Seminario Permanente de Enseñanza de la Matemática

GALICIA

ACTAS do I SIMPOSIO GALEGO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DOCENDO DISCITUR

Santiago, 14 ó 17 de Setembro de 1988

ENTIDADES PATROCINADORAS Y COLABORADORAS:

Consellería de Educación e Ordenación Universitaria da Xunta de Galicia.

Excmo. Concello de Santiago.

Diputación Provincial de A Coruña.

Escuela Universitaria de Magisterio de Santiago.

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales.

COMITE ORGANIZADOR:

Coordinador General:
José A. Cajaraville Pegito

Secretario:
Miguel A. Pueyo Losa

Vocales:
Julio Mancebo Moreiras
Frutos J. Martínez Saavedra
Camilo I. Ocampo Gómez
Manuel Pazos Crespo
Manuel A. Vázquez Diz
José L. Villamayor Vila.

ISBN: 84-453-0118-7
Dep. Legal: C. 145/90

GRAFINOVA, S. A.
Concepción Arenal, 9
Teléfono 56 60 20
15702 SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA.

DIA 14:

MAÑANA:

9: **Apertura y presentación.**

10.00. **Acto inaugural presidido por el Iltmo. Sr. Director General de Educación Básica de la Consellería de Educación y Ordenación Universitaria.**
Lugar: Salón de Actos.

10.45 Conferencia inaugural: **"Estrategias para enseñar Geometría a los niños"**, a cargo del Prof. David S. Fielker. Abbey Wood Mathematics Center. Londres
Lugar: Salón de Actos.

12.00 Conferencia : **"El área de conocimientos Didáctica de la Matemática"**, a cargo del Prof. Enrique Vidal Costa. Universidad Autónoma de Madrid.
Lugar: Salón de Actos

13.30 **Acto litúrgico en Catedral y Recepción del Excmo. Ayuntamiento de Santiago.**
Lugar: Catedral y Palacio de Raxoi.

TARDE:

16.00. Comunicación:**"Nivel de conocimientos y destrezas matemáticas de los alumnos de 8º de EGB"**, a cargo de la Prof. María Jesús Salinas Portugal. Universidad de Santiago.
Lugar: Aula 12 (2ª planta).

16.00 Comunicación: **"Por qué de un taller de Matemáticas"**, a cargo del Prof. Luis Cachafeiro Chamosa. I.N.B. de Cangas de Morrazo.
Lugar: Aula 11 (2ª planta)

17.30 Taller: **"Uso de la calculadora en la enseñanza de la matemática elemental"** a cargo del Prof. David S. Fielker. Abbey Wood Mathematics Center.
Lugar: Salón de Actos.
21.00.Recital de música folk gallega a cargo del grupo Milladoiro.
Lugar: Teatro Principal

DIA 15:

MAÑANA:

10.00: Conferencia: **"Teoría de los niveles de Van Hiele. Implicaciones en la Enseñanza de la Geometría"**,a cargo del Prof. Angel Gutiérrez Rodríguez. Universidad de Valencia.
Lugar: Salón de Actos.

11.15: Conferencia: **"Los Centros de Profesores en Reino Unido y la Educación Matemática"**, a cargo del Prof . David S. Fielker. Abbey Wood Mathematics Center.
Lugar: Salón de Actos.

12.30: Conferencia: **"El número en la EGB"**, a cargo del Prof. Luis Rico Romero. Universidad de Granada.
Lugar: Salón de Actos.

TARDE:

16.00: Conferencia-Taller **"Actividad matemática. Investigaciones curriculares realizadas por el Grupo Cero de Valencia (1ª parte)"**, a cargo del Prof. Eliseo Borrás. Grupo Cero de Valencia.
Lugar: Salón de Actos.

16.00: Taller: **"Jugando con la Matemática (1ª parte)"**, a cargo del colectivo Negamate. La Coruña
Lugar: Aula 12.

21.00: **Lunch para los participantes en el Restaurante San Francisco.**

El número en la EGB.

Luis Rico Romero

O. PRESENTACION.

Simplicidad y amplitud son las dos características que resaltan de inmediato del título de esta conferencia. Esto, por un lado, presenta ventajas ya que no compromete excesivamente al autor, y da una idea general de cúal es el tema que se va a tratar. Por otra, sin embargo, tiene el inconveniente de que puede crear falsas expectativas y defraudar por la cantidad de cuestiones que, inevitablemente, van a quedar fuera.

Hablar del número en la EGB parece tener poco gancho; es un tema muy conocido y **poco interesante**, ¿porqué dedicarle parte de nuestro tiempo?. La Aritmética es uno de los pilares inamovibles del sistema escolar, que se ha resistido a los más furiosos ataques sin apenas alterarse; mucho más interesante parece ser trabajar en Geometría, que aún debe recuperarse del abandono al que fue sometida en la época de las Matemáticas Modernas. ¿Merece la pena trabajar en Aritmética con intención de renovar su enseñanza?.

1. DESARROLLO CURRICULAR DE LA ARITMETICA.

La Aritmética, el número en la EGB, están bien establecidos, forman parte de más del 50% del contenido de los libros de texto y del tiempo dedicado a las matemáticas.

El profesor conoce bien -en líneas generales- la programación para Aritmética. No hay ninguna duda respecto de

i) los hechos que forman parte de la aritmética:
términos / notaciones / convenios / resultados.

ii) las técnicas y destrezas que hay que adquirir:
conocimiento de las tablas / dominio de los algoritmos

iii) las estructuras conceptuales que conviene lograr:
concepto de número / conocimiento del sistema de numeración / concepto de operaciones y sus propiedades.

iv) las aplicaciones prácticas que se deben desarrollar:
resolución de problemas tipo / práctica de la aritmética comercial / fundamentación de posteriores conceptos numéricos.

Las discrepancias, cuando existen, se refieren sólo a aspectos secundarios tales como qué algoritmo de la resta es más conveniente enseñar, hasta qué orden ,dentro del sistema decimal de numeración, debe trabajarse en un determinado nivel o ciclo de la enseñanza obligatoria, o bien, cuantos dígitos conviene emplear para lograr la automatización del algoritmo de la multiplicación o la división. Cuestiones cómo estas son las que suelen discutirse en los Seminarios de Profesores o en los Cursos de Actualización, y no son cuestiones desdeñables, ni su número es tan limitado como pudieran dar a entender los pocos ejemplos que aquí hemos empleado.

Aún cuando puedan señalarse considerables diferencias en la forma de enseñar Aritmética distintos profesores, sin embargo, todos están convencidos de que:

1.. Enseñan todos los contenidos fundamentales de la Aritmética. No olvidan ningún punto importante.

2. Dedican todo el tiempo necesario, e incluso más, al aprendizaje del Sistema Decimal de Numeración, Algoritmos de las operaciones y Resolución de Problemas Tipo.

3. Realizan una cantidad de ejercicios suficientemente amplia y sistemática como para que el dominio de las destrezas básicas se logre totalmente.

4. Muchos alumnos no lograrán dominar esas destrezas básicas; algunos otros las perderán en poco tiempo; la mayor parte de ellos olvidarán la casi totalidad de su aprendizaje en unos pocos años, más aún, no lo volverán a utilizar en su vida.

Aún así, también están convencidos, los profesores, de la utilidad práctica de lo que enseñan y de lo conveniente que resulta la Aritmética para el desarrollo intelectual de los niños. Igualmente piensan que los contenidos de Aritmética que se enseñan en la Escuela admiten poca variación, son los que deben ser y están consolidados desde hace casi unos 200 años.

2. NUESTRA CRITICA AL CURRICULO DE ARITMETICA,.

El hecho real es que la enseñanza de la Aritmética en nuestro país, se encuentra en un momento de estancamiento, en el que las necesidades de una sociedad moderna y avanzada, como a la que España pretende incorporarse en el momento actual, no han sido asumidas por el sistema educativo, ni hay perspectivas de que puedan incorporarse con carácter inmediato.

Por supuesto, bastante de la crítica que puede hacerse corresponde a planteamientos generales de renovación y reforma del curriculo escolar; sin embargo estas deficiencias se ponen especialmente de manifiesto en temas tan clásicos como la enseñanza de la Aritmética, del que nos estamos ocupando.

Nuestra tesis sobre el desarrollo curricular actual de la Aritmética se concreta en 5 puntos:

1. Ofrece una visión parcial y limitada de lo que son las matemáticas.
2. Favorece y estimula un pensamiento mecánico y rutinario.
3. Ignora los medios e instrumentos de cálculo cotidianos.
4. No tiene en cuenta las necesidades reales de utilización de la Aritmética.
5. No enseña a resolver problemas.

Estos cinco enunciados pueden parecer excesivamente radicales. Creemos que no, que con ellos hacemos sólo una crítica moderada, y lo más objetiva posible, de la situación real de abandono de la comprensión y búsqueda de significado que favorecen los actuales programas de matemáticas. Denunciamos asi la ausencia de todo pensamiento creativo que plantean los curriculo de Matemáticas, tanto para EGB como para Enseñanzas Medias, particularizados en el caso de la Aritmética.

Pasamos a comentar cada uno de los puntos anteriores.

3. COMPLETAR LA VISION DE LAS MATEMATICAS.

La aritmética ofrece una visión parcial y limitada de lo que son las matemáticas. Las matemáticas estudian, en general, los patrones; cualquier cosa en el cosmos es una especie de patrón.

Los patrones de las matemáticas se agrupan en varias familias, y entre las más clásicas están: Número, Espacio, Lógica, Infinito e Información.

Los números constituyen un tipo especial de patrones que subyacen a los pensamientos y los objetos que nos rodean. Dependiendo de la complejidad del patrón del cual proceden, los números se pueden clasificar en 4 tipos: pequeños, medios, grandes e inconcebibles.

Los números pequeños, se consideran por lo general comprendidos en el intervalo 1-1000, codifican los arquetipos más universales y pueden pensarse como cantidades concretas.

Los números medios, que son los comprendidos en el intervalo 10^3-10^{12}, se emplean en el trabajo usual con cantidades discretas; no es fácil visualizarlos y tienen una cualidad más abstracta. Se escriben y leen con la notación usual del sistema decimal de numeración.

Los números grandes se encuentran en los límites de nuestra habilidad para nombrar números. El Googol, 10^{100}, es uno de los números grandes más pequeños que hay. Estos números se notan usualmente mediante potencias y suelen aparecer en la notación científica. Sirven para expresar el orden de magnitud de una cantidad grande, y son importantes por su tamaño bruto y por el patrón que expresan.

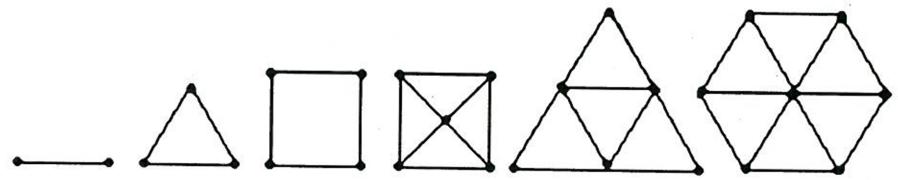
Números inconcebibles son aquellos que, no siendo infinitos, son tan grandes y complejos que no tenemos una vía clara para pensar acerca de ellos. Un ejemplo claro de número inconcebible es el "número del género humano". Supónganse ordenados los 5000 millones de personas por edad, escríbase un 1 en el n-ésimo puesto si se trata de una mujer y un 0 si se trata de un hombre;' el número así formado es el "número del género humano".

La información que damos en la escuela sobre números pequeños se refiere a su notación, lectura y escritura y a unos pocos hechos básicos de relaciones entre números, que codificamos en forma de tablas y cuya memorización se considera prioritaria.

La extensión de esas relaciones numéricas, a las que llamamos operaciones, a los números pequeños y medios se hace mediante el aprendizaje y mecanización de los algoritmos de las operaciones. Nuestra insistencia sobre estos patrones con carácter casi exclusivo, nos lleva a una visión parcial y limitada de lo que son las matemáticas.

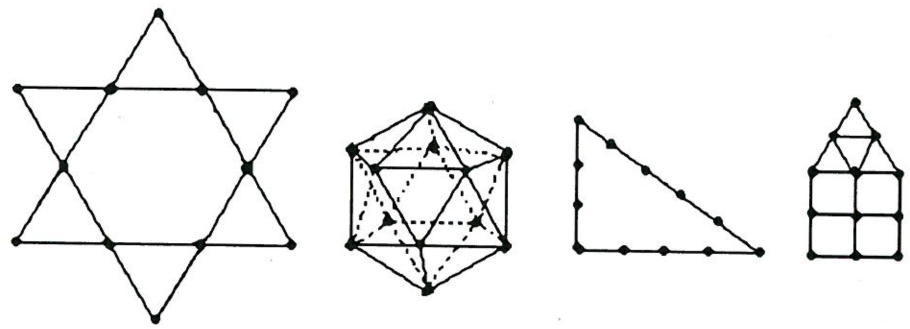
4. DESTERRAR LA RUTINA.

Se favorece y estimula un pensamiento mecánico y rutinario. La forma convencional de presentar y estudiar los números, desde el comienzo de la escolaridad, reitera una y otra vez un mismo tipo de ideas en donde, más que la capacidad de razonar, parece fomentarse la mecanización total de unas pocas reglas y representaciones. Por ello no es usual estudiar los números como configuraciones puntuales:



2 3 4 5 6 7

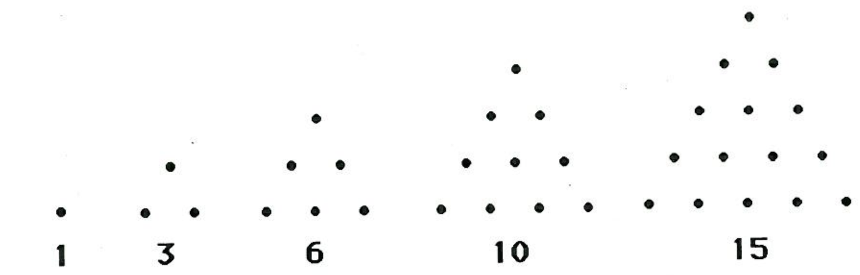
Tampoco lo es expresar un mismo número mediante diferentes configuraciones:



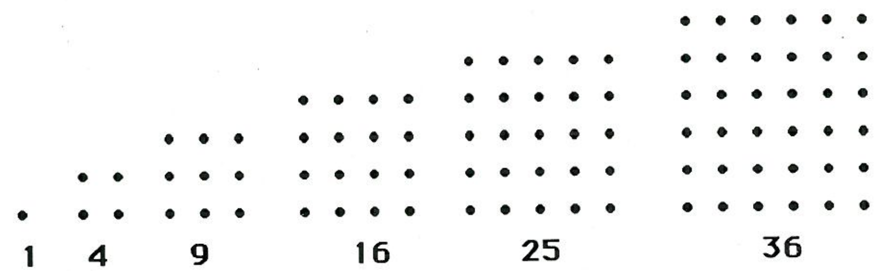
12 12 12 12

lo cual nos permite buscar a cuántos patrones se ajusta un número.

En este orden de ideas puede ser importante localizar los números que comparten un mismo patrón. Entre los más conocidos están los números triangulares:



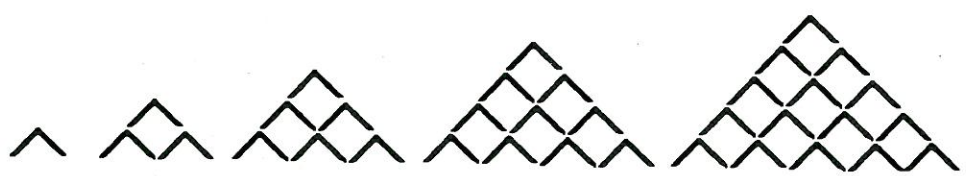
y los números cuadrados:



Pero hay otras muchas posibilidades de compartir patrón:

¿Qué números son estos?

¿Y estos otros?



La representación de los números que comparten un mismo patrón nos permiten determinar cuál es su ley general. Así, en el caso de los números triangulares se observa fácilmente que tales números son:

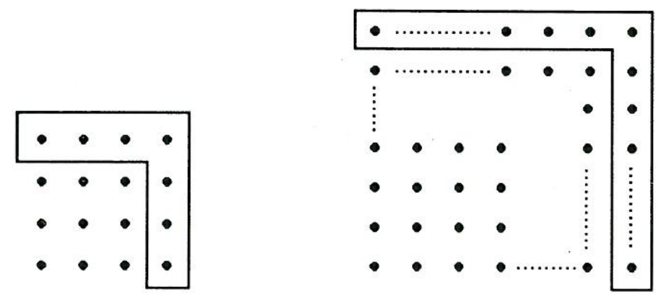
1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5, etc.

con lo que el n-ésimo número triangular resulta ser:

$$1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{1+n}{2} \times n = \binom{n+1}{2}$$

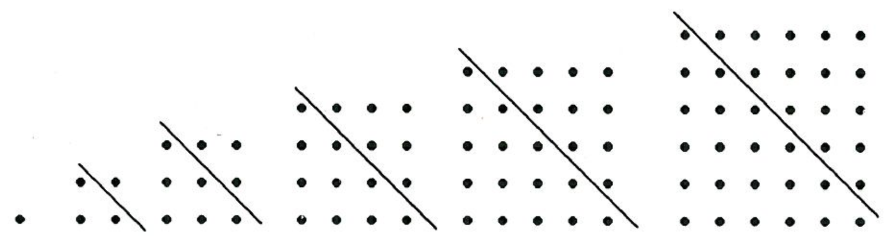
y "descubrimos" que los números triangulares son una clase de números combinatorios.

También se observa con facilidad que todo número cuadrado se forma a partir del anterior más el número impar del mismo orden



$4^2 = 3^2 + (2x3) + 1$ $\qquad$ $(n+1)^2 = n^2 + (2n + 1)$

Sobre las representaciones puntuales se pueden determinar relaciones, por ejemplo, se visualiza fácilmente que todo número cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos:



y esta relación se puede expresar, en general, así:

$$n^2 = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$$

Mucho más sencillo de visualizar, y justificar, es esta otra relación:

$2^2 - 1^2 = 2+1$
$3^2 - 2^2 = 3+2$
$4^2 - 3^2 = 4+3$
$5^2 - 4^2 = 5+4$
....

Esto nos permite plantear gran cantidad de problemas no convencionales tales como:
-Determinar relaciones sobre representaciones puntuales, por ejemplo, **Probar que:**

$$n^2 + (n+1) = (n+1)^2 - n$$

-Determinar relaciones no usuales entre números, por ejemplo, **Comprobar gráficamente que:**

$$1 = 1^2$$
$$1+2+1 = 2^2$$
$$1+2+3+2+1 = 3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 4^2$$
....

Y también resulta posible descubrir e inventar relaciones entre números.

Todas estas consideraciones surgen desde el momento en que rompemos el planteamiento convencional y rutinario de enseñar y aprender la aritmética, que se han puesto de manifiesto al elegir las configuraciones puntuales a lineales, como otra forma de trabajar con los números. Pero este no es el único procedimiento para romper con la rutina usual. Encontrar relaciones dentro de los resultados de las tablas de sumar o multiplicar; expresar cualquier número a partir de un número limitado de signos, como en el caso del conocido juego de los 4 cuatros, son otras tantas formas de romper el hastío que supone reiterar una y otra vez las relaciones básicas entre números. Se consigue así superar una imagen fosilizada que se contradice con la gran riqueza y potencialidad que presenta la Aritmética para el cultivo de un pensamiento auténticamente creativo.

5. INCORPORAR LOS MEDIOS E INSTRUMENTOS DE CALCULO.

Se ignoran los medios e instrumentos cotidianos. Ya es tradicional el descuido con el que se trata en la escuela el cálculo mental. Sin embargo, todos los estudios realizados sobre las técnicas de cálculo con las que usualmente trabajan los adultos, indican que el cálculo mental se suele emplear en más de un 80% de los casos en los que hay que obtener un resultado con cierta rapidez.

El cálculo mental abarca una gama muy amplia de posibilidades, que comienza por casos muy sencillos hasta llegar a reglas complejas y sofisticadas.

A título de ejemplo tenemos la regla de "contar desde el mayor" muy útil en el aprendizaje de la suma. Así, cuando hay que calcular 5+8, una posibilidad mental de hacerlo rápidamente es contar 5 a partir de 8: 9,10,11,12,13; el resultado es 13, o bien, contando 3 a partir de 10 ya que 2+8=10 y 2+3=5, luego: 11,12,13, y éste es el resultado.

Hacer estas reflexiones con los alumnos del Ciclo Inicial, les facilita el inicio de las estrategias de cálculo mental.

Más sofisticadas son las reglas para el producto. Así, multiplicar por 5 cualquier número, se hace añadiendo un cero y dividiendo por 2:

$$4576 \times 5 = \frac{45760}{2} = 22880$$

Multiplicar por 9 es añadir un cero y restar el número: Así:

$$4576 \times 9 = 45760 - 4576 = 41184$$

Estar reglas se pueden combinar, y así tenemos que multiplicar por 49 es multiplicar por 50 y restar el número:

$$28 \times 49 = 28 \times 50 - 28$$

Pero, multiplicar por 50 es añadir dos ceros y dividir por 2:

$$28 \times 49 = 28 \times 50 - 28 = \frac{2800}{2} - 28 = 1400 - 28 = 1372$$

La riqueza de las relaciones que pueden descubrirse practicando el cálculo mental de forma sistemática en la escuela es, prácticamente, ilimitada, con la ventaja de que se facilita el manejo y descubrimiento de estrategias de pensamiento por encima de los aprendizajes rutinarios y carentes de comprensión.

Uno de los grandes temas pendientes en la reforma del currículo escolar de matemáticas es la incorporación de la calculadora como un elemento de trabajo en el aula. La rapidez y eficacia son los rasgos más carcterísticos de esta herramienta, y esto hay que compaginarlo con un aprendizaje significativo. La calculadora pone en evidencia las limitaciones del programa tradicional para la aritmética: aquellas enormes cuentas en las que se ponía a prueba la habilidad para no trastocar una cifra carecen hoy de sentido. El alumno debe conocer los algoritmos usuales de las operaciones, pero nadie pretende defender en la actualidad aquellas divisiones con divisores de cuatro o cinco dígitos. Hay muchas otras formas de favorecer el cálculo empleando este instrumento, un ejemplo clásico es el siguiente:

"Utilizando las teclas $\boxed{3}$. $\boxed{7}$. $\boxed{-}$. $\boxed{\times}$. $\boxed{=}$ escribe todos los números que puedas, comenzando desde 1"

Muchos son los argumentos que justifican la incorporación de la calculadora al aprendizaje escolar. Quizás el más definitivo es que se trata de un instrumento usual de trabajo en cualquier ambiente en el que, sistemáticamente, haya que trabajar con números. Las calculadoras no pueden quedar fuera de la escuela porque su uso se ha extendido a todas las situaciones de cálculo cotidiano; son pues un instrumento potente que hay que aprender a utilizar, y al que debemos sacar todo el partido posible en la enseñanza de la aritmética. El abandono del cálculo mental y el desprecio por la calculadora son dos ejemplos destacados de la ignorancia escolar sobre los medios e instrumentos de cálculo cotidianos.

6. ATENDER A LAS NECESIDADES REALES DE USO DE LA ARITMETICA.

No se tienen en cuenta las necesidades reales de utilización de la aritmética. El trabajo escolar con números suele estar bastante descontextualizado y, por ello, no se suelen tener en cuenta las necesidades reales de uso de la aritmética, en especial se ignora todo lo relativo a la **aproximación** y **estimación.** Con el trabajo escolar se transmite una falsa idea de precisión y exactitud, que al llevarla a situaciones reales no resulta adecuada ni conveniente, ni muchas veces posible. Cuando hay que determinar la hora en la que ocurrió un hecho importante en el que no se estuvo presente, por ejemplo, un accidente, es suficiente con dar un intervalo de tiempo; cuando hay que valorar el número de asistentes a una manifestación, el resultado se estima en decenas de millares, y todo el mundo lo admite como válido cuando se sabe que es una aproximación.

Por el contrario, el medio escolar no proporciona ningún entrenamiento en hacer valoraciones cuantitativas en situaciones abiertas: ¿qué distancia hay del colegio a mi casa?,¿cuántos días hace que nací?,¿que superficie tiene el aula?,¿cuantos pelos tengo en la cabeza?. El alumno carece de técnicas y referencias que le permitan elaborar una estrategia para responder a las cuestiones anteriores.

El cálculo mental es especialmente adecuado para trabajar en estimación ya que, en una primera aproximación, es suficiente con trabajar con órdenes de magnitud de las cantidades que aparecen. La calculadora se integra perfectamente en la estimación ya que permite controlar los errores cometidos en nuestros cálculos aproximados.

No tener sentido del tamaño de una cantidad posibilita que se produzcan errores de cálculo que, luego, resultan imposibles de identificar, por carecer de referencias reales. Así, es fácil introducir o eliminar un cero en el resultado final con los consiguientes trastornos que acarrea el aumentar o disminuir el orden de las unidades. No es lo mismo un coste final de 2.000.000 que otro de 20.000.000.

Un test clásico que nos permite valorar nuestra capacidad inicial de estimación es:

A continuación tienes cinco objetos y cinco números:

gato	mesa	señor jubilado	jarrón chino	jardín

78	280	3	1650	40000

Asocia el número más adecuado a cada objeto, indicando el criterio que establece tal asociación.

Es difícil comprender, en una primera lectura, que todos los objetos se pueden asociar con todos los números, ya que lo importante es encontrar un criterio que permita establecer aproximadamente tal relación.

Incorporar la aproximación y la estimación a la enseñanza regular de las matemáticas es una necesidad imperiosa para dar satisfacción a las necesidades reales de aprendizaje de la aritmética y su contextualización.

7. ENSEÑAR LA RESOLUCION DE PROBLEMAS.

A diferencia de lo que hemos comentado en los apartados anteriores, el curriculo actual de matemáticas, si incluye la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria, pero lo hace de forma parcial y limitada.

En primer lugar no suele estar claro lo que se entiende por problema aritmético. Clarificar lo que es un problema aritmético permite establecer cuántas variables juegan en los mismos y, por tanto, cuántas consideraciones deben realizarse a la hora de desarrollar este tópico.

Siguiendo el planteamiento de Lester (1983), entendemos por problema, en sentido amplio, "una tarea para la cual:

1. El individuo o grupo que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución,

2. No hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente su solución, y

3. El individuo o grupo debe realizar intentos para encontrar la solución"

En este marco se situa la idea más precisa de problema aritmético: " conocidas las relaciones entre una serie de datos numéricos, alguno(s) de los cuales es (son) desconocido(s), determinar dicho(s) valor(es) desconocido(s)".

Entendemos que problemas aritméticos son aquellos en los que:

1. Se conocen una serie de datos numéricos y unas relaciones entre ellos, que aparecen en un contexto significativo.

2. Hay uno o varios datos o relaciones desconocidas cuya conexión con los iniciales está establecida en el contexto general. Hay una petición explícita de determinar la información desconocida.

3. Se puede establecer una secuencia de operaciones aritméticas que permiten relacionar el dato desconocido en función de los conocidos.

4. A partir de las relaciones establecidas se infiere ese dato desconocido mediante una combinación de operaciones y relaciones aritméticas, en las que el dato desconocido nunca se manipula como si fuese una cantidad más de las que intervienen en el problema.

Este proceso puede ser no lineal y necesitar de ensayos y correcciones.

Las variables que pueden considerarse en los problemas aritméticos son múltiples. Señalamos los criterios que, a nuestro juicio, determinan las más importantes. Para ello vamos a atender a:

1. La información proporcionada.

2. La pregunta o cuestión planteada.

3. La secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta.

Respecto al punto 1, distinguimos las siguientes variables:

1.1. Transmisión de la información. Es la forma mediante la cual el individuo o grupo recibe los datos numéricos y las relaciones entre ellos. Básicamente se distinguen 4 posibilidades:

-Acción: se obtiene la información realizando determinadas acciones tales como manipular objetos, empleando instrumentos de medida, contabilizando hechos, etc.

-Representación: la información se obtiene mediante un dibujo o representación gráfica, sobre el que hay que buscar la información.

-Expresión verbal: la información aparece expresada mediante la palabra o un texto que consta de una o varias frases con significado. Se suelen considerar Problemas Aritméticos Fundamentales aquellos en los que la información se obtiene verbalmente, y a los que se llama problemas aritméticos de expresión verbal -P.A.E.V.-.

-Expresión simbólica: La información aparece expresada empleando, prioritariamente, términos lógicos y simbólicos matemáticos.

1.2. Datos numéricos en la información. Se suele distinguir entre:

-Los datos vienen dados directamente mediante números o bien hay que obtenerlos contando o midiendo objetos.

-Los datos numéricos vienen expresados simbólica o verbalmente.

-Los datos numéricos son números abstractos o corresponden a medidas de cantidades contínuas o discretas.

-Conjunto de números empleados: naturales, enteros, decimales, racionales, radicales, etc.

-El "tamaño" de los datos, y la mayor o menor disparidad entre ellos.

-Orden en que aparecen los datos.

-Datos que no aparecen nombrados explícitamente.

-Inclusión de datos innecesarios o supérfluos.

1.3. Relaciones que se conocen entre los datos. En este caso tenemos en cuenta:

-Si la relación es global o parcial, es decir, si abarca a todos los datos o sólo a una parte de ellos.

-Si la relación comprende o no a parte de la información desconocida; si la propia relación es o no conocida.

-Si las relaciones aparecen explícitas o tácitamente. Así, "Hay tres manzanas y dos peras en la mesa" es una relación explícita. "Cada coche tiene cuatro ruedas" o "cada semana tiene siete días" suelen ser relaciones tácitas, que se dan por supuestas, salvo que tengamos delante a los coches en cuestión o bien una hoja de almanaque.

-Si la relación o relaciones expresan estados o indican acciones y transformaciones. Así, "en cada caja caben 12 vasos" describe un estado. "En cada hora se empaquetan 12 vasos", expresa una acción.

-Atendiendo a la estructura lógica de la relación: si se trata de una inclusión, una unión, una intersección, complementación, igualación o partición, o bien un encadenamiento de los tipos anteriores.

-Si las relaciones aparecen encadenadas o son independientes. Si hay o no datos independientes, es decir, sin relación conocida con el resto.

1.4. Contexto de la información. Es todo aquello que no siendo esencial para la información que se transmite, contribuye a hacerla más inteligible. Conviene tener en cuenta:

-La situación más o menos "real" en la que se encuentra la información.

-El estilo empleado, cuando la información está expresada verbalmente.

-La extensión de la información, y la densidad que tiene dento de la misma el núcleo de dicha información.

-Las connotaciones de tipo normativo, axiológico o moral que puede tener la información. La visión positiva o negativa que se pueda desprender de los hechos descritos en la información.

-La participación del individuo o grupo en la obtención de la información.

-El vocabulario más o menos usual que se emplee.

Un segundo bloque fundamental de variables que se consideran en los P.A., son las relativas a la pregunta o cuestión planteada, es decir, respecto de la petición explícita de determinar uno o varios datos/relaciones desconocidos. Conviene tener en cuenta que, sea cual fuere la forma mediante la que se transmite la información, la pregunta siempre se expresa verbalmente, es decir, la pregunta tiene enunciado.

La pregunta es un enunciado verbal, que puede aparecer o no escrito. Las variables que pueden considerarse respecto de la pregunta son:

2.1. El tipo de información que se pide, ya que puede que se pregunte por:

-Un dato exacto o aproximado, o bien una relación determinada entre los datos.

-La representación gráfica de un dato numérico o relación, o bien la interpretación numérica o relacional de un dato gráfico.

-Elección entre varias respuestas posibles.

-La acción que debe llevarse a cabo para conseguir un determinado objetivo.

Cuando se consigue la información solicitada se dice que se ha obtenido la solución. Usualmente se entiende que, en un problema aritmético, la solución es un dato numérico y que el resto de las preguntas posibles son siempre pasos previos para conseguir dicho dato. No compartimos ese punto de vista y entendemos como preguntas propias de los P.A. el resto de las opciones.

2.2. La estructura semántica de la pregunta. En los casos en que las relaciones entre datos se ajusten a una estructura aditiva se consideran cuatro tipos diferentes de estructuras:

-Combinación: hay una serie de objetos o datos numéricos presentes y se solicita un dato explicitado en el contexto. La situación viene dada por una relación estática y se pide simplemente un dato que debe inferirse de los anteriores, sin que se establezcan nuevas relaciones ni se suponga ninguna acción.

-Cambio: en la información o en la pregunta hay un factor dinámico, una acción, y la pregunta versa fundamentalmente sobre el resultado de dicha acción.

-Comparación: La pregunta incluye un término comparativo: ¿Cuánto más..? ¿cuánto menos...? ¿cuánto falta....?...., que tiene significado dentro del contexto informativo.

-Igualación: combina las situaciones de cambio y comparación, ya que la pregunta suele versar sobre qué cantidad es aquella sobre la que hay que actuar para conseguir hacerla igual a otra con la que se compara. Hay pues acción y comparación, y la pregunta se dirige a conocer la cantidad sobre la que se actúa.

En los problemas cuya estructura general es de tipo multiplicativo, siguen valiendo las cuatro categorías generales anteriores pero se añade una más:

-Tasa o razón: son aquellos problemas en los que aparece una relación constante entre cantidades mediante un cociente o razón, o bien mediante un factor de proporcionalidad.

2.3. Posición y extensión de la pregunta. Conviene considerar:

-Si la pregunta aparece al comienzo, en el medio o al final del enunciado cuando este viene dado verbalmente.

-Si la pregunta abarca a la totalidad de la información, a parte de ella, o se limita escuetamente al valor o valore desconocidos.

-Cadencia de la pregunta: si se plantea una única cuestión o aparecen una serie de preguntas parciales que dan paso a la cuestión final.

2.4. Sentido real de la pregunta. Se trata de un aspecto metacognitivo, y consiste en determinar si en individuo o grupo encuentran sentido real o no a la cuestión con interés real dentro de contexto en el que aparece planteada, o bien se trata de un interrogante artificial carente de sentido o de importancia. Cabe valorar:

-Si la pregunta entra dentro de las cuestiones que el sujeto o grupo puede plantearse.

-Si la pregunta planteada da respuesta, o no, a una necesidad real y cuál es dicha necesidad.

-Si el dato que se obtiene se integra de modo coherente en el contexto informativo, aportando algún tipo de conocimiento no controlado anteriormente.

El tercer bloque fundamental de los P.A., es la Secuencia Operatoria, que relaciona la globalidad de datos -conocidos y desconocidos-, y permite obtener el dato desconocido en función de los conocidos. Se consideran las variables:

3.1. Conjunto numérico. Debe tenerse en cuenta:

-El conjunto numérico en el que están definidas las operaciones a utilizar.

-El subconjunto dentro del que aparecen los datos, por ejemplo: números naturales hasta cuatro cifras, fracciones con denominador de un dígito, etc.

-Pertenencia del resultado, o no, al mismo subconjunto en el que están los datos. Así, la suma de dos fracciones puede originar otra fracción o bien un número natural, etc.

-Empleo de un único sistema de signos o unidades para los datos, o bien empleo de sistemas diferentes.

3.2. Operaciones implicadas:

-Si hay operaciones debidas a un cambio de unidades para unificar los datos.

-Cuál o cuáles son las operaciones necesarias para la obtención del resultado.

-Algoritmo empleado en cada operación.

-Conveniencia del uso del cálculo mental, en todo o en parte de las operaciones.

Conveniencia, o no, del redondeo de los datos.

3.3. Tipo de instrucción abierta mediante la que se expresa la relación global entre los datos. Conviene tener en cuenta:

-Sentencias elementales que establecen las relaciones entre los datos: Ejempo: $a + b = ?$; $a + ? = c$; etc.

-Número de sentencias elementales.

-Orden en la resolución de las sentencias y encadenamiento de las mismas.

-Expresión de la secuencia numérica mediante una única sentencia abierta compleja.

-Distintas posibilidades de alcanzar el resultado mediante diferentes secuencias operatorias.

3.4. Recursos auxiliares. Se trata en este caso de tener en cuenta:

-La utilización de material concreto.

-El apoyo de dibujos o representaciones gráficas para obtener la solución.

-La elaboración de tablas.

-El uso de esquemas: fichas, cuadros,..

-El empleo de fórmulas.

-Tanteo del resultado.

-Verificación del resultado.

Tener en cuenta todas estas variables a la hora de elaborar un programa coherente para enseñar a resolver problemas aritméticos es una tarea aún por realizar. El material usual para el aula suele incorporar algunas de estas variantes, sin carácter sistemático. Por ello creemos que ofrecer algunas posibilidades para trabajar con P.A., no puede decirse que sea enseñar a resolver problemas.

Para concluir sólo nos queda señalar que elaborar un curriculo actual de Aritmética en la Enseñanza Obligatoria es una tarea apasionante, que esperamos dé lugar a un campo de estudio e investigación fecundo en los próximos años dentro de la comunidad de Educadores Matemáticos españoles.

BIBLIOGRAFIA:

CASTRO, E.; RICO, L.; CASTRO, E.: (1987) "Números y operaciones". Ed. Síntesis. Madrid.

GOMEZ, B.: (1988)."Numeración y cálculo". Ed. Síntesis. Madrid.

RICO,L. y otros: (1988) "Didáctica Activa para la Resolución de Problemas". Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

RUCKER, R.: (1987). "Mind Tools". Penguin Books.

SEGOVIA, I.; CASTRO, E.; CASTRO, E. u RICO, L.:(1989). "Estimación en cálculo y medida". Ed. Síntesis. Madrid.