TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSION. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO NORMAL CON FACTORES EXOGENOS.

Mª AURORA HERMOSO CARAZO

UNIVERSIDAD DE GRANADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

" TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO-NORMAL CON FACTORES EXOGENOS "

Tesis Doctoral

Sección de Matemáticas

30 de Septiembre de 1983

" TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO-NORMAL CON FACTORES EXOGENOS."

Memoria que para optar al grado de Doctor en Ciencias, sección de Matemáticas, presenta la Licenciada Mª Aurora Hermoso Carazo.

Director de Tesis :

Profesor Dr. D. Ramón Gutierrez Jáimez

Vº Bº

UNIVERSIDAD DE GRANADA. FACULTAD DE CIENCIAS.

TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO NORMAL CON FACTORES EXOGENOS.

Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 7 de Abril de 1.984, en la Universidad de Granada, ante el Tribunal formado por:

Presidente: Dr.D. SIXTO RIOS GARCIA
(Catedrático de la Universidad Complutense.Madrid)

Vocales : Dr.D. ANTONIO PASCUAL ACOSTA
(Catedrático de la Universidad de Sevilla)

: Dr.D. ANTONIO MARTIN ANDRES
(Catedrático de la Universidad de Granada)

: Dr.D. RAMON GUTIERREZ JAIMEZ
(Catedrático de la Universidad de Granada)

Secretario: Dr.D. ELIAS MORENO BAS
(Prof.de la Universidad de Granada)

obtuvo la calificación de

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Dr. D. Ramón Gutierrez Jáimez, por su labor de dirección, en el desarrollo de esta memoria.

Asi mismo a todos aquellos profesores del Departamento de Estadística e I.O., de la Universidad de Granada, que de alguna manera han colaborado.

INDICE

INTRODUCCION GENERAL 1

CAPITULO I : PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS. RELACION CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS 9

1.1 INTRODUCCION 10

1.2 PROCESOS DE MARKOV 12

1.2.1 Definición 12

1.2.2 Función Probabilidad de transición 13

1.2.3 Ecuación de Chapman-Kolmogorov 15

1.2.4 Procesos de Markov homogéneos 16

1.3 PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS 16

1.3.1 Introducción 16

1.3.2 Definición de Proceso de difusión ordinario 17

1.3.3 Ecuaciones de Kolmogorov para un proceso de difusión ordinario 19

1.4 RELACION ENTRE LOS PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS 21

1.4.1 Integral estocástica 21

1.4.2 La Integral estocástica, como proceso estocástico . .30

1.4.3 Diferenciales estocásticas. 34

1.4.4 Existencia y unicidad de soluciones 36

1.4.5 Las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, como procesos de difusión ordinarios 40

1.5 INSTANTES ALEATORIOS. 41

1.5.1 Definición 41

1.5.2 σ-algebra asociada a un instante aleatorio. . . .42

1.5.3 Propiedades. 42

CAPITULO II : TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO. 43

2.1 INTRODUCCION. 44

2.2 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS. 47

2.2.1 Introducción 47

2.2.2 Resultados previos. 49

2.2.3 Construcción del test 54

2.3 TEST DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS, Y LA OBSERVACION SE REALIZA HASTA UN INSTANTE ALEATORIO .65

2.3.1 Introducción 65

2.3.2 Resultados previos 67

2.3.3 Construcción del test 72

2.4 TEST DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS, Y DISPONEMOS DE N OBSERVACIONES 82

2.4.1 Introducción 82

2.4.2 Observación en un intervalo de tiempo fijo 84

2.4.3 Observación en un intervalo de tiempo, que depende de un instante aleatorio 90

2.5 TESTS SECUENCIALES 97

2.5.1 Resultados previos 97

2.5.2 Algunos tests secuenciales 99

2.5.3 Construcción de los tests 102

2.5.4 Construcción de tests secuenciales, en base a muestras de tamaño N 107

CAPITULO III : TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO LOGARITMICO-NORMAL MULTIDIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS. 112

3.1 INTRODUCCION. 113

3.2 DIFUSION LOGARITMICO-NORMAL MULTIDIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS 116

3.2.1 Definición 116

3.2.2 Relación del proceso LN(n,m), con las ecuaciones diferenciales estocásticas 122

3.3 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CON OBSERVACION EN UN INTERVALO DE TIEMPO FIJO 127

3.3.1 Introducción 127

3.3.2 Planteamiento y construcción del test. 131

3.4 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO LA OBSERVACION SE REALIZA HASTA UN INSTANTE ALEATORIO. 137

3.4.1 Introducción 137

3.4.2 Planteamiento y construcción del test 143

3.5 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO SE DISPONE DE N OBSERVACIONES 145

3.5.1 Observación en un intervalo de tiempo fijo . . . 145

3.5.2 Observación en un intervalo de tiempo aleatorio . . 149

3.6 TESTS SECUENCIALES SOBRE LOS COEFICIENTES DEL PROCESO LN(1,0) 153

APENDICE (Cuestiones abiertas) 159

BIBLIOGRAFIA 160

INTRODUCCION GENERAL

Los procesos estocásticos de Markov, describen modelos matemáticos que se ajustan a muchas situaciones practicas en las que el estado presente de un sistema, determina la probabilidad de los futuros estados del sistema.

Cada proceso de Markov, lleva asociado una cierta función de probabilidad, que recibe el nombre de : función probabilidad de transición.

La teoria de los procesos de Markov, ha sido ampliamente estudiada, por autores como : Dynkin, Doob, Cohen, Ghikman, Skorokhod.

Los Procesos de difusión ordinarios, (P.D.O.), objeto de nuestro estudio, son procesos de Markov, cuyas probabilidades de transición verifican ciertas propiedades infinitesimales.

En el capítulo I de esta memoria, relacionamos los P.D.O., con las ecuaciones diferenciales, (E.D.E.), de la forma :

$$dX_t = A(t,X_t)dt + B(t,X_t)dW_t$$

$$t \geq 0$$

y vemos que bajo determinadas condiciones sobre $A(t,X_t)$ y $B(t,X_t)$, las soluciones de dichas E.D.E., son P.D.O.

$A(t,X_t)$, y $B^2(t,X_t)$, reciben el nombre de coeficientes tendencia y difusión, respectivamente, del proceso.

A lo largo de nuestro estudio, consideraremos familias de E.D.E., dependientes de un vector paramétrico θ, de la forma :

$$dX_t = A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t$$

$$X_o = H \qquad t \geq 0$$

donde :

$$\forall \quad t \geq 0 \qquad X_t \in \mathbb{R}^n$$

$\theta \in \Theta \subsetneq \mathbb{R}^k$, siendo Θ , un conjunto abierto

$(W_t \ , \ t \geq 0)$, es un proceso de Wiener n-dimensional

y supondremos que se cumplen las condiciones necesarias, para que las soluciones sean P.D.O.

Los objetivos que pretendemos en esta memoria, son fundamentalmente :

1º .- Construcción de tests de hipótesis, sobre los coeficientes tendencia y difusión de P.D.O., en distintas situaciones.

2º.- Aplicación de los tests construidos, al proceso logarítmico-normal multidimensional con factores exógenos.

Los procedimientos utilizados serán : el test de razón de verosimilitud, y tests de tipo secuencial.

En los últimos años, ha habido un gran interés en la estimación del coeficiente tendencia de un P.D.O. Destacaremos por su importancia, el trabajo de Taraskin(1974), quien estimó el coeficiente tendencia de un P.D.O. multidimensional, a partir de una trayectoria observada continuamente en un intervalo de tiempo $[0,T]$, donde T es fijo , ($0 < T < \infty$). Su estudio esta hecho bajo la hipótesis de que el coeficiente tendencia depende linealmente de los parámetros .Estudió también condiciones bajo las cuales, el estimador obtenido, (Utilizando el método de máxima verosimilitud), es consistente y asintóticamente normal. Un resumen de estos resultados puede verse en la subsección 2.2.2.

Apoyándonos en la normalidad asintótica del estimador máximo verosímil, construimos en 2.2.3. , el test de razón de verosimilitud para contrastar :

H_0 : $\theta \in \Theta_0$, donde Θ_0 , es un conjunto abierto de un subespacio p-dimensional ,$(p < k)$

H_1 : $\theta \in \Theta$

Este test, fue estudiado por Brown and Hewitt(1975), en el caso de P.D.O. homogéneos unidimensionales. El caso multidimensional, puede verse en Basawa and Prakasa-Rao(1980).

Posteriormente Sorensen(1983), estimó , también por el método de máxima verosimilitud, el coeficiente tendencia de un P.D.O. unidimensional, bajo la hipótesis de dependencia lineal en los parámetros, y observando una trayectoria hasta un determinado instante aleatorio. En la subsección 2.3.2, damos un resumen de estos resultados, ya generalizados al caso multidimensional.

Esto nos indujo a considerar el test antes planteado, en esta nueva situación. Este problema que hasta ahora no habia sido considerado, es resuelto en la subsección 2.3.3, donde el test es construido.

En 2.4 , se generaliza al caso en que consideramos N ,($N > 1$) trayectorias, tanto si observamos en un intervalo de tiempo fijo, como aleatorio.

Un interés especial dentro de los P.D.O., tienen los procesos homogéneos.

Para esta clase de procesos, Brown(1974a, 1974b), Nadas(1973), principalmente, construyen tests secuenciales sobre los coeficientes tendencia y difusión, en el caso unidimensional.

Ambos autores, utilizan tests secuenciales restringidos en el sentido de Armitage(1957).

En 2.5.3, damos un resumen sobre los trabajos de Brown, y en 2.5.4, proponemos un método para el caso de N trayectorias.

La teoria de los procesos de difusión ordinarios, debe su gran importancia a sus aplicaciones, (véase los estudios de Bharucha-Reid, Fisz, Barlett, Bailey, Takacs, entre otros).

Gran número de investigaciones, han demostrado que el uso de la distribución logarítmico-normal , es más apropiado que el de la Normal, ó la de Pareto, (véase los trabajos de Aitchison and Brown, Granger and Morgenstern, Sprekle, Gibrat, Prais, Orcutt, y otros).

Un estudio bien detallado sobre dicha distribución, puede verse en Aitchison and Brown(1969).

A lo largo de gran cantidad de trabajos, (Tintner(1973) , Tintner and Bello(1968), Tintner and Patel(1966), Tintner and Thomas(1963)), se pone de manifiesto, la importancia que los procesos logarítmico-normales tienen, sobre todo en el terreno de la economia. Ofrecen como principales ventajas :

1º.- Capacidad de predecir, a través de su tendencia exponencial.

2º.- Posibilidad de ser afectados por factores exógenos, es decir, variables dependientes del tiempo, pero no de los estados del proceso, de las que se supone que depende el vector de medias infinitesimales de la distribución.

3º.- Es comoda la inferencia en tales procesos. En especial, la obtención de estimadores máximo verosímiles, para los momentos infinitesimales, asi como para los parámetros que se introducen en los factores exógenos.

Los procesos logarítmico-normales unidimensionales, fueron estudiados por Tintner and Sengupta(1972). El caso multidimensional, fue tratado por Tintner and Narayanan(1966), y recientemente, Tintner and Gómez(1979), Gutierrez-Jáimez(1981), han estudiado los modelos basados en estas difusiones multidimensionales, desde la perspectiva de las E.D.E. de Itô.

En el capítulo III, estudiamos el Proceso logarítmico-normal multidimensional con factores exógenos, y vemos que se puede obtener como solución de una E.D.E. de Itô.

En las actividades económicas, intervienen una serie de factores aleatorios, que le confieren una naturaleza probabilística. Teniendo en cuenta la dependencia del tiempo, y la continuidad en la evolución de la economía, es lógico describir determinados procesos económicos, a través de procesos de difusión ordinarios. Observando la naturaleza de los cambios, y teniendo en cuenta las complejas actividades económicas, una hipótesis de cambio proporcional al estado del sistema, es usada para caracterizar la probabilidad de transición de la variable económica $X(t)$, que nos indica el estado de la economia en el instante t. Todo ello, hace que sea apropiado el uso de la distribución logarítmico-normal para tales estudios.

A través de los factores exógenos, podemos controlar el proceso económico desde el exterior. En las secciones 3.3, 3.4, y 3.5, construimos los correspondientes tests de razón de verosimilitud, estudiados en 2.2, 2.3, y 2.4, respectivamente, sobre el coeficiente tendencia del proceso. La importancia de dichos tests en nuestro caso, es que nos proporciona un método para discernir, en cada caso, qué factores exógenos, afectan al proceso, y cuáles no.

En 3.6, consideramos el proceso logarítmico-normal unidimensional sin factores exógenos, (dado que es el único caso homogéneo), y sobre él construimos los tests secuenciales estudiados en la sección 2.5.

Finalmente, en un apéndice, enumeramos algunas cuestiones para futuros estudios, relacionadas con este tema.

CAPITULO I

PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS. RELACION CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS

1.1 INTRODUCCION

El objetivo principal de este capítulo, es definir los procesos de difusión ordinarios (P.D.O.), como subclase de los procesos de Markov, asi como estudiar la relación existente, entre dichos procesos y las ecuaciones diferenciales estocásticas, (E.D.E.).

En la sección 1.2, definimos los procesos de Markov. Analizamos su función probabilidad de transición, y establecemos la ecuación de "Chapman-Kolmogorov". Por último, consideramos un tipo particular de proceso markoviano, denominado "Proceso de Markov homogéneo". Un estudio exhaustivo sobre los procesos de Markov, puede verse en Cohen(1982), Doob(1953), Dynkin(1965), Ghikman and Skorokhod(1972).

Imponiendo ciertas condiciones, sobre la función probabilidad de transición, definimos en 1.3, los P.D.O., como subclase de los Procesos de Markov, y establecemos las ecuaciones de Kolmogorov. Textos básicos son : Bharucha-Reid(1960), Wong(1971).

En 1.4, estudiamos la relación existente, entre los P.D.O. y las E.D.E.. Comenzamos construyendo la integral estocástica, con respecto a un cierto proceso de Wiener, para una determinada clase de funciones matriz-aleatorias, y analizamos sus principales propiedades. Posteriormente, establecemos las E.D.E., y consideramos el problema de la existencia y unicidad de sus soluciones, estudiando, bajo qué condiciones, dichas soluciones, son P.D.O. Véase Arnold(1973), Ghikman and Skorokhod (1972), Stroock and Varadhan(1979).

Finalmente, dada la importancia en capítulos posteriores, definimos en 1.5, los "instantes aleatorios", y consideramos sus principales propiedades. Para más detalles, puede verse, Loeve(1963), Breiman(1968), Stroock and Varadhan(1979).

A lo largo de todo el capítulo, eludimos las demostraciones, pudiendo verse, en la bibliografia citada en cada caso.

1.2 PROCESOS DE MARKOV

1.2.1 Definición

Decimos que un proceso estocástico $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, definido sobre un espacio probabilístico (Ω, F, P), y con valores en $\mathbb{R}^n$, es un proceso de Markov, si :

$\forall \; k \geq 1$, $\forall \; B \in \mathcal{B}^n$, y cualesquiera sean $t_1, \ldots, t_k \in [0,T]$

t.q. $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k \leq T$, se cumple :

$\forall \; t > t_k$

$$P(X_t \in B \,/\, X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) = P(X_t \in B/ \, X_{t_k}) \tag{1.1}$$

Siendo $\mathcal{B}^n$, el σ=algebra Borel sobre $\mathbb{R}^n$, y $0 < T < \infty$

Intuitivamente, que un proceso sea de Markov significa, que si el estado en que se encuentra el sistema, es conocido en un instante particular t_k, entonces la información adicional sobre la conducta del sistema, en los instantes anteriores a t_k, no interviene en el conocimiento del desarrollo probable del sistema en los instantes posteriores a t_k. Así pues, en un proceso de Markov, el pasado y el futuro, son estadísticamente independientes, cuando el presente es conocido.

1.2.2 Función probabilidad de transición

Sea $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Markov, con valores en $\mathbb{R}^n$.

$$\forall \quad s,t \in [0,T] \quad \text{t.q.} \quad s < t \quad y \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n$$

consideremos, la siguiente función :

$$\begin{aligned} P(s,x;t,.) \quad : \quad & \mathcal{B}^n \longrightarrow [0,1] \\ & B \longmapsto P(s,x;t,B) = P(X_t \in B \,/\, X_s = x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

La función así definida, es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, y recibe el nombre de : "función probabilidad de transición del proceso ".

En particular, si tomamos :

$$B = (-\infty, y_1] \times (-\infty, y_2] \times \ldots \times (-\infty, y_n]$$

se tendrá :

$$P(s,x;t,B) = P(X_{1t} \leq y_1, \ldots, X_{nt} \leq y_n \;/\; X_s = x)$$

que denotaremos simplificadamente $P(s,x;t,y)$, y que evidentemente, es una función de distribución, con respecto a la variable "y" :

$$\begin{aligned} P(s,x;t,.) \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \\ & y \longmapsto P(s,x;t,y) \end{aligned}$$

(1.3)

En lo que sigue, supondremos que la función dada en (1.3), verifica, las dos hipótesis siguientes :

1ª .-

$$\lim_{t \downarrow s} P(s,x;t,y) = \lim_{s \uparrow t} P(s,x;t,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < x \\ 1 & \text{si} \quad y \geq x \end{cases}$$

2ª

$$\exists \; \frac{\partial P(s,x;t,y)}{\partial y_1 \, \partial y_2 \ldots \partial y_n} \tag{1.4}$$

La función dada en (1.4), será denotada por : $p(s,x;t,y)$, y recibe el nombre de : " función densidad de transición".

1.2.3 Ecuación de Chapman- Kolmogorov.

Sea $X = (X_t , 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Markov, con valores en $\mathbb{R}^n$.

Entonces :

Cualesquiera sean $s,t,u \in [0,T]$ t.q.

$$0 \leq s \leq u \leq t \leq T$$

$\forall\ B \in \mathcal{B}^n$, y para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$P(s,x;t,B)$ satisface la ecuación :

$$P(s,x;t,B) = \int_{\mathbb{R}^n} P(u,z;t,B)p(s,x;u,z)dz$$

que es la llamada " Ecuación de Chapman - Kolmogorov". Dicha ecuación, es de una gran utilidad en el estudio de los procesos de Markov.

1.2.4 Procesos de Markov homogéneos.

Decimos que un proceso de Markov $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, con valores en $\mathbb{R}^n$, es homogéneo, si sus probabilidades de transición, son estacionarias, es decir, si :

$$\forall \quad s,t, \in [0,T] \qquad t.q. \qquad 0 \leq s \leq t \leq T$$

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad t.q. \qquad 0 \leq s+u \leq t+u \leq T$$

$$P(s,x;t,B) = P(s+u, x ; t+u, B) \tag{1.5}$$

1.3 PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS

1.3.1 Introducción.

Los P.D.O., son casos especiales de los procesos de Markov con funciones muestrales casi seguramente continuas. Esencialmente, son dos las aproximaciones diferentes, que se pueden hacer a la clase de los P.D.O.. Una consiste, en definirlos a través de una serie de condiciones en torno a las probabilidades de transición, y la otra, en estudiar la variable aleatoria X_t, que nos indica el estado del sistema en el instante t, y analizar sus variaciones con respecto al tiempo. Puede demostrase, (véase Arnold(1973)), que ambas aproximaciones, conducen a la misma clase de procesos. En esta sección, estudiaremos la primera aproximación citada.

1.3.2 Definición de Proceso de difusión ordinario.

Decimos que un proceso de Markov $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, con valores en $\mathbb{R}^n$, y funciones muestrales casi seguramente continuas, es un proceso de difusión ordinario, si sus probabilidades de transición, satisfacen las condiciones siguientes :

$$\forall \; s \in [0,T], \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \; \varepsilon > 0$$

(i) .-

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\|y-x\| > \varepsilon} p(s,x;t,y)\,dy = 0$$

(ii) .- Existe un vector n-dimensional, $A(s,x)$, t.q.

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\|y-x\| \leq \varepsilon} (y_i - x_i)\,p(s,x;t,y)\,dy = A_i(s,x)$$

$$i = 1,\dots,n$$

(iii).- Existe una matriz de orden nxn, $B(s,x)$, t.q.

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\|y-x\| \leq \varepsilon} (y_i-x_i)(y_j-x_j)\,p(s,x;t,y)\,dy = B_{ij}(s,x)$$

$$i,j = 1,\dots,n$$

Las funciones A y B, reciben el nombre de coeficientes "tendencia", y "difusión", del P.D.O., respectivamente. Entre las principales propiedades de $B(s,x)$, están :

a).- Es simétrica

b).- Es definida no negativa

Observemos, que en las condiciones (ii) y (iii), se utilizan momentos truncados, ello es debido, a que los momentos ordinarios, no tienen necesariamente que existir. A continuación veremos una proposición, que nos proporciona una condición suficiente, para la existencia de dichos momentos.

PROPOSICION 1.3.1

Sea $s \in [0,T]$, y $x \in \mathbb{R}^n$. Si para algún $\delta > 0$

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} ||x-y||^{2+\delta} p(s,x;t,y)dy = 0 \tag{1.6}$$

Entonces :

(i) .- $$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{||y-x||>\varepsilon} p(s,x;t,y)dy = 0$$

(ii) .-

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} (y_i - x_i)p(s,x;t,y)dy = A_i(s,x) \qquad i = 1,\dots,n$$

(iii).-

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} (y_i - x_i)(y_j - x_j) p(s,x;t,y)\,dy = B_{ij}(s,x)$$

$$i,j = 1,\ldots,n$$

Demostración : (véase Friedman(1975), pg 114)

NOTA 1.3.1

Veremos, que la función probabilidad de transición de un P.D.O., queda unívocamente determinada, por los coeficientes A y B. Este hecho, no deja de ser sorprendente, dado que dichos coeficientes, se obtienen sólo a partir de los dos primeros momentos, que en general no definen una distribución.

1.3.3 Ecuaciones de Kolmogorov para un P.D.O.

Sea $X = (X_t,\ 0 \leq t \leq T)$, un P.D.O., con valores en $\mathbb{R}^n$, y función probabilidad de transición $P(s,x;t,.)$. Es conocido, (véase Bharucha-Reid(1960), Wong(1971), etc), que bajo determinadas condiciones de diferenciabilidad y continuidad sobre : $P(s,x;t,y)$, $A(s,x)$, $B(s,x)$, se verifica :

$$-\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial s} = (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(s,x)\,\frac{\partial^2 p(s,x;t,y)}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(s,x)\,\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial x_i} \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial\, p(s,x;t,y)}{\partial\, t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (B_{ij}(t,y)p(s,x;t,y))}{\partial\, y_i \partial\, y_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, (A_i(t,y)p(s,x;t,y))}{\partial\, y_i} \tag{1.8}$$

(1.7) y (1.8), reciben el nombre de ecuaciones atrasada y adelantada de Kolmogorov, respectivamente. Es usual también el llamarlas simplemente, ecuaciones de difusión.

Las ecuaciones de difusión, son ecuaciones diferenciales parabólicas, y por consiguiente, pueden emplearse los métodos usuales para la resolución de tales ecuaciones. No obstante, dos métodos standard, que pueden ser empleados son :

1º.- Suponer que las variables son separables, es decir, intentar encontrar una solución de tal forma, que sea el producto de una función que únicamente dependa de "y", y otra que sólo dependa de "t".

2º.- Aplicar la transformación de Laplace a las ecuaciones de difusión. Resolver las ecuaciones transformadas y aplicar luego la formula de inversión a la solución obtenida.

1.4 RELACION ENTRE LOS PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS Y LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS.

1.4.1 Integral estocástica

Sea (Ω, F, P), un espacio de probabilidad, que supondremos completo, y sea $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Wiener m-dimensional, sobre dicho espacio.

Consideremos las siguientes familias de σ-algebras :

1.- $(F^W_t, 0 \leq t \leq T)$, donde : $F^W_t = \sigma(W_u, 0 \leq u \leq t)$

2.- $(F^W_{t+}, 0 \leq t \leq T)$, donde :

$$F^W_{t+} = \sigma(W_s - W_t, t \leq s \leq T)$$

Teniendo en cuenta, que $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, es un proceso con incrementos independientes, se deduce que :

$\forall\ t \in [0,T]$, F^W_t y F^W_{t+} , son independientes.

DEFINICION 1.4.1

Decimos que la familia de sub-σ-algebras $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, es "no-anticipativa", respecto al proceso de Wiener $(W_t , 0 \leq t \leq T)$, si :

1.- $F_s \subseteq F_t$, para $s \leq t$

2.- $F_t \supset F_t^W$ $\quad \forall \; t \in [0,T]$

3.- $\forall \; t \in [0,T]$, F_t es independiente de F_{t+}^W

DEFINICION 1.4.2

Sea $G(s,w)$, una función matriz-aleatoria, definida sobre $[0,T] \times \Omega$, y con valores en M_{nxm} , (denotamos así, al conjunto de matrices de orden nxm). Decimos que dicha función, es "no anticipativa", con respecto a la familia no-anticipativa de sub-σ-algebras $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, si :

$$\forall \; t \in [0,T] \qquad G(t,.) \text{ es } F_t\text{-medible}$$

En lo que sigue, denotaremos por $M_2^{n,m}[0,T]$, el conjunto de funciones no-anticipativas, que tienen sus trayectorias muestrales en $L_2[0,T]$, con probabilidad 1 , es decir :

$$P\left(\int_0^T \| G(s,.) \|^2 \, ds < \infty \right) = 1 \tag{1.9}$$

donde : $\| G \| = (\mathrm{Traza}(GG^*))^{1/2}$

($*$ significa traspuesta)

NOTA 1.4.1

El espacio $M_2^{n,m}[0,T]$, verifica las dos propiedades siguientes :

1.- Es un espacio lineal.

2.- $M_2^{n,m}[0,s] \supseteq M_2^{n,m}[0,t]$, para $s \leq t$

(véase Arnold(1973) , pg 65)

Denotaremos por $M_2^{n,m}$, el conjunto : $\bigcap_{t>0} M_2^{n,m}[0,t]$

CONSTRUCCION DE LA INTEGRAL ESTOCASTICA

Vamos a construir a continuación, la integral estocástica :

$$\int_0^T G(s,.)dW_s(.) \quad , \quad \forall\ G \in M_2^{n,m}[0,T] \ , \ \forall\ T > 0$$

La construcción se realizará, en dos etapas. En la primera, se construye, para una función particular de $M_2^{n,m}[0,T]$, denominada : " función salto ". Y en la segunda , se extiende a cualquier función de $M_2^{n,m}[0,T]$.

ETAPA I

Decimos que una función $G \in M_2^{n,m}[0,T]$, es una "función salto" , si existe una descomposición del intervalo $[0,T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T \qquad \text{t.q.}$$

$$\forall \quad s \in [t_{i-1},t_i) \qquad G(s) = G(t_{i-1})$$

$$i = 1,\dots,k$$

Para tales funciones, se define :

$$\int_0^T GdW = \int_0^T G(s,.)dW_s(.) = \sum_{i=1}^{k} G(t_{i-1},.)(W_{t_i}(.) - W_{t_{i-1}}(.)\ ) \tag{1.10}$$

ETAPA II

La extensión de la definición anterior, a cualquier función $G \in M_2^{n,m}[0,T]$, se basa en los siguientes lemas :

LEMA 1.4.1

$\forall$ $G \in M_2^{n,m}[0,T]$, existe una sucesión de funciones salto $(G_h)_{h\geq 1}$, t.q

$$P\Big(\lim_{h \nearrow \infty} \int_0^T \| G(s,.) - G_h(s,.) \|^2 ds = 0 \Big) = 1$$

LEMA 1.4.2

Sea $G \in M_2^{n,m}[0,T]$, una función salto, entonces cualesquiera sean $N > 0$ y $C > 0$

$$P\Big(\Big\| \int_0^T G(s,.) dW_s(.) \Big\| > C\Big) \leq (N/C^2) + P\Big(\int_0^T \| G(s,.) \|^2 ds > N\Big)$$

LEMA 1.4.3

Sea $G \in M_2^{n,m}[0,T]$, y $(G_h)_{h\geq 1}$ una sucesión de funciones salto t.q.

$$\int_0^T \| G(s,.) - G_h(s,.) \|^2 ds \xrightarrow[h \nearrow \infty]{P} 0$$

Entonces, la sucesión de variables aleatorias :

$(\int_0^T G_h(s,.)dW_s(.))_{h\geq 1}$, converge en probabilidad, a una cierta variable aleatoria que denotaremos $I(G)$, donde $\int_0^T G_h(s,.)dW_s(.)$, está definida en (1.10).

$I(G)$, no depende de la elección de la sucesión de funciones salto $(G_h)_{h\geq 1}$

(La demostración de los lemas anteriores puede verse en Arnold(1973)).

DEFINICION 1.4.3

$\forall\ G \in M_2^{n,m}[0,T]$, la integral estocástica, (también llamada integral de Itô), $\int_0^T GdW$, se define como la variable aleatoria $I(G)$, que está unívocamente determinada de acuerdo con los lemas precedentes.

PROPIEDADES

La integral definida anteriormente, tiene entre otras, las siguientes propiedades :

(i) .- $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ y $\forall\ G_1, G_2 \in M_2^{n,m}[0,T]$

$$\int_0^T (aG_1 + bG_2)dW = a\int_0^T G_1 dW + b\int_0^T G_2 dW$$

(ii) .-

$$\int_0^T G\,dW = \left(\sum_{j=1}^{m} \int_0^T G_{ij}(s)\,dW_{js} \right)_{i=1,\dots,n}$$

donde $W_s = (W_{js})_{j=1,\dots,m}$

(iii) .-

Cualesquiera sean $N > 0$ y $C > 0$

$$P\left(\left\| \int_0^T G\,dW \right\| > C \right) \leq \frac{N}{C^2} +$$

$$+ P\left(\int_0^T \|G\|^2 ds > N \right)$$

(iv) .-

La relación :

$$\int_0^T \| G(s,.) - G_h(s,.) \|^2 ds \xrightarrow[h \to \infty]{P} 0$$

implica :

$$\int_0^T G_h(s,.)dW_s(.) \xrightarrow[h\to\infty]{P} \int_0^T G(s,.)dW_s(.)$$

(esta propiedad sigue siendo cierta, aun en el caso de que $(G_h)_{h \geq 1}$, no sea una sucesión de funciones salto).

(v) .- Si $\int_0^T E\,\|G(s,.)\|^2 ds < \infty$, entonces :

$$E\left(\int_0^T G(s,.)dW_s(.) \right) = 0$$

$$E\left(\left(\int_0^T G(s,.)dW_s(.)\right)\left(\int_0^T G(s,.)dW_s(.) \right)^* \right) =$$

$$= \int_0^T E(\, GG^* \,)ds$$

En particular :

$$E\left(\left\|\int_0^T GdW \right\|^2\right) = \int_0^T E\,\|G\|^2 ds$$

(vi).-

Si $G \in L_2[0,T]$, y es independiente de w, entonces : $G \in M_2^{n,m}[0,T]$ y además se tiene que :

$$\int_0^T G\,dW \quad \text{se distribuye según una ley}$$

$$N_n\left(0, \int_0^T GG^* ds\right).$$

(vii).-

Si $G_1, G_2 \in M_2^{n,m}[0,T]$, son tales que :

$$\int_0^T E(\|G_i\|^2)ds < \infty \qquad i = 1,2$$

y si $A,B \in \mathcal{B}_{[0,T]}$, (σ-algebra Borel sobre $[0,T]$), entonces :

$$E\left(\left(\int_0^T G_1 dW\right)\left(\int_0^T G_2 dW\right)^*\right) = \int_0^T E(G_1 G_2^*)ds$$

1.4.2 La integral estocástica, como proceso estocástico

Sea $G \in M_2^{n,m}[0,T]$ y $A \in \mathcal{B}_{[0,T]}$, entonces ocurre que $GI_A \in M_2^{n,m}[0,T]$, donde I_A es la función indicadora del conjunto A. Se define entonces :

$$\int_A G\,dW = \int_0^T GI_A\,dW \qquad (1.11)$$

$\forall \quad A,B \in \mathcal{B}_{[0,T]}$, t.q. $A \cap B = \emptyset$

$$\int_{A \cup B} G\,dW = \int_A G\,dW + \int_B G\,dW$$

En particular, si $0 \leq a \leq b \leq c \leq T$, entonces :

$$\int_a^c G\,dW = \int_a^b G\,dW + \int_b^c G\,dW$$

Sea $G \in M_2^{n,m}[0,T]$, entonces $\forall\ t \in [0,T]$, podemos considerar la variable aleatoria, $\mathbb{R}^n$-valuada ,siguiente :

$$I_t(.) = \int_0^t G(s,.)dW_s(.) = \int_0^T G(s,.)I_{[0,t]}(.)dW_s(.)$$

$$I_0(.) = 0 \qquad [P] \tag{1.12}$$

Esta variable aleatoria, está definida unívocamente, salvo equivalencia.

NOTA 1.4.2

Si $G \in M_2^{n,m}$, es decir $G \in M_2^{n,m}[0,T] \quad \forall \ T \geq 0$, entonces I_t está definida $\forall \ t \geq 0$, y por consiguiente todos los resultados sobre I_t , son válidos sin ningún limite superior en el tiempo.

PROPIEDADES DEL PROCESO $(I_t , 0 \leq t \leq T)$

Supongamos que trabajamos, con una versión separable del proceso $(I_t , 0 \leq t \leq T)$, lo cual siempre es posible, (th. de Doob), podemos considerar entonces entre otras las siguientes propiedades :

(i) .- $\forall\ t \in [0,T]$, I_t es F_t-medible , y por consiguiente es no-anticipativo

(ii) .- Si $\int_0^t E\ \| G(s,.) \|^2 ds < \infty \quad \forall\ t \leq T$

$$(1.13)$$

Entonces el proceso $(I_t\ ,\ 0 \leq t \leq T)$, tiene incrementos ortogonales.

(iii).- El proceso $(\ I_t\ ,\ 0 \leq t \leq T\ )$, tiene funciones muestrales casi seguramente continuas.

(iv) .- Supuesto que se verifica (1.13), se tiene que : $(I_t\ ,\ F_t\ ,\ 0 \leq t \leq T)$, es una martingala, es decir :

$$E(I_t / F_s) = I_s \qquad \text{donde} \quad t \geq s$$

(v) .-

Supuesto que se verifica (1.13), se cumple :

$$E(I_t) = 0 \qquad \forall \quad t \in [0,T]$$

$$E(I_t I_s^*) = \int_0^{s \wedge t} E(G(u)G^*(u)) \, du$$

donde $s \wedge t = \min (s,t)$

NOTA 1.4.3

Si G es independiente de w , entonces $(I_t, 0 \leq t \leq T)$, es un proceso gaussiano , y teniendo en cuenta la propiedad (ii), es de incrementos independientes. Reciprocamente, todo proceso gaussiano n-dimensional $(X_t, 0 \leq t \leq T)$, con incrementos independientes , $X_0 = 0$, y $E(X_t) = 0 \quad \forall \quad t \in [0,T]$, se puede representar como una integral estocástica :

$$X_t = \int_0^t G dW \quad , \text{ donde } G \in M_2^{n,m}[0,T] \text{ es independiente de } w.$$

1.4.3 Diferenciales estocásticas

Sea $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Wiener m-dimensional, sobre (Ω, F, P), y sea $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, una familia de sub-σ-algebras de F , no-anticipativa. Supongamos que H es una variable aleatoria F_0-medible, y que $\bar{f}(s,w)$, es una función aleatoria con valores en $\mathbb{R}^n$, medible y no-anticipativa, con respecto a $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, y verificando :

$$\int_0^T \|\bar{f}(s,.)\| ds < \infty \quad [P]$$

DEFINICION 1.4.4

Consideremos el proceso $(X_t, 0 \leq t \leq T)$, donde :

$$X_t(.) = H(.) + \int_0^t \bar{f}(s,.) ds + \int_0^t \bar{G}(s,.) dW_s(.)$$

Decimos que dicho proceso tiene la diferencial estocástica :

$$dX_t(.) = \bar{f}(t,.)dt + \bar{G}(t,.)dW_t(.)$$
$$X_o = H \tag{1.14}$$

que simplemente notaremos :

$$dX_t = \bar{f}dt + \bar{G}dW_t$$
$$X_o = H$$

TEOREMA 1.4.1

Sea $u = u(t,x)$, una función continua definida sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^k$. Supongamos que admite las derivadas parciales siguientes :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = u_t \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = u_{x_i}$$

$$x = (x_1,\ldots,x_n)^*$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$$

siendo todas ellas continuas.

Si el proceso n-dimensional $(X_t, 0 \leq t \leq T)$, tiene la diferencial estocástica :

$$dX_t = fdt + GdW_t$$
$$X_o = H$$

Entonces el proceso $(Y_t, 0 \leq t \leq T)$, donde $Y_t = u(t,X_t)$

con valor inicial $Y_0 = u(0,H)$, también posee una diferencial estocástica, con respecto al mismo proceso de Wiener y viene dada por:

$$dY_t = \Big(u_t(t,X_t) + u_x^*(t,X_t)f(t) + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j}(t,X_t)(G(t)G^*(t))_{ij}\Big)dt + u_x^*(t,X_t)G(t)dW_t \tag{1.15}$$

donde $u_x^* = (u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$ es una matriz kxn, y $u_{x_i x_j}$, es un vector columna kx1. La expresión (1.15), es conocida bajo el nombre de formula de Itô.

1.4.4 Existencia y unicidad de soluciones.

La diferencial estocástica :

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t,X_t)dt + G(t,X_t)dW_t \\ X_0 &= H \qquad 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{1.16}$$

puede ser interpretada, como la ecuación que define un proceso estocástico desconocido $(X_t,\ 0 \le t \le T)$, con valor inicial X_0=H.

Para trabajar con tales ecuaciones diferenciales estocásticas, es suficiente tomar :

$$F_t = \sigma\,(H,\ W_s,\ 0 \le s \le t) \quad \forall\ t \in [0,T]$$

DEFINICION 1.4.5

Una ecuación, como la dada en (1.16), recibe el nombre de ecuación diferencial estocástica de Itô, siendo la variable aleatoria H, el valor inicial. Dicha ecuación, junto con su valor inicial, es una forma simbólica de escribir :

$$X_t = H + \int_0^t f(s,X_s)ds + \int_0^t G(s,X_s)dW_s$$

$$0 \leq t \leq T \qquad (1.17)$$

DEFINICION 1.4.6

Un proceso estocástico $(X_t, 0 \leq t \leq T)$, recibe el nombre de proceso solución de la ecuación (1.16) ó (1.17), si satisface las condiciones siguientes :

1.- X_t es F_t-medible $\forall \; t \in [0,T]$

2.- Las funciones $\bar{f}(t,.) = f(t,X_t(.))$ y $\bar{G}(t,.) = G(t,X_t(.))$, son tales que :

$$P\left(\int_0^T ||\bar{f}(s,.)|| ds < \infty \right) = 1$$

$$P\left(\int_0^T ||\bar{G}(s,.)||^2 ds < \infty \right) = 1$$

3.- Cualesquiera de las dos ecuaciones (1.16), (1.17), son satisfechas por $X_t \quad \forall \; t \in [0,T] \quad [P]$

TEOREMA 1.4.2 (existencia y unicidad)

Consideremos la E.D.E. :

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t,X_t)dt + G(t,X_t)dW_t \\ X_0 &= H \qquad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \tag{1.18}$$

Si se verifica : $\forall \; t \in [0,T] \; , \; \forall \; x,y \in \mathbb{R}^n \quad \exists \; K > 0$ t.q.

(i) .-
$$\|f(t,x) - f(t,y)\| + \|G(t,x) - G(t,y)\| \leq K \|x - y\|$$

(ii).-
$$\|f(t,x)\|^2 + \|G(t,x)\|^2 \leq (1 + \|x\|^2)K^2$$

Entonces :

La ecuación (1.18), tiene una única solución $\mathbb{R}^n$-valuada $(X_t,\ 0 \leq t \leq T)$, con trayectorias muestrales casi seguramente continuas, y con valor inicial $X_0 = H$

COROLARIO 1

El teorema 1.4.2, permanece cierto, si reemplazamos la condición (i), por la condición mas general :

$(i)'$.- $\forall\ N>0 \quad \exists\ K_N>0$ t.q. $\forall\ t\in[0,T]$

$\forall\ x,y\in\mathbb{R}^n$ t.q. $\|x\|\leq N$, $\|y\|\leq N$

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| + \|G(t,x)-G(t,y)\|$$

$$\leq K_N\|x-y\|$$

COROLARIO 2

Para que la condición (i) del teorema 1.4.2, (ó la (i)') sea satisfecha, es suficiente, que $\forall\ t\in[0,T]$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, las funciones $f(t,x)$ y $G(t,x)$, tengan derivadas parciales de primer orden con respecto a las componentes de x, continuas y acotadas sobre $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, (ó sobre $[0,T]\times\{\|x\|\leq N\}$).

NOTA 1.4.4

Si las funciones f y G, están definidas en $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ y si las hipótesis del teorema 1.4.2, son satisfechas en cada subintervalo $[0,T]\subset[0,\infty)$, entonces :

$$X_t = H + \int_0^t f(s,X_s)ds + \int_0^t G(s,X_s)dW_s$$

tiene solución única, definida para $t\geq 0$, y recibe el nombre de solución global.

1.4.5 Las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, como procesos de difusión ordinarios.

Consideremos la E.D.E.

$$dX_t = f(t,X_t)dt + G(t,X_t)dW_t$$

$$X_0 = H \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (1.19)$$

Consideremos ahora, la misma E.D.E., pero en el subintervalo $[s,T]$, donde $s > 0$, y con valor inicial $X_s = x \in R^n$, ó lo que es igual :

$$X_t = x + \int_s^t f(u,X_u)du + \int_s^t G(u,X_u)dW_u$$

$$0 < s \leq t \leq T \qquad (1.20)$$

TEOREMA 1.4.3

Consideremos la E.D.E., dada en (1.19), y supongamos que :

1.- Se satisfacen las condiciones del teorema 1.4.2

2.- f y G, son funciones continuas con respecto a la variable t.

Entonces :

1º.- El proceso solución de la E.D.E. (1.19), es un proceso de Markov, cuya distribución de probabilidad inicial, $(t = 0)$, es la distribución de H, y cuyas probabilidades de transición, vienen dadas por :

$$P(s,x;t,B) = P(\, X_t \in B \,/\, X_s = x \,) =$$

$$= P(X_t(s,x) \in B)$$

donde $(X_t(s,x), \quad s \leq t \leq T)$, es el proceso solución de la E.D.E. (1.20)

2º.- El proceso solución de la E.D.E. (1.19), es un P.D.O., con valores en $\mathbb{R}^n$, y teniendo como coeficientes tendencia y difusión : $f(t,x)$ y $G(t,x)G^*(t,x)$ respectivamente.

1.5 INSTANTES ALEATORIOS

1.5.1 <u>Definición</u>

Consideremos un espacio probabilistico (Ω, F, P), y sea $(F_t, \quad 0 \leq t)$, una familia no decreciente de sub-σ-algebras de F.

Decimos que una función $\tau : \Omega \longrightarrow [0,\infty)$, es un "instante aleatorio", relativo a la familia $(F_t, \, 0 \leq t \,)$, **si :**

$$\forall \quad t > 0 \qquad \tau^{-1}(\, [0,t] \,) \in F_t$$

1.5.2 σ-algebra asociado a un instante aleatorio

A todo instante aleatorio τ , se le puede asociar, un σ-algebra, que denotaremos por F_τ , definido de la siguiente manera :

$$F_\tau = \left\{ A \in F_\infty \ , \ \text{t.q.} \ \forall \ t \geq 0 \quad A \cap \tau^{-1}([0,t]) \in F_t \right\}$$

donde $F_\infty = \bigcup_t F_t$

1.5.3. Propiedades

Sea un instante aleatorio τ, y sea F_τ , su σ-algebra asociado. Consideraremos por su importancia, las tres propiedades siguientes :

1.- τ es F_τ-medible

2.- Si τ_1 y τ_2, son dos instantes aleatorios, tales que $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces $F_{\tau_1} \subseteq F_{\tau_2}$.

3.- Sea $(X_t, 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Markov, con valores en $\mathbb{R}^n$, construido sobre (Ω, F, P), y sea τ , un instante aleatorio, con respecto a la familia $(F_t^X \ , \ t \geq 0)$, donde $F_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, entonces, se verifica :

$$F_\tau = F_\tau^X = \sigma(X_s \ , \ 0 \leq s \leq \tau)$$

CAPITULO II

TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO.

2.1 INTRODUCCION

Nos planteamos en este capítulo, la construcción de tests de hipótesis, sobre el coeficiente tendencia de un P.D.O, cuando dicho coeficiente, depende linealmente de los parámetros.

Los procedimientos que utilizaremos , fundamentalmente serán : el test de razón de verosimilitud, y tests de tipo secuencial.

En la sección 2.2, construimos un test, por el procedimiento de razón de verosimilitud, supuesto, que disponemos de una única observación del proceso, en un intervalo de tiempo fijo. Previamente a la construcción del test, damos una serie de resultados, sobre continuidad absoluta de medidas inducidas por P.D.O., y estimadores máximo verosimiles. Los resultados de esta sección, pueden verse, si bien, bajo otro punto de vista, en Basawa and Prakasa-Rao(1980).

Teniendo en cuenta, los resultados de la sección 2.2, nos planteamos, las cuestiones siguientes :

1ª.- La construcción de un test similar, pero supuesto, que la observación del proceso, es realizada en un intervalo de tiempo, que depende de un instante aleatorio.

2ª.- La construcción del mismo test, supuesto que disponemos de N observaciones del proceso, tanto en el caso de observación del proceso, en un intervalo de tiempo fijo, como en el caso de que la observación se realice en un intervalo que depende de un instante aleatorio.

La primera cuestión planteada, la resolvemos en 2.3. Para ello, consideramos familias de instantes aleatorios, crecientes y con limite ∞ , y a través de un razonamiento similar al de la sección 2.2, construimos el test de razón de verosimilitud, basándonos en una serie de resultados sobre continuidad absoluta, y estimadores máximo verosimiles, para el caso de observación hasta un cierto instante aleatorio. Comprobamos después, que el test construido, tiene las mismas propiedades asintóticas, que el estudiado en la sección precedente.

La segunda cuestión, la abordamos en 2.4. Consideramos los casos de observación en intervalo de tiempo fijo, y en intervalo de tiempo dependiente de un instante aleatorio, y apoyándonos en una serie de resultados sobre continuidad absoluta, y estimadores máximo verosimiles, para los casos considerados, construimos los correspondientes tests de razón de verosimilitud, basados en la muestra de N trayectorias observadas. Vemos también que en ambas situaciones, los tests construidos tienen un comportamiento asintótico similar al caso $N = 1$.

Finalmente, en la sección 2.5, damos un breve resumen, de los principales resultados obtenidos por Brown, (véase : Brown(1974a), Brown(1974b)), sobre tests secuenciales, en torno a los coeficientes tendencia y difusión de un proceso de difusión ordinario homogeneo, con valores en $\mathbb{R}$. Brown , construye los citados tests, en base a muestras de tamaño $N = 1$, (que es la correspondiente trayectoria observada). En la subsección 2.5.4 , proponemos nosotros, un método para la construcción de los tests estudiados por Brown , en base a muestras de tamaño N.

2.2 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS.

2.2.1 Introducción

Consideremos, la familia de E.D.E.

$$dX_t = A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t$$

$$X_0 = H \qquad 0 \leq t \leq T \tag{2.1}$$

donde :

$\forall \ t \in [0,T] \quad X_t$ es $\mathbb{R}^n$-valuada

H es F_0-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ , un abierto de $\mathbb{R}^k$.

$(W_t, \ 0 \leq t \leq T)$, es un proceso de Wiener n-dimensional, construido sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, F, P), que $(X_t, \ 0 \leq t \leq T)$

Consideraremos el caso en que :

$$A(t,X_t;\theta) = \pi_0(t,X_t) + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \pi_j(t,X_t) \tag{2.2}$$

donde, $\pi_j(t,X_t)$ $j = 0,1,\ldots,k$, son funciones $\mathbb{R}^n$-valuadas, no-anticipativas, y tal que para $j = 1,\ldots,k$ son linealmente independientes sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. En lo que sigue, supondremos, que dichas funciones son conocidas.

Denotaremos por C_T el conjunto constituido por las funciones continuas sobre $[0,T]$, y con valores en $\mathbb{R}^n$. Sobre dicho espacio, vamos a construir un σ-algebra $\mathcal{B}_T$, de la siguiente manera :

A cada $t \in [0,T]$, le asociamos una función u_t t.q.

$$u_t \; : \; \begin{aligned} C_T &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto u_t(x) = x(t) \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{B}_T$, se define como el σ-algebra mínimo, sobre C_T, que hace medibles a todas las u_t , $0 \leq t \leq T$

$$\mathcal{B}_T = \sigma(u_t, \quad 0 \leq t \leq T)$$

Vamos a suponer que los coeficientes A y $B^{1/2}$ de (2.1), son tales que verifican las condiciones del teorema 1.4.2 $\forall \; \theta \in \Theta$. Por el citado teorema, sabemos entonces que $\forall \; \theta \in \Theta$ existe única solución de la correspondiente E.D.E. de (2.1). En lo que sigue, denotaremos por μ_θ , la medida inducida en el espacio medible $(C_T, \mathcal{B}_T)$, por el proceso solución de (2.1), cuando θ es el parámetro subyacente.

$$\forall \; B \in \mathcal{B}_T \qquad \mu_\theta(B) = P(\; w \; : \; X(w) \in B \;)$$

(donde $X(w) = (X_t(w) \; , 0 \leq t \leq T)$, supuesto que θ es el parámetro subyacente.)

2.2.2 Resultados previos

A continuación damos una serie de resultados, sobre los cuales nos apoyaremos para realizar contraste de hipótesis, sobre el coeficiente tendencia $A(t,X_t;\theta)$, supuesto que dicho coeficiente, es de la forma (2.2).

RESULTADO 1

Sea $\theta_0 \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, un valor arbitrario, pero fijo del parámetro, si :

(i) .- $\forall \; j = 0,1,\ldots,k$, π_j y $B^{1/2}$, satisfacen las condiciones del teorema 1.4.2.

(ii).- $\forall \ t \in [0,T]$, el sistema de ecuaciones :

$$B^{1/2}(t,X_t)\mathfrak{z}_j(t,X_t) = \pi_j(t,X_t)$$

tiene solución, con respecto a $\mathfrak{z}_j(t,X_t)$,

y ello $\forall \ j = 1,\ldots,k \qquad [\mu_{\theta_0}]$

(iii).- $\forall \ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k \quad$ y $\quad \forall \ j = 1,\ldots,k$

$$\mu_\theta\Big(\int_0^T \mathfrak{z}_j^*(t,X_t)\mathfrak{z}_j(t,X_t)dt < \infty \Big) = 1$$

Entonces :

1º .- $\forall \ \theta \in \Theta \qquad \mu_\theta \sim \mu_{\theta_0}$

2º.-

$$\frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_0}}(X) = \exp\Big((\theta - \theta_0)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^* J_T(\theta + \theta_0) \Big) \qquad (2.3)$$

donde :

$$D_T = \left(\int_0^T \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)(dX_s - \pi_0(s,X_s)ds) \right)_{k\times 1}$$

$$j = 1,\dots,k \qquad (2.4)$$

$$J_T = \left(\int_0^T \pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)ds \right)_{k\times k}$$

$$i,j = 1,\dots,k \qquad (2.5)$$

RESULTADO 2

Sea $$L_T(X(.);\theta) = \frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_0}}(X(.)) \qquad (2.6)$$

(donde $X(.) = (X_t(.),\ 0 \leq t \leq T)$, denota la trayectoria observada)

Tomando logaritmos en (2.6), y derivando con respecto a θ_j , $j = 1,\dots,k$, se obtiene :

$$\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_j} = D_{T,j} - \sum_{h=1}^{k} \theta_h J_{T,h,j}$$

$$j = 1,\dots,k$$

De donde se deduce, como ecuación de verosimilitud, en forma vectorial :

$$D_T - J_T\theta = 0 \qquad (2.7)$$

(El resultado 1, puede verse en Liptser and Shiryayev(1977, vol I), y el resultado 2, en Basawa and Prakasa-Rao(1980). Ambos resultados, para $n = 1$, pueden verse en Sorensen(1983).)

RESULTADO 3

Supongamos que θ, es el verdadero valor del parámetro, y sea $(X_t(.),\ 0 \leq t \leq T)$, la trayectoria observada. Si :

(i) .-

$$\frac{1}{T}\int_0^T \pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)\,ds \xrightarrow[T \nearrow \infty]{P_\theta} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

(ii).-

$$\frac{1}{T}\int_0^T E_\theta[\pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)]\,ds \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

donde $|g_{ij}| < \infty$ y $G = (g_{ij})$ $i,j=1,\dots,k$ no singular.

Entonces :

1º.- $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ T_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall\ T > T_\varepsilon$,

la ecuación de verosimilitud (2.7), tiene única solución, con probabilidad mayor que $1 - \varepsilon$. Dicha solución, vendrá dada por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T \tag{2.8}$$

2º.- $\hat{\theta}_T$, dado en (2.8), es débilmente consistente, para θ

3º.-

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta) \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} N_k(0, G^{-1})$$

(Véase Taraskin(1974), pg 217)

2.2.3 Construcción del test

Consideremos, la familia de E.D.E. dada en (2.1), donde el coeficiente tendencia $A(t,X_t;\theta)$, es de la forma (2.2). Supongamos, que se satisfacen todas las condiciones, para que los resultados vistos en 2.2.2, sean ciertos. Sabemos entonces, que si observamos una trayectoria del proceso en el intervalo $[0,T]$, el estimador máximo verosímil, del vector paramétrico θ, viene dado por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T$$

donde J_T y D_T, vienen dados en (2.5) y (2.4), respectivamente. Y se sabe también, que :

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta) \xrightarrow[T \uparrow \infty]{} N_k(0,G^{-1}) \tag{2.9}$$

donde θ, es el verdadero valor del parámetro, y G, es la matriz no singular dada en el resultado 3.

Sea $X(.) = (X_t(.),\ 0 \leq t \leq T)$, la trayectoria observada. Basándonos en esta muestra de tamaño $N = 1$, y apoyéndonos en el resultado asintótico (2.9), vamos a estudiar el test :

H_0 : $\theta \in \Theta_0$

siendo Θ_0, un conjunto abierto de un subespacio p-dimensional de $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$

($p < k$)

H_1 : $\theta \in \Theta$

es decir, la hipótesis alternativa, no impone restricción alguna sobre los parámetros.

(2.10)

Por razones de simplicidad, y sin que por ello, perdamos generalidad, vamos a suponer, que :

$$H_0 : \quad \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \dots = \theta_k = 0 \tag{2.11}$$

Donde, como se ve, hemos supuesto por comodidad, que son las $k - p$ últimas componentes de θ, las que se anulan, aunque en general, podrian ser $k-p$ componentes cualesquiera.

Vamos a emplear el test de razón de verosimilitud, para lo cual, hemos de calcular :

$$\lambda_T(X(.)) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}(L_T(X(.);\theta))}{\sup\limits_{\theta\in\Theta}(L_T(X(.);\theta))} =$$

$$= \frac{\sup\limits_{H_0}(L_T(X(.);\theta))}{\sup\limits_{H_1}(L_T(X(.);\theta))} \tag{2.12}$$

Donde $L_T(X(.);\theta)$, viene dada en (2.6), supuesto que consideramos un valor del parámetro, θ_0 , fijo, pero arbitrario.

Si tomamos logaritmos en (2.12) , tenemos :

$$\ln(\lambda_T(X(.))) = \sup_{H_0}(\ln(L_T(X(.);\theta))) - \sup_{H_1}(\ln(L_T(X(.);\theta))) \tag{2.13}$$

Ahora bien :

$$\sup_{H_1}(\ln(L_T(X(.);\theta))) \quad , \text{ se alcanza cuando } \quad \theta = \hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T$$

y analogamente

$$\sup_{H_o}(\ln(L_T(X(.);\theta))) \quad , \text{ se alcanza cuando :}$$

$$\theta = \hat{\theta}'_{T,H_o} = J_{TO}^{-1} D_{TO}$$

donde D_{TO} y J_{TO} , son las correspondientes cajas pxl, y pxp , respectivamente del vector D_T y de la matriz J_T , es decir :

$$D_T = \begin{pmatrix} D_{TO} \\ \hline D_{T1} \end{pmatrix} \qquad J_T = \left(\begin{array}{c|c} J_{TO} & J_{T1} \\ \hline J_{T1}^{*} & J_{T2} \end{array}\right)$$

siendo: (2.14)

D_{TO} un vector de dimensión pxl

D_{T1} un vector de dimensión (k-p)xl

J_{TO} una matriz de orden pxp

J_{T1} una matriz de orden px(k-p)

J_{T2} una matriz de orden (k-p)x(k-p)

Así pues, $\hat{\theta}'_{T,H_o}$, es el estimador máximo verosímil, obtenido de manera similar a $\hat{\theta}_T$, pero supuesto H_o . En lo que sigue, denotaremos por $\hat{\theta}_{T,H_o} = (\hat{\theta}'^{*}_{T,H_o}, \overbrace{0,\ldots,0}^{k-p})^{*}$, de tal manera, que $\hat{\theta}_{T,H_o}$, es de dimensión kx1.

Por consiguiente, teniendo en cuenta (2.6) y (2.3), tendremos que :

$$\sup_{H_1}[\ln(L_T(X(.);\theta))] = (\hat{\theta}_T - \theta_o)^{*}D_T - \frac{1}{2}(\hat{\theta}_T - \theta_o)^{*}J_T(\hat{\theta}_T + \theta_o)$$

y

$$\sup_{H_o}[\ln(L_T(X(.);\theta))] = (\hat{\theta}_{T,H_o} - \theta_o)^{*}D_T - \frac{1}{2}(\hat{\theta}_{T,H_o} - \theta_o)^{*}J_T(\hat{\theta}_{T,H_o} + \theta_o)$$

luego, teniendo en cuenta (2.13), podemos escribir :

$$- 2.\ln(\lambda_T(X(.))) = - 2\Big((\hat{\theta}_{T,H_o} - \theta_o)^{*}D_T - \frac{1}{2}(\hat{\theta}_{T,H_o} - \theta_o)^{*}J_T(\hat{\theta}_{T,H_o} + \theta_o) - (\hat{\theta}_T - \theta_o)^{*}D_T + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_T - \theta_o)^{*}J_T(\hat{\theta}_T + \theta_o)\Big) \qquad (2.15)$$

Sea $\quad S_T = \frac{1}{T} D_T \quad$ y $\quad V_T = \frac{1}{T} J_T$

entonces , a partir de (2.15), se deduce :

$$- \frac{2.\ln(\lambda_T(X(.)))}{T} = 2(\hat{\theta}_T - \hat{\theta}_{T,H_0})^{*} S_T -$$

$$- (\hat{\theta}_T - \theta_0)^{*} V_T (\hat{\theta}_T + \theta_0) + (\hat{\theta}_{T,H_0} - \theta_0)^{*} V_T (\hat{\theta}_{T,H_0} + \theta_0)$$

$$= \hat{\theta}_T^{*} S_T - \hat{\theta}'^{*}_{T,H_0} S_{T0} \qquad (2.16)$$

donde $\quad S_{T0} = \frac{1}{T} D_{T0}$

(La expresión anterior , se deduce, sin más que tener en cuenta que $S_T = V_T \hat{\theta}_T$, y cómo está definido $\hat{\theta}_{T,H_0}$)

Ahora bien, como :

$$\begin{pmatrix} S_{T0} \\ \hline S_{T1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V_{T0} & V_{T1} \\ \hline V_{T1}^{*} & V_{T2} \end{array}\right) . \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{T,p} \\ \hline \hat{\theta}_{T,k-p} \end{pmatrix}$$

donde :

$$S_{Ti} = \frac{1}{T} D_{Ti} \qquad\qquad V_{Ti} = \frac{1}{T} J_{Ti}$$

$$i = 0,1 \qquad\qquad i = 0,1,2$$

y

$\hat{\theta}_{T,p}$ es el vector constituido por las primeras p componentes del vector $\hat{\theta}_T$

$\hat{\theta}_{T,k-p}$ es el vector constituido por las últimas k-p componentes de $\hat{\theta}_T$

Entonces :

$$S_{T0} = V_{T0}\,\hat{\theta}_{T,p} + V_{T1}\hat{\theta}_{T,k-p} = (\,V_{T0}\,|\,V_{T1})\,\hat{\theta}_T$$

Por otro lado, sabemos que $S_{T0} = V_{T0}\hat{\theta}'_{T,H_0}$, de donde deducimos, teniendo en cuenta (2.16) :

$$\frac{-\,2.\ln(\lambda_T(X(.)))}{T} = \hat{\theta}_T^{*}\,V_T\,\hat{\theta}_T - S_{T0}^{*}\,V_{T0}^{-1}\,S_{T0}$$

$$= \hat{\theta}_T^{*}\,V_T\hat{\theta}_T - \hat{\theta}_T^{*}\,(V_{T0}\,|\,V_{T1})^{*}V_{T0}^{-1}(V_{T0}|V_{T1})\hat{\theta}_T$$

$$= \hat{\theta}_T^* \left[V_T - (V_{T0} \mid V_{T1})^* V_{T0}^{-1} (V_{T0} \mid V_{T1}) \right] \hat{\theta}_T$$

$$= \hat{\theta}_T^* H_T \hat{\theta}_T \qquad (2.17)$$

donde por H_T , hemos denotado , la expresión matricial situada entre corchetes.

Es inmediato comprobar que :

$$-H_T + V_T = (V_{T0} \mid V_{T1})^* V_{T0}^{-1} (V_{T0} \mid V_{T1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} V_{T0} & V_{T1} \\ V_{T1}^* & V_{T1}^* V_{T0}^{-1} V_{T1} \end{pmatrix}_{k \times k} \Rightarrow H_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{T2} - V_{T1}^* V_{T0}^{-1} V_{T1} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente a partir de (2.17), podremos escribir:

$$\frac{-2.\ln(\lambda_T(X(.)))}{T} = \hat{\theta}_{T,k-p}^* (V_{T2} - V_{T1}^* V_{T0}^{-1} V_{T1}) \hat{\theta}_{T,k-p}$$

(2.18)

Pero por (2.9), sabemos que :

$$T^{1/2}\,(\,\hat{\theta}_T - \theta\,) \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} N_k(\,0,\,G^{-1})$$

luego para $T > 0$ fijo, (suficientemente grande) :

$$T^{1/2}\,(\,\hat{\theta}_T - \theta\,) \approx N_k(\,0\,,\,V_T^{-1})$$

de donde se deduce que :

$$\hat{\theta}_T \approx N_k(\,\theta\,,\,\frac{1}{T}\,V_T^{-1}\,) \tag{2.19}$$

Por una propiedad matricial, (véase Searle(1982) , pg 260), se tiene :

$$V_T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} V_{T0} & V_{T1} \\ \hline V_{T1}^{*} & V_{T2} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I & -\,V_{T0}^{-1}V_{T1} \\ \hline I & I \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} V_{T0}^{-1} & 0 \\ \hline * & P_T \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & P_T \end{array}\right) \tag{2.20}$$

Donde $\qquad P_T = (V_{T2} - V^{*}_{T1} V^{-1}_{T0} V_{T1})^{-1}$ (2.21)

(La matriz que iria en el lugar del asterisco, no la damos por no intervenir en el problema.)

Entonces a partir de (2.19) y (2.20), se deduce :

$$\hat{\theta}_{T,k-p} \approx N_{k-p}(\theta_{k-p} , \tfrac{1}{T} P_T)$$

y por las propiedades de la normal multivariante, se tiene que :

$$\hat{\theta}^{*}_{T,k-p} \; T \; P^{-1}_T \; \hat{\theta}_{T,k-p} \approx \chi^2_{k-p} \qquad (2.22)$$

De donde se deduce, sin más que tener en cuenta (2.18), (2.21) y (2.22), que :

$$- 2.\ln(\lambda_T (X(.))) \approx \chi^2_{k-p}$$

El test de razón de verosimilitud, rechaza H_0 , si ocurre que :

$\lambda_T(x(.)) < d_T$, donde d_T es una constante, determinada de tal manera que :

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mu_\theta (x : \lambda_T(x) < d_T) = \alpha$$

Donde α , es el nivel de significación fijado. Ahora bien lo anterior es equivalente a decir que rechazamos H_0 , si

$- 2.\ln(\lambda_T(x(.))) > \bar{d}_T$, donde $\bar{d}_T$, se determina de tal manera que :

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mu_\theta (x : - 2.\ln(\lambda_T(x(.))) > \bar{d}_T) = \alpha$$

2.3 TEST DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS, Y LA OBSERVACION SE REALIZA HASTA UN INSTANTE ALEATORIO

2.3.1 Introducción

Consideremos, la familia de E.D.E.

$$\begin{aligned} dX_t &= A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t \\ X_0 &= H \qquad\qquad t \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.23)$$

donde :

$\forall \; t \geq 0 \qquad X_t$ es $\mathbb{R}^n$-valuada

H es F_0-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ , un abierto de $\mathbb{R}^k$

$(W_t \; , \; t \geq 0)$, es un proceso de Wiener n-dimensional, construido sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, F, P), que $(X_t, \; t \geq 0)$.

Al igual que en la sección 2.2, nos reduciremos al caso en que el coeficiente tendencia $A(t,X_t;\theta)$, es de la forma :

$$A(t,X_t;\theta) = \pi_o(t,X_t) + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \pi_j(t,X_t) \tag{2.24}$$

donde :

$\pi_j(t,X_t)$, $j = 0,1,\ldots,k$, son funciones $\mathbb{R}^n$-valuadas , no-anticipativas, y tal que para $j = 1,\ldots,k$, son linealmente independientes sobre $[0,\infty)\times \mathbb{R}^n$. En nuestro estudio, supondremos, que dichas funciones son conocidas.

Sea C, el conjunto de funciones continuas sobre el intervalo $[0,\infty)$, y con valores en $\mathbb{R}^n$. Consideraremos en lo que sigue, familias de instantes aleatorios $(\tau_t\ ,\ t \geq 0)$, definidos sobre C, y tal que :

a).- Si $t_1 \leq t_2$ entonces $\tau_{t_1} \leq \tau_{t_2}$

b).- $\lim\limits_{t \nearrow \infty} \tau_t = \infty$ (2.25)

(instantes aleatorios, relativos a la familia $(\mathfrak{F}_s,\ s \geq 0)$ donde $\mathfrak{F}_s$, es el σ-algebra usual sobre C_s , véase subsección 2.2.1)

Supondremos, que los coeficientes A y $B^{1/2}$, de (2.23), satisfacen las condiciones del teorema 1.4.2, y $\forall$ t denotaremos por $\mu_{\tau_t,\theta}$, la medida restricción de μ_θ, sobre el σ-algebra $\mathcal{B}_{\tau_t}$, (véase sección 1.5).

2.3.2 Resultados previos

Damos a continuación, una serie de resultados análogos a los vistos en 2.2.2, pero considerando instantes aleatorios.

Estos resultados, nos permitirán construir, un test de hipótesis, sobre el coeficiente tendencia $A(t,X_t;\theta)$, supuesto, que dicho coeficiente es de la forma considerada en (2.24).

RESULTADO 1

Sea $\theta_0 \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, un valor arbitrario, pero fijo del parámetro. Y sea τ_s un instante aleatorio cualquiera de la familia $(\tau_t, t \geq 0)$, familia que suponemos en las condiciones dadas en (2.25).

Si :

(i).- $\forall$ $j = 0,1,\ldots,k$, π_j y $B^{1/2}$, satisfacen las condiciones del teorema 1.4.2

(ii) .- $\forall\ j = 1,\dots,k$ y $\forall\ t \leq T_s$, el sistema de ecuaciones :

$$B^{1/2}(t,X_t)\beta_j(t,X_t) = \pi_j(t,X_t)$$

tiene solución con respecto a $\beta_j(t,X_t)$ $[\mu_{T_s,\theta_o}]$

(iii).- $\forall\ j = 1,\dots,k$ y $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\mu_{T_s,\theta}\left(\int_0^{T_s} \beta_j^*(t,X_t)\beta_j(t,X_t)dt < \infty \right) = 1$$

Entonces :

1º.- $\forall\ \theta \in \Theta$ $\mu_{T_s,\theta} \sim \mu_{T_s,\theta_o}$

2º.-

$$\frac{d\mu_{T_s,\theta}}{d\mu_{T_s,\theta_o}}(X) = \exp\left((\theta - \theta_o)^* D_{T_s} - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* J_{T_s}(\theta + \theta_o) \right) \qquad (2.26)$$

donde :

$$D_{\tau_s} = \left(\int_0^{\tau_s} \pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)(dX_t - \pi_o(t,X_t)dt) \right)_{k\times 1}$$

$$j = 1,\ldots,k \qquad (2.27)$$

$$J_{\tau_s} = \left(\int_0^{\tau_s} \pi_i^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_j(t,X_t)dt \right)_{k\times k}$$

$$i,j = 1,\ldots,k \qquad (2.28)$$

RESULTADO 2

Si observamos una trayectoria $X(.) = (X_t(.),\ 0 \leq t \leq \tau_s)$ y consideramos como función de verosimilitud :

$$L_{\tau_s}(\ X(.);\ \theta\ ) = \frac{d\mu_{\tau_s,\theta}}{d\mu_{\tau_s,\theta_o}}(\ X(.)\ ) \qquad (2.29)$$

Entonces, tomando logaritmos en (2.29), y derivando con respecto a θ_j , $j = 1,\ldots,k$, obtenemos :

$$\frac{\partial \ln(L_{\tau_s}(X(.);\theta))}{\partial \theta_j} = D_{\tau_s,j} - \sum_{h=1}^{k} \theta_h J_{\tau_s,h,j}$$

$$j = 1,\ldots,k$$

De donde deducimos, como ecuación de verosimilitud , en forma vectorial :

$$D_{\tau_s} - J_{\tau_s}\theta = 0 \tag{2.30}$$

RESULTADO 3

Supongamos que θ, es el verdadero valor del parámetro, y sea $X(.) = (X_t(.),\quad 0 \leq t \leq \tau_s)$, la trayectoria observada, si:

(i) .-

$$\frac{1}{s}\int_0^{\tau_s} \pi_i^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_j(t,X_t)dt \xrightarrow[s \uparrow \infty]{P_\theta} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

(ii).-

$$\frac{1}{s}E_\theta\left(\int_0^{\tau_s} \pi_i^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_j(t,X_t)dt\right) \xrightarrow[s \uparrow \infty]{} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

donde $|g_{ij}|<\infty, i,j = 1,\dots,k$ y la matriz $G = (g_{ij})\quad i,j = 1,\dots,k$, es no singular

Entonces :

1º.- $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ s_{\varepsilon} > 0\quad$ t.q $\quad \forall\ s > s_{\varepsilon}$

la ecuación de verosimilitud (2.30), tiene única solución, con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$, y dicha solución, viene dada por :

$$\hat{\theta}_{T_s} = J^{-1}_{T_s} D_{T_s} \tag{2.31}$$

2º.- $\hat{\theta}_{T_s}$, dado en (2.31), es débilmente consistente para θ

3º.-

$$s^{1/2}\,(\,\hat{\theta}_{T_s} - \theta\,) \xrightarrow[s \nearrow \infty]{} N_k(\,0,\,G^{-1})$$

2.3.3 Construcción del test

Considerémos, la familia de E.D.E., dada en (2.23), donde el coeficiente tendencia, es de la forma (2.24), y sea $(\tau_t, 0 \leq t)$, una familia de instantes aleatorios sobre C, verificando (2,25). Supongamos, que se satisfacen todas las condiciones, para que los resultados vistos en 2.3.2, sean ciertos. Sabemos entonces, que si observamos una trayectoria del proceso en el intervalo $[0, \tau_t]$, el estimador máximo verosímil, del vector paramétrico θ, viene dado por :

$$\hat{\theta}_{\tau_t} = J^{-1}_{\tau_t} D_{\tau_t}$$

Donde J_{τ_t} y D_{τ_t}, estan definidos en (2.28), y (2.27), respectivamente, y además :

$$t^{1/2} (\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta) \xrightarrow[t \nearrow \infty]{} N_k(0 , G^{-1}) \tag{2.32}$$

donde G, es la matriz no singular dada en el resultado 3, y θ, suponemos que es el verdadero valor del parámetro.

Sea $X(.) = (X_s(.) \ , \ 0 \leq s \leq \tau_t)$, donde t es fijo, la trayectoria observada. Nos proponemos, basándonos en esta muestra y en los resultados vistos en 2.3.2, estudiar el test :

H_o : $\theta \in \Theta_o$

donde Θ_o, es un conjunto abierto de un subespacio p-dimensional de $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$,

con $p < k$

$$H_1 : \quad \theta \in \Theta \tag{2.33}$$

Al igual que en 2.2.3, supondremos por razones de simplicidad, que :

$$H_o : \quad \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \ldots = \theta_k = 0 \tag{2.34}$$

Emplearemos el test de razón de verosimilitud. Por lo tanto, tenemos que calcular :

$$\lambda_{\tau_t}(X(.)) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_o}(L_{\tau_t}(X(.);\theta))}{\sup\limits_{\theta\in\Theta}(L_{\tau_t}(X(.);\theta))} = \frac{\sup\limits_{H_o}(L_{\tau_t}(X(.);\theta))}{\sup\limits_{H_1}(L_{\tau_t}(X(.);\theta))} \tag{2.35}$$

Si tomamos logaritmos en (2.35), tenemos :

$$\ln(\lambda_{T_t}(X(.))) = \sup_{H_0}(\ln(L_{T_t}(X(.);\theta))) - \sup_{H_1}(\ln(L_{T_t}(X(.);\theta))) \qquad (2.36)$$

Ahora bien :

$\sup_{H_1} [\ln(L_{T_t}(X(.);\theta))]$, se alcanza cuando $\theta = \hat{\theta}_{T_t}$

y

$\sup_{H_0} [\ln(L_{T_t}(X(.);\theta))]$, se alcanza cuando $\theta = \hat{\theta}'_{T_t,H_0}$

donde $\hat{\theta}'_{T_t,H_0}$, se obtiene de la misma manera que $\hat{\theta}_{T_t}$,

pero supuesto H_0 , por consiguiente, se tendrá :

$$\hat{\theta}'_{T_t,H_0} = J^{-1}_{T_t0} D_{T_t0}$$

donde D_{T_t0} y J_{T_t0} son las correspondientes cajas de D_{T_t} y J_{T_t} , supuesta la descomposición siguiente :

$$D_{\Gamma_t} = \begin{pmatrix} D_{\Gamma_t 0} \\ \hline D_{\Gamma_t 1} \end{pmatrix} \qquad J_{\Gamma_t} = \left(\begin{array}{c|c} J_{\Gamma_t 0} & J_{\Gamma_t 1} \\ \hline J^{*}_{\Gamma_t 1} & J_{\Gamma_t 2} \end{array}\right)$$

(2.37)

siendo :

$D_{\Gamma_t 0}$ un vector de dimensión $p\times 1$

$D_{\Gamma_t 1}$ un vector de dimensión $(k-p)\times 1$

$J_{\Gamma_t 0}$ una matriz de orden $p\times p$

$J_{\Gamma_t 1}$ una matriz de orden $p\times(k-p)$

$J_{\Gamma_t 2}$ una matriz de orden $(k-p)\times(k-p)$

En lo que sigue, denotaremos por $\hat{\theta}_{\Gamma_t,H_0} = (\hat{\theta}'^{*}_{\Gamma_t,H_0}, 0, \overset{k-p}{\overbrace{\ldots}}, 0)^{*}$, por consiguiente, $\hat{\theta}_{\Gamma_t,H_0}$, será de dimensión $k\times 1$

Teniendo en cuenta (2.29) y (2.26), tenemos :

$$\sup_{H_1}[\ln(L_{\Gamma_t}(X(.);\theta))] = (\hat{\theta}_{\Gamma_t} - \theta_0)^{*} D_{\Gamma_t} - \frac{1}{2}(\hat{\theta}_{\Gamma_t} - \theta_0)^{*} J_{\Gamma_t}(\hat{\theta}_{\Gamma_t} + \theta_0)$$

$$\sup_{H_0}[\ln(L_{\Gamma_t}(X(.);\theta))] = (\hat{\theta}_{\Gamma_t,H_0} - \theta_0)^{*} D_{\Gamma_t} - $$

$$- \frac{1}{2}(\hat{\theta}_{\Gamma_t,H_0} - \theta_0)^{*} J_{\Gamma_t}(\hat{\theta}_{\Gamma_t,H_0} + \theta_0)$$

Luego, a partir de (2.36), se tendrá:

$$- 2.\ln(\lambda_{\tau_t}(X(.))) = - 2.((\hat{\theta}_{\tau_t,H_o} - \theta_o)^{*} D_{\tau_t} -$$

$$- \frac{1}{2} (\hat{\theta}_{\tau_t,H_o} - \theta_o)^{*} J_{\tau_t} (\hat{\theta}_{\tau_t,H_o} + \theta_o) - (\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta_o)^{*} D_{\tau_t}$$

$$+ \frac{1}{2} (\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta_o)^{*} J_{\tau_t} (\hat{\theta}_{\tau_t} + \theta_o)) \tag{2.38}$$

Sea :

$$S_{\tau_t} = \frac{1}{t} D_{\tau_t} \qquad V_{\tau_t} = \frac{1}{t} J_{\tau_t}$$

Entonces, teniendo en cuenta (2.38), se deduce , sin más que tener en cuenta que $S_{\tau_t} = V_{\tau_t} \hat{\theta}_{\tau_t}$, y como está definido $\hat{\theta}_{\tau_t,H_o}$, que :

$$\frac{- 2.\ln(\lambda_{\tau_t}(X(.)))}{t} = \hat{\theta}^{*}_{\tau_t} S_{\tau_t} - \hat{\theta}'^{*}_{\tau_t,H_o} S_{\tau_t 0} \tag{2.39}$$

Ahora bien como :

$$\begin{pmatrix} S_{\Gamma_t 0} \\ \hline S_{\Gamma_t 1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} V_{\Gamma_t 0} & V_{\Gamma_t 1} \\ \hline V^{*}_{\Gamma_t 1} & V_{\Gamma_t 2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{\Gamma_t, p} \\ \hline \hat{\theta}_{\Gamma_t, k-p} \end{pmatrix}$$

donde :

$$S_{\Gamma_t i} = \frac{1}{t} D_{\Gamma_t i} \qquad\qquad V_{\Gamma_t i} = \frac{1}{t} J_{\Gamma_t i}$$

$$i = 0,1 \qquad\qquad\qquad i = 0,1,2$$

y

$\hat{\theta}_{\Gamma_t, p}$ es el vector constituido por las primeras p componentes de $\hat{\theta}_{\Gamma_t}$

$\hat{\theta}_{\Gamma_t, k-p}$ es el vector constituido por las últimas k-p componentes de $\hat{\theta}_{\Gamma_t}$

Entonces :

$$S_{\Gamma_t 0} = V_{\Gamma_t 0}\, \hat{\theta}_{\Gamma_t, p} + V_{\Gamma_t 1}\, \hat{\theta}_{\Gamma_t, k-p} =$$

$$= (V_{\Gamma_t 0} \mid V_{\Gamma_t 1})\, \hat{\theta}_{\Gamma_t}$$

Por otra parte, sabemos que $S_{\Gamma_t 0} = V_{\Gamma_t 0}\, \theta'_{\Gamma_t, H_0}$, de donde deducimos, teniendo en cuenta (2.39) :

$$\frac{-2.\ln(\lambda_{\tau_t}(X(.)))}{t} = \theta^*_{\tau_t} V_{\tau_t} \hat{\theta}_{\tau_t} - S^*_{\tau_t 0} V^{-1}_{\tau_t 0} S_{\tau_t 0} =$$

$$= \hat{\theta}^*_{\tau_t} V_{\tau_t} \hat{\theta}_{\tau_t} - \hat{\theta}^*_{\tau_t} (V_{\tau_t 0} | V_{\tau_t 1})^* V^{-1}_{\tau_t 0} (V_{\tau_t 0} | V_{\tau_t 1}) \hat{\theta}_{\tau_t}$$

$$= \hat{\theta}^*_{\tau_t} \left[V_{\tau_t} - (V_{\tau_t 0} | V_{\tau_t 1})^* V^{-1}_{\tau_t 0} (V_{\tau_t 0} | V_{\tau_t 1}) \right] \hat{\theta}_{\tau_t}$$

$$= \hat{\theta}^*_{\tau_t} H_{\tau_t} \hat{\theta}_{\tau_t} \qquad (2.40)$$

Donde H_{τ_t} denota la expresión matricial entre corchetes.

Ahora bien, es inmediato ver que :

$$- H_{\tau_t} + V_{\tau_t} = (V_{\tau_t 0} | V_{\tau_t 1})^* V^{-1}_{\tau_t 0} (V_{\tau_t 0} | V_{\tau_t 1}) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} V_{\tau_t 0} & V_{\tau_t 1} \\ \hline V^*_{\tau_t 1} & V^*_{\tau_t 1} V^{-1}_{\tau_t 0} V_{\tau_t 1} \end{array} \right) \Rightarrow H_{\tau_t} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & V_{\tau_t 2} - V^*_{\tau_t 1} V^{-1}_{\tau_t 0} V_{\tau_t 1} \end{array} \right)$$

Asi pues , a partir de (2,40), tendremos que :

$$\frac{-2.\ln(\lambda_{T_t}(X(.)))}{t} = \hat{\theta}_{T_t,k-p}(V_{T_t 2} - V^{*}_{T_t 1} V^{-1}_{T_t 0} V_{T_t 1})\,\hat{\theta}_{T_t,k-p}$$

(2.41)

Por (2.32), sabemos que :

$$t^{1/2}(\hat{\theta}_{T_t} - \theta) \underset{t \uparrow \infty}{\longrightarrow} N_k(0, G^{-1})$$

luego para t fijo , (suficientemente grande) :

$$t^{1/2}(\hat{\theta}_{T_t} - \theta) \approx N_k(0, V^{-1}_{T_t})$$

de donde se deduce :

$$\hat{\theta}_{T_t} \approx N_k(\theta, \frac{1}{t} V^{-1}_{T_t})$$

(2.42)

Pero por una propiedad matricial, (véase Searle(1982), pg 260), se tiene :

$$V^{-1}_{\tau_t} = \left(\begin{array}{c|c} V_{\tau_t 0} & V_{\tau_t 1} \\ \hline V^{*}_{\tau_t 1} & V_{\tau_t 2} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I & -V^{-1}_{\tau_t 0} V_{\tau_t 1} \\ \hline I & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} V^{-1}_{\tau_t 0} & 0 \\ \hline & P_{\tau_t} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & P_{\tau_t} \end{array}\right) \tag{2.43}$$

donde $P_{\tau_t} = (V_{\tau_t 2} - V^{*}_{\tau_t 1} V^{-1}_{\tau_t 0} V_{\tau_t 1})^{-1}$

(2.44)

Entonces a partir de (2.42) y (2.43), se deduce :

$$\hat{\theta}_{\tau_t, k-p} \approx N_{k-p}(\theta_{k-p} , \frac{1}{t} P_{\tau_t})$$

y por las propiedades de la normal multivariante , tendremos que :

$$\hat{\theta}_{\tau_t, k-p}{}^{t} P^{-1}_{\tau_t} \hat{\theta}_{\tau_t, k-p} \approx \chi^2_{k-p} \tag{2.45}$$

Y teniendo en cuenta (2.41), (2.44) y (2.45), que:

$$- 2.\ln(\lambda_{\Gamma_t}(X(.))) \approx \chi^2_{k-p}$$

El test de razón de verosimilitud, rechaza H_o, si :

$$\lambda_{\Gamma_t}(X(.)) < d_{\Gamma_t}$$

donde d_{Γ_t}, es una constante determinada de manera

que :

$$\sup_{\theta \in \Theta_o} \mu_\theta (X : \lambda_{\Gamma_t}(X) < d_{\Gamma_t}) = \alpha$$

siendo α, el nivel de significación prefijado.

Pero lo anterior, es equivalente a decir, que rechazamos H_o, si :

$$- 2.\ln(\lambda_{\Gamma_t}(X(.))) > \bar{d}_{\Gamma_t}$$

donde $\bar{d}_{\Gamma_t}$, se determina de manera que :

$$\sup_{\theta \in \Theta_o} \mu_\theta (X : - 2.\ln(\lambda_{\Gamma_t}(X)) > \bar{d}_{\Gamma_t}) = \alpha$$

2.4 TEST DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS, Y DISPONEMOS DE N OBSERVACIONES.

2.4.1 Introducción

Sea la familia de E.D.E.

$$dX_t = A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t;\theta)dW_t$$

$$X_0 = H \qquad\qquad t \geq 0$$

donde :

$\forall\ t \geq 0 \quad X_t$ es $\mathbb{R}^n$-valuada

H es F_0-medible y $P(\ \|H\| < \infty\ ) = 1$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ, un abierto de $\mathbb{R}^k$

$(W_t,\ t \geq 0\ )$, un proceso de Wiener, sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega,\ F,\ P)$, que $(X_t,\ t \geq 0\ )$.

Y supongamos que $A(t,X_t;\theta)$, es de la forma :

$$A(t,X_t;\theta) = \pi_0(t,X_t) + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \pi_j(t,X_t)$$

Siendo π_j , $j = 0,1,\ldots,k$, funciomes $\mathbb{R}^n$-valuadas no-anticipativas, y para $j = 1,\ldots,k$, linealmente independientes sobre $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Funciones , que a lo largo de nuestro estudio, suponemos conocidas.

En estas condiciones, hemos construido, en las secciones anteriores, un test de hipótesis, sobre el coeficiente tendencia $A(t,X_t,\theta)$. Pero, tanto en el caso de observación en un intervalo de tiempo fijo, (sección 2.2), como en el caso de observación hasta un instante aleatorio, (sección 2.3), el test lo construiamos, basándonos en una muestra de tamaño $N = 1$, que era la trayectoria observada, que hemos denotado $X(.)$.

Consideramos en esta sección, el problema, de la construcción del mismo test, pero supuesto que disponemos de una muestra de tamaño N , que estará constituida, por N trayectorias observadas, que denotaremos por $X^1(.),\ldots,X^N(.)$, y que suponemos están observadas de forma independiente. Abordaremos los casos en que la observación se realiza :

a).- en un intervalo de tiempo fijo

b).- en un intervalo de tiempo que depende de un instante aleatorio.

2.4.2 Observación en un intervalo de tiempo fijo.

Supongamos, que las N observaciones, han sido realizadas, en el intervalo de tiempo $[0,T]$, donde $0 < T < \infty$, es fijo. Tenemos entonces la muestra :

$$\left(X^i(.) = (X^i_t(.) \ , \ 0 \leq t \leq T) \right) \qquad i = 1,\dots,N \tag{2.46}$$

Basándonos en dicha muestra, que suponemos independiente, queremos construir el test :

$H_0 \ : \ \theta \in \Theta_0$

siendo Θ_0, un abierto de un subespacio p-dimensional de $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, $(p < k)$.

$$H_1 \ : \ \theta \in \Theta \tag{2.47}$$

Al igual que en las secciones precedentes, consideramos por simplicidad, que :

$$H_0 \ : \ \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \dots = \theta_k = 0$$

La construcción del test se basa, en los siguientes resultados, (que se deducen de los considerados en 2.2.2), sobre N observaciones :

RESULTADO 1

Con objeto de obtener el estimador máximo verosímil, del vector paramétrico $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_K)^*$, basado en la muestra de tamaño N , dada en (2.46), consideramos como función de verosimilitud :

$$L_T^N(x^1(.),x^2(.),\ldots,x^N(.);\ \theta\ ) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_o}}(x^i(.);\theta)$$

$$= \exp(\ \ (\theta - \theta_o)^*(\sum_{i=1}^{N} D_T^i)\ \ -$$

$$-\ \frac{1}{2}(\ \theta - \theta_o)^*\ (\sum_{i=1}^{N} J_T^i\ )(\theta + \theta_o)\ \ )$$

$$= \exp(\ (\theta - \theta_o)^* \mathcal{D}_T^N\ \ - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* \mathcal{J}_T^N (\theta + \theta_o)\ ) \tag{2.48}$$

donde :

$$\mathcal{D}_T^N = \sum_{i=1}^{N} D_T^i \qquad\qquad \mathcal{J}_T^N = \sum_{i=1}^{N} J_T^i$$

siendo :

$$\forall\ \ i \in \{1,\ldots,N\}$$

$$D_T^i\ \ = (\ \ \int_0^T \pi_j^*(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)(dX_s^i - \pi_o(s,X_s^i)ds)\ \ )_{k\times 1}$$

$$j = 1,\ldots,k$$

$$J_T^i = \left(\int_0^T \pi_j^*(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)\pi_h(s,X_s^i)\,ds \right)_{k\times k}$$

$$j,h = 1,\dots,k$$

Tomando logaritmos en (2.48), y derivando después con respecto a θ_j, $j = 1,\dots,k$, se obtiene :

$$\frac{\partial \ln(L_T^N(X^1(.),\dots,X^N(.);\theta))}{\partial \theta_j} = D_{T,j}^N - \sum_{h=1}^{k} \theta_h J_{T,h,j}^N$$

$$j = 1,\dots,k$$

De donde se deduce, que la ecuación de verosimilitud, en forma vectorial, es :

$$D_T^N - J_T^N\theta = 0 \tag{2.49}$$

RESULTADO 2

Supongamos, que θ, es el verdadero valor del parámetro. Si :

(i).- $$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\int_0^T \pi_j^*(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)\pi_h(s,X_s^i)\,ds \xrightarrow[T\uparrow\infty]{P_\theta} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\dots,k$$

(ii).-

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N} E_\theta\left(\int_0^T \pi_j^*(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)\pi_h(s,X_s^i)\right)ds \xrightarrow[T\uparrow\infty]{} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\dots,k$$

donde $|g_{jh}| < \infty, j,h = 1,\dots,k$, y la matriz

$G = (g_{jh})_{j,h=1,\dots,k}$, es no singular.

Entonces:

1º.- $\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ T_\varepsilon > 0$, t.q. $\forall \ T > T_\varepsilon$

la ecuación de verosimilitud (2.49), tiene única solución con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$ y dicha solución, viene dada por :

$$\hat{\theta}_T^N = (\mathcal{J}_T^N)^{-1} \mathcal{D}_T^N \tag{2.50}$$

2º.- $\hat{\theta}_T^N$, dada en (2.50), es débilmente consistente para θ

3º.-

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_T^N - \theta) \xrightarrow[T\uparrow\infty]{} N_k(0, G^{-1}) \tag{2.51}$$

Para construir el test (2.47), vamos a utilizar el procedimiento de razón de verosimilitud, para lo cual hemos de calcular :

$$\lambda_T(x^1(.),\dots,x^N(.)) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}(L_T^N(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta))}{\sup\limits_{\theta\in\Theta}(L_T^N(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta))}$$

$$= \frac{\sup\limits_{H_0}(L_T^N(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta))}{\sup\limits_{H_1}(L_T^N(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta))} \qquad (2.52)$$

A traves de un razonamiento análogo al efectuado, en la sección 2.2, se obtiene que :

$$-2.\ln(\lambda_T(x^1(.),\dots,x^N(.))) =$$

$$= \hat{\theta}^{N\,T}_{T,k-p}\,(P_T^N)^{-1}\,\hat{\theta}^N_{T,\,k-p} \approx \chi^2_{k-p}$$

donde : $P_T^N = (V_{T2}^N - (V_{T1}^N)^{*}(V_{T0}^N)^{-1}(V_{T1}^N))^{-1}$

siendo V_{T0}^N , V_{T1}^N, V_{T2}^N , las cajas correspondientes de la matriz :

$$V_T^N = \frac{1}{T} J_T^N \qquad \text{(véase sección 2.2)}$$

Entonces, teniendo en cuenta el test de razón de verosimilitud, rechazamos H_0, si :

$$-2.\ln(\lambda_T (x^1(.),\ldots,x^N(.))) > \bar{d}_T^N$$

Donde $\bar{d}_T^N$, es una constante, determinada de tal manera que :

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mu_\theta(- 2.\ln(\lambda_T (x^1,\ldots,x^N)) > \bar{d}_T^N) = \alpha$$

siendo α , el nivel de significación, que hayamos fijado.

2.4.3 Observación, en un intervalo de tiempo, que depende de un instante aleatorio

Consideramos ahora, el caso, en que las N observaciones del proceso, han sido realizadas en un intervalo $[0,\tau_t]$, donde τ_t, es un instante aleatorio perteneciente a una familia $(\tau_s, s \geq 0)$, que satisface las condiciones de (2.25).

Tendremos entonces, la muestra :

$$\left(X^i(.) = (X^i_s(.) , 0 \leq s \leq \tau_t) \right)$$

$$i = 1,\ldots,N \tag{2.53}$$

que suponemos constituida, por observaciones independientes,

Basándonos en ella, vamos a construir el test (2.47), en su versión simplificada. Para ello, previamente veremos unos resultados análogos a los considerados en el caso anterior, y que se deducen, de los correspondientes resultados vistos en la subsección 2.3.2

RESULTADO 1

Con objeto de obtener el estimador máximo verosímil, del vector paramétrico $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)^*$, basado en la muestra considerada en (2.53), consideramos como función de verosimilitud :

$$L^N_{\tau_t}(X^1(.),\dots,X^N(.);\,\theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d\mu_{\tau_t,\theta}}{d\mu_{\tau_t,\theta_o}}(\,X^i(.);\theta)$$

$$= \exp(\ (\theta - \theta_o)^*(\sum_{i=1}^{N} D^i_{\tau_t}) \ -$$

$$- \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^*(\sum_{i=1}^{N} J^i_{\tau_t})(\theta + \theta_o)\ \ ) =$$

$$= \exp(\ (\theta - \theta_o)^* \mathcal{D}^N_{\tau_t} \ - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* \mathcal{J}^N_{\tau_t}(\theta + \theta_o)\ )$$

(2.54)

donde :

$$\mathcal{D}^N_{\tau_t} = \sum_{i=1}^{N} D^i_{\tau_t} \qquad \mathcal{J}^N_{\tau_t} = \sum_{i=1}^{N} J^i_{\tau_t}$$

y $\forall\ i \in \{1,\dots,N\}$

$$D^i_{\tau_t} = \left(\int_0^{\tau_t} \pi^*_j(s,X^i_s)B^{-1}(s,X^i_s)(dX^i_s - \pi_o(s,X^i_s)ds) \right)_{k\times 1}$$

$$j = 1,\dots,k$$

$$J^{i}_{\tau_t} = \left(\int_0^{\tau_t} \pi^{*}_{j}(s,X^{i}_{s})\, B^{-1}(s,X^{i}_{s})\, \pi_h(s,X^{i}_{s})\,ds \right)_{k\times k}$$

$$j,h = 1,\ldots,k$$

Si tomamos logaritmos en (2.54), y derivamos después con respecto a θ_j , $j = 1,\ldots,k$, obtenemos :

$$\frac{\partial \ln\left(L^{N}_{\tau_t}\left(X^{1}(.),\ldots,X^{N}(.);\, \theta \right) \right)}{\partial \theta_j} =$$

$$= \mathcal{D}^{N}_{\tau_t,\,j} - \sum_{h=1}^{k} \theta_h\, \mathcal{J}^{N}_{\tau_t,h,j}$$

$j = 1,\ldots,k$

De donde se deduce, que la ecuación de verosimilitud, en forma vectorial, es :

$$\mathcal{D}^{N}_{\tau_t} - \mathcal{J}^{N}_{\tau_t}\, \theta = 0 \tag{2.55}$$

RESULTADO 2

Supongamos, que θ, es el verdadero valor del parámetro . Si se verifica :

(i) .-

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N}\int_{o}^{\tau_t}\pi_j^{*}(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)\pi_h(s,X_s^i)\,ds \xrightarrow[t\longrightarrow\infty]{\mu_\theta} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,k$$

(ii).-

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N}E_\theta\Big(\int_{o}^{\tau_t}\pi_j^{*}(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)\pi_h(s,X_s^i)\,ds\Big) \xrightarrow[t\longrightarrow\infty]{} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,k$$

donde : $|g_{jh}| < \infty$, $j,h = 1,\ldots,k$, y la matriz $G = (g_{jh})$

es no singular.

Entonces :

1º.-

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ t_\varepsilon > 0$, t.q. $\forall\ t > t_\varepsilon$

la ecuación de verosimilitud (2.58), tiene única solución, con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$, y viene dada por :

$$\hat{\theta}^N_{\tau_t} = (\mathcal{J}^N_{\tau_t})^{-1}\,\mathcal{D}^N_{\tau_t} \qquad (2.56)$$

2º.- $\hat{\theta}^N_{\tau_t}$, dado en (2.56), es débilmente consistente para θ.

3º.-

$$t^{1/2}\left(\hat{\theta}^N_{\tau_t} - \theta \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} N_k\left(0 \, , \, G^{-1}\right) \tag{2.57}$$

Vamos a construir el test, por el procedimiento de razon de verosimilitud, para lo cual, hemos de calcular :

$$\lambda_{\tau_t}\left(x^1(.),\dots,x^N(.) \right) =$$

$$\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} \left(L^N_{\tau_t}\left(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta\right) \right)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} \left(L^N_{\tau_t}\left(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta\right) \right)} = \frac{\sup\limits_{H_0}\left(L^N_{\tau_t}\left(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta\right)\right)}{\sup\limits_{H_1}\left(L^N_{\tau_t}\left(x^1(.),\dots,x^N(.);\theta\right)\right)} \tag{2.58}$$

Utilizando un razonamiento similar, al de la sección 2.3, se obtiene :

$$- 2.\ln\left(\lambda_{\tau_t} \left(X^1(.), \ldots , X^N(.) \right) \right) =$$

$$= \hat{\theta}^N_{\tau_t, k-p} \; {}^t \left(P^N_{\tau_t} \right)^{-1} \hat{\theta}^N_{\tau_t, k-p} \approx \chi^2_{k-p}$$

siendo :

$$P^N_{\tau_t} = \left(V^N_{\tau_t 2} - (V^N_{\tau_t 1})^{*} (V^N_{\tau_t 0})^{-1} (V^N_{\tau_t 1}) \right)^{-1}$$

donde :

$V^N_{\tau_t 0}$, $V^N_{\tau_t 1}$, y $V^N_{\tau_t 2}$, son las correspondientes

cajas, (véase sección 2.3) , de la matriz :

$$V^N_{\tau_t} = \frac{1}{t} J^N_{\tau_t}$$

Entonces, fijado un nivel de significación α , rechazamos la hipotesis nula H_o , si ocurre que :

$$- 2.\ln\left(\lambda_{\tau_t} (X^1(.), \ldots ,X^N(.)) \right) > \bar{d}^N_{\tau_t}$$

donde $d^N_{r_t}$, es una constante, que se determina de tál manera que:

$$\sup_{\theta \in \Theta_o} \mu_\theta\left(-2.\ \ln(\quad _{r_t}(X^1(.),\dots,X^N(.))) > d^N_{r_t} \right) = \alpha$$

2.5 TESTS SECUENCIALES

2.5.1 Resultados previos

RESULTADO 1

Sea $(X_t\ ,\ t \geq 0)$, un P.D.O. homogeneo, con valores en $\mathbb{R}$, y con coeficientes tendencia y difusión dados por $A(x)$ y $B(x)$, respectivamente, (obsérvese que son independientes de t). Existe una función $u(x)$, estrictamente creciente, denominada : "función escala", de manera que el proceso $(u(X_t),\ t \geq 0)$, es un P.D.O., con coeficiente tendencia 0, y coeficiente difusión :

$$\bar{B}(y) = B(x)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 \quad , \quad y = u(x)$$

siendo :

$$\frac{du(x)}{dx} = \exp\left(-\int_{x_o}^{x} \frac{2.A(z)}{B(z)}\,dz\right)$$

x_o, es fijo, aunque arbitrario, si bien es usual tomar como x_o, el valor inicial del proceso: X_o

Decimos, entonces, que el nuevo proceso $(u(X_t),\ t \geq 0)$, está en escala natural. (véase Breiman(1968), capítulo XVI)

RESULTADO 2

Sea $(Y_t\ ,\ t \geq 0)$, un P.D.O. homogeneo, $\mathbb{R}$-valuado, con coeficiente tendencia 0, y coeficiente difusión $\bar{B}(y)$. Si consideramos :

$$f(t) = \int_0^t \bar{B}(Y_s)ds$$

Entonces $(f(t), Y_t)$, $t \geq 0$, es una trayectoria browniana. A $f(t)$, se le denomina : "Tiempo browniano de Y_t".

(véase Ghikman and Skorokhod(1972), pg 31)

RESULTADO 3 (Levy)

Sea $(W_t\ ,\ t \geq 0)$, un proceso de Wiener, t.q.

$$E(W_t) = \mu t \qquad Var(W_t) = \sigma^2.t$$

$$W_0 = 0$$

Entonces : $\forall\ t \geq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \left(W_{\frac{jt}{2^n}} - W_{\frac{(j-1)t}{2^n}} \right)^2 = \sigma^2.t \qquad \text{c.s.}$$

En virtud del resultado 3, σ^2, puede ser determinada. (véase : Basawa and Prakasa-Rao(1980), pg 212)

2.5.2 Algunos tests secuenciales.

Sea $(X_t, t \geq 0)$, un P.D.O. homogeneo, $\mathbb{R}$-valuado, con coeficiente tendencia $A(x)$, y coeficiente difusión $B(x)$, (que suponemos positivo $\forall x$), ambos desconocidos.

Estamos interesados, en el estudio de tests secuenciales, insesgados, de tamaño ε, tales como :

(a).-

$$H_0 : A(x) = A_0(x) \quad y \quad B(x) = B_0(x)$$

$$H_1 : A(x) \neq A_0(x) \quad ó \quad B(x) \neq B_0(x)$$

(b).-

$$H_0 : A(x) = A_0(x) \quad y \quad B(x) = B_0(x)$$

$$H_1 : A(x) > A_0(x) \quad ó \quad B(x) \neq B_0(x)$$

(c).-

$$H_0 : A(x) = A_0(x) \quad y \quad B(x) = B_0(x)$$

$$H_1 : A(x) < A_0(x) \quad ó \quad B(x) \neq B_0(x) \tag{2.59}$$

Estos tests, en el caso de que se disponga de una muestra de tamaño $N = 1$, (la correspondiente trayectoria observada), han sido estudiados por : Brown(1974a), Brown(1974b), Nadas(1973).

Los citados autores, utilizan tests secuenciales restringidos, en el sentido de Armitage(1957), es decir tests, que se basan en un determinado instante aleatorio τ. La idea fundamental consiste en trasladar los tests, a otros equivalentes, pero sobre el Movimiento Browniano, para ello se utilizan, los resultados anteriores, y se rechaza H_0, si τ es pequeño.

Asi pues, las regiones críticas, son de la forma: $[\tau \leq m]$, y la observación, termina en el instante "m" con la aceptación de H_0, (si no ha sido rechazada antes), con lo cual, el tiempo de observación, nunca excederá m.

Supuesto que H_0, es cierta, (en cada caso), y teniendo en cuenta el resultado 1, se tendrá, que el proceso :

$$(u(X_t) \ , \ t \geq 0)$$

es un P.D.O., con coeficiente tendencia 0, y coeficiente difusión

$$\bar{B}(y) = B_0(x)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 \ , \qquad y = u(x)$$

donde :

$$\frac{du(x)}{dx} = \exp\left(- \int_{X_0}^{x} \frac{2.A_0(z)}{B_0(z)} \, dz \right)$$

Ahora bien, por el resultado 2, si consideramos :

$$f(t) = \int_0^t \bar{B}(\ u(X_s)\ )ds$$

resulta que : $(\ f(t),\ u(X_t)\ )$, es una trayectoria browniana. Entonces los tests (a), (b), y (c), dados en (2.59), son respectivamente equivalentes a :

(a').-

$H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu \neq 0$

(b').- $H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu > 0$

(c').- $H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu < 0$

(2.60)

donde μ , es el coeficiente tendencia, de un movimiento browniano standard $(W_t\ ,\ t \geq 0\ )$. Basta pues, que el estudio se haga, con el movimiento browniano. Damos a continuación, un breve resumen de los resultados obtenidos por Brown(1974a,1974b).

2.5.3 Construcción de los tests.

A.- TEST DE DOS COLAS

Consideramos aqui, el test :

$$H_o : \mu = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \mu \neq 0$$

siendo μ , el coeficiente tendencia desconocido de un movimiento browniano standard $(W_t, t \geq 0)$.

Sea el instante aleatorio :

$$\tau = \inf (t>0 : W_t = g \text{ ó } W_t = -h)$$

donde $g,h \in \mathbb{R}^+$

Estudiemos, los siguientes casos :

A1 .- Supongamos que τ, no está acotado.

Se considera entonces la región crítica:

$$C_1 = [\tau \leq a , W_\tau = -h] \cup [\tau \leq b , W_\tau = g]$$

donde "a", y "b", han de ser determinadas de tal manera, que se satisfaga :

(i) .- Que el test sea de tamaño ε

(ii).- Que el test sea insesgado, es decir, que la función potencia, tenga mínimo valor ε, cuando $\mu = 0$.

Se puede comprobar, (véase Brown(1974a)), que "a", y "b", son proporcionales a : $(g+h)^2$, de ahí, que para determinar, "a", y "b", dadas "g", y "h", con ε fijo, será suficiente hallar los valores de "a" y "b" , correspondientes al caso $g+h = 1$. Si $h = \lambda$ $g = 1-\lambda$, $0 < \lambda < 1$, basta entonces hallar solamente, los valores de "a", pues los de "b", vendrán dados por la relación $b(\lambda) = a(1-\lambda)$. En el artículo antes citado, se da una tabla de valores de "a", para distintos tamaños.

A2.- Supongamos que τ , está acotado por T ($T < \infty$)

Si admitimos que $a = b = T$, entonces teniendo en cuenta, que el test ha de ser insesgado de tamaño ε , se tendrá que $g=h$.

La región crítica considerada en este caso es:

$$C_2 = \left[\tau \leq T , \quad W_\tau = g \text{ ó } W_\tau = -g \right]$$

En Brown(1974b), se establecen tablas comparativas, para discernir, si es conveniente ó no, parar la observación antes del instante T .

Asi mismo , en el citado artículo , se obtienen formulas, para hallar la función potencia y el tiempo de observación medio, tanto en el caso de observación en tiempo fijo, como en el caso de observación aleatoria. (para τ acotado por T)

Comparando ambos casos, se observa que en el primero se tiene una perdida de potencia, respecto al segundo, pero a su vez, el tiempo medio de observación es menor, aunque las diferencias no son muy significativas. Por consiguiente no es posible obtener un test global idoneo.

A3 .- Supuesto que estamos en las condiciones de A2 , imaginemos que por razones externas , la observación , puede terminar en T_o, (fijo), antes de T, y de que "g", ó "-g", hayan sido alcanzados.

Con objeto de preservar la insesgabilidad del test, la región crítica considerada es :

$$C_3 = [\tau \leq T_o] \cup [\tau > T_o , W_{T_o} > g'] \cup [\tau > T_o , W_{T_o} < -g']$$

donde g' , viene determinado, teniendo en cuenta que el test es de tamaño ε . (Ver Brown(1974b)

B.- TESTS DE UNA COLA

Estudiamos ahora los tests :

1.- H_o : $\mu = 0$ frente a H_1 : $\mu > 0$

2.- H_o : $\mu = 0$ frente a H_1 : $\mu < 0$

Para el test (1), se considera el instante aleatorio :

$$\tau_1 = \inf (t>0 : W_t = g) , g \in \mathbb{R}^+$$

y para el test (2) :

$$\tau_2 = \inf (t> 0 : W_t = -h) , h \in \mathbb{R}^+$$

Como el estudio es análogo en ambos tests, vamos a analizar sólo el test (1).

Al igual que en el caso del test de dos colas, se consideran los tres casos siguientes:

B1 .- Supongamos que τ_1 , no está acotado.

La región crítica, es entonces :

$$C_1 = \left[\tau_1 \leq a \, , \; W_{\tau_1} = g \right]$$

donde "a", se determina teniendo en cuenta que el test es insesgado de tamaño ε .

B2 .- Supongamos que τ_1 , está acotado por T ($T < \infty$)

Si admitimos que $a = T$, g vendrá determinado sin más que tener en cuenta que el test es de tamaño ε , por la relación :

$$\varepsilon = 2.(1 - \Phi(gT^{-1/2}))$$

siendo Φ , la función de distribución de la N(0,1)

La región crítica en este caso es :

$$C_2 = \left[\tau_1 \leq T \, , \; W_{\tau_1} = g \right]$$

Al igual que en el caso de dos colas, en Brown(1974b), se establecen tablas comparativas, sobre los casos en que la observación se realiza hasta un instante fijo, y cuando se realiza hasta un instante aleatorio.

B3 .- Supuesto que estamos en las condiciones de B2, consideramos, la nueva hipótesis, de que debido a razones externas, la observación pueda terminar en un instante T_o, (fijo), antes de T, y de que g haya sido alcanzado.

Con objeto de preservar la insesgabilidad del test, la región crítica que se considera es :

$$C_3 = [\tau_1 \leq T_o] \cup [\tau_1 > T_o \ , \ W_{T_o} > g']$$

donde g', viene determinada, sabiendo que el test tiene tamaño ε .

2.5.4 <u>Construcción de tests secuenciales, en base a muestras de tamaño N</u>.

Proponemos a continuación, unos tests secuenciales análogos a los considerados previamente, pero basados en una muestra de tamaño

N . Asi pues, en analogía con lo visto en la subsección 2.5.3, estudiamos los siguientes casos:

A .- TEST DE DOS COLAS

Queremos realizar el test :

$$H_o : \mu = 0 \quad , \quad \text{frente a } H_1 : \quad \mu \neq 0$$

donde μ , es el coeficiente tendencia de un movimiente browniano standard.

Consideramos para ello, el instante aleatorio :

$$\tau = \inf (\ t > 0 : \quad W_t = g \quad \text{ó} \quad W_t = -h \quad)$$

$$\text{siendo} \quad g,h \in R^+$$

Supongamos que la muestra observada, (N trayectorias), es

$$(\quad W^i = (W^i_t \quad , \quad 0 \leq t \leq \tau) \quad)$$

$$i = 1,\ldots,N$$

La idea consiste en lo siguiente :

A cada una de las N trayectorias observadas, y de forma independiente, se le aplica el test de dos colas, para el caso N=1, que estudiamos en la subsección anterior, (en el correspondiente caso que estemos considerando: A1, A2, A3), y observamos si con un determinado nivel de significación δ, se rechaza ó se acepta H_0.

Una vez realizada esta operación con cada una de las N trayectorias, consideramos la variable :

$Y(w^1, \ldots , w^N)$ = nº de trayectorias que hacen que H_0, sea rechazada.

Evidentemente , supuesto que H_0 es cierta

$$Y(w^1,\ldots,w^N) \longrightarrow B(N, \delta)$$

siendo δ = P(rechazar H_0 / H_0 es cierta) (con N = 1)

Entonces fijado un nivel de significación ε, para nuestro test con N trayectorias, tomamos como región crítica:

$$C^N(\delta) = [\, Y(W^1,\ldots,W^N) > K \,]$$

donde K, viene determinado de la siguiente manera :

$$\varepsilon = P(\, H_0 \text{ sea rechazada/ } H_0 \text{ es cierta }) =$$

(Con la N trayectorias)

$$= P(\ Y(W^1,\ldots,W^N) > K\ ) = \sum_{j=1+k}^{N} \binom{N}{j} (\delta)^j (1-\delta)^{N-j}$$

NOTA 2.5.1

Obsérvese, que para cada nivel de significación ε, que fijemos, realmente lo que obtenemos, es una familia de tests, dependiente del nivel de significación δ, (que es la probabilidad de rechazar H_0, supuesto que es cierta, cuando el test se realiza con una trayectoria.)

B .- TESTS DE UNA COLA

Queremos estudiar los tests :

(1).- $H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu > 0$

(2).- $H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu < 0$

basándonos en una muestra de tamaño N. El razonamiento, (en cada caso : B1, B2, B3), es análogo al que se ha realizado en el caso de dos colas, pero considerando los instantes :

$$\tau_1 = \inf (\; t > 0 : \; W_t = g \;) \;, \text{ en el test } \; (1)$$

$$g \in \mathbb{R}^+$$

y

$$\tau_2 = \inf (\; t > 0 : \; W_t = - h \;), \text{ en el test } \; (2)$$

$$h \in \mathbb{R}^+$$

NOTA 2.5.2

Se puede comprobar, que si el test para una trayectoria es insesgado de tamaño δ , entonces el tests que proponemos para N trayectorias, es insesgado de tamaño $\mathcal{E}$.

CAPITULO III

TESTS DE HIPOTESIS SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO LOGARITMICO-NORMAL MULTIDIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS

3.1 INTRODUCCION

La distribución logarítmico-normal, en su forma más simple, se puede definir, como la distribución de una variable, cuyo logaritmo obedece la ley normal de probabilidad. A lo largo del tiempo, se le ha denominado con distintos nombres : distribución Galton-McAlister, Kapteyn, Gibrat, ó simplemente log-normal. Su origen se situa, sobre el año 1879, y desde entonces su importancia ha sido creciente, debido a su amplia aplicación en distintos campos, siendo de especial interés su aplicación en economia.

Fue McAlister, quien en 1879, consideró y trató, por primera vez, con cierto detalle, la teoria de la distribución logarítmico-normal, en su memoria presentada en la Royal Society de Londres. En ella, dio expresiones para la media, mediana, moda, y momento de segundo orden. Además, describió un posible modelo sobre la génesis de dicha distribución.

Génesis, que Kapteyn, estableció de forma más clara en 1903. Describió también, un método para generar muestras, a partir de poblaciones logarítmico-normales, similar al que ya existia para poblaciones binomiales y normales.

En 1916, Kapteyn y Van Uven, propusieron un método de estimación, utilizando cuantiles.

De forma independiente, Wicksell desarrolló en 1917, una teoria sobre la génesis de la distribución y estimó sus parámetros, por el método de los momentos. Durante algunos años, decayó el interés en el estudio de la distribución logarítmico-normal, cabe sólo reseñar los trabajos de Davies en 1925 y 1929, sobre los métodos de estimación por cuantiles, iniciados por Kapteyn y Van Uven.

En 1930, y gracias a Gibrat, renació nuevamente el interés por el estudio de dicha distribución. El citado autor, primero en un articulo y posteriormente en un libro publicado en 1931, presentó su teoria sobre la distribución. Sobre el mismo tiempo, autores como : Gaddum y Bliss, comenzaron a aplicar la distribución en estudios biológicos.

En 1933, Yuan introdujo la distribución logarítmico-normal bivariante, y poco después Wicksell, pensando que un simple desplazamiento de la variable, más que la variable en si, era la que seguia una distribución logarítmico-normal, introdujo un tercer parámetro, al que denominó "umbral" , y própuso métodos para su estimación. Posteriormente Cohen, en 1951 , sugirió el método de máxima verosimilitud, como alternativa al de los momentos .

Nuevamente Wicksell, estudió la posibilidad de introducir, un cuarto parámetro, que tendria como misión, fijar un limite superior para la distribución, pero no fue hasta 1949, cuando dicha extensión fue considerada, siendo Johnson, quien dio un método para estimar este cuarto parámetro.

Para más información sobre dicha distribución, véase Aitchison and Brown(1969)

En la sección 3.2, definimos el proceso logarítmico-normal multidimensional con factores exógenos, como un proceso de Markov, cuyas distribuciones condicionadas son logarítmico-normales. Asi mismo, comprobamos que es un proceso de difusión ordinario, y vemos la relación existente con las E.D.E.

En las secciones 3.3, 3.4, y 3.5 , construimos los correspondientes tests de razón de verosimilitud, estudiados en las secciones 2.2, 2.3, y 2.4 , respectivamente, sobre el coeficiente tendencia de nuestro proceso.

Finalmente, en 3.6, consideramos el proceso logarítmico-normal unidimensional sin factores exógenos, y sobre él construimos los tests secuenciales estudiados en la sección 2.5

3.2 DIFUSION LOGARITMICO-NORMAL MULTIDIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS.

3.2.1 Definición

Sea $(X_t,\ t \geq 0)$, un proceso de Markov, con valores en $(0,\infty)\times\overset{n}{\cdots}\times(0,\infty)$, y con función densidad de transición, dada por :

$$p(s,x;t,y) = \frac{(\det(B))^{-n/2}}{\prod_{i=1}^{n} y_i (2.\pi(t-s))^{n/2}} \exp(\ -\ Q/(2(t-s))\ )$$

$$t > s \qquad (3.1)$$

donde :

$$Q = (\ \ln(y) - \ln(x) - \sum_{j=0}^{m} \beta_j (G_j)_s^t\ )^{*}\ B^{-1}(\ \ln(y) - \ln(x) - \sum_{j=0}^{m} \beta_j (G_j)_s^t\ )$$

siendo :

$B = (b_{ij})_{i,j = 1,\dots,n}$, una matriz , que suponemos es : simétrica, definida no negativa, y no singular.

$G_1,\dots,G_m$, funciones R-valuadas, y que vamos a suponer continuas y acotadas, sobre $[0,\infty)$.

$G_o(t) = 1 \quad \forall\ t \in [0,\infty)$

$$B_j \in R^n \quad , \quad j = 0,1,\dots,m \qquad y \qquad (G_j)_s^t = \int_s^t G(u)\,du$$

$$j = 0,1,\dots,m$$

Se puede comprobar, que la función $p(s,x;t,y)$, dada en (3.1), es solución de las ecuaciones :

$$-\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial s} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 p(s,x;t,y)}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(s,x)\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial x_i} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2(B_{ij}(t,y)p(s,x;t,y))}{\partial y_i\,\partial y_j} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(A_i(t,y)p(s,x;t,y))}{\partial y_i} \tag{3.3}$$

donde :

$$B_{ij}(s,x) = b_{ij}\, x_i\, x_j \quad , \qquad b_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$i,j = 1,\dots,n$$

$$A_i(s,x) = \Big(\sum_{j=0}^{m} a_j^i\, G_j(s) \Big) x_i \quad , \qquad a_j^i \in \mathbb{R}$$

$$i = 1,\dots,n$$

$$a_j^i = \beta_j^i \quad , \qquad a_0^i = \beta_0^i + \frac{b_{ii}}{2}$$

NOTA 3.2.1

Si consideramos la variable aleatoria :

$$Z_t = \ln(X_t \,/\, X_s = x)$$

entonces :

$$Z_t \longrightarrow N_n\Big(\ln(x) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j (G_j)_s^t \;,\; B(t-s) \Big)$$

Veamos a continuación, que el proceso $(X_t \,,\, t \geq 0)$, antes definido, es un P.D.O.

PROPOSICION 3.2.1

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} \| y - x \|^4 \, p(s,x;t,y)\,dy = 0$$

donde $p(s,x;t,y)$, viene dada en (3.1)

Demostración :

Teniendo en cuenta la nota 3.2.1 , se tiene que :

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{R^n} \| y - x \|^4 \, p(s,x;t,y)\,dy =$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(\| e^Z - x \|^4)$$

donde : $Z \longrightarrow N_n(\ln(x) + \sum_{j=0}^{m} B_j(G_j)_s^t , B(t-s))$

Entonces , desarrollando $\| e^Z - x \|^4$, tomando después esperanzas, (para lo cual se hace uso de la función generatriz de la normal multidimensional), se demuestra que dicho limite vale cero.

Teniendo en cuenta la proposición 1.3.1, (donde $\delta = 2$), tendremos asegurado :

1.-

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\|y-x\|>\varepsilon} p(s,x;t,y)\,dy = 0$$

2.-

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} (y_i - x_i)\,p(s,x;t,y)\,dy = A_i(s,x)$$

$$i = 1,\dots,n$$

donde es fácil comprobar que :

$$A_i(s,x) = \left(\sum_{j=0}^{m} a_j^i\, G_j(s) \right) x_i \quad , \quad i = 1,\dots,n$$

3.-

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\,p(s,x;t,y)\,dy = B_{ij}(s,x)$$

$$i,j = 1,\dots,n$$

donde se puede comprobar que :

$$B_{ij}(s,x) = b_{ij}\, x_i\, x_j \qquad , \quad i,j = 1,\dots,n$$

Por consiguiente, queda probado que el proceso $(X_t,\ t \geq 0)$, con función densidad de transición, dada en (3.1), es un P.D.O., y tiene como coeficiente tendencia $A(s,x)$, y coeficiente difusión $B(s,x)$, donde :

$$A_i(s,x) = \Big(\sum_{j=0}^{m} a_j^i\, G_j(s) \Big) x_i \qquad , \quad i = 1,\dots,n \tag{3.4}$$

$$B_{ij}(s,x) = b_{ij} x_i x_j \ , \quad i,j = 1,\dots,n \tag{3.5}$$

Este proceso recibe el nombre de : "Proceso Logarítmico normal, n-dimensional, con m factores exogenos.", siendo los factores exógenos : $G_1(t),\dots,G_m(t)$.

Por simplicidad, cuando nos refiramos a dicho proceso, lo denotaremos como $LN(n,m)$.

A continuación veremos que el proceso $LN(n,m)$, es solución, de una E.D.E., en el sentido de Itô.

3.2.2 Relación del proceso LN(n,m), con las E.D.E.

PROPOSICION 3.2.2

$\forall$ $t \in [0,\infty)$ y $\forall$ $x \in (0,\infty)\times\overset{n}{\ldots}\times(0,\infty)$, se verifica que :

(i) .-

$$\int_0^T \| A(t,x) \| \, dt < \infty$$

(ii).-

$$\int_0^T \| B^{1/2}(t,x) \|^2 dt < \infty$$

donde $T \in [0,\infty)$, es fijo , aunque arbitrario, y las funciones : "$A(t,x)$", y "$B(t,x)$", son las dadas en (3.4), y (3.5), respectivamente.

Demostración :

(i).-

$$\| A(t,x) \| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j^i G_j(t) \right)^2 x_i^2 \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=o}^{m} a_j^i \, G_j(t) \right| x_i \leq (m+1) \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_i \, x_i < \infty$$

donde : $\bar{g}_i = \max \left\{ \left| a_j^i \, G_j(t) \right| \ , \ j = 0,1,\ldots,m \right\}$

(existe teniendo en cuenta que $G_j(t)$, es continua y acotada , $j = 0,1,\ldots,m$)

Luego :

$$\int_o^T \| A(t,x) \| \, dt < \infty \qquad \text{c.q.d.}$$

(ii).-

$$\| B^{1/2}(t,x) \|^2 = \text{Traza } B^{1/2}(t,x)(B^{1/2}(t,x))^* =$$

$$= \text{Traza } (\ B(t,x) \ ) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \, x_i^2 < \infty$$

Luego :

$$\int_o^T \| B^{1/2}(t,x) \|^2 dt < \infty \qquad \text{c.q.d.}$$

NOTA 3.2.2

En virtud de la proposición anterior, y teniendo en cuenta la subsección 1.4.3 , podemos plantear la E.D.E., siguiente :

$$dX_t = A(t,X_t)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t$$

$$X_0 = H \qquad\qquad t \geq 0 \tag{3.6}$$

Donde $(X_t , t \geq 0)$, es cualquier proceso n-dimensional, con valores en $(0,\infty)\times\overset{n}{\ldots}\times(0,\infty)$

PROPOSICION 3.2.3

Las funciones : "$A(t,x)$", y "$B^{1/2}(t,x)$", antes consideradas, satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, (teorema 1.4.2).

Demostración :

1.- $\forall\ t \in [0,\infty)$ y $\forall\ x,y \in (0,\infty)\times\overset{n}{\ldots}\times(0,\infty)$

$$\| A(t,x) - A(t,y) \| + \| B^{1/2}(t,x) - B^{1/2}(t,y) \| =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=o}^{m} a_j^i \, G_j(t) \right)^2 (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \quad (m+1) g \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} + (h)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left((m+1) g + h^{1/2} \right) \| x - y \| \tag{3.7}$$

donde :

$$g = \max \left\{ g_i \ , \ i = 1, \ldots, n \right\} \quad , \text{ siendo}$$

$$g_i = \max \left\{ | a_j^i \, G_j(t) | \ , \ j = 0, 1, \ldots, m \ , \ \forall \ t \right\}$$

$$h = \max \left\{ | b_{ii} | \ , \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

2.- $\forall \ t \in (0, \infty)$, y $\forall \ x \in (0,\infty) \times \overset{n}{\ldots} \times (0,\infty)$

$$\| A(t,x) \|^2 + \| B^{1/2}(t,x) \|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=o}^{m} a_j^i \, G_j(t) \right)^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \, x_i^2 \leq$$

$$\leq (m+1)^2 g^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + h \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq$$

$$\leq \left((m+1)g + h^{1/2} \right)^2 \left(1 + \|x\|^2 \right) \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta (3.7), y (3.8), queda demostrado el teorema 1.4.2 , donde $K = (m+1)g + h^{1/2}$.

NOTA 3.2.3

En virtud de esta proposición, la E.D.E. , dada en (3.6), tiene una única solución. Dicha solución es un P.D.O., dado que se cumple el teorema 1.4.3, teniendo como coeficiente tendencia $A(t,x)$, y coeficiente difusión $B(t,x)$.

El proceso solución, es el LN(n,m)

3.3 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CON OBSERVACION EN UN INTERVALO FIJO.

3.3.1 Introducción.

Consideremos la familia de E.D.E., dependiente del vector paramétrico θ , siguiente :

$$\begin{aligned} dX_t &= A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t \\ X_0 &= H \qquad\qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde :

$$\forall \; t \in [0,\infty) \;, \quad X_t \in (0,\infty) \times \overset{n}{\ldots} \times (0,\infty)$$

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n(m+1)})^* \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n(m+1)} \quad , \text{ siendo}$$

Θ , un conjunto abierto.

$$A(t,X_t;\theta) = \begin{pmatrix} (\theta_1 + \theta_2 G_1(t) + \ldots + \theta_{m+1} G_m(t))X_{1t} \\ (\theta_{m+2} + \theta_{m+3} G_1(t) + \ldots + \theta_{2(m+1)} G_m(t))X_{2t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\theta_{(n-1)(m+1)+1} + \theta_{(n-1)(m+1)+2} G_1(t) + \ldots + \theta_{n(m+1)} G_m(t))X_{nt} \end{pmatrix}_{n\times 1} \tag{3.10}$$

$$B(t,X_t) = \begin{pmatrix} b_{11}X_{1t}^2 & b_{12}X_{1t}X_{2t} & \cdots\cdots & b_{1n}X_{1t}X_{nt} \\ b_{21}X_{2t}X_{1t} & b_{22}X_{2t}^2 & \cdots\cdots & b_{2n}X_{2t}X_{nt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}X_{nt}X_{1t} & b_{n2}X_{nt}X_{2t} & \cdots\cdots & b_{nn}X_{nt}^2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{3.11}$$

siendo :

$G_1(t),\ldots,G_m(t)$, funciones $\mathbb{R}$-valuadas, continuas y acotadas, sobre $[0,\infty)$.

$B = (b_{ij})_{i,j = 1,\ldots,n}$, una matriz simétrica, definida no negativa, y no singular.

En 3.2.2 , se comprobó, que los coeficientes "A" , y "$B^{1/2}$", dados en (3.10), y (3.11), respectivamente, satisfacen las condiciones del teorema 1.4.2, (existencia y unicidad), y el proceso solución, era el LN(n,m), siendo $G_1,\ldots,G_m$, los factores exógenos.

Estamos interesados, en la construcción de tests de hipótesis, por el procedimiento de razón de verosimilitud, sobre el coeficiente tendencia del proceso LN(n,m). Para ello vamos a utilizar los tests construidos en el capítulo II. En esta sección, vamos a estudiar el test que se vio en 2.2, (es decir, cuando la observación se realize en un intervalo de tiempo fijo), y en las dos próximas secciones, 3.3 y 3.4, aplicaremos los tests considerados en las secciones 2.3 y 2.4, respectivamente, (observación en un intervalo aleatorio, y caso de N observaciones). Pero previamente, y con objeto de poder aplicar los correspondientes resultados del capítulo II, hemos de comprobar que el coeficiente tendencia del proceso LN(n,m), depende linealmente de los parámetros.

Ahora bien, teniendo en cuenta (3.10), es fácil comprobar que :

$$A(t,X_t;\theta) =$$

$$\theta_1 \begin{pmatrix} X_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} G_1(t)X_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \theta_{m+1} \begin{pmatrix} G_m(t)X_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\theta_{m+2} \begin{pmatrix} 0 \\ X_{2t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \theta_{m+3} \begin{pmatrix} 0 \\ G_1(t)X_{2t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \theta_{2(m+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ G_m(t)X_{2t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+ \theta_{(n-1)(m+1)+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X_{nt} \end{pmatrix} + \theta_{(n-1)(m+1)+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_1(t)X_{nt} \end{pmatrix} + \ldots + \theta_{n(m+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_m(t)X_{nt} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n(m+1)} \theta_j \, \pi_j(t, X_t) \qquad (3.12)$$

donde : $\forall \quad j \in \left\{ 1, \ldots, n(m+1) \right\}$

$$\pi_j(t, X_t) = (\delta_{1i} \, \delta_{2i} \, \ldots \, \delta_{ni})^{*} \, G_{j-K_j}(t) \, X_{it}$$

siendo "i", el único elemento perteneciente a

$\left\{ 1, 2, \ldots, n \right\}$, t.q.

$$j \in \left\{ (i-1)m+i, \ldots, im+i \right\}$$

y $K_j = (i-1)(m+1)+1$

Asi pues, el coeficiente tendencia del proceso $LN(n,m)$, es de la forma dada en (2.2), (donde $k = n(m+1)$, y $\pi_0(t,X_t) = 0$)

3.3.2 Planteamiento y construcción del test.

Sea $T \in [0,\infty)$, fijo . Supuesto que hemos observado una trayectoria del proceso en el intervalo $[0,T]$, queremos realizar el test :

$$H_0 : \quad \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \dots = \theta_{n(m+1)} = 0$$

$$p < n(m+1)$$

$$H_1 : \quad \theta \in \Theta$$

(véase la subsección 2.2.3)

PROPOSICION 3.3.1

Si los factores exógenos $G_1(t), \dots, G_m(t)$, verifican

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_i(t)\, G_k(t)\, dt = \bar{u}_{ik} < \infty \qquad i,k = 0,1,\dots,m \tag{3.13}$$

siendo $\bar{U} = (\bar{u}_{ik})_{i,k = 0,1,\dots,m}$ no singular , y $G_0(t)=1$

Entonces, el resultado 3 de 2.2.2, es cierto.

Demostración :

Hemos de ver :

1.-

$$\frac{1}{T}\int_0^T \pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t)\,dt \xrightarrow[T\nearrow\infty]{\mu_\theta} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\dots,n(m+1)$$

2.-

$$\frac{1}{T}\int_0^T E_\theta(\pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t))\,dt \xrightarrow[T\nearrow\infty]{} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\dots,n(m+1)$$

Siendo $G = (g_{jh})_{\,j,h = 1,\dots,n(m+1)}$, una matriz no singular, y cuyos elementos son finitos.

Calculemos previamente $B^{-1}(t,X_t)$. Teniendo en cuenta (3.11), es fácil comprobar que :

$$B^{-1}(t,X_t) = \frac{1}{\det(B)}\left(\frac{B_{pq}}{X_{pt}X_{qt}}\right)_{p,q = 1,\dots,n} \tag{3.14}$$

Siendo B_{pq}, el adjunto, con su signo, del elemento b_{pq}, en la matriz B , donde $p,q \in \left\{ 1,\ldots,n \right\}$

Entonces, se tiene que : dados $j,h \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$

$$\pi_j^{*}(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t) =$$

$$= (\delta_{1i} \;\ldots\; \delta_{ni})\, G_{j-K_j}(t)X_{it} \;\frac{1}{\det(B)}\; \underset{p,q=1,\ldots,n}{\left(\frac{B_{pq}}{X_{pt}X_{qt}}\right)} \begin{pmatrix} \delta_{1f} \\ \vdots \\ \delta_{nf} \end{pmatrix} G_{h-K_h}(t)X_{ft}$$

$$= \frac{B_{if}}{\det(B)}\, G_{j-K_j}(t)\, G_{h-K_h}(t) \tag{3.15}$$

donde : $K_j = (i-1)(m+1)+1$, $K_h = (f-1)(m+1)+1$,

"i" , y "f" , son los únicos elementos pertenecientes a $\left\{1,\ldots,n\right\}$ t.q.

$$j \in \left\{ (i-1)m+i \;,\; \ldots \;,\; im+i \right\}$$

$$h \in \left\{ (f-1)m+f \;,\; \ldots \;,\; fm+f \right\}$$

Entonces, teniendo en cuenta (3.15), (que como se observa , es no aleatorio) , se tiene que : (utilizando (3.13))

$$\frac{1}{T}\int_0^T \pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t)\,dt \longrightarrow \frac{B_{if}}{\det(B)}\,\bar{u}_{j-K_j h-K_h} < \infty$$

$$j,h = 1,\dots,n(m+1)$$

y

$$\frac{1}{T}\int_0^T E_\theta(\pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t))\,dt \longrightarrow \frac{B_{if}}{\det(B)}\,\bar{u}_{j-K_j h-K_h}$$

$$j,h = 1,\dots,n(m+1)$$

Luego tomando :

$$g_{jh} = \frac{B_{if}}{\det(B)}\,\bar{u}_{j-K_j h-K_h}$$

únicamente queda por ver, que $G = (g_{jh})$, es no singular , para que la proposición quede demostrada. Lo cual es inmediato, dado que dicha matriz, se puede descomponer en nxn cajas, siendo cada una de las cajas, una matriz de orden : $(m+1)\times(m+1)$. La caja que ocupa el (i,f) :

$$\frac{B_{if}}{\det(B)}\begin{pmatrix} \bar{u}_{oo} & \dots & \bar{u}_{om} \\ \bar{u}_{1o} & \dots & \bar{u}_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \bar{u}_{mo} & \dots & \bar{u}_{mm} \end{pmatrix} = \frac{B_{if}}{\det(B)}\,\bar{U}$$

De donde se deduce :

$$\det(G) = (\det(\bar{U}))^n(\det(B^{-1}))^{m+1} \neq 0$$

Sabemos entonces, (véase resultado 3, subsección 2.2.2), que el estimador máximo verosímil del vector paramétrico θ, (que se obtiene, teniendo en cuenta los resultados 1 y 2 , vistos en la subsección 2.2.2), es débilmente consistente para θ , y además :

$$\hat{\theta}_T \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} N_{n(m+1)}(0, G^{-1}) \tag{3.16}$$

Con un razonamiento análogo, al que se hizo en 2.2.3, obtendriamos que :

$$- 2.\ln(\lambda_T(X(.))) = \hat{\theta}^{*}_{T,n(m+1)-p} \; ^T P_T^{-1} \hat{\theta}_{T,n(m+1)-p} \approx \chi^2_{n(m+1)-p}$$

donde :

$$P_T^{-1} = V_{T2} - V^{*}_{T1} V_{T0}^{-1} V_{T1}$$

siendo , V_{T0} , V_{T1} , y V_{T2} , las correspondientes cajas de la matriz $\frac{1}{T} J_T$, (Véase subsección 2.2.3)

Fijado un nivel de significación α , rechazaremos H_o , si :

$$- 2.\ln(\lambda_T(X(.))) > \bar{d}_T$$

, donde $\bar{d}_T$, se determina de manera que :

$$\sup_{H_o} \mu_\theta (X : - 2.\ln(\lambda_T(X)) > \bar{d}_T) = \alpha$$

3.4 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO LA OBSERVACION SE REALIZA HASTA UN INSTANTE ALEATORIO.

3.4.1 Introducción

Consideremos la familia de E.D.E., dada en (3.9), y sea (τ_s , $s \geq 0$), una familia de instantes aleatorios, que vamos a suponer está en las condiciones de (2.25). En esta sección, vamos a aplicar al coeficiente tendencia del proceso LN(n,m), el test de razón de verosimilitud, que estudiamos en la sección 2.3. Pero previamente y con objeto de que dicho test , pueda ser aplicado, hemos de ver, qué condiciones hemos de imponer a los factores exógenos, para que los resultados 1, 2, y 3, dados en la subsección 2.3.2, sean válidos.

PROPOSICION 3.4.1

Si $\forall \; j \in \left\{ 1,\dots,m \right\}$, se verifica :

$$\int_0^{\infty} G_j^2(s)\,ds \; < \infty \qquad (3.17)$$

Entonces el resultado 1 , de la subsección 2.3.2, es cierto.

Demostración :

Tenemos que ver :

1.- $\forall\ j \in \left\{1,\ldots,n(m+1)\right\}$, las funciones π_j , y $B^{1/2}$, satisfacen las condiciones del teorema 1.4.2.

2.- $\forall\ j \in \left\{1,\ldots,n(m+1)\right\}$ y $\forall\ s \leq \tau_t$, el sistema de ecuaciones :

$$B^{1/2}(s,X_s)\mathfrak{z}_j(s,X_s) = \pi_j(s,X_s) \tag{3.18}$$

tiene solución con respecto a $\mathfrak{z}_j(s,X_s)$ $\left[\mu_{\tau_t,\theta_o}\right]$

3.- $\forall\ j \in \left\{1,\ldots,n(m+1)\right\}$ y $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\mu_{\tau_t,\theta}\left(\int_o^{\tau_t} \mathfrak{z}_j^{*}(s,X_s)\mathfrak{z}_j(s,X_s)\,ds < \infty \right) = 1$$

Donde en todo lo anterior τ_t , es un elemento arbitrario, pero fijo, de la familia de instantes aleatorios, antes considerada.

Veámoslo :

1.- Es evidente, sin más que tener en cuenta la proposición 3.2.3.

2.- Basta que demostremos, que $\forall \; s \leq \tau_t$

$$\det(B(s,X_s)) \neq 0$$

pero esto es inmediato dado que,

$$\det(B(s,X_s)) = \det(B) \cdot \prod_{i=1}^{n} X_{it}^2 \neq 0$$

pues $\det(B)\neq 0$, y $X_{it} \in (0,\infty) \quad \forall \; i\in\{1,\dots,n\}$

Por consiguiente el sistema (3.18), tiene solución con respecto a $\mathfrak{Z}_j(s,X_s)$, (salvo, quizás , para un conjunto μ_{τ_t,θ_o}-nulo)

3.- Sea $j \in \{1,\dots,n(m+1)\}$, entonces :

$$\int_0^{\tau_t} \mathfrak{Z}_j^*(s,X_s)\mathfrak{Z}_j(s,X_s)ds =$$

$$= \int_0^{\tau_t} \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)ds =$$

$$= \int_0^{\tau_t} (\delta_{i1} \dots \delta_{ni}) G_{j-K_j}(s) X_{it} \frac{1}{\det(B)} \frac{B_{pq}}{X_{pt}X_{qt}} \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{ni} \end{pmatrix} G_{j-K_j}(s) X_{it} ds$$

$$p,q = 1,\dots,n$$

$$= \frac{B_{ii}}{\det(B)} \int_0^{\tau_t} G^2_{j-K_j}(s)ds \quad < \quad \infty$$, (sin más que tener

en cuenta la condición (3.17)). Luego :

$$\forall \quad \theta \in \Theta$$

$$\mu_{\tau_t,\theta} \left(\int_0^{\tau_t} \mathcal{B}_j^{*}(s,X_s)\mathcal{B}_j(s,X_s)ds < \infty \right) = 1$$

En virtud de esta proposición, y teniendo en cuenta el resultado 1 , de la subsección 2.3.2 , sabemos que :

1º.- $\forall \quad \theta \in \Theta$

$$\mu_{\tau_t,\theta} \sim \mu_{\tau_t,\theta_o}$$

2º.-

$$\frac{d\mu_{\tau_t,\theta}}{d\mu_{\tau_t,\theta_o}}(X) = \exp\left((\theta - \theta_o)^{*} D_{\tau_t} - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^{*} J_{\tau_t} (\theta + \theta_o) \right)$$

PROPOSICION 3.4.2

Supuesto que los factores exógenos : G_1 , ... , G_m , son tales que :

(i) .-

$$\frac{1}{t}\int_a^t G_i(s)\, G_k(s)\,ds \xrightarrow[t\nearrow\infty]{\mu_\theta} \bar{u}_{ik} < \infty$$

$$i,k = 0,\ldots,m$$

(ii).-

$$\frac{1}{t} E_\theta\left(\int_0^t G_i(s)\, G_k(s)\,ds\right) \xrightarrow[t\nearrow\infty]{} \bar{u}_{ik}$$

$$i,k = 0,\ldots,m$$

Donde $\bar{U} = (\bar{u}_{ik})$, es una matriz no singular, y $G_o(t) = 1$.

Entonces, el resultado 3, de la subsección 2.3.2, es cierto.

Demostración :

Tenemos que demostrar, que se cumple :

1º.-

$$\frac{1}{t}\int_0^t \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_h(s,X_s)\,ds \xrightarrow[t\nearrow\infty]{\mu_\theta} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

2º.-

$$\frac{1}{t} E_{\theta}\left(\int_{0}^{\tau_t} \pi_j^{*}(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_h(s,X_s)\,ds\right) \xrightarrow[t \nearrow \infty]{} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

Donde $G = (g_{jh})$, es una matriz no singular , constituida por elementos finitos.

La demostaación de 1º, y 2º, se hace de manera similar , a como se hizo en la proposición 3.3.1, apoyándonos en las hipótesis (i), y (ii), respectivamente. La condición (ii), es necesaria en esta proposicíón , dado que en esta situación

$$\int_{0}^{\tau_t} \pi_j^{*}(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_h(s,X_s)\,ds$$

es aleatorio.

En virtud del resultado 3 , de la subsección 2.3.2 , tenemos asegurado que el estimador máximo verosímil del vector paramétrico θ, (que se obtiene en virtud de los resultados 1 y 2 , de la citada subsección), es débilmente consistente para θ , y además :

$$\hat{\theta}_{\tau_t} \xrightarrow[t \nearrow \infty]{} N_{n(m+1)}(\ 0\ ,\ G^{-1}) \tag{3.19}$$

3.4.2 Planteamiento y construcción del test

Sea r_t , un elemento arbitrario, pero fijo de la familia de instantes aleatorios $(r_s \; , \; s \geq 0)$, que estamos considerando.

Supuesto que disponemos de una observación del proceso en el intervalo $[0, r_t]$, vamos a realizar el test :

$$H_0 : \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \dots = \theta_{n(m+1)} = 0$$

$$H_1 : \theta \in \Theta \qquad\qquad p < n(m+1)$$

Utilizando el procedimiento de máxima verosimilitud, y razonando de manera similar, a como se hizo en la subsección 2.3.3, se obtiene que :

$$- 2.\ln(\lambda_{r_t}(X(.))) = \hat{\theta}^{*}_{r_t, n(m+1)-p} \; t \; P^{-1}_{r_t} \; \hat{\theta}_{r_t, n(m+1)-p} \approx \chi^2_{n(m+1)-p}$$

donde :

$$P^{-1}_{r_t} = V_{r_t 2} - V^{*}_{r_t 1} \, V^{-1}_{r_t 0} \, V_{r_t 1}$$

siendo : $V_{r_t 0}$, $V_{r_t 1}$, y $V_{r_t 2}$, las correspondientes cajas de la matriz $\frac{1}{t} J_{r_t}$, (véase subsección 2.3.3)

Para un cierto nivel de significación α , fijado, rechazaremos H_o , si :

$$- 2.\ln(\lambda_{r_t}(X(.))) > \bar{d}_{r_t}$$

donde $\bar{d}_{r_t}$, se determina , de manera que :

$$\sup_{H_o} \mu_o (X : - 2.\ln(\lambda_{r_t}(X)) > \bar{d}_{r_t}) = \alpha$$

3.5 TEST DE RAZON DE VEROSIMILITUD SOBRE EL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO SE DISPONE DE N OBSERVACIONES.

Consideremos la familia de E.D.E., dependiente del vector paramétrico θ , dada en (3.9). Bajo esta situación, en las dos secciones previas, hemos construido por el procedimiento de razón de verosimilitud, un test de hipótesis sobre el coeficiente tendencia del proceso LN(n,m). Ahora bien, tanto en la sección 3.3, (donde considerabamos el caso de observación en un intervalo de tiempo fijo), como en la sección 3.4, (donde se consideraba el caso de observación en un intervalo de tiempo aleatorio), la muestra disponible, estaba constituida por una sola observación del proceso en el intervalo correspondiente.

En esta sección, vamos a suponer que la muestra, en base a la cual se construye el test, está constituida por N trayectorias observadas, ($N > 1$), de forma independiente.

El test será construido aplicando el test estudiado en la sección 2.4.

3.5.1 Observación en un intervalo de tiempo fijo.

Sea $T \in (0,\infty)$ fijo. Supongamos que realizamos N observaciones del proceso en el intervalo $[0,T]$. Dispondremos por consiguiente de la muestra :

$$\left(X^i(.) = \left(X^i_t \ , \quad 0 \leq t \leq T \right) \right) \qquad i = 1,\ldots,N \tag{3.20}$$

Basándonos en dicha muestra, queremos construir el test :

$$H_o \ : \quad \theta_{p+1} = \theta_{p+2} = \ldots = \theta_{n(m+1)} = 0 \qquad (p < n(m+1))$$

$$H_1 \ : \quad \theta \in \Theta \tag{3.21}$$

Supongamos que los factores exógenos : $G_1(t),\ldots,G_m(t)$, que según sabemos, (véase (3.1)), son funciones continuas y acotadas sobre $(0,\infty)$, verifican :

$$\lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_i(t)\, G_k(t)\, dt = \bar{u}_{ik} < \infty$$

$$i,k = 0,1,\ldots,m$$

Siendo :

$$\bar{U} = (\bar{u}_{ik})_{\ i,k = 0,1,\ldots,m} \qquad \text{no singular}$$

$$G_o(t) = 1 \qquad \forall \ t \in (0,\infty)$$

Bajo esta hipótesis, los resultados 1 y 2, de la subsección 2.4.2, son ciertos. Para comprobarlo basta hacer un razonamiento análogo al que hicimos en la proposición 3.3.1.

Sabemos entonces, en virtud de los citados resultados, que el estimador máximo verosímil del vector paramétrico θ, basado en la muestra (3.20), y que denotamos $\hat{\theta}_T^N$, (estimador que se obtiene a partir del resultado 1), es débilmente consistente y supuesto que θ, es el verdadero valor del parámetro, verifica :

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_T^N - \theta) \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} N_{n(m+1)}(0, G^{-1})$$

Teniendo en cuenta este resultado asintótico y el test construido en la subsección 2.4.2 , tenemos que :

$$-2.\ln(\lambda_T(X^1(.),\ldots,X^N(.))) =$$

$$= \hat{\theta}^N_{T,n(m+1)-p}{}^T (P_T^N)^{-1} \hat{\theta}^N_{T,n(m+1)-p} \approx \chi^2_{n(m+1)-p}$$

donde :

$$P_T^N = (V_{T2}^N - (V_{T1}^N)^*(V_{T0}^N)^{-1}(V_{T1}^N))^{-1}$$

siendo : V_{T0}^{N}, V_{T1}^{N}, y V_{T2}^{N} , las correspondientes cajas de la matriz :

$V_T^N = \frac{1}{T} \cdot \mathcal{J}_T^N$, donde en nuestro caso :

$$\mathcal{J}_T^N = \sum_{p=1}^{N} J_T^p = \left(\frac{N.B_{if}}{\det(B)} \int_0^T G_{j-K_j}(t)\, G_{h-K_h}(t)\, dt \right)_{\substack{n(m+1) \times \\ n(m+1)}}$$

$$j,h = 1,2,\ldots,n(m+1)$$

(véase (2.48) y (3.15))

Entonces, fijado un nivel de significación α , rechazamos H_o, si :

$$- 2.\ln(\lambda_T(X^1(.),\ldots,X^N(.)) > \bar{d}_T^N$$

Donde la constante $\bar{d}_T^N$, se determina de manera que :

$$\sup_{H_o} \mu_\theta (- 2.\ln(\lambda_T(X^1,\ldots,X^N)) > \bar{d}_T^N) = \alpha$$

3.5.2 Observación en un intervalo de tiempo aleatorio.

Sea $(\tau_s \; , \; s \geq 0)$, una familia de instantes aleatorios, que satisface las condiciones dadas en (2.25).

Supongamos que las N observaciones del proceso han sido realizadas en el intervalo $[0,\tau_t]$, donde t es fijo. Disponemos entonces de la muestra :

$$(X^i(.) = (X^i_s \; , \; 0 \leq s \leq \tau_t) \quad)$$

$$i = 1,\ldots,N \qquad (3.22)$$

y basándonos en ella , queremos construir el test (3.21)

Vamos a suponer, que los factores exógenos : $G_1, \ldots, G_m$, son tales que :

(i) .- $\forall \; j \in \{1,\ldots,n(m+1)\}$

$$\int_0^{\infty} G_j^2(s)ds < \infty$$

(ii).- Supuesto que θ, es el verdadero valor del parámetro :

$$\frac{1}{t}\int_0^{\tau_t} G_i(s)\, G_k(s)\, ds \xrightarrow[t\to\infty]{\mu_\theta} \bar{u}_{ik} < \infty$$

$$i,k = 0,1,\dots,m$$

(iii).-

$$\frac{1}{t} E_\theta\left(\int_0^{\tau_t} G_i(s)\, G_k(s) ds \right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{u}_{ik}$$

$$i,k = 0,1,\dots,m$$

donde :

$\bar{U} = (\bar{u}_{ik})_{\;i,k = 0,1,\dots,m}$, es no singular.

$G_0(t) = 1 \quad \forall \; t$

Bajo estas condiciones, y a través de un razonamiento similar al que hicimos en las proposiciones 3.4.1 y 3.4.2 , los resultados 1 y 2, de la subsección 2.4.3 son ciertos.

Entonces, a partir de dichos resultados, es conocido que el estimador máximo verosímil del vector paramétrico θ, basado en la muestra (3.22), y que denotamos $\hat{\theta}^N_{\tau_t}$, (estimador que se obtiene a partir del resultado 1), es débilmente consistente y además se tiene que :

$$t^{1/2}\left(\hat{\theta}^N_{\tau_t} - \theta\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} N_{n(m+1)}\left(0\,,\,G^{-1}\right)$$

Teniendo en cuenta este resultado asintótico, así como el test construido en la subsección 2.4.3 , tendremos que :

$$-2.\ \ln\left(\lambda_{\tau_t}\left(x^1(.),\ldots,x^N(.)\right)\right) =$$

$$= \hat{\theta}^N_{\tau_t, n(m+1)-p}\ t\left(P^N_{\tau_t}\right)^{-1}\ \hat{\theta}^N_{\tau_t, n(m+1)-p} \approx \chi^2_{n(m+1)-p}$$

donde :

$$P^N_{\tau_t} = \left(V^N_{\tau_t 2} - (V^N_{\tau_t 1})^*(V^N_{\tau_t 0})^{-1}(V^N_{\tau_t 1})\right)^{-1}$$

siendo : $V^N_{\tau_t 0}$, $V^N_{\tau_t 1}$, y $V^N_{\tau_t 2}$, las correspondientes cajas de la matriz : $V^N_{\tau_t} = \frac{1}{t} J^N_{\tau_t}$, donde en nuestro caso :

$$J^N_{\tau_t} = \sum_{p=1}^{N} J^p_{\tau_t} = \left(\frac{N.B_{if}}{\det(B)} \int_0^{\tau_t} G_{j-K_j}(s)\, G_{h-K_h}(s)\,ds\right)_{\substack{n(m+1)\times n(m+1)\\ j,h=1,\ldots,n(m+1)}}$$

(véase (2.54) y (3.15))

Luego fijado α , rechazaremos H_0 , si :

$$- 2.\ln(\lambda_{\tau_t} (x^1(.),\ldots,x^N(.))) > \bar{d}^N_{\tau_t}$$, donde

$\bar{d}^N_{\tau_t}$ se determina de tal manera que :

$$\sup_{H_0} \mu_0(- 2.\ln(\lambda_{\tau_t}(x^1,\ldots,x^N)) > \bar{d}^N_{\tau_t}) = \alpha$$

3.6 TESTS SECUENCIALES SOBRE LOS COEFICIENTES DEL PROCESO LN(1,0).

Sea $X = (X_t\ ,\ t \geq 0\ )$, un proceso LN(1,0). Sabemos entonces, que los coeficientes tendencia y difusión, vienen dados respectivamente por :

$$\mu(x) = A.x \qquad \sigma^2(x) = B.x^2 \qquad A,B \in \mathbb{R} \quad (\ B > 0)$$

Supongamos que A y B , son desconocidos.

Dado que el proceso LN(1,0), es homogéneo, vamos a aplicarle, los tests estudiados en la sección 2.5.

A).- <u>Test de dos colas.</u>

Se trata de realizar el test insesgado de tamaño ϵ

$$H_0 \ : \qquad \mu(x) = A_0 x \qquad \sigma^2(x) = B_0 x^2$$

siendo A_0 y B_0 constantes conocidas, $(B_0 > 0)$

$$H_1 \ : \qquad \mu(x) \neq A_0 x \quad \text{ó} \quad \sigma^2(x) \neq B_0 x^2$$

Teniendo en cuenta lo estudiado en la subsección 2.5.3, observaremos una trayectoria del proceso hasta el instante aleatorio τ , definido de la siguiente manera :

$$\tau = \inf \left\{ t > 0 \quad : \quad X_t - X_0 = g \text{ ó } -h \right\}$$

siendo $g,h \in \mathbb{R}^+$ constantes conocidas.

Teniendo en cuenta, los resultados vistos en 2.5.1 , se tendrá en nuestro caso que :

$$f(\tau) = \int_0^{\tau} B_0 X_s^2 \left(\exp \left(-\int_{X_0}^{X_s} \frac{2.A_0 z}{B_0 z^2} dz \right)^2 ds \right. =$$

$$= B_0 (X_0)^{(4A_0/B_0)} \int_0^{\tau} (X_s)^{(2(B_0-2A_0)/B_0)} ds =$$

$$= \begin{cases} K.\tau & \text{si } B_0 = 2A_0 \\ K. \int_0^{\tau} (X_s)^{(2(B_0-2A_0)/B_0)} ds & \text{si } B_0 \neq 2A_0 \end{cases}$$

donde $K = B_o \, (X_o)^{(4\, A_o/B_o)}$

Las regiones críticas correspondientes a los casos A1, A2, y A3, (véase la subsección 2.5.3), serán :

A1.-

$$C_1 = \left[f(\tau) \leq a \; , \; X_\tau - X_o = -h \right] \cup \left[f(\tau) \leq b \; , \; X_\tau - X_o = g \right]$$

A2.-

$$C_2 = \left[f(\tau) \leq f(T) \; , \; X_\tau - X_o = g \text{ ó } -g \right]$$

A3.-

$$C_3 = \left[f(\tau) \leq T_o \right] \cup \left[f(\tau) > f(T_o) \; , \; X_{T_o} - X_o > g' \right] \cup$$

$$\cup \left[f(\tau) > f(T_o) \; , \; X_{T_o} - X_o < -g' \right]$$

Rechazamos H_o , si $f(\tau)$, que se obtiene a partir de la trayectoria observada, pertenece a la región crítica correspondiente al caso que estemos considerando.

B).- <u>Tests de una cola</u>

Estamos interesados ahora en los tests :

1.-

$$H_0 : \quad \mu(x) = A_0 x \qquad \sigma^2(x) = B_0 x^2$$

$$H_1 : \quad \mu(x) > A_0 x \quad ó \quad \sigma^2(x) \neq B_0 x^2$$

2.-

$$H_0 : \quad \mu(x) = A_0 x \qquad \sigma^2(x) = B_0 x^2$$

$$H_1 : \quad \mu(x) < A_0 x \quad ó \quad \sigma^2(x) \neq B_0 x^2$$

Para el primer test, consideramos el instante aleatorio:

$$\tau_1 = \inf \left\{ t > 0 : \quad X_t - X_0 = g \right\} \quad , \qquad g \in \mathbb{R}^+$$

y para el segundo :

$$\tau_2 = \inf \left\{ t > 0 : \quad X_t - X_0 = -h \right\} \quad , \qquad h \in \mathbb{R}^+$$

Obtenemos $f(r_1)$ para el test (1), y $f(r_2)$, para el (2), y según el caso que estemos considerando (B1, B2, ó B3), las correspondientes regiones críticas serán :

Para el Test (1) :

B1.-

$$C_1 = \left[f(r_1) \leq a \ , \ X_{r_1} - X_o = g \right]$$

B2.-

$$C_2 = \left[f(r_1) \leq f(T) \ , \ X_{r_1} - X_o = g \right]$$

B3.-

$$C_3 = \left[f(r_1) \leq f(T_o) \right] \cup \left[f(r_1) > f(T_o) \ , \ X_{T_o} - X_o = g' \right]$$

Rechazamos H_o , si $f(r_1)$ pertenece a la región crítica correspondiente al caso que estemos considerando.

Para el test (2), se obtienen las correspondientes regiones de manera similar.

Si en lugar de disponer de una trayectoria observada, disponemos de N, $(N>1)$, entonces, podemos construir los tests estudiados en la subsección 2.5.4.

APENDICE

Vamos a enunciar a continuación algunas posibles cuestiones derivadas de nuestro estudio :

1.- Considerar que el coeficiente tendencia no es lineal en los parámetros.

2.- Considerar el caso multidimensional en los tests secuenciales.

3.- Obtención de regiones de confianza.

Taraskin, en 1971, y en 1975, y Brown , en 1974, han discutido regiones de confianza para los parámetros de procesos de difusión. Una posible cuestión a estudiar, es la generalización de sus resultados a todos los casos estudiados por nosotros.

BIBLIOGRAFIA

(1) .- AITCHISON, J., and BROWN, J.A. (1969). " The lognormal distribution." Cambridge. At the university Press.

(2) .- ARMITAGE, P. (1957). " Restricted sequential procedures." Biometrika , 44 , pg : 9 - 26.

(3) .- ARNOLD, L. (1973). " Stochastic diferential equations." John- Wiley.

(4) .- BARNDORFF - NIELSEN, O. (1980). "Conditionality resolutions." Biometrika , 67 , pg : 293 - 310 .

(5) .- BASAWA, I.V., and PRAKASA - RAO, B.L.S. (1980). " Statistical inference for stochastic processes." Academic Press.

(6) .- BHARUCHA - REID, A.T. (1960). " Elements of the theory of Markov processes and their applications." Mc Graw-Hill.

(7) .- BHARUCHA - REID, A.T. (1972). " Random integral equations" Academic Press.

(8) .- BILLINGSLEY, P. (1968). "Convergence of Probability Measures." New York. Wiley.

(9) .- BREIMAN, L. (1968). " Probability " . Addison- Wesley, Publishing company.

(10).- BROWN, B.M., and HEWITT, J.I. (1975). " Asymptotic likelihood theory for diffusion processes." Journal of applied probability, vol 12, nº 12, pg : 228 - 238.

(11).- BROWN, B.M. (1974b). " A restricted sequential test." Journal Royal Statist. Soc. Ser. B, 36, pg : 455 - 465.

(12).- BROWN, B.M. (1974a). "A sequential procedure for diffusion processes." Studies in probability and Statistics, (papers in honour of E.J.G. Pitmam). Academic Press, pg : 89 - 96.

(13).- CLARKE-DISNEY (1970). " Probability and random processes for engineers and scientistis." John Wiley and sons.

(14).- COHEN, J.W. (1982). " The single server queue." North- Holland Publishing company.

(15).- DOOB, J.L. (1953). " Stochastics processes." John - Wiley.

(16).- DYNKIN, L. (1965). " Markov Processes." Vol. I , Springer Verlag, Berlin.

(17).- FERGUSON, T.S. (1967). " Mathematical Statistics." Academic Press.

(18).- FRIEDMAN, A. (1975). "Stochastics differential equations and applications." Academic - Press.

(19).- GHIKMAN, I.I., and SKOROKHOD, A.V. (1972). "Stochastics differential equations." Springer - Verlag.

(20).- GOMEZ, G.L., and TINTNER, G. (1979). " The application of the diffusion processes in problems of developmental economic planning." Trabajos de Estadística, vol. 30, nº 2.

(21).- GUTIERREZ-JAIMEZ, R. (1981). " Inferencia en los procesos de difusión logarítmico-normales multidimensionales, con factores exógenos." Cuadernos de Estadística, nº 6 , pg : 6 - 15.

(22).- IKEDA, N., and WATANABE, S. (1973). " The local structure of a class of diffusions and related problems." Lectures notes in mathematics, nº 330, pg : 124 - 169, Springer - Verlag.

(23).- ITO, K., and Mc KEAN, H.P. (1965). " Diffusion Processes and their sample paths." Springer - Verlag , Berlin.

(24).- LAHA, R.G., and ROHATGI, V.K. (1979). " Probability theory." John Wiley.

(25).- LIPTSER, R.S., and SHIRYAYEV, A.N. (1977). " Statistics of random processes I, and II." Springer - Verlag.

(26).- LOEVE, M. (1963). " Probability theory." 4ª edición, Van - Nostrand.

(27).- Mc.KEAN, P. (1969). " Stochastic integrals." Academic Press.

(28).- NADAS, A. (1973). " Best test for zero drift based on first passage times in Brownian motion." , Technometrics, 15 , pg : 125 - 132.

(29).- ROHATGI, V.K. (1980). " An introduction to probability theory and mathematical Statistics." John Wiley.

(30).- SEARLE , S.R. (1982). " Matrix algebra useful for statistics." John Wiley.

(31).- SHIRYAYEV, A.N. (1973). " Statistics of diffusion type processes." Lectures notes in mathematics , nº 330, pg : 397 - 411, Springer - Verlag.

(32).- SKOROKHOD, A.V. (1965). " Studies in the theory of random processes." Addison-Wesley Publishing.

(33).- SORENSEN, M. (1983). " On maximun likelihood estimation in randomly stopped diffusion type processes." International Statistical Review, vol. 51, nº 1 , pg : 93 - 110.

(34).- STROOCK, D.W., and VARADHAN, S.L.S. (1979). "Multidimensional diffusion processes." Springer - Verlag, New York.

(35).- TARASKIN, A.F. (1974). " On the asymptotic normality of vector valued stochastic integrals and estimates of a multidimensional diffusion process." Theory Prob. Mathe. Statist. nº 2, pg : 209 - 224.

(36).- TINTNER (1973). " Some aspects of stochastic economics." Stochastics, vol. 1 , pg : 71 - 86.

(37).- TINTNER and BELLO (1968). " Aplicación de un proceso de difusión logarítmico-normal al crecimiento económico." Trabajos de Estadística, 19 , pg : 83 - 97.

(38).- TINTNER and GOMEZ (1979). " The aplication of the Diffussion processes in problems of developmental Economic planning." Trabajos de Estadística, vol. 30, nº 2

(39).- TINTNER and NARAYANAN (1966). " A multidimensional stochastic processes for the explanation of economic development." Metrika, vol. 11 , pg : 85 - 90.

(40).- TINTNER, G., and SENGUPTA, J.K. (1972). " Stochastic economic, stochastic processes control, and programming." Academic-Press.

(41).- TINTNER and PATEL (1966). " A log-normal diffusion process applied to the development of Indian agriculture with some considerations on economic policy." J. Indian Soc. Agricultural Statist , vol . 18 , pg : 36 - 44.

(42).- TINTNER and THOMAS (1963). " Un modele stochastique de developmeppment economique avec application a l'industrie Anglaise." Rev. Econ. Politique , 73 , pg : 278 - 280.

(43).- WILLIAMS, D. (1979). " Diffusion. Markov processes and Martingales, 1." Chichester, Wiley.

(44).- WONG, E. (1971). " Stochastic processes in information and dinamical systems." Mc Graw- Hill.