

Argumentos de los estudiantes de bachillerato en la generación de muestras de la distribución binomial

High school students' arguments in generating samples of the binomial distribution

Nuria Begué, Carmen Batanero y María M. Gea

Universidad de Granada, España

Resumen

La distribución binomial aparece en muchas situaciones cotidianas y su estudio se incluye en Bachillerato, en las modalidades de Ciencia y Tecnología y Ciencias Sociales. Con objeto de evaluar la comprensión intuitiva del valor esperado, se pide a 127 estudiantes de segundo curso de Bachillerato (de las dos especialidades citadas) escribir cuatro valores probables de una distribución binomial que se deduce de una tarea. Además, los estudiantes tienen que justificar los valores proporcionados. En este trabajo se presenta el análisis de las justificaciones aportadas por los estudiantes, identificando que algunos participantes se apoyan en razonamientos correctos, basados en la estimación frecuencial o clásica de la probabilidad, convergencia y variabilidad, o bien en aspectos físicos del dispositivo aleatorio. No obstante, otros manifiestan el sesgo de equiprobabilidad o creencias erróneas sobre la aleatoriedad. Finalmente, se identifican una serie de conflictos semióticos que se especifican como conclusión.

Palabras clave: Muestreo, proporción muestral, valor esperado, Bachillerato.

Abstract

The binomial distribution appears in many everyday situations and is included in the high school curricular guidelines for Social Sciences and Science modalities. To analyse the students' understanding of the expected value, we asked to 127 students (17-18-years-old) to provide four probable values of a binomial distribution, which should be deduced from a task. In addition, students have to justify the values provided. This paper presents the analysis of their justifications. On one hand, we identify that some participants rely on correct reasoning based on the frequentist or classical estimation of probability, convergence and variability, or on physical aspects of the random device. On other hand, some students show the equiprobability bias or erroneous beliefs about randomness. Finally, a series of semiotic conflicts are identified.

Keywords: sampling, sampling proportion, expected value, high school.

1. Introducción

El muestreo recibe actualmente una gran atención en la investigación didáctica, pues las ideas asociadas al mismo subyacen en el trabajo con la simulación, cuya utilización en el aula es recomendada para mejorar la comprensión de la probabilidad y la inferencia estadística (Eichler y Vogel, 2014; Huerta, 2015). Este concepto, según Heitele (1975), juega un gran papel en el estudio de ciertos temas de probabilidad (leyes de los grandes números y enfoque frecuencial). Burrill y Biehler (2011) lo consideran como una de las ideas fundamentales en estadística, por ser la base de la inferencia.

Además, nuestro conocimiento sobre el mundo está basado en el muestreo, ya que, usualmente, sólo podemos observar una parcela de la realidad en la que estamos interesados. Por otro lado, los resultados obtenidos mediante muestreo en diferentes campos se publican con frecuencia en los medios de comunicación. Por tanto, es

importante preparar a los estudiantes para comprender estas noticias, y hacerles conscientes de sus posibles sesgos en el razonamiento sobre muestreo.

El muestreo aparece por primera vez en el currículo, en España, en los dos primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y en Bachillerato, tanto de Ciencias, como de Ciencias Sociales, se introduce la distribución binomial (MECD, 2015). En un trabajo previo se ha analizado la comprensión de los estudiantes del valor medio y variabilidad de la distribución muestral de la proporción, detectando algunos sesgos en su razonamiento sobre el muestro (Begué, Batanero y Gea, 2018). El objetivo de este trabajo es analizar los argumentos proporcionados por una nueva muestra de estudiantes de Bachillerato en una de las tareas propuestas en dicho estudio para comprender con más profundidad sus razonamientos.

2. Marco teórico

En el muestreo intervienen dos ideas aparentemente antagónicas: representatividad y variabilidad muestral (Rubin, Bruce y Tenney, 1991; Saldahna y Thompson, 2002). Debido a la representatividad, una muestra aleatoria de tamaño suficiente tendrá características parecidas a las correspondientes características en la población, mientras que la variabilidad supone que las muestras pueden cambiar en su composición y características (como ocurre con la proporción muestral). La comprensión del muestreo exige trabajar con tres tipos de distribuciones que los estudiantes deben comprender y relacionar (Harradine, Batanero y Rossman, 2011):

- La *distribución teórica de probabilidad* que modela los valores de una variable aleatoria en una población y depende de algún *parámetro* o característica estadística en dicha población. En los ítems de nuestro cuestionario se considera una variable aleatoria, siendo p la proporción de elementos que comparten un cierto rasgo (éxitos) dentro de la población.
- La *distribución de datos en una muestra*. Es una parte de la población donde podemos calcular la proporción de éxitos \hat{p} (que es un resumen estadístico en la muestra) para estimar el parámetro p . Mientras que dicho parámetro es constante, el valor del estadístico \hat{p} varía en las diferentes muestras.
- La *distribución muestral del estadístico* o distribución de probabilidad de todos los valores que puede tomar \hat{p} en el conjunto de las posibles muestras de la población de un tamaño dado. Puesto que hay una correspondencia biunívoca entre el número de éxitos en una muestra de tamaño n y la proporción de éxitos en la muestra, al igual que en otras investigaciones sobre comprensión del muestreo, se pedirá a los estudiantes valores del número de éxitos en la muestra. El modelo probabilístico que se aplica a esta variable es la distribución Binomial $B(n, p)$, donde p es la proporción en la población de dicho rasgo y n el tamaño de la muestra.

3. Antecedentes

Las primeras investigaciones sobre el muestreo se realizaron dentro del programa denominado heurísticas y sesgos, donde la tarea típica consiste en preguntar por la probabilidad de un valor de la proporción muestral en muestras de diferente tamaño, y se observan las siguientes heurísticas:

- La *heurística de representatividad* (Tversky y Kahneman, 1982), que consiste en estimar la probabilidad pedida, teniendo en cuenta únicamente la similitud que

guarda la proporción muestral con la poblacional. Un sesgo asociado es la *insensibilidad al tamaño de la muestra*, que implica no tener en cuenta el tamaño de la muestra para juzgar la variabilidad de la proporción muestral. Otro sesgo (*falacia del jugador*) es considerar que el resultado de un experimento aleatorio afectará en la probabilidad de sucesos futuros. Si se supone que los siguientes resultados seguirán el patrón observado, se habla de *recencia positiva* y si se piensa que se compensarán los resultados futuros con los observados, de *recencia negativa*.

- La *heurística de la disponibilidad* (Tversky y Kahneman, 1974) consiste en estimar la probabilidad de un suceso basándose en la facilidad por encontrar ejemplos de situaciones similares. Un sesgo asociado es la *equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992), mediante la cual se supone que los resultados de cualquier fenómeno aleatorio son igualmente probables. Este sesgo ha sido recientemente explicado por Chernoff y Russel (2012) mediante la *falacia de la composición*, que consiste en extender indebidamente a un todo una propiedad que se cumple en una de sus partes. Según los autores, cuando los sucesos de un experimento aleatorio son equiprobables (como la cara y la cruz al lanzar una moneda) los sujetos suelen extender la equiprobabilidad de los sucesos a cualquier muestra de resultados del experimento.

La investigación relacionada con la distribución muestral suele utilizar poblaciones binomiales cuya proporción conoce el estudiante. Por ejemplo, Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004) investigaron la comprensión del muestreo de 272 estudiantes (10-19 años), pidiéndoles dar el número de sucesos de un cierto tipo en una muestra de 10 elementos y otra de 100 elementos. Los autores identifican tres niveles progresivos en el razonamiento sobre el muestreo: 1) el nivel de razonamiento aditivo (el más frecuente), que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población y utilizar en las estimaciones únicamente, la frecuencia absoluta, sin tener en cuenta la proporción del suceso; 2) el nivel de razonamiento proporcional, en el que se utilizan proporciones al realizar estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) el nivel de razonamiento distribucional (el menos frecuente) donde se integran las ideas de valor esperado y de variabilidad, al realizar estimaciones.

La tarea que proponemos ha sido tenida en cuenta en investigaciones anteriores, en concreto por Green (1983), quien en su estudio del razonamiento probabilístico de 2930 estudiantes (11 - 16 años), pide estimar el número de chinchetas que caerán con la punta hacia arriba cuando se lanzan 100 chinchetas sobre una mesa. El enunciado de la tarea indica que, en la realización previa del experimento, 68 de 100 chinchetas cayeron con la punta hacia arriba. El 64% de los estudiantes mostró el sesgo de equiprobabilidad, sugiriendo que la mitad de las chinchetas, aproximadamente, caerían hacia arriba.

Gómez, Batanero y Contreras (2014), en una investigación con 202 futuros profesores de educación primaria, adaptan este ítem para pedir cuatro resultados diferentes al lanzar 100 chinchetas. Sólo una tercera parte de los sujetos de su estudio tuvieron una intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y la variabilidad muestral. Además, los autores identifican en los sujetos diferentes sesgos como la equiprobabilidad o la heurística de la representatividad.

4. Método

En el estudio participan un total de 127 estudiantes de 2º Bachillerato (17-18 años) de dos institutos diferentes de la comunidad de Aragón (España). La Tabla 1 resume las características más generales de la muestra participante, donde se observa que los

alumnos pueden cursar las matemáticas de la modalidad denominada Ciencias o, la correspondiente a la modalidad de Ciencias Sociales, en las que el peso del contenido del Bloque de Estadística y Probabilidad es mayor.

Tabla 1. Características de la muestra participante

Centro educativo	Materia	Tamaño de la muestra
C1	MATII	26
	MATII	15
	MATCCSSII	19
C2	MATII	29
	MATII	14
	MATCCSSII	24

La evaluación se fundamenta en la aplicación de la tarea siguiente en el que se demanda al estudiante proporcionar cuatro valores probables de una población que sigue una distribución binomial.

Tarea. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo. Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.

Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Con la finalidad de caracterizar las categorías de análisis de las argumentaciones, se sigue el análisis de contenido, que, de acuerdo a Krippendorff (2013), es una técnica de investigación destinada a formular, a partir ciertos datos textuales, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto. Esta técnica permite clasificar las unidades de análisis en un número reducido de categorías, que permiten realizar inferencias sobre su contenido, con las siguientes etapas:

- Seleccionar las unidades de análisis para el fenómeno que se está investigando. En nuestro caso las unidades de análisis son la respuesta de cada estudiante.
- Los datos se transforman en unidades de registro; en nuestro estudio, se transcribió a un fichero *Word* las respuestas de todos los estudiantes con un código para identificar al estudiante y copia de su argumento y respuesta.
- Establecer un sistema de categorías de análisis. Para formar las categorías se compararon todas las respuestas de cada ítem entre sí, agrupando las semejantes para formar una primera lista de categorías. Las investigadoras revisaron la primera agrupación de respuestas y mediante discusión de casos discordantes y después de sucesivas revisiones se llegó a la lista final de categorías.
- Se transforman los datos a un fichero *Excel* y otro *SPSS* con el propósito de obtener las diferentes tablas que se usan para obtener conclusiones.

5. Resultados

El análisis de las argumentaciones conduce a la identificación de diferentes categorías mediante el método descrito, donde un argumento puede situarse en más de una

categoría. A continuación se caracterizan los distintos tipos de justificaciones con algún ejemplo.

TIPO 1. Aleatoriedad. En esta categoría se incluye tanto a los estudiantes que hacen referencia a términos o expresiones relacionados con el azar como a los que indican que el resultado es imprevisible por ser aleatorio. En este segundo caso, los estudiantes tratan de expresar que han dado respuestas muy variadas que ellos consideran propias de una secuencia aleatoria, por lo que aplicarían una concepción de la aleatoriedad como sinónimo de un proceso que es impredecible, categoría encontrada por Serrano (1996) en su estudio de las concepciones de la aleatoriedad de los estudiantes. A continuación se muestra un ejemplo:

A524: “No existe ninguna razón, porque es azar” (62, 58, 55, 44).

A489: “He puesto valores muy diferentes ya que puede salir cualquier resultado” (47, 85, 28, 40).

En estas justificaciones, A524 y A489 aluden directamente a la impredecibilidad de un suceso aleatorio y en su respuesta, proporcionan cuatro valores muy diferentes, muy improbables en una distribución binomial, intentando repartir de forma equitativa los resultados en el rango de posibles valores de la variable. Por tanto, estos alumnos muestran la concepción de aleatoriedad como impredecibilidad (Serrano, 1996). En esta categoría también se han incluido otros estudiantes que asocian la aleatoriedad con la imposibilidad de medir la probabilidad, o bien a los que interpretan una pregunta probabilística (¿cuál es la probabilidad de?) en forma no probabilística (¿qué va a ocurrir?), lo que denotaría en algunos de estos estudiantes el enfoque en el resultado (Konold, 1989).

TIPO 2. Razonamiento basado en aspectos físicos del dispositivo sin utilizar el lenguaje probabilístico. Se consideran aquellas justificaciones en las que se indica algún rasgo físico del dispositivo con ausencia de lenguaje probabilístico. Subyace una interpretación de la probabilidad próxima al significado de propensión debido a Peirce (Batanero y Díaz, 2007) en la que la probabilidad de un generador aleatorio es una tendencia de producir cada uno de sus posibles resultados.

A473: “Con este objeto he tenido en cuenta el peso de la chincheta, es decir, la base pesa más que la punta por lo que al lanzarlas caerán de una forma pero en ese instante se equilibrará y se decantará por el pincho hacia arriba. De allí que los porcentajes sean más hacia las chinchetas de punta hacia arriba” (75, 70, 60, 50).

A490: Debido a la forma de la chincheta es más fácil que caiga hacia arriba (69, 67, 68, 65).

A473 ha tenido en cuenta el peso de la cabeza, comparado con el de la punta, imaginando cómo se producirá la caída. Consecuentemente, tres de sus muestras presentan una proporción mayor de chinchetas con la punta hacia arriba, aunque la proporción de la última sería poco probable en el experimento descrito. Por tanto, el estudiante busca compensar los resultados en torno al valor esperado (68), mostrando la heurística de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). En segundo lugar, A490 hace referencia al aspecto del dispositivo para argumentar el modo más probable de que caiga la chincheta mediante un lenguaje coloquial. El análisis de las cuatro muestras refleja la presencia de la variabilidad, aunque proporcionan frecuencias muy próximas a las dadas en el enunciado.

TIPO 3. Razonamiento basado en aspectos físicos del dispositivo con lenguaje probabilístico. Esta categoría es una variante de la anterior, siendo la diferencia el uso

del lenguaje, lo cual es un indicativo de razonamiento inferencial informal (Makar y Rubin, 2009). Análogo al caso anterior, podemos asociar dicha categoría con una concepción de la probabilidad como propensión (Batanero y Díaz, 2007). Pero hay un avance en la expresión del conocimiento probabilístico del estudiante, lo que implica que el estudiante domina el lenguaje asociado a la aleatoriedad de la situación. En ambos argumentos a continuación se realiza un análisis físico del dispositivo en relación a la distribución de la masa identificando su asimetría, no obstante, A527 hace alusión a conceptos tales como “más sencillo” que pone de relieve la dificultad de utilizar un lenguaje adecuado.

A474: Siempre habrá más probabilidad de que las chinchetas caigan con la punta hacia arriba ya que el punto de equilibrio es mayor (65, 61, 73, 70).

A527: He elegido esos números porque hay mucha probabilidad que caiga hacia arriba porque es más sencillo que caiga así gracias al peso y la forma de la chincheta (70, 60, 75, 80).

TIPO 4. Razonamiento basado en asignación frecuencial de probabilidad. Los estudiantes apoyan su argumento en los datos proporcionados sobre el experimento en el enunciado del ítem. Por tanto, indica una comprensión intuitiva de la probabilidad frecuencial. De hecho, asumen explícitamente que la probabilidad de dicho suceso toma un valor similar al valor dado en el enunciado. Todo ello implica que el estudiante comprende y aplica intuitivamente la ley de los grandes números. En los siguientes ejemplos, A465 señala que guía sus respuestas según la muestra dada en el enunciado. Por su parte, A484 espera la replicabilidad de los resultados, por lo que también tiene en cuenta el dato dado y expresa además que podría darse una muestra en la que se invirtieran las proporciones, por lo que comprende la independencia de las sucesivas muestras. En su argumento se diferencia claramente entre posibilidad y probabilidad, no obstante, no es consistente pues proporciona dos cuaternas con valores próximos a la equiprobabilidad, es decir, muy próximos al 50%.

A465: Me he guiado por el valor del ejemplo, son resultados parecidos que se acercan a la muestra (72, 70, 65, 67).

A484: El profesor al tirar las chinchetas ha conseguido que buena parte de ellas caigan con la punta hacia arriba, por lo que me parece probable que al repetir el experimento siga habiendo más chinchetas con la punta hacia arriba que hacia abajo. Aunque también puede ser al revés pero en mi opinión hay menos probabilidades de que sea así (55, 80, 48, 70).

TIPO 5. Sesgo de equiprobabilidad implícito. En algunas respuestas se observa que el estudiante asigna la probabilidad del suceso aplicando la regla de Laplace. Por tanto, se asume que el fenómeno aleatorio cumple la condición de equiprobabilidad, por lo que todos los sucesos elementales son equiprobables. Esta respuesta en fenómenos aleatorios que no cumplen la condición de equiprobabilidad, conlleva la presencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Entonces, el estudiante resuelve incorrectamente la tarea, y como se muestra en las respuesta dadas por A470. A417, concede una probabilidad del 50%, al haber dos posibles sucesos.

A470: Pienso que cualquier resultado que se escriba será correcto porque cada chincheta que se tira tiene un 50% de probabilidades de caer con la punta hacia arriba y 50% de probabilidades de caer con la punta hacia abajo. De esa manera el resultado de cómo caen las chinchetas, no tiene nada que ver con el resultado que daba el profesor (73, 2, 100, 0).

A417: Como hay dos opciones (punta arriba y punta abajo) conforme se tiran más veces tiende a igualarse 50% hacia cada lado (43, 38, 53, 48).

TIPO 6. Equiprobabilidad por ser aleatorio. La referencia a la equiprobabilidad puede también estar justificada por el carácter aleatorio del experimento. Otros argumentos indican explícitamente que los resultados del experimento son equiprobables debido a

su naturaleza aleatoria. Por tanto, estos estudiantes presentan el sesgo de equiprobabilidad ya que consideran que los resultados de cualquier experimento aleatorio son igual de probables. Este tipo de concepción sobre la aleatoriedad también apareció en el trabajo de Serrano (1996).

A463: A priori la probabilidad es que sea 50% y 50% por lo que en unos casos superar la media y en otros estará por debajo al ser aleatorio (60, 40, 30, 70).

A430: Que una chincheta caiga hacia arriba o hacia abajo 50/50. He elegido el número aleatoriamente (60, 35, 54, 70).

TIPO 7. Convergencia y variabilidad del muestreo. Son aquellas argumentaciones en las que se justifica que los resultados deben ser parecidos a los dados en el enunciado, lo que supone que el estudiante percibe la relación entre la proporción en la población y la proporción muestral donde, además, el estudiante también indica que se debe esperar una cierta variabilidad y, por consiguiente, percibe igualmente la variabilidad muestral.

A434: Como el % de chinchetas que caen de cada forma en el caso del profesor: 68% hacia arriba y 32% hacia abajo. Por lo que el porcentaje que tendrá en el caso de los niños será similar. Moviendo el porcentaje mínimamente hasta un 8% por ejemplo, por lo que los márgenes serán un 60%-74% hacia arriba y 24% - 40% hacia abajo, pero siempre teniendo en cuenta que es más frecuente que las chinchetas que caigan hacia arriba, ya que la parte de abajo pesa más, por lo que tiende a ir hacia abajo.

TIPO 8. Creencias subjetivas. Argumentos en los que se exponen criterios que no tienen que ver con los datos del enunciado, ni con la probabilidad, pero se deducen del conocimiento que los estudiantes tienen del contexto. Por tanto, se interpreta la pregunta probabilística en modo no probabilístico, como en los siguientes ejemplos:

A453: Suponiendo que la cabeza de la chincheta pesa más que el rabillo de esta lo lógico sería que el número de chinchetas que caerán con el rabito hacia arriba será siempre mayor que lo que caen hacia abajo. Pero siempre existiría una excepción así que de cuatro niños tres tendrían la cabeza hacia abajo y uno con la cabeza hacia arriba, pero sería muy improbable que fuera 50 a 50 (70, 78, 39, 64).

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes que usa cada argumento

	Frecuencia	%
Tipo 1. Responder al azar	16	12,6
Tipo 2. Aspectos físicos sin lenguaje probabilístico	12	9,4
Tipo 3. Aspectos físicos con lenguaje probabilístico	42	33,1
Tipo 4. Asignación frecuencial de la probabilidad	35	27,6
Tipo 5. Equiprobabilidad implícita y asignación clásica	12	9,4
Tipo 6. Equiprobabilidad explícita por ser aleatorio	10	7,9
Tipo 7. Variabilidad y convergencia	3	2,4
Tipo 8. Creencias subjetivas	9	7,1
Tipo 9. No justifica	18	14,2

La Tabla 2 muestra la frecuencia de cada categoría en los argumentos proporcionado por los estudiantes. Los porcentajes se calculan sobre el número de estudiantes pues algunos proporcionan más de un argumento. El análisis de la tabla revela que el tipo de argumento más frecuente es el tercero; tanto en este como en el segundo (en total un 45%) se observa que el estudiante identifica la asimetría del dispositivo. Como se ha indicado anteriormente, estos estudiantes mostrarían la idea de probabilidad como pensión descrita en Batanero y Díaz (2007). Además, el uso de lenguaje

probabilístico en el tercer argumento eleva la formalidad de la respuesta comparado con la anterior categoría.

La siguiente categoría que tiene una presencia mayor se corresponde con el Tipo 4, puesto que la cuarta parte de la muestra se basa en los datos del enunciado para guiarse en la proporción de chinchetas que caerán con la punta hacia arriba. Por tanto, estos alumnos consideran el enfoque frecuencial para la asignación de la probabilidad del suceso. Para finalizar, el 17,3% presenta el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), debido a que considera el significado clásico para la asignación de la probabilidad (Tipo 5) o, por otro lado, extienden dicho enfoque a cualquier fenómeno aleatorio (Tipo 6).

6. Conclusiones

El porcentaje de respuestas en las que se hace referencia al experimento dado al enunciado y que, por tanto, reflejan un conocimiento sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad es bajo. Además, si los estudiantes son capaces de identificar la asimetría del fenómeno es debido a sus conocimientos de otras materias como la física, puesto que hacen referencia en su justificación a conceptos tales como el peso, la distribución de masa, la fuerza y, en consecuencia a la visión de la probabilidad como propensión.

En realidad las categorías 1, 2, 5, 6 y 8 muestran una comprensión pobre de la aleatoriedad y, en particular, de la probabilidad. En consecuencia, y dados los resultados, interpretamos que los estudiantes no identifican la probabilidad como una medida del grado de incertidumbre, sino que la incertidumbre es probabilidad, por lo que aleatoriedad y probabilidad son considerados como términos similares. Este razonamiento fue descrito por Konold (1989) como enfoque en el resultado.

Dada la diversidad de objetos que se utilizan en las prácticas matemáticas, el carácter inmaterial de los objetos y la variedad de representaciones utilizadas, el trabajo matemático requiere un uso constante de procesos interpretativos, que pueden llegar a ser incorrectos cuando los que lo realizan son los estudiantes. Godino (2002) propone la idea de *conflicto semiótico* como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Para completar el trabajo, en las respuestas que hemos analizado hemos observado los siguientes conflictos semióticos de los estudiantes:

- C1. Confusión entre suceso aleatorio y suceso equiprobable. Se asigna a la aleatoriedad una propiedad que no le corresponde, puesto que hay fenómenos aleatorios que constan de sucesos no equiprobables.
- C2. Suponer que la aleatoriedad indica máxima variabilidad, es decir, resultados muy diferentes entre sí. Es otra propiedad mal asignada, pues aunque la aleatoriedad implica variabilidad, la variabilidad puede ser grande o pequeña.
- C3. Creencia en la ley de los pequeños números: pensar que la convergencia se debe producir incluso en pequeñas muestras.
- C4. Suponer que aleatoriedad es sinónimo de impredecibilidad, ni siquiera en una serie de resultados. Como se ha indicado, aunque cada suceso aislado de un fenómeno aleatorio es impredecible (no se sabe si ocurrirá o no), cuando se tiene información del experimento podemos deducir los resultados más y menos probables.
- C5. Asimilar la aleatoriedad a la falta de información. Esta fue una concepción histórica ya descartada.

- C6. No relacionar la probabilidad con la frecuencia, no comprender el concepto de probabilidad frecuencial.

Sin embargo, encontramos respuestas muy completas, de estudiantes que, por un lado, se observa que identifican la asimetría del dispositivo mediante el análisis físico del mismo y, por otro lado, presentan una comprensión del enfoque frecuencial adecuada en la que se apoyan para argumentar las muestras que proporcionan, e incluso señalan la variabilidad intrínseca al proceso de muestreo.

Agradecimientos: Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegem y K. François (Eds), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-128). Nueva York: Springer
- Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 63-79.
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Chernoff, E. J. y Russell, G. L. (2012). The fallacy of composition: Prospective mathematics teachers' use of logical fallacies. *Canadian Journal for Science, Mathematics and Technology Education*, 12(3), 259-271.
- Eichler, A., y Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking, presenting plural perspectives* (pp. 75-99). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229.
- Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.
- Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. (pp. 235-246). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205.
- Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.
- Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: an introduction to its methodology*. London, Sage
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557-568.
- Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Rubin, A., Bruce, B. y Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*. Dunedin, Nueva Zelanda: International Statistical Institute. Disponible en: <https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/18/BOOK1/A9-4.pdf>.
- Saldanha, L. y Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, 51(2), 257-270.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Nueva York: Cambridge University Press.