Lenguaje empleado por futuros profesores de educación primaria en la resolución de problemas combinatorios

Language used by prospective primary education teachers in the resolution of combinatorial problems

Alex Venegas Guerrero, María M. Gea Serrano, Rafael Roa Guzmán

y Jocelyn Díaz Pallauta

Universidad de Granada, España

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre el lenguaje empleado por una muestra de 62 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada al resolver tres tareas combinatorias, seleccionadas atendiendo a la variable modelo combinatorio implícito (MCI), que ha sido determinada en la investigación previa y permite clasificar los tipos de problemas de recuento simples combinatorios en tres tipos. Los resultados del análisis de las respuestas de los futuros profesores nos informan de su escaso razonamiento combinatorio y dominio del lenguaje, ya que muy pocos responden con éxito a las tareas y emplean, mayoritariamente, el lenguaje verbal en sus respuestas, utilizando en menor medida el lenguaje gráfico o tabular.

Palabras clave: Lenguaje, resolución de problemas, combinatoria, futuros profesores.

Abstract

In this paper we analyse the language used by a sample of 62 primary education prospective teachers at the University of Granada when they solved three combinatorial tasks, selected according to the implicit combinatorial model variable, which has been determined in previous research and allows classifying the types of simple combinatorial counting problems in three types. The analysis of the prospective teachers' responses inform us of their poor combinatorial reasoning and language, since very few respond successfully to the tasks, mostly using verbal language and to a lesser extent graphic or tabular language.

Keywords: Language, problem solving, combinatory, prospective teachers.

1. Introducción

La combinatoria es una de las áreas de las matemáticas que se suele enmarcar en el estudio de la estadística y probabilidad, pero se trata de un tema mucho más amplio, considerado por muchos autores como un modo de pensamiento y razonamiento (Beuchot, 1985; Fischbein, 1994). Pessoa y Borba (2010) la definen del siguiente modo:

> […] tipo de pensamiento que implica conteo, pero que va más allá de la enumeración de elementos de un conjunto. En la Combinatoria se cuentan, basándose en el raciocinio multiplicativo, grupos de posibilidades, a través de una acción sistemática, sea por el uso de fórmula, sea por el desarrollo de una estrategia que dé cuenta de atender a los requisitos de esos tipos de problemas, como la constitución de agrupaciones, la determinación de posibilidades y su cuenta. (Pessoa y Borba, 2010, p. 2).

Siguiendo su origen histórico, con los numerosos aportes de diversas civilizaciones como la griega, árabe y la india, la combinatoria surge de la necesidad del hombre por seleccionar un conjunto de elementos. A partir del s. XVI, de la mano de matemáticos como Tartaglia (1499-1557) y Cardano (1501-1576), se profundiza en el estudio del concepto, con el interés de obtener el cardinal del conjunto de posibilidades de ganar un juego, frente al total de posibilidades que se puedan presentar en dicho juego, lo que

Venegas, A., Gea, M. M., Roa, R. y Pallauta, J. D. (2019). Lenguaje empleado por futuros profesores de Educación Primaria en la resolución de problemas combinatorios. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

conlleva a una matematización y sistematización de este tópico, que se desarrolla de manera paralela al significado clásico de la probabilidad (Batanero, 2005). Así es que, podemos entender a la combinatoria como una herramienta que ayuda a determinar el orden y selección de cierta cantidad de elementos y que ha sido materia de estudio desde tiempos inmemoriales.

Grandes han sido los estudios realizados sobre probabilidad, donde podemos apreciar cómo la combinatoria ha otorgado valiosas ideas y aportes para su construcción. Asimismo, la combinatoria ha implicado el avance de otras áreas de estudio como la informática, biología o economía, entre otras, mediante estudios en el transporte, confección de horarios, planes de producción, etc.; así como también en la misma matemática, donde la combinatoria ha contribuido al desarrollo de la teoría de grupos, la geometría o el álgebra (Guirado y Cardoso, 2007). Fischbein (1994) relaciona el análisis combinatorio con variadas ramas de las matemáticas como la programación lineal, topología, teoría de números, siendo para cada una de ellas un gran aporte. Por ejemplo, gracias a la combinatoria, áreas como el cálculo integral y el álgebra han fundamentado sus bases. Colerus (1973) menciona que existen libros de geometría, que a cambio de usar líneas y figuras geométricas, utilizan letras y formulas combinatorias. Además, estos mismos ejemplos sirven de contextos de aplicación que facilitan su enseñanza.

Con todo ello podemos decir, que el razonamiento combinatorio constituye una herramienta valiosa para nuestros estudiantes, pues no representa un único dominio de la matemática, sino más bien, un esquema operacional, una base estructural para el razonamiento lógico. Coincidimos con Navarro-Pelayo (1994) en que la combinatoria elemental no utiliza métodos matemáticos complejos y su incorporación en la enseñanza de los primeros niveles educativos aporta ventajas de valor incalculable, por ejemplo, en el desarrollo de la intuición, el cambio de representación, la generalización o la formalización de conceptos. Además, las orientaciones curriculares en la enseñanza de las matemáticas de muchos países, como es el caso de España, enfatizan cada vez más el aprendizaje por medio de la resolución de problemas, a cualquier nivel educativo, donde se promueva el razonamiento y se dote de sentido y utilidad a aquello que se enseña (Gaulin, 2001).

Kapur (1970) propuso la enseñanza de la combinatoria como adecuada para todos los grados académicos, ya que en un inicio no depende del cálculo y, con el tiempo, se convertiría en un problema dentro de la enseñanza de las matemáticas si prescindimos de su introducción en los primeros niveles. En España, la enseñanza del tema se concreta explícitamente en la etapa de secundaria y bachillerato (MECD, 2015), aunque podemos considerar que implícitamente se contempla su enseñanza asociado al desarrollo del sentido numérico desde la etapa de Educación Primaria (MECD, 2014). En concreto, se establecen los siguientes estándares de aprendizaje evaluables:

> Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales. (MECD, 2014, p. 19388).
>
> Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. (MECD, 2014, p. 19390).
>
> Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.” (MECD, 2014, p. 19393).

En los primeros cursos de educación secundaria hay una presencia implícita del razonamiento combinatorio, puesto que se inicia el estudio del muestreo y se avanza en el cálculo de probabilidades de sucesos. En tercer o cuarto curso de Educación Secundaria, dependiendo de la modalidad, es cuando se concreta explícitamente la enseñanza del tema.

En la opción de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, se plantea el uso de problemas que involucren permutaciones, factorial de un número, además de la aplicación del diagrama del árbol, todos ellos en contextos del cálculo de probabilidad (MECD, 2015). En cuarto curso, en la misma opcionalidad, aparecen los siguientes estándares de aprendizaje: “1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. […] 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias” (MECD, 2015, p. 398).

En la opción de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, para cuarto curso se tiene el siguiente estándar de aprendizaje: “3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos” (MECD, 2015, p. 407).

En bachillerato, para ambas modalidades, se plantea la enseñanza de la combinatoria en el ámbito del cálculo de probabilidades, ambas compartiendo el siguiente estándar de aprendizaje: “Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento” (MECD, 2015, p. 422). Aunque la diferencia es mínima, se observa una mayor profundización en la combinatoria en la modalidad de humanidades que en la de ciencias.

A pesar de la conexión de la resolución de problemas con el razonamiento combinatorio, pues la combinatoria no implica simples técnicas de conteo, sino habilidades y estrategias de razonamiento (Roa, Batanero, Godino y Cañizares, 1997) y de su inclusión en el sistema educativo como contenido curricular relevante en la formación de nuestros estudiantes, la investigación previa nos advierte de dificultades en su enseñanza y aprendizaje a nivel escolar, tanto en estudiantes de etapa primaria, secundaria, bachillerato como de formación matemática avanzada (Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000).

En este trabajo centramos la atención en el tipo de lenguaje que emplea una muestra de futuros profesores de educación primaria en la resolución de problemas combinatorios. En lo que sigue describimos el marco teórico y los antecedentes en los que enmarcamos nuestro trabajo, el método y resultados del estudio, junto a algunos ejemplos representativos, finalizando con unas breves conclusiones.

2. Marco teórico

El marco teórico en que fundamentamos nuestro trabajo es el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (en adelante, EOS); en esta teoría se considera que la actividad matemática es un quehacer humano, donde el significado de un contenido matemático cobra vida cuando un individuo resuelve situaciones problemáticas sobre dicho contenido (Godino y Batanero, 1994). Bajo esta premisa, el lenguaje matemático ocupa un rol fundamental en el EOS, pues los objetos matemáticos emergen de las prácticas realizadas por un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, mediadas por el lenguaje de modo representacional u operativo (Godino, Batanero y Font, 2007). En nuestro trabajo nos centramos en el conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática, al respecto el EOS propone un modelo denominado Conocimiento Didáctico Matemático (en adelante CDM) (Godino, 2009; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan y Godino, 2015), compuesto por tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. Ponemos atención a la dimensión didáctica, en una de sus facetas, como es la faceta epistémica, ya que analizamos el lenguaje empleado por el futuro profesor en la resolución de situaciones problema sobre combinatoria.

3. Investigaciones previas

La investigación previa acerca del razonamiento combinatorio en futuros profesores es bien escasa, donde destacamos la investigación llevada a cabo por Mcgalliard (2012) al mostrar la dificultad por realizar tareas de generalización, según el análisis del espacio muestral. En su estudio buscaba examinar las conexiones llevadas a cabo por los futuros profesores entre la enumeración y generalización a otros espacios muestrales similares. Entre los resultados se destaca la dificultad de relacionar las estrategias aplicadas para la determinación del espacio muestral y para su generalización, según las estrategias empleadas, donde mayoritariamente se hace uso de fórmulas sin éxito.

Navarro-Pelayo (1994) lleva a cabo un estudio más profundo al evaluar el razonamiento combinatorio de estudiantes de secundaria mediante un cuestionario con tareas basadas en diferentes operaciones combinatorias, considerando un grupo de control para valorar la influencia de recibir instrucción previa en el tema. Se observa que los estudiantes con instrucción tienen menor número de errores, aunque algunos no comprendieron el significado de la operación combinatoria.

Además, la autora plantea el estudio de la influencia de una variable que denominó "modelo combinatorio implícito" (en adelante, MCI) previamente identificada y descrita por diversos autores, entre los que se destaca la clasificación expuesta por Dubois (1984), aunque nunca anteriormente investigada. Esta variable se basa en la identificación de esquemas de representación que se encuentran implícitos en los enunciados de los problemas y es relevante desde el punto de vista matemático, pues el tipo de objetos implicados en cada modelo varía según el tipo de problema que se trate. Mediante esta variable, los problemas de recuento simples combinatorios se pueden clasificar en tres tipos básicos:

- *Modelo de selección*: Este tipo de problema está centrado en la idea de muestreo, el cual puede ser con reemplazo o sin él; además, puede ser resuelto sistemáticamente o mediante ensayo-error. Suele ser utilizado para definir las operaciones combinatorias en la enseñanza y aprendizaje del tema.

- *Modelo de distribución o colocación*: Este tipo de problema implica la colocación de elementos en celdillas, cajas, etc., considerando la posibilidad de que los elementos sean distinguibles o no.

- *Modelo de partición*: Se centra en la división de un conjunto en subconjuntos; además, existe una correspondencia biunívoca entre los modelos de colocación y partición, debido a que la partición de un conjunto de k elementos en n subconjuntos puede traducirse como la colocación de k elementos en n casillas.

En la investigación desarrollada por Roa (2000), utilizando once de los trece problemas propuestos en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) y dos nuevos problemas referidos a operaciones combinatorias compuestas, se observa que los estudiantes de matemáticas con preparación avanzada presentan igualmente dificultades considerables en la resolución de problemas combinatorios simples, además de que la operación combinatoria que da la solución al problema influye en la dificultad de los mismos.

Aunque los resultados de Roa (2000) son un tanto mejores que los de Navarro-Pelayo (1994), lo que puede justificarse por la madurez y preparación matemática de los estudiantes; en algunos ítems se obtienen resultados similares o incluso peores que los obtenidos por estudiantes de secundaria (Navarro-Pelayo, 1994) y se observa que ningún participante fue capaz de resolver correctamente todos los problemas (58% no fue capaz de resolver correctamente más de la mitad de los problemas). En el estudio del efecto de la instrucción en problemas centrados en dichos modelos se concluye que, después de la instrucción, hubo una reducción en la dificultad en los problemas de selección, mientras que en los problemas de colocación, la mejora no fue general, solo en casos particulares, y en los problemas de partición no hubo mejora. Esto puede deberse a las definiciones utilizadas para introducir las operaciones combinatorias en el currículo español, ya que la mayoría de ellas se basan, principalmente, en la idea de muestreo, que radica en el modelo de selección.

Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000) concluyen que el modelo de selección fue el más simple de resolver. En los problemas de partición, los estudiantes presentaron una serie de problemas comunes y otros específicos, entre otros, que la unión de los subconjuntos de la partición no coincidía con el total de elementos. Otro problema que se manifestó fue el cambio del modelo combinatorio del enunciado, es decir, cambiar el modelo de selección por el de colocación.

Por su parte, García de Tomás (2016) evaluó el razonamiento combinatorio en estudiantes de Secundaria determinando, como conclusión, que los estudiantes tuvieron menos dificultad para resolver los problemas de selección que los de colocación, lo que, según el autor, puede deberse a que la selección implica operaciones más cercanas a la vida cotidiana. Con respecto a las estrategias, el autor señala que el esquema gráfico no fue muy utilizado, por lo que muy pocos lograron la elaboración del diagrama del árbol.

Nuestra investigación trata de completar los estudios previos en el tema, analizando el tipo de lenguaje empleado por futuros profesores a una selección de tareas propuestas en la investigación precedente (Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000), que se trata de una variable anteriormente no analizada; además, tampoco se tienen resultados relativos a la resolución de este tipo de tareas por futuros profesores de Educación Primaria.

4. Metodología

El estudio se lleva a cabo en una muestra de 62 futuros profesores de Educación Primaria en España, estudiantes de la Universidad de Granada en su segundo año del plan de formación correspondiente al curso 2017/18, que poseen conocimientos sobre el tema y su enseñanza. El tiempo dedicado para completar la prueba fue de 30 - 45 minutos, y fue suficiente para que justificasen sus respuestas a cada problema. El tiempo restante (15 - 30 minutos), se dedicó a desarrollar el razonamiento combinatorio en los estudiantes, pues se corrigieron y compartieron las soluciones entre profesor y alumnado, pero el análisis de esta práctica educativa no se describe en este trabajo.

Los problemas aplicados (Figura 1) son tomados de la investigación de Navarro-Pelayo (1994) sobre combinación sin repetición, elegidos por ser problemas de poca dificultad según los resultados de su investigación y la investigación de Roa (2000). Cada uno de ellos se corresponde a cada una de las categorías de la variable MCI (selección, colocación y partición).

Problema 1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Problema 2. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Problema 3. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

Figura 1. Problemas planteados a los futuros profesores.

A continuación se presentan los resultados del análisis de las respuestas de los participantes a los problemas planteados, realizado desde una metodología mixta, combinando el análisis cualitativo de las respuestas mediante el análisis de contenido de las mismas (Cook y Reichardt, 2000) con el análisis cuantitativo (descriptivo), mediante el que se identifican patrones de respuesta (categorías), se cuantifica su frecuencia y se presentan los resultados en tablas o gráficos.

5. Resultados y discusión

5.1. Resultados del primer problema combinatorio

El primer problema se refiere al modelo de colocación, donde se pide el número de formas de colocar 3 cartas indistinguibles en 4 sobres, cada uno de diferente color, según una carta por cada sobre. Para resolver el problema se puede aplicar la fórmula de combinación de n = 4 sobres, tomados en grupos de k = 3 sobres (para colocar en cada uno una carta) de donde la solución correcta es 4. Igualmente se podrían enumerar las combinaciones posibles mediante diferente uso de lenguaje. Por ejemplo, mediante lenguaje simbólico, empleando las letras iniciales de cada color y teniendo en cuenta que siempre quedará un sobre vacío en cada combinación, luego podemos establecer todas las combinaciones haciendo corresponder a la letra que no se elige la combinación que genera dicha "no elección", es decir: {No está D; no está C; no está B; no está A} = {ABC; ABD; ACD; BCD}.

Una amplia proporción de los estudiantes responden de correctamente (48,4%) utilizando principalmente el lenguaje verbal, bien sólo o combinado con otros tipos de lenguaje. Algunos participantes también utilizan representaciones simbólicas, principalmente para representar cada sobre mediante letras, según la letra inicial del color que lo representa (A, B, C, D), lo cual facilita la enumeración de las combinaciones requeridas. Otros participantes utilizan números para el mismo fin. En la Figura 2 se muestra la respuesta de JG, quien responde incorrectamente pues no aplica bien la enumeración. También podemos observar el uso del lenguaje icónico al representar los sobres y cartas.

En cuanto al lenguaje gráfico, los participantes suelen utilizar el diagrama de árbol para mostrar las formas en que un sobre puede contener una carta, o viceversa. El lenguaje tabular se utiliza igualmente para la obtención de las combinaciones posibles al cruzar en una tabla de doble entrada las cartas con los sobres.

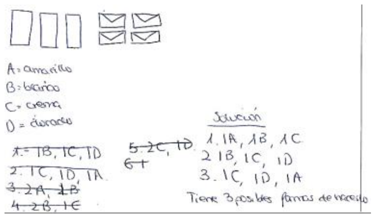

Figura 2. Respuesta parcialmente correcta haciendo uso de lenguaje simbólico (JG)

5.2. Resultados del segundo problema combinatorio

El segundo problema pide seleccionar 3 estudiantes para borrar una pizarra de un conjunto inicial formado por 5 estudiantes. Si identificamos los voluntarios por sus iniciales, de modo simbólico, podemos establecer la enumeración del total de posibles combinaciones fijando la variable estudiante del siguiente modo: {EFG, EFJ, EFM, EGJ, EGM, EJM, FGJ, FGM, FJM, GJM}. También se puede utilizar la fórmula de combinación, donde se selecciona k =3 personas de n =5 personas (total del grupo).

En cuanto al grado de corrección de las respuestas, el 25,8% de participantes responden de modo correcto, lo que muestra la dificultad de esta tarea, donde los lenguajes verbal y simbólico son los más utilizados. El lenguaje simbólico se utiliza generalmente para operar y calcular las diversas combinaciones, asociando letras o números a los estudiantes. Le sigue, en uso, el lenguaje gráfico, principalmente mediante el diagrama del árbol, siendo los lenguajes icónico y tabular los menos empleados. A continuación se muestra la respuesta de DL (Figura 3), donde se representa la selección de los estudiantes mediante lenguaje tabular. Ninguno de los participantes que empleó este tipo de lenguaje respondió de modo correcto.

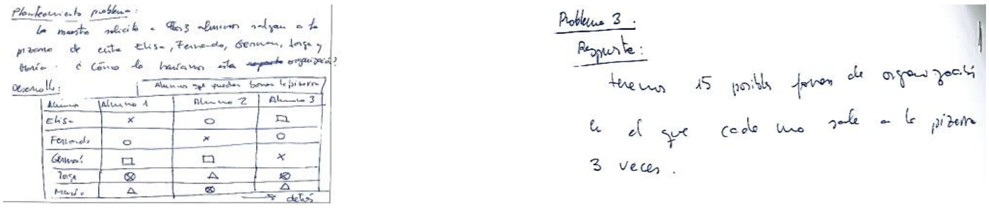

Figura 3. Respuesta incorrecta mediante lenguaje tabular del estudiante DL

5.3. Resultados del tercer problema combinatorio

Este problema es del tipo partición, donde se pide dividir el conjunto de 4 cromos en subconjuntos de 2 cromos cada uno. Como en los anteriores problemas, se puede obtener la solución aplicando la fórmula de las particiones, que en este caso coincide con las fórmula de las combinaciones de 2 elementos tomados de un conjunto de 4 elementos; así la solución es que hay 6 formas diferentes de repartirse los cromos.

En cuanto al grado de corrección de las respuestas, el 58,1% de los participantes respondió correctamente, lo que denota el mayor éxito de respuesta en este problema, mejor incluso que en la investigación de Navarro-Pelayo (1994), donde el 37,2% y el 31% de participantes, con y sin instrucción respectivamente, respondió correctamente.

En las respuestas, los estudiantes utilizan en un porcentaje similar el lenguaje verbal y el simbólico, éste último principalmente para identificar los cromos mediante números. Gran parte de estudiantes utiliza representaciones gráficas mediante diagrama de árbol, como se muestra en la Figura 4, donde CU visualiza las combinaciones de los cromos a repartir, aunque responde a la tarea incorrectamente.

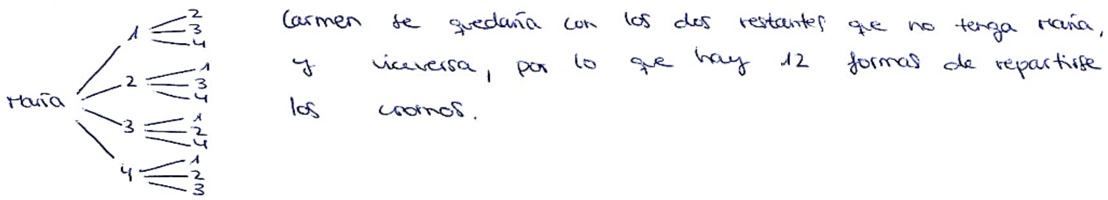

Figura 4. Uso de lenguaje gráfico por el estudiante CU al problema 3.

Encontramos respuestas mediante lenguaje icónico (esquemas o dibujos) para plantear la situación de distribución de los cromos entre las chicas; en cuanto al lenguaje tabular, la tabla se utiliza para plantear la repartición de los cromos, aunque es poco utilizado.

5.4. Síntesis de resultados

El análisis de respuestas de los futuros profesores a los tres problemas planteados en nuestra investigación, atendiendo al MCI y el lenguaje empleado, nos informa del escaso razonamiento combinatorio de los participantes ante la operación de combinación, a pesar de ser la que menor dificultad supuso en investigaciones previas (Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000).

En la Tabla 1 se presenta un resumen de resultados según nuestra investigación, comparados con los obtenidos por Navarro-Pelayo (1994) en los mismos problemas resueltos por estudiantes de Bachillerato, con y sin instrucción previa en el tema. Observamos resultados un tanto mejores en nuestra investigación, en comparación con la de Navarro-Pelayo (1994), excepto en el problema 2, aunque es donde encontramos mayor número de respuestas parcialmente correctas.

Tabla 1. Porcentaje de respuestas según grado de corrección en cada problema.

	Futuros profesores			Alumnos de Bachillerato (Navarro-Pelayo, 1994)					
	(n=62)			Con instrucción (n = 352)			Sin instrucción (n = 368)		
	C	PC	I	C	I	NR	C	I	NR
Problema 1	48,4	19,4	32,3	26,7	57,1	16,2	26,9	53,3	19,8
Problema 2	25,8	40,3	33,9	46	47,7	6,3	22,6	72	5,4
Problema 3	58,1	33,9	8,1	37,2	56	6,8	31	60,6	8,4

C = Correcta, PC = Parcialmente correcta, I = Incorrecta, NR = No responde

Cabe señalar que Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000) habían concluido que los problemas de selección habían sido los más simples de resolver por los participantes, y que en los problemas de partición, después de la instrucción, no hubo cambio en la dificultad. En nuestra investigación, el problema de selección fue el que mayor cantidad de error presentó, con mayor cantidad de respuestas parcialmente correctas, puesto que el concepto de orden no se consideró adecuadamente (error mayoritario en todos los problemas propuestos); por otro lado, el de partición (problema 3) fue el más simple de resolver por los futuros profesores.

En cuanto al tipo de lenguaje, la Tabla 2 resume los resultados por problema y corrección de respuesta en cada uno. Así mismo, en la Figura 5 se muestra que, generalmente, se empleó el lenguaje verbal, seguido del simbólico, encontrando que el lenguaje gráfico se empleó mayoritariamente en las soluciones al problema 3.

Tabla 2. Porcentaje de tipo de lenguaje utilizado en los problemas combinatorios.

Lenguaje	Problema 2			Problema 3			Problema 4		
	C	PC	I	C	PC	I	C	PC	I
Simbólico	6,9	6,9	11,2	7,7	15,4	15,4	17,4	8,7	2,6
Icónico	7,8	2,6	5,2	1	1,9		7,8	2,6	0,9
Gráfico	2,6	3,4	3,4	1,9	2,9	5,8	11,3	7,8	1,7
Tabular	6,9	0,9	3,4		1	1	5,2		0,9
Verbal	22,3	6	10,3	12,5	20,2	13,5	18,3	11,3	3,5

C=Correcto; PC = Parcialmente Correcta; I=Incorrecta

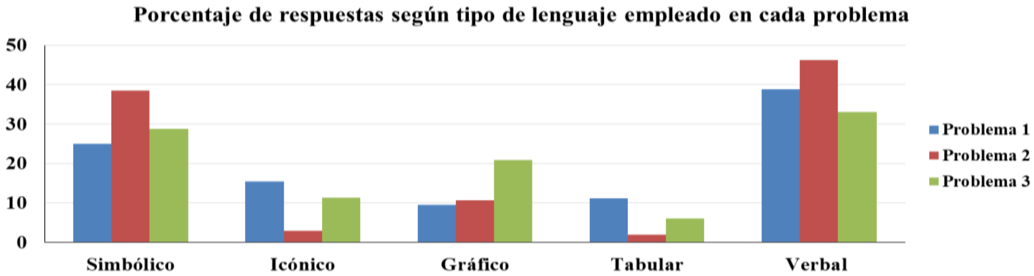

Figura 5. Porcentaje de respuestas según tipo de lenguaje empleado en cada problema

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos informan del escaso manejo de los futuros profesores del lenguaje para responder a tareas combinatorias, pues utilizan eminentemente un lenguaje verbal que, en algunas respuestas, representa el único lenguaje utilizado.

Se espera que esta investigación pueda ser de utilidad, para tomar conciencia sobre la importancia del razonamiento combinatorio y su desarrollo, principalmente en los primeros años de Educación Primaria; así como en los futuros docentes, que serán quienes se encarguen de su enseñanza, en la cual puede ser aplicable material concreto (Hans, Muñoz, Fernández, 2006).

Agradecimientos

Beca CONICYT PFCHA 77170016; Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247- 263.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Beuchot, M. (1985). El ars magna de Lulio y el ars combinatoria de Leibniz. *Diánoia. Revista de Filosofía*, *31*(31), 183-194.

Colerus, E. (1973). *Breve historia de las Matemáticas*. Madrid: Doncel.

Cook, T. D. y Reichardt, C. S. (2000). Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa. *Paideia*.

Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 37-57.

Fischbein, E. (1994). Prologo. En C. Batanero, J. D. Godino y V. Navarro-Pelayo (Eds.), *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

García de Tomás, J. (2016). *Razonamiento combinatorio en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria*. Universidad de Granada. Tesis de Master.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Guirado, J. C., y Cardoso, E. (2007). Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. *Anais do IX Encontro Paranaense de Educação Matemática*. Paraná.

Hans, J. A., Muñoz, J., & Fernández, A. (2006). Combinatoria de colores. *Suma*, *53*, 61-64.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education*, *3*(1), 111-127.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del bachillerato*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

McGalliard III, W. A. (2012). *Constructing sample space with combinatorial reasoning: A mixed methods study*. Tesis doctoral. The University of North Carolina at Greensboro.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Pessoa, C. A. y Borba, R. (2010). O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *1*(1), 1-22.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, *36*, 433-446.