

Perspectiva de las investigaciones sobre educación estadística realizadas en el marco del Enfoque Ontosemiótico

Perspective of the statistical education research based on the onto-semiotic approach

Juan D. Godino

Universidad de Granada, España

Resumen

Se presenta una revisión de los trabajos de investigación realizados sobre la enseñanza de la estadística, probabilidad y combinatoria analizando el uso que se hace en los mismos de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se analiza, además, el papel desempeñado por las investigaciones sobre educación estadística en la construcción del EOS, así como las posibilidades que pueden ofrecer los progresivos refinamientos de este marco teórico para extender y profundizar en la investigación en dicho campo.

Palabras claves: educación estadística, fundamentos teóricos, enfoque ontosemiótico,

Abstract

We present a review of the research works carried out on the teaching of statistics, probability and combinatorics by analyzing the use made of the Onto-semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction theoretical tools. We also analyze the role played by research on statistical education in the construction of the OSA, as well as the possibilities that the progressive refinements of this theoretical framework may offer to extend and deepen research in this field.

Keywords: statistical education, theoretical foundations, onto-semiotic approach

1. Introducción

El desarrollo del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017) ha estado estrechamente ligado a sus aplicaciones al campo de la Educación Estadística. Así, en el artículo “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos” (Godino y Batanero, 1994), que se considera como la “semilla” del EOS, se usa el concepto de media aritmética para contextualizar la reflexión sobre las nociones centrales de problema matemático, práctica, objeto y significado.

También, en el trabajo de síntesis del EOS “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática” (Godino, 2002) se aplica el concepto de mediana para presentar una técnica de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permite determinar los significados institucionales y personales puestos en juego e identificar posibles conflictos semióticos en la interacción didáctica. Concretamente, se analiza el proceso de instrucción propuesto para la mediana en un libro de texto, y las respuestas de una estudiante a una prueba de evaluación, aplicada tras la realización de dicho proceso de estudio.

Los diferentes proyectos de investigación y tesis doctorales dirigidos por Carmen Batanero en la Universidad de Granada han estado centrados en el campo de la educación estadística y, al ser coprotagonista de la elaboración del EOS, han usado el

Godino, J. D. (2019). Perspectiva de las investigaciones sobre educación estadística realizadas en el marco del Enfoque Ontosemiótico. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

EOS como marco teórico. Por ello, en esta ponencia para el congreso CIVEEST he considerado de interés hacer un análisis retrospectivo del papel desempeñado por las diversas herramientas del EOS en las investigaciones sobre educación estadística, muchas de las cuales han sido realizadas en el Grupo de Investigación de Educación Estadística de la Universidad de Granada. También trataré de hacer una propuesta de posibles avances en la investigación sobre formación de profesores en educación estadística, mediante la aplicación de los recientes desarrollos del EOS, en particular, del modelo de “Conocimientos y competencias didáctico-matemáticas” (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

La ponencia se organiza en los siguientes apartados. En el apartado 2 se incluyen las publicaciones que serán analizadas, clasificadas según cinco apartados correspondientes a las herramientas del EOS que se usan de manera preferente y los temas estadísticos que tratan. En el apartado 3 se describe la noción de significado pragmático de un objeto matemático y se resumen algunas publicaciones donde se aplica esta herramienta, y en los siguientes apartados las publicaciones que usan las herramientas, configuración ontosemiótica, diseño instruccional (configuraciones y trayectorias didácticas), idoneidad didáctica y modelo de formación de profesores.

2. Planteamiento metodológico

Como se ha indicado, las herramientas del EOS, cuyo uso vamos a analizar en las publicaciones sobre educación estadística, son las siguientes:

1. Significado pragmático de los objetos matemáticos, en su versión institucional y personal.
2. Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos.
3. Configuración didáctica. Diseño instruccional
4. Idoneidad didáctica
5. Modelo de Conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM)

Estas son las herramientas desarrolladas hasta la fecha para el análisis de los problemas epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo, educativo-instruccional y ecológico implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como para abordar el problema de la formación de profesores de matemáticas. En la Tabla 1 incluimos una selección de trabajos publicados, clasificados según las herramientas del EOS que usan y los temas estadísticos abordados, los cuales serán analizados en los siguientes apartados.

Tabla 1. Selección de publicaciones según herramientas EOS y contenido estadístico

Herramienta EOS	Referencias	Contenido estadístico
Significados pragmáticos	- Godino y Batanero (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.	Media
	- Godino (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.	Mediana
	- Batanero (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria.	Probabilidad
Configuración ontosemiótica	- Batanero (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. - Godino (2013a). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores	Probabilidad;

Diseño instruccional	<ul style="list-style-type: none"> - Tauber, Batanero y Sánchez (2004). Diseño, implementación y análisis de una secuencia de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario. - Alvarado y Batanero (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. - Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. 	<p>Distribución normal</p> <p>Distribución binomial y normal</p> <p>Estadística descriptiva</p>
Idoneidad didáctica	<ul style="list-style-type: none"> - Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. - Arteaga, Contreras y Cañadas (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. - Arteaga, Batanero y Gea (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. - Godino, Rivas y Arteaga (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. - Beltrán-Pellicer y Godino (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. - Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. 	<p>Análisis datos</p> <p>Gráficos estadísticos</p> <p>Aleatoriedad</p> <p>Proyectos</p> <p>Estadística y probabilidad elemental</p> <p>Probabilidad</p>
Modelo CCDM (formación de profesores)	<ul style="list-style-type: none"> - Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. - Godino (2013a). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. - Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático - Vásquez y Alsina (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. - Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. R. (2015) Statistical graphs complexity and reading levels: a study with prospective teachers. - Batanero, C. Arteaga, P., Serrano, L. y Ruiz, B. (2014). Prospective primary school teachers' perception of randomness. - Arteaga, P., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. - Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. - Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. - Ortiz, J. J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. 	<p>Probabilidad</p> <p>Gráficos estadísticos</p> <p>Análisis de datos</p> <p>Aleatoriedad</p> <p>Estadística</p> <p>Probabilidad; análisis de datos</p> <p>Media aritmética</p>

3. Significado pragmático

La noción de significado de un objeto matemático interpretado de manera pragmatista es central en el EOS. Así, en Godino y Batanero (1994), se introducen estas definiciones,

Significado de un objeto institucional OI: Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado.

Significado de un objeto personal Op: Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado.

En Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) se sugiere que, con esta manera de interpretar el significado de un objeto matemático, se pasa del objeto, que en un principio viene a ser una ‘caja negra’, una etiqueta que refiere a una entidad mental, ideal o abstracta, a las prácticas implicadas en el uso de tal objeto, lo cual viene a ser una interpretación creativa de la máxima pragmática de Peirce:

“402. Parece, por lo tanto, que la regla para alcanzar el tercer grado de claridad en la comprensión es la siguiente: considerar qué efectos, que naturalmente pueden tener una motivación práctica, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de dichos efectos es nuestra concepción completa de tal objeto” (Peirce, 1934, v. 5.402).

Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales (respectivamente, personales) de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional (personal).

En Godino (2002) se hace una primera interpretación del significado de un objeto, que deja en un segundo plano la noción de práctica. Fija la atención en los diversos tipos de objetos que intervienen en las prácticas, que son considerados como los *elementos del significado*, esto es, como los componentes del sistema de prácticas operativas y discursivas: elementos lingüísticos, situaciones, procedimentales, conceptuales, proposicionales y argumentativos¹. En el anexo de este trabajo se describe el *significado de referencia de la mediana* mediante un listado de los diferentes elementos característicos de cada uno de los seis tipos de objetos primarios.

Batanero (2005) sigue esta interpretación del significado de un objeto aplicándola a la noción de probabilidad. Afirma, “El significado del objeto sería una entidad compuesta, formada por el conjunto de prácticas operatorias y discursivas relacionadas con dicho campo de problemas” (p. 249). Para el caso de la probabilidad, diferencia entre el conjunto de prácticas ligadas a la resolución del campo de problemas correspondiente (estudio, análisis y predicción de fenómenos aleatorios), que englobaría todo lo que hacemos y decimos para resolver este tipo de problemas, y el objeto matemático probabilidad, que ha emergido históricamente y sigue evolucionando como consecuencia de tales prácticas. Pero es consciente de que un mismo objeto matemático puede enseñarse con niveles diversos de complejidad y, por tanto, su significado puede ser diferente en distintas instituciones educativas. En este sentido, Batanero (2005) describe diversos significados de la probabilidad relacionados con distintos momentos o etapas históricas de desarrollo de este objeto matemático: significados intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático-formal. Estos diferentes significados son distinguidos unos de otros al considerar que en las prácticas que se realizan intervienen objetos diferentes. El análisis de los diversos significados de un objeto se centra en la identificación de los elementos que caracterizan los diferentes significados.

¹ En Godino (2002), los elementos procedimentales se nombran como actuativos y los argumentativos como validativos.

En la resolución de problemas o tareas matemáticas se considera necesario analizar las prácticas matemáticas realizadas con el apoyo de diversos lenguajes, tratando de mostrar las relaciones sinérgicas entre los mismos y los diversos tipos de objetos no ostensivos que necesariamente acompañan a las diversas representaciones. Para realizar este análisis el EOS, partiendo de los tipos elementales de objetos primitivamente definido, amplía esta tipología e introduce las facetas y procesos asociados, así como la noción de configuración ontosemiótica, que se describen a continuación.

4. Configuración ontosemiótica

En la noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2007), los diversos tipos de objetos según su naturaleza y función son clasificados en las siguientes categorías:

- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones, como, recta, punto, número, media, función).
- Propositiones (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

Estos objetos, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o polaridades:

1. Objetos ostensivos (materiales, perceptibles) y objetos no ostensivos (abstractos, ideales, inmateriales).
2. Objetos extensivos (particulares), objetos intensivos (generales).
3. Personales (relativos a sujetos individuales), institucionales (compartidos en una institución o comunidad de prácticas).
4. Significantes o significados (antecedentes o consecuentes de una función semiótica).
5. Unitarios (objetos considerados globalmente como un todo) y sistémicos (considerados como sistemas formados por componentes estructurados).

Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios. En consecuencia, se tienen procesos de problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización-generalización, representación-significación, etc.

Rondero y Font (2015) abordan el problema de la complejidad del objeto matemático, debido a los diversos significados parciales (pragmáticos) que se pueden identificar, y a las configuraciones epistémicas asociadas a cada significado parcial, para el caso de la media aritmética. También abordan el problema de la articulación de los significados parciales para llegar finalmente a identificar de manera unitaria el objeto. El análisis que

se hace pone en primer plano la noción de configuración epistémica, aplicándola a la identificación de las configuraciones ligadas a la media aritmética.

Rondero y Font (2015) identifican para la media aritmética diferentes contextos intramatemáticos y extramatemáticos, a cada uno de los cuales asocian un conjunto de prácticas matemáticas y una configuración epistémica que permiten realizarlas y que denominan como sigue: a) el método babilónico y de Herón para calcular raíces, (CE1); b) el método de Arquímedes sobre el equilibrio de los pesos, principio básico de la estática (CE2); c) sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas (CE3); d) método de Merton para el estudio del movimiento (CE4), y e) cálculo de áreas, métodos de cuadraturas, fórmulas, etcétera (CE5). Estas configuraciones, a pesar de ser distintas entre sí, presentan articulaciones entre ellas, de manera que se pueden relacionar, atendiendo al mayor grado de generalidad. Estas configuraciones parciales se articulan en dos: la configuración CE6, a la que llaman configuración estadística, y a la configuración CE7, nombrada como de cálculo de integrales definidas. De todas estas configuraciones, emerge una referencia global al objeto llamado *media aritmética*.

Los autores sugieren que cuando se hace intervenir la dualidad unitaria-sistémica, las relaciones de articulación por medio de la generalización, se muestra la complejidad de la media aritmética y la multiplicidad de sus espacios de intervención dentro de la Matemática. La vinculación entre los distintos significados, y por ende distintas configuraciones epistémicas, se hace teniendo en cuenta diferentes grados de generalidad y también mediante proyecciones metafóricas diversas (interpretar un significado en términos de otros).

Relacionada con la configuración ontosemiótica, la noción de función semiótica permite analizar los procesos de interpretación y significación (semiosis) característicos de la actividad matemática, la cual básicamente es una actividad relacional. La noción de función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia.

Así, Batanero (2005) analiza el proceso de razonamiento que hace un estudiante (Figura 1) al resolver un problema de probabilidad aplicando la noción de función semiótica y los tipos de objetos primarios; lo presenta como el “Análisis semiótico de la solución del estudiante” (p. 258).

Problema 1. Un grupo de alumnos de un colegio se examina en las materias de Matemáticas e inglés. La proporción de alumnos que aprueba Matemáticas es del 80%, y la de inglés del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

$$P(\text{apr. Mat y Ing}) = \frac{80}{100} + \frac{70}{100} = \frac{150}{100} = 1.5$$

Figura 1. Respuesta de un estudiante

En Godino (2013a) se aplican diversas herramientas del EOS para analizar el diseño de tareas dirigidas a la formación matemática y didáctica de profesores. Una de las tareas solicita analizar los conocimientos que se ponen en juego en la solución de cuestiones sobre el carácter equitativo de un juego basado en los resultados de lanzar dos dados. En el análisis a priori de la respuesta esperada (Figura 2) se interpreta la consigna de determinación de los conocimientos en términos de identificación de los objetos matemáticos (primera columna) y de los significados (segunda columna), bien referidos

por los objetos o el uso que desempeñan tales objetos en el proceso resolutivo.

5. Diseño y análisis instruccional. Configuraciones y trayectorias didácticas

Para el análisis a nivel micro de los procesos de instrucción la principal herramienta es la noción de configuración didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin de una tarea (situación – problema). Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. La secuencia de configuraciones didácticas constituye una trayectoria didáctica,

Objetos:	Significados (referencia / uso):
<p>Situaciones – problemas</p> <ul style="list-style-type: none"> - Determinar si un juego de azar (suma de puntos al lanzar dos dados) es equitativo - Analizar los datos obtenidos en una experiencia empírica con el juego 	<ul style="list-style-type: none"> - Desarrollo de competencias de cálculo de probabilidades - Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en situaciones de juegos de azar. - Desarrollo de competencias de análisis de datos - Reflexión sobre las propiedades de la convergencia en pequeñas muestras
<p>Elementos lingüísticos</p> <ul style="list-style-type: none"> - Términos y expresiones verbales 	<ul style="list-style-type: none"> - Palabras con significado matemático; por ejemplo, equitativo, probabilidad, resultados

Figura 2. Reconocimiento de objetos y significados

La tarea que delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas, cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración. En toda configuración didáctica hay: a) una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes) y c) una configuración cognitiva - afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan). Seguidamente analizamos tres investigaciones en las que se diseñan, implementan y evalúan procesos de instrucción sobre contenidos estadísticos en las cuales se aplican nociones teóricas del EOS.

5.1. Enseñanza de la distribución normal

En Tauber, Batanero y Sánchez (2004) se presenta una síntesis de resultados de la tesis doctoral de Tauber, desarrollada en el periodo de 1997 – 2000, que estuvo centrada en la evaluación de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en un curso introductorio de estadística, ofrecido como materia de libre opción para estudiantes de diferentes carreras universitarias. El proceso instruccional estaba apoyado en el uso de ordenadores y se analizan los avances, dificultades y errores que presentan los estudiantes durante el desarrollo de la experiencia.

Las herramientas teóricas del EOS que se aplican son básicamente las nociones de significado institucional y personal de los objetos matemáticos, usadas para caracterizar el significado de referencia de la distribución normal. El significado de los objetos matemáticos se concibe como el sistema de prácticas ligadas a campos de problemas específicos; tales significados son caracterizados mediante la distinción de cinco tipos de objetos matemáticos primarios, considerados como elementos del significado. Los

tipos de objetos son nombrados siguiendo una primera formulación de dichos objetos primarios: elementos extensivos (situaciones – problemas), elementos ostensivos (lenguajes), elementos actuativos (procedimientos), elementos intensivos (conceptos y proposiciones), elementos validativos (argumentos).

Se asumen que estos elementos pueden variar, según los contextos institucionales y personales en que se afronta la resolución de un campo de problemas. La distribución normal, por ejemplo, no tiene el mismo significado en la enseñanza secundaria que en un curso de estadística para investigadores o para un estadístico que desarrolla nuevos métodos de inferencia. Ello lleva a diferenciar entre *significados institucionales* y *significados personales*, según se traten de prácticas socialmente compartidas, o por el contrario, se refieran a manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto individual. Dicho sujeto, al tratar de resolver ciertas clases de problemas construye un significado personal de los objetos matemáticos implicados. Cuando este sujeto entra a formar parte de una institución (por ejemplo, la universidad) puede ocurrir que las prácticas adquiridas individualmente entren en conflicto con las admitidas para dicho objeto en el seno de la institución, por lo que se debe tratar de realizar un proceso de acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales. Estos procesos deberían conducir a una comprensión gradual de un objeto matemático.

5.2. Aproximación de la normal a la distribución binomial a la normal

En Alvarado y Batanero (2007) se estudia la comprensión teórica y práctica de la aproximación de la distribución binomial a la normal alcanzada por un grupo de 134 estudiantes de ingeniería después de un experimento de enseñanza apoyado en el uso de Excel. En el diseño del curso se incluyó el uso de materiales manipulativos y el ordenador, como refuerzo en la justificación del teorema. También se realizó un estudio previo de tipo histórico y de libros de texto para caracterizar los diversos significados del teorema y fijar el que se deseaba presentar a los estudiantes.

En esta investigación se utilizó la noción de configuración didáctica, introducida en el EOS en Godino (2003). Se indica que el proceso de instrucción se organizó teniendo en cuenta tres tipos de configuraciones: manipulativa, computacional y algebraica.

- En la *configuración manipulativa* el estudiante trabaja con dados, monedas, fichas, papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Se trata de simular experimentos aleatorios, anotar sus resultados, estudiar las variables estadísticas resultantes, su distribución y momentos y obtener empíricamente algunas distribuciones muestrales sencillas. El tipo de demostración preferente es mediante estudio de ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos de resolución de las actividades son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.
- La *configuración computacional*, basada en ordenadores, amplía notablemente el número y variedad de representaciones gráficas dinámicas; además del lenguaje icónico, incorpora la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente, así como introducir las ideas de aproximación y bondad de ajuste. Variando los valores de los parámetros se puede estudiar su efecto sobre la forma de la distribución muestral y la bondad de aproximación. El argumento preferido es inductivo, y visual, así como el estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización.
- La *configuración algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso al álgebra y análisis. Los

procedimientos son analíticos y algebraicos, además de incorporar el uso de las tablas de distribuciones para calcular probabilidades. Aparecen las ideas más formalizadas de convergencia, momentos y tipificación. Las demostraciones son deductivas.

La evaluación de los aprendizajes logrados por los estudiantes se hace mediante el diseño y aplicación de un cuestionario con cinco ítems y un problema abierto.

5.3. Introducción a la estadística para profesores de primaria

En Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014) se describe un proceso de instrucción sobre nociones estadísticas a futuros profesores de educación primaria, con la finalidad de ilustrar la aplicación del sistema de herramientas teóricas del EOS y como una versión de la ingeniería didáctica. Se tienen en cuenta las fases de estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación, analizadas según las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional. Las herramientas teóricas utilizadas permiten revelar hechos didácticos significativos, que determinan, por un lado, pautas para la determinación de trayectorias didácticas idóneas para la enseñanza del tópico estadístico y, por otro lado, fundamentos para valorar la ingeniería didáctica como una metodología de la investigación extrapolable a distintos enfoques teóricos.

6. Idoneidad didáctica

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino et al., 2007; Godino, 2013b). El sistema de indicadores empíricos identificados en cada faceta es una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

6.1. Niveles de reconocimiento de la idoneidad epistémica, cognitiva, afectiva y mediacional

En este apartado se describen tres artículos que informan de resultados de experiencias de formación de profesores de educación primaria en las cuales se les hace vivir una experiencia de aprendizaje de la estadística y se les pide evaluar distintas facetas de la idoneidad didáctica de dicho proceso formativo. Previamente los futuros profesores han recibido instrucción sobre la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores, de modo que en estas investigaciones el foco de atención está en evaluar el grado de dominio de la herramienta idoneidad didáctica alcanzado por los estudiantes. De manera indirecta se tiene acceso a aspectos parciales de sus conocimientos didáctico-matemáticos especializados sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

En Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea (2012) se evalúa el conocimiento especializado de la estadística elemental de una muestra de 108 futuros profesores de educación primaria, utilizando la noción de idoneidad epistémica aplicada a un proyecto de análisis de datos. Se propone a los estudiantes que valoren la idoneidad epistémica, teniendo en cuenta los distintos componentes y descriptores propuestos en Godino

(2009), de un proceso de estudio de la estadística basado en la resolución de un proyecto de análisis de datos. El concepto de idoneidad didáctica y el uso de la pauta habían sido estudiados por los participantes, como parte de la asignatura en una sesión anterior, usando ejemplos de aplicación a otros temas de los diferentes descriptores. Se requiere que el profesor en formación conozca los objetos matemáticos propuestos para la enseñanza del tema y sea capaz de reconocer su presencia y uso adecuado durante el desarrollo del proyecto. Este análisis de la idoneidad epistémica permite evaluar y a la vez desarrollar el conocimiento especializado sobre la estadística.

En este trabajo se elabora una rúbrica con criterios para definir 3 grados o niveles de reconocimiento y aplicación de los diferentes descriptores de la idoneidad epistémica por parte de los profesores en formación, junto con el nivel 0 de no reconocimiento. El sistema de indicadores utilizados en estos trabajos es ampliado posteriormente por Gea (2014) a cinco niveles. Este procedimiento permite asignar a cada uno de los estudiantes un grado de logro en la competencia de evaluación de la idoneidad epistémica del proceso de instrucción experimentado, y, por tanto, de su conocimiento especializado del contenido. Los resultados muestran que este conocimiento es muy escaso, pues en promedio no llegan a alcanzar el nivel 2 (aplicación anecdótica), aunque una proporción de estudiantes que varía entre el 10% y 35% según los descriptores llegan al nivel más alto de aplicación.

En Arteaga, Contreras y Cañadas (2014) se hace un estudio similar al descrito anteriormente (Arteaga, et al., 2012) centrando la atención en elaborar una rúbrica para distinguir niveles de competencia en el reconocimiento de los indicadores de idoneidad cognitiva y afectiva por la misma muestra de futuros profesores de educación primaria. Los datos de este nuevo estudio indican que, aunque determinados descriptores de idoneidad resultaron fáciles de aplicar, globalmente, los futuros profesores de la muestra tienen dificultades en evaluar las idoneidades cognitiva y afectiva. Indirectamente se observa que los participantes muestran escaso conocimiento de las facetas cognitiva y afectiva sobre el aprendizaje de la estadística pues no son capaces de valorar los conocimientos previos, el aprendizaje o las actitudes de los mismos.

En Arteaga, Batanero y Gea (2017) se replica la experiencia descrita en los dos trabajos que hemos citado con una nueva muestra de estudiantes de magisterio, implementando el mismo proceso de instrucción basado en la realización de un proyecto de análisis de datos. Se pretende poner a los futuros profesores en una situación de reflexión sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio experimentado, aunque en este caso el foco se centra en la valoración de la idoneidad mediacional, esto es, del uso de recursos didácticos en la enseñanza de la estadística. La evaluación de los conocimientos de los futuros maestros sobre el papel de los recursos en el proceso de estudio experimentado se hace también elaborando una rúbrica con tres niveles de logro y aplicándola a las respuestas dadas por los estudiantes. Los datos de este nuevo estudio indican que, aunque hay determinados descriptores que resultaron fáciles de aplicar, globalmente, los futuros profesores de la muestra también tienen dificultades en evaluar la idoneidad mediacional, lo que supone un escaso conocimiento de la enseñanza de la estadística, pues no son capaces de valorar los recursos, organización de los alumnos y tiempo requerido para el estudio.

6.2. Indicadores de idoneidad específicos para la instrucción en estadística y probabilidad

En Godino, Rivas y Arteaga (2012) se describe una metodología para la mejora

progresiva de instrumentos de evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares. Las unidades de análisis son clasificadas según las facetas y componentes propuestos en la Teoría de la Idoneidad Didáctica para identificar normas e indicadores de idoneidad, los cuales son confrontados con el sistema propuesto por dicha teoría, a fin de identificar concordancias y complementariedades. Esta metodología es ejemplificada mediante su aplicación a los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM (2000) en el área de contenido de estadística de los niveles K-8, mediante la técnica de análisis de contenido

En una primera fase el texto es dividido en unidades de análisis, las cuales son clasificadas según las facetas y componentes que propone la Teoría de la Idoneidad Didáctica. Seguidamente se procede a una segunda fase en la que dichas unidades son comparadas entre sí y reducidas con el fin de evitar reiteraciones. Posteriormente, del análisis de las normas extraídas de los estándares, se infieren indicadores de idoneidad didáctica de procesos de instrucción matemática, y particularizados en determinados casos para la estadística. Estos indicadores son comparados con los propuestos en Godino (2013b), lo que da lugar a una versión revisada, y en su caso, ampliada de dichos indicadores. La finalidad de la metodología descrita es la elaboración de una pauta o guía de indicadores de idoneidad “refinados”, al tiempo que se identifican limitaciones y complementariedades entre ambos instrumentos.

En Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018), se presenta una guía de valoración de la idoneidad didáctica (GVID) para el estudio de la probabilidad en educación secundaria. El objetivo que se persigue es disponer de un instrumento que promueva la reflexión docente en torno a experiencias de enseñanza-aprendizaje del contenido específico de la probabilidad. El método de investigación toma como punto de partida la revisión sistemática de los conocimientos didáctico-matemáticos de cada una de las facetas en las que se descompone un proceso educativo: epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y uso de medios tecnológicos). Posteriormente, se aplica la GVID elaborada a una experiencia didáctica con alumnos de educación secundaria. Los resultados de dicha aplicación revelan el potencial de esta herramienta para facilitar la reflexión sobre la propia práctica, establecer relaciones entre las distintas facetas e identificar posibles mejoras en el diseño en ciclos sucesivos.

7. Formación de profesores

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas (modelo CDM), inicialmente introducido como un sistema de categorías de análisis (Godino, 2009), refinado y aplicado en diversas investigaciones (Pino-Fan & Godino, 2015). Una de las perspectivas de desarrollo del modelo es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. Por otra parte, también en el marco del EOS, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Font, Breda & Sala, 2015), las cuales han puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias. Estas dos agendas de investigación han confluído generando el modelo llamado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM), descrito recientemente en Godino et al. (2017).

El modelo CCDM es una ampliación del modelo CDM con el cual se propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o

desarrollarse de acuerdo a las dimensiones matemática, didáctica y meta didáctico-matemática (Figura 3). La dimensión matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda dimensión alude a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos). La dimensión meta didáctico-matemática indica los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

Las dos competencias clave del profesor de matemáticas en el CCDM son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, cuyo núcleo (Breda et al., 2017, p. 1897) consiste en: “Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora”. Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones.

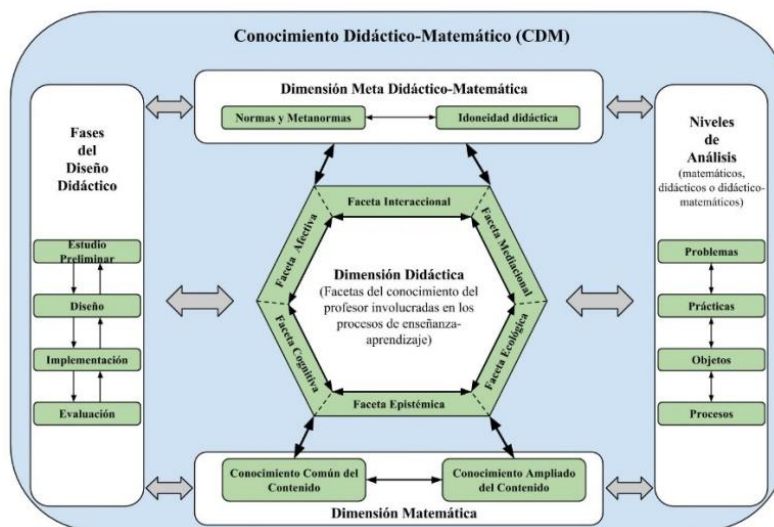


Figura 3. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan & Godino, 2015, p. 103)

Por lo tanto, esta competencia global de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas está formada por cinco sub-competencias (Figura 4) están asociadas a cinco herramientas conceptuales y metodológicas del EOS, cuya descripción sintética se puede encontrar en Godino et al. (2017): a) competencia de análisis de significados globales (basada en la identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución); b) competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas (identificación de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas); c) competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos); d) competencia de análisis normativa (reconocimiento de la trama de normas y metanormas que condicionan y soportan el

proceso instruccional); y e) competencia de análisis de la idoneidad didáctica (valoración del proceso instruccional e identificación de potenciales mejoras).



Figura 4. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 295)

8. Reflexiones finales

La aplicación de las herramientas teóricas del EOS para el análisis e intervención didáctica se ha ido enriqueciendo progresivamente, revelando que este marco teórico es dinámico, que las herramientas se van refinando a medida que se aplican en las diversas investigaciones. Permite hacer análisis a nivel global, de tipo macroscópico, como es la caracterización de los significados pragmático de un objeto, por ejemplo, la probabilidad (Batanero, 2005), o la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, en sus diferentes facetas. Pero también se pueden hacer análisis a nivel microscópico de la resolución de un problema, tanto desde el punto de vista institucional (epistémico) como personal (cognitivo).

La aplicación de la herramienta *configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos* en todos sus elementos es compleja, y depende del nivel de estudio fijado en la investigación o la enseñanza, por lo que con frecuencia se ha hecho de manera simplificada. En particular, identificar todos los objetos que intervienen en la secuencia de prácticas resolutivas y la trama de funciones semióticas que se establecen entre dichos objetos es muy laboriosa. En Contreras, Molina-Portillo, Godino, Rodríguez-Pérez y Arteaga (2017) se ha introducido la noción de *función semiótica crítica* con la finalidad de focalizar la atención en aquellos conocimientos que se consideran esenciales para resolver una tarea. Dependiendo de los objetivos de la investigación, la atención se puede fijar en algunas funciones semióticas que son esenciales para una correcta interpretación del diagrama o de la resolución de una tarea. Si el interpretante del gráfico o el resolutor de la tarea no establecen esa función semiótica se produce un conflicto semiótico, entendiendo por tal, una disparidad de significados entre dos sujetos (personas o instituciones) que impide la interacción comunicativa.

El panorama presentado en esta ponencia sobre las investigaciones realizadas en educación estadística basadas en el uso del EOS revela la estrecha relación del desarrollo y evolución de este marco teórico con los problemas de enseñanza de la estadística, probabilidad y combinatoria, así como con la formación de profesores. En la figura 4 se resumen cinco sub-competencias de la competencia general de análisis e intervención didáctica que deberían desarrollar los profesores. Si bien el desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica ha sido objeto de atención en el campo de la estadística (Arteaga, et al., 2012; 2014; 2017; Gea, 2014) sería de interés

promover proyectos de investigación sobre formación de profesores que les capaciten en el desarrollo de las restantes competencias, en particular, el análisis global de los significados de los objetos del campo de la estadística, probabilidad y combinatoria, el análisis ontosemiótico de las prácticas, las configuraciones y trayectorias didácticas y la toma de conciencia de la trama de normas que soportan y condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Reconocimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.
- Arteaga, P., Batanero, C. Cañadas, G. y Gea, M.M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 279-297.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Gea, M.M. (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. *Educação Matemática Debate*, 1(1), 54-75.
- Arteaga, P., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 63 - 84.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. Arteaga, P., Serrano, L. y Ruiz. B. (2014). Prospective primary school teachers' perception of randomness. En E. J Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 345-366). Advances in Mathematics Education Series. New York: Springer.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 61 (en prensa).
- Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 13(6), 1893-1918.
- Contreras, J. M, Molina-Portillo, E. Godino, J. D., Rodríguez-Pérez, C. y Arteaga, P. (2017). Funciones semióticas críticas en el uso de diagramas de barras por los medios de comunicación. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.
- Font, V., Breda, A., y Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional*, 11(19), 17-34.
- Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en Bachillerato: Análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación

- presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Noviembre, 2003.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.
- Godino (2013a). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En, C. Fernández, et al. (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*.
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.
- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa*, 7(2), 331-354.

- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167-200.
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ortiz, J. J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. *REDIMAT*, 3(3), 192-219.
- Peirce, C. S. (1934). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. (Vol. 5.402). C. Hartshorne y P. Weiss (Eds.). Cambridge: Harvard University Press.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49.
- Tauber, L., Batanero, C., y Sánchez, V. (2004). Diseño, implementación y análisis de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario. *EMA*, 9(2), 82-105.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Educación Matemática*, 29 (3), 79-108.