El diagrama de árbol como instrumento de resolución de problemas de probabilidad en bachillerato

Tree diagram: a tool for solving probability problems in the baccalaureate

Antonio Francisco Roldán López de Hierro y Concepción Roldán

Universidad de Granada, España

Resumen

Los diagramas de árbol permiten representar la estructura de muchos problemas combinatorios y probabilísticos, facilitando su resolución. No obstante, la investigación sobre el tema muestra la existencia de dificultades en la construcción e interpretación de diagramas de árbol por parte de los estudiantes, posiblemente debido a que en la enseñanza no reciben la atención necesaria. En esta comunicación sugerimos su utilidad incluso en la etapa de bachillerato, donde pueden contribuir a resolver con éxito problemas similares a los propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad. Como conclusión, sugerimos la necesidad de prestar más atención a este recurso didáctico en la enseñanza.

Palabras clave: Diagrama en árbol, bachillerato, pruebas de acceso a la universidad

Abstract

Tree diagrams allow us to represent the structure of many combinatorial and probabilistic problems, in facilitating their resolution. However, research on this subject shows the existence of difficulties in the construction and interpretation of tree diagrams by students, possibly due to the fact that they do not receive the necessary attention in teaching. In this communication we suggest its usefulness even in the Baccalaureate, where they can contribute to successfully solve problems similar to those proposed in the university entrance tests. As a conclusion, we suggest the need to pay more attention to this didactic resource in teaching.

Keywords: Tree diagram, baccalaureate, university entrance tests

1. Introducción

A lo largo de las etapas de educación primaria y secundaria, el alumnado y el profesorado deben hacer frente, conjuntamente, al intricado (pero maravilloso) proceso de la enseñanza y del aprendizaje. La variedad de asignaturas a las que debemos enfrentarnos, que reúnen los conocimientos esenciales que hemos decidido transmitir a las siguientes generaciones, son tan diversas que no existe una única metodología para abordarlas. Por al contrario, incluso temas distintos dentro de una misma asignatura deben ser tratados desde diferentes perspectivas. No obstante, existen ciertas técnicas que suelen dar buenos frutos, independientemente del contexto en el que se utilicen: por así decirlo, el ser humano está mejor adaptado (asimila mejor ciertos conceptos y se vuelve más habilidoso) a estos desarrollos cognitivos. Una de estas habilidades que se adquieren con la práctica es el uso de resúmenes, esquemas y representaciones gráficas.

En el área de matemáticas, la utilización de toda clase de representaciones gráficas es una herramienta básica, a la vez que poderosa, que permite avanzar al alumnado en el estudio de muy diversas clases de problemas: algunos ejemplos son la representación de números en la recta real, que permite comprender su ordenación en contextos en los que no es nada intuitiva (por ejemplo, entre los números enteros negativos); la representación de funciones es crucial para el análisis; el álgebra se nutre de representaciones de medidas (por ejemplo, pesos) para describir contextos de igualdad

Roldán López de Hierro, A.F. (2019). El diagrama de árbol como instrumento de resolución de problemas de probabilidad en Bachillerato. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

entre cantidades (conocidas o desconocidas); el área de geometría no puede entenderse de ninguna de las maneras sin la representación gráfica de toda suerte de figuras (planas y tridimensionales) y movimientos desde diferentes perspectivas; finalmente, el bloque de estadística y probabilidad no es ajeno a este recurso educativo, donde histogramas, diagramas de barras, curvas de distribución y polígonos de frecuencias constituyen una ayuda esencial en la descripción e interpretación de fenómenos naturales y aleatorios.

En este sentido, autores como Kolloffel, Eysink, de Jong y Wilhelm (2009) pusieron de manifiesto que el tipo de representación utilizado para resolver problemas influye en el modo en que se organiza e interpreta la información dada en el enunciado. Cuando el alumnado afronta un problema, el uso o no de una representación gráfica y, en el primer caso, el tipo de representación que se emplea en cada contexto, marca ya un acercamiento o un alejamiento del propósito general de la tarea. Por ello, merece la pena pararse a decidir qué representación gráfica es la que mejor se adapta al tipo de tarea que se propone en al aula.

En el presente trabajo analizamos algunas de las posibilidades que ofrecen los diagramas de árbol que, a pesar de ser interesantes en casi todos los contextos, adquieren un papel de gran relevancia en el campo de la probabilidad y la combinatoria. Por así decirlo, en muchos ejercicios y problemas, su utilización es prácticamente obligatoria. En especial, uno de los objetivos de este trabajo es el de mostrar que se pueden solucionar complicados ejercicios propuestos en las pruebas de acceso a la universidad mediante la utilización de sencillos diagramas de árbol y técnicas rudimentarias de cálculo.

2. Los diagramas de árbol

Desde un punto de vista general, un diagrama de árbol es un grafo (orientado o no) con una propiedad que los hace especialmente singulares: podemos recorrer el grafo desde cualquier vértice hasta cualquier otro (distinto del anterior) por un único camino simple (obviando la posible orientación que pueda tener el grafo).

Es sencillo imaginarse un grafo con una cantidad infinita no numerable de vértices: por ejemplo, en el plano, podemos considerar una cantidad infinita no numerable de puntos sobre la circunferencia unidad que se unen con el origen de coordenadas mediante sus correspondientes segmentos, los cuales forman los lados del grafo. Sin embargo, no es éste el tipo de grafos en el que estamos interesados: dado que nos situamos en el contexto educativo de la educación primaria o secundaria, centraremos nuestro estudio en los diagramas de árbol que nacen en un vértice especial (denominado *raíz* o *tronco*) del que sale un número finito de *ramas de primera generación*. Estas ramas llegan a nuevos vértices (llamados *nudos* o *nodos*) y, de ellos, vuelve a salir otra cantidad finita de ramas, en este caso denominadas *ramas de segunda generación*. Y tras un número finito de pasos, el diagrama acaba cuando se llega a *nodos terminales* que representan la finalización del experimento o proceso que trata de describirse (véase la Figura 1).

Al igual que ocurre con el resto de representaciones gráficas, una de las características que sustentan la utilización de los diagramas de árbol es que transmiten mucha información en un breve intervalo de tiempo (apenas con un simple *golpe de vista*). Además, tienen la ventaja de que presentan la información de un modo estructurado y resumido, que permite comprender la globalidad del fenómeno descrito desde sus primeras fases hasta las últimas. En este sentido, permiten adoptar decisiones de una forma razonada, con objeto de alcanzar una meta prevista desde el principio.

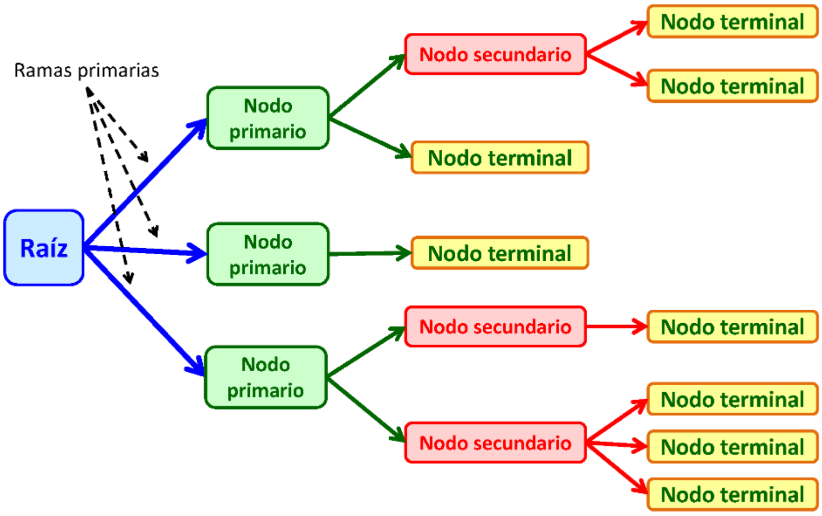

Figura 1: Ejemplo de diagrama de árbol y sus componentes

Fischbein (1975) recomendó el uso del diagrama en árbol en la resolución de problemas de combinatoria y probabilidad, porque lo consideró un modelo generativo, en cuanto que sugiere y facilita una generalización iterativa (problemas sucesivos con un mayor número de elementos cada vez) y una generalización constructiva (problemas derivados del inicial), siendo éstas las dos características esenciales del razonamiento recursivo. También Engel, Varga y Walser (1976) presentan muchos ejemplos de cómo utilizarlos para introducir ideas de probabilidad en los niños desde los 8 o 10 años.

Sin embargo, como en la mayoría de contextos de enseñanza y aprendizaje, existe una gran cantidad de dificultades a las que se ha de hacer frente cuando se trabaja con diagramas de árbol. Por ejemplo, dibujar diagramas en los que sobran o faltan ramas, o bien dibujar una parte concreta del diagrama, tratando luego de generalizarlo, pero equivocándose en la generalización (véase Roa, 2000). Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) describen otras dificultades provocadas por la falta de identificación de la partición asociada al diagrama en árbol o por la confusión sobre la necesidad o no de tener en cuenta el orden de las diferentes ramas o elementos, y si éstos se pueden o no repetir.

Por otro lado, su construcción no se enseña de una forma cuidadosa y sistemática: aunque los diagramas de árbol son claramente mencionados en los documentos curriculares (MECD, 2015), y deben desarrollarse en el aula (especialmente en educación secundaria y bachillerato), no se les dedica el interés que merecen. Todo al contrario, da la sensación de que los estudiantes aprenden a confeccionarlos y a interpretarlos de manera intuitiva, sin la ayuda especial del docente. En este sentido, el profesorado debe generar las oportunidades de aprendizaje suficientes como para que el alumnado adquiera las capacidades antes descritas, pues estas destrezas le acompañarán durante toda su vida sin que se presente una ocasión idónea para analizarlos en profundidad.

En lo que sigue se describe la forma en se tienen en cuenta en el currículo y se presentan ejemplos de cómo pueden usarse para resolver problemas propuestos en las pruebas de acceso a la universidad.

3. Los diagramas de árbol en bachillerato

Los diagramas en árbol se pueden utilizar desde la educación primaria para describir experimentos con un número muy pequeño de posibilidades, y ayudar al alumnado a entender las diferentes alternativas de una forma prácticamente lúdica. De hecho, los diagramas de árbol que se consideran en educación primaria están frecuentemente asociados a juegos y experiencias divertidas y motivadoras, de tal forma que, en muchos casos, se establece una conexión entre los diagramas y algunos recuerdos agradables de nuestro paso por el colegio. Sin embargo, estos primeros acercamientos son momentos absolutamente críticos, pues las intuiciones que desarrollemos en estas primeras experiencias nos acompañarán durante toda la vida.

En la educación secundaria y bachillerato, los diagramas de árbol se orientan preferiblemente hacia la descripción de fenómenos de naturaleza compleja, descomponiéndolos en sus respectivas fases de desarrollo. En el contexto de la probabilidad, son muy adecuados para describir el espacio muestral de un experimento aleatorio compuesto, especialmente si éste se presta a ser descrito como un encadenamiento de sucesos consecutivos con una cantidad finita de posibilidades. Así, cada uno de los caminos que salen de la raíz y llegan a un nodo terminal suponen un posible suceso del espacio muestral. Más aún: si cabe, los diagramas de árbol se antojan incluso más importantes en el campo de la combinatoria, donde los problemas se centran, en muchos casos, en determinar todas las posibilidades que pueden acaecer como consecuencia de llevar a cabo un experimento bajo unas normas previamente fijadas. Cuando el número de posibilidades no es muy grande, variaciones, combinaciones y permutaciones se prestan a ser descritas bajo los cánones de un diagrama de árbol (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994).

Durante el bachillerato (MECD, 2015), la combinatoria surge de forma natural en la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I*, pues luego será una herramienta fundamental en el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace (cociente entre casos favorables y casos posibles). Además, encontramos mención explícita a este diagrama en los documentos curriculares, aunque no como contenidos, pues se suponen ya conocidos. Sin embargo, en la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales* de 2º de Bachillerato, aparecen como criterios de evaluación: "[…] utilizando la *regla de Laplace* en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia" (MECD, 2015, p. 389). De hecho, el empleo de los diagramas de árbol en la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* está fuertemente indicado para la enseñanza y el aprendizaje de los teoremas notables que culminan los conocimientos sobre Probabilidad que pueden adquirirse en la etapa preuniversitaria: el *teorema de la probabilidad total* y el *teorema de Bayes*.

Este tipo de problemas se suelen incluir desde hace tiempo en las pruebas de Acceso a la Universidad y su contenido matemático es complejo (López-Martín, Contreras, Carretero y Serrano, 2016). Con frecuencia se enseña a los estudiantes a resolverlos mediante fórmulas, pero la principal dificultad, que es la identificación de los sucesos implicados y sus probabilidades, así como la diferenciación del tipo de probabilidades (simples, compuestas, condicionales) se facilita notablemente por el diagrama en árbol.

En la siguiente sección mostramos cómo es posible facilitar la resolución de estos problemas, utilizando algunos ejemplos propuestos en dichas pruebas y basándonos especialmente en el uso de diagramas de árbol.

4. Ejemplo de resolución de problemas propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía y Madrid mediante diagramas de árbol

En la presente sección resolvemos algunos de los ejercicios propuestos en Andalucía y Madrid durante la celebración de las pruebas de acceso a la universidad en el año 2017. En concreto, confiamos en demostrar que dichos ejercicios y problemas pueden ser resueltos con ayuda del diagrama en árbol de una forma puramente intuitiva, sin necesidad de aplicar fórmulas complicadas.

4.1. Ejemplo de resolución de un problema propuesto en Andalucía

En el caso concreto de Andalucía, cada año se proponen seis modelos de examen: dos titulares (junio y septiembre), dos suplentes (también para junio y septiembre, respectivamente) y dos a modo de reserva. Cada examen lleva dos opciones y cada opción contiene un ejercicio de Probabilidad, valorado en 2,5 puntos sobre 10 (pueden consultarse los ejercicios propuestos en convocatorias recientes en Junta de Andalucía, 2017). De esta forma, cuando se publican todos los modelos de examen, encontramos doce ejercicios de Estadística.

En la convocatoria de 2017, había un único ejercicio que correspondía al empleo de los teoremas de la probabilidad total y Bayes, cuya dificultad se describe en Díaz y de la Fuente (2006) (los demás ejercicios podían ser resueltos mediante la utilización de técnicas más sencillas como tablas de contingencia o diagramas de Venn) y fue propuesto en la convocatoria de septiembre. A continuación incluimos el enunciado del problema y, aportamos a continuación una posible resolución que nos sirve para mostrar cómo el uso de un diagrama de árbol simplifica extremadamente la tarea.

Problema propuesto en Andalucía, Septiembre, 2017

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.

a. Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.
b. Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Llamemos R_1 al suceso que ocurre cuando, extraída la primera bola al azar, ésta resulta ser roja. De igual forma, R_2 denotará al suceso que ocurre cuando, extraída la segunda bola al azar, ésta resulta ser roja. Utilizamos la notación V_1 y V_2 para los mismos sucesos cuando las bolas extraídas (primera o segunda, respectivamente) resultan ser verdes. Podemos considerar, entonces, el diagrama en árbol de la Figura 2 que visualiza una partición en el espacio muestral. La identificación de esta partición es el primer paso en la resolución de un problema de la probabilidad total o Bayes, y queda muy facilitada por el diagrama (Díaz y de la Fuente, 2006).

El siguiente paso en la resolución es identificar las probabilidades a priori y verosimilitudes para posteriormente aplicar el teorema de Bayes. Las *probabilidades a priori* son sencillas de calcular, ya que la urna inicial está formada por ocho bolas: cinco rojas y tres verdes. En este caso, $P(R_1) = 5/8$ y $P(V_1) = 3/8$. Las verosimilitudes son probabilidades condicionadas que dependen de cómo queda la urna tras sacar la primera bola y reemplazarla por dos del otro color. De esta forma, el diagrama de árbol representado en la Figura 3 nos sirve para describir las bolas de cada tipo que contiene la urna en cada momento de la experiencia, el número total de bolas, las probabilidades a priori y las verosimilitudes. Esto permite reducir el cálculo de verosimilitudes a probabilidades simples.

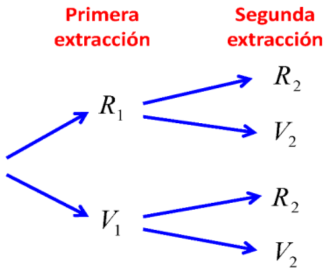

Figura 2. Partición del espacio muestral del experimento

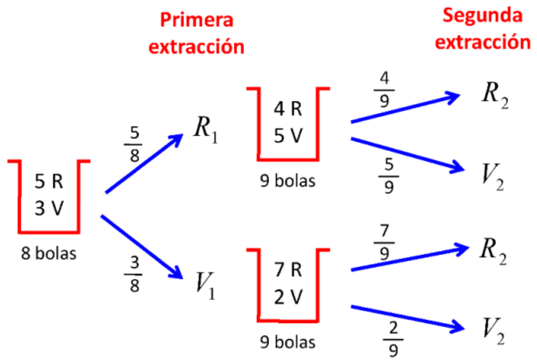

Figura 3. Descripción de probabilidades a priori y verosimilitudes

Resolución del apartado a

La solución de este apartado implica el teorema de la probabilidad total, pero el diagrama en árbol permite aplicarlo de una forma muy intuitiva, ya que la probabilidad de que la segunda bola sea verde se calcula sumando los productos de todas las probabilidades que terminan en que la segunda bola sea verde (véase la Figura 4), es decir:

$$P(V_2) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9} = \frac{25+6}{72} = \frac{31}{72}\cdot$$

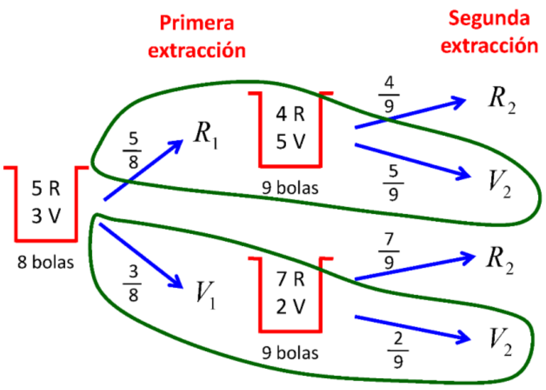

Figura 4. Descripción de los casos en los que la segunda bola extraída es verde

Resolución del apartado b

Leyendo el enunciado observamos que se nos pide la probabilidad de un suceso que pudo ocurrir en la primera etapa sabiendo lo que realmente ha ocurrido en la segunda etapa (suponemos que la segunda bola ha sido roja). Identificamos, pues, que se trata de una aplicación del *teorema de Bayes*. Para ello, debemos calcular un cociente: pondremos en el denominador la suma de todos los caminos que llevan a que la segunda bola sea roja (véase la Figura 5), y en el numerador la probabilidad asociada al único camino en el que ocurren los dos sucesos (las dos bolas son rojas). Al igual que en el apartado anterior el diagrama en árbol permite visualizar estas probabilidades de modo que el teorema se aplica de forma intuitiva.

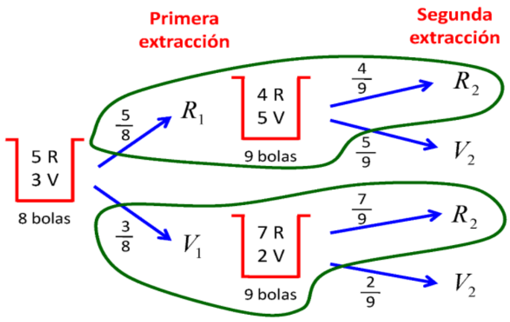

Figura 5. Descripción de los casos en los que la segunda bola extraída es roja

$$P(R_1|R_2) = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}} = \frac{20}{20+21} = \frac{20}{41}.$$

4.2. Ejemplo de resolución de un problema propuesto en Madrid

En el caso de la comunidad madrileña, la evaluación para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado (*EvAU*) incluye cinco ejercicios en su examen correspondiente a la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*, todos ellos valorados en 2 puntos sobre 10 posibles (véase Universidad Complutense de Madrid, 2017). El cuarto de ellos es un ejercicio del área de Probabilidad que, usualmente, corresponde a la aplicación de los teoremas notables de probabilidad, si bien, en algunos casos, también puede ser resuelto mediante otras técnicas (tablas de contingencia, diagramas de Venn, etc.) A título de ejemplo, acompañamos una posible resolución, mediante el uso de un diagrama de árbol, de uno de los ejercicios propuestos en la convocatoria de 2017.

Problema propuesto en Madrid, Junio, 2017

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25% de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40% tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0’01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0’05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0’12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a. Se estropee.
b. Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

La dificultad de este enunciado reside en que los estudiantes podrían no visualizar claramente el experimento compuesto al tratarse de experimentos simples simultáneos (Díaz y de la Fuente, 2005). Para establecer una descripción temporal, denotemos por T_1, T_2 y T_3 a los sucesos que ocurren cuando, elegida al azar una furgoneta de esa empresa, ésta resulta tener menos de dos años de antigüedad, una antigüedad de entre 2 y 4 años y una antigüedad superior a cuatro años, respectivamente. Los datos del problema nos indican las probabilidades a priori $P(T_1) = 0{,}25$ y $P(T_2) = 0{,}4$, por lo que deducimos que $P(T_3) = 0'25$. Denotemos por E al suceso que ocurre cuando, elegida una furgoneta al azar de esa empresa, ésta está estropeada. Entonces el propio enunciado nos indica las verosimilitudes $P(E|T_1) = 0{,}01$, $P(E|T_2) = 0{,}05$ y $P(E|T_3) = 0{,}12$. De esta forma, podemos completar el diagrama en árbol de la Figura 6.

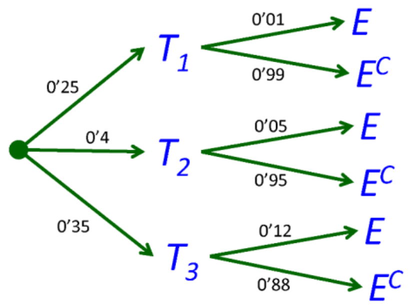

Figura 6. Descripción del espacio muestral mediante un diagrama de árbol

Resolución del apartado a

Considerando todos los caminos que llegan a nodos terminales en los que la furgoneta está estropeada (véase la Figura 7), deducimos que:

$$P(E) = 0{,}25 \cdot ,01 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}12 = 0'0645.$$

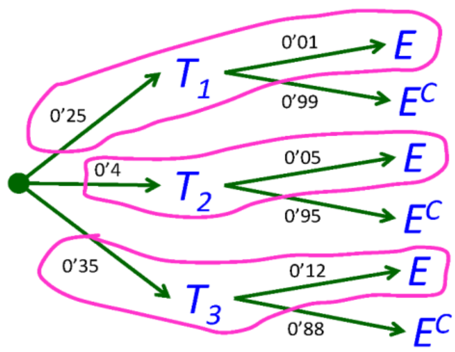

Figura 7. Descripción de los casos en los que la furgoneta elegida al azar está estropeada

Resolución del apartado b

En este caso se toma como condición el suceso contrario al caso anterior y se debe aplicar nuevamente el Teorema de Bayes. La probabilidad de que la furgoneta no esté estropeada es $P(E^C) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}0645 = 0{,}9355$ (véase la Figura 8), que es el denominador de la siguiente expresión:

$$P(T_3|E^C) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}88}{0‘,25 \cdot 0{,}99 + 0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}35 \cdot 0{,}88} = \frac{0{,}308}{,9355} = \frac{616}{1871} \approx 0{,}329.$$

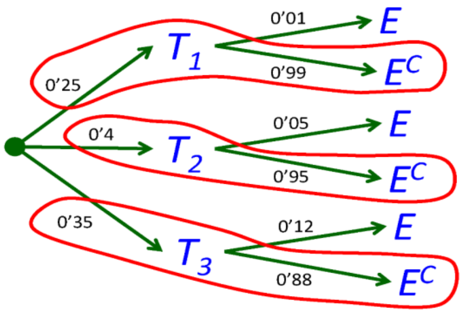

Figura 8. Descripción de los casos en los que la furgoneta elegida al azar no está estropeada

5. Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado, con dos ejemplos, cómo el diagrama en árbol facilita la visualización de la estructura y los datos, tanto conocidos como desconocidos, de los problemas de probabilidad total y del teorema de Bayes que se suelen proponer en las pruebas de acceso a la universidad. El uso de este recurso disminuye la posibilidad de que el estudiante cometa errores y facilita su resolución ya que reduce muchos pasos al cálculo de probabilidades simples.

El diagrama de árbol es uno de los recursos educativos de mayor éxito en el ámbito de las Matemáticas. No obstante, en general, en la actualidad no se destina suficiente tiempo en clase a desarrollar esta herramienta con el alumnado, a pesar de que las intuiciones que se generan en los primeros acercamientos a esta clase de representaciones gráficas durante la Educación Primaria son de una gran importancia para el desarrollo cognitivo en el ámbito matemático. Dichas visualizaciones son tan importantes que, como hemos visto, permiten resolver ejercicios de Probabilidad en las pruebas de acceso a la universidad sin la necesidad de involucrar complicadas fórmulas ni razonamientos artificiales. De esta forma, los teoremas notables de Probabilidad pueden ser fácilmente interpretados mediante el empleo de diagramas de árbol.

Referencias

Batanero, C., Godino, J.D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J.D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32* (2), 181-199.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon, 59*, 245-260.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes Un estudio exploratorio en estudiantes españoles de Psicología. *Educación matemática, 18*(2), 75-94.

Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie: jeux de combinatoire, de probabilités et de statistiques*. OCDL-Office Central de Librairie.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Junta de Andalucía (2017). Exámenes y orientaciones sobre la prueba de acceso y/o admisión a la universidad. Sevilla: Autor. Disponible en: *https://www.juntadeandalucia.es/economiayconocimiento/sguit/g_b_examenes_anteriores.php*

Kolloffel, B., Eysink, T. H., de Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatorics from an interactive computer simulation. *Instructional Science*, 37(6), 503-517.

López-Martín, M.M., Contreras, J. M., Carretero, M., y Serrano, L. (2016). Análisis de los problemas de probabilidad propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9,* 65-84.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Universidad Complutense de Madrid (2017), Ejercicios de la EvAU. Convocatoria ordinaria 2017. Madrid: Autor. Disponible en: https://www.ucm.es/examenes-de-selectividad-2017