

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias



PULSACION ENTRE LAS ESTRELLAS DELTA SCUTI

CON BAJO CONTENIDO EN HELIO.

Manuel F. Sáez Cano

INSTITUTO DE ASTROFISICA DE ANDALUCIA
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

PULSACION ENTRE LAS ESTRELLAS DELTA SCUTI
CON BAJO CONTENIDO EN HELIO

MANUEL F. SAEZ CANO

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1981

Tesis Doctoral dirigida por los Dres.
Annie Baglin, Maitre de Recherche en el
Observatorio de Niza (CNRS) y D. José
María Quintana Gonzalez, Colaborador
Científico del C.S.I.C.

Fuó leída el 27 de junio de 1981, obte-
niendo la calificación de Sobresaliente
"cum laude" ante el Tribunal formado por
los Profesores :J. Orús, Barcelona; F.
Sánchez, La Laguna; R. Canal, Barcelona;
J. Biel, Granada; E. Battaner, Granada.

A MIS PADRES

Quisiera expresar aquí mi AGRADECIMIENTO a cuantas personas han contribuido directa o indirectamente a la realización de este trabajo.

Al observatorio de Niza y a su personal cuya contribución ha sido decisiva para la elaboración de esta tesis. Especialmente a A. Baglin por aceptar su dirección y a los compañeros del equipo "Etoiles variables" - M. Auvergne, D. Ducatel, J.M. Le Contel, J.P. Sareyan y J.C. Valtier - con los que tan a gusto he trabajado. Et, bien sur, a tous mes copains de Nice.

Al Instituto de Astrofísica de Andalucía y a su director, J.M. Quintana, que también lo es de esta tesis, por haberme iniciado en la andadura científica. En particular, a los compañeros de equipo con quienes más estrechamente he colaborado: R. Garrido, P. López de Coca y A. Rolland.

A los artistas que han hecho los dibujos - J.A. Sáez y J.A. Mirasol - y a quien, con infinita paciencia, ha mecanografiado el texto - M. Estepa.

Y a todos los demás.

INDICE

0.- INTRODUCCION.	2
1.-RELACION ENTRE PULSACION Y METALICIDAD.	7
1.1 Las estrellas normales.Variables δ Scuti.	7
Posición en el diagrama H-R.	12
1.2 Propiedades observacionales de las estrellas δ Scuti.	15
Forma y amplitud de las curvas de luz.	15
Distribución de amplitudes.	18
Comportamiento periódico.	20
Relación periodo-luminosidad-color.	27
1.3 Las estrellas con anomalías de abundancia.	31
Definición de los tres grupos clásicos.	31
Pulsación y metalicidad.	34
Rotación y metalicidad.	37
1.4 Interpretación teórica del fenómeno Am.	42
Teoría de la difusión.	43
Difusión del helio.	48
Difusión y rotación.	49
2.- ESTRUCTURA ESTELAR Y PULSACION.	52
2.1 Del modelo en equilibrio.	53
Ecuaciones del interior estelar.	53
El gradiente de temperatura convectivo.	63
Las capas externas.	67
Integración del modelo de envoltura.	71
2.2 Del modelo pulsante.	72
Pulsación estelar.	72
Linealización de las ecuaciones.	74
Condiciones de contorno.	76
Estabilidad pulsacional. Integral de energía.	79
Integración del modelo pulsante.	82

3.- CALCULO DE MODELOS DE PULSACION.	84
3.1 Opacidades.	85
3.2 Convección.	89
3.3 Modelos de envoltura.	92
3.4 Inestabilidad pulsacional.	98
Periodos.	104
Abundancia de helio e inestabilidad.	106
Fronteras teóricas de inestabilidad.	111
Variabilidad de las estrellas A con líneas metálicas	114
4.- FOTOMETRIA DE ESTRELLAS δ DELPHINI.	123
4.1 Los sistemas fotométricos de Johnson y Strömngren.	123
4.2 Observaciones de estrellas tipo δ Delphini.	128
Observaciones de δ Del.	128
Otras observaciones.	132
4.3 Variabilidad de estrellas δ Delphini.	135
5.- CONCLUSIONES.	142
BIBLIOGRAFIA.	145
APENDICE.	150

0.- INTRODUCCION

En el diagrama de Hertsprung-Russel, se encuentran diversos grupos de estrellas variables. Uno de los más importantes lo constituyen las cefeidas clásicas que ocupan una zona que atraviesa en diagonal el mencionado diagrama, conocida como banda de inestabilidad de las cefeidas. Todas las estrellas situadas sobre esta banda, son, en teoría, pulsacionalmente inestables.

Las estrellas cuyo estudio es el objeto de esta memoria se encuentran situadas en la prolongación de la banda de inestabilidad hacia la secuencia principal, en la zona comprendida entre los tipos espectrales A2 y F5, y las magnitudes bolométricas 2.5 y 0.0. En el interior de la región así delimitada, se encuentran las estrellas variables ϵ Scuti y las estrellas con anomalías metálicas de abundancia: Am y δ Del. Las estrellas anómalas, especialmente las Am, muestran una tendencia muy marcada a ser pulsacionalmente constantes y según la interpretación teórica de sus anomalías espectrales ambos hechos (metalicidad y constancia) están relacionados. Sin embargo, las estrellas δ Del, que con también anómalas pueden, en ocasiones, pulsar presentando un problema en la interpretación teórica. Es este problema el que intentamos resolver.

Las estrellas son sistemas dinámicamente estables, porque oscilan cuando se perturba su situación de equilibrio. Si esta oscilación crece con el tiempo el sistema, la estrella se dice sobreestable o pulsacionalmente inestable. La amplitud de esta oscilación será limitada por la actuación de mecanismos disipativos en el régimen no lineal.

El mantenimiento de una oscilación sobreestable, necesita de un mecanismo de excitación que compense la disipación de energía pulsacional que tiene lugar en la mayor parte de la estructura estelar. De acuerdo con la termodinámica, tal mecanismo de excitación debe proporcionar un aumento de entropía o un aporte de calor, durante la fase de alta temperatura de cada ciclo de oscilación.

El aumento de la opacidad con la temperatura y la dependencia de la generación de energía nuclear con la temperatura, constituyen dos mecanismos de excitación válidos que se conocen, respectivamente, como mecanismo κ y mecanismo ϵ . Eddington (1941) demostró que en las cefeidas clásicas el único mecanismo eficaz era el mecanismo κ .

Baker y Kippenhahn (1962) comprobaron esta afirmación, al realizar cálculos detallados sobre la pulsación de un modelo de la estrella δ Cephei. Identificaron dos zonas de excitación, que coinciden con las regiones en las que la opacidad crece más rápidamente con la temperatura debido a la ionización de los componentes mayoritarios de la estrella: hidrógeno y helio. La primera zona corresponde a la ionización del hidrógeno y a la primera ionización del helio y la segunda, a la ionización del He^+ . La mayor parte de la energía pulsacional (60%) proviene de la segunda zona de ionización del helio que se sitúa a una temperatura de unos 50 000 K.

Las estrellas δ Scuti, deben su inestabilidad pulsacional al mismo mecanismo κ como fue demostrado por Chevalier (1971).

Desde el punto de vista de la teoría de pulsación, resul

ta extraño que haya estrellas constantes, es decir, no pulsantes en el interior de la banda de inestabilidad. Restringiéndonos a la parte baja de la misma, sólo un treinta por ciento son variables. Como vemos en el capítulo primero, el gran número de estrellas constantes se puede interpretar como estrellas que pulsan con amplitudes que están por debajo del umbral de detección. Pero hay un hecho que llama poderosamente la atención ; entre las estrellas constantes hay una proporción elevada que no tienen una composición química normal. Estas estrellas, son las Am o estrellas A con líneas metálicas. En sus espectros las líneas de los metales aparecen con mayor intensidad de la normal para su tipo espectral, mientras que la línea de calcio es más débil. Las atmósferas de estas estrellas están enriquecidas en metales y empobrecidas en calcio.

La interpretación teórica de estos hechos invoca a la difusión microscópica de los elementos en el seno de una envoltura en calma. La presión de radiación impulsa a los átomos de cada elemento hacia la superficie mientras que la gravedad los solicita hacia el centro. Del equilibrio relativo de estas dos fuerzas, dependerá que un átomo de un determinado elemento suba hacia la atmósfera o se hunda hacia el interior. El cálculo demuestra que sobre los metales más pesados prevalece la presión de radiación; la concentración de estos elementos aumentará en la superficie. Por el contrario, los elementos más ligeros son arrastrados por la gravedad hacia el interior. Entre estos elementos, se encuentra el helio, que es drenado de la atmósfera y de las zonas de excitación de la pulsación. Como consecuencia, las estrellas con anomalías de abundancia son incapaces de pulsar.

En este cuadro aparentemente bien acabado, aparece, no obstante, una mancha. Existe un tipo de estrellas A metálicas

(las estrellas δ Delphini) que son también pulsantes.

El hecho de que las estrellas δ Delphini presenten anomalías de abundancia implica que reúnen las condiciones adecuadas para que actúe la difusión de elementos en su interior. Como la difusión del helio entraña la estabilidad pulsacional, hay que buscar un mecanismo que, o bien explique la pulsación sin necesidad de helio (basándola exclusivamente en el hidrógeno, por ejemplo) o bien, postule la forma de mantener la cantidad mínima de helio que permita la pulsación de la estrella. Es este el problema cuya resolución vamos a abordar.

Gran parte del trabajo que se presenta en esta memoria ha sido realizado en el observatorio de Niza, principalmente todo lo relativo a cálculo de modelos. Se utilizó para ello el ordenador central del "Centre Interregional de Calcul Electronique" del C.N.R.S.

CAPITULO 1

I.- RELACION ENTRE PULSACION Y METALICIDAD.

Todas las estrellas situadas en la banda de inestabilidad son, en teoría, pulsacionalmente inestables. La observación de estrellas tanto de población I (cefeidas clásicas) como de población II (W Virginis, RR Lyrae) así lo confirma.

Resulta sorprendente que las estrellas de la banda de inestabilidad situadas en las proximidades de la secuencia principal no sean todas variables. Se da la circunstancia de que gran parte de las estrellas constantes de esta zona presentan anomalías de abundancia, y ambos hechos parecen estar relacionados, perfilando una explicación del comportamiento anómalo de estas estrellas.

En este capítulo vamos a describir las propiedades observacionales de las estrellas situadas en esta región del diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R), que podemos reunir en dos grupos: las de espectro normal (en su mayoría variables δ Scuti) y la anómalas (estrellas Am y δ Delphini). Haremos también referencia a la teoría de difusión microscópica en las envolturas estelares, base de la actual interpretación del fenómeno Am.

I.1.- Las estrellas normales. Variables δ Scuti.

Las estrellas sin anomalías espectrales, que pueblan la parte baja de la banda de inestabilidad de las cefeidas, son, en su mayoría, variables de corto período, es decir de 0.04 a 0.25 días y pequeña amplitud, entre 0.8 y 0.002 mag.

Estas estrellas, de tipo espectral comprendido entre A2 y F5 y clase de luminosidad V ó IV, forman el grupo de estrellas δ Scuti. Son estrellas de población I. Nos apresuramos a decir que la "normalidad" del espectro de las variables δ Scuti no es un hecho observacional incuestionable, toda vez que la pulsación y la velocidad de rotación elevada de estas estrellas dificultan los análisis de abundancia.

Convencionalmente, se han catalogado en un grupo diferente -el de las cefeidas enanas o AI Velorum- aquellas estrellas variables de características similares, pero de mayor amplitud (superior al límite, fijado arbitrariamente, de 0.3 mag.), intentando, además, basar esta diferencia en una posible pertenencia a la población II. En efecto, dos miembros de este grupo, SX Phenici y la propia AI Velorum, están suficientemente próximas como para tener una paralaje trigonométrica medible. La magnitud absoluta que se deduce de esta medida la sitúa por debajo de la secuencia principal de población I (4.2 y 3.8 mag. para SX Phe y AI Vel, según Bessell 1959). La evidencia de que SX Phe es claramente deficiente en metales y su elevada velocidad espacial, pudo hacer pensar que todas estas estrellas pertenecían a la población II o a una población intermedia, estableciendo así una diferencia clara con las δ Scuti.

La distinción entre AI Velorum y δ Scuti había sido ya criticada por diversos autores, (Baglin^{et al} 1973, Eggen 1970). Recientemente Breger (1979, 1980) ha llegado a la conclusión, tras un estudio individual de algunas cefeidas enanas, de que la gran mayoría de las mismas no son distinguibles observacionalmente ^{de} las δ Scuti, y por tanto son estrellas de población I. Propone agrupar todas estas estrellas en un

único grupo, basándose en los siguientes argumentos:

- La distribución de períodos es análoga a las AI Velorum y en las δ Scuti de gran amplitud.
- La razón de períodos de las variables de doble modo no está en contradicción con los cálculos más recientes de población I (Cox et al. 1979, Stellingwerf 1979), con la excepción de SX Phe.
- La relación período-gravedad, es análoga a la que siguen las estrellas δ Scuti.
- Los radios y masas determinados por el método de Weselink en tres casos (AD CMi, RS Gru, Dy Her), aproximadamente $3R_{\odot}$ y $2.5 M_{\odot}$, están de acuerdo con una etapa evolutiva de secuencia principal de población I.

De todos modos, hay al menos cuatro objetos (SX Phe, Cy Agr, Dy Peg, GD 428) que presentan claras diferencias con los demás, y podrían integrarse en un grupo distinto de estrellas, posiblemente pobres en metales, que jugaría, respecto a las δ Scuti, el mismo papel que las W Virginis respecto a las cefeidas clásicas. Los criterios en los que se basa esta diferencia son los siguientes:

- Un ΔS elevado que parece indicar un bajo contenido en metales. Para SX Phe $\Delta S = 6$, según Bessell (1969)
- Una velocidad espacial elevada. La de SX Phe es próxima a la velocidad de escape de la Galaxia. La medida de velocidades espaciales absolutas está estrecha

mente ligada a la medida de paralajes, y éstas son muy inciertas, lo que permite, por ejemplo, excluir a AI Velorum de las estrellas de población II.

- Baja luminosidad, que las sitúa por debajo de la secuencia principal de población I. GD428 $M_V = 4$ y SX Phe y Cy Aqr están próximos a 3. La medida de magnitudes absolutas está también estrechamente relacionada con la medida de paralajes.
- Para SX Phe la única estrella bimodal de las cuatro, la razón π_1/π_0 , es alta (0.778) y, de acuerdo con los modelos teóricos, requiera una composición química de población II, $Z=0.001$ y una masa pequeña ($1.1 M_\odot$) (Cox et al., 1979). Aunque no hay que olvidar que estos mismos modelos han ampliado el intervalo de valores de π_1/π_0 (fundamentalmente debido al mejoramiento de las opacidades), para estrellas de población I, o intermedia lo que ha permitido incluir entre ellas a muchas AI Velorum.

En nuestra opinión, la cuestión AI Velorum- δ Scuti, sigue aún abierta a pesar de que se hayan dado algunos pasos tendentes a resolverla. Ciertamente el criterio de la amplitud de variación, como tal, no es de peso suficiente para fundamentar una clasificación. Es sin lugar a dudas muy importante comprender proqueé estrellas de la misma luminosidad y temperatura y de parecida composición química y, seguramente, de masas próximas, pulsan con el mismo período y amplitudes tan diferentes. La respuesta teórica a este problema ha de venir de los modelos no lineales de pulsación de este tipo de estrellas, similares a los que explican las curvas de luz y velocidad radial de las Cefeidas clásicas o RR Lyrae. La dificultad con que

11

tropiezan estos cálculos que los tiempos característicos de crecimiento de la pulsación de las estrellas Scuti, son mucho mayores y para seguir la pulsación del modelo hasta que alcance la amplitud límite se necesita mucho tiempo de cálculo.

Los modelos teóricos de estrellas de población I dan relaciones de período π_1/π_0 próximas a 0.76; para obtener el valor que se observa en muchas AI Velorum (superior a 0.77) es necesario suponer un contenido metálico inferior al típico de población I (Cox et al, 1979a). En el capítulo tercero se explicará esto con mayor detalle pero baste este corto comentario para mostrar que desde el punto de vista teórico las estrellas con relación de períodos más altas de lo normal, sugieren composiciones distintas.

Sería necesario proseguir los estudios pormenorizados de cada una de estas estrellas para decidir sobre su clasificación definitiva.

Una forma de dirimir esta cuestión sería la observación precisa de paralajes trigonométrica que permitan conocer con exactitud la magnitud absoluta de estas estrellas y situarlas convenientemente sobre el diagrama H-R. Ya que, como veremos enseguida, la determinación fotométrica de este parámetro puede estar afectada de errores importantes de determinadas circunstancias. La contribución del programa HIPPARCOS, cuyo objetivo es la colocación en órbita terrestre de un satélite astrométrico, puede ser de vital importancia ya que permitirá medir paralajes con una precisión de una milésima de segundo de arco (diez veces superior a la actualmente alcanzada) en una amplísima muestra de estrellas.

Posición en el diagrama de Hertzsprung-Russell

La figura 1 muestra la situación sobre un diagrama H-R observacional de las estrellas δ Scuti y otras estrellas anómalas (Am y δ Delphini). Está basado en la fotometría uvby β recopilada en el catálogo de Hauck y Mermillod (1975). Las magnitudes absolutas (M_V) y las temperaturas efectivas (Te) son, en su mayor parte, las calculadas por Philip et al. (1976) en un análisis del citado catálogo. Hay que señalar que no todas las medidas son de igual confianza, debido a la diversidad de fuentes en que está basado el catálogo fotométrico.

El sistema de Strömngren (uvby) es adecuado para las estrellas calientes, como las A y F. En el capítulo cuarto se ofrece una descripción somera de los filtros y se definen los índices de color utilizados. Las estrellas que ocupan la parte baja de la banda de inestabilidad coinciden con el grupo tardío de Stromgren (1966, 1967) o el grupo AF de Philip et al. (1976). Tienen un índice β comprendido entre 2.72 y 2.88 que en este rango espectral podemos identificar con un log Te entre 3.85 y 3.93 aproximadamente.

En este rango de temperatura, la calibración en magnitud absoluta se basa en la fórmula de Crawford (1975)

$$M_V = M_{ZAMS} - f \beta C_1$$

Donde M_{ZAMS} , es el valor de la magnitud absoluta que corresponde a una estrella con el mismo valor de β situada sobre la secuencia principal de edad cero (Zero Age Main Sequence). El parámetro f varía entre 8 y 10, según el valor de $(b-y)_0$.

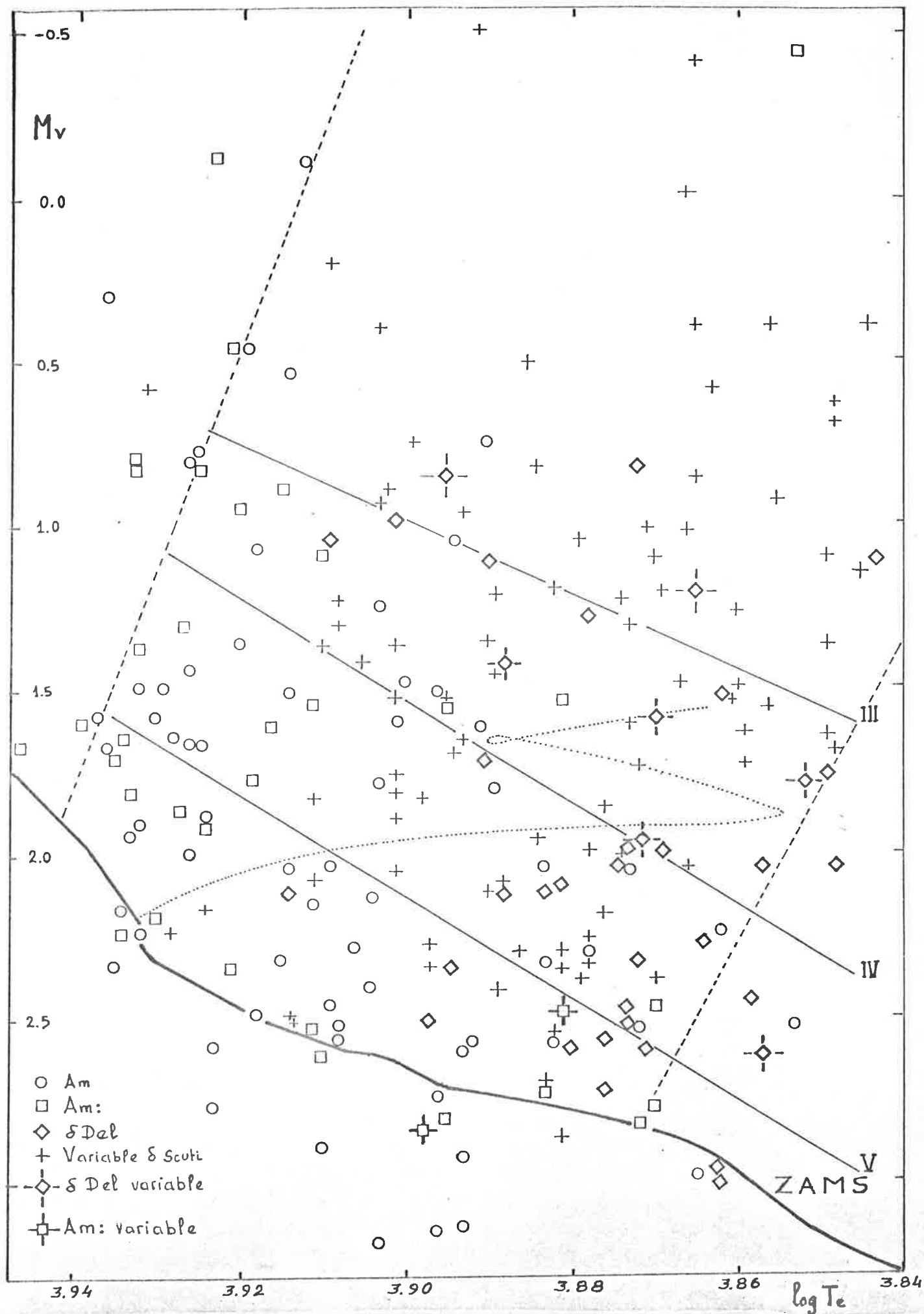


FIGURA 1.- DIAGRAMA HR OBSERVACIONAL DE LA PARTE BAJA DE LA BANDA DE INESTABILIDAD.- LAS LÍNEAS DE TRAZOS SON LAS FRONTERAS OBSERVACIONALES ROJA Y AZUL. (BREGER 1980).- LA LÍNEA DE PUNTOS ES UN TRAYECTO EVOLUTIVO TEÓRICO PARA UNA ESTRELLA DE $10 M_{\odot}$. (CHEVALIER 1970). SE INDICAN TAMBIÉN LA POSICIÓN DE LA SECUENCIA PRINCIPAL DE EDAD CERO (ZAMS) Y LAS CLASES DE LUMINOSIDAD V, IV y III.

La calibración es válida para $\delta C_1 < 0.28$, es decir, para estrellas no muy evolucionadas. El error estimado en las magnitudes absolutas es de 0,5 mag.

La temperatura efectiva la calculan Philip et al. (1976), comparando los valores observados con los deducidos de los modelos de atmósfera de Kurucz (1976). Esta determinación concuerda bastante bien con una fórmula deducida por Petersen y Jorgensen (1972) basada en una calibración respecto al índice β , que en el rango $(b-y)_0$ considerado, es un buen indicador de temperatura:

$$T_e = 6850 + 1250 (\beta - 2.684) / 0.144$$

La determinación de T_e tiene un error de unos 150 grados Kelvin, debido fundamentalmente a la incertidumbre en la medida de β (~ 0.02 mag).

Las estrellas δ Scuti se distribuyen entre la secuencia principal y la magnitud absoluta cero, que para esta temperatura es aproximadamente la clase de luminosidad III. En la figura 1 se han señalado las fronteras observacionales rojas y azul de la banda de inestabilidad de acuerdo con Breger (1979). Se ha dibujado también el trayecto evolutivo de una estrella de $1.8 M_{\odot}$ (Chevalier 1971), que muestra con claridad que la posición de estas estrellas sobre el diagrama H-R concuerda con una etapa de secuencia principal o inmediatamente posterior de estrellas de población I de masas comprendidas entre 1.5 y $2.2 M_{\odot}$.

Por encima de la magnitud cero se han encontrado recientemente dos estrellas que extienden la región de las δ Scuti hacia la zona ocupada por las cefeidas clásicas y muestran

la continuidad de la banda de inestabilidad. Estas dos estrellas son HR 2557 (descubierta por Kurtz, 1977) y 21 Vul (Garrido y Sáez, 1979).

No es extraño que el número de estrellas variables de pequeña amplitud disminuya al aumentar la luminosidad, y ésto por dos razones. La primera es puramente observacional. Los períodos esperados para estrellas de magnitud cero, o más baja, son del orden de una noche de observación, o superiores, lo que dificulta su detección, debido fundamentalmente a la pequeña amplitud, lo que no ocurre con las estrellas variables RR Lyrae, de población II, que tienen la misma magnitud absoluta pero mayor amplitud. En segundo lugar, hay un criterio evolutivo: el corto intervalo de tiempo que necesitan para atravesar esta zona del diagrama H-R las estrellas de gran masa ($3M_{\odot}$), a lo que se añade el menor número de estas estrellas respecto de las de masa y luminosidad inferior.

1.2.- PROPIEDADES OBSERVACIONALES DE LAS ESTRELLAS δ SCUTI.

Forma y amplitud de las curvas de luz.

Las estrellas variables de gran amplitud (1 magnitud) y períodos largos (varios días) tales como las cefeidas clásicas o las RR Lyrae presentan, en su mayoría, curvas de luz que se repiten fielmente de ciclo a ciclo y que permiten clasificar a estas variables en grupos atendiendo a la forma de su curva de luz que suele sujetarse a unos cuantos patrones fijos. La situación es muy distinta en las δ Scuti, donde las curvas de luz presentan formas muy diversas y, a menudo, irregulares. La amplitud de las curvas de luz, está comprendida entre algunas décimas de magnitud y

el límite de detección, que actualmente podemos cifrar en algunas milésimas de magnitud. En la figura 2, aparecen dos casos extremos: HR 5343 de pequeña amplitud (0.03 mag) y EH Lib de gran amplitud (0.8 mag).

La amplitud depende de la longitud de onda. Es ligeramente mayor en la banda B del sistema de Johnson (centrado en 4400 Å) que en el V (centrado sobre 5500 Å), por lo que la estrella es más azul en el máximo de luminosidad. Esto puede verse en las curvas de luz de EH Lib en la figura 2.

La amplitud puede variar de un ciclo a otro, lo que puede atribuirse, en ocasiones, a la interferencia de dos períodos próximos. Ahora bien, aún en estrellas que pulsan con un período único, se observan deformaciones bruscas (bumps) tanto en la curva de luz como en la de velocidad radial. La figura 3 muestra un ejemplo de este comportamiento: HR 515, observada en dos colores por Valtier et al. (1974). Dada la precisión alcanzada actualmente en las observaciones no es posible explicar este fenómeno como un error experimental, sino que se trata de un comportamiento real de la estrella. Volveremos sobre esta cuestión de la variación de amplitud cuando hayamos discutido el comportamiento periódico de la estrella δ Scuti.

Las variaciones de amplitud pueden ser causa de que, durante un intervalo corto de observación, una estrella variable de pequeña amplitud, puede parecer constante. La estrella ya aludida HR 5343 fue considerada constante por Breger (1969), que la observó durante dos horas. Observaciones realizadas por nosotros (Costa et al. 1979), confirman su variabilidad.

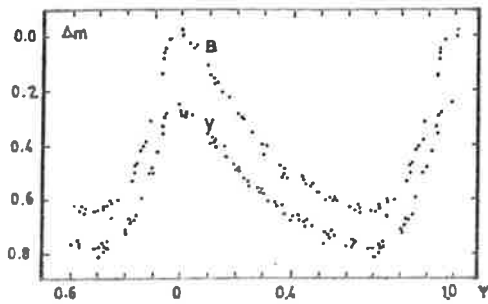
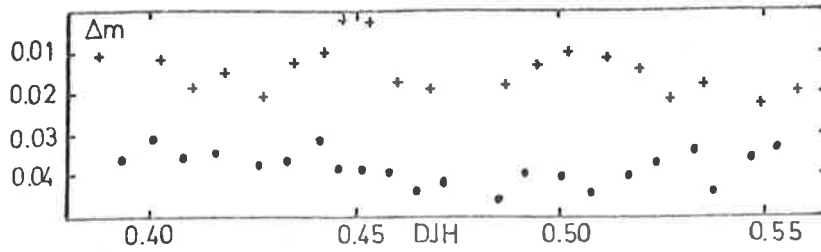


FIGURA 2.- Arriba: Curva de luz de HR 5343(+) y de su estrella de comparación(.) en el filtro B de Johnson. Tiene un periodo de 0.04 días. Abajo: Diagrama de fases de EH Lib, cuyo periodo es de 0.088 días, en los filtros B y V del mismo sistema. En ambos casos el origen de la escala de magnitudes es arbitrario.

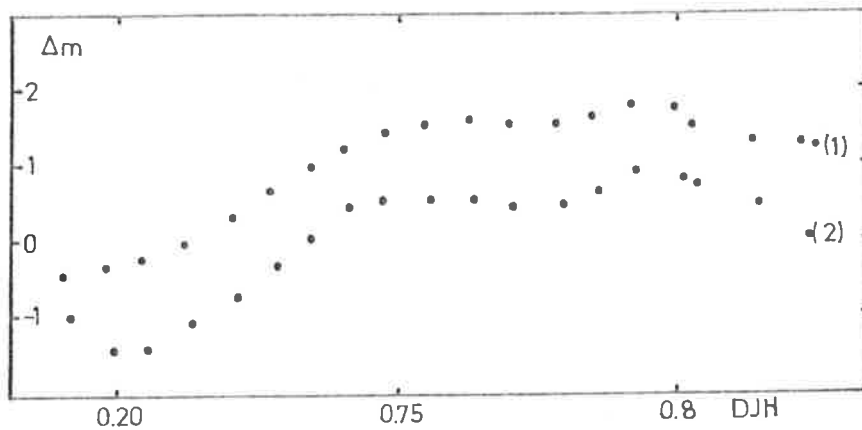


FIGURA 3.- Observaciones de HR 515 (Valtier et al. 1974) en dos filtros de unos 30 Å de anchura, centrados en 4678 Å (1) y 5535 Å (2). Según estos autores la estrella pulsa con un único periodo de 0.2 días. Se observa un "bump" inmediatamente antes del máximo.

Distribución de amplitudes.

Hemos dicho que las amplitudes de las δ Scuti cubren un amplio margen. Veamos ahora como se reparten entre los miembros de la población.

Los modelos teóricos, desde el de Chevalier (1971), predicen la pulsación de todas las estrellas normales (es decir, excluidas las Am) de la banda de inestabilidad, próximas a la secuencia principal. En ausencia de modelos no lineales de pulsación para estrellas enanas o poco evolucionadas, no es posible calcular la amplitud de variación. Sólo caben aproximaciones experimentales al problema.

La observación muestra que sólo el 30% de las estrellas que cumplen estas condiciones son variables. ¿Que ocurre con las restantes?

El histograma de amplitudes que se muestra en la figura 4 y que se basa en los datos recopilados por Breger (1979), permite ver que la distribución de amplitudes tiene un carácter exponencial. Son mucho más frecuentes las estrellas variables de pequeña amplitud que las de gran amplitud. Este hecho, expuesto por primera vez por Baglin et al. (1973), sugiere interpretar las estrellas constantes como variables de amplitud no detectable. Los autores citados sugieren que un aumento en la precisión instrumental haría aparecer un mayor número de variables. Este aserto parecen corroborarlo observaciones recientes del cúmulo de la Hyades, encaminadas a detectar la variación de las estrellas A y F. Digamos en primer lugar que el estudio de los cúmulos es muy adecuado para este propósito por varias

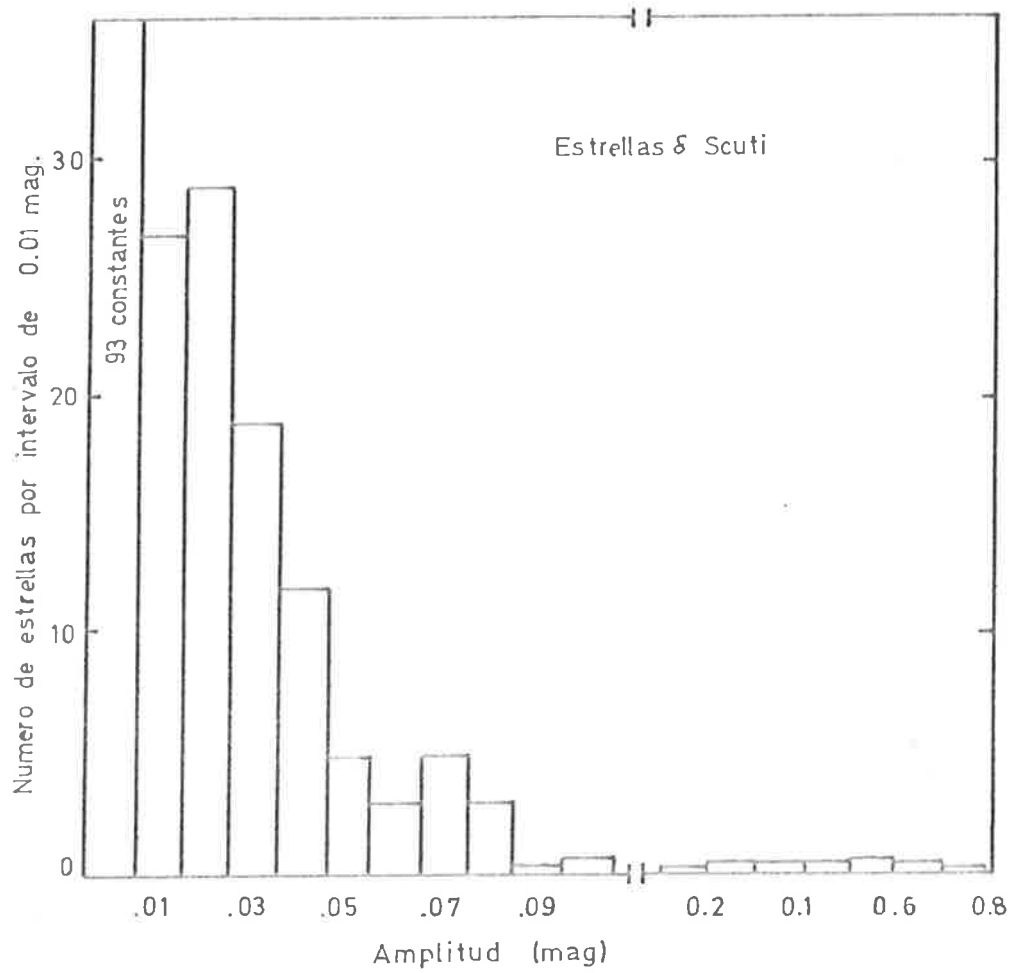


FIGURA 4.- Histograma de amplitudes de las estrellas δ Scuti que muestra el caracter exponencial de la distribución. La figura se basa en los datos recopilados por Breger (1979).

razones: homogeneidad de la muestra de estrellas, posibilidad de obtener mayor precisión que con estrellas de campo por la proximidad y abundancia de estrellas de comparación. Slovak (1978), basándose en observaciones de 1970, cifra en un 13% la incidencia de variabilidad entre las estrellas A y F de las Hyades; por su parte, observaciones más recientes de Horan (1979), encuentran un valor de 37%.

Comportamiento periódico.

Los períodos observados en estrellas δ Scuti están comprendidos entre 30 minutos y 6 horas (0.02 y 0.25 días). La forma, generalmente compleja, de la curva de luz, hace que la determinación de períodos no sea una tarea fácil. Tanto el método de resolución del problema como la interpretación de los resultados finales, son actualmente el origen de claras discrepancias entre diferentes grupos de investigadores dedicados a ello. En general, se supone que las curvas de luz observadas son una superposición lineal de señales periódicas (sinusoidales o no) de distintas frecuencias. Los distintos métodos que a continuación se esbozan, pretenden desentrañar el contenido periódico de las curvas de luz.

El clásico método de la transformada discreta de Fourier, consiste simplemente en un ajuste por mínimos cuadrados de una función

$$F(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t$$

con la frecuencia de prueba ω . En el espectro de frecuencias, representación de $A^2 + B^2$ frente a ω , aparecen máximos no sólo a las frecuencias presentes en la señal sino también a frecuencias empíricas que son combinación lineal de

de éstas, con las frecuencias de muestreo o ventana de observación.

Normalmente, el procedimiento de cálculo consiste en hallar la frecuencia ω que haga mínimos los residuos y restar la función así obtenida -prewhitening- a los datos originales e iterar el proceso. Si la primera frecuencia no ha sido bien fijada, esta forma de proceder puede introducir en la muestra frecuencias que no estaban presentes en los datos originales.

Otros métodos están basados en la minimización de un parámetro -diferente en cada uno de ellos- que sea función de la dispersión de los puntos sobre un diagrama de fases para cada frecuencia de prueba. Estos métodos tienen la ventaja de ajustar de una sola vez, y por lo tanto más fielmente, las curvas de luz no sinusoidales. No obstante, no están exentas de la aparición de frecuencias espúreas, función del espaciado o de la ventana de observación, que dificulta la interpretación de los periodogramas de señales multiperiódicas.

Un último grupo de métodos está basado en la suposición de que las partes no observadas de la señal pueden tener cualquier valor -máximo desorden- y no son ceros como en los métodos anteriores. De ahí que se conozcan como métodos de máxima entropía. Al hacer esta suposición, se eliminan las frecuencias espúreas del espectro. Surge no obstante, una dificultad que restringe la utilización del método a problemas en que los datos estén igualmente espaciados, lo que no es habitual en fotometría, debido a que inicialmente debe ajustarse un modelo autorregresivo que sólo es desarrollable si la distancia entre dos puntos consecu-

tivos es fija.

Como muestra de los resultados contradictorios en el cálculo de períodos, podemos citar dos ejemplos recientes:

- 4 Canum Venaticorum analizada por Fitch (1979) e, independientemente, por Warman et al (1979), quienes coinciden en el período fundamental pero discrepan en los armónicos más elevados.
- 38 Cancri, observada y analizada por Guerrero (1979), parece pulsar con tres períodos próximos que hacen pensar en un modo no-radial desdoblado por rotación. Los mismos datos estudiados por Breger (1980a), dan por resultados dos períodos distintos, que se pueden identificar como los modos más bajos de una pulsación radial.

A pesar de estas limitaciones, parecen diferenciarse dos tipos de comportamiento: hay estrellas que pulsan con un sólo período y estrellas multiperiódicas, entre las cuales las más importantes son las estrellas bimodales. Pero esta división no es exhaustiva, ni podemos presumir que establezca una clasificación de las δ Scuti.

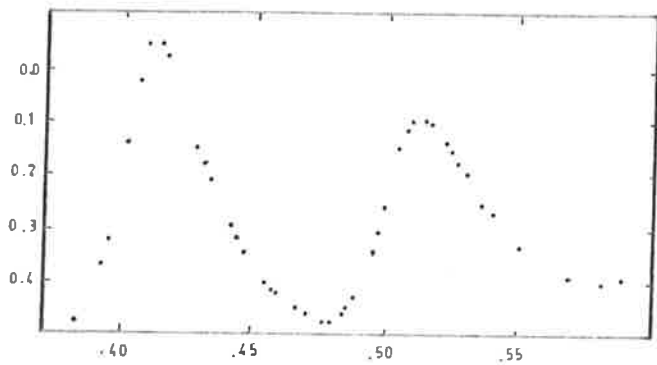
Las estrellas que presentan claramente un sólo período son, en general, estrellas evolucionadas de gran amplitud y período relativamente largo. Se interpretan como estrellas que pulsan en el modo fundamental de las pulsaciones radiales. Estrellas de este tipo son ρ Pup, AD CMi, DY Her, SZ Lyn y EH Lib, muchas de las cuales pertenecían al grupo de cefeidas enanas ya comentado. De todos modos, la curva de luz de estas estrellas no reproduce fielmente de ciclo

en ciclo, sino que hay siempre pequeñas variaciones, como las señaladas por Van Genderen (1967), en el caso de EH Lib, y que pueden verse en la curva de luz de la figura 2. La pretendida regularidad de las curvas de luz de estas estrellas, puede ser simplemente debida a que su largo período y gran amplitud encubran las pequeñas perturbaciones reales de las curvas de luz que no pasarían desapercibidas si la amplitud fuera menor.

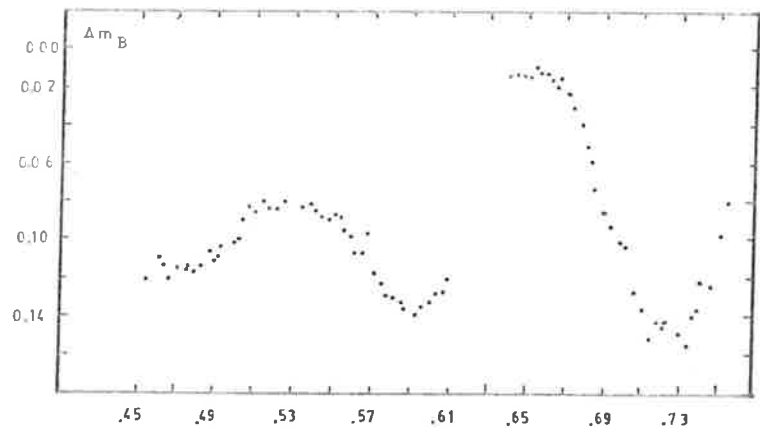
En efecto, hay muchas otras estrellas variables de pequeña amplitud que puede interpretarse que pulsan con un único período, al que se superponen perturbaciones, de origen desconocido pero no inverosímiles desde el punto de vista físico, toda vez que la hidrodinámica de las capas externas, ciertamente compleja, no se tiene en cuenta en los modelos teóricos. Los períodos que se calculan en estos modelos, son puramente de la estructura interna.

Para saber en qué modo radial está pulsando una estrella concreta, hay que recurrir a determinar la constante de pulsación Q_i a partir de la relación período-luminosidad-color, de la que hablaremos en el apartado siguiente. La incertidumbre en las medidas de M_v y T_e hacen difícil esta determinación.

Hemos llamado estrellas bimodales a las que pulsan con dos períodos. Sus curvas de luz muestran claramente la modulación de amplitud introducida por la interferencia de las dos frecuencias próximas (figura 5). La razón de los períodos, que queda circunscrita a un intervalo muy estrecho ($0.768 < \Pi_1/\Pi_0 < 0.778$, incluyendo a SX Phe, según Fitch y Szeide, 1976), hace pensar que sean el fundamental y el primer armónico de las oscilaciones radiales. Estas estre-



(a) AI Vel



(b) 4 CVn

FIGURA 5.-Comportamiento bimodal de dos estrellas delta Scuti. (a) Curvas de luz de AI Velorum en el filtro y de Strömgren, observada por Breger (1977). Se aprecia claramente la modulación de amplitud debida a la interferencia de dos periodos próximos ($0.^d.111$ y $0.^d.086$). (b) Curva de luz en el filtro B de Johnson de 4 CVn, obtenida por nosotros en febrero de 1978.

llas recuerdan por su comportamiento a las cefeidas bimodales que, aunque de períodos más largos (2 días), también restringen el cociente de períodos a un intervalo estrecho ($0.697 < \Pi_1/\Pi_0 < 0.711$; Stobie, 1977).

La interpretación teórica de este comportamiento bimodal, no está aún muy clara. Aunque en un determinado modelo de estrella puedan excitarse varios modos propios de pulsación, normalmente la energía de pulsación la acapara el modo más inestable en detrimento de los demás, como lo han demostrado cálculos no lineales. Sin embargo, Stellinguerf (1975), entre otros, ha conseguido obtener modelos de RR Lyrae con dos modos estables, aunque en condiciones tan particulares que no explican la amplia difusión del fenómeno.

Basándose en el hecho de que la razón (Π_1/Π_0) es poco variable en un amplio intervalo de Π_0 , Simon (1977), ha sugerido que la existencia de estas estrellas bimodales se debe a la resonancia entre estos dos modos (Π_0, Π_1) y un armónico más elevado. En el caso de las δ Scuti, este podría ser el cuarto armónico ya que $\frac{1}{\Pi_4} \approx \frac{1}{\Pi_1} - \frac{1}{\Pi_0}$.

Simon (1979), llega a la conclusión de que la resonancia requiere masas de $\sim 0,5 M_{\odot}$ que pueden ser demasiado bajas.

En los casos en que la razón de períodos observados no está próxima a 0.77, estos pueden interpretarse como modos de pulsación no-radiales. La identificación de modos no-radiales no puede basarse exclusivamente en una medida de la relación de períodos siempre inciertos. Habría que recurrir a la observación fotométrica y de velocidades radiales simultáneas para ver el desfase relativo entre ambas curvas.

Otra posibilidad sería el estudio de sistemas binarios eclipsantes, una de cuyas componentes fuese una estrella pulsante.

La situación se hace más confusa cuando hay más de dos períodos presentes. Un caso concreto, aunque no aislado, es el de 1 Monocerotis. Se han identificado tres frecuencias equidistantes en el periodograma de esta estrella. Shobrook y Stobie (1974), las interpretan como el desdoblamiento por rotación de un único modo no radial. No se pueden excluir otras interpretaciones como una modulación de amplitud debida a un compañero próximo.

En otras ocasiones, se ha pretendido explicar una curva de luz (p. ej. HD 52788 Kurtz, 1979), por la superposición de numerosas frecuencias. Usualmente el residuo que va quedando sin explicar en las observaciones, es superior a la amplitud de las frecuencias que sucesivamente se ajustan, por lo que sólo serían verdaderamente significativas la primera y segunda, en el mejor de los casos.

Finalmente, se ha propuesto que alguna estrella como 21 Monocerotis sea de período variable. Stobie et al (1977), interpretan las curvas de luz de 21 Mon en base a un conjunto de cinco frecuencias, cuyas amplitudes y fases relativas varían en una escala de tiempo de días. No se conoce ningún mecanismo físico que explique el intercambio de energía entre distintos modos de oscilación, sean estas radiales o no-radiales, como sería necesario para apoyar esta interpretación de las observaciones.

Una cuestión suscitada por Le Contel et al. (1974), es que la complejidad de las curvas de luz no sea debida a una superposición de modos armónicos estables -de dudosa

interpretación física en cuanto su número crece- sino más bien a la presencia de efectos atmosféricos que perturben la pulsación radial. En esta línea de pensamiento Valtier et al. (1974), interpretan las curvas de luz de HR 432, HR 515, HR 812 y HR 8006, como debidas a una pulsación con un único período que flutúa en torno a un valor medio que coincide con el período fundamental predicho por los modelos de estructura interna. Otros autores sostienen, sin embargo, que estas observaciones se pueden ajustar a una superposición de modos armónicos estables (Warman et al. 1979).

Parece claro que el comportamiento periódico de las δ Scuti, se estudia más fácilmente en las estrellas de gran amplitud y que se encuentran escollos, a menudo insalvables cuando las amplitudes son pequeñas.

En nuestra opinión la mayor parte de las estrellas δ Scuti pulsan con uno o dos períodos y la complejidad observada en las curvas de luz se debe a la presencia de algún tipo de perturbación de pequeña escala que se hace más ostensible cuando la amplitud total de variación es pequeña.

Relación período-luminosidad-color.

Un sencillo modelo de estrella, que la supusiera formada por una esfera uniforme de un gas politrópico, capaz de sufrir pulsaciones radiales adiabáticas, hace aparecer inmediatamente una relación entre el período y la densidad media del modelo:

$$\pi_i \sqrt{\rho} = Q_i$$

En efecto, la observación demuestra que las estrellas más

evolucionadas tienen períodos más largos que las que permanecen sobre la secuencia principal (fig. 6), ya que a igualdad de masa, las primeras tienen menor densidad.

La densidad de una estrella, es función de su posición en el diagrama HR y por lo tanto, de su color o temperatura efectiva y de su luminosidad. Es pensable que exista una relación entre el período, la luminosidad y el color de una estrella variable o relación P-L-C, a la que puede llegarse tanto teórica como observacionalmente.

A partir de un gran número de modelos de masa diferente de estrellas de población I, Stellinwerf (1979) propone una relación PLC que es resultado de un ajuste analítico de los períodos calculados que adopta la forma

$$\log P = -0.29 M_{bol} - 3.23 \log T_e + Q_i$$

siendo Q_i una constante que depende del modo de pulsación (11.96, 11.85 y 11.76 para el fundamental, primer y segundo armónicos).

Esta relación puede compararse con la obtenida por Breger y Bregman (1975), ajustando los períodos observados de δ Scuti

$$\log P = -0.35 M_V - 2.77 \log T_e + 9.9 \text{ para el fundamental.}$$

Las incertidumbres en la determinación de M_V y $\log T_e$ en estrellas individuales, hace difícil averiguar en que modo están pulsando. Los pocos casos en que ha sido posible hacer esta distinción, sobre todo por disponerse de masas y radios, permiten decir que las estrellas que pulsan en el

primer armónico, son más calientes que las que pulsan en el fundamental (Breger y Bregman, 1975).

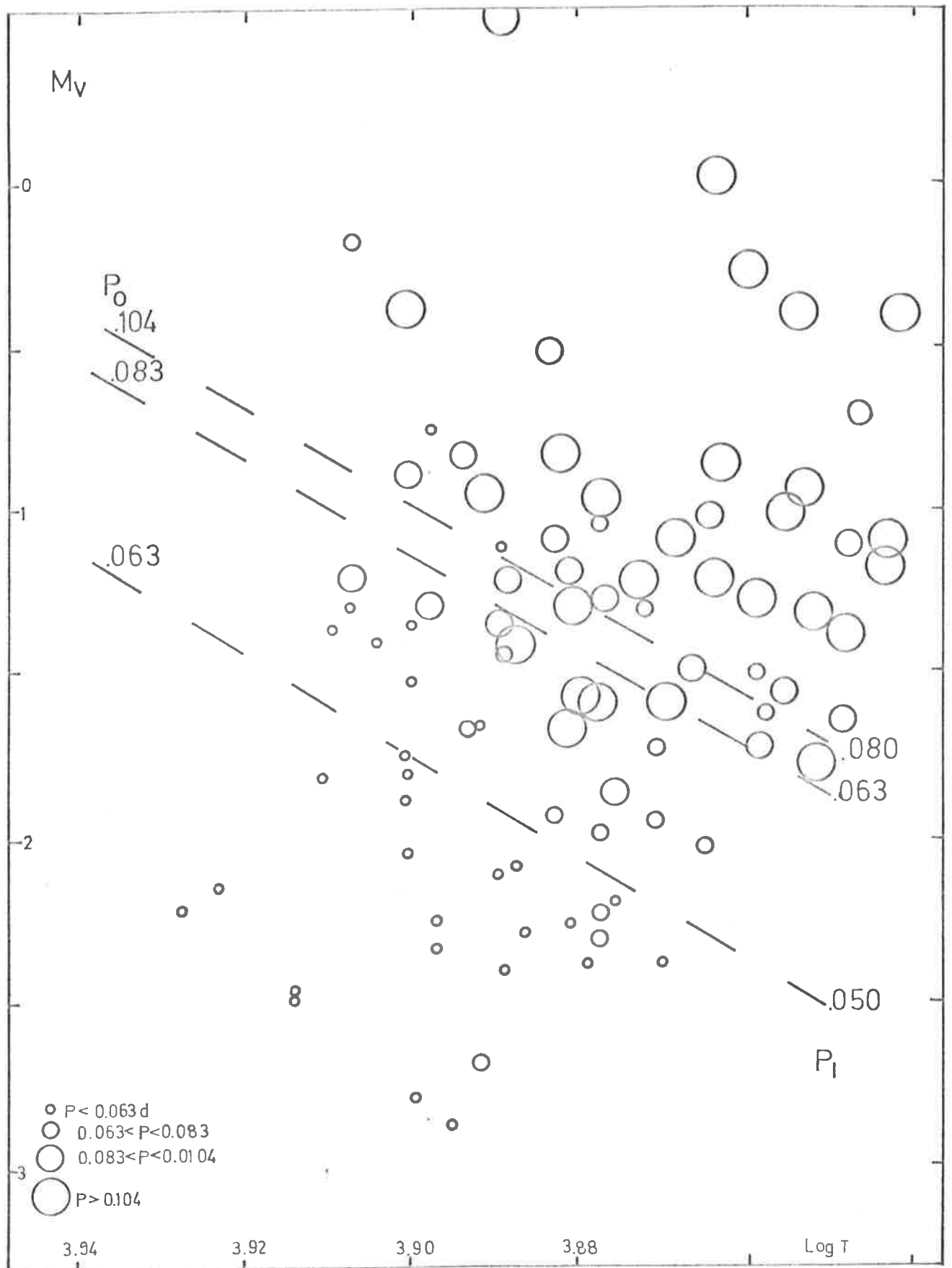


FIGURA 6.-Distribución de periodos de las estrellas δ Scuti sobre un diagrama H-R. Se han señalado las líneas isoperiódicas teóricas de Chevalier (1971).

1.3.- LAS ESTRELLAS CON ANOMALIAS DE ABUNDANCIA

En la misma zona del diagrama H-R ocupada por las variables δ Scuti, se encuentran estrellas con anomalías atmosféricas de abundancia. Estas estrellas, que denominaremos estrellas A con líneas metálicas o simplemente Am, cubren un dominio de temperatura más amplio que la banda de inestabilidad: van desde los tipos espectrales A4 hasta F5. Se dividen en tres grupos atendiendo al tipo de anomalías: Am clásicas, Am marginales y δ Delphini.

Entre las estrellas A, existe otro grupo importante de estrellas anómalas que son las A peculiares (δ Ap) cuyas características vamos a comentar brevemente por la relación que guardan con las Am. En su mayoría, las Ap tienen tipos espectrales más tempranos que las Am, pues se sitúan entre B8 y F0. Muchas de estas estrellas tienen espectro y luminosidad variables pero no son pulsantes. La variación se debe a inhomogeneidades de la superficie que, combinadas con la rotación de la estrella producen las variaciones observadas. Los períodos de variación, que son los de rotación, son del orden de días. Sin embargo, entre las Ap más frías, se han encontrado recientemente algunas que varían con períodos muy cortos (~ 15 minutos), como HD 101065 (la estrella de Przybylski) y 21 Com (Weiss et al., 1980).

Definición de los tres grupos clásicos

Las estrellas Am fueron descubiertas por Titus y Morgan en 1940, sobre espectrogramas de una dispersión de 110 \AA/mm , en el curso de un trabajo de clasificación espectral de las Hyades. Encontraron seis estrellas cuyas líneas metálicas

eran considerablemente más intensas que lo que correspondía a su tipo espectral.

El descubrimiento de nuevas estrellas A de carácter metálico, hace necesario introducir una definición más precisa. Pero los datos acumulados hacen ver que la diversidad del fenómeno es difícil de sintetizar en una única definición. Sin embargo, Conti (1970), intenta una definición global de lo que él llama "el fenómeno Am", en los siguientes términos: "El fenómeno Am se presenta en estrellas que tienen una subabundancia superficial aparente de Ca (y/o Sc) y/o una sobreabundancia de los elementos del grupo Fe y de los más pesados".

Adoptando esta definición de Conti, es posible incluir entre las Am estrellas, cuyas características pasan desapercibidas en los espectros de baja dispersión, empleados en clasificación estelar. Por ejemplo, el criterio del Sc, sólo es utilizable sobre espectros de dispersión media o alta, pues por encima de $40 \text{ \AA} / \text{mm}$, esta línea aparece superpuesta a otras.

Siguiendo el criterio establecido por Jaschek y Jaschek (1974), vamos a adoptar una definición puramente espectroscópica válida para dispersiones de $100 \text{ \AA} / \text{mm}$. basadas en los tipos espectrales deducidos de las líneas de hidrógeno (H), de las líneas metálicas (M) y de la línea K del Calcio II(K).

Se definen como Am clásicas, aquellas estrellas para las que

$$K < H < M$$

Se consideran Am marginales (Am:) aquellas estrellas que presentan características similares pero de modo menos

acusado, es decir, en que la diferencia entre los tipos espectrales es inferior a cinco subclases espectrales:

$$K \lesssim H \lesssim M$$

Finalmente, consideramos el grupo de las δ Delphini, definido por Bidelman (1966), a partir de espectros tomados con un prisma objetivo a una resolución de 108 Å/mm. Son estrellas para las que coinciden los tipos espectrales del hidrógeno y del calcio, pero ambas son más tempranas que el deducido de las líneas metálicas, siendo pequeña la diferencia entre este último y los anteriores.

$$K = H \lesssim M$$

En la figura 7, se muestra la distribución de estos tres grupos clásicos sobre un histograma de temperaturas. En promedio las Am y Am: son más calientes que las δ Del, los valores medios de $\log T_e$ para cada grupo son 3.91, 3.92 y 3.87 respectivamente. La distribución de estos grupos en luminosidad puede verse en la figura 1. No hay ninguna particularidad destacable, salvo la presencia de algunas Am frías y evolucionadas.

La importancia de la resolución empleada es capital para establecer una clasificación de estrellas Am. Jaschek y Jaschek (1974), proponen incluso la creación de un grupo con aquellas estrellas cuyo carácter anómalo sólo aparezca en espectros de alta resolución. Se ha dado también el caso contrario, es decir, el de estrellas que han de ser clasificadas como Am a baja resolución y que manifiestan abundancias normales en un análisis detallado, como ha ocurrido por ejemplo,

con 28 And.

Los resultados de los análisis detallados de abundancia, disponibles hoy día para unas sesenta estrellas A, muestran una situación confusa a la hora de tipificar comportamientos. Porque si bien es cierto que las Am clásicas, tanto de la secuencia principal como evolucionadas, muestran siempre subabundancias de Ca y Sc y sobreabundancias de los elementos más pesados que el Fe, entre las Am marginales, los comportamientos son más diversos. Por ejemplo, en 8 Com todos los elementos son sobreabundantes respecto al hidrógeno, mientras que en 88 Ori, todos son ligeramente subabundantes, siendo ambas Am:.

Pulsación y metalicidad.

La gran mayoría de las estrellas A de carácter metálico, son pulsacionalmente estables. La variabilidad hay que estudiarla en función de los distintos grupos y del estado evolutivo.

En la secuencia principal y en sus proximidades, hasta una magnitud por encima, está firmemente establecida la constancia fotométrica de las estrellas A metálicas desde el estudio de amplias muestras de estrella A por Breger (1969), Kurtz et al. (1976), González et al. (1980).

Se han encontrado algunas excepciones que han podido ser explicadas dentro del marco de la exclusión como defectos de clasificación, fotometría imprecisa o binaridad. En el caso de 28 And, conocida variable, los análisis detallados de abundancia (Smith, 1971), demostraron que su espectro era

normal . 32 Vir es una estrella binaria una de cuyas componentes es una variable δ Scuti y la otra Am. En el caso de HR 6555 se vio que la fotometría no era precisa.

Entre las Am clásicas de la secuencia principal, se han encontrado algunas otras excepciones. 60 Tau, una A3m del cúmulo de las Hyades, ha sido encontrada variable por Horam (1979). Ni el carácter metálico (existen análisis detallados de Smith, 1971) ni la variabilidad ($\Delta m = 0.015$ mag), pueden ser puestas en duda. Sin embargo, la estrella es una binaria espectroscópica (Abt, 1961; Kitamura y Kando, 1978) y podría pensarse en un argumento similar al de 32 Vir. HR 7077 clasificada A1m, es una posible variable según Mendoza et al. (1978) aunque la fotometría necesita confirmación.

Entre las Am marginales de la secuencia principal, HR 4594 y HR 8210, A7m: y A8m: respectivamente, según Cowley et al. (1969), han sido detectadas como variables por Kurtz (1978). WW Aur, A3m: según los mismos autores, es una posible variable según Mendonza et al (1978).

Por último, las estrellas HD 91776, HD 211617 clasificadas δ Del por Houck y Cowley (1975) son presuntas variables y según los índices fotométricos obtenidos por Kurtz (1979) están en la secuencia principal.

Entre las estrellas más evolucionadas, clase de luminosidad IV y III, la situación es más complicada. La exclusión metalicidad-pulsación, parece depender de la temperatura.

En la parte azul de la banda de inestabilidad Garrido et al. (1980), han estudiado fotométricamente algunas Am bien conocidas, no encontrando ninguna variable, dentro de un

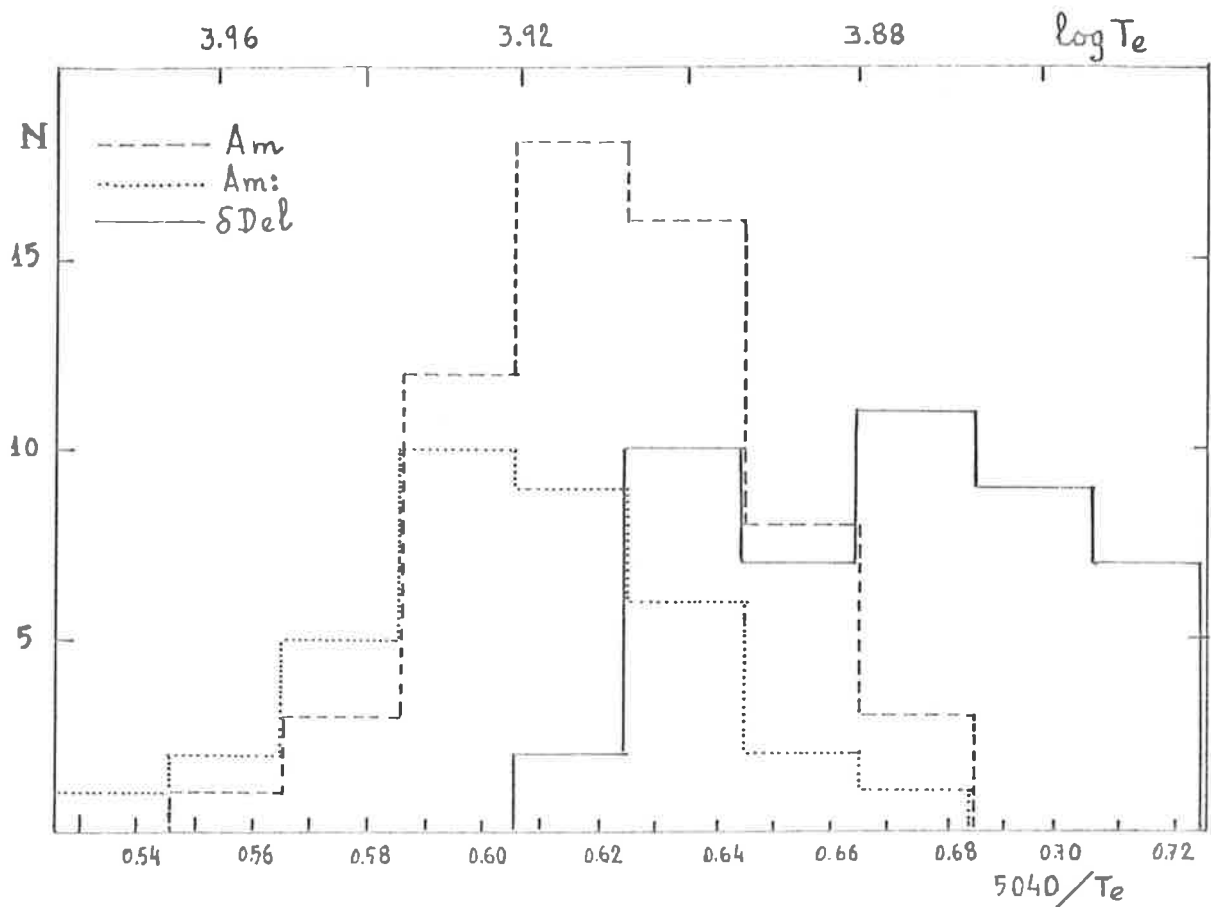


FIGURA 7.-Histograma de temperaturas de las estrellas con anomalías de abundancia. Las estrellas delta Delphini tienen temperaturas netamente inferiores.

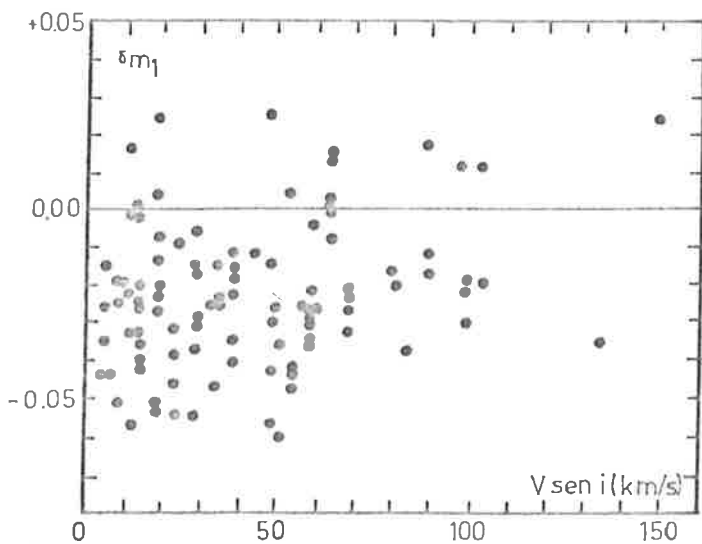


FIGURA 8.-

El índice fotométrico de metalicidad de las estrellas A frente a la velocidad de rotación aparente, según Burkhart (1979).

error de 0.003 mag. De las trece estrellas estudiadas, cinco tienen análisis detallados de abundancia y las restantes están clasificadas como Am o Am:.

En la parte roja, la mayor parte de las estrellas con anomalías de abundancia son del tipo δ Del y entre ellas se encuentran algunas variables. El mismo prototipo del grupo, δ Del, es variable. Un estudio fotométrico de estrellas δ Del del hemisferio sur hecho por Kurtz (1979), permite determinar su temperatura y gravedad y da también indicaciones sobre su variabilidad.

Así pues, parece que en las estrellas más frías de esta zona evolucionada de la banda de inestabilidad, metalicidad y pulsación no son excluyentes. El trabajo de Garrido et al (1980), permite establecer la frontera entre las zonas de coexistencia y exclusión de ambas propiedades. Para una magnitud absoluta $M_V = 1$, la transición se realiza a $\log T_e = 3.89$ sin que puede precisarse si esta transición es brusca o se trata mas bien de un cambio gradual. (Figuras 24, 27)

Podemos concluir diciendo, que las estrellas Am son todas constantes, tanto las de ^{la} secuencia principal como las evolucionadas y que la variabilidad se puede presentar entre las Am marginales y sobre todo entre las δ Delphini. Volveremos a tratar el problema de la variabilidad de la δ Del en el capítulo IV.

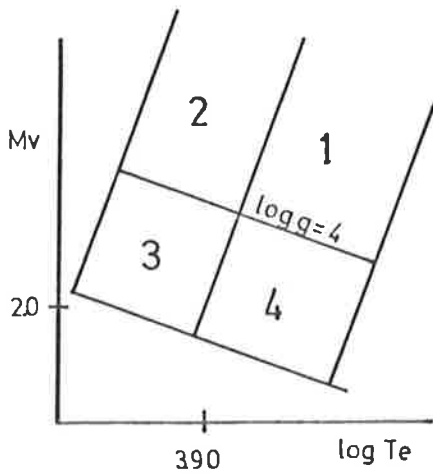
Rotación y metalicidad

La rotación es el parámetro más importante que permite

distinguir estadísticamente entre estrellas Am y estrellas A normales. Abt y Moyd (1973), encontraron que el promedio de la velocidad de rotación, proyectada sobre el plano normal a la dirección de observación, $\langle v \text{ seni} \rangle$, es para las estrellas Am de 33 km s^{-1} y para las normales de 141 km s^{-1} . Así pues, las estrellas Am giran lentamente mientras que las estrellas normales, entre las que se cuentan las δ Scuti, giran rápido.

Hemos hecho un estudio de la velocidad de rotación de todas las estrellas que según el catálogo fotométrico de Philip et al (1976), se encuentran dentro de la banda de inestabilidad y a la vez podían encontrarse en el catálogo de velocidades de rotación de Uesugi (1979). El carácter metálico de estas estrellas lo hemos tomado también del catálogo de Philip et al. Estos autores utilizan un criterio fotométrico basado en el valor de δm_1 para establecer el carácter metálico. El índice δm_1 guarda una buena correlación con el carácter metálico en las cercanías de la secuencia principal (Burkhart, 1979), pero es sensible a otros efectos -por ejemplo, puede hacer confundir una estrella gigante con una enana metálica- por lo que hay que ser cauto en la utilización de este criterio. Por otra parte no es selectivo, incluye como estrellas metálicas a estrellas de los tres tipos: Am, Am: y δ Del.

Para desvelar la posible influencia de la temperatura o la luminosidad sobre las velocidades de rotación, hemos dividido la muestra de estrellas en cuatro grupos, como se esquematiza en la figura adjunta, a partir de las líneas de $\log g = 4$ y $\log T_e = 3.90$ a $M_V = 2$. Los resultados obtenidos en cada una de las zonas son los que a continuación se indican:



		$\langle v \text{ sen } i \rangle$	N°	%Am
1	Am	$42 \pm 10 \text{ km s}^{-1}$	7	7.4
	A	112 ± 7	88	
2	Am	42 ± 5	11	9.7
	A	126 ± 7	102	
3	Am	45 ± 5	36	20.3
	A	112 ± 5	141	
4	Am	42 ± 5	26	16.9
	A	89 ± 4	128	

No se aprecia ningún efecto de la luminosidad ni de la temperatura sobre la velocidad media de rotación de las Am. Por el contrario, hay una disminución de la velocidad de rotación de las estrellas normales con la temperatura efectiva que refleja el hecho bien conocido de la dependencia de la velocidad de rotación con el tipo espectral. Es interesante señalar la mayor proporción de estrellas metálicas próximas a la secuencia principal.

Cabe preguntarse como es la relación entre la velocidad de rotación y el carácter metálico. ¿Existe una velocidad crítica por debajo de la cual aparece el carácter metálico o por el contrario, las anomalías metálicas disminuyen continuamente al aumentar la velocidad de rotación?

Burkhart (1979), al estudiar la relación entre δm_1 y $v \text{ sen } i$ para una muestra de un centenar de Am de la secuencia principal, llega a la conclusión (fig. 8), de que existe un valor crítico, que cifra en 55 km s^{-1} , por encima del cual no hay estrellas fuertemente metálicas ($\delta m_1 < 0.04$) Aunque para

δm_1 mayores son posibles todos los valores de $v \text{ sen } i$. La figura 8, sugiere asimismo que hay algún otro parámetro distinto de la velocidad de rotación implicado en la aparición de anomalías de abundancia. Habría que descartar el grado de evolución como han propuesto Baglin (1975) y Vauclair (1976), porque todas las estrellas de la muestra son de la secuencia principal. Insistimos nuevamente en la necesidad de precisar el significado de δm_1 ; como la propia Burkhart dice en su artículo, muchas estrellas clasificadas espectroscópicamente Am tienen δm_1 normal.

Puesto que de la observación del parámetro δm_1 , lo más que podemos obtener es una evidencia de la existencia de un límite de velocidad superior para la rotación de las estrellas metálicas, hemos decidido estudiar la correlación entre la metalicidad y la rotación calculando la velocidad media de rotación de los grupos definidos espectroscópicamente. Así pues hemos obtenido para las muestras de estrellas del Apéndice I lo siguiente:

	$\langle v \text{ sen } i \rangle$
Am	$35 \pm 3 \text{ km s}^{-1}$
Am:	$49 \pm 4 \text{ km s}^{-1}$
δ Del	$50 \pm 6 \text{ km s}^{-1}$

Aunque las diferencias no sean muy significativas, la tendencia parece ser que las estrellas más fuertemente metálicas giren más lentamente.

Por último, hay que recordar que los criterios utilizados tienen sólo un significado estadístico y que pueden encontrarse contraejemplos tanto de estrellas metálicas que giran rápido como de δ Scuti que giren lentamente. Por ejemplo:

- α Cnc, con $v \text{ sen } i = 60 \text{ km s}^{-1}$, es una Am bien conocida de la que se tiene incluso análisis detallados de abundancia (Burkhart 1978).
- Abt(1979), ha encontrado estrellas que giran rápidamente (150 km s^{-1}), en cúmulos jóvenes que parecen presentar características espectroscópicas de Am.
- La estrella variable 14 Aur, con $v \text{ sen } i = 24 \text{ km s}^{-1}$, es miembro de un sistema binario próximo para el que se estima una velocidad de sincronización de 20 km s^{-1} ; por lo que es muy posible que su bajo $v \text{ sen } i$ no se deba a un efecto de perspectiva.

1.4.- INTERPRETACION TEORICA DEL FENOMENO Am.

El mecanismo responsable de la aparición de las anomalías de abundancias en las atmósferas de las estrellas Am, es la difusión microscópica de los elementos minoritarios. En una estrella de población I compuesta por un 70% de hidrógeno y un 28% de helio, en masa, el número de partículas por millón de los elementos pesados es muy pequeño: 860 de oxígeno, 25 de magnesio, 17 de hierro, 1 de calcio (Voigt 1969). Sobre cada elemento actúan dos fuerzas antagónicas: la presión de radiación y la gravedad. Si sobre un determinado elemento prevalece la presión de radiación este elemento será empujado hacia la superficie y se manifestará como sobreabundante. La migración de este elemento hacia la atmósfera alcanzará su máximo cuando el gradiente de concentración generado sea suficiente para provocar la difusión en sentido contrario, estableciéndose un equilibrio.

Para que la separación de elementos por difusión microscópica sea eficaz es necesario que el medio en que se desarrolla sea estable, es decir, que en el medio no se produzcan movimientos macroscópicos de turbulencia o de convección.

Una estrella A típica, presenta dos zonas convectivas próximas a la superficie, la primera debida a la ionización del hidrógeno y del helio y la segunda debida a la ionización del He⁺. Se puede considerar que ambas zonas, separadas por una región radiativa muy estrecha (≈2 Hp) están ligadas por "overshooting". Es decir, entre ambas zonas convectivas, se produce un intercambio de materia debido a que el fluido que alcanza la parte superior de la segunda zona convectiva puede hacerlo con una energía cinética no nula y continúa ascendiendo por espacio de algunas escalas de alturas (Hp) hasta entrar en la primera zona convectiva. Por esta razón, ambas

zonas convectivas tenían una composición química no sólo homogénea sino también idéntica. La difusión sólo podrá actuar por debajo de la última zona convectiva y serán las anomalías de abundancia que se produzcan a este nivel las que se observen en la superficie. La densidad en esta zona como se verá en el capítulo tercero, es de más de 10^{-8} gr/cm³, lo que corresponde a 10^{15} partículas/cm³.

Teoría de la difusión

Vamos a exponer muy sucintamente, las bases del cálculo de la difusión en una atmósfera estelar. Un estudio pormenorizado de la física del problema se encuentra en Montmerle y Michaud (1976). Resultados de abundancias para distintos elementos han sido calculados por Michaud et al (1976). Vauclair et al (1978) incluyen en estos cálculos la acción de la difusión turbulenta.

La velocidad de difusión de un componente minoritario en el interior de una mezcla gaseosa según la teoría cinética (ver p. ej. Chapman y Cowling, 1960), depende del gradiente de concentración de este componente, de los gradientes de temperatura y presión del medio y de las fuerzas exteriores que actúan sobre este componente. Se puede escribir:

$$V_D = -D \left[-\frac{\partial \ln c}{\partial r} + k_p \frac{\partial \ln P}{\partial r} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial r} - \frac{mF}{kT} \right]$$

D es el coeficiente de difusión (para el helio vale $500 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$). En una atmósfera estelar los gradientes de presión y temperatura son de la forma (ver capítulo 2)

$$\frac{\partial \ln P}{\partial r} = - \frac{g \rho}{P}$$

siendo $g = \frac{G M_r}{r^2}$

$$\frac{\partial \ln T}{\partial r} = \frac{3}{16} \rho \frac{\kappa_a T_e^4}{T^4}$$

siendo

Vamos a reunir estos dos términos, gravedad y difusión térmica, en un único término de gravedad efectiva g_e . En la figura 9, se muestra la variación de g_e en función de la profundidad, que se expresa como la cantidad de masa que queda por encima de un punto dado (Michaud et al, 1976). La difusión térmica se hace muy importante en el interior.

La única fuerza exterior que vamos a considerar es la fuerza radiativa F_{rad} . Definimos una aceleración radiativa $g_{rad} = F_{rad}/k_p$ que permite escribir:

$$V_0 = -D \left[- \frac{\partial \ln c}{\partial r} + \frac{\rho}{P} K_p (g_e - g_{RAD}) \right]$$

El problema más importante planteado por los cálculos de difusión, es la evaluación de la fuerza radiativa porque hace intervenir constantes atómicas no siempre conocidas. La fuerza radiativa que actúa por gramo de materia sobre el elemento A debido al flujo de radiación ϕ_ν en el intervalo de frecuencia $d\nu$ es

$$F_\nu(A) d\nu = \frac{\kappa_\nu(A)}{X(A)} \frac{\phi_\nu d\nu}{c}$$

donde $\kappa_\nu(a)$ es la parte del coeficiente de opacidad monocromático (κ_ν) devida al elemento A y $X(A)$ es la proporción, en masa, de este elemento dentro de la mezcla. Toda la física

atómica del problema está contenida en $\kappa_\nu(A)$. La fuerza radiativa total sobre el elemento A es

$$F_{\text{RAD}} = \int_0^\infty F_\nu(A) d\nu$$

La mayor fuerza ejercida por el flujo de radiación sobre un elemento dado, tiene lugar en el centro de las líneas intensas de absorción de este elemento, donde $\kappa_\nu(A) \simeq \kappa_\nu$. Es decir, en aquellas regiones del espectro donde la opacidad se debe principalmente al elemento en cuestión. Si el elemento es poco abundante $\kappa_\nu(A)$, es proporcional a $X(A)$ (Vauclair et al 1974) y la fuerza radiativa no depende de la abundancia. Ahora bien, como la energía que puede transmitir el flujo radiativo en el intervalo de frecuencia $\nu + d\nu$ es limitada, si la abundancia relativa de este elemento sobrepasa cierto valor crítico, la fuerza radiativa transmitida a cada átomo comenzará a disminuir. Se dice que el flujo radiativo está saturado a esta frecuencia ν .

Las figuras 10 y 11, muestran la aceleración radiativa en función de la profundidad según los cálculos de Michaud et al (1976). La figura 10, corresponde a una estrella de $2.6 M_\odot$ y 10720 K de temperatura efectiva y a elementos poco abundantes que no saturan el flujo de radiación. La fuerza radiativa es superior a la gravedad y estos elementos son empujados hacia la superficie. En las curvas de Eu IV y del Gd IV se observan sendos mínimos de la fuerza radiativa. Se debe a que estos iones adoptan una configuración de gas noble que eleva su potencial de ionización y hacen disminuir la probabilidad de que absorban fotones del flujo de radiación. La presencia de este tipo de mínimos próximos a la superficie, hace que la abundancia observada de estos elementos dependa

FIGURA 9.- Aceleración de la gravedad (cm s^{-2}) corregida de la difusión térmica, en función de la profundidad. M es la masa que queda por encima de un punto determinado.

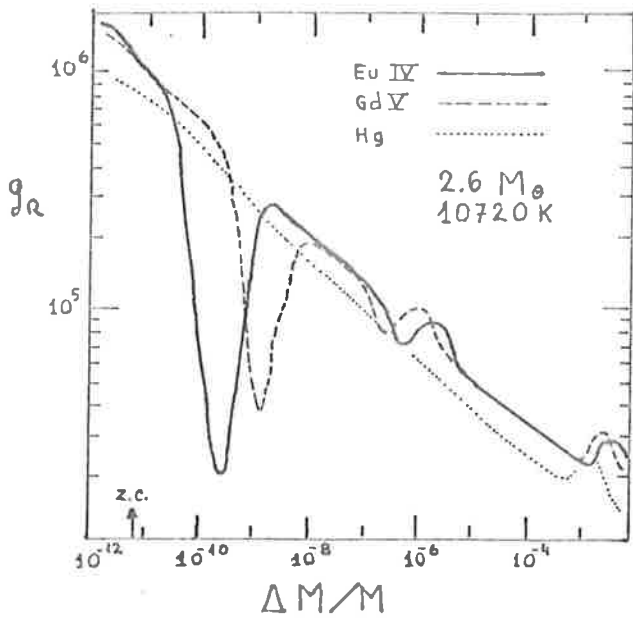
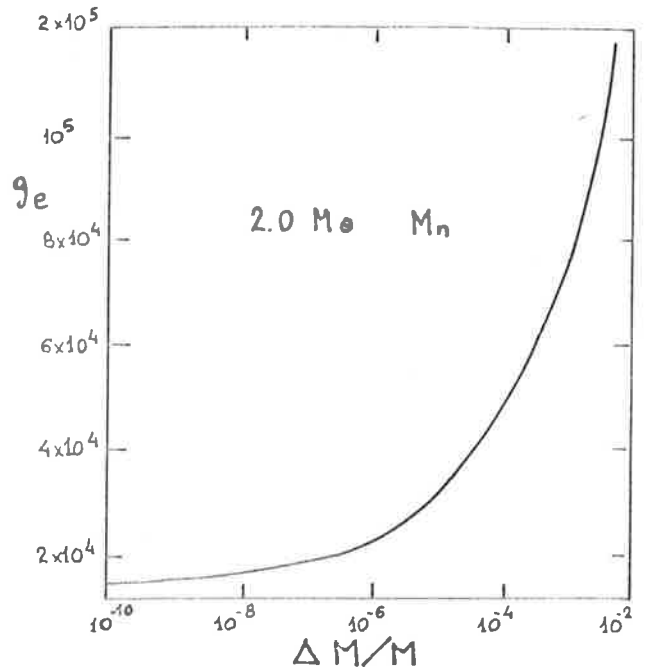
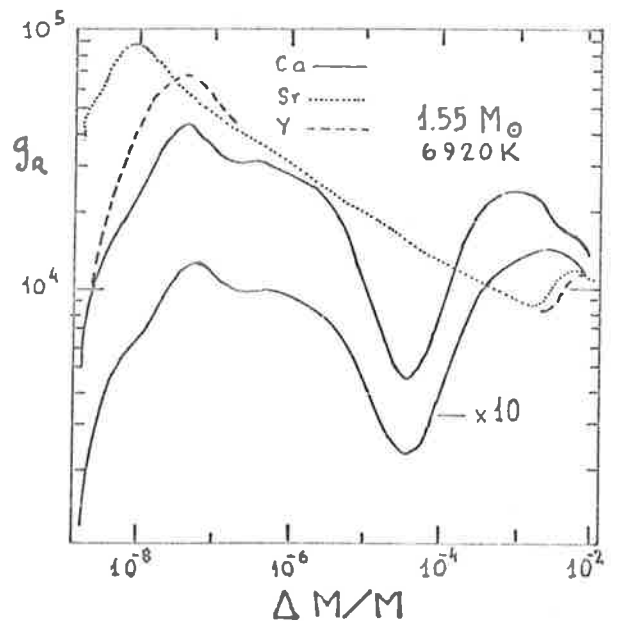


FIGURA 11.- Aceleración radiativa sobre el calcio comparada a otros elementos. Se muestra el efecto de la saturación de la fuerza radiativa, si la abundancia de calcio adquiere un valor diez veces superior al normal (curva $\times 10$).

FIGURA 10.- Aceleración radiativa sobre algunos elementos en función de la profundidad. M/M aumenta hacia el interior.



de la temperatura efectiva de la estrella. En efecto, si el mínimo de g_{rad} es inferior a g_e , el elemento en cuestión tenderá a concentrarse en la región en que se equilibren la aceleración radiativa y efectiva. Si esta región está por debajo de la zona convectiva, el elemento será subabundante en la atmósfera, pero si la zona convectiva fuese más profunda, el elemento podría ser sobreabundante.

Un caso típico de la saturación se muestra en la figura 11, que corresponde a la difusión del Ca, Sr, Y y Ba, en una estrella de $1.55 M_{\odot}$ y 6920 K de temperatura efectiva. El flujo radiativo se satura para el calcio cuya aceleración radiativa se ha calculado también para una abundancia diez veces superior a la normal (marcada X10). La saturación puede explicar las diferencias en el comportamiento del Sr y del Ca que tienen potenciales de ionización muy parecidos pero distintas -- abundancias naturales.

En la figura 12, se ha representando el cociente g_{rad}/g_e

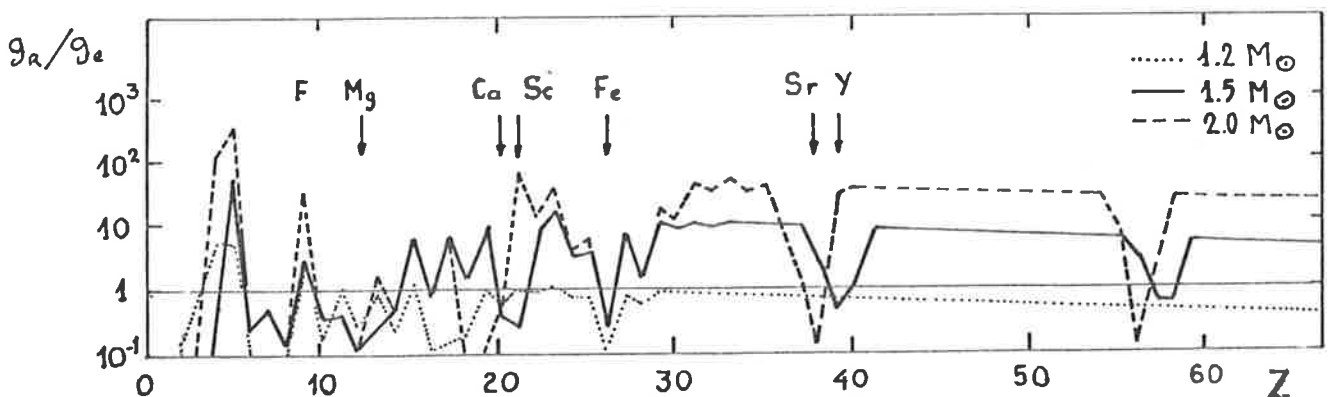


FIGURA 12.- Razón de la aceleración radiativa a la gravitatoria en función del número atómico, según Vauclair et al. (1976).

calculado en el fondo de la zona convectiva del hidrógeno o en la atmósfera en función de la carga nuclear para estrellas con masas distintas. En las estrellas de masa próxima a la solar, la difusión tiende a crear subabundancias de casi todos los elementos pero la escala de tiempo de este proceso es tan alta ($\sim 10^9$ años), que no pueden ser observadas. Las estrellas más masivas tienden a mostrar sobreabundancias de los elementos más pesados que el hierro y subabundancias de Ca y Sc. No obstante, las abundancias calculadas son superiores, incluso en algunos órdenes de magnitud a las observadas, y ello puede ser debido a la no inclusión en los cálculos de la difusión turbulenta (Vauclair et al, 1978).

Difusión del helio

Por ser el helio un elemento fundamental para el mantenimiento de la pulsación estelar, como se verá en el capítulo tercero, su comportamiento frente a la difusión será capital para entender las propiedades pulsacionales de las estrellas con anomalías de abundancia.

La fuerza radiativa sobre el helio es inferior a la gravitación y el helio se difundirá hacia el interior (fig. 12). En una escala de tiempo de 10^6 años, inferior al tiempo de permanencia de una estrella A sobre la secuencia principal ($\sim 10^7$ años), la concentración de helio al nivel de la segunda zona de ionización disminuye tanto, que es insuficiente para mantener la inestabilidad pulsacional. Mediante este mecanismo, la teoría de la difusión explica la constancia de las estrellas Am, incluso sobre la secuencia principal.

La disminución de la concentración del helio también hace

desaparecer la segunda zona convectiva. De ahí se deducen importantes consecuencias para la difusión de los demás elementos, puesto que ésta se realiza a partir de la primera zona convectiva desde donde las velocidades de difusión son mayores.

Difusión y rotación

El hecho de que las estrellas A normales tengan velocidades de rotación mayores que las Am, hace pensar que algún fenómeno relacionado con la rotación es responsable de la mezcla de la envoltura que impide la acción de la difusión.

En todas las estrellas en rotación, se desarrolla la bien conocida circulación meridional provocada por un desequilibrio térmico entre el polo y el ecuador, consecuencia del achatamiento polar de la estrella. Esta circulación, se desarrolla según planos meridianos y consta de una corriente descendente en el ecuador y ascendente en el polo. La circulación meridional constituye por sí misma, un medio para mezclar el interior con las capas externas pero, es muy poco eficaz (Sweet, 1950). Sin embargo, la componente tangencial de la circulación meridional, puede ser un agente eficaz de la mezcla cuando el flujo se hace turbulento. La aparición de la turbulencia depende de que el número de Reynolds alcance un valor crítico del orden de 10^4 ; Baglin (1972), ha estimado el valor del número de Reynolds, para el flujo por debajo de las zonas convectivas encontrando que

$$Re \propto T^{-6.5} \rho^2 v^2$$

donde T es la temperatura, ρ la densidad y V la velocidad de rotación en el ecuador. Encontrando que se alcanza el número de Reynolds crítico para una velocidad ecuatorial de unos 50 km s^{-1} .

Se puede considerar que esta velocidad establece el límite entre las estrellas Am y las normales. Por debajo de esta velocidad, la difusión actúa libremente y por encima de ella, la turbulencia mezcla la envoltura e impide la aparición de anomalías de abundancia.

De todas formas, este límite sólo ha de considerarse como una simple indicación del orden de magnitud, porque depende de muchos factores que se han estimado muy por encima, como la viscosidad, o que se conocen mal, como el campo de velocidades exacto o el propio número de Reynolds en el interior estelar; además, este límite depende de la masa y del estado evolutivo de la estrella.

El tratamiento que actualmente se hace de la difusión en estrellas, dista mucho de ser completo, siendo así, que las anomalías de abundancia calculadas son mucho mayores que las observadas. Se ha intentado subsanar esta anomalía introduciendo procesos de difusión turbulenta (Vauclair et al., 1978) sin que se hayan obtenido resultados completamente satisfactorios.

CAPÍTULO 2

2.-ESCTRUCTURA ESTELAR Y PULSACION.

Para el cálculo de la estabilidad pulsacional de una estrella es suficiente disponer de un modelo de envoltrua, es decir, de un modelo de estrella que no contenga las regiones centrales donde se genera energía nuclear, con la condición, naturalmente, de conocer las características globales (masa, luminosidad, etc.) de la estrella pulsante. En efecto, las funciones propias que describen las variaciones relativas de radio, presión, etc., en función de la profundidad, tienen una amplitud que tiende asintóticamente a cero cuando se - aproxima al centro estelar. Esta amplitud es prácticamente nula cuando se ha intefrado un 50% de la masa de la estrella. El comportamiento dinámico de las regiones centrales es despreciable frente al de las capas externas. Incluso una buena aproximación es suponer que el interior es rígido.

En este capítulo avamos a exponer, en primer lugar, las ecuaciones que describen el modelo de envoltura estático, de dicando alguna atención al transporte de enrgía por convección. Aunque en las estrellas poco evolucionadas, y relativamente calientes, que vamos a estudiar, las zonas convectivas son de pequeño espesor, hay dos razones importantes para estudiarlas. La primera, porque dichas zonas coinciden con las zonas de ionización del hidrógeno y del helio, que son las zonas motrices de la pulsación. La segunda, porque un modelo puramente radiativo seguiría pulsando aún fuera del borde rojo dela banda de inestabilidad. Es precisamente la zona convectiva que empieza a desarrollarse en las estrellas frías la que destruye el mecanismo de pulsación. En efecto, al ser este un mecanismo basado en la modulación del flujo radiativo por la opacidad del material estelar, el efecto motriz desaparece cuando la mayor parte del flujo es transportado

por convección. De todos modos, el tratamiento que hacemos de la convección no es capaz de explicar el borde rojo de la banda de inestabilidad.

El modelo en equilibrio, es la base para el estudio de la inestabilidad pulsacional que hacemos en la segunda parte de este capítulo.

2.1.- DEL MODELO EN EQUILIBRIO

Ecuaciones del interior estelar.

El interior de una estrella en equilibrio se describe en función de cuatro ecuaciones básicas:

- la condición de equilibrio hidrostático.
- la condición de continuidad de la masa.
- la condición de equilibrio térmico.
- la condición de transporte de energía.

El estudio pormenorizado de estas ecuaciones puede encontrarse en los manuales de estructura interna (Cox y Giuli 1968, Clayton 1968), pero vamos a proceder a una deducción sencilla de las mismas con el fin de justificar su campo de aplicación.

a) Equilibrio hidrostático.

La primera condición que caba imponer al interior estelar es el equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre cualquier elemento de volumen del mismo. En nuestro caso, las dos únicas fuerzas a considerar van a ser la gravitatoria, diri-

gida hacia el interior, y la fuerza derivada de la presión, tanto gaseosa como de radiación, dirigida hacia el exterior. Omitimos, por lo tanto, el efecto de otras fuerzas que pudieran ser importantes como la fuerza centrífuga debida a la rotación de la estrella y las fuerzas electromagnéticas.

Consideremos un pequeño volumen cilíndrico de sección ds y altura dr , situado a una distancia r del centro de la estrella, y cuyo eje coincide con el radio que pasa por ese punto. La fuerza debida a la presión que actúa sobre este cilindro es:

$$- \frac{dP}{dr} ds dr$$

donde P es la presión, siendo una función creciente cuando r disminuye. La fuerza gravitatoria que actúa sobre este elemento de volumen, de densidad ρ , vale

$$\rho ds dr \frac{G M_r}{r^2}$$

donde M_r es la masa encerrada en una esfera de radio r , y que podemos expresar en función de la distribución de densidad $\rho(r)$ en el interior, por la integral

$$M_r = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad (1)$$

Imponiendo la igualdad de estas fuerzas obtenemos la condición de equilibrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = - \rho \frac{G M_r}{r^2} \quad (2)$$

La ecuación (1), suele escribirse de forma diferencial

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (3)$$

lo que expresa que la masa de una capa esférica de espesor dr y radio r es $4\pi r^2 \rho dr$. Es la condición de continuidad de la masa.

Estas dos ecuaciones son aún insuficientes para determinar la estructura estelar. Para estudiar, por ejemplo, la distribución de densidad, tendríamos que introducir una relación entre P y ρ a través de una ecuación de estado, que hará aparecer la temperatura T .

b) Equilibrio térmico.

La condición de equilibrio térmico se entiende como el mantenimiento de un estado estacionario en el que la producción y la pérdida de energía se compensan exactamente en cada elemento de volumen de la estrella.

Sea \vec{F} el flujo total de energía, es decir, la energía que, por unidad de tiempo, atraviesa la unidad de superficie en cierta dirección y en un punto arbitrario del interior estelar. En \vec{F} se incluye la contribución de todos los mecanismos de transporte: radiación, convección y conducción. Sea E la cantidad total de energía que producen una unidad de masa y tiempo todas las fuentes disponibles. Consideremos un pequeño volumen V , arbitrariamente elegido en el interior de la estrella, sea S la superficie exterior que lo encierra y ρ la densidad de la materia que contiene. La condición de equilibrio térmico exige que

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \rho E dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer miembro y teniendo en cuenta que el volumen V es arbitrario, se tiene la siguiente expresión del equilibrio térmico

$$\nabla \vec{F} = \rho \mathcal{E} \quad (4)$$

El término \mathcal{E} de producción de energía se reduce en la práctica a la energía nuclear y sólo es importante en el centro de la estrella. Otras fuentes como el calentamiento viscoso, debido a movimientos de fluido, son de escasa relevancia. La energía gravitatoria, que es una fuente importante de energía en las etapas iniciales de la formación estelar, es de poca importancia durante el resto de la evolución de la estrella.

Al explicar la condición de equilibrio térmico (4) al interior estelar, se pueden hacer algunas simplificaciones, si se tiene en cuenta la simetría esférica del problema. En este caso el flujo \vec{F} tiene dirección radial, y sólo depende de la distancia al centro. Teniendo esto en cuenta y escribiendo el operador nabla en coordenadas polares:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F) = \rho \mathcal{E}$$

En el interior estelar no se utiliza el flujo por unidad de superficie F sino, más bien, la luminosidad interior L_r , definida como la cantidad total de energía que atraviesa una superficie esférica de r ; es decir,

$$L_r = 4\pi r^2 F(r) \quad (5)$$

Así pues, la condición de equilibrio térmico se escribe

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (6)$$

Esta ecuación dice simplemente que la energía producida en una capa esférica de espesor dr , por unidad de tiempo, es el producto de ϵ por la masa contenida en dicha capa.

De todas las formas posibles de transporte de energía, que contribuyen a la luminosidad L_r , sólo nos interesan dos: la radiación y la convección. El flujo por conducción solamente tiene importancia en las estrellas constituídas por materia degenerada, como las enanas blancas.

En las estrellas en rotación rápida el achatamiento polar implica la pérdida de la simetría esférica y el flujo radiativo es incapaz de mantener por si mismo el equilibrio térmico. El gradiente de temperatura que se genera entre el polo y ecuador hace aparecer la llamada circulación meridional, consistente en un flujo de materia que en superficie se dirige del ecuador hacia el polo y en el interior crea una corriente descendente en el polo y ascendente en el ecuador.

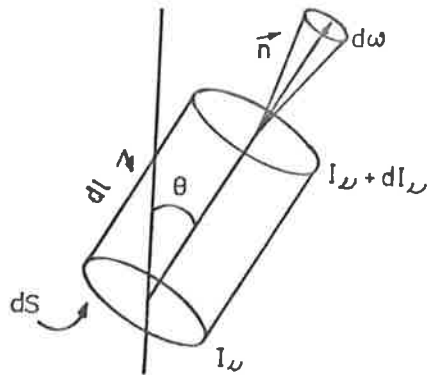
c) Transporte radiativo.

En casi todo el interior estelar la forma usual de transporte energético es por radiación. Sólo las estrellas muy frías son totalmente convectivas. En los modelos que vamos a construir, la convección se limita a las regiones superficiales, y el resto de la estrella, salvo el núcleo, es radiativa.

Vamos a deducir la relación existente entre el flujo de radiación y el gradiente de temperatura radiativo como cuarta ecuación del interior estelar. Para ello tendremos que defi-

nir, con cierto detalle, el campo de radiación.

Se llama intensidad específica $I_\nu (r, \vec{n})$ del campo de radiación a la cantidad de energía^{que} en el punto r , y en la dirección \vec{n} atraviesa la unidad de superficie normal a \vec{n} por unidad de ángulo sólido, de tiempo y de intervalo de frecuencia. En coordenadas polares la dirección \vec{n} se expresa en función de los ángulos de azimut (φ) y de altura (θ). Si el interior estelar fuese isoterma el campo de radiación sería isótropo y la intensidad específica independiente de θ y φ . De hecho, en el interior estelar, la temperatura de crece hacia la superficie, lo que implica una mayor intensidad en las direcciones que apuntan hacia el exterior, es decir, para θ inferior a $\pi/2$. Puede suponerse, sin embargo, que el campo de radiación tiene simetría azimutal y escribir $I(r, \theta)$ simplemente.



Consideremos ahora la región cilíndrica que se esquematiza en la figura. La materia que contiene se caracteriza por una densidad ρ , un coeficiente de absorción por unidad de masa y de intervalo de frecuencia κ_ν ($\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$) y un coeficiente de producción de energía en la frecuencia comprendida entre ν y $\nu + d\nu$, por unidad de masa y ángulo sólido que representaremos por j_ν (erg g^{-1})

Hagamos ahora el balance energético de un haz de radia-

ción que se propague en la dirección \vec{n} a lo largo del cilindro. La pérdida de energía que sufre al recorrer la distancia dl es, según la definición de intensidad

$$dI_\nu \, d\omega \, ds \, d\nu \, dt$$

la fracción de energía que pierde el rayo al recorrer la distancia dl es $\kappa_\nu \rho \, dl$. Luego, la pérdida total por absorción es

$$I_\nu \, d\omega \, ds \, d\nu \, \kappa_\nu \rho \, dl \, dt$$

Por otra parte, la energía que gana el haz por emisión en esta dirección es

$$j_\nu \rho \, ds \, dl \, d\omega \, dt$$

En equilibrio térmico, podemos escribir la siguiente ecuación de balance energético

$$\frac{1}{\rho} \mu \frac{dI_\nu}{dr} = \kappa_\nu S_\nu - \kappa_\nu I_\nu \quad (7)$$

Donde S_ν es la función fuente, definida como el cociente de los coeficientes de emisión y absorción: $S_\nu = j_\nu / \kappa_\nu$. En equilibrio termodinámico, la función fuente es la función de distribución de Planck para el cuerpo negro $S_\nu = B_\nu(T)$.

Por otra parte hemos hecho la sustitución geométrica $dl = \mu dr$ siendo $\mu = \cos \theta$. Despreciamos el efecto de la curvatura finita de la estrella sobre la propagación del haz, que lo haría emerger del cilindro bajo un ángulo $\theta + d\theta$ porque en las condiciones físicas del interior estelar, con

valores de la opacidad del orden de la unidad, el recorrido libre medio de los fotones ($\sim \kappa^{-1}$) es despreciable frente al radio de la estrella. La introducción de la curvatura no modificaría sustancialmente los resultados que vamos a obtener.

La intensidad específica no es sino una función de distribución de fotones. Para la cual vamos a definir los momentos de orden cero, uno y dos que multiplicados por factores convenientes tienen la interpretación física que se indica:

densidad de energía
$$U_\nu(r) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu) d\mu \quad (8)$$

flujo de energía
$$F_\nu(r) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu) \mu d\mu \quad (9)$$

presión de radiación
$$P_R(\nu) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu) \mu^2 d\mu \quad (10)$$

A la vista de estas definiciones, si el campo de radiación es isótopo, es decir, $I = I(r)$, se verifica

$$P_R(\nu) = \frac{1}{3} U_\nu(r)$$

Pero esta relación sigue siendo válida, aunque el campo sea ligeramente asimétrico, que es la situación que mejor representa el interior estelar, puesto que sabemos que hay un flujo neto de energía hacia la superficie. Si desarrollamos $I(r, \mu)$ en serie de potencias de μ y nos quedamos sólo con los dos primeros términos, es decir, haciendo $I(r, \mu) = I_0(r) + I_1(r)\mu$ tenemos ya una buena representación de la asimetría aludida, y podemos comprobar que la relación sigue siendo válida.

Si multiplicamos por μ la ecuación (7) e integramos sobre todas las direcciones, obtenemos la relación:

$$\frac{dP_R(\nu)}{dr} = - \frac{\kappa_\nu \ell}{c} F_\nu$$

El segundo miembro de esta ecuación, representa la cantidad de movimiento que el campo de radiación transfiere a la unidad de volumen de materia en la unidad de tiempo y, según esta ecuación, es igual a la fuerza derivada del gradiente de presión de radiación.

Escribamos ahora esta última ecuación para las magnitudes integradas $P_R = \int_0^\infty P_R(\nu) d\nu$ y $F = \int_0^\infty F_\nu d\nu$. Para ello definamos una opacidad media promediada sobre el flujo

$$\kappa = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu F_\nu d\nu}{\int_0^\infty F_\nu d\nu} \quad (11)$$

que nos permite escribir:

$$\frac{dP_R}{dr} = - \frac{\kappa \ell}{c} F \quad (12)$$

En el interior estelar se puede hacer la hipótesis de equilibrio termodinámico local, es decir, que puede suponerse que en el entorno cercano de un punto, a distancias del orden del recorrido libre medio de los fotones, el medio está en equilibrio termodinámico aunque la estrella en su conjunto no lo esté. Esta suposición es muy exacta si se tiene en cuenta que los gradientes de temperatura presentes son del orden de

$10^{-2} \text{ K cm}^{-1}$ y el recorrido libre de los fotones es del orden de centímetros.

Con esta hipótesis, la densidad de energía integrada para todas las frecuencias es $U = aT^4$, ($a = 4\pi^5/c$ es la constante de radiación) y según vimos más arriba $P_R = aT^4/3$. Si por otra parte sustituimos el flujo por unidad de superficie por el flujo a través de toda una capa esférica de radio r , o sea, por la luminosidad L_r , escribimos:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3} aT^4 \right) = - \frac{\kappa \rho}{c} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (13)$$

o bien

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3 \kappa \rho}{4acT^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

que es la cuarta ecuación de la estructura estelar en equilibrio radiativo, conocida como ecuación de difusión radiativa, o de conductividad radiativa, en la que el flujo $F \propto \text{grad } T^4$.

Hagamos por último una observación referente a la opacidad media. Tal y como la hemos definido κ no es una función de los valores locales de T y ρ como sería deseable, sino que depende del comportamiento global de la función fuente S_ν en toda la estrella, puesto que para conocer F_ν hay que integrar la ecuación de transferencia (7). Si suponemos que el interior estelar está en equilibrio termodinámico local, la función fuente se puede aproximar por la función de distribución de Planck $B_\nu(T)$ que es una función de las variables locales. El flujo viene entonces dado por

$$F_u = \frac{4\pi}{3\kappa_u \rho} \frac{dB_u(\tau)}{dT} \frac{dT}{dr}$$

y podemos definir la opacidad media de Rosseland

$$\frac{1}{\kappa_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_u} \frac{dB_u(\tau)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_u(\tau)}{dT} d\nu} \quad (14)$$

Los valores de la opacidad que se usan habitualmente para el interior estelar son medias Rosseland.

El gradiente de temperatura convectivo

Bajo ciertas condiciones, el flujo de energía no es transportado exclusivamente por radiación, sino que total o parcialmente es transportado por los movimientos convectivos del material estelar. Estudiemos, en primer lugar, bajo qué condiciones aparece la convección, cada vez que se desplazara radialmente un elemento de masa de su posición r debería aparecer una fuerza que lo devolviera a su posición inicial de equilibrio. Supongamos que el elemento de masa se eleva adiabáticamente hasta una posición $r + dr$ manteniendo, en todo momento, su presión en equilibrio con la presión exterior. La densidad final, ρ' , del elemento no tiene por qué ser igual a la del medio circundante, $\rho(r + dr)$. Si la región es estable frente a la convección, la densidad ρ' ha de ser mayor que la del medio, de modo que aparezca una fuerza hidrostática que haga volver el elemento a su posición r de partida.

Según el criterio de Schwarzschild, la condición de equilibrio puede expresarse en función de los gradientes de temperatura adiabática (del elemento) y real (del medio) del modo siguiente:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{real}} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{adiabático}}$$

Que viene a decir que la convección aparecerá en las regiones donde la temperatura varíe rápidamente, Si utilizamos $\ln P$ como variable independiente, esta condición puede escribirse:

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_r < \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}$$

Donde el subíndice indica que la derivada se toma en el punto r . Para llegar a esta expresión hemos tenido en cuenta el equilibrio de presión para eliminar la derivada $d \ln P / dr$ en ambos miembros. Γ_2 es el segundo coeficiente adiabático.

En una estrella, donde el transporte de energía se hace principalmente por difusión radiativa, veamos que regiones son propicias para el desarrollo de la convección. Volvamos a escribir la condición anterior para el caso radiativo, utilizando la ecuación de difusión (13) y con ayuda de la ecuación de equilibrio hidrostático (2), en la forma

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{rad}} = \frac{3}{16 \pi a c G} \frac{\kappa P}{T^4} \frac{L_r}{M_r} < \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}$$

En una estrella en equilibrio el cociente P/T^4 varía lentamente con la distancia al centro r . En el interior profundo la aparición de la convección depende de cómo varíen κ y

L_r/M_r . La opacidad disminuye a grandes profundidades y se opone así a la aparición de la convección. No obstante, el cociente L_r/M_r , tiende a favorecer la convección, sobre todo si las fuentes de energía están muy concentradas, pues en tal caso L_r permanece constante hasta que r es muy pequeño. Como M_r decrece proporcionalmente a r^3 , el cociente L_r/M_r , puede alcanzar valores muy grandes. El núcleo de una estrella será, en general, convectivo.

Más importante es para nosotros lo que ocurra en las capas exteriores, pues que vamos a calcular modelos de envoltura que ignoran lo que ocurre en las zonas de producción de energía. En las zonas externas, tanto la luminosidad (no hay producción de energía) como la masa (la densidad es baja), son prácticamente constantes, por lo que no tienen ninguna influencia sobre la convección. La opacidad que en estas zonas crece hacia el interior, tiende a favorecer la aparición de la convección. Pero la contribución más importante a la inestabilidad viene de la brusca disminución que sufre el coeficiente adiabático Γ_2 en las zonas de ionización parcial del hidrógeno y del helio, donde alcanzan un valor próximo a la unidad y, en consecuencia, el gradiente adiabático se hace muy pequeño.

No existe ninguna teoría satisfactoria que permita calcular el gradiente de temperatura necesario para transportar por convección el flujo de energía dado. Sin embargo, para los cálculos de estructura interna se suele utilizar la teoría de la longitud de mezcla, conceptualmente muy sencilla, que describe con suficiente aproximación el fenómeno. La teoría permite ajustar algunos parámetros, fundamentalmente la longitud de mezcla, para adecuarse a las condiciones particulares del problema, contrastando los resultados con la observación o con teorías más elaboradas.

La teoría de la longitud de mezcla supone que cada elemento de masa que sube o baja por convección es capaz de recorrer una distancia l , o longitud de mezcla, antes de mezclarse con el entorno. El transporte de energía está relacionado con este proceso de mezcla, pues el elemento que sube está a mayor temperatura que el entorno, y al difundirse le cede energía. Por el contrario, la materia que baja toma energía del entorno, enfriándolo. Como puede verse, la convección tiende a nivelar el gradiente de temperatura.

El calor que es transmitido al medio, por unidad de materia que sube, se calcula a partir del calor específico a presión constante, C_p , puesto que el proceso es isóbaro, y de la diferencia de temperatura ΔT entre el entorno y el elemento de materia ascendente que estará relacionada con la diferencia de los gradientes real y adiabático.

$$\Delta Q = C_p \Delta T = C_p l \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{real}} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad.}} \right]$$

El flujo de energía transportado por convección será el producto de ΔQ por la densidad del material y su velocidad media \bar{v} :

$$F = \rho \bar{v} \Delta Q$$

Si el gradiente de temperatura lo expresamos respecto a $\ln P$, es decir, hacemos

$$\frac{dT}{dr} = T \frac{d \ln P}{dr} \frac{d \ln T}{d \ln P} = - \frac{T}{H_p} \frac{d \ln T}{d \ln P} = - \frac{T}{H_p} \nabla$$

donde H_p es la escala de altura de presiones y ∇ es un símbolo que representa la derivada logarítmica de T respecto a P , podemos escribir para el flujo

$$F = \rho \bar{v} c_p T \frac{e}{H_p} (\nabla_{ad} - \nabla)$$

El problema que se plantea es el cálculo de la velocidad \bar{v} y el gradiente real ∇ . Para ello empleamos las ecuaciones de Latour (1970)

$$\bar{v} = (\nabla - \nabla_{ad}) \frac{\nu}{8\sigma} \frac{c_p e g e^2 Q}{\sigma T_e^4 g e Q}$$

$$\nabla = \nabla_{rad} \left[1 - \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{\bar{v}^3 c_p e T}{\sigma T_e^4 g e Q} \right]$$

donde α y ν son dos nuevos parámetros y $Q = -d \ln \rho / d \ln T$, ∇_{rad} es el gradiente radiativo. θ es la función de interpolación de Henyey (1965) que permite una transición suave entre las zonas superficiales donde $\theta = e \rho \kappa$ y las profundas donde vale $\theta = (e \rho \kappa)^{-1}$

Las capas externas.

La atmósfera estelar es la capa más externa de la estrella desde la cual la radiación que se ha generados en el núcleo escapa al exterior. Su masa y su espesor son despreciables, frente a la masa y radio totales de la estrella, pero su importancia es primordial, porque de su estructura depende el espectro emergente de la estrella. Sin embargo, para

los cálculos de estructura interna no es necesario entrar en detalles y la descripción de la atmósfera se limita a la ecuación de equilibrio y a una ecuación que nos dé la temperatura en función de la profundidad.

La variable que se utiliza para medir la profundidad en la atmósfera, suele ser la profundidad óptica τ que en forma diferencial, se define como

$$d\tau = -\kappa \rho dr$$

siendo κ y ρ la opacidad y la densidad, respectivamente. En función de esta variable la ecuación de equilibrio hidrostático (2), se escribe:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa} \quad (15)$$

$g = \frac{GM}{r^2}$ es la aceleración de la gravedad, que podemos considerar constante, porque el espesor de la atmósfera es despreciable frente al radio de la estrella ($r \simeq R$)

Vamos a ilustrar el significado físico de la ley $T(\tau)$ en un modelo de atmósfera muy simplificado en el que la función fuente sea isótropa, de modo que la presión de radiación sea la dada por la ecuación (11)

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{c} F$$

En el caso que nos ocupa $F = L_r / 4\pi r^2$ es constante porque $L_r = L$

y $r=R$. En rigor la opacidad κ es la media sobre el flujo definido por la ecuación(11), sin embargo, en la práctica se utiliza la media de Rosseland (14), incluso en estas regiones de profundidad óptica pequeña. Integrando la ecuación anterior se obtiene

$$P_R = \frac{F}{c} z + P_R(0) \quad (16)$$

Si suponemos que el medio está en equilibrio termodinámico local, la densidad de energía es $U = aT^4$ y la presión de radiación vale

$$P_R = \frac{1}{3} aT^4$$

La presión de radiación en la superficie $P_R(0)$ se calcula fácilmente suponiendo que en este punto la intensidad específica es constante $I=I(0)$ en todas las direcciones que llevan hacia el exterior ($\mu > 0$) y nula hacia el interior ($\mu < 0$). Según las definiciones (9) y (10), podemos escribir:

$$P_R(0) = \frac{2}{3} \frac{F}{c}$$

La teoría de atmósferas estelares predice que, en primera aproximación, el fondo continuo de la radiación de una estrella tiene un espectro de cuerpo negro. Esto nos permite definir una temperatura efectiva, T_e , tal que según la ecuación de Boltzman $F = \sigma T_e^4$.

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en (16) y teniendo en cuenta que $a = 4\sigma/c$, se tiene la ley $T(\tau)$:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (17)$$

Según esta ley, la temperatura efectiva es la temperatura real a una profundidad óptica $\tau = \frac{2}{3}$. A esta capa se le llama fotosfera, y puede decirse que es la región desde la cual los fotones escapan libremente de la estrella. En efecto, cualquier fotón emitido en la fotosfera tiene una probabilidad $e^{-2/3} \simeq 0.5$ de alcanzar la superficie.

La ley $T(\tau)$ que hemos utilizado es un ajuste polinómico de $\log T$ en función de un polinomio de tercer grado en $\log \tau$ de la forma

$$\log T = \log T_e + \alpha + \beta \log \tau + \gamma (\log \tau)^2 + \delta (\log \tau)^3$$

a los modelos de atmósferas de Kurucz (1979). Se han utilizado modelos de composición química solar ($x=0.7$, $Z=0.02$), para los cuatro intervalos de T_e y se han obtenido los valores siguientes:

	α	β	γ	δ
$T_e < 6750$	0.0299	0.1049	0.0273	0.0027
$6750 < T_e < 7250$	0.0302	0.0963	0.0196	0.0013
$7250 < T_e < 7750$	0.0366	0.1333	0.0453	0.0059
$7750 < T_e$	0.0353	0.1294	0.0402	0.0047

Integración del modelo de envoltura.

El modelo de envoltura se define en función de cuatro parámetros básicos: la masa total (M), la temperatura efectiva (T_e), la luminosidad total (L), y la composición química (X, Y, Z). Esta última se especifica en función del tanto por ciento en masa del hidrógeno (X), helio (Y) y de los elementos más pesados (Z). Una elección armónica de estos parámetros, basada en datos observacionales o en la teoría de evolución estelar, nos permitirá reproducir una estrella situada en la posición del diagrama H-R que deseamos. Estos parámetros son suficientes para fijar las características globales de la estrella. El radio R se determina fácilmente en virtud, por ejemplo, de la definición de T_e :

$$L = 4\pi R^2 T_e^4$$

Conocido R se pueden calcular, también, la gravedad superficial y la densidad media.

La integración del modelo de envoltura se hace dividiéndola en unas cuatrocientas capas. El modelo consta de tres zonas:

1° entre $\tau=0.01$ y $\tau_{ef}(\sim 0.6)$ se integra la ecuación (2) de equilibrio hidrostático con τ como variable independiente $\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}$ con la ayuda de la relación $T=T(\tau)$, partiendo de un valor inicial de $\log P = 2.5$ en unidades c.g.s.

2° hasta $\tau=2/3$ se integran las ecuaciones del radio y la masa

$$\frac{d\ln r}{d\tau} = -\frac{\rho\kappa}{r} \qquad \frac{d\ln M}{d\tau} = -\frac{4\pi r^2}{\kappa}$$

con ayuda de $T = T(\tau)$

3° hasta $\log P = \log P_{\text{int}}$ (~ 18.8 en nuestro caso) en la que se integran las ecuaciones (2, 3 y 16) puesto que detenemos la integración cuando aún no hay producción de energía. Estas ecuaciones se escriben tomando la presión como variable independiente, de la forma

$$\frac{d \ln r}{d \ln P} = - \frac{P}{r g}$$

$$\frac{d \ln M_r}{d \ln P} = - \frac{4\pi r^2 P}{g}$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} = \nabla_{\text{rad}} \text{ ó } \nabla_{\text{real}}$$

en esta última ecuación se tomará uno u otro gradiente, según que el transporte sea radiativo o convectivo.

2.2.- DEL MODELO PULSANTE.

Pulsación estelar

El modelo pulsante se rige por cuatro ecuaciones equivalentes a las que hemos escrito para el modelo en equilibrio en las que se tienen en cuenta la variaciones temporales de las distintas variables. Vamos a escribir las ecuaciones en coordenadas lagrangianas, es decir, utilizaremos como variable independiente la masa M_r contenida en una esfera de radio r de la estrella en equilibrio, pues aunque durante la pulsación varíe el radio de esta esfera, la masa que contiene permanece constante.

La ecuación de continuidad (3), no incluye ningún nuevo término y se escribe

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (18)$$

No cabe escribir ahora una ecuación de equilibrio hidrostático como la (2) sino que hay que añadir un término de aceleración, para obtener la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = - \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{G M_r}{r^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right) \quad (19)$$

Para establecer la ecuación de conservación de la energía, hemos de añadir a la ecuación (5) de equilibrio térmico, un término que tenga en cuenta la energía perdida por cada elemento de masa debido a las variaciones de presión y temperatura, es decir, hay que escribir

$$\frac{1}{\rho} \nabla F = \epsilon - \frac{dQ}{dt}$$

La pérdida de energía se escribe en función de dT y dP (Baker y Kippenham, 1962)

$$dQ = C_p dT - \frac{\delta}{\rho} dP$$

siendo $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p$. Teniendo en cuenta que $F = L_r / 4\pi r^2$ queda

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon - C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (20)$$

La ecuación de transporte de energía por difusión radiativa (13), nos limitamos a escribirla en función de dM_r :

$$\frac{dT}{dM_r} = - \frac{3 \kappa L_r}{64 \pi^2 a c r^4 T^3} \quad (21)$$

La aproximación de difusión consiste en suponer que la intensidad media I (que es proporcional a la densidad de energía $U = (4\pi/c) J$) es igual a la función de distribución de Planck integrada B . Esta condición sólo se cumple para profundidades ópticas grandes pero no así en la atmósfera y en las capas externas. Puesto que para el estudio de la pulsación estamos interesados en lo que ocurre en las zonas más superficiales de la estrella nos interesa tener una ecuación de transporte radiativo válida también para pequeñas profundidades ópticas. Utilizamos para ello la llamada aproximación de Eddington como han hecho Valtier et al (1979). La ecuación de transporte se escribe ahora

$$\frac{dJ}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{3(\kappa + \sigma) L_r}{64 \pi^2 r^4} \quad (22)$$

siendo σ la contribución del scattering a la opacidad. La intensidad media viene dada por

$$J = \frac{1}{4\pi\kappa} \left(\kappa a c T^4 - \rho C_p \frac{dT}{dr} + \delta \frac{dP}{dt} \right) \quad (23)$$

Linealización de las ecuaciones.

Vamos a estudiar la estabilidad del modelo frente a peque

ñas perturbaciones de frecuencia ω en torno al estado de equilibrio de la forma

$$r = r_0 (1 + x e^{i\omega t}) \quad , \quad x \ll 1$$

escribiéndose relaciones semejantes para las demás variables.

Tomaremos nuevamente $\ln P_0$ como variable independiente de modo que

$$\frac{\partial}{\partial M_r} = - \frac{G M_r}{4\pi P_0 r_0^4} \frac{\partial}{\partial \ln P_0}$$

y además

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

Una vez linealizado queda el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{d \ln P_0} = \frac{P_0 r_0}{G M_r P_0} (3x + \alpha \mu - \delta t) \quad (24)$$

$$\frac{d\mu}{d \ln P_0} = -\mu - \left(4 + \frac{4\pi r_0^3}{M_r} \bar{\rho} \sigma^2\right) x \quad (25)$$

$$\frac{d\ell}{d \ln P_0} = i\sigma \left(\frac{4\pi r_0^4 P_0^2 \delta}{L_0 M_r P_0} \right) \left(\frac{4\pi \bar{\rho}}{G} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\nabla_{ad}} t - \mu \right) \quad (26)$$

$$\frac{dj}{d \ln P_0} = 4 \nabla_{real} (\ell - 4x - j - \kappa_p \mu - \kappa_t t) \quad (27)$$

siendo

$$j = 4t + i\sigma \frac{P_0 \delta}{\kappa P_0 a c \tau_0^4} (4\pi G \bar{\rho})^{1/2} \left(\frac{1}{\nabla_{ad}} t - \mu \right) \quad (28)$$

y donde σ es la frecuencia sin dimensiones $\sigma = \omega (4\pi G \bar{\rho})^{-1/2}$

$\bar{\rho}$ es la densidad media y

$$\chi_P = \left(\frac{\partial \ln \chi}{\partial \ln P} \right)_T, \quad \chi_T = \left(\frac{\partial \ln \chi}{\partial \ln T} \right)_P, \quad \alpha = \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \ln P} \right)_T, \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \ln T} \right)_P$$

Las ecuaciones (24), (25), (26) y (27) con el complemento de la ecuación (22) constituyen un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales de variables complejas con un autovalor σ complejo. Existe una solución única cuando se dan ocho condiciones de contorno y dos de normalización. Las condiciones de normalización que se imponen afectan la parte real (x_R) e imaginaria (x_I) de x en la superficie; son las siguientes

$$x_R = 1$$

$$x_I = 0$$

Condiciones de contorno.

Las propiedades pulsacionales tanto del interior como de la atmósfera, sólo se van a tener en cuenta como condiciones de contorno para integrar las ecuaciones (24) a (27)

La condición mecánica en la superficie liga las perturbaciones del radio y la presión de la forma

$$\mu = - (4 + 3\sigma^2) x \tag{29}$$

que de hecho equivale a $d\rho / d \ln P_0 = 0$.

Esta condición elimina la posibilidad de que se propaguen ondas progresivas en la atmósfera. La deducción se basa (Baker y Kipperham, 1965), en suponer un comportamiento adiabático ($\gamma = \gamma_1$) o isotermo ($\gamma = 1$) a la atmósfera que se traduce en la siguiente ecuación entre p y t :

$$\alpha p - \delta t = \frac{p}{\gamma}$$

En la atmósfera, el sistema de ecuaciones se reduce a (24) y (25) y con esta nueva condición queda tan sólo en una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. Para ello hay que suponer que el espesor de la atmósfera y la escala de altura de presiones despreciables frente al radio de la estrella, y que la atmósfera es isoterma.

La condición de contorno térmico en la superficie se obtiene de la ley $T(z)$ que empleamos en la integración de la atmósfera (17) y que podemos escribir como

$$T^4 = \frac{3}{4} \frac{L}{4\pi a c r^2} \left(z + \frac{2}{3} + \epsilon(z) \right)$$

Siendo $\epsilon(z)$ muy pequeño. Una vez linealizada se obtiene (Baker y Kippenham, 1965)

$$4t = l - 2x + \frac{z_0}{z_0 + \frac{2}{3}} \left(-2x + x_r + x_p \mu \right)$$

Hemos particularizado esta relación para $z_0 = 0$ puesto que la integración comienza para z muy pequeño. Así pues,

la condición de contorno es

$$4t = l - 2x \quad (30)$$

Una condición de contorno mecánica sencilla para el fondo de la envoltura resulta de suponer que el interior es rígido: $x=0$. En efecto, el cálculo demuestra que la amplitud de la perturbación decrece rápidamente en las regiones centrales. Sin embargo, al imponer la presencia de un nodo en el fondo de la envoltura y no en el centro de la estrella, como sería normal si integrásemos hasta $r=0$, se obtienen períodos entre un 2 ó un 3% más cortos (Valtier et al, 1979) que si imponemos la condición, más realista, de que se anula la derivada:

$$\frac{dx}{dluP_0} = 0 \quad (31)$$

La condición de contorno térmico se deduce sencillamente imponiendo que las pulsaciones sean adiabáticas en el fondo de la envoltura:

$$\frac{1}{\nabla_{ad}} t - p = 0 \quad (32)$$

Esta condición es una buena aproximación incluso si $l \neq 0$, pues el factor que multiplica a $\left(\frac{1}{\nabla_{ad}} t - p\right)$

en la ecuación (26) es muy grande en el interior.

Con estas condiciones de contorno y las condiciones de normalización, existe un conjunto discreto de valores y funciones propios que satisfacen las ecuaciones (24) - (26). La parte real del autovalor σ (σ_R) está relacionada con el período

$$P = \frac{2\pi}{\sigma_R} (4\pi G \bar{\rho})^{1/2}$$

Nos interesa especialmente los valores más bajos de σ_R que corresponden a las pulsaciones radiales en los modos fundamental primer y segundo armónicos.

Estabilidad pulsacional. Integral de energía.

El criterio de estabilidad lo establece el signo de la parte imaginaria (σ_I) del valor propio σ . Cuando σ_I es negativo, la amplitud de la pulsación crece con el tiempo y el modelo es pulsacionalmente inestable. Naturalmente la amplitud no crece indefinidamente puesto que está limitada por los efectos no lineales que aquí no se han tenido en cuenta.

Pero, si queremos un conocimiento más pormenorizado del comportamiento pulsacional y localizar las regiones excitadas y las amortiguaciones de la pulsación, hay que estudiar la contribución de cada capa a la desestabilización de la estrella. Un método adecuado es el cálculo de la integral de energía (Baker y Kippenham, 1962).

Consideremos una esfera de volumen V y sea P la presión en su superficie. El trabajo hecho sobre la esfera durante una contracción infinitesimal $-dV$ es $-PdV$. Si P y V varían

armónicamente con el tiempo , el trabajo hecho sobre la esfera en un período es

$$W = - \oint P_R \dot{V}_R dt$$

donde el subíndice R denota la parte real de una cantidad compleja.

Esta expresión, puede transformarse en

$$W = -\frac{1}{2} \text{Re} \oint P^* \dot{V} dt$$

y como en una aproximación de primer orden

$$P = P_0 (1 + \mu e^{i\omega t})$$

$$r = r_0 (1 + \alpha e^{i\omega t})$$

$$\dot{V} = 4\pi r_0^2 \dot{r}$$

después de algunas transformaciones queda

$$W(r) = 4\pi P_0 r_0^3 \text{Im} (\mu^* \alpha)$$

Integral de energía.

Hemos escrito explícitamente que la integral de energía es función del radio de la esfera de volumen V que dentro de la estrella consideramos para hacer la integral. El valor de

$W(r)$ nos informa de cuanta energía por período hay que extraer de las capas superiores para que la capa en cuestión de radio r , puede pulsar periódicamente sin ganar ni perder energía. Si W es positiva, esto significa que la excitación supera al amortiguamiento en la región estelar superior al nivel de esta capa. Si W es negativa, domina el amortiguamiento. Mientras que W se refiere al comportamiento de todas las capas suprayacentes, el signo de la derivada dW/dr no permite distinguir entre la excitación o el amortiguamiento en cada punto. Si la derivada es positiva, hay excitación y si es negativa hay amortiguamiento.

El comportamiento global de la estrella depende del valor de la integral de energía en el centro. Pero como el interior es prácticamente adiabático, la integral de energía es constante a gran profundidad y el valor central de W , coincide con su valor en el fondo de la envoltura, W_i . Como parámetro de estabilidad se usa el cociente entre W_i y la energía cinética total de pulsación de la estrella E , al que designaremos por η

$$\eta = \frac{W_i}{E}$$

siendo $E =$

$$E = \frac{G R^2}{2} \int_0^M |\alpha|^2 r_0^2 dM_r$$

Así definida, η es la cantidad total de energía que se suma a la pulsación en cada ciclo expresada en unidades de la energía de pulsación.

Se demuestra (Castor, 1971), que η es también igual al cociente entre las partes imaginaria y real del ^{valor} propio σ :

$$\eta = -4\pi \frac{\sigma_I}{\sigma_R}$$

A η se le llama tasa de crecimiento pues su inverso es el tiempo característico para el desarrollo de la inestabilidad pulsacional.

Integración del modelo pulsante.

El sistema de ecuaciones se ha resuelto usando la librería BODEL, escrita por Eri Graham de Cambridge. Se calcula en primera lugar una solución de prueba en el caso no adiabático (

Esta solución sirve de base para buscar la solución del sistema completo por una iteración basada en el algoritmo de Newton-Raphson. Se utilizan 401 puntos de integración con un paso de integración que aumenta del exterior al interior de forma que sea más fino en las zonas de excitación.

3.- CALCULO DE MODELOS DE PULSACION.

El procedimiento que se sigue habitualmente en los cálculos lineales de pulsación estelar consiste en calcular previamente un modelo en equilibrio de la estrella requerida, que posteriormente es perturbado para estudiar su estabilidad pulsacional. Para el cálculo de la estrella en equilibrio hemos utilizado el método descrito por Latour (1970) y el programa elaborado por este autor en el que se han introducido las mejoras oportunas concernientes, principalmente, a las opacidades y al tratamiento de las capas externas y la convección.

En lo que se refiere al cálculo de inestabilidad pulsacional se utiliza el procedimiento descrito por Valtier, Baglin y Auvergne (1979). Este trabajo y el de Cox, King y Hodson (1979) sirven de punto de partida para el nuestro y los utilizaremos a menudo de referencia, por lo que los citaremos como VBA y COX, respectivamente.

En efecto, los trabajos de VBA y COX, buscaban una solución al problema de la pulsación de las estrellas con anomalías de abundancia del tipo Delphini, pero no llegaban a conclusiones definitivas. En efecto, VBA habían encontrado una inestabilidad marginal en modelos de envoltura pobres en helio ($X= 0.9$, $Y= 0.08$) y especulaban aún con la posibilidad de que los modelos de hidrógeno "puro" ($X= 0.98$), pudiesen ser inestables. No obstante, la inestabilidad se restringía a una estrecha zona próxima al borde rojo observacional de la banda de inestabilidad y dejaban sin explicar una gran cantidad de estrellas Delta Del variables más calientes.

Por su parte, COX, encuentra que las estrellas de hidró

geno "puro" no pueden pulsar. Los cálculos de COX, son algo más elaborados: incluyen nuevas opacidades y ecuaciones de estado y utilizan un contenido variable de helio desde la atmósfera hacia el interior. No obstante, persiste la discrepancia entre las predicciones teóricas y las temperaturas observadas en las estrellas variables de carácter metálico. COX, atribuye la diferencia a una deducción incorrecta de la temperatura efectiva de las estrellas metálicas, ya que esta se basa en las calibraciones hechas respecto al índice ξ_{uv} con estrellas patrones normales.

Con objeto de resolver estas discrepancias, nos hemos propuesto rehacer algunos de los cálculos de VBA, introduciendo mejoras en la física. Hemos construido un modelo de $1.5 M_{\odot}$ 6850 K de temperatura efectiva y magnitud absoluta 1, con una composición $X=0.9$, $Y=0.08$ y $Z=0.02$ para comparar nuestros resultados con los de COX y VBA.

3.1 .- OPACIDADES.

Una de las diferencias más importantes entre los modelos de VBA y COX reside en las opacidades utilizadas. Mientras en VBA se utilizaban la de Cox y Stewart (1969), COX utiliza las opacidades de Los Alamos Astrophysical Opacity Library (Huebner et al, 1977). Estas últimas opacidades presentan ciertas ventajas por lo que se refiere al tratamiento más detallado de la física atómica involucrada en los cálculos.

Para nuestros modelos hemos escogido tres mezclas distintas de las opacidades de Los Alamos como se indica a continuación:

Cox-David VI	:	X=0.70	Y=0.28	Z= 0.02
Cox-Hodson VIII:		X=0.90	Y=0.08	Z= 0.02
Cox-Hodson IX	:	X=0.98	Y=0.00	Z= 0.02

Además, hemos calculado modelos con $X=0.8$ interpolando linealmente entre las dos primeras mezclas.

Disponemos de los valores de la opacidad para un intervalo de temperatura comprendido entre 10^9 K y $1.5 \cdot 10^3$ K y densidades comprendidas entre 10^7 y 10^{-12} g cm⁻³. Por debajo de 1 eV ($1.2 \cdot 10^4$ K) las tablas de Los Alamos no incluyen opacidades dado que a estas temperaturas comienza la formación de moléculas y se complica enormemente el cálculo de opacidades. Hemos completado hasta los 5000 K con las opacidades que gentilmente nos ha facilitado A.N. Cox, basadas también en el código de Los Alamos pero no publicadas. Para las temperaturas aún más bajas, hemos utilizado las opacidades menos precisas de Cox y Stewart, (1969). En la figura 13 se han representado valores de $\log \kappa$ frente a $\log \rho$ para distintas temperaturas.

El cálculo de opacidades se hace teniendo en cuenta los procesos siguientes:

- Las transiciones entre niveles atómicos (bound-bound) que es también el proceso responsable de la formación de líneas espectrales.
- Las transiciones al continuo (bound-free) o fotoionización.
- Las transiciones en el continuo (free-free) o bremsstrahlung inverso.
- El scattering por electrones libres de Thomson.

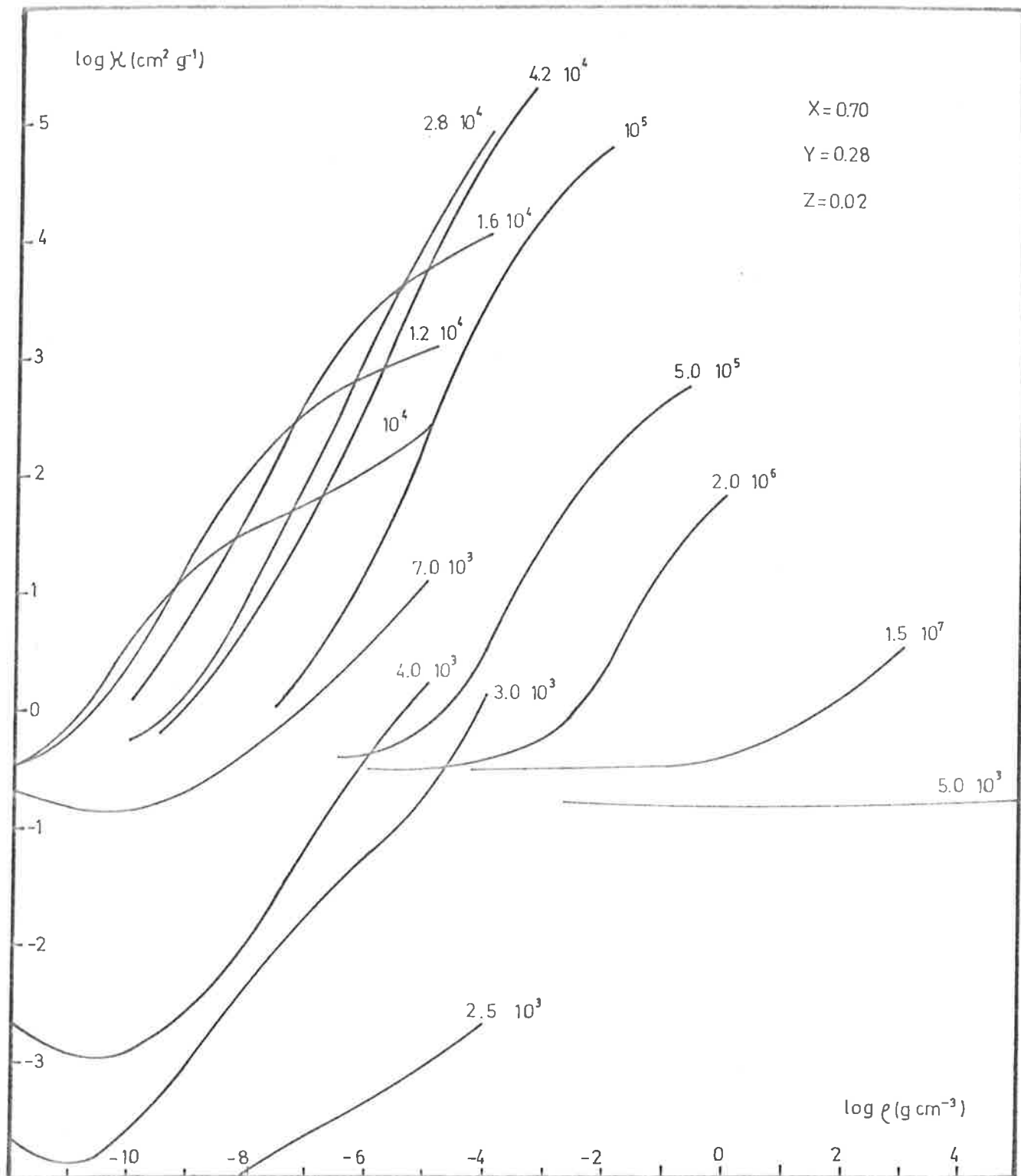


FIGURA 13.- Opacidad en función de las densidades para las distintas temperaturas que se indican junto a cada curva (en kelvin), correspondiente a la mezcla Cox-Davis VI.

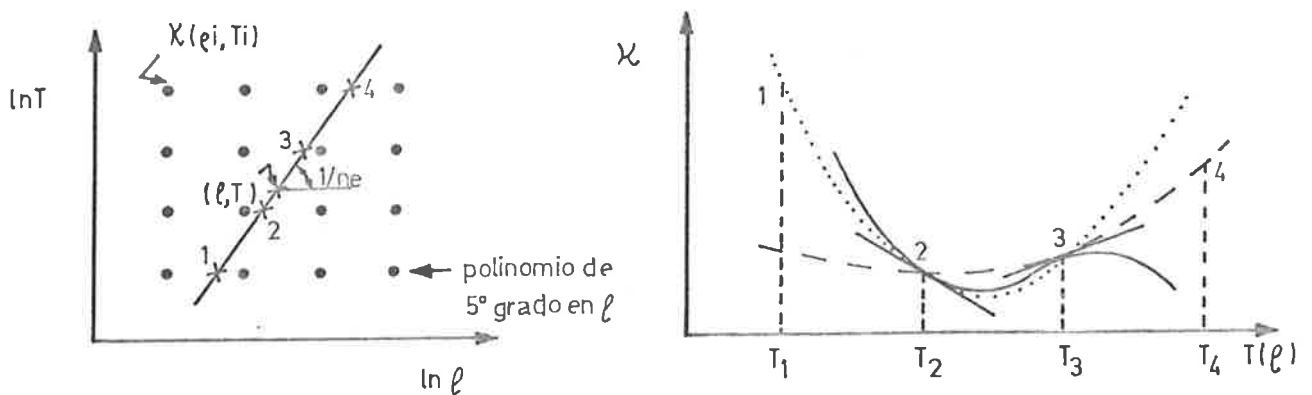
La importancia relativa de cada uno de estos procesos de pende de la temperatura. A temperaturas bajas, la opacidad se debe principalmente a las transiciones entre niveles atómicos ligados y entre estos y el continuo.

En particular este segundo proceso es el que domina en las zonas de ionización de los elementos más abundantes (H y He) entre 10^4 y 10^5 K. Cuando se ha completado la ionización de estos elementos, cobra importancia el brensstrahlung inverso. En nuestros modelos al alcanzarse una temperatura de 10^6 K, es decir, en las zonas más profundas, el proceso más importante es el scattering de Thomson.

Las actuales opacidades de "Los Alamos" son en general mayores que las de Cox-Stewart en factores que alcanzan hasta un 40% en las regiones de excitación de la pulsación ($-8 < \log \rho < -7$ y $10^4 < T < 6 \cdot 10^4$ K). No es extraño que así sea porque en esta región es mayor la influencia de los cálculos precisos de estructura atómica. Precisamente en estas nuevas opacidades se ha adoptado un modelo no-hidrogénico en el cálculo de la fotoionización, mientras que Cox y Stewart (1969) emplearon un modelo hidrogénico. Para temperaturas altas ambas opacidades coinciden ya que la opacidad está dominada por el scattering de Thomson.

La utilización práctica de las opacidades requiere la interpolación entre los valores discretos de $\kappa(\rho_i, T_i)$ de la tabla. Para cada valor de T_i se han elegido trece valores de κ en el intervalo de densidades cubierto por los modelos. A estos valores se les ha ajustado un polinomio de quinto grado en ρ con el fin de facilitar la interpolación en densidad. La interpolación en temperatura sigue un proceso más complejo ideado por Latour (1970). En cada capa del modelo puede definirse un índice politrópico efectivo

$n_e = d \ln \rho / d \ln T$. La intersección de la recta, que en el plano $\ln \rho / \ln T$, pasa por el punto (ρ, T) con la pendiente $1/n_e$, con las cuatro isothermas más próximas de la tabla, nos permite obtener cuatro valores, $\chi(\rho_1, T_1) \dots \chi(\rho_4, T_4)$, entre los que interpolar el valor buscado $\chi(\rho, T)$. Véase el esquema .



Se busca para ello el polinomio de tercer grado que pasa por los puntos 2 y 3 y es tangente en estos puntos a sendas parábolas definidas por los puntos (1,2,3) y (2,3,4). Con esta forma de proceder se minimizan los errores de interpolación sobre todo en las zonas en que χ varía más rápidamente. Son estas zonas, en que las derivadas de χ son mayores, las de mayor importancia para el mantenimiento de la pulsación.

3.2.- CONVECCION

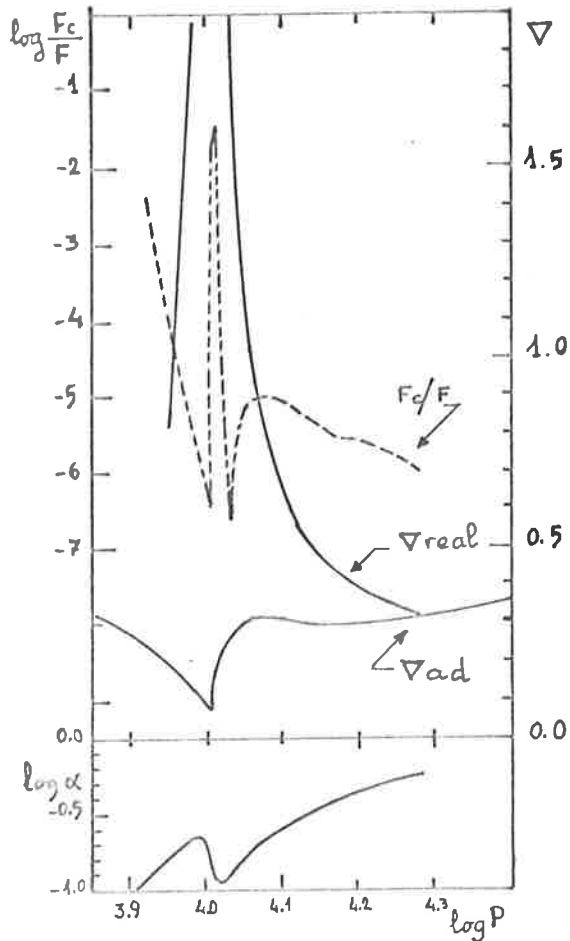
El tratamiento de la convección se ha hecho siguiendo la teoría de la longitud de mezcla y adoptando el criterio de inestabilidad de Schwarzschild según se exponían en el capítu-

tulo segundo. Se ha prestado atención a la elección de la longitud de mezcla con objeto de obtener flujos convectivos realistas. En los modelos más fríos que hemos construido, la convección comienza a ser importante, pero aún así el transporte convectivo es inferior al radiativo, y una elección de una longitud de mezcla grande puede falsear los resultados.

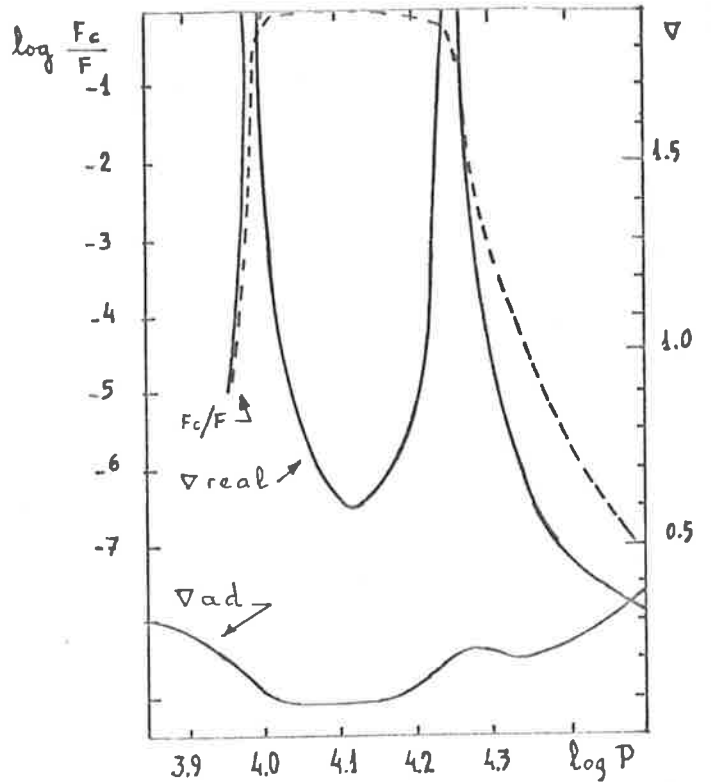
Hemos investigado los efectos de la utilización de un factor $\alpha = l/H_p$ constante ($\alpha = 1.5$) o variable en el sentido de Böhn y Stückl (1967). Este α variable consiste en adoptar como longitud de mezcla el mínimo entre la distancia al borde superior de la zona convectiva y $1.5 H_p$. Esta segunda opción es la que ha dado mejores resultados y ha sido adoptada en los restantes cálculos. Hay además otra razón para hacerlo y es que en nuestros modelos el espesor total de la zona convectiva es siempre inferior a la escala de altura de presiones por lo cual el empleo de una longitud de mezcla igual a $1.5 H_p$ carece de sentido físico.

En la figura 14, se puede ver la estructura de la zona convectiva en un modelo de $X = 0.9$, $T_e = 6850$ K y $1.5 M_\odot$. En este modelo el contenido de helio es tan bajo que no puede formarse la segunda zona convectiva y sólo existe una zona convectiva superficial: la del hidrógeno. En el caso de variable, la zona convectiva es más estrecha y la pendiente de la curva $\kappa(\rho)$ más abrupta (Fig. 14c)

El valor de α , cuando este es variable, está comprendido entre 0.1 y ~ 0.5 en el modelo que estamos considerando (Fig. 14 a). Con estos valores de α se consigue que el flujo convectivo no alcance nunca valores excesivamente altos con relación a modelos de convección más refinados (por ejemplo en Deupree, (1977) $F_c \approx 10^{-3} F_{TOTAL}$ en modelos de RR Lyrae de

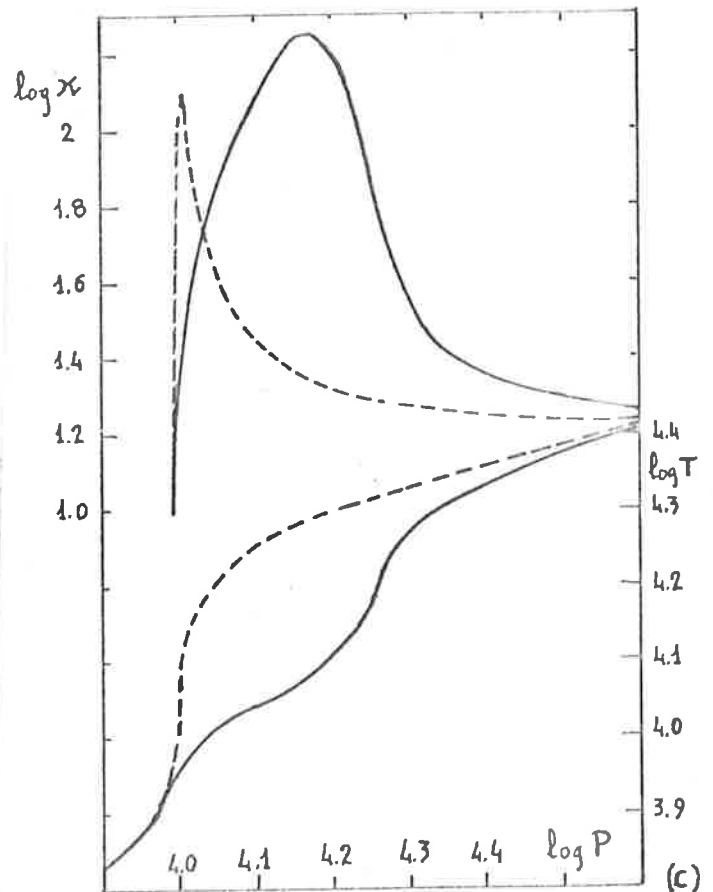


(a)



(b)

$\alpha = 1.5$



(c)

FIGURA 14.- Comparación entre el empleo de un factor α variable o constante en el tratamiento de la convección, en un modelo con $X=0.9, 6850K$, y $M_b=1$.

a) Flujo convectivo y gradientes real y adiabático en el caso de α variable.

b) Idem para α constante.

c) $\log \kappa$ y $\log \rho$ frente a $\log P$ con α variable (---) o constante (—).

temperatura efectiva comparable). El máximo valor de F_c/F_{TOTAL} es de 0.03 aunque enseguida cae a valores del orden de 10^{-5} (Fig. 14a). Con el factor α constante, el flujo convectivo llega a ser hasta un 97% del flujo total (Fig. 14b). El máximo que se observa próximo a $\log P=4$, coincide con la zona en que el gradiente $\log T/\log P$ es más fuerte y está asociado con una brusca disminución del peso molecular medio.

Deupree(1977), recomienda utilizar una relación $\alpha=0.05$ a 0.1 tras realizar cálculos hidrodinámicos en dos dimensiones de las células convectivas. La elección que hemos hecho, concuerda perfectamente con este supuesto como hemos demostrado en el modelo 128 (Tablas I y II). En este modelo se ha empleado un $\alpha=0.05$ constante, obteniéndose una estructura similar de las zonas convectivas a la obtenida con α variable y un comportamiento pulsacional comparable.

3.3.- MODELOS DE ENVOLTURA.

Como nuestra meta es situar las fronteras azules de inestabilidad para las distintas composiciones químicas se han estudiado modelos con dos magnitudes absolutas distintas 1.0 y 2.0 y se ha cubierto un amplio intervalo de temperaturas efectivas.

En la tabla I, se recogen los datos más importantes relativos a los modelos de envoltura calculados para cuatro composiciones químicas diferentes: $X=0.7$, $X=0.8$, $X=0.9$ y $X=0.98$. Excepcionalmente se han estudiado modelos más próximos a la secuencia principal ($M_b=2, 5$ y 3). Para los modelos más fríos se ha adoptado una masa de $1.5 M_{\odot}$ y para los de

mayor temperatura $2.0 M_{\odot}$. Estas masas, que son relativamente bajas para esta zona del diagrama HR, con relación a las masas evolutivas que les corresponderían (entre 1.5 y $2.2 M_{\odot}$), se justifican porque con ellas se obtienen períodos más próximos a los observados. La adopción de masas mayores implicaría períodos más cortos.

Las funciones de partición que usamos son las de Elste y Juyaku (1957) como en Latour (1970). Las hemos comparado con las de "Los Alamos Astrophysical Library" y no difieren de ellas en más de un 1% en la zona de ionización del hidrógeno y en un 3% en la segunda zona de ionización del helio. Por lo que a ellas respecta nuestros resultados no pueden ser muy diferentes de los de COX.

En la figura 15 se han representado $\log T$, $\log \rho$ y $\log \kappa$ frente a $\log P$, para nuestro modelo y el de COX. La única diferencia destacable es que en el modelo de COX la zona convectiva es ligeramente más profunda y estrecha. La posible causa de esta discrepancia puede residir en la ley $T(\tau)$, que hemos empleado para integrar la atmósfera, provoca un gradiente de temperatura mayor en nuestro modelo que en el de COX, por lo cual la ionización del hidrógeno se comienza a menor profundidad en nuestro modelo y con ello la zona convectiva.

El máximo de densidad es algo mayor en el modelo de COX como consecuencia de producirse en una zona donde la presión es mayor para una misma temperatura. Es lógico pues, que el máximo en $\kappa(\rho, T)$ sea también más alto por producirse a mayor densidad y estar basado en las mismas opacidades.

La estructura del modelo de composición química típica de población I ($X=0.7$, $Y=0.28$, $Z=0.02$), se muestra en la

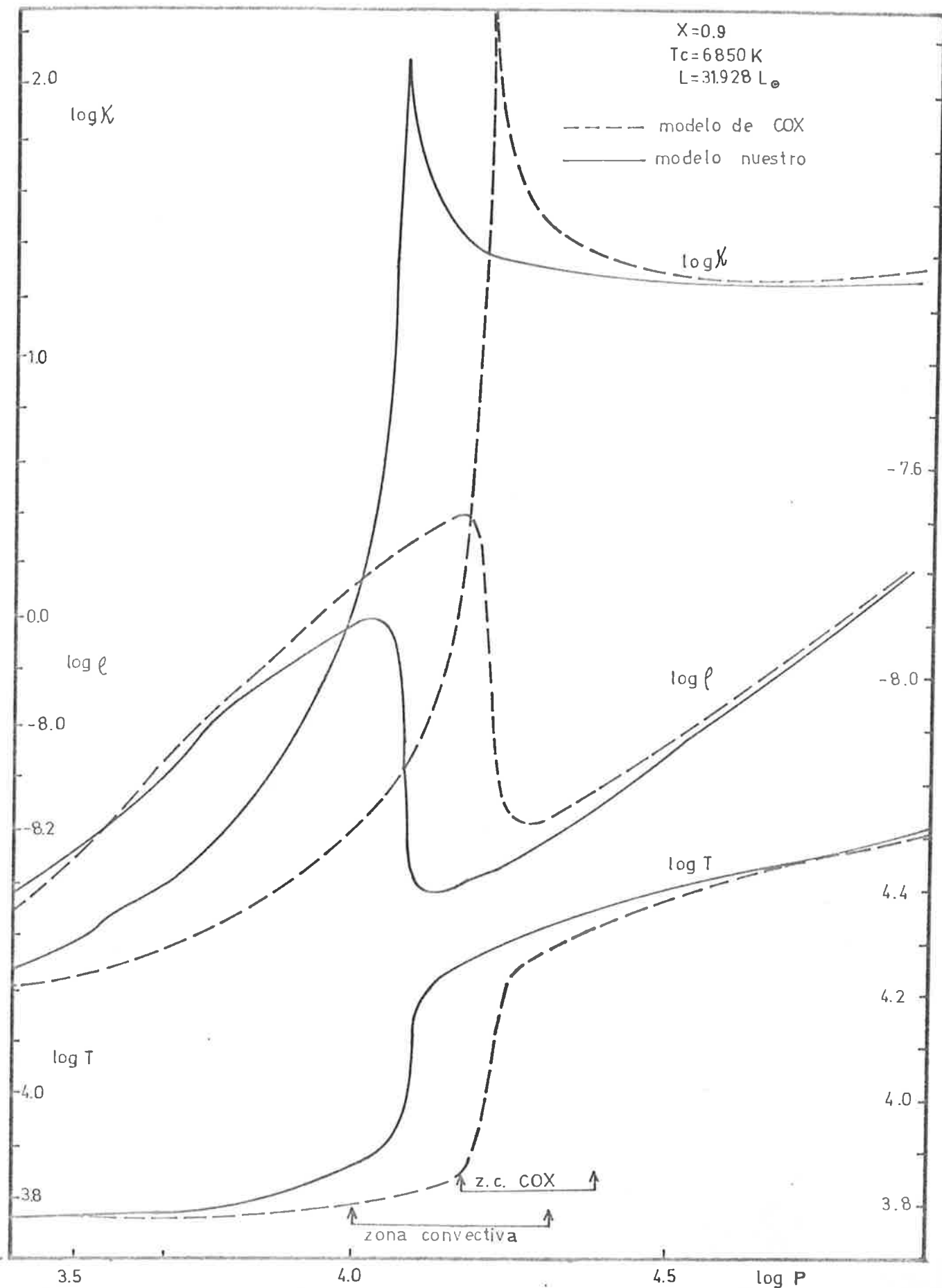


FIGURA 15.- Comparación de uno de nuestros modelos con $X=0.7$ con un modelo equivalente de COX.

figura 16. Se aprecia de inmediato la existencia de dos zonas convectivas. En la parte inferior de la figura se ha representado la proporción de iones H^+ , He^+ y He^{++} , respecto al número total de núcleos de cada especie. Con ello queda de manifiesto que las zonas convectivas coinciden con la ionización de estos elementos mayoritarios lo que no es sino una consecuencia de la disminución del coeficiente adiabático. La existencia de la segunda zona convectiva, se manifiesta sobre la opacidad con un ligero aumento de la pendiente, meno importante que en la primera zona convectiva. En la tabla I, se da la fracción de masa contenida en ambas zonas convectivas. Para este modelo que estamos comentando (102a) es $4.05 \cdot 10^{-8}$ de la masa total. La masa que corresponde a la primera zona convectiva es aproximadamente diez veces menor (), por lo que la segunda zona convectiva es la más importante en la desestabilización pulsacional de la estrella.

Finalmente, la estructura del modelo sin helio, $X=0.98$, con la misma temperatura efectiva y luminosidad que los anteriores, aparece comparado al modelo de $X=0.7$ en la figura 17. Este modelo posee una única zona convectiva situada a mayor profundidad que en el modelo de $X=0.7$. La opacidad de la mezcla sin helio, es menor en la atmósfera que la opacidad de la mezcla de composición normal ($X=0.7$), esto hace que la temperatura aumente más lentamente con la profundidad y que se retrase la ionización del hidrógeno. En consecuencia, la zona convectiva aparece a una presión mayor. La mayor densidad asociada a esta zona hace también que el pico de opacidad sea inesperadamente alto y estrecho.

En la figura 17 se pone también de manifiesto un hecho importante relativo a la opacidad que no aparece en las figu

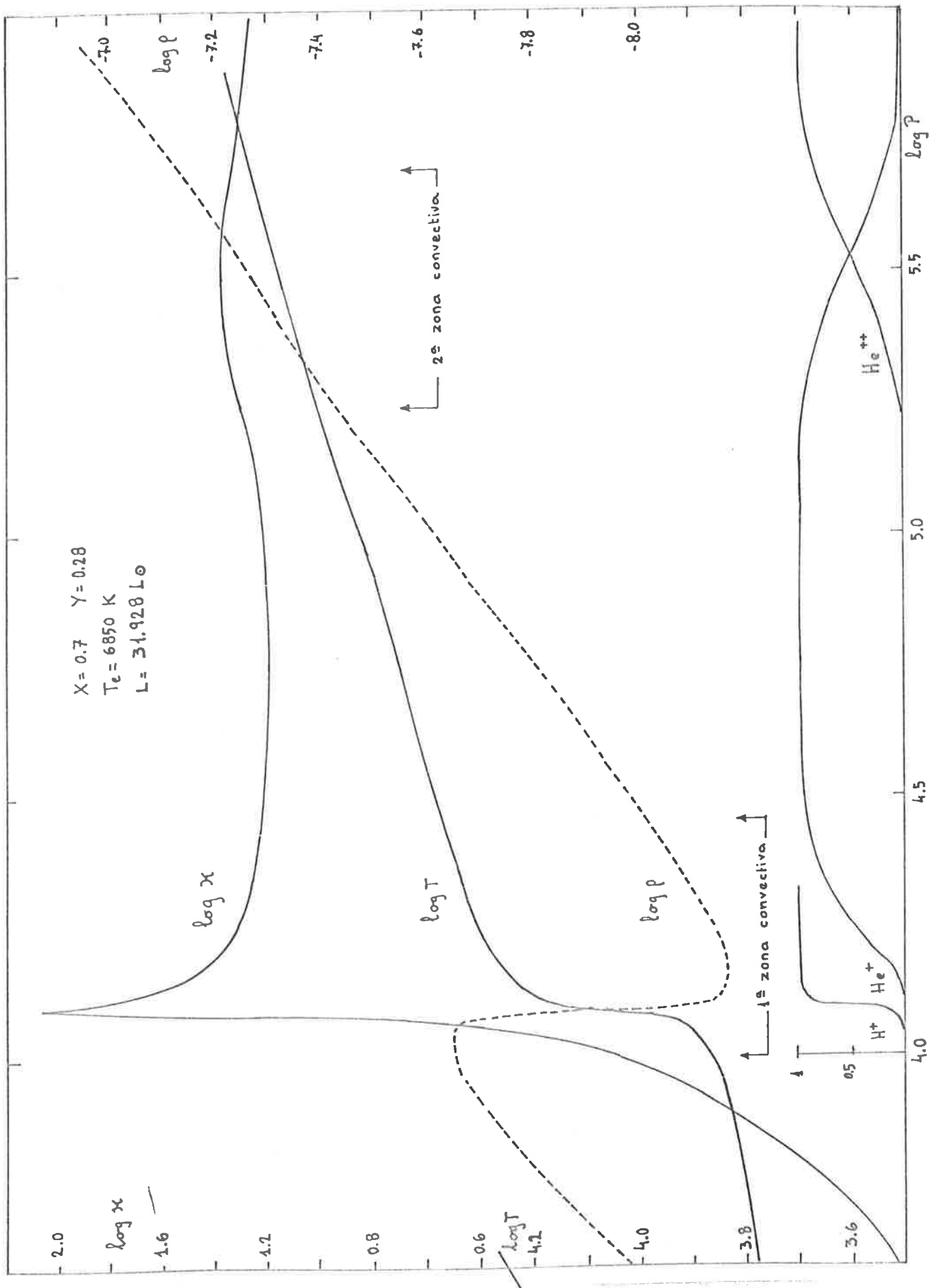


FIGURA 16.- Modelo de composición química típica de población I

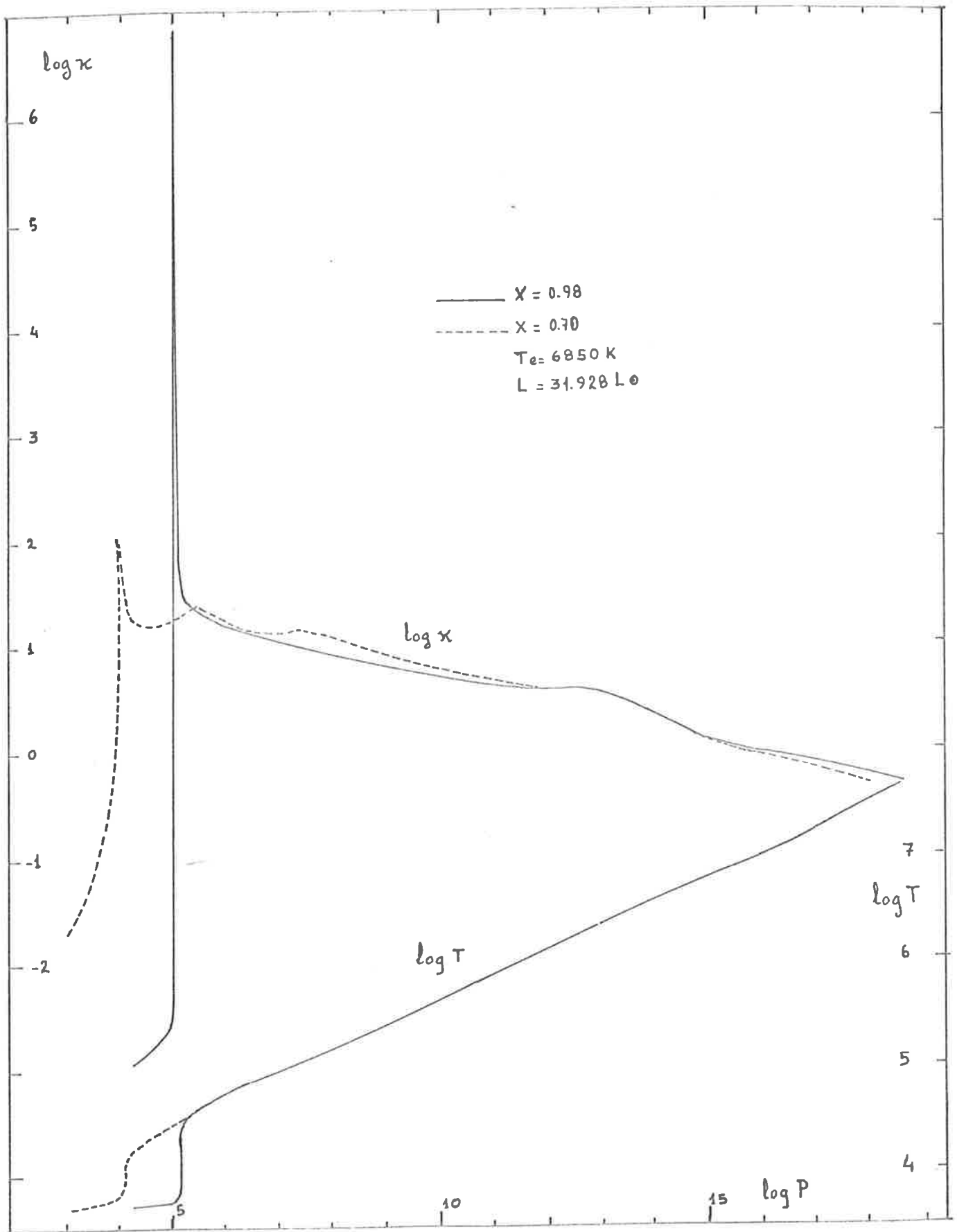


FIGURA 17.- Estructura del modelo exento de helio comparada al modelo con un 28% de helio.

ras anteriores que por no llegar a $\log P$ superiores a 6. En la curva correspondiente a la composición química normal ($X=0.7$), se aprecia un cambio de pendiente a $\log P = 8$, además de los correspondientes a la ionización del hidrógeno y del helio que ya hemos discutido. Según Stellingwerf (1979), este máximo se debe a la coincidencia del máximo del flujo de fotones con la "frontera" de ionización del helio. En realidad hay seis máximos relativos de opacidad: tres se deben a la ionización del H, He y He^+ y los otros tres a las fronteras de ionización de estos mismos elementos. En la práctica, la ionización del H y He acontecen casi a la misma temperatura, así como la ionización del He^+ y las fronteras de ionización de los dos anteriores. El máximo de $\log P=8$, tiene su influencia como mecanismo desestabilizador de la estrella y como puede verse no existe en el modelo sin helio. El máximo más profundo a $\log P=13$, no puede contribuir a la desestabilización pulsacional por encontrarse en una zona donde la amplitud relativa de la pulsación es muy pequeña, como veremos enseguida.

3.4 INESTABILIDAD PULSACIONAL.

Hemos calculado la inestabilidad pulsacional de los modelos de envoltura constituidos frente a las pulsaciones radiales. Se han investigado siempre el modo fundamental y los armónicos primero y segundo. Sólo en un caso, el del modelo 122, se ha investigado la inestabilidad de armónicos más elevados, resultando inestable hasta en el quinto armónico el modo más alto que estudiamos, lo que confirma los resultados de Stellingwerf (1979). El método de cálculo utilizado es el descrito como óptimo por VBA y se ha expuesto en el capítulo segundo. Los resultados más importantes, períodos y tasas de crecimiento, se han reunido en la Tabla II.

Comentaremos en primer lugar la influencia de las mejoras más importantes introducidas en nuestro modelo comenzando por el tratamiento de la atmósfera.

El empleo de la ley $T(z)$ deducida de los modelos de Kurucz en lugar de la empleada por Latour (1970), hace que el modelo sea ligeramente más inestable. En efecto, esta ley $T(z)$ introduce un gradiente de temperatura más suave en la atmósfera y una temperatura inicial mayor con lo cual la zona convectiva empieza a menor profundidad y contiene una masa algo mayor (compárense los modelos 101b y 103a).

En cuanto a la convección, la elección de un factor α variable, ha hecho que nuestros modelos sean más estables, en el sentido de tener tasas de crecimiento menores con respecto a los modelos construidos con $\alpha = 1.5$. Esto puede constatarse comparando los valores de η entre los modelos 101a y b, 102 a y b, ó 103 a y 129, construidos en las mismas condiciones pero con distintos tratamientos de la convección. La razón por la cual los modelos con $\alpha = 1.5$ son más inestables, reside en que con esta hipótesis las zonas convectivas contienen una masa mayor. En la figura 18, se puede apreciar el efecto del empleo de un α constante sobre la parte imaginaria de la función propia que es la que rige la inestabilidad. Por otra parte con $\alpha = 1.5$ los períodos obtenidos son algo mayores.

En esta figura 18 hemos representado el comportamiento de las partes real e imaginaria de la función propia X ($\delta r/R$) que es la variación relativa de radio durante la pulsación. La parte real de X se ha normalizado a 1 en la superficie. Los datos consignados sobre esta figura se refieren principalmente al modelo con $X=0.9$, pero se ha incluido como comparación la parte imaginaria de las funciones

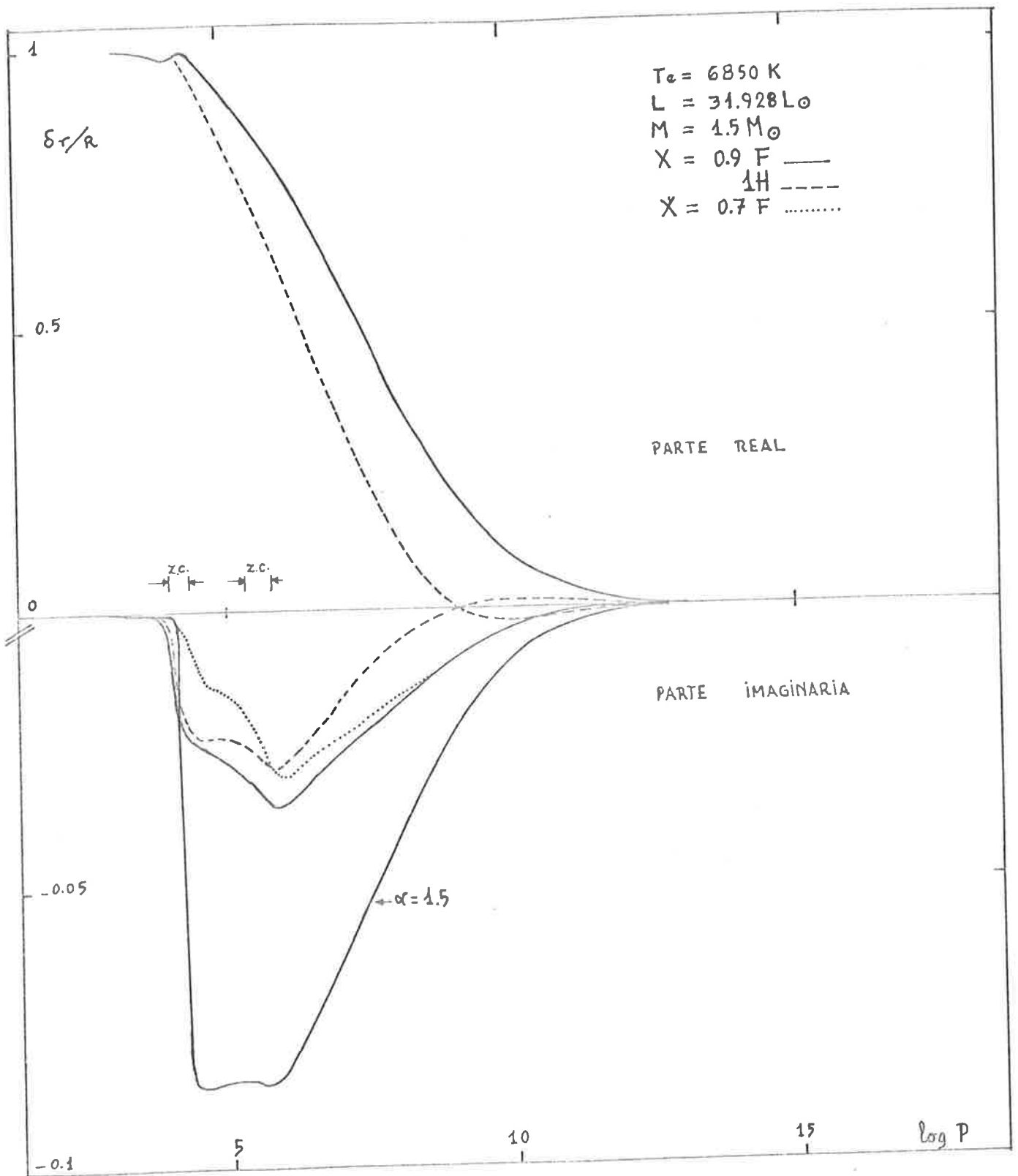


FIGURA 18.- Representación de la función propia x para el modelo con un 8% de helio, para los modos fundamental y primer armónico. Como comparación se han dibujado la parte imaginaria de un modelo en el que la convección se calcula con α constante y la de un modelo con $X=0.7$. Las partes reales de estos últimos son prácticamente iguales a las representadas.

propias del modelo con $X=0.7$. En el caso de las curvas correspondientes al primer armónico se puede comprobar la presencia de un nodo en $\log P \approx 9$ aparte del nodo en el centro. El decrecimiento de las funciones propias es muy rápido cuando aumenta la profundidad de $\log P=15$ la parte real es del orden de 10^{-4} y del orden de 10^{-6} en $\log P=18.8$ lo que permite suponer que el centro de la estrella es prácticamente rígido y no es necesario incluirlo en la integración.

Al aumentar la profundidad de la envoltura (desde $\log P=15$ a 18.8), la tasa de crecimiento, σ , disminuye ligeramente como se ve en los modelos 103a y 103b. Del mismo modo, disminuye el período estas diferencias son más importantes para modelos con mayor temperatura efectiva como son los modelos 107a y b.

La contribución más importante a la inestabilidad de los modelos procede de las opacidades. El modelo 101a construido como el modelo 12 de VBA es decir, con la misma composición química ($X=0.9$), luminosidad ($M_V = 1$), temperatura (6850 K) y masa ($1.5 M_\odot$) pero con las opacidades de Los Alamos, es inestable en los tres primeros modos radiales de pulsación mientras que VBA, obtienen un modelo estable. Análogos resultados se obtienen para los modelos con otras composiciones químicas. Para ilustrar la mayor inestabilidad de nuestros modelos hemos reunido en la figura 19, las fronteras azules de inestabilidad que para los modelos de estrellas Scuti de composición normal ($X=0.7$), dan diversos autores, que se representan junto a los bordes rojo y azul observacionales (Breger, 1979). Esta frontera azul, se sitúa a aquella temperatura para la cual los modelos tienen una tasa de crecimiento nula ($\eta = 0$). Los modelos de mayor temperatura que la correspondiente a esta frontera, pa

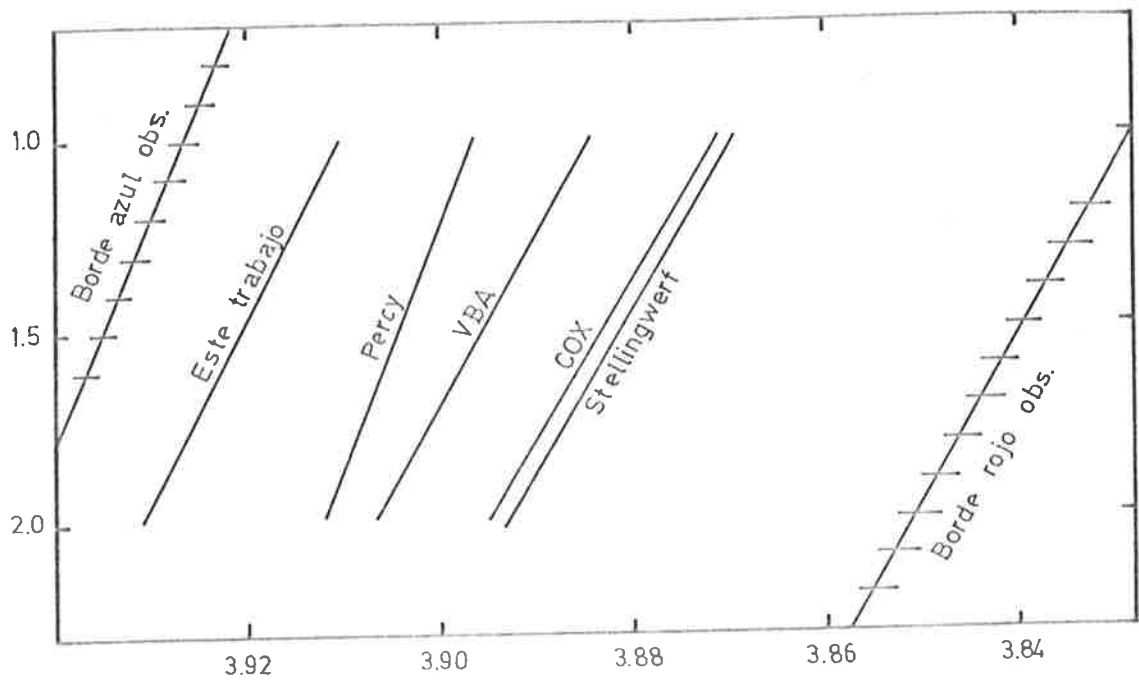


FIGURA 19.- Fronteras azules teóricas de la banda de inestabilidad calculadas por diversos autores: Stellingwerf (1979), COX, VBA, Percy (1977) y este trabajo. Corresponden a modelos con $X=0.7$. Como referencia se han dibujado también las fronteras roja y azul observacionales de Breger (1979).

ra una luminosidad dada, no pueden pulsar. Hasta ahora los modelos teóricos situaban esta frontera aproximadamente en el centro de la banda de inestabilidad, dejando sin explicar la variabilidad de las δ Scuti más calientes. Incluso los modelos de COX y Stellingwerf (1979) que usan nuestras mismas opacidades situaban las distintas fronteras azules más cerca del borde rojo observacional. Con nuestros cálculos hemos conseguido situar la frontera azul teórica muy próxima a la observacional haciendo desaparecer así la discrepancia entre teoría y observación ahora existente. Más aún, si se tiene en cuenta que las δ Scuti más calientes pulsan preferentemente en el primer armónico (Breger y Bregman, 1975), esta discrepancia desaparece totalmente porque nuestra frontera observacional para este modo de pulsación casi coincide con la teórica (Figura 24).

Los modelos de pulsación que se usan normalmente para cálculos lineales de inestabilidad y períodos, con incapaces de dar cuenta de la existencia del borde rojo de la banda de inestabilidad. Esto es simplemente una consecuencia de la manera aproximada de tratar la convección a base de la teoría de la longitud de mezcla. Se necesita el empleo de una teoría local de la convección dependiente del tiempo capaz de dar cuentas del acoplamiento dinámico y térmico de la convección y pulsación. Gonczi (1981), consigue reproducir con bastante exactitud la posición del borde rojo de la banda de inestabilidad con valores razonables del coeficiente de viscosidad turbulenta que incluye en sus cálculos hidrodinámicos; aunque la posición de este borde es muy sensible al valor que se adopte para dicho coeficiente.

Períodos.

El problema de los períodos y también el de la razón de períodos (π_1/π_0) es fundamental por su relación directa con la observación. En nuestros modelos de relación de períodos es función de la masa y la composición química, oscilando entre 0.769 y 0.758 (figura 20). Para un período π_0 dado, aumenta con la masa y también lo hace con la abundancia de helio, es decir, que es mayor en los modelos de composición química normal ($X=0.7$) que en los empobrecidos en helio ($X=0.9$). La razón π_1/π_0 es también mayor en nuestros modelos que en los de COX para una misma masa. No obstante, nuestros modelos no pueden explicar la razón de períodos observada en las AI Velorum bimodales, la mayoría de las cuales supera el valor de 0.770 e incluso llegan a 0.778 como en el caso de SX Phe.

Se necesitaría una disminución del contenido metálico (Z) o un aumento de la masa para obtener la relación observada en las AI Velorum. En este sentido, Cox et al (1979a), encuentran que los modelos de $1.5 M_{\odot}$ con un período fundamental $\pi_0=0.055$ ($\log \pi_0=-1.26$) y de composición química normal ($X=0.7$, $Z=0.02$), presentan una relación $\pi_1/\pi_0=0.757$, que alcanza el valor de 0.780 si se disminuye el contenido metálico a la mitad ($Z=0.01$). Por otra parte Stellingwerf (1979), dice que se puede obtener la relación de períodos que se quiera para cualquier masa razonable con tal de ajustar convenientemente la composición química; por ejemplo, para las AI Velorum, se puede obtener la razón de períodos correcta bien para modelos de masa pequeña ($0.4 M_{\odot}$) y abundancia metálica baja ($Z=0.005$) o bien para abundancias normales ($Z=0.02$) y masas mayores ($4M_{\odot}$). En consecuencia, no es posible determinar con certeza la masa de las estrellas variables basándose exclusivamente en la razón de períodos ob-

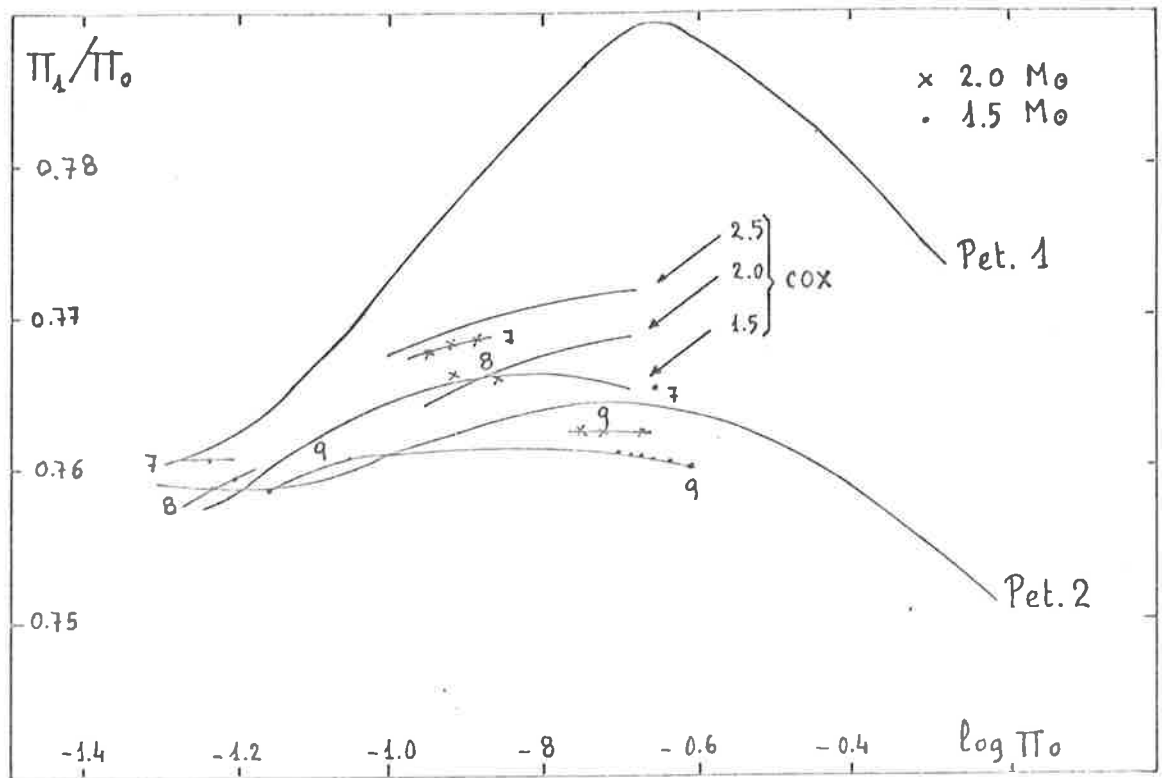


FIGURA 20.- Razón de periodos en función del periodo fundamental. Las curvas rotuladas 7,8.y 9 corresponden a nuestros modelos con $X=0.7, 0.8$ y 0.9 , respectivamente, de $1.5 M_{\odot}$ (·) y $2.0 M_{\odot}$ (x). También se incluyen los resultados de COX para modelos con $X=0.7$ de $1.5, 2.0$ y $2.5 M_{\odot}$. Y los modelos inhomogéneos (Pet.1) y homogéneos (Pet.2) de Petersen (1979).

servados.

En la misma figura 20, hemos representado la razón teórica de períodos que se obtienen con modelos de composición química no homogénea (Petersen, 1979). Estos modelos están enriquecidos en helio ($Y=0.03$) en las capas más externas y a partir de $\log T=5.5$ se vuelve a adoptar una composición normal ($Y=0.02$). De esta forma, se consiguen razones de períodos mucho mayores. Con el enriquecimiento de helio se pretende también dar cuenta de la mayor amplitud de las curvas de luz de las AI Velorum por ser el helio el principal agente de la inestabilidad, como estudiamos seguidamente.

Abundancia de helio e inestabilidad

Si se acepta la hipótesis de que las anomalías de abundancia se deben a la actuación de un mecanismo de difusión microscópica perfectamente eficiente, las envolturas de las estrellas metálicas, no deberían contener helio en absoluto. Luego podría pensarse que la variabilidad observada en algunas estrellas Del, se debe sólo a la acción desestabilizadora del hidrógeno.

Hemos encontrado, como ya lo había hecho COX, que la acción motriz del hidrógeno en la primera zona convectiva, es insuficiente para compensar el amortiguamiento radiativo que se produce en las capas internas. Hemos construido a tal efecto, dos modelos con $Y=0$ y $X=0.98$ (Modelos 117 y 121), ambos de $1.5 M_{\odot}$ y $M_p=1$ y con temperaturas efectivas de 6850K y 6590K. Ninguno de los dos modelos era pulsacionalmente inestable. No se han investigado temperaturas inferiores por-

que ya el segundo modelo cae fuera de la banda de inestabilidad observacional. Dado que para mantener la pulsación es necesaria la presencia de helio, los cálculos se han encaminado a buscar la cantidad mínima necesaria para explicar la variabilidad de las estrellas situadas en la zona del diagrama H-R en que coexisten pulsación y metalicidad. La frontera observacional entre estrellas metálicas pulsantes y no pulsantes ha sido establecida por Garrido et al (1980), quienes la sitúan a $\log Te=3.89$ en $M_b=1$ y discurre paralelamente a las fronteras observacionales roja y azul de la banda de inestabilidad.

En primer lugar examinemos la evolución de la inestabilidad pulsacional al ir disminuyendo la abundancia de helio con ayuda de las integrales de energía (Figura 21) y sus derivadas (figura 22). Como expusimos en el capítulo anterior la integral de energía representa el trabajo que sobre una capa determinada efectúan todas las capas sobreayacentes. La pendiente, positiva o negativa de esta curva indica, respectivamente, qué zonas contribuyen a mantener la pulsación o la amortiguan. El valor de la integral de energía en el fondo permite saber si la estrellas en su conjunto es pulsacionalmente inestable o no. Un valor positivo, aunque sea próximo a cero, indicará una preponderancia de la excitación sobre la pulsación y por ende, una inestabilidad del modelo.

Teniendo estos comentarios presentes, la figura 21 permite identificar las zonas de excitación de los modelos. En el modelo más rico en helio ($X=0.7$, $Y=0.28$), las zonas de excitación coinciden con las dos zonas convectivas; aunque el criterio que realmente fija su posición es la ionización de los elementos mayoritarios H y He, pero como ya vimos en el capítulo anterior, la disminución del coeficiente adiabático y del peso molecular medio que introduce la ionización

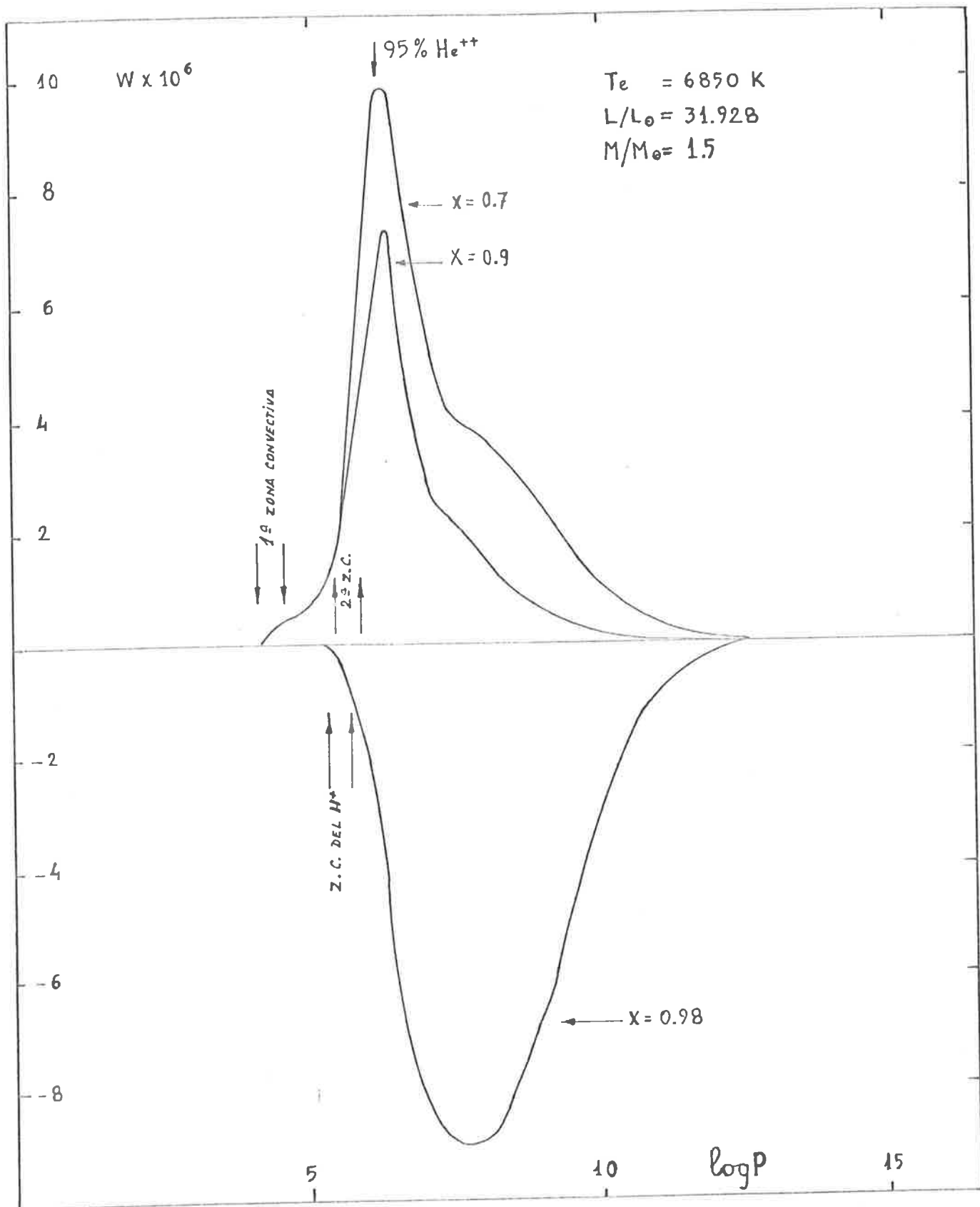


FIGURA 21.- Integrales de energía.

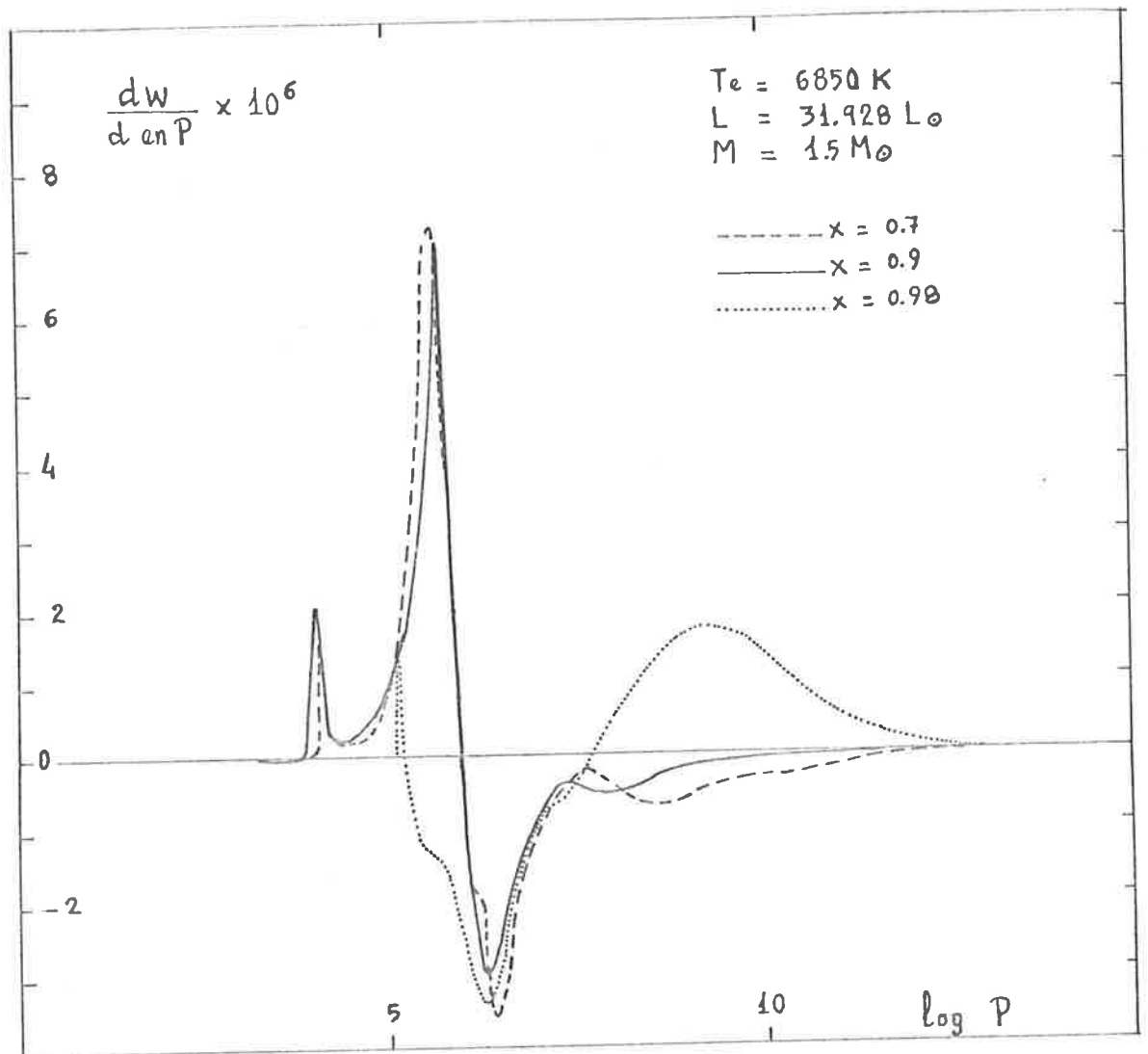


FIGURA 22.- Trabajo por zona para modelos de distinta composición.

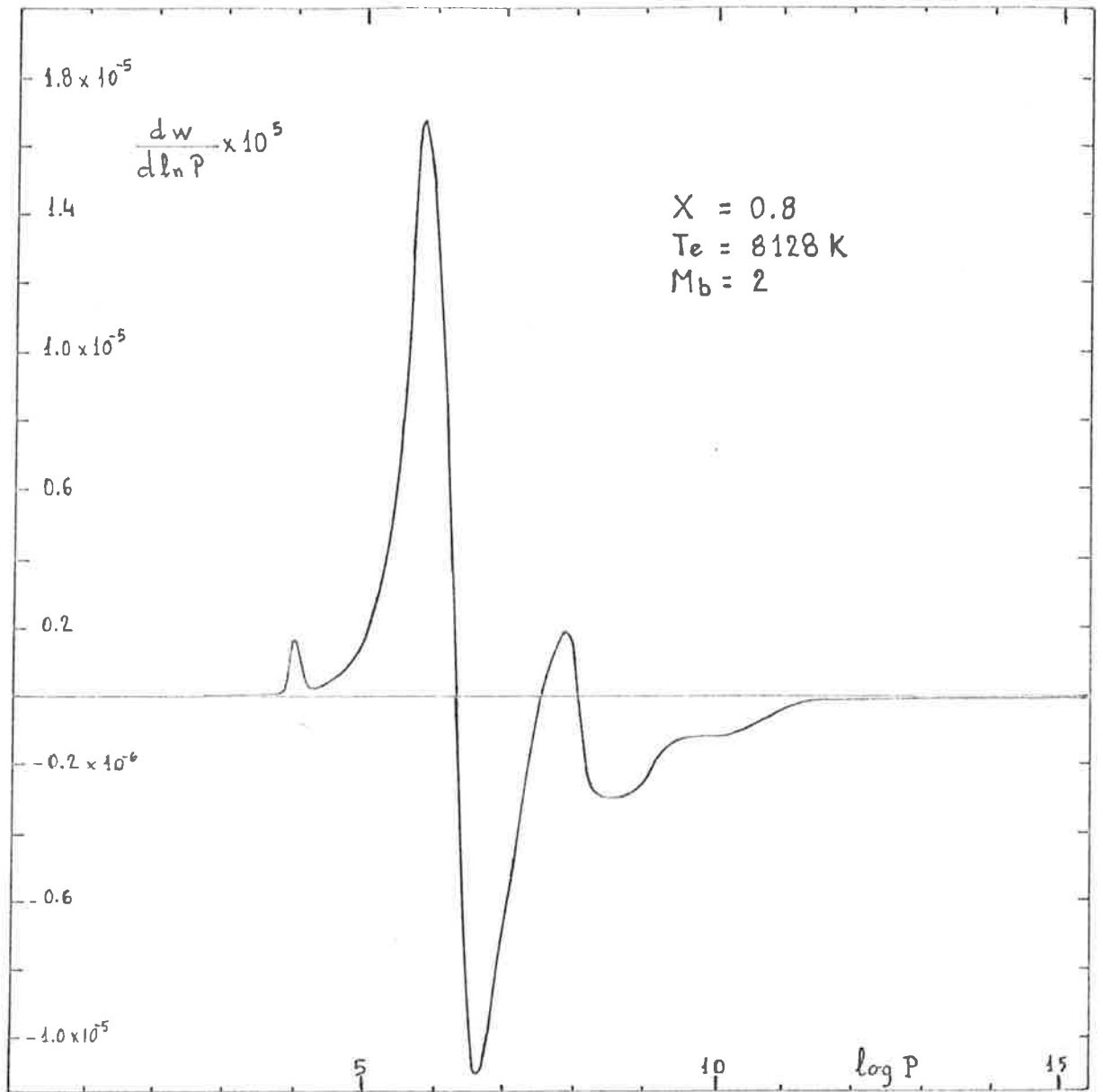


FIGURA 23.- Trabajo por zona en un modelo con $X=0.8$.

son los que determinan la aparición de la convección. La ionización del hidrógeno y la primera ionización del helio coinciden efectivamente con la primera zona convectiva y la segunda ionización del helio con la otra zona convectiva (ver la figura 16). En el modelo $X=0.9$, más pobre en helio ($Y=0.08$), la segunda zona convectiva ha desaparecido pero sin embargo la mayor parte de la excitación pulsacional sigue procediendo de la segunda ionización del He. La pulsación se amortigua totalmente en los modelos que no contienen helio ($X=0.98$), cuya integral de energía es siempre negativa.

Las zonas de excitación se distinguen más claramente en la figura 22, donde se ha representado la derivada de la integral de energía, es decir, el trabajo realizado en cada capa de la estrella. Puede comprobarse que en el modelo con $X=0.98$ hay una pequeña excitación correspondiente a la ionización del hidrógeno totalmente insuficiente para desestabilizar globalmente a la estrella. En los modelos con $X=0.7$ y $X=0.9$, se aprecian, a parte de la excitación en ambas zonas de ionización, una zona menos amortiguada próxima a $\log P=8$ que coincide con el "bump" de opacidad, descrito por Stellingwerf (1979) que mostrábamos en la figura 17. Por tratarse de modelos muy poco inestables esta zona no aparece claramente como excitatriz de la pulsación por ello hemos elegido otro modelo más inestable (figura 23), en el que se aprecia con toda claridad la contribución del "bump" de opacidad a la desestabilización pulsacional.

Fronteras teóricas de inestabilidad.

Los cálculos de inestabilidad pulsacional efectuados con modelos de distinta composición química, muestran que el borde azul de inestabilidad, para un modo de pulsación dado, se desplaza hacia temperaturas progresivamente mayores a medi

da que aumenta el contenido de helio (figura 24). Este es un resultado ya conocido en las cefeidas clásicas (Cox et al, 1973; Iben y Tuggle, 1975), e incluso en modelos de estrellas menos evolucionadas como en las de COX. La principal novedad aportada por nuestros cálculos, es que estas fronteras se sitúan a temperaturas mayores que lo hasta ahora calculado.

Para los modelos más ricos en helio ($Y=0.28$ e $Y=0.18$) los armónicos primero y segundo son más inestables que el modo fundamental de pulsación y las respectivas fronteras de inestabilidad más azules. Este comportamiento típico, en el sentido de que ya se presentaba en modelos de cefeidas que acabamos de citar, se invierte cuando el contenido de helio es más bajo. Los modelos con $Y=0.08$ son más inestables en el modo fundamental que en el primer armónico y pulsán en el segundo armónico.

En la figura 25 hemos expresado gráficamente este resultado dibujando en que forma varía la posición de la frontera teórica de inestabilidad con la abundancia de helio para los tres primeros modos de pulsación. Hemos incluido la frontera teórica de COX para el modo fundamental como referencia.

Se han propuesto argumentos a favor de la mayor inestabilidad de los modos de pulsación más altos (Stellingwerf, 1979): primero que éstos modos tienen una energía cinética menor para una amplitud dada, y segundo, que el gradiente de las funciones propias es mayor para armónicos más elevados lo que produce un factor de escala mayor para el trabajo PdV.

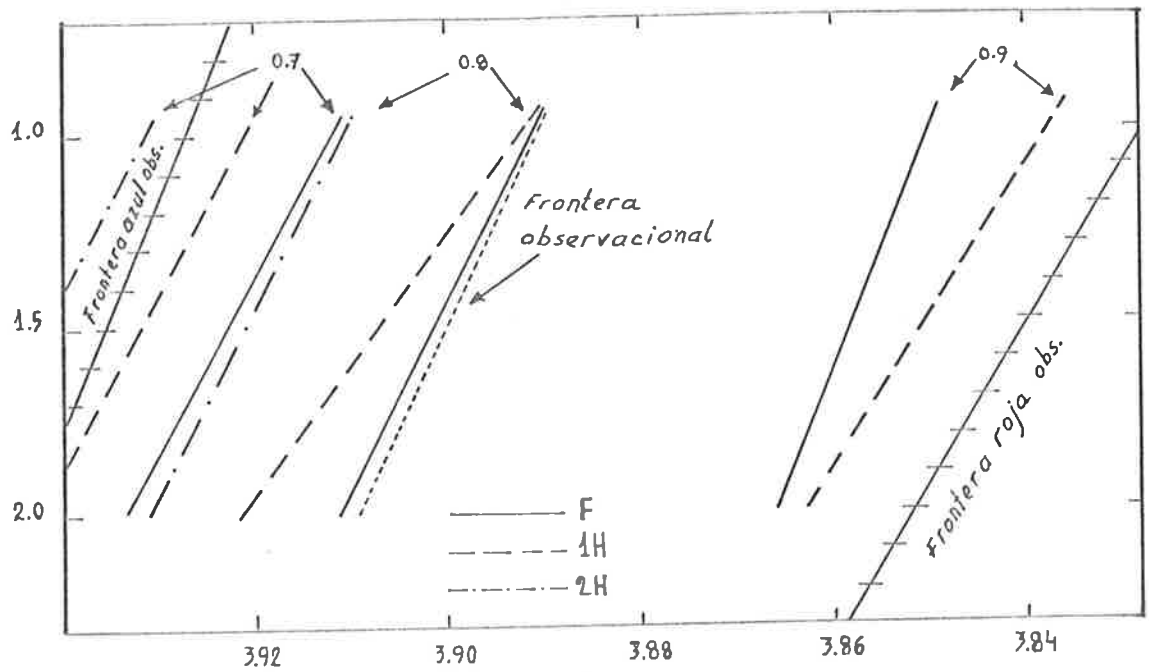


FIGURA 24.- Posición de las fronteras azules teóricas para distintas composiciones químicas y los tres primeros modos de pulsación.

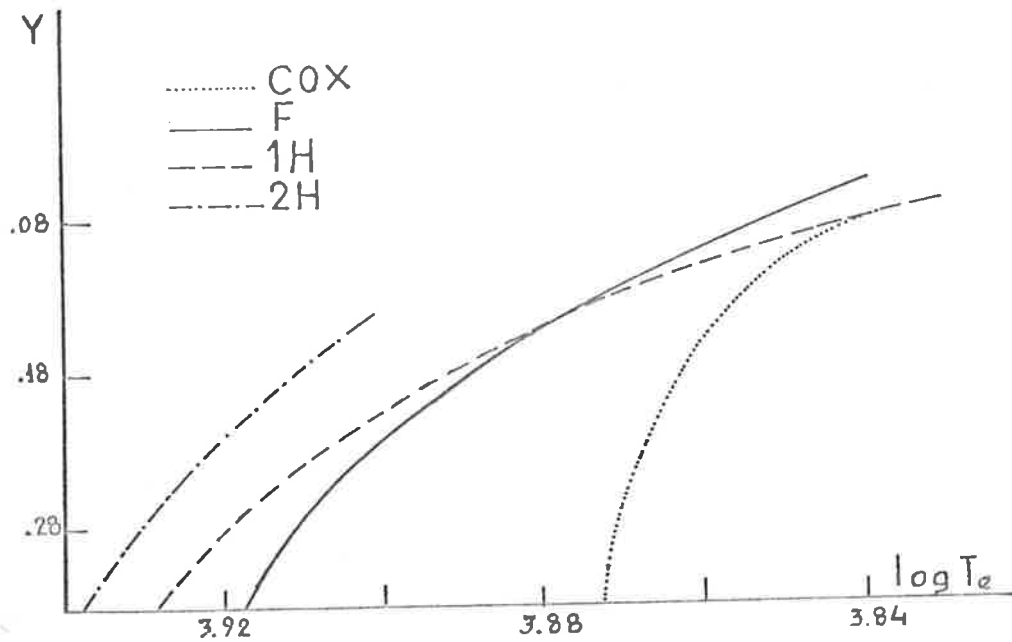


FIGURA 25.- La posición de la frontera azul teórica en función de la abundancia de helio para modelos a $M_b=1$. Se incluye como referencia la curva de COX para el modo fundamental.

Variabilidad de estrellas A con líneas metálicas.

Por último, queremos señalar un resultado importante para el que nos referimos nuevamente en la figura 24. Además de las fronteras teóricas hemos colocado la frontera observacional de Garrido et al (1930) que establece una separación entre las estrellas anómalas pulsantes y no pulsantes, para lo que también puede verse la figura 28 del capítulo siguiente. Sólo las estrellas situadas a la derecha de este límite, no pueden manifestar simultáneamente anomalías de abundancia e inestabilidad pulsacional.

Esta frontera observacional coincide prácticamente con la frontera teórica para la pulsación de modelos con $X=0.8$ e $Y=0.18$, lo que nos permite establecer una cota inferior para el contenido de helio en las estrellas δ Del pulsantes. Esta cota es realmente función de la temperatura efectiva de la estrella (figura 25) pero podemos fijarla en un 20%, ya que sólo las estrellas más frías, muy próximas al borde observacional, pueden pulsar con sólo un 10% de helio.

Vemos, pues, que los cálculos de pulsación de modelos de estrellas de la banda de inestabilidad con un contenido bajo de helio, que pueden representar a las envolturas de estrellas en las que por la acción de la difusión microscópica aumenta la abundancia metálica y disminuye la de helio, muestran que estas estrellas podrían pulsar si en su envolturas tienen al menos un 20% de helio.

El hecho de que en las estrellas δ Delphini el calcio tenga una abundancia normal y no sea subabundante como en las estrellas Am, indica que la acción de la difusión es menos efectiva en las δ Del que en las Am. Es decir, que puede existir algún agente que mezcle parcialmente la envoltura de cal-

cio. Este mecanismo de mezcla sería, por otra parte, incapaz de impedir la difusión de los metales sobre los cuales actúa una fuerza radiativa mayor que sobre el calcio. Ahora bien, la acción de este agente de mezcla sería suficiente para mantener una proporción adecuada de helio en las zonas exci-tación de la pulsación (hemos visto que basta un 20%) explicándose así la variabilidad de estas estrellas.

Una consecuencia importante de esta interpretación es, que todas las estrellas δ Delphini, han de ser variables. Puesto que tienen una abundancia de calcio normal, ha de actuar necesariamente el mismo mecanismos de mezcla parcial en todas ellas.

Hay que hacer, no obstante, una salvedad. Cuando decimos que "todas" las δ Delphini han de ser variables, la afirmación hay que entenderla en el mismo sentido en que se aplica a las estrellas normales. Sabemos que sólo un 30% de la estrellas composición química anormal se manifiestan como variables del tipo δ Scuti, aunque, teóricamente, debían serlo todas. Así pues, cabe esperar una proporción de variables semejantes entre las estrellas δ Delphini. Este punto lo analizamos en el capítulo siguiente.

TABLA 1.

N°	X	T _e	L/L _o	log P _i	log T _i	log ρ _i	R _i /R	M _i /M
Obs.	M/M _o	log T _e	M _b	log P _c	log T _c	log ρ _c	R _c /R	M _c /M
101a	0.9	6850	31.93	19.0	7.75	3.06	8.9E-3	0.32
(1)	1.5	3.836	1.0	4.48	4.36	-8.09	0.996	2.80E-9
101b	0.9	6850	31.93	18.8	7.70	2.91	1.0E-2	0.33
(2)	1.5	3.836	1.0	4.28	4.32	-8.23	0.997	1.27E-9
102a	0.7	6850	31.93	18.8	7.73	2.94	7.5E-3	0.21
(1)	1.5	3.836	1.0	5.70	4.71	-7.15	0.979	4.44E-8
102b	0.7	6850	31.93	18.8	7.73	2.94	7.5E-3	0.21
(2)	1.5	3.836	1.0	5.70	4.71	-7.16	0.978	4.05E-8
102c	0.7	6850	31.93	18.09	7.55	2.41	1.4E-2	0.24
	1.5	3.836	1.0	5.69	4.71	-7.16	0.978	4.07E-8
103a	0.9	6850	31.93	18.8	7.70	2.91	1.04E-2	0.33
	1.5	3.836	1.0	4.29	4.32	-8.23	0.997	1.47E-9
103b	0.9	6850	31.93	15.0	6.79	2.0	1.3E-1	0.85
	1.5	3.836	1.0	4.29	4.32	-8.23	0.997	1.4E-9
103c	0.9	6850	31.93	18.09	7.52	2.38	1.85E-2	0.39
	1.5	3.836	1.0	4.29	4.32	-8.24	0.997	1.4E-9
104	0.9	6920	31.93	18.8	7.70	2.91	1.07E-2	0.33
	1.5	3.840	1.0	4.27	4.31	-8.26	0.997	1.29E-9
105	0.9	7000	31.93	18.8	7.70	2.91	1.1E-2	0.33
	1.5	3.845	1.0	4.24	4.31	-8.26	0.997	1.11E-9
106	0.9	7080	31.93	18.8	7.70	2.91	1.1E-2	0.33
	1.5	3.850	1.0	4.21	4.31	-8.28	0.997	9.51E-10
107a	0.9	7040	31.93	18.8	7.70	2.91	1.1E-2	0.33
	1.5	3.848	1.0	4.23	4.31	-8.27	0.997	1.03E-9
107b	0.9	7040	31.93	15.0	6.79	2.05	1.4E-1	0.76
	1.5	3.848	1.0	4.23	4.31	-8.27	0.997	1.03E-9
108	0.9	6760	31.93	18.8	7.70	2.91	1.01E-2	0.33
	1.5	3.830	1.0	4.32	4.33	-8.20	0.997	1.75E-9
109	0.9	6600	31.93	18.8	7.70	2.91	9.62E-3	0.33
	1.5	3.820	1.0	4.37	4.34	-8.17	0.997	2.37E-9
110	0.9	6850	31.93	18.8	7.73	2.88	7.66E-3	0.18
	2.0	3.836	1.0	4.38	4.33	-8.14	0.998	1.01E-9

N°	X	T _e	L/L _O	log P _i	log T _i	log ρ _i	R _i /R	M _i /M
Obs.	M/M _O	log T _e	M _b	log P _C	log T _C	log ρ _C	R _C /R	M _C /M
111	0.9 1.5	7000 3.845	12.25 2.0	18.8 4.52	7.66 4.33	2.95 -9.79	1.35E-2 0.998	0.19 3.14E-10
112	0.9 1.5	7250 3.860	12.25 2.0	18.8 4.45	7.66 4.31	2.95 -8.05	1.46E-2 0.998	0.19 1.99E-10
113	0.9 2.0	7000 3.845	31.93 1.0	18.8 4.33	7.73 4.32	2.88 -8.18	8.01E-3 0.998	0.18 7.60E-10
114	0.9 2.0	6600 3.820	31.93 1.0	18.8 4.45	7.73 4.35	2.88 -8.09	7.11E-3 0.998	0.19 1.62E-9
115	0.9 1.5	7000 3.845	7.73 2.5	18.8 4.68	7.65 4.34	2.96 -7.85	1.34E-2 0.999	0.14 1.85E-10
116	0.9 1.5	7000 3.845	4.87 3.0	18.8 4.82	7.65 4.35	2.96 -7.72	1.16E-2 0.999	0.099 9.59E-11
117	0.98 1.5	6850 3.836	31.93 1.0	18.8 5.5	7.69 4.64	2.90 -7.36	1.13E-2 0.994	0.38 2.06E-8
118	0.7 2.0	7760 3.890	31.93 1.0	18.8 5.77	7.77 4.72	2.90 -7.07	5.38E-3 0.986	0.10 1.05E-8
119	0.7 2.0	7940 3.900	31.93 1.0	18.8 5.78	7.78 4.72	2.89 -7.08	5.56E-3 0.986	0.10 8.81E-9
120	0.7 2.0	8125 3.910	31.93 1.0	18.7 5.78	7.75 4.72	2.82 -7.08	6.25E-3 0.987	0.10 7.32E-9
121	0.98 1.5	6590 3.819	31.93 1.0	18.8 5.57	7.69 4.66	2.90 -7.31	1.04E-2 0.993	0.38 3.52E-8
122	0.7 1.5	8320 3.920	12.25 2.0	18.8 5.93	7.72 4.32	2.95 -6.92	9.9E-3 0.989	0.099 2.24E-9
123	0.7 1.5	8510 3.930	12.25 2.0	18.8 5.93	7.72 4.72	2.95 -6.92	1.0E-2 0.990	0.09 1.87E-9
124	0.8 2.0	7585 3.880	31.93 1.0	18.8 5.68	7.75 4.69	2.89 -7.18	7.0E-3 0.980	0.14 7.96E-9
125	0.8 2.0	7943 3.900	31.93 1.0	18.8 5.69	7.75 4.69	2.89 -7.17	7.91E-3 0.980	0.13 5.48E-9
126	0.8 1.5	8128 3.910	12.25 2.0	18.8 5.86	7.69 4.70	2.95 -7.01	1.43E-2 0.989	0.14 1.75E-9
127	0.8 1.5	8317 3.920	12.25 2.0	18.8 5.86	7.69 4.70	2.95 -7.01	0.15E-2 0.990	0.13 1.44E-9
128 (3)	0.9 1.5	6850 3.836	31.93 1.0	19.0 4.29	7.75 4.32	3.06 -8.22	8.9E-3 0.997	0.32 1.42E-9

N°	X	T _e	L/L _o	log P _i	log T _i	log ρ _i	R _i /R	M _i /M
Obs.	M/M _o	log T _e	M _b	log P _c	log T _c	log ρ _c	R _c /R	M _c /M
129	0.9	6850	31.93	19.0	7.75	3.06	8.90E-3	0.32
(4)	1.5	3.836	1.0	4.51	4.37	-8.06	0.996	3.16E-9
130	0.9	6650	31.93	19.0	7.75	3.06	8.33E-3	0.32
(4)	1.5	3.823	1.0	4.69	4.42	-7.92	0.995	6.59E-9

- - - - -

Obs.:

- (1) $1/H_p = 1.5$; $T(\tau)$ de Latour (1970).
- (2) $1/H_p$ variable; $T(\tau)$ de Latour (1970).
- (3) $1/H_p = 0.05$; $T(\tau)$ habitual.
- (4) $1/H_p = 1.5$; $T(\tau)$ habitual.

El subíndice "i" se aplica a las magnitudes en el fondo de la envoltura. El "c" se aplica a las magnitudes en el fondo de la última zona convectiva. M_c/M es la fracción de masa contenida en las zonas convectivas.

TABLA 2

N°	X M/M _o	log T _e M _b	Π ₀	Π ₁ Π ₁ /Π ₀	Π ₂ Π ₂ /Π ₀	η ₀	η ₁	η ₂
101a	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217662	0.165524 0.7605	0.133111 0.6115	4.5E-3	3.2E-2	7.0E-2
101b	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217171	0.165152 0.7605	0.132821 0.6116	2.3E-4	-7.9E-3	-1.2E-1
102a	0.7 1.5	3.836 1.0	0.217321	0.166327 0.7654	0.133450 0.6141	5.3E-3	3.5E-2	1.0E-1
102b	0.7 1.5	3.836 1.0	0.216887	0.166001 0.7654	0.133208 0.6142	4.6E-3	3.0E-2	6.1E-2
102c	0.7 1.5	3.836 1.0	0.216933	0.166076 0.7656	0.133271 0.6143	4.9E-3	3.0E-2	5.6E-2
103a	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217200	0.165213 0.7606	0.132867 0.6117	1.1E-3	3.2E-4	-8.6E-2
103b	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217439	0.165706 0.7621	0.133580 0.6143	1.1E-3	1.3E-3	-7.5E-2
103c	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217200	0.165213 0.7606	0.132865 0.6117	1.1E-3	5.5E-4	-8.6E-2
104	0.9 1.5	3.840 1.0	0.210439	0.160093 0.7608	0.128755 0.6118	6.1E-4	-1.5E-3	-8.3E-2
105	0.9 1.5	3.845 1.0	0.203053	0.154498 0.7609	0.124260 0.6120	1.8E-4	-2.9E-3	-7.6E-2
106	0.9 1.5	3.850 1.0	0.196019	0.149167 0.7610	0.119973 0.6120	-1.9E-4	-4.2E-3	-7.0E-2
107a	0.9 1.5	3.848 1.0	0.199493	0.151800 0.7609	0.122090 0.6120	7.4E-5	-2.7E-3	-6.9E-2
107b	0.9 1.5	3.848 1.0	0.199767	0.152363 0.7627	0.122899 0.6152	1.5E-4	-1.7E-3	-5.9E-2
108	0.9 1.5	3.830 1.0	0.226337	0.172131 0.7605	0.138418 0.6116	1.5E-3	6.2E-4	-1.0E-1
109	0.9 1.5	3.820 1.0	0.243932	0.185461 0.7603	0.149105 0.6113	2.6E-3	2.4E-3	-1.2E-1
110	0.9 2.0	3.836 1.0	0.186830	0.142481 0.7626	0.114571 0.6132	1.9E-4	1.2E-4	-2.0E-2

N°	X M/M _o	log T _e M _b	Π ₀	Π ₁ Π ₁ /Π ₀	Π ₂ Π ₂ /Π ₀	η ₀	η ₁	η ₂
111	0.9 1.5	3.845 2.0	0.097790	0.074424 0.7611	0.059659 0.6101	9.4E-5	3.0E-4	-5.5E-3
112	0.9 1.5	3.860 2.0	0.087913	0.066900 0.7610	0.053594 0.6096	2.6E-5	4.4E-5	-4.0E-3
113	0.9 2.0	3.845 1.0	0.174838	0.133331 0.7626	0.107168 0.6130	5.5E-5	-9.0E-5	-1.4E-2
114	0.9 2.0	3.820 1.0	0.209444	0.159736 0.7627	0.128521 0.6136	6.9E-4	3.0E-3	-1.5E-2
115	0.9 1.5	3.845 2.5	0.069140	0.052466 0.7588	0.042002 0.6075	3.2E-5	1.3E-4	-1.5E-3
116	0.9 1.5	3.845 3.0	-	-	-	-	-	-
117	0.98 1.5	3.836 1.0	0.224178	0.168943 0.7536	0.135647 0.6051	-2.4E-2	-2.3E-1	-8.3E-1
118	0.7 2.0	3.890 1.0	0.128041	0.098414 0.7686	0.079204 0.6186	1.7E-4	2.8E-3	1.7E-2
119	0.7 2.0	3.900 1.0	0.119488	0.091790 0.7682	0.073921 0.6187	7.8E-5	1.8E-3	1.3E-2
120	0.7 2.0	3.910 1.0	0.111485	0.085600 0.7678	0.068995 0.6189	6.3E-5	9.4E-4	8.9E-3
121	0.98 1.5	3.819 1.0	0.253786	0.191231 0.7535	0.153185 0.6036	-3.2E-3	-2.9E-2	-9.4E-2
122	0.7 1.5	3.920 2.0	0.058107	0.044219 0.7610	0.035740 0.6151	2.4E-5	5.1E-4	3.4E-3
123	0.7 1.5	3.930 2.0	0.054281	0.041295 0.7608	0.033445 0.6161	7.5E-6	3.0E-4	2.3E-3
124	0.8 2.0	3.880 1.0	0.136965	0.104939 0.7662	0.084257 0.6152	1.1E-4	2.2E-3	1.4E-2
125	0.8 2.0	3.900 1.0	0.119133	0.091142 0.7674	0.073161 0.6141	-1.1E-4	-1.7E-5	5.0E-3
126	0.8 1.5	3.910 2.0	0.062250	0.047287 0.7596	0.037952 0.6097	3.2E-6	3.1E-4	2.5E-3

N°	X	log T _e	Π ₀	Π ₁	Π ₂	η ₀	η ₁	η ₂
	M/M _o	M _b		Π ₁ /Π ₀	Π ₂ /Π ₀			
127	0.8 1.5	3.920 2.0	0.058089	0.044092 0.7590	0.035416 0.6097	-1.7E-3	5.1E-5	1.4E-3
128	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217203	0.165216 0.7606	0.132868 0.6117	1.1E-3	1.2E-3	-8.2E-2
129	0.9 1.5	3.836 1.0	0.217710	0.165602 0.7606	0.133180 0.6117	4.7E-3	3.4E-2	7.6E-2
130	0.9 1.5	3.823 1.0	0.239166	0.181856 0.7604	0.146203 0.6113	5.1E-3	2.9E-2	2.5E-2

Resumen de los periodos (Π) y tasas de crecimiento (η) para los modos fundamental (0), primer armónico (1) y segundo armónico (2), en función de la masa (M/M_o), composición química (X), temperatura efectiva y magnitud absoluta (M_b).

4.- FOTOMETRIA DE ESTRELLAS δ DELHINI

Presentamos en este capítulo algunos resultados sobre la variabilidad de las estrellas δ Delphini, basados tanto en observaciones propias como en una recopilación de observaciones de otros autores.

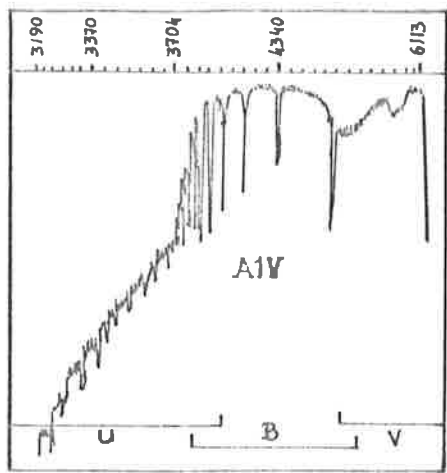
En primera lugar, vamos a describir brevemente, las características de los sistemas fotométricos empleados: el UBV de Johnson y el uvby de Strömgren. Explicaremos en qué forma se hace la calibración fotométrica de magnitudes absolutas y temperaturas efectivas que permiten situar a las estrellas de la banda de inestabilidad sobre el diagrama H-R.

Seguidamente exponemos los resultados de la fotometría diferencial, es decir, de aquella cuyo objeto es determinar la variabilidad o constancia de la estrella en estudio por comparación con estrellas constantes conocidas.

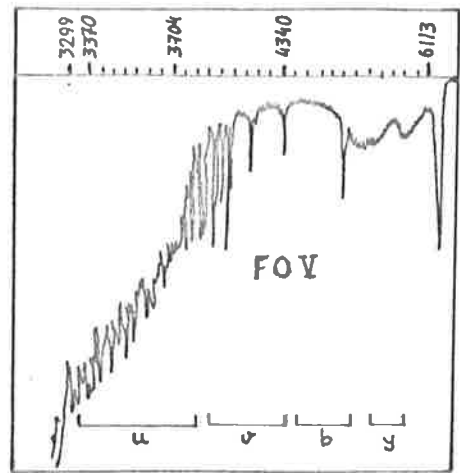
Por último, intentamos deducir las consecuencias que puedan tener la variabilidad de estas estrellas sobre la teoría de pulsación y de difusión.

4.1 LOS SISTEMAS FOTOMETRICOS DE JOHNSON Y STRÖNGREN.

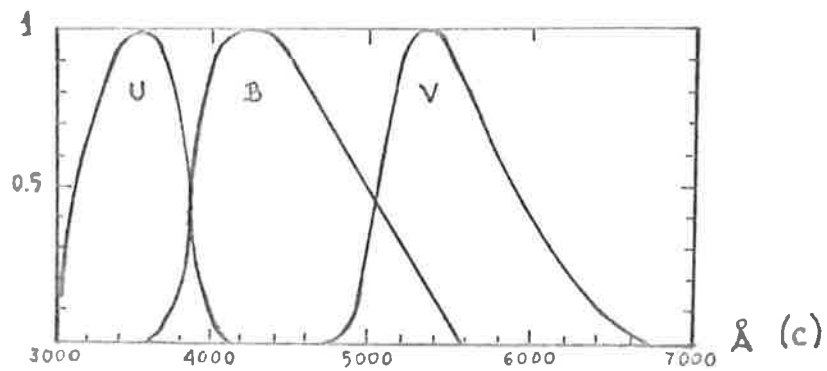
El sistema fotométrico de Johnson está constituido por tres (U, B, V) de banda ancha ($\sim 1000 \text{ \AA}$) centrados en las longitudes de onda siguientes: 3500 \AA (U), 4300 \AA (B) y 5500 \AA (V). en la figura 26, se muestran las curvas de transmisión de estos filtros y se compara su posición con el espectro de una estrella A1V. Puede comprobarse que la discontinuidad de Balmer, situada a unos 3700 \AA , afecta tanto a las medidas en U



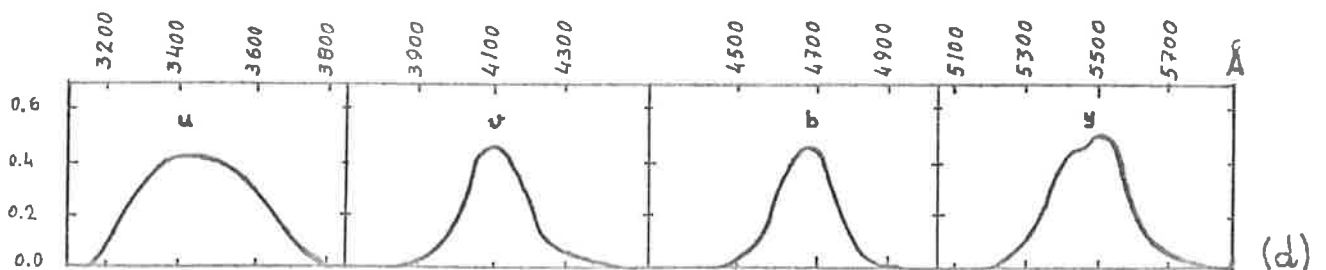
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 26.- (a) y (b) espectros de dos estrellas situadas a ambos lados de la banda de inestabilidad.

(c) Curvas de transmisión de los filtros de Johnson.

(d) Idem. de Strömgen.

como en B. Por tanto, el índice U-B permite ver como varía la altura de esta discontinuidad. La diferencia de magnitudes B-V, guarda una buena correlación con el tipo espectral de la estrella por lo que es un buen indicador de temperatura. Un diagrama que represente la magnitud V frente al índice de color B-V, guarda una buena correlación con el tipo espectral de la estrella por lo que es un indicador de temperatura. Un diagrama que represente la magnitud V frente al índice de color B-V, se puede interpolar como un diagrama H-R. No obstante es preferible construir este tipo de diagramas basándose en fotometría de banda más estrecha, como el de Strömgren, sobre todo cuando se trata de estrellas relativamente brillantes, proque se obtiene mayor precisión.

El sistema fotométrico UBV es útil para estudiar la variabilidad de estrellas de las que sólo podemos recibir un flujo de radiación pequeño, bien porque éste sea débil o bien porque se emplee un instrumento de pequeño diámetro. En nuestro caso, lo hemos utilizado con el telescopio de 30 cm del Mojón de trigo en Sierra Nevada, que habitualmente emplea el Instituto.

Cuando se pretende hacer fotometría absoluta con fines de calibración en M_V y T_e , de estrella A y F sobre todo, se emplea el sistema fotométrico de cuatro colores de Strömgren que suele completarse con la medida del índice β .

El sistema de Strömgren consta de cuatro filtros (u, v, b, y) de anchura intermedia (entre 100 y 380 Å), centrados, respectivamente, en 3500, 4100, ⁴³⁰⁰y 5500 Å (figura 26).

El índice β es la diferencia de magnitud entre dos filtros 30 y 150 Å de anchura centrados sobre la línea H_{β} del hidrógeno (4861 Å) y mide la anchura equivalente de esta línea.

En las estrellas A y F este índice está correlacionado con la temperatura efectiva, según la relación dada por Petersen y Jorgensen (1972)

$$T_e = 6850 + 1250 (\beta - 2.684) / 0.144$$

que ya comentamos en el capítulo primero.

A partir de las magnitudes medidas en las cuatro bandas uvby, se definen los tres índices siguientes:

b-y: índice de color, que es un buen indicador del tipo espectral.

$c_1 = (u-v) - (v-b)$: diferencia de color, que mide la discontinuidad de Balmer.

$m_1 = (v-b) - (b-y)$: diferencia de color, que es sensible a la presencia de líneas metálicas.

En las estrellas A y F, el índice c_1 es un buen indicador de la luminosidad. Su valor aumenta con el alejamiento respecto a la secuencia principal. El índice m_1 es en general un indicador de composición química y en las estrellas A y F, en particular, es sensible a la metalicidad.

Los índices medidos directamente están afectados por el enrojecimiento interestelar. Los índices desenrojados se calculan en función del enrojecimiento $E(b-y)$ del índice de color (b-y)

$$E(b-y) = (b-y) - (b-y)_0$$

donde el subíndice cero se aplica al índice desenrojado. El cálculo de $(b-y)_0$, depende del tipo espectral de la estre-

lla (Philip et al, 1976). Los otros índices se desenrojecen también en función de $(b-y)_0$. Se tiene así:

$$c_0 = c_1 - 0.25 E(b-y)$$

$$m_0 = m_1 + 0.32 E(b-y)$$

Se utilizan además otros dos índices que miden el alejamiento respecto a las condiciones típicas de la secuencia principal (Zero Age Main Sequence) que son:

$$\delta c_1 = c_0 - c_{ZAMS}$$

$$\delta m_1 = m_{ZAMS} - m_0$$

Un δc_1 positivo indica que la estrella es más luminosa que una estrella del mismo color sobre la secuencia principal. Un valor alto de δm_1 suele estar asociado a las estrellas con anomalías metálicas de abundancia (A_m), aunque también lo presentan las estrellas más evolucionadas.

Expliquemos finalmente, como se determinan M_V a partir de estos índices de estrellas con β comprendido entre 2.72 y 2.88, que son la mayoría de las que pueblan la parte baja de la banda de inestabilidad (figura 1).

El índice $(b-y)_0$, se calcula para estas estrellas según las fórmula (Crawford 1975a)

$$(b-y)_0 = 2.943 - 0.09 \delta c_1 - 0.2 \delta m_1$$

para $\delta m_1 < 0$, y se presciende del término δm_1 si éste es positivo.

En este rango de temperatura la calibración en magnitud absoluta, se basa en la fórmula de Crawford (1975)

$$M_V = M_{ZAMS} - f \delta c_1$$

donde f toma valores comprendidos entre 8 y 10, según el valor de $(b-y)_0$. Esta calibración es válida sólo si $\delta c_1 < 0.28$. El error con que se calcula M_V es de unas 0.5 mag según se estima de los errores de cada uno de los índices que intervienen.

4.2 OBSERVACIONES DE ESTRELLAS TIPO δ DELPHINI.

Observaciones de δ Del

Durante cinco días de los meses de julio y agosto de 1975, se realizaron observaciones de la estrella δ Del, prototipo del grupo, con el telescopio de 30 cm del Mojón del Trigo. Hemos procedido a la reducción y análisis de estos datos y exponemos seguidamente los resultados.

Del es una estrella brillante ($m_V = 4.53$) que ya figuraba como variable en el primer catálogo de estrellas Scuti de Eggen (1957). Este autor, le asignó un período de 0.13505 días. Leung y Wehlau (1967), encontraron que la estrella tiene un comportamiento multiperódico encontrando un período principal de 0.1568. Los restantes períodos que encuentran (hasta seis), tienen asociadas amplitudes muy pequeñas son de dudosa credibilidad.

En general, las observaciones de esta estrella muestran ya uno, ya otro período de los reseñados. La explicación podría estar en que esta estrella es una binaria espectroscópica.

Duncan y Preston (1980), han encontrado a partir de espectrogramas con una resolución de $5 \text{ \AA}/\text{nm}$, que ambos componentes son pulsantes, con períodos de $0^{\text{d}}.158$ y $0^{\text{d}}.134$ respectivamente. El períodos orbital que obtienen estos autores es de $40^{\text{d}}.58$.

La duplicidad de esta estrella, no afecta para nada a su clasificación como estrella A anómala. En efecto, los análisis detallados de abundancia de Reimers (1976), confirman que ambas componentes son estrellas de tipo Delphini, con una ligerísima subabundancia de Ca y Sc y una superabundancia de los elementos pesados Sr, Y, Zr, Ba, Ce, La y Eu.

Nuestras observaciones se han hecho en el filtro B de nuestro sistema natural, muy próximo al homólogo de Johnson. La elección de un sólo filtro obedece a la necesidad de obtener una mejor resolución temporal. Se emplea el filtro B porque en él la amplitud de variación es mayor.

Se ha utilizado una única estrella de comparación ζ Del, de magnitud parecida ($m_v=4.69$) y tipo espectral próximo (A2) al de la estrella problema. Las medidas se realizaron con un electrómetro de corriente continua y un registrador gráfico. Una descripción detallada de la instrumentación utilizada se encuentra en A. Rolland (1977). Cada medida consistió en una integración de 60 a 90 segundos. Se midieron alternativamente la estrella de comparación y la estrella en estudio, intercalando medidas del fondo de cielo.

En la figura 27, se muestran las curvas de luz obtenidas durante las tres noches más largas. Se observan deformaciones bruscas inmediatamente anteriores o posteriores a las máximas que son con seguridad una evidencia de la existencia del segundo período. Estas deformaciones son distintas de los "bumps"

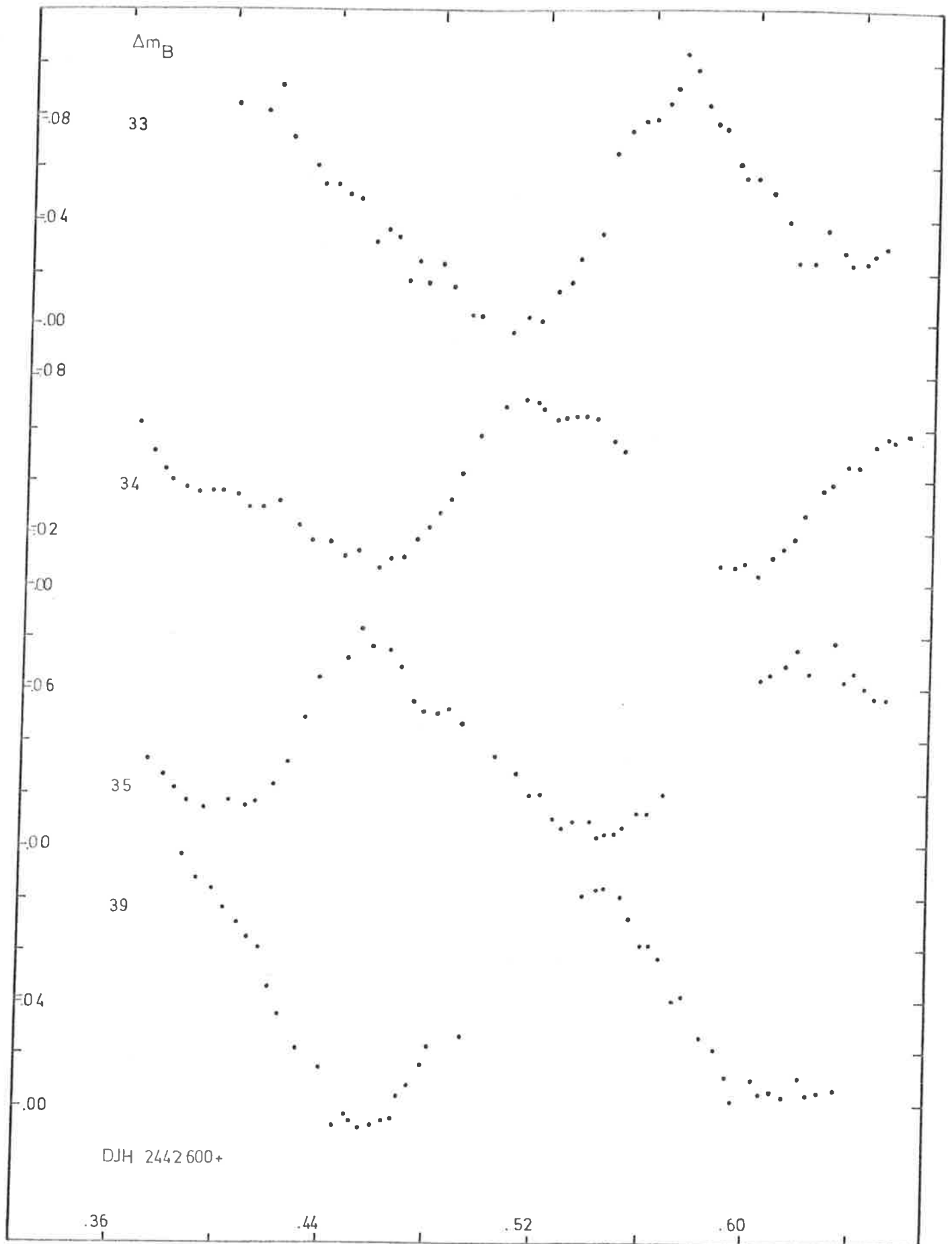


FIGURA 27.- Curvas de luz de la estrella Delta Delphini.

que comentábamos en el capítulo primero y que pueden verse en la figura 3, puesto que aquí se trata de la superposición de las curvas de luz de dos estrellas distintas y en aquel caso se trataba de un fenómeno que afectaba a la curva de luz de una sola estrella.

Hemos hecho un análisis de la periodicidad de nuestras curvas de luz empleando la técnica de la transformada discreta de Fourier según el algoritmo desarrollado por Deeming (1975). El máximo del espectro de frecuencias se encuentra para un período de $0^d.1568$ al que se asocia una semiamplitud de 0.038 mag. Este período es comparable al de Leung y Wehlau citado antes. Eliminado este período de los datos, restando de los mismos una senoide con el período y amplitud indicados, se obtuvo un segundo periodograma. El segundo obtenido por este método resulta ser $0^d.1541$ y una de 0.01 mag.

El segundo período determinado casi coincide con el tercero de Leung y Wehlau, pero dista mucho de ser el que cabría esperar de ser cierta la hipótesis de Duncan y Preston ($0^d.134$). Como hemos comentado en el capítulo primero, esta forma de calcular el segundo período puede inducir a error si la determinación del primero no es muy precisa. Al restar de los datos una frecuencia errónea, podemos hacer aparecer otra que no estaba presente en los datos originales. Hay que ser cautos a la hora de aceptar como verdadero segundo período.

No obstante, el hecho más importante que ponea en evidencia las observaciones, es la variabilidad de la estrella con una amplitud considerable (~ 0.1 mag de variación total). La circunstancia de que las dos estrellas que componen el sistema sean del tipo δ Del (Reimers, 1976) y pulsen (Duncan y

Preston, 1980) no deja lugar a dudas de que estamos realmente observando la variabilidad de estrellas con anomalías de abundancias.

Otras observaciones

Vamos a comentar en primera lugar los resultados obtenidos de la observación de las estrellas 42 Tau y 74 UMa ya que ambas han sido realizadas con la misma técnica y el mismo instrumental que el utilizado para δ Del y que acabamos de describir. Ambas estrellas han resultado ser constantes.

42 Tau, es una estrella de magnitud visual $m_V = 5.3$, clasificada como dF1 en el catálogo de Hoffleit (1964) como Del en Cowley et al (1969). Medidas de esta estrella realizadas en la noche del 23 al 24 de noviembre de 1978 demuestran su constancia dentro de un error de pocas milésimas de magnitud. La desviación típica de las medidas de esta estrella una vez corregidas de la extinción atmosférica es de $\sigma_E = 0.002$ mag. La desviación típica de sus diferencias con la estrella de comparación es de $\sigma_{E-C} = 0.004$ mag. Dada la constancia de esta estrella ha sido utilizada repetidas veces como estrella de comparación para el estudio de la bien conocida δ Scuti: 44 Tau.

La estrella 74 UMa ($m_V = 5.4$, F4) clasificada δ Del en Kurtz (1976), ha sido estudiada una sola noche (16 a 17 de mayo 1979) y es constante dentro de la centésima de magnitud. La dispersión de las medidas de la estrella de comparación fuera de la atmósfera es $T_C = 0.016$ mag, y la de la diferencia E-C es de $\sigma_{E-C} = 0.010$. El hecho de que la dispersión de la diferencia sea inferior a la de una sola estrella, no es ex-

traño. Se debe a una fluctuación de la extinción atmosférica durante la noche, difícil de corregir al calcular las magnitudes extraatmosféricas. Como esta variación afecta por igual a ambas estrellas, desaparece al calcular las diferencias de magnitud.

Nos vamos a ocupar ahora de observaciones de otras cuatro estrellas realizadas en octubre de 1980 con el telescopio de 1.23 m del Observatorio Hispano-Alemán de Calar Alto (Almería). Estas observaciones se realizaron en los cuatro filtros del sistema fotométrico de Strömgren (u,v,b,y). Se utilizaron dos estrellas de comparación para cada una de las estrellas estudiadas.

La adquisición de datos se realiza por una técnica fundamentalmente distintos de la descrita anteriormente. Se trata en este caso de conteo discreto de fotones y no de la integración de la corriente medida por el fotomultiplicador y su amplificación por un electrómetro. El conteo de fotones exige la utilización de un fotomultiplicador más rápido, es decir, que el impulso de corriente que genere a la llegada de cada fotón, sea lo más breve posible (típicamente del orden del nanosegundo), con objeto de poder resolver claramente la llegada de fotones muy próximos. La ventaja de este sistema es que se eliminan muy fácilmente el ruido de fondo y los picos espúreos. La altura de cada pulso es proporcional a la energía del fotón incidente y superior a la del ruido térmico de fondo. Este último, puede ser eliminado si sólo se cuentan los pulsos que sobrepasen una cierta altura. Del mismo modo, podemos eliminar los picos demasiado altos.

En la tabla 3, se relacionan las desviaciones típicas de las magnitudes medidas en los cuatro filtros uvby, para las cuatro estrellas observadas. Nuevamente σ_c es la desviación

TABLA 3

Fotometría de estrellas tipo δ Delphini
en el sistema fotométrico de Strömberg

		σ_C	σ_{E-C}
HD 223247	u	0.007	0.007
	v	0.009	0.009
	b	0.005	0.007
	y	0.010	0.006
HD 3448	u	0.020	0.013
	v	0.016	0.016
	b	0.012	0.015
	y	0.013	0.022
HD 18460	u	0.013	0.005
	v	0.008	0.010
	b	0.011	0.011
	y	0.017	0.007
HD 25515	u	0.004	0.017
	v	0.008	0.010
	b	0.006	0.007
	y	0.007	0.027

típica de las medidas de una de las estrellas de comparación, corregidas de extinción atmosférica. Este σ_C da una idea de la calidad de la observación puesto que en principio la magnitud extraatmosférica de la estrella de comparación es constante. La desviación típica σ_{E-C} de las diferencias de magnitud adoptará valores muy pequeños si la estrella en estudio es constante. En algunos casos σ_{E-C} es menor que σ_C y esto se debe a que en noches de baja calidad fotométrica puede fluctuar mucho la magnitud de la estrella de comparación y obtener un σ_C alto; como estas fluctuaciones afectan por igual a las dos estrellas las diferencias E-C, se mantienen casi constantes y σ_{E-C} es pequeña.

De los resultados que se exponen en la tabla 3, no puede deducirse la variabilidad de ninguna de las estrellas estudiadas, por encima de una centésima de magnitud. La única estrella que podría ser variable es HD 25515, pero ésta es también la estrella de la que tenemos menos observaciones y no podemos confirmarlo.

4.3.- VARIABILIDAD DE LAS ESTRELLAS δ DELPHINI.

Hemos comentado en el capítulo primero la variabilidad de algunas estrellas de carácter metálico, que se produce principalmente entre las de tipo Am: y δ Delphini.

Se han encontrado hasta la fecha dos Am: variables, que son HR 4594 y HR 8210 (Kurtz, 1978). Las amplitudes de variación de estas dos estrellas en el filtro V de Johnson son, respectivamente, 0.03 mag y 0.01 mag. Según Kurtz (1979) HR 8210 tiene un período único de 0.^d044 y HR 4594 tiene un comportamiento periódico complejo. Aparentemente no es posi-

ble encontrar una frecuencia única para cada noche de observación de esta última estrella.

Entre las estrellas del tipo δ Delphini se encuentra un número mucho mayor de variables, cuyo reparto sobre un diagrama H-R observacional se puede ver en la figura 28. En la tabla 4 se dan los períodos y amplitudes de las quince estrellas

Del cuya variabilidad ha sido detectada hasta el momento. Entre ellas, se encuentran la estrella prototipo del grupo de variables de la parte baja de la banda de inestabilidad (δ Scuti) y de las estrellas con anomalías de abundancia (δ Delphini).

Aunque la muestra de estrellas es aún pequeña para poder hacer una estadística fiable de la distribución de amplitudes, como se ha hecho con las Scuti es muy significativo que haya ocho estrellas, la mitad de la muestra, con amplitudes inferiores a tres centésimas de magnitud. Sólo hay dos estrellas con amplitud superior o igual a una décima de magnitud (ρ Pup y δ Scu). Este reparto de amplitudes sugiere una distribución de carácter exponencial, semejante a la que se observa en el conjunto completo de las variables δ Scuti.

Si por otra parte estudiamos la incidencia de variables en una muestra bien escogida, podemos tener una idea de la proporción existente entre variables y constantes. Hemos escogido para este fin las estrellas estudiadas fotométricamente por Kurtz (1979) en el sistema uvby. todas ellas están clasificadas δ Del en el volumen I del Michigan Spectral Catalogue (Houk y Cowley, 1975). El objetivo del trabajo de Kurtz no es el estudio de la variabilidad fotométrica, sino la obtención de índices absolutos, por lo que no se obtiene una información directa de la variabilidad. Existen, no obstante, en esta muestra de 74 estrellas 23 que δ son variables o tienen

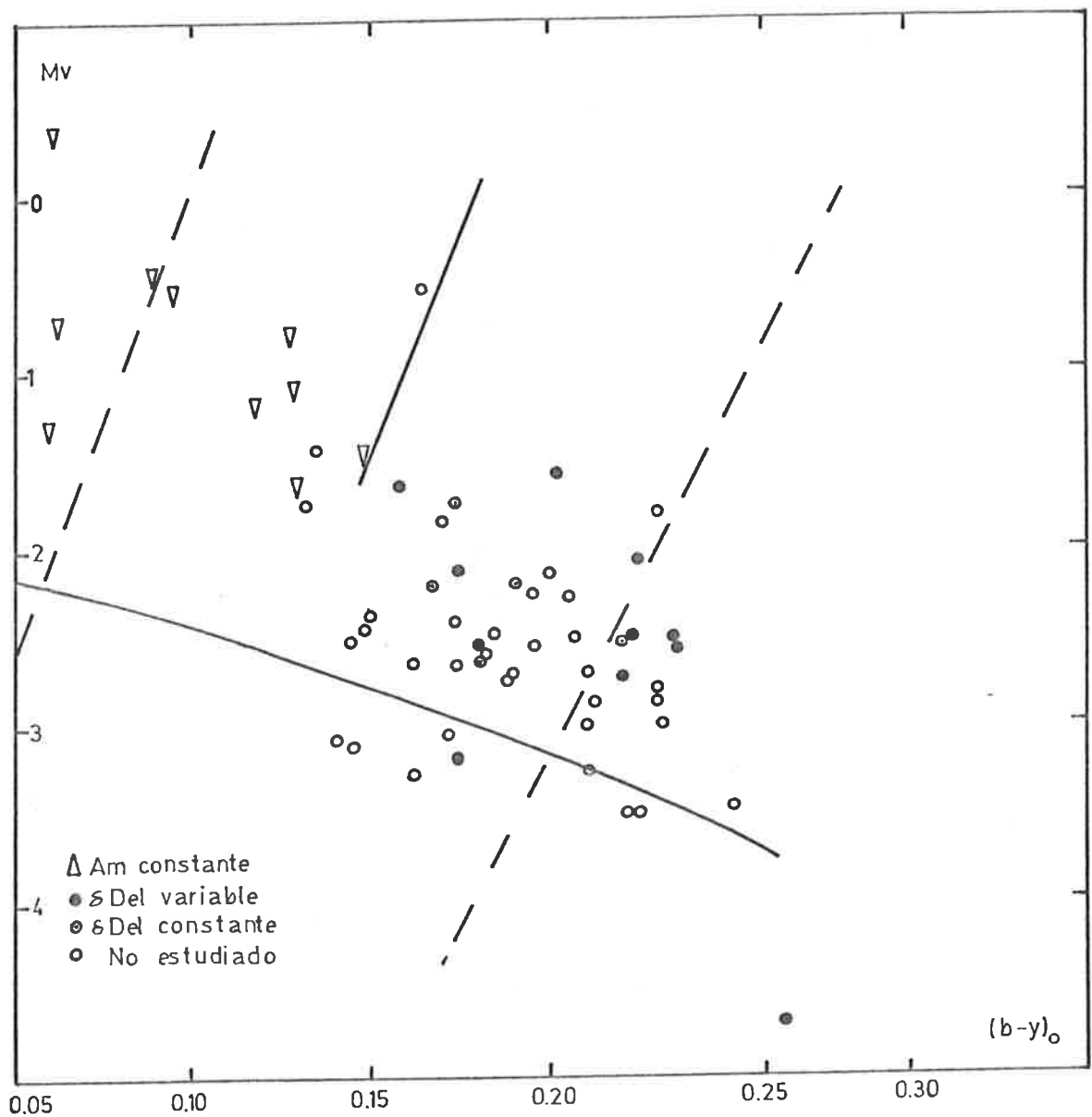


FIGURA 28.- Diagrama H-R observacional sobre el que se han situado las estrellas Delta Delphini Variables y constantes. Se muestran tambien las Am evolucionadas estudiadas por Garrido et al. (1979) y la frontera (línea continúa) que establece el límite azul de coexistencia entre pulsación y metalicidad de los mismos autores.

TABLA 4

Estrellas variables del tipo δ Del

HD		Periodo	Amplitud
31908		-	≤ 0.03
40372	59 Ori	0.054	0.01
50018	59 Aur	0.12	0.03
50420		0.17	0.01
52788		0.12	0.03
67523	ρ Pup	0.14	0.10
69997	HR 3265	0.076	0.03
77140	90 Vel	0.065	0.015
115604	20 CVn	0.135	0.035
129494		-	0.02
172748	δ Scu	0.194	0.29
188136		0.12	0.04
195961	ρ Pav	0.11	0.03
197461	δ Del	0.153	0.08
201707	HR 8102	0.097	0.07

Periodos y amplitudes se han tomado de Breger (1979) excepto los de HD 31908, HD 129494 y HD 188136 que proceden de Kurtz (1979).

una desviación típica de las observaciones superior a 0.01 mag es decir, que hay un 31% de variables. Esta proporción es muy parecida a la que se observa entre las estrellas A normales.

Parecen pues confirmarse las predicciones, basadas en la teoría de pulsación estelar, sobre la variabilidad de estas estrellas con anomalías de abundancia que hemos hecho en el capítulo tercero. Como hemos demostrado que se necesita al menos un 20% de helio para explicar la pulsación en toda la región en que ésta se observa, y por otra parte, la teoría de la difusión microscópica, que explica las anomalías de abundancia predice la desaparición del helio de la envoltura, hay que buscar la forma de reconciliar ambos hechos.

Hay un hecho observacional que arroja alguna luz sobre el problema. En las estrellas δ Delphini, el calcio no es subabundante como en el resto de las estrellas Am, sino que tiene una abundancia normal o casi normal. Además, las sobrea-bundancias metálicas observadas, son también menos fuertes que en las Am. Esta dulcificación de las anomalías de abundancia sugiere la actuación de un mecanismo que mezcle parcialmente la envoltura y actúe en contra de la difusión. Esta mezcla se opondría al drenaje del calcio y del helio que seguirían teniendo abundancias casi normales. Como vimos en la figura 11, la fuerza radiativa sobre el calcio, tiene un mínimo justo por debajo de la zona convectiva, luego bastaría una mezcla muy ligera para restaurar la abundancia normal. Esta mezcla tendría un efecto mucho menor sobre los metales pesados que están sometidos a fuerzas radiativas mayores.

Sugerimos también que esta mezcla parcial esté asociada de algún modo con la rotación. Se sabe que, sobre la secuencia principal, la rotación establece un criterio que distingue a

las estrellas A metálicas de las estrellas A de composición normal. Mientras que las Am giran lentamente ($v_{\text{seni}} = 33 \text{ Km s}^{-1}$) las estrellas normales giran rápido ($v_{\text{seni}} = 141 \text{ Km s}^{-1}$) (Abt y Moyd, 1973). las velocidades medias de rotación de las estrellas Am, Am: y δ Del tabuladas en el Apéndice I, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Am} &: 35 \pm 3 \text{ Km s}^{-1} \\ \text{Am:} &: 49 \pm 4 \text{ Km s}^{-1} \\ \delta \text{ Del:} &: 50 \pm 6 \text{ Km s}^{-1} \end{aligned}$$

Aunque estos resultados no son concluyentes, parece manifestarse una tendencia a que las estrellas donde la mezcla parcial es más importante giran más rápidamente.

5.- CONCLUSIONES

El objeto de la presente memoria ha sido estudiar la variabilidad de estrellas A subgigantes con anomalías de abundancia del tipo δ Delphini.

Con este fin se han construido modelos de estructura de 1.5 y 2.0 M_{\odot} de distintas composiciones químicas y cuyas luminosidades y temperaturas cubrían toda la parte baja de la banda de inestabilidad. Se han introducido mejoras respecto a cálculos de envoltura anteriores principalmente en lo que concierne al tratamiento de las opacidades, la convección y las capas externas.

Un primer resultado importante, se ha obtenido con los modelos de composición química típica de población I ($X=0.7$, $Y=0.28$, $Z=0.02$) y que afecta, por lo tanto, a todas las estrellas que pueblan la parte baja de la banda de inestabilidad de las cefeidas. La situación de las fronteras azules teóricas de inestabilidad para distintos modos de pulsación, ha sido desplazada hacia temperaturas mayores, respecto a lo calculado hasta ahora, coincidiendo prácticamente con la frontera observacional. Se resuelve así un importante problema que tenía planteado la teoría de la pulsación, a saber: que casi la mitad de las estrellas pulsantes caían fuera de los límites predichos por la teoría.

En segundo lugar, y puesto que la teoría de la difusión predice una abundancia nula de helio en las envolturas de estrellas A metálicas, se ha estudiado la inestabilidad pulsacional de las estrellas exentas de helio ($X=0.98$, $Y=0.00$, $Z=0.02$). Se ha demostrado la imposibilidad de que tales estrellas puedan pulsar.

En tercer lugar y a la vista del resultado anterior, se ha investigado la abundancia de helio necesaria para explicar la pulsación observada en las estrellas δ Delphini. Se ha encontrado que la frontera azul teórica correspondiente al modo fundamental del modelo con 18% de helio coincide con la frontera azul observacional que delimita la región de la banda de inestabilidad en la que la pulsación y la metalicidad coexisten.

En cuarto lugar, se sugiere la existencia de un mecanismo de mezcla parcial, capaz de restituir la abundancia de helio a los niveles necesarios para explicar la pulsación de las estrellas δ Delphini. Este mecanismo podría estar ligado de alguna forma a la rotación.

En consecuencia, proponemos la siguiente descripción de las estrellas δ Delphini.

Son estrellas con anomalías de abundancia en las que la acción de la difusión microscópica se ve frenada por la actuación de un mecanismo de mezcla parcial, responsable de:

- el mantenimiento de una abundancia de helio ~ 0.2 necesaria para la pulsación.
- mantenimiento de una abundancia normal de calcio.
- pero insuficiente para detener la difusión de los metales que se manifiestan como sobreabundantes.

BIBLIOGRAFIA

- Abt, H.A. (1961), *Astrophys. J. Suppl.* 6, 37
- Abt, H.A. (1979), *Astrophys. J.* 230, 485
- Abt, H.A. y Moyd, K.I. (1973), *Astrophys. J.* 182, 809
- Baglin, A. (1972), *Astron. Astrophys.* 19, 45
- Baglin, A. (1975) in "Multiple Periodic Variable Stars",
IAU Colloquium n°29. Ed. W.S. Fitch.
- Baglin, A., Breger, M., Chevalier, C., Hauck, B., Le Contel,
J.M., Sereyan, J.P., Valtier, J.C. (1973) *Astron.*
Astrophys. 23, 221.
- Baker, N., Kippenhahn, R. (1965), *Astrophys. J.* 142, 368.
- Baker, N., Kippenhahn, R. (1962), *Astrophys.* 54, 114
- Bessell, M.S. (1969), *Astrophys. J. Suppl.* 18, 167
- Bidelman, N. (1965), *Vistas Astronomy* 3, 53
- Bohm, K.H. and Stuckl, E. (1967), *Z. Astrphys.* 66, 487
- Breger, M. (1979), *Publ. Astron. Soc. Pacific* 91, 5
- Breger, M. (1980), *Astrophys J.* 235, 153
- Breger, M. (1980), a Preprint
- Breger, M., Bregman, J.N. (1975) *Astrophys. J.* 200, 343
- Burkhart, C. (1973), Tesis Universidad de Lyon.
- Burkhart, C. (1979), *Astron. Astrophys.* 74, 33
- Castor, J.I. (1971), *Astrophys. J.* 166, 109
- Clayton, D.D. (1973), *Principles of Stellar Evolution and
Nucleosynthesis.* Mc Graw Hill. N-Y.
- Conti, P.S. (1970), *Publ. Astron. Soc. Pacific* 82, 781
- Cowley, A.P., Cowley, C.P., Jaschek, C. (1969), *Astron. J.*
74, 375
- Costa, V., Garrido, R, Sáez, M. (1979) *Inf. Bull. Var. Stars.*
1534 Konkoly Oba. Budapest
- Cox, J., Giuli, R.T. (1968), *Principle of Stellar Structure,*
Gordon and Breach ed.
- Cox, A.N., Stewart, J.N. (1969), *Sci. Inform. Astr. Council*
U.S.S.R. Acad. Sci., vol. 15
- Cox, A.N., King, D.S. and Tabor, J.E. (1973), *Astrophys. J.*
184, 201

- Cox, A.N., King, D.S. and Hodson, S.W. (1979), *Astrophys. J.* 231, 798
- Cox, A.N., King, D.S., Hodson, S.W. (1979), *Astrophys. J.* 228, 870
- Crawford, D.L. (1975), *Astron. J.* 80, 955
- Crawford, D.L. (1975), a Multicolor Photometry and the theoretical H.R. Diagram. A.G.D. Philip and B.S. Hayes eds. Dudley Observatory Report n°9 p. 17
- Chapman, S. y Cowling, T.G. (1960) *The Mathematical Theory of non-uniform Gases*. Cambridge University press.
- Chevalier, C. (1971) *Astron. Astrophys.* 14, 24.
- Deeming, T.J. (1975) *Astrophys. Sp. Sci.* 36, 137.
- Deupree, R.G. (1977) *Astrophys. J.* 215, 620
- Duncan, D.K. y Preston, G.W. (1980) *Bull. Amer. Astron. Soc.* vol. 11, n°4, part 1.
- Eddington, A. (1941) *Mon. Not. Roy. astr. Soc.* 101, 182.
- Eggen, O.J. (1957) *Astron. J.* 62, 14.
- Eggen, O.J. (1970) *Pub. Astron. Soc. Pacific* 82, 274.
- Elste, G. y Jugaku, J. (1957) *Astrophys. J.* 125, 742.
- Fitch, W.S. (1979) Tucson Conference on Non Radial and Non Linear Stellar Pulsation, *Lecture Notes in Physics* 25. Eds. Hill and Dziembowski.
- Fitch, W.S. y Szeidl, B. (1976) *Astrophys. J.* 203, 614.
- Garrido, R., Lopez de Coca, P., Quintana, J.M., Rolland, A. y Saez, M. (1980) *Astron. Astrophys.* 83, 114.
- Garrido, R. y Sáez, M. (1979) *Astron. Astrophys.* 79, 347
- Gonczi, G. (1981) *Astron. Astrophys.* 96, 138.
- González, S.F., Warman, J.H., Peña, J.H. (1980) *Astron. J.* 85, 1361.
- Guerrero, G., Mantegaza, L., Scardia, M. (1979) *Astron. Astrophys. Suppl.* 38, 181.
- Hauck, B. y Mermilliod, M. (1975) *Astron. Astrophys. Suppl.* 22, 235
- Henry, L. Vardya, M.S. y Bodenheimer, P. (1965) *Astrophys. J.* 142, 841.
- Hoffleit, D. (1964) *Catalogue of Bright Stars*, 3rd ed., New Haven, Yale University Press.

- Horan, S. (1979) *Astrophys. J.* 84, 1970.
- Houk, N. y Cowley, A. (1975) University of Michigan Catalogue of Two Dimensional Spectral Types for The HD Stars Dep. of Astronomy , University of Michigan.
- Huebner, W.F., Merts, A.L., Magee, N.H. y Argo, M.F. (1977) Los Alamos Report LA-6760-M.
- Iben, I. Y Tuggle, R.S. (1975) *Astrophys. J.* 197, 39.
- Jaschek, M. y Jaschek, C. (1974) *Vistas in Astronomy* 16, 131.
- Kitamura, M. Kondo, M. (1978) *Astrophys. Space Sci.* 56, 341.
- Kurtz, D.W. (1976) *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 32, 651.
- Kurtz, D.W. (1977) *Publ. Astron. Soc. Pacific* 89, 941.
- Kurtz, D.W. (1978) *Astrophys. J.* 221, 869..
- Kurtz, D.W. (1979) *Mon. Not. Roy. astr. Soc.* 189, 1.
- Kurtz, D.W. (1979a) *Mon. Not. R. astr. Soc.* 186, 575.
- Kurtz, D.W. (1979b) *Mon. Not. R. astr. Soc.* 186, 567.
- Kurucz, R.L. (1979) *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 40, 1.
- Le Contel, J.M., Valtier, J.C. , Sareyan, J.P., Baglin, A. y Zribi, G. (1974) *Astron Astrophys.* 15 , 115.
- Latour, J. (1970) *Astron. Astrophys.* 9 , 277.
- Leung, K. y Wehlau, W. (1967) *Astrophys. J.* 149, 39.
- Mendoza, E., Gomez, T. y Gonzalez, S. (1978) *Astron. J.* 83, 606.
- Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S. y Vauclair, G. (1976) *Astrophys. J.* 210, 447.
- Montmerle, T. y Michaud, G. (1976) *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 31, 489.
- Percy, J.R. (1977) *Mon. Not. R. astr. Soc.* 181, 563.
- Petersen, J.O. (1979) *Astron. Astrophys.* 80, 53.
- Petersen, J.O. y Jorgensen, H.C. (1972) *Astron. Astrophys.* 17, 367.
- Philip, A.G.D., Miller, T.M. y Relyea, L. (1976) Dudley Obs. Report n°12.
- Reimers, D. (1976) *Astron. Astrophys.* 53, 377.
- Rolland, A. (1977) Tesis doctoral , Universidad de Granada.

- Simon, N. (1977) *Astrophys. J.* 217, 160.
- Simon, N. (1979) *Astron. Astrophys.* 75, 140.
- Shobrook R.R. y Stobie R.S. (1974) *Mont. Not. R. astr. Soc.* 169, 643.
- Slovak, M. (1978) *Astrophys. J.* 223, 192.
- Smith, M.A. (1971) *Astron. Astrphys.* 11, 325.
- Stellingwerf, R.F. (1975) *Astrophys. J.* 195, 441.
- Stellingwerf, R.F. (1979) *Astrophys. J.* 227, 935.
- Stobie, R.S. (1977) *Mon. Not. R. astr. Soc.* 180, 631.
- Stobie, R.S.; Pickup, D.A. y Shobrook, R.R. (1977) *Mon. Not. R. astr. Soc.* 179, 389.
- Stromgren, B. (1966) *Annual Rev. Astron. Astrophys.* 4, 433.
- Stromgren, B. (1967) *The Magnetic and Related Stars*, R.C. Cameron, Ed., Mono Book Corp. p. 461.
- Sweet, P. (1950) *Mon. Not. R. astr. Soc.* 110, 548.
- Uesugi, A. (1979) *Dep. of Astron. Univer. Kyoto*, preprint.
- Van Genderen, A.M. (1967) *Bull. Astron. Inst. Neth.* 19, 74.
- Valtier, J.C., Sareyan, J.P., Le Contel, J.M y Zribi, G. (1974) *Astron Astrophys. Suppl.* 18, 235.
- Valtier, J.C., Baglin, A. y Auvergne, M. (1979) *Astron. Astrophys.* 73, 329. (VBA)
- Vauclair, G. (1976) *Astron. Astrophys.* 50, 435.
- Vauclair, G., Vauclair, S. y Pamjatnick, A. (1974) *Astron. Astrophys.* 31, 63.
- Vauclair, G., Vauclair, S. y Michaud, G. (1978) *Astropys. J.* 223, 920.
- Voigt, H.H. (1969) *Abriss der Astronomie*, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- Warman, J., Peña, J.H. y Arellano-Ferro, A. (1979) *Astrphys. J.* 84, 109.
- Weiss, W.W., Breger, M. y Rakosch, K.D. (1980) preprint.

A P E N D I C E

Los parámetros M_v , $\log T_e$ y $\log g$ proceden del Catálogo de A.G.D. Philip y D. Egret, 1980, Astron. Astrophis. Suppl. 40, 199.

Las velocidades de rotación $v \sin i$, proceden del Catálogo de A. Uesugi, 1979, Dep. de Astronomía de la Universidad de Kyoto.

Las estrellas A_m y $A_{m:}$, proceden de A.P. Cowley, C.P. Cowley, M. Jaschek y C. Jaschek, 1969, Astronomical Journal 74, 375. Las estrellas delta Delphini tienen diversas procedencias:

- 1 - N. Bidelman (1966)
- 2 - A.P. Cowley et al. (1969)
- 3 - D.W. Kurtz (1976)
- 4 - N. Houk y A. Cowley (1975)
- 5 - D.W. Kurtz (1979)

Las estrellas delta Delphini variables se han indicado con una v , las constantes con una c .

ESTRELLAS A m

HD	Mv	log Te	log g	vseni	HD	Mv	log Te	log g	vseni
3883	1.58	3.903	3.85	25	41357	1.50	3.903	3.83	26
5128	1.89	3.917	4.13	30	44691				37
7853				35	50623	0.89	3.917	3.88	
8374				15	56820				
12446				24	60178				30
15385				21	60652	2.04	3.910	4.10	60
18557	2.38	3.903	4.19	28	63859				
18769				43	71267	0.79	3.917	3.83	30
20210	2.89	3.910	4.32		71793				20
25425	0.46	3.917	3.76	23	72037				17
26591	2.11	3.924	4.23	30	75737	0.78	3.924	3.88	25
27045	2.92	3.903	4.28	64	76370	2.20	3.910	4.19	25
27628				25	76756	0.82	3.924	3.90	65
27749				10	78209	2.71	3.896	4.23	37
28204				31	79193	2.58	3.903	4.26	12
28226				88	88182	1.80	3.917	4.09	
28546				21	88849	2.04	3.883	3.97	25
29173/1	1.68	3.939	4.14	15	93903	0.99	3.917	3.88	20
30121	2.12	3.903	4.10	63	95256	1.49	3.917	3.99	50
30210				47	99945				
30453	1.84	3.896	3.93	15	100518	2.18	3.917	4.21	
32196					102660	2.60	3.903	4.17	22
32428	1.98	3.890	3.96		106112				79
32642	1.41	3.924	4.06	53	106251	2.57	3.896	4.18	35
33204				27	108462				12
33254				15	108651				12
336484					110951	2.05	3.876	3.96	66
26677	2.04	3.924	4.24		116657				57
40062	2.16	3.876	4.00		125337	1.55	3.932	4.15	16
40932				24	126661	1.22	3.903	3.81	29

ESTRELLAS Am (continuación)

HD	Mv	log Te	log g	v seni	HD	Mv	log Te	log g	v seni
136403	2.38	3.910	4.17	18	192342	3.12	3.896	4.35	
138338	1.56	3.939	4.18	40	193472	2.28	3.883	4.06	93
138413	1.76	3.924	4.14	27	195217	0.19	3.962	4.14	
140232	2.71	3.917	4.42	20	195479	2.00	3.883	4.01	15
141675	2.24	3.903	4.13	36	195692				50
141795				37	198743	2.46	3.876	4.09	46
148367	2.46	3.917	4.37	44	206546	2.44	3.910	4.16	47
159560	2.61	3.890	4.18	50	207503	1.86	3.910	4.04	20
166095	0.73	3.924	3.85	20	2.09625	1.78	3.903	3.97	19
166926				55	209791				25
166960	2.20	3.903	4.05	25	213403				58
169885	1.51	3.924	4.10	40	216608	3.00	3.896	4.32	40
173648	1.33	3.917	3.98	27	221675	2.41	3.890	4.05	60
173654	1.74	3.939	4.22	25	222377	2.39	3.917	4.26	60
174115	2.60	3.924	4.41		223461	1.53	3.917	4.01	38
186984	2.66	3.924	4.39	75	208132				
187753	1.38	3.932	4.09	10					

ESTRELLAS Am MARGINALES

HD	Mv	log Te	log g	v seni	HD	Mv	log Te	log g	v seni
6116	1.61	3.917	4.06	39	107168				12
6658	0.84	3.924	3.92	91	109510				25
8801	2.77	3.876	4.23	70	111112				30
11408	2.34	3.917	4.28	57	111421	0.87	3.910	3.80	37
11636	1.76	3.932	4.21	79	112486				20
12869				29	116235	1.86	3.932	4.24	20
13372				30	116303	1.53	3.890	3.84	36
17581	2.09	3.939	4.35	33	133112				82
20320	2.12	3.903	4.06	66	138105	2.09	3.924	4.27	30
21912	2.16	3.932	4.29	101	138213	-0.12	3.924	3.67	30
22615				30	144426	0.68	3.939	3.80	39
23193	0.84	3.939	3.94	45	151956	1.53	3.939	4.19	26
23277				25	155375	1.34	3.939	4.12	
23281	2.60	3.903	4.26	70	161321	1.34	3.924	4.02	35
24141				55	168913	2.81	3.903	4.31	20
28355				104	171653				20
29140				35	172741	1.43	3.902	3.90	
29497				60	177332	0.52	3.924	3.83	
33641	2.44	3.917	4.31	86	182490	1.32	3.954	4.29	43
40536	1.13	3.910	3.87	23	197508				38
42083				30	204188	2.80	3.903	4.33	83
42954	1.55	3.903	3.87	47	219815				78
46052	1.89	3.924	4.19	35	223438	0.86	3.917	3.90	43
71297	2.55	3.910	4.29	22					
83886	1.39	3.932	4.09	100					
95608	1.70	3.970	4.22	24					
99859	1.78	3.917	4.16	90					
102910	2.71	3.890	4.22	60					
104513				76					
106887				75					

ESTRELLAS DELTA DELPHINI

HD	Mv	log Te	Log g	v_i	Ref	HD	Mv	Log Te	Log g	v_i	Ref
3448	2.49	3.876	4.08		1	115604	1.39	3.890	3.72	17 v	3
7119	2.02	3.876	3.97		2	132052	2.13	3.864	4.07	117	2
8829	2.58	3.864	4.20	20	2	141153	3.09	3.903	4.41		5
18460	2.82	3.903	4.26		1	148385	3.05	3.876	4.22		5
24164				49	2	153076	2.48	3.857	4.12		5
25515	1.08	3.845	3.47		3	157919	2.03	3.851	3.82	25	2
25867	3.09	3.864	4.45	68	2	159876	1.71	3.896	3.92	32	2
30110	2.57	3.883	4.16		1	172743	2.06	3.890	4.00	34	1
32537	2.65	3.864	4.23	14	2	172748	1.64	3.876	3.79	32 v	2
33959	0.84	3.903	3.69	24 v	2	183552	1.96	3.896	3.93		5
38189	2.01	3.876	4.00	67 c	2	195961	2.59	3.851	3.98	49 v	2
39390	2.10	3.864	4.06		1	197461	1.17	3.876	3.69	41 v	2
40292	2.15	3.876	4.04	0	2	198639	2.13	3.917	4.23	90	2
40372	1.19	3.903	3.77	60 v	2	201707	1.02	3.883	3.65	120 v	2
43760	0.61	3.876	3.48	15	2	207098	2.60	3.890	4.19	87	2
47606	0.97	3.903	3.78		2	213143	2.30	3.876	4.01		1
50018	1.15	3.845	3.50	105 v	2	218227	2.93	3.857	4.19	80	2
61689	2.86	3.896	4.22		4	223247	1.97	3.883	3.96		1
67523	1.84	3.851	3.80	14 v	2						
68703	2.12	3.890	3.99	67	2						
69682	2.62	3.876	4.19	34	1						
69997	2.01	3.876	3.93	25 v	3						
72792	2.28	3.864	4.00		1						
73210				72	2						
77140	1.56	3.903	3.88	57 v	2						
78388	1.78	3.851	3.79		1						
79066	2.87	3.864	4.30		1						
81762	2.48	3.903	4.13		1						
108844	1.07	3.910	3.85	87	2						

