

Cincuentenario
de la
Escuela Normal de Granada

GRANADA
1934 - 1984

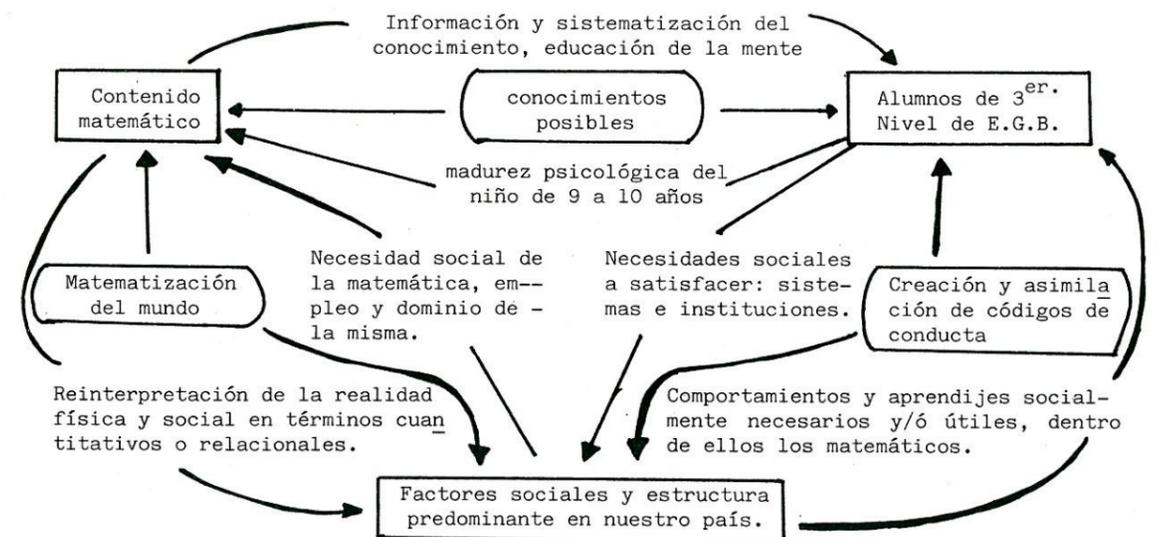
661
020

**DIDACTICA DE LA MATEMATICA EN EL TERCER NIVEL
DE LA EDUCACION GENERAL BASICA**

LUIS RICO ROMERO
ENCARNACION CASTRO MARTINEZ
E.U. de E.G.B. de Granada

Durante los cursos 78-79 y 79-80 hemos procedido al estudio de los contenidos del Area de Matemáticas en el Tercer Nivel de la E.G.B. Siguiendo una metodología ya empleada en el estudio de los dos niveles anteriores, en este trabajo hacemos una síntesis de cómo hemos visto el aprendizaje de nuestra materia en los alumnos de este nivel. Ya hemos indicado que son tres las variables que interactúan entre sí: el contenido, el alumno y la sociedad en la que éste se encuentra enclavado, y que nuestros análisis van dirigidos casi exclusivamente a las relaciones entre alumno y contenido, de ahí la aparente parcialidad de los mismos. Por todo ello queremos dejar constancia de que concebimos nuestra materia dentro de un esquema más amplio, en donde las relaciones que se pueden considerar entre las tres variables antes señaladas son más ricas y complejas.

Esquemáticamente tenemos:



A la vista de este esquema, queda claro nuestro campo acotado de trabajo que se refiere al estudio en profundidad de cuáles son los contenidos posibles -dentro de un programa previamente establecido- para el alumno del 3º nivel y por qué.

Concebido este trabajo dentro de una idea más extensa, no hemos desarrollado en profundidad más que el estudio de los contenidos posibles en este nivel y dejamos abierto el estudio de las otras conexiones. La posibilidad la hemos entendido en términos estadísticos y hemos interpretado que un conocimiento es adecuado si los ítems que evalúan los distintos objetivos que pueden plantearse para ese conocimiento están, al menos, en el intervalo 70-79% de rendimiento (1).

A partir de los datos que nos ha proporcionado la muestra de 921 alumnos que han intervenido en las pruebas, que constaban en total de 241 ítems, es como hemos ido elaborando primero y contrastando después nuestras hipótesis, que pasamos a elevar a conclusiones.

1. EL ALUMNO

En las conclusiones que ya presentamos en su día para el 2º Nivel (2) habíamos descrito al alumno de 7-8 años iniciándose en la edad de las operaciones concretas: el niño se hacía capaz de razonamiento y de comprensión objetiva en los límites de lo concreto. De 8 a 9 años se continúa avanzando en el mismo estadio: se agiliza el paso de la acción a la representación, con lo cual se va afianzando el dominio de las operaciones, cada una de ellas adquirida previamente como acción; la acción se interioriza como operación plenamente a esta edad. Se continúa el proceso de descentración en donde los objetos y los actos externos a uno mismo van adquiriendo mayor significado y comenzando a interpretarse en términos no subjetivos -inicio de la causalidad. El intercambio de información, no solo con los adultos, sino con los propios compañeros va permitiendo que esa descentración vaya acompañada de una mayor madurez del lenguaje que permite un mayor poder de evocación y de dominio de las representaciones.

El pensamiento continúa su avance pasando de intuitivo a operativo mediante agrupaciones de conjunto de las relaciones intuitivas, aisladas con anterioridad; en esta edad se sitúa el completamiento de las operaciones concretas. Cinco son las fases, según Piaget (3), que se dan en esta transformación, y vamos a indicar qué aspectos de los contenidos estudiados dentro de este nivel pueden considerarse comprendidos dentro de cada fase. Sin pretender ser exhaustivos, hemos determinado los siguientes:

1.1. Primera Fase: Las acciones sucesivas pueden coordinarse en una sola

Se corresponden con esta fase las siguientes acciones para los contenidos del 3º nivel:

- De nombrar y reconocer objetos que cumplen una característica, se pasa a rodearlos todos encerrándolos con una línea, separándolos del resto.
- De nombrar todos los elementos que pertenecen a A y todos los que pertenecen a B y distinguir los que se han nombrado dos veces, se pasa a nombrar los elementos comunes a A y a B directamente.
- De representar los conjuntos A y B en diagramas superpuestos y de ahí formar el conjunto de los elementos comunes, a formar el conjunto $A \cap B$ de inmediato.
- De representar los conjuntos A y B en diagramas superpuestos y de ahí formar el conjunto unión de ambos, a formar $A \cup B$ directamente.

- Conocidos los valores de cada uno de los órdenes que intervienen en un número, formarlos.
- Conocido que diez unidades forman una decena, diez decenas una centena, diez centenas una unidad de millar, etc., pasar a que diez unidades de un orden cualesquiera forman una de orden inmediato superior.
- De sumas en las que hay que llevarse una decena de las unidades, o una centena de las decenas, pasamos a sumas en las que al sumar la columna de las cifras de un orden cualesquiera nos llevamos una unidad de orden inmediato superior. Igual consideración cuando hay que llevarse dos unidades de orden inmediato superior.
- De diferencias en las que la cifra de las unidades del minuendo es menor que la del sustraendo y por ello la cifra de las decenas prestan una decena a las unidades en el minuendo, o bien esto sucede con la cifra de las decenas ó de las centenas, se pasa a que cuando la cifra de un orden cualesquiera en el minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, entonces, la cifra de orden inmediato superior del minuendo le presta una unidad.
- Expresar sumas de sumandos iguales como producto.
- De multiplicar unidades, decenas, centenas ó unidades de millar por un dígito, a multiplicar un número de dos, tres ó cuatro cifras por un dígito
- De realizar productos con multiplicador de una cifra, a realizar productos con multiplicador de varias cifras.
- De multiplicar un número por 10 o por 100 a realizar productos por la unidad seguida de ceros.
- De repartir un número de una o dos cifras entre un dígito, a realizar cualesquiera división con divisor de una cifra (sin ceros en el cociente).
- De hacer continuo el alineamiento de varios puntos, a trazar rectas.
- De comprobar que en determinadas situaciones dos rectas guardan entre sí una determinada relación, pasar a las nociones de convergencia y paralelismo.
- De contar los lados, vértices y ángulos de un polígono cualesquiera, a reconocer que todo polígono tiene igual número de lados que de vértices y ángulos.

1.2. Segunda Fase: El esquema de la acción se hace reversible

Se da en este nivel los siguientes casos:

- De tener objetos rodeados por una línea, a reconocer cuál es la característica que ha servido para delimitarlos.
- De nombrar los elementos comunes a dos conjuntos A y B, a situar cada uno de esos elementos tanto en A como en B.
- De tener el conjunto $A \cap B$, a inventar posibles conjuntos A y B que tengan dicha intersección, con o sin condiciones suplementarias.
- De tener el conjunto $A \cup B$, a inventar posibles conjuntos A y B que tengan dicha unión, con o sin condiciones suplementarias.
- Escrito un número, pasar a descomponerlo según los distintos órdenes que lo constituyen.
- Conocido que una decena se descompone en diez unidades, una centena en diez decenas, una unidad de millar en diez centenas, etc., pasar a que una unidad cualesquiera se descompone en diez de orden inmediato inferior.
- Conocer que un número cuyas cifras alcanzan un determinado orden se puede descomponer en sumandos cuyas cifras sólo alcanzan el orden inmediato anterior. De hecho, este aspecto no se domina en este nivel: la acción inversa a llevarse una decena, centena, etc. es de difícil dominio a esta

- edad y sólo se alcanzará en aspectos muy concretos.
- Conocidas las reglas que han de emplearse en las diferencias en las que una o varias cifras del minuendo son menores que las correspondientes del sustraendo, preparar una resta de este tipo para que se pueda realizar.
 - Expresar productos como suma de sumandos iguales.
 - Expresar un número terminado en varios ceros como producto, en donde uno de sus factores es la unidad seguida de ceros.
 - Indicar en cada una de las divisiones parciales que se realizan al dividir un número cualesquiera entre un divisor de una cifra qué tipo de reparto es el que se está haciendo.
 - Dada una línea, señalar en ella los puntos que se indiquen y reconocer qué relación guardan.
 - Trazar rectas que guarden entre sí una relación propuesta.
 - De conocer el número de lados, vértices o ángulos de un polígono a indicar que número tiene de sus otros elementos.

1.3. Tercera Fase: Un mismo punto puede alcanzarse, sin que se altere, por dos caminos diferentes

En esta fase se presentan los siguientes aspectos:

- Una misma colección de objetos puede ser singularizada, dentro de un colectivo dado, atendiendo a distintos criterios.
- Según el orden en el que vayamos tomando los elementos de dos conjuntos aparecen los elementos comunes ordenados de formas distintas, pero constituyendo el mismo conjunto.
- El conjunto $A \cap B$ puede formarse con sus elementos ordenados de formas distintas.
- El conjunto $A \cup B$ puede formarse con sus elementos ordenados de formas distintas.
- El orden de cada una de las cifras que intervienen en la formación de un número puede venir dado de distintas formas, en cada uno de los casos hay que formar el número.
- Sea cual sea la posibilidad con la que tomemos diez unidades de un determinado orden:
9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 5+5, etc., siempre se obtiene una unidad de orden inmediato superior.
- Las cifras de un mismo orden en una suma de varios sumandos llevándose pueden agruparse según distintos criterios, en cada uno de los casos, siempre nos llevamos 1 ó 2 unidades del orden inmediato superior.
- El resultado de multiplicar un número de varias cifras por un dígito n se alcanza también mediante una suma de n sumandos iguales al inicial.
- El resultado de multiplicar un número por la unidad seguida de ceros se puede obtener también mediante la técnica general de la multiplicación.
- Las rectas determinadas por distintas parejas de puntos, todos alineados, coinciden.
- El trazado de rectas convergentes o paralelas a una dada puede hacerse de diferentes formas.
- El recuento de los elementos de un polígono puede hacerse comenzando por los vértices, lados ó ángulos, indistintamente, y continuando por los restantes; siempre hay coincidencia en el número total de cada uno de ellos.

1.4. Cuarta Fase: La vuelta al punto de partida permite encontrar este idéntico a sí mismo

Se presentan en este nivel los siguientes casos:

- Los objetos rodeados permiten encontrar la característica, una de ellas, que sirvió para singularizarlos.
- Al tener singularizados los elementos que pertenecen a dos conjuntos a la vez, podemos reconstruir los conjuntos A y B.
- De tener el conjunto $A \cap B$ y formar los conjuntos A y B, éstos coinciden con los iniciales, bajo determinadas condiciones.
- De tener el conjunto $A \cup B$ y obtener A y B, éstos coinciden con los iniciales.
- Al formar un número a partir de los distintos órdenes de unidades que lo constituyen, éste se descompone a su vez en los órdenes iniciales.
- Si al agrupar k unidades de un orden con $10-k$ unidades del mismo orden se obtiene una unidad de orden inmediato superior, a partir de la unidad superior obtenemos $k+(10-k)$ unidades del orden inicial.
- Al revisar aquellas columnas en las que hemos agregado 1 o 2 unidades nos encontramos que en la suma de la columna anterior nos llevábamos 1 ó 2.
- Al revisar aquellas restas que hemos debido preparar nos encontramos que en aquellos órdenes en los que ha habido que prestarle una unidad de orden superior era porque la cifra del minuendo era menor que la correspondiente del sustraendo.
- Al expresar un producto como suma de sumandos iguales, ésta coincide con la suma de partida.
- Al indicar puntos en una línea trazada encontramos los puntos de partida que sirvieron para trazar la recta.
- Al trazar un polígono con n vértices ó n lados ó n ángulos vemos que también tiene n lados y ángulos ó n vértices y ángulos ó n vértices y lados.
- Al reconocer de entre varias rectas cuáles son convergentes o paralelas a una dada, volvemos a encontrar las iniciales que sirvieron para elaborar el concepto.

1.5. Quinta Fase: La nueva acción, al repetirse, no añade nada a ella misma ó tiene solo efecto acumulativo

Podemos determinar los siguientes casos:

- Al volver a considerar la misma característica se vuelve a formar el mismo conjunto, que ya estaba determinado.
- Si volvemos a localizar los elementos comunes a dos conjuntos, dichos elementos son los ya obtenidos.
- El conjunto de elementos comunes a A y B vuelve a ser el mismo conjunto $A \cap B$ formado.
- El conjunto de elementos A ó B vuelve a ser el mismo conjunto $A \cup B$ formado.
- El número formado a partir de unas cifras, cada una de ellas correspondientes a un orden conocido, es siempre el mismo.
- Siempre que se agrupen, por la vía que sea, diez unidades de un orden determinado, se obtiene la unidad de orden inmediato superior.
- Sea cual sea el orden en el que agrupamos los sumandos de una columna de la que hay que llevarse siempre, nos llevamos los mismo: 1 ó 2 unidades de orden inmediato superior.
- Siempre que en una diferencia una o varias cifras del minuendo sean

- menores que las correspondientes del sustraendo, hay que prepararla cediendo una unidad del orden inmediato superior al minuendo.
- Al volver a multiplicar el resultado de un producto por un dígito hay que aplicar las mismas reglas.
 - Al volver a multiplicar un número terminado en ceros -que era un producto- por la unidad seguida de ceros, se vuelve a aplicar la misma regla.
 - Si volvemos a dividir el cociente de una división por un dígito entre un dígito, se aplican los mismos criterios.
 - Si se traza de nuevo la recta que pasa por dos puntos se obtiene igual recta que la inicial.
 - Al trazar de nuevo rectas que coinciden en un punto con R, ó bien que no tengan ninguno en común, se vuelven a obtener rectas convergentes o paralelas respectivamente.
 - Al recontar vértices, lados o ángulos siempre se vuelve a obtener el mismo número.

Vemos, pues, que el conocimiento se va realizando dentro de una estructura, organizando además esa estructura, y no tiene ningún sentido un planteamiento estrictamente formal, que para el alumno de esta edad carece totalmente, no ya de significado, sino de posibilidad real de intelección. Tal y como se van formando las nociones de permanencia e invariabilidad, las clasificaciones, la estructuración del tiempo y del espacio, asimismo se va realizando el aprendizaje de los nuevos conocimientos matemáticos, y se hace necesario interpretar cada uno de ellos en sus diferentes fases a fin de realizar una comprensión total.

2. EL CUESTIONARIO

Las Orientaciones Pedagógicas (1970) señalan en el Tercer Nivel de la E.G.B. los siguientes contenidos para el Área de Matemáticas:

- Conjuntos. Relación de pertenencia. Relación de inclusión. Operaciones de intersección y unión. Conjuntos disjuntos. Producto cartesiano de dos conjuntos.
- Multiplicación de números naturales. Automatización de esta operación.
- Plano, recta, semiplano, semirecta, segmento.
- Angulo, ángulos consecutivos, ángulos adyacentes.
- Introducción experimental al paralelismo de rectas.
- Círculo. Polígonos. Clasificación de polígonos.

Señalamos una vez más la insuficiencia de esta simple enumeración de títulos generales con la que se ha elaborado el programa; en este sentido las Nuevas Orientaciones (1981) han supuesto una sensible mejora sobre la situación de la década anterior, que es la que nosotros hemos estudiado. Carecen estos programas de una referencia clara a la extensión y profundidad con la que deben ser impartidos cada uno de los contenidos enunciados; señalamiento de prioridades; olvido innecesario de algunos contenidos que deben desarrollarse inevitablemente, tales como la continuación de la numeración, de la suma y de la resta; olvido premeditado de algunos otros contenidos cuya conveniencia parece fuera de toda duda, tales como la continuación del uso de las unidades de medida y la iniciación a las fracciones en sus aspectos más simples.

Por todo ello, las posibilidades a la hora de elaborar un Cuestionario a partir del Programa anterior eran varias. Nosotros hemos tenido en cuenta dos criterios

con prioridad:

- 1º. Desarrollar todos y cada uno de los puntos del Programa con la máxima extensión compatible con la edad mental del niño y las necesidades de la materia,
- 2º. Continuar el estudio sistemático del sistema decimal de numeración así como de las operaciones suma y resta, aún cuando no vienen expresamente señalados como contenidos propios de este nivel.

Hemos estructurado el Cuestionario de este Tercer Nivel en bloques de contenidos, cada uno de los cuales se desarrolla prioritariamente en determinadas lecciones ó bien puede extenderse durante periodos más amplios del Curso y aparecer en un número mayor de lecciones aunque con menor extensión en cada caso. Los bloques establecidos en realidad son muy amplios y su mayor utilidad radica en la unidad de contenido temático que nos permite un análisis profundo y extenso del mismo.

Estos bloques son los siguientes:

2.1. Bloque primero: Conjuntos

Incluimos en este bloque todas las nociones de iniciación a la teoría de conjuntos que propone el Cuestionario. No hemos incluido ninguna otra noción ya que algunas de ellas nos parecían innecesarias y hemos procurado reducirlas al máximo, así en la unión de conjuntos y en el producto cartesiano. Las lecciones que tratan estos conceptos son las primeras del Curso, si bien hay un repaso completo de todas ellas para familiarizarnos con su uso en Geometría, de ahí que vuelvan a aparecer a mediados de curso. En el texto elaborado como material de trabajo para el alumno (4), aparece este bloque en las lecciones: 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 10ª, 11ª, 12ª, 14ª y 15ª.

2.2. Bloque Segundo: Numeración

Aún cuando este contenido no aparece señalado explícitamente en los Programas nos ha parecido imprescindible su inclusión y el trabajo sistemático sobre el mismo. Por ello hemos dedicado algunas lecciones a repasar los números de tres y cuatro cifras, que ya se estudiaron en el 2º Nivel, con lo cual puede aprovecharse para estudiar y sistematizar todas las operaciones con dicho números. Se pasa luego a presentar detalladamente los números de cinco cifras y luego generalizamos explicando en qué consiste el sistema decimal de numeración. Este bloque se trata con prioridad en las lecciones: 1ª, 2ª, 3ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª, 12ª, 16ª, 17ª, 18ª, 20ª y 24ª.

2.3. Bloque tercero: Adición y sustracción

El estudio sistemático, con escalonamiento de dificultades, de las operaciones suma y resta con los números estudiados se hace asimismo imprescindible para el alumno de este nivel. Incluimos dentro de este bloque la resolución de problemas de los tipos más importantes con estas operaciones, así como la invención de enunciados que se resuelvan con una cuenta propuesta. Aunque este bloque recorre prácticamente todas las lecciones del curso se desarrolla con prioridad en la: 1ª, 2ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 12ª, 13ª y 21ª.

2.4. Bloque cuarto: Producto y división

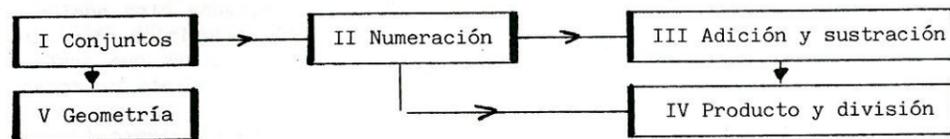
El primero de estos contenidos viene señalado expresamente para este nivel, mientras que la división aparece en 2º como iniciación y en 4º ya debe de mecanizarse en todas sus variantes y es por ello por lo que nos ha parecido necesario incluirla

en este nivel y sistematizar todos los casos en que el divisor es de una cifra. Seguimos con este bloque la técnica ya iniciada el curso pasado que consiste en realizar su tratamiento muy escalonado y prácticamente a lo largo de todas las lecciones del curso, es por ello que no indicamos ninguna en la que se trabaje con preferencia.

2.5. Bloque quinto: Geometría

Los contenidos de este bloque son los que aparecen más detallados en los programas oficiales, y en una lectura superficial de los mismos se podría tener la impresión de que más de la mitad del curso debiera estar dedicado a estos contenidos. No lo hemos entendido así, ya que nos ha parecido que la descripción y trabajo con el plano y con las figuras más simples del mismo no da para tanto, y que en todo caso hay aspectos aritméticos, como ya hemos dicho, que si bien no se imponen es de todo punto necesario incluirlos. Hemos conectado las nociones más simples de geometría con las notaciones y conceptos de la teoría de conjuntos con lo cual hemos relacionado dos bloques aparentemente dispares. Este bloque se ha desarrollado en las lecciones: 10ª, 11ª, 21ª, 22ª, 23ª, 24ª, 25ª, 26ª, 27ª, 28ª, 29ª y 30ª.

El organigrama de los contenidos de este Nivel queda como sigue:



Pasamos a explicar en detalle el contenido, las dificultades básicas y la estrategia con que hemos desarrollado cada uno de los bloques que acabamos de señalar.

Bloque Primero: Ya se comenzó a trabajar sobre las nociones de conjunto y elemento en el primer nivel, también se inició la determinación de subconjuntos y la unión de disjuntos; en el 2º nivel no se ha estudiado ningún concepto relacionado con este bloque, y es precisamente en el curso actual donde se inicia de una forma más sistemática el estudio de la teoría de conjuntos. Vaya por delante nuestra disconformidad con un planteamiento tan amplio en los contenidos como el que enuncia el Programa, pero al mismo tiempo tan impreciso. Creemos que todo lo relativo a parejas ordenadas y al producto cartesiano de conjuntos sobra de este nivel ya que carece de aplicación inmediata y no tiene ninguna conexión con el contenido de los restantes bloques; por eso, aunque lo hemos incluido en nuestro trabajo y los niveles de rendimiento en los items son aceptables, nos parece un concepto fuera de lugar. Si nos apuran un poco, diríamos que la definición de conjunto unión de otros dos y el estudio de toda su casuística nos parece también innecesario para los alumnos de este nivel. Consideración aparte nos merecen las nociones de conjunto, elemento, subconjunto e intersección de conjuntos ya que se pueden emplear ventajosamente en el trabajo con la geometría dándole unidad conceptual y de notación y vocabulario.

El contenido lo hemos desarrollado partiendo de situaciones finitas y presentando al conjunto como consideración simultánea de objetos, representada bien por diagrama de Venn, por extensión o por diagrama lineal; no hemos insistido quizás lo suficiente en que un conjunto son sus elementos y puede que algunos aspectos del concepto no hayan quedado totalmente claros. De la relación de pertenencia hemos pasado a la doble pertenencia, es decir, un mismo objeto puede formar parte de más de un conjunto, puede pertenecer a varios conjuntos, y de ahí hemos montado -casi sin

diferencias- las nociones de inclusión y de intersección. Quizás haya sido un planteamiento excesivamente formal y poco intuitivo para los alumnos de esta edad, y convenga replantearlo en un futuro. El resto de los conceptos siguen la pauta usual en el trabajo con conjuntos finitos, nivel que no se supera hasta iniciar la geometría.

Bloque segundo: Aunque pueda parecer excesivo hemos iniciado el estudio de este bloque con un repaso muy rápido de las unidades y las decenas, de esta forma aprovechamos para recordar las combinaciones básicas de la suma y la resta, es decir las tablas de sumar y de restar. Casi con simultaneidad se recuerdan los números de dos cifras y se repasan la suma y resta llevándose.

Los números de tres cifras, comenzando por las centenas, se recuerdan con un poco más de detalle y aprovechamos para realizar sumas en las que hay que llevarse dos en una de las columnas o bien restas en las que haya que prestar bien a las unidades o bien a las decenas. En todo este repaso no debe emplearse más de tres o cuatro semanas. Hay que recordar que los objetivos de este bloque relativos a la lectura y escritura de números alcanzaron en el segundo nivel la categoría de idóneos cuando había que descomponer números con distintas cifras según el orden de unidades del mayor de ellos; mientras que los objetivos de seriación tenían la categoría de sencillos, salvo cuando hay que seriar de dos en dos, que resulta idóneo. Conviene por tanto que, sin abandonar los aspectos más sencillos, se insista en las descomposiciones y en las seriaciones. Transcurrido el primer mes se comienza el trabajo con las unidades de millar repasando más en detalle todos los aspectos fundamentales de este estudio:

- Formación de 1.000 a partir de centenas, como siguiente de 999 ó bien como suma de dos o tres números de tres cifras.
- Presentación de las restantes unidades de millar, lectura y escritura.
- Sumas y restas entre las unidades de millar.

Este repaso es importante para establecer la pauta en la presentación de los siguientes órdenes.

Hecho este recuerdo, se presentan los números de cuatro cifras con carácter general, se leen, se escriben, se componen y se descomponen; aunque no con excesivo detalle conviene recordar los casos en que una de las cifras intermedias es 0.

Todo este trabajo puede desarrollarse durante la primera mitad de curso; no interesa continuar avanzando en numeración, aunque sería posible, sin antes tener dominadas las cuatro operaciones con estos números; por ello no avanzamos en numeración hasta no haber adquirido dominio en las operaciones.

A partir de la segunda mitad del curso se presenta la decena de millar con el mismo criterio ya empleado antes: con diez unidades de un orden formamos una unidad de orden inmediato superior; se forma la decena de millar mediante todas las sumas posibles entre unidades de millar y a continuación como el siguiente a 9.999. Pasamos a presentar el resto de las decenas de millar, su escritura y su lectura, y de ahí a operar con estas nuevas unidades.

Los números de cinco cifras aparecen a continuación considerando cómo se forman, cómo se escriben y cómo se leen; estudiamos también a qué orden corresponde cada una de las cifras que lo forman así como la descomposición de estos números. Conviene hacer un estudio especial de los números de cinco cifras con ceros intermedios, de su composición y descomposición. En las seriaciones y en el estudio del anterior y del posterior se hará especial hincapié en los casos en que hay que cambiar

de decena de millar ("paso" de decena o de unidad de millar) ó bien de unidad de millar. Obviamente se incorporan estos nuevos números a las cuatro operaciones, destacando los casos de dificultad especial por algún motivo.

Finalmente, a comienzos del tercer trimestre, se puede presentar un nuevo orden de cifras: la centena de millar, acompañado en este caso de una pequeña reflexión sobre el sistema decimal de numeración, en qué consiste, cuáles son los distintos órdenes, cómo se forman, distinción entre cifras y números, etc.

Según el tiempo que se disponga, se avanzará más o menos en el estudio de los números de seis cifras, con el esquema que ya hemos indicado en los casos anteriores. No damos especial importancia a un dominio total de los números de seis cifras en este nivel, tarea que pensamos debe completarse en 4º. Como objetivo general de 3º debe de trabajarse bien con los números de cinco cifras.

Bloque tercero: Con simultaneidad al estudio de la numeración se va trabajando en las operaciones de suma y resta, y en esto no hacemos mas que continuar la trayectoria iniciada desde el primer nivel, sin embargo conviene separar formalmente todo el proceso en dos bloques de contenidos para así poder analizar lo relativo a cada uno de ellos con mayor detalle. Ya hemos indicado lo que se refiere a numeración y pasamos a considerar lo relacionado con las operaciones de suma y resta.

Recordamos que la operación suma en el 2º nivel alcanzó un rendimiento del 88% tanto si se sumaban sumandos con igual que con distinto número de cifras, siempre con resultado inferior a 10.000, y en donde como máximo se podía llevar 1 en dos columnas.

Como ya hemos indicado en el bloque anterior, dedicamos el primer mes a repasar la tabla de sumar, también se repasa lo que es llevarse una decena al sumar la columna de las unidades y llevarse una centena al sumar la columna de las decenas; se finaliza realizando sumas en las que hay que llevarse dos veces consecutivas.

Terminado el repaso anterior, presentamos el llevarse dos decenas de la columna de las unidades ó bien dos centenas de la columna de las decenas y nos dedicamos a mecanizar estas situaciones, combinándolas posteriormente con llevarse además 1 en otra columna anterior o posterior.

Al trabajar con números de cuatro cifras estudiamos la suma de unidades de millar y luego se amplía la regla de la suma a números de cuatro cifras, insistiendo en este último caso en los problemas de colocación de sumandos.

Antes de comenzar el estudio de los números de cinco cifras ya hemos presentado sumas en donde hay que llevarse 2 en dos columnas distintas.

Al comenzar la segunda mitad del curso se inicia el trabajo con los números de cinco cifras y el esquema de trabajo para la operación suma es exactamente el mismo que ya hemos indicado para el caso anterior, sin más que tener en cuenta un mayor número de variantes en las situaciones de colocación o bien en las posibilidades de llevarse. Al finalizar el curso debe de trabajarse con soltura en la colocación y cálculo de sumas de cuatro sumandos en donde el llevarse 2 sólo sucede en dos columnas como máximo, pudiendo llevarse ó no 1 en las restantes. Hay que indicar que en los casos de máxima dificultad el rendimiento en este nivel va a ser del 90%, pudiendo mejorarse el resultado en los demás casos.

Los problemas de sumar son de los tipos ya considerados en 2º:

- Cuánto valen dos cantidades conocidas A y B juntas.
- Cuánto valen tres cantidades conocidas A, B y C juntas.
- Cuánto vale una cantidad sabiendo que vale una cantidad B más que otra conocida A.

De todos modos la situación más difícil se presenta cuando la pregunta no se hace de modo directo sino mediante una acción intermedia, es decir: tenemos las cantidades A y B y las sometemos conjuntamente a una acción (transporte, venta, pérdida, etc.) ¿qué cantidad total es aquella sobre la que se ha actuado?. Este tipo de ejercicios conviene intensificarlos en este nivel. Es muy conveniente también iniciar al alumno en la invención de enunciados que se resuelven mediante una cuenta de sumar propuesta.

Por lo que se refiere a la resta, conviene recordar que en el 2º nivel se alcanzó un rendimiento del 80% trabajando con números de cuatro cifras, como máximo, y sin tener que llevarse dos veces consecutivas. Hay que trabajar muy intensamente para elevar el rendimiento a un 90% ampliando el tipo de dificultades. El desarrollo que le hemos dado a esta operación ha sido el siguiente: al comienzo de curso se repasan las combinaciones básicas fundamentales de la resta, es decir, la tabla de restar y de inmediato, y ya con números de tres cifras, recordamos cómo se resuelven aquellas restas en las que una sola de las cifras del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, tanto si es 0 como si es distinta de 0. Al iniciar el estudio de los números de cuatro cifras, presentamos el caso en que hay que llevarse dos veces consecutivas -sin ser ninguna de ellas 0- e insistimos en su mecanización; ampliamos con posterioridad al caso en que una de las cifras del minuendo (la menor) es cero. Al presentar los números de cinco cifras, continuamos con el mismo esquema de trabajo e insistimos en mecanizar las situaciones en las que hay que llevarse sólo dos veces consecutivas; si bien puede darse el caso de que en otro orden no consecutivo haya que llevarse otra vez. Sistematizado el caso anterior, comenzamos el estudio explícito de las situaciones en donde dos cifras consecutivas del minuendo son menores que las correspondientes del sustraendo, pero la mayor de ellas es 0; en este caso hay que explicarle al alumno con claridad cómo se prepara la sustracción ya que hay que hacer un préstamo en escala; de ahí pasamos ya a realizar restas con dos ceros consecutivos en el minuendo. Este tipo de ejercicios se comienzan a estudiar transcurrido al menos la mitad del curso y cuando los casos sin ceros en el minuendo estén suficientemente asimilados. No nos parece conveniente ampliar la dificultad de esta operación en este nivel, por ello estudiaremos sólo aquellos casos en que como máximo hay que llevarse dos veces consecutivas, incluso de cero, pero cuando haya que llevarse más de dos veces no serán consecutivas.

En la resolución de problemas continuamos ampliando el dominio de las situaciones que ya iniciamos en el 2º nivel:

- ¿Cuánto tiene una cantidad más que otra?.
- ¿Cuánto tiene una cantidad menos que otra?.
- Si tenemos A y gastamos B, le sobran ...
- Si tenemos B y debemos tener A, le faltan ...
- Compró por A y vendió por B, entonces ganó ...
- El total de dos cantidades es A y una de ellas es B ¿cuál es la otra?.
- Se conoce A y se pide el valor de otra cantidad que tiene B menos que la anterior.

También se inicia el trabajo con la invención de enunciados que se resuelvan con una resta propuesta ó/y que se ajusten a una de las preguntas tipo consideradas.

Los problemas de suma y resta combinadas se continúan en este nivel y se trabaja sobre los modelos: $(A+B)-C$, $A-(B+C)$, $(A-B)+C$ y $(A-B)-C$; conviene tener presente que las preguntas que corresponden a cada una de las operaciones hay que plantearlas de modo independiente: la resolución de estos problemas se hará siempre escalonadamente.

Bloque Cuarto: Mientras que el contenido de los dos bloques anteriores no suponía aspectos radicalmente nuevos, sino que se continuaba profundizando sobre las dificultades que aparecían al ampliar el campo numérico, los contenidos de este bloque, sobre todo con respecto a la división, sí suponen situaciones nuevas para el alumno. Segundo nivel es el curso en donde el alumno aprende y memoriza la tabla de multiplicar, y esto vimos que lo hacía con un rendimiento bastante bueno, alrededor del 85%. Sin embargo al comenzar este curso podemos comprobar que el alumno ha olvidado, o recuerda con dificultad, la mayor parte de las combinaciones básicas que constituyen la tabla. Por ello nos hemos planteado de nuevo el estudio progresivo y escalonado de la tabla de multiplicar, con un esquema similar al de 2º nivel, pero ampliando cada tabla con nuevas aplicaciones de la operación.

Una vez hecho el repaso de los números de 1, 2 y 3 cifras así como de las situaciones más conocidas de suma y resta con dichos números, en decir, casi al final del primer mes, comenzamos a repasar la tabla del 2 pero, de inmediato, comenzamos a multiplicar números de dos o tres cifras por 2, al principio sin llevarse, luego llevándose solo de un cifra para terminar llevándose de todas ellas. Cada quincena la dedicamos a repasar una nueva tabla pero incorporando en cada caso los productos donde el multiplicador tiene dos, tres y cuatro cifras, y, por supuesto, hay que llevarse de los distintos órdenes.

Cada dos o tres tablas estudiadas conviene dedicar una semana al repaso de ambas así como a la resolución de problemas en donde intervenga el multiplicador estudiado. Dedicamos así más de las dos terceras partes al estudio de productos con multiplicador de una cifra, que nos parece debe ser el objetivo primordial de este nivel. El tercer trimestre puede dedicarse a la ampliación de la operación a los casos en que el multiplicador tiene dos ó tres cifras, ninguna de ellas cero. Esta ampliación no llegará a dominarse totalmente en este curso, aún así ya veremos que debe estudiarse y que alcanza en algunos aspectos unos rendimientos considerables. Finalmente se puede mecanizar en este nivel la regla del producto por la unidad seguida de ceros.

Respecto de la operación división el objetivo consiste en adquirir el mecanismo para la divisiones con divisor de una cifra, excluyendo los casos en que aparece un cero en el cociente. También el desarrollo de esta competencia lo planteamos como tarea total de todo el curso y relacionándola al comienzo con el repaso de las distintas tablas de multiplicar, por supuesto con posterioridad a dicho repaso.

La estrategia seguida ha comenzado por recordar qué es dividir y de inmediato dividir sólo unidades ó solo decenas entre 2, 3 ó 4, para ello hemos esperado a tener estudiadas dichas tablas, es decir, a que haya transcurrido el primer trimestre. A partir de ahí el trabajo se intensifica y pasamos a simbolizar la operación con la caja y a colocar el cociente y el resto en divisiones sencillas entre 2, 3, 4 ó 5, al comienzo sólo de unidades o decenas y, luego, de números de dos o tres cifras, todas ellas al comienzo divisibles exactamente entre el divisor. Casi de inmediato presentamos aquellas situaciones en que la cifra de mayor orden no se puede dividir y por tanto hay que tomar las dos primeras cifras para hacer el reparto, aunque este es exacto.

Hacia mitad de curso (aún el divisor no es mayor que 5) presentamos el resto de una división y el concepto de división inexacta; podemos enseguida pasar a situacio-

nes con dividendo de varias cifras y en donde surgen restos parciales: este es un momento importante y nos ha parecido necesario que cada una de las restas parciales aparezca escrita y que el alumno no pierda nunca el sentido de lo que está haciendo. En cada una de estas divisiones realizará la prueba correspondiente y establecerá la relación entre ambas operaciones. Cada vez que una división no se comprenda se realizará la operación empleando material y repartiéndolo, y haciendo las conversiones necesarias de unidades de orden superior en inferior para proseguir los repartos; no conviene aún que el dividendo tenga más de tres cifras y que el divisor sea mayor que 5.

A partir de la presentación de los números de cinco cifras se comienza a intensificar la mecanización de la división en varios sentidos: se aumenta el número de cifras del dividendo, se va prescindiendo del material para repartir (cosa por otra parte imprescindible si se aumenta el número de cifras) y se va aumentando la cifra del divisor; cada vez que se obtiene una cifra en el cociente se comprueba que hay un producto cuyos factores son el divisor y la cifra del cociente, que proporciona el valor más aproximado por defecto a la cantidad a repartir, con ello se va mecanizando la obtención del cociente y se interpreta la división como la operación inversa del producto. Este proceso se continua hasta repartir números de cuatro o cinco cifras entre cualquier dígito.

También debe conocerse la denominación de cada uno de los términos de la división.

Los problemas tipo de esta operación son fundamentalmente tres:

- conocida una cantidad a repartir y el número de partes a hacer, hay que calcular cuánto corresponde a cada parte.
- conocido el valor de n objetos calcular el valor de la unidad.
- conocida una cantidad a repartir y la cantidad que corresponde a cada parte, calcular el número de ellas.

Estos tres tipos suponen una dificultad creciente que hay que trabajar escalonadamente.

Con respecto a esta operación podemos indicar que su objetivo fundamental es el conocimiento y dominio de todas las divisiones con divisor de una cifra y sin cero en el cociente.

Bloque Quinto: Se inicia en este curso un estudio sistemático de la geometría del plano, para ello se presenta el plano como conjunto de puntos y a continuación los subconjuntos más significativos, comenzando por la línea recta. Excepto las nociones de punto, recta y plano, que se describen intuitivamente y haciendo un uso casi exclusivo de las representaciones, el resto de los conjuntos de puntos del plano que se estudian se intenta conectarlos -no definirlos- con dichas nociones básicas. Los aspectos relacionales entre los distintos subconjuntos en primer lugar y el inicio de las clasificaciones con elementos geométricos consumen prácticamente la totalidad del trabajo geométrico de este curso. Comenzamos realizando una reflexión sobre la noción de plano, cuáles son las características que se deben considerar y cómo y con qué limitaciones se maneja esta noción; casi con simultaneidad hay que denominar al punto -la noción más indescriptible- y que suele aparecer solo como el elemento constitutivo del plano y que se localiza punzando un papel con un lápiz, bolígrafo o cualquier otro objeto que deje una marca sin extensión apreciable. Aprovechamos esta presentación para unificar la notación básica de geometría con la de la teoría de conjuntos: así el plano lo representamos por π , los puntos se denominan con minúsculas ya que son elementos, y cualquier subconjunto de π debe venir simbolizado por una letra

mayúscula. La línea recta tampoco tiene definición: contamos cómo se dibuja, pero de inmediato hacemos trabajar al alumno con todas las posibilidades que se dan al considerar la relación de convergencia. Es conveniente estudiar las propiedades relacionales más importantes del tipo recta-punto, y casi con simultaneidad sus duales punto-recta. Antes de continuar avanzando en las nociones clásicas de geometría es conveniente trabajar con las nociones de inclusión, intersección y unión de conjuntos cualesquiera de puntos del plano delimitados por diagramas cerrados, así ligamos más las nociones conjuntistas con la geometría, y aparece esta como el estudio más detallado de un conjunto especial, el plano, y de algunos de sus subconjuntos más importantes.

Casi el último tercio del curso lo hemos dedicado a trabajar con los subconjuntos más conocidos del plano: semiplano, semirecta, ángulo, segmento, poligonal, polígono, circunferencia y círculo; así como de las relaciones entre ellos -sólo las más usuales- y el comienzo de la clasificación en ángulos y polígonos. Hemos intentado que cada noción se reconozca sobre situaciones reales y sobre dibujos, y que se emplee en dibujos o bien en la delimitación de zonas de un plano, y aún así no terminamos de estar muy satisfechos con lo que nos parece un planteamiento formalizado en exceso de la geometría.

Antes de pasar a enunciar los objetivos que hemos determinado para cada bloque queremos indicar lo que nos parece la mayor deficiencia del cuestionario: la ausencia deliberada de cualquier aspecto relacionado con las magnitudes fundamentales y la medida de sus cantidades. Por supuesto que en el material de trabajo del alumno aparecen situaciones en que hay que operar con longitudes, con dinero, peso, capacidad y tiempo; pero no se trata de un trabajo sistemático y que intenta profundizar en esos conceptos sino ejercicios de aplicación cuya finalidad es sistematizar las operaciones con números naturales y que perfectamente pueden ser suplidos por otros enunciados que, sin modificar los datos, vengan referidos a otras cantidades. Creemos que se refleja así la poca importancia que nuestras autoridades de turno dan al proceso de cuantificación del mundo físico y a los conceptos básicos pero profundos que subyacen y constituyen dicha concepción.

También hemos echado en falta una iniciación, sobre la base de experiencias concretas, a las fracciones más importantes: medio, tercio y cuarto. Parece que algunas de estas deficiencias quedan subsanadas en los Cuestionarios que proponen las Nuevas Orientaciones, y esperamos que esto no suponga un retroceso en otros aspectos.

3. OBJETIVOS

Pasamos a continuación a enumerar los objetivos finales que nos hemos propuesto en cada uno de los bloques señalados y los rendimientos que ha obtenido cada uno de ellos a lo largo de las nueve evaluaciones que se han hecho. Aunque no todos los objetivos aparecen en todas las evaluaciones creemos que con los datos obtenidos se puede hacer un análisis bastante amplio de cuáles son las posibilidades de aprendizaje de cada uno de ellos, es decir, cuáles son los contenidos posibles (dentro del Programa) para los alumnos del Tercer Nivel de la E.G.B. Pasamos a ello.

3.1. Bloque primero: Conjuntos. Objetivos

1. Rodear elementos de acuerdo con una característica de fácil identificación visual.
2. Nombrar los elementos que pertenecen ó no pertenecen a un conjunto y expresar con los signos \in y \notin la relación de cada uno con el conjunto.
3. Nombrar los elementos comunes a dos conjuntos.

4. Formar y reconocer un subconjunto de un conjunto dado en diagrama de Venn
5. Representar un subconjunto en un diagrama de Venn de un conjunto dado.
6. Representar mediante diagramas de Venn dos conjuntos dados por extensión y formar su intersección.
7. Obtener la intersección de dos conjuntos.
8. Leer y escribir el símbolo de la intersección.
9. Reconocer e inventar conjuntos unitarios y binarios.
10. Reconocer y representar conjuntos disjuntos.
11. Representar dos conjuntos mediante diagrama y formar su unión.
12. Leer y escribir el símbolo de la unión.
13. Reconocer los componentes de un par ordenado así como igualdades entre pares.
14. Formar el producto cartesiano de dos conjuntos finitos.
15. Simbolizar y leer la notación que expresa el conjunto producto cartesiano de otro dos.

Estos objetivos solo se han evaluado en las cuatro primeras evaluaciones y los resultados obtenidos, en promedio durante los dos cursos, son:

Objetivos Evaluaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I	.91	.81	.86	.52	.60										
II		.89	.80			.88 .59	.79	.83	.81	.73					
III		.82	.82	.72			.79				.82 .58	.79			
IV													.84	.77	.80

De nuevo no ha sido posible aplicar la prueba final con lo que la situación de estos objetivos al término del curso nos sigue resultando desconocida. Aún así hemos podido analizar distintos aspectos de cada uno de ellos mas en detalle según puede verse en el comentario de cada uno de los bloques y los resultados obtenidos han reafirmado lo que ya preveíamos el curso pasado.

El objetivo nº 1 no parece presentar dificultad, aunque no se trate de un aspecto estrictamente matemático, su mayor dominio contribuiría a mejorar la atención del niño y la precisión en el lenguaje así como el trabajo con conjuntos por comprensión. Se debiera continuar el trabajo sistemático con el mismo.

El objetivo nº 2 arranca como sencillo, tiene una fuerte subida y luego disminuye sin perder nunca su status de sencillo. La disminución es debida a que se pasa de trabajar con conjuntos de objetos discretos a conjuntos de puntos del plano, cuya infinitud hace que el trabajo sea más difícil.

El objetivo nº 3 tiene igual consideración que el anterior solo que la disminución también se produce en la segunda evaluación debido a que se trata de una justificación verbal de por qué unos elementos dados son los comunes a dos conjuntos, y no de un reconocimiento o una manipulación.

El objetivo nº 4 ha mejorado ligeramente sus resultados en el segundo año de aplicación de la prueba, aún así sólo llega a alcanzar el nivel de idóneo, y no muy alto. Los aspectos de simbolización y lectura del símbolo de inclusión siguen siendo los más difíciles. No estamos satisfechos con el tratamiento dado a la inclusión a partir de determinación de los elementos comunes a dos conjuntos y su coincidencia con uno de los conjuntos; ha resultado ser un proceso de difícil comprensión, ya que no se comienza por reconocer ninguna relación entre los conjuntos sino que se empieza por los elementos y sólo al final se pasa a los conjuntos. Pensamos que debe modificarse el planteamiento de este concepto, precisamente debido a su dificultad.

Objetivo nº 5: Insuficientemente evaluado, y es precisamente uno de los aspectos más complicados: el reconocer que al rodear una parte dentro de un todo, la parte sigue siéndolo del todo.

El objetivo nº 6 tiene dos niveles diferenciados: la representación de dos conjuntos con elementos comunes mediante diagramas de Venn está bien conseguida y resulta un objetivo sencillo, pero el completar este proceso con la formación del conjunto intersección de otros dos ya resulta claramente difícil. Es interesante comparar este segundo aspecto con el resultado del objetivo nº 7, ya que si al alumno se le pide que forme el conjunto de los elementos comunes, o bien el conjunto intersección, de otros dos el rendimiento mejora ostensiblemente, mientras que si se le pide que forme este conjunto con un proceso previo obligatorio, el resultado disminuye un 20%. En conclusión: la representación de dos conjuntos en diagramas, tanto si estos aparecen dibujados como si no, es un aspecto sencillo; la obtención del conjunto intersección de otros dos es un aspecto idóneo y la acumulación de ambos procesos es claramente difícil.

El objetivo nº 8 es un aspecto sencillo y bien dominado en su dos facetas, cuando se evalúa a continuación de su estudio; hubiera sido necesario ver que ocurría al evaluarlo a final de curso.

El objetivo nº 9 ha sido evaluado entre aspectos distintos: reconocimiento, formación e invención, y en los tres ha resultado sencillo; el rendimiento más bajo se obtiene cuando hay que inventar un conjunto y expresarlo por extensión. Parece conseguido, y quizás con un poco más de trabajo se hubiera podido elevar los resultados.

El objetivo nº 10 no supera el nivel de idoneidad, aunque el resultado es promedio con un ítem de justificación verbal: "explica por qué esos conjuntos son disjuntos" con los que el rendimiento siempre disminuye; los aspectos prácticos también resultan idóneos. Se puede pensar que con un poco de más trabajo el rendimiento debiera aumentar, pero con un solo control el resultado es de idóneo.

El objetivo nº 11 tiene también dos niveles claramente diferenciados: cuando se pide formar un conjunto con todos los elementos de otros dos dados mediante diagramas de Venn -en donde el elemento común aparece representado una vez- el índice es de 82% y el objetivo resulta sencillo, pero si ambos conjuntos vienen dados por extensión -y por tanto los elementos comunes aparecen nombrados dos veces- el índice

es de 58% y el objetivo es difícil. Se ve pues que cuando no hay dificultad de duplicación de elementos el objetivo se logra, cosa que no sucede en los demás casos. No sabemos si esta dificultad puede superarse o no a lo largo de este curso, y por ello convendrá tener en cuenta este aspecto en los próximos cursos. Dejamos constancia de que en la primera mitad del Tercer Nivel esta dificultad no está superada por casi el 50% de los alumnos.

El objetivo nº 12 obtiene un rendimiento ligeramente inferior al del nº 8 y queda como idóneo. No vemos ningún motivo especial para que esto suceda y suponemos no significativa la diferencia.

El objetivo nº 13 mantiene la calificación que ya obtuvo el pasado curso, parece que la idea de par ordenado y el nombre de sus componentes es un aspecto sencillo y que no tiene dificultad en este nivel.

La formación del conjunto producto cartesiano de otros dos -finitos y con no más de cinco elementos- resulta un objetivo idóneo alto en sus distintas variantes, y que obtiene igual índice en los dos cursos. No parece que las nociones de producto cartesiano tengan un tipo especial de dificultad, y quizás lo más lamentable es la poca utilidad y aplicación que tiene para el resto del cuestionario de este nivel, motivo por el cual pensamos que deben olvidarse con la misma facilidad con que se aprenden.

Finalmente el objetivo nº 15, que también es de simbolización, obtiene un rendimiento muy similar al de los objetivos 8 y 12.

En conclusión podemos decir que en este bloque tenemos sólo un objetivo muy sencillo, siete sencillos, seis idóneos y tres difíciles, ya que dos de los objetivos tienen aspectos totalmente diferenciados y consideramos diecisiete resultados diferentes para este bloque. Conviene destacar que los aspectos de mayor dificultad se presentan cuando el alumno tiene que considerar que un elemento, que aparece representado una sola vez, pertenece a dos colecciones distintas; o bien que un objeto que pertenece a dos conjuntos es un solo elemento, no se duplica por su doble pertenencia. Estas dos facetas de la doble pertenencia son las que hemos detectado de mayor dificultad.

3.2. Bloque segundo: Numeración. Objetivos

1. Leer y escribir números de hasta cinco cifras.
2. Componer números conociendo las cifras de los distintos órdenes que lo forman.
3. Descomponer números según los distintos órdenes que lo forman.
4. Reconocer el orden de cada una de las cifras que forman un número.
5. Escribir números conociendo las cifras de cada orden que lo forman.
6. Conocer cuántas unidades de un orden se necesitan para formar la unidad de orden inmediato superior.
7. Seriar números.

De estos objetivos sólo el número 7 ha quedado sin evaluar, y los resultados obtenidos en promedio durante los dos cursos han sido:

Objetivos Evaluaciones	1	2	3	4	5	6	7
I	.92	.57	.70				
II							
III	.91	.77		.95			
IV	.91				.91		
V	.85	.87		.90	.94		
VI	.88	.87					
VII	.89			.90		.67	
VIII	.89						

El objetivo nº 1 queda claramente delimitado: hasta la evaluación IV se está trabajando con números de hasta cuatro cifras solamente, ya conocidos desde 2º; por ello los resultados caen claramente dentro del intervalo de muy sencillos. A partir de la evaluación V se comienza el trabajo con números de cinco y seis cifras, por lo que el nivel disminuye de entrada para irse recuperando lentamente, sin que los aspectos más difíciles supongan un retroceso posterior. A la terminación este objetivo queda como sencillo, muy cerca del intervalo siguiente. Hay que señalar que algunos aspectos menos complicados de la lectura y escritura resultan claramente muy sencillos, pero hemos preferido dar un resultado único en promedio junto con los aspectos más difíciles ya que así nos parece el resultado más claro, y de todos modos satisfactorio. Una última observación: a partir de este nivel suele descuidarse el trabajo con la numeración y pensar que el alumno ya tiene suficientes elementos de conocimiento como para dominar los nuevos aspectos por sí solo y no es así; el trabajo sistemático y orientado por el Profesor no debe abandonarse ni en este, ni en los otros bloques.

El objetivo nº 2 tiene un avance muy claro, el resultado inicial se obtiene componiendo números de tres cifras que carecen de decenas y aunque es un aspecto ya estudiado en 2º nivel, el resultado es muy bajo e indica la dificultad de incorporar la cifra 0 al número cuando no viene indicada en la composición del mismo, es decir, no se informa que el número tiene 0 decenas. En la tercera evaluación se obtiene el dato como promedio de dos ítems en donde hay que componer números de cuatro cifras siendo en un caso 0 la cifra de las centenas y en el otro 0 la cifra de las decenas, aunque la diferencia entre un ítem y otro no es excesiva hay que destacar que sigue resultando más difícil el caso de 0 decenas que el otro, aún así se ha avanzado lo suficiente y vemos que a principios del segundo trimestre este objetivo alcanza claramente el nivel de idoneidad. En el resultado de la quinta evaluación intervienen tres ítems: uno en el que todas las cifras son significativas y que alcanza un índice de muy sencillo, y otros dos en los que una de las cifras es cero, en un caso la de las centenas y en otro la de las unidades de millar, siendo estos dos casos ítems sencillos y de resultados similares; todos los números estudiados son de cinco cifras. El objetivo resulta ya claramente sencillo, si bien la diferencia entre los casos en que interviene un 0 y aquellos en los que el 0 no aparece se mantiene superior al 10% a favor de estos últimos.

Finalmente vemos que el resultado ya obtenido se conserva en la sexta evaluación, si bien en realidad supone una sencilla mejora ya que en este caso se trata de componer números de cinco cifras en las que tres de ellas son 0. Al terminar la evaluación vemos que el objetivo queda claramente como sencillo, incluso en aquellos casos que hemos visto resultan más difíciles.

El objetivo nº 3 está insuficientemente evaluado; vemos que de entrada obtiene un resultado superior al del objetivo nº 2, aún incluyendo descomposiciones en donde una de las cifras es 0, e incluso un caso en el que hay que descomponer un número de dos cifras en centenas, decenas y unidades. Solo podemos conjeturar que el índice final hubiese sido como mínimo sencillo ya que este proceso parece más fácil que el de la composición, pero debemos tomar como resultado final el único índice que tenemos y dar este objetivo sólo como idóneo. Sería interesante estudiar el papel de 0 en las distintas descomposiciones, según que dicha cifra aparezca ó no escrita.

El objetivo nº 4 no está estudiado tampoco en profundidad, hubiese sido necesario ahondar más en aquellos casos en los que se considera un orden inexistente en el número -es decir que la cifra es 0-, e insistir también sobre la conexión entre el número de cifras de un número y el mayor orden significativo que él alcanza, aún así pasamos a analizar los resultados. En la tercera evaluación el ítem es prácticamente una variedad del objetivo nº 3 ya que se trata de descomponer un número de cuatro cifras indicando a qué orden corresponde cada una de ellas; lo hemos incluido en este objetivo ya que formalmente parece corresponder a este enunciado con preferencia sobre el anterior, aún así es interesante observar que al considerarlo como una descomposición el objetivo nº 3 finalizaría como muy sencillo.

En la quinta evaluación se pide ya reconocer la cifra de mayor orden en un número de cinco cifras y también la relación existente entre el número de cifras y el mayor orden; tanto en un caso como en el otro los resultados son satisfactorios. Finalmente en el séptima evaluación hay que reconocer la cifra de un determinado orden en un número de seis cifras; el resultado obtenido mantiene el ya alcanzado y queda prácticamente como muy sencillo, sin embargo, sólo se ha evaluado un aspecto parcial del objetivo enunciado ya que en realidad hemos reconocido la cifra de un determinado orden, un solo, en un número escrito, y nunca hemos considerado ceros a la izquierda.

El objetivo nº 5 está evaluado en dos aspectos importantes: damos las cifras de cada orden que forman un número -desordenadas- y pedimos formar el número; el resultado obtenido es bastante alto: 91%. En el segundo caso se presentan varios números en los que faltan algunas cifras y se pide escribir el número completo cuando la información necesaria se proporciona dando el orden de cada una de las cifras que faltan. No parece que queden aspectos esenciales sin evaluar, y el resultado final es también de muy sencillo.

Por último el objetivo nº 6 alcanza un rendimiento muy bajo y queda como difícil; la dificultad se hace mayor porque el alumno debe explicar en un ítem cómo se forma un nuevo orden de unidad: la centena de millar, y ya se sabe que los ítems de explicación tienen un rendimiento inferior.

El objetivo nº 7 solo aparecía incluido en la prueba final, que lamentablemente no se pudo aplicar por falta de tiempo, y queda por tanto sin resultado.

En resumen, de este bloque resultan dos objetivos muy sencillos, dos sencillos, uno idóneo y otro difícil. Se ha mejorado la información respecto de los resultados del curso pasado.

3.3. Bloque Tercero: Adición y sustracción. Objetivos

1. Colocar sumandos con distinto número de cifras.
2. Realizar sumas llevándose 1 varias veces.
3. Realizar sumas en las que hay que llevarse 2 una o dos veces.
4. Resolver situaciones prácticas mediante una o varias operaciones de sumar.
5. Inventar enunciados de problemas que se resuelvan con un suma propuesta.
6. Resolver restas llevándose una o varias veces, sin ningún cero en el minuendo.
7. Resolver restas llevándose una o varias veces, con al menos un cero en el minuendo.
8. Resolver situaciones prácticas mediante una resta.
9. Inventar enunciados de problemas que se resuelvan con una resta propuesta.
10. Resolver situaciones prácticas mediante operaciones de suma y resta combinadas.

Los resultados obtenidos en promedio, a lo largo de los dos cursos en los que se ha realizado el estudio, son los siguientes:

Objetivos Evaluaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	.83	.86			.94	.76		.82		.67
II	.80		.80	.94		.82		.91	.71	.81
III	.90	.90	.90			.85			.83	
IV			.90			.84	.84	.89		
V	.84		.85		.85	.84		.78		.81
VI							.82		.81	
VII	.83		.86			.90	.87		.88	
VIII			.90				.91			
Prueba Cálculo	.98	.97	.90	.87		.92	.76	.75		.62

Comenzamos nuestro análisis final de este bloque observando que se ha conseguido un nivel de información bastante completo, a lo que contribuye el poder contar con datos de final de curso, proporcionados por la prueba de Cálculo.

En el objetivo nº 1 hemos incluido los datos de todos los items en los que había que colocar y sumar, en los casos en que los sumandos tenían distinto número de cifras, por ello el dato obtenido se refiere no solo a la colocación sino, en algunos casos, también a la resolución de la operación correspondiente, solo en el caso de la evaluación final los datos corresponden a ejercicios de colocación exclusivamente. Como vemos los errores debidos unicamente a colocación son mínimos, y esto se observa claramente viendo la diferencia entre los resultados de las columnas 1 y 3, excepto para la última fila. En cada evaluación en donde aparece una cuenta "a colocar" suele

haber otra ya colocada; los resultados de la columna 1 se refieren a las que hay que colocar y los de la columna 3 al promedio de ambas situaciones; como vemos la diferencia no excede de un 3% , que sería el error máximo imputable a dificultades de colocación. El dato final de la prueba de cálculo nos sigue diciendo que al finalizar el curso sólo un 2% de los alumnos se equivocan en estas actividades, alumnos a los que convendría diagnosticar y reorientar.

Ya hemos indicado con anterioridad que el mayor porcentaje de errores se presenta cuando hay que comenzar colocando el sumando con menor número de cifras, o cuando intervienen tres o más sumandos que no coinciden en su número de cifras. El objetivo finaliza claramente como muy sencillo.

El objetivo nº 2, aunque solo aparecen resultados en tres evaluaciones, tiene información suficiente. Se comienza con cuentas cuyos sumandos tienen tres cifras, y ya el rendimiento es solo ligeramente inferior a como finalizó en el 2º Nivel; en la tercera evaluación se incluyen números de cuatro cifras y el índice sube. El resultado de la prueba final indica claramente que se ha mejorado el rendimiento de este tipo de cuentas a lo largo del curso, y esto es así porque la habilidad que se controla queda desarrollada a su vez por las operaciones del objetivo nº 3. Hemos hecho menos énfasis en el control de este aspecto específico ya que nos parece claramente dominado en este Tercer Nivel, como muestran los datos, pero aún así no hemos querido olvidarlo por si se hubiera presentado alguna anomalía.

El objetivo nº 3 es el que propiamente evalúa la especificidad de la suma en este nivel: llevarse 2 en una o dos columnas, siendo indiferente que nos llevemos ó no 1 en las demás.

En la segunda evaluación se obtiene un rendimiento ligeramente inferior al que cabría esperar a estas alturas en la operación suma; se puede justificar claramente el resultado viendo que en este ítem además de llevarse 2 por primera vez (en una sola columna) hay además que colocar los sumandos, si bien la variedad de colocación es sencilla. En la tercera evaluación, con un ítem similar al de la segunda, se consigue mejorar el rendimiento de un 10%. Se mantiene el resultado en la cuarta evaluación, cuando los sumandos son de cuatro cifras y hay que llevarse además 1 en otras dos columnas, no tiene retroceso.

Los resultados de la quinta evaluación son promedio de dos ítems distintos: uno similar al de la cuarta evaluación: 87%, y otro en donde hay que colocar sumandos con distinto número de cifras comenzando por el que tiene menor número: 84%, de ahí el promedio de 85%. Aunque la disminución no es muy acusada, tampoco tiene mucha justificación.

En la séptima evaluación vuelve a darse un promedio de dos ítems: suma sin colocar pero llevándose 2 en dos columnas: 89%, y suma con colocación en donde el primer sumando tiene menos cifras: 83%. Se recuperan ligeramente los resultados respecto a la cuarta evaluación ya que al aumentar la dificultad se mantiene el avance. Los resultados tanto de la octava como de la evaluación final nos dicen que el índice máximo de las sumas llevándose 2 en dos columnas, cuando no interfieren problemas de colocación, está en el 90%. El objetivo termina como muy sencillo, si bien hay aspectos concretos: el llevarse 2 una sola vez, que obtienen resultados mejores, según vimos en la prueba de cálculo.

El objetivo nº 4 no está evaluado suficientemente. En la segunda evaluación y ante un problema usual de suma el rendimiento es muy alto, 94%. Sólo en la prueba de cálculo se ensayan problemas cuya pregunta no es del tipo clásico "¿cuánto hay entre las cantidades A y B?". Así hay dos ítems distintos: el nº 1 de problemas, que es del

tipo clásico, si bien con tres cantidades, y que obtiene un rendimiento de 96%, y el ítem nº 5 que varía el modelo, ya que pregunta ¿cuánto hay que emplear en A y B para que no falte ni sobre?, su resultado es de 77%. No hemos querido separar los resultados según estas dos variantes ya que para ello hubiésemos necesitado mayor información, de ahí que demos como dato final el promedio pero destacando que los problemas de suma cuya pregunta no es de tipo standard tienen una mayor dificultad que los usuales. Objetivo sencillo a su conclusión.

El objetivo nº 5 ha sido incluido este curso por primera vez. En la primera evaluación se pedía inventar un enunciado para una suma entre dos cantidades concretas, y el resultado es muy satisfactorio para ser un primer control. En la quinta evaluación se pidió inventar un problema en el que se empleara la pregunta "¿cuánto hay entre A y B?"; se trata de un aspecto más difícil y el resultado es también satisfactorio. Se hubiera podido afinar más en la evaluación de este objetivo. Solo dejamos constancia de que se trata de un objetivo sencillo con los resultados obtenidos.

El objetivo nº 6 ha sido evaluado en los siguientes casos:

- en la primera evaluación hay que llevarse 1 vez de las decenas.
- en la segunda evaluación hay que llevarse 1 vez de las decenas y 1 vez de las centenas.
- en la tercera evaluación sólo hay que llevarse 1 vez de las centenas.
- en la cuarta evaluación hay que llevarse 1 vez en decenas, 1 en centenas y 1 en unidades de millar.
- en la quinta evaluación hay que colocar minuendo y sustraendo de distinto número de cifras y llevarse 1 vez en decenas, 1 en centenas y 1 en decenas de millar.
- en la séptima evaluación hay que llevarse 1 vez en decenas, 1 en centenas y 1 en decena de millar.
- en la evaluación final sólo hay que llevarse 1 vez en decenas y 1 vez en centenas.

Vemos pues que el avance es progresivo, con incorporación automática de los aspectos más difíciles, excepto en la quinta evaluación en donde aparte de aparecer el aspecto más difícil -llevarse varias veces no consecutivas-, hay además que colocar los términos correctamente, debiera insistirse un poco más en el trabajo con esta variante para poder mejorar su rendimiento. Aún así, podemos concluir que la resta llevándose una o varias veces y sin ceros en el minuendo es un objetivo sencillo y que debe estar dominado por la práctica totalidad de los alumnos de este nivel.

El objetivo nº 7 ha sido evaluado en los siguientes casos:

- en la cuarta evaluación la cifra de las decenas del minuendo es 0 y además deben prestar a las unidades.
- en la sexta evaluación la cifra de las decenas del minuendo es 0, deben prestar a las unidades y de nuevo hay que llevarse 1 vez en las unidades de millar.
- en la séptima evaluación la cifra de unidades y decenas del minuendo es 0.
- en la octava evaluación la cifra de decena y centena del minuendo es 0.
- en la prueba de Cálculo sólo hay un 0 en decenas ó bien un 0 en decenas y otro en centenas.

El avance es prácticamente progresivo en los resultados, y comparando con la columna del objetivo nº 6, ligeramente inferior pero próximo a los casos en los que no hay ceros en el minuendo. Sin embargo el resultado de la prueba final muestra que

el aprendizaje de estas variantes no se encuentra consolidado y que puede venirse abajo prácticamente en cualquier momento. Concluimos que el aprendizaje y dominio de la resta con ceros en el minuendo va retrasado respecto de la resta llevándose en cualquiera de sus órdenes, y resulta menos estable que este último. Los casos en que hay que llevarse de 0 no quedan totalmente dominados al finalizar el Tercer Nivel y solo alcanzan un índice de objetivo idóneo.

Los resultados del objetivo nº 8 necesitarían un análisis mucho más detallado según el tipo de pregunta que se hace en el planteamiento del problema, pero para ello hubiese sido necesario disponer de datos relativos a cada uno de los casos de forma continua, lo cual evidentemente no ha sido posible; por ello solo podemos organizar un poco la información obtenida.

En la primera evaluación el tipo de pregunta empleado es "¿cuánto le sobra?"

En la segunda evaluación se trata de una variante del tipo anterior: "¿cuánto le queda?", en ambos casos se trata de un tipo sencillo de pregunta que evoca la operación resta de forma inmediata, y que alcanza índices de sencillo y muy sencillo.

En la cuarta evaluación hay dos tipos de preguntas, los casos "¿cuánto más que?" y "¿cuánto le falta para?", no hay diferencias significativas entre ambos casos, resultan aspectos sencillos.

En la quinta evaluación el tipo de pregunta es "¿cuánto menos que?", se ve claramente que es un caso más difícil, cuyo rendimiento sólo llega al nivel de idoneidad.

En la prueba de cálculo aparecen casos diferentes, cada uno con su rendimiento propio, que detallamos:

- con la pregunta "¿cuánto le sobra?" el índice es 91%, congruente con los datos de la primera y segunda evaluaciones; este aspecto parece bien dominado en este nivel y resulta muy sencillo.
- con la pregunta "¿cuánto le falta para?", hay dos ítems de índices 67% y 86% respectivamente, en promedio 76%. El segundo dato es congruente con el de la cuarta evaluación, pero no así el primero. Este tipo de pregunta, por lo general sencilla, puede sufrir alteraciones significativas sin motivo aparente que los justifique.
- con la pregunta "¿cuánto más que?" hay un ítem con índice 75%, lo cual supone también una disminución significativa respecto de la cuarta evaluación.
- finalmente con la pregunta "¿qué diferencia hay?" se presenta un ítem de índice 67%, demasiado bajo.

El promedio de todos estos ítems es 75%, que es el dato que tomamos como resultado final de este objetivo. Hay que observar que aún cuando el objetivo queda como idóneo en realidad se dan tres casos diferentes:

- con la pregunta ¿cuánto queda?, ¿cuánto sobra? se pueden conseguir rendimientos altos, próximos al 90%.
- con la pregunta ¿cuánto falta para? se pueden obtener resultados superiores a 80%, si bien no conviene descuidarse.
- con las preguntas ¿cuánto más que? y ¿cuánto menos que? los resultados deben superar a 75%.

Otro tipo de preguntas no parecen suficientemente evaluadas.

Para terminar conviene observar que las cuentas que intervienen en estos problemas son todas ellas sencillas y hay que llevarse como máximo una vez de las decenas.

El objetivo nº 9 se ha evaluado en dos variantes: en la segunda y tercera evaluaciones se pide inventar un enunciado cuya resolución se haga mediante la diferencia de dos cantidades concretas, mientras que en la sexta y séptima evaluaciones se pide inventar un enunciado cuya pregunta sea de un tipo determinado: ¿cuánto le sobra? ó ¿cuánto le falta?.

Tanto en una variante como en otra se observa que el índice final es el de un objetivo sencillo. Parece que se trata de un aspecto interesante, no costoso para los alumnos, y que debiera intensificarse el trabajo con el mismo.

El objetivo nº 10 ha sido evaluado en los siguientes casos:

- con la pregunta ¿cuánto le queda? y en los casos en que la operación es de los tipos $(a+b)-c$, $(a+b+c)-d$, $(a-b)+c$, en la primera y segunda evaluaciones; el resultado obtenido da esta variante como idónea.
- con las preguntas ¿cuánto más que? ó ¿cuánto menos que? y cuando la operación es del tipo $(a+b)-(c+d)$ en la quinta evaluación y en la final. Los resultados son muy dispares ya que se mueven en un intervalo muy amplio, no parece que este modelo esté aún afirmado.
- con la pregunta ¿cuánto le sobra? y la operación $a-(b+c)$, el rendimiento es de 67%, y resulta claramente difícil.

Vemos, pues, de nuevo que este objetivo está insuficientemente analizado por falta de seleccionar unos pocos tipos y hacer su seguimiento de un modo más continuo. Como resultado final tomamos el objetivo como difícil.

En resumen, de este bloque quedan cuatro objetivos muy sencillos, tres sencillos, dos idóneos y uno difícil, con todas las salvedades que ya hemos indicado.

3.4. Bloque Cuarto: Producto y división. Objetivos

1. Efectuar un producto con multiplicador de una cifra.
2. Efectuar un producto con multiplicador de varias cifras, ninguna de ellas cero.
3. Multiplicar por la unidad seguida de ceros.
4. Efectuar divisiones con divisor de una cifra.
5. Resolver situaciones prácticas mediante un producto.
6. Inventar situaciones prácticas que se resuelvan mediante un producto o una división dadas.
7. Resolver situaciones prácticas mediante dos productos y a continuación la suma o resta de los resultados.
8. Resolver situaciones prácticas mediante una división.
9. Reconocer el nombre de los términos de la división.
10. Realizar la prueba de una división.

Los resultados obtenidos, en promedio, durante los dos cursos han sido:

Objetivos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	.91				.87					
II	.95				.89					
III	.83				.81		.67			
IV	.87			.83	.73	.71	.68 .43			
V	.87			.84			.58	.77		
VI	.83	.74		.76	.76		.61	.62		
VII		.70		.82			.79	.76		
VIII		.67	.94	.89		.85	.83	.68	.89	.82

Los cuatro primeros objetivos hacen referencia a los aspectos de adquisición de los mecanismos de cálculo del producto y de la división, los cuatro siguientes se refieren a la aplicación a situaciones prácticas de los mecanismos de cálculo, mientras que los últimos se refieren a aspectos conceptuales específicos de la división. Pasamos a estudiar en detalle los resultados de cada objetivo.

El objetivo nº 1 ha sido evaluado en los siguientes aspectos:

- en primera y segunda evaluaciones se estudian las tablas del 2, 3 y 4, bien repasando el estudio de las tablas ó bien realizando productos en donde no hay que llevarse ninguna vez; los resultados van en aumento.
- en la tercera evaluación se continúa con los multiplicadores 3 y 4 pero en productos en donde hay que llevarse hasta tres veces consecutivas. Vemos pues que la dificultad específica de llevarse varias veces, con un factor que se dominaba previamente, hace disminuir el rendimiento en un 12%.
- en la cuarta evaluación se trabaja con los multiplicadores 5, 6 y 7 y comienza a remontarse la dificultad de llevarse varias veces seguidas.
- en la quinta evaluación trabajamos con el multiplicador 8, y se logra mantener el rendimiento obtenido con números más pequeños.
- en la sexta evaluación se trabaja con el multiplicador 9 y hay un ligero descenso.

Vemos pues que los productos con multiplicador de una cifra entran dentro de la categoría de sencillos, subiendo o bajando ligeramente según que haya que llevarse un número de veces menor o mayor.

El producto de un número de una cifra por otro de varias parece un aspecto propio de este nivel, sobre el que sería conveniente trabajar con más intensidad.

El objetivo nº 2 sólo comienza a evaluarse cuando se ha trabajado a fondo

con todos los aspectos del 1º, por ello solo aparece en las tres últimas evaluaciones. En la sexta y séptima evaluación se trabajan multiplicadores de dos cifras y los rendimientos lo hacen aparecer como idóneo; en la séptima y octava aparecen items con multiplicador de tres cifras y como se ve es un aspecto difícil. La conclusión está clara, mientras que el dominio de multiplicadores de una cifra es propio del Tercer Nivel, los multiplicadores de dos cifras deben iniciarse y trabajarse en este nivel pero no pretender que el dominio sea absoluto para la mayor parte de los niños; los multiplicadores de tres cifras son claramente un aspecto de ampliación.

A efectos de nuestras conclusiones el objetivo lo tomamos finalmente como idóneo, si bien está claro que debiera aparecer desglosado en los dos aspectos considerados.

El objetivo nº 3 solo aparece evaluado al final de curso y exclusivamente en su aspecto más directo, está claro que este aspecto evaluado está bien conseguido y hace que el objetivo quede como muy sencillo.

El objetivo nº 4 es la síntesis de los objetivos 4 y 5 que consideramos el pasado curso; esto ha sido así ya que no hemos apreciado ninguna diferencia de resultados entre las divisiones en que la primera cifra del dividendo es menor que el divisor y aquellas otras en las que es menor, e incluso en muchos items aparecen juntas divisiones de los dos tipos. Los casos evaluados han sido los siguientes:

- en la cuarta evaluación las divisiones tienen como divisor 2 ó 3.
- en la quinta evaluación los divisores son 4 ó 5.
- en la sexta evaluación los divisores son 4 ó 7.
- en la séptima evaluación los divisores son 5, 6, 7 u 8.
- en la octava evaluación los divisores son 7 u 8.

Vemos que hay una pequeña disminución en la sexta evaluación al aparecer un número alto, el 7, como divisor; el retroceso anterior se recupera rápidamente en las siguientes evaluaciones y el objetivo finaliza como sencillo y perfectamente adsequible para los alumnos de este nivel. Hay que indicar que en ninguno de los casos aparece la cifra 0 en el cociente.

El objetivo nº 5 aparece evaluado en los siguientes casos:

- en la primera evaluación hay que resolver un ejercicio mediante el producto 2×8 .
- en la segunda evaluación la operación que resuelve el problema es: 3×73 .
- en la tercera evaluación la operación a realizar es 4×384 , vemos que al igual que sucedió con el objetivo 1º, se produce un retroceso al aumentar el número de cifras del multiplicando y tener que llevarse por tanto varias veces consecutivas.
- en la cuarta evaluación hay que realizar el producto 4×18 , pero el resultado final se obtiene al hacer la sustracción $100 - 4 \times 18$ ya que se trata de saber cuánto devuelven de 100 pts. al comprar cuatro objetos cuyo precio unidad es 18 pts.; se trata de un ejercicio obviamente de un tipo más difícil que los anteriores, y esto se evidencia en un rendimiento más bajo.
- en la sexta evaluación hay que realizar el producto 27×146 ; este producto es un 10% más difícil que los que tienen multiplicador de una sola

cifra, según vimos con los objetivos 1º y 2º, por tanto no es de extrañar que el rendimiento obtenido sea sólo de 76%.

Si en este objetivo hubiésemos distinguido dos aspectos, según el número de cifras del multiplicador, cada uno de ellos tendría una categoría diferente, pero hubiera sido necesario incluir más items para cada uno de los aspectos; como no ha sido así tenemos que considerar un solo objetivo cuya categoría es la de idóneo, si bien hay aspectos en el mismo más sencillos.

El objetivo nº 6 se ha evaluado en dos casos: en la cuarta evaluación hay que inventar un enunciado para una multiplicación y en la octava el enunciado hay que inventarlo para una división; evidentemente se trata de dos aspectos distintos, pero se ha conseguido mejorar el rendimiento, seguramente debido al entrenamiento en la invención de enunciados a lo largo del curso.

Los aspectos evaluados del objetivo nº 7 son los siguientes:

- en la tercera evaluación la operación a realizar es del tipo $a.b+c$.
- en la cuarta evaluación hay dos aspectos de rendimiento muy diferentes, el primero de ellos es del tipo $a.b+c.d$, mientras que el segundo es del tipo $a.b-c.d$ siendo la pregunta del enunciado de la forma ¿cuánto más que? este es el motivo de la diferencia de índices reflejada en la tabla.
- en la quinta evaluación se estudia el tipo $a.b-c.d$ con la pregunta ¿qué diferencia hay?; vemos que se logra mejorar el rendimiento en un 15% respecto de la evaluación anterior, si bien sigue siendo un aspecto difícil.
- en la sexta evaluación se considera de nuevo el tipo $a.b+c.d$, con un ligero retroceso respecto de la cuarta evaluación justificable por la mayor dificultad de los datos y también debido a que la pregunta final no es de tipo directo ¿cuánto hay entre A y B?, sino que se plantea mediante una acción intermedia ¿cuánto se ha transportado en total después de transportar A y B?. Convendría analizar más este tipo de preguntas indirectas.
- en la séptima evaluación se presentan los dos tipos: $a.b+c.d$ y $a.b-c.d$, este último con la pregunta ¿cuánto menos que?, no existiendo diferencia apreciable entre los resultados de los dos items. Se ha recuperado e incluso superado los rendimientos de las evaluaciones anteriores, parece pues que este objetivo es asequible en el Tercer Nivel.
- la octava evaluación confirma las previsiones de los datos anteriores, de nuevo el tipo $a.b-c.d$ mejora sus resultados, en este caso con la pregunta ¿cuánto falta para?.

El objetivo finaliza como sencillo, parece que un trabajo sostenido consigue el dominio de las distintas variantes del mismo.

El objetivo nº 8 se ha evaluado en los siguientes casos:

- en la quinta evaluación es un problema de reparto a realizar con la operación $52:4$, el nivel es ligeramente inferior al de la operación estricta.
- en la sexta evaluación se pregunta el precio de la unidad conocido el precio de varios objetos; se resuelve mediante la operación $525:7$. Tanto en la pregunta como la operación son más difíciles que en el caso anterior, y de ahí la gran disminución habida.
- en la séptima evaluación se trata de calcular el número de recipientes

conocida la cantidad total a repartir y la cantidad que cabe en cada recipiente; se resuelve con la operación $342:3$. Se consigue mejorar el resultado, ya que de hecho la cuenta es más sencilla.
- finalmente, en la octava evaluación se pide calcular la mitad de la suma de dos cantidades, y parece que es el aspecto más difícil de todos los considerados.

Vemos, pues, que sin salirse del enunciado del objetivo y de divisiones con divisor de una cifra, son muy variados los tipos de ejercicios a resolver con divisiones. Los casos estudiados oscilan alrededor del 70% siendo unos idóneos y otros difíciles. A la terminación, el objetivo queda como difícil.

El objetivo nº 9 es un aspecto de nomenclatura que parece bien dominado cuando se plantea en forma directa. Lo consideramos como sencillo.

También el concepto de prueba de una división cuando ésta aparece realizada, objetivo nº 10, parece estar bien dominado, aunque su evaluación es insuficiente. Lo consideramos igualmente sencillo.

En conclusión, dentro de este bloque conviene tener muy en cuenta qué aspectos de las operaciones producto y división, así como de sus aplicaciones, se pueden considerar propias del Tercer Nivel. Tenemos un objetivo muy sencillo, seis sencillos, uno idóneo y dos difíciles.

3.5. Bloque Quinto: Geometría. Objetivos

1. Reconocer y trazar rectas que guarden entre sí una determinada relación.
2. Reconocer y trazar rectas horizontales, verticales y oblicuas.
3. Distinguir los dos semiplanos que determina una recta.
4. Reconocer, trazar y nombrar rectas, semirectas y segmentos.
5. Reconocer y trazar segmentos que guarden entre sí una determinada posición.
6. Reconocer y nombrar las partes de un ángulo.
7. Reconocer y trazar ángulos agudos, rectos y obtusos.
8. Reconocer y trazar ángulos que guarden entre sí una determinada posición.
9. Reconocer y trazar líneas poligonales abiertas y cerradas.
10. Distinguir y nombrar las partes de un polígono.
11. Reconocer y dibujar polígonos por su número de lados.
12. Distinguir entre circunferencia y círculo.
13. Reconocer y trazar radios en una circunferencia.

Los resultados obtenidos durante los dos cursos, en promedio, de los objetivos de este bloque han sido:

Objetivos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Evaluaciones													
VI	.85	.72	.79	.81	.72								
VII						.90	.87	.80					
VIII									.88	.93	.90	.80	.89 .58

Nos encontramos de nuevo con que la distribución de contenidos en este nivel no ha permitido evaluar los objetivos de este bloque durante todo el curso, por ello no es posible apreciar el desarrollo de los mismos en un periodo amplio. Tenemos únicamente una información puntual de cada uno de ellos, que lamentablemente no proporciona referencias sobre avances o retrocesos en el dominio de estas nociones al aumentar su dificultad o al transcurrir el tiempo.

No vamos a hacer de nuevo un comentario detallado de cada uno de los aspectos evaluados en cada objetivo, solo destacar que no se han apreciado diferencias notables entre los aspectos de reconocimiento y los de trazado, dándose una mayor dificultad en la memorización de nomenclatura muy especializada.

En resumen este bloque incluye tres objetivos muy sencillos, siete sencillos, tres idóneos y uno difícil.

CONCLUSIONES FINALES

Para este nivel se distribuyen los objetivos planteados según indica la siguiente tabla:

Categoría	código	intervalo	frecuencia	porcentaje
Muy difícil	M.D.	1-49	0	0
Difícil	D.	50-69	8	14%
Idóneo	I.	70-79	13	23%
Sencillo	S.	80-89	25	44%
Muy Sencillo	M.S.	90-100	11	19%
TOTALES:			57	100%

vemos que solo un 14% de los mismos no alcanzan la categoría mínima aceptable de idoneidad, con lo cual podemos afirmar que al menos el 75% de los alumnos de este nivel dominan el 86% de las competencias básicas que hemos delimitado para el Programa de 3º en el Area de Matemáticas. Los resultados son pues -salvo cuestiones puntuales- altamente satisfactorias y nos indican que a partir del planteamiento global de las Orientaciones Pedagógicas se puede elaborar un cuestionario adecuado a las posibilidades de comprensión del alumno de 8 a 9 años. Damos así culminación a la tarea diseñada al comienzo de este trabajo: delimitar los conocimientos posibles en matemáticas del escolar de nuestro 3º de Básica.

NOTAS

- (1). Para un estudio más detallado de las hipótesis de trabajo consultar: **Modelo experimental para el Análisis del Programa Escolar**. Saenz Barrio, O., Tesis Doctoral.
- (2). **Didáctica de la Matemática en el 2º Nivel**, por RICO, L. y CASTRO, E. en **Homenaje a D. Jacinto Prieto del Rey**. Servicio Publicaciones, Universidad de Granada, 1981.
- (3). PIAGET, J. y INHELDER, B.: **Psicología del niño**. Edit. Morata.
- (4). RICO, L. y otros: **Matemáticas 3**. Edit. Anaya, 1977.