d}{dz}$.

Cualquiera de estas ecuaciones tiene una singularidad regular en z=0 y otra no regular en $z=\infty$, que se forma por la confluencia de 2 singularidades regulares en $z=\beta$ y $z=\infty$ de la ecuación (2) cuando z se sustituye por z/β. Por esto a (10) ó (11) se denominan *Ecuación hipergeométrica confluente,* o *Ecuación diferencial de Kummer*.

La solución más sencilla es la *Función de Kummer:*

$$ {}_1F_1\,(\alpha,\gamma;\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\,\frac{z^n}{n!} \tag{12}$$

$$\gamma \neq 0,-1,-2\ldots \qquad |z|<\infty$$

Alternativamente, ya que

$$\lim_{|k|\to\infty} \left\{ (k)_n \left(\frac{z}{k}\right)^n \right\} = z^n$$

para valores acotados de z y n∈ℕ, se tiene que:

$$ {}_1F_1\,(\alpha,\gamma;\ z) = \lim_{|k|\to\infty}\ {}_2F_1\,(\alpha,\beta,\gamma;\ \frac{z}{\beta}) \tag{13}$$

y por eso a esta función se le llama también *Función hipergeométrica confluente.*

Sus propiedades se estudian a partir de la función hipergeométrica de Gauss, ${}_2F_1$. Así, a partir de (5) y (8) se obtiene:

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\ e^{zt}\ dt \tag{14}$$

$$\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0$$

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma;z) = e^z\,{}_1F_1(\gamma-\alpha,\gamma;-z) \tag{15}$$

Esta última expresión se conoce como *primer teorema de Kummer*, mientras que el segundo teorema de Kummer puede escribirse como:

$$ e^{-z}\,{}_1F_1(\alpha,2\alpha;2z) = {}_0F_1(-,\ \alpha+\frac{1}{2};z^2/4) \tag{16}$$

donde:

$$ {}_0F_1(-, \gamma; z) = \lim_{|\alpha| \to \infty} {}_1F_1(\alpha, \gamma; z/\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\ (c)_n} \tag{17} $$

2.3.1.5 Representaciones Hipergeométricas de funciones elementales

Como ejemplo, tenemos:

$$ (1-z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{z^n}{n!} = {}_1F_0(\alpha, -; z) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \beta; z) \tag{18} $$

$$ e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = {}_0F_0(-, -; z) = {}_1F_1(\alpha, \alpha; z) \tag{19} $$

(SRIVASTAVA 1984)

2.3.2 GENERALIZACION DE ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$.

2.3.2.1 Serie hipergeométrica generalizada.

La generalización natural de las funciones anteriores parece venir por la introducción de un número arbitrario de parámetros en numerador y denominador. La serie resultante:

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \beta_1, \ldots, \beta_q \end{matrix}; z\right] = \sum \frac{(\alpha_1)_n \ \ldots \ (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ \ldots \ (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!} = $$

$$ = {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q; z) \tag{20} $$

es conocida como serie de Gauss generalizada, o tan sólo, serie hipergeométrica generalizada. Aquí, p y q son enteros positivos o cero (entendiendo los productos vacios como 1) y suponemos que tanto z como los parámetros toman valores complejos con la condición de que los β_j no sea ninguno 0 o un entero negativo. Así, si un parámetro del numerador es un entero negativo, la serie se reduce a un polinomio.

Supuesto que ningun parámetro es cero o un entero negativo, la serie ${}_pF_q$ es:

(*i*) convergente para $|z|< \infty$ si $p\leq q$
(*ii*) convergente para $|z|< 1$ si $p=q+1$
(*iii*) divergente $\forall z$, $z \neq 0$, si $p>q+1$.

Además, si hacemos:

$$w = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$$

se sabe que la serie ${}_pF_q$ con $p=q+1$ es

(*i*) absolutamente convergente para $|z| =1$ si $Re(w)>0$
(*ii*) condicionalmente convergente para $|z|=1$, $z\neq 1$ si $-1 < Re(w) \leq 0$
(*iii*) divergente para $|z|=1$ si $Re(w)\leq -1$

2.3.2.2 Funciones hipergeométricas de 2 variables.

En 1880 P. Appell (1855-1930) consideró el producto de dos funciones de Gauss:

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)\,{}_2F_1(\alpha',\beta',\gamma';y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha')_m(\beta)_n(\beta')_m}{(\gamma)_n(\gamma')_m}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \qquad (21) $$

Esta serie en sí misma no conduce a nada nuevo, pero si uno o más de los pares de productos

$$ (\alpha)_n(\alpha')_m \qquad (\beta)_n(\beta')_m \qquad (\gamma)_n(\gamma')_m $$

se reemplazan por las expresiones correspondientes

$$ (\alpha)_{n+m} \qquad (\beta)_{n+m} \qquad (\gamma)_{n+m} $$

obtenemos cinco posibilidades distintas de obtener nuevas funciones. Una de ellas es:

$$ \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_{n+m}}{(\gamma)_{n+m}}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} $$

que no es más que la serie ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x+y)$, pues se comprueba que

$$ \sum_{m,n=0}^{\infty} f(n+m)\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} = \sum_{N=0}^{\infty} f(N)\frac{(x+y)^N}{N!} $$

o más generalmente que:

$$ \sum_{m_1,\ldots,m_n=}^{\infty} f(m_1+\ldots+m_n)\frac{x^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{x^{m_n}}{m_n!} = \sum_{M=0}^{\infty} f(M)\frac{(x_1+\ldots+x_n)^M}{M!} $$

Las otras cuatro posibilidades conducen a las cuatro funciones de Appell de dos variables, que se definen como sigue:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m}{(\gamma)_{n+m}} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} {}_2F_1(\alpha+m,\beta',\gamma+m;y)\frac{x^m}{m!} \tag{22}$$

$$\max\{|x|,|y|\} <1$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m}{(\gamma)_n(\gamma')_m} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} {}_2F_1(\alpha+m,\beta',\gamma';y)\frac{x^m}{m!} \tag{23}$$

$$|x|+|y|<1$$

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\alpha')_m(\beta)_n(\beta')_m}{(\gamma)_{n+m}} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} {}_2F_1(\alpha',\beta',\gamma+m;y)\frac{x^m}{m!} \tag{24}$$

$$\max\{|x|,|y|\}<1$$

$$F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_{n+m}}{(\gamma)_n(\gamma)_m} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} {}_2F_1(\alpha+m,\beta+m,\gamma';y) \frac{x^m}{m!} \qquad (25)$$

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1$$

donde, como siempre, γ, γ' no son cero ni un entero negativo.

Las cuatro funciones de Appell se reducen a la función hipergeométrica de Gauss cuando y=0. Las dos primeras también se reducen a la función de Gauss si $\beta'=0$; mientras que a la tercera le ocurre lo mismo si α' o β' se anulan. También tenemos los siguientes casos particulares:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\alpha;x,y) = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\beta,\beta';x,y) = (1-x-y)^{-\alpha}$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\alpha,\beta';x,y) = (1-y)^{\beta-\alpha}(1-x-y)^{-\beta} \qquad (26)$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\beta,\alpha;x,y) = (1-y)^{\beta'-\alpha}(1-x-y)^{-\beta'}$$

$$xF_2(1,1,\beta',\alpha,\beta';x,y) + yF_2(1,\beta,1,\beta,\alpha;x,y) = -\ln(1-x-y)$$

$$F_3(\alpha,\beta,1,1;\alpha+\beta;x.y)=(x+y-xy)^{-1}(x\,{}_2F_1(\alpha,1,\alpha+\beta;x)+y\,{}_2F_1(\beta,1,\alpha+\beta;y))$$

Otro resultado es la fórmula de reducción de APPELL y KAMPE DE FERIER (1926):

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,x) = {}_2F_1(\alpha,\beta+\beta',\gamma;x)$$

y por el teorema de sumación de Gauss, se concluye que:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;1,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta-\beta')} \qquad (27)$$

$$\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots \qquad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta-\beta')>0$$

2.3.3 FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS DE LAURICELLA.

En 1893 Lauricella generalizó las cuatro funciones de Appell a funciones de n variables y las definió del siguiente modo:

$$F_A^{(n)}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_n;x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \sum_{m_1\ldots m_n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\ldots+m_n}(\beta_1)_{m_1}\ldots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma_1)_{m_1}\ldots(\gamma_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \qquad (28)$$

$$|x_1| + \ldots + |x_n| < 1$$

y claramente, $F_A^{(2)} = F_2$.

$$F_B^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma;x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \sum_{m_1\ldots m_n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m_1}\ldots(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}\ldots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\ldots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \qquad (29)$$

$$\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} < 1$$

y $F_B^{(2)}$ es F_3 .

$$F_C^{(n)}(\alpha,\beta,\gamma_1,\ldots,\gamma_n;x_1,\ldots,x_n)$$

$$= = \sum_{m_1\ldots m_n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\ldots+m_n}(\beta)_{m_1+\ldots+m_n}}{(\gamma_1)_{m_1}\ldots(\gamma_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \quad (30)$$

$$\sqrt{|x_1|}+\ldots+\sqrt{|x_n|}<1$$

y claramente, $F_C^{(n)}$ = es la extensión n-variante de F_4 .

$$F_D^{(n)}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma;x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \sum_{m_1\ldots m_n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\ldots+m_n}(\beta_1)_{m_1}\ldots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\ldots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \quad (31)$$

$$\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}<1$$

tal que $F_D^{(2)}$ es F_1.

Además todas son extensión de la función de Gauss, ya que

$$F_A^{(1)} = F_B^{(1)} = F_C^{(1)} = F_D^{(1)} = {}_2F_1$$

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS MÉTODOS BASICOS DE GENERACION DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS.

3.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos reseñado dos vías particularmente importantes a la hora de encontrar distribuciones discretas que generalicen los sistemas de Pearson. El primero, más general, que consiste en variar los coeficientes de la ecuación o ecuaciones en diferencias que ha de verificar el sistema, mediante diversos coeficientes polinomiales, los cuales nos conducirán a la aparición de funciones hipergeométricas como solución de tales sistemas. La segunda vía, más directa, consiste en proponer como funciones generatrices de probabilidad a determinadas funciones hipergeométricas, y a partir de ellas, estudiar las restricciones que hemos de exigir a tales funciones y sus parámetros para que el resultado sea una auténtica función de masa de probabilidad.

Dado que la función generatriz de probabilidad caracteriza a la distribución, a la hora de establecer las convergencias vamos a centrarnos en la comparación de las funciones obtenidas por ambos métodos. Así, por la primera vía de variación de los coeficientes de las ecuaciones en diferencias, se establece en general el sistema de ecuaciones diferenciales que tal función debe verificar, según la expresión de los polinomios que son coeficientes en el sistema de ecuaciones en diferencias. Por el segundo método, y dado que partimos directamente de las funciones hipergeométricas concretas, y expresamos la función generatriz de probabilidad con base en ellas, asimismo quedan fijadas las ecuaciones diferenciales que verifican.

La convergencia entre los métodos, por tanto, la vamos a estudiar mediante la comprobación de que ambos conducen a las mismas ecuaciones diferenciales para las funciones generatrices de probabilidad. Esto lo vamos a hacer en los casos más conocidos, como son aquéllos en que la función generatriz de probabilidad se corresponde con la función hipergeométrica confluente de Kummer; la función hipergeométrica de Gauuss ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;t)$ y una de sus extensiones bivariantes y multivariantes, en particular la obtenida mediante $F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma;t_1,t_2)$ y $F_D^{(n)}(\alpha,\beta_1,..,\ \beta_n;\gamma;t_1..,t_n)$.[1]

Esta comparación permitirá asegurar la obtención de los mismos resultados por ambas vías, y la posibilidad de continuar, en determinados casos, por cualquiera de las dos indistintamente. Así, un aspecto en que tal posibilidad ofrece perspectivas interesantes es en el caso en que nos planteemos coeficientes matriciales para la ecuación en diferencias, sobre todo cuando esto nos conduzca a soluciones en forma de funciones hipergeométricas con argumento matricial, las cuales han de tratarse por medio de los polinomios zonales, que son aquellos que generalizan el concepto de potencia en las matrices (MUIRHEAD 1982)

---

[1] Más adelante lo compararemos para $F_3(\alpha_1,..,\alpha_n,\beta_1,..,\beta_n;\gamma;t_1,..,t_n)$

3.2 Caso univariante.

En primer lugar vamos a ver una propiedad del operador θ, que recordemos era:

$$\theta = z\frac{d}{dz}$$

$$\theta^2 = z\frac{d}{dz}\;z\frac{d}{dz} = z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right) = z\left(\frac{d}{dz} + z\frac{d^2}{dz^2}\right) =$$

$$= z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} \quad\Rightarrow\quad z^2\frac{d^2}{dz^2} = \theta^2 - \theta.$$

3.2.1 Funcion de Kummer

Ya vimos (apartado 2.3.1.4) la ecuación diferencial que verifica ${}_1F_1$:

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\gamma - z\right]\frac{dw}{dz} - \alpha w = 0$$

cambiando la variable z por t, y w lo sustituimos por g(t) (al usarla como f.g.p)

$$t\frac{d^2g(t)}{dt^2}+\left[\gamma - t\right]\frac{d}{dt}g(t) - \alpha g(t) = 0$$

y como al ser f.g.p. t está definido en un entorno de 1, podemos multiplicar la expresión por t;, y expresándola en función de θ:

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}g(t)+\left[\gamma - t\right]t\frac{d}{dt}g(t) - \alpha g(t)t =$$

$$= \left(\theta^2 - \theta + (\gamma-t)\theta - \alpha t\right)g(t) = \left(\theta^2 + \gamma\theta - t\theta - \theta - \alpha t\right)g(t) =$$

$$= \theta^2 g(t) + (\gamma - 1 - t)g(t) - t\alpha g(t) = 0$$

que es el resultado al que conduce la resolución de la ecuación en diferencias

$$G(r)f_{r+1} - L(r)f_r = 0$$

cuando

$$G(r) = (\gamma + r)(r+1)$$
$$L(r) = (\alpha + r)$$

por aplicación del Teorema 2.2.1.2 [FAJARDO, 1985].

3.2.2 Función hipergeométrica de Gauss.

La ecuación diferencial que verifica ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ es:

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\right]\frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0$$

y si la consideramos como f.g.p. $g(t) = {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;t)$:

$$t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}g(t) + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)t\right]\frac{d}{dt}g(t) - \alpha\beta g(t) = 0$$

al multiplicar por t:

$$t^2(1-t)\frac{d^2}{dt^2}g(t) + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)t\right]t\frac{d}{dt}g(t) - t\alpha\beta g(t) =$$

$$= \left[t^2\frac{d^2}{dt^2} - t^3\frac{d^2}{dt^2} + \gamma t\frac{d}{dt} - (\alpha+\beta+1)t^2\frac{d}{dt} - t\alpha\beta\right]g(t) =$$

$$= \left[\theta^2 - \theta - t\theta^2 + t\theta + \gamma\theta - (\alpha+\beta+1)t\theta - \alpha\beta t\right]g(t) =$$

$$= \left[\theta(\theta+\gamma-1) - t(\theta+\alpha)(\theta+\beta)\right]g(t) = 0$$ (Resultado 3 Ap.2.3.1)

y ese resultado es igual también a:

$$\left[\theta^2 - \theta - t\theta^2 + t\theta + \gamma\theta - (\alpha+\beta+1)t\theta - \alpha\beta t\right]g(t) =$$

$$= \left[\theta^2 - \theta - t\theta^2 + t\theta + \gamma\theta - \alpha\theta t - \beta\theta t - t\theta - \alpha\beta t\right]g(t) =$$

$$= \theta^2(1-t)g(t) + \theta\left(\gamma-1- t(\alpha+\beta)\right)g(t) - t\alpha\beta g(t) = 0$$

que es el resultado que se obtiene como solución de la ecuación en diferencias

$$G(r)f_{r+1} - L(r)f_r = 0$$

cuando

$$G(r) = (\gamma + r)(r+1)$$
$$L(r) = (\alpha + r)(\beta+r)$$

por aplicación del Teorema 2.2.1.2 .

3.3 Caso bidimensional: $F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma;x_1,x_2)$

En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica esta función es:

$$(1-x_1)\left[x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}F + x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F\right]+\left(\gamma-(\alpha+\beta_1+1)x_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1}F - \beta_1 x_2\frac{\partial}{\partial x_2}F=\alpha\beta_1 F$$

$$(1-x_2)\left[x_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}F + x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F\right]+\left(\gamma-(\alpha+\beta_2+1)x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}F - \beta_2 x_1\frac{\partial}{\partial x_1}F=\alpha\beta_2 F$$

y si expresamos la función generatriz de probabilidad

$$g(t_1,t_2) = F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma;t_1,t_2)$$

la ecuaciones quedan:

$$(1-t_1)\left[t_1\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}g + t_2\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}g\right]+\left(\gamma-(\alpha+\beta_1+1)t_1\right)\frac{\partial}{\partial t_1}g - \beta_1 t_2\frac{\partial}{\partial t_2}g=\alpha\beta_1 g$$

$$(1-t_2)\left[t_2\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}g + t_1\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}g\right]+\left(\gamma-(\alpha+\beta_2+1)t_2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}g - \beta_2 t_1\frac{\partial}{\partial t_1}g=\alpha\beta_2 g$$

Vamos a trabajar con la primera función. (En la segunda, el desarrollo es análogo)

$$(1-t_1)\left[t_1 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}g + t_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} g\right] + \left(\gamma - (\alpha+\beta_1+1)t_1\right)\frac{\partial}{\partial t_1}g - \beta_1 t_2 \frac{\partial}{\partial t_2}g = \alpha\beta_1 g$$

Multiplicando por t_1:

$$t_1(1-t_1)\left[t_1 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}g + t_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} g\right] + \left(\gamma - (\alpha+\beta_1+1)t_1\right) t_1 \frac{\partial}{\partial t_1}g - \beta_1 t_1 t_2 \frac{\partial}{\partial t_2}g = \alpha\beta_1 t_1 g$$

$$\Rightarrow \quad t_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g - t_1 t_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g + (1-t_1) t_1 t_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} g +$$

$$+ \gamma t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} g \quad - (\alpha+\beta_1+1) t_1 t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} g - \beta_1 t_1 t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} g = \alpha\beta_1 t_1 g$$

Si ahora $\theta_i = \dfrac{\delta}{\delta t_i}$, y $t_1 t_2 \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} = t_1 \dfrac{\partial}{\partial t_1} t_2 \dfrac{\partial}{\partial t_2}$, tenemos:

$$\left[(\theta_1^2 - \theta_1) - t_1(\theta_1^2 - \theta_1) + (1-t_1)\theta_1\theta_2 + \gamma\theta_1 - (\alpha+\beta_1+1)t_1\theta_1 - \beta_1 t_1 \theta_2\right] g =$$

$$\alpha\beta_1 t_1 g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\theta_1(\theta_1+\theta_2+\gamma-1) - t_1(\theta_1^2 - \theta_1 + \theta_1\theta_2 + \alpha\theta_1 + \beta_1\theta_1 + \theta_1 + \beta_1\theta_2 + \alpha\beta_1\right] g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\theta_1(\theta_1+\theta_2+\gamma-1) - t_1(\theta_1+\alpha)(\theta_1+\beta_1) - t_1\theta_2(\theta_1+\beta_1) \right] g = 0$$

Entonces, desarrollando:

$$\left[\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_1\gamma-\theta_1-t_1\theta_1^2 -t_1\theta_1\beta_1-t_1\alpha\theta_1 - t_1\alpha\beta_1 -t_1\theta_1\theta_2 -t_1\beta_1\theta_2 \right] g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-t_1)\theta_1^2 g + (1-t_1)\theta_1\theta_2 g + \left[\gamma-1-t_1(\alpha+\beta_1) \right] \theta_1 g - t_1\beta_1\theta_2 g - t_1\alpha\beta_1 g = 0$$

que es el resultado al que se llega al solucionar el sistema

$$G(r,s)\, f_{r+1,s} - L(r,s)\, f_{r,s} = 0$$

$$H(r,s)\, f_{r,s+1} - N(r,s)\, f_{r,s} = 0$$

cuando

$$G(r,s) = (\gamma+r+s)(r+1)$$

$$L(r,s) = (\alpha+r+s)(\beta_1+r)$$

$$H(r,s) = (\gamma+r+s)(s+1)$$

$$N(r,s) = (\alpha+r+s)(\beta_2+r)$$

y por aplicación del Teorema 2.2.2.4.

En la otra ecuación, el resultado es análogo.

3.4 Caso n-dimensional $\mathbf{F}_D^{(n)}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma,t_1,\ldots,t_n)$.

El sistema de ecuaciones diferenciales que verifica es:

$$(1-x_i)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\gamma-(\alpha+\beta_i+1)x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}F - \beta_i \sum_{i\neq j} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}F = \alpha\beta_i F$$

$$i=1,\ldots,n$$

expresamos la función generatriz de probabilidad como:

$$g(t_1,\ldots,t_n) = \mathbf{F}_D^{(n)}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma,t_1,\ldots,t_n).$$

entonces el sistema queda:

$$(1-t_i)\sum_{j=1}^{n} t_j \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + \left(\gamma-(\alpha+\beta_i+1)t_i\right)\frac{\partial}{\partial t_i}g - \beta_i \sum_{i\neq j} t_j \frac{\partial}{\partial t_j}g = \alpha\beta_i g$$

$$i=1,\ldots,n$$

por el mismo procedimiento de antes, multiplicando por t_i

$$t_i(1-t_i)\sum_{j=1}^{n} t_j \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + \left(\gamma-(\alpha+\beta_i+1)t_i\right) t_i \frac{\partial}{\partial t_i} g - t_i\beta_i \sum_{i\neq j} t_j \frac{\partial}{\partial t_j} g = \alpha\beta_i t_i g$$

$$i=1,\ldots,n$$

y desarrollando:

$$(t_i^2-t_i^3)\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + (1-t_i)\sum_{j=1}^{n} t_i t_j \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} g + \gamma t_i \frac{\partial}{\partial t_i} g - (\alpha+\beta_i+1)t_i t_i \frac{\partial}{\partial t_i} g -$$

$$-\beta_i \sum_{i\neq j} t_i t_j \frac{\partial}{\partial t_j} g = \alpha\beta_i t_i g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ (\theta_i^2 - \theta_i) - t_i(\theta_i^2 - \theta_i) + \sum t_i\theta_i\theta_j + \gamma\theta_i - (\alpha+\beta_i+1)t_i\theta_i - \right.$$

$$\left. - \beta_i t_i \sum_{i\neq j} \theta_j - \alpha\beta_i t_i \right\} g = 0$$

$$\Rightarrow \left[\theta_i\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_j + \gamma - 1\right) - t_i(\theta_i+\alpha)(\theta_i+\beta_i) - t_i \sum_{j\neq i} \theta_j(\theta_i+\beta_i) \right] g = 0$$

y desarrollando, sale:

$$(1-t_i)\sum_{j=1}^{n} \theta_i\theta_j g + \left[\gamma-1-t_i(\alpha+\beta_i)\right]\theta_i g - t_i\beta_i \sum_{j\neq i} \theta_j g - t_i\alpha\beta_i g = 0$$

que es el resultado al que se llega al solucionar el sistema

$$G(r_1,\ldots,r_n)\, f_{r_1,\ldots,r_i+1,\ldots,r_n} - L(r_1,\ldots,r_n) f_{r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_n} = 0$$

$$i=1,\ldots,n$$

cuando

$$G(r_1,\ldots,r_n) = (\gamma + r_1 + \ldots + r_n)(r_i + 1)$$

$$L(r_1,\ldots,r_n) = (\alpha + r_1 + \ldots + r_n)(\beta_i + r_i)$$

y por aplicación del Teorema 2.2.3.5.

4.- FAMILIA DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS UNIVARIANTES.

4.1 Introducción.

En los capítulos anteriores hemos abordado dos métodos generales que permiten construir distribuciones de Pearson discretas. Tanto en este capítulo como en los siguientes vamos a estudiar en particular familias de distribuciones generadas por funciones hipergeométricas concretas.

La función hipergeométrica de Gauss, ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,t)$ como generadora de variables aleatorias discretas ha sido ampliamente estudiada. Es la primera extensión natural y generaliza casi todas las distribuciones discretas empleadas habitualmente [1]. Así ocurre con la distribución Binomial de parámetros n,p que está generada por una función ${}_2F_1(-n,1;1;-p/(1-p))$; la distribución Binomial negativa de parámetro k,p que se genera a partir de una función hipergeométrica ${}_2F_1(k,1;1;(1-p))$; la Geométrica de parámetro p que proviene de una ${}_2F_1(1,1;1;(1-p))$ o la distribución Hipergeométrica de parámetros N, n, k que se obtiene por una función

[1] La Poisson se genera por una función de Kummer ${}_1F_1(1;1;\lambda)$

${}_2F_1(-n,-Np;Nq-n+1;1)$. Un estudio completo, junto con una clasificación según los posibles valores de los parámetros α, β, γ, λ viene dada en FAJARDO (1985).

Igualmente, la función ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\lambda)$ aparece como generadora de otras familias de distribuciones discretas de gran interés. Esto ocurre, por ejemplo, con los modelos IA, II/IIIA y IV de la familia de distribuciones de KEMP y KEMP (1975). Estas distribuciones aparecen en modelos de urnas, de contagios, en procesos estocásticos y STER y generalizan, entre otras, las distribuciones rectangulares discretas o las de Chung y Feller (1957) sobre la distribución de caras en tiradas de monedas (Tipo II/IIIA) o bien la distribución de Waring o la distribución factorial de Marlow (Tipo IV). En este capítulo incluimos estas distribuciones dentro de la clasificación general dada por FAJARDO y estudiamos sus características principales a la luz de tal inclusión, así como proponemos un modelo de estimación de los parámetros por el método de los momentos, obtenido al particularizar los resultados del caso general.

En el apartado 4.2.2 trabajamos de manera similar con la distribución univariante generalizada de Waring. La distribución de Waring de parámetros $(a,1,\rho)$ ya ha sido tratada al estudiarla como un caso particular de uno de los modelos de Kemp y Kemp. Del mismo modo puede trabajarse con la distribución de Waring generalizada de parámetros (a,k,ρ). Esta distribución ha sido exhaustivamente estudiada por IRWING (1975). Es una distribución que para ciertos valores de los parámetros a,k tiene unas colas extremadamente largas, lo que puede llevar aparejado la no existencia de ningún momento. Esta distribución se emplea para modelizar situaciones de accidentes, modelo que ha sido perfeccionado en posteriores estudios, como por ejemplo en XECALAKI (1984) mediante particiones en la varianza total del modelo. Nuestro estudio ha consistido en su inclusión y clasificación dentro del modelo general de distribuciones generadas por la función hipergeométrica de Gauss, y el estudio de sus propiedades, como consecuencia de tal inclusión.

En el apartado 4.3 pasamos a realizar un estudio similar al realizado para la distribución ${}_2F_1$ de Gauss pero para una generalización univariante de ésta y que la contiene como caso particular, como es la función ${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)$. En el estudio hemos partido de los polinomios que son los coeficientes de la ecuación en diferencias del sistema que conducen a tal función como solución; a partir de ahí hemos realizado el proceso indicado en el apartado 2.1, con la obtención de la función generatriz de probabilidad, la ecuación diferencial que verifica, el cálculo de sus momentos y la clasificación, atendiendo a los posibles valores permisibles para los parámetros, de las variables aleatorias incluidas en la familia. Igualmente proponemos un sistema de ecuaciones para la estimación de los parámetros por el método de los momentos.

En este estudio nos hemos encontrado con el problema derivado de la no existencia de un teorema de sumación para una función ${}_3F_2$ general, al contrario de lo que ocurre con la función ${}_2F_1$ para el que existe el teorema de sumación de Gauss. Esto impide el cálculo explícito de f_0 así como de la esperanza en general, y caso de que ésta exista. Sin embargo, resolviendo este problema por métodos numéricos podemos obtener todos los momentos que existan mediante el sistema de ecuaciones obtenido por las relaciones de recurrencia entre momentos; para el que es preciso partir del valor de la esperanza.

Esta distribución está siendo aplicada con mayor frecuencia cada vez. Así, por ejemplo, distribuciones de este tipo aparecen en las leyes de probabilidad de las propiedades topológicas del drenaje de las cuencas (DACEY, 1985). Para la construcción y análisis de estos modelos se emplean tres conceptos fundamentales, como son los de *redes de canales*, *formas de los canales* y *aleatoriedad topológica*. Una red de canales es un tipo especial de grafo en planta, un arbol plano con 2n vértices, cada uno de los cuales tiene una valencia 1 o 3. Una forma de red es una colección ordenada de una o más redes de canales.

Un concepto básico es el de redes de canales topológicamente distintos. Así, dos redes de canales son topológicamente idénticos si uno se puede hacer congruente con los otros por deformaciones continuas de las conexiones, sin abandonar el plano. De otro modo se dice que son topológicamente distintos.

En el apartado 4.4 estudiamos de modo similar, aunque sin clasificación, las distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)$. Sus aplicaciones on también diversas, y aparece, como la anterior, en los problemas de drenaje de cuencas antes mencionados.

Las funciones hipergeométricas aparecen igualmente en otros campos de la estadística. Esto ocurre, por ejemplo, al estudiar los estimadores puntuales de la distribución lognormal con dos y tres parámetros (CROW-SHIMIZU 1988).

Una via de expansión, como ya hemos mencionado, aparece con la extensión de estas distribuciones al caso de soluciones de la ecuación en diferencias con coeficientes matriciales, mediante la aplicación de polinomios zonales.

Habitualmente, el estudio de los sistemas de Pearson se realiza variando los coeficientes de la ecuación en diferencias, pero dentro del conjunto de funciones polinómicas. Sin embargo, tal exigencia no es imprescindible, pudiendo encontrar distribuciones por la solución de la ecuación en diferencias en donde los coeficientes sean funciones no polinomiales. Para finalizar el capítulo dedicado a distribuciones univariantes, en el apartado 4.5 incluimos un ejemplo de distribución discreta obtenida como solución de la ecuación en diferencias en donde los coeficientes no son polinomios, sino funciones exponenciales. En ese ejemplo hemos obtenido una distribución uniparamétrica, con rango infinito y moda en el valor cero. Para esta distribución hemos estudiado su función generatriz de momentos, características de la distribución y problemas de estimación. Igualmente incluimos una tabla de probabilidades para diferentes valores del parámetro.

4.2 Distribuciones generadas por ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,t)$

Si consideramos los polinomios:

$$G(r) = (\gamma+r)(r+1)$$
$$L(r) = (\alpha+r)(\beta+r)\lambda$$

y resolvemos la ecuación en diferencias

$$G(r)f_{r+1} + L(r)f_r = =$$

la solución es:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha)_r \, (\beta)_r \, \lambda^r}{(\gamma)_r \; r!} \qquad r\geq 0$$

en donde

$$f_0 = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\;\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)} & \text{si el rango es infinito} \\[2ex] \dfrac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} & \text{si } \alpha\text{=-n y rango finito} \end{cases}$$

y como cumple las condiciones del teorema 2.2.1.1, el resultado es una auténtica distribución de probabilidad.

Su función generatriz de probabilidad es:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,\lambda t)}{{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,1)}$$

Un estudio detallado junto a una clasificación exhaustiva viene dado en FAJARDO (1985). Vamos a ver tan solo algunas distribuciones concretas que pueden incluirse en la clasificación anteriomente mencionada.

4.2.1 Distribuciones de Kemp y Kemp.

4.2.1.1 Kemp y Kemp tipo IA:

Si hacemos:

$$\alpha = -n; \qquad \beta = -a; \qquad \gamma = b - n + 1; \qquad \lambda = 1$$

y tales que:

$$a > n-1 \ (\Rightarrow |\beta|>|\alpha|-1); \qquad b > n-1 \ (\Rightarrow \gamma>0)$$

al resolver la ecuación en diferencias con esos coeficientes polinomiales, obtenemos una distribución de probabilidad con rango finito (r=0,1,2,...,n), con función de masa de probabilidad:

$$f_r = f_0 \frac{(-n)_r(-a)_r}{(b-n+1)_r r!} \quad \text{con } f_0 = \frac{(b-n+1)_n}{(b-n+a+1)_n}$$

y función generatriz de probabilidad:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(-n,-a,b-n+1,t)}{{}_2F_1(-n,-a,b-n+1,1)} = {}_2F_1(-n,-a,-a-b;1-t)$$

Esta distribución es la estudiada por KEMP y KEMP (1975) y denominada por ellos Tipo IA, que es un caso particular, por lo visto anteriormente, del tipo IIIA de la clasificación dada por FAJARDO. Como $\lambda=1$, esta distribución, además, pertenece a la familia de ORD de 3 parámetros. En esta familia, en general, la esperanza y varianza de cualquier distribución vale:

$$E[[X] = \frac{\alpha\beta}{e} ; \qquad Var(X)= \frac{\alpha\beta(\alpha+e)(\beta+e)}{e^2(e-1)}$$

en donde $e = \gamma-\alpha-\beta-1$. Por tanto, para esta distribución concreta:

$$e = b-n+1+n+a-1 = a+b$$

$$E[X] = \frac{an}{a+b}$$

$$Var(X) = \frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

lo cual puede comprobarse también obteniendo los momentos factoriales a partir de la función generatriz de probabilidad, y a partir de ellos, la esperanza y la varianza.

Por aplicación del teorema 2.2.1.4, los momentos respecto al origen verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$\alpha_{(h+2)} + (b-n)\alpha_{(n+1)} - \left\{ \sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \alpha_{(m+2)} - (a+n)\alpha_{(m+1)} + an\alpha_{(m)} \right\} = 0$$

Su estimación por el método de los momentos, queda:

$$\alpha_{(1)}(b-n) + \alpha_{(1)}(a+n) - an = 0$$

$$\alpha_{(2)}(b-n) + (\alpha_{(2)} + \alpha_{(1)})(a+n) - (\alpha_{(1)} + 1)an = \alpha_{(2)}$$

$$\alpha_{(3)}(b-n)+(\alpha_{(3)}+2\alpha_{(2)}+\alpha_{(1)})(a+n)-(\alpha_{(2)}+2\alpha_{(1)}+1)an =2\alpha_{(3)}+\alpha_{(2)}$$

Y sustituyendo los momentos muestrales por los poblacionales, podemos obtener a,b,n.

4.2.1.2 Kemp y Kemp tipo II/IIIA

Si hacemos:

$$\alpha = -n; \qquad \beta = a; \qquad \gamma = -b -n + 1; \qquad \lambda = 1$$

y con $\gamma < 0$ ya que, para ello, $-b -n < 1$, ($\Rightarrow b+n>1$), lo que se verifica.

Al resolver la ecuación en diferencias con esos coeficientes polinomiales, obtenemos una distribución de probabilidad con rango finito ($r=0,1,2,\ldots,n$), con función de masa de probabilidad:

$$f_r = f_0 \frac{(-n)_r (a)_r}{(-b-n+1)_r r!}$$

no tiene problemas de signo, ya que el rango es $[0,n]$. Como $\alpha<0$, $\beta>0$; $\alpha\in\mathbb{N}$ y $\lambda=1$ es una distribución del Tipo VI(A) del estudiado por FAJARDO (1985).

Su función generatriz de probabilidad:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(-n,a,-b-n+1,t)}{{}_2F_1(-n,a-,b-n+1,1)} = {}_2F_1(-n,-a,a+b;1-t)$$

Esta distribución es la estudiada por KEMP y KEMP (1975) y denominada por ellos Tipo II/IIIA, que, como hemos dicho, es un caso particular, del tipo VI(A) de los mencionados anteriormente. Como $\lambda=1$, esta distribución, además, pertenece a la familia de ORD de 3 parámetros. En esta familia, como vimos antes, la esperanza y varianza de cualquier distribución vale:

$$E[[X] = \frac{\alpha\beta}{e}; \qquad Var(X)= \frac{\alpha\beta(\alpha+e)(\beta+e)}{e^2(e-1)}$$

por tanto:

$$E[[X] = \frac{na}{a+b}$$

$$Var(X)= \frac{abn(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

a lo que se puede llegar también directamente a partir de la f.g.p.

La ecuación diferencial que verifica la función generatriz de probabilidad es:

$$(1-t)\theta^2 g(t) + (nt - at -b -n)\theta g(t) + tnag(t) = 0$$

Los momentos verifican la siguiente relación de recurrencia

$$-\alpha_{(1)}(b+n) - \alpha_{(1)}(a-n) + an = 0$$

$$-\alpha_{(2)}(b+n) - (\alpha_{(2)} + \alpha_{(1)})(a-n) + (\alpha_{(1)} + 1)an = \alpha_{(2)}$$

$$-\alpha_{(3)}(b+n)-(\alpha_{(3)}+2\alpha_{(2)}+\alpha_{(1)})(a-n)+(\alpha_{(2)}+2\alpha_{(1)}+1)an = 2\alpha_{(3)}+\alpha_{(2)}$$

y sustituyendo los momentos poblacionales por los muestrales, podemos obtener una estimación por el método de los momentos.

4.2.1.3 Kemp y Kemp tipo IV.

Si hacemos:

$\alpha = k; \quad \beta = a; \quad \gamma = a+b+k; \quad \lambda = 1 \quad (a,b,k\in\mathbb{R})$

y con $\gamma > \alpha+\beta$, ya que $a+b+k > a+k$ $(b>0)$, y $\lambda=1$.

Los polinomios son, entonces:

$G(r) = (a+b+k+r)(r+1)$

$L(r) = (k+r)(a+r)$

Al resolver la ecuación en diferencias con esos coeficientes polinomiales, obtenemos una distribución de probabilidad de rango infinito, con función de masa de probabilidad:

$$f_r = f_0 \frac{(k)_r (a)_r}{(a+b+k)_r\, r!}$$

$$f_0 = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+k)}{\Gamma(a+b+k)\Gamma(b)}$$

Es una distribución del Tipo I del estudiado por FAJARDO (1985).

Su función generatriz de probabilidad:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(k,a,a+b+k,t)}{{}_2F_1(k,a,a+b+k,1)} = {}_2F_1(-n,-a,a+b;1-t)$$

Esta distribución es la estudiada por KEMP y KEMP (1975) y denominada por ellos Tipo IV, que, como hemos dicho, es un caso particular, del tipo I de los mencionados. Como $\lambda=1$, esta distribución, además, pertenece a la familia de ORD de 3 parámetros. Para hallar su esperanza y varianza:

$$E[[X] = \frac{\alpha\beta}{e}; \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta(\alpha+e)(\beta+e)}{e^2(e-1)}$$

por tanto:

$$E[X] = \frac{ak}{b-1}$$

$$Var(X) = \frac{ak(k+b-1)(a+b-1)}{(b-1)^2(b-2)}$$

y en este caso, para que existan, $b>2$.

Su f.g.p. verifica:

$$(1-t)\theta^2 g(t) + (a+b+k-1 - (a+k)t)\theta g(t) - takg(t) = 0$$

4.2.2 Distribucion de Waring generalizada.

Si hacemos:

$$\alpha = a; \quad \beta = k; \quad \gamma = a+k+\rho; \quad \lambda = 1 \quad (a,k\in\mathbb{R}\ ;\ \rho>0)$$

Los polinomios son, entonces:

$G(r) = (a+k+\rho+r)(r+1)$

$L(r) = (a+r)(k+r)$

Al resolver la ecuación en diferencias con esos coeficientes polinomiales, obtenemos una distribución de probabilidad de rango infinito, con función de masa de probabilidad:

$$f_r = f_0 \frac{(a)_r (k)_r}{(a+b+k)_r r!}$$

$$f_0 = \frac{\Gamma(k+\rho)\Gamma(a+\rho)}{\Gamma(a+k+\rho)\Gamma(\rho)}$$

Si k = 1, entonces la función generatriz de probabilidad es:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(a,1,a+\rho+1,t)}{{}_2F_1(a,1,a+\rho+1,1)} =$$

y se obtiene la distribución de WARING, que, como puede verse, es un caso particular también de la distribución de tipo IV de Kemp y Kemp vistas en 4.2.1.3. Igualmente ocurre con el caso $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ que es el conocido como DISTRIBUCION UNIVARIANTE GENERALIZADA DE WARING (UGWD). (Como puede verse por la definición de α y β en este caso y el anterior, ambos están intercambiados. Sin embargo el resultado es el mismo ya que la función hipergeométrica de Gauss es simétrica respecto a los dos primeros parámetros).

La distribución UGWD ha sido empleada con éxito en el estudio de accidentes. Así empezó siendo aplicada por Irwing para datos de accidentes ocurridos a hombres en una fábrica de jabón, supuesto y demostrado que no es válido el ajuste por una distribución binomial negativa. Posteriormente se han hecho contribuciones, com la posibilidad de repartir la varianza total en tres componentes aditivos, como "propensión", "riesgo" y aleatoriedad (XEKALAKI 1984).

Nuestro interés estriba en clasificar esta familia de distribuciones triparamétricas dentro de la familia general de distribuciones generadas por la función hipergeométrica de Gauss. Ya hemos visto que en esta forma puede incluirse dentro de la familia de Kemp y Kemp, en el grupo IV, con lo que a su vez entran dentro del grupo I del estudiado por FAJARDO (1985).

Si consideramos k como entero negativo, y $a \in \mathbb{R}^-$, en ese caso pasamos a tener una distribución de rango finito, siempre que

$$|a|>|k| - 1$$

y pertenece al tipo IIIb de los anteriormente citados.

Dado que $\lambda=1$, pertenece a la subfamilia de ORD, con lo que sus parámetros son:

$$E[[X] = \frac{ak}{\rho-1}$$

$$Var(X)= \frac{ak(k+\rho-1)(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)}$$

y en este caso, para que existan, $\rho>2$.

Es de interés la estimación de los parámetros en esta distribución. Para ello se puede emplear el método de los momentos mediante la relación de recurrencia entre momentos respecto al origen existente, y que conduce al siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: (llamamos $\theta_1= a+k+\rho-1$; $\theta_2= a+k$; $\theta_3= ak$)

$$\alpha_{(1)}\theta_1 - \alpha_{(1)}\theta_2 - \theta_3 = 0$$

$$\alpha_{(2)}\theta_1 - \left(\alpha_{(2)}+\alpha_{(1)}\right)\theta_2 - \left(\alpha_{(1)}+1\right)\theta_3 = \alpha_{(2)}$$

$$\alpha_{(3)}\theta_1 - \left(\alpha_{(3)}+2\alpha_{(2)}+\alpha_{(1)}\right)\theta_2 - \left(\alpha_{(2)}+2\alpha_{(1)}+1\right)\theta_3 = 2\alpha_{(3)}+ \alpha_{(2)}$$

y sustituyendo los momentos poblacionales por los muestrales puede obtenerse una estimación de θ_1, θ_2, θ_3 (y en consecuencia, la de a, k, ρ).

4.3 Distribuiones generadas por $_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\gamma_1,\gamma_2;\lambda)$

4.3.1 F.m.p

Consideremos los polinomios:

$$G(r) = (\gamma_1+r)(\gamma_2+r)(r+1)$$
$$L(r) = (\alpha_1+r)(\alpha_2+r)(\alpha_3+r)\lambda$$

con α_i, $i=1,2,3$; γ_j, $j=1,2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En ese caso, la solución de la ecuación en diferencias

$$G(r)\ f_{r+1} - L(r)\ f_r = 0$$

viene dada por

$$f_r = \begin{cases} f_0 \displaystyle\prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} & r \geq 1 \\ f_0 & r = 0 \end{cases}$$

por tanto:

$$f_1 = f_0 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$f_2 = f_0 \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\alpha_3(\alpha_3+1)\lambda^2}{\gamma_1(\gamma_1+1)\gamma_2(\gamma_2+1) \quad 1\times 2} = f_0 \frac{(\alpha_1)_2(\alpha_2)_2(\alpha_3)_2 \ \lambda^2}{(\gamma_1)_2(\gamma_2)_2 \ 2!}$$

y en general:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r \ \lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r \ r!}$$

Para que sea función de masa de probabilidad, ha de verificar las condiciones del teorema 2.2.1.1.:

i) a) $L(r)\ G(r) > 0 \qquad \forall r \in \mathbb{Z}^+ \qquad$ si $H = \emptyset$

b) $L(r)\ G(r) \geq 0 \qquad r = 0,1,\ldots,m \quad$ si $H \neq \emptyset$

con $m = \min \{ H \}$

la cual, se verifica.

$$ii) \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} = \sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r \ \lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r \ r!}$$

que es la función $f_0({}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2;\lambda) - 1)$. Necesitamos que sea convergente, y al ser un caso particular de las funciones ${}_pF_q$ vistas en 2.3, veamos si verifica las condiciones de convergencia:

(a) Como $3 = 2+1$ converge $\forall |\lambda| < 1$

(b) Para $|\lambda|=1$, si hacemos $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, verifica:

$\mathrm{Re}(w) > 0 \qquad \Rightarrow$ absolutamente convergente

$-1 < \text{Re}(w) \leq 0 \Rightarrow$ condicionalmente convergente

$\text{Re}(w) \leq -1 \Rightarrow$ divergente.

iii) $$f_0 = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)}} = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!}} = \frac{1}{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2; \lambda)}$$

4.3.2. F.g.p.

La f.g.p. es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r \, t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r \; r!} =$$

$$= \frac{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2; \lambda t)}{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2; \lambda)}$$

y para que exista es preciso que sea convergente en un entorno de $t=1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones que hemos mencionado anteriormente. En resumen, o bien $|\lambda|<1$ ($\Rightarrow|\lambda t|<1$, para un entorno de 1); o bien $|\lambda|=1$ y $\gamma_1+\gamma_2-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) > 0$.

Vamos a calcular la ecuación diferencial que verifica la f.g.p., según el teorema 2.2.1.2. Para ello, vamos a expresar los polinomios $L(r)$ y $G(r)$ de la siguiente manera:

$$G(r) = \sum_{i=0}^{3} b_i (r+1)^i .$$

$$L(r) = \sum_{i=0}^{3} a_i r^i .$$

Comencemos con G(r):

$$G(r) = (\gamma_1+r)(\gamma_2+r)(r+1) = r^3+(\gamma_1+\gamma_2+1)r^2+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)r+\gamma_1\gamma_2$$

y eso a de ser igual a:

$$G(r) = b_3(r+1)^3 + b_2(r+1)^2 + b_1(r+1) + b_0$$

Por tanto:

$$b_3 = 1$$
$$b_2 = \gamma_1+\gamma_2-2$$
$$b_1 = \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2 + 1$$
$$b_0 = 0$$

Y con L(r):

$$L(r) = (\alpha_1+r)(\alpha_2+r)(\alpha_3+r)\lambda =$$
$$= \lambda r^3 + \lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)r^2 + \lambda(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)r + \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

luego:

$$a_3 = \lambda$$
$$a_2 = \lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$
$$a_1 = \lambda(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)$$
$$a_0 = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Y por aplicación del teorema 2.2.1.2, la f.g.p. verifica la ecuación diferencial:

$$G(\theta)\ g(t) \ - \ t\ L(\theta)\ g(t) \ - \ b_0 f_o = 0$$

y como:

$$G(\theta) = \theta^3 + (\gamma_1+\gamma_2-1)\theta^2 + (\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2 + 1)\theta$$

$$L(\theta) = \lambda\theta^3 + \lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\theta^2 + \lambda(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\theta + \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

la ecuación diferencial es:

$$(1-\lambda t)\theta^3 g(t) + \left[\gamma_1+\gamma_2-2 - \lambda t(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right]\theta^2 g(t) +$$
$$+\left[\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2 + 1 - \lambda t(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\right]\theta - \lambda t\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

4.3.3 Momentos

La relación de recurrencia de momentos viene dada por el teorema 2.2.1.4, y es:

$$\sum_{j=0}^{q} b_j \alpha_{(j+h)} = \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\sum_{m=0}^{h} \binom{h}{m} \alpha_{(i+m)} \right) + \sum_{j=0}^{q} b_j \theta^{i+h} (f_0)_{/t=1}$$

en donde b_i, α_j son los coeficientes de los polinomios G(r+1), L(r) respectivamente, y p=q=3. En este caso se reducen a:

$$b_3\alpha_{(3+h)} + b_2\alpha_{(2+h)} + b_1\alpha_{(1+h)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{h} \left\{ \binom{h}{m} a_3\alpha_{(3+m)} + \binom{h}{m} a_2\alpha_{(2+m)} + \binom{h}{m} a_1\alpha_{(1+m)} + \binom{h}{m} a_0\alpha_{(m)} \right\}$$

Así, para h=0,1,2, la relación es:

$$b_3\alpha_{(3)} + b_2\alpha_{(2)} + b_1\alpha_{(1)} = a_3\alpha_{(3)} + a_2\alpha_{(2)} + a_1\alpha_{(1)} + a_0$$

$$b_3\alpha_{(4)} + b_2\alpha_{(3)} + b_1\alpha_{(2)} = a_3\alpha_{(4)} + a_3\alpha_{(3)} + a_2\alpha_{(3)} + a_2\alpha_{(2)} + a_1\alpha_{(2)} + a_1\alpha_{(1)} + a_0\alpha_{(1)} + a_0$$

$$b_3\alpha_{(5)} + b_2\alpha_{(4)} + b_1\alpha_{(3)} = a_3\alpha_{(5)} + 2a_3\alpha_{(3)} + a_3\alpha_{(4)} + a_2\alpha_{(4)} + 2a_2\alpha_{(3)} +$$

$$+ a_2\alpha_{(2)} + a_1\alpha_{(3)} + 2a_1\alpha_{(2)} + a_1\alpha_{(1)} + a_0\alpha_{(2)} + 2a_0\alpha_{(1)} + a_0$$

y si $\lambda=1$, sustituyendo los coeficientes por su valor, queda:

$$(b_2-a_2)\alpha_{(2)} + (b_1-a_1)\alpha_{(1)} - a_0 = 0$$

$$(b_2-a_2-1)\alpha_{(3)} + (b_1-a_2-a_1)\alpha_{(2)} - (a_1+a_0)\alpha_{(1)} - a_0 = 0$$

$$(b_2-a_2-2)\alpha_{(4)} + (b_1-a_3-2a_2-a_1)\alpha_{(3)} - (a_2+2a_1+a_0)\alpha_{(2)} - (a_1+2a_0)\alpha_{(1)} - a_0 = 0$$

por lo que, si conocemos $\alpha_{(1)}$, podemos obtener los 4 primeros momentos respecto al origen. Y recordemos que:

$$\alpha_{(1)} = \frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=1} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ {}_3F_2(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_3+1,\gamma_1+1,\gamma_2+1;1)}{\gamma_1\ \gamma_2\ {}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2;1)}$$

4.3.4 Clasificación:

Vamos a clasificar las distintas posibilidades de f.m.p. según sean los parámetros:

Parámetros	*Condiciones*	*Rango*	*Tipo*
$\boxed{\gamma_1, \gamma_2 > 0}$			
i) $0<\lambda\leq 1$			
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$	$\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	I
$\alpha_1, \alpha_2 < 0, \notin\mathbb{Z}$; $\alpha_3 > 0$	$E\|\alpha_1\| = E\|\alpha_2\|$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IIa
$\alpha_1, \alpha_3 < 0, \notin\mathbb{Z}$; $\alpha_2 > 0$	$E\|\alpha_1\| = E\|\alpha_3\|$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IIb
$\alpha_2, \alpha_3 < 0, \notin\mathbb{Z}$; $\alpha_1 > 0$	$E\|\alpha_2\| = E\|\alpha_3\|$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IIc
ii) $0<\lambda$			
$\alpha_1, \alpha_2 < 0$, enteros; $\alpha_3 > 0$		$[0, \min_{i=1,2}\|\alpha_i\|]$	IIIa
$\alpha_1, \alpha_3 < 0$, enteros; $\alpha_2 > 0$		$[0, \min_{i=1,3}\|\alpha_i\|]$	IIIb
$\alpha_2, \alpha_3 < 0$, enteros; $\alpha_1 > 0$		$[0, \min_{i=2,3}\|\alpha_i\|]$	IIIc
$\alpha_1, \alpha_2 < 0, \alpha_1 \in\mathbb{Z}; \alpha_2 \notin\mathbb{Z}; \alpha_3 > 0$	$\|\alpha_2\| > \|\alpha_1\|-1$	$[0, \|\alpha_1\|]$	IVa

$\alpha_1,\alpha_2<0,\alpha_1\notin\mathbb{Z};\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_3>0$	$\lvert\alpha_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	IVb
$\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z};\alpha_1>0$	$\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	IVc
$\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2\notin\mathbb{Z};\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_1>0$	$\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	IVd
$\alpha_1,\alpha_3<0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z};\alpha_2>0$	$\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	IVe
$\alpha_1,\alpha_3<0,\alpha_1\notin\mathbb{Z};\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_2>0$	$\lvert\alpha_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	IVf

iii) $\lambda<0$

$\alpha_1<0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\quad \alpha_2,\alpha_3>0$		$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	Va
$\alpha_2<0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\quad \alpha_1,\alpha_3>0$		$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	Vb
$\alpha_3<0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\quad \alpha_1,\alpha_2>0$		$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	Vc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ ó $\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	VIa
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ ó $\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	VIb
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ ó $\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	VIc

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z},\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha_3\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert\right\}$	-1	$[0,\min\limits_{i=1,2}\lvert\alpha_i\rvert]$	VIIa
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}$	-1	$[0,\min\limits_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	VIIb
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_1\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}$	-1	$[0,\min\limits_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	VIIc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$			$[0,\min\limits_{i=1,2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	VIII

$\boxed{\gamma_1<0;\ \gamma_2>0}$

i) <u>$0<\lambda\leq 1$</u>

$\alpha_1<0,\alpha_1\notin\mathbb{Z};\quad\alpha_2,\alpha_3>0$	$E\lvert\alpha_1\rvert = E\lvert\gamma_1\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IXa
$\alpha_2<0,\alpha_2\notin\mathbb{Z};\quad\alpha_1,\alpha_3>0$	$E\lvert\alpha_2\rvert = E\lvert\gamma_1\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IXb
$\alpha_3<0,\alpha_3\notin\mathbb{Z};\quad\alpha_1,\alpha_2>0$	$E\lvert\alpha_3\rvert = E\lvert\gamma_1\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IXc

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	X
$\alpha_1<0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\quad \alpha_2,\alpha_3>0$	$\lvert\gamma_1\rvert > \lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XIa
$\alpha_2<0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\quad \alpha_1,\alpha_3>0$	$\lvert\gamma_1\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XIb
$\alpha_3<0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\quad \alpha_1,\alpha_2>0$	$\lvert\gamma_1\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XIc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1;E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ ó $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;\ \lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;\ \lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XIIa
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ ó $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;\ \lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;\ \lvert\alpha_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XIIb

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ ó $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;\lvert\alpha_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XIIc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z},\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $\lvert\alpha_3\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,2}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIIIa
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIIIb
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_1\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIIIc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIV

ii) $\lambda<0$

$\alpha_1,\alpha_2,<0;\alpha_3>0;\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XVa

$\alpha_1,\alpha_2,<0;\alpha_3>0;\alpha_1\notin\mathbb{Z};\alpha_2\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_1\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\alpha_1\rvert$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XVb
$\alpha_1,\alpha_3,<0;\alpha_2>0;\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert > \lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\alpha_3\rvert$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XVc
$\alpha_1,\alpha_3,<0;\alpha_2>0;\alpha_1\notin\mathbb{Z};\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_1\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\alpha_1\rvert$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XVd
$\alpha_2,\alpha_3,<0;\alpha_1>0;\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\alpha_3\rvert$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XVe
$\alpha_2,\alpha_3,<0;\alpha_1>0;\alpha_2\notin\mathbb{Z};\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\alpha_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XVf
$\alpha_1,\alpha_2,<0;\alpha_3>0;\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert> \min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,2}\lvert\alpha_i\rvert]$	XVIa
$\alpha_1,\alpha_3,<0;\alpha_2>0;\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert> \min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XVIb
$\alpha_2,\alpha_3,<0;\alpha_1>0;\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_1\rvert> \min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XVIc

$\boxed{\gamma_1>0;\ \gamma_2<0}$

i) $0<\lambda\leq 1$

$\alpha_1<0, \alpha_1\notin\mathbb{Z};\quad \alpha_2, \alpha_3>0$	$E\lvert\alpha_1\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ (\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IX'a
$\alpha_2<0, \alpha_2\notin\mathbb{Z};\quad \alpha_1, \alpha_3>0$	$E\lvert\alpha_2\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ (\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IX'b
$\alpha_3<0, \alpha_3\notin\mathbb{Z};\quad \alpha_1, \alpha_2>0$	$E\lvert\alpha_3\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ (\lambda=1)$	$[0,\infty)$	IX'c
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3<0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert; E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert; E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert; E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ (\lambda=1)$	$[0,\infty)$	X'
$\alpha_1<0, \alpha_1\in\mathbb{Z};\quad \alpha_2, \alpha_3>0$	$\lvert\gamma_2\rvert > \lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XI'a
$\alpha_2<0, \alpha_2\in\mathbb{Z};\quad \alpha_1, \alpha_3>0$	$\lvert\gamma_2\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XI'b
$\alpha_3<0, \alpha_3\in\mathbb{Z};\quad \alpha_1, \alpha_2>0$	$\lvert\gamma_2\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XI'c

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$

$|\gamma_2|>|\alpha_1|-1;E|\alpha_2|=E|\alpha_3|$

ó

$E|\alpha_2|=E|\gamma_2|;|\alpha_3|>|\alpha_1|-1$

ó

$E|\alpha_3|=E|\gamma_2|;|\alpha_2|>|\alpha_1|-1$

ó

$|\gamma_2|,|\alpha_2|,|\alpha_3|>|\alpha_1|-1$

$[0,|\alpha_1|]$ XII'a

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$

$|\gamma_2|>|\alpha_2|-1;E|\alpha_1|=E|\alpha_3|$

ó

$E|\alpha_1|=E|\gamma_2|;|\alpha_3|>|\alpha_2|-1$

ó

$E|\alpha_3|=E|\gamma_2|;|\alpha_1|>|\alpha_2|-1$

ó

$|\gamma_2|,|\alpha_1|,|\alpha_3|>|\alpha_2|-1$

$[0,|\alpha_2|]$ XII'b

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_2\notin\mathbb{Z}$

$|\gamma_2|>|\alpha_3|-1;E|\alpha_1|=E|\alpha_2|$

ó

$E|\alpha_1|=E|\gamma_2|;|\alpha_2|>|\alpha_3|-1$

ó

$E|\alpha_2|=E|\gamma_2|;|\alpha_1|>|\alpha_3|-1$

ó

$|\gamma_2|,|\alpha_1|,|\alpha_2|>|\alpha_3|-1$

$[0,|\alpha_3|]$ XII'c

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z},\alpha_3\notin\mathbb{Z}$

$E|\alpha_3|=E|\gamma_2|$

ó

$|\alpha_3|,|\gamma_2|>\min\left\{|\alpha_1|,|\alpha_2|\right\}-1$

$[0,\min_{i=1,2}|\alpha_i|]$ XIII'a

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert$ ó $\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIII'b
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_1\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert$ ó $\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIII'c
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XIV'

ii) <u>$\lambda<0$</u>

$\alpha_1,\alpha_2,<0;\alpha_3>0;\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_2\rvert > \lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_2\rvert = E\lvert\alpha_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XV'a
$\alpha_1,\alpha_2,<0;\alpha_3>0;\alpha_1\notin\mathbb{Z};\alpha_2\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_1\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_2\rvert = E\lvert\alpha_1\rvert$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XV'b
$\alpha_1,\alpha_3,<0;\alpha_2>0;\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert > \lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_2\rvert = E\lvert\alpha_3\rvert$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XV'c
$\alpha_1,\alpha_3,<0;\alpha_2>0;\alpha_1\notin\mathbb{Z};\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_1\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_2\rvert = E\lvert\alpha_1\rvert$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XV'd
$\alpha_2,\alpha_3,<0;\alpha_1>0;\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_2\rvert = E\lvert\alpha_3\rvert$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XV'e

$\alpha_2,\alpha_3,<0;\alpha_1>0;\alpha_2\notin\mathbb{Z};\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_2\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_2\rvert = E\lvert\alpha_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XV'f
$\alpha_1,\alpha_2,<0;\alpha_3>0;\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert> \min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,2}\lvert\alpha_i\rvert]$	XVI'a
$\alpha_1,\alpha_3,<0;\alpha_2>0;\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert> \min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XVI'b
$\alpha_2,\alpha_3,<0;\alpha_1>0;\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert> \min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XVI'c

$\boxed{\gamma_1,\ \gamma_2<0}$

i) $0<\lambda\leq 1$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0$	$E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$ $(\lambda<1)$	$[0,\infty)$	XVII
$\alpha_1,\alpha_2<0,\alpha_3>0,\alpha_1,\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	XVIIIa
$\alpha_1,\alpha_3<0,\alpha_2>0,\alpha_1,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	XVIIIb
$\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1>0,\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\alpha_2\rvert$ $\gamma_1+\gamma_2 > \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $(\lambda=1)$	$[0,\infty)$	XVIIIc

$\alpha_1,\alpha_2<0,\alpha_3>0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1;E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XIXa
$\alpha_1,\alpha_2<0,\alpha_3>0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_1\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\alpha_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XIXb
$\alpha_1,\alpha_3<0,\alpha_2>0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1;E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XIXc
$\alpha_1,\alpha_3<0,\alpha_2>0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_1\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\alpha_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XIXd

$\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1>0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1;E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\alpha_2\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_3\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XIXe
$\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1>0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\gamma_2\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1;E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert,\lvert\gamma_1\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XIXf
$\alpha_1,\alpha_2<0,\alpha_3>0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_2\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,2}\lvert\alpha_i\rvert]$	XXa
$\alpha_1,\alpha_3<0,\alpha_2>0,\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XXb
$\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1>0,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min\limits_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$	XXc

ii) $\lambda<0$

$\alpha_1<0;\ \alpha_2,\alpha_3>0;\alpha_1\in\mathbb{Z};$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert > \lvert\alpha_1\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XXIa
$\alpha_2<0;\ \alpha_1,\alpha_3>0;\alpha_2\in\mathbb{Z};$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert > \lvert\alpha_2\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XXIb
$\alpha_3<0;\ \alpha_1,\alpha_2>0;\alpha_3\in\mathbb{Z};$	$\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert > \lvert\alpha_3\rvert-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert = E\lvert\gamma_2\rvert$	$[0,\lvert\alpha_3\rvert]$	XXIc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1\in\mathbb{Z};\alpha_2,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ ó $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_1\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_1\rvert]$	XXIIa
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\alpha_3\rvert$ ó $E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;E\lvert\alpha_3\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert$ ó $\lvert\gamma_1\rvert,\lvert\gamma_2\rvert,\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert>\lvert\alpha_2\rvert-1$	$[0,\lvert\alpha_2\rvert]$	XXIIb

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_3\in\mathbb{Z};\alpha_1,\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$E\|\gamma_1\|=E\|\gamma_2\|;E\|\alpha_2\|=E\|\alpha_1\|$ ó $E\|\alpha_1\|=E\|\gamma_2\|;E\|\alpha_2\|=E\|\gamma_1\|$ ó $E\|\alpha_2\|=E\|\gamma_2\|;E\|\alpha_1\|=E\|\gamma_1\|$ ó $\|\gamma_1\|,\|\gamma_2\|,\|\alpha_1\|,\|\alpha_2\|>\|\alpha_3\|-1$	$[0,\|\alpha_3\|]$	XXIIc
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z},\alpha_3\notin\mathbb{Z}$	$E\|\alpha_3\|=E\|\gamma_2\|;$ $\|\gamma_1\|>\min\left\{\|\alpha_1\|,\|\alpha_2\|\right\}-1$ ó $E\|\alpha_3\|=E\|\gamma_1\|;$ $\|\gamma_2\|>\min\left\{\|\alpha_1\|,\|\alpha_2\|\right\}-1$ ó $E\|\gamma_1\|=E\|\gamma_2\|;$ $\|\alpha_3\|>\min\left\{\|\alpha_1\|,\|\alpha_2\|\right\}-1$ ó $\|\alpha_3\|,\underset{i=1,2}{\|\gamma_i\|}>\min\left\{\|\alpha_1\|,\|\alpha_2\|\right\}-1$	$[0,\min_{i=1,2}\|\alpha_i\|]$	XXIIIa

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_1,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_2\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;$ $\lvert\gamma_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$ ó $E\lvert\alpha_2\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;$ $\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;$ $\lvert\alpha_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$ ó $\lvert\alpha_2\rvert,\underset{i=1,2}{\lvert\gamma_i\rvert}>\min\left\{\lvert\alpha_1\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min_{i=1,3}\lvert\alpha_i\rvert]$ XXIIIb
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<0,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z},\alpha_1\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;$ $\lvert\gamma_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$ ó $E\lvert\alpha_1\rvert=E\lvert\gamma_1\rvert;$ $\lvert\gamma_2\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$ ó $E\lvert\gamma_1\rvert=E\lvert\gamma_2\rvert;$ $\lvert\alpha_1\rvert>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$ ó $\lvert\alpha_1\rvert,\underset{i=1,2}{\lvert\gamma_i\rvert}>\min\left\{\lvert\alpha_2\rvert,\lvert\alpha_3\rvert\right\}-1$	$[0,\min_{i=2,3}\lvert\alpha_i\rvert]$ XXIIIc

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$ $\quad \underset{i=1,2}{|\gamma_i| > \min}\left\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|\right\} - 1 \quad [0, \underset{i=1,2,3}{\min}|\alpha_i|]$ XXIV

$$E|\gamma_1| = E|\gamma_2|$$

Podemos resumir esta clasificación atendiendo al valor de los parámetros en la tabla siguiente. En ella se expresan los diversos valores del parámetro λ, según éste esté entre 0 y 1 (con lo que la serie es siempre convergente), sea mayor que cero o sea negativo; de los parámetros γ según sean positivos o negativos y de los valores de los parámetros del numerador, según sean positivos o negativos (distinguiendo en este caso su pertenencia o no a $\mathbb{Z}$). Por último, mencionamos el rango en cada caso de la distribución resultante, que puede ser finito o infinito.

TIPO	λ	γ	α	*RANGO*
I	$0<\lambda\leq 1$	>0	Todos >0	∞
II	$0<\lambda\leq 1$	>0	dos <0 y $\notin\mathbb{Z}$	∞
III	>0	>0	dos <0 y $\in\mathbb{Z}$	finito
IV	>0	>0	dos <0, uno $\in\mathbb{Z}$ y otro no	finito
V	<0	>0	un $\alpha<0$ y $\in\mathbb{Z}$	finito
VI	<0	>0	tres $\alpha<0$, uno $\in\mathbb{Z}$, otros no	finito
VII	<0	>0	tres $\alpha<0$, dos $\in\mathbb{Z}$, otro no	finito
VIII	<0	>0	tres $\alpha<0$, los tres $\in\mathbb{Z}$	finito
IX, IX'	$0<\lambda\leq 1$	uno <0	uno <0 y $\notin\mathbb{Z}$	∞
X, X'	$0<\lambda\leq 1$	uno <0	tres $\alpha<0$ y $\notin\mathbb{Z}$	∞
XI, XI'	>0	uno <0	un $\alpha<0$ y $\in\mathbb{Z}$	finito
XII, XII'	>0	uno <0	tres $\alpha<0$, uno $\in\mathbb{Z}$, otros no	finito
XIII, XIII'	>0	uno <0	tres $\alpha<0$, dos $\in\mathbb{Z}$, otro no	finito
XIV, XIV	>0	uno <0	tres $\alpha<0$, los tres $\in\mathbb{Z}$	finito
XV, XV'	<0	uno <0	dos <0, uno $\in\mathbb{Z}$ y otro no	finito
XVI, XVI	<0	uno <0	dos <0, ambos $\in\mathbb{Z}$	finito
XVII	$0<\lambda< 1$	dos <0	tres >0	∞
XVIII	$0<\lambda\leq 1$	dos <0	dos <0, $\notin\mathbb{Z}$	∞
XIX	$\lambda>0$	dos <0	dos <0, uno $\in\mathbb{Z}$, otro no	finito
XX	$\lambda>0$	dos <0	dos <0, ambos $\in\mathbb{Z}$	finito
XXI	$\lambda<0$	dos <0	uno <0 y $\in\mathbb{Z}$	finito
XXII	$\lambda<0$	dos <0	tres $\alpha<0$, uno $\in\mathbb{Z}$, otros no	finito
XXIII	$\lambda<0$	dos <0	tres $\alpha<0$, dos $\in\mathbb{Z}$, otro no	finito
XXIV	$\lambda<0$	dos <0	tres $\alpha<0$, los tres $\in\mathbb{Z}$	finito

4.4 Distribuciones generadas por ${}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)$.

4.4.1 F.m.p

Consideremos los polinomios:

$$G(r) = (\gamma_1+r)(\gamma_2+r)(\gamma_3+r)(r+1)$$
$$L(r) = (\alpha_1+r)(\alpha_2+r)(\alpha_3+r)(\alpha_4+r)\lambda$$

con α_i, $i=1,2,3,4$; γ_j, $j=1,2,3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En ese caso, la solución de la ecuación en diferencias

$$G(r)\ f_{r+1} - L(r)\ f_r = 0$$

viene dada por

$$f_r = \begin{cases} f_0 \displaystyle\prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} & r \geq 1 \\ f_0 & r = 0 \end{cases}$$

por tanto:

$$f_1 = f_0 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}$$

y en general:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\alpha_4)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!}$$

Para que sea función de masa de probabilidad, ha de verificar las condiciones del teorema 2.2.1.1.:

i) a) $L(r)\ G(r) > 0 \qquad \forall r \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{si } H = \emptyset$

b) $L(r)\ G(r) \geq 0 \qquad r = 0,1,\dots,m \quad \text{si } H \neq \emptyset$

con $m = \min \{ H \}$

la cual, se verifica.

$$ii) \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} = \sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\alpha_4)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!}$$

que es la función $f_0({}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda) - 1)$. Necesitamos que sea convergente, y al ser un caso particular de las funciones ${}_pF_q$ vistas en 2.3, veamos si verifica las condiciones de convergencia:

(a) Como $4 = 3+1$ converge $\forall |\lambda|<1$

(b) Para $|\lambda|=1$, si hacemos $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$, verifica:

$\text{Re}(w) > 0 \quad \Rightarrow$ absolutamente convergente

$-1 < \text{Re}(w) \leq 0 \quad \Rightarrow$ condicionalmente convergente

$\text{Re}(w) \leq -1 \quad \Rightarrow$ divergente.

iii) $f_0 = \dfrac{1}{1+\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\prod_{t=0}^{r-1}\frac{L(t)}{G(t)}} = \dfrac{1}{1+\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\alpha_4)_r\lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r r!}} =$

$$= \frac{1}{\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\alpha_4)_r\ \lambda^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r\ r!}} = \frac{1}{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)}$$

4.4.2. F.g.p.

La f.g.p. es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r\ t^r = f_0\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r(\alpha_3)_r(\alpha_4)_r(\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r(\gamma_2)_r(\gamma_3)_r r!}$$

$$= \frac{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda t)}{{}_4F_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\lambda)}$$

y para que exista es preciso que sea convergente en un entorno de t=1, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones que hemos mencionado anteriormente. En resumen, o bien $|\lambda|<1$ ($\Rightarrow|\lambda t|<1$, para un entorno de 1); o bien $|\lambda|=1$ y $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)>0$.

Vamos a calcular la ecuación diferencial que verifica la f.g.p., según el teorema 2.2.1.2. Para ello, vamos a expresar los polinomios L(r) y G(r) de la siguiente manera:

$$G(r) = \sum_{i=0}^{4} b_i (r+1)^i .$$

$$L(r) = \sum_{i=0}^{4} a_i r^i .$$

Comencemos con G(r):

$$G(r) = (\gamma_1+r)(\gamma_2+r)(\gamma_3+r)(r+1) =$$

$$r^4 + (\sum_{i=1}^{3} \gamma_i) r^3 + (\sum_{i=1}^{3} \gamma_i + \sum_{i\neq j}^{3} \gamma_i\gamma_j) r^2 + (\sum_{i\neq j}^{3} \gamma_i\gamma_j + \gamma_1\gamma_2\gamma_3) r + \gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

y eso ha de ser igual a:

$$G(r) = b_4(r+1)^4 + b_3(r+1)^3 + b_2(r+1)^2 + b_1(r+1) + b_0$$

Por tanto:

$$b_4 = 1$$

$$b_3 = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i - 3$$

$$b_2 = \sum_{i\neq j}^{3} \gamma_i\gamma_j + 3 - 2(\sum_{i=1}^{3} \gamma_i)$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i - \sum_{i\neq j}^{3} \gamma_i\gamma_j + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - 1$$

$$b_0 = 0$$

Y con L(r):

$$L(r) = (\alpha_1+r)(\alpha_2+r)(\alpha_3+r)(\alpha_4+r)\lambda$$

$$\lambda r^4 + \lambda(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i) r^3 + \lambda(\sum_{i\neq j}^{4} \alpha_i\alpha_j) r^2 + \lambda(\sum_{i\neq j\neq k}^{4} \alpha_i\alpha_j\alpha_k) r + \lambda\, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

luego:

$$a_4 = \lambda$$

$$a_3 = \lambda(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i)$$

$$a_2 = \lambda(\sum_{i\neq j}^{4} \alpha_i\alpha_j)$$

$$a_1 = \lambda(\sum_{i\neq j\neq k}^{4} \alpha_i\alpha_j\alpha_k)$$

$$a_o = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Por aplicación del teorema 2.2.1.2, la f.g.p. verifica la ecuación diferencial:

$$G(\theta)\, g(t) \;-\; t\, L(\theta)\, g(t) \;-\; b_o f_o = 0$$

y como:

$$G(\theta) = \theta^4 + (\sum_{i=1}^{3} \gamma_i - 3)\, \theta^3 + \left(\sum_{i\neq j}^{3} \gamma_i\gamma_j + 3 - 2(\sum_{i=1}^{3} \gamma_i)\right) \theta^2 + $$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{3} \gamma_i - \sum_{i\neq j}^{3} \gamma_i\gamma_j + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - 1\right)\theta$$

$$L(\theta) = \lambda\theta^4 + \lambda(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i)\theta^3 + \lambda(\sum_{i\neq j}^{4} \alpha_i\alpha_j)\theta^2 + \lambda(\sum_{i\neq j\neq k}^{4} \alpha_i\alpha_j\alpha_k)\theta + \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

la ecuación diferencial es:

$$(1-\lambda t)\theta^4 g(t) + \left[\sum_{i=1}^{3} \gamma_i - 3 - \lambda t(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i)\right]\theta^3 g(t) +$$

$$+\left[\left(\sum_{i\neq j}^{3}\gamma_i\gamma_j + 3 - 2\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\right)\right) - \lambda t\left(\sum_{i\neq j}^{4}\alpha_i\alpha_j\right)\right]\theta^2 g(t)+$$

$$+\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i - \sum_{i\neq j}^{3}\gamma_i\gamma_j + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - 1\right) - \lambda t\left(\sum_{i\neq j\neq k}^{4}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\right)\right]\theta g(t) - t\lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0$$

4.4.3 Momentos

La relación de recurrencia de momentos viene dada por el teorema 2.2.1.4, y es:

$$\sum_{j=0}^{q} b_j\alpha_{(j+h)} = \sum_{i=0}^{p} a_i\left(\sum_{m=0}^{h}\binom{h}{m}\alpha_{(i+m)}\right) + \sum_{j=0}^{q} b_j\theta^{i+h}\,(f_0)_{/t=1}$$

en donde b_i, α_j son los coeficientes de los polinomios G(r+1), L(r) respectivamente, y p=q=4. En este caso se reducen a:

$$b_4\alpha_{(4+h)} + b_3\alpha_{(3+h)} + b_2\alpha_{(2+h)} + b_1\alpha_{(1+h)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{h}\left\{\binom{h}{m}a_4\alpha_{(4+m)} + \binom{h}{m}a_3\alpha_{(3+m)} + \binom{h}{m}a_2\alpha_{(2+m)} + \binom{h}{m}a_1\alpha_{(1+m)} + \binom{h}{m}a_0\alpha_{(m)}\right\}$$

Sustituyendo y calculando para diversos h, se pueden calcular los diversos momentos. En este caso, y para poder trabajar con la relación de recurrencia, es preciso calcular los 2 primeros momentos con respecto al origen, a partir de la f.g.p. Y si suponemos λ=1:

$$\alpha_{(1)} = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=1} = \frac{\prod_{i=1}^{4} \alpha_i \; {}_4F_3(\alpha_1+1, \alpha_2+1, \alpha_3+1, \alpha_4+1, \gamma_1+1, \gamma_2+1, \gamma_3+1; 1)}{\prod_{i=1}^{3} \gamma_i \; {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; 1)}$$

$$\alpha_{(2)} = \frac{d^2}{dt^2} g(t)\Big|_{t=1} = \frac{\prod_{i=1}^{4} (\alpha_i)_2 \; {}_4F_3(\alpha_1+2, \alpha_2+2, \alpha_3+2, \alpha_4+2, \gamma_1+2, \gamma_2+2, \gamma_3+2; 1)}{\prod_{i=1}^{3} (\gamma_i)_2 \; {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; 1)}$$

4.5 Extension con coeficientes no polinomiales.

Ya dijimos (2.1) que una extensión natural de la distribución hipergeométrica consiste en variar los coeficientes de la ecuación en diferencias:

$$G(r)\, f_{r+1} - L(r)\, f_r = 0 \qquad r\in\mathbb{Z}^+ \tag{1}$$

donde

$$L : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$G : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

y que el caso más estudiado es cuando ambos coeficientes son funciones polinómicas. Vamos a tratar ahora una posible extensión cuándo los coeficientes son funciones exponenciales, aplicando los resultados generales vistos en 2.2

4.5.1 Función de masa de probabilidad:

Definamos:

$$L(r) = a^r$$
$$G(r) = a^{r+1} \qquad a\in\mathbb{R}$$

por tanto, la ecuación en diferencias vale:

$$a^{r+1} f_{r+1} - a^{r} f_{r} = 0 \qquad r \in \mathbb{Z}$$

para su solución, comprobemos que se verifican las hipótesis del teorema 2.2.1.1.

i) a) $L(r)\ G(r) > 0 \qquad \forall r \in \mathbb{Z}^{+} \qquad \text{si } H = \emptyset$

b) $L(r)\ G(r) \geq 0 \qquad r = 0,1,\ldots,m \quad \text{si } H \neq \emptyset$

con $m = \min \{ H \}$

en este caso, $H = \emptyset$, ya que $L(r) \neq 0\ \forall r$; y

$$L(r)\ G(r) = a^{r+1}\ a^{r} = a^{2r+1} > 0\ \forall r\ , \text{ si } a \geq 0$$

ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} < \infty$, pero

$$\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^{2}} + \ldots + \frac{1}{a^{r}} + \ldots \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{a^{r}}$$

que es una serie geométrica de razón $1/a$. Para que esta serie sea convergente y se verifique la condición es preciso que $a>1$. En ese caso:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{a^{r}} = \frac{1/a}{1 - 1/a} = \frac{1}{a - 1}$$

$$iii)\ f_0 = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a-1}} = \frac{a-1}{a}$$

por tanto, y por aplicación de 2.2.1.(2):

$$f_r = \begin{cases} \dfrac{a-1}{a}\,\dfrac{1}{a^r} & r \geq 1 \\ \dfrac{a-1}{a} & r = 0 \end{cases}$$

$\forall a>1$, es una verdadera distribución de probabilidad, y $\{f_r\}_{r\geq 0}$ es una función de masa de probabilidad.

4.5.2 Características

Para estudiar sus características, calculemos su función generatriz de probabilidad y de momentos:

(*i*) f.g.p.

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r f_r = \sum_{r=0}^{\infty} t^r \frac{a-1}{a}\,\frac{1}{a^r} = \frac{a-1}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^r$$

que es una serie geométrica de razón t/a que converge si $t < a$. Dado que para que exista la función generatriz de probabilidad ha de ser convergente para un entorno de uno, basta con que $t < a$ para que exista la f.g.p.. Y como $a>1$, siempre existe un t tal que:

$$1 < t < a$$

Luego la f.g.p. existe siempre, y su valor es:

$$g(t) = \frac{a-1}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{t}{a}\right) = \frac{a-1}{a} \frac{1}{1-\frac{t}{a}} = \frac{a-1}{a-t}.$$

(ii). f.g.m:

$$M_X(t) = E[e^{tr}] = \sum_{r=0}^{\infty} e^{tr} \frac{a-1}{a} \frac{1}{a^r} = \frac{a-1}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{a}\right)^r$$

que es una serie geométrica de razón e^t/a que converge si $e^t < a$. Dado que para que exista la función generatriz de momentos ha de ser convergente para un entorno de cero, basta con que $t < \ln a$ para que exista la f.g.m.. Y como $a>1$, siempre existe un t tal que:

$$0 < t < \ln a$$

Luego la f.g.m. existe siempre.

Su valor es:

$$M_X(t) = \frac{a-1}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{e^t}{a}\right)^r = \frac{a-1}{a} \frac{1}{1-\frac{e^t}{a}} = \frac{a-1}{a-e^t}$$

Vamos a calcular los momentos, empleando la f.g.m.

a) Esperanza:

$$E[X] = M'_X(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{a-1}{a-e^t}\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{e^t(a-1)}{(a-e^t)^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{a-1}$$

b) Varianza:

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = M''_X(t)\big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{a-1}{a-e^t}\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{a+1}{(a-1)^2}$$

$$V(X) = \frac{a+1}{(a-1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2} = \frac{a}{(a-1)^2}$$

c) Coeficientes de asimetría y curtosis de Fisher:

$$E[X^3] = M^{3)}_X(t)\big|_{t=0} = \frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{a-1}{a-e^t}\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{a^2+4a+1}{(a-1)^3}$$

$$\mu_3 = E[X^3] - 3E[X^2]E[X] + 2E[X]^3 =$$

$$= \frac{a^2+4a+1}{(a-1)^3} - \frac{3(a+1)}{(a-1)^3} + \frac{1}{(a-1)^3} = \frac{a(a+1)}{(a-1)^3}$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{V(X)^3}} = \frac{\dfrac{a(a+1)}{(a-1)^3}}{\dfrac{\sqrt{a^3}}{(a-1)^3}} = \frac{(a+1)}{a^{1/2}}\ .$$

luego siempre es asimétrica a la derecha.

$$E[X^4] = M_X^{4)}(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^4}{dt^4}\left(\frac{a-1}{a-e^t}\right)\Big|_{t=0} = \frac{a^3+11a^2+11a+1}{(a-1)^4}$$

$$\mu_4 = E[X^4] - 4E[X^3]E[X] + 6E[X^2]E[X]^2 - 3E[X]^4 = \frac{a^3+7a^2+a-6}{(a-1)^4}$$

Luego $\gamma_2 = \dfrac{a^3+7a^2+a-6}{a^2} - 3$

La existencia del momento de orden k está asegurada $\forall k>0$, ya que:

$$E[X^k] = \frac{a-1}{a}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r^k}{a^r}$$

y esta serie es absolutamente convergente, ya que es una serie de términos positivos y, por el criterio del cociente: Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y $\exists \lim_{n\to\infty}(a_n/a_{n-1}) = \alpha$. Si α es menor de 1, la serie es convergente.

En este caso:

$a_r = r^k/a^r$; $a_{r-1} = (r-1)^k/a^{r-1}$

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{\dfrac{r^k}{a^r}}{\dfrac{(r-1)^k}{a^{r-1}}} = \frac{r^k}{(r-1)^k}\,\frac{1}{a}$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{a_r}{a_{r-1}} = \lim_{r \to \infty} \frac{r^k}{(r-1)^k} \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1 \text{ (ya que a>1)}$$

y por tanto, la serie es convergente ∀k, lo que implica que existen todos los momentos y son finitos.

Su moda, además, siempre es el valor X=0.

4.5.3 Tabla de probabilidad.

r \ a	1.01	1.2	1.5	2	2.5	3	4	10	50
0	.00990	.16667	.33333	.5	.6	.66667	.75	.9	.98
1	.00980	.13889	.22222	.25	.24	.22222	.1875	.09	.01960
2	.00971	.11574	.14815	.125	.096	.07407	.04688	.009	.00039
3	.00961	.09645	.09877	.0625	.0384	.02469	.01172	.0009	.00001
4	.00951	.08038	.06584	.03125	.01536	.00823	.00293	.00009	
5	.00942	.06698	.04390	.01563	.00614	.00274	.00073	.000009	
6	.00933	.05582	.02926	.00781	.00246	.00091	.00018		
7	.00923	.04651	.01951	.00391	.00098	.00030	.00005		
8	.00914	.03876	.01301	.00195	.00039	.00010	.00001		
9	.00905	.03230	.00867	.00098	.00016	.00003			
10	.00896	.02692	.00578	.00049	.00006	.00001			
11	.00887	.02243	.00385	.00024	.00003				
12	.00878	.01869	.00257	.00012	.00001				
⋮									
100	.00366								
⋮									
200	.00135								

Su forma es de J transpuesta, tanto más apuntada cuanto mayor es el valor del parámetro a.

4.5.4 Estimación.

Dada una muestra, su función de verosimilitud es:

$$\mathbb{L}(x_1,\ldots,x_n;a) = \frac{a-1}{a^{x_1+1}}\cdots\frac{a-1}{a^{x_n+1}} = \frac{(a-1)^n}{a^{\sum x_i+n}}$$

su estimador de máxima verosimilitud es â:

$$\ln\mathbb{L}(x_1,\ldots,x_n;a) = n\ln(a-1) - (\sum x_i + n)\ln a$$

$$\frac{\delta}{\delta a}\mathbb{L}(x_1,\ldots,x_n;a) = \frac{n}{(a-1)} - \frac{\sum x_i + n}{a}$$

igualando a cero y resolviendo:

$$\frac{n}{(a-1)} - \frac{\sum x_i + n}{a} = 0 \Rightarrow an = (a-1)(\sum x_i + n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sum x_i = n + \sum x_i \qquad \Rightarrow \hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{n} + \sum \mathbf{x}_i}{\sum \mathbf{x}_i}.$$

Si calculamos el estimador por el método de los momentos:

$$\bar{x} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow \mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{1} + \bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{n + \sum x_i}{\sum x_i} = \hat{a}$$

y por tanto, ambos estimadores coinciden.

Información de Fisher:

$$P[X=x] = \frac{a-1}{a^{x+1}}$$

$$\ln P[X=x] = \ln(a-1) - (x+1)\ln a$$

$$\frac{\delta}{\delta a} P[X=x] = \frac{1}{(a-1)} - \frac{x+1}{a} = \frac{1-(a-1)x}{a(a-1)}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta a} P[X=x]\right)^2 = \left(\frac{1-(a-1)x}{a(a-1)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{a^2(a-1)^2}\left(1 - 2(a-1)x + (a-1)^2x^2\right)$$

$$E\left(\frac{\delta}{\delta a} P[X=x]\right)^2 = \frac{1}{a^2(a-1)^2}\left(1 - 2(a-1)E[X] + (a-1)^2E[X^2]\right) =$$

$$\frac{1}{a^2(a-1)^2}\left(1 - 2(a-1)\frac{1}{(a-1)} + (a-1)^2\frac{(a+1)}{(a-1)^2}\right) = \frac{1}{a(a-1)^2}$$

y por tanto:

$$\mathbb{I}_a(X) = \frac{1}{a(a-1)^2}$$

Luego la cota de Frechet-Cramer-Rao para la varianza de cualquier estimador insesgado es:

$$\mathrm{Var}T \geq \frac{a(a-1)^2}{n}$$

4.5.5 Propiedades de la v.a.

Veamos si esta distribución pertenece a la familia de leyes infinitamente divisibles. Para ello, utilizaremos el siguiente teorema (CHANG, 1989)

4.5.5.1 Teorema: Una condición suficiente para que una v.a. discreta con f.m.p. $\{p_{ij}\}$ sea infinitamente divisible es que $p_0>0$; $p_1>0$ y:

$$\frac{p_{j+1}}{p_j} \leq \left(\frac{i+1}{i}\right)\frac{p_{i+1}}{p_i} \qquad 0 \leq j \leq i;\ i \geq 0$$

Vamos pues a ver si la distribución verifica esa condición suficiente:

Evidentemente, $p_0>0$ y $p_1>0$. Además:

$$\frac{p_{j+1}}{p_j} = \frac{\dfrac{a-1}{a}\,\dfrac{1}{a^{j+1}}}{\dfrac{a-1}{a}\,\dfrac{1}{a^{j}}} = \frac{1}{a} = \frac{p_{i+1}}{p_i}$$

y como $\dfrac{1}{a} \leq \left(\dfrac{i+1}{i}\right)\dfrac{1}{a}$, $i\geq 0$, ya que $\left(\dfrac{i+1}{i}\right)>1$, se verifica la condición. Por tanto, esta v.a pertenece a las leyes infinitamente divisibles.

5.- FAMILIA DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS BIVARIANTES

5.1 Introducción.

En el capítulo anterior hemos estudiado varias familias de distribuciones de probabilidad obtenidas mediante la distribución hipergeométrica univariante de Gauss, ${}_2F_1$, así como a partir de extensiones univariantes de esta función hipergeométrica, obtenidas al aumentar el número de parámetros de la función, tanto en el numerador como en el denominador.

Otra extensión lógica de las distribuciones de Pearson discretas consiste en el paso a dos o más dimensiones. Así, la extensión bivariante de las distribuciones generadas por ${}_2F_1$ viene dada por las distribuciones generadas por las funciones bivariantes obtenidas por la extensión de la función de Gauss, como las estudiadas por APELL (1926).

Dentro de las cuatro funciones bivariantes que se obtienen por la extensión de la función de Gauss a partir del producto de dos de ellas y denominadas: $F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma,x,y)$; $F_2(\alpha,\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y)$; $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta';\gamma;x,y)$; $F_4(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';x,y)$, es la función F_1 la que con más intensidad ha sido estudiada, y de la que se conocen más resultados, como por ejemplo, un teorema de sumación general para el caso en que x=1=y. Igualmente es la más estudiada como función hipergeométrica bivariante de argumento matricial (MUIRHEAD 1982) para la generación de distribuciones por funciones hipergeométricas de argumento matricial.

El desarrollo del capítulo es similar al seguido en el capítulo anterior, en que, en primer lugar, incluíamos algunas familias particulares dentro de la familia global de distribuciones discretas generadas por ${}_2F_1$, y en segundo lugar, estudiábamos la extensión de esta familia de distribuciones a otra generada por otras distribuciones hipergeométricas univariantes que extienden a la función de Gauss.

Así pues, en la sección 5.2 estudiamos la distribución bivariante generalizada de Waring, extensión de la distribución univariante tratada en la sección 4.2.2, incardinándola dentro de la familia general de distribuciones generadas por la función hipergeométrica bivariante F_1, sistematizada por FAJARDO (1985). Esta inclusión nos permite un estudio detallado, mediante el cálculo del sistema de ecuaciones diferenciales que verifica su función generatriz de probabilidad; el cálculo de sus momentos y de las distribuciones marginales y condicionadas (que son distribuciones generalizadas de Waring univariantes) así como el estudio de la regresión, que es lineal. Asimismo proponemos un sistema de ecuaciones que permite estimar los parámetros de la distribución por el método de los momentos.

En la sección siguiente pasamos a estudiar distribuciones generadas por otra extensión bivariante de la función de Gauss, concretamente con la distribución F_3. Igualmente partimos de los polinomios coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias y calculamos la función de masa de probabilidad, función generatriz de probabilidas, sistema de ecuaciones diferenciales que verifica, cálculo de los momentos y de las distribuciones marginales y condicionadas (que son del tipo de las generadas por ${}_2F_1$), así como de la curva de regresión, que en este caso es no lineal, a diferencia de lo que ocurre con las distribuciones generadas por la función F_1.

En este estudio se presenta el inconveniente de la no existencia de un teorema general de sumación, lo que impide calcular la esperanza marginal de una de las variables; valor necesario para obtener los momentos mediante la relación de recurrencia obtenida. También se comprueba como el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad obtenida a traves del teorema general coincide con las propias de la función F_3.

En este caso nos tropezamos con el problema de lo poco estudiada que está esta función, de la que no hemos encontrado referencias bibliográficas con resultados generales. No obstante, a partir de una expresión debida a SRIVASTAVA (1984) hemos podido encontrar las condiciones que han de cumplir los parámetros para que la función sea convergente en el caso en que $x=y=1$, lo que permite construir sistematizar las posibles distribuciones que se obtienen, clasificándolas según los valores de los parámetros y el recorrido de ambas variables. Esta expresión es válida para encontrar un resultado particular del valor de la función, lo que permite construir un ejemplo detallado en que calculamos los valores de los momentos y la expresión de la matriz de varianzas-covarianzas. Finalmente hemos podido obtener una fórmula de sumación de una distribución F_3 más general que la empleada por SRIVASTAVA (1984), y que también permite el cálculo, tanto de las probabilidades exactas como de los momentos.

En la última sección del capítulo realizamos un estudio similar para la función F_4, obteniendo, del mismo modo, la expresión de la función de masa de probabilidad conjunta, la función generatriz de probabilidad; el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica tal función generatriz, la expresión de los momentos de la distribución bidimensional obtenida, así como el estudio de las distribuciones condicionadas y curvas de regresión, que también son no lineales.

5.2 Distribuciones generadas por la funcion hipergeométrica $F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\gamma,\ \lambda_1,\lambda_2)$

5.2.1 Distribución bivariante generalizada de Waring.

Si consideramos:

$$\alpha = a; \quad \beta_1 = k\ ; \quad \beta_2 = m; \quad \gamma = a + k + m + \rho; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

obtenemos los polinomios:

$$G(r,s) = (a+k+m+\rho + r + s)(r+1)$$
$$L(r,s) = (a + r + s)(k + r)$$
$$H(r,s) = (a+k+m+\rho + r + s)(s+1)$$
$$N(r,s) = (a + r + s)(m + s)$$

en donde a, k, m, $\rho \in \mathbb{R}$.

Como vimos en el apartado 2.2, la solución del sistema de ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)\ f_{r+1,s} - L(r,s)\ f_{r,s} = 0$$
$$H(r,s)\ f_{r,s+1} - N(r,s)\ f_{r,s} = 0$$

viene dada por (según el teorema 2.2.2.2):

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0} \dfrac{(a)_r (k)_r (m)_s}{(a+k+m+\rho)_{r+s}\ r!\ s!} & r,s \geq 1 \\ f_{0,0} \dfrac{(a)_r (k)_r}{(a+k+m+\rho)_r\, r!} & r \geq 1 \quad s = 0 \\ f_{0,0} \dfrac{(a)_s (m)_s}{(a+k+m+\rho)_s\, s!} & r = 0 \quad s \geq 1 \\ f_{0,0} & r = 0 \quad s = 0 \end{cases}$$

es solución del anterior sistema de ecuaciones diferenciales, y es una función de masa de probabilidad. Para que converja es preciso que ρ sea mayor que cero.

La f.g.p. es:

$$g(t_1,t_2) = \frac{F_1(a,k,m;a+k+m+\rho,t_1,t_2)}{F_1(a,k,m;a+k+m+\rho,1,1)}$$

que converge para $|t_1|\leq 1$; $|t_2|\leq 1$ si $\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\} < 1$

Las ecuaciones diferenciales que verifica tal función generatriz de probabilidad son:

$$(1-t_1)\theta_1^2 g(t_1,t_2) + \Big[a+k+\rho+m-1-t_1(a+k)\Big]\theta_1 g(t_1,t_2) +$$

$$+ (1-t_1)\theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) - t_1 k\theta_2 g(t_1,t_2) - t_1 akg(t_1,t_2) = 0$$

$$(1-t_2)\theta_2^2 g(t_1,t_2) + \left[a+k+\rho+m-1-t_2(a+m)\right]\theta_2 g(t_1,t_2) +$$

$$+ (1-t_2)\theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) - t_2 m\theta_1 g(t_1,t_2) - t_2 akg(t_1,t_2)= 0$$

Esta distribución se conoce como la DISTRIBUCION BIVARIANTE GENERALIZADA DE WARING (BGWD) y al igual que ocurre con el caso univariante tiene aplicación en el estudio de situaciones de accidentes en el contexto de propensión y riesgo de accidentes.

Igualmente, y por aplicación de los resultados de 2.2 podemos encontrar las relaciones entre momentos que nos permitan la estimación:

$$(a+k+m+\rho-1)\sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\alpha_{(1+f;j)} + \sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\alpha_{(1+f;1+j)} + \sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\alpha_{(2+f;j)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{f}\sum_{j=0}^{g}\binom{f}{i}\binom{g}{j}\left(ak\alpha_{(i;j)} + (a+k)\alpha_{(i+1;j)} + k\alpha_{(i;1+j)} + \alpha_{(1+i;1+j)} + \alpha_{(2+i;j)}\right).$$

$$(a+k+m+\rho-1)\sum_{i=0}^{f}\binom{f}{i}\alpha_{(i;1+g)} + \sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\alpha_{(1+i;1+g)} + \sum_{j=0}^{g}\binom{g}{j}\alpha_{(i;2+g)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{f}\sum_{j=0}^{g}\binom{f}{i}\binom{g}{j}\left(am\alpha_{(i;j)} + (a+m)\alpha_{(i;1+j)} + m\alpha_{(i+1;j)} + \alpha_{(1+i;1+j)} + \alpha_{(i;2+j)}\right).$$

Vamos a calcular ahora su vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas, por aplicación de las relaciones anteriores:

$$\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{ak}{\rho-1} \\ \dfrac{am}{\rho-1} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \dfrac{ak(a+\rho-1)(k+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \dfrac{akm(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \\ \dfrac{akm(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \dfrac{ak(a+\rho-1)(k+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \end{pmatrix}$$

y su matriz de correlación es:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\dfrac{km}{(k+\rho-1)(m+\rho-1)}} \\ \sqrt{\dfrac{km}{(k+\rho-1)(m+\rho-1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

Sus funciones de probabilidad condicionada son:

$$f_{r/s} = f_{0/s} \frac{(a+s)_r \, (k)_r}{(a+s+k+m+\rho)_r \, r!}$$

con lo que es una distribución UGWD(a+s, k; ρ+m).

Por otra parte:

$$f_{s/r} = f_{0/r} \frac{(a+r)_s \, (m)_s}{(a+r+k+m+\rho)_s \, s!}$$

con lo que es una distribución UGWD(a+r, m; ρ+k).

En consecuencia, sus curvas de regresión son:

$$\hat{\xi}_1 = E\left[\xi_1 / \xi_2 = s \right] = \frac{(a+s)k}{\rho+m-1}$$

$$\hat{\xi}_2 = E\left[\xi_2 / \xi_1 = r \right] = \frac{(a+r)m}{\rho+k-1}$$

y su regresión es lineal.

Del mismo modo, las distribuciones marginales son:

$$f_r = f_0 \frac{(a)_r \ (k)_r}{(a+k+\rho)_r \ r!} \quad ; \quad f_s = f_0 \frac{(a)_s \ (m)_s}{(a+m+\rho)_s \ s!}$$

y ambas son distribuciones de Waring Generalizadas Univariantes de parámetros (a, k; ρ) y (a, m; ρ) respectivamente.

Una aplicación de una distribución BGWD(a, k, m; ρ) a datos de accidentes en calles, ocurridos a 183 conductores de autobuses en Irlanda del Norte entre 1952-55 viene estudiada en XEKALAKI (1984).

5.3 Distribuciones generadas por la función hipergeométrica $F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma, \lambda_1,\lambda_2)$

5.3.1 f.m.p.

Consideremos los polinomios:

$$G(r,s) = (\gamma+r+s)(r+1)$$
$$L(r,s) = (\alpha_1+r)(\beta_1+r)\lambda_1$$
$$H(r,s) = (\gamma+r+s)(s+1)$$
$$N(r,s) = (\alpha_2+s)(\beta_2+s)\lambda_2$$

en donde α_i, β_j, γ, $\in\mathbb{R}$.

En ese caso, la solución del sistema de ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)\ f_{r+1,s} - L(r,s)\ f_{r,s} = 0$$
$$H(r,s)\ f_{r,s+1} - N(r,s)\ f_{r,s} = 0$$

donde

$$L,N : \mathbb{Z}^{+} x\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y

$$G,H : \mathbb{Z}^{+}\times\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

siendo f: $\mathbb{Z}^{+}\times\ \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función incógnita, viene dada por:

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0} \prod\limits_{t=0}^{r-1} \prod\limits_{t'=0}^{s-1} \dfrac{L(t,s)}{G(t,s)} \dfrac{N(0,t')}{H(0,t')} & r,s \geq 1 \\ f_{0,0} \prod\limits_{t=0}^{r-1} \dfrac{L(t,0)}{G(t,0)} & r \geq 1 \quad s = 0 \\ f_{0,0} \prod\limits_{t'=0}^{s-1} \dfrac{N(0,t')}{H(0,t')} & r = 0 \quad s \geq 1 \\ f_{0,0} & r = 0 \quad s = 0 \end{cases}$$

fijada $f_{0,0}$ para que sea distinta de cero. y siempre que se verifique la c.n.s de que

$$\frac{L(r,s+1)}{G(r,s+1)} \frac{N(r,s)}{H(r,s)} = \frac{N(r+1,s)}{H(r+1,s)} \frac{L(r,s)}{G(r,s)}$$

$\forall r,s \in \mathbb{Z}^{+}$ tal que $f_{r,s} \neq 0$.

En este caso:

$$\frac{L(r,s+1)}{G(r,s+1)} \frac{N(r,s)}{H(r,s)} = \frac{(\alpha_1+r)(\beta_1+r)\lambda_1}{(\gamma+r+s+1)(r+1)} \frac{(\alpha_2+s)(\beta_2+s)\lambda_2}{(\gamma+r+s)(s+1)}$$

y

$$\frac{N(r+1,s)}{H(r+1,s)} \quad \frac{L(r,s)}{G(r,s)} = \frac{(\alpha_2+s)(\beta_2+s)\lambda_2}{(\gamma+r+1+s)(s+1)} \quad \frac{(\alpha_1+r)(\beta_1+r)\lambda_1}{(\gamma+r+s)(r+1)}$$

que, como puede verse, son iguales.

Por consiguiente, y según el teorema 2.2.2.2,

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0}\dfrac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_s(\beta_1)_r(\beta_2)_s\lambda_1^r\lambda_2^s}{(\gamma)_{r+s}\ r!\ s!} & r,s \geq 1 \\[2ex] f_{0,0}\dfrac{(\alpha_1)_r(\beta_1)_r\lambda_1^r}{(\gamma)_r\ r!} & r \geq 1 \quad s = 0 \\[2ex] f_{0,0}\dfrac{(\alpha_2)_s(\beta_2)_s\lambda_2^s}{(\gamma)_s s!} & r = 0 \quad s \geq 1 \\[2ex] f_{0,0} & r = 0 \quad s = 0 \end{cases}$$

es solución del anterior sistema de ecuaciones diferenciales.

Para que esa $f_{r,s}$ sea función de masa de probabilidad, ha de verificar las condiciones del teorema 2.2.2.3:

a) Condición de positividad

$$\left.\begin{array}{l} L(r,s)G(r,s) \geq 0 \\ N(r,s)H(r,s) \geq 0 \end{array}\right. \quad \forall\ r,s \in \mathcal{H}$$

b) Condición de convergencia:

$$\sum_{\substack{r=0 \\ r,s\in\mathcal{H};\ r+s\neq 0}}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)} \frac{N(0,t')}{H(0,t')} = F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,\lambda_1,\lambda_2) - 1$$

que converge para $\text{máx}\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\} < 1$.

c) Condición de normalidad:

$$f_{0,0} = \frac{1}{1+F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,\lambda_1,\lambda_2) - 1} = \frac{1}{F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,\lambda_1,\lambda_2)}.$$

5.3.2 Convergencia para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Veamos ahora el rango de convergencia para la función hipergeométrica bivariante $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,1,1)$, en donde α, α', β, β', $\gamma \in \mathbb{R}$.

Sabemos que por la definición de F_3 :

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} \, {}_2F_1(\alpha',\beta';\gamma+m;y) \frac{x^m}{m!}$$

y sustituyendo x,y por 1,1

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,1,1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} \, {}_2F_1(\alpha',\beta';\gamma+m;1) \frac{1^m}{m!}$$

Vamos a estudiar su convergencia. Dado que en cada término de la serie resultante aparece una ${}_2F_1$, es preciso en primer lugar que ésta sea convergente. Es decir, que

$$\gamma+m > \alpha'+\beta' \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \gamma > \alpha' + \beta'$$

Si esa condición se verifica, entonces por el teorema de sumación de Gauss:

$${}_2F_1(\alpha',\beta',\gamma+m,1) = \frac{\Gamma(\gamma+m)(\Gamma(\gamma+m-\alpha'-\beta')}{\Gamma(\gamma+m-\alpha')\Gamma(\gamma+m-\beta')}$$

En consecuencia:

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,1,1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m} \frac{\Gamma(\gamma+m)(\Gamma(\gamma+m-\alpha'-\beta')}{\Gamma(\gamma+m-\alpha')\Gamma(\gamma+m-\beta')} \frac{1^m}{m!}$$

Vamos a expresar las funciones Gamma dependiendo de los símbolos de Pocchamer, ya que:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

con lo que:

$$\Gamma(\gamma+m) = (\gamma)_m\,\Gamma(\gamma)$$
$$\Gamma(\gamma+m-\alpha'-\beta') = (\gamma-\alpha'-\beta')_m\,\Gamma(\gamma-\alpha'-\beta')$$
$$\Gamma(\gamma+m-\alpha') = (\gamma-\alpha')_m\,\Gamma(\gamma-\alpha')$$
$$\Gamma(\gamma+m-\beta') = (\gamma-\beta')_m\,\Gamma(\gamma-\beta')$$

Expresando esas igualdades en F_3 y simplificando:

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,1,1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m \; \Gamma(\gamma)(\gamma-\alpha'-\beta')_m \; \Gamma(\gamma-\alpha'-\beta') \; 1^m}{(\gamma-\alpha')_m\Gamma(\gamma-\alpha')(\gamma-\beta')_m\Gamma(\gamma-\beta') \; m!} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha'-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha')\Gamma(\gamma-\beta')} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-\alpha'-\beta')_m}{(\gamma-\alpha')_m(\gamma-\beta')_m} \frac{1^m}{m!} \Rightarrow$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha'-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha')\Gamma(\gamma-\beta')} \; {}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma-\alpha'-\beta';\gamma-\alpha',\gamma-\beta';1)$$

Por tanto, y supuesto que $\gamma > \alpha'+\beta'$, para estudiar la convergencia de $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,1,1)$, basta con ver la convergencia de ${}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma-\alpha'-\beta';\gamma-\alpha',\gamma-\beta';1)$, que ya es una función hipergeométrica univariante. Recordemos que la c.n.s para la convergencia de esa función es que:

$$\gamma-\alpha' + \gamma-\beta' - \alpha - \beta - \gamma+\alpha'+\beta' > 0 \Rightarrow \gamma > \alpha + \beta$$

En consecuencia, la c.n.s. para que $F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,1,1)$ sea convergente es que

$$\gamma > \text{máx} \left\{ (\alpha + \beta) \; ; \; (\alpha' + \beta') \right\}$$

5.3.3. F.g.p.

La f.g.p. es:

$$g(t_1,t_2) = f_{00} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_s(\beta_1)_r(\beta_2)_s(\lambda_1 t_1)^r \; (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma)_{r+s} \; r! \; s!}$$

$$= \frac{F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,\lambda_1 t_1,\lambda_2 t_2)}{F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,\lambda_1,\lambda_2)}$$

que converge para $|t_1|\le 1$; $|t_2|\le 1$ si $\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\} < 1$

Vamos a calcular las ecuaciones diferenciales que verifica la f.g.p., según el teorema 2.2.2.4. Para ello, vamos a expresar los polinomios L(r,s), G(r,s), N(r,s), H(r,s), de la siguiente manera:

$$G(r,s) = \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2} b_{k_1,k_2}(r+1)^{k_1}s^{k_2}$$

$$L(r,s) = \sum_{j_1=0}^{2}\sum_{j_2=0}^{2} a_{j_1,j_2}r^{j_1}s^{j_2}$$

$$N(r,s) = \sum_{i_1=0}^{2}\sum_{i_2=0}^{2} c_{i_1,i_2}r^{i_1}s^{i_2}$$

$$H(r,s) = \sum_{l_1=0}^{2}\sum_{l_2=0}^{2} d_{l_1,l_2}(r+1)^{l_1}s^{l_2}$$

Comencemos con G(r,s)

$$G(r,s) = r^2 + (\gamma+1)r + rs + \gamma + s$$

y eso a de ser igual a:

$$b_{00} + b_{01}s + b_{10}(r+1) + b_{11}(r+1)s + b_{20}(r+1)^2 + b_{02}s^2 +$$
$$+ b_{12}(r+1)s^2 + b_{21}(r+1)^2 s + b_{22}(r+1)^2 s^2$$

Por tanto, igualando término a término:

$b_{12} = b_{21} = b_{01} = b_{02} = b_{22} = 0; \quad b_{20} = 1; \; b_{10} = (\gamma-1); \; b_{11} = 1; \; b_{00} = 0$

y el polinomio es:

$$G(r,s) = 0 + (\gamma-1)(r+1) + (r+1)s + (r+1)^2.$$

Del mismo modo:

$$H(r,s) = 0 + (\gamma-1)(s+1) + r(s+1) + (s+1)^2.$$

y los otros dos:

$$L(r,s) = \alpha_1\beta_1\lambda_1 + (\alpha_1+\beta_1)\lambda_1 r + \lambda_1 r^2$$

$$N(r,s) = \alpha_2\beta_2\lambda_2 + (\alpha_2+\beta_2)\lambda_2 s + \lambda_2 s^2$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica $g(t_1,t_2)$ es:

$$(1-\lambda_1 t_1)\theta_1^2 g(t_1,t_2) + \left[\gamma-1-t_1(\alpha_1+\beta_1)\lambda_1\right]\theta_1 g(t_1,t_2) + \\ + \theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) - t_1\alpha_1\beta_1\lambda_1 g(t_1,t_2) = 0$$

$$(1-\lambda_2 t_2)\theta_2^2 g(t_1,t_2) + \left[\gamma-1-t_2(\alpha_2+\beta_2)\lambda_2\right]\theta_2 g(t_1,t_2) + \\ + \theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) - t_2\alpha_2\beta_2\lambda_2 g(t_1,t_2) = 0$$

Vamos a comparar estas espresiones, al igual que hicimos con las de la función F_1, con las ecuaciones diferenciales que verifica la función $F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma,t_1,t_2)$. Estas son (STEIN, 1956):

$$t_1(1-t_1)\frac{\partial^2 F_3}{\partial t_1^2} + t_2\frac{\partial^2 F_3}{\partial t_1 \partial t_2} + \left(\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)t_1\right)\frac{\partial F_3}{\partial t_1} - \alpha_1\beta_1 F_3 = 0$$

$$t_2(1-t_2)\frac{\partial^2 F_3}{\partial t_2^2} + t_1\frac{\partial^2 F_3}{\partial t_1 \partial t_2} + \left(\gamma-(\alpha_2+\beta_2+1)t_2\right)\frac{\partial F_3}{\partial t_2} - \alpha_2\beta_2 F_3 = 0$$

Vamos a comprobarlo con la primera de ellas, y para simplificar, supondremos $\lambda_1=\lambda_2=1$. (Con la segunda ecuación se actúa de manera análoga). Multiplicando por t_1:

$$t_1^2(1-t_1)\frac{\partial^2 F_3}{\partial t_1^2} + t_1 t_2\frac{\partial^2 F_3}{\partial t_1 \partial t_2} + \left(\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)t_1\right)t_1\frac{\partial F_3}{\partial t_1} - \alpha_1\beta_1 t_1 F_3 = 0$$

y dado que $t^2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \theta^2 - \theta$, según vimos en 4.3, tenemos:

$$\left[(\theta^2-\theta) - t_1(\theta^2-\theta) + \theta_1\theta_2 + \left(\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)t_1\right)\theta_1 - \alpha_1\beta_1 t_1\right]F_3 = 0$$

reagrupando términos en la expresión anterior obtenemos:

$$(1-t_1)\theta_1^2 F_3 + \left[\gamma-1-t_1(\alpha_1+\beta_1)\right]\theta_1 F_3 + \theta_1\theta_2 F_3 - t_1\alpha_1\beta_1 F_3 = 0$$

y sustituyendo la expresión general de F_3 por la función concreta en este caso, $g(t_1,t_2)$, obtenemos la igualdad buscada.

5.3.4 Momentos.

Para obtener las relaciones de recurrencia entre momentos, empleamos el resultado del teorema 2.2.2 6. En este caso, y sustituyendo los polinomios por sus expresiones anteriores, la primera relación es:

$$\sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(k_1+f;k_2+m)}\right] -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1,i_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\alpha_{(i_1+h;i_2+m)}\right] =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{p_1}\sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1,k_2}\left[\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\theta_1^{(k_1+f)}\theta_2^{(k_2+m)}\left(\sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s}t_2^{s}\right)\right]_{\substack{t_1=1\\ t_2=1}}$$

En este caso, queda:

$$(\gamma-1)\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(1+f;m)} + \sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(1+f;1+m)} + \sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(2+f;m)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\left(\alpha_1\beta_1\alpha_{(h;m)} + (\alpha_1+\beta_1)\alpha_{(h+1;m)} + \alpha_{(h+2;m)}\right).$$

Sustituyendo para obtener los primeros momentos, obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\left(\gamma-1 - (\alpha_1+\beta_1)\right)\alpha_{(1,0)} + \alpha_{(1,1)} = \alpha_1\beta_1,$$

$$\left(\gamma-1-(\alpha_1+\beta_1)\right)\alpha_{(1,0)} + \left(\gamma-(\alpha_1+\beta_1)\right)\alpha_{(1,1)} + \alpha_{(1,2)} - \alpha_1\beta_1\alpha_{(0,1)} = \alpha_1\beta_1$$

$$\left(\gamma-2-(\alpha_1+\beta_1)\right)\alpha_{(2,0)} + \alpha_{(2,1)} - \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1+\beta_1\right)\alpha_{(1,0)} = \alpha_1\beta_1$$

La segunda relación de recurrencia de momentos:

$$\sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(l_1+h)(l_2+g)}\right] -$$

$$-\sum_{j_1=0}^{h_1} \sum_{j_2=0}^{h_2} c_{j_1,j_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\alpha_{(j_1+h)(j_2+m)}\right] =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1,l_2}\left[\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\theta_1^{(l_1+h)}\theta_2^{(l_2+g)}\left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0}t_1^r\right)\right]_{\substack{t_1=1\\ t_2=1}}$$

y en este caso queda (con d y c los coeficientes vistos anteriormente):

$$(\gamma-1)\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(h;1+g)} + \sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(1+h;1+g)} + \sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(h;2+g)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\left(\alpha_2\beta_2\alpha_{(h;m)} + (\alpha_2+\beta_2)\alpha_{(h;m+1)} + \alpha_{(h;2+m)}\right).$$

Por tanto, sustituyendo los primeros momentos:

$$\left(\gamma-1 - (\alpha_2+\beta_2)\right)\alpha_{(0,1)} + \alpha_{(1,1)} = \alpha_2\beta_2,$$

$$\left(\gamma-1-(\alpha_2+\beta_2)\right)\alpha_{(0,1)} + \left(\gamma-(\alpha_2+\beta_2)\right)\alpha_{(1,1)} +\alpha_{(2,1)}-\alpha_2\beta_2\alpha_{(1,0)} = \alpha_2\beta_2$$

$$\left(\gamma-2-(\alpha_2+\beta_2)\right)\alpha_{(0,2)}+ \alpha_{(1,2)}- \left(\alpha_2\beta_2+ \alpha_2+\beta_2\right)\alpha_{(0,1)} = \alpha_2\beta_2 .$$

Por consiguiente, conociendo una media marginal, podemos obtener los demás momentos a partir de esas ecuaciones. Si suponemos λ_1, $\lambda_2 = 1$, la media marginal de la primera variable puede obtenerse derivando la f.g.p. respecto de t_1 y sustituyendo para $t_1 = t_2 = 1$.

$$\frac{\partial}{\partial t_1} g(t_1, t_2) = f_{0,0} \frac{\partial}{\partial t_1} F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, t_1, t_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(X_1) = f_{0,0} \frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma} F_3(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \beta_1 + 1, \beta_2, \gamma + 1, 1, 1).$$

que existe siempre que $\gamma > \max\{ \alpha_1 + \beta_1 + 1 \ ; \ \alpha_2 + \beta_2 \}$.

5.3.5 Clasificación:

Vamos a establecer ahora una clasificación para los diversos valores que puede adoptar una distribución de probabilidad bivariante generada por una distribución hipergeométrica del tipo $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; 1,1)$. Recordemos que para que esa función sea convergente es preciso que:

$$\gamma > \text{máx} \left\{ (\alpha - \beta) \ ; \ (\alpha' + \beta') \right\}$$

y para que sea función de masa de probabilidad ha de verificar que todos los sumandos de esa serie (que es la función de masa de probabilidad) sean no negativos.

A. $\boxed{\gamma > 0:}$

α β α' β'	Condiciones	recorrido	Tipo
$\underline{\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0}$			
$\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$	$\gamma > \text{máx}\left\{(\alpha-\beta); (\alpha'+\beta')\right\}$	$r, s \in \mathbb{Z}^+$	I
$\underline{\alpha\ ,\ \beta < 0\ ;\ \alpha',\ \beta' > 0}$			
$\alpha\ ,\ \beta \notin \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha'+\beta'$ $E\|\alpha\| = E\|\beta\|$	$r, s \in \mathbb{Z}^+$	II
$\alpha \in \mathbb{Z}\ , \beta \notin \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha'+\beta'$ $\|\beta\| > \|\alpha\| - 1$	$r, s \in \mathbb{Z}^+ / \ r \leq \|\alpha\|$	IIIa
$\alpha \notin \mathbb{Z}\ , \beta \in \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha'+\beta'$ $\|\alpha\| > \|\beta\| - 1$	$r, s \in \mathbb{Z}^+ / \ r \leq \|\beta\|$	IIIb
$\alpha \in \mathbb{Z}\ , \beta \in \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha'+\beta'$	$r, s \in \mathbb{Z}^+ / \ r \leq \min\{\|\alpha\|, \|\beta\|\}$	IV
$\underline{\alpha\ ,\ \beta > 0\ ;\ \alpha',\ \beta' < 0}$			
$\alpha',\ \beta' \notin \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha+\beta$ $E\|\alpha'\| = E\|\beta'\|$	$r, s \in \mathbb{Z}^+$	II'
$\alpha' \in \mathbb{Z}\ , \beta' \notin \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha+\beta$ $\|\beta'\| > \|\alpha'\| - 1$	$r, s \in \mathbb{Z}^+ / \ s \leq \|\alpha'\|$	III'a
$\alpha' \notin \mathbb{Z}\ , \beta' \in \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha+\beta$ $\|\alpha'\| > \|\beta'\| - 1$	$r, s \in \mathbb{Z}^+ / \ s \leq \|\beta'\|$	III'b

$\alpha' \in \mathbb{Z}$, $\beta' \in \mathbb{Z}$	$\gamma > \alpha+\beta$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ s\le\min\{\lvert\alpha'\rvert,\lvert\beta'\rvert\}$	IV'

$\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \alpha'\ ,\ \beta'\ <\ 0$

$\alpha\notin\mathbb{Z}\ ,\ \beta\notin\mathbb{Z}$

$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha\rvert=E\lvert\beta\rvert$ $E\lvert\alpha'\rvert=E\lvert\beta'\rvert$	$r,s\in\mathbb{Z}^+$	V
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha\rvert=E\lvert\beta\rvert$ $\lvert\beta'\rvert>\lvert\alpha'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ s\le\lvert\alpha'\rvert$	VIa
$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha\rvert=E\lvert\beta\rvert$ $\lvert\alpha'\rvert>\lvert\beta'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ s\le\lvert\beta'\rvert$	VIb
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha\rvert=E\lvert\beta\rvert$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ s\le\min\{\lvert\alpha'\rvert,\lvert\beta'\rvert\}$	VII

$\alpha\in\mathbb{Z}\ ,\ \beta\notin\mathbb{Z}$

$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\beta\rvert>\lvert\alpha\rvert-1$ $E\lvert\alpha'\rvert=E\lvert\beta'\rvert$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\alpha\rvert$	VI'a
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\beta\rvert>\lvert\alpha\rvert-1$ $\lvert\beta'\rvert>\lvert\alpha'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\alpha\rvert\ ;\ s\le\lvert\alpha'\rvert$	VIIIa
$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$\lvert\beta\rvert>\lvert\alpha\rvert-1$ $\lvert\alpha'\rvert>\lvert\beta'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\alpha\rvert\ ;\ s\le\lvert\beta'\rvert$	VIIIb
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$\lvert\beta\rvert>\lvert\alpha\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\alpha\rvert$ $s\le\min\{\lvert\alpha'\rvert,\lvert\beta'\rvert\}$	IXa

$\alpha\notin\mathbb{Z}\ ,\ \beta\in\mathbb{Z}$

$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha\rvert>\lvert\beta\rvert-1$ $E\lvert\alpha'\rvert=E\lvert\beta'\rvert$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\beta\rvert$	VI'b
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha\rvert>\lvert\beta\rvert-1$ $\lvert\beta'\rvert>\lvert\alpha'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\beta\rvert\ ;\ s\le\lvert\alpha'\rvert$	VIIIc
$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha\rvert>\lvert\beta\rvert-1$ $\lvert\alpha'\rvert>\lvert\beta'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\beta\rvert\ ;\ s\le\lvert\beta'\rvert$	VIIId
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha\rvert>\lvert\beta\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\lvert\beta\rvert$ $s\le\min\{\lvert\alpha'\rvert,\lvert\beta'\rvert\}$	IXb

<u>$\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}$</u>

$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$E\lvert\alpha'\rvert>E\lvert\beta'\rvert$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\min\{\lvert\alpha\rvert,\lvert\beta\rvert\}$	VII'
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\notin\mathbb{Z}$	$\lvert\beta'\rvert>\lvert\alpha'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\min\{\lvert\alpha\rvert,\lvert\beta\rvert\}$ $s\le\lvert\alpha'\rvert$	IXc
$\alpha'\notin\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$	$\lvert\alpha'\rvert>\lvert\beta'\rvert-1$	$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\min\{\lvert\alpha\rvert,\lvert\beta\rvert\}$ $s\le\lvert\beta'\rvert$	IXd
$\alpha'\in\mathbb{Z},\ \beta'\in\mathbb{Z}$		$r,s\in\mathbb{Z}^+/\ r\le\min\{\lvert\alpha\rvert,\lvert\beta\rvert\}$ $s\le\min\{\lvert\alpha'\rvert,\lvert\beta'\rvert\}$	X

$\mathbb{B}$. $\boxed{\gamma<0}$

Este caso no puede darse, ya que entonces es imposible asegurar que $f_{r,s}\ge 0\ \forall r,s\in\mathbb{Z}^+$.

5.3.6 Regresión:

Según el teorema 2.2.2.7, siempre que sea posible expresar la f.m.p. conjunta como:

$$f_{r,s} = f_{r/s}\, f_s \qquad\qquad y \qquad\qquad f_{r,s} = f_{s/r}\, f_r$$

entonces:

a) Las funciones de probabilidad condicionadas verifican las ecuaciones en diferencias:

$$\begin{array}{lll} G(r,s) f_{r+1/s} - L(r,s)\, f_{r/s} = 0 & & \text{si } f_s > 0 \\ H(r,s) f_{s+1/r} - N(r,s)\, f_{s/r} = 0 & & \text{si } f_r > 0 \end{array}$$

respectivamente.

b) Calculadas las anteriores, sus funciones de probabilidad marginales verifican las ecuaciones en diferencias:

$$\begin{array}{l} G(r,s) f_{s/r+1}\, f_{r+1} - L(r,s)\, f_{s/r}\, f_r = 0 \\ H(r,s) f_{r/s+1}\, f_{s+1} - N(r,s)\, f_{r/s}\, f_s = 0 \end{array}$$

Vamos a calcular, en este caso, las funciones de masa de probabilidad condicionada. Según vimos en 2.2.1.(2), la solución de cada una de esas ecuaciones en diferencias es:

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_0 \displaystyle\prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)} & r \geq 1 \\ f_0 & r = 0 \end{cases}$$

por tanto, y según la expresión de G y de L

$$f_{r/s} = \begin{cases} f_{0/s} \dfrac{(\alpha_1)_r \, (\beta_1)_r \, \lambda_1^r}{(\gamma+s)_r \; r!} & r \geq 1 \\ f_{0/s} & r = 0 \end{cases}$$

en donde:

$$f_{0/s} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma+s; \lambda_1)}$$

y su f.g.p

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma+s; \lambda_1 t)}{{}_2F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma+s; \lambda_1)} \qquad s \in \mathbb{N}$$

y es una funcion de masa de probabilidad de las estudiadas por FAJARDO.

Del mismo modo:

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_{0/r} \dfrac{(\alpha_2)_s \, (\beta_2)_s \, \lambda_2^s}{(\gamma+r)_s \; s!} & s \geq 1 \\ f_{0/r} & s = 0 \end{cases}$$

en donde:

$$f_{0/r} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma+r; \lambda_2)}$$

y su f.g.p

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma+r; \lambda_2 t)}{{}_2F_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma+r; \lambda_2)} \qquad s \in \mathbb{N}$$

5.3.7 Ejemplo.

Vamos a estudiar un caso particular de distribución de este tipo. Para ello, nos vamos a basar en el siguiente resultado (2.3.2.26):

$$F_3(a,b,1,1,a+b,x,y) = (x+y-xy)^{-1}\left[x\,{}_2F_1(a,1,a+b;x)+y\,{}_2F_1(b,1,a+b;y)\right]$$

Si hacemos x=y=1

$$F_3(a,b,1,1,a+b,1,1) = \left[\,{}_2F_1(a,1,a+b;1)+\,{}_2F_1(b,1,a+b;1)\right]$$

y por condiciones de convergencia de ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,1)$, esa serie converge si Re(a-1)>0; Re(b-1)>0.

Aplicando el Teorema de sumación de Gauss y simplificando:

$${}_2F_1(a,1,a+b;1) = \frac{\Gamma(a+b)\ \Gamma(a+b-a-1)}{\Gamma(a+b-a)\Gamma(a+b-1)} = \frac{\Gamma(a+b)\ \Gamma(b-1)}{\Gamma(b)\Gamma(a+b-1)} =$$

$$\frac{(a+b-1)\Gamma(a+b-1)\Gamma(b-1)}{(b-1)\Gamma(b-1)\Gamma(a+b-1)} = \frac{a+b-1}{b-1}$$

Del mismo modo:

$${}_2F_1(b,1,a+b;1) = \frac{\Gamma(a+b)\ \Gamma(a-1)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b-1)} = \frac{a+b-1}{a-1}$$

En consecuencia:

$$F_3(a,b,1,1,a+b,1,1) = \frac{a+b-1}{b-1} + \frac{a+b-1}{a-1} = \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{(a-1)(b-1)}$$

lo que nos permite encontrar el valor de la suma de la serie.

5.3.7.1. Función de masa de Probabilidad.

Si consideramos los polinomios:

$$G(r,s) = (\alpha_1+\alpha_2+r+s)(r+1)$$
$$L(r,s) = (\alpha_1+r)(1+r)$$
$$H(r,s) = (\alpha_1+\alpha_2+r+s)(s+1)$$
$$N(r,s) = (\alpha_2+s)(1+s)$$

la solución de la correspondiente ecuación en diferencias, que es a su vez función de masa de probabilidad, viene dada por:

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0} \dfrac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_s (1)_r (1)_s}{(\alpha_1+\alpha_2)_{r+s}\; r!\; s!} & r,s \geq 1 \\ f_{0,0} \dfrac{(\alpha_1)_r (1)_r}{(\alpha_1+\alpha_2)_r\, r!} & r \geq 1 \;\; s=0 \\ f_{0,0} \dfrac{(\alpha_2)_s (1)_s}{(\alpha_1+\alpha_2)_s\; s!} & r=0 \;\; s \geq 1 \\ f_{0,0} & r=0 \;\; s=0 \end{cases}$$

En donde $f_{0,0} = \dfrac{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)}{(\alpha_1+\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-2)}$, con $\alpha_1>1$; $\alpha_2>1$.

Es una variable del Tipo I visto anteriormente, y con rango infinito en ambas variables. Su f.g.p, por tanto:

$$g(t_1,t_2) = f_{00} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_s (1)_r (1)_s\; t_1^r\; t_2^r}{(\alpha_1+\alpha_2)_{r+s}\; r!\; s!} \Rightarrow$$

$$g(t_1,t_2) = \frac{F_3(\alpha_1,\alpha_2,1,1,\alpha_1+\alpha_2;\ t_1,t_2)}{F_3(\alpha_1,\alpha_2,1,1,\alpha_1+\alpha_2;\ 1,1)}\ .$$

5.3.7.2 Momentos.

Vamos a calcular en este caso la esperanza marginal de la primera variable, X_1:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} F_3(\alpha_1,\alpha_2,1,1,\alpha_1+\alpha_2,t_1,t_2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1}(t_1+t_2-t_1t_2)^{-1}\left[t_1\,{}_2F_1(\alpha_1,1,\alpha_1+\alpha_2;t_1)+t_2\,{}_2F_1(\alpha_2,1,\alpha_1+\alpha_2;t_2)\right] =$$

$$= \frac{(t_1+t_2-t_1t_2) - t_1(1-t_2)}{(t_1+t_2-t_1t_2)^2}\,{}_2F_1(\alpha_1,1,\alpha_1+\alpha_2;t_1) +$$

$$+ \frac{t_1}{(t_1+t_2-t_1t_2)}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\,{}_2F_1(\alpha_1+1,2,\alpha_1+\alpha_2+1;t_1) -$$

$$- \frac{t_2(1-t_2)}{(t_1+t_2-t_1t_2)^2}\,{}_2F_1(\alpha_2,1,\alpha_1+\alpha_2;t_2)$$

(con la condición de que $\alpha_2>2$ para que ${}_2F_1(\alpha_1+1,2,\alpha_1+\alpha_2+1;1)$ sea convergente).

Por tanto, evaluando la derivada en $t_1=1$; $t_2=1$:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} F_3(\alpha_1,\alpha_2,1,1,\alpha_1+\alpha_2,t_1,t_2)\Big|_{(t_1,t_2)=(1,1)} =$$

$${}_2F_1(\alpha_1,1,\alpha_1+\alpha_2;1) + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\,{}_2F_1(\alpha_1+1,2,\alpha_1+\alpha_2+1;1) =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_2-1)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-1)} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_2-2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1+\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-2)}{(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)}$$

En ese caso, la esperanza marginal de la primera variable X_1:

$$E(X_1) = f_{0,0}\,\frac{\partial}{\partial t_1} F_3(\alpha_1,\alpha_2,1,1,\alpha_1+\alpha_2,t_1,t_2)\Big|_{(t_1,t_2)=(1,1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)}{(\alpha_1+\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-2)}\,\frac{(\alpha_1+\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-2)}{(\alpha_2-1)(\alpha_2-2)} = \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-2} = E(X_1)$$

Una vez conocida la esperanza marginal de la primera variable, es decir, el momento respecto del origen $\alpha_{(1,0)}$, podemos aplicar la ecuaciones de recurrencia vistas en 5.3.4 para obtener los demás momentos:

$$\left(\alpha_1+\alpha_2-1 - (\alpha_1+1)\right)\alpha_{(1,0)} + \alpha_{(1,1)} = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_{(1,1)} = 1$$

$$\left(\alpha_1+\alpha_2-1 - (\alpha_2+1)\right)\alpha_{(0,1)} + \alpha_{(1,1)} = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_{(0,1)} = E(X_2) = \frac{\alpha_2-1}{\alpha_1-2}$$

Por tanto, la covarianza vale:

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 1 - \frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-2}\,\frac{\alpha_2-1}{\alpha_1-2} = \frac{3-\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_1-2)(\alpha_2-2)}$$

(con $\alpha_1>2$; $\alpha_2>2$, lo que implica que la covarianza siempre es negativa).

$$\alpha_{(1,2)} = \alpha_1+\alpha_1\alpha_{(0,1)}-\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1-1\right)\alpha_{(1,1)}-\left(\alpha_1+\alpha_2-1 - (\alpha_1+1)\right)\alpha_{(1,0)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{(1,2)} = \frac{\alpha_1+2\alpha_2-4}{(\alpha_1-2)}$$

$$\alpha_{(2,1)} = \alpha_2+\alpha_2\alpha_{(1,0)}-\left(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_2-1\right)\alpha_{(1,1)}-\left(\alpha_1+\alpha_2-1 - (\alpha_2+1)\right)\alpha_{(0,1)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{(2,1)} = \frac{2\alpha_1+\alpha_2-4}{(\alpha_1-2)}$$

$$\alpha_{(2,0)} = \frac{\alpha_1 + \left(\alpha_1+\alpha_1+1\right)\alpha_{(1,0)} - \alpha_{(2,1)}}{\left(\alpha_1+\alpha_2-2-\alpha_1-1\right)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{(2,0)} = \frac{(\alpha_1-1)(2\alpha_1+\alpha_2-3)}{(\alpha_2-2)(\alpha_2-3)}$$

$$\alpha_{(0,2)} = \frac{\alpha_2 + \left(\alpha_2 + \alpha_2 + 1\right)\alpha_{(0,1)} - \alpha_{(1,2)}}{\left(\alpha_1 + \alpha_2 - 2 - \alpha_2 - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{(0,2)} = \frac{(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3)}{(\alpha_1 - 2)(\alpha_1 - 3)}$$

En consecuencia, las varianzas marginales son:

$$\mathrm{Var}(X_1) = \alpha_{(2,0)} - \alpha^2_{(1,0)} = \frac{(\alpha_1 - 1)(2\alpha_1 + \alpha_2 - 3)}{(\alpha_2 - 2)(\alpha_2 - 3)} - \frac{(\alpha_1 - 1)^2}{(\alpha_2 - 2)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 3)}{(\alpha_2 - 2)^2(\alpha_2 - 3)}$$

y existe siempre que $\alpha_2 > 3$.

$$\mathrm{Var}(X_2) = \alpha_{(0,2)} - \alpha^2_{(0,1)} = \frac{(\alpha_2 - 1)(2\alpha_2 + \alpha_1 - 3)}{(\alpha_1 - 2)(\alpha_1 - 3)} - \frac{(\alpha_2 - 1)^2}{(\alpha_1 - 2)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 3)}{(\alpha_1 - 2)^2(\alpha_1 - 3)}$$

y existe siempre que $\alpha_1 > 3$.

En resumen, el vector de medias en este caso es:

$$\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha_1-1)}{(\alpha_2-2)} \\ \\ \dfrac{(\alpha_2-1)}{(\alpha_1-2)} \end{pmatrix}$$

(siempre que $\alpha_1>2$ y $\alpha_2>2$).

La matriz de varianzas-covarianzas:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-3)}{(\alpha_2-2)^2(\alpha_2-3)} & \dfrac{3-\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_1-2)(\alpha_2-2)} \\ \\ \dfrac{3-\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_1-2)(\alpha_2-2)} & \dfrac{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(\alpha_1+\alpha_2-3}{(\alpha_1-2)^2(\alpha_1-3)} \end{pmatrix}$$

siempre que $\alpha_1>3$ y $\alpha_2>3$. (En ese caso, las varianzas son siempre mayores que cero, como tenía que ocurrir, y la covarianza es negativa).

El coeficiente de determinación lineal:

$$r^2 = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)} = \frac{(\alpha_1-3)(\alpha_2-3)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-1)^2}$$

que está entre 0 y 1 siempre que $\alpha_1>3$ y $\alpha_2>3$.

5.3.7.3. Distribuciones condicionadas.

Recordemos que, según vimos en 5.3.6, las distribuciones condicionadas eran:

$$f_{r/s} = \begin{cases} f_{0/s} \dfrac{(\alpha_1)_r \; (\beta_1)_r \; \lambda_1^r}{(\gamma+s)_r \; r!} & r \geq 1 \\ f_{0/s} & r = 0 \end{cases}$$

en donde:

$$f_{0/s} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma+s; \lambda_1)}$$

y

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_{0/r} \dfrac{(\alpha_2)_s \; (\beta_2)_s \; \lambda_2^s}{(\gamma+r)_s \; s!} & s \geq 1 \\ f_{0/r} & s = 0 \end{cases}$$

en donde:

$$f_{0/r} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma+r; \lambda_2)}$$

Por tanto, en este caso:

$$f_{r/s} = \begin{cases} f_{0/s} \dfrac{(\alpha_1)_r \; (1)_r}{(\alpha_1+\alpha_2+s)_r \; r!} & r \geq 1 \\ f_{0/s} & r = 0 \end{cases}$$

y la constante es:

$$f_{0/s} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha_1, 1, \alpha_1+\alpha_2+s, 1)} = \frac{\alpha_2+s-1}{\alpha_1+\alpha_2+s-1}$$

Su función generatriz de probabilidad es:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha_1, 1, \alpha_1+\alpha_2+s, t)}{{}_2F_1(\alpha_1, 1, \alpha_1+\alpha_2+s, 1)}$$

con α_1, α_2 >1. Es una distribución del Tipo I de las estudiadas por Fajardo. Es incluso una distribución del tipo ORD, con lo que su esperanza es:

$$E(X_1/X_2=s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + s - 2}$$

y su regresión no es lineal.

La distribución de X_2/X_1 es, igualmente:

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_{0/r} \dfrac{(\alpha_2)_s \ (1)_s}{(\alpha_1+\alpha_2+r)_s s!} & r \geq 1 \\ f_{0/r} & r = 0 \end{cases}$$

y la constante es:

$$f_{0/r} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha_2, 1, \alpha_1+\alpha_2+r, 1)} = \frac{\alpha_1+r-1}{\alpha_1+\alpha_2+r-1}$$

Su función generatriz de probabilidad es:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha_2, 1, \alpha_1+\alpha_2+r, t)}{{}_2F_1(\alpha_2, 1, \alpha_1+\alpha_2+r, 1)}$$

con α_1, α_2 >1. Es igualmente una distribución del Tipo I de las estudiadas por Fajardo, e igualmente es una distribución del tipo ORD. Por tanto, la curva de regresión de X_2 condicionada a que X_1

es igual a r, es:

$$E(X_2/X_1=r) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + r - 2}$$

5.3.8 Generalización y Teorema de Sumación.

Vamos a encontrar ahora una expresión de la suma de una distribución hipergeométrica generalizada del tipo F_3 que generalice la expresión de SRIVASTAVA (1984) empleada para este ejemplo. Para ello nos basaremos en la igualdad encontrada en 5.3.2. que permite encontrar una expresión para la suma de una función hipergeométrica del tipo F_3, en donde $\alpha+\alpha' = \gamma$ (igualmente si $\beta+\beta' = \gamma$)

Supongamos la función hipergeométrica $F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,1,1)$. Según hemos demostrado antes, para que tal función sea convergente es preciso que:

$$\gamma > \alpha+\beta; \qquad \gamma > \gamma-\alpha+\beta' \quad \Rightarrow \quad \alpha-\beta' > 0$$

Si se verifican esas condiciones, esa suma es igual a:

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\gamma+\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\gamma+\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')} \; {}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma-\gamma+\alpha-\beta';\gamma-\gamma+\alpha,\gamma-\beta';1) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')} \; {}_3F_2(\alpha,\beta,\alpha-\beta';\alpha,\gamma-\beta';1)$$

Como en la función ${}_3F_2$ un parámetro del numerador coincide con un parámetro del denominador, y dado que

$$\alpha + \gamma-\beta' - \alpha - \beta - \alpha+\beta' = \gamma - \alpha - \beta > 0$$

por la hipótesis de partida, la función es convergente, podemos simplificar y:

$$_3F_2(\alpha,\beta,\alpha-\beta';\alpha,\gamma-\beta';1) = {_2F_1}(\beta,\alpha-\beta';\gamma-\beta';1) = \frac{\Gamma(\gamma-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

por lo que:

$$F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,1,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')}\;\frac{\Gamma(\gamma-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,1,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} \qquad \begin{array}{l}\gamma > \alpha + \beta \\ \alpha-\beta' > 0\end{array}}$$

Veamos que esta expresión realmente generaliza la anterior. Para ello, apliquemos este resultado para encontrar el valor de la función $F_3(\alpha,\alpha',1,1,\alpha+\alpha',1,1)$. Para que sea convergente es preciso que:

$$\alpha + \alpha' > \alpha + 1 \Rightarrow \alpha' > 1; \qquad \alpha - 1 > 0$$

En esas condiciones:

$$F_3(\alpha,\alpha',1,1\ ,\alpha+\alpha',1,1) = \frac{\Gamma(\alpha+\alpha')\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha'-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\alpha'-1-1)\Gamma(\alpha')} =$$

$$= \frac{(\alpha+\alpha'-1)(\alpha+\alpha'-2)\Gamma(\alpha+\alpha'-2)\ \Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha'-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha+\alpha'-2)(\alpha'-1)\Gamma(\alpha'-1)} = \frac{(\alpha+\alpha'-1)(\alpha+\alpha'-2)}{(\alpha-1)(\alpha'-1)}$$

que coincide con la expresión obtenida anteriormente.

Vamos a emplear esta expresión para generalizar los resultados obtenidos en 5.3.7, Sea una v.a. bidimensional con la siguiente función generatriz de probabilidad:

$$g(t_1,t_2) = \frac{F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,t_1,t_2)}{F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,1,1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ g(t_1,t_2) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\ F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,t_1,t_2)$$

Para calcular los momentos mediante la relación de recurrencia es necesario, como vimos en 5.3.4, calcular la media marginal de una de las variables. En este caso:

$$E(X_1)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\ \frac{\alpha\beta}{\gamma}F_3(\alpha+1,\gamma-\alpha,\beta+1,\beta',\gamma+1,1,1).$$

Para obtener su valor es preciso calcular el valor de la función $F_3(\alpha+1,\gamma-\alpha,\beta+1,\beta',\gamma+1,1,1)$. Pero como $\gamma+1-(\alpha+1) = \gamma-\alpha$, es válido aplicar el resultado anterior, con lo que:

$$E(X_1)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\;\frac{\alpha\beta}{\gamma}\;\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+1-\beta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta'-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

y simplificando la expresión anterior:

$$E(X_1) = \frac{\beta(\alpha-\beta')}{(\gamma-\alpha-\beta-1)} \qquad \gamma>\alpha+\beta+1$$

Aplicando ahora las ecuaciones de recurrencia de momentos obtenidas en 5.3.4, se pueden obtener todos los momentos, en caso de que existan. Por ejemplo, calculemos el vector de medias y la covarianza para este caso más general:

$$\left(\gamma-1 - (\alpha +\beta)\right) \frac{\beta(\alpha-\beta')}{(\gamma-\alpha-\beta-1)} + \alpha_{(1,1)} = \alpha\beta \qquad \Rightarrow \alpha_{(1,1)} = \beta\beta'$$

$$\left(\gamma-1 - (\gamma-\alpha+\beta')\right)\alpha_{(0,1)} + \beta\beta' = (\gamma-\alpha)\beta' \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{(0,1)} = \frac{\beta'(\gamma-\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta'-1)}$$

Con lo que el vector de medias es:

$$\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta(\alpha-\beta')}{(\gamma-\alpha-\beta-1)} \\[2ex] \dfrac{\beta'(\gamma-\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta'-1)} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\gamma>\alpha+\beta+1\\ \alpha-\beta'>1\end{array}$$

y la covarianza vale:

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \beta\beta' - \frac{\beta(\alpha-\beta')}{(\gamma-\alpha-\beta-1)} \; \frac{\beta'(\gamma-\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta'-1)} .$$

Del mismo modo se pueden obtener los demás momentos, así como las curvas de regresión.

5.4 Distribuciones generadas por la función hipergeométrica $F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma', \lambda_1,\lambda_2)$

5.4.1 f.m.p.

Consideremos los polinomios:

$$G(r,s) = (\gamma_1+r)(r+1)$$
$$L(r,s) = (\alpha+r+s)(\beta+r+s)\lambda_1$$
$$H(r,s) = (\gamma_2+s)(s+1)$$
$$N(r,s) = (\alpha+r+s)(\beta+r+s)\lambda_2$$

en donde α, β, γ_i, $\in\mathbb{R}$.

Veamos en este caso, la solución del sistema de ecuaciones en diferencias:

$$G(r,s)\ f_{r+1,s} - L(r,s)\ f_{r,s} = 0$$
$$H(r,s)\ f_{r,s+1} - N(r,s)\ f_{r,s} = 0$$

que viene dada por el teorema 2.2.2.1, siempre que los polinomios verifiquen la condición

$$\frac{L(r,s+1)}{G(r,s+1)}\ \frac{N(r,s)}{H(r,s)} = \frac{N(r+1,s)}{H(r+1,s)}\ \frac{L(r,s)}{G(r,s)}$$

$\forall r,s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f_{r,s} \neq 0$.

En este caso:

$$\frac{L(r,s+1)}{G(r,s+1)}\ \frac{N(r,s)}{H(r,s)} = \frac{(\alpha+r+s+1)(\beta+r+s+1)\lambda_1}{(\gamma_1+r)(r+1)}\ \frac{(\alpha+r+s)(\beta+r+s)\lambda_2}{(\gamma_2+s)(s+1)}$$

y

$$\frac{N(r+1,s)}{H(r+1,s)}\ \frac{L(r,s)}{G(r,s)} = \frac{(\alpha+r+1+s)(\beta+r+1+s)\lambda_2}{(\gamma_2+s)(s+1)}\ \frac{(\alpha+r+s)(\beta+r+s)\lambda_1}{(\gamma_1+r)(r+1)}$$

que, como puede verse, son iguales.

Por consiguiente, y según el teorema 2.2.2.2,

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0}\, \dfrac{(\alpha)_{r+s}\ (\beta)_{r+s}\lambda_1^r\lambda_2^s}{(\gamma_1)_r\ (\gamma_2)_s\ r!\ s!} & r,s \geq 1 \\[2ex] f_{0,0}\, \dfrac{(\alpha)_r(\beta)_r\lambda_1^r}{(\gamma_1)_r\ r!} & r \geq 1 \quad s = 0 \\[2ex] f_{0,0}\, \dfrac{(\alpha)_s(\beta)_s\lambda_2^s}{(\gamma_2)_s s!} & r = 0 \quad s \geq 1 \\[2ex] f_{0,0} & r = 0 \quad s = 0 \end{cases}$$

es solución del anterior sistema de ecuaciones diferenciales.

Para que esa $f_{r,s}$ sea función de masa de probabilidad, ha de verificar las condiciones del teorema 2.2.2.3:

a) Condición de positividad

$$\left.\begin{array}{l} L(r,s)G(r,s) \geq 0 \\ N(r,s)H(r,s) \geq 0 \end{array}\right. \qquad \forall\ r,s \in \mathcal{H}$$

b) Condición de convergencia:

$$\sum_{\substack{r=0 \\ r,s\in\mathcal{H};\ r+s\neq 0}}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)} \frac{N(0,t')}{H(0,t')} = F_4(\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_1,\lambda_2) - 1$$

que converge para $\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} < 1$

c) Condición de normalidad:

$$f_{0,0} = \frac{1}{1+ F_4(\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_1,\lambda_2) - 1} = \frac{1}{F_4(\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_1,\lambda_2)}$$

5.4.2. F.g.p.

La f.g.p. es:

$$g(t_1,t_2) = f_{00} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{r+s}\ (\beta)_{r+s} (\lambda_1 t_1)^r (\lambda_2 t_2)^s}{(\gamma_1)_r\ (\gamma_2)_s\ r!\ s!}$$

$$= \frac{F_4(\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_1 t_1, \ \lambda_2 t_2)}{F_4(\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\lambda_1,\lambda_2)}$$

que converge para $|t_1|\leq 1$; $|t_2|\leq 1$ si $\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} < 1$

Vamos a calcular las ecuaciones diferenciales que verifica la f.g.p., según el teorema 2.2.2.4. Para ello, vamos a expresar los polinomios L(r,s), G(r,s), N(r,s), H(r,s), de la siguiente manera:

$$G(r,s) = \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} b_{k_1,k_2} (r+1)^{k_1} s^{k_2}$$

$$L(r,s) = \sum_{j_1=0}^{2} \sum_{j_2=0}^{2} a_{j_1,j_2} r^{j_1} s^{j_2}$$

$$N(r,s) = \sum_{i_1=0}^{2} \sum_{i_2=0}^{2} c_{i_1,i_2} r^{i_1} s^{i_2}$$

$$H(r,s) = \sum_{l_1=0}^{2} \sum_{l_2=0}^{2} d_{l_1,l_2} (r+1)^{l_1} s^{l_2}$$

Comencemos con G(r,s)

$$G(r,s) = r^2 + (\gamma_1+1)r + \gamma_1$$

y eso a de ser igual a:

$$b_{00} + b_{01}s + b_{10}(r+1) + b_{11}(r+1)s + b_{20}(r+1)^2 + b_{02}s^2 +$$

$$+ b_{12}(r+1)s^2 + b_{21}(r+1)^2s + b_{22}(r+1)^2s^2$$

Por tanto, igualando término a término:

$$b_{12} = b_{21} = b_{01} = b_{02} = b_{22} = b_{11} = 0; \quad b_{20} = 1; \; b_{10} = (\gamma_1 -1); \; ; \; b_{00} = 0$$

y el polinomio es:

$$G(r,s) = 0 + (\gamma_1 -1)(r+1) + (r+1)^2.$$

Del mismo modo:

$$H(r,s) = 0 + (\gamma_2 -1)(s+1) + (s+1)^2.$$

y los otros dos:

$$L(r,s) = \alpha\beta\ \lambda_1 + (\alpha+\beta)\lambda_1 r + (\alpha+\beta)\lambda_1 s + 2rs\lambda_1 + \lambda_1 r^2 + \lambda_1 s^2$$

$$N(r,s) = \alpha\beta\ \lambda_2 + (\alpha+\beta)\lambda_2 r + (\alpha+\beta)\lambda_2 s + 2rs\lambda_2 + \lambda_2 r^2 + \lambda_2 s^2$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica $g(t_1,t_2)$ es:

$$(1-\lambda_1 t_1)\theta_1^2 g(t_1,t_2) + \left[\gamma_1 -1-t_1(\alpha+\beta)\lambda_1\right]\theta_1 g(t_1,t_2) - t_1\lambda_1\theta_2^2 -$$
$$- 2t_1\lambda_1\theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) - t_1(\alpha+\beta)\lambda_1\theta_2\ g(t_1,t_2) - t_1\alpha\beta\lambda_1 g(t_1,t_2) = 0$$

$$(1-\lambda_2 t_2)\theta_2^2 g(t_1,t_2) + \left[\gamma_2 -1-t_2(\alpha+\beta)\lambda_2\right]\theta_2 g(t_1,t_2) - t_1\lambda_2\theta_1^2 -$$
$$- 2t_2\lambda_2\theta_1\theta_2 g(t_1,t_2) - t_2(\alpha+\beta)\lambda_2\theta_1\ g(t_1,t_2) - t_2\alpha\beta\lambda_2 g(t_1,t_2) = 0$$

5.4.3 Momentos.

Para obtener las relaciones de recurrencia entre momentos, empleamos el resultado del teorema 2.2.2 6. En este caso, y sustituyendo los polinomios por sus expresiones anteriores, la primera relación resultante es:

$$(\gamma_1 - 1)\sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(1+f;m)} + \sum_{m=0}^{g}\binom{g}{m}\alpha_{(2+f;m)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\Big(\lambda_1\alpha\beta\alpha_{(h;m)} + \lambda_1(\alpha+\beta)(\alpha_{(h+1;m)}+\alpha_{(h;m+1)}) +$$

$$+ 2\lambda_1\alpha_{(h+1;m+1)} + \lambda_1(\alpha_{(h+2;m)} + \alpha_{(h;m+2)})\Big)$$

La segunda relación de recurrencia de momentos queda:

$$(\gamma_2 - 1)\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(h;1+g)} + \sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}\alpha_{(h;2+g)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{f}\sum_{m=0}^{g}\binom{f}{h}\binom{g}{m}\Big(\lambda_2\alpha\beta\ \alpha_{(h;m)} + \lambda_2(\alpha+\beta)(\alpha_{(h;m+1)} + \alpha_{(h+1;m)}) +$$

$$+ 2\lambda_2\alpha_{(h+1;m+1)} + \lambda_2(\alpha_{(h+2;m)} + \alpha_{(h;m+2)})\Big)$$

5.4.4 Regresión:

Según el teorema 2.2.2.7, siempre que sea posible expresar la f.m.p. conjunta como:

$$f_{r,s} = f_{r/s}\, f_s \qquad \text{y} \qquad f_{r,s} = f_{s/r}\, f_r$$

entonces:

a) Las funciones de probabilidad condicionadas verifican las ecuaciones en diferencias:

$$\begin{array}{ll} G(r,s)f_{r+1/s} - L(r,s)\, f_{r/s} = 0 & \text{si } f_s > 0 \\ H(r,s)f_{s+1/r} - N(r,s)\, f_{s/r} = 0 & \text{si } f_r > 0 \end{array}$$

respectivamente.

b) Calculadas las anteriores, sus funciones de probabilidad marginales verifican las ecuaciones en diferencias:

$$\begin{array}{l} G(r,s)f_{s/r+1}\, f_{r+1} - L(r,s)\, f_{s/r}\, f_r = 0 \\ H(r,s)f_{r/s+1}\, f_{s+1} - N(r,s)\, f_{r/s}\, f_s = 0 \end{array}$$

Vamos a calcular, en este caso, las funciones de masa de probabilidad condicionada. Según vimos en 2.2.1.(2), la solución de cada una de esas ecuaciones en diferencias es:

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_0 \displaystyle\prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t,s)}{G(t,s)} & r \geq 1 \\ f_0 & r = 0 \end{cases}$$

por tanto, y según la expresión de G y de L

$$f_{r/s} = \begin{cases} f_{0/s} \dfrac{(\alpha+s)_r\,(\beta+s)_r\,\lambda_1^r}{(\gamma_1)_r\; r!} & r \geq 1 \\ f_{0/s} & r = 0 \end{cases}$$

en donde:

$$f_{0/s} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha+s,\beta+s,\gamma_1;\lambda_1)}$$

y su f.g.p

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha+s\ ,\beta+s\ ,\gamma_1+s;\lambda_1 t)}{{}_2F_1(\alpha+s,\beta+s,\gamma_1;\lambda_1)} \qquad s\in\mathbb{N}$$

y es una funcion de masa de probabilidad de las estudiadas por FAJARDO (1985)

Del mismo modo:

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_{0/r} \dfrac{(\alpha + r)_s (\beta+r)_s\ \lambda_2^s}{(\gamma_2)_s\ s!} & s \ge 1 \\ f_{0/r} & s = 0 \end{cases}$$

en donde:

$$f_{0/r} = \frac{1}{{}_2F_1(\alpha+r,\beta+r,\gamma_2;\lambda_2)}$$

y su f.g.p

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha+r,\beta+r,\gamma_2;\lambda_2 t)}{{}_2F_1(\alpha+r,\beta+r,\gamma_2;\lambda_2)} \qquad s\in\mathbb{N}$$

que es también del tipo de las ${}_2F_1$.

6.- FAMILIA DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS MULTIVARIANTES.

6.1 Introducción.

Ya hemos estudiado en los capítulos anteriores, la extensión de los sistemas de Pearson discretos al caso de distribuciones generadas por funciones hipergeométricas univariantes y bivariantes. En este capítulo proseguimos esta extensión natural al caso multivariante, en donde los polinomios coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias están definidos en $\mathbb{R}^n$, y de forma que la función que es solución del sistema de ecuaciones en diferencias, y que va a cumplir las condiciones necesarias para ser una función de masa de probabilidad esté relacionada con las funciones hipergeométricas multivariantes, obtenidas a partir de la generalización de la función hipergeométrica de Gauss.

Al igual que ocurre en los dos capítulos anteriores, comenzamos con la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella, que es la extensión n-variante de la función hipergeométrica bidimensional F_1. Estas distribuciones así obtenidas han sido objeto de un intenso estudio, y una sistematización de los resultados principales, así como una clasificación de las posibles funciones de masa de probabilidad así obtenidas viene reflejado en FAJARDO (1985).

Nuestra aportación a este caso consiste en la propuesta de una extensión multivariante de la distribución generalizada de Waring, a la luz de los resultados conocidos para las distribuciones generalizadas univariante y bivariante ya mencionadas. Esta propuesta de extensión surge por el paso de la función F_1 generadora de la función generatriz de probabilidad en el caso bidimensional, a una función F_1 n-dimensional, que en el caso bidimensional se reduce a la ya conocida.

En esta generalización de la distribución de Waring, comenzamos por la expresión de los polinomios que son coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias que producen una tal función de masa de probabilidad como solución, a la que podemos denominar *distribución generalizada n-dimensional de Waring*, y seguidamente calculamos su función generatriz de probabilidad, así como el sistema de ecuaciones diferenciales que tal función generatriz verifica.

Dado que podemos conocer la suma de una función hipergeométrica del tipo F_1 multivariante, y por la relación de recurrencia entre momentos que se obtiene, podemos llegar a obtener la expresión del vector de medias y de la matriz de varianzas-covarianzas de una distribución n-variante regida por esa función de masa de probabilidad.

Tras clasificarla según el esquema propuesto por FAJARDO, pasamos a estudiar la regresión y la correlación entre las variables, tanto múltiple como parcial, con el cálculo de las curvas de regresión -que se corresponden a hiperplanos de la dimensión adecuada-, como los coeficientes de correlación respectivos.

En la sección 6.3 circunscribimos el estudio al desarrollo de las distribuciones discretas multivariantes generadas por la función hipergeométrica de Lauricella $F_B^{(n)}$, que es la extensión multivariante de la función hipergeométrica bivariante de Apell, F_3, que fue tratada como función generadora de distribuciones de probabilidad en el capítulo anterior, sección 5.3.

Mediante un esquema de tratamiento similar al seguido hasta ahora en cada caso, comenzamos el estudio definiendo la forma funcional de los polinomios que son los coeficientes del sistema de ecuaciones en diferencias cuya solución es una función de tal tipo. Tras calcular la función de masa de probabilidad resultante, proseguimos con el cálculo del sistema de ecuaciones diferenciales que verifica la función generatriz de probabilidad de la variable multidimensional, y que se corresponde, en su forma, a una función hipergeométrica del tipo mencionado.

También ofrecemos una clasificación de todas las posibles funciones de masa de probabilidad de esta familia, atendiendo a los diversos valores admisibles para los parámetros, así como el recorrido de la variable n-dimensional resultante. Finalizamos el estudio con una referencia a la regresión, tanto múltiple como parcial que se presenta en una distribución multidimensional de este tipo.

6.2. Distribuciones generadas por la función hipergeométrica multivariante $F_1^{(n)}$. Una extensión multivariante de la distribución generalizada de Waring.

Este caso ha sido estudiado por FAJARDO (1985) en sus aspectos más generales. No obstante vamos a estudiar algunos casos concretos como generalización de los casos uni y bidimensionales que vimos en capítulos anteriores.

6.2.1. Distribucion Multivariante Generalizada de Waring.

Consideremos las funciones:

$$L_i(r_1, \ldots, r_n) = (a + r_1 + \ldots + r_n)(k_i + r_i)$$

$$G_i(r_1, \ldots, r_n) = (a + k_1 + \ldots + k_n + \rho + r_1 + \ldots + r_n)(r_i + 1)$$

en donde $i=1,\ldots,n$; $a, k_1, \ldots, k_n, \rho > 0$. Por el teorema (2.2.3.2) sabemos que la solución del sistema de ecuaciones en diferencias viene dada por:

$$f_{r_1, \ldots, r_n} = f_{0,\ldots,0} \frac{(a)_{r_1 + \ldots + r_n} (k_1)_{r_1} \ldots (k_n)_{r_n}}{(a + k_1 + \ldots + k_n + \rho)_{r_1 + \ldots + r_n} r_1! \ldots r_n!}$$

en donde

$$f_{o,\dots,o} = \frac{\Gamma(k_1+\dots+k_n+\rho)\ \Gamma(a+\rho)}{\Gamma(a+k_1+\dots+k_n+\rho)\ \Gamma(\rho)}$$

Su función generatriz de probabilidad es, por consiguiente:

$$g(t_1, \dots, t_n) = \frac{F_1(a;k_1,\dots,k_n;a+k_1+\dots+k_n+\rho;\ t_1,\dots,t_n)}{F_1(a;k_1,\dots,k_n;a+k_1+\dots+k_n+\rho;\ 1,\dots,1)}$$

Del mismo modo, el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica la anterior función generatriz de probabilidad está formado por n ecuaciones de la forma

$$(1-t_i)\sum_{k=1}^{n}\theta_k\theta_i\ g + \left[a + \sum_{i=1}^{n} k_i+\rho-1-t_i(a+k_i)\right]\theta_i g -$$

$$- t_i k_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\theta_k\ g - t_i a k_i g = 0$$

con $i=1,\dots,n$; $g=g(t_1, \dots, t_n)$; $|t_i| < 1$ y $\theta_l = t_l \frac{\partial}{\partial t_l}$

Dentro de la clasificación efectuada por FAJARDO (1985) es una función del tipo I, y con $r_1,\dots,r_n \in (\mathbb{Z}^+)^n$. Del mismo modo, y variando el rango de definición de los parámetros a, k_i $(i=1,..,n)$ se pueden obtener distribuciones del tipo II, III o IV.

Al igual que vimos para la distribución de generalizada bidimensional de Waring, pueden obtenerse las relaciones de recurrencia entre momentos y estimar los n+2 parámetros de la distribución por el método de los momentos.

Pasando al estudio de una variable aleatoria $(\xi_1,...,\xi_n)$ con una distribución de este tipo, se obtienen las siguientes características:

a) La Esperanza de cada variable marginal ξ_i viene dada por:

$$E[\xi_i] = \frac{ak_i}{\rho-1}$$

b) La varianza de cada ξ_i viene dada por

$$Var[\xi_i] = \frac{ak_i(a+\rho-1)(k_i+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)}$$

c) Las covarianzas de las variables ξ_i y ξ_j (con $i \neq j$) son:

$$Cov[\xi_i,\xi_j] = \frac{ak_ik_j(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)}$$

y su matriz de varianzas-covarianzas viene dada por:

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \frac{ak_1(a+\rho-1)(k_1+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \cdots & \frac{ak_1k_i(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \cdots\cdots & \frac{ak_1k_n(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \frac{ak_i(a+\rho-1)(k_i+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} & \cdots\cdot & \frac{ak_ik_n(a+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \frac{ak_n(a+\rho-1)(k_n+\rho-1)}{(\rho-1)^2(\rho-2)} \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz anterior se puede calcular el coeficiente de correlación lineal total para cualesquiera dos variables ξ_i, ξ_j con $i \neq j$. Tal coeficiente es:

$$\rho_{i,j} = \sqrt{\frac{k_i k_j}{(k_i+\rho-1)(k_j+\rho-1)}}$$

que existe siempre que exista la varianza , ya que $k_i k_j$ es siempre positivo, dado que todos los k_i han de ser del mismo signo para que f sea una función de masa de probabilidad n-dimensional. Este coeficiente sólo vale 1 cuando $\rho=1$ o $\rho=1-k_i-k_j$. Por tanto, en caso de que la distribución sea del tipo I nunca alcanzará tal valor, ya que para la existencia de la varianza $\rho>2$. En caso en que los k_i sean negativos y $1-k_i-k_j > 2$ sí podrá alcanzar ese valor.

Por tanto, su matriz de correlación será:

$$(\rho_{i\,j})=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \sqrt{\dfrac{k_1 k_i}{(k_1+\rho-1)(k_i+\rho-1)}} & \cdots & \sqrt{\dfrac{k_i k_n}{(k_i+\rho-1)(k_n+\rho-1)}} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \sqrt{\dfrac{k_i k_n}{(k_i+\rho-1)(k_n+\rho-1)}} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener ahora las distribuciones condicionadas, recordemos que éstas se obtenían al resolver el sistema:

$$(a + \sum_{i=1}^{n} k_i + \rho + r_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} r_j)(r_i+1)f_{r_i+1/r_1,\dots,r_n} \quad -$$

$$-(a + r_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} r_j)(r_i+k_i)f_{r_i/r_1,\ldots,r_n} = 0$$

y cuya solución es:

$$f_{r_i/r_1,\ldots,r_n} = f_{0/r_1,\ldots,r_n} \frac{\left[a+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j)\right]_{r_i} (k_i)_{r_i}}{\left(a+\sum_{i=1}^{n} k_i+\rho+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j\right)_{r_i} r_i!}$$

en donde

$$f_{0/r_1,\ldots,r_n} = \frac{1}{{}_2F_1\left(a+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j;\ k_i;a+\sum_{i=1}^{n} k_i+\rho+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j;1\right)}$$

y que corresponde a una distribución generalizada de Waring univariante de parámetros

$$\left(a+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j\ ;\ k_i\ ;\ \rho+\sum_{i\neq j=1}^{n} k_j\right)$$

Por tanto, la función generatriz de probabilidad de cada una de tales distribuciones condicionadas es:

$$g_{r_i/r_1,\ldots,r_n}(t_i) = \frac{{}_2F_1\left(a+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j;\ k_i;a_1+\sum_{i=1}^{n} k_i+\rho+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j;t_i\right)}{{}_2F_1\left(a+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j;\ k_i;a+\sum_{i=1}^{n} k_i+\rho+\sum_{i\neq j=1}^{n} r_j;1\right)}$$

Esto nos permite estudiar la superficie de regresión de ξ_i sobre $\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_n$. Ésta es:

$$\hat{\xi}_i = E\left[\xi_i \,/\, \xi_1=r_1,\dots,\xi_n=r_n\right] = \frac{\left(a + \sum\limits_{i\neq j=1}^{n} r_j\right) k_i}{\left(\rho + \sum\limits_{i\neq j=1}^{n} k_j - 1\right)}$$

que es una función lineal en r_j, y por tanto es un hiperplano de regresión.

El coeficiente de correlación múltiple es:

$$\rho_{i(1,\dots,i-1,i+1,\dots,n)} = \left(\frac{\left(\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} k_j\right) k_i}{(k_i+\rho-1)\left(\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} k_j + \rho - 1\right)}\right)^{1/2}$$

La función de densidad marginal de $\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_n$ viene dada por el teorema 2.2.3.6., y en este caso es:

$$f_{r_1,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n} =$$

$$= f_{0,..,0} \frac{(a)_{r_1+..+r_{i-1}+r_{i+1}+..+r_n} \prod\limits_{i\neq j=1} (k_j)_{r_j}}{\left(a+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n} k_j+\rho\right)_{r_1+..+r_{i-1}+r_{i+1}+..+r_n} \prod\limits_{i\neq j=1} r_j!}$$

que es una variable n-1 dimensional en donde

$$f_{o,\dots,o} = \frac{1}{F_1\left(a;k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_n;a+\sum_{i\neq j=1}^{n} k_j+\rho;1,\dots,1\right)}$$

y esta función de masa de probabilidad corresponde a una distribución multivariante generalizada de Waring de dimensión n-1 y de parámetros

$$\left(a;k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_n;\rho\right)$$

La función de probabilidad condicionada de:

$$\xi_1,\ \dots\ ,\xi_m\ /\ \xi_{m+1}=r_{m+1},\ \dots\ ,\xi_n=r_n$$

viene dada por aplicación del teorema 2.2.3.6 como solución del sistema de ecuaciones en diferencias parciales:

$$\left(a+\rho+\sum_{j=1}^{n} k_j+\sum_{j=1}^{n} r_j\right)(r_i+1)f_{r_{i+1}/r_{m+1},\dots,r_n}-\left(a+\sum_{j=1}^{n} r_j\right)f_{r_i/r_{m+1},\dots,r_n}=0$$

$$i=1,\dots,m$$

Su solución viene dada por:

$$f_{r_1,\dots,r_m/r_{m+1},\dots,r_n} =$$

$$= f_{o,\dots,o/r_{m+1},\dots,r_n}\frac{\left[a+\sum_{j=m+1}^{n} r_j\right]_{r_1+\dots+r_m}\prod_{j=1}^{m}(k_j)_{r_j}}{\left(a+\sum_{i=1}^{n} k_i+\rho+\sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)_{r_1+\dots+r_m}\prod_{j=1}^{m} r_j!}$$

que es una variable de dimensión m, y tal que

$$f_{o,..,o/r_{m+1},..,r_n} = \frac{1}{F_1\left(a+\sum\limits_{j=m+1}^{n} r_j;k_1,\dots,k_m;a+\sum\limits_{i=1}^{n} k_i+\rho+\sum\limits_{j=m+1}^{n} r_j,1\dots,1\right.}$$

que es una distribución multivariante generalizada de Waring de dimensión m y de parámetros:

$$\left(a+\sum_{j=m+1}^{n} r_j;k_1,\dots,k_m;\ \rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_i+\sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)$$

Consecuentemente podemos obtener por analogía con el caso general n-dimensional las características de estas distribuciones condicionadas:

Así, la Esperanza de la variable ξ_i condicionada a las variables $(\xi_{m+1},\dots,\xi_n)$ viene dada por

$$E(\xi_i/\xi_{m+1}=r_{m+1},\dots,\xi_n=r_n) = \frac{\left[a+\sum\limits_{j=m+1}^{n} r_j\right]k_i}{\rho+\sum\limits_{j=m+1}^{n} k_j - 1}$$

La varianza de la variable ξ_i condicionada a las variables $(\xi_{m+1},\dots,\xi_n)$ viene dada por:

$$V(\xi_i/\xi_{m+1}=r_{m+1},\dots,\xi_n=r_n) =$$

$$= \frac{\left(a+\sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)k_i\left(a+\sum_{j=m+1}^{n} r_j+\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)\left(k_i+\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)}{\left(\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)^2\left(\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-2\right)}$$

$i=1,\ldots,m$

La covarianza de las variables ξ_i,ξ_l condicionada a las variables $(\xi_{m+1},\ldots,\xi_n)$ viene dada por:

$$\mathrm{Cov}(\xi_i/\xi_{m+1}=r_{m+1},\ldots,\xi_n=r_n\ ;\ \xi_l/\xi_{m+1}=r_{m+1},\ldots,\xi_n=r_n) =$$

$$= \frac{\left(a+\sum_{j=m+1}^{n} r_j\right)k_i k_l\left(a+\sum_{j=m+1}^{n} r_j+\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)}{\left(\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)^2\left(\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-2\right)}$$

$i\neq l=1,\ldots,m$

Por tanto podemos calcular el coeficiente de correlación de ξ_i,ξ_l condicionada a las variables $(\xi_{m+1},\ldots,\xi_n)$, que vale:

$$\rho_{i,l(m+1,\ldots,n)} = \left[\frac{k_i k_l}{\left(k_i+\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)\left(k_l+\rho+\sum_{j=m+1}^{n} k_j-1\right)}\right]^{1/2}$$

$i\neq l=1,\ldots,m$

Estos coeficientes son los coeficientes de correlación parcial y representan la correlación entre las variables i y l una vez eliminada la influencia de las variables $\xi_{m+1},\ldots,\xi_n$.

La superficie de regresión de la variable ξ_i con respecto a las variables $\xi_{m+1},\dots,\xi_n$ dada por $E(\xi_i/\xi_{m+1}=r_{m+1},\dots,\xi_n=r_n)$ es, como puede verse, combinación lineal de las variables $\xi_{m+1},\dots,\xi_n$, con lo que su superficie de regresión es el hiperplano de regresión.

La función de probabilidad marginal de $(\xi_{m+1},\dots,\xi_n)$ se obtiene por aplicación del Teorema 2.2.3.6, de la forma:

$$= f_{r_{m+1},\dots,r_n} \frac{(a)_{r_{m+1}+\dots+r_m} \prod_{j=m+1}^{n} (k_j)_{r_j}}{\left(a + \sum_{i=m+1}^{n} k_i + \rho\right)_{r_{m+1}+\dots+r_n} \prod_{j=m+1}^{m} r_j!}$$

que es una variable de Waring Generalizada Multivariante de parámetros $(a,\ k_{m+1},\dots,k_n\ ;\ \rho)$.

Y por último, la función de probabilidad de la variable aleatoria $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n$ viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(a)_r\ (k_1 + \dots + k_n)_r}{(a + k_1 + \dots + k_n + \rho)_r\ r!}$$

que es una distribución de Waring generalizada univariante de parámetros $(a,\ k_1+\dots+k_n;\ \rho)$.

6.3. Distribuciones generadas por la función hipergeométrica multivariante $F_3^{(n)}$

6.3.1 Función de masa de probabilidad.

Consideremos las funciones:

$$L_i(r_1, \ldots, r_n) = (\alpha_i + r_i)(\beta_i + r_i)\lambda_i$$

$$G_i(r_1, \ldots, r_n) = (\gamma + r_1 + \ldots + r_n)(r_i + 1)$$

en donde i=1,... ,n; α_i, β_i, $\gamma > 0$ Por el teorema (2.2.3.2) sabemos que la solución del sistema de ecuaciones en diferencias viene dada por:

$$f_{r_1, \ldots, r_n} = f_{0,\ldots,0} \frac{(\alpha_1)_{r_1+\ldots+}(\alpha_n)_{r_n}(\beta_1)_{r_1}\ldots(\beta_n)_{r_n}\lambda_1^{r_1}\ldots\lambda_n^{r_n}}{(\gamma)_{r_1+\ldots+r_n} r_1! \ldots r_n!}$$

Para que sea solución de probabilidad esa función, es preciso que se verifiquen las condiciones del teorema 2.2.3.4.:

a) Condición de positividad:

$$L_i \cdot G_i = (\alpha_i + r_i)(\beta_i + r_i)\lambda_i(\gamma + r_1 + \ldots + r_n)(r_i + 1) \geq 0.$$

b) Condición de Convergencia:

$$\sum_{\substack{r_1=0 \\ r_1+\ldots+r_n\neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \prod_{t_1=0}^{r_1-1} \cdots \prod_{t_n=0}^{r_n-1} \frac{L_1(t_1,r_2,\ldots,r_n)}{G_1(t_1,r_2,\ldots,r_n)} \cdots \frac{L_n(0,\ldots,0,t_n)}{G_n(0,\ldots,0,t_n)} =$$

$$= \sum_{\substack{r_1=0 \\ r_1+\ldots+r_n\neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{r_1+\ldots+}(\alpha_n)_{r_n}(\beta_1)_{r_1}\ldots(\beta_n)_{r_n}\lambda_1^{r_1}\ldots\lambda_n^{r_n}}{(\gamma)_{r_1+\ldots+r_n} r_1! \ldots r_n!} =$$

$$= F_3^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n;\ \gamma;\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n) - 1$$

c) Condición de Normalización:

$$f_{0,\ldots,0} = \frac{1}{1 + F_3^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n;\gamma;\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n) - 1} =$$

$$= \frac{1}{F_3^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n;\gamma;\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$$

Por tanto, es una auténtica defínción de probabilidad siempre que la función hipergeométrica sea convergente, y esta función converge siempre que $|\lambda_i| < 1\ \forall i$; o si $\lambda_i=1\ \forall i$ converge si

$$\gamma > \max \left\{ \alpha_1 + \beta_1 \; ; \; . \; . \; . \; \alpha_n + \beta_n \right\}$$

6.3.2 Función generatriz de probabilidad.

Su función generatriz de probabilidad es, por consiguiente:

$$g(t_1, \; \ldots \; , t_n) = \frac{F_3^{(n)} \; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n ; \gamma ; \; \lambda_1 t_1, \ldots, \lambda_n t_n)}{F_3^{(n)} \; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n ; \gamma ; \; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}$$

Vamos a calcular el sistema de ecuaciones diferenciales que verifica esta función generatriz de probabilidad, por aplicación del teorema 2.2.3.5. Para ello, expresemos el polinomio G_i en función de las variables $(r_1, \ldots, r_i+1, \ldots, r_n)$

$$(\gamma + r_1 + \; \ldots \; + r_n)(r_i + 1) = (\gamma+1) r_i + r_i^2 + \sum_{i \neq j} r_i r_j + \gamma + \sum_{i \neq j} r_j$$

y eso ha de ser igual a:

$$b_{0,\ldots,0} + b_{1,0,\ldots,0} r_1 + \ldots + b_{0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots 0} (r_i+1) + \; \ldots + b_{0,\ldots,1} r_n +$$
$$b_{1,\ldots,\underset{i}{1},\ldots 0} r_1 (r_i+1) + \ldots + b_{0,\ldots,2,\ldots 0} (r_i+1)^2 + \ldots + b_{0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots 1} r_n (r_i+1)$$

desarrollando esas expresiones e igualando término a término, se obtiene:

$$b_{0,\ldots,\underset{i}{2},\ldots 0} = 1$$
$$b_{1,\ldots,\underset{i}{1},\ldots 0} = \; \ldots \; = b_{0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,1} = 1$$
$$b_{1,\ldots,0} = \ldots = b_{0,\ldots,\underset{i-1}{1},\underset{i}{0},\ldots,0} = b_{0,\ldots,\underset{i}{0},\underset{i+1}{1},\ldots,0} = \ldots = b_{0,\ldots 1} = 0$$

$$b_{0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0} = (\gamma - 1)$$

$$b_{0,\ldots,0} = 0$$

Por tanto:

$$G_i(r_1,\ldots,r_n) = (\gamma-1)(r_i+1) + (r_i+1)^2 + \sum_{i\neq j} r_j(r_i+1)$$

y por otra parte:

$$L_i(r_1,\ldots,r_n) = \alpha_i\beta_i\lambda_i + \lambda_i(\alpha_i+\beta_i)r_i + \lambda_i^2 r_i^2$$

En consecuencia, las ecuaciones diferenciales que verifica la f.g.p. son:

$$\left[(1-t_i\lambda_i)\theta_i^2 + \left[\gamma-1-\lambda_i(\alpha_i+\beta_i)t_i\right]\theta_i + \sum_{i\neq j}^{n} \theta_j\theta_i - t_i\alpha_i\beta_i\lambda_i\right] g(t_{i}, \ldots, t_n) = 0$$

con $i=1,\ldots,n$; $|t_i| < 1$ y $\theta_l = t_l \dfrac{\partial}{\partial t_l}$

6.3.3. Clasificación

Vamos a clasificar los diversos tipos de funciones que pueden darse, suponiendo $\lambda_i = 1$; $i=1,\ldots,n$, según los diversos valores de los parámetros.

$\boxed{A:\ \gamma > 0}$

Parámetros [1]	*Condiciones*	*Recorrido*	*Tipo*
$\alpha_i\ ,\ \beta_i > 0,\ i=1,\dots,n$			
$\alpha_i,\ \beta_i > 0;\ i=1,\dots,n$	$\gamma > \max\limits_{1\le i\le n} \{\alpha_i+\beta_i\}$	$r_i\in\mathbb{Z}^+$ $i=1,\dots,n$	I
$\alpha_i,\ \beta_i < 0\ i=1,\dots,k \quad \alpha_j,\ \beta_j > 0\ i=k+1,\dots,n$			
$\alpha_i,\ \beta_i \notin \mathbb{Z}\ i=1,\dots,k$	$\gamma > \max\limits_{k+1\le i\le n} \{\alpha_i+\beta_i\}$ $E\lvert\alpha_i\rvert=E\lvert\beta_i\rvert\ i=1,\dots,k$	$r_i\in\mathbb{Z}^+$ $i=1,\dots,n$	II
$\alpha_i \in \mathbb{Z}\ i=1,\dots,l$ $\alpha_j \notin \mathbb{Z}\ i=l+1,\dots,k$ $\beta_i \notin \mathbb{Z}\ i=1,\dots,k$	$\gamma > \max\limits_{k+1\le i\le n} \{\alpha_i+\beta_i\}$ $E\lvert\alpha_i\rvert=E\lvert\beta_i\rvert\ i=l+1,\dots,k$ $\lvert\beta_i\rvert>\lvert\alpha_i\rvert-1\ i=1,\dots,l$	$r_j\in\mathbb{Z}^+$ $j=l+1,\dots,n$ $r_i\le\lvert\alpha_i\rvert$ $i=1,\dots,l$	III
$\beta_i \in \mathbb{Z}\ i=1,\dots,l$ $\beta_j \notin \mathbb{Z}\ i=l+1,\dots,k$ $\alpha_i \notin \mathbb{Z}\ i=1,\dots,k$	$\gamma > \max\limits_{k+1\le i\le n} \{\alpha_i+\beta_i\}$ $E\lvert\alpha_i\rvert=E\lvert\beta_i\rvert\ i=l+1,\dots,k$ $\lvert\alpha_i\rvert>\lvert\beta_i\rvert-1\ i=1,\dots,l$	$r_j\in\mathbb{Z}^+$ $j=l+1,\dots,n$ $r_i\le\lvert\beta_i\rvert$ $i=1,\dots,l$	IV

[1] Válida para cualquier permutación posible de $1,\dots,n$

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ i=1,...,k $\quad \gamma > \max_{k+1 \le i \le n} \{\alpha_i + \beta_i\}$ $\quad r_j \in \mathbb{Z}^+$ j=k+1,...,n $\quad$ V

$r_i \le \min\{|\alpha_i|, |\beta_i|\}$ i=1,...,k

$\boxed{\mathbb{B}: \gamma < 0}$

Este caso no puede darse, ya que entonces no se cumple la condición de que la función de masa de probabilidad sea positiva en todo punto.

6.3.4 Distribuciones condicionadas.

Por aplicación del teorema 2.2.3.6. podemos encontrar las distribuciones condicionadas para una variable multidimensional de este tipo. Así, según este teorema, la función de probabilidad condicionada verifica el sistema de ecuaciones parciales:

$$G_i(r_1,...,r_n) f_{r_1,..r_i+1,...,r_k / r_{k+1},...,r_n} -$$

$$- L_i(r_1,...,r_n) f_{r_1,..r_i,...,r_k / r_{k+1},...,r_n} = 0$$

para i=1,...,k y $f_{r_{k+1},...,r_n} > 0$.

y resolviendo este sistema en nuestro caso:

$$f_{r_1,\dots,r_k\,/\,r_{k+1},\dots,r_n} = f_{0,\dots,0\,/\,r_{k+1},\dots,r_n}\,\frac{(\alpha_1)_{r_1+\dots+}\dots(\alpha_k)_{r_k}\,(\beta_1)_{r_1}\dots(\beta_k)_{r_k}\,\lambda_1^{r_1}\dots\lambda_k^{r_k}}{(\gamma+r_{k+1}+\dots+r_n)_{r_1+\dots+r_k}\,r_1!\,\dots\,r_k!}$$

con

$$f_{0,\dots,0\,/\,r_{k+1},\dots,r_n} = \frac{1}{F_3^{(k)}(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_k;\gamma+r_{k+1}+\dots+r_n;\lambda_1,\dots,\lambda_k)}$$

Si calculamos su función generatriz de probabilidad:

$$g(t_1,\dots,t_k) = \sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_k=0}^{\infty} f_{r_1,\dots,r_k\,/\,r_{k+1},\dots,r_n}\, t_1^{r_1}\dots t_k^{r_k} =$$

$$= \frac{F_3^{(k)}(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_k;\gamma+r_{k+1}+\dots+r_n;\lambda_1 t_1,\dots,\lambda_k t_k)}{F_3^{(k)}(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_k;\gamma+r_{k+1}+\dots+r_n;\lambda_1,\dots,\lambda_k)}$$

Para calcular las ecuaciones diferenciales que satisface al f.g.p. condicionada, apliquemos el Corolario 2.2.3.7. Para ello, recordemos la expresión de G_i en función de $r_1,\dots,r_i+1,\dots,r_k$):

$$G_i(r_1,\dots,r_n) = (\gamma-1)(r_i+1) + (r_i+1)^2 + \sum_{i\neq j} r_j(r_i+1)$$

En este caso:

$$G_i(\theta_1,\dots,\theta_k,r_{k+1},\dots,r_n)=(\gamma-1)\theta_i + \theta_i^{\,2} + \sum_{i\neq j=1}^{k}\theta_j\;\theta_i + \sum_{j=k+1}^{n} r_j\;\theta_i$$

$$L_i(\theta_1,\ldots,\theta_k,r_{k+1},\ldots,r_n)=\alpha_i\beta_i\lambda_i + \lambda_i(\alpha_i+\beta_i)\theta_i + \lambda_i^2\theta_i^2$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\left[(\gamma-1)\theta_i+\theta_i^{\,2}+\sum_{i\neq j=1}^{k}\theta_j\theta_i+\sum_{j=k+1}^{n} r_j\theta_i - \alpha_i\beta_i\lambda_i t_i-\lambda_i(\alpha_i+\beta_i)t_i\theta_i- t_i\lambda_i^2\theta_i^2\right]g=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\left[(1-t_i\lambda_i)\theta_i^2+\left[\gamma+r_{k+1}+\ldots+r_n-1-\lambda_i(\alpha_i+\beta_i)t_i\right]\theta_i+\sum_{i\neq j}^{k}\theta_j\theta_i -t_i\alpha_i\beta_i\lambda_i\right]g=0$$

con $i=1,\ldots,k$; y $g = g(t_1,\ldots,t_k)$ la correspondiente función generatriz de probabilidad condicionada.

Como puede verse, por la forma de la función generatriz de probabilidad, la v.a. k- dimensional:

$$(\xi_1,\ldots,\xi_k) \big/ \xi_{k+1}= r_{k+1},\ \ldots\ ,\ \xi_n = r_n$$

es una variable aleatoria de las estudiadas anteriormente, generada por una función hipergeométrica k-dimensional del tipo F_3 y con parámetros:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_k;\gamma+r_{k+1}+\ldots+r_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$$

la cual tiene asegurada la convergencia, ya que

$$\gamma+r_{k+1}+\ldots+r_n > \max_{1\leq i\leq k}\{\alpha_i + \beta_i\}$$

al cumplir γ esa condición, y $r_{k+1},\ldots,r_n \in\mathbb{Z}^+$.

7. BIBLIOGRAFIA.

APPELL, P. et KAMPE DE FERIET, J. (1926). **Fonctions Hypergéométriques eh Hyperspheriques: Polynômes d'Hermite.** *Gauthier-Villars. Paris.*

BASU, A.P. and BLOCK, H.W. (1975). **On characterizing univariate and multivariate exponential distributions.** *G. P. Patil (ed.). Statistical distributions in scientific work. Vol. 3 pp 399-421 (1975) by D.Reidel.*

BAYLEY, W.N. (1935). **Generalized Hipergeometric Series.** *Cambridge Math. Tract n° 32, Cambridge Univ. Press. Reprinted by Stechert-Hafner, New York 1964.*

CANSADO, E. (1947). **Funciones características de las distribuciones de Pearson.** *Hispano-americana. Vol 7, n° 3; pp 117-127.*

CANSADO, E. (1950). **Exposición sistemática de las distribuciones de Pearson.** *Trabajos de estadística, Vol. 1, cuad. III, pp. 279-287.*

CROW, E.L. and SHIMIZU, K. (1988). **Lognormal Distributions:**

Theory and Applications. *Marcel Dekker, Inc. New York*

CHANG, D.K. (1989). **On infinitely divisible discrete distributions.** *Utilitas Math. 36. pp 215-217.*

DACEY, M.F. (1975). **Probability laws for topological properties of drainage basins.** *G. P. Patil (ed.). Statistical distributions in scientific work. Vol. 2 pp 327-341 (1975) by D.Reidel.*

DOSS, D. C. (1969). *Ann. Math. Statistic 40, 1.721-1.727.*

ELDERTON, W.P. and JOHNSON, N.L. (1969). **Systems of frequency curves.** *Cambridge University Press.*

ELDERYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. and TRICOMI, F.G. (1953). **Higher transcendental functions, Vol. I and II.** *Mc Graw- Hill, New York.*

ELDERYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. and TRICOMI, F.G. (1955). **Higher transcendental functions, Vol. III.** *Mc Graw-Hill, New York.*

FAJARDO CALERA, M.A. (1985). **Generalizaciones de los sistemas de Pearson discretos.** *Univ. de Extremadura.*

FELLER, W. (1957). **An introduction to Probability theory and its applications.** *Vol. 1 segunda ed. Wiley, New York.*

FERNANDEZ GARCIA, F. (1979). **Una extensión del sistema de Pearson bivariante o sistema de Van Uven.** *Public. F. C. Granada.*

FERNANDEZ GARCIA, F. (1981). **Clasificación de las superficies de probabilidad que satisfacen a la extensión del sistema de Van Uven.** *Cuad. de Estad. Matematica, n°6. Univ. de Granada.*

GUELFOND, A.O. (1963). **Calcul des différences finies.** *Dunod.*

GURLAND, J. and TRIPATHI, R. (1977). **A general family of discrete distributions with hypergeometric probabilities.** *J. R. Statistic Soc. B,. 39, n° 3. pp 349-356.*

HANSMANN, G.H. (1934). **On certain non-normal symetrical frequency distributions.** *Biometrica 26, 129-195.*

HERMOSO GUTIERREZ, J.A. **Estudio sobre distribuciones generadas por distribuciones hipergeométricas de argumento matricial.** *Tesis Doctoral. Univ. Granada.*

HERRERIAS PLEGUEZUELO, R. (1975). **Sobre las estructuras estadísticas de Pearson y exponenciales.; problemas asociados.** *Tesis Doctoral. Univ. de Granada.*

HERRERIAS PLEGUEZUELO, R. (1976). **Extensión del sistema de distribuciones discretas de Pearson.** *cuad. Dep. Estad. Mat. Serie A, n°3. Fac. Ciencias Granada.*

HERRERIAS, R. y COBOS, J. (1984). **Solución general para un tipo de sistemas de distribuciones de probabilidad bivariantes discretas.** *Actas Congreso Nacional de Estadística. Granada.*

IRWING, J.O. (1968). **The generalized Waring distribution applied to accident theory.** *J. R. Statist. Soc. A, 131, pp. 205-225.*

IRWING, J.O. (1975). **The generalized Waring Distribution.** *J. R. Statist. Soc. A, 138 pp. 18-31 (part I), 204-227 (part II), 374-384 (part III).*

JOHNSON, N.L. and KOTZ, S. (1969,1970). **Distributions in Statistic. Vol 1: Discrete Distributions, Vol 2: Continuous distributions.** *Wiley, New York.*

JOHNSON, N.L. and KOTZ, S. (1983). **Encyclopedia of Statistical Sciencies. Vol I, II, III and IV.** *Edited by S. Kotz and Johnson, Wiley.*

JORDAN, C. (1965). **Calculus on finite differences.** *Chelsea.*

JOSHI, S.W. and PATIL, G.P. (1970). **A class of statistical models for multiple counts.** *Randon Counts, Vol 1, pp 189-203.*

KAMPE DE FERIET, J. (1921). **Les fonctions Hypergéometriques d'ordre superieur á deux variables.** *C.R. Acad. Sci. Paris, 173, 401-404*

KEMP, A.W. (1968). **A wide class of discrete distributions and the associated differential equations.** *Sankhya, serie A, 30, 401-410.*

KEMP, C.D. (1967). **Stuttering Poisson distributions.** *J. Statist. & Social Inq. Soc. Ireland, 21 151-157.*

KEMP, A.W. and KEMP, C.D. (1975). **Models for Gaussian hypergeometric distributions.** *G. P. Patil (ed.). Statistical distributions in scientific work. Vol. 1 pp 31-40 (1975) by D.Reidel.*

KENDALL, M.G. and STUART, A. (1967,1969). **The avanced theory of statistic, vol. I and II.** *Griffin, London.*

LAURICELLA, G. (1893). **Sulle funzioni Ipergeometriche a piú variabili.** *Rend. Circ. Mat. Palermo 7, 111-158.*

MARDIA, K.V. (1970). **Families of bivariate distributions.** *Griffin's statistical Monographs & Courses. London.*

MOUZON, E.D. (1930). **Equimodal Frequency Distributions.** *Ann. Math. Statist. 1, 137-158.*

MUIRHEAD, R.J. (1982). **Aspects of Multivariate Statistical Theory.** *Wiley.*

ORD, J.M. (1967). **On a system of discrete distributions.** *Biometrika, n° 54, 649-656.*

ORD, J.M. (1972). **Families of frequency distributions.** *Griffin, London.*

PATIL, G.P. (1963). **A characterization of the exponen-type distributions.** *Biometrika n° 50. 205-207.*

PATIL, G.P. (1965). *Sankhya, serie B, 26, 286-292.*

PATIL, G.P., KOTZ, S. and ORD, J.K. (1975). **Statistical distributions in scientific work. Vol. I, II, III.** *D. Reidel*

PATIL, G.P. and JOSHI, S.W. (1968). **Dictionary and bibliography of discrete distributions.** *Oliver & Boyd. Edinburgh.*

PEARSON, K. (1895). **Memoir an skew variation in homogeneous material.** *Phil. Trans. Roy. Soc., A, 186, 343-414.*

PEARSON, K. (1923). **Notes on skew frequency surfaces.** *Biometrika nº 54, 649-656.*

ROY, L.K. (1971). **An extension of the Pearsons systems of frequency curves.** *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol XXII Cuad. 1 y 2, 113-123.*

SRIVASTAVA, H.M. (1964). **Hypergeometric functions of three variables.** *Ganita 15, 97-108.*

SRIVASTAVA, H.M. (1967). **Some integrals reprresenting triple hypergeometric functions.** *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 16, 99-115*

SRIVASTAVA, H.M. (1971). **Certain double integrals involving hypergeometric functions.** *Jhanabha Sect. A1, 1-10.*

SRIVASTAVA, H.M. (1972). **Some formulas of Hermite and Carlitz.** *Rev. Ronmaine Math. Pures App. 17, 1257-1263.*

SRIVASTAVA, H.M. and MANOCHA, H.L. (1984). **A teatrise on generating functions.** *Ellis Horwood Series Mat. and its Applications*

STEIN, H.S. (1951). **On discrete multivariate probability functions.** *Kon. Ned. Acad. Wet. Proc. A, 54, 23-30.*

STEIN, H.S. (1955). **On discrete multivariate probability functions of hypergeometric type.** *Kon. Ned. Acad. Wet. Proc. A, 58, 588-595.*

STEYN, H.S. (1957). **On regression properties of discrete systems of probability functions.** *Kon. Ned. Acad. Wet. Proc. A, 63, 119-127.*

STEYN, H.S. (1960). **On regression properties of multivariate probability functions of Pearson's type.** *Kon. Ned. Acad. Wet. Proc. A, 63, 302-311.*

TAKEMURA, A. (1984). **Zonal polinomials.** *Institute of Mathematical Statistics; Lecture notes-Monograph Series, Vol. 4*

UVEN, M.J. VAN (1947-48). **Extension's of Pearson's probability distributions to two variables.** *Proceedings of the Royal Academy of Sciencies. Amsterdam. Vol. 50, pag. 1063-1070 y 1252-1264; y Vol. 51 pag. 41-52 y 191-196.*

WANI, J.K. and PATIL, G.P. (1975). **Caracterizations of linear exponential families.** *G. P. Patil (ed.). Statistical distributions in scientific work. Vol. 3 pp 423-431 (1975) by D.Reidel.*

WANI, J.K. (1968). *Proc. Camb. Phil. soc. 64, 481-483.*

XECALAKI, E. (1983). **The univariate Generalized Waring distributions in relation to accident theory: proneness, spells or contagion?.** *Biometrika 39(3) 887-895.*

XECALAKI, E. (1984). **The bivariate generalized Waring distributions and its applications to accident theory.** *J. R. Stat. Soc. A 147 part 3, pp 488-498.*

ZOCH, R.T. (1935). **Some interesting features of frequency**

curves. *Ann. Math. Stat.* , *6, pp-1-10.*