ESCUELA UNIVERSITARIA DE FORMACION DEL PROFESORADO
DE E. G. B. DE GRANADA

LIBRO HOMENAJE

a la Profesora

Doña Encarnación Palacios Vida

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1985

Coordina: MANUEL CAPEL MARGARITO

Depósito legal GR/655. 1985.
Imprime: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Granada.

I N D I C E

SISTEMAS DE NUMERACIÓN. EL SISTEMA DECIMAL: EVOLUCIÓN HISTÓRICA

LUIS RICO ROMERO; ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ; ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ
Cátedra de Matemática. Escuela de Formación del Profesorado de E.G.B. Granada

Precedentes históricos

"Plantó después Javé Dios un jardín en el Edén, al oriente, y en él puso al hombre que había formado. Tomó, pues Javé Dios al hombre y lo puso en el jardín de Edén para que lo cultivase y guardase" (Génesis 2).

Responda el relato bíblico o no a una narración precisa, lo cierto es que la región geográfica del Asia sudoccidental es la que ha proporcionado mayor riqueza de yacimientos arqueológicos más antiguos, y en donde se han encontrado las primeras formas conocidas de escritura, antes del 3000 a.C.. Los restos conocidos de notación numérica proceden de la misma región y su antigüedad es aún mucho mayor.

Los avances de la arqueología en las últimas décadas han sido muy significativos en este campo. Los estudios de D. Schmandt Besserat (Austin U.S.A.) demuestran que una variedad de "fichas" de arcilla sirvieron en la región de Mesopotamia, desde el milenio noveno a.C. hasta finales del cuarto milenio, para designar números, medidas y quizás categorías de objetos. También se conoce que a finales del cuarto milenio se amplió el uso de las fichas con la elección y empleo de símbolos dentro de una especie de sobres protectores de arcilla; este parece ser el precedente de las tablillas de arcilla impresas. La semejanza de los signos numéricos de las tablillas más primitivas y la forma de las fichas de arcilla más antiguas muestran una continuidad de las representaciones métricas y numéricas, desde el Neolítico temprano, hace 10.000 años, hasta la época del nacimiento de las ciudades estado en el Asia sudoccidental.

Del periodo sumerio presargónico y del periodo precedente de Fara, que constituyen el Sumerio antiguo o paleosumerio se conservan textos matemáticos en donde se enumeran áreas de grandes campos cuadrados o bien se resuelven problemas de división con grandes cantidades; el sistema numérico empleado es de base sexagesimal. Los primitivos maestros sumerios parece que destacaron en las operaciones con grandes números, empleando algoritmos para el producto y la división, y utilizando tablas de cuadrados para el cálculo de superficies. Los signos empleados para simbolizar los números no eran cuneiformes sino circulares.

Se conocen desde 1928 más de 200 textos, publicados en Oxford por S.H. Langdon, excavados en el yacimiento de JemdetNasr (Irak); estas inscripciones emplean una escritura pictográfica arcaica, que es un antecedente claró de la cuneiforme sumeria. Estos textos protosumerios aún no están completamente descifrados, pero en ellos los signos numéricos son de fácil identificación.

En las excavaciones realizadas en Susa, desde finales del siglo pasado, se han encontrado restos y tablillas de una civilización iraní anterior a la de Elam, que floreció a comienzos del tercer milenio, y que se extendió hasta regiones relativamente alejadas. Estas tablillas fueron estudiadas por el francés V. Scheil entre 1900 y 1935, pero hasta muy recientemente no se han interpretado con claridad las pequeñas impresiones circulares empleadas para la numeración de estos textos, muy similares a las de los protosumerios.

J. Friberg (1) probó en 1970 que en los textos cerealísticos protosumerios y protoelamitas se empleaba una variante sexagesimal con un signo auxiliar intermedio que podía indicar indistintamente 10 ó 6, según el contexto.

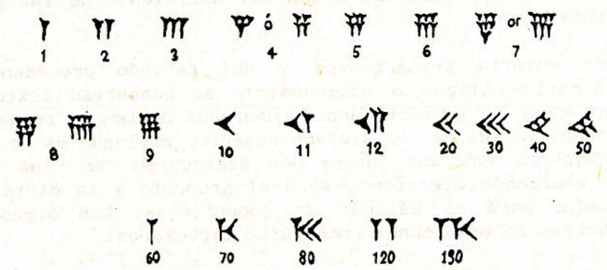
La tesis actual de este autor es que el sistema de numeración era distinto según se tratase de contar gente u objetos inanimados -hogazas de pan, vasijas, medidas- en cuyo caso el sistema era de base sexagesimal c bisexagesimal; pero cuando contaban animales operaban con un sistema numérico decimal con notaciones numerales especiales. Parece que no existe duda alguna de que los caballos se contaban con números decimales. De este modo el contenido de un texto puede determinarse por el tipo de números y medidas empleados en el mismo. De esta época data la aparición de los primeros símbolos para representar fracciones.

La actividad matemática en el reinado de Sargón de Acad (2350-2300 a.C.) está confirmada por un puñado de pequeñas tablillas que registran problemas y cuentas de ofrendas religiosas, así como ejercicios geométricos sencillos. Los signos numéricos aparecen escritos en dos formas: cuneiformes, cuando se emplea el extremo de cuña de un cálamo ó como signos circulares, cuando se realiza con el extremo romo del mismo. Precisamente se aprecia aquí la transición de los signos circulares a los cuneiformes, cosa que ha facilitado la interpretación de los primeros.

Del periodo sumerio llamado Ur III (2050-1950 a.C.) se conocen gran cantidad de textos. En ellos se emplea una notación no posicional con signos independientes para 1, 60 y 60^2, 10, 10 x 60 y 10 x 60^2, y así sucesivamente. El sistema era una combinación de las bases 10 y 60, y no necesitaba signo especial para el cero. Se consigue en cierto modo una síntesis de los sistemas de bases 10 y 60 independientes anteriormente. Algunos de los textos de Ur III tienen interés matemático y metrológico especial.

De la época del Babilonio Antiguo o Paleobabilonio (1900-1500 a.C.) se conocen multitud de textos, copias escolares de textos canónicos, en donde aparecen listas de nombres geográficos, nombres de aves y peces, palabras en dos lenguas, y también tablas matemáticas: de multiplicar, cuadrados, raíces cuadradas, etc., y tablas de medidas. También han aparecido tablas de "textos con problemas". Rawlinson fue pionero en 1885 del desciframiento de la escritura cuneiforme. Mediante el estudio de las tablillas de barro cocido halladas en los yacimientos de Larsa, antigua ciudad mesopotámica, demuestra que los babilonios operan con un sistema sexagesimal de tipo cuasiposicional con dos signos básicos para 1 y las sucesivas potencias de 60, y para 10.

El mayor nivel aritmético en la civilización babilónica fue el alcanzado durante el periodo Acadio. Los números se escribían así:



Se empleaba la base 60 y la notación posicional.

Como al principio no tenían símbolo para indicar la ausencia de cantidad en las posiciones intermedias sus números resultaban ambiguos. Así: puede significar lo mismo 90 ó 3630. A menudo se dejaba un espacio libre para indicar que no había valor en la posición correspondiente, pero incluso así podía dar lugar a confusiones. Durante el reinado de Hammurabi (alrededor de 1700 a.C.) este fue el sistema de numeración empleado.

En el periodo Seleúcida, es decir, muy posteriormente, se introdujo un símbolo de separación para indicar la ausencia de un orden. Así $= 1.60^2+0.60+4$, es una de estas notaciones, que hay que interpretar más como una pausa ó espacio en blanco, que como un valor numérico. Este es quizá el antecedente más antiguo de nuestro cero actual: la pausa -expresada mediante un signo especial- que indica la ausencia de cantidad en un determinado orden.

Los sistemas de medida del tiempo, de los ángulos y de los datos astronómicos en general, empleados por los babilonios con el uso de la base 60 se han mantenido hasta nuestros días en nuestras unidades temporales y sexagesimales de medida de ángulos.

Con este sistema de numeración los babilonios emplearon fracciones, resolvieron cálculos en las cuatro operaciones; trabajaron con potencias y raices; obtuvieron valores aproximados muy precisos para π y $\sqrt{2}$; resolvieron multitud de problemas contables y comerciales, y avanzaron bastante en los estudios de álgebra.

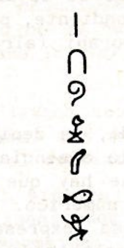
El sistema egipcio de numeración.

Mientras que la cultura que se formó en Mesopotamia estuvo influenciada por los sucesivos pueblos que dominaron en esta zona geográfica a lo largo de la historia, o que simplemente mantuvieron alguna influencia cultural significativa, en el valle del Nilo la cultura egipcia se desenvolvió sin ser afectada profundamente por influencias extrañas. Lo que hoy conocemos de la historia del antiguo Egipto se refiere al transcurrir de las distintas dinastías, desde que el rey Menes, que unificó el Alto y Bajo Egipto, fundó la primera de ellas. Alrededor de 2.500 a.C. la cultura egipcia alcanzó su más alto nivel con la tercera de las dinastías, en cuyo tiempo se llevo a cabo la construcción de las pirámides. Salvo algunas invasiones poco importantes y algunos contactos con la civilización babilónica, la cultura egipcia fue producto principalmente de los nativos del valle del Nilo.

Los egipcios elaboraron su propio sistema de escritura. Uno de estos sistemas fue el jeroglífico en el cual cada símbolo era el dibujo simplificado de un objeto o pictograma. Los jeroglíficos se continuaron usando en las inscripciones monumentales hasta casi el comienzo de nuestra era. De todos modos los egipcios emplearon también otro sistema, el hierático, para usos más comunes. Este sistema emplea en su comienzo símbolos más convencionales, que suponen al comienzo sólo una simplificación de los jeroglíficos. La escritura hierática es silábica; cada sílaba se representa por un ideograma y la palabra completa es una colección de ideogramas. El significado de la palabra completa no puede obtenerse de los ideogramas separados (2).

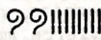
Dos son los documentos fundamentales que se conservan sobre textos matemáticos del antiguo Egipto: el papiro de Moscú y el papiro Rhind, descubierto en 1858 y que se conserva en el Museo Británico. Ambos datan de 1800 a.C. aproximadamente. Estos papiros están redactados por escribas que trabajaban en la administración del estado o bien en las castas sacerdotales. Los símbolos egipcios para la numeración eran:

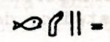
Símbolo indoarábigo	Símbolo egipcio
1	
10	
100	
1000	
10 000	
100 000	
1 000 000	



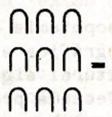
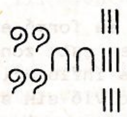
Como vemos es un sistema de base decimal, con un signo distinto para cada una de las sucesivas potencias de 10. El principio empleado para escribir los números era simplemente aditivo. El número representado por un conjunto particular de símbolos se encontraba sumando los valores de cada uno de los símbolos representados. Así:

 $= 10 + 10 + 1 + 1 = 22,$

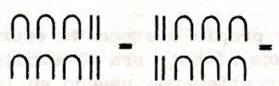
 $= 100 + 100 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 208,$

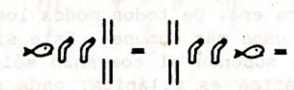
 $= 100\,000 + 10\,000 + 1 + 1 = 110\,002.$

Si el símbolo correspondiente a un valor debía escribirse más de cuatro veces, los egipcios economizaban espacio lateral escribiendo estos símbolos en dos o más filas; así

 = 90,  = 429.

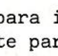
Los símbolos de un numeral podían ser escritos de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. Era costumbre que los símbolos de valor mayor precedieran a los símbolos de menor valor. Vemos entonces que el sistema de numeración de los egipcios no era un sistema de posición como en el caso de nuestro sistema decimal.

 = 64,

 = 120 004.

El sistema de numeración egipcio era básicamente decimal en naturaleza, pero carecía del concepto de valor de posición.

La aritmética era esencialmente aditiva, ya que consistía en añadir o quitar símbolos para obtener el resultado. Por ello el producto y la división se reducían a procesos aditivos, como el de duplicar y mediar. También trabajaron con fracciones y

tenían un símbolo especial  para indicar fracción, que leían "ro", y que colocaban encima del número correspondiente para indicar fracción, así:

 $= \frac{1}{5},$  $= \frac{1}{10},$  $= \frac{1}{15}.$

Con este sistema de numeración resolvieron las cuatro operaciones aritméticas, trabajaron con cuadrados, cubos, potencias en general y raíces cuadradas, resolvieron problemas de sistemas de ecuaciones e iniciaron la resolución de problemas algebraicos; además resolvieron problemas de cálculo de superficies y volúmenes y otros problemas geométricos elementales.

También los egipcios tuvieron un sistema de numeración hierático, en el cual los primeros números se escribían así:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Realizaron bastantes de sus cálculos con piedras, y seguramente evolucionaron hasta el empleo de ábacos. Herodoto nos dice que realizaban sus cálculos moviendo la mano de derecha a izquierda, a diferencia de los griegos que trabajaban de izquierda a derecha. Los egipcios emplearon la escala decimal y parece probable que empleasen tableros de cifras con columnas verticales; en cada columna no había nunca más de nueve guijarros, ya que diez de ellos equivalen a un guijarro en la siguiente columna de la izquierda. Existía pues correspondencia entre la notación numérica jeroglífica y la expresión de cada una de las cantidades correspondientes en el ábaco. De aquí que esta correspondencia se mantuviese también en las técnicas de cálculo, y es muy posible que las reglas de operación con los símbolos tuviesen su fundamentación en la operatoria con guijarros.

Periodos griego y romano

Pitágoras fue el primero de los griegos que cultivó la Aritmética tan profundamente como la Geometría, de hecho hizo de la Aritmética uno de los fundamentos de su sistema filosófico. Así Aristóteles nos dice (3): "Los llamados pitagóricos se entregaron a las matemáticas y fueron los primeros en hacer avanzar esa ciencia mediante su propia educación, en la cual se les incitaba a pensar que los principios de la matemática son los de todos los seres. De suerte que, así como los números son lógicamente los primeros de entre esos principios, y ellos se figuraban que en los números podían hallarse multitud de analogías con lo que es y con lo que llega a ser, y ello de manera mucho más rápida que no en el fuego, la tierra o el agua, ..., y como, además observaron que las propiedades y las razones determinantes de las armonías dependen de los números; y como, de hecho, todas las demás cosas manifiestamente aparecen como modeladas en su entero carácter en los números y los números parecen ser las cosas últimas en todo el universo, se convencieron así que los elementos de los números son los elementos de todos los seres y de que el cosmos es todo armonía y número".

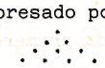
Desde el punto de vista aristotélico, el pitagorismo tenía las siguientes características:

1) Todas las cosas constan de número, en el sentido literal de que los cuerpos físicos mismos están hechos de números; o puesto que los números mismos no son lo último, puede decirse que los elementos de los números son los elementos de todo.

2) Las unidades para los pitagóricos poseen magnitud.

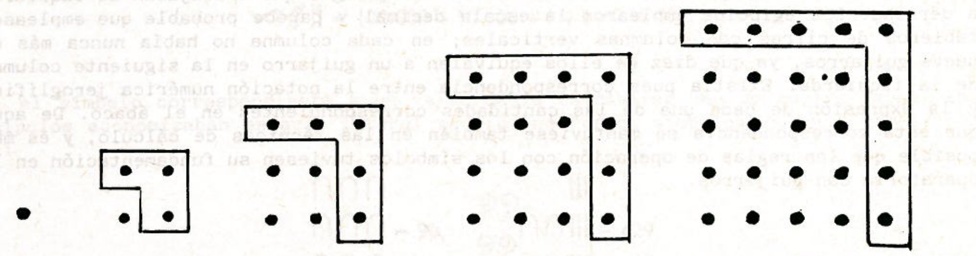
3) En lugar de decir que las cosas están caracterizadas numéricamente, hablaban como si el número fuese la materia real de la que están compuestas las cosas.

4) Nosotros consideramos la unidad y el límite como predicados aplicados a ciertos objetos, generalmente físicos, diciendo "ello es uno" o "ello es finito", siendo "ello" sustancialmente algo más, como madera o metal. Los pitagóricos consideran, sin embargo, la unidad y el límite como sustancias que forman el elemento básico de todo lo demás (4).

Queda así bien caracterizado el programa pitagórico de interpretación de la realidad en términos estrictamente numéricos, que no pudo ser desarrollado en su totalidad, si bien permitió estudiar y obtener propiedades muy importantes de los números. Aparecen así los números figurados, en donde cada número viene expresado por una configuración puntual. Surgen así los números triangulares, como 10:  ; números cuadrados como 16: 

números oblongos como el 12; pentagonales, etc.

También se observa que una serie de números, tal como la de los cuadrados se van obteniendo cada uno del anterior por la añadidura de un gnomon o escuadra, que en este caso consiste en ir agregando los sucesivos números impares:



1 1+3= 4 4+5= 9 9+7= 16 16+9= 25 etc

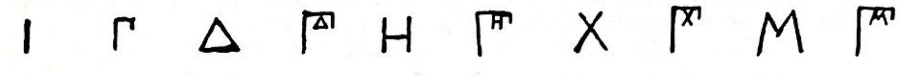
De la disposición figural de los números los griegos llegaron a obtener propiedades muy importantes, tales como la anterior de los cuadrados, o la que dice que los números cúbicos son siempre iguales a la suma de números impares consecutivos; así $8 = 2^3 = 3+5$, $27 = 3^3 = 7+9+11$, $64 = 4^3 = 13+15+17+19$, etc.; el teorema de Theón de Smirna de que cada número cuadrado o su anterior es divisible por 3 o por 4; la proposición de Iamblico de que "si se suman tres números consecutivos de los cuales el mayor es divisible entre 3, y se suman a continuación los dígitos del resultado, y si se suman de nuevo los dígitos del nuevo resultado, y así sucesivamente, el resultado final es 6".

Todos estos resultados son francamente sorprendentes si tenemos en cuenta que el sistema de numeración griego era, en palabras de Bell (5) "una niñería poco mejor que la yuxtaposición de las letras iniciales de los primeros números; el interés que ofrece para la matemática es insignificante y merece el olvido del matemático. Uno de sus muchos defectos era su incapacidad para expresar concisamente números incluso moderadamente grandes".

Los matemáticos griegos separaban su trabajo sobre los números en logística y aritmética. La logística abarcaba las técnicas de numeración y el cálculo numérico tal y como se practicaban en el comercio y las ciencias, en particular la astronomía.

La aritmética, lo que nosotros llamamos aritmética superior o teoría de números, se ocupaba de las propiedades de los números como tales. Fue el divorcio entre ambas lo que condujo al relativo estancamiento de la aritmética entre los griegos.

Se conocen dos sistemas de numeración escrita, ambos aditivos, y en los que se utilizan las letras del alfabeto para simbolizar los números. El sistema primitivo es el llamado Atico, cuyos signos se denominaban herodiánicos -por Herodiano, gramático griego del siglo II que estudió y expuso estos signos-. Los signos del sistema ático son:



1 5 10 50 100 500 1000 5000 10,000 500,000

donde la unidad y las cuatro potencias de diez se indican con las iniciales de las palabras respectivas, agregándose un signo especial para el cinco. El actual sistema métrico decimal utiliza la misma idea y las mismas letras para indicar 10, 100, 1.000 y 10.000, D inicial de Deca, H inicial de Hecto, K inicial de Kilo y M inicial de Miria; siendo pues, el s.m.d. un trasunto de este primitivo sistema de numeración griego, que cayó en desuso hacia el siglo IV a.C. reemplazado por los numerales alfabéticos.

El sistema alfabético utilizaba las 24 letras del alfabeto griego en su orden junto con tres símbolos especiales de un alfabeto arcaico para 6, 90 y 900 -el uso de estos tres signos hizo pensar en un principio que este sistema era más antiguo que el ático-. Con ellos simboliza los nueve primeros números, las nueve primeras decenas y las nueve primeras centenas, según la tabla de equivalencia:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90

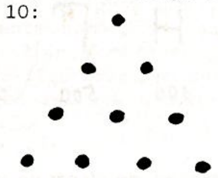
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	,α	,β	,γ etc.
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	2000	3000

M	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$ etc.
10,000	20,000	30,000

A partir del 1.000 el alfabeto comenzaba de nuevo, pero colocando una coma delante para evitar confusiones. Encima de cada número se trazaba una raya horizontal para distinguirlo de las palabras. Para las decenas de millar se colocaba el coeficiente M junto, o bajo, la letra correspondiente, así δM,γχοη es el número 43.678. Los griegos carecían de cero. En otro trabajo (6) nos hemos referido a la imposibilidad conceptual de los griegos de concebir el cero como cantidad debido a sus planteamientos metafísicos sobre la no existencia -e imposibilidad- del no ser, y por ello la no admisión de un símbolo para la ausencia de cantidad.

Los escritores griegos apenas se refieren al cálculo con numerales alfabéticos. Suma, resta e incluso multiplicación eran realizados con el ábaco. Sólo los matemáticos muy expertos emplearon los símbolos, y esto en épocas muy tardías. Eutocio, comentador del siglo VI d.C. realizó multiplicaciones; las divisiones aparecen en Theón de Alejandría en su comentario del Almagesto, y su proceso es largo y tedioso.

Pitagoras, cuenta la tradición, importó e introdujo el ábaco entre los griegos. De la herencia pitagórica cabe decir que tuvo un doble peso en la posteridad. El valor místico y el significado religioso de los números entorpeció la comprensión del papel real de estos en la interpretación de los fenómenos físicos. Por esta influencia Pitágoras ha sido muy criticado, así, B. Russell (7) nos dice de él que "fue intelectualmente uno de los hombres más importantes que jamás hayan vivido, tanto en su sabiduría como en su insensatez"; críticas aún más fuertes podemos encontrar en Hull (8) y otros. Un ejemplo de este empleo místico de los números lo tenemos en Cornford (9): "podemos buscar la naturaleza de todos los seres en la década, tal como el símbolo tetractys la expresa, símbolo que, según es plausible conjeturar, se remonta al mismo Pitágoras. Según parece, el tetractys original fue el de la década, obtenido por la adición de $1+2+3+4 = 10$:



Así, Theón de Esmirna, afirma que este tetractys es de gran importancia en la música, porque contiene todas las consonancias. Pero no solo por esto ha gozado del más alto favor de los pitagóricos, sino también por sostener que abarcaba la naturaleza de todo el universo, utilizaban este símbolo como llave maestra de la interpretación del mundo. El tercer tetractys es el punto, la línea, la superficie y el sólido; el cuarto tetractys es el formado por el fuego, el aire, el agua y la tierra; el quinto la pirámide, el octaedro, el icosaedro y el cubo, etc. etc.".

Tambien la influencia del pensamiento pitagórico es evidente en Platón y contribuyó al resurgir científico del Renacimiento. Galileo reconoce explícitamente la recuperación del programa pitagórico en sus estudios físicos. El descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ está entre las consecuencias inesperadas y sorprendentes del pitagorismo.

En conexión con el simbolismo aritmético está el ensayo de Arquímedes, "El Arenario" que dedicó a Gelón, Rey de Siracusa. En él Arquímedes demuestra que la gente está en un error cuando cree que los granos de arena no pueden contarse, o que si se cuentan, su número no puede expresarse con los simbolos aritméticos. Demostró que el número de granos de un montón de arena tan grande como la Tierra ó bien tan grande como el Universo, puede expresarse aritméticamente. Para ello emplea un curioso sistema de potencias de 10, que podía haber evolucionado hacia un sistema de numeración más racional. De este modo llega a establecer que el número de granos de arena del Universo no excede a 10^{63}, en nuestra notación actual.

En Aritmética hay dos aportaciones importantes antes de Diofanto: todo número es producto de factores primos, y, la serie de los números primos es ilimitada. Diofanto fue uno de los matemáticos más fértiles de la segunda Escuela de Alejandría, que vivió alrededor del 250 d.C. Su Aritmética es el primer tratado de Algebra conocido, y en él se comienza la idea de ecuación algebraica expresada con símbolos.

La profundidad de planteamiento de la matemática griega, incluso en el campo de la Aritmética, supera ampliamente la pobreza de su notación numérica. Es bastante probable que con un sistema de numeración más adecuado los avances hubiesen sido aún más espectaculares, ya que a veces nos sorprenden por la finura de sus conclusiones, que no eran facilitadas en absoluto por el sistema de representación utilizado. Habrá que esperar al Renacimiento para que todos los conocimientos fundamentados en esta época aparezcan de modo sistemático y coordinado al ser expresados en el nuevo sistema.

Finalmente queremos señalar la notación empleada por los griegos para las fracciones: escribían en primer lugar el numerador acompañado de un acento seguido

del denominador con dos acentos y escrito dos veces. Así $\iota\gamma'\kappa\theta''\kappa\theta'' = \frac{13}{29}$; cuando las fracciones tenían por numerador la unidad, el valor podía suprimirse, y entonces el denominador se escribía sólo una vez, así: $\mu\delta'' = \frac{1}{44}$

La matemática de los romanos no la recibieron de los griegos sino que procedía de fuentes más antiguas, parece lo más probable que la llamada notación romana proceda de los antiguos etruscos.

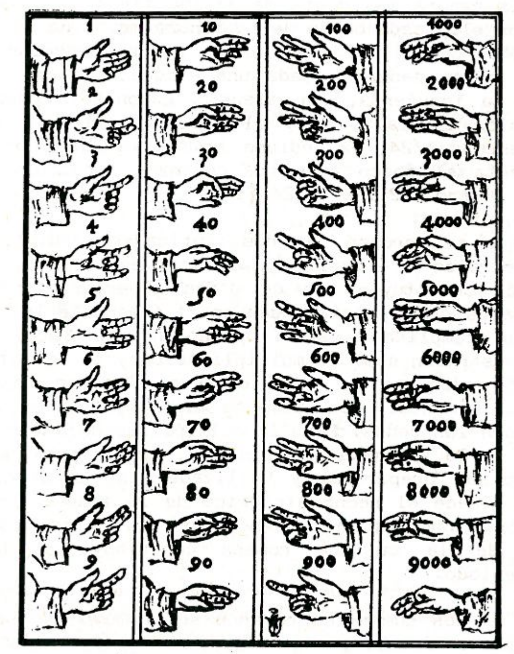
Los numerales romanos son:

I	V	X	L	C	D	M
1	*5*	*10*	*50*	*100*	*500*	*1000*

si bien este último símbolo en una versión más primitiva fue CIƆ. Para representar números muy grandes una raya horizontal encima de algunas cifras multiplicaba su valor por mil.

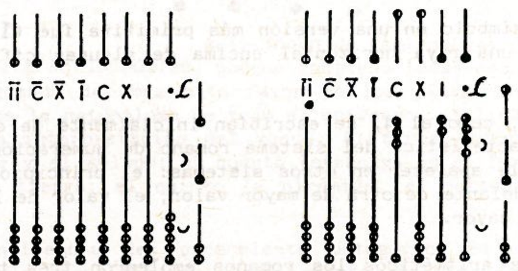
Algunos números, como el 4, se escribían inicialmente de otro modo: IIII y no como IV, pero es característico del sistema romano de numeración el que incluía un principio que no suele aparecer en otros sistemas: el principio de sustracción. Si una letra se coloca delante de otra de mayor valor, el valor de la menor no se añade sino que se resta del mayor.

En los cálculos aritméticos los romanos emplearon tres técnicas diferentes: contando con los dedos, usando el ábaco y con tablas preparadas exprofeso (10). El simbolismo de los dedos fue conocido desde tiempos tan tempranos como los del Rey Numa Pompilio, que ya, según cuenta Plinio, levantó una estatua al dios Jano en la



cual indicaba con los dedos el número de dias del año: 365. Muchos otros párrafos de autores romanos explican el empleo de los dedos como ayuda para el cálculo. El simbolismo con los dedos fue usado de hecho no sólo por los romanos sino también por los griegos y otros paises más hacia el Este, antes del cristianismo y se continuó empleando durante la Edad Media; no hay noticias precisas de donde y cuando se inventó. La segunda forma de numeración y cálculo, el ábaco, fue tema de instrucción elemental en Roma. Se sabe que el tipo de ábaco más comunmente utilizado se cubría de arena y después se dividía en columnas dibujando líneas rectas, cada columna se llenaba con piedras: "calculi", y de aquí cálculo y calcular.

Los romanos empleban otra variante de ábaco que consistía en una placa metálica con unas ranuras en las que se desplazaban botones. Con su uso podían representarse todos los enteros, desde 1 a 9.999.999, y también algunas fracciones. En las dos figuras adjuntas las líneas representan las ranuras y los circulos los botones.



Los numerales romanos indican el valor de cada botón en la correspondiente ranura, el botón en la ranura más corta de encima tiene un valor de cinco unidades. Así ĪĪ = 1.000.000, por ello cada botón de la ranura mayor de la izquierda, cuando se emplea, valga 1.000.000, y que el botón de la ranura superior valga 5.000.000. Lo mismo ocurre con las otras ranuras, cada una etiquetada con un numeral romano. La octava ranura, desde la izquierda, que tiene 5 botones, representa las fracciones duodecimales, cada botón indica 1/12, y el superior 6/12. En la novena columna la ranura superior representa 1/24, la mediana 1/48 y la inferior 1/72 cada botón. El primer dibujo representa el ábaco antes de comenzar a calcular, y el dibujo de la derecha representa al número 852 1/3 1/24 [10].

Si queremos sumar se agrupan las dos cantidades, indistintamente, comenzando por las unidades superiores o inferiores; se mantiene el principio de que cada 10 unidades de un orden constituyen una de orden superior, de hecho no se pueden representar diez unidades de un mismo orden en el ábaco. En la resta la operación es similar; la parte más complicada es la operación con fracciones. Los métodos de cálculo con el ábaco mostraban como la multiplicación y la división se realizaban por una serie sucesiva de adiciones o sustracciones. Podemos sospechar que recursos usuales fueron el cálculo mental y la tabla de multiplicar. Posiblemente se hayan hecho multiplicaciones con los dedos. Pero la multiplicación de grandes números debe haber llegado más allá de la aritmética ordinaria, con diferentes métodos auxiliares. Tablas aritméticas fueron preparadas y utilizadas; se conocen las de Victorio de Aquitania (475 d.C.). Queda el hecho histórico de lo inadecuado de este sistema de numeración para realizar operaciones aritméticas con ellos, lo cual unido al poco espíritu matemático de la cultura romana contribuyó al bajo rendimiento en matemáticas de este periodo.

La influencia de los numerales romanos se mantuvo en Europa durante toda la Edad Media, y más adelante haremos las consideraciones oportunas sobre ello.

Otros sistemas de numeracion conocidos

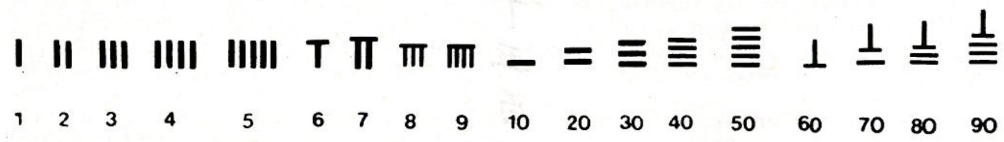
Aunque de poca o ninguna influencia en nuestra cultura occidental, históricamente se han dado otros sistemas de numeración, cuyas características más significativas, y numerales más importantes pasamos a detallar.

Los hebreos utilizaban su alfabeto para escribir los numerales, de igual modo que hacían los griegos; las diez primeras letras representaban los diez primeros números tal como se ve a continuación:

י	ט	ח	ז	ו	ה	ד	ג	ב	א
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

el orden de derecha a izquierda se ha establecido respetando la forma hebrea de escritura. El resto del alfabeto se utiliza para simbolizar consecutivamente a las decenas y a las centenas; a partir de 500 se emplean dos símbolos juntos. Parece que el origen común de los sistemas alfabéticos de numeración es de procedencia fenicia (11).

Entre los sistemas numerales más antiguos se encuentran los utilizados por los chinos, y adoptados más tarde por los japoneses. Aunque han variado a lo largo de los siglos, se pueden reducir básicamente a dos tipos. El primero se basa en el uso de palitos colocados encima de una mesa y empleados con fines de cálculo, aunque también aparece en documentos escritos. Sus símbolos son los siguientes:



El sistema más comúnmente empleado es el llamado sistema chino, que es uno de los más antiguos que hay en el mundo y se emplea aún actualmente. Sus numerales son:

1 一	6 六	100 百
2 二	7 七	1000 千
3 三	8 八	10,000 萬
4 四	9 九	
5 五	10 十	

十 三	三 十	五 十	五 十 一
13	30	50	51

Aún cuando algunas firmas de negocios de China emplean en la actualidad nuestro sistema de numeración indoarábigo, otras retienen los símbolos chinos antiguos. Estos símbolos antiguos se usan casi universalmente en los cheques.

Los chinos usan símbolos separados para los números del uno al diez, para un ciento, para un mil y para diez mil. La figura anterior nos muestra las combinaciones de esos símbolos. Si comparamos los símbolos que representan al 13 y a 30, vemos que cuando el símbolo del tres es colocado por debajo del símbolo de diez, se suman ambos símbolos; cuando el símbolo del tres se coloca encima del símbolo de diez, ambos símbolos se multiplican entre sí. En el símbolo que representa al cincuenta y uno podemos apreciar una aplicación de la adición y de la multiplicación en la interpretación de los símbolos.

Los números grandes se representan por símbolos que se escriben verticalmente. De este modo el símbolo de la figura representa

$$(5 \times 10{,}000) + (2 \times 1000) + (5 \times 100) + 4 = 52\,504,$$

五
萬
二
千
五
百
四

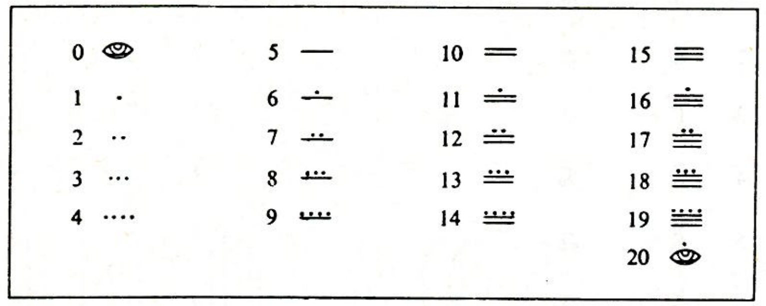
Los mismo principios se emplean en la escritura de símbolos para números más pequeños (12).

La civilización maya de la parte sur de México y de Centroamérica fue la primera que empleó el valor de posición a la vez que un símbolo para el cero. El sistema maya se desarrolló independientemente de las civilizaciones del Viejo mundo y se supone que fue empleado cinco o seis siglos antes que cualquiera de los sistemas de los paises asiáticos. El sistema de numeración maya se encuentra en sus calendarios y relaciones astronómicas, no es de base decimal sino vigesimal, en todos, excepto en un orden. Sus valores de posición son:

20 de la unidad inferior, kines (día), constituyen un uinal.
18 uinales forman un tun (360 días = un año aproximadamente)
20 tunes hacen un katun (7.200 días)
20 Katunes hacen un ciclo (144.000 días)
20 ciclos hacen un gran ciclo (2.880.000 días)

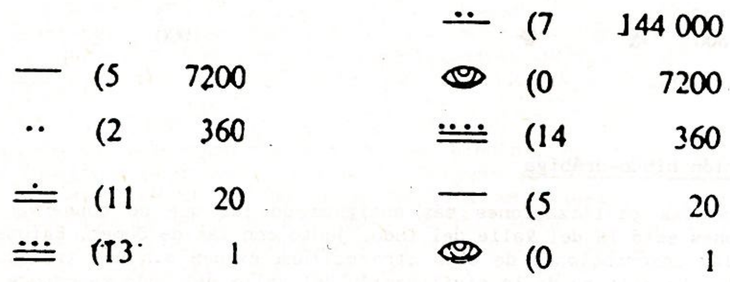
Los números del 1 al 19 se representan con barras y puntos, tal y como aparecen en la tabla:

NUMERALES MAYAS



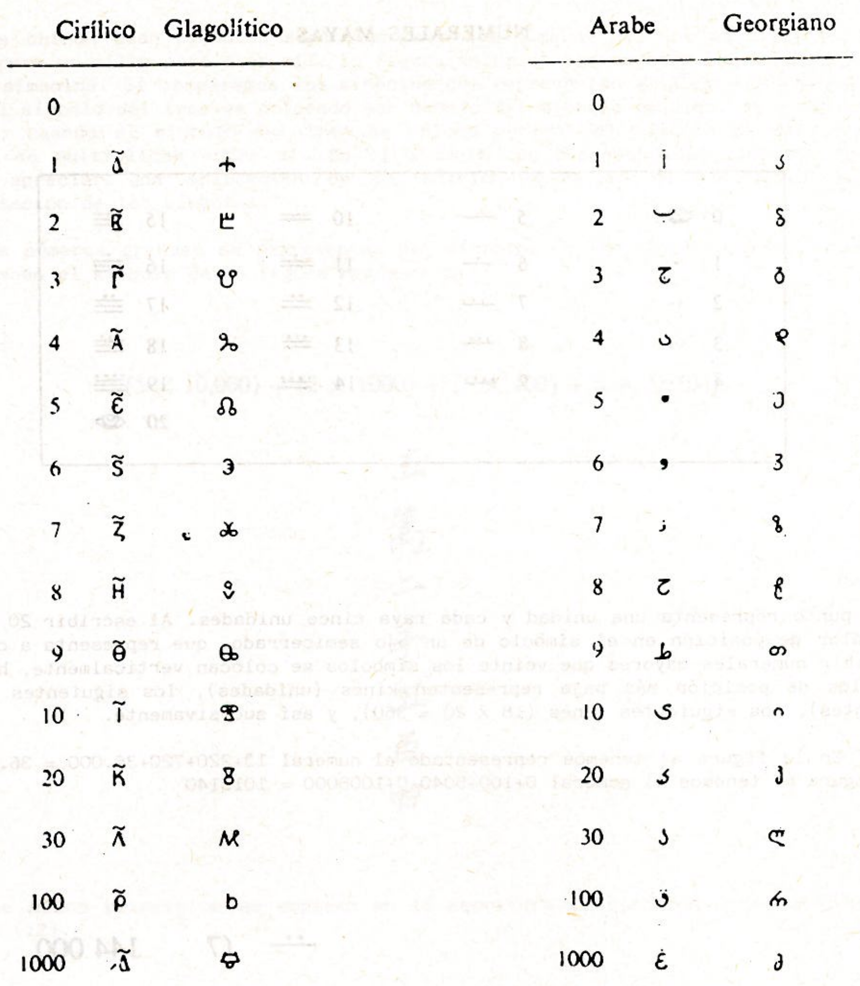
Cada punto representa una unidad y cada raya cinco unidades. Al escribir 20 aparece el valor de posición en el símbolo de un ojo semicerrado, que representa a cero. Al escribir numerales mayores que veinte los símbolos se colocan verticalmente, haciendo que los de posición más baja representen kines (unidades), los siguientes uinales (veintes), los siguientes tunes (18 x 20 = 360), y así sucesivamente.

En la figura a) tenemos representado el numeral 13+220+720+36.000 = 36.953, en la figura b) tenemos el numeral 0+100+5040+0+1008000 = 1013140



(a) (b)

En la siguiente tabla aparecen los símbolos numéricos empleados por distintos pueblos de culturas no muy próximas a la muestra (13).



La numeración hindo-arábiga

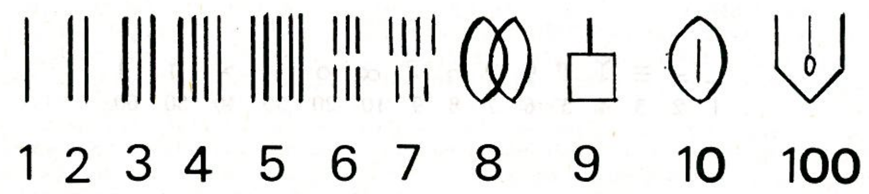
Entre las civilizaciones más antiguas de las que se conservan documentos e inscripciones está la del Valle del Indo, junto con las de Sumer, Egipto y China; sin embargo, las inscripciones de esta otra cultura siguen sin una traducción fidedigna aún hoy día. La cultura de la civilización del Valle del Indo se conoce con el nombre de harappea, en virtud de uno de sus dos grandes centros de población: Mohenjo-Daro y Harappa. La base económica principal de esta civilización parece ser que fue la agricultura y la ganadería; se sabe que emplearon el cobre y el bronce para utensilios y armas y el oro y la plata en cuentas para joyería; aunque también se han encontrado algunas tallas en piedras semipreciosas, como ágata, cornalina y lapislázuli.

La mayor parte de los restos hallados pueden datarse en el periodo comprendido entre 2200 a 1700 a.C., es decir, se trata de una cultura contemporánea del periodo Babilónico Antiguo; pero que presenta signos de un desarrollo inferior.

Los textos hallados nos muestran que hicieron un uso limitado de la escritura ya que consisten casi exclusivamente en breves inscripciones sobre sellos, y un número igualmente limitado de grafitos sobre cerámica. Muchos de sus signos son pictográficos.

La mayoría de los sellos harappeos son piedras cuadradas o rectangulares de esteatita, materia fácil de grabar, y suponen el negativo de una inscripción que al aplicarla sobre arcilla blanda transcribían el texto real. Hoy sabemos que en la escritura harappea se han identificado un total de 419 signos, que aparecen 13.376 veces en 2.290 textos conocidos. La escritura no es alfabética, como el sánscrito, ni logográfica como el chino, sino logosilábica, es decir, que algunos signos representan palabras y otros sirven sólo por sus valores silábicos o sonidos.

Entre los signos identificados se encuentran los numerales harappeos:



Estos numerales se basan en un principio de sistema octogesimal; constituyen una serie de trazos verticales del uno al cinco, seis trazos breves para el seis y una serie similar de trazos menudos para el siete. Los signos para el ocho y el nueve son respectivamente los pictogramas de un sol doble y de un poste de fundición. El signo para el 10 es un sólo sol con un breve trazo en su interior, mientras que otro numeral identificado, el ciento, es el pictograma de un almirez con su mano (14).

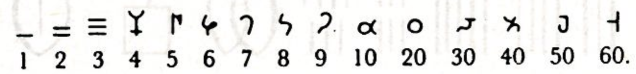
De la cultura harappea se conoce también su elevado grado de normalización: en arquitectura los adobes estaban normalizados y se disponían de modo normalizado; las dimensiones de las viviendas eran normalizadas, así como su ubicación relativa a los centros públicos; también disponían de pesos y medidas normalizados.

De las primitivas familias linguísticas que se dieron en la región, el harappeo parece estar relacionado con el dravídico, lengua que aún se habla hoy día en varias regiones de la India. La tesis de los investigadores de esta cultura es que no desapareció jamás sino que se diluyó en la India aldeana, evolucionando junto con la misma.

Sin embargo, la mayor contribución de los hindúes, que ha permitido un gran avance de la inteligencia en general y de la matemática en particular, ha sido la invención del sistema decimal de numeración. Hoy día está fuera de toda duda que los conceptos de valor posicional y numeral cero que utilizamos -el maya no ha influido en nuestra cultura- aparecieron conjuntamente en la India por vez primera. Aunque hay precedentes del principio del valor posicional en el sistema sexagesimal de los babilonios, que así mismo llegó a emplear un signo especial para la ausencia de cantidad en un orden, éste no fue entendido como valor numérico, ni empleado en el cálculo. También en el Almagesto de Ptolomeo (130 d.C.) aparecen fracciones sexagesimales, entre ellas se emplea la ómicron griega para designar huecos en los números sexagesimales, pero tampoco se emplea regularmente como cero.

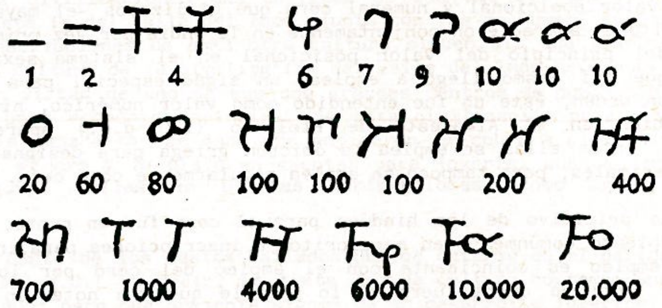
El signo primitivo de los hindúes para el cero fue un punto, el cual, según Bühler fue empleado comúnmente en manuscritos e inscripciones para indicar un hueco. Este primer empleo es coincidente con el empleo del cero por los babilonios y Ptolomeo, por ello no queda fuera de lo posible que una notación imperfecta que llevase incorporados los principios del valor posicional y el cero fuese importada a la India; pero no cabe duda que fue allí en donde se transfirió al sistema decimal y se perfeccionó hasta lograr un sistema muy semejante al actual.

La civilización hindú tiene una antigüedad anterior al 2000 a.C., pero no puede considerarse que realizasen producción matemática hasta alrededor del 800 a.C. La historia de la matemática hindú puede dividirse en dos periodos fundamentales: primero el periodo Sulvasūtra que finaliza alrededor del 200 d.C.; y el segundo periodo denominado matemático astronómico que se extiende desde el 400 al 1200 d.C. Durante el periodo Sulvasūtra, desde el 800 a.C. al 200 d.C., los hindúes produjeron una matemática primitiva (2), el término Sulvasūtra significa "reglas de la cuerda" y era la denominación dada a las instrucciones para construir altares. Alrededor del tercer siglo de nuestra era aparecieron símbolos numerales que expresaban un sistema más evolucionado y que variaban considerablemente de unas épocas y regiones a otras relativamente próximas. Son conocidos de esta época los símbolos Brahmánicos:



Hay un signo distinto para cada número, pero aún no hay cero ni valor posicional, y está claro que fueron varios los sistemas utilizados antes de incorporar estas dos innovaciones. No existen fechas precisas sobre la primera aparición y empleo del sistema decimal de numeración. Cuando tenemos las primeras informaciones exactas es en periodos muy tardíos, siglo noveno, y ya cabe suponer que el sistema venía utilizándose con regularidad desde mucho antes, puesto que aparece muy sistematizado y como un dato ya conocido.

Los primeros numerales hidúes pueden clasificarse en tres grandes grupos (15), uno de éstos data del tercer siglo d.C., y parece ser que nuestros signos actuales proceden de ellos. El matemático y astrónomo hindú Aryabhata, nacido en 476 d.C., parece ya conocer los principios posicional y de cero, puesto que en los trabajos que se conservan escritos por él, para extraer la raíz cuadrada y cúbica de un número, se desprende el empleo de estas dos ideas. El símbolo para el cero se denominó "sunya" (vacío) y se encuentra con forma de punto en la aritmética Bakhshālī, cuya fecha real es desconocida. La primera aparición del cero cuya fecha es segura se da en el año 876 d.C. La primera mención de los numerales hindúes fuera de la India fue hecha el 662 d.C. por el obispo sirio Severo Sebokht, que escribió a propósito del sistema de numeración hindú: "supera a la palabra hablada ... y está hecho con nueve símbolos". La forma de los numerales ha cambiado mucho desde sus formas originales. A continuación tenemos algunos caracteres primitivos hindúes que datan del siglo II ó III d.C.



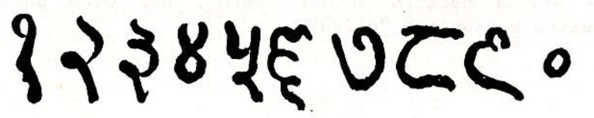
Las distintas notaciones en uso dentro de la India se diferencian más por los signos que por los principios utilizados. Es interesante saber que se empleó un sistema posicional "simbólico" en donde los signos no eran indicados con numerales sino con objetos o nombres que sugerían cada uno un número en particular. Así para 1 se empleaban las palabras: luna, Brahma, Creador, etc.; para 4 la palabra Veda (porque se dividía en cuatro partes), u océano, etc. El número 1.577.917.828 se expresa en Sūrya Siddhānta (tratado anónimo de Astronomía del siglo V) del siguiente modo, de izquierda a derecha:

Varu (clase de ocho dioses) + dos + ocho + montañas (las 7 cadenas montañosas) + luna + dígitos (los 9 dígitos) + siete + montañas + días lunares (la mitad de ellos son 15).

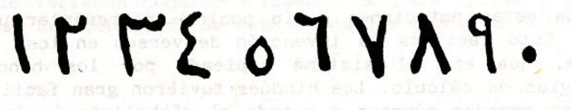
El empleo de estas notaciones hacía posible representar un número mediante formas diferentes. Esto facilita la invención de versos en los que se incluían reglas aritméticas, que era el sistema empleado por los hindúes para retener mentalmente las reglas de cálculo. Los hindúes tuvieron gran facilidad para realizar cálculos incluso con grandes números y cuando el símbolismo numérico se perfeccionó el cálculo se hizo mucho más fácil. Muchos de los hábitos hindúes de operar difieren de los nuestros (10). Generalmente operaban de izquierda a derecha, como en la escritura, y hacían las correcciones necesarias conforme avanzaban. Esto que a nosotros puede parecernos con nuestro papel y lápiz un desperdicio, era obliga para los hindúes que escribían con una pluma de caña encima de una pequeña pizarra empleando una tinta blanca muy fina, cuyas señales podían borrarse con facilidad, o bien encima de una tabla blanca, menor que medio metro cuadrado, cubierta con harina roja en la cual escribían las cifras con un pequeño palo, de modo que los números aparecían en blanco sobre fondo rojo. Como los dígitos debían de ser grandes para leerse con claridad y puesto que el espacio era reducido, un método como el descrito en donde las cifras podían borrarse fácilmente y reemplazarse por otras, resultaba cómodo y claro. Así en la suma 255 + 667 hacía: 2+6 = 8; 5+6 = 11; borraban el 8 anterior y escribían 9, y a continuación 5+7 = 12, borraban el 1 de las decenas y escribían 2; el resultado es 992. Igualmente hacían con las restantes operaciones.

Otro de los enigmas sin descifrar respecto del sistema numérico es cómo llegó a transmitirse realmente a Europa. No cabe duda que se hizo a través de los árabes, pero llama la atención el comprobar que los signos empleados no coinciden con los numerales hindúes, pero si son muy similares con los empleados en Europa a mediados del siglo V.

La contribución árabe comienza cuando en el año 722 d.C. llegó a la corte del Califa Almansur, en Bagdag, un astrónomo hindú con tablas astronómicas que se tradujeron al árabe. Estas tablas estaban en la obra de Brahmagupta probablemente, y llegaron a alcanzar gran importancia; en ellas aparecía la importante tabla hindú de senos. Fue en esta época, y mediante las tablas astronómicas, como se introdujeron los numerales hindúes con el cero y el principio de posición entre los árabes. Los numerales llevados a Bagdag en esta época fueron:



Antes de Mahoma los árabes no conocían los numerales; los números se expresaban mediante palabras. Más adelante las necesidades administrativas y financieras de la conquista obligaron al simbolismo indispensable. Algunos de los paises conquistados tenían sistemas de numeración más avanzados, y en algunos casos se mantuvo dicha notación, cosa que ocurrió en Siria con la notación griega, o en Egipto con la copta. De este modo se fue imponiendo el uso de emplear las 28 letras del alfabeto árabe como numerales en analogía con el sistema griego. Pero esta notación fue abandonada por el sistema hindú, cuya superioridad se impuso desde el momento en que fue conocido al entrar en contacto ambas culturas. El escritor árabe Al-Biruni (+ 1039) que vivió muchos años en la India nos dice que la forma de los numerales, al igual que con las letras, era distinta según las localidades, y que los árabes seleccionaron de entre varias formas la más provechosa. Los símbolos utilizados por los árabes se iniciaron ya en la décima centuria, pero se pueden encontrar grandes diferencias entre los signos empleados en el Califato de Córdoba y los empleados en el de Bagdag. Lo más sorprendente sin embargo es lo distintos que resultan ambos sistemas de los numerales hindúes, y por el contrario su semejanza con los signos utilizados por Boecio para trabajar con el ábaco (+ 524). Los numerales árabes utilizados en aquella época y también actualmente son los siguientes:



Observarán que el cero es simplemente un punto, y que el cinco es exactamente igual a nuestro cero. Los numerales iranís (persas) son sustancialmente los mismos excepto el cuatro y el cinco.

Hay varias teorías para justificar estas diferencias y semejanzas. Una de las más verosímiles dice que los numerales fueron conocidos en Alejandría alrededor del 200 a.C., antes de la invención del cero, y que de ahí se extendieron a Roma y al Mediterráneo Occidental; por ello cuando en el siglo VIII los árabes extendieron el nuevo descubrimiento que habían tomado de los hindúes, con inclusión del cero, mantuvieron los signos iniciales que ya habían adquirido vigencia. De este modo el nuevo sistema incorporó las mejoras técnicas del cero y el valor posicional sin modificar esencialmente los símbolos.

Mohammed Ibn Musa Al-Khuwarizmi, que vivió durante el reinado del Califa Al-Mamun (813-833) fue encargado por el Califa de hacer extractos de obras astronómicas hindúes, revisar las tablas de Ptolomeo, realizar observaciones e incluso medir un grado de meridiano. Sus trabajos de aritmética y álgebra son muy importantes y contribuyeron a mejorar la información recibida y fomentar los trabajos de matemáticas entre los mahometanos. La aritmética de Al-Khuwarizmi basada en el principio posicional y los métodos hidúes de cálculo superaba a las restantes por su brevedad, sencillez y capacidad de invención, y al crear escuela contribuyó poderosamente a difundir los numerales hindúes. Este libro fue seguido de una gran cantidad de aritméticas que añadieron nuevos métodos logrando una mayor perfección de los mismos.

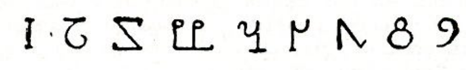
Los árabes realizaron la traducción de todas las obras científicas de los griegos, cuya notación actualizaron y que a su vez transmitieron a la Europa Medieval. La palabra árabe "sifr" (sifr = vacío) dió origen en latín al término "zephirum", y de ahí a nuestro actual "cero"; por otra parte, es también la procedencia de nuestro sustantivo "cifra".

La tradición europea

La cultura europea durante toda la Edad Media es de fundamento latino, y esto es cierto también en la simbolización y uso de los números.

Entre los autores que trabajaron en Aritmética nos interesa destacar a Boecio (+ 524) que vivió en la corte del rey Teodorico. Una de las contribuciones de este autor en el cálculo fue la relativa al ábaco, que él atribuía a los pitagóricos. Reemplazó los antiguos guijarros del ábaco por pequeños conos, a los que llamó

"ápices". Encima de cada uno de los ápices dibujó un numeral de valor inferior a 10; estos numerales son los que aparecen posteriormente como muy similares a los arábigos. No hay ninguna referencia al cero. No cabe duda que entre los precedentes europeos de los números están los ápices de Boecio que exponemos a continuación



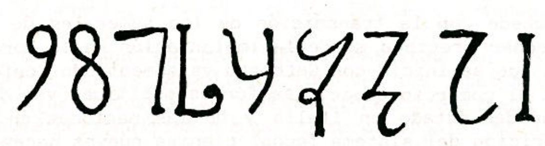
pero estos no impidieron que toda la numeración en este largo periodo que finaliza en el siglo XII se haga en números romanos. Así S. Isidoro de Sevilla (+ 633) en sus Etimologías dedica un capítulo a la Aritmética en la que emplea los numerales romanos; no da métodos de cálculo.

Beda el Venerable (672-735) en su Computus estudia el cálculo de la fecha de Pascua de Resurrección, que fue un problema importante para la Iglesia en aquella época y que requería ciertos conocimientos de Aritmética, es por ello que el arte de calcular siempre formó parte del curriculum de los monjes.

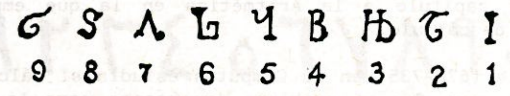
Alcuino (735-804) fundó escuelas en los monasterios en las cuales se enseñaba entre otras artes liberales, el cálculo. Por cálculo se entiende no sólamente la determinación de la fecha de la Pascua, sino también el cálculo con numerales romanos. No conocemos qué reglas de cálculo empleó, pero parece poco probable que conociese incluso el manejo del ábaco romano. Toda la contribución del renacimiento carolingio al arte de la Aritmética parece ser que consistió en el entusiasmo del rey, algunas buenas intenciones legislativas y un experto extranjero, Alcuino, que destacó especialmente por su incorporación de la teoría de números a la teología. Así 6 es el número de los seres creados por Dios, que creo todas las cosas bien, por ello 6 es un número perfecto; por otra parte 8 es un número imperfecto, de ahí que el segundo origen de la humanidad fuese imperfecto y surgiese del número 8, las personas que entraron en el Arca de Noé.

El enciclopedista Rabanus Maurus fue el único erudito del periodo carolingio del que se conserva un tratado de contenido aritmético: "De computo", y se trata simplemente de un nuevo cálculo del calendario. La aritmética no parece haber constituido una materia para los estudiantes, sólo un grupo de estudiosos maduros se preocupó del asunto; aunque los programas de enseñanza incluyen a veces cómputos, en realidad las prescripciones para el examen de los ordenados lo omiten claramente, como si fuera preguntar demasiado.

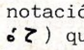
Un pequeño tratado del siglo IX "Proposiciones para hacer más inteligentes a los jóvenes" incluye una colección de problemas aritméticos, que muestran una colección de técnicas básicas empleadas en agrimensura o en problemas que aplican técnicas lineales y que como máximo, emplean las cuatro reglas. Conviene destacar que las "Proposiciones", al igual que autores anteriores aconsejan no trabajar con números mayores de 9.000, entre otras cosas por las dificultades en la representación y el cálculo con los mismos. De esta época proceden los primeros numerales localizados en un manuscrito europeo, los del Codex Vigilanus, escrito en un monasterio castellano en el año 976; en ellos no aparece el cero y están escritos de derecha a izquierda:



La recuperación de las matemáticas alrededor del año 970 se asocia con el nombre de Gerberto de Aurillac, Silvestre II (+1003), cuyos conocimientos fueron considerados excepcionales por sus contemporáneos. Se sabe que estuvo seis años en Vich (17) durante los cuales estudió matemáticas con Josephus Hispanus, del cual tomó quizás el sistema de numeración que empleó posteriormente. Gerberto cita la Artimética de José el Español en dos cartas distintas y reconoce su estima por los conocimientos adquiridos. Gerberto publicó un tratado sobre la división de los números, cuyo algoritmo se conoce (10), empleó el ábaco con unos numerales específicos que coinciden casi con los ápices de Boecio:



pero sobre todo fue un gran impulsor de la recuperación de los conocimientos científicos de la antigüedad, los matemáticos entre ellos. Durante el siglo XI se recuperaron muchos manuscritos y fueron estudiados asiduamente. El empleo sistemático del ábaco amplió el horizonte del uso de los números y favoreció la comprensión del principio posicional del lugar-valor. Puesto que este principio se incorporaba en esta época a la cultura europea que comenzaba, constituyó una innovación importante en la representación del número. De golpe se superaron las barreras anteriores y con las reglas del producto y división dadas por Gerberto se alcanzaron resultados de hasta 10^6. La extensión del nuevo invento facilitó la extensión de los conocimientos del cálculo en capas amplias, y, al ser manejado preparó las mentes de los operadores. Leonardo de Pisa nos dice que "una vez que a través de la práctica, la ciencia se convirtió en hábito, la memoria y el entendimiento llegaron a acomodarse con las manos y las cifras hasta tal grado que todo actuaba en armonía, como por un impulso y un cerebro" (18). El ábaco sin embargo condujo a su propia superación debido a sus dos limitaciones fundamentales: la dificultad para localizar los errores cometidos, ya que no se registraban las fases intermedias del cálculo, y la lentitud del procedimiento. El instrumento ayudaba a la aritmética, pero al mismo tiempo le ponía límites. Si el ábaco había ayudado a superar las limitaciones de la escritura numérica romana, fue sin embargo superado por las nuevas necesidades. Los calculadores necesitaban en la nueva escritura símbolos que incluyeran los méritos singulares del ábaco: la versión espacial de las potencias de 10 de las columnas del ábaco y su virtud de ser desocupadas.

A mediados del siglo XII un matemático llamado Ocreatus, ideó una notación basada en los numerales romanos, con empleo del lugar valor, y un signo () que significaba nada. El número 1.089 se expresaba como I.O.VIII.IX. Esta técnica no se mantuvo por su elementalidad pero es que, además alrededor del 1130 Europa era lo suficientemente rica en dinero e inteligencia como para poder importar sistemas extranjeros. Uno de estos, el hindoarábigo, resolvía los problemas detectados y fué el que se adoptó; su ventaja consistía en ser un sistema ya utilizado y mejorado por otros (19).

__La implantación en Europa del sistema decimal de numeración__

Al igual que sucede con la transmisión de los numerales de los hindúes a los árabes tampoco hay fechas precisas sobre la implantación en la Europa del siglo XII. El despertar cultural que se inicia con Gerberto va aumentando conforme transcurre el tiempo, pero a la vez el comercio crece, las formas políticas van definiéndose con la aparición de las ciudades-estado en Italia y de las naciones en España, Francia e Inglaterra. La desaparición del sistema feudal plantea nuevas necesidades administra-

tivas que echan en falta un sistema de numeración más útil y eficaz. Los abacistas de los siglos X y XI son reemplazados a mediados del siglo XII por los algoritmistas, que comienzan siendo los traductores y teóricos de la nueva aritmética. Gerardo de Cremona, Platón de Tívoli, Roberto de Chester son algunos de estos nombres, entre los que destaca Athelardo de Bath que se supone tradujo la Aritmética de Al-Kuwarizmi al latín alrededor de 1125.

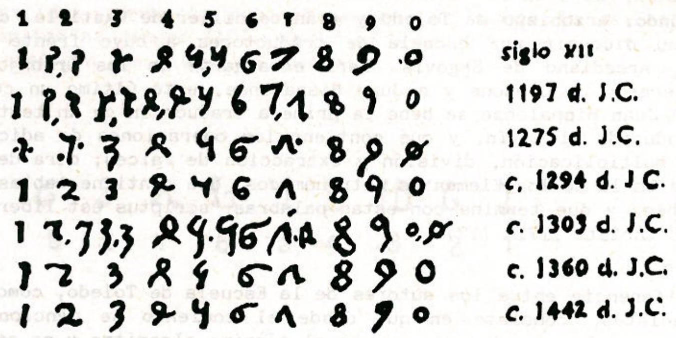
Raimundo, arzobispo de Toledo y gran canciller de Castilla, desde 1130 a 1150, fundó en su diócesis una escuela de traductores a cuyo frente figuraba Domingo Gundisalvo, arcediano de Segovia. Para encargarse de los trabajos Matemáticos se acudió a Gerardo de Cremona y a Juan Hispalense, este último un converso de origen musulmán. A Juan Hispalense se debe la primera traducción de un texto de Aritmética y Algebra traducido al latín, y que contiene las operaciones de adición, sustracción, mediación, multiplicación, división y extracción de raices; otra de las traducciones más famosas es la de los Elementos Astronómicos, que contiene tablas astronómicas con cifras árabes, y que termina con estas palabras "scriptus est liber iste anno domino nostro Jesu Christi 1171" (17).

La diferencia entre los autores de la Escuela de Toledo, como Juan de Sevilla, y los abacistas, consiste en que desde el comienzo se mencionan los numerales hindúes, se calcula con el cero, se usa el término algoritmo y no se emplea el ábaco. Podemos dar casi por seguro que fue en la Península Ibérica, y más concretamente en Toledo, donde se realizó la primera introducción sistemática de los nuevos números. Más de 70 trabajos árabes, muchos de ellos de Matemáticas, se supone fueron traducidos por Gerardo de Cremona. Con posterioridad el emperador Federico II y el rey Alfonso X el Sabio, de Castilla, crearon y mantuvieron escuelas de traductores que tradujeron multitud de obras científicas, entre ellas las tablas alfonsíes, cuyo empleo se mantuvo hasta el siglo XVI.

Al finalizar el siglo XII los métodos hindúes de cálculo comenzaron a reemplazar a los complicados métodos latinos.

Leonardo de Pisa, Fibonacci, es el iniciador del renacimiento matemático en la cristiandad. En 1202 publicó su Liber Abaci, que no sólo incluye los conocimientos aritméticos y algebraicos de la época sino que trata los temas de modo original y con aportaciones propias. Leonardo fue el primer gran matemático que argumentó y defendió la adopción de la notación arábiga. El cálculo con el cero fue uno de los primeros aspectos asimilados; explicó la forma algoritmica de efectuar los cálculos con las cifras arábigas y no al modo romano; comparó mediante una tabla la ventaja de escribir los números con los nuevos signos sobre el sistema romano; enseñó reglas de cálculo digital y presentó tablas de sumar y multiplicar. No se limitó solo a los algoritmos sino que enunció las reglas de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y por tanteos para 7, 11 y 13. Como vemos presentó los nuevos números y profundizó con ellos en el estudio de la Aritmética. Aún así Fibonacci tuvo poca influencia en su época, y la tarea de divulgación fue realizada por otros autores, Sacrobosco entre ellos, que carecían de su talento. Como ha ocurrido en otras ocasiones, la difusión tuvo que llevarse a cabo por medio de los millares de calculadores prácticos, lectores de manuales de vulgarización y no de las obras especializadas. La nueva notación fue aceptada mucho más fácilmente por el pueblo llano y rechazada por los círculos eclesiásticos, más cultos; los mercaderes italianos la emplearon en el siglo XIII, mientras que los monjes en los monasterios conservaron la notación romana. Los toscanos en general y los Florentinos en particular, fueron famosos por sus conocimientos de aritmética y comercio, a ellos les debemos la introducción en los libros de Aritmética del estudio formal de la regla de tres simple y compuesta, la ganancia y pérdida, el cambio, interés simple y compuesto, descuento, reparto, etc.

Los avances más significativos en matemáticas en los siglos XIV y XV consistieron en parte en la simplificación de las operaciones numéricas y la creciente aplicación de todas ellas a situaciones prácticas, sólo hacia 1400 fue cuando los nuevos números adquirieron peso cultural propio. No siempre los números se escribían con los símbolos actuales. El erudito G.F. Hill del British Museum, hizo en 1914 una colección de doscientas series de números arábigos procedentes de fuentes medievales, registrando todos los tipos que pudo encontrar y de hecho logró localizar variantes diferentes algunas de las cuales aparecen en la ilustración, con indicación de la fecha de su empleo (16).



Aproximadamente localizó:

- 6 tipos distintos en la segunda mitad del siglo XII.
- 30 tipos distintos en el siglo XIII.
- 43 tipos distintos en el siglo XIV.
- 96 tipos distintos en el siglo XV.

Cuando comenzaron a aparecer en los libros se produjeron pocos cambios importantes, siendo los principales los de los números 4 y 5. No puede decirse que la conquista de la numeración árabe fuese instantánea, e incluso dentro del Renacimiento aparecen híbridos como "1000.300.80.2" para 1.382. Durante bastante tiempo se consideró como una curiosidad entre otras, incluso entre personas cultas.

Los numerales arábigos llegaron a estar prohibidos, y esta es una de las primeras pruebas que tenemos de la extensión de su uso. Así en los estatutos del gremio de banqueros florentinos de 1299 aparece "Que ningún miembro de este gremio se atreva a escribir, o permita que sea escrito, en su libro mayor de asientos o libro de cuentas (...) ninguna partida en lo que es conocido como estilo o escritura arábiga; por el contrario escribirá abiertamente y por extenso, utilizando letras"; la prohibición tuvo que ser repetida varias veces, señal de su incumplimiento, pero cuando la Banca Médicis se salvó de la quiebra en el siglo XV gracias a la modernización de sus libros de contabilidad con el uso de los numerales nuevos, la suerte ya estaba echada. El primer manuscrito que se conoce impreso es una Aritmética, llamada de Treviso, que se imprimió en esta ciudad en 1478. Es una obrita de 62 páginas de índole práctica que trata de las cuatro operaciones y de la determinación de la fecha de Pascua. La Aritmética de Bamberg aparece en 1483 y está dedicada a cálculos comerciales (20). El libro "De Aritméthica opusculum", Florencia 1491, es el primer tratado que contiene la palabra "cero". La Summa, de Pacioli, se compone de cinco partes que se ocupan de la aritmética, del álgebra, de aplicaciones al comercio y una última dedicada a geometría. Este autor emplea abreviaturas para las operaciones: p por piu (más), m por meno (menos), co por cosa (incógnita).

Las necesidades sociales crecientes consolidaron la nueva adquisición conceptual: el comercio, los préstamos, la administración del estado, la guerra, la arquitectura, las necesidades demográficas y contables en general, encontraron en los nuevos números el instrumento adecuado para su expresión y para la obtención de resultados fiables a partir de los nuevos algoritmos establecidos.

A partir del siglo XVI la utilización de los numerales romanos es cada vez más residual. En el archivo de la Curia de Granada se conservan los libros de cuentas de las Parroquias de la Archidiócesis, y en los libros de la Parroquia de S. Andrés en 1580 las cantidades aparecen expresadas en numerales romanos, pero cuando hay que realizar una multiplicación se expresan los datos en cifras arábigas, y se opera con mayor facilidad.

Cuando en 1585, en su obra "La Disme", Stevin extiende el sistema decimal de numeración a las fracciones y realiza la primera escritura de números decimales es cuando los numerales arábigos y el sistema que les acompaña quedan totalmente consolidados, desde entonces se convierten en la herramienta clave para expresar medidas y datos científicos. La posibilidad del estudio de los valores aproximados y la teoría de errores queda establecida.

Los numerales romanos permanecen hoy día como reliquia para indicar ordinales dinásticos o para adornar algunas inscripciones, o las esferas de los relojes.

Los sistemas de numeración

A lo largo de este trabajo hemos visto que una constante cultural, no sólo de las grandes civilizaciones sino de casi todos los pueblos conocidos ha sido, y es, expresar los datos relativos a cantidades mediante un sistema de signos y reglas, que en sus estadios más evolucionados da lugar a la aparición del concepto de número, convirtiendo el conjunto de signos en un sistema de numeración.

En nuestra tradición cultural los números ocupan un lugar destacado y, junto con las palabras, constituyen uno de los canales o vias privilegiados mediante los que el hombre se expresa razonadamente. El carácter de nuestro conocimiento descansa fundamentalmente en estos dos medios.

Este hecho ha sido reconocido y destacado por todos los estudiosos de la cultura, y la lista de citas y reflexiones que podíamos incluir aquí desbordaría las posibilidades de este trabajo. A título de ejemplo elegimos las tres siguientes, que expresan algunas ideas básicas importantes de esta realidad.

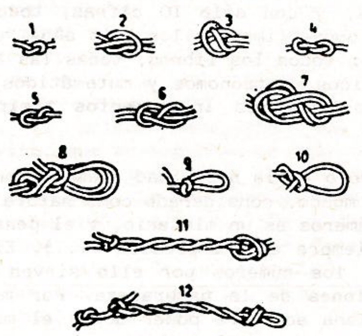
"Desde muy pequeños aprendemos a leer las palabras y los números; hasta tal punto esto se convierte en un hábito, que no nos damos cuenta de la extraordinaria genialidad del hombre, que ha conseguido con sólo 28 letras escribir todas las posibles infinitas palabras, y con sólo 10 cifras, todos los posibles, infinitos números. Con 38 signos nos convertimos, a los seis años, en dueños de las llaves que abren los tesoros del mundo: todos los libros, todas las tablas y todos los cálculos que poetas, escritores, físicos, astrónomos y matemáticos han podido legarnos desde que el hombre ha inventado esos dos instrumentos admirables: la escritura y la numeración posicional" (21).

"El número es el símbolo de la necesidad causal. Contiene, como el concepto de Dios, el último sentido del mundo, considerado como naturaleza. Por eso puede decirse que la existencia de los números es un misterio, y el pensamiento religioso de todas las culturas ha afirmado siempre esta impresión (...). El origen de los números se parece al origen del mito, los números por ello sirven para circunscribir, y por tanto, conjurar las impresiones de la naturaleza. Por medio de los nombres y los números la inteligencia humana adquiere poder sobre el mundo. Por eso en todos los actos de la intelección humana que están relacionados con el número matemático, como medir, contar, dibujar, pesar, ordenar, dividir, existe la tendencia a limitar la extensión, tendencia que igualmente se manifiesta en sentido verbal por las formas de la demostración, la conclusión, la proposición, el sistema. Actos de esta índole, de los que apenas nos damos cuenta, son los que hacen que para la conciencia humana vigilante haya objetos determinados por números de orden, propiedades, relaciones, lo singular, unidad y pluralidad, una estructura en suma, del universo, que el hombre siente como necesaria e invariable, que llama "naturaleza" y que "conoce" como tal. La naturaleza es lo numerable. (...). En el número, como signo de la total limitación extensiva, reside la esencia de todo lo real, esto es, de lo producido, de lo conocido, y al mismo tiempo, limitado" (22).

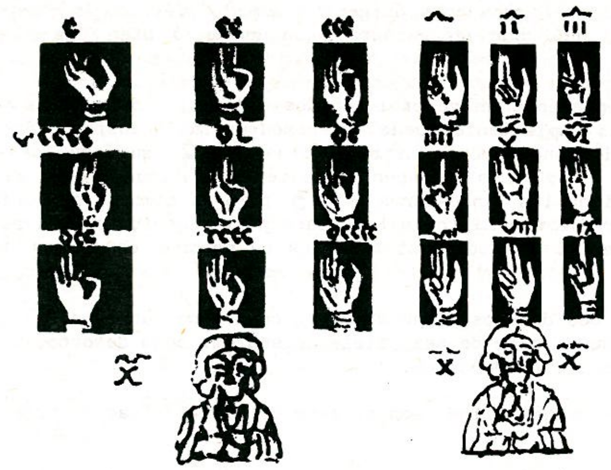
"La matemática, o al menos la aritmética, nació incluso antes que la escritura. La manipulación de los signos para objetos, como simples símbolos, significó que era posible por primera vez realizar las operaciones elementales de adición y sustración sin tener necesidad de ver directamente los objetos; para ello fué necesario realizar una correlación entre dos conjuntos de entidades. (...). La capacidad de contar y calcular, derivada de las necesidades prácticas de la administración de los templos, fue de aplicación inmediata en la actividad de hacer calendarios; desde los sumerios la tarea de reconciliar los calendarios lunar y solar contribuyó al desarrollo de la astronomía y a la necesidad de los sistemas de numeración (23).

Y así podríamos continuar referenciando las consideraciones que, pensadores de muy diferentes escuelas, han realizado al reflexionar sobre la noción de número.

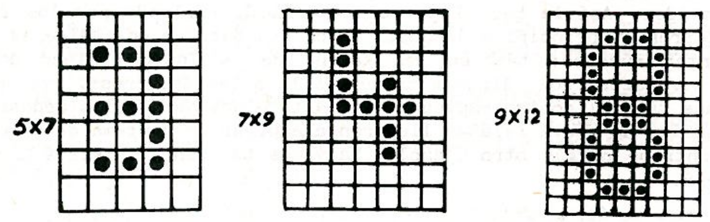
Conocemos los números a través de un sistema. La finalidad inicial de un sistema de numeración es asignar a cada número natural individual (con un límite que depende de las necesidades prácticas) un nombre y una representación escrita, formados por combinaciones de un reducido número de signos, efectuadas siguiendo leyes más o menos regulares (24). Así pués un sistema de numeración es un modo de representar o expresar números, e implica dos cosas: un conjunto de símbolos y algunas reglas para combinar los símbolos a fin de expresar los números. Los primeros sistemas de numeración probablemente emplearon un sólo símbolo: una marca en alguna superficie, una muesca en un palo o algo semejante; cada marca o muesca significa el número uno, y sirvieron simplemente para llevar la cuenta de cuantos objetos se habían computado (25). Los símbolos empleados para representar números han sido muy variados; signos gráficos se han utilizado de tipo jeroglífico, signos especiales, letras del alfabeto, agrupaciones de puntos, rayas o palitos, etc. No siempre se han empleado signos gráficos; además de las muescas y tarjas, se han utilizado piedrecitas (cálculi) e incluso nudos en cuerdas como en los quipos peruanos realizados por los incas, de los cuales presentamos una muestra de los doce primeros números:



Finalmente recordemos que también se han simbolizado los números con expresiones digitales, de los cuales se han conocido históricamente varios modelos (16):



Aunque en la actualidad los signos numéricos nos parezcan estabilizados no por ello dejan de surgir nuevas variantes que, en cierto modo, suponen una modificación de las expresiones usuales. Un caso lo presentan los distintos modelos tipográficos de las máquinas de escribir, o en general de los aparatos de impresión. Conviene destacar los que aparecen en las impresoras matriciales o los sistemas que utilizan los ordenadores para representar en pantalla los números. Utilizan una matriz de puntos, variable según el modelo de impresora u ordenador, de 5 x 7, 7 x 9, 9 x 12, etc.:



Sobre estas matrices se hacen visibles una serie de puntos que conforman el carácter correspondiente. También son hoy día muy conocidos los que aparecen en las pantallas de los aparatos electrónicos, tales como relojes, balanzas, calculadoras, etc.:

0123456789

La forma actual de los signos no ha sido permanente, ha variado bastante a lo largo del tiempo, si bien en algunos casos la arqueología, la numismática y la historia nos permiten encontrar antecedentes muy remotos de los símbolos actuales.

Todos los pueblos primitivos emplearon un numeral parecido a nuestro 1 para simbolizar el número "uno"; parece probable que proceda de un dedo extendido, aunque hay autores que le atribuyen como origen un símbolo fálico. Hay otras culturas que han simbolizado el uno por un guijarro, un grano ó bien una línea en posición horizontal — .

El dos se representa en general por dos dedos || ó dos líneas =, es decir por dos trazos. Escrito rapidamente puede experimentar las transformaciones: de || a N ó bién de = a Z de donde provienen las cifras ٢ y 2 que son los signos árabes y arábico-occidental para "dos" respectivamente; un razonamiento similar con tres trazos nos proporciona las expresiones ٣ y 3 para el símbolo de "tres". El resto de los numerales no tiene una historia tan clara y han sufrido excesivas modificaciones a lo largo del tiempo. Los términos actuales se nombran con voces que proceden del latín:

uno de unus, dos de duos, tres de tres, cuatro de quattūor,
cinco de quinque, seis de sex, siete de septem, ocho de octo,
nueve de novem, diez de decem,

excepto "cero" que ya hemos indicado procede de la latinización "zephirum" del árabe "sifr" (= vacio).

El principio básico en el que se fundamenta la elección de un número limitado de signos es un principio de agrupación que consiste en descomponer los enteros en sumas de cantidades sucesivas, cada una de las cuales es un múltiplo entero de la anterior; en general este múltiplo se toma como valor fijo y se llama "base del sistema". La base más extendida es la base 10, que nosotros utilizamos, y que consiste en que cada 10 unidades constituyen otra de orden inmediato superior; esto permite emplear un número limitado de signos ya que podemos representar un número cuando indicamos cuántas unidades de los distintos órdenes lo forman. Una observación empírica inmediata es que la mayor parte de los sistemas de numeración conocidos emplean la base 10, o bien números relacionados con 10, principalmente 5, 20 ó 60, como en los sistemas romano, maya y babilónico, por citar los más conocidos. Pero no siempre ha sido así, hoy día la antropología nos informa de otras bases utilizadas en sistemas conocidos. Así la base 2 parece haber sido empleada por los indígenas del estrecho de Torres, y principios de duplicación se observan en indígenas australianos para representar números; también los karens de la India emplean un sistema de agrupamiento por pares (26). Algunas tribus de la selva del Brasil emplean un curioso sistema de base tres al contar empleando las articulaciones de los dedos. Se sabe que las tribus maories de Nueva Zelanda llegaron a emplear un sistema de base 11 del cual no se ha encontrado ningún otro ejemplo. Ya vimos también el sistema harappeo con un valor de base 8.

Intentos de emplear otras bases se han dado, al menos a nivel teórico. Aristóteles observó que la base 4 tenía ciertas ventajas, y en 1687 Weigel publicó una "aritmética tetráctica". En su Historia de Carlos X, Voltaire nos informa que este monarca quiso introducir en Suecia un sistema de base 8 ó 64 (11). El empleo de la base 12 tuvo mucha importancia en los pesos y medidas, por su riqueza de divisores, tanto que sólo hasta fechas muy recientes ha venido siendo empleado por paises científicamente muy adelantados (28).

Pese a todos estos antecedentes y variantes, es un hecho real que la base 10 tuvo un gran predominio histórico y esta importancia se atribuye universalmente al origen digital de las operaciones de recuento y cálculo.

Con sólo los símbolos y el principio de agrupamiento llamado elección de base caben muchas posibilidades de escritura de números. Un segundo principio que informa los sistemas es el del valor posicional. Como al escribir un número debemos indicar cuántas unidades de cada orden lo constituyen, hay sistemas en los que los símbolos a emplear dependen a la vez del orden y del número de unidades, así sucede en los sistemas egipcio, griego y romano. Un progreso importante se da cuando se emplean los mismos signos para indicar un número determinado de unidades sea cual sea su orden.

Aquí aparece el principio de numeración de posición: un mismo signo indica unidades de diferentes órdenes según la posición que ocupe. Este principio se da en el sistema chino, si bien hay signos auxiliares para los distintos órdenes; con mayor claridad aparece en los sistemas babilónico y maya. Ahora bien cuando no hay valor en un orden determinado debe haber un signo especial que lo indique: uso del cero. Sin este cuarto factor el sistema posicional es deficiente y equívoco. De hecho sólo el sistema maya y el hindo-arábigo han empleado este dato final, que ha dotado a nuestro sistema actual de su perfección técnica.

El sentido de lectura de los números es una consecuencia de la mayor o menor importancia del valor de posición, y de hecho ha variado según los distintos sistemas, habiéndose empleado todas las posibilidades. Destacamos las más conocidas:

jeroglífico egipcio	← →	maya, chino antiguo	↓
hierático egipcio, sumerio, hebreo, árabe literal	←	chino erudito, chino moderno	↓ →
todos los demás sistemas	→		

En resumen, nuestro sistema decimal de numeración consta de:

- diez símbolos básicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, el primero de ellos para simbolizar la ausencia de cantidad, y los otros nueve a los nueve primeros números.

- un principio de agrupamiento que denominamos "base 10", y que indica que cada diez unidades de un orden constituyen una unidad de orden inmediato superior.

- un principio posicional de escritura de los distintos órdenes de cifras que componen un número, con el convenio de que los órdenes se consideran en sentido creciente y consecutivo, desde derecha a izquierda, sin posibilidad de dejar ningún orden vacante -valor 0-.

- un principio multiplicativo que nos dice que cada orden se considera repetido tantas veces como nos indica la cifra que ocupa el lugar correspondiente a dicho orden, pudiendo variar desde 0 a 9.

- Un segundo principio de agrupamiento que nos dice que el número total es el resultado de "agrupar", sumar, las unidades de los distintos órdenes que lo componen: el número es su totalidad.

Establecidos estos principios pueden generalizarse y dar lugar al concepto de sistema de numeración, en donde podemos variar la base -considerar que el agrupamiento se hace cada n unidades- y emplear por tanto n símbolos: desde 0 a n-1. Así puede haber sistemas de base 2, 3, 4, etc.

Los ordenadores utilizan el sistema binario de numeración, que ya se conocía en China hacia el siglo XII, indicando el 1 un paso de corriente y el 0 un corte. Escribir un número en binario supone una expresión larga si se compara con otros sistemas de base mayor, como el decimal. Para simplificar la escritura los programadores, algunas veces, utilizan el sistema hexadecimal, base 16, que permite expresar más brevemente los números grandes y por tanto es más cómodo para el hombre, aunque la máquina siga trabajando en binario. Este sistema, ó cualquier otro que tenga como base una potencia de 2, tienen una ventaja frente al decimal: que es muy fácil realizar conversiones desde o al sistema binario. Así, sabiendo que en el sistema hexadecimal los símbolos básicos son:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (=10), B (=11), C (=12), D (=13), E (=14) y F (=15)

y anotando en una tabla su equivalencia binaria, se puede pasar un número del sistema binario al hexadecimal agrupando las cifras en bloques de cuatro empezando por la derecha y sustituyendo por el valor equivalente en hexadecimal. Ejemplo: 1110 1001 en binario, equivale a E9 en hexadecimal (29 y 30).

En nuestro sistema usual los distintos órdenes coinciden con las sucesivas potencias de 10: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3,..., y reciben nombres especiales: unidad, decena, centena, unidad de millar, decena de millar, etc., que suelen guardar una periodicidad de ciclo 3. Las palabras romanas para cien y mil eran centum y mille (por ello se simbolizaban por C y M), y son el origen de los términos actuales. La palabra millón no fué empleada antes del siglo XIII y significó, en italiano, "un gran mil", esto no quiere decir que no se contasen millones con anterioridad; en castellano el término tradicional para millón era el de "cuento", y así se denominaba este orden hasta el siglo XVI en que se incorporó el italianismo (27). Billón es una palabra relativamente moderna, que también proviene del italiano; el sistema se prolonga con los términos trillón, cuatrillón, etc., hasta el decillón (31), y así sucesivamente.

Conclusion:

Y esta es la historia y el concepto de nuestro actual sistema de numeración. Queda claro que una herramienta de apariencia tan simple y al mismo tiempo tan efectiva no se ha elaborado espontáneamente sino que ha necesitado de un proceso largo y costoso. Su mayor utilidad la ha demostrado en la operatoria: el sistema decimal permite operar con cantidades empleando solamente los símbolos numéricos y unas pocas reglas de fácil justificación y comprensión, llamadas algoritmos, que permiten un cálculo bastante rápido y seguro.

El sistema se ha perfeccionado al extenderse a las fracciones decimales: décima, centésima, milésima, etc., que junto con los símbolos para los enteros, han constituido una técnica adecuada para expresar cualquier número real.

Sólo nos queda destacar que su aprendizaje es hoy día imprescindible ya que este conocimiento es uno de los referentes básicos culturales en nuestra sociedad actual. Si bien puede aprovecharse la evolución psicológica del niño para introducir los conceptos numéricos hemos de recordar que son conceptos culturales y no maduraciones psicológicas espontáneas: el sistema decimal de numeración es un dato importante a transmitir, y su aprendizaje no debe infravalorarse, por mucha que sea la presión cultural y por ello las facilidades que presenta la adquisición de estos conocimientos. Por supuesto toda la información que proporciona la psicología evolutiva es crucial, pero no debemos pensar que la simple madurez del niño le lleva a asimilar y entender los conceptos numéricos. No hay que olvidar que durante épocas históricas muy dilatadas, y no tan remotas en el tiempo, estos conocimientos eran dominio de sólo un pequeño grupo de eruditos. Por todo ello creemos que el Profesor de E.G.B. debe ser consciente de la importancia y validez del patrimonio cultural que está transmitiendo a sus alumnos al enseñarles la numeración, y del gran valor social que tiene el dominio de estas destrezas. Nos sentiriamos satisfechos si hubiésemos contribuido a clarificar y ordenar un poco la inmensa información que sobre este tema existe.

Bibliografía consultada:

(1) FRIBERG, Jöran, "Números y medidas en los primeros documentos escritos", **"Investigación y Ciencia"**, Abril 1983.

(2) KLINE, Morris, **"Mathematical Thougth from Ancient to Modern Times"**, Oxford University Press (1972).

(3) ARISTOTELES, **"Metafísica"** (A-5), Espasa Calpe. Madrid.

(4) GUTHRIE, W.K.C., **"Historia de la Filosofía griega, Tomo I: Los primeros presocráticos y los pitagóricos"**, Gredos, Madrid (1984).

(5) BELL, T.H., **"Historia de las Matemáticas"**, Fondo de Cultura Económica, México (1949).

(6) RICO, L. y CASTRO, E., **"El cero ¿es un número natural?. Análisis de las dificultades de cero"**. I Jornadas Asociación Andaluza Profesores de Matemáticas. Cádiz (1983).

(7) RUSSELL, B., **"Historia de la Filosofía Occidental"**, Aguilar, Madrid (1973).

(8) HULL, L.W.H., **"Historia y filosofía de la Ciencia"**. Ariel, Barcelona (1978).

(9) CORNFORD, F.M., **"De la religión a la filosofía"**. Ariel, Barcelona (1974).

(10) CAJORI, F., **"History of Mathematics"**. Chelsea Publisshing Company, New-York (1980).

(11) ALEM, J.P., **"Juegos de ingenio y entretenimiento matemático"**. Gedisa, Madrid (1984).

(12) WILLERDING **M.F.**, **"Conceptos matemáticos. Un enfoque histórico"**. Cecsa, México (1979).

(13) ALEKSANDROV, KOLMOGOROF y otros, **"La matemática, contenido, métodos y significado"**. Alianza Universidad, Madrid (1976).

(14) FAIRSERVIS Jr., W.A., **"La escritura de la civilización del Valle del Indo". Investigación y Ciencia**, Mayo 1983, nº 80.

(15) KARPINSKI, L., **"History of Arithmetic"**. Rand Mc Nally (1925).

(16) NEWMAN, J., **"Enciclopedia Sigma de la Matemática, Tomo IV"**. Grijalbo, Barcelona (1980)

(17) VERA, F., **"Historia de la Matemática en España"**. Biblioteca Española de divulgación Científica, Madrid (1931).

(18) PISA, Leonardo de (Fibonacci), **"Liber Abaci"**.

(19) MURRAY, F., **"Razón y sociedad en la Edad Media"**. Taurus, Madrid (1984).

(20) REY PASTOR, J., **"Historia de la Matemática"**. Gedisa, Madrid (1984).

(21) LOMBARDO RADICE, L., **"Las Matemáticas de Pitágoras a Newton"**. Laia, Barcelona (1983).

(22) SPENGLER, O., **"La decadencia de Occidente"**. Espasa Calpe, Madrid (1958).

(23) BERNAL, J.D., **"Historia social de la Ciencia, Tomo I"**. Península, Barcelona (1979)

(24) BOURBAKI, **"Elementos de historia de las matemáticas"**. Alianza Universidad, Madrid (1972).

(25) NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, **"Sistemas de numeración para los números enteros"**. Trillas, México (1972).

(26) VERA, F., "Evolución del concepto de número". **Cuadernos de Ciencia y de la Cultura**, Madrid (1929).

(27) SANTA CRUZ, Miguel Gerónimo de, **"Dorado contador. Arithmética especulativa y práctica"**, 1594.

(28) ASIMOV, I., **"De los números y su historia"**. El Ateneo, Buenos Aires (1977).

(29) Enciclopedia **"Mi Computer"**. Tomo I. Editorial Delta (1984).

(30) Enciclopedia **"Basic"**. Tomo I. Ediciones Forum (1984).

(31) BENOT, **"Aritmética General"**. Mariano Nuñez Samper editor. Madrid 1907.

(32) PETERSON, J.A. y HASHISAKI, J., **"Teoría de la Aritmética"**. Limusa-Wiley, México.

CONSTRUCCIÓN DE UN COMPUTADOR ANALÓGICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA CUÁNTICA

MANUEL CAPEL Y TUÑÓN

Profesor de la Escuela Universitaria de Informática de la Universidad de Murcia

Introducción.

En la Física los computadores analógicos se han usado para la simulación de problemas tales como el decaimiento radiactivo, el oscilador armónico simple, el movimiento de un proyectil, etc. Este artículo pretende su utilización en problemas más complicados conceptual y metodológicamente como pueden ser los que plantea el estudio de la Mecánica Cuántica. Desde el punto de vista de esta Ciencia, todo cuanto nos interesa saber sobre un sistema físico se obtiene resolviendo la ecuación diferencial de Schrödinger:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2M}{\hbar^2}(E-V)\,\psi \qquad (1)$$

Ecuación diferencial de segundo orden cuya resolución analítica no es posible en la mayoría de los casos, siendo necesario recurrir a complicados procedimientos de Cálculo Numérico. Mediante el computador analógico que proponemos se puede resolver esta ecuación obteniéndose las funciones de onda y los niveles de energía del átomo de hidrógeno, la molécula HCl, el Deuterón y otros problemas clásicos de la Mecánica Cuántica (ref. 1, 2). El circuito electrónico más general que resuelve la ec.1 para cualquier tipo de potencial puede verse en la figura 3.

I. Resolución de la Ecuación de Schrödinger para un potencial periódico.

La Física del Estado Sólido utiliza el modelo de potencial periódico para estudiar el movimiento electrónico en la red iónica de un sólido, uno de los potenciales más utilizados ha sido el de Krönig-Penney (fig. 1), la resolución de la ec.1 con este potencial nos proporciona una estructura de bandas para la energía de los estados electrónicos (ref. 10). Este potencial describe las fuerzas de tipo electrostático que sufren los electrones al ser atraidos por los núcleos de la red, aunque como se puede observar la "caida" tan brusca de la energía potencial a -Vo en