

**Contribuciones en
Probabilidad y
Estadística Matemática,
Enseñanza de la Matemática
y Análisis**

**Ofrecidas al Prof. Dr.
D. Alfonso Guiraún Martín
en ocasión de su jubileo académico**

Copyright
UNIVERSIDAD DE GRANADA. CONTRI-
BUION.
Editado por el Secretariado de Publicaciones de
la Universidad de Granada para el departamento
de Estadística Matemática. Un. Gr. 41.79.11
Depósito Legal.Gr. 1 - 1979. I.S.B.N. 84.338.0
110.4.
Compuesto, Impreso y encuadernado por
GRINDLEY Ediciones. Acera del Triunfo, 27
Granada. (España) *Printed in Spain.* 500
ejemplares.

PROLOGO

Al plantearnos la organización de un conjunto de actividades académicas en honor al profesor Guiraum con motivo de su jubilación, pensamos en la posibilidad de ofrecerle un homenaje tangible que sirviese de expresión de nuestra gratitud y cariño a un hombre que ha dedicado su vida al estudio y a la enseñanza.

Con este objetivo, creimos que lo más adecuado sería un libro que recogiese trabajos en distintas ramas de la Matemática y, en concreto, de los dos aspectos que han caracterizado la labor docente e investigadora del prof. Guiraúm en sus muchos años de profesor en distintos niveles del sistema educativo: La Estadística Matemática y la Enseñanza de la Matemática.

Como era de esperar, la idea tuvo una excelente acogida que se ha puesto de manifiesto en la respuesta unánime y complacida de todas las personas que han colaborado para que este volumen sea una realidad. A todos ellos vaya nuestro más sincero agradecimiento.

Por último, queremos dejar constancia de nuestra gratitud a la Universidad de Granada en la persona de su Excmo. Rector, profesor Gallego Morell y al Decanato de la Facultad de Ciencias de dicha Universidad, en las personas de los profesores Vera Torres y Rodríguez Gallego, por la acogida entusiasta del proyecto al que han proporcionado en todo momento la ayuda precisa.

Enero de 1979, Granada

M. Delgado Calvo-Flores
R. Gutierrez Jaimez
E. Moreno Bas

DIDACTICA DE LA MATEMATICA EN EL PRIMER NIVEL DE EDUCACION GENERAL BASICA

por Luis Rico Romero

Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. Granada

Dedicado a D. Alfonso
Guiraúm en su LXX
aniversario

En los cursos 76-77 y 77-78, el Equipo GRANADA-MATS, ha realizado el estudio de los contenidos señalados para el Area de Matemáticas en el Primer Nivel de E.G.B. Intentamos aquí hacer un resumen final de cuáles han sido los supuestos y las conclusiones de nuestro trabajo.

Las O.P. señalan para este Nivel los temas siguientes :

- Conjuntos. Idea de subconjunto. Representación de conjuntos. Unión de conjuntos disjuntos.
- Sistemas de Numeración. Numeración Decimal. Aprendizaje de los números hasta la centena.
- Adición de números. Sustracción de números. Problemas y ejercicios simultáneos. Automatización de dichas operaciones con números de una y dos cifras.
- Líneas poligonales abiertas y cerradas. Triangulaciones. Composición y descomposición de polígonos. Borde de un polígono.

La primera advertencia que conviene hacer es que estos cuatro temas, más bien bloques de temas, no tienen todos el mismo peso en cuanto a extensión de contenido, y por tanto cada uno de ellos tiene una configuración muy diferente en número de lecciones y tiempo que debe dedicársele.

El primer tema que hace referencia a las nociones más elementales de la teoría de conjuntos tiene interés, fundamentalmente, en tanto que se utilizan estos conceptos para introducir y expresar gráficamente las nociones aritméticas de igualdad, suma, resta y orden numérico. Sus contenidos más específicos tales como el concepto de pertenencia —no pertenencia— y su representación, o bien la determinación de subconjuntos de acuerdo con una característica, no necesitan más de dos semanas de tiempo para su desarrollo y aprendizaje completos. Vemos pues que este primer bloque necesita de poco tiempo específico, si bien algunos de sus contenidos van a acompañar a los temas aritméticos a lo largo de todo su estudio.

El cuarto tema hace referencia a un aspecto muy concreto de los conceptos elementales de geometría: distinción entre líneas poligonales y no poligonales y dentro de ellos entre líneas abiertas y cerradas. Por el número de lados no se hace referencia expresa más que a los triángulos, y no parece conveniente introducir de forma sistemática toda la nomenclatura de los polígonos. Finalmente se estudia la triangulación y el borde de un polígono. Dándole una extensión bastante amplia a estos contenidos no es posible ocupar un tiempo superior a tres semanas.

Tenemos pues un total de cinco semanas de todo un curso para temas no específicamente aritméticos. Si descontamos también el tiempo relativo a evaluaciones, repases, etc., nos quedan veinticinco semanas del curso para los temas aritméticos.

Este planteamiento lo hemos hecho por exclusión, pero si hubiéramos comenzado asignándole tiempo a cada contenido aritmético, como se verá a continuación, se comprueba que el tiempo asignado a los temas aritméticos no es excesivo y se corresponde con un desarrollo gradual y racional de sus contenidos.

La conclusión fundamental de este primer análisis de los contenidos matemáticos del Primer Nivel de la E.G.B. es la siguiente:

El bloque aritmético es el aspecto fundamental de este curso, sin menospreciar por ello otros aspectos, suponiendo, en cuanto a su extensión, alrededor del 85 por ciento del tiempo asignado para este Área.

De aquí que la Didáctica de la Matemática de este Nivel se pueda denominar perfectamente DIDACTICA DE LA ARITMETICA.

Conviene hacer a continuación una breve exposición de cuál es la situación instructiva, psicológica, etc., que tienen los alumnos de este Nivel.

Según la Ley, el acceso a este Nivel se realiza cuando el niño ha cumplido seis años, o bien le faltan muy pocos meses (tres como máximo) para cumplirlos. Según PIAGET el niño a esta edad se encuentran en el periodo de preparación de las

operaciones concretas, que son aquellas que versan sobre objetos manipulables (por oposición a las que versan sobre hipótesis o enunciados), y en concreto en su tercer estadio. En este tercer estadio se iniciaran ya algunas de las características psicológicas del siguiente período de las operaciones concretas.

Desde nuestro punto de vista nos interesa destacar la iniciación de la función simbólica o capacidad para distinguir entre significante y significado. Este aspecto es fundamental para una comprensión correcta de los números como símbolos de la cantidad. Ahora bien, el aspecto simbólico de los números ha de venir acompañado constantemente de configuraciones de objetos que recuerden su función de símbolos. Sólo progresivamente se puede reemplazar el significante número—por el significado—conjunto de objetos.

Otro desarrollo que se produce a esta edad y que permite la iniciación al estudio de los primeros números es el de la percepción de la constancia de la cantidades, independientemente de la posición que guarden entre sí las unidades que las forman.

En esta edad el niño ya entiende que el número de bolas de una serie es el mismo cuando la distancia entre ellas se modifica.

Un último aspecto que nos interesa destacar de esta edad es el de iniciación a los procesos de reversibilidad. En estrecha relación con la capacidad de abstraer que supone la constancia, está la de operar lógicamente en qué consiste la reversibilidad. Se trata de un proceso según el cual un número al que se le ha quitado o añadido algo, vuelve a ser el mismo número por la operación inversa.

Hasta los siete años no se produce un dominio total, con pequeñas cantidades, de este proceso: Por esto veremos que aquellos aspectos del cálculo cuyo fundamento es un proceso de reversibilidad, son los de más difícil adquisición en este nivel.

Hemos hecho una somera descripción de los factores psicológicos que deben tenerse en cuenta para el estudio y programación de cualquier actividad—en este caso docente—que se quiera realizar con los alumnos de este Nivel.

Sería necesario ahora explicar brevemente también, cuál es la situación real de nuestros escolares al iniciar el curso.

En primer lugar hay una distinción clara entre los niños que han cursado preescolar y aquellos que no lo han hecho. El niño que ha asistido a un aula de preescolar, por lo general mal orientada, suele venir conociendo los símbolos de los diez

primeros números y está familiarizado con la escritura (sin que esto suponga un nivel aceptable de comprensión) de algunas sumas sencillas entre estos números, en algunos casos estos "conocimientos" pueden venir incluso muy ampliados según el grado de ambición que los respectivos padres tengan para con sus hijos, pero una cosa es "saber los números" y otra muy distinta "saber qué son los números". El niño que no ha asistido a aulas de preescolar, o bien éstas tienen una idea clara de cuál es su función, no conocen los números de forma sistemática excepto hasta el número de años que el propio niño tiene. Evidentemente es imposible que un niño de seis años no tenga ninguna información sobre números, que no cuente pequeñas cantidades de objetos y que incluso no realice verbalmente algunas operaciones. Ahora bien, interesa que estas actividades las realice con cantidades muy pequeñas, si es posible sin superar el seis, y no pretendiendo nunca que su trabajo sea sistemático. De todos modos la experiencia confirma que sea cual sea el estado de los conocimientos aritméticos de un niño al comenzar este Nivel, transcurrido el primer trimestre todos los alumnos se encuentran a un nivel similar de conocimientos, no dependiendo su mayor o menor extensión de las actividades realizadas previamente, sino del nivel de desarrollo psicológico del alumno, es decir, de su inteligencia.

Esto tiene una justificación muy clara si según hemos visto, hasta alrededor de los seis años no aparecen los supuestos psicológicos que permiten una comprensión inicial del concepto de número y de sus operaciones, toda actividad que se realice sobre estos contenidos supondrá una pérdida de tiempo, e incluso un retraso, puesto que no se habrán reforzado los supuestos previos que condicionan una comprensión más correcta de ellos.

CONCLUSION importante de todo lo anterior es que debe ser precisamente en el PRIMER NIVEL DE E.G.B. donde se inicie el estudio sistemático de los números, comenzando desde el uno.

Hechas estas consideraciones, imprescindibles para un planteamiento metodológico correcto, vamos a pasar a estudiar el Cuestionario propuesto por el EQUIPO GRANADA-MATS. analizando su estructura interna.

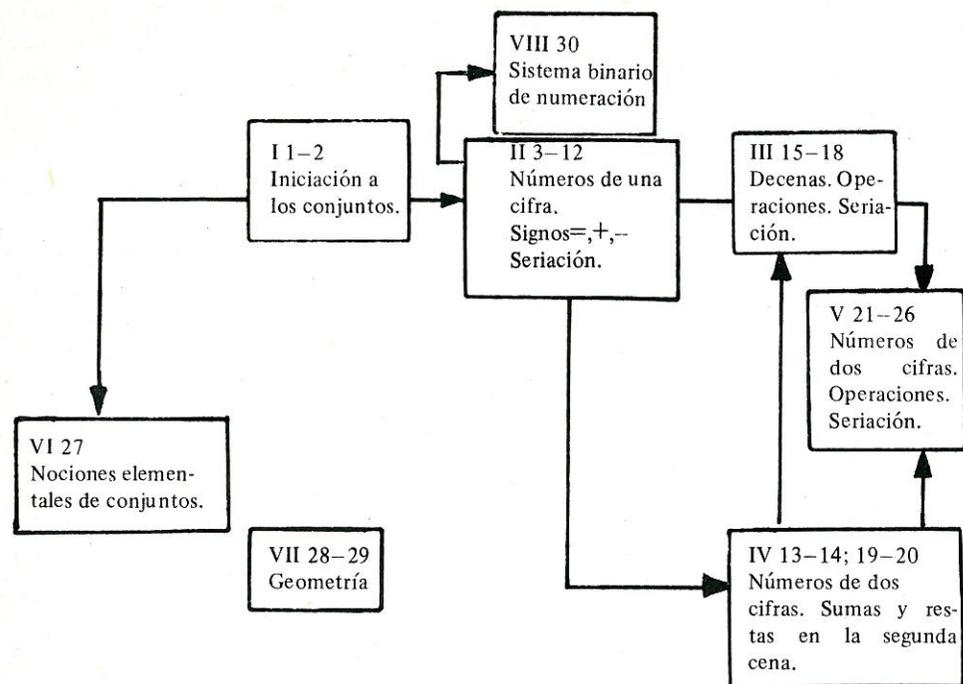
Adaptándose el calendario escolar y prescindiendo de los periodos dedicados a evaluación o repaso, quedan treinta semanas para el desarrollo del Cuestionario según hemos indicado anteriormente. De aquí que hayamos estructurado el curso en treinta lecciones, cuyos títulos son los siguientes :

- Unidad 1 : Los conjuntos.
- Unidad 2 : Formo conjunto.
- Unidad 3 : Aprendo el 1 y el 2.
- Unidad 4 : Aprendo el 3.
- Unidad 5 : Aprendo el 4.

- Unidad 6 : Aprendo el 5.
- Unidad 7 : Aprendo a restar.
- Unidad 8 : Aprendo el 6.
- Unidad 9 : Aprendo el 7.
- Unidad 10 : Aprendo el 8.
- Unidad 11 : Aprendo el 9.
- Unidad 12 : La escalera de los números.
- Unidad 13 : Aprendo el 10.
- Unidad 14 : Trabajo con el 10.
- Unidad 15 : El 10 es una decena.
- Unidad 16 : Sumo decenas.
- Unidad 17 : Trabajo con más decenas.
- Unidad 18 : La escalera de las decenas.
- Unidad 19 : Repaso las decenas.
- Unidad 20 : Del 10 al 20.
- Unidad 21 : Del 20 al 30.
- Unidad 22 : Del 30 al 40.
- Unidad 23 : Del 40 al 60.
- Unidad 24 : Del 60 al 80.
- Unidad 25 : Del 80 al 90.
- Unidad 26 : Del 90 al 99.
- Unidad 27 : Líneas abiertas y cerradas.
- Unidad 28 : Trabajo con el triángulo.
- Unidad 29 : Conjuntos y elementos.
- Unidad 30 : Otra forma de contar.

Hay varios criterios para clasificar estos temas, ya vimos al principio una primera división por materias que daba lugar a tres aspectos : Conjuntos, Geometría y Arimética. Vamos a seguir ahora un criterio de división por bloques de temas atendiendo a la interconexión entre los temas de cada bloque y a la progresión de conocimientos que suponen el paso de un bloque al siguiente.

De acuerdo con este criterio el curso queda estructurado según el siguiente ORGANIGRAMA :



Vemos que nos aparecen ocho bloques de temas, no todos de igual extensión, ni por supuesto de igual importancia. Vamos pues a hacer el análisis de cada uno de estos bloques :

BLOQUE PRIMERO : "Iniciación a los conjuntos". Unidades 1 y 2.

Estas dos lecciones deben ir necesariamente a principio del curso, dado que todas las representaciones de los conceptos aritméticos deben hacerse con símbolos conjuntistas.

Sin embargo su contenido es muy simple y en la mayor parte de los casos servirá de repaso para ordenar conocimientos que el alumno ha ido adquiriendo espontáneamente.

Idea fundamental de estas lecciones es que el concepto de conjunto no tiene definición. Un conjunto se forma "cuando yo quiero considerar varios objetos a la vez". Conviene destacar esta idea intuitiva de la formación de conjuntos : Hay conjuntos porque yo quiero y puedo hacer la consideración simultánea de objetos. Un aspecto importante consistirá en seleccionar dichos objetos de entre otros cuando están

situados de forma intercalada y su selección resulta progresivamente complicada.

Un objetivo secundario a estos temas, pero que tiene importancia, es habitar al alumno a recibir órdenes mediante un código simbólico elemental. Por ejemplo la orden de "escribir" puede venir representada con un lápiz, la de "rodear objetos" mediante un diagrama aparte, etc.

Estas dos lecciones no merecen ningún otro comentario, y su desarrollo no suele presentar al alumnos ninguna dificultad especial, siempre que el hábito de dibujo —en colores— o trazar líneas— esté bien fundamentado por la preescolar.

BLOQUE SEGUNDO : "Los números de una cifra. Los signos =, + y -. Seriación en la primera decena. Unidades 3 a 12.

Este bloque es el más extenso y al que normalmente se le viene dedicando menos importancia, por suponer, equivocadamente, que el niño lo conoce y domina perfectamente. Ya hemos discutido anteriormente lo inconveniente de que el niño haya estudiado —o hecho como que estudia los diez primeros números en la preescolar. Sin embargo a muchos puede parecer un error el dedicar toda una semana al número cinco, cuando el niño trabaja bastante bien con dicho número. En primer lugar hemos de aclarar que no sólo se trabaja con este número en esa semana, pero por otra parte— aunque así fuera— hay que tener en cuenta que un número no sólo se conoce porque se domine su grafía y se sepa utilizar correctamente en cardinación de conjuntos, sino que no se puede hablar de dominio del cinco, por seguir con el ejemplo, hasta que no se conozcan todas las composiciones y descomposiciones de dicho número, es decir, todas las operaciones en las que el número interviene, dice Thorndike en "La Psicología de la Aritmética" : "Conocer seis es más que cinco o cuatro, es menos que 7 u 8 dos veces 3, 3 veces 2 la suma de 5 y 1, de 4 y 2 de 3 y 3, 2 menos que 8, que con 4 hace 10, que es la mitad de 12, y así sucesivamente".

De aquí que nuestro planteamiento sea el estudiar el número y al mismo tiempo sus operaciones (todas si es posible), lo cual justifica ampliamente el tiempo empleado. Esto nos lleva a la necesidad de introducir desde muy pronto los signos =, + y -, para lo cual aprovecharemos lecciones —o números— que no tengan una gran cantidad de aspectos que tratar. En concreto estos signos, y el número 0, se introducen en las siguientes unidades :

El signo =, como símbolo de la frase que expresa, en la unidad 3

El signo +, como símbolo de la conjunción "y" en la unidad 4.

El número 0, como símbolo de la ausencia de cantidad en la unidad 7.

El signo -, como símbolo de la palabra menos, en la unidad 7.

Hechas estas aclaraciones podemos ya señalar los puntos que se tratan en el estudio de cada uno de los números.

El esquema de estudio de cada uno de los números es el siguiente :

- a.- Presentación del número, como símbolo de una cantidad de objetos, Lectura y escritura, insistiendo en una caligrafía correcta del número.
- b.- Cardinación de conjuntos y construcción de conjuntos cuyo cardinal sea el número estudiado.
- c.- Composiciones del número : Se estudiarán todos los casos posibles en los que el número tratado aparezca como suma de dos sumandos también el caso en que aparece como suma de unidades. Sólo de forma incidental se trabajará con composiciones de tres sumandos.
- d.- Descomposiciones del número Al igual que en el apartado anterior se estudiarán todos los casos de dos sumandos y descomposición en unidades; las descomposiciones en tres sumandos se harán secundariamente.
- e.- Restas con minuendo el número estudiado, incluyendo todos los casos : desde el sustraendo 0 hasta el sustraendo el propio número.
- f.- Iniciación a problemas de suma y resta con el número (s) ya estudiado (s).
- g.- Las relaciones "antes de" y "después de" entre los números de una cifra, para concluir con su seriación.

Aunque este es el esquema general es conveniente hacer algunas observaciones. La primera de ellas y más importante consiste en destacar que el esquema no se desarrolla en su totalidad desde el primer número estudiado, sino que se va ampliando progresivamente conforme se avanza en el desarrollo de los números, y esto por dos motivos :

En primer lugar por no hacer excesivamente complicado el estudio de los primeros números con una introducción simultánea de actividades muy diferentes, y en segundo lugar porque aún cuando se tratará de hacer así, no sería posible introducir algunos aspectos, como la resta, hasta no alcanzar la lección en la que se inicia este concepto, por suponerse que es en dicha unidad donde puede comenzar a tener significado, ya que al conocer los conceptos de suma e igualdad tiene un punto de comparación. Por otra parte es necesario tener conocimiento del 0 para poder introducir la resta y está demostrada la conveniencia de que la ausencia de cantidad, simbolizada con el 0, no debe estudiarse como principio de los números, por lo que la resta es contraproducente introducirla antes de haber hecho actividades relativas a los apartados a), b), c) y d) con los cinco primeros números.

Otra observación que resulta válida para todos los puntos del esquema

consiste en especificar un poco más cómo se hace el planteamiento general de dichos puntos :

Ejemplificando con un caso : Cuando hablamos de composiciones del 5 no se trata de presentar al niño directamente la expresión $2 + 3 = 5$ u otras similares, sino que esta expresión debemos entenderla como el resultado final que simboliza una serie de situaciones planteadas con objetos (o representadas gráficamente) que irían desde objetos muy concretos y relacionados con el niño hasta configuraciones puntuales. Cada una de estas situaciones será leída y expresada en forma progresivamente simbólica, tal y como aparece en el Libro de Trabajo utilizado por nosotros como material. Es decir, todas las actividades a realizar por el alumno, con los diez primeros números, llevan las siguientes secuencializaciones :

- 1.- Con objetos concretos (garbanzos, botones, . . .).
- 2.- Con dibujos de objetos concretos (mesas, peras, . . .).
- 3.- Con dibujos que tengan un mayor grado de abstracción (figuras triangulares, puntos, rayas, . . .).

para llegar por último a la realización de las actividades propuestas mediante los símbolos numéricos. De esta forma se va reforzando la función simbólica de los números y sus relaciones operativas en el papel de significante de un significado concreto. Sobre esto conviene observar que ningún alumno memorizará la composición $2 + 3 = 5$, u otra similar, si antes no ha realizado actividades con objetos que correspondan a esa expresión con el proceso anteriormente descrito.

Este planteamiento es válido y necesario para la presentación de los números y para todas las operaciones que se quieran realizar con ellos.

Atendiendo al principio de globalización que debe informar de modo especial este Nivel, conviene tener en cuenta dos criterios : que los objetos con los que se trabaja a efectos de expresar los números y sus operaciones de forma concreta, deben referirse al contenido del Area de Experiencia que se esté desarrollando; y en segundo lugar que los nombres de dichos objetos, y en general las palabras que deban escribirse, deben estar de acuerdo con el nivel de lectura y escritura alcanzado por el alumno.

Conforme se va avanzando por un lado en el estudio de los números y por otro en el desarrollo del esquema antes expuesto, se pueden ir realizando ejercicios en los que se combinan varios de los puntos del esquema para llegar a un máximo de conexión entre ellos y a una comprensión lo más completa posible de estos conceptos.

Finalmente conviene indicar que al término de este bloque, en la operación suma, se han estudiado todos los casos de sumas de dos (o de tres) sumando cuyos

resultados son números de una cifra, y que en la operación resta se han estudiado todos los casos de diferencias entre dos números de una cifra. Estos aspectos son fundamentales para continuar con un desarrollo de ambas operaciones, si bien no son todos los casos de suma y resta en los que intervienen los números de una cifra, vg. : quedan sin estudiar aún, casos como $7 + 8$ o bien $13 - 5$.

BLOQUE TERCERO : "Decenas, operaciones, seriación." Unidades 15 a 18.

En primer lugar queremos justificar por qué éste es el contenido del tercer bloque, y no se estudian directamente los números según la progresión en que aparecen, es decir, después del 9 el 10 y a continuación el 11, el 12, etc.

Hay una razón fundamental : La coherencia del Programa casi exige que se haga de esta forma. Por un lado al presentar la decena como un nuevo ente de orden superior a la unidad, podemos darle a las decenas el mismo tratamiento que hemos seguido con las unidades y emplear el mismo esquema :

- a.- Presentación, lectura y escritura de las distintas decenas.
- b.- Cardinación de conjuntos y construcción de conjuntos cuyo cardinal sea una decena cualquiera.
- c.- Composición de decenas, fundamentalmente como suma de otras dos.
- d.- Descomposición de decenas en dos o tres sumandos, que a su vez sean decenas.
- e.- Restas con minuendo y sustraendo en decenas.
- f.- Problemas de sumas y restas con decenas.
- g.- Seriación de decenas.

Venimos así a reforzar el esquema del estudio de las unidades ampliando los contenidos a nuevos números, en este caso : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90. Por ello es conveniente que todo el proceso se vaya realizando mediante comparaciones con el caso correspondiente de las unidades, por ejemplo : Al estudiar la suma $30+40=70$, es conveniente realizar a la vez la suma $3 + 4 = 7$, etc.

Una cuestión de aspecto práctico es que en estos temas no poderemos utilizar objetos cualesquiera, dada su dificultad, imaginemos una representación de 50 mesas o 70 casas, por lo que conviene limitar la representación de la decena a su configuración puntual :

.....
.....

e incluir en cada caso tantas tablas como sean necesarias, lo cual no obsta para que en

casos necesarios se utilicen otros ejemplos. También se debe introducir ya un material tipo regleta, en cualquiera de sus variantes, en el que cada 10 unidades de primer orden se sustituyen por una unidad de orden superior. Este material nos facilita ahora las operaciones con decenas, pero más adelante tendrá un rendimiento mayor.

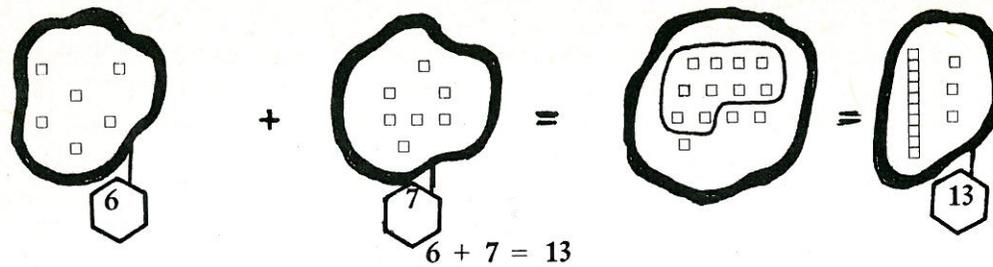
Metodológicamente conviene pasar ya aquí de la escritura de las sumas y restas en fila a su expresión en columna, que es como usualmente se van a utilizar, pero sin pedirle aún al alumno que pase de una expresión a otra, sino que opere indistintamente en cada una de ellas.

En el bloque siguiente veremos otro de los motivos que justifica el estudiar las decenas previamente a los números de dos cifras.

BLOQUE CUARTO: "Introducción a los números de dos cifras. Sumas y restas en la segunda decena". Unidades 13-14 y 19-20.

Si pudiera decirse que alguno de los bloques de contenido que hemos señalado para este curso es más importante que ningún otro, ese calificativo correspondería sin ningún género de dudas a este bloque. Su contenido es fundamental para un dominio claro de los números de dos cifras y las operaciones entre ellos, y por otra parte es aquí donde se pone realmente a prueba si el dominio de los números de una cifra -unidades o decenas- se ha conseguido o no. Se estudia en él el número 10 como un número más a continuación del 9, manteniendo el mismo proceso que ya indicamos para el bloque tercero. Esta primera parte corresponde a las unidades 13-14, y sirve de enlace al estudio de los dígitos y el de las decenas. No tendría ningún interés el destacar estas lecciones del resto del bloque indicado, si no fuera porque en ellas se estudia por vez primera las sumas de números dígitos cuyo resultado es un número de dos cifras, en este caso 10, y también las diferencias entre un número de dos cifras con otro de una, vg. : $6 + 4 = 10$ y también $10 - 8 = 2$.

Estas dos lecciones sirven de base al proceso fundamental que se desarrolla en las unidades 19-20. Se comienza en ellas por presentar los números de dos cifras como los símbolos que representan entidades numéricas formadas por decenas y unidades conjuntamente. Esta nueva situación aparece como unión de las que hemos estudiado independientemente con anterioridad : decenas solas o unidades solas. De aquí se pasa a la presentación de los números de la segunda decena : 11, 12, . . . , 18 y 19. Los pasos que se estudian en cada uno de estos números los veremos en el bloque siguiente, dedicado específicamente a los números de dos cifras. Nos interesa ahora destacar que el siguiente contenido consiste en transformar, con el material de regletas, un número de unidades superior a 10 en decenas y unidades. Este proceso es clave para fundamentar las sumas de dos números de una cifra cuyo resultado sea un número de la segunda decena y por otra parte como iniciación a las sumas de números de dos cifras llevándose. Así la suma $6 + 7$ hay que realizarla de la siguiente forma :

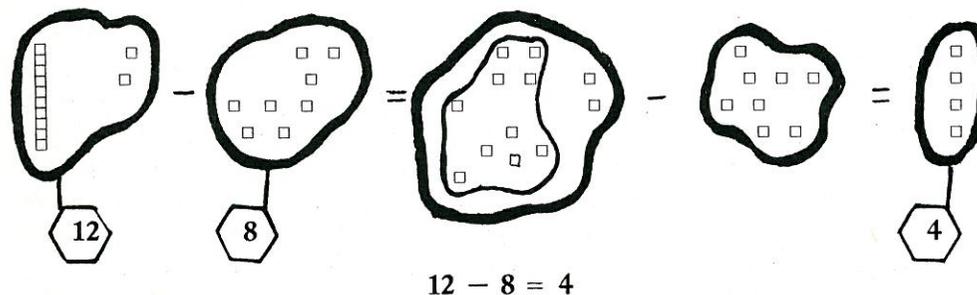


Este procedimiento para realizar este tipo de sumas hay que mantenerlo hasta que el alumno mecanice estas operaciones, y es fundamental que lo haga puesto que toda suma en la que hay que llevarse una decena de las unidades, tiene su fundamento en estas operaciones.

A continuación se fundamentan las restas en las que el minuendo es un número de la segunda decena y el sustraendo es un dígito, siendo el proceso muy similar.

En primer lugar conversión de una cantidad formada por una decena y unidades, toda en unidades.

Luego realización de este tipo de restas con material; ejemplo :



De nuevo insistimos en que este procedimiento debe mantenerse hasta que el alumno mecanice estas operaciones, y que no se puede explicar ningún otro tipo de resta llevándose hasta que este proceso esté totalmente dominado.

Por ser estas cuatro lecciones en donde se fundamentan los aspectos más difíciles de la suma y de la resta es por lo que les hemos dado un tratamiento aparte, aunque evidentemente hay puntos de ellas que corresponden claramente a los bloques III ó V.

Finalmente aparece aquí un nuevo motivo para incluir el estudio de las decenas solas antes que los números de dos cifras: Como se vé hasta no tener un concepto claro de decena, no se puede estudiar las operaciones suma y resta con los números que van del 11 al 19.

El contenido de este bloque ya hemos indicado que se inicia en las lecciones del bloque anterior. Vamos a exponer el esquema del desarrollo de los contenidos de estas unidades.

En primer lugar, y al igual que en todos los números, tenemos :

a) PRESENTACION DEL NUMERO, LECTURA Y ESCRITURA

Todos estos números se presentan mediante configuraciones puntuales o materiales de regletas e insistiendo en que se trata de una entidad numérica formada por decenas y unidades. En cuanto a la lectura conviene insistir todo lo necesario en los números 11,12,13,14,15, que son los únicos que no se leen igual que se escriben, es decir, no se dice: dieciuna, diecidos, etc.

El segundo paso es también el mismo que el de esquemas anteriores :

b) CARDINACION DE CONJUNTOS Y CONSTRUCCION DE CONJUNTOS DE CARDINAL DADO.

La única consideración a este paso consiste en que al rodear los elementos del conjunto se deben ir rodeando de diez en diez y dejar sueltas las unidades que sobren.

c) COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DEL NUMERO

Respecto de los bloques anteriores este paso queda aquí muy simplificado. Solo interesa descomponer o componer estos números en las decenas y unidades que los forman. Es un aspecto importante y sobre el cual el alumno no debe tener ninguna confusión.

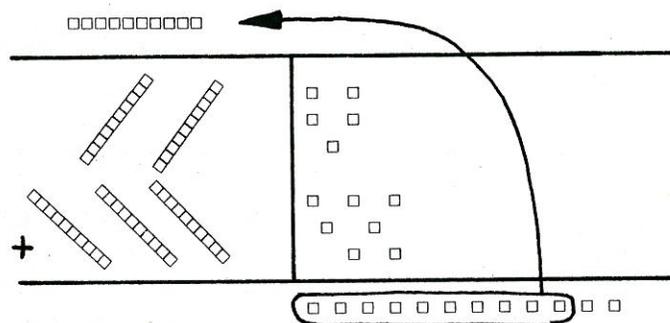
d) SUMA DE NUMEROS DE DOS CIFRAS

Aquí conviene distinguir varios aspectos, en primer lugar conviene que quede ya sistematizado el paso de sumas en fila a sumas en columna insistiendo en la correcta colocación de los sumandos : unidades debajo de las unidades, decenas debajo de las decenas. En los primeros casos conviene estudiar sumas sin llevarse, realizándolas previamente con material, para comprobar que estas sumas se ajustan al siguiente proceso :

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 + 25 \\
 \hline
 38
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 \longrightarrow \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10 + 3 \\
 20 + 5 \\
 30 + 8
 \end{array}$$

Es decir, se trata de deducir la regla siguiente : "Se suman las unidades con las unidades y las decenas con las decenas".

Una vez automatizado este proceso y el relativo a la suma del bloque anterior, se puede pasar a la suma de dos números de dos cifras cualesquiera, en concreto el caso de llevarse una decena. De nuevo el proceso debe hacerse con material previamente para ver que con diez de las unidades se forma una decena, que se suma con las decenas.



Es conveniente que al principio, es decir, cuando el alumno efectue la suma directamente con los símbolos, coloque esa decena encima de la columna de las decenas de la suma que está haciendo, así :

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 25 \\
 + 37 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

solo se prescindirá de esta ayuda cuando el proceso esté mecanizado.

e) RESTA DE NUMEROS DE DOS CIFRAS

Los pasos a tratar en este aspecto son básicamente los mismos que para el caso de la suma : Paso de restas en fila a columna, restas sin llevarse realizándolas previamente con material, y finalmente las restas llevándose. Este es un aspecto importante y en el que creemos no se ha venido utilizando una metodología adecuada.

Al realizar nosotros la resta :

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 - 29 \\
 \hline
 \end{array}$$

decimos "de nueve a diecisiete van ocho, y me llevo una, cuatro menos tres igual a uno".

El proceso que hacemos es, en síntesis, el siguiente :

$$47 - 29 = (40 + 7) - (20 + 9) = (40 + 17) - (30 + 9) = 10 + 8 = 18$$

para ello hacemos uso de la propiedad que dice : "Si al minuendo y al sustraendo de una diferencia los aumentamos en una misma cantidad, el resultado no varía", esto es cierto, pero nosotros al aumentar el minuendo y sustraendo en una misma cantidad lo hacemos del siguiente modo : mientras que al minuendo lo aumentamos en las unidades, al sustraendo lo aumentamos en las decenas, con lo cual el proceso se hace excesivamente complicado. No tenemos más que recordar la dificultad que supuso para nosotros, y sigue hoy día suponiendo, este aprendizaje para entender que la metodología no es, ni con mucho, lo más adecuada.

Nuestra propuesta se fundamenta en el proceso iniciado en el bloque anterior y que en síntesis es la siguiente :

$$47 - 29 = (40 + 7) - (20 + 9) = (30 + 17) - (20 + 9) = 10 + 8 = 18$$

Es decir : Como a no le puedo restar , cedo una decena del minuendo a las unidades, y ya sí se puede hacer la resta; el alumno debe realizar este proceso con el material tantas veces como sea necesario, para llegar a la siguiente reflexión:

y finalmente :

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 4 \quad 1 \\
 - 2 \quad 9 \\
 \hline
 1 \quad 8
 \end{array}$$

La única dificultad de éste desarrollo, que es lógico para el alumno, consiste en que los hábitos del profesor y la familia son los del proceso anterior. Creemos sin embargo que convendría dar prioridad a una comprensión correcta por parte del alumno con preferencia a nuestras costumbres. Solo nos queda indicar que este aspecto es el más difícil de aprender, de todo el contenido del Primer nivel, como veremos a continuación.

Por último es este quinto apartado volvemos a insistir que hay que tener siempre en cuenta que es de primordial importancia para el aprendizaje que el alumno hay comprendido y automatizado las operaciones con números de dos cifras con ayuda del material para que se consiga una perfecta adquisición del proceso simbólico.

f) REALIZACION DE PROBLEMAS CON LAS OPERACIONES APRENDIDAS.

Aquí, además de las consideraciones hechas en bloques anteriores, se deben ya hacer varias preguntas—sobre unos mismos datos—pero todas ellas relativas a una misma operación, es decir, sin mezclar en un mismo problema las dos operaciones: suma y resta.

g) SERIACION DE LOS NUMEROS ESTUDIADOS.

Para ellos el mecanismo de la relación “después de” irá sobre la base de ir sumando la unidad a cada número, así como en el caso de “antes de” irá sobre la base de ir restando la unidad a cada número.

La mayor dificultad está en el paso de las decenas, y es aquí donde habrá que hacer mayor insistencia. Como actividad importante se deben contar también los números de dos en dos, tanto progresiva como regresivamente.

En síntesis el esquema de este bloque coincide con el de los bloques anteriores, es decir :

- Presentación, lectura y escritura.
- Cardinación de conjuntos.
- Composición y descomposición de números.
- Sumas.
- Restas.
- Problemas.
- Seriación.

Si bien sus características específicas lo hacen bastante diferente.

BLOQUE SEXTO : “Nociones elementales de conjuntos”. Unidad 27.

Se desarrollan aquí algunos aspectos básicos que aparecen con el concepto de conjunto.

Dichos aspectos son :

- Notación de conjuntos mediante una letra mayúscula.
- Concepto de elementos de un conjunto.
- La relación de pertenencia y no pertenencia.
- Noción de subconjunto, mediante representación en diagrama

Ninguno de estos aspectos presenta dificultad, y solo hay que indicar la conveniencia de que todos ellos deben desarrollarse con ejemplos de diagramas.

BLOQUE SEPTIMO : “Nociones elementales de geometría”. Unidades 28 y 29.

Los puntos enunciados en el Cuestionario, se desarrollan según los siguientes pasos :

- Idea intuitiva de línea.
- Líneas abiertas y cerradas.
- Punto inicial y final de una línea.
- Puntos interiores y exteriores a una línea cerrada.
- Lados de una línea poligonal.
- Interior de una línea cerrada. Triángulo.
- Triangulación de un polígono.

Este bloque es totalmente independiente del resto del Cuestionario y su desarrollo no tiene por qué estar condicionado a los demás temas. Convencionalmente le hemos asignado las unidades 28 y 29, pero puede darse en el momento en que el Profesor lo considere más oportuno.

Caben algunas consideraciones : Todos los ejercicios deben hacerse con papel y lápiz, iniciándose el uso correcto de la regla; dichos ejercicios deben ser muy sencillos y con un cierto grado de complejidad creciente. Los ejercicios de triangulación deben simultanearse con actividades del Area de Expresión Plástica y Pretecnológica.

BLOQUE OCTAVO : “Sistema binario de numeración”. Unidad 30.

Aún cuando el Cuestionario no pide explícitamente el estudio de este tema, sin embargo deja la cuestión en el aire sobre la conveniencia de su tratamiento.

Un planteamiento serio del estudio de este sistema de numeración llevaría, como sucede en los cuestionarios franceses, a un esquema totalmente distinto del contenido de este curso. El haberlo dejado así ha sido un poco de concesión a la galería y al mimetismo de algunos autores que han copiado el sistema francés. Nosotros también pagamos nuestro pequeño tributo a esto, incluyendo una lección, en la que como un juego se plantean las bases del sistema binario.

Su contenido no tiene especial interés y se puede suprimir sin dificultad aún cuando el alumno se divertirá con los ejercicios propuestos.

Entendemos que con el planteamiento de nuestro Cuestionario no tiene ningún interés el estudiar otros sistemas de numeración, al menos hasta llegar al quinto Nivel.

Hecho el análisis de la estructura interna de los Bloques de contenidos que constituyen este Primer Nivel de E.G.B., vamos a pasar a estudiar los rendimientos obtenidos a lo largo de los dos años de experimentación que ha realizado el EQUIPO GRANADA-MATS.

En primer lugar conviene referirse al número de evaluaciones realizadas. Según preveen las normas para la E.G.B., en cada Nivel es obligatorio realizar cinco evaluaciones oficiales a lo largo del curso y una evaluación final (optativa para la primera etapa). Para ello nosotros hemos dividido el contenido del curso en cinco partes iguales de seis unidades cada una, sin atender a los bloques de contenidos, y sobre cada una de estas partes hemos realizado la evaluación correspondiente atendiendo a los objetivos que nos parecían más destacados en cada caso. Para la elaboración de la evaluación final hemos atendido a los tres aspectos que nos parecen más importantes en este Nivel :

- Aritmética.
 - * Numeración.
 - * Suma.
 - * Resta.
- Conjuntos.
- Geometría.

y en cada uno de ellos hemos determinado los objetivos de conducta que nos han parecido fundamentales. Evidentemente estos mismos objetivos se han ido evaluando en las cinco pruebas anteriores, si bien en cada caso referidos a aspectos más concretos. Habiendo llegado ya al final de la experiencia sobre este Nivel, nos interesa más ver cuál es la evolución de un objetivo a lo largo del curso y su estado final, que analizar el nivel concreto de éxito que alcanza en cada caso particular. De aquí que incluyamos los objetivos específicos estudiados en cada evaluación, dentro de los objetivos generales que hemos planteado para el final del curso.

Dichos objetivos finales son :

NUMERACION

- 1.- Escribir el grafo de un número de una cifra dado el nombre de dicho número.
- 2.- Reconocer y escribir el grafo de las distintas decenas.
- 3.- Reconocer y escribir el grafo de los números de la segunda decena.
- 4.- Reconocer y escribir el grafo de un número cualquiera de dos cifras
- 5.- Escribir números de dos cifras conociendo el número de unidades y decenas que lo forman.
- 6.- Descomponer un número de dos cifras en el número de decenas y unidades que lo forman.
- 7.- Escribir seriadamente un subconjunto de los 100 primeros números naturales.
- 8.- Descomponer un número dígito, a una decena, en una suma de dos o tres sumandos.
- 9.- Descomponer un número dígito o una decena, en una diferencia de otros dos.

ADICION

- 1.- Realizar sumas de números dígitos con resultados inferior a 10.
- 2.- Realizar sumas de números dígitos con resultados superior o igual a 10.
- 3.- Colocar y efectuar sumas de dos sumandos de dos cifras, o bien un dígito y otro de dos cifras :
 - a) Sin llevarse.
 - b) Llevándose.
- 4.- Resolver una situación práctica sencilla mediante una suma de dos números de una o dos cifras.

SUSTRACION

- 1.- Realizar restas de números dígitos.
- 2.- Colocar y efectuar restas de números de dos cifras, sin llevarse.
- 3.- Resolver una situación práctica sencilla mediante una resta de números de dos cifras.
- 4.- Colocar y efectuar restas de números de dos cifras llevándose.

CONJUNTOS Y GEOMETRIA

- 1.- Formar conjuntos de cardinal dado a partir de una colección de objetos.
- 2.- Escribir por extensión los elementos de un conjunto.

- 3.- Representar un subconjunto dentro de un conjunto dado en diagrama de Venn, de acuerdo con una característica.
- 4.- Dibujar líneas abiertas y cerradas.
- 5.- Rayar la superficie delimitada por una poligonal cerrada.
- 6.- Dibujar líneas poligonales cerradas con un número de lados no superior a siete.
- 7.- Dado el contorno de un polígono y las piezas a recortar de una de sus posibles triangulaciones, el alumno lo reconstruirá superponiendo dichas piezas.
- 8.- Triangular un polígono con menos de siete lados.

Estos objetivos finales recorren los aspectos más importantes de los contenidos desarrollados, de acuerdo con nuestra metodología, en este Primer Nivel. Según puede observarse en las tablas adjuntas, al hacer la clasificación de ellos según la taxonomía modelo NLSMA, se controlan con ellos las categorías de CALCULO, COMPRESION y APLICACION, lo cual, para un Primer Nivel, parece bastante adecuado. Veanse cuadros del final del artículo.

Vamos a pasar ahora a presentar los índices obtenidos por estos objetivos a lo largo de las seis evaluaciones hechas en cada uno de los dos años de nuestra experiencia.

NUMERACION

Los resultados, en promedio, de los objetivos de este bloque son los siguientes :

OBJETIVOS	
EVALUACION	1 2 3 4 5 6 7 8 9
I	.96 .65
II	.97 .66 .72
III	.75 .82 .66 .45
IV	.94 .86 .67 .71 .73
V	.93 .90 .96 .90
FINAL	.96 .96 .95 .92 .90 .94 .91

Los siete primeros objetivos de este grupo tienen dos características importantes en común : Todos ellos alcanzan en la evaluación final un índice superior al 90 por ciento, lo cual los sitúa en la categoría de muy sencillos, y además se aprecia en todos ellos una progresión en cuanto a su adquisición por los alumnos a lo largo de todas las evaluaciones en las que se tratan.

Podemos afirmar que los errores son debidos casi en su totalidad, o bien a despistes de los alumnos normales, e incluso de los mejores, o bien a problemas de inadaptación escolar de algunos alumnos, este bloque de objetivos ha sido conseguido prácticamente en su totalidad al terminar el primer nivel por los alumnos de la muestra utilizada por nosotros; por esto podemos asegurar que de acuerdo con la metodología antes planteada, los contenidos de este bloque no presentan ninguna dificultad en su adquisición final. Faltan por considerar los dos últimos objetivos, que se refieren a aspectos concretos de los dígitos y las decenas, razón por la cual sólo aparecen en las tres primeras evaluaciones. En el primero de ellos vemos que alguno de sus aspectos es fácilmente asequible, y el segundo es difícil en el momento en que se trata. Para llegar a una conclusión definitiva respecto de ellos sería necesario incluirlos en la evaluación final, pero no nos han parecido suficientemente importantes para hacerlo. Solo hemos considerado conveniente incluir los datos conocidos respecto de ellos. Por otra parte entendemos que estos resultados no modifican en nada el comentario hecho anteriormente sobre el bloque en conjunto : Los aspectos de numeración son sencillos y asequibles.

ADICION

Los resultados, en promedio de los objetivos de este bloque son los siguientes :

OBJETIVOS	
EVALUACION	1 2 3 4
I	.86
II	.90
III	.92 .80 .78
IV	.83 .62 .78
V	.88 .86
FINAL	.98 .91 .91 .86

De nuevo nos encontramos con una clara progresión en los resultados obtenidos por los objetivos de este grupo a lo largo de cada una de las evaluaciones.

No hay ningún aspecto difícil en la adquisición de los mecanismos de esta operación, ya que prácticamente desde la primera vez que se evalúan, todos ellos superan el nivel de idoneidad (.75).

Estos objetivos corresponden a dos categorías : Los tres primeros son muy sencillos y por tanto exigibles a la totalidad de los alumnos del Primer Nivel, salvo casos de inadaptación; el cuarto es solamente sencillo y puede tolerarse que los alumnos con menor nivel intelectual tengan algún fallo en el mismo.

En conclusión afirmamos que los aspectos propuestos para la adición son todos ellos propios del Primer nivel, siendo pues exigibles los tres primeros objetivos a todos los alumnos y el último a la mayoría de ellos.

SUSTRACCION

Los resultados, en promedio, de los objetivos de este bloque son los siguientes :

OBJETIVOS				
EVALUACIONES	1	2	3	4
I				
II	.75			
III	.85	.75		
IV		.70	.30	
V			.62	.63
FINAL	.92	.82	.82	

La progresión de los índices de los objetivos de este bloque es mucho más adecuada que en los casos anteriores, sin embargo los resultados finales no son tan brillantes. Se puede ver con claridad que los objetivos planteados para la resta son más difíciles, ya desde el principio, si bien las mejoras que se obtienen a lo largo del curso son más acusadas a este respecto es muy indicativo lo que sucede con el objetivo número 3, que avanza en progresión casi geométrica.

Los resultados de la última evaluación nos indican que los tres primeros objetivos son propios del Primer Nivel, si bien solo el primero de ellos es muy sencillo siendo los otros dos nada más que sencillos. Por tanto el primero es exigible a la totalidad de los alumnos pudiendo permitirse algunos fallos en los otros dos.

El aspecto tratado en el 4º objetivo se puede afirmar que no es propio

del Primer Nivel, ya que sólo un 65 por ciento de los alumnos lo dominan al finalizar el curso. Esto no quiere decir que se deba suprimir. Esta variante de la resta puede y debe iniciarse primero y el Profesor debe trabajarlo, aún cuando sepa que solo en el segundo nivel se habrá alcanzado la madurez suficiente por parte de los alumnos que permita considerarlo como un objetivo muy sencillo.

En resumen : de los cuatro objetivos propuestos para la resta, tres de ellos son adsequibles a los alumnos de este Nivel, y sólo el cuarto hay que entenderlo como iniciación de un proceso. Este es el bloque que presenta mayor dificultad en este curso, sin que por otra parte dicha dificultad sea muy acusada.

CONJUNTOS Y GEOMETRIA

Los resultados, en promedio, de los objetivos de este bloque son los siguientes :

OBJETIVOS								
EVALUACION	1	2	3	4	5	6	7	8
I	.86		.88					
II								
III	.92							
IV								
V		.96	.85	.91	.90	.85		
FINAL	.93	.94	.92	.96	.90	.88	.94	.76

Aún cuando el número de objetivos propuestos para este bloque sea muy extenso, queremos recordar que en el total del contenido del curso representan una parte pequeña. Si cupiera dar a los objetivos una ponderación, la asignada en este caso sería tres o cuatro veces menor que la de los bloques anteriores. Aún así, e independientemente de su mayor o menor importancia, nos interesa considerar estos resultados.

Una primera observación es que la mayoría de ellos sólo aparecen en las dos evaluaciones finales, muy próximas entre sí, pero que sin embargo se advierte cierta progresión en los rendimientos.

En cuanto a los propios resultados cabe afirmar que los siete primeros

objetivos son asequibles por el 90 por ciento, o más, de los alumnos y entran pues en la categoría de muy sencillos.

Sólo el último de ellos alcanza el nivel de idoneidad, y casi cabría sospechar que con un poco más de tiempo se podrían mejorar los resultados.

En conclusión : Las materias tratadas en este bloque no presentan ninguna dificultad a los alumnos del primer nivel y son por tanto exigibles—salvo el último aspecto—a la totalidad de los alumnos. Conviene observar también que el poco tiempo relativo dedicado a estos aspectos no han hecho que los resultados sean inferiores a los de los bloques anteriores; esto nos confirma que la distribución de materia que aparece en el cuestionario propuesta por nosotros es correcta.

Haciendo un resumen final de los objetivos globales de este curso por categorías, tenemos el siguiente cuadro :

intervalo	categoría	código	nº de obje.	porcentaje
90-100	Muy sencillo	M.S.	15	60 por ciento
80- 90	Sencillo	S.	7	28 por ciento
70- 80	Idóneo	I.	1	4 por ciento
50- 70	Difícil	D.	1	4 por ciento
0- 50	Muy difícil	M.D.	1	4 por ciento
			25	100 por ciento

Como vemos el 88 por ciento de los objetivos propuestos (M.S. + S.) son asequibles, al finalizar el curso, al menos para el 80 por ciento de los alumnos de este Nivel.

Los resultados son muy aceptables y nos confirman que el esquema de trabajo propuesto por nosotros tiene un rendimiento muy superior a lo que según los criterios usuales vienen considerando como idóneo, "que el 75 por ciento de los alumnos dominen al menos el 75 por ciento de los temas".

EVALUACION GLOBAL

TAXONOMIA SEGUN MODELO NLSMA		OBJETIVOS																
		NUMERACION									ADICION				SUSTRACION			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	1	2	3	4
A.O-CALCULO (Computación)	A.-	Conocimiento de hechos específicos.																
	A.2-	Conocimiento terminología																
	A.3-	Aptitud para operar																
B.O-COMPRENSION	B.1-	Conocimiento de concep.																
	B.2-	Conocimiento de princip. reglas y generalización.																
	B.3-	Conocimiento de estructuras matemáticas.																
	B.4-	Capacidad traducir elem. probl. de un modo a otro.																
	B.5-	Capacidad para seguir una demostración.																
	B.6-	Capacidad para leer e interpretar un problema.																
C.O-APLICAC.	C.1-	Capacidad para resolver problemas comunes																
	C.2-	Capacidad para hacer comparaciones.																
	C.3-	Capacidad analizar datos.																
	C.4-	Aptitud reconocer relac.																
D.O-ANALISIS	D.1-	Aptitud para resolver prb. poco usuales.																
	D.2-	Capacidad para descubrir relaciones.																
	D.3-	Capacidad para construir demostraciones.																
	D.4-	Capacidad para criticar demostraciones.																
	D.5-	Capacidad para formular y validar generalizacns.																

EVALUACION GLOBAL: OBJETIVOS DE TEORIA DE CONJUNTOS Y GEOMETRIA

TAXONOMIA SEGUN MODELO NLSMA		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A.O-CALCULO (Computación)	A.1- Conocimiento de hechos específicos.															
	A.2- Conocimiento terminología															
	A.3- Aptitud para operar	•			•	□	□	□	□							
B.O-COMPRESION	B.1- Conocimiento de concept.			•		•	•	•	•							
	B.2- Conocimiento de princip. reglas y generalización.															
	B.3- Conocimiento de estructuras matemáticas.															
	B.4- Capacidad traducir elem. probl. de un modo a otro	•														
	B.5- Capacidad para seguir una demostración.															
	B.6- Capacidad para leer e interpretar un problema.															
C.O-APLICAC.	C.1- Capacidad para resolver problemas comunes.															
	C.2- Capacidad para hacer comparaciones.															
	C.3- Capacidad analizar datos.															
	C.4- Aptitud reconocer relac.															
D.O-ANALISIS	D.1- Aptitud para resolver prb. poco usuales.															
	D.2- Capacidad para descubrir relaciones.															
	D.3- Capacidad para construir demostraciones.															
	D.4- Capacidad para criticar demostraciones.															
	D.5- Capacidad para formular y validar generalizacns.															

INTERPOLACION EN R^n CON VALORES MEDIOS

por M. Gasca* y J.I. Maeztu**

(*Departamento de Ecuaciones Funcionales. Universidad de Granada

(**) Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Bilbao

Dedicado a D. Alfonso
Guiraúm en su LXX
aniversario

RESUMEN

Se generaliza el problema de la interpolación en puntos de R^n mediante polinomios al caso en que los datos son valores medios de la función en intervalos de R^n de la forma

$$Q_j = \prod_{i=1}^n [a_{ij}, b_{ij}]$$

Se ve que si se verifica

$$b_{ij} - a_{ij} = b_{ij'} - a_{ij'} \quad \forall j, j' \quad (1)$$

el estudio de la existencia y unicidad de solución del problema es equivalente al del caso en que los datos son los valores del polinomio en los centros de los intervalos, es decir en los puntos.

$$\frac{a_{1j} + b_{1j}}{2}, \frac{a_{2j} + b_{2j}}{2}, \dots, \frac{a_{nj} + b_{nj}}{2}$$

Además, en ausencia de la hipótesis (1) esto ya no es cierto, como se muestra en un contraejemplo.