ESTUDIO SOBRE DISTRIBUCIONES GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias. Sección de Matemáticas. Presenta:

José Alberto Hermoso Gutiérrez

Vº Bº

El Director de la Tesis

Pr. Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

Ramón Jaimez

RAMON GUTIERREZ JAIMEZ
Director del Departamento de Estadística Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS UNIVERSIDAD DE GRANADA

ESTUDIO SOBRE DISTRIBUCIONES GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL

Realizado el acto pùblico de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral por D. Josè Alberto Hermoso Gutièrrez, el dìa 20 de Diciembre de 1986, en la Universidad de Granada, ante el Tribunal formado por:

Presidente: Dr. D. Josè Mª Caridad y Ocerìn
Catedràtico de la Universidad de Còrdoba

Vocales : Dr. D. Luis Parras Guijosa
Catedràtico de la Universidad de Màlaga

Dr. D. Antonino Garcìa Rendòn
Catedràtico de la Universidad de Cadiz

Dr. D. Josè M. Casas Sanchez
Catedràtico de la Universidad de Alcalà de Henares

Secretario: Dr. D. Elias Moreno Bas
Catedràtico de la Universidad de Granada

obtuvo la calificaciòn de:

APTO CUM LAUDE

A Esperanza

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a D. Ramón Gutierréz Jáimez, director de esta tesis, por el ánimo y ayuda prestada en la realización de este trabajo.

INDICE

Capítulo 3. REGRESION

INTRODUCCION

Uno de los objetivos básicos del Cálculo de probabilidades es la determinación de distribuciones teóricas que puedan servir de modelos a los diversos fenómenos aleatorios. Históricamente se comenzó estudiando la generación de distribuciones continuas. Actualmente, debido a la gran importancia de las distribuciones discretas se está profundizando cada vez más en la obtención de distribuciones teóricas discretas así como en los métodos utilizados para ello.

Es en esta última línea donde se situa el tema de esta tesis.

Pearson (1895) fue quien primero propuso el estudio de una familia de distribuciones continuas que verifica una ecuación diferencial del tipo:

$$y'(x) = \frac{x-a}{b_0+b_1x+b_2x^2}\, y(x)$$

donde a, b_0, b_1 y b_2 son parámetros reales.

Este "sistema de Pearson", que supuso el primer intento de sistematización de distribuciones de probabilidad a partir de la forma de generarlas, jugó un importante papel en la Estadística durante muchos años. En la actualidad son conocidos como "Pearsonianos" los sistemas generadores de distribuciones de probabilidad que han seguido esta línea.

Las propiedades más notables de este sistema (relaciones de recurrencia entre momentos, ecuación diferencial que verifica la función característica de las distribuciones que satisfacen el sistema de Pearson, clasificación de las distribuciones pertenecientes al sistema, ajuste por momentos, etc.) han sido estudiadas en muchos trabajos, destacando entre ellos Elderton & Jhonson (1969) y Kendall & Stuart (1969).

De forma natural se pensó en estudiar extensiones del sistema de Pearson que pudieran dar lugar a otras distribuciones teóricas no pertenecientes a ese sistema. Por ejemplo se consideró la ecuación diferencial:

$$\frac{d \ln f(x)}{dx} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinómios en x, de órdenes n y d cualesquiera en principio.

Casos concretos de este último sistema fueron considerados por algunos autores. Por ejemplo para n=1,2 d=3 por Mouzon (1930) y Zoch (1935), y para n=1, d=4 por Hansmann (1934).

Más recientemente Roy (1971) considera el caso n=2, d=3, indicando que dicha ecuación diferencial puede obtenerse al tomar logaritmos y derivar en la función

$$f(x) = Cx^{r_1}(a_1+a_2x)^{r_2}\,(b_1+b_2x)^{r_3}$$

con C, a_1, a_2, b_1, b_2, r_1, r_2 y r_3 reales.

Herrerias (1975), generaliza a su vez el sistema de Pearson, introduciendo una ecuación diferencial análoga a la de Pearson pero con operadores derivadas más generales.

En el caso multivariante, Pearson (1923), propone el estudio de distribuciones de probabilidad continuas que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{L(x,y)}{G(x,y)}\, f$$

$$f=f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{N(x,y)}{H(x,y)}\, f$$

donde L, N son funciones cúbicas y G, H funciones cuárticas en x,y verificándose la condición

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}$$

En particular Van Uven (1947,1948), estudió ampliamente el caso en que L, N son funciones lineales, G y H funciones cuadráticas en x,y respectivamente, obteniendo relaciones entre momentos, líneas de regresión y clasificación de las distribuciones que pertenecen al sistema.

Steyn (1956) da un importante resultado, indicando que para cualquier función de densidad es posible obtener la ecuación diferencial que verifica su función característica y a partir de ella caracterizar sus funciones de regresión.

Steyn (1960), aplica el resultado anterior a las funciones de densidad que satisfacen el sistema multivariante

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{a_{io}+a_i' x}{b_{ioo}+b_{iO}' x+x' B_i x}\, f \qquad i=1,\dots,k$$

donde a_i, b_{iO}, x son vectores kx1, B_i son matrices simétricas kxk con elementos reales b_{ilj}, demostrando que esta generalización del sistema de Pearson tiene funciones de regresión lineal de la forma:

$$(a_{ii}+2b_{iii})\hat{X}_i = -(a_{iO}+b_{iiO}) - \sum_{j\neq i} (a_{ij}+2b_{ilj})x_j$$

Extensiones más recientes han sido dadas por Herrerias (1975), que generaliza los sitemas de Van Uven y Steyn a través de los operadores en derivadas generalizadas; y por Fernandez (1981), sobre el sistema de Van Uven.

Un camino paralelo al caso continuo ha sido desarrollado en el estudio de familias o sistemas de distribuciones discretas, tomando como modelo el caso continuo. El propio Pearson (1895) propuso el estudio de una ecuación en diferencias, análoga al caso continuo, de la forma:

$$\Delta f_{r-1} = \frac{a-r}{b_0+b_1 r+b_2 r(r-1)} f_{r-1} \qquad r\in T\subset Z$$

donde a y b_i, i=0,1,2 son parámetros reales.

Ord (1967), estudió ampliamente este sistema de Pearson discreto, obteniendo relaciones de recurrencia entre momentos factoriales, clasificación de algunas distribuciones discretas en diversos tipos atendiendo a los coeficientes β_1 y β_2 (asimetría y Kurtosis).

Herrerias (1976), estudia una extensión del sistema de Pearson, siguiendo el modelo de Roy en el caso continuo, obteniendo distribuciones no pertenecientes al sistema de Ord.

Mención especial merece, dentro de la linea de sistemas discretos, el estudio de familias generadas a partir de series de potencias generalizadas, cuyas funciones de probabilidad discreta vienen definidas por:

$$f_r = a(r)\theta^r/A(\theta)$$

donde $r\varepsilon\Omega$ rango de la variable aleatoria R y θ es un parámetro.

El estudio de sus propiedades y estimaciones de los parámetros han sido discutidos en diversos trabajos, destacando entre ellos Patil & Joshi (1968) y Kemp (1967).

El caso multivariante, cuyas funciones de probabilidad vienen definidas por:

$$f(r_1,\dots,r_m/\theta_1,\dots,\theta_m) = a(r)\theta_1^{r_1}\dots\theta_m^{r_m}/A(\theta)$$

a partir de las series de potencias generalizadas multivariantes, ha sido discutido por Patil (1965), Joshi & Patil (1970), etc.

Dentro de este contexto podriamos citar a Kemp (1968) en el estudio de leyes de probabilidad discretas cuyas funciones generatrices son series hipergeométricas en el caso univariante y a Steyn (1951,1955) en el caso multivariante.

En los ultimos años han aparecido un considerable número de trabajos, tanto en distribuciones continuas como discretas, que han sido recogidas en libros, cursos monografias, etc. entre las que destacamos las de Patil & Joshi (1968), Johnson & kotz (1969), Ord (1972), Patil, Kotz & Ord (1974) y Johnson & Kotz (1983).

Como caso especial, incluido en la linea de generación de distribuciones discretas, mencionaremos finalmente los sistemas de distribuciones discretas hipergeométricas por su especial importancia en sí, y por ser, por otra parte, el caso univariante génesis del tema global de esta Tesis. En efecto, dada una ecuación en diferencias finitas del tipo:

$$G(r)\ f_{r+1} - L(r)\ f_r = 0$$

definida para todo $r\varepsilon Z^+$ (conjunto de los enteros no negativos) tales que:

$$L:\ Z^+ \longrightarrow R\ ;\quad G:\ Z^+ \longrightarrow R-(0)$$

son funciones dadas.

Si las funciones G(r) y L(r) son de la forma:

$$G(r) = (\gamma+r)\ (r+1)$$

$$L(r) = (\alpha+r)\ (\beta+r)\ \lambda$$

se obtiene la ecuación en diferencias:

$$(\gamma+r)\ (r+1)\ f_{r+1} - (\alpha+r)(\beta+r)\lambda\ f_r = 0$$

con α, β, γ, λ reales no nulos y γ no entero negativo.

La solución de esta ecuación en diferencias viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha)_r\ (\beta)_r\ \lambda^r}{(\gamma)_r\ r!} \qquad r\geq 0$$

Donde la constante f_0 está dada por:

$$f_0 = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\ \Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}$$

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones pertenecientes a este sistema, viene definida por:

$$g(t) = \frac{{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;\lambda t)}{{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;\lambda)}$$

que converge al menos para $|t|\leq 1$.

Por ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;\lambda t)$ designamos la serie hipergeométrica (Erdelyi (1953)), de la cual toma su nombre el sistema.

Katz (1963) y Ord (1967), han estudiado subfamilias de la hipergeométrica, estando la de Katz contenida en la de Ord.

La familia de Ord de tres parámetros se obtiene al tomar $\lambda=1$ en la anterior ecuación en diferencias, deduciéndose:

$$(\gamma+r)\ (r+1)\ f_{r+1} - (\alpha+r)\ (\beta+r)\ f_r = 0$$

a partir de la cual se obtienen la ecuación diferencial que verifica la función generatriz de probabilidad, de momentos y de cumulantes, los principales momentos, así como las relaciones de recurrencia entre ellos.

Hasta aquí un breve resumen histórico de la linea de investigación dentro de la cual se situa esta tesis.

En el primer capítulo se parte de la conocida función hipergeométrica de Gauss y de sus principales propiedades. A continuación se exponen las distintas generalizaciones que ha tenido esta función. De todas las generalizaciones de la función hipergeométrica de Gauss se estudia con más detalle la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella, que es la más conocida y utilizada.

Por último se extiende la función hipergeométrica de Gauss a funciones de argumento matricial, para lo cual es de crucial importancia el concepto de polinomio zonal que generaliza la función potencial $f_k(x)=x^k$ en el caso que X, argumento de la función, es una matriz; permaneciendo la nueva función real valuada. (Muirhead 1982; Takemura 1984).

Al final de este capítulo se recogen en un cuadro-resumen las principales propiedades de las funciones de Gauss, Lauricella y de argumento matricial donde puede observarse la gran analogía entre las propiedades de estas funciones.

Las funciones generadoras de probabilidad juegan un importante papel en la determinación de muchas propiedades de las distribuciones que generan. Desde el segundo capítulo en adelante, a partir de las funciones hipergeométricas de argumento matricial se obtienen propiedades básicas de las distribuciones por ellas generadas.

En el segundo capítulo se estudian algunas de las funciones hipergeométricas relacionadas en el capítulo primero (función de Gauss, función F_D de Lauricella y función hipergeométrica de argumento matricial) , como funciones generadoras de distribuciones de probabilidad discretas. Se obtiene la constante tal que multiplicada por una función hipergeométrica de argumento matricial nos proporciona una función generadora de probabilidad. El cálculo de esta constante se ha hecho usando un método distinto al que utiliza Steyn (1951), para el cálulo de la correspondiente constante con funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella; nos hemos basado en la representación integral de Euler pues no se conoce para estas funciones una fórmula de reducción que permita usar el conocido teorema de sumación de Gauss.

Para el cálculo de los momentos asociados a las distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella, Steyn (1951) sigue la siguiente metodología: A partir de la función generadora de probabilidad obtiene la función generadora de momentos factoriales y por diferenciación de ésta obtiene los momentos factoriales, de los que por las conocidas relaciones obtiene los momentos.

El método anterior no es factible con las funciones hipergeométricas de argumento matricial pues no se conoce ninguna expresión general de los polinomios zonales, lo que nos impide diferenciarlos.

El método que hemos seguido para el cálculo de los momentos asociados a las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial se basa en el cálculo de los cumulantes a través del sistema de ecuaciones diferenciales que satisface la función generadora de cumulantes. Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales se ha obtenido a partir del sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones hipergeométricas de argumento matricial.

Este método presenta problemas para el cálculo de los cumulantes de orden tres en adelante, por lo que será modificado en el capítulo cuarto cuando se estudie la distribución límite de estas distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial.

En el capítulo tercero, se estudía en primer lugar cómo se obtiene y qué regresión tienen las distribuciones de probabilidad generadas por funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella. La técnica empleada no puede ser usada para encontrar las ecuaciones de regresión de las distribuciones de probabilidad generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial, ya que como es sabido no se conoce una expresión general para los polinomios zonales. Para hallar las ecuaciones de regresión usaremos una condición necesaria y suficiente para la regresión racional basada en operadores diferenciales. (Steyn, 1956)

Con la ayuda del anterior teorema se encuentran algunas distribuciones que tienen regresión lineal, (entre ellas, las generadas por funciones hipergeométricas $F_D^{(n)}$ de Lauricella) y se demuestra que las distribuciones de probabilidad generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial tienen ecuaciones de regresión lineales.

Basándonos en expresiones obtenidas en el cálculo de las ecuaciones de regresión, hallamos la matriz inversa de la matriz de covarianzas asociada a las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial. Es importante conocer esta matriz pues, como se demostrará en el capítulo cuarto, bajo ciertas condiciones estas distribuciones tienden a la distribución normal multivariante.

En el capítulo cuarto se demuestra que tanto las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas $F_D^{(n)}$ de Lauricella como las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial tienden, bajo ciertas condiciones, a la distribución normal multivariante.

La técnica empleada para demostrar que las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial tienden a la distribución normal multivariante es análoga a la que utiliza Steyn (1955).

En las introducciones que anteceden cada capítulo hay un resumen más completo de los contenidos asi como objetivos de cada uno de los capítulos que integran esta tesis.

CAPITULO 1

FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS

1.0.0 INTRODUCCION.

En este capítulo se define, situa y relaciona la función que es objeto de estudio a lo largo de este trabajo, y se describen sus principales propiedades.

Se parte de la conocida función hipergeométrica de Gauss (Gauss 1812) y de sus principales propiedades (ecuación diferencial, representación integral, transformaciones de Euler,...). Posteriormente se exponen las distintas generalizaciones que ha tenido esta función, tanto a funciones de una como de varias variables.

Entre las funciones de dos variables que generalizan la función de Gauss destacan las cuatro funciones de Appell,(Appell 1880; Erdelyi et al. 1953; Bailey 1935), que fueron a su vez generalizadas a funciones de n variables por Lauricella. (Lauricella 1893). También en ese mismo año Lauricella introdujo 14 funciones hipergeométricas de tres variables. En el curso de nuevas investigaciones sobre las 14 funciones de Lauricella de tres variables, Srivastava (1964, 1967) advirtió la existencia de otras tres funciones hipergeométricas triples H_A, H_B y H_C; lo que da una idea del número de posibles extensiones de la función de Gauss a n variables cuando n no sea un valor pequeño.

Tanto la función univariante de Gauss como las distintas generalizaciones a funciones de varias variables pueden generalizarse incrementando el número de parámetros que intervienen en las funciones, en este sentido las cuatro funciones de Appell fueron unificadas y generalizadas por Kampé de Fériet (1921) que definió una función hipergeométrica general de dos variables.

De todas las generalizaciones de la función hipergeométrica de Gauss se estudian con más detalle las propiedades de la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella, por ser esta función usada en los siguientes capítulos.

Por último se extiende la función hipergeométrica de Gauss a funciones de argumento matricial, para lo cual es crucial el concepto de polinomio zonal que generaliza la función potencial $f_k(x)=x^k$ en el caso en que X, el argumento de la función, es una matriz; permaneciendo la nueva función real valuada. (Muirhead 1982; Takemura 1984).

También se estudian dentro de este capítulo las propiedades de las funciones hipérgeométricas de argumento matricial, que son el objeto central de este trabajo.

Una vez estudiadas las funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella y las hipergeométricas de argumento matricial, a la vista de la gran analogía que hay entre sus propiedades puede pensarse que las funciones hipergeométricas de argumento matricial no son otra cosa que alguna de las conocidas generalizaciones de la función de Gauss sólo que con una notación distinta. Al final del capítulo se expone un sencillo contraejemplo que nos confirma que estamos ante una nueva extensión de la función de Gauss.

Por último ese gran paralelismo entre las propiedades de la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella (o F_1 de Appell) y de las funciones hipergeométricas de argumento matricial, junto con las propiedades de la función de Gauss que generalizan, se recogen en un cuadro-resumen.

1.1.0. FUNCION HIPERGEOMETRICA DE GAUSS. DEFINICION

Una de las funciones generadoras de probabilidad más usadas y conocidas es la función hipergeométrica de Gauss, que se define como:

$$(1.1) \qquad {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

donde z es una variable real o compleja; a,b y c son parámetros reales o complejos con la condición de que $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ y $(a)_n$ es un símbolo de Pochhammer o coeficiente hipergeométrico, donde

$$(1.2) \qquad (a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ a(a+1)\ldots(a+n-1) & \text{si } n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

cuyas propiedades básicas serán descritas más adelante.

La serie (1) se reduce a la serie geométrica elemental

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

en determinados casos: si a=c y b=1 o a=1 y b=c. Por esto se llama serie o función hipergeométrica, y más precisamente función hipergeométrica de Gauss desde que el famoso matemático aleman Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en el año 1812 estudió esta serie y dio la notación F para ella.

1.1.1 SIMBOLOS DE POCHHAMMER

El símbolo de Pochhammer $(a)_n$ definido según (1.2) puede estudiarse como una generalización del factorial de un número natural ya que $(1)_n=n!$. Es por esto que al símbolo $(a)_n$ también se refiere en la literatura como función factorial.

En términos de la función Gamma, se escribe como

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \qquad a\neq 0,-1,-2,\ldots \tag{1.3}$$

que puede comprobarse fácilmente. Además el coeficiente binomial puede expresarse según el símbolo de Pochhammer como

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(-a)_n}{n!} \tag{1.4}$$

o equivalentemente

$$\binom{a}{n} = \frac{\Gamma(a+1)}{n!\ \Gamma(a-n+1)} \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5) se sigue que

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)} = (-1)^n(-a)_n$$

donde, para a=b-1 conduce a

$$\frac{\Gamma(b-n)}{\Gamma(b)} = \frac{(-1)^n}{(1-b)_n} \qquad ;b\neq 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{1.6}$$

Las ecuaciones (1.3) y (1.6) sugieren la siguiente definición

(1.7) $$(a)_{-n} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n} \qquad ;n=1,2,3,\ldots \qquad ;a\neq 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

La ecuación (1.3) también conduce a

(1.8) $$(a)_{m+n} = (a)_m (a+m)_n$$

que en conjunción con (1. 7) da

(1.9) $$(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k} \qquad 0\leq k\leq n$$

Para a=1 tenemos

(1.10) $$(n-k)! = \frac{(-1)^k n!}{(-n)_k} \qquad 0\leq k\leq n$$

que puede alternativamente escribirse de la forma

(1.11) $$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & \text{si} \quad 0\leq k\leq n \\ 0 & \text{si} \quad k>n \end{cases}$$

(SRIVASTABA 1984)

1.1.2 FUNCION HIPERGEOMETRICA DE GAUSS.PROPIEDADES

LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA.

La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz} - abw = 0 \tag{1.12}$$

o equivalentemente

$$\{\delta(\delta+c-1)-z(\delta+a)(\delta+b)\}w = 0 \qquad ; \ \delta = z(d/dz) \tag{1.13}$$

en la que a,b y c son parámetros complejos o reales, se denomina ecuación hipergeométrica. Sus únicas singularidades están en $z=0,1,\infty$; siendo cada una regular.

Si c no es entero la solución general de (1.12) válida en un entorno del origen es

$$w = A\,{}_2F_1(a,b;c;z) + Bz^{1-c}\,{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;z) \tag{1.14}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. En particular la función hipergeométrica de Gauss es solución de la ecuación hipergeométrica.

CONVERGENCIA

Aplicando el criterio de la razón de D'Alembert, se observa fácilmente que la función hipergeométrica de Gauss converge absolutamente en el interior del círculo unidad, es decir, cuando $|z|<1$, supuesto que el parámetro del denominador, c, no es cero ni un entero negativo. Obsérvese que si uno de los dos parámetros del numerador a y b, son cero o un entero negativo, la serie hipergeométrica se reduce a un polinomio y no hay problema de convergencia.

Otros criterios muestran que la función hipergeométrica de Gauss, cuando $|z|=1$ (es decir, sobre la circunferencia de radio unidad) es

(i) absolutamente convergente si $Re(c-a-b)>0$

(ii) condicionalmente convergente si $-1<Re(c-a-b)\leq 0$, $z\neq 1$

(iii) divergente si $\mathrm{Re}(c-a-b)\leq -1$

En realidad el apartado (i) es consecuencia del teorema de sumación de Gauss

$$(1.15) \qquad {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \quad ; \ \mathrm{Re}(c-a-b)>0.$$

Un caso especial de (1.15) sucede cuando el parámetro del numerador a o b es un entero negativo, -n, obteniéndose la siguiente fórmula de sumación

$$(1.16) \qquad {}_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} \quad ; \ n=0,1,2,\ldots \quad c\neq 0,-1,-2,\ldots$$

que es inmediata a partir de (1.15) y de las propiedades expuestas en el apartado 1.1.1.

Hay varios teoremas de sumación para la función hipergeométrica de Gauss cuando z toma algunos valores especiales. (BAYLEY, 1935, pg. 9-11), (ERDELYI, 1953, Vol. I, pg. 104-105).

EXTENSION ANALITICA

Hemos visto que la serie hipergeométrica de Gauss converge absolutamente cuando $|z|<1$ y de este modo define una función, ${}_2F_1(a,b;c;z)$, que es análitica en $|z|<1$, supuesto que c no es cero ni un entero negativo. A la anterior función es a la que se llama función hipergeométrica de Gauss.

La función hipergeométrica ${}_2F_1(a,b;c;z)$ puede, de hecho, extenderse analíticamente fuera del círculo unidad de varias formas. Si convenimos usar la misma notación para la función extendida analíticamente, una de las formas es emplear la **representación integral** de Euler

$$(1.17)\quad {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\ \Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}\ (1-t)^{c-a-1}\ (1-zt)^{-b}\ dt$$

$$\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0 \qquad |\arg(1-z)|<\pi$$

o equivalentemente

$$(1.18)\quad {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}\ (1-t)^{c-b-1}\ (1-zt)^{-a}\ dt$$

$$\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0 \qquad |\arg(1-z)|<\pi$$

ya que según la definición (1.1)

$${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z)$$

Las integrales (1.17) y (1.18) definen funciones analíticas de z que son univaluadas en el dominio $|\arg(-z)|<\pi$, es decir, en todo el plano complejo a excepción de los puntos del eje real no negativo. Ya que la función de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;z)$ está definida según la serie hipergeométrica (1.1) en cualquier punto interior del círculo unidad (incluyendo los puntos del eje real no negativo desde z=0 hasta $z=1-\varepsilon$, siendo ε un número positivo arbitrariamente pequeño), podemos usar (1.1) y, (1.17) ó (1.18) para realizar la extensión analítica de la función hipergeométrica a todo el plano complejo, salvo el semieje real desde z=1 hasta $z=\infty$. Esta extensión analítica de ${}_2F_1(a,b;c;z)$ se conviene en notarla con el mismo símbolo ${}_2F_1(a,b;c;z)$.

TRANSFORMACIONES DE EULER

Las transformaciones lineales de las funciones hipergeométricas de la forma ${}_2F_1(a,b;c;z)$, conocidas como **transformaciones de Eu-**

ler, pueden expresarse como sigue

$$(1.19)\qquad {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$c\neq 0,-1,-2,\ldots \qquad |\arg(1-z)|<\pi$$

$$(1.20)\qquad {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-b}\,{}_2F_1\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$c\neq 0,-1,-2,\ldots \qquad |\arg(1-z)|<\pi$$

$$(1.21)\qquad {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;z)$$

$$c\neq 0.-1,-2,\ldots \qquad |\arg(1-z)|<\pi$$

Las transformaciones (1.19) y (1.20) pueden probarse haciendo $t=1-s$ en las representaciones integrales de Euler (1.17) y (1.18). La última transformación (1.21) se obtiene realizando las transformaciones (1.19) y (1.20) sucesivamente.

ECUACION DIFERENCIAL DE KUMMER

Si en la ecuación hipergeométrica de Gauss (1.12) sustituimos z por z/b, la ecuación resultante tendrá tres singularidades en $z=0,b,\infty$. Haciendo tender $|b|\to\infty$, esta ecuación obtenida se reduce a

$$(1.22)\qquad z\frac{d^2w}{dz^2} + (c-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0$$

o equivalentemente a

$$(1.23)\qquad \{\delta(\delta+c-1) - z(\delta+a)\}w = 0 \qquad ; \ \delta = z(d/dz)$$

La ecuación (1.22) o (1.23) tiene una singularidad regular en $z=0$ y otra no regular en $z=\infty$,que se forma por la confluencia de dos singularidades regulares en $z=b$ y $z=\infty$ de la ecuación hipergeométrica (1.12) cuando z es sustituido por z/b. Por esto (1.22) o (1.23) se denomina ecuación hipergeométrica confluente o ecuación diferencial de Kummer desde que E.E. Kummer (1810-1893) presentó un detallado estudio de sus soluciones en 1836.

La solución más sencilla de (1.22) o (1.23) es la función de Kummer F(a,c;z), que en la notación usada actualmente es:

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{1.24} $$

$$ c \neq 0,-1,-2,\ldots \quad ; \quad |z|<\infty $$

Alternativamente, ya que

$$ \lim_{|k|\to\infty} \{(k)_n (z/k)^n\} = z^n \tag{1.25} $$

para valores acotados de z y n=0,1,2,..., tenemos

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \lim_{|b|\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;z/b) \tag{1.26} $$

En vista del principio de confluencia envuelto en (1.26) la solución (1.24) se llama también función hipergeométrica confluente.

PROPIEDADES DE LA FUNCION DE KUMMER

El principio de confluencia expresado en (1.26) es útil para deducir propiedades de la función hipergeométrica confluente, ${}_1F_1$, a partir de las de la función hipergeométrica de Gauss, ${}_2F_1$. Así, a partir de (1.17) y (1.20) obtenemos fácilmente

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{zt}\, dt \tag{1.27} $$

$$ \mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0 $$

$$ {}_1F_1(a;c;z) = e^z \, {}_1F_1(c-a;c;-z) \tag{1.28} $$

La fórmula (1.28) es conocida como primer teorema de Kummer, mientras que el segundo teorema de Kummer puede escribirse como

(1.29) $$e^{-z}\ {}_1F_1(a;2a;2z) = {}_0F_1(-;a+\tfrac{1}{2};z^2/4)$$
$$2a\neq -1,-3,-5,\ldots$$

donde

(1.30) $${}_0F_1(-;c;z) = \lim_{|a|\to\infty} {}_1F_1(a;c;z/a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\ (c)_n}$$
$$c\neq 0,-1,-2,\ldots \quad ; \quad |z|<\infty$$

ALGUNAS REPRESENTACIONES HIPERGEOMETRICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Entre otras tenemos

(1.31) $$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{z^n}{n!} = {}_1F_0(a;-;z) = {}_2F_1(a,b;b;z)$$

(1.32) $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = {}_0F_0(-;-;z) = {}_1F_1(a;a;z)$$

(SRIVASTAVA 1984)

1.2.0 GENERALIZACION DE LA FUNCION HIPERGEOMETRICA DE GAUSS

Una generalización natural de las funciones hipergeométricas ${}_2F_1$, ${}_1F_1$, et cétera (consideradas en las secciones anteriores) está dada por la introducción de un número arbitrario de parámetros en el numerador y denominador. La serie resultante es

(1.33) $${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p; \\ b_1,\ldots,b_q; \end{matrix}\ z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\ \frac{z^n}{n!} =$$

$$= {}_pF_q(a_1,\ldots a_p;b_1,\ldots b_q;z)$$

donde $(a)_n$ es el símbolo de Pochhammer definido por (1.2). Esta serie es conocida como serie de Gauss generalizada, o simplemente, serie hipergeométrica generalizada. Aquí p y q son enteros positivos o cero (interpretando un producto vacio como 1) y suponemos que la variable z, los parámetros del numerador $a_1,\ldots,a_p$ y los parámetros del denominador $b_1,\ldots,b_q$ toman valores complejos, con la condición de que

(1.34) $$b_j\neq 0,-1,-2,\ldots \qquad j=1,\ldots,q.$$

De forma que si un parámetro del numerador es un entero negativo o cero, la serie ${}_pF_q$ se reduce a un polinomio. Según la igualdad (1.11)

(1.35) $${}_{p+1}F_q(-n,a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots b_q;z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k} \frac{z^k}{k!} =$$

$$= \frac{(a_1)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n\ldots(b_q)_n} (-z)^n.$$

$$\cdot{}_{q+1}F_p(-n,1-b_1-n,\ldots,1-b_q-n;1-a_1-n,\ldots,1-a_p-n;(-1)^{p+q}/z)$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

donde en la última igualdad se ha invertido el orden de los términos del polinomio usando (1.9) y (1.10).

Supuesto que ninguno de los parámetros del numerador es cero o un entero negativo (en cuyo caso no tiene sentido la cuestión de la convergencia) y con la usual restricción (1.34), la serie ${}_pF_q$ de (1.33)

(i) converge para $|z|<\infty$ si $p\leq q$

(ii) converge para $|z|<1$ si $p=q+1$ y

(iii) diverge para todo z, $z\neq 0$, si $p>q+1$.

Ademas, si hacemos

(1.36) $$w = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j$$

se sabe que la serie ${}_pF_q$, con p=q+1, es

(I) absolutamente convergente para $|z|=1$ si $Re(w)>0$

(II) condicionalmente convergente para $|z|=1$, $z\neq 1$, si $-1<Re(w)\leq 0$ y

(III) divergente para $|z|=1$ si $Re(w)\leq -1$

(SRIVASTAVA 1984)

1.2.1 FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE DOS VARIABLES

El gran éxito de la teoría de funciones hipergeométricas de una variable estimuló el desarrollo de la correspondiente teoría en dos o más variables. En 1880 P. Appell (1855-1930) consideró el producto de dos funciones de Gauss

$$(1.37) \qquad {}_2F_1(a,b;c;x).{}_2F_1(a',b';c';y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_m\,(c')_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

Esta serie en sí misma, no conduce a nada nuevo, pero si uno o más de estos tres pares de productos

$$(a)_m(a')_n \qquad (b)_m(b')_n \qquad (c)_m(c')_n$$

son reemplazados por las expresiones correspondientes

$$(a)_{m+n} \qquad (b)_{m+n} \qquad (c)_{m+n}$$

somos conducidos a cinco posibilidades distintas de obtener nuevas funciones. Una de ellas origina la serie doble

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

que es simplemente la serie de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;x+y)$, pues se comprueba fácilmente que (SRIVASTAVA 1971, pg. 4)

$$(1.38) \qquad \sum_{n,m=0}^{\infty} f(m+n) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} = \sum_{N=0}^{\infty} f(N) \frac{(x+y)^N}{N!}$$

o más generalmente que (SRIVASTAVA 1971, pg. 4)

$$(1.39) \qquad \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} f(m_1+\ldots+m_n) \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!} = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) \frac{(x_1+\ldots+x_n)^m}{m!}$$

Las restantes cuatro posibilidades conducen a las cuatro funciones de Appell de dos variables; que se definen como sigue

$$(1.40) \qquad F_1(a,b,b';c;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_m}\, {}_2F_1(a+m,b';c+m;y) \frac{x^m}{m!}$$

$$\max\{|x|,|y|\}<1$$

$$(1.41) \qquad F_2(a,b,b';c,c';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_m\,(c')_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_m}\, {}_2F_1(a+m,b';c';y) \frac{x^m}{m!} \qquad ;|x|+|y|<1$$

$$(1.42) \qquad F_3(a,a',b,b';c;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(a')_n\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_m}\, {}_2F_1(a',b';c+m;y) \frac{x^m}{m!} \qquad ;\ \max\{|x|,|y|\}<1$$

$$(1.43)\qquad F_4(a,b;c,c';x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_{m+n}}{(c)_m\,(c')_n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_m}\, {}_2F_1(a+m,b+m;c',y)\, \frac{x^m}{m!} \qquad ;\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1$$

donde, como de costumbre, los parámetros del denominador c y c' no son cero ni un entero negativo.

El clásico trabajo sobre la teoría de las funciones de Appell es el monográfico de Appell y Kampé de Ferier (1926), que contiene una extensiva bibliográfia de todos los articulos relevantes hasta 1926 (por ejemplo de L. Pochhammer, J. Horn, E. Picard, E. Goursat...) Para una revisión de posteriores trabajos sobre el tema puede verse Erdelyi et al. (1953, Vol.I pg.222-245) y también Bailey (1935, c capitulo 9).

CASOS PARTICULARES DE FUNCIONES DE APPELL

Las cuatro funciones de Appell se reducen a la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;x)$ cuando y=0. Las dos primeras funciones también se reducen a la función de Gauss cuando b'=0, mientras que a la tercera le ocurre eso cuando a' o b' es cero. Aparte de estos obvios casos particulares de las funciones de Appell, tenemos los siguientes:

$$(1.43\text{ bis})\qquad F_1(a,b,b';a;x,y) = (1-x)^{-b}(1-y)^{-b'}$$

$$F_2(a,b,b';b,b';x,y) = (1-x-y)^{-a}$$

$$F_2(a,b,b';a,b';x,y) = (1-y)^{b-a}(1-x-y)^{-b}$$

$$F_2(a,b,b';b,a;x,y) = (1-x)^{b'-a}(1-x-y)^{-b'}$$

$$x\, F_2(1,1,b';a,b';x,y) + y\, F_2(1,b,1;b,a;x,y) = -\ln(1-x-y)$$

$$F_3(a,b,1,1;a+b;x,y) = (x+y-xy)^{-1}\{x\,{}_2F_1(a,1;a+b;x) + y\,{}_2F_1(b,1;a+b;y)\}$$

Esta última expresión es debida a Srivastava (1972, pg. 1259).

Otro resultado de interés es la **fórmula de reducción** (Appell y Kampé de Ferier 1926, pg. 23).

$$F_1(a,b,b';c;x,x) = {}_2F_1(a,b+b';c;x) \tag{1.44}$$

que según el teorema de sumación de Gauss, (1.15), conduce al conocido resultado

$$F_1(a,b,b';c;1,1) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b-b')}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b-b')} \tag{1.45}$$

$$c\neq 0,-1,-2,\ldots \qquad \mathrm{Re}(c-a-b-b')>0$$

1.2.2 FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE LAURICELLA

Lauricella en (1893) generalizó de nuevo las cuatro funciones de Appell F_1, F_2, F_3 y F_4 a funciones de n variables y definió sus funciones como sigue:

$$F_A^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c_1,\ldots,c_n;x_1,\ldots,x_n) = \tag{1.46}$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}\,(b_1)_{m_1}\cdots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_n)_{m_n}}\ \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|<1$$

(1.47) $$F_B^{(n)}(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots b_n;c;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1}\dots(a_n)_{m_n}(b_1)_{m_1}\dots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

$$\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}<1$$

(1.48) $$F_C^{(n)}(a,b;c_1,\dots,c_n;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n}(b)_{m_1+\dots+m_n}}{(c_1)_{m_1}\dots(c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

$$\sqrt{|x_1|}+\dots+\sqrt{|x_n|}<1$$

(1.49) $$F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n}(b_1)_{m_1}\dots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

$$\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}<1$$

Claramente tenemos que

(1.50) $$F_A^{(2)} = F_2 \; ; \quad F_B^{(2)} = F_3 \; ; \quad F_C^{(2)} = F_4 \; ; \quad F_D^{(2)} = F_1$$

donde F_1, F_2, F_3 y F_4 son las funciones de Appell definidas por (1.40), (1.41), (1.42) y (1.43). Además

(1.51) $$F_A^{(1)} = F_B^{(1)} = F_C^{(1)} = F_D^{(1)} = {}_2F_1$$

es decir, todas ellas son extensiones multivariantes de la función hipergeométrica de Gauss.

FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE TRES VARIABLES

Lauricella (1893, pg.114) introdujo 14 funciones hipergeométricas de tres variables. Notó sus funciones hipergeométricas triples con los símbolos F_1, $F_2, \ldots, F_{14}$, de las que F_1, F_2, F_5 y F_9 corresponden respectivamente a las funciones de Lauricella de tres variables $F_A^{(3)}$, $F_B^{(3)}$, $F_C^{(3)}$ y $F_D^{(3)}$ definidas por (1.46), (1.47), (1.48) y (1.49) para n=3. Las restantes diez funciones de Lauricella aparentemente cayeron en olvido. Saran (1954) inició un sistemático estudio de estas diez funciones hipergeométricas triples de Lauricella. Damos a continuación la definición de estas funciones usando la notación de Saran F_E, $F_F, \ldots, F_T$ e indicando también la notación de Lauricella.

$$F_4 : F_E(a_1,a_1,a_1,b_1,b_2,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z) =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}\,(b_1)_m\,(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ r+(\sqrt{s}+\sqrt{t})^2=1.$$

$$F_{14} : F_F(a_1,a_1,a_1,b_1,b_2,b_1;c_1,c_2,c_2;x,y,z) =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}\,(b_1)_{m+p}\,(b_2)_n}{(c_1)_m\,(c_2)_{n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ (1-s)(s-t)=rs\ .$$

$$F_8 : F_G(a_1,a_1,a_1,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_2;x,y,z) =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}\,(b_1)_m\,(b_2)_n\,(b_3)_p}{(c_1)_m\,(c_2)_{n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r$, $|y|<s$; $|z|<t$; $r+s=1=r+t$.

F_3 :$F_K(a_1,a_2,a_2,b_1,b_2,b_1;c_1,c_2,c_3;x,y,z) =$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m\,(a_2)_{n+p}\,(b_1)_{m+p}\,(b_2)_n}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r$; $|y|<s$; $|z|<t$; $(1-r)(1-s)=t$.

F_{11} : $F_M(a_1,a_2,a_2,b_1,b_2,b_1;c_1,c_2,c_2;x,y,z) =$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m\,(a_2)_{n+p}\,(b_1)_{m+p}\,(b_2)_n}{(c_1)_m\,(c_2)_{n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r$; $|y|<s$; $|z|<t$; $r+t=1=s$.

F_6 : $F_N(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_1;c_1,c_2,c_2;x,y,z) =$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m\,(a_2)_n\,(a_3)_p\,(b_1)_{m+p}\,(b_2)_n}{(c_1)_m\,(c_2)_{n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r$; $|y|<s$; $|z|<t$; $(1-r)s+(1-s)t=0$.

F_{12} : $F_P(a_1,a_2,a_1,b_1,b_1,b_2;c_1,c_2,c_2;x,y,z) =$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p}\,(a_2)_n\,(b_1)_{m+n}\,(b_2)_p}{(c_1)_m\,(c_2)_{n+p}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r$; $|y|<s$; $|z|<t$; $(st-s-t)^2=4rst$.

$$F_{10} : F_R(a_1,a_2,a_1,b_1,b_2,b_1;c_1,c_2,c_2;x,y,z) =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p} (a_2)_n (b_1)_{m+p} (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_{n+p}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ s(1-\sqrt{r})^2+(1-s)t=0.$

$$F_7 : F_S(a_1,a_2,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_1,c_1;x,y,z) =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_{n+p} (b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p}{(c_1)_{m+n+p}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ r+s=rs;\ s=t.$

$$F_{13} : F_T(a_1,a_2,a_2,b_1,b_2,b_1;c_1,c_1,c_1;x,y,z) =$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_{n+p} (b_1)_{m+p} (b_2)_n}{(c_1)_{m+n+p}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ r-rs+s=t.$

En el curso de nuevas investigaciones sobre las 14 funciones de Lauricella de tres variables, Srivastava (1964, 1967) advirtió la existencia de otras tres funciones hipergeométricas triples H_A, H_B, y H_C que no habían sido incluidas en la conjetura de Lauricella ni habían sido mencionadas anteriormente en la literatura. La definición de estas series se da a continuación.

$$H_A(a,b,b';c,c';x,y,z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+p} (b)_{m+n} (b')_{n+p}}{(c)_m (c')_{n+p}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}$$

$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ r+s+t=1+st.$

$$H_B(a,b,b';c_1,c_2,c_3;x,y,z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+p}\,(b)_{m+n}\,(b')_{n+p}}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p}\,\frac{x^m}{m!}\,\frac{y^n}{n!}\,\frac{z^p}{p!}$$

$$|x|<r;\ |y|<s;\ |z|<t;\ r+s+t+2\sqrt{(rst)}=1.$$

$$H_C(a,b,b';c;x,y,z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+p}\,(b)_{m+n}\,(b')_{n+p}}{(c)_{m+n+p}}\,\frac{x^m}{m!}\,\frac{y^n}{n!}\,\frac{z^p}{p!}$$

$$|x|<1;\ |y|<1;\ |z|<1$$

Obviamente, H_C es una nueva generalización de la función de Appell F_1, H_B generaliza la función de Appell F_2, mientras que H_A da una generalización de F_1 y F_2.

OTRAS GENERALIZACIONES DE LAS FUNCIONES DE APPELL

Al igual que la función de Gauss ${}_2F_1$ se generalizaba a ${}_pF_q$ incrementando el número de parámetros del numerador y del denominador, las cuatro funciones de Appell fueron unificadas y generalizadas por Kampé de Fériet (1921) que definió una función hipergeométrica general de dos variables.

La notación introducida por Kampé de Fériet para su doble función hipergeométrica fue posteriormente abreviada por Burchnall y Chaundy. Recogemos aquí la definición de una función hipergeométrica más general que la definida por Kampé de Fériet, en una notación ligeramente modificada.

$$F^{p:q;k}_{l:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k);\\(\alpha_l):(\beta_m);(\gamma_n);\end{matrix}\,x,y\right] =$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^{q}(b_j)_r \prod_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s} \prod_{j=1}^{m}(\beta_j)_r \prod_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s} \frac{x^r}{r!} \frac{y^s}{s!}$$

donde para la convergencia

(i) $q+p<l+m+1$; $p+k<l+n+1$; $|x|<\infty$; $|y|<\infty$; ó

(ii) $p+q=l+m+1$; $p+k=l+n+1$ y

$$\begin{cases} |x|^{1/(p-l)}+|y|^{1/(p-l)}<1 & \text{si } p>l \\ \max\{|x|,|y|\}<1 & \text{si } p\leq l \end{cases}$$

Si bien la anterior función hipergeométrica se reduce a la función de Kampé de Fériet en el caso de que q=k y m=n. Sin embargo, usualmente se refiere a ella en la literatura como función de Kampé de Fériet.

1.2.3 FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE LAURICELLA. PROPIEDADES

Hemos visto hasta ahora distintas formas de extender la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;z)$. Veamos que dichas extensiones conllevan extensiones de las propiedades relativas a la función de Gauss.

Nos limitaremos a la función de Lauricella $F_D^{(n)}$ por ser la más conocida y usada (en particular, como función generadora de probabilidad de distribuciones discretas multivariantes) y por ser la que utilizaremos y a la que nos referiremos en los próximos capítulos.

Un resultado de particular interés es la siguiente generalización de la **fórmula de reducción** (1.44)

(1.52) $\quad F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x,\dots,x) = {}_2F_1(a,b_1+\dots+b_n;c;x)$

que se debe al mismo Lauricella (Lauricella; 1893, pg.150. Appell y Kampé de Fériet; 1926, pg. 116).

Para x=1 el segundo miembro de (1.52) es sumable por el **teorema de Gauss** (1.15), obteniéndose la siguiente generalización de (1.45)

$$(1.53) \quad F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;1,\dots,1) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b_1-\dots-b_n)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b_1-\dots-b_n)}$$

$c\neq 0,-1,-2,\dots \qquad \mathrm{Re}(c-a-b_1-\dots-b_n)>0$

REPRESENTACION INTEGRAL

La función $F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n)$ definida por (1.49), en su dominio, coincide con la siguiente integral definida. (STEYN 1951 pg. 23)

$$(1.54) \qquad F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{\beta(a,c-a)} \int_0^1 u^{a-1}\,(1-u)^{c-a-1}\,(1-ux_1)^{-b_1}\dots(1-ux_n)^{-b_n}\,du$$

donde como es conocido

$$\beta(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}\,(1-u)^{q-1}\,du = \frac{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\,e^{-t}\,dt \qquad ;\ \mathrm{Re}(p)>0$$

Pudiéndose obtener a partir de esta **representación integral** la **fórmula de reducción** (1.52),

$$F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x,\dots,x) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}\,(1-u)^{c-a-1}\,(1-ux)^{-\Sigma b_i}\,du$$

donde la última expresión es la representación integral (1.17), para la función de Gauss ${}_2F_1(a,\Sigma b_i;c;x)$.

ECUACIONES DIFERENCIALES QUE SATISFACE

La función $F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n)$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

$$\text{(1.54 bis)}\quad (1-x_i)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j} + [c-(a+b_i+1)x_i]\frac{\partial F}{\partial t_i} - b_i \sum_{j\neq i} x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = ab_i F$$

$i=1,\dots,n$ (STEYN , 1955, pg. 589)

TRANSFORMACIONES DE EULER

Para demostrar cómo se extienden las transformadas de Euler (1.19), (1.20) y (1.21) para la fúnción de Lauricella $F_D^{(n)}$ usaremos la notación y propiedades del artículo de Carlson, 1963,(pg. 453-455).

Consideremos la función de Lauricella $F_D^{(n)}$ con las siguientes restricciones en los parámetros, $c=b_1+\dots+b_n\neq 0,-1,-2,\dots$. Sea R una función de n variables complejas $z_1,\dots,z_n$ y n+1 parámetros complejos $a,b_1,\dots,b_n$ definida por la siguiente serie de potencias si $|1-z_i|<1$ $(i=1,\dots,n)$ y por su extensión analítica si $|\arg z_i|<\pi$.

$$\text{(1.55)}\qquad R(a,b_1,\dots,b_n;z_1,\dots,z_n) =$$

$$= F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;b_1+\dots+b_n;1-z_1,\dots,1-z_n)$$

Esta serie tiene dos importantes propiedades: simetría y homogeneidad.

Por simetría entendemos que $R(a,b_1,\ldots,b_n;z_1,\ldots,z_n)$ es invariante bajo permutación de los subíndices $1,\ldots,n$ (es decir, bajo permutación de los b's y z's a la vez).

R es una función homogénea de grado $-a$, es decir, R satisface la relación de Euler

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\ D_iR = -aR$$

donde $D_i=\partial/\partial z_i$, lo cual implica la homogeneidad:

$$(1.56)\quad R(a,b_1,\ldots,b_n;tz_1,\ldots,tz_n) = t^{-a}R(a;b_1,\ldots,b_n;z_1,\ldots,z_n)$$

Es claro a partir de (1.55) que una función $F_D^{(n-1)}$ de n-1 variables, sin exigirle relaciones entre sus parámetros, puede expresarse en términos de una función R de n variables.

$$(1.57)\qquad F_D^{(n-1)}(a,b_1,\ldots,b_{n-1};c;z_1,\ldots,z_{n-1}) =$$

$$= R(a;b_1,\ldots,b_n;1-z_1,\ldots,1-z_{n-1},1)$$

donde b_n está definida por $c=b_1+\ldots+b_n$.

Inversamente, dada una función R de n variables, podemos usar su homogeneidad para expresarla en términos de una función F_D de n-1 variables.

$$(1.58)\qquad R(a,b_1,\ldots,b_n;z_1,\ldots,z_n) =$$

$$= z_n^{-a}\ F_D^{(n-1)}(a,b_1,\ldots,b_{n-1};c;1-(z_1/z_n),\ldots,1-(z_{n-1}/z_n))$$

donde $c=b_1+\ldots+b_n$

La obtención de la expresión de la primera transformada de Euler es como sigue:

$$(1.59) \qquad F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;z_1,\ldots,z_n) = \text{según } (1.57) =$$

$$= R(a,b_1,\ldots,b_n,c-b_1-\ldots-b_n;(1-z_1),\ldots,(1-z_n),1) =$$

$$= \text{por simetría} = R(a,c-b_1\ldots-b_n,b_2,\ldots,b_n,b_1;1,(1-z_2),\ldots,(1-z_n),(1-z_1))=$$

$$= \text{por } (1.58) =$$

$$= (1-z_1)^{-a}\, F_D^{(n)}(a;c-b_1-\ldots-b_n,b_2,\ldots,b_n;c;1-1/(1-z_1),\ldots,1-(1-z_n)/(1-z_1))=$$

$$= (1-z_1)^{-a}\, F_D^{(n)}\left(a,c-b_1-\ldots-b_n,b_2,\ldots,b_n;c;\ \frac{z_1}{z_1-1},\ldots,\frac{z_1-z_i}{z_1-1},\ldots,\frac{z_1-z_n}{z_1-1}\right)$$

La segunda transformada de Euler se obtiene de la siguiente forma:

$$F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;z_1,\ldots,z_n) = \text{por } (1.57) \text{ y por simetría} =$$

$$= R(a,c-b_1-\ldots-b_n;b_2,\ldots,b_n,b_1;1,(1-z_2),\ldots,(1-z_n),(1-z_1)) =$$

Aplicando a la anterior función el siguiente resultado (CARLSON (1963), pg. 455)

$$(1.60) \quad R(a;b_1,\ldots,b_n;z_1,\ldots,z_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i^{-b_i}\right) R(a',b_1,\ldots,b_n;z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1})$$

$a+a'=c=b_1+\ldots+b_n\neq 0.-1,-2,\ldots$

se obtiene:

$$(1.61) \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} (1-z_i)^{-b_i}\right) .$$

$$. \ R\left(c-a;c-b_1-\ldots-b_n,b_2,\ldots,b_n,b_1;1,\frac{1}{1-z_2},\ldots,\frac{1}{1-z_n},\frac{1}{1-z_1}\right) =$$

= por simetría y (1.57) =

$$(1.61) \quad = \prod_{i=1}^{n} (1-z_i)^{-b_i} F_D^{(n)}(c-a;b_1,\ldots,b_n;c;\frac{z_1}{z_1-1},\ldots,\frac{z_n}{z_n-1})$$

La tercera transformada de Euler, al igual que para la función de Gauss, resulta aplicando las transformaciones (1.59) y (1.61) sucesivamente en un orden u otro.

$$(1.62) \quad F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;z_1,\ldots,z_n) = (\text{ primera transformada}) =$$

$$= (1-z_1)^{-a} F_D^{(n)}(a,c-\sum_1^n b_i,b_2,\ldots,b_n;c;\frac{z_1}{z_1-1},\ldots,\frac{z_1-z_i}{z_1-1},\ldots,\frac{z_1-z_n}{z_1-1}) =$$

$$= (\text{segunda transformada}) = (1-z_1)^{-a}\left(1-\frac{z_1}{z_1-1}\right)^{\sum b_i-c} \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{z_1-z_i}{z_1-1}\right)^{-b_i} \cdot$$

$$\cdot F_D^{(n)}(c-a;c-b_1-\ldots-b_n;b_2,\ldots,b_n;c;\frac{\frac{z_1}{z_1-1}}{\frac{z_1}{z_1-1}-1},\ldots,\frac{\frac{z_1-z_n}{z_1-1}}{\frac{z_1-z_n}{z_1-1}-1}) =$$

$$=(1-z_1)^{c-a}\prod_{i=1}^{n}(1-z_i)^{-b_i} F_D^{(n)}(c-a,c-\sum_1^n b_i;b_2,\ldots,b_n;c;z_1,\frac{z_1-z_2}{1-z_2},\ldots,\frac{z_1-z_n}{1-z_n})$$

O bien aplicando primero la segunda transformada y luego la primera

$$F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;z_1,\ldots,z_n) = (\text{segunda transformada}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1-z_i)^{-b_i} F_D^{(n)}(c-a,b_1,\ldots,b_n;c;\frac{z_1}{z_1-1},\ldots,\frac{z_n}{z_n-1}) =$$

$$=(\text{primera transformada}) = \prod_{i=1}^{n}(1-z_i)^{-b_i}\left(1-\frac{z_1}{z_1-1}\right)^{a-c} \cdot$$

$$\cdot\, F_D^{(n)}\left(c-a, c-\sum_1^n b_i, b_2, \ldots, b_n; c; \frac{\frac{z_1}{z_1-1}}{\frac{z_1}{z_1-1}-1}, \frac{\frac{z_1}{z_1-1}-\frac{z_2}{z_2-1}}{\frac{z_1}{z_1-1}-1}, \ldots, \frac{\frac{z_1}{z_1-1}-\frac{z_n}{z_n-1}}{\frac{z_1}{z_1-1}-1}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1-z_i)^{-b_i} (1-z_1)^{c-a} F_D^{(n)}\left(c-a, c-\sum_1^n b_i, b_2, \ldots, b_n; c; z_1, \frac{z_1-z_2}{1-z_2}, \ldots, \frac{z_1-z_n}{1-z_n}\right)$$

FUNCIONES CONFLUENTES

Dos importantes funciones hipergeométricas, límites de funciones de Lauricella, son

(1.63) $$\Phi_2^{(n)}(b_1, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\ldots+m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

(1.64) $$\Psi_2^{(n)}(a; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

cumpliéndose

(1.65) $$\Phi_2^{(n)}(b_1, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \lim_{|a|\to\infty} F_D^{(n)}(a, b_1, \ldots, b_n; c; x_1/a, \ldots x_n/a) =$$

$$= \lim_{\min\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}\to\infty} F_B^{(n)}\left(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n; \frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right)$$

(1.66) $$\Psi_2^{(n)}(a; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \lim_{|b|\to\infty} F_C^{(n)}(a, b; c_1, \ldots, c_n; x_1/b, \ldots, x_n/b) =$$

$$= \lim_{\min\{|b_1|,\dots,|b_n|\}\to\infty} F_A^{(n)}(a;b_1,\dots,b_n;c_1,\dots,c_n;\frac{x_1}{b_1},\dots,\frac{x_n}{b_n})$$

donde se observa claramente que

$$\Psi_2^{(1)} = \Phi_2^{(1)} = {}_1F_1(a;c;x)$$

luego de igual forma que las funciones hipergeométricas de Lauricella extienden a la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;x)$, estas funciones confluentes extienden a la función confluente de Kummer ${}_1F_1(a;c;x)$.

1.3.0 FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL

Hemos visto anteriormente cómo la función hipergeométrica de Gauss podía extenderse de distintas formas (funciones de Appell, Lauricella,...) a funciones hipergeométricas de una o varias variables. La extensión que consideramos a continuación consiste en cambiar el argumento x de la función de Gauss por una matriz X (de forma que la nueva función permanezca real valuada) para lo cual será necesario la generalización de las potencias x^k cuando x es sustituida por la matriz X. Este es el papel que desempeñan los polinomios zonales que estudiamos seguidamente.

1.3.1 POLINOMIOS ZONALES

Los polinomios zonales de una matriz se definen en términos de las particiones de enteros positivos. Sea K un entero positivo; una partición k de K se nota como $k=(k_1,k_2,\dots)$ donde $\sum_i k_i=K$ con el convenio, salvo que se diga lo contrario, de que $k_1 \geq k_2 \geq \ldots$ donde k_1, $k_2, \ldots$ son enteros no negativos. Ordenaremos las particiones de K lexicográficamente; es decir, si $k=(k_1,k_2,\ldots)$ y $\lambda=(l_1,l_2,\ldots)$ son dos particiones de K escribiremos $k>\lambda$ si $k_i>l_i$ para el primer índice i en el que las partes son distintas. Por ejemplo, si K=6: $k=(2,2,2)$ $\lambda=(2,2,1,1)$.

Supongamos que $k=(k_1,\ldots,k_m)$ y $\lambda=(l_1,\ldots,l_m)$ son dos particiones de K (algunas de las partes pueden ser cero) y sean $y_1,\ldots,y_m$ m variables. si $k>\lambda$ diremos que el monomio

$$y_1^{k_1}\ldots y_m^{k_m}$$

es de mayor peso que el monomio $\quad y_1^{l_1}\ldots y_m^{l_m}$.

Ya estamos en condiciones de definir un polinomio zonal; antes de eso recordemos que lo que queremos es generalizar la función $f_k(x)=x^k$ y que dicha función satisface la ecuación diferencial $x^2 f_k''(x)=k(k-1)x^k$. Teniendo esto en mente puede ayudarnos a que la próxima definición parezca menos arbitraria. Está basada en los articulos de James de 1968 y 1973.

DEFINICION

Sea Y una matriz simétrica $m\times m$ con raices características $y_1,\ldots,y_m$ y sea $k=(k_1,\ldots,k_m)$ una partición de K en no menos de m partes. El polinomio zonal de Y correspondiente a k, notado como $C_k(Y)$ es un polinomio homogéneo y simétrico de grado K en las raices características $y_1,\ldots,y_m$, tal que:

(i) El término de mayor peso en $C_k(Y)$ es $y_m^{k_1}\ldots y_m^{k_m}$, es decir

$$C_k(Y) = d_k . y^{k_1}\ldots y^{k_m} + \text{términos de menor peso}$$

donde d_k es una constante.

(ii) $C_k(Y)$ es una autofunción del operador diferencial Δ_Y, dado por

(1.67) $$\Delta_Y = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{y_i^2}{y_i-y_j} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

(iii) Cuando k varia sobre todas las particiones de K los polinomios zonales tienen coeficientes unidad en el desarrollo de $(\mathrm{tr}Y)^K$; es decir

(1.68) $$(\mathrm{tr}Y)^K = (y_1+\ldots+y_m)^K = \sum_k C_k(Y)$$

Comentamos a continuación algunos aspectos de esta definición.

Por polinomio homogéneo y simétrico de grado K en $y_1,\ldots y_m$ indicamos un polinomio invariante por una permutación de los subíndices y tal que cada término del polinomio tiene grado K. Por ejemplo, si m=2 y K=3

$$y_1^3 + y_2^3 + 10y_1^2y_2 + 10y_1y_2^2$$

es un polinomio homogéneo y simétrico de grado 3 en y_1 e y_2.

El polinomio zonal $C_k(Y)$ es función sólo de las raices características $y_1,\ldots,y_m$ de Y y por tanto podría escribirse, por ejemplo, como $C_k(y_1,\ldots,y_m)$. De cualquier modo, para muchos fines es más conveniente usar la notación matricial de la definición.

Al decir que $C_k(Y)$ es una autofunción del operador diferencial Δ_Y dado por (1.67) indicamos que

$$\Delta_Y C_k(Y) = \alpha C_k(Y)$$

donde α es una constante que no depende de $y_1,\ldots,y_m$ (pero que puede depender de k) y que se denomina autovalor de Δ_Y correspondiente a

$C_k(Y)$.

Quedaría aún por demostrar que la anterior definición es no vacía y que por cierto existe un único polinomio zonal en $y_1,\ldots,y_m$ que satisface las condiciones de la definición. En este punto debe exponerse que ninguna fórmula general para los polinomios zonales es conocida; de cualquier forma, la anterior descripción proporciona un algorítmo general para su cálculo. (MUIRHEAD 1982, pg. 230-236).

Antes de seguir adelante deben apuntarse explicitamente dos consecuencias de la anterior definición.

La primera es que si m=1, la condición (iii) se transforma en $y^k = C_k(Y)$ de forma que el polinomio zonal de una variable considerada como una matriz de dimensión uno es igual a la potencia de una variable unidimensional. La segunda consecuencia es que si b es una constante entonces el hecho de que $C_k(Y)$ es homogéneo y de grado K implica que $C_k(bY) = b^K C_k(Y)$.

Los polinomios zonales han sido definidos sólo para matrices simétricas. La definición puede extenderse; si Y es simétrica y X definida positiva entonces las raices características de XY son las mismas que las de $X^{1/2}YX^{1/2}$ y definimos $C_k(XY)$ como $C_k(XY) = C_k(X^{1/2}YX^{1/2})$.

Como dijimos anteriormente no hay ninguna fórmula general para los polinomios zonales. Se conocen expresiones para algunos casos especiales (JAMES, 1964,1968); uno de estos casos especiales es cuando $Y = I_m$. Si la partición k de K tiene p partes no nulas, el valor del polinomio zonal para I_m está dado por

(1.69) $$C_k(I_m) = 2^{2K}\, K!\, (\tfrac{1}{2}m)_k \frac{\prod_{i<j}^{p} (2k_i-2k_j-i+j)}{\prod_{i=1}^{p} (2k_i+p-i)!}$$

donde

$$(\tfrac{1}{2}m)_k = \prod_{i=1}^{p} (\tfrac{1}{2}(m-i+1))_{k_i}$$

con $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1);\quad (a)_0 = 1$

Para una demostración de este resultado puede consultarse Constantine (1963).

1.3.2 FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL: DEFINICION Y PROPIEDADES.

Un tipo particular de constante, llamada coeficiente hipergeométrico generalizado, aparecerá en lo que sigue. Si $k=(k_1,\ldots,k_m)$ y a es un número complejo definimos $(a)_k$ en función de los símbolos de Pochhammer como:

(1.70) $$(a)_k = \prod_{i=1}^{m} (a-\tfrac{1}{2}(i-1))_{k_i}$$

donde $(a)_K = a(a+1)..(a+K-1)$, $(a)_0=1$. Si $Re(a)>\tfrac{1}{2}(m-1)$ se comprueba fácilmente que (Hermoso, tesina 1984, pg.38)

(1.71) $$(a)_k = \pi^{m(m-1)/4} \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(a+k_i-\tfrac{1}{2}(i-1))}{\Gamma_m(a)}$$

donde $\Gamma_m(a)$ es la función gamma multivariante definida por

(1.72) $$\Gamma_m(a) = \int_{A>0} \operatorname{etr}(-A) \det A^{a-\frac{m+1}{2}} (dA)$$

donde $Re(a)>\frac{1}{2}(m-1)$ y la integral está definida sobre el espacio de matrices definidas positivas ($A>0$) y simétricas de dimensión $m\times m$.

Las funciones hipergeométricas clásicas de una variable pueden definirse como una serie infinita de potencias, según (1.33). Por analogía definimos las funciones hipergeométricas de argumento matricial como una serie de polinomios zonales.

DEFINICION

Las funciones hipergeométricas de argumento matricial están dadas por

$$(1.73) \qquad {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X) = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k} \frac{C_k(X)}{K!}$$

donde $\sum_k$ denota la sumatoria sobre todas las particiones k de K, $C_k(X)$ es el polinomio zonal de X correspondiente a k y $(a)_k$, coeficiente hipergeométrico generalizado está dado por (1.70). Aquí, X el argumento de la función es una matriz $m\times m$ compleja y simétrica y los parámetros a_i, b_j son números complejos arbitrarios. Ningún parámetro del denominador b_j puede ser cero o un entero o un medio de un entero menor o igual que $\frac{1}{2}(m-1)$ (pues en caso contrario algunos de los denominadores en la serie se anularían). Si algún parámetro del numerador a_i es un entero negativo, es decir $a_1=-n$, entonces la función es un polinomio de grado mn ya que para $K\geq mn+1$ $(a_1)_k=(-n)_k=0$.

La serie converge para todo X si $p\leq q$; converge para $||X||<1$ si $p=q+1$, donde $||X||$ denota el máximo de los valores absolutos de las raices características de X y salvo que la serie tenga un número finito de términos no nulos, diverge para toda $X\neq 0$ si $p>q+1$. Finalmente, cuando $m=1$ la serie (1.73) se reduce a la clásica función hipergeométrica de la definición (1.33).

Dos casos especiales de (1.73) son

$$(1.74) \qquad {}_0F_0(X) = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{C_k(X)}{K!} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{tr}X)^K}{K!} = \mathrm{etr}(X)$$

donde la segunda igualdad se sigue del apartado (iii) de la definición de polinomios zonales, y

$$(1.75) \qquad {}_1F_0(a;X) = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} (a)_k \frac{C_k(X)}{K!} = \det\,(I_m-X)^{-a} \qquad ;||X||<1$$

(resultado probado en Muirhead (1982), pg. 261).

Donde es inmediato comprobar que las relaciones (1.74) y (1.75) extienden las conocidas relaciones para las funciones hipergeométricas univariantes

$$(1-z)^{-a} = {}_1F_0(a;z)$$

$$e^z = {}_0F_0(z)$$

Análogamente a (1.73) puede definirse funciones hipergeométricas que envuelven dos matrices como argumentos.

DEFINICION

Las funciones hipergeométricas con las matrices X e Y $m\times m$ simétricas como argumentos, se definen como

$$ {}_pF_q^{(m)}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X,Y) = \sum_{K=0}^{\infty}\sum_{k} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\,\frac{C_k(X)\,C_k(Y)}{K!\,C_k(I_m)} $$

Es claro a partir de la anterior definición que el orden de X e Y es indiferente, es decir

$$ {}_pF_q^{(m)}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X,Y) = {}_pF_q^{(m)}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;Y,X) $$

También si una de las matrices es la identidad esta función se reduce a la función hipergeométrica de una matriz definida anteriormente, esto es

$$ {}_pF_q^{(m)}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X,I_m) = {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X) $$

PROPIEDADES

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se demuestra en el lema 1.3.3 (Muirhead, 1982) que la transformada de Laplace de la función ${}_pF_q$ clásica es una función ${}_{p+1}F_q$.

(1.76) $$ \int_0^\infty e^{-zt}\, t^{a-1}\, {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;kt) = $$

$$ = \Gamma(a)\, z^{-a}\, {}_{p+1}F_q(a_1,\ldots,a_p,a;b_1,\ldots,b_q;kz^{-1}) $$

con $p<q$; $\mathrm{Re}(a)>0$; $\mathrm{Re}(z)>0$ ó $p=q$; $\mathrm{Re}(a)>0$; $\mathrm{Re}(z)>\mathrm{Re}(k)$.

Un resultado similar es cierto en el caso matricial (MUIRHEAD 1982, pg. 260). Si Z es una matriz $m\times m$, compleja y simétrica con $\mathrm{Re}(Z)$ definida positiva e Y es una matriz simétrica $m\times m$ entonces

(1.77)

$$ \int_{X>0} \mathrm{etr}(-XZ)\,(\det X)^{a-\frac{m+1}{2}}\, {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X)\,(dX) = $$

$$= \Gamma_m(a)\ (\det Z)^{-a}\ {}_{p+1}F_q(a_1,\ldots,a_p,a;b_1,\ldots,b_q;Z^{-1})$$

para $p<q$, $\mathrm{Re}(a)>\frac{1}{2}(m-1)$ ó $p=q$, $\mathrm{Re}(a)>\frac{1}{2}(m-1)$, $||Z^{-1}||<1$

La expresión (1.77) muestra como puede pasarse de la función ${}_pF_q$ a la ${}_{p+1}F_q$ por medio de la transformada de Laplace. Existe también la transformada inversa que permite obtener ${}_pF_{q+1}$ a partir de ${}_pF_q$. Aunque no usaremos el resultado explicitamente, lo exponemos por razón de completitud

$$\frac{\Gamma_m(b)\ 2^{m(m-1)/2}}{(2\pi i)^{m(m+1)/2}} \int_{\mathrm{Re}(Z)=U_0} \mathrm{etr}(XZ)\ (\det Z)^{-b}.$$

$$\cdot\ {}_pF_q(a_1,\ldots;b_1,\ldots,b_q;Z^{-1})\ (dZ) =$$

$$= (\det X)^{b-(m+1)/2}\ {}_pF_{q+1}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q,b;X)$$

donde la integral se toma sobre todas las matrices $Z=U_0+iV$ para una matriz U_0 fijada definida positiva y V real y simétrica.

REPRESENTACION INTEGRAL

Las conocidas representaciones integrales de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$ (1.17) y de la función confluente de Kummer (1.27), se generalizan para las funciones de argumento matricial, como sigue.

La función ${}_1F_1$ tiene la representación integral

$$(1.78)\qquad {}_1F_1(a;c;X) = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\ \Gamma_m(c-a)} \int_{0<Y<I_m} \mathrm{etr}(XY).$$

$$.(\det Y)^{a-(m+1)/2}\ \det(I-Y)^{c-a-(m+1)/2}\ (dY)$$

válida para todas las matrices simétricas X, $\mathrm{Re}(a)>\frac{1}{2}(m-1)$, $\mathrm{Re}(c)>\frac{1}{2}(m-1)$ y $\mathrm{Re}(c-a)>\frac{1}{2}(m-1)$. Y la función ${}_2F_1$ tiene la representación integral

$$(1.79) \qquad {}_2F_1(a,b;c;X) = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(c-a)} \int_{0<Y<I_m} \det(I-XY)^{-b} \, . \, (\det Y)^{a-(m+1)/2} \det(I-Y)^{c-a-(m+1)/2} (dY)$$

válida para $\mathrm{Re}(X)<I$, $\mathrm{Re}(a)>\frac{1}{2}(m-1)$, $\mathrm{Re}(c-a)>\frac{1}{2}(m-1)$; donde $Y>0$ significa que Y es definida positiva y $Y<I$ equivale a $I-Y>0$ es decir $I-Y$ definida positiva. (MUIRHEAD,1982 pg. 264).

TRANSFORMACIONES DE EULER

Las **transformaciones de Euler** para la función de Gauss ${}_2F_1$ dadas en (1.19), (1.20) y (1.21) y el primer teorema de Kummer enunciado en (1.28) se generalizan para funciones de argumento matricial de la siguiente forma

$$(1.80) \qquad {}_1F_1(a;c;X) = \mathrm{etr}(X)\; {}_1F_1(c-a;c;-X)$$

$$(1.81) \qquad {}_2F_1(a,b;c;X) = \det(I-X)^{-b}\; {}_2F_1(c-a,b;c;-X(I-X)^{-1})$$

$$(1.82) \qquad {}_2F_1(a,b;c;X) = \det(I-X)^{c-a-b}\; {}_2F_1(c-a,c-b;c;X)$$

(MUIRHEAD, 1982, pg. 265)

Cuando m=1 las anteriores relaciones coinciden con las transformaciones de Euler y Kummer para funciones univariantes dadas en (1.20), (1.21) y (1.28). Al igual que estas últimas pueden demostrarse usando las representaciones integrales (1.78) y (1.79).

FUNCIONES CONFLUENTES

Las relaciones entre las funciones confluentes y la función hipergeométrica de Gauss se extienden a las funciones de argumento matricial de la siguiente forma (MUIRHEAD, 1982, pg. 265)

$$\lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;\frac{1}{b}X) = {}_1F_1(a;c;X) \tag{1.83}$$

que extiende la relación (1.26) y

$$\lim_{a\to\infty} {}_1F_1(a;c;\frac{1}{a}X) = {}_0F_1(c;X) \tag{1.84}$$

que extiende la relación (1.30).

La demostración es inmediata teniendo en cuenta (1.25), (1.70) y que $C_k(bY)=b^K C_k(Y)$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

A continuación damos ecuaciones en derivadas parciales satisfechas por algunas funciones hipergeométricas de argumento matricial. (MUIRHEAD, 1972, pg. 991-1001), (MUIRHEAD, 1982, pg. 266-278)

Estas ecuaciones diferenciales se expresan en términos de un número de operadores diferenciales en las raices características $y_1,\ldots,y_m$ de la matriz simétrica Y m×m. El primero de estos es

$$\Delta_Y = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{y_i^2}{y_i - y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{1.85}$$

introducido en la definición de polinomios zonales y que verifica (MUIRHEAD, 1982, pg. 229-230)

$$\Delta_Y C_k(Y) = (\rho_k + K(m-1))C_k(Y)$$

donde $k=(k_1,\ldots,k_m)$ es una partición de K y

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{m} k_i(k_i-i)$$

Otros operadores necesarios son

$$E_Y = \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{1.86}$$

$$\varepsilon_Y = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{1.87}$$

$$\delta_Y = \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{y_i}{y_i-y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{1.88}$$

El efecto del operador E_Y sobre $C_k(Y)$ está dado por

$$E_Y C_k(Y) = K\, C_k(Y)$$

Para encontrar los efectos de los operadores diferenciales ε_Y y δ_Y sobre $C_k(Y)$ introducimos el desarrollo binomial generalizado

$$\frac{C_k(I_m+Y)}{C_k(I_m)} = \sum_{s=0}^{K} \sum_{\sigma} \binom{k}{\sigma} \frac{C_\sigma(Y)}{C_\sigma(I)} \tag{1.89}$$

donde la segunda sumatoria es para toda partición σ del entero s. Esto define los coeficientes binomiales generalizados $\binom{k}{\sigma}$.

Es claro que (1.89) generaliza el usual desarrollo del binomio

$$(1+x)^K = \sum_{s=0}^{K} \binom{k}{s} x^s$$

Correspondiente a la partición $k=(k_1,\ldots,k_m)$ de K, definimos

$$k_i = (k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_m)$$

y

$$k^{(i)} = (k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_m)$$

siempre que estas particiones de K+1 y K-1 sean admisibles, es decir siempre que sus partes estén en orden no creciente.

Los efectos de los operadores ε_Y y δ_Y sobre $C_k(Y)$ están dados por las siguientes relaciones

(1.90) $$\varepsilon_Y \frac{C_k(Y)}{C_k(I)} = \sum_i \binom{k}{k^{(i)}} \frac{C_{k^{(i)}}(Y)}{C_{k^{(i)}}(I)}$$

(1.91) $$\delta_Y \frac{C_k(Y)}{C_k(I)} = \sum_i \binom{k}{k^{(i)}} (k_i-1+\tfrac{1}{2}(m-i)) \frac{C_{k^{(i)}}(Y)}{C_{k^{(i)}}(I)}$$

donde las sumas son sobre todo i tal que $k^{(i)}$ sea admisible en el sentido expuesto anteriormente. Por otra parte $\delta_Y = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_Y\Delta_Y-\Delta_Y\varepsilon_Y)$.

Ya hemos definido los elementos básicos necesarios para establecer ecuaciones diferenciales para algunas funciones hipergeométricas de argumento matricial.

Recordemos que la función ${}_2F_1(a,b;c;x)$ de Gauss satisface la ecuación diferencial de segundo orden (1.12)

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + (c-(a+b+1)x)\frac{dF}{dx} = abF$$

En el caso matricial una generalización de esta ecuación está dada por:

La función ${}_2F_1(a,b;c;Y)$ satisface la ecuación en derivadas parciales

(1.92) $$\delta_Y F + (c-\tfrac{1}{2}(m-1))\ \varepsilon_Y F - \Delta_Y F - (a+b+1-\tfrac{1}{2}(m-1))\ E_Y F = mabF$$

Además es la única solución sujeta a la condición de que F es de la forma

$$F = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_k \alpha_k\, C_k(Y) \qquad ; \quad \alpha_0=1$$

donde los coeficientes α_k son independientes de m.

A partir del anterior resultado se puede probar uno mucho más fuerte. La función ${}_2F_1(a,b;c;Y)$ es la única solución de cada una de las m ecuaciones en derivadas parciales

$$(1.93) \qquad y_i(1-y_i)\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} + \{c-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b+1-\tfrac{1}{2}(m-1)]y_i + \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{y_i(1-y_i)}{y_i-y_j}\}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{y_j(1-y_j)}{y_i-y_j}\frac{\partial F}{\partial y_j} = abF$$

(i=1,2,...,m)

sujeta a las condiciones:

(a) F es una función simétrica en $y_1,\ldots,y_m$ y

(b) F es analítica en Y=0, con F(0)=1

El anterior resultado da lugar a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales satisfechas por ${}_1F_1$ y ${}_0F_1$, que son las que siguen:

La función ${}_1F_1(a;c;Y)$ es la única solución de cada una de las m ecuaciones en derivadas parciales del sistema

$$(1.94) \qquad y_i\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} + \{c-\tfrac{1}{2}(m-1)-y_i+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{y_i}{y_i-y_j}\}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{y_j}{y_i-y_j}\frac{\partial F}{\partial y_j} = aF$$

(i=1,2,...,m)

y la función ${}_0F_1(c;Y)$ es la única solución de cada una de las m ecuaciones en derivadas parciales del sistema

$$(1.95) \qquad y_i\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} + \{c-\tfrac{1}{2}(m-1)+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{y_i}{y_i-y_j}\}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{y_j}{y_i-y_j}\frac{\partial F}{\partial y_j} = F$$

(i=1,2,...,m)

bajo las condiciones

(a) F es una función simétrica de $y_1,\ldots,y_m$ y

(b) F es analítica en Y=0, con F(0)=1.

1.4.0 FUNCIONES DE LAURICELLA Y FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL. RELACION

Hemos visto en secciones anteriores que tanto las funciones de Lauricella como las funciones hipergeométricas de argumento matricial extienden a funciones de varias variables la función hipergeométrica clásica de Gauss.

Podría pensarse que ambas son una misma extensión pero con diferente notación. A continuación exponemos un sencillo contraejemplo que nos indican que son extensiones en sentidos diferentes.

En primer lugar compararemos la función hipergeométrica de argumento matricial con la función hipergeométrica $F_D^{(n)}$ de Lauricella, que utiliza Steyn en su articulo de 1951. Si coincidieran ambas funciones, inmediatamente (modificando la notación), las propiedades que demuestra Steyn como regresión lineal para las distribuciones generadas por $F_D^{(n)}$, etc... las verificaría la función hipergeométrica de argumento matricial.

Sabemos que la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella para n=2 coincide con la función F_1 de Appell. Será con esta última con la que comparemos para facilitar los cálculos y tomaremos por tanto una función hipergeométrica de argumento matricial de dimensión 2x2

$${}_2F_1(a,b;c;X_{2x2})$$

donde podemos considerar X diagonal ya que los polinomios zonales sólo dependen de las raices características, es decir

$$X = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

Observando las expresiones

$$F_1(a,b_1,b_2;c;t_1,t_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b_1)_m\,(b_2)_n}{(c)_{m+n}} \frac{t_1^m}{m!} \frac{t_2^n}{n!}$$

$${}_2F_1(a,b;c;X) = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k} \frac{C_k(X)}{K!}$$

se aprecia que puesto que una de ellas depende de tres parámetros y y otra de cuatro, no van a coincidir a no ser que b_1 y b_2 esten sujetas a cierta restricción.

Los coeficientes de t_1t_2, t_1^2 y t_2^2 en el desarrollo de F_1 son:

$$\frac{a(a+1)b_1b_2}{c(c+1)} t_1t_2 + \frac{a(a+1)b_1(b_1+1)}{c(c+1)} \frac{t_1^2}{2} + \frac{a(a+1)b_2(b_2+1)}{c(c+1)} \frac{t_2^2}{2}$$

Por otro lado t_1t_2, t_1^2 y t_2^2 son las potencias de t_1 y t_2 en el desarrollo de $(t_1+t_2)^2$ y además

$$(t_1+t_2)^2 = \sum_{k \text{ de } 2} C_k(X) = C_{(2)}(X) + C_{(1,1)}(X)$$

donde

$$C_{(2)}(X) = t_1^2 + t_2^2 + \frac{2}{3}\, t_1t_2$$

$$C_{(1,1)}(X) = \frac{4}{3}\, t_1t_2$$

(MUIRHEAD, 1982, pg. 232)

por tanto, los coeficientes de t_1^2 y t_2^2 son el mismo en ${}_2F_1(a,b;c;X)$

mientras que en F_1 son distintos salvo que $b_1=b_2=b$ en cuyo caso el coeficiente de t_1^2 y t_2^2 en ambas funciones es

$$\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\ \frac{1}{2!}$$

Hasta aquí rechazaríamos que F_1 es igual a ${}_2F_1(a,b;c;X)$ en general pero si $b_1=b_2=b$ no tenemos ningún argumento que nos haga pensar lo mismo.

El coeficiente de t_1t_2 en el desarrollo de ${}_2F_1(a,b;c;X)$ es:

$$(1.96)\quad \frac{1}{3}\,\frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2} + \frac{2}{3}\,\frac{(a)_{(1,1)}(b)_{(1,1)}}{(c)_{(1,1)}} = \frac{1}{3}\,\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} + \frac{2}{3}\,\frac{a(a-\frac{1}{2})b(b-\frac{1}{2})}{c(c-\frac{1}{2})}$$

que coincidirá con el de t_1t_2 en F_1 sólo para valores de a,b y c sujetos a ciertas restricciones. ($0=3/4-3c/4-3c(a+b)/2$).

Siguiendo este procedimiento con otras potencias de t_1 y t_2 se obtienen restricciones que no pueden ser satisfechas todas conjuntamente por los valores a,b y c, por tanto $F_D^{(n)}$ de Lauricella es distinta de la función hipergeométrica de argumento matricial.

Si comparamos según este criterio la función hipergeométrica de argumento matricial con cualquier función hipergeométrica de Lauricella o con las correspondientes funciones de Appell para el caso de dos variables, la existencia de un mayor número de parámetros en estas últimas, no estando estos parámetros sujetos a ninguna restricción, conduce también a la conclusión de que aunque son todas extensiones de la función hipergeométrica de Gauss son distintas no sólo en notación.

Según el anterior razonamiento no se puede decir a priori que la siguiente función

$$(1.97) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_{m+n}}{(c)_{m+n}} \frac{t_1^m}{m!}\frac{t_2^n}{n!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(a)_N\,(b)_N}{(c)_N} \frac{(t_1+t_2)^N}{N!}$$

que aparece en la sección 1.2.1 cuando se intenta extender la función hipergeométrica de Gauss a una función de dos variables, sea distinta de la extensión a dos variables dada por

$$(1.98) \qquad \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k} \frac{C_k(X)}{K!}$$

(siendo X la matriz de dimensión 2x2 descrita anteriormente), pues el número de parámetros es el mismo y además $(t_1+t_2)^N$ está muy relacionado con $C_k(X)$ como ya sabemos

$$\sum_k C_k(X) = (t_1+t_2)^K$$

Según se vio en folios anteriores

$$C_{(2)}(X) = t_1^2+t_2^2+(2/3)t_1t_2$$

$$C_{(1,1)}(X) = (4/3)t_1t_2$$

luego el coeficiente de $t_1^2/2$ en (1.98) es:

$$(1.99) \qquad \frac{(a)_2\,(b)_2}{(c)_2} = \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}$$

y el coeficiente de t_1t_2 en (1.98) está dado por la expresión (1.96). Para a=b=c=2, (1.99) toma el valor 6 y (1.96) vale 4, mientras que en (1.97) el coeficiente de $\frac{(t_1+t_2)^2}{2} = \frac{t_1^2+t_2^2+2t_1t_2}{2}$ es 6 y por tanto el mismo para $t_1^2/2$ que para t_1t_2. De lo anterior se desprende que las funciones

(1.97) y (1.98) también son distintas.

Luego las distintas extensiones de ${}_2F_1(a,b;c;x)$ a una función de n variables son distintas entre sí como acabamos de comprobar pero coinciden con la función hipergeométrica clásica de Gauss cuando n=1. Análogamente las propiedades estudiadas para las funciones de n variables extienden a las propiedades de la función hipergeométrica clásica de Gauss y coinciden con estas si n=1 pero son distintas para las diversas extensiones a funciones de n variables.

1.5.0 ESQUEMA-RESUMEN.

Sintetizamos a continuación, en un cuadro, los principales resultados expuestos en este capítulo, de forma que pueda verse resumidamente en una página la gran analogía y paralelismo que hay entre las distintas funciones y sus propiedades estudiadas.

	FUNCION DE GAUSS	FUNCIONES DE APPELL Y LAURICELLA	FUNCIONES DE ARGUMENTO MATRICIAL
INTEGRAL DE EULER	(1.17) $${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt$$ (1.18) $${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt$$	(1.54) $$F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n) =$$ $$= \frac{1}{B(a,c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux_1)^{-b_1}\dots(1-ux_n)^{-b_n}\,du$$	(1.79) $${}_2F_1(a,b;c;X) = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(c-a)} \int_{0<Y<I_m} \det(I-XY)^{-b}.$$ $$.(\det Y)^{a-(m+1)/2} \det(I-Y)^{c-a-(m+1)/2}\,(dY)$$
ECUACION DIFERENCIAL	(1.12) $$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz} - abw = 0$$	(1.54 bis) $$(1-x_i)\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j} + [c-(a+b_i+1)x_i]\frac{\partial F}{\partial t_i} - b_i \sum_{j\neq i} x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = ab_iF$$ $i=1,\dots,n$	(1.93) $$y_i(1-y_i)\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} + \{c-\tfrac12(m-1)-[a+b+1-\tfrac12(m-1)]y_i +$$ $$+ \tfrac12 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m \frac{y_i(1-y_i)}{y_i-y_j}\}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \tfrac12 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m \frac{y_j(1-y_j)}{y_i-y_j}\frac{\partial F}{\partial y_j} = abF$$ $(i=1,2,\dots,m)$
TRANSFORMACIONES DE EULER	(1.19) $${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\,{}_2F_1(a,c-b;c;\tfrac{z}{z-1})$$ $c\neq 0,-1,-2,\dots$ $\lvert\arg(1-z)\rvert<\pi$ (1.20) $${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-b}\,{}_2F_1(c-a,b;c;\tfrac{z}{z-1})$$ $c\neq 0,-1,-2,\dots$ $\lvert\arg(1-z)\rvert<\pi$ (1.21) $${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;z)$$ $c\neq 0.-1,-2,\dots$ $\lvert\arg(1-z)\rvert<\pi$	$$F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;z_1,\dots,z_n) =$$ (1.59) $$= (1-z_1)^{-a} F_D^{(n)}(a,c-b_1-\dots-b_n,b_2,\dots,b_n;c;\frac{z_1}{z_1-1},\dots,\frac{z_1-z_i}{z_1-1},\dots,\frac{z_1-z_n}{z_1-1})$$ (1.61) $$= \prod_{i=1}^n (1-z_i)^{-b_i} F_D^{(n)}(c-a;b_1,\dots,b_n;c;\frac{z_1}{z_1-1},\dots,\frac{z_n}{z_n-1})$$ $$=(1-z_1)^{c-a}\prod_{i=1}^n (1-z_i)^{-b_i} F_D^{(n)}(c-a,c-\sum_1^n b_i;b_2,\dots,b_n;c;z_1,\frac{z_1-z_2}{1-z_2},\dots,\frac{z_1-z_n}{1-z_n})$$ (1.62)	(1.81) $${}_2F_1(a,b;c;X) = \det(I-X)^{-b}\,{}_2F_1(c-a,b;c;-X(I-X)^{-1})$$ (1.82) $${}_2F_1(a,b;c;X) = \det(I-X)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;X)$$
TRANSFOR. de LAPLACE	(1.76) $$\int_0^\infty e^{-zt}t^{a-1}\,{}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;kt) =$$ $$= \Gamma(a)\,z^{-a}\,{}_{p+1}F_q(a_1,\dots,a_p,a;b_1,\dots,b_q;kz^{-1})$$		(1.77) $$\int_{X>0} \mathrm{etr}(-XZ)\,(\det X)^{a-\frac{m+1}{2}}\,{}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;X)\,(dX) =$$ $$= \Gamma_m(a)\,(\det Z)^{-a}\,{}_{p+1}F_q(a_1,\dots,a_p,a;b_1,\dots,b_q;Z^{-1})$$
FUNCION DE KUMMER	(1.22) $$z\frac{d^2w}{dz^2} + (c-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0$$ (1.26) $${}_1F_1(a;c;z) = \lim_{\lvert b\rvert\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;z/b)$$ (1.27) $${}_1F_1(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt}\,dt$$ $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0$	(1.65) $$\Phi_2^{(n)}(b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n) =$$ $$= \lim_{\lvert a\rvert\to\infty} F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1/a,\dots x_n/a) =$$ $$= \lim_{\min\{\lvert a_1\rvert,\dots,\lvert a_n\rvert\}\to\infty} F_B^{(n)}(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n;\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_n}{a_n})$$	(1.83) $$\lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;\tfrac{1}{b}X) = {}_1F_1(a;c;X)$$ (1.94) $$y_i\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} + \{c-\tfrac12(m-1)-y_i+\tfrac12\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m \frac{y_i}{y_i-y_j}\}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \tfrac12\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m \frac{y_j}{y_i-y_j}\frac{\partial F}{\partial y_j} = aF$$ (1.78) $${}_1F_1(a;c;X) = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(c-a)}\int_{0<Y<I_m} \mathrm{etr}(XY).$$ $$.(\det Y)^{a-(m+1)/2}\det(I-Y)^{c-a-(m+1)/2}\,(dY)$$
RELACION DE KUMMER	(1.28) $${}_1F_1(a;c;z) = e^z\,{}_1F_1(c-a;c;-z)$$		(1.80) $${}_1F_1(a;c;X) = \mathrm{etr}(X)\,{}_1F_1(c-a;c;-X)$$
REPRESENTACION HIPERGEOMETRICA DE FUNCIONES ELEMENTALES	(1.30) $${}_0F_1(-;c;z) = \lim_{\lvert a\rvert\to\infty} {}_1F_1(a;c;z/a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!\,(c)_n}$$ (1.31) $$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^\infty (a)_n\frac{z^n}{n!} = {}_1F_0(a;-;z) = {}_2F_1(a,b;b;z)$$ (1.32) $$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} = {}_0F_0(-;-;z) = {}_1F_1(a;a;z)$$	(1.43 bis) $$F_1(a,b,b';a;x,y) = (1-x)^{-b}(1-y)^{-b'}$$	(1.84) $$\lim_{a\to\infty} {}_1F_1(a;c;\tfrac{1}{a}X) = {}_0F_1(c;X)$$ (1.74) $${}_0F_0(X) = \sum_{K=0}^\infty\sum_k \frac{C_k(X)}{K!} = \sum_{K=0}^\infty \frac{(\mathrm{tr}X)^K}{K!} = \mathrm{etr}(X)$$ (1.75) $${}_1F_0(a;X) = \sum_{K=0}^\infty\sum_k (a)_k\frac{C_k(X)}{K!} = \det(I_m-X)^{-a}$$ $;\lVert X\rVert<1$
FORMULA DE SUMACION DE GAUSS	(1.15) $${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$ $;\ \mathrm{Re}(c-a-b)>0.$	(1.45) $$F_1(a,b,b';c;1,1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b-b')}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b-b')}$$ $c\neq 0,-1,-2,\dots$ $\mathrm{Re}(c-a-b-b')>0$ (1.53) $$F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;1,\dots,1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b_1-\dots-b_n)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b_1-\dots-b_n)}$$ $c\neq 0,-1,-2,\dots$ $\mathrm{Re}(c-a-b_1-\dots-b_n)>0$	(2.12) $${}_2F_1(a,b;c;I) = \frac{B_m(a,c-a-b)}{B_m(a,c-a)}$$ (2.13) $${}_2F_1(a,b;c;I) = \frac{\Gamma_m(c)\,\Gamma_m(c-a-b)}{\Gamma_m(c-a)\,\Gamma_m(c-b)}$$ (2.14) $${}_2F_1(a,b;c;I) = \prod_{i=1}^m \frac{(c-a-\frac12(i-1))_a}{(c-a-b-\frac12(i-1))_a} = \frac{(c-a)_{(a,\dots,a)}}{(c-a-b)_{(a,\dots,a)}}$$

CAPITULO 2

LAS FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS COMO FUNCIONES GENERADORAS DE PROBABILIDAD. MOMENTOS ASOCIADOS.

2.0.0 INTRODUCCION.

Las funciones generadoras de probabilidad juegan un importante papel en la determinación de muchas propiedades de las distribuciones que generan. Pueden también ser usadas, con buenos resultados para el estudio del comportamiento asintótico de las distribuciones generadas.

En este capítulo se estudian algunas de las funciones hipergeométricas relacionadas en el capítulo 1 (función de Gauss, función $F_D^{(n)}$ de Lauricella y función hipergeométrica de argumento matricial) desde la perspectiva de la generación de distribuciones de probabilidad discretas.

Es bien conocido que la distribución hipergeométrica univariante es generada, salvo un factor constante (calculable mediante el sabido teorema de sumación de Gauss), por una función de Gauss. Las distribuciones hipergeométrica multivariante y multinomial negativa, entre otras, son generadas por funciones hipergeométricas del tipo $F_D^{(n)}$ de Lauricella. (Steyn, 1951).

Continuando con el estudio paralelo de las tres funciones antes citadas que se ha hecho en el primer capítulo, hemos obtenido aquí propiedades análogas a las que se conocen para las funciones de

Gauss y de Lauricella, para las funciones de argumento matricial. Así se ha obtenido la constante tal que multiplicada por una función hipergeométrica de argumento matricial nos proporciona una función generadora de probabilidad. Si bien, se ha hecho usando un método distinto basado en la representación integral de Euler, pues no se conoce para estas funciones una fórmula de reducción que permita usar el conocido teorema de sumación de Gauss.

Hallada la constante, ésta se expresa en términos de la función Beta multivariante, Gamma multivariante y coeficientes hipergeométricos generalizados, en virtud de las relaciones que los ligan. Tanto este factor constante como el correspondiente a las funciones $F_D^{(n)}$ (Steyn, 1951) se reducen al de la función de Gauss cuando el número de variables es uno.

Para el cálculo de los momentos asociados a las distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella, Steyn (1951) sigue el siguiente método: A partir de la función generadora de probabilidad obtiene la función generadora de momentos factoriales y por diferenciación de ésta obtiene los momentos factoriales, de los que por las conocidas relaciones se obtienen los momentos.

El método anterior no es factible con las funciones hipergeométricas de argumento matricial pues no se conoce ninguna expresión general de los polinomios zonales, lo que nos impide diferenciarlos.

El método que hemos seguido para el cálculo de los momentos asociados a las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial se basa en el cálculo de los cumulantes a través del sistema de ecuaciones diferenciales que satisface la función generadora de cumulantes. Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales se ha obtenido a partir del sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones hipergeométricas de argumento matricial, (capítulo 1).

Este método presenta problemas para el cálculo de los cumulantes de orden tres en adelante, por lo que será modificado en el capítulo 4 cuando se estudie la distribución límite de estas distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial.

Los principales momentos (esperanzas, varianzas y covarianzas) de las distribuciones multivariantes generadas por funciones $F_D^{(n)}$ e hipergeométricas de argumento matricial tienen una forma similar y se reducen a los de la distribución hipergeométrica univariante (salvo las covarianzas que aquí no tienen sentido) cuando el número de variables es uno y los parámetros son los apropiados.

2.1.1 LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

La conocida distribución hipergeométrica determinada por

(2.1)
$$P[\xi=r] = \frac{\binom{Np}{r}\binom{Nq}{n-r}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(Np-r+1)_r}{(1)_r}\cdot\frac{(Nq-n+r+1)_{n-r}}{(1)_{n-r}}}{\frac{(N-n+1)_n}{(1)_n}} =$$

$$= \text{según } (1.4) = \frac{\frac{(-1)^r\,(-Np)_r}{(1)_r}\,\frac{(-1)^{n-r}\,(-Nq)_{n-r}}{(1)_{n-r}}}{\frac{(-1)^n\,(-N)_n}{(1)_n}} = \frac{\frac{(-Np)_r}{(1)_r}\,\frac{(-Nq)_{n-r}}{(1)_{n-r}}}{\frac{(-N)_n}{(1)_n}}$$

es generada salvo un factor constante por una función de la forma

$$_2F_1(a,b;c;t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a)_x\,(b)_x}{(c)_x}\,\frac{t^x}{x!}$$

En concreto

(2.2)
$$\sum_{r=0}^{\infty} P[\xi=r]\,t^r = \frac{(Nq-n+1)_n}{(N-n+1)_n}\,{}_2F_1(-n,-Np;Nq-n+1;t)$$

donde el factor constante se obtiene teniendo presente que

$$\sum_{r=0}^{n} P[\xi=r] = 1$$

y según el teorema de sumación de Gauss (1.16)

(2.3)
$$_2F_1(-n,-Np;Nq-n+1;1) = \frac{(Nq-n+1+Np)_n}{(Nq-n+1)_n} = \frac{(N-n+1)_n}{(Nq-n+1)_n}$$

2.1.2 LA FUNCION $F_D^{(N)}$ COMO GENERADORA DE PROBABILIDAD

En el capítulo anterior se vio que la función hipergeométrica de Gauss podía generalizarse a n variables de diferentes formas. Una de ellas es la función hipergeométrica de Lauricella $F_D^{(n)}$ la cual al igual que la función hipergeométrica de Gauss puede estudiarse, salvo constante, como una función generadora de probabilidad.

La constante C deberá verificar

$$C\, F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;1,\ldots,1) = 1$$

Dicha constante puede calcularse usando el teorema de sumación de Gauss (1.53)

$$\text{(2.4)}\qquad F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;1,\ldots,1) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b_1-\ldots-b_n)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b_1-\ldots-b_n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(a)}\ \frac{\Gamma(a)\ \Gamma(c-a-b_1-\ldots-b_n)}{\Gamma(c-b_1-\ldots-b_n)} = \frac{\beta(a,c-a-b_1-\ldots-b_n)}{\beta(a,c-a)}$$

o bien utilizando la representación integral (1.54)

$$F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;1,\ldots,1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\ \Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}\ (1-u)^{c-a-1}\,.$$

$$.\ (1-u)^{-\Sigma b_i}\ du = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\ \Gamma(c-a)}\ \beta(a,c-a-\sum_{i=1}^{n} b_i) = \frac{\beta(a,c-a-\Sigma b_i)}{\beta(a,c-a)}$$

de donde

$$\text{(2.5)}\qquad C = \frac{\beta(a,c-a)}{\beta(a,c-a-\Sigma b_i)} = \frac{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-\Sigma b_i)}{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-\Sigma b_i)} = \frac{(c-a-\Sigma b_i)_a}{(c-a)_a}$$

La última igualdad es debida a la propiedad (1.3).

Un conocido ejemplo de distribución generada por una función de Lauricella $F_D^{(n)}$, salvo constante, es la distribución hipergeométrica multivariante:

Consideremos la probabilidad de que n items que son observados, estén distribuidos en k+1 celdas según la serie $x_0, x_1, \ldots, x_k$ $(x_0 = n - x_1 - \ldots - x_k)$, donde esos n items son extraidos sin reemplazamiento de una población finita de tamaño N, habiendo una proporción p_i de items en la i-ésima celda $(p_0 = 1 - p_1 - \ldots - p_k)$.

Claramente su función de probabilidad es:

$$(2.6) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\binom{Np_0}{n-x_1-\ldots-x_k}\binom{Np_1}{x_1}\cdots\binom{Np_k}{x_k}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \text{según (1.4)} = \frac{\dfrac{(-1)^{x_0}(-1)^{x_1}\ldots(-1)^{x_k}(-Np_0)_{n-x_1-\ldots-x_k}(-Np_k)_{x_k}}{(n-x_1-\ldots-x_k)!\; x_1!\ldots x_k!}}{\dfrac{(-1)^n(-N)_n}{n!}} =$$

$$= \frac{n!}{(-N)_n}\;\frac{(-Np_0)_{n-x_1-\ldots-x_k}(-Np_1)_{x_1}\ldots(-Np_k)_{x_k}}{(n-x_1-\ldots-x_k)!\; x_1!\ldots x_k!}$$

Teniendo en cuenta que

$$(2.7) \qquad (a-x+1)_x = (-1)^x (-a)_x$$

$$(a-x+1)_x = (a-x+1)(a-x+2)\ldots(a) = (-1)^x(-a)(-a+1)\ldots(-a+x-1) = (-1)^x (-a)_x$$

$$\frac{n!}{(n-x_1-\ldots-x_k)!} = n(n-1)\ldots(n-x_1-\ldots-x_k+1) =$$

$$= (-1)^{x_1+\ldots+x_k}(-n)(-n+1)\ldots(-n+x_1+\ldots+x_k-1) =$$

$$= (-1)^{x_1+\ldots+x_k}(-n)_{x_1+\ldots+x_k}$$

por otra parte usando (1.8)

$$(-Np_0)_n = (-Np_0)_{n-x_1-\dots-x_k} (-Np_0+n-\sum_1^k x_i)_{x_1+\dots+x_k} =$$

$$= (-Np_0)_{n-x_1-\dots-x_k} (-1)^{x_1+\dots+x_k} (Np_0-n+1)_{x_1+\dots+x_k}$$

se obtiene que la función generadora de probabilidad de (2.6) es

$$\text{(2.8)} \qquad \sum_{x_1,\dots,x_k=0}^{\infty} \Phi(x_1,\dots,x_k)\, t_1^{x_1}\dots t_k^{x_k} =$$

$$= \frac{(-Np_0)_n}{(-N)_n} \sum_{x_1,\dots,x_n=0}^{\infty} \frac{(-n)_{x_1+\dots+x_k} (-Np_1)_{x_1}\dots(-Np_k)_{x_k}}{(Np_0-n+1)_{x_1+\dots+x_k}} \frac{t_1^{x_1}}{x_1!}\dots\frac{t_k^{x_k}}{x_k!} =$$

es decir, una función hipergeométrica de Lauricella $F_D^{(k)}$ multiplicada por una constante. Es inmediato comprobar que $(-Np_0)_n/(-N)_n$ es un caso particular de la constante estudiada en (2.5).

$$C = \frac{(c-a-\Sigma b_i)_a}{(c-a)_a} = \frac{((Np_0-n+1)+n+(N-Np_0))_{-n}}{((Np_0-n+1)+n)_{-n}} = \frac{(1+N)_{-n}}{(1+Np_0)_{-n}}$$

Aplicando la definición de símbolos de Pochhammer para enteros negativos (1.7) se obtiene que

$$C = \frac{(-1)^n}{(-N)_n} \frac{(-Np_0)_n}{(-1)^n} = \frac{(-Np_0)_n}{(-N)_n}$$

2.1.3 LA FUNCION ${}_2F_1(A,B;C;X)$ COMO GENERADORA DE PROBABILIDAD.

Otra de las generalizaciones de la función hipergeométrica de Gauss univariante es la función hipergeométrica de argumento matricial ${}_2F_1(a,b;c;X)$ según se vio en el anterior capítulo.

Al igual que la función hipergeométrica de Lauricella $F_D^{(n)}$ puede considerarse, salvo una constante, como una función generadora de probabilidad.

La función ${}_2F_1(a,b;c;X)$ como generadora de probabilidad presenta problemas que no tiene la función de Lauricella $F_D^{(n)}$. Por ejemplo, a partir de la expresión del desarrollo en serie de polinomios zonales de ${}_2F_1(a,b;c;X)$ no se puede conocer explícitamente la función de probabilidad generada por ella debido a que no se conoce la expresión general de los polinomios zonales en función de la partición k y de las distintas potencias de las raices características de X. Este inconveniente hará que propiedades análogas a las que cumple la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella tengan que ser demostradas usando técnicas diferentes como veremos más adelante.

La constante C tal que $C.{}_2F_1(a,b;c;X)$ es una función generadora de probabilidad deberá verificar $C.{}_2F_1(a,b;c;I)=1$. (Hemos de hallar el valor de ${}_2F_1(a,b;c;X)$ cuando las raices características de X, x_i, son todas 1. Puesto que ${}_2F_1(a,b;c;X)$ depende de X sólo a través de sus raices características, puede considerarse $X=\mathrm{diag}(x_1,...,x_m)$ sin pérdida de generalidad).

No disponemos, como en las funciones $F_D^{(n)}$, de una fórmula de reducción que permita escribir ${}_2F_1(a,b;c;X)$ con $X=\mathrm{diag}(x,...,x)$ en términos de la serie hipergeométrica de Gauss y así usando la fórmula de sumación de esta última hallar la constante C.

En este caso utilizaremos la representación integral de ${}_2F_1(a,b;c;X)$, (1.79), para calcular C. Esta técnica también fue usada para calcular C con funciones generadoras de probabilidad del tipo $F_D^{(n)}$.

(2.9) $$ {}_2F_1(a,b;c;I) = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(c-a)} \int_{0<Y<I_m} \det(I-IY)^{-b} \,. $$

$$.\ (\det Y)^{a-(m+1)/2} \det(I-Y\ )^{c-a-(m+1)/2}\,(dY) = $$

$$ = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(c-a)} \int_{0<Y<I_m} (\det Y)^{a-(m+1)/2} \det(I-Y)^{c-a-b-(m+1)/2}\,(dY) $$

La anterior integral se puede escribir en términos de la función Beta multivariante que se define como (MUIRHEAD, 1982, pg. 108-112)

(2.10) $$ \beta_m(a,b) = \int_{0<U<I_m} (\det U)^{a-(m+1)/2} \det(I_m-U)^{b-(m+1)/2}\,(dU) $$

con $Re(a)>\frac{1}{2}(m-1)$, $Re(b)>\frac{1}{2}(m-1)$.

Esta función tiene propiedades análogas a la Beta univariante como (MUIRHEAD, 1982, pg. 109)

(2.11) $$ \beta_m(a,b) = \frac{\Gamma_m(a)\,\Gamma_m(b)}{\Gamma_m(a+b)} $$

Sustituyendo (2.10) en (2.9) tenemos que

(2.12) $$ {}_2F_1(a,b;c;I) = \frac{\beta_m(a,c-a-b)}{\beta_m(a,c-a)} $$

resultado análogo a la fórmula de sumación de Gauss para la función hipergeómetrica clásica (1.15), para la función F_1 de Appell (1.45) y para la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella (1.53).

Usando (2.11) el resultado (2.12) puede escribirse también como

$$(2.13) \qquad {}_2F_1(a,b;c;I) = \frac{\Gamma_m(c)\ \Gamma_m(c-a-b)}{\Gamma_m(c-a)\ \Gamma_m(c-b)}$$

o de la siguiente forma usando (1.71), (1.3) y (1.70) sucesivamente

$$(2.14) \qquad {}_2F_1(a,b;c;I) = \frac{\Gamma_m(c)\ \Gamma_m(c-a-b)}{\Gamma_m(c-a)\ \Gamma_m(c-b)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(c-\frac{1}{2}(i-1))}{\Gamma(c-a-\frac{1}{2}(i-1))}\ \frac{\Gamma(c-a-b-\frac{1}{2}(i-1))}{\Gamma(c-b-\frac{1}{2}(i-1))} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(c-a-\frac{1}{2}(i-1))_a}{(c-a-b-\frac{1}{2}(i-1))_a} = \frac{(c-a)_{(a,\dots,a)}}{(c-a-b)_{(a,\dots,a)}}$$

A partir de (2.12), (2.13) y (2.14) se obtiene la constante C expresada de distintas formas

$$(2.15) \qquad C = \frac{\beta_m(a,c-a)}{\beta_m(a,c-a-b)} = \frac{\Gamma_m(c-a)\ \Gamma_m(c-b)}{\Gamma_m(c)\ \Gamma_m(c-a-b)} = \frac{(c-a-b)_{(a,\dots,a)}}{(c-a)_{(a,\dots,a)}}$$

donde en la última expresión las constantes que aparecen son los coeficientes hipergeométricos generalizados para la partición de ma en m partes iguales.

Obsérvese el paralelismo entre (2.15) y el resultado (2.5) al que llega Steyn en su articulo de 1951.

Tanto si en (2.5) como en (2.15) hacemos n y m respectivamente igual a uno se llega al mismo resultado

$$(2.16) \qquad C = \frac{\beta(a,c-a)}{\beta(a,c-a-b)} = \frac{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b)} = \frac{(c-a-b)_a}{(c-a)_a}$$

que es la constante por la que hay que multiplicar la función hipergeométrica de Gauss univariante para que pueda ser considerada como generadora de probabilidad.

Otra forma de evaluar C en el caso que nos ocupa es utilizar la expresión de ${}_2F_1(a,b;c;X)$ como serie de polinomios zonales.

Si la partición k de K tiene p partes no nulas, el valor del correspondiente polinomio zonal en I_m está dado por (1.96). (MUIRHEAD, 1982, pg. 237)

De $C.{}_2F_1(a,b;c;I_m) = 1$ se sigue que

$$C^{-1} = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\, 2^{2K}\, (\tfrac{1}{2}m)_k \frac{\prod_{i<j}^{p} (2k_i-2k_j-i+j)}{\prod_{i=1}^{p} (2k_i+p-i)!} \tag{2.17}$$

que junto con el resultado (2.15) nos proporciona la siguiente relación

$$\frac{\beta_m(a,c-a-b)}{\beta_m(a,c-a)} = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{k} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\, 2^{2K}\, (\tfrac{1}{2}m)_k \frac{\prod_{i<j}^{p} (2k_i-2k_j-i+j)}{\prod_{i=1}^{p} (2k_i+p-i)!}$$

o equivalentemente

$$\frac{\beta_m(a,b)}{\beta_m(a,c)} = \sum_{K=0}^{\infty} 2^{2K} \sum_{k} \frac{(a)_k\,(c-b)_k\,(\tfrac{1}{2}m)_k}{(c-a)_k} \frac{\prod_{i<j}^{p} (2k_i-2k_j-i+j)}{\prod_{i=1}^{p} (2k_i+p-i)!} \tag{2.18}$$

que expresa el cociente de dos valores de una función Beta y podría ser usado para evaluar esta función a partir de un valor cualquiera conocido que tome dicha función Beta; teniendo presente que $\beta_m(a,b) = \beta_m(b,a)$ según (2.11). (HERMOSO J.A., 1985)

2.2.1 MOMENTOS ASOCIADOS A LA FUNCION GENERADORA DE PROBABILIDAD $CF_D^{(N)}$.

Sea $CF_D^{(n)}$ la función generadora de la función de probabilidad $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$, es decir

$$(2.19)\quad CF_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;c;t_1,\ldots,t_n)=\sum_{x_1,\ldots,x_n=0}^{\infty} \Phi(x_1,\ldots,x_n)\, t_1^{x_1}\cdots t_n^{x_n}$$

La función generadora de momentos factoriales de $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ se obtiene sustituyendo $t_i=1+\alpha_i$ $(i=1,\ldots,n)$ en (2.19), resultando

$$(2.20)\quad M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \frac{C}{\beta(a,c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-u-u\alpha_1)^{-b_1}\cdots$$

$$\cdots(1-u-u\alpha_n)^{-b_n}\,du = \frac{C}{\beta(a,c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-\Sigma b_i-1}\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_1\right)^{-b_1}\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_n\right)^{-b_n}du$$

que según el valor obtenido para C en (2.5) es igual a

$$(2.21)\quad M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \frac{1}{\beta(a,c-a-\Sigma b_i)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-\Sigma b_i-1}\,.$$

$$.\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_1\right)^{-b_1}\cdots\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_n\right)^{-b_n}$$

De (2.21) se sigue que el momento factorial general de $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ respecto al origen es

$$(2.23)\quad \mu'(r_1,\ldots,r_n) = (-1)^{\Sigma r_i}\frac{(a)_{\Sigma r_i}(b_1)_{r_1}\cdots(b_n)_{r_n}}{(a-c+\Sigma b_i+1)_{\Sigma r_i}}$$

Por tanto

$$(2.24) \qquad M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{r_1,\ldots,r_n=0}^{\infty} \mu'(r_1,\ldots,r_n) \frac{\alpha_1^{r_1}}{r_1!}\cdots\frac{\alpha_n^{r_n}}{r_n!} =$$

$$= \sum_{r_1,\ldots,r_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{\Sigma r_i}(b_1)_{r_1}\cdots(b_n)_{r_n}}{(a-c+\Sigma b_i+1)_{\Sigma r_i}} \frac{(-\alpha_1)^{r_1}}{r_1!}\cdots\frac{(-\alpha_n)^{r_n}}{r_n!} =$$

$$= F_D^{(n)}(a,b_1,\ldots,b_n;a-c+\Sigma b_i+1;-\alpha_1,\ldots,-\alpha_n)$$

(STEYN, 1951, pg. 25-26)

La expresión (2.23) se obtiene derivando (2.21) r_1 veces respecto α_1, r_2 veces respecto $\alpha_2,\ldots$, r_n veces respecto de α_n, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_i\right)^{-b_i}}{\partial\alpha_i} = (-b_i)\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_i\right)^{-b_i-1}(-1)\frac{u}{1-u}$$

$$\frac{\partial^{r_i}\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_i\right)^{-b_i}}{\partial\alpha_i^{r_i}} = (-b_i)(-b_i-1)\ldots(-b_i-r_i+1)\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_i\right)^{-b_i-r_i}(-1)^{r_i}.$$

$$.\left(\frac{u}{1-u}\right)^{r_i} = (b_i)_{r_i}\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_i\right)^{-b_i-r_i}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{r_i}$$

$$\left.\frac{\partial^{r_i}\left(1-\frac{u}{1-u}\alpha_i\right)^{-b_i}}{\partial\alpha_i^{r_i}}\right|_{\alpha_i=0} = (b_i)_{r_i}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{r_i}$$

Por tanto el coeficiente de $\frac{\alpha_1^{r_1}}{r_1!}\cdots\frac{\alpha_n^{r_n}}{r_n!}$ ($\mu'(r_1,\ldots,r_n)$) en el desarrollo de $M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ es

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} (b_i)_{r_i}}{\beta(a,c-a-\Sigma b_i)} \int_0^1 u^{a+\Sigma r_i-1} (1-u)^{c-a-\Sigma b_i-\Sigma r_i-1} du =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (b_i)_{r_i} \frac{\beta(a+\Sigma r_i, c-a-\Sigma b_i-\Sigma r_i)}{\beta(a,c-a-\Sigma b_i)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (b_i)_{r_i} \frac{\Gamma(a+\Sigma r_i)\ \Gamma(c-a-\Sigma b_i-\Sigma r_i)}{\Gamma(c-\Sigma b_i)} \frac{\Gamma(c-\Sigma b_i)}{\Gamma(a)\ \Gamma(c-a-\Sigma b_i)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (b_i)_{r_i} \frac{\Gamma(a+\Sigma r_i)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(c-a-\Sigma b_i-\Sigma r_i)}{\Gamma(c-a-\Sigma b_i)} = \text{según (1.3)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (b_i)_{r_i} (a)_{\Sigma r_i} \frac{1}{(c-a-\Sigma b_i-\Sigma r_i)_{\Sigma r_i}} = \text{según (2.7)} =$$

$$= (-1)^{\Sigma r_i} \frac{(a)_{\Sigma r_i} (b_1)_{r_1} \cdots (b_n)_{r_n}}{(a-c+\Sigma b_i+1)_{\Sigma r_i}}.$$

Los momentos y cumulantes de $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ se siguen a partir de los momentos factoriales por las conocidas relaciones entre momentos factoriales, momentos y cumulantes. (HERMOSO J.A., tesina 1984) (LEONOV & SHIRYAEV, 1959)

A partir de (2.23) vamos a obtener la expresión general de los principales momentos y posteriormente los valores de dichos momentos en el caso concreto del ejemplo (2.6).

(2.25) $\quad E(X_i) = \mu'(o,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0) =$

$$= - \frac{(a)_1 (b_1)_0 \cdots (b_{i-1})_0 (b_i)_1 (b_{i+1})_0 \cdots (b_n)_0}{(a-c+\Sigma b_j+1)_1} = \frac{ab_i}{c-a-\sum_{j=1}^{n} b_j-1}$$

$$\mu'(0,\ldots,\underset{i}{2},\ldots,0) = E(X_i(X_i-1)) = E(X_i^2) - E(X_i) =$$

$$= \frac{a(a+1)b_i(b_i+1)}{(a-c+\Sigma b_j+1)\ (a-c+\Sigma b_j+2)}$$

(2.26) $$E(X_i^2) = E(X_i^2) - E(X_i) + E(X_i) =$$

$$= \frac{(a+1)(b_i+1)}{(c-a-\Sigma b_j-2)} \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1} + \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1} =$$

$$= \left(\frac{(a+1)(b_i+1)}{c-a-\Sigma b_j-2} + 1 \right) \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1} =$$

$$= \frac{ab_i+b_i+c-\Sigma b_j-1}{c-a-\Sigma b_j-2} \quad \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1}$$

(2.27) $$\sigma^2(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) =$$

$$= \left(\frac{ab_i+c-\sum_{j\neq i} b_j-1}{c-a-\Sigma b_j-2} - \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1} \right) \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1} =$$

$$= \left(\frac{ab_i}{(c-a-\Sigma b_j-2)(c-a-\Sigma b_j-1)} + \frac{c-\sum_{j\neq i} b_j-1}{c-a-\Sigma b_j-2} \right) \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_j-1} =$$

$$= \frac{ab_i\left(c-\sum_{j\neq i} b_j-1 + \frac{ab_i}{c-a-\Sigma b_i-1} \right)}{(c-a-\Sigma b_j-2)(c-a-\Sigma b_j-1)}$$

$$E(X_iX_j) = \mu'(0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,\underset{j}{1},\ldots,0) = \frac{a(a+1)b_ib_j}{(a-c+\Sigma b_k+2)(a-c+\Sigma b_k+1)}$$

$$(2.28) \qquad Cov(X_i,X_j) = \frac{a(a+1)b_ib_j}{(a-c+\Sigma b_k+2)(a-c+\Sigma b_k+1)} - \frac{ab_iab_j}{(a-c+\Sigma b_k+1)^2} =$$

$$= \frac{ab_iab_j}{(a-c+\Sigma b_k+2)(a-c+\Sigma b_k+1)} + \frac{ab_ib_j}{(a-c+\Sigma b_k+2)(a-c+\Sigma b_k+1)} - \frac{ab_iab_j}{(a-c+\Sigma b_k+1)^2} =$$

$$= \frac{ab_ib_j - \dfrac{ab_iab_j}{a-c+\Sigma b_k+1}}{(a-c+\Sigma b_k+1)(a-c+\Sigma b_k+2)} =$$

$$= \frac{ab_j\left(b_j - \dfrac{ab_j}{a-c+\Sigma b_k+1}\right)}{(a-c+\Sigma b_k+1)(a-c+\Sigma b_k+2)} =$$

$$(2.28) \qquad = \frac{b_j\, E(X_i) + E(X_i)\, E(X_j)}{(c-a-\Sigma b_k-2)} = Cov(X_i,X_j)$$

(En los anteriores desarrollos Σ indica la suma variando el índice correspondiente desde 1 hasta n)

Para los valores $a=-n$, $b_1=-Np_1$, ..., $b_n=-Np_n$, $c=Np_0-n+1$ se obtienen los valores de los cumulantes de primer y segundo orden del ejemplo (2.6).

$$(2.29) \qquad E(X_i) = \frac{Nnp_i}{Np_0-n+1+n+\Sigma Np_j-1} = \frac{Nnp_i}{N} = np_i$$

$$(2.30) \qquad Cov(X_i,X_j) = \frac{-Np_jnp_i+np_inp_j}{Np_0-n+1+n+\Sigma Np_k-2} = -\frac{N-n}{N-1}\, np_ip_j$$

$$(2.31) \qquad \sigma^2(X_i) = \frac{nNp_i(Np_0-n+1+(N-Np_0-Np_i)-1+np_i)}{(Np_0-n+1+n+(N-Np_0)-2)(Np_0-n+1+n+(N-Np_0)-1)} =$$

$$= \frac{Nnp_i(N-n-Np_i+np_i)}{(N-1)\ N} = \frac{N-n}{N-1}\, np_i(1-p_i) = \frac{N-n}{N-1}\, np_iq_i$$

2.2.2 MOMENTOS ASOCIADOS A LA FUNCION GENERADORA DE PROBABILIDAD $C_2F_1(a,b;c;X)$

El cálculo de los principales momentos asociados a la distribución de probabilidad generada por $C_2F_1(a,b;c;X)$ no es factible según el procedimiento empleado anteriormente. El cambio de variable $t_i=1+\alpha_i$ $(i=1,\ldots,n)$ introducido en (2.20) equivale a introducir el cambio $I_m+Y_{mxm}=X_{mxm}$ en el caso de argumento matricial, de forma que obtenemos una serie en polinomios zonales de Y que vendrá determinada por el desarrollo binomial generalizado (1.89).

Debido a que no se conoce ninguna expresión general de los polinomios zonales en función de las raices características del argumento y de la partición sobre la que se construye, es imposible hallar los momentos factoriales mediante diferenciación de la función generadora de momentos factoriales obtenida al introducir el cambio I+Y=X y teniendo presente el desarrollo binomial generalizado (1.89).

De forma que nos vemos obligados a utilizar una herramienta y un método distintos a los usados con las funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella. Obtendremos los momentos a través de los cumulantes y estos últimos a partir de las ecuaciones diferenciales que satisface la función generadora de cumulantes.

En el capítulo primero se expuso que la función de argumento matricial $_2F_1(a,b;c;Y)$ satisfacía el sistema de m ecuaciónes en derivadas parciales dado en (1.93), por tanto la función generadora de probabilidad $C_2F_1(a,b;c;Y)$ que se diferencia de la anterior función en un factor constante, también será solución del sistema (1.93).

Realizando sobre las raices caracteristicas del argumento el cambio $y_i=e^{\alpha_i}$ (i=1,...,m) se sigue que la función generatriz de momentos

$$M = M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$$

satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$(2.32)\qquad (1-e^{\alpha_i})\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i^2} + \{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i}+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}\}\frac{\partial M}{\partial\alpha_i} -$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_j})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}\frac{\partial M}{\partial\alpha_j} = e^{\alpha_i}abM \qquad (i=1,\dots,m)$$

que es consecuencia de hacer las siguientes sustituciones:

$$\alpha_i = \ln y_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial M}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_i} = \frac{\partial M}{\partial\alpha_i}\frac{1}{y_i} = \frac{\partial M}{\partial\alpha_i}\frac{1}{e^{\alpha_i}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial M}{\partial\alpha_i}\frac{1}{e^{\alpha_i}}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{\partial M}{\partial\alpha_i}\frac{1}{e^{\alpha_i}}\right)\frac{1}{e^{\alpha_i}} =$$

$$= \frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i^2}(1/e^{\alpha_i})^2 - \frac{\partial M}{\partial\alpha_i}(1/e^{\alpha_i})^2 = (1/e^{\alpha_i})^2\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i^2} - \frac{\partial M}{\partial\alpha_i}\right)$$

en el sistema (1.93), multiplicar la ecuación resultante por e^{α_i} y agrupar posteriormente términos.

La función generadora de cumulantes L que se define como el logaritmo neperiano de la función generadora de momentos M, L = ln M satisface el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$(2.33)\qquad (1-e^{\alpha_i})\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2} + (\partial L/\partial\alpha_i)^2\right) + \{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}\}\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_j})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}\frac{\partial L}{\partial\alpha_j}=e^{\alpha_i}ab$$

$$(i=1,\ldots,m)$$

Ecuaciones que se obtienen a partir de (2.32) teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$L=\ln M$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\alpha_i}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2}=\frac{-\partial M/\partial\alpha_i}{M^2}\frac{\partial M}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i^2}$$

$$\frac{1}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2}+\frac{1}{M^2}(\partial M/\partial\alpha_i)^2=\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2}+(\partial L/\partial\alpha_i)^2$$

y dividiendo (2.32) por M antes de sustituir las anteriores expresiones equivalentes.

Como es conocido, los distintos cumulantes se obtienen a partir de la función generadora de cumulantes L derivando ésta y evaluando la función resultante en el punto cero. Así el cumulante de orden k_1 en la variable i_1, k_2 en la variable i_2, ..., k_p en la variable i_p notado $K_{i_1\ldots i_p}^{k_1\ldots k_p}$ es igual a

$$(2.34)\qquad K_{i_1\ldots i_p}^{k_1\ldots k_p}=\left.\frac{\partial^K L}{\partial\alpha_{i_1}^{k_1}\cdots\partial\alpha_{i_p}^{k_p}}\right|_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=(0,\ldots,0)}$$

donde a $K=k_1+\ldots+k_p$ se le llama orden del cumulante.

Según (2.34), el sistema (2.33) así como sus sucesivas derivadas nos proporciona una herramienta con la que atacar el cálculo de los cumulantes y por tanto de cualquier momento.

Cumulantes de primer orden hay m ($k_1^1,\dots,k_m^1$) y necesitaremos m ecuaciones independientes verificadas por dichos cumulantes para poder hallarlos. Estas ecuaciones nos las proporciona el sistema (2.33).

Cumulantes de segundo orden hay $(m^2+m)/2$ $(K_1^2,\dots,K_m^2,K_{1,2}^{1,1},\dots K_{m-1,m}^{1,1})$ y necesitaremos ese número de ecuaciones independientes en los cumulantes de orden menor a dos para poder hallarlos.

Derivando la ecuación i-ésima de (2.33) respecto de $\alpha_i,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_m$ y haciendo esto mismo con cada ecuación del sistema (2.33) se obtienen $m(m+1)/2$ ecuaciones en las que aparecen las derivadas de L que evaluadas en $(0,\dots,0)$ dan lugar a los $(m^2+m)/2$ distintos cumulantes de segundo orden.

El número de cumulantes de tercer orden aumentaría y también el número de ecuaciones necesarias para calcularlos. Estas ecuaciones se obtendrían a partir de las halladas para los cumulantes de orden dos, derivándolas convenientemente. Sin embargo vamos a ver a continuación que debido a la forma en que se ha construido L, el cálculo de los cumulantes es mucho más sencillo que el método que aquí hemos bosquejado.

SIMETRIA DE LOS CUMULANTES

Puesto que son simétricos los polinomios zonales $C_k(Y)$ en las raices características, y_i, de la matriz Y también son simétricas las funciones F, M y L, funciones generadoras de probabilidad, de momentos y de cumulantes respectivamente.

Aunque L sea simétrica no podemos asegurar que $\partial L/\partial\alpha_i$ lo sea ni que $\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}$. Por ejemplo $f(x,y)=xy$ es simétrica pero $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ no son iguales ni simétricas. Sin embargo si evaluamos las anteriores derivadas de L en el punto $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=(\alpha,\ldots,\alpha)=\alpha$ en virtud de la simétria de L se tiene la siguiente igualdad

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha} = \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha}$$

en particular si $\alpha=0$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=0}$$

que nos indica que el cumulante de primer orden para la variable i-ésima coincide con el del mismo orden para la variable j-ésima y esto para cualquier par de índices, es decir, $K_i^1 = K_j^1$, para todo i y j.

Razonando análogamente sobre los cumulantes de orden K

$$(2.35) \qquad K_{i_1\ldots i_p}^{k_1\ldots k_p} = \left.\frac{\partial^K L}{\partial \alpha_{i_1}^{k_1}\ldots\partial\alpha_{i_p}^{k_p}}\right|_{=0} = \left.\frac{\partial^K L}{\partial \alpha_{j_1}^{k_1}\ldots\partial\alpha_{j_p}^{k_p}}\right|_{=0} = K_{j_1\ldots j_p}^{k_1\ldots k_p}$$

donde $k=(k_1,\ldots,k_p)$ es cualquier partición de $K=k_1+\ldots+k_p$ y $\{i_1,\ldots,i_p\}$ $\{j_1,\ldots,j_p\}$ son subconjuntos ordenados con sus elementos distintos del conjunto $\{1,2,\ldots,m\}$.

Según lo anterior todos los cumulantes de orden uno son iguales, de modo que será suficiente una ecuación cualquiera del sistema (2.33) para calcular todos los cumulantes de primer orden K_i^1 $i=1,\ldots,m$ que por otra parte coinciden con la $E(X_i)=\bar{x}_i$ $i=1,\ldots,m$. (HERMOSO J.A., tesina 1984).

Cumulantes de orden K según (2.35) habrá tantos como particiones distintas de K (supuestas las particiones ordenadas). Merece hacer aquí hincapié sobre el hecho de que el concepto de partición que se define para la construcción de los polinomios zonales vuelve a aparecer de forma natural en los cumulantes asociados a la distribución construida.

Cumulantes de orden dos habrá tantos como particiones de 2 $\{(2),\ (1,1)\}$ por lo que necesitaremos sólo dos ecuaciones en dichos cumulantes para hallarlos. Es conocido que los cumulantes de segundo orden constituyen los elementos de la matriz de covarianzas, $K^{1,1}_{i,j} = \mathrm{cov}(X_i,X_j)=\sigma_{ij}$, (HERMOSO J.A., tesina 1984), $K^2_i=\sigma^2(X_i)=\sigma^2_i=\sigma^2$ (Las varianzas las notaremos sin subíndices por no haber confusión debido a la simetría expresada por (2.35)).

Haciendo

$$f(\alpha_i,\alpha_j)= \frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}$$

$$g(\alpha_i,\alpha_j)= \frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_j})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}$$

$$f_i(\alpha) = f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} f(\alpha_i,\alpha_j)$$

$$g_i(\alpha) = g_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} g(\alpha_i,\alpha_j)$$

el anterior sistema (2.33) puede escribirse como

$$(2.36) \qquad (1-e^{\alpha_i})\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2} + (\partial L/\partial \alpha_i)^2\right) + \{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i}+$$

$$+\tfrac{1}{2}f_i(\alpha)\}\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} g(\alpha_i,\alpha_j)\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = e^{\alpha_i}\, ab \qquad ;i=1,\dots,m$$

donde

$$f_i(\alpha) \text{ y } G_i(\alpha) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} g(\alpha_i,\alpha_j)\, \frac{\partial L}{\partial \alpha_j}$$

son funciones simétricas respecto de $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_m$. Por tanto razonando al igual que sobre L si derivamos $f_i(\alpha)$ o $G_i(\alpha)$ respecto de alguna variable α_j $j\neq i$ y posteriormente evaluamos el resultado en $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=(\alpha,\dots,\alpha)$ se obtiene lo mismo que si se deriva respecto de otra variable α_k $k\neq i$ $k\neq j$ y se evaluan las funciones resultantes en $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=(\alpha,\dots,\alpha)$. En particular lo anterior es cierto en $(\alpha,\dots,\alpha)=(0,\dots,0)$, punto donde nos interesa evaluar las distintas derivadas de L.

En adelante tendremos siempre presente lo anterior, ya que evaluaremos las distintas ecuaciones en las derivadas de L en el punto $(0,\dots,0)$.

Así a partir de la i-ésima ecuación de (2.36) obtendrémos sólo dos ecuaciones en los cumulantes de orden no mayor que dos (que son las que necesitamos) una al derivar respecto de α_i y evaluar el resultado en $(0,\dots,0)$ y otra al derivar respecto de cualquier α_k $k\neq i$ y evaluar posteriormente en $(0,\dots,0)$.

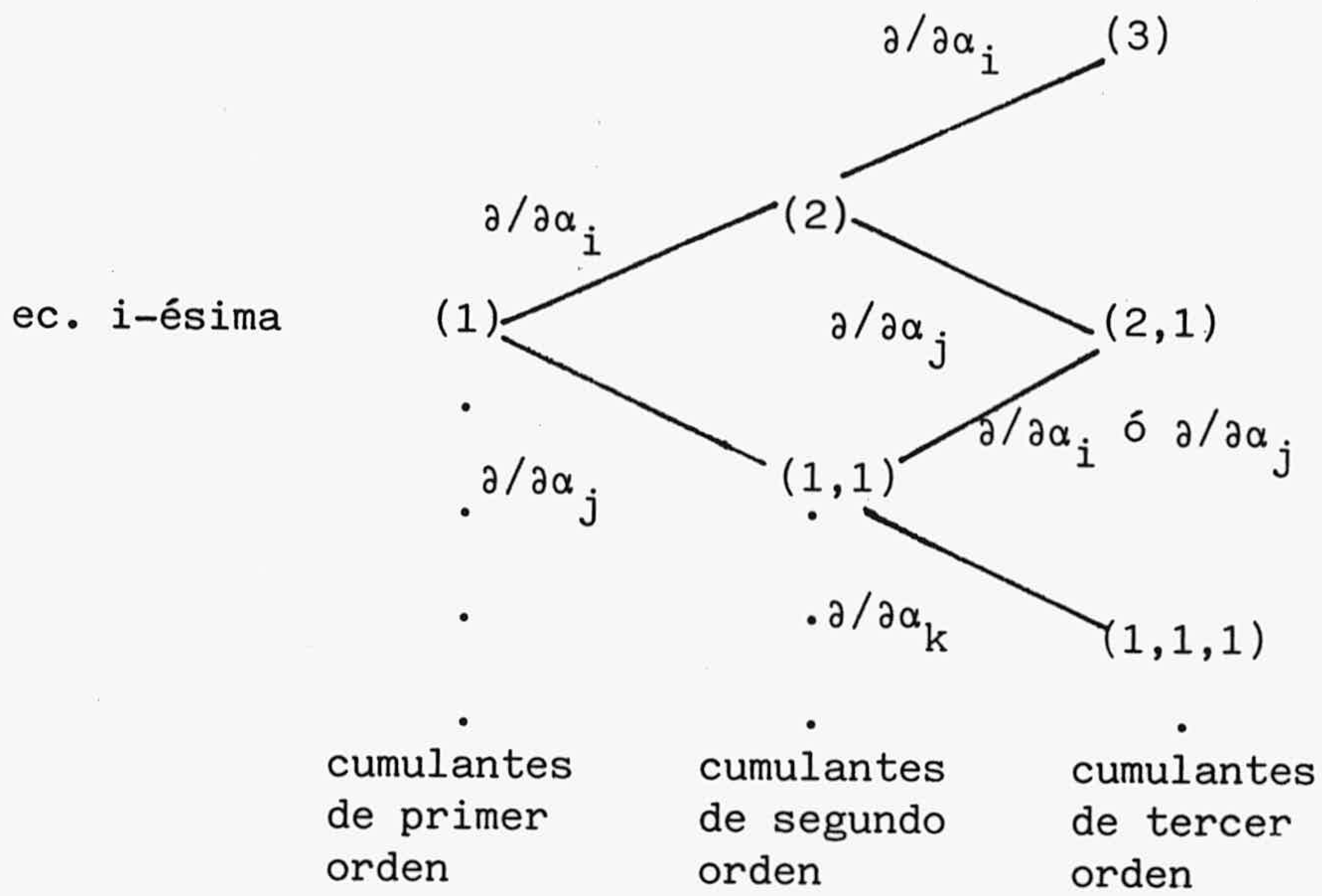
Estas ecuaciones coinciden por la simétria de los cumulantes (2.35) con las obtenídas a partir de la j-ésima ecuación de (2.36) cuando se deriva respecto de α_j evaluando en $(0,\dots,0)$ y respecto de α_k, $k\neq j$ evaluando en el mismo punto.

El proceso anterior para el cálculo de los cumulantes de segundo orden puede resumirse en el siguiente esquema.

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \\
\text{ec. i-ésima } (1) \arrow[ur, "\partial/\partial\alpha_i"] \arrow[dr, "\partial/\partial\alpha_j"'] & \\
 & (1,1)
\end{tikzcd}$$

donde las particiones que aparecen en los nodos del grafo son las correspondientes al cumulante que entre otros aparece en la ecuación obtenida según la operación que figura en el arco y que conduce a dicha partición. Escribiendo así el proceso nos aseguramos que se hallan las ecuaciones necesarias y que todos los cumulantes que se buscan figuran en ellas.

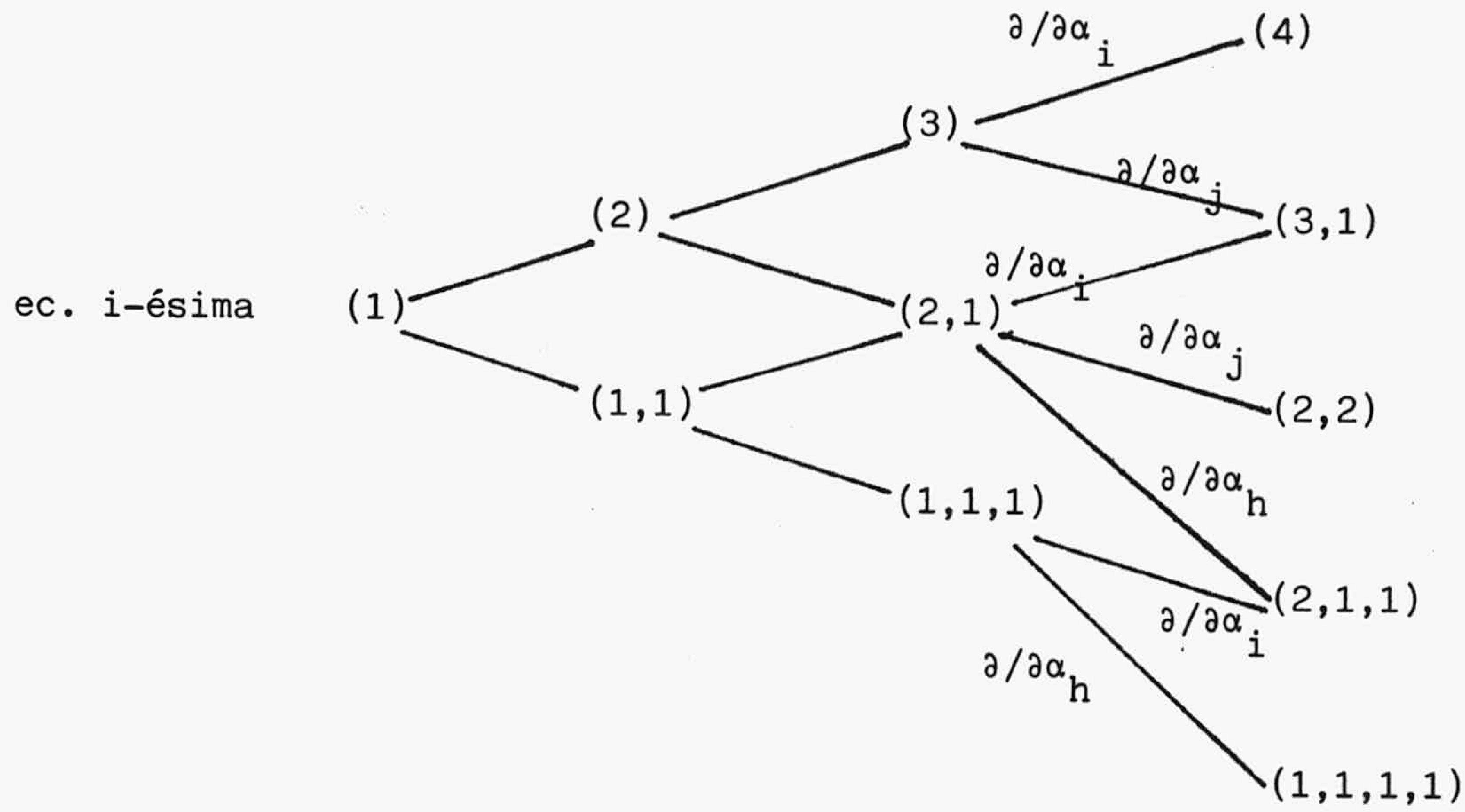
Cumulantes distintos de orden tres hay tres, los asociados a las particiones (3), (2,1), (1,1,1) y las tres ecuaciones necesarias para su cálculo se pueden obtener a partir de las dos halladas para obtener los cumulantes de segundo orden según el siguiente árbol.



$k \neq i \neq j$.

Cumulantes de orden cuatro habrá cinco, los correspondientes a las particiones (4), (3,1), (2,1,1), (2,2), (1,1,1,1). Las distintas ecuaciones que verifican dichos cumulantes y que necesitamos hallar para su cálculo se obtienen a partir de las tres últimas halladas para los cumulantes de orden tres, según el siguiente esquema entre otras muchas posibilidades debido a la simetría (2.35).

Los índices i,j,k y h que aparecen son distintos entre sí.



CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DEL SISTEMA (2.33)

Al final de este capítulo se recogen en un apéndice las principales definiciones y propiedades de los conceptos que sobre continuidad y derivabilidad en funciones de varias variables aquí se usan. (APOSTOL T., 1979, pg. 113-140, pg. 419-436).

En las páginas anteriores se ha expuesto esquemáticamente el método para el cálculo de los cumulantes. Este método se basa en resolver una serie de ecuaciones en los cumulantes, las cuales se obtienen a partir de (2.33) evaluando este sistema y sus distintas derivadas en el punto $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=(0,\ldots,0)$.

La técnica es elemental pero nos encontramos con el problema de que (2.33) no está definido en $(0,\ldots,0)$ y por lo tanto no es continuo ni derivable en dicho punto.

El sistema (2.33) o equivalentemente el sistema (2.36) no está definido en $(0,\ldots,0)$ porque las funciones $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$ que aparecen en su expresión no están definidas en $\alpha_i=\alpha_j$ $j\neq i$, y en particular en $(0,\ldots,0)$ que es el punto donde se centra nuestro interés.

Si $f_i(\alpha)$, $g_i(\alpha)$ presentaran discontinuidades evitables, definiendo en dichos puntos ambas funciones por continuidad extenderíamos (2.33) a un sistema válido también en el punto $(0,\ldots,0)$. Pero la discontinuidad que presentan en $(0,\ldots,0)$ no es evitable pues no existe el límite cuando $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ tiende a $(0,\ldots,0)$ ya que los límites reiterados no coinciden; por ejemplo, los siguientes límites reiterados son distintos sobre $f_i(\alpha)$ y sobre $g_i(\alpha)$.

$$\lim_{\alpha_1\to 0}\ldots\lim_{\alpha_{i-1}\to 0}\lim_{\alpha_{i+1}\to 0}\ldots\lim_{\alpha_m\to 0}\lim_{\alpha_i\to 0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}=$$

$$\lim_{\alpha_1\to 0}\ldots\lim_{\alpha_{i-1}\to 0}\lim_{\alpha_{i+1}\to 0}\ldots\lim_{\alpha_m\to 0}0=0$$

$$\lim_{\alpha_i\to 0}\lim_{\alpha_1\to 0}\ldots\lim_{\alpha_{i-1}\to 0}\lim_{\alpha_{i+1}\to 0}\ldots\lim_{\alpha_m\to 0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}=$$

$$\lim_{\alpha_i\to 0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}e^{\alpha_i}\frac{1-e^{\alpha_i}}{e^{\alpha_i}-1}=-(m-1)$$

$$\lim_{\alpha_1\to 0}\ldots\lim_{\alpha_{i-1}\to 0}\lim_{\alpha_{i+1}\to 0}\ldots\lim_{\alpha_m\to 0}\lim_{\alpha_i\to 0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_j})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}=$$

$$\lim_{\alpha_1\to 0}\ldots\lim_{\alpha_{i-1}\to 0}\lim_{\alpha_{i+1}\to 0}\ldots\lim_{\alpha_m\to 0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{1-e^{\alpha_j}}{1-e^{\alpha_j}}=m-1$$

$$\lim_{\alpha_i\to 0}\lim_{\alpha_1\to 0}\ldots\lim_{\alpha_{i-1}\to 0}\lim_{\alpha_{i+1}\to 0}\ldots\lim_{\alpha_m\to 0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{(1-e^{\alpha_j})e^{\alpha_i}}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}=\lim_{\alpha_i\to 0}0=0$$

Sin embargo L es continuamente derivable en $(0,\ldots,0)$, por tanto cualquier límite reiterado sobre L o derivada de L cuando $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ tiende a $(0,\ldots,0)$ coincide con el valor de la función correspondiente en el punto $(0,\ldots,0)$.

Por otra parte cada uno de los sumandos de $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$ son funciones de dos variables que en cada dirección $\alpha_i=0$ ó $\alpha_j=0$ dan lugar a funciones de una variable continuas o con discontinuidad evitable en cero.

(2.37)
$$\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}} \begin{cases} \xrightarrow{\alpha_i=0} 0 \\ \xrightarrow[\alpha_j=0]{} \dfrac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-1} = -e^{\alpha_i} \quad ; \ \alpha_i\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_j})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}} \begin{cases} \xrightarrow{\alpha_i=0} \dfrac{1-e^{\alpha_j}}{1-e^{\alpha_j}} = 1 \quad ; \ \alpha_j\neq 0 \\ \xrightarrow[\alpha_j=0]{} 0 \end{cases}$$

A continuación vamos a hallar los principales cumulantes (medias, varianzas y covarianzas) a través de ecuaciones en dichos valores obtenidas de (2.33) o por derivación de dicho sistema, tomando límites reiterados en el punto (0,...,0).

ESPERANZA MATEMATICA

Como ya sabemos, por la simetría de los cumulantes (2.35), todas las esperanzas matemáticas de la distribución en estudio coinciden y bastará una ecuación, por ejemplo la ecuación i-ésima, del sistema (2.33) para el cálculo de todas las esperanzas.

Tomando límite cuando α_i tiende a cero en la anterior ecuación obtenemos

$$(c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)])\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha_i=0} - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{1-e^{\alpha_j}}{1-e^{\alpha_j}}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha_i=0} = ab$$

tomando en esta expresión límite cuando α_j tiende a cero para toda $j \neq i$ (independientemente del orden en que se tomen dichos límites reiterados) se obtiene

$$(2.38) \qquad (c-1-a-b)\, K_i^1 - \tfrac{1}{2}(m-1)\, K_i^1 = ab$$

por tanto

$$(2.39) \qquad K_i^1 = \bar{x}_i = \frac{ab}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)} \qquad ; \; i=1,\dots,m$$

(Obsérvese el gran paralelismo entre (2.39) y (2.25) para $F_D^{(n)}$)

Al mismo resultado se llega si se toma primero límite cuando α_j tiende a cero para toda $j \neq i$ (independientemente del orden en que se tomen esos m-1 límites, pues en cada sumando de $f_i(\alpha)$ y de $g_i(\alpha)$ no aparece nada más que una de las m-1 variables anteriores)

$$(1-e^{\alpha_i})\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2}\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} + \left.(\partial L/\partial \alpha_i)^2\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}}\right) + \{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i}\}.$$

$$\cdot \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (-e^{\alpha_i})\, \frac{1-e^{\alpha_i}}{1-e^{\alpha_i}} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} = e^{\alpha_i}\, ab$$

y tomando posteriormente límite cuando α_i tiende a cero resulta, por la simetría de los cumulantes, la ecuación (2.38) de nuevo

$$(c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-a-b+\tfrac{1}{2}(m-1))\, K_i^1 - \frac{m-1}{2} K_i^1 = ab$$

de donde

$$\bar{x}_i = \frac{ab}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)} \qquad i=1,\dots,m$$

Hemos distinguido estos dos límites reiterados distintos por la especial forma que tienen los sumandos de $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$, la cual facilita los cálculos, pero en realidad hay tantas formas de obtener la ecuación (2.38) como distintos límites reiterados se puedan tomar sobre (2.33) en el punto $(0,\ldots,0)$.

Así pues si ignorando la especial forma de $g_i(\alpha)$ y $f_i(\alpha)$ tomamos límites reiterados en el orden natural $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ se obtiene según (2.37) la siguiente ecuación.

$$(2.40) \qquad \{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]\} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=0} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} (-1) \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha=0} - \tfrac{1}{2} \sum_{k=i+1}^{m} (1) \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} = ab$$

que en virtud de la aludida simetría (2.35) es equivalente a

$$(c-1-a-b)\, K_i^1 - \tfrac{1}{2}(i-1)\, K_i^1 - \tfrac{1}{2}(m-i)\, K_i^1 = ab$$

$$(c-1-a-b-\tfrac{1}{2}(i-1+m-i))\, K_i^1 = ab$$

$$K_i^1 = \bar{x}_i = \frac{ab}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)} \qquad ; \ i=1,\ldots,m$$

obteniéndose el mismo resultado y al que también llegaríamos tomando límites reiterados en cualquier otro orden.

La anterior afirmación puede comprobarse fácilmente pues lo único importante en el orden en que los límites se toman es qué limites se realizan antes y qué otros después de tomar límite cuando α_i tiende a cero. Ese orden en los límites se manifiesta, teniendo en cuenta (2.37) ,en que aparece un 0 ó un -1 en los sumandos de $f_i(\alpha)$ o un 1 ó un 0 en los de $g_i(\alpha)$ siendo siempre, como puede comprobarse en particular en en (2.40), el número de unos que se suman (m-1).

VARIANZAS Y COVARIANZAS

Según adelantamos, hay sólo dos cumulantes de segundo orden y necesitaremos dos ecuaciones en ellos para hallarlos. Como se apuntó si derivamos (2.33) respecto de α_i evaluando el resultado en cero y respecto de α_j evaluando en el mismo punto, el resultado son dos ecuaciones en dichos cumulantes. Sin embargo estas ecuaciones obtenidas presentan indeterminaciones ya que $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$ no son continuas en (0,...,0) y por tanto no derivables.

Para evitar esto vamos a construir, tomando límites reiterados y extendiendo por continuidad, dos ecuaciones en una variable (α_i ó α_j según la variable respecto de la que se vaya a derivar) que tras derivarlas y evaluarlas en cero dan lugar a dos ecuaciones en los cumulantes de segundo y primer orden.

Si en (2.33) tomamos límite cuando α_i tiende a cero se obtiene

$$(c-1-a-b) \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha_i=0} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} \frac{1-e^{\alpha_k}}{1-e^{\alpha_k}} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha_i=0} = ab$$

tomando límite cuando α_k tiende a cero, para todo $k\neq i,j$ en cualquier orden se tiene

$$(c-1-a-b) \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_k=0\\k\neq j}} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k}\right|_{\substack{\alpha_k=0\\k\neq j}} - \frac{1}{2}\, \frac{1-e^{\alpha_j}}{1-e^{\alpha_j}} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\substack{\alpha_k=0\\k\neq j}} = ab$$

ecuación continua salvo en $\alpha_j=0$ que tiene una discontinuidad evitable.

Extendiendo la anterior ecuación por continuidad y derivando respecto de α_j se obtiene

$$(c-a-b-1)\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i\,\partial \alpha_j}\right|_{\substack{\alpha_k=0\\ k\neq j}} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{m}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k\,\partial \alpha_j}\right|_{\substack{\alpha_k=0\\ k\neq j}} - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_j^2}\right|_{\substack{\alpha_k=0\\ k\neq j}} = 0$$

evaluando en $\alpha_j=0$ y teniendo presente la simetría (2.35) de los cumulantes.

$$(c-a-b-\tfrac{1}{2}m)\,\sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 = 0 \qquad (2.46)$$

Notaremos por σ_{xy} a todas las covarianzas y por σ^2 a las varianzas.

Para obtener a partir de (2.33), derivando respecto de α_i, otra ecuación en los cumulantes de primer y segundo orden procederemos de la siguiente forma.

Tomamos límite cuando α_j tiende a cero para toda $j\neq i$ en cualquier orden, resultando

$$(1-e^{\alpha_i})\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2} + (\partial L/\partial \alpha_i)^2\right)\Bigg|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} + \{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{-e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{1-e^{\alpha_i}}\}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} = abe^{\alpha_i}$$

Ecuación continua y derivable en α_i en todo punto salvo en $\alpha_i=0$ donde presenta una discontinuidad evitable. Extendiendo la anterior ecuación por continuidad y derivando respecto de α_i

$$-e^{\alpha_i}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2} + (\partial L/\partial \alpha_i)^2\right)\Bigg|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} + (1-e^{\alpha_i})\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2}+(\partial L/\partial \alpha_i)^2\right)}{\partial \alpha_i}\right)\Bigg|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} -$$

$$-(a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)+\tfrac{1}{2}(m-1))e^{\alpha_i} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} +\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i}-$$

$$-\tfrac{1}{2}(m-1)e^{\alpha_i}\} \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2}\right|_{\substack{\alpha_j=0\\ j\neq i}} = abe^{\alpha_i}$$

Evaluando la anterior expresión en $\alpha_i=0$ se obtiene

(2.47) $$-\sigma^2-\bar{x}^2-(a+b)\bar{x}+(c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-a-b)\sigma^2 = ab$$

es decir

(2.48) $$\sigma^2 = \frac{ab+(a+b)\bar{x}+\bar{x}^2}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)-1} = \frac{(\bar{x}+a)\ (\bar{x}+b)}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)-1}$$

y a partir de (2.46):

(2.49) $$\sigma_{xy} = \frac{ab+(a+b)\bar{x}+\bar{x}^2}{2\ (c-a-b-\tfrac{1}{2}m)\ (c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)-1)}$$

donde $\bar{x}$ es cualquier media y su valor está dado por (2.39).

Las ecuaciones (2.46) y (2.47) se han obtenido derivando una ecuación en una única variable y evaluando posteriormente dicha ecuación cuando la variable es cero.

La obtención de dichas ecuaciones se ha hecho tomando límites reiterados en un determinado orden ya que debido a la forma de $f_i(\alpha)$ y de $g_i(\alpha)$ dicho orden facilita los cálculos. Pero se podrían haber tomado en cualquier otro orden como de hecho veremos a continuación con la ecuación (2.46) en concreto.

Vamos a tomar límites reiterados en el orden $\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,$

$\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m$ cuando dichas variables tienden a cero y j>i, obteniéndose

$$\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-a-b+\tfrac{1}{2}(m-1)\} \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_k=0 \\ k\neq j}} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_k=0 \\ k\neq j}} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{k=i+1 \\ k\neq j}}^{m}(1)\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k}\right|_{\substack{\alpha_k=0 \\ k\neq j}} - \tfrac{1}{2}\frac{1-e^{\alpha_j}}{1-e^{\alpha_j}}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\substack{\alpha_k=0 \\ k\neq j}} = ab$$

Definiendo por continuidad la anterior ecuación en $\alpha_j=0$ y derivando respecto de α_j se obtiene

$$(c-1-a-b)\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i\,\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=0} - \tfrac{1}{2}(i-1)\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i\,\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=0} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{k=i+1 \\ k\neq j}}^{m}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k\,\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=0} - \tfrac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_j^2}\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$(c-1-a-b)\sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}(i-1)\,\sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}(m-i-1)\,\sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 = 0$$

$$(c-a-b-1-\tfrac{1}{2}(m-i+i-1-1))\,\sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 = 0$$

$$(c-a-b-\tfrac{1}{2}m)\,\sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 = 0$$

Si j<i, tomando límites en el orden $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m$ cuando tiende cada variable a cero, resulta

$$(c-1-a-b)\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_h=0 \\ h\neq j}} + \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{i-1}(-1)\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right|_{\substack{\alpha_h=0 \\ h\neq j}} - \tfrac{1}{2}\sum_{k=i+1}^{m}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_k}\right|_{\substack{\alpha_h=0 \\ h\neq j}} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{1-e^{\alpha_j}}{1-e^{\alpha_j}}\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right|_{\substack{\alpha_h=0 \\ h\neq j}} = ab$$

Definiendo por continuidad la anterior expresión en $\alpha_j=0$, derivando respecto de α_j y evaluando en $\alpha_j=0$ se obtiene

$$(c-1-a-b)\ \sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}(i-2+m-i)\ \sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\ \sigma^2 = 0$$

$$(c-a-b-\tfrac{1}{2}m)\ \sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\ \sigma^2 = 0$$

También obtendríamos la misma ecuación tomando límites reiterados en cualquier orden y posteriormente derivando y evaluando en cero, pues según (2.37) el orden sólo influye en que aparezca un -1 en los sumandos de $f_i(\alpha)$ o un 1 en los de $g_i(\alpha)$ (al igual que ocurría en la esperanza matemática), siendo al final siempre (m-2) los sumandos de $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$ que no se anulan y que van multiplicados por σ_{xy}.

Obtenemos a continuación la expresión que tienen σ_{xy} y σ^2 en función solamente de los parámetros a,b y c.

$$\bar{x}+a = \frac{ca-a^2-\tfrac{1}{2}a(m+1)}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)} = \frac{c-a-\tfrac{1}{2}(m+1)}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)}\ a$$

$$\bar{x}+b = \frac{c-b-\tfrac{1}{2}(m+1)}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)}\ b$$

$$(\bar{x}+a)(\bar{x}+b) = ab\ \frac{(c-a-\tfrac{1}{2}(m+1))\ (c-b-\tfrac{1}{2}(m+1))}{(c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1))^2}$$

$$(c-a-\tfrac{1}{2}(m+1))(c-b-\tfrac{1}{2}(m+1)) =$$

$$= c^2-cb-\tfrac{1}{2}c(m+1)-ac+ab+\tfrac{1}{2}a(m+1)-\tfrac{1}{2}c(m+1)+\tfrac{1}{2}b(m+1)+\tfrac{1}{4}(m+1)^2 =$$

$$= c^2-cb-ca+ab+\tfrac{1}{2}(m+1)(a+b)-(m+1)c+\tfrac{1}{4}(m+1)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}(m+1)(a+b-2c+\tfrac{1}{2}(m+1))+c(c-b-a)+ab =$$

$$= c(c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1))-\tfrac{1}{2}(m+1)(c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1))+ab$$

luego

$$(2.50) \qquad \sigma^2 = \frac{ab\left(c-\frac{1}{2}(m+1)+\dfrac{ab}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)}\right)}{(c-a-b-\frac{1}{2}(m+1))\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1)}$$

Obsérvese la gran analogía que guarda con la expresión de las varianzas asociadas a una distribución generada por una función $F_D^{(n)}$ de Lauricella. (2.27).

Sustituyendo $(\bar{x}+a)(\bar{x}+b)$ en (2.49) se obtiene la expresión de cualquier covarianza en función de los parámetros a,b y c.

$$(2.51) \qquad \sigma_{xy} = \frac{ab\left(c-\frac{1}{2}(m+1)+\dfrac{ab}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)}\right)}{2\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1)\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1))\ (c-a-b-\frac{1}{2}m)}$$

2.2.3 COMPARACIONES ENTRE LOS MOMENTOS.

Como se expuso en el capítulo primero las funciones ${}_2F_1(a,b;c;X)$ extienden a la función de Gauss, por tanto las distribuciones y momentos generados por funciones hipergeométricas de argumento matricial extienden a las distribuciones y momentos generados por la función de Gauss.

Veamos que , efectivamente, las expresiones (2.39) y (2.50) extienden a la media y varianza de una distribuación generada por la función de Gauss. En particular lo comprobaremos sobre una de dichas distribuciones que es como vimos la distribución hipergeométrica univariante clásica. La esperanza y varianza para la anterior distribución son bien conocidas y están dadas por

$$(2.52) \qquad E(X) = np \qquad \sigma^2(X) = \frac{N-n}{N-1}\, npq$$

Para a=-n, b=-Np y c=Nq-n+1 (parámetros de la función de Gauss que genera a la distribución hipergeométrica univariante) y m=1 , a partir de (2.39) y (2.50) se obtiene (2.52).

$$\bar{x} = \frac{ab}{c-a-b-½(m+1)} = \frac{Nnp}{Nq-n+1+N+Np-1} = \frac{Nnp}{N(p+q)} = np$$

$$\sigma^2 = \frac{ab\left(c-½(m+1)+ab/(c-a-b-½(m+1))\right)}{(c-a-b-½(m+1))\ (c-a-b-½(m+1)-1)} =$$

$$= \frac{Nnp(Nq-n+1-1+\frac{Nnp}{Nq-n+1+n+Np-1})}{(Nq-n+1+n+Np-1)\ (Nq-n+1+n+Np-1-1)} =$$

$$= \frac{Nnp(Nq-n+\frac{Nnp}{N})}{N(N-1)} = \frac{np(n(p-1)+Nq)}{N-1} =$$

$$= \frac{np(-nq+Nq)}{N-1} = \frac{N-n}{N-1}\,npq$$

Como también es sabido $F_D^{(n)}$ extiende a la función de Gauss y los momentos asociados a $F_D^{(n)}$ cuando n=1 se reducen a los asociados a la función de Gauss, en particular (2.25) y (2.27) se reducen a (2.52) cuando a=-n, b_1=-Np, c=Nq-n+1 y n=1.

$$\bar{x}_1 = \frac{ab_1}{c-a-b_1-1} = \frac{Nnp}{Nq-n+1+n+Np-1} = \frac{N}{N(p+q)}\,np = np$$

$$\sigma^2 = \frac{ab_1(c-1+\frac{ab_1}{c-a-b_1-1})}{(c-a-b_1-2)\ (c-a-b_1-2)} = \frac{Nnp(Nq-n+np)}{(N-1)N} = \frac{Nq-n(1-p)}{N-1}\,np = \frac{N-n}{N-1}\,npq$$

2.2.4 PROBLEMAS QUE PRESENTA EL METODO DE CALCULO DE LOS CUMULANTES.

El método hasta ahora empleado ha sido efectivo para el cálculo de los cumulantes de primer y segundo orden.

Este método no es factible para los cumulantes de tercer orden u orden superior ya que mediante él no podemos obtener ecuaciones resolubles en dichos cumulantes.

Como ya ha sido apuntado anteriormente el problema sobre la derivabilidad de (2.33) está en las funciones $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$.

Para obtener las ecuaciones en los cumulantes de tercer orden según el gráfico (2.36 bis), tendremos que derivar (2.33) respecto de α_i y α_j $(i\neq j)$ y por tanto tendremos que derivar $f_i(\alpha)$ y $g_i(\alpha)$ respecto de ambas variables.

Si tomamos límite en $f_i(\alpha)$ cuando α_k tiende a cero, para toda variable α_k distinta de las variables α_i y α_j, los sumandos de $f_i(\alpha)$ se reducen a la función $-e^{\alpha_i}$ (extensión continua en $\alpha_i=0$) que es derivable, salvo un sumando que dependerá de las dos variables α_i, α_j

$$f(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i})}{e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}}$$

Puesto que $f(\alpha_i, \alpha_j)$ no es una función derivable conjuntamente en (0,0), las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha_i\ \partial\alpha_j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial\alpha_j\ \partial\alpha_i}$$

no tienen por qué coincidir.

Vamos a calcular ambas y obtendremos por los dos caminos que

(2.33) da lugar a ecuaciones con coeficientes infinitos y por tanto irresolubles.

Derivando $f(\alpha_i, \alpha_j)$ respecto de α_i y posteriormente respecto de α_j se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \frac{2e^{2\alpha_i+\alpha_j} - e^{\alpha_i+\alpha_j} - e^{3\alpha_i}}{(e^{\alpha_i} - e^{\alpha_j})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_j} = \frac{2e^{2\alpha_i+2\alpha_j} - e^{\alpha_i+2\alpha_j} - e^{2\alpha_i+\alpha_j}}{(e^{\alpha_i} - e^{\alpha_j})^3}$$

función que no es continua en (0,0) y por tanto los límites reiterados no tienen por qué coincidir, y aunque uno de ellos sea infinito podría ser que el otro no lo fuera. Sin embargo

$$\lim_{\alpha_i \to 0} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_j} = \frac{-e^{\alpha_j}}{(1-e^{\alpha_j})^2} \qquad \lim_{\alpha_j \to 0} \frac{-e^{\alpha_j}}{(1-e^{\alpha_j})^2} = -\infty$$

$$\lim_{\alpha_j \to 0} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_j} = \frac{e^{\alpha_i}}{(1-e^{\alpha_i})^2} \qquad \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{e^{\alpha_i}}{(1-e^{\alpha_i})^2} = \infty$$

De lo anterior se tiene que, tomemos los límites reiterados en un orden u otro la derivada de (2.33) respecto de α_i y α_j, en dicho orden, no nos proporciona una ecuación con coeficientes finitos en los cumulantes de orden menor o igual a tres.

Al no ser la función $f(\alpha_i, \alpha_j)$ derivable en (0,0) puede ser que la derivada respecto de α_j y α_i, en este orden, nos proporcione en cero una ecuación con coeficientes finitos y de ahí que fuera posible obtener los cumulantes de tercer orden.

Si derivamos respecto de α_j y α_i se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = \frac{e^{\alpha_i+\alpha_j} - e^{\alpha_j+2\alpha_i}}{(e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_j\, \partial \alpha_i} = \frac{2e^{2\alpha_j+2\alpha_i} - e^{2\alpha_j+\alpha_i} - e^{\alpha_j+2\alpha_i}}{(e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})^3}$$

que coincide con $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_j}$, por tanto tomando límites reiterados en cualquier orden se obtendría una ecuación en los cumulantes de orden menor o igual a tres con coeficientes infinitos.

Se observa fácilmente que al ir derivando $f(\alpha_i,\alpha_j)$, y lo mismo pasa con $g_i(\alpha)$, el cero del denominador aumenta de orden sin que aumente el del numerador, lo que da lugar a que cuando $\alpha_i \to 0$ $i=1,\ldots,n$ se obtenga un límite infinito. Este problema no aparecía cuando se calculaban los cumulantes de segundo orden porque previamente se tomaban límites reiterados y la función de una variable resultante se extendía a una función derivable en cero que posteriormente se derivaba y evaluaba en cero.

Si aquí previamente a la diferenciación respecto de la segunda variable se toma límite cuando la variable respecto de la que primero se derivó tiende a cero se consigue disminuir el orden del cero del denominador pero no es posible extenderla por continuidad en cero pues la discontinuidad no es evitable sino un punto en el infinito.

$$\lim_{\alpha_i \to 0} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \frac{2e^{\alpha_j} - e^{\alpha_j} - 1}{(1-e^{\alpha_j})^2} = \frac{e^{\alpha_j}-1}{(e^{\alpha_j}-1)^2} = \frac{1}{e^{\alpha_j}-1} \qquad ; \alpha_j \neq 0$$

función no derivable en $\alpha_j=0$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{e^{\alpha_j}-1}\right)}{\partial \alpha_j} = \frac{-e^{\alpha_j}}{(e^{\alpha_j}-1)^2} \qquad \text{si } \alpha_j \neq 0$$

y cuyo límite respecto de α_j cuando α_j tiende a cero es $-\infty$

Análogamente

$$\lim_{\alpha_j \to 0} \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = \frac{e^{\alpha_i}}{1-e^{\alpha_i}}$$

es una función no derivable en cero y tal que el límite de la derivada respecto de α_i $(\alpha_i \neq 0)$ cuando α_i tiende a cero es infinito.

$$\frac{\partial (e^{\alpha_i}/1-e^{\alpha_i})}{\partial \alpha_i} = \frac{e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i}) + e^{2\alpha_i}}{(1-e^{\alpha_i})^2} \xrightarrow[\alpha_i \to 0]{} \infty$$

Para evitar este problema en el último capítulo extenderemos (2.33) a puntos $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ con uno o varios pares de variables verificando $\alpha_i=\alpha_j$ $i\neq j$, de forma análoga a como se extiende la siguiente ecuación en este sencillo ejemplo.

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x+2 \qquad \text{; para todo x real distinto de 2}$$

$$(x^2-4) = (x+2)(x-2) \qquad \text{; válida en toda la recta real}$$

siendo los miembros de la última ecuación derivables en x=2 donde la primera ecuación no está ni definida.

2.3. ANEXO: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Dada una función f(x) tal que

$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c+) \qquad \lim_{x \to c-} f(x) = f(c-)$$

Si $f(c+)=f(c-)\neq f(c)$, se dice que el punto c es una **discontinuidad evita**

ble. Volviendo a definir f(x) en c como f(c)=f(c+)=f(c-) obtenemos una función continua.(APOSTOL T., 1979, pg.113).

La diferenciación parcial no es, en realidad, un nuevo concepto. Podemos considerar a $f(x_1,\ldots,x_n)$ como una función de una sola variable cada vez, dejando las demás fijas. Es decir, si introducimos una función g definida por $g(x_k)=f(c_1,\ldots,c_{k-1},x_k,c_{k+1},\ldots,c_n)$ entonces la derivada parcial $D_kf(c)$ es precisamente la derivada ordinaria $g'(c_k)$. Esto se enuncia usualmente diciendo que para diferenciar f con respecto a la k-ésima variable, se suponen constantes las otras variables.

Siempre que se generaliza un concepto de R a R^n procuramos conservar las propiedades más importantes del caso unidimensional, por ejemplo, la existencia de derivada en c implica la continuidad en c. Por lo tanto, lo óptimo sería disponer de un concepto de derivada para funciones de varias variables que implicara la continuidad. Para las derivadas parciales no ocurre esto. Una función de n variables puede poseer derivadas parciales en un punto con respecto de cada una de las variables y no ser continua en dicho punto.

La existencia de las derivadas parciales con respecto de cada variable separadamente implica la continuidad con respecto de cada variable separadamente; pero ello no implica necesariamente la continuidad respecto de todas las variables simultáneamente. La dificultad que presentan las derivadas parciales proviene de su misma definición: en ella estamos obligados a considerar sólo una variable cada vez. Las derivadas parciales nos proporcionan una medida de la variación de una función en la dirección de cada uno de los ejes.(APOSTOL T., 1979, pg. 139-140).

Las derivadas parciales constituyen una extensión en cierto modo poco satisfactoria del concepto de derivada unidimensional. Ello nos lleva a una generalización más conveniente que implica la continuidad y, al mismo tiempo, extiende los principales teoremas de la teoría de la derivada unidimensional al caso de las funciones de varias variables. Este concepto se llama **la derivada total.** (APOSTOL T., 1979 pg. 419).

Derivada total. Propiedades

Sea $f: S \to R^m$ una función definida en un conjunto S de R^n. Sea c un punto interior de S y sea B(c;r)una n-bola contenida en S. Sea v un punto de R^n con $||v||<r$, entonces $c+v \in B(c;r)$.

La función f es diferenciable en c si existe una función lineal $T_c: R^n \to R^m$ tal que

$$f(c+v) = f(c) + T_c(v) + ||v|| \, E_c(v)$$

donde $E_c(v)$ tiende a cero cuando v tiende a cero.

La función lineal T_c se llama la **derivada total** de f en c.

Si la derivada total existe, es única.

Si f es diferenciable (tiene derivada total) en c, entonces f es continua en c. (APOSTOL T., 1979, pg. 420-421).

Condición suficiente de diferenciabilidad

Supongamos que una de las derivadas parciales $D_1f,\ldots,D_nf$ existe en c y que las restantes n-1 derivadas parciales existen en una cierta n-bola B(c) y son continuas en c. Entonces f es diferenciable en c.(APOSTOL T., 1979, pg. 432).

Derivadas parciales cruzadas

Las derivadas parciales $D_1f,\ldots,D_nf$ de una función de R^n en R^m son, a su vez, funciones de R^n en R^m y pueden poseer derivadas parciales. Estas se llaman derivadas parciales de segundo orden.

$$D_{rk}f = D_r(D_k f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \, \partial x_k}$$

Si las dos derivadas parciales $D_r f$ y $D_k f$ existen en una n-bola $B(c, \delta)$ y ambas son diferenciables en c, entonces $D_{rk}f(c) = D_{kr}f(c)$.

Si las dos derivadas parciales $D_r f$ y $D_k f$ existen en una n-bola $B(c)$, e igualmente existen las derivadas $D_{rr}f$ y $D_{kk}f$ en c y las $D_{rk}f$ y $D_{kr}f$ que son continuas en c, entonces $D_{rk}f(c)=D_{kr}f(c)$.

Si $D_r f$, $D_k f$ y $D_{kr}f$ son continuas en una n-bola $B(c)$, entonces $D_{rk}f(c)$ existe y es igual a $D_{kr}f(c)$. (APOSTOL T., 1979, pg. 434-436).

CAPITULO 3

REGRESION

3.0.0 INTRODUCCION.

En los capítulos anteriores se han extendido las propiedades más importantes relacionadas con la función hipergeométrica clásica de Gauss y distribuciones generadas por ésta a las funciones hipergeométricas de Lauricella y de argumento matricial, así como a las distribuciones por ellas generadas.

En este capítulo como es obvio no se puede hacer referencia a la regresión de distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de Gauss por su carácter univariante. Estudiamos en primer lugar cómo se obtiene y qué regresión tienen las distribuciones de probabilidad generadas por funciones de Lauricella $F_D^{(n)}$. La técnica antes empleada no puede ser usada para encontrar las ecuaciones de regresión de las distribuciones de probabilidad generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial, ya que como es sabido no se conoce una expresión general para los polinomios zonales. Para hallar las ecuaciones de regresión usaremos una condición necesaria y suficiente para la regresión racional basada en operadores diferenciales. (STEYN, 1956)

Con la ayuda del anterior teorema se encuentran algunas distribuciones que tienen regresión lineal, (entre ellas las generadas por funciones hipergeométricas $F_D^{(n)}$ de Lauricella) y se demuestra que las distribuciones de probabilidad generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial tienen ecuaciones de regresión lineales.

Sin embargo no todas las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas tienen regresión lineal, como se prueba en el apartado 3.2.3.

Basándonos en expresiones obtenidas en el cálculo de las ecuaciones de regresión hallamos la matriz inversa de la matriz de covarianzas asociada a las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial. Es importante conocer esta matriz, pues como se demostrará en el capítulo cuarto, bajo ciertas condiciones estas distribuciones tienden a la distribución normal multivariante.

Por último en un esquema se resumen los principales resultados obtenidos para las distribuciones de probabilidad generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial, junto con sus análogos para las distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella.

3.1.0 REGRESION EN LAS DISTRIBUCIONES GENERADAS POR FUNCIONES DE LAURICELLA $F_D^{(N)}$.

En las páginas siguientes se probará que todas las distribuciones de probabilidad generadas por las series hipergeométricas multivariantes del tipo $F_D^{(n)}$ de Lauricella tienen ecuaciones de regresión lineal.

Sea C.F , donde C es la constante calculada en (2.5) y F la función hipergeométrica de Lauricella dada en (1.49), la función generadora de la distribución de probabilidad $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$. Se sigue de la representación integral (1.54), derivando respecto $t_2,\ldots,t_n$; $x_2,\ldots,x_n$ veces respectivamente y valorando en $t_2=\ldots=t_n=0$, que la función generadora de probabilidad para la variable X_1, para valores constantes de las demás variables $x_2,\ldots,x_n$, está dada por

$$(3.1)\quad \frac{C}{\beta(a,c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ut_1)^{-b_1}(b_2)_{x_2}\cdots(b_n)_{x_n}\,u^{x_2+\ldots+x_n}du$$

dividida por una constante apropiada que será determinada más adelante.

La función generadora de momentos factoriales de X_1 para valores constantes $x_2,\ldots,x_n$ del resto de las variables, se obtiene sustituyendo $t_1=1+\alpha_1$ en (3.1) y es:

$$M(\alpha_1) = \frac{C\ (b_2)_{x_2}\cdots(b_n)_{x_n}}{K\ \beta(a,c-a)}\int_0^1 u^{a+x_2+\ldots+x_n-1}\ .$$

$$.(1-u)^{c-a-1}\ (1-u-u\alpha_1)^{-b_1}\ du =$$

$$= 1 + \frac{b_1\int_0^1 u^{a+x_2+\ldots+x_n}(1-u)^{c-a-b_1-2}du}{\int_0^1 u^{a+x_2+\ldots+x_n-1}(1-u)^{c-a-b_1-1}du}\,\alpha_1 + \ldots$$

Donde los dos primeros términos del desarrollo en serie de $M(\alpha_1)$ se obtienen despues de haber fijado K de forma que el primer término sea la unidad.

$$M(0)=1=\frac{C\,(b_2)_{x_2}\cdots(b_n)_{x_n}}{K\,\beta(a,c-a)}\int_0^1 u^{a+x_2+\cdots+x_n-1}(1-u)^{c-a-b_1-1}\,du$$

y de derivar respecto de α_1 y hacer posteriormente $\alpha_1=0$

$$\frac{d}{d\alpha_1}\left\{\frac{C\,(b_2)_{x_2}\cdots(b_n)_{x_n}}{K\,\beta(a,c-a)}\int_0^1 u^{a+x_2+\cdots+x_n-1}(1-u)^{c-a-1}(1-u-u\alpha_1)^{-b_1}du\right\}=$$

$$\frac{C\,(b_2)_{x_2}\cdots(b_n)_{x_n}}{K\,\beta(a,c-a)}(-b_1)\int_0^1 u^{a+x_2+\cdots+x_n-1}(1-u)^{c-a-1}(-u)(1-u-u\alpha_1)^{-b_1-1}du=$$

(evaluando en $\alpha_1=0$)

$$\frac{b_1\int_0^1 u^{a+x_2+\cdots+x_n}(1-u)^{c-a-b_1-2}du}{\int_0^1 u^{a+x_2+\cdots+x_n-1}(1-u)^{c-a-b_1-1}du}$$

Así la esperanza de X_1 para valores constantes $x_2,\ldots,x_n$ de las restantes variables es

$$\text{(3.2)}\qquad E[X_1/x_2,\ldots,x_n]=\bar{x}_1=b_1\,\frac{\beta(a+x_2+\cdots+x_n+1,\,c-a-b_1-1)}{\beta(a+x_2+\cdots+x_n,\,c-a-b_1)}=$$

$$=b_1\,\frac{\Gamma(a+x_2+\cdots+x_n+1)\;\Gamma(c-a-b_1-1)}{\Gamma(c+x_2+\cdots+x_n-b_1)}\;\frac{\Gamma(c+x_2+\cdots+x_n-b_1)}{\Gamma(a+x_2+\cdots+x_n)\;\Gamma(c-a-b_1)}=$$

$$=b_1\,\frac{a+x_2+\cdots+x_n}{c-a-b_1-1}$$

Por lo tanto la ecuación de regresión de X_1 sobre $X_2,\ldots,X_n$ está dada por

$$(c-a-b_1-1)\,\bar{x}_1=ab_1+b_1x_2+\cdots+b_1x_n$$

y la regresión de X_i sobre $X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n$ vendrá expresada como

$$(3.3) \qquad (c-a-b_i-1)\ \bar{x}_i = ab_i+b_ix_1+\dots+b_ix_{i-1}+b_ix_{i+1}+\dots+b_ix_n$$

Según se vió en el capítulo segundo la distribución hipergeométrica multivariante (2.6) está generada, salvo constante, por una función hipergeométrica de Lauricella $F_D^{(n)}$ y por lo tanto las ecuaciones de regresión de una de las variables X_i sobre todas las demás es lineal y según (3.3) será:

$$(Np_0-n+1+n-(-Np_i)-1)\bar{x}_i=(-n)(-Np_i)-Np_ix_1-\dots-Np_ix_{i-1}-Np_ix_{i+1}-\dots-Np_ix_k$$

$$(Np_0+Np_i)\ \bar{x}_i = nNp_i-Np_ix_1-\dots-Np_ix_{i-1}-Np_ix_{i+1}-\dots-Np_ix_k$$

$$\bar{x}_i = \frac{np_i}{p_0+p_i} - \frac{p_i}{p_0+p_i}\,x_1-\dots-\frac{p_i}{p_0+p_i}\,x_k$$

(en los puntos suspensivos de la anterior expresión falta el sumando correspondiente a x_i), restando en ambos miembros

$$np_i = n-np_0-\dots-np_{i-1}-np_{i+1}-\dots-np_k$$

se obtiene

$$(3.4) \qquad \bar{x}_i-np_i = \frac{-p_i}{p_0+p_i}\,\Big(-n+x_1+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+\dots+x_k+$$

$$+\ \Big(\frac{p_0}{p_i}+1\Big)(n-np_0-\dots-np_{i-1}-np_{i+1}-\dots-np_k)\Big) =$$

$$= \frac{-p_i}{p_0+p_i}\,\big((x_1-np_1)+\dots+(x_{i-1}-np_{i-1})+(x_{i+1}-np_{i+1})+\dots+(x_k-np_k)\big)$$

Estando la anterior ecuación de regresión expresada según la usual forma para la regresión lineal en función de las matrices de medias y de covarianzas, que como sabemos es

$$(3.5)\qquad E[X(2)/X(1)=x(1)] = \mu(2)+\Sigma_{21}\ \Sigma_{11}^{-1}\ (x(1)-\mu(1))$$

donde la variable X, su matriz de medias μ y su matriz de covarianzas Σ estan formadas por las cajas

$$X=(X(1)_{1xp},X(2)_{1xq}),\ \mu=(\mu(1)_{1xp},\mu(2)_{1xq}) \qquad \Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

Σ_{11} (pxp), Σ_{22} (qxq), Σ_{12} (pxq), Σ_{21} (qxp).

Las ecuaciones de regresión en la forma (3.5) para una distribución general generada por una función $F_D^{(n)}$ se obtienen como sigue:

A partir de la ecuación de regresión (3.3)

$$\hat{x}_i = \frac{b_i a + b_i \sum_{j\neq i} x_j}{c-a-b_i-1}$$

restando la esperanza de x_i en ambos miembros

$$\hat{x}_i - \frac{ab_i}{c-a-\sum_1^n b_j-1} = \frac{ab_i + b_i \sum_{j\neq i} x_j}{c-a-b_i-1} - \frac{ab_i}{c-a-\sum_1^n b_j-1}$$

$$(3.5\text{ bis})\qquad (\hat{x}_i-\bar{x}_i) = \frac{-ab_i \sum_{j\neq i} b_j+(c-a-\sum_1^n b_j-1)b_i \sum_{j\neq i} x_j}{(c-a-b_i-1)\ (c-a-\sum_1^n b_j-1)} =$$

$$= \frac{b_i}{c-a-b_i-1}\left(\frac{-\sum_{j\neq i} ab_j}{c-a-\sum_1^n b_j-1} + \sum_{j\neq i} x_j\right) =$$

$$= \frac{b_i}{c-a-b_i-1} \sum_{j\neq i} (x_j-\bar{x}_j)$$

Lamentablemente no puede ser usada esta técnica para encontrar las ecuaciones de regresión de las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial, ya que como hemos repetido varias veces no se conoce ninguna expresión general para los polinomios zonales, y por tanto no se puede conocer el valor de la derivada sobre ellos. La técnica que utilizaremos para el cálculo de las ecuaciones de regresión de estas distribuciones se basa en las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones hipergeométricas de argumento matricial, como se recoge en el siguiente apartado.

3.2.1 REGRESION RACIONAL.

Steyn en su articulo de 1956, da una condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones de regresión sean funciones racionales.

Sea $F(x_1,\ldots,x_k)$ la función de distribución y

$$M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \int\int_{S_k}\cdots\int \exp\left(\sum_1^k \alpha_i x_i\right) dF \tag{3.6}$$

la función generadora de momentos definida en el sentido de Stieltjes, de la distribución de probabilidad $f(x_1,\ldots,x_k)$ que puede ser continua o discreta y definida en el espacio k-dimensional S_k. Entonces una condición necesaria y suficiente para que la ecuación de regresión $\hat{x}_1$ de X_1 sobre $X_2,\ldots,X_k$ sea racional, es decir

$$\hat{x}_1 = \frac{Q(x_2,\ldots,x_k)}{R(x_2,\ldots,x_k)} \tag{3.7}$$

donde Q y R son polinomios, está dada por

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1} R\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\right) M\right]_{\alpha_1=0} = \left[Q\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\right) M\right]_{\alpha_1=0} \tag{3.8}$$

Supuesto que M está definida en una región que incluye $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$ y que condiciones para la diferenciación bajo el signo integral se cumplen. (Véase APOSTOL T., 1979, pg. 203)

Es decir, si y solo si existen dos operadores diferenciales R y Q que satisfacen (3.8) la regresión es racional. En los operadores

$R(\frac{\partial}{\partial\alpha_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial\alpha_k})$ y $Q(\frac{\partial}{\partial\alpha_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial\alpha_k})$ que operan sobre M debe entenderse que

$(\frac{\partial}{\partial\alpha_i})^r \equiv \frac{\partial^r}{\partial\alpha_i^r}$ y que $[\quad]_{\alpha_1=0}$ significa que después de que todas las derivadas sobre M sean hechas, se realiza la sustitución $\alpha_1=0$.

Claramente (3.8) es una identidad en $\alpha_2,\ldots,\alpha_k$.

Una condición similar es válida para la regresión de X_i sobre las demás variables.

3.2.2 ALGUNAS DISTRIBUCIONES DISCRETAS CON REGRESION LINEAL.

En este párrafo se consideran algunos ejemplos de distribuciones discretas que tienen ecuaciones de regresión lineal, para ilustrar el teorema anterior.

(a) La distribución de Bernouilli multivariante (o multinomial) tiene por función generadora de momentos

$$M=E(e^{\alpha' X})=\sum_{x_1}\ldots\sum_{x_k} e^{\alpha_1 x_1}\ldots e^{\alpha_k x_k}\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!(n-x_i)!}p_1^{x_1}\ldots p_k^{x_k}p_0^{(n-\sum x_i)} =$$

$$= (p_0+\sum_{j=1}^{k} p_j e^{\alpha_j})^n$$

donde $p_0=1-\sum_{j=1}^{k} p_k$

Ya que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j} M = n(p_0+\sum_1^k p_i e^{\alpha_i})^{n-1} p_j e^{\alpha_j}$$

claramente se sigue después de sustituir $\alpha_i=0$ que

$$(p_0+p_i)[\frac{\partial}{\partial\alpha_i} M]_{\alpha_i=0} + p_i \sum_{j\neq i} [\frac{\partial}{\partial\alpha_j} M]_{\alpha_i=0} = np_i[M]_{\alpha_i=0}$$

pues

$$(p_0+p_i)np_i(p_0+p_i+\sum_{j\neq i}^{k} p_j e^{\alpha_j})^{n-1}+np_i \sum_{j\neq i}^{k} p_j e^{\alpha_j}(p_0+p_i+\sum_{j\neq i}^{k} p_j e^{\alpha_j})^{n-1} =$$

$$= np_i(p_0+p_i+\sum_{j\neq i}^{k} p_j e^{\alpha_j})^{n-1}\{(p_0+p_i)+\sum_{j\neq i}^{k} e^{\alpha_j} p_j\} =$$

$$= np_i(p_0+p_i+\sum_{j\neq i}^{k} p_j e^{\alpha_j})^{n} = np_i[M]_{\alpha_i=0}$$

De modo que la ecuación de regresión de X_i fijadas las otras variables está dada por

$$\hat{x}_i = \frac{p_i}{p_0+p_i}(n-\sum_{j\neq i} x_j) \tag{3.9}$$

ó $$\hat{x}_i-np_i = \frac{-p_i}{p_0+p_i}\sum_{j\neq i}(x_j-np_j)$$

(b) La distribución de probabilidad multivariante de Pascal (o multinomial negativa) tiene por función generadora de momentos

$$M = p_0^{m+1}(1-\sum_1^k p_i e^{\alpha_i})^{-(m+1)}$$

De la que se sigue como antes que

$$(1-p_i)\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_i} M\right]_{\alpha_i=0} - p_i \sum_{j\neq i}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j} M\right]_{\alpha_i=0} = (m+1)p_i[M]_{\alpha_i=0}$$

y por tanto

$$\hat{x}_i = \frac{p_i}{1-p_i}\{(m+1)+\sum_{j\neq i} x_j\} \tag{3.10}$$

$$\text{ó} \quad \hat{x}_i-\bar{x}_i = \frac{p_i}{1-p_i}\sum_{j\neq i}(x_j-\bar{x}_j)$$

donde $\bar{x}_j=(m+1)\dfrac{p_j}{p_0}$, $j=1,\ldots,k$

(c) El sistema de distribuciones de probabilidad multivariantes generadas por la función hipergeométrica de Lauricella $F_D^{(n)}$ (STEYN, 1955), tiene regresión lineal según se demostró en el apartado 3.1.0 de este capítulo. Volvemos a demostrar dicha propiedad con la ayuda del teorema enunciado en el apartado 3.2.1.

C.$F_D^{(n)}$ verifica también las ecuaciones diferenciales (1.54 bis) satisfechas por $F_D^{(n)}$, por lo que la función generadora de momentos obtenida sustituyendo $t_i=e^{\alpha_i}$ $i=1,\ldots,n$ en la función generadora de probabilidad, satisface las ecuaciones

$$(1-e^{\alpha_i})\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j} + \{c-1-(a+b_i)e^{\alpha_i}\frac{\partial M}{\partial\alpha_i} - b_i e^{\alpha_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{\partial M}{\partial\alpha_j} = Mab_i e^{\alpha_i}$$

$$i=1,\ldots,n$$

Haciendo en la anterior ecuación $\alpha_i=0$ se obtiene

$$\{c-1-(a+b_i)\}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_i} M\right]_{\alpha_i=0} = ab_i[M]_{\alpha_i=0} + b_i\sum_{j\neq i}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j} M\right]_{\alpha_i=0}$$

lo que prueba en virtud del apartado 3.2.1 que la ecuación de regresión de X_i sobre las demás variables, está dada por

$$\hat{x}_i = \frac{b_i}{c-a-b_i-1}\,(a+\sum_{j\neq i} x_j)$$

ecuación obtenida anteriormente en (3.3).

Será mediante este método con el que demostraremos que la regresión, para las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial, es lineal.

Según lo que acabamos de adelantar sobre las funciones hipergeométricas de argumento matricial y la regresión (3.3) obtenida para distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$, podría pensarse que toda distribución generada por funciones hipergeométricas tiene regresión lineal. Esto no es cierto, en el siguiente apartado veremos que de las cuatro funciones de Lauricella, F_A, F_B, F_C y F_D, la única que genera distribuciones con regresión lineal es la estudiada $F_D^{(n)}$.

3.2.3 DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE TIPO HIPERGEOMETRICO CON REGRESION NO LINEAL.

Consideraremos funciones hipergeométricas bivariantes por la sencillez de los cálculos. Es bien conocido (BAILEY, 1935) que hay cuatro funciones hipergeométricas en dos variables. Estas funciones son las llamadas funciones hipergeométricas de Appell cuya extensión a n variables constituyen las conocidas funciones F_A, F_B, F_C y F_D de Lauricella.

Las cuatro funciones de Apell se definen respectivamente como (1.40), (1.41), (1.42) y (1.43) según vimos. La función $F_D^{(n)}$ es la que se corresponde con la F_1 de Appell, las otras tres F_2, F_3 y F_4 dan lugar a las funciones $F_A^{(n)}$, $F_B^{(n)}$ y $F_C^{(n)}$ respectivamente.

La función F_1 como hemos visto genera distribuciones con regresión lineal.

Las series F_2, F_3 y F_4 y sus regiones de convergencia han sido estudiadas por varios autores. Para las dos variables de las que dependen igual a uno, estas series no convergen en general, pero aquí se supondrá que estas series son finitas o que los parámetros son tales que convergen cuando las variables valen uno.

Si $C_2.F_2$, donde $C_2^{-1}=F_2(a,b,b';c,c';1,1)$, es una función generadora de probabilidad de una distribución de probabilidad discreta , entonces ya que F_2 satisface la ecuación, (STEYN, 1956),

$$t(1-t)\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - tu\frac{\partial^2 F_2}{\partial t\,\partial u} + \{c-(a+b+1)t\}\frac{\partial F_2}{\partial t} - bu\frac{\partial F_2}{\partial u} - abF_2 = 0$$

se sigue sustituyendo $t=e^{\alpha}$, $u=e^{\beta}$, que la función generadora de momentos M_2 satisface la ecuación

$$(1-e^{\alpha})\frac{\partial^2 M_2}{\partial \alpha^2} - e^{\alpha}\frac{\partial^2 M_2}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \{c-(a+b+1)e^{\alpha}\}\frac{\partial M_2}{\partial\alpha} - be^{\alpha}\frac{\partial M_2}{\partial\beta} - e^{\alpha}abM_2 = 0$$

de forma que

$$(c-a-b-1)\left[\frac{\partial M_2}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0} - \left[\frac{\partial^2 M_2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right]_{\alpha=0} = b\left[\frac{\partial M_2}{\partial\beta}\right]_{\alpha=0} + ab[M_2]_{\alpha=0}$$

La ecuación de regresión de x sobre y está así dada por

$$\hat{x} = \frac{b}{c-a-b-1-y}(a+y) \qquad (3.14)$$

análogamente la regresión de y sobre x es

(3.14 bis) $$\hat{y} = \frac{b'}{c'-a-b'-1-x}(a+x)$$

Consideremos ahora $C_3.F_3$, donde $C_3^{-1}=F_3(a,a';b,b';c;1,1)$, como una función generadora de probabilidad. De la ecuación diferencial que satisface (STEYN, 1956)

$$t(1-t)\frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} + u\frac{\partial^2 F_3}{\partial t\,\partial u} + \{c-(a+b+1)t\}\frac{\partial F_3}{\partial t} = abF_3$$

se sigue que la función generadora de momentos M_3 satisface la ecuación

$$(1-e^{\alpha})\frac{\partial^2 M_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 M_3}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \{(c-1)-(a+b)e^{\alpha}\}\frac{\partial M_3}{\partial \alpha} = e^{\alpha}\,abM_3$$

tal que

$$(c-a-b-1)\left[\frac{\partial M_3}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} + \left[\frac{\partial^2 M_3}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right]_{\alpha=0} = ab[M_3]_{\alpha=0}$$

y las ecuaciones de regresión son

(3.15) $$\hat{x} = \frac{ab}{c-a-b-1+y} \qquad \hat{y} = \frac{a'b'}{c-a'-b'-1+x}$$

También partiendo de la ecuación diferencial

$$t(1-t)\frac{\partial^2 F_4}{\partial t^2} - 2tu\frac{\partial^2 F_4}{\partial t\,\partial u} - u^2\frac{\partial^2 F_4}{\partial u^2} + \{c-(a+b+1)t\}\frac{\partial F_4}{\partial t} - (a+b+1)u\frac{\partial F_4}{\partial u} = abF_4$$

se tiene que si $C_4.F_4$, donde $C_4^{-1}=F(a;b;c,c';1,1)$, es una función generadora de probabilidad, entonces la función generadora de momentos satisface la ecuación

$$(1-e^{\alpha})\frac{\partial^2 M_4}{\partial\alpha^2} -2e^{\alpha}\frac{\partial^2 M_4}{\partial\alpha\,\partial\beta} -e^{\alpha}\frac{\partial^2 M_4}{\partial\beta^2} +\{c-1-(a+b)e^{\alpha}\}\frac{\partial M_4}{\partial\alpha} -(a+b)e^{\alpha}\frac{\partial M_4}{\partial\beta} = abM_4e^{\alpha}$$

de forma que

$$(c-a-b-1)\left[\frac{\partial M_4}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0} - 2\left[\frac{\partial^2 M_4}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right]_{\alpha=0} =$$

$$= ab[M_4]_{\alpha=0} + (a+b)\left[\frac{\partial M_4}{\partial\beta}\right]_{\alpha=0} +\left[\frac{\partial^2 M_4}{\partial\beta^2}\right]_{\alpha=0}$$

dando origen a las ecuaciones de regresión

$$\hat{x} = \frac{ab+(a+b)y+y^2}{c-a-b-1-2y} = \frac{(a+y)\ (b+y)}{c-a-b-1-2y} \tag{3.16}$$

$$\hat{y} = \frac{(a+x)\ (b+x)}{c'-a-b-1-2x}$$

3.3.1 REGRESION EN LAS DISTRIBUCIONES GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL.

Usando el apartado 3.2.1 de este capítulo vamos a demostrar que toda distribución de probabilidad generada por $C.{}_2F_1(a,b;c;Y)$, donde C está dada por (2.15) y ${}_2F_1(a,b;c;Y)$, por (1.73), tiene ecuaciones de regresión lineales.

${}_2F_1(a,b;c;Y)$ es solución de cada una de las m ecuaciones en derivadas parciales de (1.93). Es claro que también $C.{}_2F_1(a,b;c;Y)$ será solución de las mismas. De lo anterior, la función generadora de momentos, obtenida sustituyendo $e^{\alpha_i}=y_i$ $i=1,\dots,n$, en la función generadora de probabilidad, satisface las ecuaciones (2.32).

A partir de (2.32), para $\alpha_i=0$ obtenemos

$$(3.17) \qquad \left[(c-a-b-1) \frac{\partial M}{\partial \alpha_i} \right]_{\alpha_i=0} = \left[\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \frac{\partial M}{\partial \alpha_j} + abM \right]_{\alpha_i=0}$$

ecuación en α_j $j\neq i$, válida para $\alpha_j\neq 0$ $j\neq i$ y también se llega a (3.17) cuando algún α_j $j\neq i$ es nulo si se extiende por continuidad el resultado obtenido al evaluar (2.32) para $\alpha_i=0$.

De (3.17) se tiene que la ecuación de regresión de X_i fijadas las demás variables es

$$(3.18) \qquad \hat{x}_i = \frac{ab+\tfrac{1}{2} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j}{c-a-b-1}$$

que por tanto es lineal. (HERMOSO J.A., 1985).

Debe resaltarse aquí la gran analogía que guarda con la ecuación de regresión (3.3) para distribuciones de probabilidad generadas por funciones hipergeométricas $F_D^{(n)}$ de Lauricella, que obtiene Steyn (1956).

$$\hat{x}_i = \frac{ab_i+b_i \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_j}{c-a-b_i-1}$$

Como es conocido, cuando la regresión es lineal sus ecuaciones pueden escribirse en función del vector de medias y de la matriz de covarianzas según (3.5).

En el caso que nos ocupa se conoce, por los cálculos anteriormente realizados, que la regresión es lineal y ademas en el capítulo segundo calculamos en (2.39), (2.48) y (2.49) los momentos de primer y segundo orden. Así que es posible llegar de nuevo a (3.18) a partir de (3.5).

Para facilitar los cálculos, sobre todo de Σ_{11}^{-1}, tomamos m=2. Según (2.48) y (2.49)

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2} = \frac{1}{2(c-a-b-\frac{1}{2}m)} \tag{3.19}$$

que para m=2 es

$$\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2} = \frac{1}{2(c-a-b-1)}$$

De (2.39), para m=2 se tiene

$$\mu(1) = \mu(2) = \bar{x}_1 = \frac{ab}{c-a-b-(3/2)}$$

Sustituyendo todo lo anterior en (3.5) se obtiene la ecuación (3.18).

$$\hat{x}_1 = \frac{ab}{c-a-b-(3/2)} + \frac{1}{2(c-a-b-1)}\left(x_2 - \frac{ab}{c-a-b-(3/2)}\right) \tag{3.20}$$

$$\frac{\{2ab(c-a-b-1)\} - ab}{2(c-a-b-1)\,(c-a-b-(3/2))} = \frac{2ab(c-a-b-(3/2))}{2(c-a-b-1)(c-a-b-(3/2))} = \frac{ab}{c-a-b-1}$$

por tanto

$$\hat{x}_1 = \frac{ab+\frac{1}{2}\,x_2}{c-a-b-1}$$

que es (3.18) para m=2.

Recíprocamente (3.18) puede escribirse en la forma (3.5) o (3.20) si m=2.

Restando a los dos miembros de (3.18) $\bar{x}_i$ se tiene

$$(3.21) \qquad (x_i-\bar{x}_i) = \frac{ab}{c-a-b-1} - \frac{ab}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)} + \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{j\neq i} x_j}{c-a-b-1} =$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2}(m+1)+1)ab}{(c-a-b-1)(c-a-b-\frac{1}{2}(m+1))} + \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{j\neq i} x_j}{c-a-b-1} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(m-1)ab}{(c-a-b-1)(c-a-b-\frac{1}{2}(m+1))} + \frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{j\neq i} x_j}{c-a-b-1} =$$

$$= \frac{1}{2(c-a-b-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (x_j-\bar{x}_j)$$

teniendo presente que $\bar{x}_j=\bar{x}_i$ $i\neq j$, según se vio en al capítulo segundo, por la simetría de los cumulantes.

3.3.2 CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE COVARIANZAS.

En muchas distribuciones es esencial conocer tanto su matriz de covarianzas como su inversa, por ejemplo en la normal multivariante.

En este apartado se calcula la inversa de la matriz de covarianzas de la distribución generada por una función hipergeométrica de argumento matricial, que como se verá en el capítulo cuarto tiende bajo ciertas condiciones a la distribución normal multivariante.

Consideremos Σ dividida en las siguientes cajas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

de dimensiones Σ_{11} (m-1)x(m-1), Σ_{12} (m-1)x1, Σ_{21} 1x(m-1), Σ_{22} 1x1.

A partir de (3.5) y (3.21) se desprende que $\Sigma_{21}\cdot\Sigma_{11}^{-1}$ es el vector cuyas m-1 coordenadas son todas iguales a

$$\frac{1}{2(c-a-b-1)} \tag{3.22}$$

Por la simetría de los cumulantes Σ_{11} es cualquier caja sobre la diagonal principal de Σ de dimensión (m-1)x(m-1), en particular la caja formada por las m-1 primeras filas y columnas. Por la simetría antes aludida sabemos que todos los elementos de la diagonal de Σ son iguales (y los notaremos σ^2) y también son iguales entre sí los elementos que están fuera de la diagonal (que notaremos σ_{xy}). Si $\sigma^2=\sigma_{xy}$, la matriz Σ no sería invertible; así pues a partir de ahora se supone $\sigma^2\neq\sigma_{xy}$.

La inversa de Σ escrita por cajas tendrá la forma

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & \bar{\Sigma}_{12} \\ \bar{\Sigma}_{21} & \bar{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

siendo las dimensiones de las cajas las mismas que para las cajas de la matriz Σ.

Debido a la forma de Σ, Σ^{-1} también tendrá iguales todos los elementos de su diagonal (que notaremos $\bar{\sigma}^2$) y los de fuera de la diagonal (que notaremos $\bar{\sigma}_{xy}$).

Según las expresiones que permiten calcular la inversa de una matriz escrita por cajas

$$\bar{\Sigma}_{11} = \Sigma_{11.2}^{-1} \qquad \Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\cdot\Sigma_{22}^{-1}\cdot\Sigma_{21}$$

$$\bar{\Sigma}_{22} = \Sigma^{-1}_{22.1} \qquad \Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\cdot\Sigma^{-1}_{11}\cdot\Sigma_{12}$$

$$\bar{\Sigma}_{12} = -\Sigma^{-1}_{11}\cdot\Sigma_{12}\cdot\Sigma^{-1}_{22.1} = -\Sigma^{-1}_{11.2}\cdot\Sigma_{12}\cdot\Sigma^{-1}_{22}$$

$$\bar{\Sigma}_{21} = -\Sigma^{-1}_{22}\cdot\Sigma_{21}\cdot\Sigma^{-1}_{11.2} = -\Sigma^{-1}_{22.1}\cdot\Sigma_{21}\cdot\Sigma^{-1}_{11}$$

$$\bar{\Sigma}_{22} = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\cdot\Sigma^{-1}_{11}\cdot\Sigma_{12})^{-1} = \left(\sigma^2 - (m-1)\sigma_{xy}\frac{1}{2(c-a-b-1)}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{2(c-a-b-1)}{2(c-a-b-1)\sigma^2 - (m-1)\sigma_{xy}}$$

Puesto que todos los elementos de la diagonal de Σ^{-1} son iguales

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{2(c-a-b-1)}{2(c-a-b-1)\sigma^2-(m-1)\sigma_{xy}} \tag{3.23}$$

Por otro lado $\bar{\sigma}_{xy}$ es cualquier elemento de $\bar{\Sigma}_{12}$ o de $\bar{\Sigma}_{21}$.

$$\bar{\Sigma}_{12} = -\Sigma^{-1}_{11}\cdot\Sigma_{12}\cdot\Sigma^{-1}_{22.1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\bar{\sigma}^2}{2(c-a-b-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\dfrac{\bar{\sigma}^2}{2(c-a-b-1)} \end{pmatrix}_{(m-1)x1}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{-1}{2(c-a-b-1)\sigma^2 - (m-1)\,\sigma_{xy}} \tag{3.24}$$

Teniendo en cuenta (2.46)

$$\sigma^2 = 2(c-a-b-\tfrac{1}{2}m)\sigma_{xy}$$

y sustituyendo en (3.23) y (3.24) queda

$$\bar{\sigma}^{2} = -2(c-a-b-1)\,\bar{\sigma}_{xy} \tag{3.25}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{-1}{\sigma_{xy}\left(4(c-a-b-1)(c-a-b-\frac{1}{2}m)-(m-1)\right)}$$

3.4.0 ESQUEMA-RESUMEN DE LOS CAPITULOS 2 Y 3.

Seguidamente agrupamos los principales resultados obtenidos en este capítulo y el anterior para poder observar la gran analogía y también las diferencias que hay entre las distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$ de Lauricella y ${}_2F_1(a,b;c;X)$ de argumento matricial.

	$F_D^{(N)}$ DE LAURICELLA	${}_2F_1(A,B;C;X)$ MATRICIAL
FUNCION GENERADORA DE PROBABILIDAD	$C\, F_D^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c;x_1,\dots,x_n)$ (2.5) $C = \dfrac{\beta(a,c-a)}{\beta(a,c-a-\Sigma b_i)} = \dfrac{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-\Sigma b_i)}{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-\Sigma b_i)} = \dfrac{(c-a-\Sigma b_i)_a}{(c-a)_a}$	$C\ {}_2F_1(a,b;c;X)$ (2.15) $C = \dfrac{\beta_m(a,c-a)}{\beta_m(a,c-a-b)} = \dfrac{\Gamma_m(c-a)\ \Gamma_m(c-b)}{\Gamma_m(c)\ \Gamma_m(c-a-b)} = \dfrac{(c-a-b)_{(a,\dots,a)}}{(c-a)_{(a,\dots,a)}}$
ESPERANZA	(2.25) $E(X_i) = \dfrac{ab_i}{c-a-\sum_{j=1}^{n} b_j - 1}$	(2.39) $K_i^1 = \bar{x}_i = \dfrac{ab}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)}$
VARIANZA	(2.27) $\sigma^2(X_i) = \dfrac{ab_i\left(c-\sum_{j\neq i} b_j - 1 + \dfrac{ab_i}{c-a-\Sigma b_i - 1}\right)}{(c-a-\Sigma b_j - 2)(c-a-\Sigma b_j - 1)}$	(2.48) $\sigma^2 = \dfrac{ab+(a+b)\bar{x}+\bar{x}^2}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1} = \dfrac{(\bar{x}+a)\ (\bar{x}+b)}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1}$ (2.50) $\sigma^2 = \dfrac{ab\left(c-\frac{1}{2}(m+1) + \dfrac{ab}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)}\right)}{(c-a-b-\frac{1}{2}(m+1))\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1)}$
COVARIANZA	(2.28) $\dfrac{b_j\ E(X_i) + E(X_i)\ E(X_j)}{(c-a-\Sigma b_k - 2)} = \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$	(2.49) $\sigma_{xy} = \dfrac{ab+(a+b)\bar{x}+\bar{x}^2}{2\ (c-a-b-\frac{1}{2}m)\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1)}$ (2.51) $\sigma_{xy} = \dfrac{ab\left(c-\frac{1}{2}(m+1) + \dfrac{ab}{c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)}\right)}{2\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1)-1)\ (c-a-b-\frac{1}{2}(m+1))\ (c-a-b-\frac{1}{2}m)}$
REGRESION	(3.3) $\hat{x}_i = \dfrac{ab_i + b_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} x_j}{c-a-b_i-1}$ (3.5 bis) $(\hat{x}_i - \bar{x}_i) = \dfrac{b_i}{c-a-b_i-1} \sum_{j\neq i} (x_j - \bar{x}_j)$	(3.18) $\hat{x}_i = \dfrac{ab + \frac{1}{2}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} x_j}{c-a-b-1}$ (3.21) $(x_i - \bar{x}_i) = \dfrac{1}{2(c-a-b-1)} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m} (x_j - \bar{x}_j)$

CAPITULO 4

DISTRIBUCION LIMITE

4.0.0 INTRODUCCION.

En este capítulo demostraremos que tanto las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas $F_D^{(n)}$ de Lauricella como las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial tienden, bajo ciertas condiciones, a la distribución normal multivariante.

La técnica empleada para demostrar que las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial tienden a la distribución normal multivariante es análoga a la que utiliza Steyn (1955) para demostrar que las distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$ tienden a la normal multivariante. Es decir, demostraremos que los cumulantes de orden mayor a dos tienden a anularse.

En el caso de distribuciones generadas por funciones hipergeométricas de argumento matricial nos encontraremos con los problemas sobre derivabilidad expuestos en el apartado 2.2.4, que serán resueltos según se apuntó entonces.

4.1.1 CARACTERIZACION DE LA DISTRIBUCION NORMAL.

Demostraremos que una ley es Normal cuando todos sus cumulantes de orden mayor que dos son nulos.

Efectivamente la función generadora de momentos de una variable X, $N_m(\mu,\Sigma)$, es

$$M = e^{t'\mu+\frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

donde t es un vector mx1. Por tanto su función generadora de cumulantes será

$$L = \sum_{r_1,\ldots,r_m=0}^{\infty} \frac{t_1^{r_1}\ldots t_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} K_{r_1,\ldots,r_m} = t'\mu+\tfrac{1}{2}t'\Sigma t$$

o sea, los coeficientes $K_{r_1,\ldots,r_m}$ para $\sum_1^m r_i>2$ son cero.

Recíprocamente si $K_{r_1,\ldots,r_m}$ es cero para $\sum_1^m r_i>2$ entonces la función generadora de cumulantes es $t'n+\frac{1}{2}t'Vt$ para algún vector n de dimensión mx1 y matriz V de dimensión mxm, y por consiguiente se distribuirá según una normal multivariante $N_m(n,V)$.

4.2.1 DISTRIBUCION LIMITE DE DISTRIBUCIONES GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS $F_D^{(N)}$ DE LAURICELLA.

Consideramos en lo que sigue la forma límite de la distribución de probabilidad $\Phi\equiv\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ generada por una función del tipo $F_D^{(n)}$, cuando los valores absolutos de $a,b_1,\ldots,b_n$ y c tienden todos a infinito pero con el mismo orden, es decir todos con orden O(a).

Como ya sabemos la función $F_D^{(n)}$ de Lauricella satisface el sistema de ecuaciones diferenciales (1.54 bis). Sustituyendo $t_i=e^{\alpha_i}$ $i=1,\ldots,m$ en el anterior sistema de ecuaciones y teniendo presente que

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}=\frac{\partial M}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial t_i} \qquad \frac{\partial \alpha_i}{\partial t_i}=\frac{\partial \ln t_i}{\partial t_i}=\frac{1}{t_i}=\frac{1}{e^{\alpha_i}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_i^2}=\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha_i^2}(\partial\alpha_i/\partial t_i)^2-\frac{\partial M}{\partial \alpha_i}\frac{1}{e^{2\alpha_i}}$$

se sigue que la función generadora de momentos

$$M=M(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\sum_{x_1}\ldots\sum_{x_n}\Phi\exp\left(\sum_1^n\alpha_i x_i\right)$$

satisface el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$(1-e^{\alpha_i})\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}+[(c-1)-(a+b_i)e^{\alpha_i}]\frac{\partial M}{\partial\alpha_i}-b_ie^{\alpha_i}\sum_{j\neq i}\frac{\partial M}{\partial\alpha_j}=Mab_ie^{\alpha_i}$$

$$i=1,\ldots,n$$

de forma que la función generadora de cumulantes $L=\ln M$ satisface las ecuaciones

$$(4.1)\qquad (1-e^{\alpha_i})\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}+\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}\frac{\partial L}{\partial\alpha_j}\right)+[(c-1)-(a+b_i)e^{\alpha_i}]\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}-$$

$$-b_ie^{\alpha_i}\sum_{j\neq i}\frac{\partial L}{\partial\alpha_j}=ab_ie^{\alpha_i}\qquad i=1,\ldots,n$$

pues

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial\alpha_i}}{M}\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}=\frac{\dfrac{\partial^2 M}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}M-\dfrac{\partial M}{\partial\alpha_i}\dfrac{\partial M}{\partial\alpha_j}}{M^2}$$

Haciendo $\alpha_i=0$ $i=1,\ldots,n$ y cambiando

$$\frac{\partial^{s_1}}{\partial\alpha_1^{s_1}}\cdots\frac{\partial^{s_n}}{\partial\alpha_n^{s_n}}L \qquad \text{por} \qquad K_{s_1,\ldots,s_n}$$

cumulante de orden s, $s=s_1+\ldots+s_n$, se sigue que (4.1) proporciona n ecuaciones lineales en los n cumulantes de primer orden y que cada cumulante es de orden O(a).

$$(4.2) \qquad (c-a-b_i-1)\, K_{\underset{i}{0,\ldots,1,\ldots,0}} - b_i \sum_{j\neq i} K_{\underset{j}{0,\ldots,1,\ldots,0}} = ab_i$$

Similarmente considerando las n^r ecuaciones que se obtienen diferenciando el sistema (4.1), r_1 veces respecto de $\alpha_1,\ldots,$ r_n veces respecto de α_n, donde $r_1+\ldots+r_n=r-1$ (para todos las posibles derivadas de orden r-1 de las ecuaciones (4.1)) y sustituyendo después $\alpha_i=0$ $i=1,\ldots,n$, obtenemos, ya que $(1-e^{\alpha_i})$ se anula, que las n^r ecuaciones en los n^r cumulantes de orden r tienen la forma

$$(4.3) \quad \sum K_{s_1,\ldots,s_n}.O(a) + \sum (\text{cum. de orden}<r)(\text{cum. de orden}<r)O(1) +$$
$$+ \sum (\text{cum. de orden}<r).O(a) = \text{una constante de orden } O(a^2) \text{ a lo más}$$

donde $s_1+\ldots+s_n=r$.

Ya que los cumulantes de primer orden según (4.2) son de orden O(a) se sigue por inducción que todos los cumulantes son de orden O(a) a lo sumo. Luego como las varianzas y covarianzas (o cumulantes de segundo orden) de Φ son de orden O(a) se tiene que haciendo un apropiado cambio de origen y de escala que todos los cumulantes de orden mayor a dos serán de orden $O(a^{-1})$ a lo sumo y pueden menospreciarse para grandes valores de los parámetros.

Desarrollemos lo que acabamos de afirmar.

$$M_X(t) = E(e^{t'X}) \qquad L_X(t) = \ln M_X(t) \qquad t_{mx1} \quad X_{mx1}$$

Sea $\mu=E(X)$, realizamos el siguiente cambio de origen y de escala

$$Y = \frac{X-\mu}{\sqrt{a}}$$

Las funciones generadoras de momentos y de cumulantes de la nueva variable Y son

$$M_Y(t) = E(e^{t'Y}) = e^{-(t'\mu)/\sqrt{a}}\, E[e^{(t'X)/\sqrt{a}}]$$

$$L_Y(t) = \ln M_Y(t) = \frac{-t'\mu}{\sqrt{a}} + L_X[\frac{t'}{\sqrt{a}}]$$

Derivando $L_Y(t)$ y posteriormente haciendo t=0 (para calcular los cumulantes de Y) se obtiene que para r>2 los cumulantes de orden r de Y son del tipo $K_r(X)/a^{r/2}$ ($K_r(X) \equiv$ cumulante de orden r para la variable X) y por tanto de orden $O(a)/O(a^{r/2})$, verificándose

$$\frac{O(a)}{O(a^{r/2})} \leq \frac{1}{O(a^{1/2})} \xrightarrow[a\uparrow\infty]{} 0$$

Como los cumulantes de orden 3, y cualquier otro de orden impar, se anulan pues el cambio de origen ha sido determinado por $E(X)=\mu$, se tiene que los cumulantes $K_4(Y)$ son de orden $O(a^{-1})$ y los de orden superior a cuatro según lo anterior son menores aún que $O(a^{-1})$.

Por tanto según la caracterización 4.1.1 se tiene que la distribución límite es normal y por tanto para valores de $a,b_1,\ldots,b_n$ y c suficientemente grandes podemos aproximar Φ por una distribución $N_m(\mu,\Sigma)$ siendo los elementos de las matrices μ y Σ los hallados en (2.25), (2.27) y (2.28).

4.2.2 DISTRIBUCION LIMITE DE DISTRIBUCIONES GENERADAS POR FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS DE ARGUMENTO MATRICIAL.

Vamos a demostrar que la forma límite de la distribución de probabilidad $\Phi\equiv\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ generada, salvo factor constante, por una función hipergeométrica de argumento matricial ${}_2F_1(a,b;c;X)$ tiende a la distribución normal multivariante cuando los valores absolutos de a,b y c tienden todos a infinito pero con el mismo orden, es decir todos con orden $O(a)$.

Para demostrar lo anterior, a tenor de lo estudiado en los apartados 4.1.1 y 4.2.1, demostraremos que todos los cumulantes de Φ son de orden $O(a)$ a lo sumo.

Como puede observarse en (2.39) y (2.48) las esperanzas y varianzas tienden a infinito con orden $O(a)$ cuando a,b y c tienden a infinito con el mismo orden $O(a)$, mientras que las covarianzas (2.49) tenderán a un valor constante.

Para hallar los cumulantes de orden superior o igual a tres es preciso derivar las ecuaciones en derivadas parciales satisfechas por L, función generadora de cumulantes, dos o más veces. Encontrandonos con el problema de que las funciones

$$\frac{\partial^2 f_i(\alpha)}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j} \qquad \frac{\partial^2 f_i(\alpha)}{\partial\alpha_j\,\partial\alpha_i} \qquad \frac{\partial^2 g_i(\alpha)}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j} \qquad \frac{\partial^2 g_i(\alpha)}{\partial\alpha_j\,\partial\alpha_i}$$

no están definidas en $\alpha=0$ según se vió en 2.2.4 y de ahí que no obtengamos ecuaciones en los cumulantes que puedan resolverse.

Para eliminar el anterior problema, extenderemos las ecuaciones (2.33) satisfechas por L de la forma apuntada en las últimas lineas del apartado 2.2.4, obteniendose

$$(4.4) \qquad (1-e^{\alpha_i}) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2} + (\partial L/\partial\alpha_i)^2 \right) +$$

$$+\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]e^{\alpha_i}\} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j}) \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} +$$

$$+\tfrac{1}{2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_i}) \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_k}) \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} -$$

$$- \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} e^{\alpha_i}(1-e^{\alpha_j}) \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_k}) \frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = abe^{\alpha_i} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})$$

$$i=1,\dots,m$$

Función que es derivable en todo punto incluso en los puntos con algún $\alpha_i=\alpha_j$ $i\neq j$ en que (2.33) no está ni definida.

En la ecuación (4.4) aparecen expresiones del tipo

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})$$

son ceros de orden (m-1) cuando $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=(0,\dots,0)$ y será preciso derivar adecuadamente al menos (m-1) veces respecto de las variables α_i para que la expresión resultante en $\alpha=0$ nos dé una constante distinta de cero y por consiguiente a partir de (4.4) obtengamos una ecuación en los cumulantes distinta de la ecuación trivial 0=0.

Al derivar (4.4) utilizaremos las siguientes expresiones sobre la derivada n-ésima de un producto de funciones.

(4.5)
$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!\,(n-k)!} f^{n-k)} g^{k)}$$

o más general

(4.6)
$$D^n\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right) = \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\dots k_m!} \prod_{i=1}^{m} D^{k_i} f_i$$

También tendremos presente que:

$$\frac{\partial \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_i} = e^{\alpha_i} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_k})$$

lo que implica que

$$\left.\frac{\partial^{m-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_i^{m-1}}\right|_{\alpha=0} = (m-1)! \tag{4.7}$$

y

$$\frac{\partial \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_k} = -e^{\alpha_k} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,k}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})$$

por lo que

$$\left.\frac{\partial^{m-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_1 \cdots \partial \alpha_{i-1}\, \partial \alpha_{i+1} \cdots \partial \alpha_m}\right|_{\alpha=0} = (-1)^{m-1} \tag{4.8}$$

Según (4.7) y (4.8), derivando m-1 veces respecto de las variables α_j siempre que no repitamos la derivada respecto de alguna α_j $j\neq i$ y aunque derivemos k veces respecto de α_i, al evaluar el resultado en $\alpha=0$ también obtenemos una constante no nula

$$\left.\frac{\partial^{m-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_i^{k} \cdots \partial \alpha_{j_1} \cdots \partial \alpha_{j_{m-k-1}}}\right|_{\alpha=0} = (-1)^{m-k-1}\, k! \tag{4.9}$$

donde los subíndices $i, j_1, \ldots, j_{m-k-1}$ son todos distintos.

Para calcular $\overline{x}_i = (\partial L / \partial \alpha_i)\big|_{\alpha=0}$ es preciso derivar (4.4) m-1 veces (teniendo presente (4.7), (4.8) o (4.9)) de forma que al evaluar en $\alpha=0$ se obtenga una ecuación con coeficientes no nulos en las medias o cumulantes de primer orden.

Si no se deriva (m-1) veces respecto de las variables que se indican en (4.7), (4.8) y (4.9) obtendríamos la ecuación 0=0 no pudiendo despejar en ella $\bar{x}_i$.

Vamos a derivar (4.4) m-1 veces según (4.7) y (4.8) para obtener una ecuación en $\bar{x}$ y a partir de ella calcularla.

Derivando respecto de α_i m-1 veces, teniendo presente (4.7) y (4.6), obtenemos después de hacer $\alpha=0$

$$\pm\, 0.(m-1)!\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2}+(\partial L/\partial\alpha_i)^2\right)\Bigg|_{\alpha=0}+\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]\}.$$

$$.(m-1)!\left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha=0}+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(-1)(m-1)!\left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha=0}-\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}0.(m-2)!\left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0}=$$

$$=ab(m-1)!$$

Simplificando y sustituyendo los cumulantes que aparecen por el momento correspondiente se tiene

$$[(c-1-a-b)(m-1)!-\tfrac{1}{2}(m-1)(m-1)!]\,\bar{x}_i=ab(m-1)!$$

$$(c-1-a-b-\tfrac{1}{2}(m-1))\,\bar{x}_i=ab$$

$$\bar{x}_i=\frac{ab}{c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1)}$$

Derivando (4.4) según (4.8), es decir respecto de cada α_j, para todo $j\neq i$, se obtiene tras hacer $\alpha=0$

$$0.(-1)^{m-1}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2}+(\partial L/\partial\alpha_i)^2\right)+\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]\}(-1)^{m-1}\,\bar{x}_i\,+$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} 0.\bar{x}_i - \tfrac{1}{2} \sum_{j\neq i} (-1)^{m-1} \bar{x}_j = ab(-1)^{m-1}$$

y simplificando

$$(c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1))\ \bar{x}_i = ab \qquad i=1,\dots,m$$

Según ambos caminos se ha llegado al mismo resultado que era conocido de capítulos anteriores. Si se deriva (4.4) m-1 veces de acuerdo a (4.9) se obtiene la misma ecuación en $\bar{x}_i$ pero multiplicada por otra constante, una constante del tipo $(-1)^{m-k-1}\ k!$.

Luego, como ya se sabía, volvemos a obtener que los cumulantes de primer orden son de orden O(a).

Para obtener los cumulantes de segundo orden (que sabemos hay únicamente dos distintos) es preciso derivar (4.4) (m-1)+1 veces, (m-1) veces para que desaparezcan los ceros de (4.4) cuando se evalue en $\alpha=0$ y una vez más para que aparezcan las distintas derivadas de orden dos de la función generadora de cumulantes.

Derivando (4.4) m veces respecto de α_i y evaluando en $\alpha=0$ se obtiene

$$- m!\ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2} + (\partial L/\partial \alpha_i)^2 \right)\Big|_{\alpha=0} +$$

$$+\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-a-b+\tfrac{1}{2}(m-1)\}\ (m-1)\ \frac{m!}{2!} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\Big|_{\alpha=0} +$$

$$+(-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)])\ m!\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\Big|_{\alpha=0} +$$

$$+\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-a-b+\tfrac{1}{2}(m+1)\}\ m!\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i^2}\Big|_{\alpha=0} +$$

$$+\tfrac{1}{2} \sum_{j\neq i} m!\ \left((-1) + \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2}(m-2) \right) \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\Big|_{\alpha=0} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_{j\neq i} m!\ \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2}\bigg|_{\alpha=0} = abm!\ (1+\tfrac{1}{2}(m-1))$$

Simplificando

$$-m!\ (\sigma^2+\bar{x}^2) + (c-a-b-1)\ \frac{m-1}{2}\ m!\ \bar{x} +$$

$$+(-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)])\ m!\ \bar{x} + (c-a-b-1)m!\sigma^2 -$$

$$-\tfrac{1}{2}(m-1)m!(\tfrac{1}{2}(m+1))\ \bar{x} + \tfrac{1}{2}(m-1)m!\sigma^2 = ab\ m!\ \tfrac{1}{2}(m+1)$$

Agrupando términos

$$-\ \sigma^2 - \bar{x}^2 + \tfrac{1}{2}(m-1)(c-a-b-1-\tfrac{1}{2}(m+1))\ \bar{x} + (-a-b+\tfrac{1}{2}(m-1))\ \bar{x} +$$

$$+\ (c-a-b-1+\tfrac{1}{2}(m-1))\ \sigma^2 = ab\tfrac{1}{2}(m+1)$$

Esta ecuación es distinta de la obtenida en el segundo capítulo pero equivalente, pues sustituyendo

$$(4.10) \qquad (c-a-b-1-\tfrac{1}{2}(m+1))\ \bar{x} = ab$$

se tiene

$$-\ \sigma^2 - \bar{x}^2 + \tfrac{1}{2}(m-1)\ \bar{x} + \tfrac{1}{2}(m-1)ab - (a+b)\bar{x} - \tfrac{1}{2}(m-1)\bar{x} +$$

$$+(c-a-b-1+\tfrac{1}{2}(m-1))\ \sigma^2 = ab\tfrac{1}{2}(m+1)$$

$$-\ \sigma^2 - \bar{x}^2 - (a+b)\ \bar{x} + (c-a-b-1+\tfrac{1}{2}(m-1))\ \sigma^2 =$$

$$= ab(\tfrac{1}{2}(m+1)-\tfrac{1}{2}(m-1)) = ab$$

La otra ecuación necesaria para calcular los dos cumulantes de orden dos se obtenía en el capítulo segundo derivando la i-ésima ecuación que satisface L respecto de α_j $j\neq i$. Aquí haremos lo mismo, pero es necesario derivar primero m-1 veces para eliminar los ceros de (4.4) cuando $\alpha=0$. Esta vez para quitar los ceros en lugar de derivar m-1 veces respecto de α_i utilizaremos otro camino dado por (4.8), derivaremos respecto de las m-1 variables α_j $j\neq i$ y posteriormente derivaremos de nuevo respecto de una variable α_j $j\neq i$ e igualaremos $\alpha=0$, obteniéndose

$$\{c-1-\tfrac{1}{2}(m-1)-[a+b-\tfrac{1}{2}(m-1)]\}(-1)^{m-1} \left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0} +(c-1-a-b)(-1)^{m-1} \left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha=0} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{h\neq i}(-1)^{m-1}\left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_h}\right|_{\alpha=0} - \tfrac{1}{2}\sum_{h\neq i}(-1)^{m-1}\left.\frac{\partial L}{\partial\alpha_h\,\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0} = ab(-1)^{m-1}$$

que escrito en función de los cumulantes de orden menor o igual a dos es

$$(c-1-a-b)\ \sigma_{xy} + (c-1-a-b)\ \bar{x} - \tfrac{1}{2}(m-1)\ \bar{x} - \tfrac{1}{2}(m-2)\ \sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\ \sigma^2 = ab$$

Esta ecuación es distinta a la obtenida en el capítulo segundo para el cálculo de los cumulantes de segundo orden, pero equivalente a ella pues

$$(c-a-b-\tfrac{1}{2}m-1+1)\ \sigma_{xy} - \tfrac{1}{2}\ \sigma^2 = ab - (c-a-b-\tfrac{1}{2}(m+1))\ \bar{x}$$

siendo el miembro de la derecha igual a cero según (4.10), obteniéndose de nuevo la ecuación hallada en el capítulo segundo.

Para hallar los cumulantes de cualquier orden k, tendremos que derivar (4.4) (k-1)+(m-1) veces y sustituir $\alpha=0$, pues (4.4) es de la forma

$$(4.11)\qquad \emptyset(m)\ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha_i^2} + (\partial L/\partial\alpha_i)^2\right) + \emptyset(m-1)\ \frac{\partial L}{\partial\alpha_i} + \sum_{j\neq i}\ \emptyset(m-1)\ \frac{\partial L}{\partial\alpha_j} =$$

$$= ab\ \emptyset(m-1)$$

donde $\emptyset(n)$ representa una función con un cero de orden n cuando $\alpha = (0,\ldots,0)$.

Tenemos que derivar m-1 veces para que desaparezcan dichos ceros (tomando derivadas parciales según (4.7), (4.8) ó (4.9)) y posteriormente k-1 veces respecto de α_i $i=1,\dots,m$ para que aparezcan las derivadas de la función generadora de cumulantes que en $\alpha=0$ son los distintos cumulantes de orden k de la distribución.

Al derivar (m-1)+(k-1) veces (4.4) y evaluar en cero aparecen cumulantes de orden mayor a k pero todos ellos irán afectados de un coeficiente nulo cuando se haga $\alpha=0$.

Derivando (4.11) (m-1)+(k-1) veces y evaluando en $\alpha=0$ se obtiene

$$(4.12) \qquad \sum_{h_1=2}^{k} \text{cte}(h_1)\,(\text{cum.}(\text{orden } h)) + \sum_{h_2=2}^{k} \text{cte}(h_2).$$

$$.(\text{cum.}(\text{orden}<h)\ .\ \text{cum.}(\text{orden}<h)) + \sum_{h_3=2}^{k} \text{cte}(h_3)\,(\text{cum.}(\text{orden}<h)) =$$

$$= \text{cte de orden } O(a^2) \text{ a lo sumo}$$

Teniendo en cuenta que no sólo algunas derivadas de orden m de $\emptyset(m)$ en $\alpha=0$ son constantes no nulas, sino también derivadas de orden superior, por ejemplo

$$\frac{\partial e^{\alpha_i}(e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_j} = -e^{\alpha_i+\alpha_j} \neq 0 \qquad \text{para todo } \alpha_i, \alpha_j$$

$$\frac{\partial^2 e^{\alpha_i}(e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_j\, \partial \alpha_i} = \frac{\partial^2 e^{\alpha_i}(e^{\alpha_i}-e^{\alpha_j})}{\partial \alpha_j^2} = -e^{\alpha_i+\alpha_j} \neq 0 \qquad \text{"}\quad \text{"}\quad \text{"}$$

Por recurrencia, a partir de (4.12) todos los cumulantes de orden k para cualquier k son de orden O(a) a lo sumo, cuando a,b y c tienden a infinito con igual orden O(a).

Al igual que en las distribuciones generadas por funciones $F_D^{(n)}$, se tiene aquí que la ley límite en normal, pues haciendo un cambio de origen y escala análogo al que se hizo entonces, todos los cumulantes de orden mayor que dos tienden a cero cuando los parámetros tienden a infinito.

Por otra parte, aquí las covarianzas son de orden $O(1)$ como se desprende de su expresión (2.49). Al hacer el cambio de escala según $1/\sqrt{a}$ se tiene que las covarianzas de la nueva variable (obtenida por cambio de origen y escala) tienden a cero cuando a,b y c tienden a infinito, lo que unido a que la distribución límite es normal implica que las componentes de la ley límite son independientes.

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, T. (1979). Análisis Matemático. Reverté.

APPELL, P. and KAMPE DE FERIET, J. (1926). Fonctions Hypergéométriques et Hyperspheriques: Polynômes d'Hermite. Gauthier-Villars, Paris.

BAYLEY; W. N. (1935). Generalized Hipergeometric Series. Cambridge Math. Tract No. 32, Cambridge Univ. Press; Reprinted by Stechert-Hafner, New York 1964.

BISHOP, Y. and FIENBERG, S.E. (1980). Discrete Multivariate Analysis. The MIT Press Cambridge, London.

CARLSON; B.C. (1963). Lauricella's Hypergeometric Function F_D. Journal of Mathematical Analysis and Appications 7, 452-470.

CONSTANTINE; A.G. (1963). Some Noncentral Distribution Problems in Multivariate Analysis. Ann. Math. Statist., 34, 1270-1285.

ELDERTON, W.P. and JOHNSON , N.L. (1969). Systems of Frecuency Curves. Cambridge University Press.

ERDELYI, A. , MAGNUS, W. , OBERHETTINGER, F. and TRICOMI, F.G. (1953). Higher Transcendental Functions, Vols. I and II. Mc Graw-Hill, New York, Toronto and London.

ERDELYI, A. , MAGNUS, W. , OBERHETTINGER, F. and TRICOMI, F.G. (1955). Higher transcendental Functions, Vol. III. Mc Graw-Hill, New York, Toronto and London.

FERNANDEZ GARCIA, F. (1981). Clasificación de las superficies de probabilidad que satisfacen a la extensión del sistema de Van Uben. Cuad. de Estad. Matematic., nº 6, Universidad de Granada.

GUTIERREZ JAIMEZ R. y HERMOSO GUTIERREZ J.A. (1986). The Limiting Form of Discrete Multivariate Probability Functions of Hypergeometric Type with Matrix Argument. Actas del Second Catalan International Symposium on Statistics. Barcelona.

GUTIERREZ JAIMEZ R. y HERMOSO GUTIERREZ J.A. (1986). Momentos Asociados a las Distribuciones de Probabilidad Generadas por Funciones Hipergeométricas de Argumento Matricial. XVI Reunión Nacional de Estadística Investigación Operativa e Informática. Torremolinos (Málaga). (Por publicar) .

HANSMANN, G.H. (1934). On Certain non-Normal Symmetrical Frequency Distributions. Biometrika, 26, 129-195.

HERMOSO GUTIERREZ J.A. (1984). Factorización de Matrices y Jacobianos. Cálculo de la Matriz de Covarianzas de la Distribución Asintótica de $\sqrt{n}$ $(S(n) - \Sigma)$. (Tesina de Licenciatura). Facultad de Ciencias. Granada.

HERMOSO GUTIERREZ J.A. (1985). Una Aplicación de las Funciones Hipergeométricas de Argumento Matricial a la Generación de Distribuciones Discretas Multivariantes. Actas de la XV Reunión Nacional de la SEIO. Asturias. (Por publicar).

HERRERIAS PLEGUEZUELO, R. (1975). Sobre las Estructuras Estadísticas de Pearson y Exponenciales; Problemas Asociados. (Tesis Doctoral) Public. F.C. Granada.

HERRERIAS PLEGUEZUELO, R. (1976). Extensión del Sistema de Distribuciones Discretas de Pearson. Cuad. Dep. Estad. Matematic. Serie A, nº 3, F.C, Granada.

JAMES; A.T. (1964). Distribution of Matrix Variates and Latent Roots Deri-- ved from Normal Samples. Ann. Math. Statist., 35, 475-501.

JAMES, A.T. (1968). Calculation of Zonal Polynomial Coefficients by Use of the Laplace-Beltrami Operator. Ann. Math. Statist., 39, 1711-1718.

JAMES, A.T. (1973). The Variance Information Manifold and the Functions on it. In Multivariate Analysis-III (ed. P.R. Krishnaiah). Academic Press, New York.

JOHNSON, N.L. and KOTZ, S. (1969,1970). Distributions in Statistic. Vol. 1: Discrete Distributions, Vol. 2: Continuous Distributions, I. Wiley, New York.

JOHNSON, N.L. and KOTZ, S. (1983). Encyclopedia of Statistical Sciences. Vol. I, II, III, IV. Edited by S. Kotz and Johnson, Wiley.

JOSHI, S.W. and PATIL, G.P. (1970). A Class of Statistical Models for Multi̲ple Counts. Randon Counts, Vol. 1, 189-203.

KAMPE DE FERIET, J. (1921). Les Fonctions Hypergeometriques d'Ordre Supé -- rieur á Deux Variables. C.R. Acad. Sci. Paris 173, 401-404.

KATZ, L. (1963). Unified Treatment of a Board Class of Discrete Probability Distributions in Classical and Contagions Discrete Distributions. G.P. Patil (ed.). Pergamon Press, New York., 175-182.

KEMP, A.W. (1986). A Wide Class of Discrete Distributions and the Associa-- ted Differential Equations. Sankhya, Serie A, 30, 401-410.

KEMP, C.D. (1967). Stuttering Poisson Distributions. J. Statist. & Social Inq. Soc. Ireland., 21, 151-7.

KENDALL, M.G. and STUART, A. (1967,1969). The Avanced Theory of Statistics, Vol. I and II. Griffin, London.

LAURICELLA, G. (1893). Sulle Funzioni Ipergeometriche a Piú Variabili. Rend. Circ. Mat. Palermo 7, 111-158.

LEONOV, V.P. & SHIRYAER A.N. (1959). On a Method of Calculation of Semi-Invariants. Theory of Probability and its Applications, Volume IV, Number 3.

MARDIA, K.V. (1970). Families of Bivariate Distributions. Griffin's Statistical Monographs & Courses. London.

MOUZON, E.D. (1930). Equimodal Frequency Distributions. Ann. Math. Statis--tic., 1, 137-58.

MUIRHEAD, R.J. (1970). Partial Differential Equations for Hypergeometric Functions of Matrix Argument. Ann. Math. Statist., 41,991-1001.

MUIRHEAD, R.J. (1982). Aspects of Multivariate Statistical Theory. John Wiley & Sons.

ORD, J.M. (1967). On a System of Discrete Distributions Biometrika, nº 54, 649-656.

ORD, J.k. (1972). Families of Frequency Distributions. Griffin, London.

PATIL, G.P. (1965). Sankhya, Serie B, 26, 286-292.

PATIL, G.P., KOTZ, S., ORD, J.K. (1974). Statistical Distributions in Scientific Work. Vol. I, II, III,. D. Reidel.

PATIL, G.P. and JOSHI, S.W. (1968). Dictionary and Bibliography of Discrete Distributions. Oliver & Boyd. Edimburgh;

PEARSON, K. (1985). Memoir on Skew Variation in Homogeneous Material, Phil. Trans. Roy. Soc., A, 186, 343-414.

PEARSON, K. (1923). Notes on Skew Frequency Surfaces. Biometrika, nº 54, 649-656.

ROY, L.K. (1971). An Extension of the Pearson Systems of Frequency Curves. Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa. Vol. XXII Cuad. 1 y 2, 113-123.

SARAN, S. (1954). Hypergeometric Functions of Three Variables. Ganita 5, 71-91; Corrigendum. Ibid. 7 (1956), 65.

SRIVASTAVA, H.M. (1967). Some Integrals Representing Triple Hypergeometric Functions. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 16, 99-115.

SRIVASTAVA, H.M. (1964). Hypergeometric Functions of Three Variables. Ganita 15, 97-108.

SRIVASTAVA, H.M. (1971). Certain Double Integrals Involving Hypergeometric Functions. Jñānābha Sect. A1, 1-10.

SRIVASTAVA, H.M. (1972). Some Formulas of Hermite and Carlitz. Rev. Ronmaine Math. Pures Appl. 17, 1257-1263.

SRIVASTAVA, H.M. ; MANOCHA, H.L. (1984). A Treatise on Generating Function. Ellis Horwood Series Mathematics and its Applications.

STEYN, H.S. (1951). On Discrete Multivariate Probability Functions, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc. A., 54, 23-30.

STEYN, H.S. (1955). On Discrete Multivariate Probability Functions of Hyper geometric Type, Kon. Ned. Akad. Wet.Proc. A., 58, 588-95.

STEYN, H.S. (1956). On Regression Properties of Discrete Systems of Probability Functions. Kon. Ned. Akad. Wet. Proc.A., 63, 119-27.

STEYN, H.S. (1960). On Regression Properties of Multivariate Probability Functions of Pearson's Type. Kon. Ned. Akad. Wet. Proc. A., 63, 302-11.

TAKEMURA, AKIMICHI (1984). Zonal Polinomials. Institute of Mathematical Statistics; Lecture Notes-Monograph Series. Volume 4.

UVEN, M.J. VAN. (1947)-48). Extension's of Pearson's Probability Distributions to Two Variables. Proceedings of the Royal Academy of Sciences. Amsterdam. Vol. 50, pág. 1063-1070 y 1252-1264; y Vol. 51, pag. 41-52 y 191-196.

ZOCH, R.T. (1935). Some Interesting Features of Frequency Curves. Ann. Math. Statist., 6, 1-10.