Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

# Sobre las estructuras estadísticas de Pearson y exponenciales. Problemas estadísticos asociados

Rafael Herrerías Pleguezuelo

Tésis Doctoral

Sección de Matemáticas

# SOBRE LAS ESTRUCTURAS ESTADISTICAS DE PEARSON Y EXPONENCIALES. PROBLEMAS ESTADISTICOS ASOCIADOS

por

Rafael Herrerias Pleguezuelo





Visado en Granada a 9 de Enero de 1.975, por los Directores de Tésis:

Fdo. Dr. D. ALFONSO GUIRAUM MARTIN. Catedrático de Cálculo de Probabilidades Y Estadística Matemática de la Universidad de Granada.

Fdo. Dr. D. RAMON GUTIERREZ JAIMEZ. Profesor Agregado de Universidad

Memoria que, para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, presenta el Licenciado en Matemáticas: D. RAFAEL HERRERIAS PLEGUEZUELO.

Granada, Enero de 1.975

# AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido realizado en el Departamento de Estadística Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los Profs. Drs.

Dn. ALFONSO GUIRAUM MARTIN

y Dn. RAMON GUTIERREZ JAIMEZ,

a quien queremos expresar aquí nuestro más profundo agradecimiento por su inapreciable guia y eficaz ayuda, que nunca nos han regateado, durante la preparación de esta Memoria.

Expresamos también nuestro reconocimiento a la Excma. Diputación Provincial de Vizcaya, por la ayuda económica concedida, durante los cursos académicos 1.972-73 y 1.973-74, para la realización de este trabajo.

A MI ESPOSA E HIJOS

# PROLOGO

## A.- Introducción general

Aunque cada parte independiente de esta Memoria va precedida de una introducción parcial a los respectivos temas, en la que se indican los objetivos y resultados de la correspondiente parte, queremos en este Prólogo fijar las caracteristicas globales de este trabajo, prescindiendo de detalles más concretos que se dejan para aquellas.

El presente trabajo se centra, fundamentalmente, en dos puntos de muy actual desarrollo.

1º) Por un lado la Teoría Estructural de la Estadística Matemática, caracterizada por la utilización de recursos de cálculo y formulación operacionales en el tratamiento de los problemas analíticos de la Inferencia.

2º) Por otro, una contribución a la Teoría de Caracterización de distribuciones, respecto de dos familias básicas como son las de Pearson y Exponencial.

3º) Ambos puntos reseñados, se unifican al tomarse las dos familias citadas formuladas y tratadas mediante los recursos analíticos estudiados en el primer punto.

Analicemos brevemente estos puntos básicos:

A.1) La Teoría Estructural de la Estadística Matemática, desarrollada fundamentalmente por LINNIK [20] y BARRA [4], no es más que una sistematización por métodos de Análisis Funcional, de los conceptos básicos de la Inferencia, de la misma forma que el modelo axiomático de Kolmogorov se fundamenta en la Teoría de la Medida. Por otra parte muchos de los conceptos fundamentales de la Estadística Estructural, por ser esencialmente probabilisticos (exhaustividad, libertad, exhaustividad P-minima, etc.) estan a su vez basados en dicha Teoría General de la Medida.

Los resultados más importantes que se obtienen, utilizando este punto de vista de la Inferencia, son los siguientes:

a) la sistematización de los conceptos básicos, antes inconexos y sin una base común.

b) la incorporación simultánea de diversos puntos de vista de la Inferencia (Bayesiano, clásico, etc.)

c) la adaptabilidad de la estructura matemática básica a otras formulaciones operacionales, en ciertos casos particulares.

En esta Memoria se utilizan dos estructuras estadísticas (abreviadamente e.e.) concretas: la que llamamos e.e. de Pearson y la e.e. exponencial.

Estas dos estructuras son de actualidad en Investigación Estadística como prueban las recientes investigaciones de van UVEN [34] , STEYN [33] y JOHNSON-KOTZ [16] con generalizaciones de la primera al caso multidimensional y toda la amplia colección de articulos sobre el papel de las familias exponenciales en la Estadística Matemática, gran parte de cuyos resultados básicos han sido recogidos por ZACKS [36] en forma sistemática.

Por otra parte ambas son muy amplias y tienen interrelaciones notables (vease Cap.III, pág.135 de esta Memoria), aunque sus origenes y métodos son muy diferenciados. La primera tiene, y se puede estudiar asi, un origen diferencial y es lógico que las soluciones, formulación, casos particulares, etc., de dicha ecuación diferencial juegen un papel esencial en dichas e.e.; sin embargo las exponenciales, aunque guardan relación con una ecuación diferencial, también notable (relacionada con la cota de Cramer-Rao), son estudiadas, principalmente, através de sus propiedades estadísticas (exhaustividad, propiedades optimas de los estimadores, etc.).

Por ello nos propusimos investigar hasta que punto, todos los resultados conocidos de de ambos tipos de estructuras, son independientes del álgebra de operadores en que se formulan las correspondientes densidades, siendo este el objetivo general de este trabajo, en relación con el apartado A.1)c) anterior.

El análisis citado no es simple porque requiere la la introducción de una formulación generalizada en varios niveles, asi como la puesta a punto de las herramientas claves del cálculo sobre las estructuras estadísticas, todo ello con la formulación operacional acorde con nuestros objetivos. Por supuesto, la base analítica está muy ligada a la Teoría Operacional de las ecuaciones diferenciales antes citadas.

En este sentido lo anterior nos ha conducido a ciertos problemas muy interesantes sobre desarrollos asintóticos asociados a algunas leyes especiales (normal, lognormal) generalizadas, que amplian diversos resultados obtenidos recientemente en la teoría de polinomios ortogonales sobre espacios de operadores lineales. Es de destacar la gran importancia que actualmente tienen, de nuevo, (yá que se suponian materia "clásica" un tanto olvidada, hasta hace muy pocos años) los desarrollos asintóticos a que nos referimos, por el uso que se hace de ellos en muchas cuestiones de investigación actuales, como el caso notabilisimo de los Problemas asintóticos de la Estadística No paramétrica (vease p.e. P.J. BICKEL, Edgeworth expansions in nonparametric statistcs. Annal. of Statist. Vol.2 nº1, pág.1-20; 1.974)

Ello ha producido, junto al redescubrimiento de dichos desarrollos -actualizados en cuanto a su manejo por los modernos métodos de cálculo- y su correspondiente actualización, una linea importante de investigación, en la que se incluye este modesto trabajo nuestro, en lo que se refiere a este punto.

Simultaneamente los desarrollos asintóticos obtenidos son fundamentales desde el punto de vista probabilistico, y su estudio ha requerido el análisis detallado de diversos elementos claves, como son:

a) el estudio de una ecuación de Sturm-Liouville en el espacio operacional introducido, de la que se deduce

b) la ortogonalidad de los polinomios de Hermite en dicho espacio.

c) la teoría de un operador esperanza sobre el álgebra operacional considerada, mediante el cual se introduce la transformada de Fourier apropiada a la citada álgebra (obteniendose un resultado de inversión relativo a esta transformada) y se estudian los semiinvariantes y momentos correspondientes.

d) Utilizando los resultados de los puntos b) y c) anteriores, se obtienen los desarrollos (ortogonal y asintótico) asociados a la distribución normal extendida al espacio operacional utilizado.

En general se ha obtenido, como resultado global, que las propiedades conocidas, tanto de los sistemas ortogonales asociados a la distribución normal, como los desarrollos más especiales (Gram-Charlier y Edgeworth), se mantienen en el espacio operacional considerado.

A.2) En cuanto al punto 2º) de A., gran parte de esta Memoria trata de la caracterización de los sistemas de Pearson y familias exponenciales de tipo funcional, utilizando los recursos analíticos estudiados en el punto 1º) de A.

Nos movió a estudiar este tema el gran desarrollo que ha alcanzado la Teoría de Caracterización (de distribuciones y Procesos), a nivel de distribuciones y procesos gaussianos y de familia exponencial clásica, en concreto.

Sin embargo, en un texto tan esencial y actual en este aspecto, como es el de KAGAN-LINNIK-RAO (Characterization Problems in Mathematical Statistcs. Wiley, 1.973), ni en una exhaustiva bibliografia consultada sobre este punto concreto, se encuentra tratado en el marco de la citada Teoría de Caracterización, la familia de Pearson como tal -aunque son conocidos diversos resultados respecto de la ley gamma por ejemplo, que juega un papel analogo a la normal, en los problemas de caracterización respecto de "parametros de escala" en vez de "parametros de posición" y frente a estimadores de Pitmann.

Por ello uno de los objetivos generales, primordial en la 1ª parte de este trabajo, ha sido el planteamiento de las lineas generales de Caracterización en dicha familia de distribuciones, habiendose analizado además en un caso más general:

Las familias de Pearson operacionales. Estas son las derivadas de la ecuación operacional de Pearson que se toma como base, y que además de contener y sistematizar diversos sistemas de Pearson considerados en la Literatura (como los recientes de ROY [30], van UVEN [34] , etc.), sirve para generar nuevas distribuciones no consideradas hasta ahora.

Despues se planteó el problema de que criterios tomar para las caracterizaciones. De un análisis profundo del sistema primitivo de Pearson y otros derivados -como el de Kapteyn-, llegamos a la conclusión que habia que basarse fundamentalmente, en la caracterización por Regresión -estudiada en otros casos por KAGAN y RAO $[17]_b$- pues practicamente no se puede obtener otras bases de caracterización que sean utiles, para toda la familia considerada globalmente. A este respecto, también hemos investigado la posibilidad de basarnos en una caracterización, mediante la ecuación diferencial de las funciones caracteristicas; que como se sabe juega un papel básico en el análisis inverso de las familias exponenciales tanto clásicas, como generalizadas aquí investigadas (vease Cap.III de esta Memoria). Se conocia, en el caso particular clásico un resultado negativo [6], que también se confirma en la formulación operacional. Por ello selecciona- el criterio básico primitivo.

En cuanto a las exponenciales, como en el caso clásico (LEHMANN [19] , BLACKWELL-GIRSHICK, etc.), en las investigadas aquí, los criterios básicos son los ligados a la completitud de la familia, obteniendose un resultado de caracterización paralelo al considerado por KAGAN-LINNIK-RAO (vease $[17]_b$, Cap.VIII), pero en las familias funcionales consideradas sobre el álgebra $(A_f^g.)$.

En resumen pues:

| | | |
|---|---|---|
| familias exponenciales generalizadas | ⟷ | Caracterización mediante la Teoría de Suficiencia sobre las estructuras estadísticas |
| familias de Pearson generalizadas | ⟷ | Caracterización mediante las propiedades de Regresión |

B.-

Las principales cuestiones estudiadas, así como los métodos utilizados, pueden sintetizarse en la forma siguiente:

B.1) El primer capítulo, está dedicado a la fundamentación teórica de los recursos analíticos y estadísticos que serán la base de los capitulos posteriores. Por un lado se recogen los principales conceptos y resultados de la teoría funcional de estructuras estadísticas y respecto de la Estimación y Contraste, basandose en la Teoría de la Medida Probabilistica, esto constituye la 1ª parte del capítulo I.

Luego (2ª parte, Cap.I) se establecen las bases analíticas de esta Memoria, no probabilisticas. Especial interes tiene la estructuración de los distintos espacios de operadores, estudiandose el papel de la operación básica ("producto compuesto") como producto interior y la consiguiente estructura prehilbertiana e hilbertiana. Además se establecen resultados básicos respecto de cierta transformada de Laplace generalizada (en sentido parecido a la famosa generalización de DOETSCH -vease Hispano Americana, tomo XIII nºs 1 y 2; pág.31 (1.953)- , basada en el citado"producto compuesto". Finalmente, dada la utilización que posteriormente se hará de ella en las e.e. exponenciales multidimensionales, se establece la citada transformación multiple, respecto de una medida positiva v arbitraria, que juega un papel clave en los espacios operacionales de diferenciación parcial generalizada, que también se estudian por su ulterior aplicación en las e.e. de Pearson bidimensionales.

B.2) El capítulo II está dedicado a los problemas de caracterización en las e.e. de Pearson, según antes explicabamos.

B.2.a) En la 1ª parte del Cap.II, se estudia dicha caracterización en familias de Pearson de una dimensión, como derivadas de una ecuación operacional en el álgebra de operadores básica (Cap.I, 2ª parte). Las principales cuestiones originales aqui estudiadas son:

B.2.$a_1$) La sistematización, que se logra gracias a dicha formulación, de todos los sistemas pearsonianos investigados por ELDERTON-JOHNSON [12], ROY [30], NAVARRO SAGRISTA [25], etc. así como la generalización de los correspondientes resultados a las distribuciones generadas por la ecuación operacional citada.

B.2.$a_2$) En relación con ciertas generalizaciones de la normal aparece el estudio de los polinomios generalizados de Hermite, cuya ortogonalidad es derivada del estudio muy detallado de la ecuación de Sturm-Liouville (operacional), que bajo condiciones de contorno aqui utilizadas, tiene un comportamiento analítico semejante a la ordinaria. Se obtienen interesantes resultados analíticos sobre estas cuestiones, que en sucesivos apartados se investigan en relación con su proyección a los desarrollos asintóticos utiles en Estadística Matemática y Probabilidad (& 3, & 4 y & 5 del Cap.II, 1ª parte).

B.2.b) En la 2ª parte del Cap.II se estudia la puesta a punto de las herramientas básicas de Probabilidad, adaptadas al cálculo sobre los espacios de operadores, yá que las e.e. que se manejan están formuladas mediante ellos. Entre otras cuestiones se estudian los desarrollos de Edgeworth y de Gram-Charlier generalizados, a los que antes se aludia (& 3 del Cap.II, 2ª parte).

B.2.c) En la 3ª parte del Cap.II se amplian los resultados anteriores a sistemas de Pearson en varias dimensiones. El nucleo fundamental de esta parte es el estudio de la caracterización por regresión de dichos sistemas, asi como la generalización de los estudios de van UVEN [34], JUAN HERNANDEZ [17], NAVARRO SAGRISTA [25] y STEYN [33], en los puntos en que ello es posible.

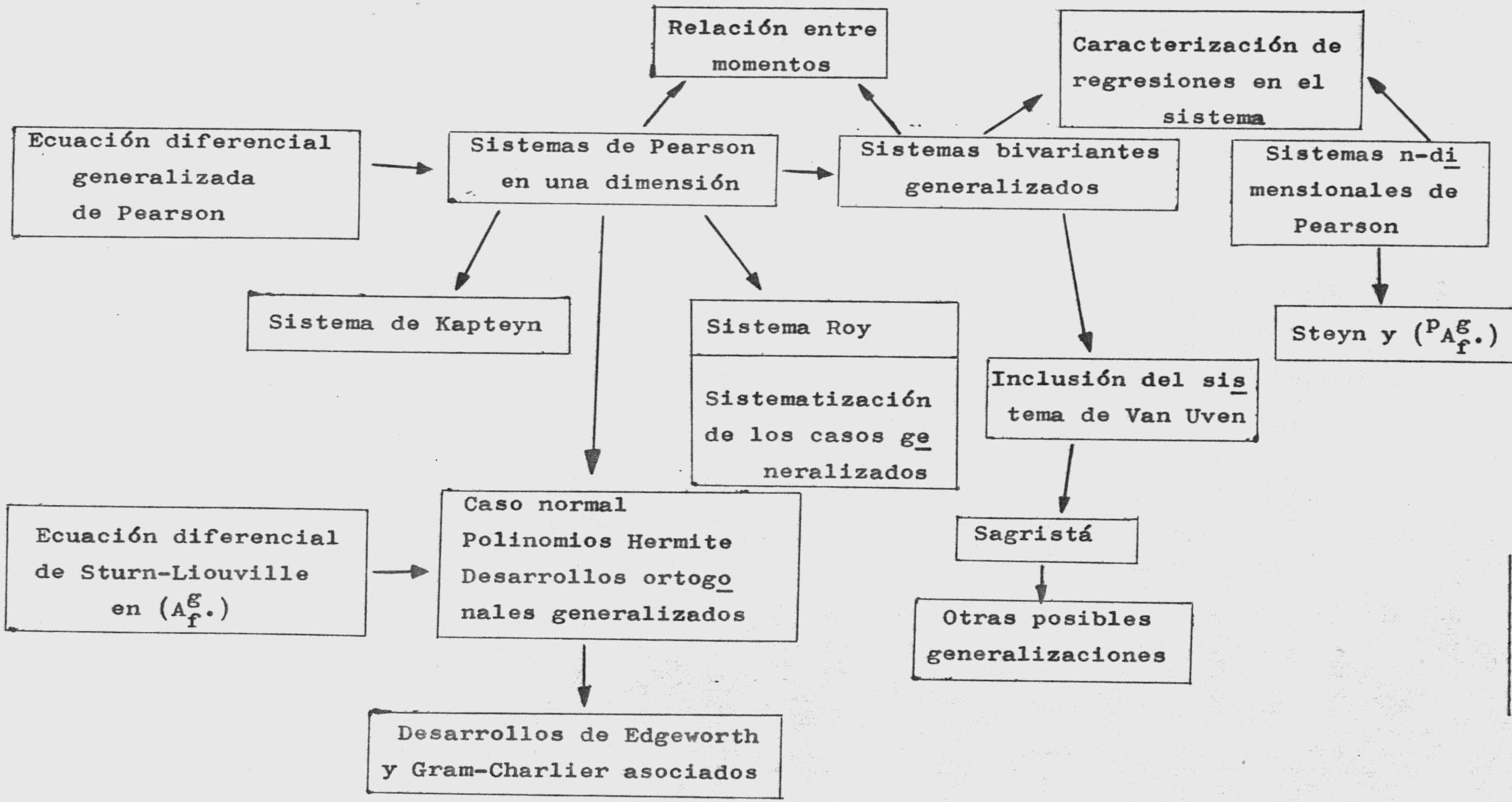
Finalmente se indican varios problemas abiertos de interes, que quedan para estudios futuros.

B.3) El capítulo III está dedicado al estudio de la caracterización de las "familias exponenciales generales" aqui introducidas y especialmente lo que respecta a la completitud de dichas familias. Los resultados se basan en el cálculo de Transformadas Laplace sobre los espacios operacionales citados, obteniendose diversos resultados que generalizan los establecidos por RIOS [31] y otros.

Luego se analizan los conceptos básicos de Inferencia sobre dichas familias.

B.4) Se añade una nota sobre las relaciones entre ambas estructuras, con el papel de la distribución de Weibull. En este sentido es de destacar el interesante articulo de BRADFORD R. Crain (Estimation of distributions using orthogonal expansions. Annal. of Stat. Vol.2, nº3; pág.454-463) de 1.974 en el que se utilizan sobre las familias exponenciales desarrollos ortogonales, cuyo estudio en el marco algebráico utilizado en esta Memoria, constituye también un problema abierto de interes futuro.

Finalmente sintetizamos los dos últimos capítulos de esta Memoria, en los siguientes cuadros:


Relación entre momentos
Caracterización de regresiones en el sistema
Ecuación diferencial generalizada de Pearson
Sistemas de Pearson en una dimensión
Sistemas bivariantes generalizados
Sistemas n-dimensionales de Pearson
Sistema de Kapteyn
Sistema Roy
Sistematización de los casos generalizados
Inclusión del sistema de Van Uven
Steyn y ($^{P}A_f^g$.)
Ecuación diferencial de Sturn-Liouville en ($A_f^g$.)
Caso normal
Polinomios Hermite
Desarrollos ortogonales generalizados
Sagristá
Otras posibles generalizaciones
Desarrollos de Edgeworth y Gram-Charlier asociados

CAPITULO II

Estructuras exponenciales
(Barra; Linnik)

Transformadas Laplace
y Fourier generalizadas

Fórmula de inversión
Momentos asociados

Estructuras exponenciales
generalizadas

Problemas estadísticos
en las e.e. exponenciales

Exhaustividad

Estimación puntual

Tests de hipótesis

Resultados de Analiticidad (conexión con otros resultados especiales en el caso exponencial

Estructuras canónicas:
Resultados fundamentales basados en el operador $E^G$ y las funciones generatrices de momentos

Relaciones con las e.e.
de Pearson

# INDICE GENERAL

CAPITULO III.- ESTRUCTURAS ESTADISTICAS EXPONENCIALES

CAPITULO I (1ª Parte)

FUNDAMENTOS ESTADISTICOS

- Conceptos previos
- Elementos sobre una estructura estadística
- Otros tipos de estructuras y operaciones sobre ellas
- Propiedades especiales de una estructura estadística
- Relaciones entre libertad, completitud, exhaustividad e independencia
- Estimación y tipos de estimadores en una estructura estadística
- Contraste de hipótesis en una estructura estadística
- Otras definiciones
- Relación de pre-orden en los tests de hipótesis
- Tests óptimos

RESUMEN Y FINES DE LA 1ª PARTE DEL CAPITULO I.-

En esta 1ª parte del Cap.I hacemos una síntesis de la Inferencia sobre estructuras estadísticas, resumiendo todos los conceptos correspondientes a la estimación y contraste de hipótesis sobre dichas estructuras.

El concepto básico de estructura estadística es una particularización del concepto general de espacio probabilistico, considerandose un espacio muestral, como espacio $\Omega$ de sucesos y sobre él una tribu ( $\sigma$ -campo ) de sucesos muestrales. A ambos queda asociada una medida definida por una familia de leyes de probabilidad. El triple ( $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{P}$ ) - estructura estadística - es la versión del espacio probabilistico, apta para el desarrollo de la Estadística Matemática, como conjunto de métodos probabilisticos sobre las muestras.

El objetivo general de la introducción de las estructuras estadísticas es basar la Estadística Matemática exclusivamente sobre los espacios probabilisticos, intentando así una formalización, sobre bases axiomáticas, de toda la Inferencia Estadística.

La principal ventaja de este método, en cuanto a las estructuras estadísticas exponenciales que se estudian en esta Memoria, es la obtención de resultados analíticos ( aplicación cálculo trans-formacional etc. ) sobre dichas estructuras exponenciales, que en otras formas de exponer la Estadística Matemática serian inalcanzables.

En Cap. posteriores, al manejar las estructuras estadísticas exponenciales extendidas a las algebras especiales de operadores construidas, supondremos que estas forman parte de una estructura estadística particular a la que podran aplicarse todos los conceptos y resultados que aquí resumimos y que son válidos en una estructura estadística cualquiera.

El estudio de las estructuras estadísticas, ha sido iniciado por LINNIK y BARRA especialmente, habiendose obtenido los resultados más potentes en familias exponenciales clásicas.

Los resultados que se exponen a continuación pueden agruparse en tres grandes grupos:

a) conceptos elementales sobre estructuras estadísticas y las relaciones entre ellos (p.e. libertad, completitud, etc. ).

b) resultados respecto a la estimación en una estructura estadística.

c) resultados respecto a los contrastes de hipótesis en una e.e.

Exponemos, pues, a continuación, brevemente esta Teoria en la que se considerara más tarde sumergidas las e.e. exponenciales extendidas al algebra especial de operadores introducida en la 2ª parte de este primer capitulo.

## CONCEPTOS PREVIOS.-

El concepto base es el de estructura estadística y su importancia en la Estadística Matemática es comparable al concepto de espacio probabilistico, básico en el Cálculo de Probabilidades.

Definición (I.1ªP.1).-

Una estructura estadística, que designaremos abreviadamente por e.e., es un triple:

$$(\mathbb{W},\ \mathcal{U},\ \mathcal{P}) \tag{1}$$

formado por el espacio de las observaciones $\mathbb{W}$, una tribu $\mathcal{U}$ de partes de $\mathbb{W}$ y por una familia $\mathcal{P}$ de leyes de probabilidad en un espacio probabilizable $(\mathbb{W},\ \mathcal{U})$; a veces la familia $\mathcal{P}$ puede describirse con la ayuda de un indice, llamado parámetro, escribiendose:

$$\mathcal{P} = (P_\theta\ ,\ \theta \in \Theta) \tag{2}$$

Existe un tipo especial de e.e., que es utilizado en varios problemas de la Estadística Matemática, que se conoce con el nombre de estructura estadística dominada, damos a continuación dos definiciones, equivalentes, de dicho concepto.

Definición(I.1ªP.2).-

Una e.e. está dominada si existe una medida m positiva, $\sigma$-finita en $(\mathbb{W},\ \mathcal{U})$ tal que una u otra de las dos condiciones, equivalentes, se verifica:

1ª) Toda ley de $\mathcal{P}$ es absolutamente contínua con respecto a m.

2ª) Toda ley de $\mathcal{P}$ admite una densidad de probabilidad con respecto a m.

La equivalencia de las dos anteriores condiciones puede verse en las obras de METIVIER (22) y NEVEU (26) páginas 80, 267 y 105 respectivamente.

Si en una e.e. dominada se ha elegido un parámetro $\theta$ y para todo $\theta$ de una determinación $p_\theta(\omega)$ de la densidad $dP_\theta/dm$, se escribe, si no existe ambiguedad, esta estructura por:

$$\left( \mathcal{W}, \mathcal{U}, (p_\theta, \theta \in \Theta) \right) \qquad (3)$$

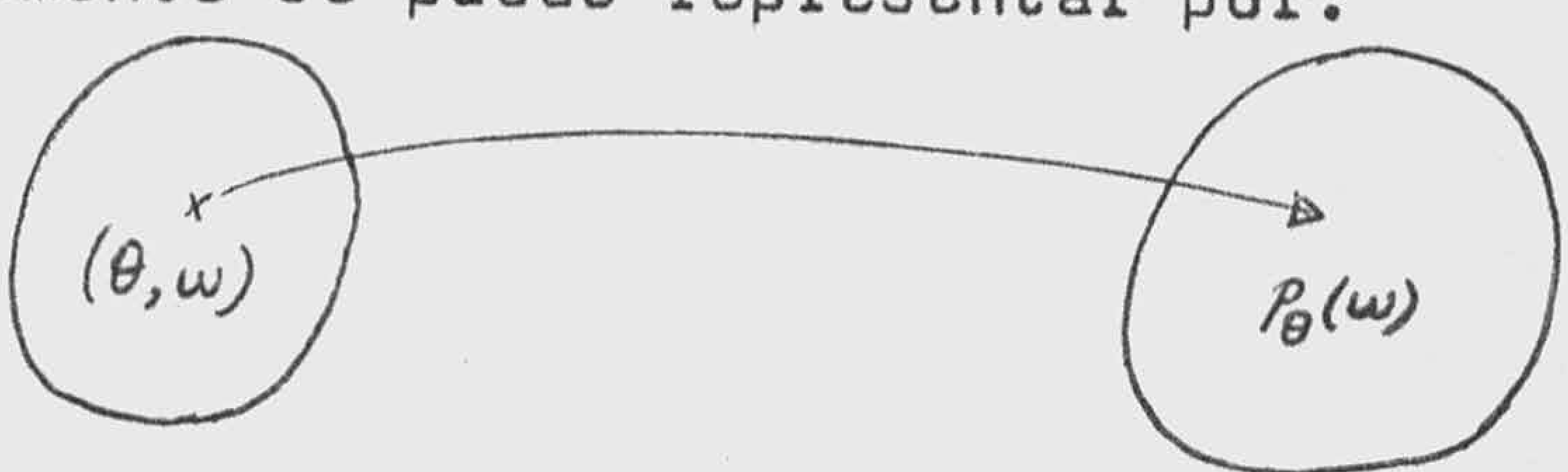
Es utilizada la llamada <u>función de verosimilitud en la e.e. dominada</u> (3).

<u>Definición (I.1ªP.3).-</u>

Se llama función de verosimilitud a la función numérica real $L(\theta,\omega)$ definida en ( $\mathcal{W} \times \Theta$ ) mediante:

$$L(\theta,\omega) = p_\theta(\omega) \qquad (4)$$

Esquemáticamente se puede representar por:




$\mathcal{W} \times \Theta$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}$

$$L: (\theta,\omega) \longrightarrow L(\theta,\omega) = p_\theta(\omega) \in \mathbb{R}$$

Es fácil comprobar que la medida dominante de una e.e. dominada no es única, vease BARRA (4) pág. 2 y 234.

Esto último puede utilizarse para seleccionar una medida dominante especial $P^*$, que sea equivalente a $\mathcal{P}$, dicha <u>medida</u> se llama <u>privilegiada</u>. Entendiendose que $P^*$ es equivalente a $\mathcal{P}$ si $\forall A \in \mathcal{U}$, $\left( P(A) = 0, \forall P \in \mathcal{P} \right) \Longleftrightarrow P^*(A) = 0$

## <u>ELEMENTOS SOBRE UNA ESTRUCTURA ESTADISTICA.-</u>

Los elementos básicos a considerar en una e.e. (1) son los siguientes:

a) <u>concepto de estadistico</u>

Se llama estadistico en la e.e. (1) a una aplicación medible T de ( $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ ) en un espacio medible ( D, C ).

Por la forma de definir el estadistico T se deduce que no depende de $\mathcal{P}$ ni del parámetro si lo hay.

Si $D = \mathbb{R}$ se dice queT es un estadistico escalar y si $D = \mathbb{R}^n$ se dice que T es un estadistico vectorial.

Los estadisticos desarrollan un papel analogo en la Estadistica Matemática al desarrollado por los elementos aleatorios en el Cálculo de Probabilidades.

Para toda ley. P de $\mathcal{P}$ el estadístico T como aplicación de la e.e. (1) en ( D, C ), es un elemento aleatorio, cuya ley de probabilidad se designa por $P_T$, escribiendose:

$$\mathcal{P}_T = ( P_T \ , \ P \in \mathcal{P} ) \qquad (5)$$

obteniendose la e.e. ( D, C, $\mathcal{P}_T$ ) inducida por T, designandose mediante:

$$( \mathbb{W}, \mathcal{U}, \mathcal{P} ) \xrightarrow{T} ( D, C, \mathcal{P}_T ) \qquad (6)$$

es decir, que el estadístico se puede interpretar como una aplicación entre dos e.e.

Es conveniente introducir dos relaciones de equivalencia en el conjunto de los estadísticos: una ordinaria y otra definida salvo en un conjunto de medida nula.

Definición(I.1ªP.4).-

Sean $T_1$ y $T_2$ dos estadísticos definidos sobre la e.e. (1), con valores en ( $D_1$, $C_1$ ) y ( $D_2$, $C_2$ ) respectivamente, se dice que $T_1$ es equivalente a $T_2$, escribiendose: $T_1 \sim T_2$, si $T_1^{-1}(C_1) = T_2^{-1}(C_2)$.

Definición (I.1ªP.5).-

Sean $T_1$ y $T_2$ dos estadísticos en (1) con valores en ( D, C ), se dice que $T_1$ es $\mathcal{P}$-equivalente a $T_2$ y se escribe $T_1 \overset{\mathcal{P}}{\sim} T_2$, si el suceso ( $T_1 \neq T_2$ ) es $\mathcal{P}$-nulo.

Teniendo en cuenta que los estadísticos se pueden interpretar como variables aleatorias es natural trasladar el concepto de independencia de v.a. a dichos estadísticos.

Definición(I.1ªP.6).-

Diremos que dos estadísticos $T_1$ y $T_2$ en (1) son in dependientes, si para toda ley P de $\mathcal{P}$ los elementos aleatorios $T_1$ y $T_2$ son independientes.

b) estadístico sumable (*)

Se dice que el estadístico escalar T, definido en (1) es sumable si para toda ley P de $\mathcal{P}$, la v.a. T es sumable, es decir, posee una esperanza matemática que se designa por $E_P(T)$.

Este tipo de estadístico es aquel sobre el cual está definido el operador esperanza matemática de cualquier ley de $\mathcal{P}$, y tiene una especial importancia en el problema de la proyección de un estadistico que más adelante se verá.

Analogamente si T es un estadístico con valores en $\mathbb{R}^n$, T es sumable si y sólo si cada componente de T es sumable.

En particular, conviene definir una clase de estadísticos sumables mediante propiedades adicionales del operador $E_P$. Ello dá lugar a la siguiente:

Definición(I.1ªP.7).-

Se dice que el estadístico escalar T definido en (1), sumable, es libre en media ( respectivamente centrado) si $E_P(T)$ no depende de P en $\mathcal{P}$ (respectivamente $E_P(T)$ es nula cualquiera que sea P de $\mathcal{P}$). Es decir, la clase de los estadisticos sumables libres en media (o centrados) está formada por aquellos en que $E_P(T)$ es independiente de P, por lo que se escribe simplemente $E(T)$ en lugar de $E_P(T)$.

c) imagen del estadístico sumable

Se llama imagen del estadístico sumable T definido en la e.e.

$$[\, W,\ U,\ (P_\theta\ ,\ \theta \in \Theta)\, ]$$

a la función $\beta_T$ definida en $\Theta$ por:

$$\beta_T(\theta) = E_{P_\theta}(T) = \int_W T\, dP_\theta \quad ; \quad \theta \in \Theta \tag{7}$$

este concepto es aplicable a un estadístico sumable y es más

(*)Aparecerá en la analiticidad de la transformada de Fourier de las familias exponenciales canonicas (Cap.III de esta Tésis).

general que los anteriormente definidos: centrados, libres.

OTROS TIPOS DE ESTRUCTURAS Y OPERACIONES SOBRE ELLAS.-

1º) Interesa introducir el concepto de e.e. completa, sobre el concepto de estadístico centrado y diremos que un estadístico es completo si induce una e.e. completa.

Definición(I.1ªP.8).-

Sea la e.e. (1) y B una subtribu de U, se dice que la estructura ( $\mathbb{W}$, B, $\mathcal{P}$ ) es completa (respectivamente cuasi-completa) si todo estadístico centrado, B-medible (respectivamente además acotado) es $\mathcal{P}$-equivalente a cero.

Es evidente que si una e.e. es completa( por ser B-medible el estadístico es acotado) es cuasi-completa; el recíproco no es cierto (*).

En el caso de que la e.e. esté dominada por la ley privilegiada $P^*$, la e.e. será completa si y solamente si:

$$\int_{\mathbb{W}} T\, P_\theta\, dP^* = 0 \quad \forall\, \theta \in \Theta \Longrightarrow T = 0 \quad P^*\text{- c.s.}$$

Más adelante se dará un teorema relativo a la completitud de las e.e. exponenciales.

2º) Es conveniente introducir las ideas básicas de la inferencia bayesiana en el desarrollo de la Estadistica Estructural para ello es preciso definir las distribuciones a-priori y a-posteriori, sobre el espacio paramétrico $\Theta$, por ello consideramos a $\Theta$ dotado de una tribu Q y que $P_\theta(A)$ es una probabilidad de transición sobre el espacio producto $\Theta \times U$. ( Para mayor aclaración vease el Cap. 14, & 6 de BARRA ). Esta hipotésis es muy general y es satisfecha en la mayor parte de los casos.

Se escribirá, pues, la e.e. en la forma siguiente:

$$[\mathbb{W},\ U,\ (\ P_\theta\ ,\ \theta \in (\Theta, Q)\ )] \qquad (8)$$

(*) Vease el contraejemplo de la pág. 6 en BARRA [4] en tales condiciones, se llama <u>distribución a-priori</u> sobre la e.e. anterior a cualqier ley de Probabilidad sobre el espacio medible $(\Theta, Q)$.

En función de la imagen de un estadístico y de las probabilidades de transición es posible definir la <u>distribución a-posteriori</u> sobre el espacio $(\Theta, Q)$ que unida a la a-priori, antes definida, dan una expresión del teorema de Bayes, enunciado mediante la Teoria de la Medida. ( Puede verse en Barra, & 7 del Cap. XIV o en Neveu Cap. IV ).

Resulta fundamental en Inferencia Estadistica el concepto de muestra empirica, concepto que en la construcción estructural se considera constituido en función del producto de e.e. que a su vez está asociado al producto de espacios probabilisticos. En efecto: llamaremos <u>producto de dos e.e.</u> dadas por $( \Omega, U, \mathcal{P} )$ y $( \Omega', U', \mathcal{P}' )$, y lo designaremos mediante:

$$( \Omega, U, \mathcal{P} ) \otimes ( \Omega', U', \mathcal{P}' ) \qquad (9)$$

a la e.e. $( \Omega\times\Omega', U\otimes U', \mathcal{P}\otimes\mathcal{P}' )$, donde:

$$\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}' = ( P\otimes P'; P \in \mathcal{P}, P' \in \mathcal{P}' ). \qquad (10)$$

En el caso de que las e.e. sean: $( \Omega, U, (P_\theta, \theta \in \Theta) )$ y $( \Omega', U', (P'_\theta, \theta \in \Theta) )$, es decir, dos e.e. que tengan el mismo espacio paramétrico y el mismo parametro; se llama <u>producto restringido</u> de estas dos e.e. y se designa por:

$$( \Omega, U, (P_\theta, \theta \in \Theta) )\times( \Omega', U', (P'_\theta, \theta \in \Theta) ) \qquad (11)$$

a la e.e. definida por:

$$( \Omega\times\Omega', U\otimes U', (P_\theta\otimes P'_\theta, \theta \in \Theta) ) \qquad (12)$$

En particular se llama <u>muestra empirica</u> al producto restringido de un número finito de ejemplares de una misma e.e., es decir:

$$( \Omega, U, \mathcal{P} )^n = ( \Omega^n, U^n, (P^n, P \in \mathcal{P}) ) \qquad (13)$$

Es fácil de ver que en el caso de e.e. dominadas las funciones de verosimilitud son el producto de las respectivas funciones de verosimilitud, siendo fácil, también, adaptar el teorema de Lebesgue-Fubini sobre productos de espacios probabilisticos ( vease Loève-Cap.IV- o Zamansky, pág.391 (*), este último en el caso no probabilistico) al producto anteriormente definido, resultando el Teor. fundamental de permutación de integrales iteradas asociadas a los operadores: esperanza matemática ( vease Barra, 6º & del Cap. XIV y la pág. 11 ).

PROPIEDADES ESPECIALES DE UNA ESTRUCTURA ESTADISTICA.-

Se incluyen en este parrafo conceptos definidos sobre e.e. que constituyen la base de la Inferencia Estadistica mientras que en los anteriores se han establecido los de naturaleza probabilistica; estos conceptos van a referirse, fundamentalmente, a ciertas sub-tribus de la tribu ($\sigma$-algebra o campo de Borel) del espacio probabilistico base ( $\mathfrak{W}$, U, $\mathfrak{P}$ ).

Los conceptos fundamentales son los de exhaustividad, libertad y exhaustividad $\mathfrak{P}$-minima.

El problema general que se pretende resolver con estos conceptos es el de reunir toda la información contenida en la e.e., formando la función más resumida posible y que sea equivalente a las observaciones iniciales.

A) Exhaustividad, se define de la forma siguiente: supongamos una e.e. base ( $\mathfrak{W}$, U, $\mathfrak{P}$ ), una subtribu B de U se llama exhaustiva si cualquiera que sea A de U existe una determinación de P(A/B) común a todas las leyes P de $\mathfrak{P}$. Esto es equivalente a decir que para todo estadístico sumable T existe una determinación de $E_p(T/B)$ común a todas las leyes P de $\mathfrak{P}$.

Basada en la anterior definición se construye la siguiente: se dice que el estadístico T definido en la e.e. ( $\mathfrak{W}$, A, $\mathfrak{P}$ ) y con valores en ( D, C ) es exhaustivo si la tribu $T^{-1}$(C) es exhaustiva.

(*)Loève,M. Probability Theory. Van Nostrand, 1.960
Zamansky,M. Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes. Dunod, 1.963.

La razón de incluir estas dos definiciones es que puede existir una tribu exhaustiva y no existir un estadístico exhaustivo que tome valores en un espacio medible dado (*).

Estas últimas definiciones pueden esquematizarse de la forma siguiente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(W, U, \mathcal{P}) \arrow[r, "B \subset U", "\forall A \subset U \; \exists P(A/B)"'] \arrow[d, "A \subset U"] & B \text{ es exhaustiva} \\
(W, A, \mathcal{P}) \arrow[r, "T^{-1}(C) = A"'] \arrow[d, "T"'] & T \text{ es exhaustivo} \\
(D, C) &
\end{tikzcd}$$

Los dos conceptos anteriores pueden extenderse, sin dificultad, al caso de un estadístico vectorial del tipo:

$$T : (\mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{P}_T)$$

siendo $B_{\mathbb{R}^n}$ el $\sigma$-campo de Borel sobre $\mathbb{R}^n$, y en este caso puede caracterizarse, en forma necesaria y suficiente, una condición de exhaustividad.

La definición de exhaustividad dada anteriormente es poco manejable en la práctica, por ello interesa obtener una condición equivalente de más fácil comprobación; a este fin el llamado Teorema de exhaustividad de una tribu da una condición necesaria y suficiente de exhaustividad en el caso de una e.e. dominada. Recojemos sin demostración dicho teorema enunciado sobre una e.e. dominada cualquiera, yá que sera utilizado más adelante en las e.e. exponenciales extendidas al álgebra especial de operadores ( $A^g_{\rho}$. ), introducida en la 2ª parte de este capitulo.

Sean ( $W$, $U$, $(P_\theta, \theta \in \Theta)$ ) una e.e. dominada y $P^*$ una ley de probabilidad dominante privilegiada, una condición necesaria y suficiente para que la sub-tribu $B$ de $U$ sea exhaustiva es que exista una determinación de las densidades $p_\theta = dP_\theta/dP^*$, que sea $B$-medible $\forall \theta \in \Theta$.

---

(*) Para otros aspectos de la exhaustividad, vease, p.e. LEHMANN, Testing statical hypotheses. Wiley, 1.958

El anterior teorema se refiere a la exhaustividad de una sub-tribu asociada a la e.e. (3) y en función de él es fácil obtener el llamado Teorema de factorización de Neyman que caracteriza la exhaustividad, no de una tribu sino, la de un estadístico. Su enunciado es el siguiente:

Sea una e.e. (3), el estadístico T con valores en ( D, C ) es exhaustivo si y sólo si existe:

a) una función numerica h en W, no-negativa y U-medible.

b) $\forall \theta \in \Theta$, una función $g_\theta$ en D, C-medible,

tales que:

$$\forall \theta \in \Theta, \forall w \in W \Longrightarrow p_\theta(w) = g_\theta( T(w) ).h(w) \ [c.s.] \quad (*)$$

Observese que la versión anterior del Teor. de Neyman está definida con los recursos generales de la Teoria de la Medida, produciendose la factorización para casi todo punto, es decir, salvo en un conjunto de medida nula (**), (***).

B) Estadísticos libres, es un concepto intimamente ligado al de la exhaustividad y se refiere, en general, a la no-dependencia del parametro $\theta$ en el sentido que se recoje en la siguiente definición:

Sea la e.e. (W, U, $\mathcal{P}$ ), tomada como e.e. básica; se dice:

a) que un suceso A es libre, si P(A) es constante cuando P varia en $\mathcal{P}$, o dicho de otra forma, que no depende del parametro.

b) la sub-tribu B de U es libre si todos sus sucesos son libres.

c) El estadístico T con valores en ( D, C ) es libre si la tribu $T^{-1}(C)$, que nos sirvió en el

(*) La demostración de estos dos teoremas puede verse en BARRA pags. 15 y 17 respectivamente.
(**) Vease LOEVE, Probability theory. Van Nostrand (2ª ed.) 1961 pag.345 , para cuestiones referidas al anterior teorema de factorización.
(***) Una visión amplia sobre estos conceptos puede verse en FERGUSON, Mathematical statistics. Academic Press, 1.967 Cap.IV

apartado A) para definir la exhaustividad, es libre; es decir que la ley de probabilidad de T no varia cuando P describe $\mathcal{P}$.

Ejemplos notables de estadísticos libres son: 1º) el estadístico de Kolmogorov-Smirnov $K = \sup_x |F_n(x) - F_m(x)|$ sobre la estructura : $\underset{n+m}{\otimes} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, P_c)$; siendo $P_c$ la familia de todas las leyes sobre $\mathbb{R}$ con una función de densidad continua. 2º) sobre la e.e. $(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}, N(m,M))$ con $m \in \mathbb{R}^2$ y $M$ es la matriz de covarianza, la ley del coeficiente de correlación es otro ejemplo de estadístico libre.

Damos a continuación el concepto de proyección de un estadístico y mediante él podremos determinar si una sub-tribu es completa o cuasi-completa, en efecto: dada una e.e. (1) se dice que el estadistico X sumable se proyecta en la subtribu B de U, si existe una determinación de $E_p(X/B)$ que sea común a todas las leyes P de $\mathcal{P}$; esta determinación llamada proyección de X en B es un estadístico sumable y tiene la misma imagen que X. Escribiremos, cuando no exista ambigüedad, para esta determinación $E(X/B)$ y en el caso de un estadistico vectorial se generaliza la definición anterior aplicandola a cada una de las componentes.

Facilmente se demuestra ( Barra pag. 19 ) que dada una e.e. (1) y una sub-tribu B de U , la tribu B es completa ( respectivamente cuasi-completa ) si y solamente si todo estadístico libre en media,que se proyecte en B ( respectivamente, además acotado ) es libre en media condicional a B.

La noción de libertad, es decir la no dependencia respecto del parametro, ha surgido a proposito de la noción de exhaustividad. El criterio más comodo de libertad es el Teorema de factorización para la exhaustividad (*).

---

(*) Puede consultarse en Barra pag. 212 y siguientes lo referente a los teoremas de existencia de sucesos libres ( Teoremas de Liapounov y Romanovsky-Sudakov ).

C) Un problema interesante es encontrar de entre todos los estadísticos exhaustivos para una cierta e.e. aquel que sea equivalente a las observaciones iniciales, y que sea lo más reducido posible; a este estadístico, si existe, se le llama exhaustivo $\mathfrak{P}$-minimo, y es natural que se le considere como el óptimo.

Igual que en otros conceptos anteriores la definición se da en dos niveles: a nivel de tribu y de estadístico.

Llamaremos <u>tribu exhaustiva minima</u> ( <u>estadístico exhaustivo minimo</u> ) a aquella tribu ( a aquel estadistico ), si existe, que está contenida en toda tribu exhaustiva ( que induce la tribu exhaustiva minima ).

Para llegar a la exhaustividad $\mathfrak{P}$-minima es preciso dar un 2º paso en el que se introduce la condición de la Teoria de la Medida del conjunto $\mathfrak{P}$-nulo, obteniendose las siguientes versiones de la exhaustividad minima para casi todo punto:

Se dice que la <u>tribu</u> $B_o$ es <u>$\mathfrak{P}$-minima</u>, si para toda tribu exhaustiva B, $B_o$ está contenida en $\bar{B}$, o lo que es equivalente, si $\bar{B}_o$ es la más pequeña tribu exhaustiva conteniendo a N. Donde N es la familia de los conjuntos $\mathfrak{P}$-despreciables de la e.e. (1) y donde $\bar{B}$ es la tribu engendrada por $B \cup N$.

Se dice que el <u>estadístico exhaustivo</u> X es <u>$\mathfrak{P}$-minimo</u> si induce una tribu exhaustiva $\mathfrak{P}$-minima.

De las definiciones dadas se deduce que un estadístico o una tribu exhaustiva minima es $\mathfrak{P}$-minima, pero el recíproco no se verifica, en general, por ello tiene interes el siguiente teorema (*):

"<u>Sea ( $\Omega$, U, P ) una e.e. dominada por una ley de probabilidad privilegiada $P^*$, una sub-tribu B de U es exhaustiva $\mathfrak{P}$-minima si y solamente si B es $\mathfrak{P}$-igual a la más pequeña tribu que deja medible una determinación de las densidades con respecto a $P^*$ de las leyes de la familia $\mathfrak{P}$.</u>"

Hay que hacer notar el papel importante que juegan las tribus exhaustivas obtenidas como las más pequeñas tribus que dejan medible una determinación de las densidades. En la práctica una determinación privilegiada que es muy utilizada p.-.

(*) Consultese Barra pág. 24 del Cap. II

e. en el caso de que haya determinaciones continuas, es una de ellas.

El teorema precedente demuestra que la familia de las tribus exhaustivas $\mathcal{P}$-minimas y la de las tribus $\mathcal{P}$-iguales a la más pequeña tribu $\overline{B}$ que deja medible la determinación escogida de lasdensidades. En estas condiciones existe una tribu exhaustiva minima si y sólo si la intersección de todas estas tribus $\mathcal{P}$-iguales a $\overline{B}$ es exhaustiva; este será el caso si $\mathbb{W}$ es numerable, pero al contrario si $\mathbb{W}$ no es numerable no existe tribu exhaustiva minima.

En lo que sigue se supone fijada una determinación de las densidades, lo cual despues de lo anterior, no restringe la generalidad. Se busca, entonces, un estadístico que induzca la más pequeña tribu que deja medible esta determinación de las densidades.

El problema fundamental es, pues, el siguiente: encontrar el estadístico más general que sea $\mathcal{P}$-minimo. Antes de considerar la e.e. producto: $\overset{n}{\otimes}$ ( $\mathbb{W}$, U, $(p_\theta, \theta \in \Theta)$ ), asociada a la muestra empirica dominada es preciso establecer un resultado más general sobre el espacio vectorial, L, engendrado por las funciones constantes y la familia de funciones definidas sobre $\mathbb{W}$, $g_\theta = \Psi \circ p_\theta$ ( siendo $\Psi$ un homeomorfismo de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$)

El resultado que se da a continuación caracteriza estadísticos exhaustivos en función de un sistema de generadores del espacio vectorial L.

Sean ( $\mathbb{W}$, U, $(p_\theta, \theta \in \Theta)$ ) una e.e. dominada por una ley de probabilidad privilegiada, un homeomorfismo $\Psi$ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y L el espacio vectorial engendrado por las funciones constantes y la familia de las funciones en $\mathbb{W}$: $g_\theta = \Psi \circ p_\theta$.

Si ( 1; $f_i$, $i \in I$ ) es un sistema de generadores de L, la aplición X definida por:

$$w \in \mathbb{W} \quad X(w) = ( f_i(w), \ i \in I ) \qquad (14)$$

es un estadístico exhaustivo $\mathcal{P}$-minimo ( la demostración puede verse en Barra pags. 27 y 204 ).

En función del resultado anterior puede caracterizarse un estadístico exhaustivo $\mathcal{P}$-minimo sobre el espacio muestral. Es interesante observar sobre el resultado inmediato anterior y las funciones del tipo:

$$\left( \lg \frac{p_\theta(w)}{p_{\theta_0}(w)} \; ; \; \theta \in \Theta \right) \qquad (15)$$

que proviene del cociente de verosimilitudes, que son por otra parte las consideradas en la Inferencia Secuencial e Inferencia paramétrica clásica ( vease Wilks, Cap. XII p. 402 y C. XV)
El resultado más general es el siguiente:

"Sea $( W, U, (P_\theta, \theta \in \Theta) )^n$ una muestra empirica dominada tal que existe $\theta_0 \in \Theta$ para el cual $p_{\theta_0}(w) > 0$, $\forall\, w \in W$; si $( 1; f_i(w), i \in I )$ es un sistema de generadores del espacio vectorial L engendrado por las funciones constantes y las funciones (15) el estadístico T definido por:

$$\forall\, w_j \in W \; ; \; j = 1,2,\ldots,n; \; T( w_1,\ldots,w_n ) = \left( \sum_{j=1}^{n} f_i(w_j), \; i \in I \right)$$

es exhaustivo $\mathcal{P}$-minimo."

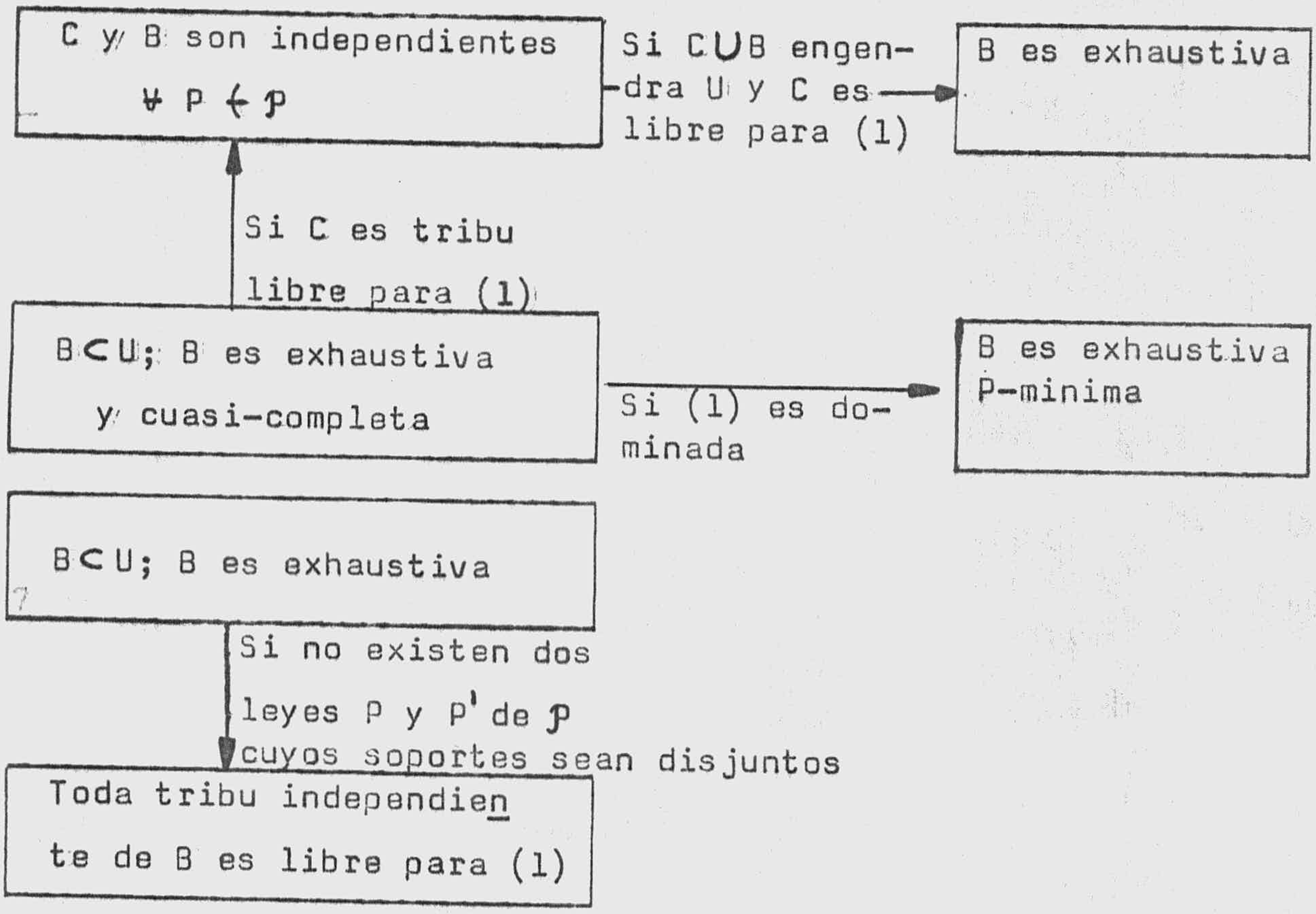
ooooooooo0ooooooooo

RELACIONES ENTRE LIBERTAD, COMPLETITUD, EXHAUSTIVIDAD E INDEPENDENCIA.-

Se ha señalado ya las multiples implicaciones de estas nociones; los resultados que siguen demuestran que las nociones de libertad y exhaustividad estan amenudo ligadas por la relación de independencia estocástica. Puede verse en (*) que estas dos nociones pueden considerarse como duales.

Recojemos en el siguiente cuadro esquemático dichas relaciones. Sus demostraciones pueden verse en el libro citado de BARRA, en el texto de LINNIK ( cap. I ) y algunas aplicaciones interesantes en BARRA-BAILLE ( cap. III )(**).

Tomando como e.e. base la dada por (1) se tiene:




---

(*) SOLER, Notions de liberté en statistique mathématique. Tésis, Grenoble, 1.970

(**)Problèmes de statistique mathématique. Dunod, 1.969

Linnik. Leçons sur les problémes de statistique analytique. Gauthier-Villars, 1.967

ESTIMACION ESTADISTICA.-

Suponemos que X es identico a $\mathbb{R}^k$, donde $k \in Z^+$ ( es un entero positivo dado ) yá que los problemas clásicos conciernen esencialmente al caso de un número finito de parametros escalares.

Se entenderá por estimador de una aplicación medible f de ( $\theta$, L ) en ( X, C ) a un estadístico de valores en (X,C). También se usa el concepto de estimación conjuntista de f a una aplicación d de $\mathbb{W}$ en C tal que:

$\forall x \in X,\ d^{-1}(x) = ( w: x \in d(w) ) \in U.$

Estas dos definiciones de estimación son complementarias de igual forma que en Fisica se asocia a cada medida, una evaluación del error; aqui un estimador g es un valor representativo de f($\theta$) y una estimación conjuntista d localiza a este mismo valor; asi amenudo g(w) está en el centro de d(w).

TIPOS DE ESTIMADORES.-

Parece natural exijir que el estadístico X que constituye el estimador pertenezca P-c.s. a f($\theta$) evitandose el caso p.e. de que el estimador de una varianza sea negativo.

Definición (I.1ªP.9).-

Sean ( $\mathbb{W}$, U; $P_\theta$, $\theta \in \theta$ ) una e.e., f una aplicación de $\theta$ en $\mathbb{R}^k$, y X un estimador de f; si X es sumable y de imagen f, se dice que X es un estimador insesgado de f.

Si la e.e. considerada es completa, f admite a lo más un estimador insesgado; si la e.e. no es completa se obtienen todos los estimadores insesgados de f añadiendo a un estimador insesgado, si existe, un estadístico con valores en ( $\mathbb{R}^k$, $B_{\mathbb{R}^k}$ ) cuyas componentes esten centradas.

También interesa a veces en la Inferencia asintótica disponer de estimadores asintóticamente insesgados. Por ello con las mismas notaciones de la definición anterior diremos que $X_n$ es un estimador asintoticamente insesgado de f si:

$$\forall \theta \in \Theta \qquad \beta_{X_n}(\theta) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\theta)$$

Por otra parte si cualquiera que sea $\theta \in \Theta$, cuando $n \to \infty$, $X_n \to f(\theta)$ para un tipo de convergencia del Cálculo de Probabilidades, se dice que $X_n$ es un estimador de f convergente ( o consistente ) para este tipo de convergencia.

Combinando las propiedades del operador E con las leyes de los grandes numeros se obtiene el siguiente teorema ya utilizado en la inferencia clásica ( Wilks, pag. 410 ).

"Sea X un estimador insesgado de f, el estimador $X_n$ de f definido en la e.e. ( $W$, U; $P_\theta$, $\theta \in \Theta$ )$^n$ por:

$$X_n(w_1, \ldots w_n) = 1/n \left( \sum_{j=1}^{n} X(w_j) \right) \quad (w_j \in W,\ j=1,..,n)$$

es un estimadorinsesgado de f, convergente c.s."

El problema general de obtención de estrategias óptimas de entre las estrategias deterministas se traduce en el caso de la estimación en la obtención de los estimadores óptimos. Desde este punto de vista de la Teoria de la Decisión y teniendo en cuenta la definición de subtribu exhaustiva, puede obtenerse una acotación inferior de la esperanza matemática del estimador condicionado a la subtribu exhaustiva. Ello se recoje en el siguiente teorema ( que puede verse en Barra pág. 75 ) : Sean ( $W$, U; $P_\theta$, $\theta \in \Theta$ ) una e.e., f una aplicación de $\Theta$ en $R^k$, B una subtribu exhaustiva, X un estimador sumable de f, y V una función de perdida en $\Theta \times R^k$, continua y convexa $\forall \theta$ prefijado, entonces se tiene: $E( X/B ) \geq X$

Definición(I.1ªP.10).-

Se dice que el estimador X de f es de varianza mínima si X es un estimador insesgado, de cuadrado sumable tal que la forma cuadratica definida por la matriz de covarianza de todo estimador insesgado de f, sea, cualquiera que sea $\theta$, superior o igual a la forma cuadratica definida por la matriz de covarianza de X.

Se destaca en esta definición que el óptimo se busca en la familia de los estimadores insesgados y no está excluido que exista un estimador, que sea sesgado, de varianza menor que la de X.

Estos estimadores de varianza minima se han introducido en función de la acotación del teorema anterior, como aquellos que alcanzan la cota minima de varianza ( o de covarianzas en el caso n-dimensional ).

## CONTRASTE DE HIPOTESIS EN UNA ESTRUCTURA ESTADISTICA.-

El segundo problema fundamental de la Inferencia Estadistica es el de contraste de hipótésis. Veamos a continuación los conceptos fundamentales de los tets de hipótesis no-secuenciales.

Definición(I.1ªP.11).-

Sea una e.e. (1); se llama hipótesis a una parte no vacia de $\mathcal{P}$ y test a un estadistico con valores en $[0,1]$.

Si $\mathcal{P} = ( P_\theta, \theta \in \Theta )$, se llama hipótesis a una parte no vacia de $\Theta$.

Definición(I.1ªP.12).-

Sean una e.e. (1), $\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}_1$ dos hipótesis disjuntas se llama test de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ un test $\Phi$ al cual está asociada la estrategia que da a las dos hipótesis $\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}_1$ las probabilidades respectivas $1-\Phi(w)$ y $\Phi(w)$. Se llama función potencia de $\Phi$, la restricción a $P_0 \cup P_1$ de la imagen $\beta_\Phi$ del test $\Phi$.(*)

(*) Se llama estrategia a una probabilidad de transición $S_w(D)$ en $W\times D$, donde D es un subespacio del espacio de las decisiones, para el concepto de imagen puede consultarse la pag. 7 de esta memoria. Este concepto se utilizará en los tests sobre familias exponenciales generalizadas (Cap.III de esta Memoria).

OTRAS DEFINICIONES.-

Tomando como base la función de potencia del test, por comparación de las asociadas a dos tests, pueden establecerse clases y tipos de tests. Lo primero que interesa es introducir una relación de equivalencia entre tests, y asi diremos que dos tests $\Phi$ y $\Phi'$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ son equivalentes, si tienen la misma función potencia.

Hay dos formas de tomar una decisión falsa:

a) escojer $\mathcal{P}_1$ cuando $P \in \mathcal{P}_0$, eventualidad a la cual está asociada la función $\beta_\Phi(P)$ ( $P \in \mathcal{P}_0$ ), y

b) escojer $\mathcal{P}_0$ cuando $P \in \mathcal{P}_1$, eventualidad que tiene asociada la función $1 - \beta_\Phi(P)$, ( $P \in \mathcal{P}_1$ ).

Definición(I.1ªP.13).-

Sea $\Phi$ un test de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$, se llama nivel de significación de $\Phi$ , al número $\alpha_\Phi$:

$$\alpha_\Phi = \sup \left( \beta_\Phi(P) / P \in \mathcal{P}_0 \right) \tag{16}$$

Se dice que $\Phi$ es insesgado si $\alpha_\Phi \leq \beta_\Phi(P) \quad \forall P \in P_1$

Definición(I.1ªP.14).-

Un test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es determinista si el suceso de U definido por:

$$\Phi(w)\left[1 - \Phi(w)\right] > 0$$

es $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$-despreciable; se llama entonces región critica de $\Phi$ al suceso de U definido por: $\Phi(w) = 1$.

Definición(I.1ªP.15).-

Un test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es trivial ( respectivamente ineficaz ) si es constante en W ( respectivamente si su función potencia es constante ).

Destaquemos que las definiciones precedentes introducen una asimetria en el tratamiento de $\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}_1$; si se permuta $\mathcal{P}_0$ y $\mathcal{P}_1$, hay que cambiar $\Phi$ por $1 - \Phi$ .

Un test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es libre si su función potencia es constante en $\mathcal{P}_0$: $\beta_\Phi(P) = \alpha_\Phi \quad \forall P \in \mathcal{P}_0$

RELACION DE PREORDEN EN LOS TESTS DE HIPOTESIS.-

El problema esencial de la teoria de tests es determinar, si es posible, el mejor test de una hipótesis contra otra, por ello conviene primero estudiar las relaciones de preorden en estos tests mediante la función potencia de la forma siguiente: sean $\Phi$ y $\Phi'$ dos tests de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$, se pone:

$$\Phi \geqslant \Phi' \iff \begin{cases} \beta_{\Phi}(P) \leqslant \beta_{\Phi'}(P) & \forall\, P \in \mathcal{P}_0 \\ \beta_{\Phi}(P) \geqslant \beta_{\Phi'}(P) & \forall\, P \in \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

y $\Phi > \Phi'$ si además, para al menos una ley $P$ en $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ la desigualdad anterior correspondiente es estricta.

De igual forma un elemento fundamental de la teoria de tests es el riesgo $R_{\Phi}$ asociado a un test $\Phi$ de $\theta_0$ contra $\theta_1$. Por la teoria general de Decisión dichos riesgos se toman en la forma siguiente:

$$R_{\Phi}(\theta) = E_{P_\theta}\Big[V(\theta,0)\big(1 - \Phi(w)\big) + V(\theta,1)\,\Phi(w)\Big] =$$

$$= V(\theta,0) + \Big[V(\theta,1) - V(\theta,0)\Big]\beta_{\Phi}(\theta). \qquad (17)$$

donde $V$ es la función de perdida determinada en la e.e. $(W, U; P_\theta, \theta \in (\Theta, L))$ como una función en $(\theta_0 \cup \theta_1) \times \Delta$, $L \otimes D$-medible con valores en $(\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+})$ y donde $\theta_0$ y $\theta_1$ son dos hipótesis disjuntas, y $(\Delta, D)$ el espacio de las decisiones, esquemáticamente la función de perdida $V$ es una aplicación medible:

$$V : (\Theta, L) \times (\Delta, D) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}^+, B_{\overline{\mathbb{R}}^+}). \qquad (18)$$

De la definición de tests equivalentes y de (17) resulta el siguiente teorema que demuestra que está bien definida la relación de pre-orden que es esencial en la teoria de tests:

"Sea $M$ ( respectivamente $M'$) la familia de las funciones de perdida $V$ tales que:

$$V(\theta,1) \leqslant V(\theta,0) \qquad (\text{resp. } V(\theta,1) < V(\theta,0)) \quad \forall\, \theta \in \Theta_1$$

$$V(\theta,1) \geqslant V(\theta,0) \qquad (\text{resp. } V(\theta,1) > V(\theta,0)) \quad \forall\, \theta \in \Theta_0$$

se tiene entonces:

$$\Phi \underset{V}{\geqslant} \Phi' \Longrightarrow \Phi \overset{m}{\geqslant} \Phi' ; \qquad \Phi > \Phi' \Longrightarrow \Phi \overset{m'}{>} \Phi' ;$$

$$\forall\, V \in m', \ \Phi \geqslant \Phi' \Longrightarrow \Phi \geqslant \Phi' ; \ \Phi \overset{V}{>} \Phi' \Rightarrow \Phi > \Phi' . \text{"}$$

Con la relación de pre-orden establecida puede introducirse el concepto de admisibilidad.

Definición (I.1ªP.16).-

Si se ha escojido una relación de pre-orden en el espacio de las estrategias, se dirá que la estrategia S es óptima si es superior o igual a toda otra estrategia, y se dirá que la estrategia S es admisible si no existe ninguna otra estrategia estrictamente superior.

Observese que las nociones que se han definido corresponden al elemento máximo y a los elementos maximales de las estrategias.

Definición (I.1ªP.17).-

Se dice que el test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es cuasi-admisible si para cualquier test $\Phi'$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ tal que:

$$\beta_{\Phi'}(P) \leq \beta_{\Phi}(P) \qquad \forall\, P \in P_0$$

se tenga además:

$$\beta_{\Phi}(P) = \beta_{\Phi'}(P) \qquad \forall\, P \in P_1$$

y exista una ley $P_1$ de $\mathcal{P}_1$ tal que: $\beta_{\Phi'}(P_1) < \beta_{\Phi}(P_1)$.

Es evidente que un test admisible de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es cuasi-admisible, el recipróco no es cierto.

## TESTS OPTIMOS.-

No existe, en general, un test mejor que todos los otros, se deberia de cumplir:

$$\beta_{\Phi}(P) = 0 \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}_0$$

$$\beta_{\Phi}(P) = 1 \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}_1$$

lo que entraña que el conjunto donde $\Phi = 1$ ( respectivamente $\Phi = 0$ ) es $\mathcal{P}_0$-despreciable ( resp. $\mathcal{P}_1$-despreciable ) y esta condición no se satisface en general. Ante esta imposibilidad se definen nuevos tipos de tests, acotando los errores del primer tipo.

Definición(I.1ªP.18).-

El test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es uniformemente el más potente ( abreviadamente U.M.P. ) si para todo test $\Phi'$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ se tiene:

$$\alpha_{\Phi'} \leq \alpha_{\Phi} \Longrightarrow \beta_{\Phi'}(P) \leq \beta_{\Phi}(P) \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}_1$$

Se dice que $\Phi$ es estrictamente U.M.P. si es U.M.P. y admisible(*).

Un test U.M.P. es cuasi-admisible, en efecto:

$$\beta_{\Phi'}(P) \leq \beta_{\Phi}(P) \quad \forall\, P \in \mathcal{P}_0 \Longrightarrow \alpha_{\Phi'} \leq \alpha_{\Phi} \Longrightarrow \beta_{\Phi'}(P) \leq \beta_{\Phi}(P)$$

$\forall\, P \in \mathcal{P}_1$; pero un test U.M.P. no es necesariamente admisible.

Definición(I.1ªP.19).-

El test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es uniformemente el más potente entre los tests insesgados ( abreviadamente U.M.P.B. ) si para cualquier test $\Phi'$ insesgado de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ se tiene:

$$\alpha_{\Phi'} \leq \alpha_{\Phi} \Longrightarrow \beta_{\Phi'}(P) \leq \beta_{\Phi}(P) \qquad \forall\, P \in \mathcal{P}_1 \ ;$$

se dice que $\Phi$ es estrictamente U.M.P.B. si es U.M.P.B. y admisible.

Definición(I.1ªP.20).-

El test $\Phi$ de $\mathcal{P}_0$ contra $\mathcal{P}_1$ es maximin si $\forall\, \Phi'$ se tiene: $\alpha_{\Phi'} \leq \alpha_{\Phi} \Longrightarrow \inf\left( \beta_{\Phi'}(P) / P \in \mathcal{P}_1 \right) \leq \inf\left( \beta_{\Phi}(P) / P \in \mathcal{P}_1 \right)$

Es evidente que si un test es U.M.P. o U. M. P. B. es maximin, por otra parte si $\mathcal{P}_1$ es una hipótesis simple $P_1$, las tres propiedades: U.M.P., U.M.P.B. y maximin coinciden.

Un test maximin es cuasi-admisible e insesgado.

(*) Puede consultarse la Teoria de tests paramétricos clásicos en la pag. 395 del Cap. XIII de Wilks [35].

CAPITULO I (2ª Parte)

FUNDAMENTOS ANALITICOS

- El espacio de funciones de definición del operador
- Definición del operador($a^{g_i}_{f_i}$.)
- Linealidad del operador
- Operadores equivalentes
- Estructura del espacio operacional ( $A^{g}_{f}$. )
- -ley de composicion en ($A^{g}_{f}$.)
  -nucleo del operador
  -operación asociada al operador
- Dominio del operador($a^{g_i}_{f_i}$.)
  -producto interior
  -relación de equivalencia
- Transformada de Laplace extendida a operadores de (${}^{c}A^{g}_{f}$.)
  -linealidad de la transformada
  -relación con la operación asociada al operador($a^{g_i}_{f_i}$.)
- El espacio operacional (${}^{p}A^{g}_{f}$.)
  -conmutatividad de la ley de composición de operadores
- Transformada de Laplace en $\mathbb{R}^n$, extendida a una medida, en el espacio operacional introducido

OBJETIVOS Y RESUMEN DE LA 2ª PARTE DEL PRIMER CAPITULO.-

En esta 2ª parte del Cap. I, se introduce la base analítica sobre la que se desarrollarán, en capítulos posteriores, el estudio de las estructuras estadísticas exponenciales extendidas al álgebra operacional ( $A_f^g$. ), haciendo uso de la transformada de Laplace de una medida en dicha álgebra (Cap.III de esta Memoria), así como el estudio de los sistemas de Pearson generalizados: univariante (Cap.II, 1ª parte) y multivariante (Cap.II, 3ª parte).

El punto de partida ha sido la estructuración del estudio, del operador derivada generalizada ( introducido por ALDANONDO en 1.968, como limite del cociente de dos diferencias generalizadas (*) ).

Por ello en primer lugar nos ocupamos de los problemas de estructura, tanto del espacio funcional dominio del operador, como del espacio de operadores en si mismo. Un operador de este espacio ( $A_f^g$. ) aplica, en principio, un espacio de Banach Y en otro del mismo tipo C, con la particularidad de que a partir del nucleo de dicho operador se puede definir una operación asociada a dicho nucleo ( con ligeras modificaciones sobre la operación definida por ALDANONDO, en (*) Cap. IV, y utilizada por GUTIERREZ-JAIMEZ (**) en relación con las resolventes de los semigrupos markovianos).

La referida operación es un producto interior en Y, dominio del operador, con lo que se consigue que Y, tenga estructura de espacio prehilbertiano. Más adelante se demuestra que es completo, es decir de Hilbert.

(*) ALDANONDO, Métodos de solución de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales en "aleph", P.F.C., 1.968
Puede consultarse el articulo: ALDANONDO. Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en derivadas parciales en el operador "aleph", P. del Sem. Mat. Garcia de Galdeano, 1.969, para cuestiones relativas al espacio ( $^p A_f^g$. )
(**) Tésis de GUTIERREZ-JAIMEZ. Contribución al estudio de procesos markovianos de difusión extendidos a álgebras especiales de operadores, 1.972

Finalmente nos ocupamos de estructurar, en relación con las operaciones básicas mencionadas, una transformada de Laplace apropiada a los espacios que se definen, que será especialmente importante en el estudio de las familias exponenciales ( Cap.IIIde esta memoria ).

Debemos señalar que existen otras transformadas de Laplace generalizadas (vease GUSTAV DOETSCH, Hispano-Americana Tomo XIII nºs 1 y 2 (1.953) pág.31), una debida al propio Laplace en su libro "Theorie analytique des probabilités" dada mediante la expresión:

$$f(s)=\int_a^b g(x)\,[H(x)]^s\,dx$$

estudiandose el comportamiento de f(s) para s tendiendo a infinito. A este problema lo llamó Laplace el problema de las funciones de números grandes.

Haciendo en la anterior expresión $H(x)=e^{h(x)}$, obtenemos:

$$f(s)=\int_a^b e^{sh(x)}\,g(x)\,dx$$

que representa una generalización,"parecida" a la de esta Memoria, de la integral de Laplace.

El motívo del trabajo citado de Doetsch es desarrollar asintóticamente dicha transformada, mientras que el fin primordial de la transformada introducida por (63) en la pág.48 de esta Memoria, es definir estructuras estadísticas de tipo exponencial más generales que las que se pueden obtener con la transformada clásica de Laplace, esta cuestión es el objeto del Cap.III de este trabajo.

## 1.- El espacio de funciones de definición del operador.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones reales f, que son continuas y no nulas en un intervalo cerrado $I = [a,b]$ del eje real, es decir:

$$\mathcal{F} = (\ f(x) \in \mathbb{R} \ /\ f \in C_I \text{ y } f(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I\ ) \qquad (1)$$

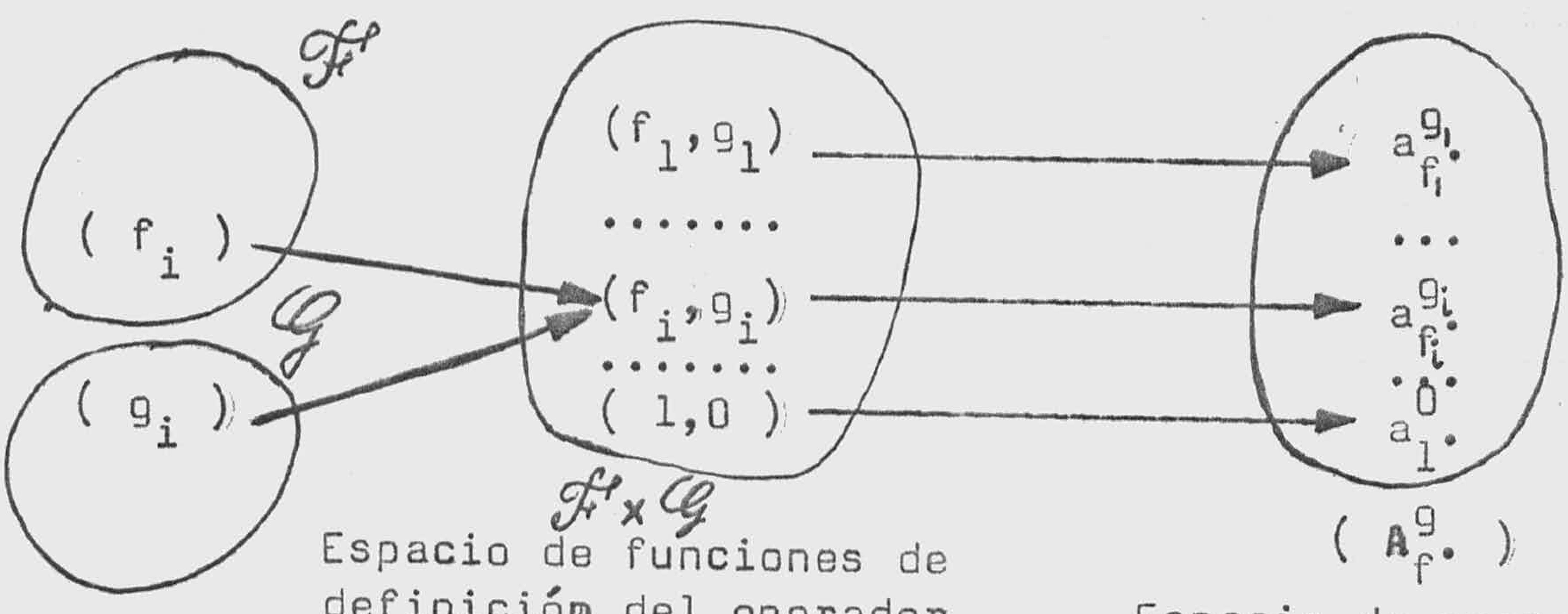
( representamos por $C_I$ al conjunto de las funciones reales continuas en el intervalo cerrado $I = [a,b]$ de la recta real ) y sea $\mathcal{G}$ el conjunto de las funciones reales g, que son continuas en el intervalo cerrado I, es decir:

$$\mathcal{G} = (\ g(x) \in \mathbb{R}\ /\ g \in C_I\ ) \qquad (2)$$

A cada uno de los elementos del conjunto producto $(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$ se le asocia un operador, que depende del elemento (f,g) elegido, que lo designaremos por $(\ a_f^g\cdot)_x^1$ (*), o por $(a_f^g\cdot)$ cuando no exista ambigüedad.

Al conjunto constituido por estos operadores $(a_f^g\cdot)$ más los operadores nulo e identidad, lo designaremos por $(\ A_f^g\cdot)$, y será el espacio operacional utilizado a lo largo de esta memoria, por lo que en sucesivos parrafos veremos algunas de sus propiedades, aunque no se ha pretendido ser exhaustivo en esta parte operacional, yá que dicho estudio, en la mayoria de sus aplicaciones p.e. resolución de ecuaciones diferenciales, es completamente marginal del desarrollo de esta memoria.

Esquematicamente lo anterior puede representarse en la forma siguiente:




Espacio de funciones de definición del operador

Espacio de operadores

(*) Denotamos por $(a_f^g\cdot)_{x_i}^k$ el operador de orden k, en la variable x

Nótese, por su importancia posterior, que el par ( $f = 1$, $g = 0$ ) pertenece al conjunto producto ( $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ ), yá que el par de funciones (1,0) satisface las condiciones respectivas de pertenencia a (1) y a (2), es por ello que $a^0_1. \in (A^g_f.)$.

2.- Definición del operador $a^g_f$.

Sea Y el espacio vectorial de las funciones reales, continuas, derivables y con la primera derivada continua, definidas en un intervalo cerrado $I = [a,b]$ de la recta real, es decir:

$$Y = ( y(x) \in \mathbb{R} \ / \ y \in C_I \ y \ \exists \ y'(x) \in C_I \ ) \qquad (3)$$

En estas condiciones el operador generico $(a^g_f.)$ asocia a cada $y \in Y$, la función definida por:

$$y(x) \in Y \longrightarrow a^g_f.y(x) = \frac{a^0_1.y(x) - g(x)y(x)}{f(x)}$$

donde $a^0_1. \equiv D$ ( operador derivada ordinaria ); siendo, pues, el operador $a^g_f.$ del tipo:

$$a^g_f. = \frac{D. - gI.}{f} \qquad \text{( Siendo } I \text{ el operador identidad)} \qquad (4)$$

expresión, que, evidentemente, constituye una generalización del operador D, en el sentido de que:

a) este nuevo operador derivada depende de dos funciones (f,g), que aunque con las restricciones propias de pertenencia a ( $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ ), son completamente arbitrarias.

b) el operador derivada D. queda englobado por el operador $a^g_f.$ como caso particular, basta considerar $f = 1$ y $g = 0$ para que $(a^g_f.) = (a^0_1.) \equiv D$.

Observese que el resultado de aplicar $(a^g_f.)$ a una función $y \in Y$ es una función continua en el intervalo I, por lo tanto el operador $(a^g_f.)$ es una aplicación entre el espacio vectorial Y y el espacio vectorial de las funciones continuas en I, es decir:

$$(a^g_f.) : Y \longrightarrow C_I \qquad (5)$$

3.- Linealidad del operador$(a^{g}_{f}\cdot)$

Es inmediato, comprobar, que el conjunto de operadores definido tiene estructura lineal sobre el conjunto de funciones Y, sobre las cuales áctua.

Efectivamente de la propia definición del operador (4) se deduce que:

$$\text{a)}\ \left[a^{g}_{f}\cdot\ (\ y_1(x)\ \dotplus\ y_2(x)\ )\right] = \left[a^{g}_{f}\cdot y_1(x)\right] \dotplus \left[a^{g}_{f}\cdot y_2(x)\right]$$

$$\text{b)}\ \left[a^{g}_{f}\cdot\ (\lambda y_1)\right] = \lambda\left[a^{g}_{f}\cdot y_1(x)\right] \qquad (6)$$

$\forall\ y_1,\ y_2 \in Y$ y $\forall\ \lambda$ real o complejo.

Por inducción, se demuestra, en general, que:

$$\left[a^{g}_{f}\cdot\ \left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)\ \right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[c_i\left(\ a^{g}_{f}\cdot y_i(x)\ \right)\right] \qquad (7)$$

De la linealidad del operador $a^{g}_{f}\cdot$ y de la condición b) del parrafo 2.- se deduce que el conjunto de operadores $a^{0}_{1}\cdot$ constituye un subespacio lineal del espacio lineal de operadores $a^{g}_{f}\cdot$

4.- Operadores equivalentes.

En el conjunto ( $A^{g}_{f}\cdot$ ) puede establecerse una relación binaria, que es, evidentemente, de equivalencia, de la forma siguiente:

$$(a^{g_i}_{f_i}\cdot)R\,(a^{g_k}_{f_k}\cdot) \Longleftrightarrow \left[a^{g_i}_{f_i}\cdot\ y(x)\right] = \left[a^{g_k}_{f_k}\cdot\ y(x)\right],\ \forall\ y(x) \in Y \qquad (8)$$

con esta relación R, el conjunto ( $A^{g}_{f}\cdot$ ) puede particionarse en clases de equivalencia, obteniendose:

$$(\ A^{g}_{f}\cdot\ )/R = \left\{(\ \overline{A^{g}_{f}\cdot}\ )\right\} = \left\{\left\{(a^{g_i}_{f_i}\cdot)\right\}\right\}$$

es por ello que cuando se trabaja con un operador$(a^{g}_{f}\cdot)$, en realidad, se opera con una clase de dichos operadores.

5.- Estructura del espacio operacional ( $A^{g}_{f}\cdot$ ).

1. Veamos como puede dotarsele de estructura de espacio vectorial al conjunto ( $A^{g}_{f}\cdot$ ).

En ( $A_f^g\cdot$ ) puede definirse una ley de composición interna aditiva, denotada por $\oplus$, de la forma siguiente:

$$\left[\left( a_{f_h}^{g_h} \oplus a_{f_\ell}^{g_\ell} \right).y(x)\right] = \left[a_{f_h}^{g_h}\cdot y(x)\right] + \left[a_{f_\ell}^{g_\ell}\cdot y(x)\right], \ \forall\ y(x) \in Y \qquad (9)$$

siendo el segundo miembro de (9) la función:

$$\frac{D.y(x) - \dfrac{g_h f_\ell + f_h g_\ell}{f_h + f_\ell}\, y(x)}{\dfrac{f_h\, f_\ell}{f_h + f_\ell}} \qquad (10)$$

que como se observa adopta la forma de $\left[a_{f_k}^{g_k}\cdot y(x)\right]$, con:

$$g_k = \frac{g_h f_\ell + f_h g_\ell}{f_h + f_\ell} \in \mathcal{G} \quad y \quad f_k = \frac{f_h\, f_\ell}{f_h + f_\ell} \in \mathcal{F} \qquad (11)$$

Dicha ley $\oplus$ confiere a ( $A_f^g\cdot$ ) estructura de grupo abeliano, como es facilmente comprobable, considerando como elemento neutro para $\oplus$ el operador nulo $\Theta$, y como elemento simétrico de cualquier operador $(a_f^g\cdot)$, el operador opuesto al mismo ( en nuestro caso puede considerarse como operador opuesto de uno dado $(a_f^g\cdot)$ , el operador constituido por el par de funciones ( $-f$, $g$ ), es decir, el operador $(a_{-f}^g\cdot)$ ).

En el conjunto operacional puede definirse una ley de composición externa multiplicativa, de la forma siguiente:

$$\left[(\lambda \otimes a_f^g).y(x)\right] = \lambda\ (\ a_f^g.y(x)\ ) \qquad (12)$$

$\forall\ y(x) \in Y$ y $\forall\ \lambda$ real o complejo.

Es evidente que el triple ( $A_f^g\cdot$, $\oplus$, $\otimes$ ) es un espacio vectorial.

2. <u>Operación composición de operadores.</u>

Supuesto que se verifiquen las condiciones siguientes para las funciones de definición del operador y para las que constituyen su dominio $y(x) \in Y$:

a) las funciones $y(x) \in C_I^n$

b) las funciones $g_i(x) \in C_I^{n-i}$

c) las funciones $f_i(x) \in C_I^{n-i}$ y $f_i(x) \quad 0$, $\forall\ x \in I$

donde $C_I^k$ representa al conjunto de funciones continuas, que son derivables hasta el orden k y tienen las k primeras derivadas continuas. Puede establecerse una operación de composición en el espacio operacional, de la forma siguiente:

Dados dos operadores $(a^{g_h}_{f_h}\cdot)$ y $(a^{g_l}_{f_l}\cdot)$ de $( A^{g}_{f}\cdot )$, llamaremos composición de operadores, y lo denotaremos por $\left[a^{g_l}_{f_l}\cdot(a^{g_h}_{f_h}\cdot)\right]$, a la operación de aplicación sucesiva de los dos operadores de la forma siguiente:

$$\left[a^{g_l}_{f_l}\cdot(a^{g_h}_{f_h}\cdot y)\right] = \left[a^{g_l}_{f_l}\cdot z(x)\right], \text{ donde } z(x) = \left(a^{g_h}_{f_h}\cdot y\right) \qquad (13)$$

( por comodidad, emplearemos las notaciones $a_i$ para designar al operador $(a^{g_i}_{f_i}\cdot)$ y en el caso de operadores compuestos por operadores "elementales" $a_i$, designaremos por $a_{hr}$ la composicion de los operadores $a_h$ y $a_r$, aplicados en este orden).

La anterior definición (13) puede extenderse, por inducción, a una composición finita de n operadores de $( A^{g}_{f}\cdot )$, obteniendose (empleando las notaciones reducidas ) lo siguiente:

$$\left[a_{12\ldots n}\cdot y(x)\right] = \left[a_n\cdot\left\{a_{n-1}\cdot\left[\cdots\cdots\left(a_1\cdot y(x)\right)\right]\right\}\right] \qquad (14)$$

Es inmediato comprobar que los elementos (14) tienen estructura lineal, sobre el conjunto de funciones $y \in Y$, supuesto que se verifican las condiciones a), b) y c) de 2.

La operación composición de operadores, en general, no es conmutativa, es decir:

$$\left[a_h\cdot(a_r\cdot y)\right] \neq \left[a_r\cdot(a_k\cdot y)\right] \qquad (15)$$

como se ve facilmente, sin más que desarrollar las expresiones correspondientes; pero en le caso de que:

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ f_h = \mu f_r \\ &\text{ii)}\ g_h = g_r \div \lambda f_r \end{aligned} \qquad (16)$$

la operación composición de operadores, es conmutativa (*).

En particular las condiciones (16) se verifican si:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ f_h = f_r = f \\ &\text{b)}\ g_h = g \div \lambda_h f \quad \text{y} \quad g_r = g \div \lambda_r f \end{aligned} \qquad (17)$$

---

(*) Su demostración puede verse en ALDANONDO. Métodos de solución de ecuac. y sistemas difer. lineales en "aleph". P.F.C. 1.968 (pag. 10 del Cap. I) o en la tésis de GUTIERREZ-JAIMEZ Contribución al estudio de procesos markovianos de difusión extendidos a algebras especiales de operadores, 1.972

En el caso de que ocurra (17), cualquier operador $(a_{f_i}^{g_i}\cdot)$ puede expresarse en la forma $\left[a_f^g\cdot - \lambda_i I\right]$ ; en efecto:

$(a_i\cdot) \equiv (a_{f_i}^{g_i}\cdot) = \left[a_f^{g} + \lambda_i f\right]$, luego $\forall$ $y(x) \in Y$ se tiene

$$\left[a_f^{g} + \lambda_i f \; y\right] = \frac{y' - (\; g + \lambda_i f \;)y}{f} = (\; a_f^g\cdot - \lambda_i \;)\; y \quad (18)$$

donde $\lambda_i$ es un número real o complejo.

El subconjunto de operadores de ( $A_f^g\cdot$ ), que verifican las condiciones (17), lo representaremos por ( ${}^cA_f^g\cdot$ ), dicho conjunto está constituido por los operadores conmutativos respecto de la ley de composición de operadores, representandose un elemento generico de dicho conjunto, por $({}^c a_{f_i}^{g_i}\cdot)$.

Considerando que en ( ${}^cA_f^g\cdot$ ) estan incluidos los operadores nulo e identidad ( cuestión completamente logica, yá que dichos operadores permutan con cualquier otro operador respecto de la ley de composición definida anteriormente ) podrá dotarse a este espacio de operadores de una estructura algebráica más compleja que la obtenida hasta ahora de espacio vectorial, como veremos más adelante.

Observese, por otra parte, que el resultado de la composición de los n operadores $(a_{f_i}^{g_i}\cdot)$, dada por (14), depende de 2n funciones ( n funciones $f_i$ y otras tantas $g_i$ ) y que en el caso de que los operadores $a_i$ sean conmutativos para la ley de composición, (14) sólo depende de un par de funciones f y g ; esta misma dependencia se obtiene en el caso de que todos los $a_i$ sean iguales, en este caso de igualdad se adopta como notación, la siguiente:

$$a_{12\ldots n}\cdot = (a_f^g\cdot)^n \quad (19)$$

Y considerando que el operador $(a_f^g\cdot)$, prefijado, fuese el $a_1^0\cdot \equiv D$, lo que se obtiene es el operador derivada enésima ordinaria: $D^n$.

Fijado un operador $a_i$, puede obtenerse un espacio vectorial de dimensión infinita numerable, sin más que considerar el conjunto de operadores obtenido a partir de las combinaciones lineales de la composición reiterada de dicho operador y el operador identidad, siendo una base del espacio vectorial $B = ( I, a_i, (a_i)^2, \ldots\ldots, (a_i)^n, \ldots\ldots)$ (*).

Estos operadores compuestos, mediante la composición reiterada de un operador elemental, gozan de las siguientes propiedades:

(20)

a) la ley de composición de operadores es asociativa

$$\left[(a_i.)^m \, (a_i.)^n\right] (a_i)^p. \; y = (a_i.)^m \left[(a_i.)^n \, (a_i.)^p\right] y$$

b) la ley composición de operadores es conmutativa

$$(a_i.)^m \left[(a_i.)^n y\right] = (a_i.)^n \left[(a_i.)^m y\right]$$

c) la ley composición de operadores tiene por elemento neutro, al operador identidad.

d) la ley composición de operadores es distributiva, respecto a la suma de operadores

$$(a_i.)^m \left[(a_i.)^n \oplus (a_i.)^p\right] y = \left[(a_i.)^m \, (a_i.)^n \oplus (a_i.)^m (a_i.)^p\right] y$$

e) divisores de cero

$$(a_i.)^m y = 0, \forall\, y \in Y \implies (a_i.)^m \equiv \theta \qquad (**)$$

<u>De lo anterior se deduce que el espacio de operadores engendrado por la base B, tiene estructura de algebra,</u> en particular, considerando el grupo abeliano aditivo del espacio vectorial y las propiedades (20) se deduce que el referido espacio operacional, tiene estructura de anillo conmutativo unitario y sin divisores de cero.

## 3. Nucleo del operador $a_f^g$.

El nucleo de cada operador $a_f^g.$ , estará constituido por aquellas funciones de Y tales que $a_f^g.$ las aplica en la

---

(*) Puede consultarse la tésis de RODRIGUEZ-CANO: resolución de ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores lineales. Sevilla, 1.970 -Cap. I- para otros operadores y aspectos.
(**) Vease cap. III, pag. 3 de la mencionada obra de ALDANONDO.

función nula, es decir, $(a^g_f.y) = \frac{D.y - gy}{f} = 0$, obteniendose que las funciones que satisfacen dicha condición ( ecuación diferencial, lineal y homogenea ) constituyen el nucleo del operador, viniendo dadas por la expresión:

$$y = k\ e^{G(x)}\ ,\ \text{donde}\ G(x) = \int^x g(t)\ dt \qquad (21)$$

Es de comprobación inmediata que el conjunto de estas funciones, es un sub-espacio vectorial del espacio lineal de funciones Y.

4. Operación asociada al operador$(a_i.)$.

Despues de conseguir la estructura de anillo del espacio operacional: $(\otimes\ a_i.)^k$ con $k \in N$, cabe pensar si el operador$(a_i.)$, tendra un operador, que denotaremos por$(a_i.)^{-1}$, que sea inverso de él, en el sentido que precisa la definición siguiente: Dado un operador $a_i.$, llamaremos$(a_i.)^{-1}z$, a la función $y(x)$, si existe, tal que: $a_i.y = z$; dicha función vendra dada, si $z(x)$ es integrable, en la forma:

$$y(x) = e^{G_i(x)}\left[k + \int^x e^{-G_i(t)}.f_i(t).z(t).dt\right] = (a_i.)^{-1}y \qquad (22)$$

Los problemas de existencia de estos tipos de operadores, aunque muy interesantes, salen fuera del objetivo de esta memoria (**)

Notese que (22) surge,de forma natural, al intentar resolver la ecuación diferencial lineal, no-homogenea determinada por:

$$a_i.y = z \equiv \frac{D.y - g_i.y}{f_i} = z \qquad (23)$$

Y en el caso particular de que $y(x_i) = 1$, la expresión (22) adopta la forma:

$$e^{G_i(x)-G_i(x_i)} + e^{G_i(x)}\int_{x_i}^{x} e^{-G_i(t)}f_i(t).z(t).dt \qquad (24)$$

Siendo el segundo sumando de la expresión (24) el resultado de componer, mediante la operación producto compuesto (*), una función especial (asociada al operador $a_i$) con la

(*) Vease la introducción de dicha operación en ALDANONDO,p.4.4

(**)Vease su estudio, en el Cap.III de la obra de ALDANONDO función z. En la presente memoria dicha operación se introducirá a partir de las funciones $l_i$, que son las autofunciones del operador $(a_i\cdot)$, en la forma siguiente:

A cada operador $(a_i\cdot)$ de ( $A_f^g\cdot$ ) se le asocia una función $l_i$, definida en el intervalo $I = [a,b]$ del eje real, relacionada con el Ker($a_i$), mediante la expresión:

$$(a_{f_i}^{g_i}\cdot) \longrightarrow l_i = e^{G_i(x) - G_i(x_i)} \qquad (25)$$

donde x y $x_i$ son puntos del intervalo cerrado I.

Considerando el espacio de las funciones Z ( de valor real ocomplejo ) continuas de la variable real $x \in I = [a,b]$.

A todo par ( $l_i$,z ) de funciones, donde $z \in Z$, se le asocia la función:

$$( l_i,z ) \longrightarrow \int_{x_i}^{x} e^{G_i(x) - G_i(t)} f_i(t)\, z(t).dt$$

supuesto que z sea integrable. (25, bis)

El caso más interesante es el correspondiente a los operadores del espacio ( $^cA_f^g\cdot$ ), pues, dichos operadores$(^c a_{f_i}^{g_i}\cdot)$ se sustituyen por (18), obteniendose que la función $l_i$, asociada al operador$(^c a_{f_i}^{g_i}\cdot)$, es la autofunción correspondiente al auto valor $\lambda_i$, que toma el valor 1, para $x = x_i$, dicho de otra forma, a cada operador$(^c a_i\cdot)$ se le pone en correspondencia, por (18), con $a_f^g\cdot - \lambda_i I$, si se quiere resolver la ecuación diferencial , con la condición inicial $y(x_i) = 1$, siguiente:

$$( a_f^g\cdot - \lambda_i )y = 0 \qquad (26)$$

se obtiene como solución la función $l_i$, dada por la expresión:

$$l_i = e^{G(x) - G(x_i) + \lambda_i\left[F(x) - F(x_i)\right]} \qquad (*) \qquad (27)$$

que como se observa, satisface la condición inicial $l_i(x_i) = 1$.

Al mismo resultado (27) se llega, mediante (25), en el caso particular que nos ocupa de operadores del tipo$(^c a_i\cdot)$ puesto que, de las condiciones de conmutatividad, dadas por (17), se obtiene que (25) pasa a ser (27).

(*)La función $F(x) = \int^x f(t)\, dt$, y G(x) viene dada por (21)

En el caso de que la función $l_i$ proceda de un operador$({}^c a_i.)$, la denotaremos por ${}^c l_i$ de aquí en adelante, para poner de manifiesto su procedencia.

Operando con funciones ${}^c l_i$, la aplicación (25,bis) toma la forma:

$$(28) \qquad ({}^c l_i, z) \longrightarrow \int_{x_i}^{x} e^{G(x)-G(t)+\lambda_i\left[F(x)-F(t)\right]} .f(t) z(t) dt$$

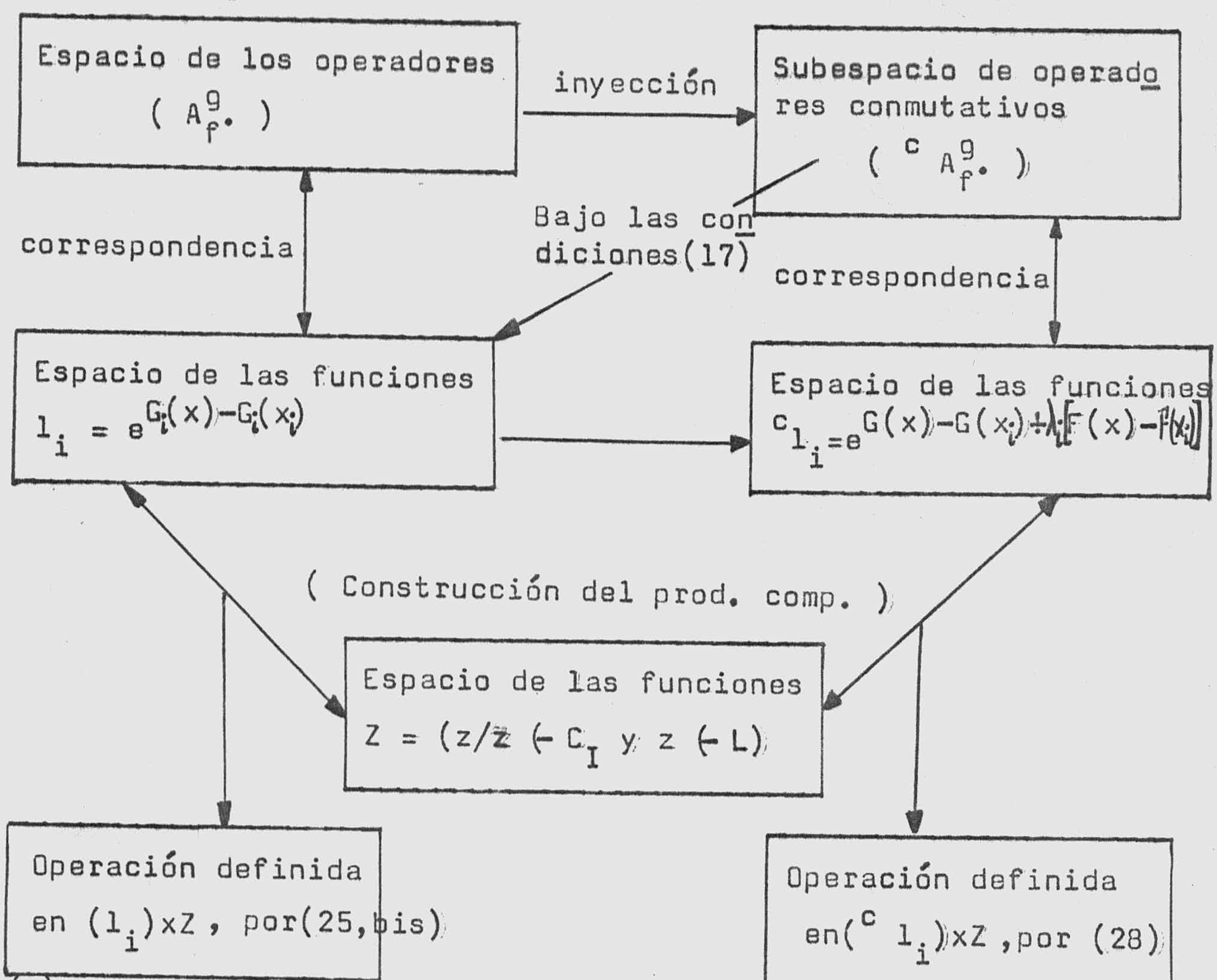
La aplicación (25,bis), se conoce con el nombre de producto compuesto (*), representandose por $\underline{v}$, y será la base para definir una norma procedente de un producto escalar.

Si en (25,bis) $z(x) = l_i$, se obtiene:

$$(l_i, l_i) \longrightarrow l_i \,\underline{v}\, l_i = l_i^2 \qquad (29)$$

y semejante notación para las potencias sucesivas de $l_i$.

Esquematicamente puede expresarse lo anterior en la forma siguiente:




(*) Puede interpretarse como una integración generalizada.

## 5. Propiedades de las funciones ${}^{c}l_{i}$.

Recojemos en este punto, algunas de las propiedades caracteristicas, de las autofunciones de los operadores $({}^{c}a_{i}\cdot)$, por su interes en la construcción de la transformada de Laplace sobre $( {}^{c}A^{g}_{f}\cdot )$, supondremos , además, que $x_1=x_2=\ldots=x_i=\ldots=x_o$.

a) $a^{g}_{f}\cdot {}^{c}l_{i} = \lambda_i \cdot l_i$

b) ${}^{c}a_{i}\cdot {}^{c}l_{i} = 0$

c) ${}^{c}a_{i}\cdot( {}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{j} ) = {}^{c}l_{j}$

d) ${}^{c}a_{ij}\cdot( {}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{j} ) = 0$

e) ${}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, ( {}^{c}l_{j} \dotplus {}^{c}l_{k} ) = {}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{j} \dotplus {}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{k}$

f) ${}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{j} = {}^{c}l_{j} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{i} = 1/(\lambda_i - \lambda_j)\left[( {}^{c}l_{i} - {}^{c}l_{j} )\right]$

g) $( {}^{c}l_{i} )^{n} = 1/(n-1)!\left[{}^{c}l_{i}\big(F(x)-F(x_i)\big)^{n-1}\right]$

h) ${}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, ( {}^{c}l_{j} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{k} ) = ( {}^{c}l_{i} \,\underline{v}\, {}^{c}l_{j} ) \,\underline{v}\, {}^{c}l_{k}$

Las demostraciones de todas estas propiedades pueden verse, junto con otras, en el Cap. V de la citada obra de ALDANONDO, 1.968.

Consecuencias de los anteriores puntos.

De (19) se deduce que el operador compuesto $a_{12..n}$ es un polinomio de grado n, del operador $(a^{g}_{f}\cdot)$, $P(a^{g}_{f}\cdot)$, de esta consecuencia y de las propiedades (20) se obtiene que el conjunto de operadores ( $P_n(a^{g}_{f}\cdot)$ )- polinomios enteros del operador $(a^{g}_{f}\cdot)$, de coeficientes constantes- tienen estructura de algebra, por lo tanto los operadores compuestos de operadores elementales conmutativos, respecto a la ley de composición, son un algebra; respecto a lasoperaciones habituales.

Un estudio detallado de estos polinomios $P(a^{g}_{f}\cdot)$ puede verse en el Cap. III de [ 1 ], analogamente se estudian polinomios del operador$\Delta$y del operador lineal (a(x).D L + b(x)) en la citada tésis de RODRIGUEZ-CANO[29].

6.- Dominio del operador$(a^{g_i}_{f_i}\cdot)$

Veamos que al dominio de un operador $a^{g_i}_{f_i}\cdot$ ( con la condición de que $f_i > 0$ ) puede dotarsele, en caso de que interese, de estructura de espacio prehilbertiano.

Consideremos el espacio vectorial de las funciones de valor complejo z, de la forma:

$$(30) \qquad z = y(x) + i.u(x)$$

donde $y(x)$ y $u(x)$ son funciones reales, de variable real x, que satisfacen las condiciones (3). A dicho espacio lineal lo representaremos por $Z(\mathbb{C})$, para indicar que el cuerpo de escalares, está constituido por los números complejos.

El motívo de considerar funciones del tipo (30) es doble: 1º porque dichas funciones son utilizadas en Teoria de Procesos estocásticos y 2º porque, evidentemente, (30) comprende como caso particular, el de las funciones de rango real.

Se define una aplicación h de $Z(\mathbb{C})\times Z(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}$, de la forma siguiente:

$$(31) \qquad h : (z_1, z_2) \longrightarrow \langle z_1/z_2\rangle \in \mathbb{C}$$

donde $\langle z_1/z_2\rangle$ representa el producto compuesto de la autofunción $1_i$, del operador $a_i\cdot$, con el producto de la función $z_1$ por la función conjugada de $z_2$, particularizado al punto c del interior del intervalo cerrado $I = [a,b]$, en el cual estan definidas las funciones $u(x)$ e $y(x)$; es decir:

$$(32) \quad \langle z_1/z_2\rangle = (1_i \ \underline{v} \ z_1.\overline{z}_2)_{x=c} = \int_{x_i}^{c} e^{G_i(c)-G_i(t)} \cdot f_i(t) z_1(t)\overline{z_2(t)}\,dt$$

y en el caso de que el operador utilizado sea del tipo$({}^{c}a^{g_i}_{f_i}\cdot)$, la aplicación (31) nos dará por imagen:

$$(33) \quad \langle z_1/z_2\rangle = \int_{x_i}^{c} e^{G(c)-G(t)+\lambda_i\left[F(c)-F(t)\right]} \cdot f(t) z_1(t)\overline{z_2(t)}\,dt$$

La aplicación h definida por (32) o (33), dependiendo del tipo de operador del que procede, es una forma hermitiana, en efecto:

(34) a) $\langle z_1 + z_2/z\rangle = \langle z_1/z\rangle + \langle z_2/z\rangle$

b) $\langle \lambda z/z_1\rangle = \lambda\langle z/z_1\rangle$

por cumplirse, evidentemente, las propiedades (34), la aplicación h es una forma sexquilineal. Y por verificarse:

(35) $\langle z_1/z_2\rangle = \overline{\langle z_2/z_1\rangle}$

la forma sexquilineal h es hermitiana.

Las demostraciones de (34) y (35), se deducen immediatamente de la definición de h dada por (32).

Imponiendole la condición al operador $a^{g_i}_{f_i}$ utilizado, de que $f_i > 0$, se tiene que la forma hermitiana h, es definida positiva, yá que se verifica:

(36) $\langle z/z\rangle > 0, \forall z \in Z(\mathbb{C}) \,/\, z \neq 0$

como se desprende, facilmente, de (32).

Observese en (32) o (33) que $l_i \in \mathrm{Ker}\,(a_i.)$, y que $l_i . f_i$ es una función peso, en la operación $\langle / \rangle$ asociada a dicho nucleo.

La forma hermitiana h es no-degenerada, pues, evidentemente, no existe un $z_1 \neq 0$, tal que:

(37) $\langle z/z_1\rangle = 0 \;, \forall z \in Z(\mathbb{C})$

Por verificar h las anteriores propiedades (34)... ...(37), se verifica el siguiente teorema (*):

La función $\|z\| = (\langle z/z\rangle)^{1/2}$ es una norma en $Z(\mathbb{C})$, supuestas de cuadrado integrable las funciones z.

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado en Teoria de Procesos, veamos como el espacio prehilbertiano anterior $[Z(\mathbb{C}), \langle / \rangle]$, es un espacio completo, es decir, de Hilbert.

(38) Consideremos que al espacio $Z(\mathbb{C})$ pertenecen los limites, enmedia cuadratica, de las sucesiones de combinaciones del tipo: $\sum_k c_k z_k$. En estas condiciones, cualquier sucesión de

(*) Ap. FUENTES de Analisis Funcional, 1.969 pag. 77

Cauchy de funciones de $Z(\mathbb{C})$ es convergente y su limite pertene ce a dicho espacio, efectivamente:

(39) por hipótesis $\|z_m - z_n\| \xrightarrow[\left.\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}\to\infty]{} 0 \Longrightarrow$

$$\|z_m - z_n\|^2 \xrightarrow[\left.\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}\to\infty]{} 0 \iff \langle z_m - z_n / z_m - z_n \rangle =$$

$$= \int_{x_i}^{c} e^{G(c)-G(t)+\lambda_i[F(c)-F(t)]} f(t)\,|z_m - z_n|^2 dt \longrightarrow 0$$

y de las propiedades (36) y (37) se desprende que para que es to ocurra, tiene que ser:

(40) $|z_m - z_n| \xrightarrow[\left.\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right\}\to\infty]{} 0$

por lo que sólo queda por comprobar:

(41) que si $\{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} z$

dicho limite $z \in Z(\mathbb{C})$, con lo cual $[Z(\mathbb{C}), \langle\,/\,\rangle]$, será un espa cio de Hilbert; pero esto es inmediato de (38).

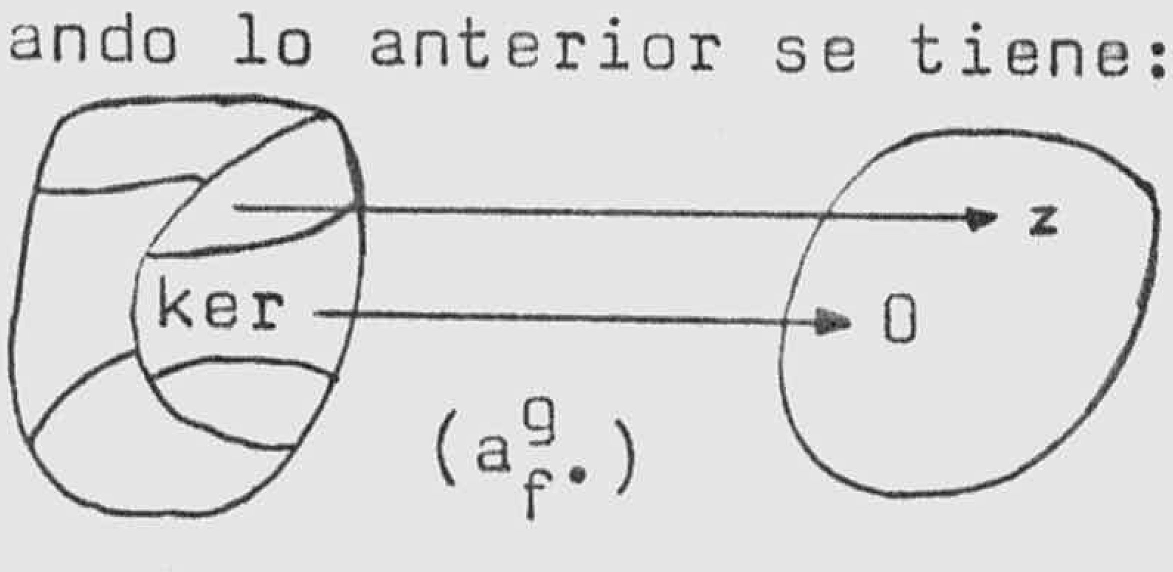
Notese:a) que aunque utilizando funciones de valor complejo, las funciones del operador utilizado son reales. Podria hacerse un estudio paralelo al efectuado, utilizando operadores con funciones de definición de rango complejo. Otro avance en este campo seria considerar funciones complejas, en vez de utilizar las funciones del tipo z que en el presente trabajo se han empleado, là utilización de estas funciones es particularmente interesante en Procesos.

(42) b) que en el espacio $Z(\mathbb{C})$ puede definirse u na relación de equivalencia, mediante:

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \in \mathrm{Ker}\ (a_{f_i}^{g_i})$$

relación que particiona el espacio $Z(\mathbb{C})$ en clases de equivalen cia de la forma: $Z(\mathbb{C})/R = \{\bar{z}_r\} = \left\{\{z_r + k\, e^{G_i(x)}\}\right\}$; con ello se lo gra que la aplicación que define el operador sea inyectiva, es quematizando lo anterior se tiene:

Z(C)/R




$Z(C) = z/z = y(x) + iu(x)$

con $y(x) \in C$ y $u(x) \in C$

7.- Transformada de Laplace extendida a operadores de $({}^{c}A^{g}_{f}\cdot)$

Consideremos los operadores de $(A^{g}_{f}\cdot)$ que son conmutativos repecto a la ley de composición de operadores, es decir, el conjunto de operadores$({}^{c}a_i\cdot)=(a_f^{g\dotplus\lambda_i f}\cdot)$

Sea s(x) una función continua que está definida en $x > x_i$ y un elemento arbitrario del espacio $({}^{c}A^{g}_{f}\cdot)$, con las condiciones de definición siguientes:

(43) $$f(x) \in C \text{ para } x > x_i \text{ y } f(x) \neq 0 \text{ para } x > x_i$$

$$g(x) \in C \text{ para } x > x_i$$

siendo $D.F(x)= f(x)$ y $D.G(x) = g(x)$.

Para asegurar la existencia de la transformación, se exije:

(44) $$\lim_{x \to \infty} e^{-G(x)-\lambda_i F(x)} = 0; \text{ con } \lambda_i \in C \text{ y } Re(\lambda_i) > 0.$$

en estas condiciones, se define transformada mediante:

(45) $$L^{g}_{a_i\cdot}(s)=\left[{}^{c}1_i, s(x)\right] \longrightarrow e^{G(x_i)\dotplus\lambda_i F(x_i)}\int_{x_i}^{\infty} e^{-G(t)-\lambda_i F(t)}.f(t)s\,dt$$

1. Propiedades

A) La definición (45) precedente, incluye la correspondiente al caso $a^{0}_{1}\cdot$, que para $x_i= 0$, será:

(46) $$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_i t}.s(t).dt = S(\lambda_i) = L(s)$$

la transformada de Laplace clásica.

B) La transformada definida es lineal.

Su demostración es trivial, pues, está basada en la linealidad de la integral.

C) Otras propiedades interesantes de la transformada, pueden consultarse en el Cap. XVII de ALDANONDO[1].

2. Relación de la transformada definida y la operación v

Si en la expresión (28) que da el producto compuesto de una autofunción del operador$({}^{c}a_i\cdot)$por una función z(x), ( que puede considerarse como una integración generalizada ) hacemos $x = c$, ( de forma analoga a lo realizado en (32) ) se obtiene una integral definida que toma la forma:

(47)
$$({}^{c}l_i, s) = ({}^{c}l_i \,\underline{v}\, s)_{x=c} = e^{G(c) + \lambda_i F(c)} \int_{x_i}^{c} e^{-G(t) - \lambda_i F(t)} f(t)s(t)\,dt$$

de donde, considerando esta expresión con la que nos da la definición de la transformada (45), se deduce:

(48)
$$\lim_{c \to \infty} \frac{e^{G(x_i) + \lambda_i F(x_i)}}{e^{G(c) + \lambda_i F(c)}} ({}^{c}l_i \,\underline{v}\, s)_{x=c} = L^{g}_{{}^{c}a_i\cdot}(s)$$

la relación existente entre la transformada de Laplace extendida al operador ${}^{c}a_i\cdot$, y la operación asociada a dicho operador, mediante el nucleo del mismo.

Esquematicamente, lo anterior, puede resumirse en la forma siguiente:

Subespacio de operadores $({}^{c}A^{g}_{f}\cdot)$

Conjunto de autofunciones ${}^{c}l_i$, de los operadores ${}^{c}a_i\cdot$

Espacio de las funciones continuas, definidas para $x > x_i$.

Transformada de Laplace, extendida sobre el espacio $({}^{c}A^{g}_{f}\cdot)$ (sucesión de transformadas para los $\lambda_i$)

La transformada $L^{g}_{{}^{c}a_i\cdot}$ (45), conserva las propiedades de la transformada de Laplace ordinaria, con respecto al operador $({}^{c}a_i\cdot)$, (de cuyo nucleo procede), de transformación de derivadas sucesivas y de funciones determinadas. Para un estudio más detallado de estas propiedades puede verse Cap. XVII de [1]

## 8.- El espacio operacional $({}^{p}A^{g}_{f}\cdot)$

Nos interesa extender el conjunto de operadores $(A^{g}_{f}\cdot)$ que actuaban sobre funciones definidas en $\mathbb{R}$, a un espacio operacional $({}^{p}A^{g}_{f}\cdot)$ que actue sobre funciones reales, definidas en un dominio D de $\mathbb{R}^n$.

(49) Sea $z = z(x)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, una funeión real continuay derivable (respecto a cada una de sus n variables) y con las primeras derivadas parciales continuas, definida en un dominio D de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de estas funciones, lo designaremos por Z, dotado de las leyes suma de funciones y producto de una función por un número real, es un espacio lineal.

En estas condiciones un operador generico $(a^{g_i}_{f_i}\cdot)^1_{x_i}$ de $({}^{p}A^{g}_{f}\cdot)$, asocia a cada función z de Z, la función definida por la siguiente expresión:

(50)
$$z \in Z \longrightarrow \left[a^{g_i}_{f_i}\cdot z(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\right]^1_{x_i} = \frac{\left[a^0_1\cdot z(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\right]^1_{x_i} - g_i(x_1,\ldots,x_n)z(x_1,\ldots,x_n)}{f_i(x_1,\ldots\ldots,x_n)}$$

donde:

(51)
$$\left[a^0_1\cdot z(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\right]^1_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{z(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n) - z(x)}{\Delta x_i}$$

es decir: $(a^0_1\cdot)^1_{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Por ello puede considerarse a $(a^{g_i}_{f_i}\cdot)^1_{x_i}$ como una derivada parcial de primer orden generalizada (respecto a la variable $x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$).

Suponiendo que las funciones $f_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ y $g_i = g_i(x_1,\ldots,x_n)$, satisfacen las condiciones (1) y (2) en el dominio D de $\mathbb{R}^n$, se tiene que (50) es una función continua en D.

<u>Propiedades fundamentales del operador</u> $(a^g_f\cdot)^1_{x_i}$ son:

a) en el caso particular de que las funciones $f_i$ y $g_i$, sean 1 y 0, respectivamente, se tiene que el operador $(a^g_f\cdot)^1_{x_i}$ coincide con el operador derivada parcial ordinaria.

b) Los operadores de $({}^p A^g_f\cdot\ )$ son lineales sobre el espacio de funciones Z, es decir:

(52) $$(a_i\cdot)^1_{x_i}(c_1z_1 + c_2z_2) = c_1(a_i\cdot z_1)^1_{x_i} + c_2(a_i\cdot z_2)^1_{x_i}$$

c) definiendo, de forma analoga a lo hecho en (9) y (12), una ley interna y otra externa, al conjunto operacional $({}^p A^g_f\cdot\ )$ puede dotarsele de estructura de espacio lineal.

d) puede definirse, analogamente a (13), una operación de composición de operadores.

Obteniendose, en general, que:

(53) $$\left[a_h\cdot(a_k\cdot z)^1_{x_k}\right]^1_{x_h} \neq \left[a_k\cdot(a_h\cdot z)^1_{x_h}\right]^1_{x_k}$$

por lo que es interesante, establecer unas <u>condiciones suficientes para que la ley de composición de operadores, sea conmutativa.</u> Estas condiciones son las siguientes (*):

(54) a) $$\frac{\partial}{\partial x_k} f_h \equiv 0,\ \forall\ k \neq h \qquad \begin{matrix}(k=1,2,\ldots,n)\\(h=1,2,\ldots,n)\end{matrix}$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x_k} g_h = \frac{\partial}{\partial x_h} g_k$$

que pueden resumirse en estas otras:

(55)

i) $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_n) = f_k(x_k)$ , $\forall\ k = 1,2,\ldots,n$

ii) que las $g_h(x)$ puedan obtenerse, de una función escalar $G(x)$, como las componentes de su gradiente, es decir:

$$(g_1,g_2,\ldots,g_h,\ldots,g_n) = \overline{\nabla}\cdot G(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_h},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right).G(x)$$

Es evidente que en el caso particular de $(a^0_1\cdot)^1_i$, se cumplen estas condiciones, obteniendose el Teor. de Schwartz.

(*) Puede verse en[1 ]y en[ 2 ]de ALDANONDO, o en la tésis de GUTIERREZ-JAIMEZ, anteriormente citada, pag.8

9.- Transformada de Laplace en $\mathbb{R}^n$, extendida a una medida, en el espacio operacional $({}^p A^g_f.)$.

Los operadores definidos en (50) pueden ser estudiados en si mismos ( analogamente a lo realizado en pág. 30 y siguientes de esta memoria ) y en particular es interesante el subconjunto operacional formado por los operadores que satisfacen a (55), pero este estudio nos apartaria de la idea central del presente trabajo, que considera a dichos operadores como instrumento ó herramienta de trabajo que nos sirva para definir una transformada de Laplace en $\mathbb{R}^n$, extendida al conjunto operacional $({}^p A^g_f.)$, de una medida m.

Para conseguir diho fín asociamos a cada operador de $({}^p A^g_f.)$ que satisfaga a (55), es decir, que sea conmutativo con respecto a la ley de composición de operadores, una función:

(56)
$$l_i = e^{G(x)-G(x^i)+\lambda_i\left[F_i(x_i)-F_i(x_i^i)\right]}$$

que, como es facilmente comprobable, satisface a la ecuación diferencial en derivadas parciales siguiente:

(57)
$$(a_i.z)^l_{x_i} - \lambda_i\, z = 0 = \frac{\partial z}{\partial x_i} - g_i(x)z - \lambda_i f_i(x_i)z$$

con la condición inicial de que $z(x^i) = z(x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_i, \ldots, x^i_n)$ valga la unidad ( analogo a lo realizado en (26) y (27) ).

Por otra parte, es, sobradamente, conocido que la transformada de Laplace de una función de dos variables, viene dada por la expresión:

(58)
$$L\left[z(x,y)\right] = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}\, z(x,y)\, dx\, dy = T(\lambda_1,\lambda_2)$$

Cabe, pues, preguntarse si es posible definir una transformada que generalize a (58) ( en el sentido considerado en (45) respecto de (46) ). La respuesta es afirmativa y basta considerar la génesis de (58), para poder definir, de a cuerdo con (45) ( utilización de un operador conmutativo para la ley de composición de operadores ), la siguiente transformación:

(59)
$$L^{g}\left[z(xy)\right] = \int_{x_i}^{\infty}\int_{y_i}^{\infty} e^{2\left[G(x_i y_i)-G(xy)\right]+\lambda_i^1\left[F_x(x_i)-F_x(x)\right]+\lambda_i^2\left[F_y(y_i)-F_y(y)\right]} . f_x(x).f_y(y).z(xy).dx.dy$$

en caso de que exista la integral, se tiene una transformación más general que la (58), de forma tal que (59) coincide con(58) en el caso de utilizar el espacio operacional $({}^{p}A_1^0.)y(x,y)=(0;0)$

Notese que (59) surge de la consideración de la génesis de (58) y de la utilización de dos funciones (56) procedentes de los dos operadores: $(a_i.)_x^1$ y $(a_i.)_y^1$, que pueden considerarse como las derivadas parciales generalizadas de una función de dos variables, supuestos que sean conmutativos respecto de la ley composición de operadores ( es por esto por lo que se utilizan funciones asociadas del tipo (56) ).

También es de destacar que (59) conserva las propiedades caracteristicas de una transformación de Laplace, entre ellas la más interesante, es la linealidad.

El paso siguiente, consiste en definir (59) para una función z(x), definida en un dominio D de $\mathbb{R}^n$, para $x > x^i$, obteniendose:

(60)
$$L^{g}\left[z(x)\right] = \int_D e^{n\left[G(x^i)-G(x)\right]+\langle \lambda,\left[F(x_i^i)-F(x_i)\right]\rangle} \bigotimes_{i=1}^{n} f_i(x_i)z(x)dx$$

donde:

(61)
$$F(x_i) = \left[F_1(x_1),F_2(x_2),\ldots,F_n(x_n)\right] ; \quad f_i(x_i)= \frac{dF_i(x_i)}{dx_i}$$

$\lambda=\left[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right]$ ; $x^i$ es un punto de D, que en particular puede ser el $(0,0,\ldots,0)$ y $\langle , \rangle$ es un producto escalar de los vectores $\lambda$ y $\left[F(x_i^i)-F(x)\right]$, siendo por último $\bigotimes_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ el producto de las n funciones $f_i(x_i)$, que son las derivadas de las funciones $F_i(x_i)$.

Observese que (60) contiene como casos particulares a (45) y a (59) que son las expresiones de la transformada de Laplace, extendida a los operadores ($^p A^g_f$. ), en una y dos dimensiones, respectivamente.

El último paso, consiste en considerar una medida positiva m en ( $\mathbb{R}^n$ , $B_{\mathbb{R}^n}$), y definir su transformada, ( entenderemos por $B_{\mathbb{R}^n}$ , la tribu de los borelianos de $\mathbb{R}^n$ ) de la forma siguiente:

Sea m una medida positiva en ($\mathbb{R}^n$, $B_{\mathbb{R}^n}$), se designa por $D_m$ el dominio convexo de $\mathbb{R}^n$ definido por:

(62) $$\theta \in D_m \iff \int_{\mathbb{R}^n} e^{n\left[G(x^i)-G(x)\right]+\left\langle \theta, \left[F(x^i_i)-F(x_i)\right]\right\rangle} \bigotimes_{i=1}^{n} f_i(x_i)\, dm(x) < \infty$$

si $D_m$ es no vacio se llama transformada de Laplace de m a la función definida por:

(63) $$L^g_m(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{n\left[G(x^i)-G(x)\right]+\left\langle \lambda, \left[F(x^i_i)-F(x_i)\right]\right\rangle} \bigotimes_{i=1}^{n} f_i(x_i)\, dm(x)$$

en la banda de $\mathbb{C}^n$:

(64) $$B_m = \left\{ Re(\lambda) \in D_m \right\}.$$

La convexidad de $D_m$ se desprende inmediatamente de la de la función exponencial, siendo la medida m positiva y suponiendo que las funciones $f_i(x_i)$ también lo son. Por otra parte, la definición de $L^e_m(\lambda)$ en la banda (64), resulta de que:

$$\left| e^{\left\langle \lambda, \left[F(x^i_i)-F(x_i)\right]\right\rangle} \right| = e^{\left\langle Re(\lambda), \left[F(x^i_i)-F(x_i)\right]\right\rangle}$$

En el caso particular de que las funciones:

(65) $$f_i(x_i) = 1 \Longrightarrow F_i(x_i) = x_i \Longrightarrow F(x_i) = (x_1,\ldots,x_n)$$

$$g_i(x) = 0 \Longrightarrow G(x) = cte = G(x^i)$$

y de que el punto $x^i$ sea el (0,0,....,0), se tiene que (63) es:

(66) $$L_m(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \lambda, x\rangle}\, dm(x)$$

que es la expresión de la transformada de Laplace de una medida, dada por BARRA en[4], pag. 164.

# CAPITULO II (1ª Parte)

## LA ESTRUCTURA ESTADISTICA ESCALAR DE TIPO PEARSON EN $(A^g_f\cdot)$

- Extensión del sistema de Pearson al álgebra operacional $(A^g_f\cdot)$
  - -la distribución normal en $(A^g_f\cdot)$
  - -el sistema de Pearson en $(A^g_1\cdot)$
  - -relación entre los momentos
- Algunas distribuciones que son soluciones del sistema de Pearson en $(A^g_1\cdot)$
  - -generalizaciones de E.Juan Hernandez
  - -extensión de L.K.Roy
- Ecuación diferencial de Sturm-Liouville en $(A^g_f\cdot)$
  - -ortogonalidad de las autofunciones de dicha ecuación
- Los polinomios de Hermite, ecuación diferencial que satisfacen y funciones asociadas en $(A^g_f\cdot)$
  - -desarrollo en serie de funciones de Hermite en $(A^g_f\cdot)$
- Los polinomios de Hermite generalizados, asociados al nucleo de la distribución normal en $(A^g_f\cdot)$
- Otras distribuciones que estan incluidas en el sistema de Pearson extendido a $(A^g_f\cdot)$
  - -el sistema de Kapteyn
  - -la distribución de Weibull

OBJETIVOS Y RESUMEN DE LA 1ª PARTE DEL CAPITULO SEGUNDO.-

En esta 1ª parte, se aborda el estudio de las estructuras estadísticas de Pearson, con los objetivos generales yá estudiados en el Prologo de esta Memoria.

Los puntos fundamentales del estudio que sigue, son los relacionados con el análisis global, de las distintas ecuaciones de Pearson. Este análisis se basa en lo posible, en las propiedades de las citadas ecuaciones diferenciales (descomposiciones tipicas de los denominadores, propiedades de las raices correspondientes a ese denominador, etc.), evitandose hacer suposiciones sobre distribuciones concretas.

Ejemplo importante de estas propiedades globales, es el estudio de la Regresión en dicha estructura, exclusivamente basado en la ecuación diferencial básica correspondiente, que aqui se aborda en el caso unidimensional y en la 3ª Parte de este capitulo se hará en el caso multidimensional, deteniendonos en el caso bivariante, en lo que respecta a las condiciones que se requieren para que la regresión sea lineal.

También se consigue incluir a diversas familias de leyes de probabilidad, en el sistema de Pearson en ($A_f^g$.), p.e. el sistema de Pearson-Roy, la generalización de la distribución normal de Juan Hernandez,[17], así como una relación entre los momentos del sistema de Pearson generalizado, analoga a la de Elderton[12]. Introduciendose una distribución normal en ($A_f^g$.), repetando los valores de las constantes que dan en el sistema de Pearson en ($A_1^o$.) la distribución normal habitual. La mencionada distribución normal generalizada comprende la generalización de Juan Hernandez sobre dicha ley y su nucleo es el de las funciones de Hermite en ($A_f^g$.).

Finalmente se introducen los desarrollos ortogonales de tipo Hermite, ligados a la familia normal, investigandose el mantenimiento formal de los principales resultados clásicos, relativos a dichos desarrollos.

## EXTENSION DEL SISTEMA DE PEARSON AL ESPACIO OPERACIONAL ( $A_f^g$.)

Es, suficientemente, conocido que la ecuación diferencial de primer orden, lineal y homogénea:

(1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+b)}{p+qx+rx^2}$$

llamada de Pearson (*), y que tiene por solución general:

(2)
$$y = K.\exp\left\{\int \frac{x+b}{p+qx+rx^2}\,dx\right\}$$

es satisfecha por numerosas funciones de densidad, correspondientes a distribuciones que son muy empleadas en Estadística, para unos valores determinados de las constantes b,p,q y r.

Por el hecho de que (2) engloba (como soluciones de (1), para valores particulares de las constantes) distintas funciones de densidad (**), se acostumbra a hablar del sistema de Pearson, refiriendose al conjunto de distribuciones, cuyas funciones de densidad son soluciones de la ecuación (1).

Esta familia de soluciones puede clasificarse, atendiendo a las raices del denominador de (1) en relación con la media (***)(caracterización según Pearson) o atendiendo a los momentos (****)(caracterización según Elderton).

Prefijado un operador de ( $A_f^g$. ), que supondremos conmutativo respecto de la ley de composición de operadores, definida en la 2ª parte del Cap. I de esta memoria, puede considerarse una ecuación diferencial más general que la (1) en el sentido siguiente:

(*) Los origenes de esta ecuación y un estudio muy detallado de ella pueden verse en ELDERTON." Systems of frequency curves" W. Palin Elderton y N. Lloyd Johnson. Cambridge Uni. Press,1.969
(**)Vease en RENYI, p.215, algunas de las distribuciones que son soluciones particulares de (1).
(***)CANSADO.Expos.sist.de las distr. de Pearson.T.deE. vol.1
(****)Vease cuadro clasificatorio de pag.45 en ELDERTON-LLOYD

(3) a) que contenga a (1) como caso particular.

b) que mantenga la mayoria de las propiedades del sistema de Pearson (1).

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

(4) $$(a_f^g.y)_x^1 = \frac{y[F(x)+b]}{p+qF(x)+r[F(x)]^2}$$

evidentemente, esta ecuación diferencial coincide, en el caso particular de que $(f,g)=(1,0)$, con (1). Verificandose(3)a),en tal caso.

De la consideración que (4) generaliza (1) resulta la siguiente pregunta: ¿ es posible obtener funciones de densidad (como soluciones de (4)) generalizadas, de las correspondientes funciones de densidad (soluciones de (1)); respetando los valores particulares de las constantes b,p,q y r ?.

A esta pregunta se le dará una respuesta afirmativa a lo largo de esta memória, teniendo siempre en cuenta el espíritu de la generalización tratada,que es el marcan las condiciones (3).

El desarrollo de la ecuación (4) es el siguiente:

(5) $$y' - y\left\{g(x) + \frac{F(x)+b}{p+qF(x)+r[F(x)]^2}\, f(x)\right\} = 0$$

que como (1) es lineal y homogenea, por lo que su solución es:

(6) $$y = K \exp\left[G(x) + \int \frac{F(x)+b}{p+qF(x)+rF(x)^2}\, dF(x)\right]$$

Nótese que (5) y (6) coinciden con (1) y (2) respectivamente, en el caso de que ( $A_f^g.$ ) = ( $A_1^0.$ ).

Teniendo en cuenta (2) y la forma general del nucleo de un operador de ( $A_f^g.$ )( $Ker(a_f^g.) = k\exp(\,G(x)\,)$ ) se deduce que (1) puede expresarse, en términos operacionales, mediante: $(a_f^g.y)=0$, en donde f puede ser cualquier función y $g(x)=(x+b)/(p+qx+rx^2)$, por lo que existe una correspondencia entre las soluciones del sistema de Pearson (1) y las funciones g(x) que sirven para definir el operador ($a_f^g$.), esquemati zando se tiene:

(7)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{soluciones de (1)}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \boxed{\text{funcionesg(x)}} \\ & \boxed{\text{funciones de densidad}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>Distribuciones que son soluciones del sistema de Pearson exten dido al espacio operacional ( $A_f^g$. ).-</u>

Son conocidas las distribuciones que son soluciones del sistema de Pearson (1) (vease RENYI o ELDERTON), y como (4) comprende a (1) resulta que <u>todas las distribuciones que satis facen a (1), también lo hacen con (4)</u>, pero por ser este últi mo sistema más general que el anterior, comprendera a otras dis tribuciones: las generalizadas y otras clásicas ( estudiadas independientemente del sistema de Pearson y que (4) las com- prende para un par de funciones (f,g) particular ).

1. <u>La distribución normal en ( $A_f^g$. )</u>

Considerando los valores siguientes para las cons tantes de (1): b=q=r=0 y p=-1, se obtiene de solución (2) la distribución normal. Manteniendo estos mismos valores en el sis tema (4), se obtiene por solución (particularizando en (5)):

(8) $$y = k \exp( G(x) - [F(x)]^2/2 )$$

expresión que puede ser considerada como la [redacted] densidad de una distribución, que por la forma como ha sido engendrada la llamaremos distribución normal generalizada o extendida al es pacio operacional ( $A_f^g$. ), sin más que exijir:

(9) a) que y sea no-negativa

b) que $\int_R y\,dx = 1$, siendo R el recorrido de la varia ble.

Más adelante se verá que, mediante un procedimien to análogo al seguido por CRAMER para ladistribución normal basado en el nucleo de los polinomios de Hermite, puede obtener se la distribución normal generalizada (8) derivada del sistema de Pearson extendido al álgebra operacional ( $A^g_f$. ), sín más que considerar el nucleo de los polinomios de Hermite extendidos a la referida algebra.

El poder de generalización del sistema derivado de la ecuación diferencial (4) se debe a la arbitrariedad de la función g(x) y no a la función F(x) como podria pensarse. Si g(x) fuese nula la expresión (4) se deduciria de (1) haciendo el cambio de x por F(x). Por otra parte el mantenimiento del sístema de Pearson en la forma (4) no conduce a una relación fácil entre los momentos, a no ser que se generalize el concepto de momento, adecuandolo a las distribuciones introducidas como soluciones de (4), esta generalización puede lograrse de distintas formas y su estudio detenido lo dejaremos de momento.

Las razones aludidas unida a la complejidad de los cálculos nos ha conducido a considerar un sístema deducido del (4) que es menos complejo, pero mucho más fácil de manejar y que mantiene toda la teoría relacionada con el sístema (1).

El referido sístema es el generado por el álgebra ( $A^g_1$. ), es decir, el dado por:

(10)
$$( a^g_1 . y )^1_x = \frac{x + b}{p + qx + rx^2} y$$

exprsión de la que puede deducirse:

-desarrollando (10)-

$$( y' - gy )( p+qx+rx^2 ) = ( x+b )y;$$ e integrando se tiene:

$$\int ( y' - gy )( p+qx+rx^2 )x^n dx = \int ( x+b )yx^n dx$$

$$y ( p+qx+rx^2 )x^n - \int y\left[npx^{n-1} + (n+1)qx^n + (n+2)rx^{n+1}\right]dx -$$

$$-\int gy( p+qx+rx^2 )x^n dx = \alpha_{n+1} + b\alpha_n$$

de donde, suponiendo que la densidad y se anula en los extremos del recorrido de x, se tiene la relación que liga a los momentos con la función g(x) introducida en la ecuación diferencial

(11) $$b\alpha_n + np\alpha_{n+1} + (n+1)q\alpha_n + (n+2)r\alpha_{n+1} = -\int gy(\ p+qx+rx^2\ )x^n dx - \alpha_{n+1}$$

esta expresión es analoga ala obtenida por ELDERTON-JOHNSON [12] en pag. 37 y dando valores a n se tiene:

(12) $$b + q + 2r\alpha_1 = -\int gy(\ p+qx+rx^2)dx - \alpha_1$$

$$b\alpha_1 + p + 2q\alpha_1 + 3r\alpha_2 = -\int gy(\ p+qx+rx^2\ )xdx - \alpha_2$$

$$b\alpha_2 + 2p\alpha_1 + 3q\alpha_2 + 4r\alpha_3 = -\int gy(p+qx+rx^2)x^2dx - \alpha_3$$

$$b\alpha_3 + 3p\alpha_2 + 4q\alpha_3 + 5r\alpha_4 = -\int gy(p+qx+rx^2)x^3dx - \alpha_4$$

expresiones que en el caso que las cuatro integrales de los segundos miembros sean nulas( esto sucede p.e. en el álgebra ($A_1^0$)) coinciden con las expresiones clásicas (vease[12]pag.38) y pueden utilizarse para ajustar una distribución empírica por una teorica, siempre que se conozcan los cuatro primeros momentos y sean finitos, pues, en estas condiciones las constantes b,p, q y r pueden expresarse en función de los referidos momentos.

Veamos que el sistema deducido de (10) comprende a distribuciones que han sido estudiadas independientemente del sistema de Pearson.

La generalización de las leyes de Laplace y de Cauchy debida a E. JUAN HERNANDEZ (1.951), surge de considerar como función de densidad la siguiente:

(13) $$y = h\frac{\exp(-x^2/a^2)}{B^2 + x^2}$$

donde a y b son dos parametros caracteristicos positivos y h la constante adecuada para que (13) sea una función de densidad.

Es inmediato comprobar que (13) comprende a la distribución de Cauchy, para 1/a = 0 y $B \neq 0$; y que puesta (13) en la forma:

$$y = \frac{h}{B^2}\ \frac{\exp(-x^2/a^2)}{1 + \frac{x^2}{B^2}} \xrightarrow[B \longrightarrow \infty]{} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{a^2})$$

es decir, la distribución normal es el limite de (13)(ver [17]).

Fácilmente puede comprobarse que (13) no es una curva de Pearson, yá que no puede llevarse a la forma (1), pero si puede adaptarse a la forma (10), tomando:

$$g(x) = -\frac{2x}{B^2+x^2} \quad y \quad \frac{x+b}{p+qx+rx^2} = -\frac{x}{a^2}$$

observese que $g(x) \in C$ y que se respetan los valores particulares de las constantes b,p,q y r ( $b=q=r=0$, $p=-a^2$) caracteristicos de la distribución normal en (1).

La idea de considerar un sístema de Pearson más complejo, a partir de un segundo miembro más complicado que el de (1), es muy reciente (*). ROY estudia una ecuación diferencial del tipo:

(14) $$\frac{dy}{dx} = \frac{s_o+s_1x+s_2x^2}{\bar{h}_ox+h_1x^2+h_2x^3} \, y$$

donde $s_i$ y $h_i$ son números reales, que se obtienen a partir de la función:

(15) $$y = Cx^{r_1}(a_1+a_2x)^{r_2}(b_1+b_2x)^{r_3}$$

siendo $C, a_i, b_i$ y $r_j$ parametros reales.

En (*) se ve que (14) da curvas de Pearson en los siguientes casos:

(16) a) al menos una de las constantes $a_i$ o $b_i$ es nula

b) si $a_i = b_i$

c) al menos una, pero no todas las constantes $r_j$ sean nulas ( si todas son cero se obtiene la distribución uniforme ).

que pueden reducirse a:

(17) $$s_o = h_o = 0 \quad o \quad s_2 = h_2 = 0$$

obteniendose curvas que no son de Pearson si $s_o, h_o$ y $h_2$ no son nulas. De esta forma ROY estudia 5 casos de (14) que no son curvas de Pearson, pero que satisfacen al sístema de Pearson extendido al álgebra ( $A_1^9$. ), como veremos a continuación:

(*) L.K.ROY An extension of the Pearson system of frequency curves. T.de E. y de I.O. vol.XXII, Cuad.1 y 2, Madrid 1.971 p.113

<u>Teorema.- Los cinco casos, considerados por L.K. Roy, en la extensión del sistema de Pearson, quedan incluidos en la extensión de dicho sistema al algebra ( $A_1^9$. ), para una función determinada $g(x) = m_o/x$ con $m_o \in \mathbb{R}$.</u>

Efectivamente, en los tres primeros casos, que corresponden a raices reales del denominador de (14), utilizando la nomenclatura más reducida para la expresión de las densidades, se tiene:

<u>Caso 1º</u>

densidad considerada: $C\, x^{m_o}( x^2 - d^2 )^{m_1}$

que puede obtenerse de (10) para:

$g(x)=m_o/x$ con $m_o = s_o h_2/h_o$ ; $b=q=0$, $p=-d^2/2m_1$ y $r=1/2m_1$

<u>Caso 2º</u>

densidad considerada: $C\, x^{m_o}( x- d )^{m_1}( x + d )^{m_2}$

que puede obtenerse de (10) para:

$g(x)=m_o/x$ con $m_o = s_o h_2/h_o$ ; $b=d(m_1-m_2)/m_1+m_2$, $p=-d^2/m_1+m_2$

$q=0$ y $r=1/m_1+m_2$

<u>Caso 3º</u>

densidad considerada: $C\, x^{m_o}(x - d_1)^{m_1}(x - d_2)^{m_2}$

que puede obtenerse de (10) para:

$g(x)=m_o/x$ con $m_o = s_o/d_1 d_2$ ; $b=-(m_1 d_2+m_2 d_1)/m_1+m_2$, $p=\dfrac{d_1 \cdot d_2}{m_1+m_2}$

$q=-(d_1+d_2)/m_1+m_2$ y $r=1/m_1+m_2$

Y en los dos últimos casos, que corresponden a raices imaginarias del denominador de (14), utilizaremos las expresiones completas de las densidades, obteniendose:

<u>Caso 4º</u>( raices imaginarias puras )

densidad considerada: $C_o\, x^{s_o h_2/h_o}( x^2 + \dfrac{h_o}{h_2} )^{1/2\left[(h_2 - \frac{s_o h_2}{h_o})\right]} \cdot$

$\cdot \exp \left[ h_1 \sqrt{h_2/h_o}\ \mathrm{arctg}(x\sqrt{h_2/h_o})\right]$

que puede obtenerse de (10) (comparando las expresiones de la pag. 121 de Roy[30] con el desarrollo de (10)) para:

$g(x)=m_o/x$ con $m_o= s_o h_2/h_o$ ; $b= s_1/(s_2- \frac{s_o h_2}{h_o})$, $q=0$ ,

$p =(h_o/h_2)/(s_2- \frac{s_o h_2}{h_o})$ y $r=1/(s_2- \frac{s_o h_2}{h_o})$

Caso 5º

densidad considerada: $C\ x^{s_o/h_o}\left[\frac{1}{h_2}(h_o+h_1x+h_2x^2)\right]^{1/2\left[(s_2/h_2-s_o/h_o)\right]}\cdot$

$$\cdot\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{h_o}{h_2}-\frac{h_1^2}{4h_2^2}}}\left[(s_1/h_2)-(s_o/2h_2)\right]\operatorname{arctg}\frac{x+h_1/2h_2}{\sqrt{\frac{h_o}{h_2}-\frac{h_1^2}{4h_2^2}}}\right\}$$

que puede obtenerse de (10) para:

$g(x) = m_o/x$ con $m_o = s_o/h_o$ ;

$$b=\frac{\frac{h_1}{2}\left(\frac{s_2}{h_2}-\frac{s_o}{h_o}\right)+s_1-s_o}{h_2\left(\frac{s_2}{h_2}-\frac{s_o}{h_o}\right)},\quad p=\frac{h_o}{h_2\left(\frac{s_2}{h_2}-\frac{s_o}{h_o}\right)},$$

$$q=\frac{h_1}{h_2\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_o}{h_o}\right)}\quad y\quad r=\frac{h_2}{h_2\left(\frac{s_2}{h_2}-\frac{s_o}{h_o}\right)}$$

Por lo tanto los casos estudiados por Roy quedan englobados en el sistema de Pearson generalizado dado por (10) y tienen por caracteristica la forma de la función $g(x)= m_o/x$, de aqui el enunciado del teorema anterior.

Observese que la extensión de Roy del sistema (1) sigue el doble espíritu, que anima a la generalización presentada en este trabajo, marcado por las condiciones (3), es decir, dicha extensión dá cabida a distribuciones más complejas y mantiene propiedades analogas al sistema (1). Asi p.e. procediendo de identica manera que en (11) se consigue una relación recurrente entre los momentos, de forma que conocidos los siete primeros momentos y siendo estos finitos, pueden obtenerse las constantes $s_i$ y $h_i$ en función de dichos momentos. Mientras que utilizando (1) se requieren solamente los cuatro primeros momentos.

Es interesante destacar que el procedimiento seguido por Roy para la extensión del sistema de Pearson basado en la función (15) puede utilizarse para obtener otras extensiones de dicho sistema, sin más que considerar por función (15) la siguiente:

(18) $$y = Cx^{r_1}(a_1+a_2x)^{r_2}(b_1+b_2x)^{r_3}(c_1+c_2)^{r_4}\dots(k_1+k_2x)^{r_j}$$

asi p.e. si consideramos la función:

(19) $$y = Cx^{r_1}(a_1+a_2x)^{r_2}(b_1+b_2x)^{r_3}(c_1+c_2x)^{r_4}$$

obtenemos, analogamente a lo realizado por Roy, una ecuación diferencial de la forma siguiente:

(20) $$\frac{dy}{dx} = \frac{s_o+s_1x+s_2x^2+s_3x^3}{h_ox+h_1x^2+h_2x^3+h_3x^4}\, y$$

que nos conduce a un estudio identico al realizado por Roy siguiendo a Elderton-Johnson para los momentos de las distribuciones que son soluciones de (20), requiriendose los diez primeros momentos (siendo estos finitos) para determinar las ocho constantes $s_i$ y $h_i$ $(i=o,..,3)$ en función de dichos momentos.

Por otra parte considerando la función:

(21) $$Y = C(a_1+a_2x)^{r_2}(b_1+b_2x)^{r_3}$$

con un tratamiento analogo al realizado por Roy con (15) se obtiene la ecuación de Pearson (1), por lo que de la solución de la ecuación diferencial (10), se deduce, si se desea que proceda de (15) que g(x) debe ser de la forma $r_1/x$; lo cual viene a corroborar el teorema anterior, y, además, que de (18) puede obtenerse una extensión, de la extensión al sistema de Pearson realizada por Roy.

Teorema.- En las posibles sucesivas extensiones del sistema de Pearson, mediante las funciones (18), se requiere el conocimiento y la finitud de los 3K-2 primeros momentos de la distribución para poder expresar las constantes $s_i$ y $h_i$ en función de dichos momentos. Donde K representa el número de constantes $s_i$ o $h_i$. Así se tiene que para el sistema de Pearson (K=2) se necesitan los 3x2-2=4 primeros momentos para determinar las constantes, para la extensión de Roy (K=3) del sistema de Pearson se necesitan los 3x3-2=7 primeros momentos etc.

La demostración del teorema es inmediata, teniendo en cuenta la relación de recurrencia entre los momentos, el grado del polinomio denominador (que es K) y que en la determinación de las 2K constantes, el mayor valor que toma n, en la relación de recurrencia, es 2K-1, puesto que la primera ecuación se obtiene para n=0 y como en el proceso de obtención de la relación de recurrencia entre los momentos se deriva el polinomio denominador, resulta que el momento de mayor orden que se obtiene es: 2K-1 + K-1 = 3K-2.

.......o.......

## ECUACION DIFERENCIAL DE STURM-LIOUVILLE EXTENDIDA AL ALGEBRA OPERACIONAL ( $A_f^g$. ).-

1.- Introducción

Llamaremos ecuación diferencial de Sturm-Liouville generalizada a la ecuación diferencial siguiente:

(22)
$$\left[a_f^g.(e^{-G(x)}p(x)(a_f^g.y)_x^1)\right]_x^1 + (\lambda q(x)-r(x))y = 0$$

que en la subalgebra ( $A_1^o$. ) adopta la forma:

(23)
$$\frac{d}{dx}(p(x).y')+(\lambda q(x)-r(x))\,y = 0 \qquad (*)$$

que es la expresión clásica de la ecuación de Sturm-Liouville, donde $\lambda$ es un parametro independiente de x (que puede ser complejo); p,q y r son funciones reales, $p'(x)$, $q\neq 0$ y r son continuas en un intervalo I que puede ser finito o infinito y, por último, F y G son las funciones introducidas a través del operador $a_f^g$, mediante el cual se ha definido (22). La imposición de estas condiciones restrictivas se hace, para asegurar la solución de la ecuación diferencial.

(*)Vease DANESE, Advanced calculus vol. I, Allyn-Bacon 1.965, p.542

Es conocido que son casos particulares de (23), y por lo tanto de (22), las ecuaciones diferenciales de Jacobi, Laguerre, Hermite, Bessel, etc., en el presente trabajo trataremos de la ecuación de Hermite generalizada, para obtener los polinomios del mismo nombre y que estan asociados ( analogamente a lo que ocurre en el caso clásico ) a la distribución normal generalizada, introducida por (8) como solución de la ecuación de Pearson extendida al algebra ( $A^g_f.$ ) y manteniendo las constantes que hacen que la distribución normal clásica esté incluida en el sitema (1).

2.- <u>Ortogonalidad de las autofunciones de la ecuación de Sturm-Liouville generalizada.</u>

Sean $\lambda$ y $\mu$ dos valores distintos del parametro de la ecuación (22), es decir, dos autovalores y sean u y v las dos soluciones correspondientes o autofunciones a dichos autovalores, se tiene, abreviando en la escritura, lo siguiente:

(24) $$(a^g_f.)(e^{-G}p(a^g_f.u))+(\lambda q+r)u = 0$$

$$(a^g_f.)(e^{-G}p(a^g_f.v))+(\mu q-r)v = 0$$

expresiones que se transforman, restando de la primera multiplicada por v la segunda multiplicada por u, en la siguiente expresión:

(25) $$(\lambda-\mu)quv = u(a^g_f.)(e^{-G}p(a^g_f.v))-v(a^g_f.)(e^{-G}p(a^g_f.u))$$

y multiplicando por $e^{-G}$ ambos miembros, aplicandoles $(a^g_f.)^{-1}_x$ seguidamente, se tiene:

(26) $$(\lambda-\mu)(a^g_f.)^{-1}(e^{-G}quv)=(a^g_f.)^{-1}\left[(e^{-G}u(a^g_f.M))-(e^{-G}v(a^g_f N)\right]$$

habiendo llamado:

(27) $$M = e^{-G}p(a^g_f.v) \text{ y } N = e^{-G}p(a^g_f.u)$$

Para poder seguir en (26) es necesario introducir la fórmula de integración por partes en el algebra considerada ( $A^g_f.$ ), debida a ALDANONDO (1.968)(*), no publicada hasta la fecha. Para ello partimos de la relación :

(*)Seminario Prof. Aldanondo. F. de C. de Granada

$$(28)\qquad (a_f^g . e^{-G}uv) = e^{-G}\left[v(a_f^g.u) + u(a_f^g.v)\right]$$

de inmediata comprobación, a la que aplicandole el operador inverso queda en la forma:

$$(a_f^g.)^{-1}(a_f^g.e^{-G}uv)=(a_f^g.)^{-1}(e^{-G}v(a_f^g.u))+(a_f^g.)^{-1}(e^{-G}u(a_f^g.v))$$

de donde resulta:

$$(29)\qquad (a_f^g.)^{-1}(e^{-G}v(a_f^g.u))=e^{-G}uv-(a_f^g.)^{-1}(e^{-G}u(a_f^g(v))$$

la fórmula de integración por partes para los operadores de $(A_f^g.)$

Aplicando (29) en (26) y sustituyendo las expresiones M y N por sus valores dados por (27), se obtiene:

$$(\lambda-\mu)(a_f^g.)^{-1}(e^{-G}quv) = e^{-G}uM-(a_f^g.)^{-1}(e^{-G}M(a_f^g.u))- e^{-G}vN +$$
$$+ (a_f^g.)^{-1}(e^{-G}N(a_f^g.v))$$

siendo el segundo miembro igual a:

$$e^{-2G}up(a_f^g.v)-(a_f^g.)^{-1}(e^{-2G}p(a_f^g.v)(a_f^g.u))-e^{-2G}vp(a_f^g.u)+$$
$$+(a_f^g.)^{-1}(e^{-2G}p(a_f^g.u)(a_f^g.v))$$

de donde se deduce que (26) queda reducida a:

$$(30)\qquad (\lambda-\mu)(a_f^g.)^{-1}(e^{-G}quv)=e^{-2G}p\left[u(a_f^g.v)-v(a_f^g.u)\right]$$

Y como $e^{-2G}$ no se anula y p tampoco ( en el caso de que p=0, no hay ecuación de Sturm-Liouville propiamente), el resultado obtenido en (30) nos lleva a enunciar el siguiente:

Lema.- (*)

Si el conjunto de las autofunciones de un sistema de Strum-Liouville generalizado es tal, que existe $(a_f^g.)^{-1}$ aplicado al cuadrado de dichas autofunciones en $a\leq x\leq b$, y si:

$$(31)\qquad e^{-2G}\, p\left[u(a_f^g.v)-v(a_f^g.u)\right]\Big|_a^b = 0$$

para cualquier par de funciones u y v distintas pertenecientes al conjunto J de las autofunciones, entonces J es un conjunto de funciones ortogonales con respecto a la función peso $e^{-G}q$ en $a\leq x\leq b$ y respecto al producto compuesto definido en la página 35 de esta memoria.

(*)El presente lema es una generalización del lema de la pág. 545 de A.E.DANESE, obra citada anteriormente.

3.- Los polinomios de Hermite extendidos al algebra ( $A^g_f.$ ).-

Consideremos la fórmula de RODRIGUES adecuada a los polinomios de Hermite extendidos al algebra operacional utilizada, de forma tal que en la restricción ( $A^0_1.$ ) coincida con la formulación habitual de dicho autor para los referidos polinomios; sea:

(32) $$H^g_n(\ F(x)\ )=(-1)^n\ e^{F^2}(a^g_f.)^n(e^{G-F^2})$$

dicha fórmula, se tiene, evidentemente, en ( $A^0_1.$ ):

(33) $$H_n(x)\ =\ (-1)^n\ e^{x^2}\ \frac{d^n}{dx^n}\ e^{-x^2}$$

la fórmula de Rodrigues clásica para los polinomios de Hermite.

Obtengamos algunos de los polinomios generalizados de Hermite a partir de (32):

(34) $$(a^g_f.)(e^{G-F^2})\ =\ e^{G-F^2}(-2F)$$

$$(a^g_f.)^2(e^{G-F^2})=(a^g_f.)(e^{G-F^2}(-2F))=e^{G-F^2}(4F^2-2)$$

$$(a^g_f.)^3(e^{G-F^2})=(a^g_f.)(e^{G-F^2}(4F^2-2))=e^{G-F^2}(-8F^3+12F)$$

$$(a^g_f.)^4(e^{G-F^2})=(a^g_f.)(e^{G-F^2}(-8F^3+12F))=e^{G-F^2}(16F^4-48F^2+12)$$

.................................................

por lo tanto, los polinomios de Hermite generalizados son:

(35) $$H^g_o\ =\ e^G \qquad H^g_1\ =\ e^G(2F)$$

(*) $$H^g_2\ =\ e^G(4F^2-2) \qquad H^g_3\ =\ e^G(8F^3-12F)$$

$$H^g_4\ =\ e^G(16F^4-48F^2+12)$$ ..............................

4.- La ecuación diferencial de Hermite extendida a ( $A^g_f.$ ).-

Sea la ecuación diferencial siguiente:

(36) $$(a^g_f.y)^2_x-\ 2F(a^g_f.y)^1_x+\ 2ny\ =\ 0$$

la llamaremos ecuación diferencial de Hermite generalizada por las siguientes consideraciones:

(37) a) la ecuación (36) restringida al subespacio ($A^0_1.$) coincide con la ecuación diferencial de Hermite clá

(*)Observese que en rigor no son polinomios, ni aunque faltase la función $e^G$, pues la función F es arbitraria sica: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, a la cual satisfacen los polinomios de Hermite.

b) a (36) la satisfacen los polinomios de Hermite generalizados, obtenidos en (35).

De las propiedades (37) de (36), la a) es evidente y la b) podria demostrarse por consideraciones de tipo inductivo, sobre el polinomio (32), yá que todos los (35) satisfacen a (36); pero vamos a dar una demostración general de que los polinomios de tipo (32) son soluciones de (36), el procedimiento seguido en la demostración es analogo al de KAWATA (*) para el caso clásico.

Demostración de b).-

Aplicando a (32) el operador $(a_f^g.)$, se obtiene:

(38) $$(a_f^g . H_n^g) = 2FH_n^g - H_{n+1}^g$$

efectivamente, basta observar que para las funciones $e^{G-F^2}$, que son a las que se le aplica el operador $(a_f^g.)$ reiteradas veces, se tiene:

(39) $$(a_f^g.)^n (e^{G-F^2}) = e^G \frac{d^n}{dF^n}(e^{-F^2})$$

el resultado encontrado en (39), es un caso particular del siguiente:

Lema.- Si se aplica n veces el operador $(a_f^g.)$ a una función del tipo $e^G \psi(F)$, se obtiene, como resultado, la función $e^G \frac{d^n \psi(F)}{dF^n}$; supuesta $\psi(F)$ diferenciable n veces.

La demostración del lema consiste en aplicar la definición del operador.

$$(a_f^g.)(e^G \psi(F)) = \frac{1}{f}\left[ e^G \psi(F) g + e^G \frac{d\psi(F)}{dF} f - g e^G \psi(F) \right] = e^G \frac{d\psi(F)}{dF}$$

reiterando la aplicación del operador, se tiene el enunciado del lema.

Notese que $e^G$ se comporta como una constante en la derivación generalizada.

(*)Tatsuo KAWATA, Fourier analysis in probability theory. Academic Press, 1.972 pág.161

De (38) se tiene que:

$$H^g_{n+1} = 2FH^g_n - (a^g_f \cdot H^g_n) \tag{40}$$

y aplicando, de nuevo, el operador $(a^g_f\cdot)$ en (40), resulta:

$$(a^g_f \cdot H^g_{n+1}) = 2H^g_n + 2F(a^g_f \cdot H^g_n) - (a^g_f\cdot)^2 H^g_n \tag{41}$$

de donde, se deduce:

$$(a^g_f\cdot)^2 H^g_{n+1} = 4(a^g_f \cdot H^g_n) + 2F(a^g_f\cdot)^2 H^g_n - (a^g_f\cdot)^3 H^g_n \tag{42}$$

Veamos en que se convierte (36), para el polinomio $H^g_{n+1}$, teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para dicho polinomio y sus sucesivas derivadas generalizadas, dadas por(40), (41) y (42).

$$(a^g_f\cdot)^2 H^g_{n+1} - 2F(a^g_f \cdot H^g_{n+1}) + 2(n+1)H^g_{n+1} = -(a^g_f\cdot)^3 H^g_n + 4F(a^g_f\cdot)^2 H^g_n + (2-4F^2-2n)(a^g_f \cdot H^g_n) + 4nFH^g_n \tag{43}$$

y llamando a:

$$(a^g_f\cdot)^2 H^g_n - 2F(a^g_f \cdot H^g_n) + 2nH^g_n = W_n(x) \tag{44}$$

tenemos, como consecuencia de (40), lo siguiente:

$$W_{n+1}(x) = 2FW_n(x) - (a^g_f \cdot W_n(x)) \tag{45}$$

efectivamente:

$$2FW_n = 2F(a^g_f\cdot)^2 H^g_n - 4F^2(a^g_f \cdot H^g_n) + 4FnH^g_n$$

$$-(a^g_f \cdot W_n) = -(a^g_f\cdot)^3 H^g_n + 2(a^g_f \cdot H^g_n) + 2F(a^g_f\cdot)^2 H^g_n - 2n(a^g_f \cdot H^g_n)$$

$$W_{n+1} = -(a^g_f\cdot)^3 H^g_n + 4F(a^g_f\cdot)^2 H^g_n + (2-4F^2-2n)(a^g_f \cdot H^g_n) + 4FnH^g_n \tag{46}$$

comparando los segundos miembros de (43) y (46) se deduce que los primeros miembros de dichas expresiones son identicos y por lo tanto la expresión (45) es correcta c.q.c.

Como de (35) se sabe que $H^g_0 = e^G \in Ker(a^g_f\cdot)$, se tiene de (44) que $W_0(x)=0$, luego, de la relación de recurrencia(45) se deduce que $W_1(x)=0$, y en general que $W_n(x)=0$, es decir, que los polinomios $H^g_n$ satisfacen a la ecuación diferencial (44) c. q.d.

5.- Las funciones de Hermite generalizadas.

Definimos las funciones de Hermite generalizadas, mediante la expresión:

(47) $$y_n^g(x) = e^{G-\frac{F^2}{2}} H_n\left[F(x)\right]$$

donde $H_n\left[F(x)\right]$ designa el polinomio, de orden n, clásico de Hermite, pero en la variable $F(x)$.

A) Veamos, primero, que las funciones (47) satisfacen a la ecuación diferencial:

(48) $$(a_f^g.y)_x^2 + (2n+1-F^2)y = 0$$

efectivamente:

(49) $$(a_f^g.y_n^g)_x^1 = e^{G-\frac{F^2}{2}}\left[-F\, H_n(F) + \frac{d}{dF} H_n(F)\right]$$

y aplicando, de nuevo, el operador $(a_f^g.)$ en (49), se tiene:

(50) $$(a_f^g.y_n^g)_x^2 = e^{G-\frac{F^2}{2}}\left[F^2\, H_n(F) - F\frac{d}{dF} H_n(F) - F\frac{d}{dF} H_n(F) - H_n(F) + \frac{d^2}{dF^2} H_n(F)\right]$$

de donde, sustituyendo este valor en (48), resulta:

(51) $$e^{G-\frac{F^2}{2}}\left[\frac{d^2}{dF^2} H_n(F) - 2F\frac{d}{dF} H_n(F) + 2n\, H_n(F)\right] = 0$$

yá que, la expresión (51) se anula porque los polinomios $H_n(F)$ satisfacen a la ecuación (37)a), por ser de Hermite. Por ello concluimos que las funciones (47) son soluciones de (48).

B) Es inmediato comprobar que la ecuación diferencial (48) es del tipo Sturm-Liouville generalizado, basta compararla con (22) y tomar por: $p(x)=e^{G(x)}$, $r(x)=F^2-1$, $\lambda=2n$ y $q=1$.

Por otra parte, considerando que se verifica:

(52) $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \; ; \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} G(x) < \infty$$

se tiene, que las funciones (47), satisfacen la condición (31) de ortogonalidad. En efecto, de (31) se tiene:

(53) $$e^{-2G}\, e^{G}\left[y_n^g(a_f^g.y_m^g) - y_m^g(a^g.y_n^g)\right]\Bigg|_a^b$$

expresión que se transforma, utilizando (49), en:

(54)
$$e^{-G}\left[e^{2G-F^2} H_n(-FH_m + \frac{d}{dF}H_m) - e^{2G-F^2} H_m(-FH_n + \frac{d}{dF} H_n)\right]\Big|_a^b$$

o lo que es lo mismo:

(55)
$$\frac{e^G\left[H_n(-FH_m + \frac{d}{dF} H_m) - H_m(-FH_n + \frac{d}{dF} H_n)\right]}{e^{F^2}}\Bigg|_a^b$$

y como en el caso de los polinomios de Hermite $a=-\infty$ y $b=\infty$, se tiene, considerando las hipótesis (52), por l'Hopital, que (55) es cero. Por lo tanto las funciones de Hermite generalizadas (47) que satisfacen a una ecuación de Sturm-Liouville y a (31), constituyen un sistema ortogonal de funciones para el producto compuesto (definido en la página 39 de esta memoria) con la función peso $e^{-G}$. (Vease el lema de la pág. 62 de este trabajo).

C) Norma de las funciones de Hermite generalizadas.

La norma de las funciones (47) se obtiene a partir de la operación producto compuesto y respecto a la función peso $e^{-G}$, mediante:

(56)
$$\|y_n^g\|_{\underline{v}}^2 = (1 \ \underline{v}\ e^{-G} y_n^g y_n^g)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

expresión que desarrollada es:

(57) (*)
$$\|y_n^g\|_{\underline{v}}^2 = e^{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2G(x)} f(x) e^{2G(x)-F^2(x)} H_n^2(F)\, dx$$

que puede expresarse por:

(58)
$$e^{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F^2(x)} H_n^2(F)\, dF(x) = e^{G(\infty)} \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!$$

ya que la integral de (58) es la que aparece en la norma de las autofunciones de Hermite clásicas (vease Danese pág. 516 o Taylor pág. 122).

D) Desarrollo en serie de funciones de Hermite generalizadas.

Dado el sistema ortogonal de las funciones (47), cualquier función h(x) puede ser desarrollada en serie de estas

(*) Se entiende por $G(\infty)$, el $\lim_{x\to\infty} G(x)$, que por (52) está acotado.

funciones, en la forma:

(59) $$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, y_n^g$$

supuesto que exista el operador $(a_f^g.)^{-1}$ aplicado al cuadrado de la función h(x) (vease el lema de la pág. de esta memoria).

Resultando, que si en (59) se multiplican ambos miembros por $y_m^g e^{-G}$, y se aplica $(a_f^g.)^{-1}\Big|_{-\infty}^{\infty}$, nos queda:

(60) $$(1 \underline{v}\ h(x)e^{-G}y_m^g)\Big|_{-\infty}^{\infty} = (1 \underline{v} \sum_{n=0}^{\infty} y_m^g e^{-G} c_n y_n^g)\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

(61) $$\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n (1 \underline{v}\ y_n^g y_m^g e^{-G})\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

pero, por ser $\{y_n^g\}$ un sistema ortogonal, (61) queda reducido a:

(62) $$c_n (1 \underline{v}\ y_n^g e^{-G} y_n^g)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

haciendo m=n. Por lo que se deduce:

$(63)_1$ $$c_n = \frac{(1 \underline{v}\ h(x)e^{-G}y_n^g)\Big|_{-\infty}^{\infty}}{(1 \underline{v}\ e^{-G}y_n^{g2})\Big|_{-\infty}^{\infty}}$$

y teniendo en cuenta (47) y (58), se tiene que $(63)_1$ pasa a ser:

$(63)_2$ $$c_n = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G(x)}.f(x).h(x).e^{-\frac{F^2}{2}}.\ H_n\left[F(x)\right].dx}{\sqrt{\pi}\ \ n!\ 2^n}$$

NOTA.-

Observese, que se verifica la relación:

$$H_n^g\left[F(x)\right] = e^{G(x)}.H_n\left[F(x)\right]$$

donde los polinomios $H_n^g$ vienen dados por (32) y $H_n\left[F(x)\right]$ designa los polinomios de Hermite clásicos, pero en variable F(x); es decir, los polinomios que satisfacen a (33) con variable F(x).

La relación anterior se deduce directamente de (32) o bien, induciendola a partir de (35).

De lo expuesto, se obtiene, que las funciones (47) satisfacen la relación:

$$y_n^g(x) = e^{G(x)}.y_n\left[F(x)\right],\ \text{con}\ y_n\left[F(x)\right] = e^{-\frac{F^2}{2}}\ H_n\left[F(x)\right]$$

es decir, las funciones de Hermite clásicas, pero en F(x).

## 6.- Los polinomios de Hermite asociados a la distribución normal extendida al espacio operacional ( $A^g_f$. ).

Los polinomios tipo Hermite usados en Estadística estan definidos mediante la función peso $e^{-x^2/2}$, por:

(64)
(*)
$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

mientras que en Análisis se utilizan los definidos en (33) con función peso $e^{-x^2}$.

Claro está que los (64) no satisfacen a la ecuación de Hermite clásica:

(65) $$y'' -2xy' + 2ny = 0$$

sino que son soluciones de:

(66) $$y'' - ty' + ny = 0$$

que es la ecuación diferencial resultante si en (65) se hace el cambio de variable $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$.

Por comprobación directa se tiene que las funciones $Y_n = e^{-\frac{x^2}{4}} h_n(x)$ satisfacen a la ecuación diferencial del tipo Sturn-Liouville siguiente:

(67) $$y'' - (-n - 1/2 + x^2/4 ) y = 0$$

por lo cual, dicho sistema de funciones es ortogonal respecto al producto interior habitual y su norma es $\sqrt{n!\ \sqrt{2\pi}}$ (*).

Los polinomios de Hermite definidos por (33) y (64) estan relacionados mediante:

(68) $$H_n(x) = ( \sqrt{2} )^n h_n(x\sqrt{2}) \qquad (**)$$

Para conseguir los desarrollos basados en la distribución normal en ($A^g_f$.), es necesario introducir los polinomios de Hermite generalizados adecuados a dicha distribución, introducida en (8), estos son:

(69) $$h^g_n(x) = (-1)^n e^{\frac{F^2}{2}} (a^g_f.)^n e^{G- \frac{F^2}{2}}$$

que como se observará coinciden con los (64) en ($A^o_1$.).

(*)Vease CRAMER, Metodos matemáticos de Estadistica. Aguilar 3ª edición 1.963, pág.154

(**)Vease DANESE, obra citada anteriormente, pág.517

Notese que en (69) interviene el nucleo de la distribución normal extendida a ( $A_f^g\cdot$), analogamente a como lo hace el nucleo de la distribución normal clásica en (64), lo que corrobora el nombre dado a (8).

De (69) se deduce que los "polinomios" de Hermite en ( $A_f^g\cdot$), asociados a la distribución normal en dicho espacio operacional, son:

(70) $$h_0^g = e^G \qquad h_1^g = e^G F \qquad h_2^g = e^G (F^2 - 1)$$
$$h_3^g = e^G(F^3 - 3F) \qquad h_4^g = e^G(F^4 - 6F^2 + 3) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

que en ( $A_1^o\cdot$) coinciden con los clásicos (vease Cramer pág.154).

Y analogamente a lo realizado con (32) se comprueba, que (69) satisface a la ecuación diferencial:

(71) $$(a_f^g\cdot)^2 y - F(a_f^g\cdot)y + ny = 0$$

Siendo el sistema de funciones: $\left\{Y_n^g = e^{G - \frac{F^2}{4}} h_n(F)\right\}$ ortogonal, respecto al producto compuesto $\underline{v}$ y con función peso $e^{-G}$, yá que dichas funciones son soluciones de la ecuación diferencial:

(72) $$(a_f^g\cdot)^2 y + (n + \frac{1}{2} - \frac{F^2}{4})\, y = 0$$

que es del tipo (22), para:

$$p = e^{-G}, \quad \lambda = n, \quad q = 1 \quad y \quad r = \frac{F^2}{4} - \frac{1}{2}$$

y además se verifica la condición (31) de ortogonalidad, supuestas las condiciones (52), analogamente a lo que ocurria con las funciones (47).

Notemos que con el sistema de funciones $\left\{Y_n^g\right\}$ puede hacerse un estudio identico al realizado con el sistema $\left\{y_n^g\right\}$ en el parrafo anterior, que supondremos realizado. Señalaremos, sin embargo, algunas de las relaciones que se obtendrian en dicho estudio:

(73) $$h_n^g(x) = e^{G(x)} h_n(F); \quad Y_n^g = e^{G(x)} Y_n(F)$$
$$\left\|Y_n^g\right\|_{\underline{v}}^2 = (1 \,\underline{v}\, e^{-G} Y_n^g \cdot Y_n^g)\Big|_{-\infty}^{\infty} = e^{G(\infty)} n! \sqrt{2\pi}$$

Resumiremos los resultados anteriores en el cuadro:

LOS POLINOMIOS DE HERMITE EN $(A^g_f\cdot)$ Y $(A^0_1\cdot)$ USADOS EN ANALISIS Y ESTADISTICA



**a) Caso clásico $(A^0_1\cdot)$**

**ANALISIS**

Polinomios utilizados: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

Ecuación diferencial que satisfacen: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

Funciones asociadas: $y_n(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) H_n(x)$

que satisfacen a la ecuación diferencial de tipo Sturm-Liouville:

$$y'' + (2n + 1 - x^2)\, y = 0$$

por lo que son ortogonales, respecto al producto interior habitual.

Y tienen por norma: $\|y_n(x)\|^2 = n!\, 2^n \sqrt{\pi}$

$g=0$
$f=1$

**ESTADISTICA**

Polinomios utilizados: $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$

Ecuación diferencial que satisfacen: $y'' - xy' + ny = 0$

Funciones asociadas: $Y_n(x) = \exp(-\frac{x^2}{4}) h_n(x)$

que satisfacen a la ecuación diferencial de tipo Sturm-Liouville:

$$y'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4})y = 0$$

por lo que son ortogonales respecto al producto interior habitual.

Y tienen por norma: $\|Y_n(x)\|^2 = n! \sqrt{2\pi}$

**b) Caso generalizado $(A^g_f\cdot)$**

**ANALISIS**

Polinomios utilizados: $H^g_n(x) = (-1)^n e^{[F(x)]^2} \left[a^g_f \cdot e^{G(x) - [F(x)]^2}\right]^n_x$

Ecuación diferencial que satisfacen:

$$(a^g_f\cdot y)^2_x - 2F(x)(a^g_f\cdot y)^1_x + 2ny = 0$$

Funciones asociadas: $y^g_n(x) = \exp\left\{G(x) - \frac{[F(x)]^2}{2}\right\} H_n[F(x)]$

que satisfacen a la ecuación diferencial de tipo Sturm-Liouville generalizado: $(a^g_f\cdot y)^2_x + \left[2n + 1 - [F(x)]^2\right]y = 0$

por lo que son ortogonales respecto al producto compuesto $\underline{v}$ y con función peso $e^{-G(x)}$.

Y tienen por norma: $\|y^g_n(x)\|^2_{\underline{v}} = e^{G(\infty)} n!\, 2^n \sqrt{\pi}$

**ESTADISTICA**

Polinomios utilizados: $h^g_n(x) = (-1)^n e^{[F(x)]^2/2} \left[a^g_f \cdot e^{G(x) - [F(x)]^2/2}\right]^n_x$

Ecuación diferencial que satisfacen:

$$(a^g_f\cdot y)^2_x - F(x)(a^g_f\cdot y)^1_x + ny = 0$$

Funciones asociadas: $Y^g_n(x) = \exp\left\{G(x) - \frac{[F(x)]^2}{4}\right\} h_n[F(x)]$

que satisfacen a la ecuación diferencial de tipo Sturm-Liouville generalizado: $(a^g_f\cdot y)^2_x + (n + \frac{1}{2} - \frac{[F(x)]^2}{4})\, y = 0$

por lo que son ortogonales, respecto al producto compuesto $\underline{v}$ y con función peso $e^{-G(x)}$.

Y tienen por norma: $\|Y^g_n(x)\|^2_{\underline{v}} = e^{G(\infty)} n! \sqrt{2\pi}$

El sistema de Kapteyn y la distribución de Weibull como soluciones del sistema de Pearson en ($A_f^g$.).-

A) Las curvas del sistema de Kapteyn, como es sabido, responden a una f.d. del tipo:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{[V(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}} \, |V'(x)|$$

donde $V(x)$ es una función arbitraria, que una vez fijada da lugar a una familia de curvas que dependen de dos parámetros.

El sistema de Kapteyn se estudia independientemente del sistema de Pearson y la ventaja de aquel sobre este, radica en su mejor manejabilidad, al constar de un menor número de parámetros.

Veamos, primeramente, que el sistema de Kapteyn es solución del sistema de Pearson en ($A_f^g$.); en efecto considerando en (4) los siguientes valores: $b=-\mu$, $p=-\sigma^2$, $q=r=0$(*) y que: $G(x)= \ln|V'(x)|$ y $F(x)=V(x)$, se tiene que (6) coincide con la densidad del sistema de Kapteyn, para $K= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

El caso particular del sistema de Kapteyn, más interesante se obtiene para $V(x)= \ln x$, resultando la distribución de Galton-Mc Alister o distribución lg-normal, siendo esta última denominación la más usual y de la que se deriva su definición como la distribución de una v.a. cuyo ln obedece a la ley normal, por ello la expresión de su densidad es:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \, \frac{1}{x} \qquad 0 \leq x < \infty$$

Esta distribución aparece por vez primera en 1.879 y nace de la Teoria de errores combinados por un proceso multiplicativo, de igual forma que la distribución normal surge de la Teoria de errores mediante un proceso aditivo. Por ello Galton (estudioso, en sus comienzos, de la distribución lg-normal) demostró que en algunos casos reales, la consideración de un planteamiento multiplicativo en los errores es más correcto que la de un aditivo.

(*)son los valores caracteristicos para obtener de (1) la $N(\mu,\sigma)$

Dicha distribución tiene aplicaciones muy variadas, asi p.e. se aplica en Sedimentologia y Petrologia en Geologia, en Economia se utiliza en la construcción de modelos de oferta-demanda, de desarrollo de un pais o empresa e incluso llega a utilizarse en Literatura para el análisis de estilos literarios (*).

Por otra parte su estudio conduce a los procesos lg-normales que han sido generalizados recientemente (**), utilizando el mismo espacio operacional ($A_f^g$.) empleado en esta Memoria.

La distribución lg-normal está incluida en el sistema de Pearson en ($A_1^g$.) para:

$$g(x) = -\frac{1}{\sigma^2_x}(\ln x-\mu) \quad ; \; b=p=q=0 \text{ y } r=1$$

B) La distribución de Weibull aparece en 1.939, relacionada con la Teoria estadística de la resistencia de materiales, presentada por Weibull y más tarde dicho autor la utiliza en problemas de supervivencia. Siendo, actualmente, dicha distribución en Fiabilidad lo que la distribución normal es en Estadística clásica; aunque su mayor dificultad práctica está en la complejidad de sus cálculos que requieren, generalmente, el uso del ordenador (***).

Su densidad viene dada por:

$$y = \begin{cases} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta-1} \exp -\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta} & \text{para } x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

donde $\delta$ y $\eta$ son dos números reales positivos, llamados parámetro de forma y de escala respectivamente. Obteniendose que si $\delta$ está comprendida entre (3,75-4) la gráfica de dicha distribución es muy parecida a la campana de Gauss, siendo en este caso la

(*)Para un estudio detenido de esta distribución, puede consultarse la obra de Aitchison-Brow "The Lognormal Distribution." Cambridge Univ. Press(1.957)ó en el Cap.14 del vol.2 de Johnson-Kotz "Distributions in statistics: continuous distributions"Wiley

(**)Vease la tésis de Gutierrez Jaimez, citada anteriormente.

(***)Consultese el articulo de Fernandez de Trocóniz "Distribución de Weibull. Métodos prácticos de estimación y contraste" en T. de E. y de I.O. vol.XXI-Cuaderno 3, 1.970 pág.43-65 o el Cap. 20 de Johnson-Kotz, obra citada en (*)

aproximación de una por otra"bastante"buena y si $\delta=1$, la distribución de Weibull coincide con la distribución exponencial(**).

Veamos que aunque dicha distribución no satisface a la familia de Pearson clásica, si verifica al sistema de Pearson en $(A_1^g.)$(10), para ello basta considerar:

$$b=p=q=0, \quad r=\frac{1}{\delta-1} \quad y \quad g(x)=-\frac{\delta x^{\delta-1}}{\eta^{\delta}}$$

y que la constante resultante de la integración de (10) para los referidos valores sea la conveniente para que la solución sea una densidad.

Notas finales.-

De manera analoga a la generalización de la ecuación diferencial de Hermite puede conseguirse una extensión en $(A_f^g.)$ de la ecuación de Bessel, que además de su interes puramente analitico, puede servir de base para lograr los procesos de difusión markovianos de Bessel (*) al álgebra operacional introducida, pero esta idea nos apartaria del estudio que estamos considerando.

Otros posibles trabajos, en el orden de ideas señalado en esta Memoria y relacionados con ella, son:

i) estudiar si, en las álgebras operacionales introducidas, se dispone de un método general aplicable al cálculo de las funciones caracteristicas de las distintas familias de Pearson; cuestión esta, que no puede resolverse en el caso clásico (vease Cansado [6]).

ii) analizar las distribuciones logaritmicas de Pearson en $(A_f^g.)$, tomando como base el trabajo de Cansado [8] .

(*)Puede tomarse como punto de partida el texto de K.Ito-Mc Kean "Diffusion processes and their sample paths" Springer-Verlag, 1.965 pág.59 y la linea de generalización marcada, para los procesos markovianos de difusión, por la tésis de Gutierrez Jaimez.

(**)Vease la nota de la pág.135 de esta Memoria, sobre el papel de la distribución de Weibull en la relación entre e.e. exponenciales y e.e. de Pearson.

# CAPITULO II (2ª Parte)

## ADECUACION DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CALCULO DE PROBABILIDADES AL ESPACIO OPERACIONAL $(A_f^g.)$

- El operador esperanza matemática en $(A_f^g.)$
- La función caracteristica en $(A_f^g.)$
  - propiedades
  - momentos y semiinvariantes generalizados
- Fórmula de inversión para la función caracteristica
- Desarrollos asociados a la distribución normal en $(A_f^g.)$
  - desarrollo ortogonal
  - desarrollo asintótico

NOTA.- La numeración de expresiones, en esta 2ª parte del Cap.II, es correlativa a la de la 1ª parte de este mismo Capítulo, por estar intimamente relacionadas ambas partes.

RESUMEN Y FINES DE LA 2ª PARTE DEL CAPITULO II.-

Estudiamos en esta 2ª Parte, algunas cuestiones de fundamentos operacionales del Cálculo de Probabilidades sobre las estructuras estadísticas de Pearson (Cap.II,1ª parte) y las exponenciales, estudiadas más adelante (Cap.III).

El fin general es introducir y manejar una serie de herramientas tipicas del Cálculo, debidamente adaptadas al algebra operacional en que se formulan aquellas estructuras. Lugar básico ocupa el operador "esperanza matemática generalizada" y sus propiedades, especialmente las ligadas a la independencia.

De las posibles generalizaciones del operador esperanza matemática, se ha tomado aquella que,sobre $(A_f^g.)$, mantiene las propiedades básicas de dicho operador.

Una vez introducido, se definen los momentos correspondientes de las leyes de las estructuras generalizadas. Analogamente se introduce una función caracteristica, definida mediante dicho operador sobre $(A_f^g.)$, cuyo comportamiento se investiga sobre todo en lo que se refiere a la obtención de una fórmula de inversión(analogo al Teor. de Levy clásico) para densidades formuladas en el álgebra citada.

En este último punto se llega a un interesante resultado que luego será usado en el estudio de los desarrollos generalizados de Edgeworth y Gram-Charlier sobre $(A_f^g.)$.

También se estudia la posibilidad de obtener desarrollos ortogonales especiales asociados a la ley normal sobre $(A_f^g.)$ llegandose, con el manejo de la función caracteristica generalizada y los semiinvariantes introducidos, también, previamente, a unos desarrollos cuyo comportamiento y papel son analogos a los clásicos de ese tipo y que actualmente empiezan a aplicarse, con éxito, a problemas de Inferencia relacionados con los estimadores minimos y con el método del cociente de verosimilitudes (vease Brons-Brunk y otros, Ann.Math.St. vol.40, nº 2; 1.969 pág.339-355 "Generalized means and associated families of distributions")

## EL OPERADOR ESPERANZA MATEMATICA Y LA FUNCION CARACTERISTICA EN EL ALGEBRA OPERACIONAL $(A_f^g\cdot)$

Sea X una v.a. continua de f.d. p(x), definiremos el valor medio generalizado o esperanza matemática generalizada de la v.a. h(X), donde h es una función medible Borel, mediante:

(73) $$E^G[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h[Z(x)]\, p(x)\, dx$$

supuesta absolutamente convergente la integral, y donde Z(x) representa:

(74) $$Z(x) = F(x) - F(x_0)$$

observese que $E^G[K] = K$, y en particular $E^G[1] = 1$.

La caracteristica principal del operador $E^G$ es la linealidad:

a) $E^G[h_1(X) \dotplus h_2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \{h_1[Z(x)] \dotplus h_2[Z(x)]\}\, p(x)\, dx = E^G[h_1(X)] \dotplus E^G[h_2(X)]$

b) $E^G[kh(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} kh[Z(x)]\, p(x)\, dx = k[h(X)]$

A partir de (73) se obtienen las distintas caracteristicas estocásticas, asi llamaremos momento de orden k respecto al origen de una distribución en $(A_f^g\cdot)$, al valor medio generalizado de $X^k$, es decir:

(75) $$\alpha_k^G = E^G[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} [Z(x)]^k\, p(x)\, dx$$

y designaremos por $\mu_k^G$ al momento de orden k respecto de $\alpha_1^G$, esto es:

(76) $$\mu_k^G = E^G[(X-\alpha_1^G)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} [Z(x)-\alpha_1^G]^k\, p(x)\, dx$$

Es inmediato comprobar el mantenimiento de las relaciones que existen entre los momentos clásicos, para estos momentos generalizados que,como es habitual,coinciden con los anteriores en $(A_1^0\cdot)$.

Definiremos la función caracteristica de una v.a. X continua, que sigue una ley de probabilidad dada por p(x), mediante:

(77) $$\alpha^G(t) = E^G[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itZ(x)}\, p(x)\, dx$$

supuesto que exista la integral del segundo miembro.

Las propiedades de la f.c. definida en (77), son análogas a las de la f.c. clásica. Citaremos por su utilización posterior las siguientes:

a) La función $\alpha^G(t)$ satisface, evidentemente, el Teorema de BOCHNER (1.932): "una función $\varphi$ continua es la f.c. de una distribución de probabilidad si y sólo si es definida-no-negativa y $\varphi(0)=1$". (Véase Feller vol. II, pág. 622).

b) La función $\alpha^G(t)$ coincide con la f.c. habitual en $(A_1^0.)$.

c) Los momentos (75) pueden obtenerse de (77), con la misma formulación que en el caso clásico, es decir:

(78)
$$\alpha_k^G = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \alpha^G(t) \Big|_{t=0}$$

Como consecuencia de lo anterior y desarrollando (77) por la fórmula de Mac Laurin, se obtiene:

(79)
$$\alpha^G(t) = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_k^G}{k!} (it)^k = 1 + \sum_1 \frac{\alpha_k^G}{k!} (it)^k$$

d) Como consecuencia de la linealidad del operador $E^G$ se tiene, que si se efectua un cambio de variable lineal $Y=aX+b$, la f.c. resultante es: $e^{itb} \alpha^G(at)$.

En efecto, sea $Y=aX+b$, se tiene $\alpha_Y^G(t)=E^G\left[e^{itY}\right]=$

$$= E^G\left[e^{it(aX+b)}\right] = E^G\left[e^{itaX} . e^{itb}\right] = e^{itb} E^G\left[e^{i(ta)X}\right] = e^{itb} \alpha^G(ta).$$

e) Dada $\alpha^G(t)$, definimos la función generatriz $\psi^G(t)$ de los semiinvariantes en $(A_f^g.)$ por la relación:

(80)
$$\ln \alpha^G(t) = \psi^G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k^G}{k!} (it)^k$$

esto es:

(81)
$$\alpha^G(t) = e^{\psi^G(t)} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k^G}{k!} (it)^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k^G}{k!} (it)^k +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[ \sum_{k=1} \frac{\chi_k^G}{k!} (it)^k \right]^2 + \ldots\ldots$$

y comparando los desarrollos (79) y (81), se obtiene:

(82)
$$\alpha_1^G = \chi_1^G \;;\; \alpha_2^G = \chi_2^G \dotplus (\chi_1^G)^2$$
$$\alpha_3^G = \chi_3^G \dotplus 3\chi_1^G\chi_2^G \dotplus (\chi_1^G)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

es decir, se han obtenido las mismas relaciones que en el caso clásico.

Daremos a continuación, resultados relativos a v.a. independientes que seran utilizados posteriormente.

f) Sean las v.a. X e Y independientes que tienen por f.d. conjunta p(x,y), se obtiene:

(83)
$$E^G\left[X \dotplus Y\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[Z(x) \dotplus Z(y)\right] p(x,y)\ dx\ dy = E^G\left[X\right] \dotplus E^G\left[Y\right]$$

y para el producto:

(84)
$$E^G\left[XY\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Z(x)\,Z(y)\ p(x,y)\ dx\ dy = E^G\left[X\right]\ E^G\left[Y\right]$$

teniendo en cuenta , las distribuciones marginales, la definición del operador $E^G$ y su linealidad.

Analogamente se obtiene para la varianza generalizada de la suma de dichas v.a.:

(85)
$$V^G\ (X \dotplus Y) = V^G(X) \dotplus V^G(Y)$$

g) La función caracteristica en $(A_f^g.)$ de la suma de dos v.a. independientes es el producto de las funciones caracteristicas generalizadas respectivas; en efecto, si X e Y son dos v.a. independientes, también lo son $e^{itX}$ y $e^{itY}$, por lo que utilizando (84) se tiene:

(86)
$$\alpha_{X \dotplus Y}^G(t) = E^G\left[e^{it(X \dotplus Y)}\right] = E^G\left[e^{itX}\right]E^G\left[e^{itY}\right] = \alpha_X^G(t).\alpha_Y^G(t)$$

Deduciendose, por lo tanto, para los semiinvariantes de la distribución de la suma de v.a. independientes lo siguiente:

(87)
$$\ln\alpha_{X \dotplus Y}^G(t) = \ln\alpha_X^G(t) \dotplus \ln\alpha_Y^G(t)$$

y teniendo en cuenta el desarrollo (80), tenemos:

(88)
$$\chi_k^G(X \dotplus Y) = \chi_k^G(X) \dotplus \chi_k^G(Y)$$

Los resultados de f) y g) pueden extenderse, sin dificultad, a n variables como en el caso clásico.

## FORMULA DE INVERSION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN $(A_f^g.)$

Veamos que (77) admite una fórmula de inversión, la transformada inversa de Fourier en $(A_f^g.)$, que permite obtener la función de densidad de una distribución generalizada, conocida su función caracteristica en $(A_f^g.)$; problema que se nos presentará al estudiar la posibilidad de desarrollar una f.d. correspondiente a una v.a. continua, mediante la f.d. de la distribución normal en $(A_f^g.)$.

Sea $P^G(x) = \int^x p^G(t,F,G)\, dt$ la función de distribución de una v.a. X y sean $a < b \in R$ dos puntos de continuidad de $P^G$, se tiene:

(89) $$P^G[a,b) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it[F(a)-F(x_0)]} - e^{-it[F(b)-F(x_0)]}}{2\pi it}\, \alpha^G dt$$

supuesto que $P^G$ esté normalizada. (Decimos que $P^G$ está normalizada si los valores de $P^G$ en sus puntos de discontinuidad x vienen dados por $\frac{1}{2}[P^G(x+0)+P^G(X-0)]$ ).

La demostración, siguiendo el procedimiento marcado por Loeve en pág.186, está basada en el lema de Lebesgue-Stieltjes de convergencia dominada y en la integral de Dirichlet.

Consideremos:

(90) $$I_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-it[F(a)-F(x_0)]} - e^{-it[F(b)-F(x_0)]}}{it}\, \alpha^G(t)\, dt$$

de donde, sustituyendo $\alpha^G(t)$ por su valor (77), se tiene:

(91) $$I_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left[\int_{-T}^{T} \frac{1}{t}\, \frac{e^{it\, F(x)-F(a)} - e^{-it\, F(b)-F(x)}}{2i}\, dt\right] p^G(x,F,G)\, dx$$

es decir:

(92) $$I_T = \int_{-\infty}^{\infty} J_T(x,F)\, dP^G$$

donde:

(93) $$J_T(x,F) = \int_{-T}^{T} \frac{1}{t}\, \frac{e^{it[F(x)-F(a)]} - e^{-it[F(b)-F(x)]}}{2i}\, dt$$

Para el cálculo de $J_T(x,F)$, utilizaremos el cambio:

(94) $$t\left[F(x)-F(a)\right] = v = t\left[F(b)-F(x)\right]$$

con el que se obtiene de (93):

(95) $$J_T = \frac{1}{\pi}\int_{T[F(x)-F(b)]}^{T[F(x)-F(a)]} \frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}\,\frac{dv}{v} = \frac{1}{\pi}\int_{T[F(x)-F(b)]}^{T[F(x)-F(a)]} \frac{\operatorname{sen} v}{v}\,dv$$

y suponiendo que $f(x)=F'(x)>0\ \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, que $F(x)$ es creciente, se tiene:

(96) $$\lim_{T\to\infty} J_T = J = \begin{cases} 1 \text{ para } a<x<b \\ \frac{1}{2} \text{ para } x=a,\ x=b \\ 0 \text{ para } x<a,\ x>b \end{cases}$$

por lo cual resulta que:

(97) $$\lim_{T\to\infty} I_T = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J_T\,dP^G = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty} J_T\,dP^G = \int_{-\infty}^{\infty} J\,dP^G$$

luego:

(98) $$\lim_{T\to\infty} I_T = P^G(b-0) - P^G(a+0) + \frac{1}{2}\left[P^G(a+0) - P^G(a-0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[P^G(b+0) - P^G(b-0)\right] = \frac{P^G(b+0)+P^G(b-0)}{2} - \frac{P^G(a+0)+P^G(a-0)}{2}$$

de este modo resulta que:

(99) $$\lim_{T\to\infty} I_T = P^G\left[a,b\right) \text{ c.q.d.}$$

A partir de (89) puede obtenerse el siguiente corolario, de gran utilidad práctica:

<u>Corolario</u>.-

Si $\alpha^G(t)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, entonces, existe la derivada de $P^G$ y es, acotada y continua en $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, viniendo dada por:

(100) $$D_x.P^G = p^G = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itZ(x)}\,f(x)\,\alpha^G(t)\,dt$$

Efectivamente, considerando $b=x+h$, deducimos de la expresión (89) y de la definición de derivada, lo siguiente:

(101) $$P^G\left[x,x+h\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-itZ(x)}-e^{-itZ(x+h)}}{it}\,\alpha^G(t)\,dt$$

expresión que se transforma, desarrollando $e^{-itZ(x+h)}$ por Mac Laurin, en:

(102)
$$p^G[x,x+h) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{1-e^{-it\left(h\frac{Z'(x)}{1!}+h^2\frac{Z''(x)}{2!}+\dots\right)}}{it}\, e^{-itZ(x)}\alpha^G\, dt$$

de donde se deduce que:

(103)
$$D_x . p^G(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{1-e^{-it\left(h\frac{Z'(x)}{1!}+h^2\frac{Z''(x)}{2!}+\dots\right)}}{ith}\, e^{-itZ(x)}\alpha^G dt\right)$$

y como por las hipótesis establecidas, se verifica que:

(104)
$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}$$

obtenemos que:

(105)
$$p^G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-it\left(h\frac{Z'(x)}{1!}+h^2\frac{Z''(x)}{2!}+\dots\right)}}{ith}\, e^{-itZ(x)}\,\alpha^G(t)\,dt$$

y aplicando L'Hopital, finalmente, resulta:

(106)
$$p^G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{itZ'(x)}{it}\, e^{-itZ(x)}\,\alpha^G(t)\, dt$$

luego:

(107)
$$p^G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itZ(x)}\, f(x)\,\alpha^G(t)\, dt \quad \text{c.q.d.}$$

DESARROLLOS ASOCIADOS A LA DISTRIBUCION NORMAL EN ( $A_f^g$.).-

En este apartado se verá la posibilidad de desarrollar formalmente la f.d. de una v.a. continua, mediante la f.d. de la distribución normal en ($A_f^g$.), expresada por:

(108) $$\varphi(x,F,G)= k_N \exp G(x)- \frac{[Z(x)]^2}{2}$$

,donde:

(109) $$k_N=\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{G- \frac{Z^2}{2}} dx\right\}^{-1} \quad y \quad Z(x)=F(x)-F(x_o),$$

y sus sucesivas derivadas generalizadas.

(Notese que la densidad (108) es"identica"a la dada por (II.1ªP.(8)), pero en Z(x) en vez de F(x). Su génesis es similar,pues, se obtiene del sistema (II.1ªP.(4)) cambiando F(x) por Z(x) y sus propiedades son analogas a (II.1ªP.(8)). Siendo (108) más apropiada que la distribución normal en F(x), debido a la definición (II.1ªP.(73)) del operador e.m. en ($A_f^g$.), acorde con la función caracteristica introducida en las estructuras exponenciales canónicas (vease Cap.III pág.

Utilizando un desarrollo ortogonal, de tipo Gram-Charlier, y otro asintótico, de tipo Edgeworth, analizando exclusivamente la existencia de ellos sobre ($A_f^g$.) y las generalizaciones que son precisas introducir, respecto del caso particular ($A_1^0$.).

A) Desarrollo ortogonal.-

Sea la v.a. continua:

(110) $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde las $X_i$ son v.a. independientes e igualmente distribuidas.

Consideremos la v.a. $\frac{X-m^G}{\sigma^G}$; donde $m^G$ y $\sigma^G$ vienen dadas a partir de (II.1ªP.(75)) y (II.1ªP.(76)) respectivamente, y designemos por p(x) su f.d.

Es posible establecer un desarrollo de p(x), de la forma:

(111) $$p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_r}{r!} (a_f^g\cdot)^r \varphi(x,F,G)$$

donde las $C_r$ son constantes que se determinaran, seguidamente, utilizando la relación:

(112) $$(a_f^g\cdot)^r\ e^{G-\frac{Z^2}{2}} = (-1)^r\ e^{-\frac{Z^2}{2}}\ h_r^g(Z)$$

que es la introducida por (II.1ªP.(69)) para $Z(x)$, obtenemos:

(113) $$(a_f^g\cdot)^r \varphi(x,F,G) = k_N(-1)^r\ e^{-\frac{Z^2}{2}}\ h_r^g(Z)$$

por lo cual, el desarrollo (111) puede considerarse como un desarrollo en polinomios ortogonales, puesto que sustituyendo en (111), la expresión (113), queda:

(114) $$p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_r}{r!} k_N\ (-1)^r\ e^{-\frac{Z^2}{2}}\ h_r^g(Z)$$

de donde, multiplicando ambos miembros de (114) por $e^{-G}\ h_s^g(Z)$ y aplicando $(a_f^g\cdot)^{-1}$ entre $-\infty$ e $\infty$, se tiene:

(115) $$(1\ \underline{v}\ p(x)e^{-G}h_s^g(Z))\Big|_{-\infty}^{\infty} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_r}{r!} k_N(-1)^r(1\ \underline{v}\ e^{-G-\frac{Z^2}{2}}\ h_r^g(Z)h_s^g(Z))\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

pero, por ser los $h_n^g(Z)$ ortogonales, respecto al producto compuesto y con función peso $\exp(-\frac{Z^2}{2})$, se tiene:

(116) $$(1\ \underline{v}\ p(x)e^{-G}h_r^g(Z))\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{C_r}{r!} k_N(-1)^r\ \|y_r^g\|^2$$

donde las $y_r^g = \exp(G-\frac{Z^2}{4})h_r(Z)$ son las funciones de Hermite correspondientes, deduciendose de (116):

(117) $$C_r = \frac{(-1)^r}{k_N\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G(x)}.f(x).p(x).h_r\ Z(x)\ .dx$$

que en, el caso particular, $(A_1^o\cdot)$ adopta la forma:

(118) $$C_r = (-1)^r\int_{-\infty}^{\infty} h_r(x).p(x).dx$$

(expresión identica a la obtenida por Cramer[ 9 ]en pág.255) yá que en dicho caso $k_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ y el numerador de (117) coincide con (118).

Existen diferencias entre el desarrollo ortogonal en $(A_f^g\cdot)$ (111) y el desarrollo clásico,ó en $(A_1^o\cdot)$, (vease Cramer pág. 255) entre las cuales está la siguiente: en el desarrollo en $(A_1^o.)$ se tiene que $C_1=C_2=0$, mientras que en el desarrollo en $(A_f^g.)$ no tienen porque ser nulas dichas constantes.

B) Notaciones y relaciones a emplear.-

Obtengamos el desarrollo de $e^{t^2/2}\alpha^G(t)$, donde: $\alpha^G(t)$ es la f.c. de la v.a. $\frac{X-m^G}{\rho^G}$; como las v.a. $X_i$ de (110) están identicamente distribuidas, se tiene de (83) y (85) que:

(119) $\quad m^G=n.m_1^G$ y que $\rho^G=\rho_1^G\sqrt{n}$

llamando a $m_1^G$ y $\rho_1^G$, a la media y desviación tipica en $(A_f^g.)$ de la v.a. $X_1$.

También se tiene, designando por $\alpha_1^G(t)$ a la f.c. de $X_1-m_1^G$ y como consecuencia del resultado del apartado d) de la pág. de esta Memoria, que:

(120)
$$\alpha^G(t)=\left[\alpha_1^G\left(\frac{t}{\rho_1^G\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

y representando por $\chi_r^G$ a los semiinvariantes en $(A_f^g.)$ de $X-m^G=\sum_{i=1}^n(X_i-m_1^G)$ y por $\chi_{1r}^G$ los de $X_1-m_1^G$, tenemos:

(121)
$$\alpha_1^G(t)=\exp\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_{1r}^G}{r!}(it)^r$$

pero teniendo en cuenta (88), deducimos que $\chi_r^G=n\chi_{1r}^G$ y si llamamos:

(122)
$$M_r=\frac{\chi_r^G}{(\rho^G)^r}\quad y\quad M_{1r}=\frac{\chi_{1r}^G}{(\rho^G)^r};\ \text{de donde}\ M_r=\frac{M_{1r}}{n^{\frac{r}{2}-1}}$$

Empleando estas notaciones (120) puede escribirse en la forma siguiente:

(123)
$$\alpha^G(t)=\exp\left\{n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi_{1r}^G}{r!}\left(i\frac{t}{\rho_1^G\sqrt{n}}\right)^r\right\}=$$

$$=\exp\left\{n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{M_{1r}}{r!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^r\right\}=\exp\left\{n\left[\frac{M_{11}}{1!}\frac{it}{\sqrt{n}}+\frac{M_{12}}{2!}\frac{(it)^2}{n}+\sum_{r=3}^{\infty}\frac{M_{1r}}{r!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^r\right]\right\}$$

pero como $E^G\left[X_1-m_1^G\right]=0$ y $E^G\left[(X_1-m_1^G)^2\right]=(\rho_1^G)^2$ resulta de (82) que $\chi_{11}^G=0$ y $\chi_{12}^G=(\rho_1^G)^2$, luego $M_{11}=0$ y $M_{12}=1$; por lo tanto (123) queda reducido a:

(124) $$e^{t^2/2}\alpha^G(t) = e^{n\sum_{r=3}^{\infty}\frac{M_{1r}}{r!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^r}$$

También es de interes, para el cálculo del desarrollo de Edgeworth generalizado, disponer de unas relaciones que liguen las transformadas de Fourier de las derivadas $a_f^g$. de una cierta densidad, con funciones especiales del tipo:

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).(it)^r$$

a continuación obtenemos dicha expresión, a partir de la definición de f.c. en $(A_f^g.)$:

(125) $$e^{\frac{t^2}{2}}\alpha^G(t) = \int e^{itZ(x)+\frac{t^2}{2}}\,p(x)\,dx$$

y recordando la función generatriz de los polinomios de Hermite en la variable Z(x):

(126) $$\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+tZ(x)\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{h_r\left[Z(x)\right]}{r!}\,t^r$$

se obtiene, sustituyendo en (125) la expresión que resulta en (126) cuando se toma t=it, lo siguiente:

$$e^{\frac{t^2}{2}}\alpha^G(t)=\int\sum_{r=0}^{\infty}\frac{h_r\left[Z(x)\right]}{r!}\,(it)^r\,p(x)dx = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}\int h_r\left[Z(x)\right]p(x)dx =$$

(127) $$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{C_r^*}{r!}\,(it)^r\,p(x) \quad ; \quad \text{con } C_r^* = \int h_r\left[Z(x)\right]p(x)\,dx$$

Es inmediato comprobar que $C_1^*=C_2^*=0$, efectivamente:

$h_1(Z)=Z \longrightarrow \int Zp(x)\,dx=0$, por ser la media de una v.a. tipificada

$h_2(Z)=Z^2-1 \longrightarrow \int (Z^2-1)p(x)dx=0$, por analoga razón.

Notese, que, por coincidir los momentos generalizados con los momentos clásicos en $(A_1^0)$, se verifica que $C_1^*=C_2^*=C_1=$ $=C_2=0$ (viniendo dadas las constantes $C_1$ y $C_2$, en este caso, por (118)).

Por otra parte se tiene, sustituyendo en (77) la densidad p(x) por su desarrollo (111), lo siguiente:

(128) $$\alpha^G(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{C_r}{r!}\int e^{itZ}(a_f^g.)^r\,\varphi(x,F,G)\,dx$$

luego resulta:

(129) $$\exp(\frac{t^2}{2})\ \alpha^G(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{C_r}{r!}\int \exp(itZ+\frac{t^2}{2})(a_f^g.)^r\ \varphi(x,F,G)\,dx$$

de donde comparando (127) con (129), se tiene:

(130) $$\int e^{itZ}(a_f^g.)^r\ \varphi(x,F,G)\,dx=\exp(-\frac{t^2}{2}).(it)^r.\ \frac{C_r^*}{C_r}$$

y si en (130) aplicamos el corolario de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier en $(A_f^g.)$, nos resulta:

(131) $$\frac{C_r}{C_r^*}\ (a_f^g.)^r\ \varphi(x,F,G)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itZ}f(x).e^{-\frac{t^2}{2}}.\ (it)^r dt$$

C) <u>Desarrollo asintótico</u>.-

La expresión (124) puede escribirse bajo la forma:

(132) $$\exp(\frac{t^2}{2})\ \alpha^G(t)=\exp\left[n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{M_{1,r+2}}{(r+2)!}\ (\frac{it}{\sqrt{n}})^{r+2}\right]=\exp\left[(it)^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{M_{1,r+2}}{(r+2)!}(\frac{it}{\sqrt{n}})^r\right]$$

y si (132) se desarrolla en potencias de $n^{-\frac{1}{2}}$, en vez de en potencias de t (como se ha hecho en A)), se tiene:

(133) $$\exp(\frac{t^2}{2})\ \alpha^G(t)=\sum_{s=0}\frac{(it)^{2s}}{s!}\left[\sum_{r=1}^{\infty}\frac{M_{1,r+2}}{(r+2)!}(\frac{it}{\sqrt{n}})^r\right]^s$$

expresión que se transforma, utilizando el Teor. de sustitución de los desarrollos en serie de potencias (vease Apostol [ 3 ] pág. 395), en la siguiente:

(134) $$\left.\begin{aligned} U(z)&=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(it)^{2s}}{s!}\ z^s \\ V(z)&=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{M_{1,r+2}}{(r+2)!}\ (\frac{it}{\sqrt{n}})^r \end{aligned}\right\}\quad U\left[V(z)\right]=\sum_{r=0}^{\infty}c_r\ z^r$$

$$\text{con } c_r=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(it)^{2s}}{s!}\left[s!\sum_{m_1+\dots m_s=r}\frac{M_{1,m_1+2}\cdots\cdots M_{1,m_s+2}}{(m_1+2)!\dots(m_s+2)!}\right]$$

luego el segundo miembro de (129) puede expresarse por:

(135) $$\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{\infty}(it)^{2s}\left(\sum_{m_1+\dots+m_s=r}\frac{M_{1,m_1+2}\cdots M_{1,m_s+2}}{(m_1+2)!\dots(m_s+2)!}\right)\right]\frac{M_{1,r+2}}{(r+2)!}\ (\frac{it}{\sqrt{n}})^r$$

por lo tanto:

(136)

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\alpha^G(t)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{(it)^{r+2s}}{n^{r/2}}P_{r,r+2s}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(it)^{r+2}P_{r,r+2}}{n^{r/2}}+\dots$$

$$\dots\dots+\frac{(it)^{r+2r}P_{r,r+2r}}{n^{r/2}}$$

donde los $P_{r,r+2s}$ son polinomios en $M_{1,3};\dots;M_{1,r-s+3}$ que no dependen de $n$.

De (136) se obtiene, multiplicando por $\frac{1}{2\pi}e^{-itZ}f(x)$ (nucleo de la transformada inversa de Fourier en el espacio $(A^g_f\cdot)$ lo siguiente:

(137)

$$\frac{1}{2\pi}e^{-itZ}f(x)\,\alpha^G(t)=\frac{1}{2\pi}e^{-itZ-\frac{t^2}{2}}f(x)+\frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}-itZ}\cdot$$

$$\cdot\frac{(it)^{r+2}P_{r,r+2}+\dots+(it)^{3r}P_{r,3r}}{n^{r/2}}$$

e integrando los dos miembros de (137) entre $-\infty$ e $\infty$, se tiene:

(138)

$$p(x)=\psi(x)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_{r+2}}{C^*_{r+2}}\;\frac{P_{r,r+2}(a^g_f\cdot)^{r+2}\varphi(x,F,G)+\dots+P_{r,3r}(a^g_f\cdot)^{3r}\varphi}{n^{r/2}}$$

despues de hacer uso de (131).

Observese que se logra el desarrollo formal de la densidad $p(x)$ mediante la ley de probabilidad $\psi(x)$, cuya f.c. generalizada es $\exp(-t^2/2)$ y de las sucesivas derivadas generalizadas de la distribución normal en $(A^g_f\cdot)$. Ello nos indica que si las derivadas $(a^g_f\cdot)^n\varphi(x,F,G)$ estan acotadas y si $n$ tiende a infinito (caso del problema central del limite) el desarrollo es convergente y proporciona una expresión asintótica de la densidad $p(x)$ en función de la $\psi(x)$ que juega el papel de la distribución $N(0,1)$ en el caso clásico.

Por último señalaremos la tendencia actual, de lograr extensiones al campo multivariante de estos desarrollos (vease [11] y [23].

## CAPITULO II (3ª Parte)

## LA ESTRUCTURA ESTADISTICA DE TIPO PEARSON VECTORIAL EN $({}^{p}\mathbf{A}_{f}^{g}.)$

- El sistema de Pearson bivariante extendido al algebra $({}^{p}A_{f}^{g}.)$
  - -introducción
  - -extensión del sistema de Pearson a las algebras operacionales
  - -lineas de regresión
  - -obtención de los momentos
  - -coeficientes de regresión
  - -caracteristicas de las distribuciones condicionadas
  - -relación entre los momentos
  - -consideraciones finales
- Estudio de leyes bivariantes incluidas en el sistema de Pearson generalizado
  - -introducción
  - -leyes particulares
  - -cuestiones a resolver
- El sistema de Pearson multivariante extendido al algebra $({}^{p}A_{f}^{g}.)$
  - -introducción
  - -el sistema de Pearson multivariante generalizado

RESUMEN Y FINES DE LA 3ª PARTE DEL CAPITULO II.-

Dada una estructura estadística de la forma ( $\mathbb{R}^k$, $B_{\mathbb{R}^k}$, $\mathcal{P}$ ) donde la familia $\mathcal{P}$ de leyes de probabilidad satisface a un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo Pearson, tenemos una e.e. de tipo Pearson vectorial.

En lo que sigue se ha generalizado este tipo de e. e., extendiendo los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales(a las algebras operacionales introducidas en la 2ª parte del Cap.I) de Van Uven (1.947) [34] -que estudia el sistema de Pearson bivariante- y de Steyn (1.960) [ 33 ] -que introduce el sistema de Pearson multivariante- de manera analoga a lo realizado anteriormente en una dimensión y de forma tal que los sistemas de Pearson resultantes en la extensión operacional, comprendan como caso particular a los clásicos, manteniendo propiedades analogas a estos y dando cabida a otras distribuciones que no son consideradas como de Pearson, entre ellas las generalizaciones del sistema de Pearson bivariante de Navarro Sagristá (1.952) [25].

Completandose esta parte con el estudio del sistema de Pearson bivariante en lo que respecta a las lineas de regresión, momentos, distribuciones condicionadas, etc.

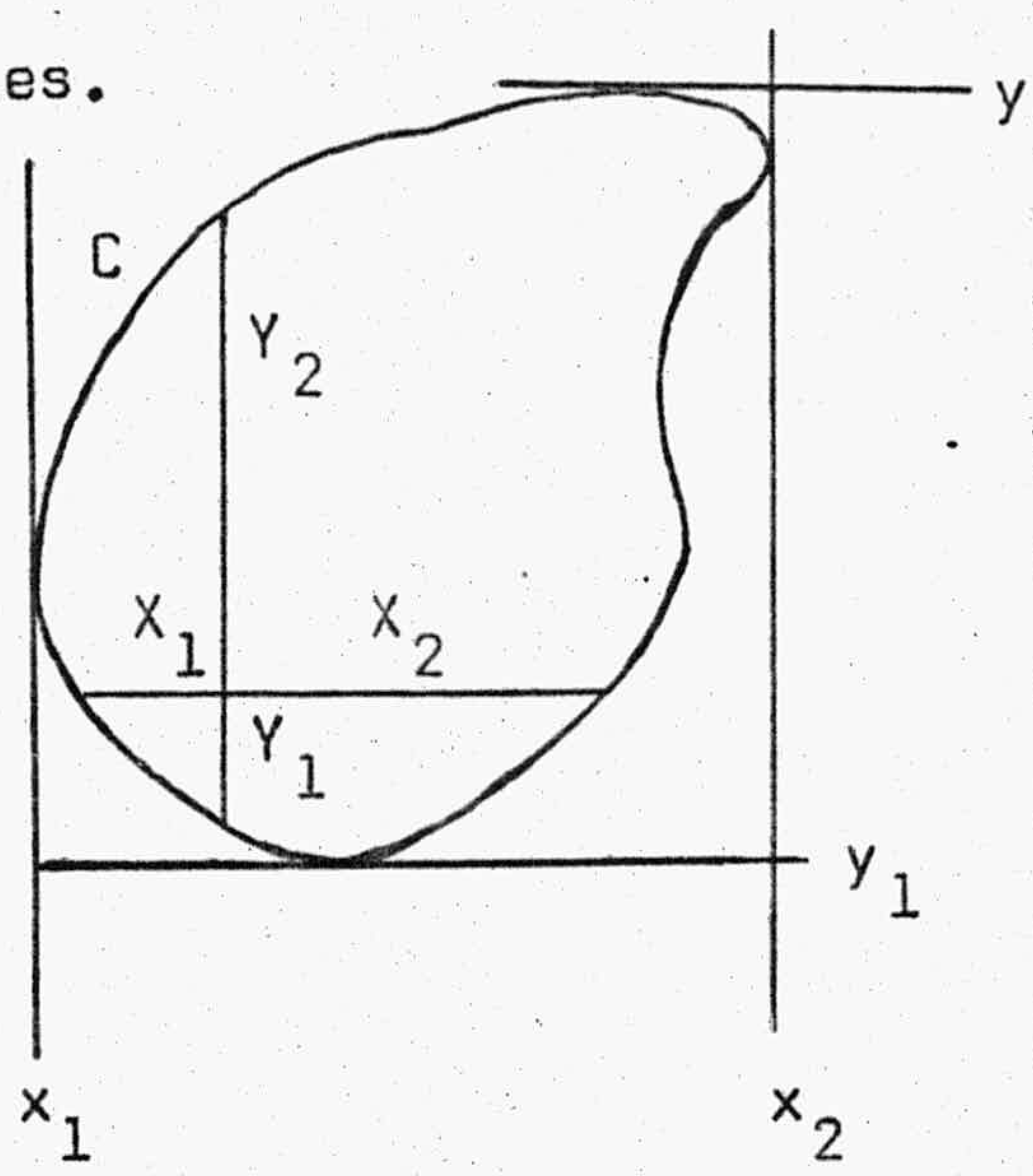
Por último se recoje el teorema de Steyn sobre la linealidad de la regresión en el sistema de Pearson multivariante, que no se mantiene en el caso generalizado general, aunque si se cumple en casos muy particulares.

Quedandose algunas cuestiones pendientes de estudio de las que destacamos la posible extensión en la forma de Roy del sistema de Pearson-Van Uven.

## EL SISTEMA DE PEARSON BIVARIANTE EXTENDIDO AL ALGEBRA OPERACIONAL ( $^{P}A^{g}_{f}$. ).-

### 1.- Introducción.

Los precursores en el estudio de las superficies de probabilidad del tipo Pearson fuerón L.N. FILON, L. ISSERLIS (*) y K. PEARSON (**), aunque el estudio completo de este tipo de familias de leyes de probabilidad bivariantes, se debe a M.J. van UVEN (***); el cual mediante la extensión de la ecuación diferencial de Pearson (1) a dos variables, consigue todas las superficies de probabilidad de este tipo, mediante las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.




Sea $z=z(x,y)$ la superficie de probabilidad definida en un dominio cuyo contorno es $C$ ,en donde los limites de x para y fijo son $X_1$ y $X_2$ (que generalmente serán funciones de y) y los limites de y para x fijo son $Y_1$ e $Y_2$ ( que generalmente serán funciones de x), siendo las constantes $x_1$, $x_2$, $y_1$ e $y_2$ los valores extremos de de x e y respectivamente.

Las ecuaciones diferenciales consideradas por van Uven son las siguientes:

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{P(x,y)}{L(x,y)} z \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Q(x,y)}{H(x,y)} z$$

o bien, las equivalentes:

$$(2) \qquad \frac{\partial \ln z}{\partial x} = \frac{P}{L} \; ; \; \frac{\partial \ln z}{\partial y} = \frac{Q}{H}$$

siendo las funciones P,Q,y L, H funciones lineales y cuadráticas respectivamente de las variables x e y, es decir:

(*) Notes on skew frecuency surfaces. Biometrika,vol.V;1.923,p.224
(**)On non-skew frecuency surfaces. Biometrika,vol.V;1.923,p.231
(***)Extension of Pearson's probability distributions to two variables. Proc. Kon. Akad. Wetens. Amsterdan, vol.L; 1.947, pag. 1.063-1.070

$$(3) \qquad P = p_o + p_1x + p_2y \ ; \ Q = q_o + q_1x + q_2y$$

$$L = l_{oo} + l_{10}x + l_{01}y + l_{20}x^2 + l_{02}y^2 + l_{11}xy$$

$$H = h_{00} + h_{10}x + h_{01}y + h_{20}x^2 + h_{02}y^2 + h_{11}xy$$

y se supone que las fracciones P/L y Q/H son irreducibles.

Por otra parte, de la forma del sistema ( 2 ), se desprende que las funciones P,Q,L y H no pueden ser completamente arbitrarias, sino que deben de estar ligadas por la condición de integrabilidad:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \ln z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P}{L}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q}{H}\right]$$

es decir, por:

$$(5) \qquad H\frac{\partial P}{\partial y} - L\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{H}{L}P\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{L}{H}Q\frac{\partial H}{\partial x}$$

condición que restringe las posibilidades de P,Q,L y H, puesto que el primer miembro de ( 5 ) es una función entera de x e y, también lo tiene que ser el segundo miembro de ( 5 )(*).

## 2.- Extensión del sistema de Pearson bivariante a las algebras operacionales introducidas en el Cap. I del presente trabajo.

Veamos que mediante la extensión del sistema de ecuaciones diferenciales ( 1 ) al algebra ( $^{p}A_{f}^{g}$. ) puede conseguirse, de forma analoga a lo realizado en una dimensión, una generalización del sistema de Pearson bivariante. Generalización, que, como es habitual en la presente memoria, contiene al sistema deducido de ( 2 ) como caso particular y que mantiene las propiedades caracteristicas ( relación entre momentos, lineas de regresión, etc.) de las superficies de probabilidad que satisfacen a ( 2 ).

Consideremos, en primer lugar, el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

(*)Extension of Pearson's prob. distrib. to two variables. Proc. Kon. Akad. Wetens. Amsterdan, vol.L; 1.947 pag.1.252-1.264

$$(6)\qquad \left( a_{f_1}^{g_1} . z\right)_x^1 = \frac{P\left[F_1(x),F_2(y)\right]}{L\left[F_1(x),F_2(y)\right]}\, z$$

$$\left( a_{f_2}^{g_2} . z\right)_y^1 = \frac{Q\left[F_1(x),F_2(y)\right]}{H\left[F_1(x),F_2(y)\right]}\, z$$

que desarrollado, en derivadas parciales ordinarias, es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - g_1 z = \frac{P}{L} f_1 z \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} - g_2 z = \frac{Q}{H}$$

donde se supone que las funciones $f_i$ y $g_i$ $(i=1,2)$, verifican las condiciones (54) o (55) de la segunda parte del primer capítulo de esta memoria, que son necesarias y suficientes para que se verifique:

$$(7)\qquad \left[ a_{f_1}^{g_1} . \left( a_{f_2}^{g_2} . z\right)_y^1 \right]_x^1 = \left[ a_{f_2}^{g_2} . \left( a_{f_1}^{g_1} . z\right)_x^1 \right]_y^1$$

y que las funciones P, Q, L y H son analogas a las ( 3 ), pero en las variables $F_1(x)$ y $F_2(y)$ en vez de x e y.

Por ser el sistema ( 6 ) excesivamente complejo, para los desarrollos posteriores de relaciones entre momentos, lineas de regresión, etc., consideraremos el sistema extendido al algebra ( $^pA_1^g$.), en cuyo caso viene dado por:

$$(8)\qquad \left( a_1^{g_1} . z\right)_x^1 = \frac{P(x,y)}{L(x,y)}\, z \ ; \ \left( a_1^{g_2} . z\right)_y^1 = \frac{Q(x,y)}{H(x,y)}\, z$$

que desarrollado es:

$$(9)_1\qquad \frac{\partial z}{\partial x} - g_1 z = \frac{P}{L}\, z \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} - g_2 z = \frac{Q}{H}\, z$$

o también:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial x} - g_1 = \frac{P}{L} \qquad ; \qquad \frac{\partial \ln z}{\partial y} - g_2 = \frac{Q}{H} \qquad (9)_2$$

El sistema de Pearson extendido al algebra ( $^pA_1^g$.) tiene las siguientes ventajas:

(10) a) los segundos miembros son idénticos a los considerados por van Uven en [34]

b) generaliza al sistema deducido de ( 1 ) y coincide con él cuando $g_1=g_2=0$.

c) para que se verifique la condición de integrabi lidad ( 7 ), sólo hay que exijir que $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$, yá que $f_i = f(x_i)$, puesto que $f_1 = f_2 = 1$.

Como ( 9 ) puede expresarse bajo la forma:

(11) $$\frac{\partial}{\partial x}( \ln z - G ) = \frac{P}{L} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}( \ln z - G ) = \frac{Q}{H}$$

se deduce la misma condición de integrabilidad ( 5 ) para las funciones P,Q,L y H, como resulta evidente de (11), pues:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\ln z - G) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{L}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{H}\right).$$

3.- Obtención de las lineas de regresión generales en el sistema de Pearson generalizado.

De la primera ecuación de ( 9 ) se obtiene:

$$\int_{X_1}^{X_2} L \frac{\partial z}{\partial x} dx - \int_{X_1}^{X_2} L\, g_1 z = \int_{X_1}^{X_2} Pzdx$$

que se transforma, integrando por partes, en:

(12)$_1$ $$\Big[Lz\Big]_{X_1}^{X_2} = \int_{X_1}^{X_2} \left( P + \frac{\partial L}{\partial x} \right) zdx + \int_{X_1}^{X_2} Lg_1 zdx$$

analogamente, de la segunda ecuación de (9 ), se obtiene:

(12)$_2$ $$\Big[Hz\Big]_{Y_1}^{Y_2} = \int_{Y_1}^{Y_2} \left( Q + \frac{\partial H}{\partial y} \right) zdy + \int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2 zdy$$

que considerando las expresiones ( 3 ) de las funciones P,Q,L y H, puede escribirse:

(13) $$P + \frac{\partial L}{\partial x} = R = r_0 + r_1 x + r_2 y$$

$$Q + \frac{\partial H}{\partial y} = S = s_0 + s_1 x + s_2 y$$

donde: $r_0 = p_0 + l_{10}$, $r_1 = p_1 + 2l_{20}$, $r_2 = p_2 + l_{11}$, $s_0 = q_0 + h_{01}$, $s_1 = q_1 + h_{11}$ y $s_2 = q_2 + 2h_{02}$

con lo cual (12) se transforman en:

(14)$_1$ $$\int_{X_1}^{X_2} Rzdx = \Big[Lz\Big]_{X_1}^{X_2} - \int_{X_1}^{X_2} Lg_1 zdx$$

(14)$_2$
$$\int_{Y_1}^{Y_2} Szdy = \Big[Hz\Big]_{Y_1}^{Y_2} - \int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2 zdy$$

o lo que es equivalente:

$$r_o\int_{X_1}^{X_2} zdx + r_1\int_{X_1}^{X_2} xzdx + r_2 y\int_{X_1}^{X_2} zdx = \Big[Lz\Big]_{X_1}^{X_2} - \int_{X_1}^{X_2} Lg_1 zdx$$

$$s_o\int_{Y_1}^{Y_2} zdy + s_1\int_{Y_1}^{Y_2} xzdy + s_2\int_{Y_1}^{Y_2} yzdy = \Big[Hz\Big]_{Y_1}^{Y_2} - \int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2 zdy$$

expresiones que se transforman, considerando las distribuciones marginales y las medias condicionadas, en las siguientes:

(15)
$$r_o + r_1 E\big[X/Y=y\big] + r_2 y = \frac{\Big[Lz\Big]_{X_1}^{X_2} - \int_{X_1}^{X_2} Lg_1 z\, dx}{z_2(y)} = A_2(y)$$

$$s_o + s_1 x + s_2 E\big[Y/X=x\big] = \frac{\Big[Hz\Big]_{Y_1}^{Y_2} - \int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2 z\, dy}{z_1(x)} = A_1(x)$$

de donde se obtienen las lineas generales de regresión:

(16)
$$E\big[Y/X=x\big] = \frac{1}{s_2}\,(\ A_1 - s_o - s_1 x\ ) \text{ de y sobre x}$$

$$E\big[X/Y=y\big] = \frac{1}{r_1}\,(\ A_2 - r_o - r_2 y\ ) \text{ de x sobre y}$$

que son válidas para $s_2$ y $r_1$ distintos de cero.

Como consecuencia, se tiene que en el caso de que $A_1$ y $A_2$ sean funciones lineales (*), las lineas de regresión son lineales, en efecto si:

(17)
$$A_1 = a_{10} + a_{11}x \quad \text{y} \quad A_2 = a_{20} + a_{21}y$$

se obtiene de (16):

$$E\big[Y/X=x\big] = \frac{1}{s_2}\Big[\,(a_{10} - s_o) + (a_{11} - s_1)x\Big]\ ;\ E\big[X/Y=y\big] = \frac{1}{r_1}\Big[(a_{20} - r_o) + (a_{21} - r_2)y\Big]$$

(*)En el caso clásico, ocurre que $A_1 = A_2 = 0$ ya que se toma Lz y Hz nulas en el borde del dominio de probabilidad y $g_1 = g_2 = 0$, por ello en este caso las lineas de regresión son lineales. (Vease N.L.JOHNSON and S.KOTZ, Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. Wiley, 1.972 pág.7).

4.- Obtención de los momentos respecto a las medias totales $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

De (14) y (15) se obtiene:

(18)$_1$
$$E\left[R\right] = \int_{y_1}^{y_2} \left[Lz\right]_{X_1}^{X_2} dy - E\left[Lg_1\right] = \int_{y_1}^{y_2} A_2(y) z_2(y)\, dy = E\left[A_2\right]$$

analogamente:

(18)$_2$
$$E\left[S\right] = \int_{X_1}^{X_2} \left[Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} dx - E\left[Hg_2\right] = \int_{X_1}^{X_2} A_1(x) z_1(x)\, dx = E\left[A_1\right]$$

pero, como de (9) se obtienen las relaciones:

$$\int_{X_1}^{X_2} xL \frac{\partial z}{\partial x} dx = \int_{X_1}^{X_2} xPz\, dx + \int_{X_1}^{X_2} xLg_1 z\, dx$$

$$\int_{X_1}^{X_2} yL \frac{\partial z}{\partial x} dx = \int_{X_1}^{X_2} yPz\, dx + \int_{X_1}^{X_2} yLg_1 z\, dx$$

$$\int_{Y_1}^{Y_2} xH \frac{\partial z}{\partial y} dy = \int_{Y_1}^{Y_2} xQz\, dy + \int_{Y_1}^{Y_2} xHg_2 z\, dy$$

$$\int_{Y_1}^{Y_2} yH \frac{\partial z}{\partial y} dy = \int_{Y_1}^{Y_2} yQz\, dy + \int_{Y_1}^{Y_2} yHg_2 z\, dy$$

de las que se deducen, por integración, las siguientes:

(19)
$$\left[xLz\right]_{X_1}^{X_2} = \int_{X_1}^{X_2} (L + xR) z\, dx + \int_{X_1}^{X_2} (xLg_1 z)\, dx$$

$$\left[yLz\right]_{X_1}^{X_2} = \int_{X_1}^{X_2} yRz\, dx + \int_{X_1}^{X_2} yLg_1 z\, dx$$

$$\left[xHz\right]_{Y_1}^{Y_2} = \int_{Y_1}^{Y_2} xSz\, dy + \int_{Y_1}^{Y_2} xHg_2 z\, dy$$

$$\left[yHz\right]_{Y_1}^{Y_2} = \int_{Y_1}^{Y_2} (H + yS) z\, dy + \int_{Y_1}^{Y_2} yHg_2 z\, dy$$

expresiones que, integradas, nos conducen a:

(20)
$$\int_{y_1}^{y_2} \left[xLz\right]_{X_1}^{X_2} dy = E\left[L\right] + E\left[xR\right] + E\left[xLg_1\right]$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[yLz\right]_{X_1}^{X_2}dy = E[yR] + E\left[yLg_1\right] ; \int_{x_1}^{x_2}\left[xHz\right]_{Y_1}^{Y_2} dx = E\left[xS\right] + E\left[xHg_2\right]$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[yHz\right]_{Y_1}^{Y_2} dx = E\left[H\right] + E\left[yS\right] + E\left[yHg_2\right]$$

de donde, introduciendo las desviaciones $t_1 = x-\hat{x}$ y $t_2 = y-\hat{y}$, respecto a las medias totales, se tiene:

(21) $$r_1 t_1 + r_2 t_2 = R - E\left[R\right] \; ; \; s_1 t_1 + s_2 t_2 = S - E\left[S\right]$$

y si en las expresiones (20) restamos en ambos miembros $\hat{x}E\left[R\right]$, $\hat{y}E\left[R\right]$, $\hat{x}E\left[S\right]$ e $\hat{y}E\left[S\right]$ respectivamente, obtenemos (teniendo en cuenta los valores de $E\left[R\right]$ y $E\left[S\right]$ dados por (18), las caracteristicas lineales de la integración y del operador E) lo siguiente:

(22)
$$E\left[t_1 R\right] = \int_{y_1}^{y_2}\left[t_1 Lz\right]_{X_1}^{X_2} dy - E\left[L\right] - E\left[t_1 Lg_1\right] = R_o^1$$

$$E\left[t_2 R\right] = \int_{y_1}^{y_2}\left[t_2 Lz\right]_{X_1}^{X_2} dy - E\left[t_2 Lg_1\right] = R_o^2$$

$$E\left[t_1 S\right] = \int_{x_1}^{x_2}\left[t_1 Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} dx - E\left[t_1 Hg_2\right] = S_o^1$$

$$E\left[t_2 S\right] = \int_{x_1}^{x_2}\left[t_2 Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} dx - E\left[H\right] + E\left[t_2 Hg_2\right] = S_o^2$$

pudiendo sustituirse (22), considerando los valores de R y S en función de $t_1$ y $t_2$, por:

(23)
$$r_1 E\left[t_1^2\right] + r_2 E\left[t_1 t_2\right] = R_o^1 \; ; \; r_1 E\left[t_1 t_2\right] + r_2 E\left[t_2^2\right] = R_o^2$$

$$s_1 E\left[t_1^2\right] + s_2 E\left[t_1 t_2\right] = S_o^1 \; ; \; s_1 E\left[t_1 t_2\right] + s_2 E\left[t_2^2\right] = S_o^2$$

expresiones de las que pueden despejarse los momentos respecto de $\hat{x}$ e $\hat{y}$, obteniendose:

(24) $$m_{20} = E\left[t_1^2\right] = \frac{s_2R_o^1 - r_2S_o^1}{r_1s_2 - r_2s_1}; m_{02}=E\left[t_2^2\right]= \frac{r_1S_o^2-s_1R_o^2}{r_1s_2-r_2s_1}$$

$$m_{11}= E\left[t_1t_2\right] = \frac{s_2R_o^2- r_2S_o^2}{r_1s_2- r_2s_1} = \frac{r_1S_o^1- s_1R_o^1}{r_1s_2- r_2s_1}$$

que son relaciones idénticas a las obtenidas por Van UVEN [34] para el sistema clásico de Pearson bivariante, pero en (24), la determinación de las constantes $R_o^1$, $R_o^2$, $S_o^1$ y $S_o^2$ es más complicada por intervenir los términos derivados de las funciones $g_i$ ($i=1,2$) introducidas en (8), como se manifiesta en (22).

5.- Coeficientes de regresión.

Volviendo al caso particular, en que las ecuaciones de la regresión (16) sean lineales, se tiene de (15) y de (17) lo siguiente:

(25) $$\left[Lz\right]_{X_1}^{X_2} - \int_{X_1}^{X_2} Lg_1z\, dx = A_2(y)z_2(y)$$

$$\left[Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} - \int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2z\, dy = A_1(x)z_1(x)$$

y considerando la segunda y tercera ecuación de (20) tenemos:

$(26)_1$ $$E\left[yR\right] = \int_{y_1}^{y_2} y\left[Lz\right]_{X_1}^{X_2} dy - E\left[yLg_1\right]=$$

$$=\int_{y_1}^{y_2} y(A_2z_2+\int_{X_1}^{X_2} Lg_1z\, dx)dy - E\left[yLg_1\right]=$$

$$=\int_{y_1}^{y_2} y(A_2\int_{X_1}^{X_2} z\, dx)dy = E\left[yA_2\right]= a_{20}E\left[y\right]+ a_{21}E\left[y^2\right]$$

analogamente

$(26)_2$ $$E\left[xS\right]=\int_{x_1}^{x_2} x\left[Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} dx - E\left[xHg_2\right]=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} x(A_1z_1 +\int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2z\, dy)dx - E\left[xHg_2\right]=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} x(A_1\int_{Y_1}^{Y_2} zdy)dx = E\left[xA_1\right]= a_{10}E\left[x\right] + a_{11}E\left[x^2\right]$$

y como en el caso de linealidad, las relaciones (18), considerando (17), adoptan la siguiente forma:

(27) $$E\left[R\right]= E\left[A_2\right]= a_{20}+ a_{21}E\left[y\right]$$

$$E\left[S\right]= E\left[A_1\right]= a_{10}+ a_{11}E\left[x\right]$$

se tiene que:

(28) $$E\left[y\right]E\left[R\right]= a_{20}E\left[y\right]+ a_{21}E\left[y\right]^2$$

$$E\left[x\right]E\left[S\right]= a_{10}E\left[x\right]+ a_{11}E\left[x\right]^2$$

restando de (26) (28), se encuentra que:

$(29)_1$ $$E\left[t_2R\right]= E\left[yR\right]- E\left[y\right]E\left[R\right]= a_{21}(E\left[y^2\right]- E\left[y\right]^2)=a_{21}E\left[t_2^2\right]$$

$$E\left[t_1S\right]= E\left[xS\right]- E\left[x\right]E\left[S\right]= a_{11}(E\left[x^2\right]- E\left[x\right]^2)=a_{11}E\left[t_1^2\right]$$

esto es :

$(29)_2$ $$E\left[t_2R\right]= a_{21}\, m_{02} \quad ; \quad E\left[t_1S\right]= a_{11}\, m_{20}$$

pero, por otra parte, como:

(30) $$E\left[t_2R\right]= E\left\{t_2\left[r_0+r_1(t_1+\hat{x})+r_2(t_2+\hat{y})\right]\right\}= r_1m_{11}+ r_2m_{02}$$

$$E\left[t_1S\right]= E\left\{t_1\left[s_0+s_1(t_1+\hat{x})+s_2(t_2+\hat{y})\right]\right\}= s_1m_{20} + s_2m_{11}$$

yá que son nulos los términos $E\left[t_1\right]$ y $E\left[t_2\right]$.

e igualando los segundos miembros de $(29)_2$ y (30) se tiene:

$$a_{21}m_{02}= r_1m_{11}+ r_2m_{02} \; ; \; a_{11}m_{20} = s_1m_{20}+ s_2m_{11}$$

de donde se deduce:

(31) $$\frac{a_{21}-r_2}{r_1} = \frac{m_{11}}{m_{02}} = \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad ; \quad \frac{a_{11}-s_1}{s_2} = \frac{m_{11}}{m_{20}} = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

con lo que se obtiene para los coeficientes de regresión:

(32) $$\rho_{1/2} = \frac{a_{21}- r_2}{r_1} = \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad ; \quad \rho_{2/1} = \frac{a_{11}- s_1}{s_2} = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

que son las mismas fórmulas que las de una correlación normal.

6.- Caracteristicas de las distribuciones condicionadas.

Para las desviaciones respecto de las medias condicionadas, en el caso lineal, se tiene, considerando (16),(27) y (31), lo siguiente:

(33) $$x - E\left[X/Y=y\right] = \frac{1}{r_1}\,(r_o + r_1 x + r_2 y - A_2) = \frac{1}{r_1}\Big[R-(a_{20}- -a_{21}y)\Big] = \frac{1}{r_1}\Big\{E\left[R\right] + r_1 t_1 + r_2 t_2 - (a_{20} + a_{21}E\left[y\right]) - a_{21}t_2\Big\}$$

esto es:

$(34)_1$ $$x - E\left[X/Y=y\right] = t_1 - \frac{m_{11}}{m_{02}}\, t_2$$

y analogamente:

$(34)_2$ $$y - E\left[Y/X=x\right] = t_2 - \frac{m_{11}}{m_{20}}\, t_1$$

Obteniendose las desviaciones tipicas respecto de las medias condicionadas, mediante:

$(35)_1$ $$\sigma^2_{1,2} = E\Big\{x - E\left[X/Y=y\right]^2\Big\} = E\Big[(t_1 - \frac{m_{11}}{m_{02}}\, t_2)\Big]^2 = E\left[t_1^2\right] - 2\,\frac{m_{11}}{m_{02}}\, E\left[t_1 t_2\right] + \left(\frac{m_{11}}{m_{02}}\right)^2 E\left[t_2^2\right] = E\left[t_1^2\right] - \frac{m_{11}^2}{m_{02}}$$

esto es:

$(35)_2$ $$\sigma^2_{1,2} = (1-\rho^2)\,\sigma^2_1$$

y analogamente:

$(35)_3$ $$\sigma^2_{2,1} = E\Big\{y - E\left[Y/X=x\right]^2\Big\} = (1-\rho^2)\,\sigma^2_2$$

obteniendose exactamente lo mismo que en una correlación normal, es decir, en el caso de que $A_1$ y $A_2$ sean lineales, las fórmulas para los coeficientes de regresión (recuerdese lo obtenido en el apartado 5 anterior) y para las desviaciones tipicas respecto a las medias condicionadas están de acuerdo con las obtenidas en una correlación normal, aunque procedan de leyes bivariantes de probabilidad que son no-normales.

Los resultados a que nos conduce la hipótesis de linealidad de $A_i$ $(i=1,2)$ se mantienen, claro está, para $A_1=A_2=0$, valores que se obtienen, en particular, si:

(36)
a) se trabaja en la restricción operacional $({}^{p}A_1^0.)$
b) Lz y Hz son nulas en el borde del dominio de probabilidad

7.- Relación entre los momentos del sistema de Pearson bivariante generalizado.

Para operar con las desviaciones $t_1$ y $t_2$, es conveniente hacer una traslación del origen de x e y a $\hat{x}$ e $\hat{y}$, con lo cual las funciones z, $g_1$, $g_2$, P, Q, L, H, R y S sufriran las consiguientes modificaciones; asi p.e. las ecuaciones (9) pueden escribirse de la forma siguiente:

(37)
$$\frac{\partial z}{\partial t_1} - g_1 z = \frac{P}{L} z \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial t_2} - g_2 z = \frac{Q}{H} z .$$

Para obtener las relaciones entre los momentos, partimos de la relación:

$(38)_1$
$$t_1^i t_2^j \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} - g_1 z\right) L = t_1^i t_2^j Pz$$

y de

$(38)_2$
$$t_1^i t_2^j \left(\frac{\partial z}{\partial t_2} - g_2 z\right) H = t_1^i t_2^j Qz$$

que se transforman mediante integración en :

(39)
$$\int_{T_{11}}^{T_{12}} t_1^i t_2^j \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} - g_1 z\right) L \, dt_1 = \left[t_1^i t_2^j Lz\right]_{T_{11}}^{T_{12}} -$$
$$- \int_{T_{11}}^{T_{12}} z\left(i t_1^{i-1} t_2^j L + t_1^i t_2^j \frac{\partial L}{\partial t_1}\right) dt_1 - \int_{T_{11}}^{T_{12}} t_1^i t_2^j g_1 zL dt_1 =$$
$$= \int_{T_{11}}^{T_{12}} t_1^i t_2^j Pz \, dt_1$$

expresión, que, integrada respecto a $t_2$ y agrupando términos, queda en la forma:

$(40)_1$
$$\int_{t_{21}}^{t_{22}} \left[t_1^i t_2^j Lz\right]_{T_{11}}^{T_{12}} dt_2 = iE\left[t_1^{i-1} t_2^j L\right] + E\left[t_1^i t_2^j R\right] + E\left[t_1^i t_2^j g_1 L\right]$$

y analogamente de $(38)_2$ se obtendria:

$(40)_2$
$$\int_{t_{11}}^{t_{12}} \left[t_1^i t_2^j Hz\right]_{T_{21}}^{T_{22}} dt_1 = jE\left[t_1^i t_2^{j-1} H\right] + E\left[t_1^i t_2^j S\right] + E\left[t_1^i t_2^j g_2 H\right].$$

Analogamente a lo realizado en una sóla dimensión se toma el criterio (*), para que las funciones z sean aceptadas como funciones de densidad, de que Lz y Hz se anulan en el borde del dominio de probabilidad. Aceptado dicho criterio puede simplificarse las expresiones anteriormente obtenidas, en la forma siguiente:

$(17)_1$ y $(17)_2$ pasan a ser $E[R]=0$ y $E[S]=0$

(21) pasa a ser $R=r_1t_1+r_2t_2$ ; $S=s_1t_1+s_2t_2$

(22) " " " $R_o^1=E[t_1R]=-E[L]-E[t_1Lg_1]$; $R_o^2=E[t_2R]=-E[t_2Lg_1]$

$$S_o^1=E[t_1S]=-E[t_1Hg_2];\quad S_o^2=E[t_2S]=-E[H]-E[t_2Hg_2]$$

(24) " " " $$m_{20}=\frac{-s_2(E[L]+E[t_1Lg_1])+r_2[E\ t_1Hg_2]}{r_1s_2-r_2s_1}$$

$$m_{02}=\frac{-r_1(E[H]+E[t_2Hg_2])+s_1E[t_2Lg_1]}{r_1s_2-r_2s_1}$$

$$m_{11}=\frac{-s_2E[t_2Lg_1]+r_2(E[H]+E[t_2Hg_2])}{r_1s_2-r_2s_1}=\frac{-r_1E[t_1Hg_2]+s_1(E[L]+E[t_1Lg_1])}{r_1s_2-r_2s_1}$$

luego:

(41) $$\rho^2=\frac{m_{11}^2}{m_{02}m_{20}}=\frac{r_2s_1B+r_1s_2A-s_1s_2C-r_1r_2D}{r_1s_2B+s_1r_2A-r_1r_2D-s_1s_2C}$$

donde:

$A=E[t_2Lg_1]\cdot E[t_1Hg_2]$; $B=(E[H]+E[t_2Hg_2])(E[L]+E[t_1Lg_1])$

$C=E[t_2Lg_1](E[L]+E[t_1Lg_1])$ y $D=E[t_1Hg_2](E[H]+E[t_2Hg_2])$.

Siendo $A=C=D=0$ y $B=E[H]\cdot E[L]$ en $({}^{P}A_1^0.)$, con lo que resulta $\rho^2=r_2s_1/r_1s_2$ (de acuerdo con lo obtenido por Van UVEN en[34]pág.1069.

Por otra parte en las condiciones (36), las expresiones (40) pasan a ser:

(42) $$E[t_1^it_2^jR]=r_1m_{i+1,j}+r_2m_{i,j+1}=-iE[t_1^it_2^jL]-E[t_1^it_2^jg_1L]$$

$$E[t_1^it_2^jS]=s_1m_{i+1,j}+s_2m_{i,j+1}=-jE[t_1^it_2^{j-1}H]-E[t_1^it_2^jHg_2]$$

expresiones, que en particular, se convierten para i=0 y j=0, respectivamente, en las siguientes:

(*) Vease pág. 54 de esta Memoria

(43) $$r_1 m_{1,j} + r_2 m_{0,j+1} = - E\left[t_2^j g_1 L\right]$$

$$s_1 m_{i+1,0} + s_2 m_{i,1} = - E\left[t_1^i g_2 H\right]$$

que en el caso particular de que los segundos miembros sean nulos (esto se verifica p.e. en el algebra operacional $({}^{P}A_1^0.)$), de las (43) se obtiene:

(44) $$\frac{m_{11}}{m_{02}} = \frac{m_{12}}{m_{03}} = \frac{m_{13}}{m_{04}} = \ldots\ldots = \frac{m_{1j}}{m_{0,j+1}} = -\frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{m_{11}}{m_{20}} = \frac{m_{21}}{m_{30}} = \frac{m_{31}}{m_{40}} = \ldots\ldots = \frac{m_{i1}}{m_{i+1,0}} = -\frac{s_1}{s_2}$$

que son las relaciones obtenidas por Van UVEN para los momentos del sistema (1).

8.- Consideraciones finales.

A) La clasificación de las funciones de densidad bivariantes de tipo Pearson, se hace atendiendo a la naturaleza de la solución del sistema (1) que depende de los denominadores L y H, especialmente si tienen o no factores comunes (esto es debido al segundo miembro de la condición de integrabilidad (5)).

Por ello, las funciones de densidad z pueden clasificarse, de acuerdo al grado y a la mutua divisibilidad de L y H, distinguiendose 6 tipos principales,(vease pág. 1.252 del articulo citado de Van UVEN o la tabla clasificatoria de ELDERTON-JOHNSONN pág. 138) algunos de los cuales habian sido estudiados anteriormente, p.e. el tipo IIa, obtenido por FILON-ISSERLISS y publicado por K. PEARSON[27], y el IIIa estudiado por el propio K. PEARSON[28]. Por otra parte algunos de los distintos tipos, que da lugar el criterio de la clasificación anterior, están relacionados entre si p.e. los tipos IIb, IVa y V pueden ser considerados como casos limite particulares del tipo IIa (*).

B) La intersección de la superficie de probabilidad z con el plano $y=y_0$ es una curva de tipo Pearson y representa la distribución condicional de x con y fijo. Analoga interpretación para la intersección con el plano $x=x_0$.

---

(*) Vease Van UVEN[34]pág. 46 y siguientes.

## ESTUDIO DE ALGUNAS LEYES DE PROBABILIDAD BIVARIANTES INCLUIDAS EN EL SISTEMA DE PEARSON GENERALIZADO.-

### 1.- Introducción.

En este parrafo recojemos algunas leyes bivariantes de probabilidad estudiadas por E.JUAN HERNANDEZ (*) y por S.NAVARRO SAGRISTA (**) en 1.952, que satisfacen al sistema de Pearson generalizado (8), aunque no satisfagan, en general, al sistema de Pearson clásico, dado por las ecuaciones diferenciales de Van UVEN (1). Y corroboramos algunos de lós resultados obtenidos, por dichos autores, relativos a las lineas de regresión, a las relaciones entre momentos, etc, utilizando las conclusiones obtenidas en el estudio, realizado en el parrafo anterior, del sistema de Pearson generalizado.

### 2.- Leyes particulares.

A) Consideraremos, en primer lugar, la superficie de probabilidad estudiada,por JUAN HERNANDEZ en (*), que tiene la forma:

$$h(x,y) = K \frac{e^{-1/2(ax^2+ 2bxy+ cy^2)}}{B^2 + (ax^2+2bxy+cy^2)} \tag{45}$$

siendo $ac-b^2 > 0$.

Es de comprobación inmediata que la superficie (45) no satisface las ecuaciones de Pearson-Van Uven (1), yá que:

$$-\frac{\partial \ln h(x,y)}{\partial x} = ax+ by + \frac{2ax + 2by}{B^2 + (ax^2+2bxy+cy^2)} \tag{46}$$

$$-\frac{\partial \ln h(x,y)}{\partial y} = bx+ cy + \frac{2bx + 2cy}{B^2 + (ax^2+2bxy+cy^2)}$$

pero, (45) satisface al sistema de Pearson generalizado, introducido en (9), siendo:

$$g_1 = ax+ by \quad \text{y} \quad g_2 = bx+ cy \tag{47}$$

(*) Generalización de las leyes de probabilidad de Laplace-Gauss y Cauchy. Trabajos de Estadística, Vol.III-Cuadernos I-II
(**) Sobre una generalización de las curvas de Pearson al caso bidimensional. Trabajos de Estadística, Vol.III-Cuaderno III

que, evidentemente, verifican la condición (10)c).

Veamos que pueden deducirse de (45) las lineas de regresión, que son lineales, de acuerdo con (16):

$E\left[Y/X=x\right] = \frac{1}{s_2}\,(A_1-s_0-s_1x) = \frac{1}{s_2}\,(-s_0-s_1x)$ , yá que $A_1=0$, supuesto

aceptado el criterio de que Lz y Hz se anulan en el borde del dominio de probabilidad, como veremos a continuación, teniendo en cuenta el valor de $A_1$ dado por (15):

$$\left[Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} - \int_{Y_1}^{Y_2} Hg_2z\,dy = \left[K\,e^{-1/2(ax^2+2bxy+cy^2)}\right]_{Y_1}^{Y_2} -$$

$$\int_{Y_1}^{Y_2} K(bx+cy)e^{-1/2(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dy = 2\left[Hz\right]_{Y_1}^{Y_2} = 0.$$

Por lo que, teniendo en cuenta los valores de $s_0$, $s_1$ y $s_2$ dados por (13) en función de los coeficientes de los polinomios L , H, P y Q; la linea de regresión de y sobre x será:

(48) $$E\left[Y/X=x\right] = -\frac{b}{c}\,x$$

y analogamente se obtiene para la linea de regresión de x sobre y, lo siguiente:

(49) $$E\left[X/Y=y\right] = \frac{1}{r_1}\,(A_2-r_0-r_2y) = \frac{1}{r_1}\,(-r_0-r_2y) = -\frac{b}{a}\,y$$

tanto (48) como (49) están en completo acuerdo con lo obtenido por JUAN HERNANDEZ en la pág.161 del trabajo citado anteriormente; pero se han deducido de una forma, más sencilla, derivada del estudio del sistema de Pearson bivariante generalizado.

B) Consideramos, a continuación, las tres generalizaciones realizadas por NAVARRO SAGRISTA [25] deducidas mediante generalizaciones del sistema de ecuaciones en derivadas parciales que satisface la superficie normal (*).

1ª generalización.- Sea la superficie de probabilidad:

(50) $$z = K\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{2rxy}{ab}\right)^n \quad \text{con } n+1>0 \text{ y } r^2<1$$

(*) Observese que esta generalización, debido a su génesis, es más particular y menos sitemática que la de van Uven [34].

De (50) no puede obtenerse, como caso particular, la superficie normal de probabilidad, pero tiene propiedades análogas a la de dicha superficie (lineas de regresión rectilineas, la curtosis sólo depende de n, el coeficiente de correlación es el de la superficie normal, etc.).

Es de comprobación inmediata que (50) verifica a las ecuaciones diferenciales (1) de Pearson-Van Uven, adoptando la forma:

$$(51)\qquad \frac{\partial \ln z}{\partial x} = \frac{n\left(-\frac{2x}{a^2} + \frac{2ry}{ab}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{2rxy}{ab}} = \frac{P}{L}$$

$$\frac{\partial \ln z}{\partial y} = \frac{n\left(-\frac{2y}{b^2} + \frac{2rx}{ab}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{2rxy}{ab}} = \frac{Q}{H}$$

por lo tanto, en este caso, basta aplicar los resultados generales obtenidos por Van UVEN en 1.947 para obtener las distintas caracteristicas de (50), asi p.e. la relación entre los momentos de (50) obtenida por NAVARRO SAGRISTA de forma muy laboriosa en la pág. 281, del trabajo citado anteriormente:

$$(52)\qquad \frac{m_{i,1}}{m_{i+1,0}} = \frac{br}{a}$$

surge inmediatamente de (44), puesto que el primer miembro de (52) es igual a:

$$(53)\qquad \frac{m_{i,1}}{m_{i+1,0}} = -\frac{s_1}{s_2} = -\frac{q_1 + h_{11}}{q_2 + 2h_{02}}$$

y sustituyendo en (53) los valores de las constantes genericas $q_1$, $q_2$, $h_{11}$ y $h_{02}$ por sus correspondientes de (51), tenemos:

$$(54)\qquad -\frac{s_1}{s_2} = -\frac{\frac{2nr}{ab}+\frac{2r}{ab}}{\frac{-2n}{b^2}-\frac{2}{b^2}} = \frac{b(2r(n+1))}{a(2(n+1))} = \frac{br}{a}$$

que como se ve, coincide con (52).

También es inmediato la obtención de las lineas de regresión, que serán lineales (supuesto que (50) satisface a (36)b)) y vendran dadas por:

$$(55)_1 \qquad E\left[Y/X=x\right] = \frac{1}{s_2}(-s_0-s_1x) = -\frac{b^2}{2(n+1)}\left(-\frac{2r(n+1)}{ab}x\right) = \frac{br}{a}x$$

analogamente la regresión de x sobre y es:

$$(55)_2 \qquad E\left[X/Y=y\right] = \frac{1}{r_1}(-r_0-r_2y) = -\frac{a^2}{2(n+1)}\left(-\frac{2r(n+1)}{ab}y\right) = \frac{ar}{b}y$$

expresiones identicas a las obtenidas por Navarro en pág. 283.

2ª generalización.- Consideremos la función de densidad dada por:

$$(56) \qquad z = K\, e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}\,(h^2+ax^2+2bxy+cy^2)^n$$

estudiada por NAVARRO SAGRISTA (pág. 291), que coincide con la superficie normal en el caso n=0 y como n puede ser cualquier valor si $h\neq 0$, se tiene que (56) comprende la generalización de JUAN HERNANDEZ, puesto que,para n=-1,(56) coincide con (45). Analogamente a lo que ocurria con esta última superficie, sucede con (56), es decir, (56) no satisface al sistema clśico de Pearson, pero si verifica al sistema generalizado. Efectivamente de (56) se deduce:

$$(57) \qquad \frac{\partial \ln z}{\partial x} = -ax-by+n\frac{2ax+2by}{h^2+ax^2+2bxy+cy^2}$$

$$\frac{\partial \ln z}{\partial y} = -bx-cy+n\frac{2bx+2cy}{h^2+ax^2+2bxy+cy^2}$$

comparando (57) con $(9)_2$, deducimos que:basta con que:

$$(58) \qquad g_1 = -ax-by \quad \text{y que } g_2 = -bx-cy$$

para que (56) satisfaga al sistema de Pearson extendido a $({}^pA_1^g.)$.

Notese que las funciones (58) satisfacen la condición de integrabilidad del sistema.

El estudio realizado con (56) es analogo al realizado con (45), obteniendose las mismas lineas de regresión lineales, el coeficiente de correlación, etc.; por lo que no tiene interes el repetirlo.

3ª generalización.- Dada la superficie de probabilidad:

$$(59) \qquad z = m\, e^{-\frac{1}{2(k^2-r^2)}(kx^2-2rxy+ky^2)}$$

que surge como generalización de la ecuación en derivadas parciales que satisface la superficie normal expresada en unidades standard (vease pág. 310 del referido trabajo de Navarro), es inmediato comprobar que (59) satisface a (1) por lo que su estudio queda englobado en el realizado por Van Uven[34].

3.- Cuestiones a resolver.

En este apartado damos unas ideas generales, de algunas cuestiones derivadas de las presentadas en parrafos anteriores, que no son desarrolladas en la presente memoria, pero que son de indudable interes.

a) La idea de L.K.ROY de extender el campo de aplicación de las curvas de Pearson, considerando un segundo miembro analogo al de la ecuación diferencial de Pearson, pero más complejo (vease pág.56 de esta memoria) puede utilizarse, en una, primera, extensión del sistema de Pearson bivariante, debido a Van UVEN, considerando un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

(60)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{p_0+p_1x+p_2y+p_3x^2+p_4y^2+p_5xy}{x(l_{00}+l_{10}x+l_{01}y+l_{20}x^2+l_{02}y^2+l_{11}xy)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{q_0+q_1x+q_2y+q_3x^2+q_4y^2+q_5xy}{y(h_{00}+h_{01}y+h_{10}x+h_{20}x^2+h_{02}y^2+h_{11}xy)}$$

es claro que el sistema (60) constituye una extensión del sistema de Van UVEN (1) y que en el caso de que una de las variables sea constante, (60) coincide con (14) Cap.II 1ªParte.

Notese que si $p_0=p_2=p_4=q_0=q_2=q_4=0$, (60) coincide con (1) y que si $p_3=p_4=p_5=q_3=q_4=q_5=l_{20}=l_{02}=l_{11}=h_{20}=h_{02}=h_{11}=0$, (60) es de la forma (1). Por ello consideramos interesante el realizar un estudio paralelo al de Van UVEN con (60) e intentar lograr una clasificación de las superficies de probabilidad que satisfacen a (60), que claro está, englobará a la tipologia de Van Uven(Vease[34] pág.1252) y a otras superficies que no son consideradas como de tipo Pearson; analogo a lo que sucede en una dimensión, donde aparecen 5 nuevas curvas de probabilidad de este tipo [30]. También seria interesante, una vez realizado el estudio tipologico de las superficies de (60), investigar si las densidades bivariantes que satisfacen a (60), pero que no verifican (1), son soluciones de los sistemas de Pearson, extendidos a las algebras operacionales $({}^{p}A^{g}_{f}.)$ o $({}^{p}A^{g}_{1}.)$, (6) u (8). Siendo deseable el poder establecer un teorema, de inclusión de estas superficies en alguno de los sistemas de Pearson bivariantes generalizados, analogo al establecido para la extensión de ROY, en una dimensión, en la pág.57 de esta Memoria.

b) Otra cuestión interesante es investigar la posibilidad de un sistema de Kapteyn bivariante extendido al espacio operacional $({}^{p}A^{g}_{f}.)$, para lo cual puede tomarse como punto de partida el trabajo de Johnson, N.L.(1.949): Bivariate distributions based on simple traslations systems (Biometrika Vol.36, pág.297-304) en el que se estudian distribuciones bivariantes $S_{IJ}$, donde una variable $X_1$ sigue una $S_I$ distribución y la otra variable $X_2$ sigue una distribución $S_J$ (donde I y J pueden tomar 4 valores diferentes, entre ellos el log-normal: L). En particular es interesante el sistema $S_{LL}$ del que se obtienen, en el álgebra $({}^{p}A^{1}_{0}.)$, expresiones simples para la regresión (veáse [16] pág.17) y ha sido estudiado, desde el punto de vista de la Inferencia, por otros autores (*).

Por último señalaremos que el estudio de dicho sistema en el espacio operacional $({}^{p}A^{g}_{f}.)$ puede extenderse al campo multivariante, basandose en el trabajo de Jones, R.M. y Miller, K.S. (1.966): On the multivariate lognormal distribution (Journal of Industrial Mathematics. Vol.16, pág.63-76).

(*) Mostafa, M.D. y Mahmoud, M.W. On the problem of estimation for the bivariate lognormal distribution. Biometrika Vol.51, pág.522-527. 1.964

## EL SISTEMA DE PEARSON MULTIVARIANTE EXTENDIDO AL ALGEBRA OPERACIONAL ($^{p}A_{1}^{g}$.).-

### 1.- Introducción.

Uno de los trabajos más recientemente publicado sobre el sistema de Pearson, es el de H.S. STEYN (*). Centrandose el autor sobre las propiedades relativas a la regresión de las funciones de probabilidad multivariantes, comenzando con el estudio de casos particulares de distribuciones multivariantes (distribución normal, distribución de tipo beta-estudiada por FILON y recopilada por Pearson en [27]- y una generalización de la distribución bivariante estudiada por PEARSON y NARUMI en 1.923 [24] ) que tienen unas funciones de regresión lineales.

Prosiguiendo, con el estudio del sistema de Pearson multivariante, del cual son soluciones particulares las tres distribuciones mencionadas anteriormente, en la misma linea, esto es: concretar las condiciones para que una función de probabilidad, solución del sistema de Pearson multivariante, tenga una función de regresión lineal.

La lógica generalización del sistema de Pearson, conduce al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

(62)
$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{p_{io} + \sum_{j=1}^{k} p_{ij}\, x_j}{b_{ioo} + \sum_{j=1}^{k} b_{ijo} x_j + \sum_{j,h=1}^{k} b_{ijh} x_j x_h}\; y$$

donde:

(63) $i=1,2,\ldots,k$ y $b_{ijh} = b_{ihj}$

siendo los coeficientes $p_{rs}$ y $b_{rst}$ de (62) tales que las condiciones ordinarias para la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

(64)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$$

se verifican.

(*)On regression properties of multivariate probability functions of Pearsons types. Proceedings of the Royal Academy of Sciences Amsterdan, 1.960- Vol. 63, pág. 302-311

Claramente (62) es una generalización de (1) y para valores constantes de $x_2,\ldots,x_k$ la ecuación diferencial en $x_1$ resultante, define un sistema de Pearson univariante.

2.- El sistema de Pearson multivariante generalizado.

Analogamente a lo realizado en los casos univariante y bivariante, puede lograrse una generalización del sistema de Pearson correspondiente, sin más que considerar el sistema de ecuaciones diferenciales engendrado por:

(65)
$$\frac{1}{y}\left(a_{f_i}^{g_i}.y\right)_{x_i}^{1} = \frac{p_{io} + \sum_{j=1}^{k} p_{ij}\, F_j(x_j)}{b_{ioo} + \sum_{j=1}^{k} b_{ijo} F_j(x_j) + \sum_{j,h=1}^{k} b_{ijh} F_j(x_j) F_h(x_h)}$$

donde se supone que los operadores $(a_{f_i}^{g_i}.)_{x_i}^{1}$ satisfacen las condiciones (55) de la 2ª parte del Capitulo I de la presente Memoria y, los subindices y los coeficientes de (65) verifican (63).

Si consideramos en (65) la restricción $f_i=1$, $\forall i$ (por analogas razones a las aducidas en la pág.93 ) obtenemos:

(66)
$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} - g_i y\right) = \frac{p_{io} + \sum_{j=1}^{k} p_{ij}\, x_j}{b_{ioo} + \sum_{j=1}^{k} b_{ijo} x_j + \sum_{j,h=1}^{k} b_{ijh} x_j x_h}$$

sistema que coincide, obviamente, con (62) para $g_i=0$, $\forall i$.

Recojemos sin demostración el teorema de STEYN para el caso de una función de probabilidad continua multivariante( introducido en [33] ) que es la adecuación, al caso continuo, de otro T$^{\underline{ma}}$ demostrado por el mismo autor en (*).

TEOREMA 2.1: "Sea $y(x_1,\ldots,x_k)$ una función de densidad continua multivariante, definida para $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ y supongamos que:

(67)
$$M(t_1,\ldots,t_k) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots\cdots \int_{a_k}^{b_k} y(x_1,\ldots,x_k)\, e^{\sum_1^k t_i x_i}\, dx_1 \ldots dx_k$$

es su función generatriz de momentos, que existe para una $t_1,t_2,\ldots t_k$-región incluyendo $t_1=\ldots=t_k=0$, entonces una condición

(*)On regression properties of discrete systems of probability functions. Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,Series A,60, 1 and Indag.Math. 19, 1 (1.957) necesaria y suficiente para que la función de regrsión de $x_1$ sobre $x_2,\ldots,x_k$ venga dada por:

(68) $$\hat{x}_1=\frac{Q(x_2,\ldots,x_k)}{R(x_2,\ldots,x_k)}$$

donde Q y R son polinomios, es:

(69) $$\left[\frac{\partial}{\partial t_1}R\left(\frac{\partial}{\partial t_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial t_k}\right)M\right]_{t_1=0}=\left[Q\left(\frac{\partial}{\partial t_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial t_k}\right)M\right]_{t_1=0}$$

Y una condición similar se obtiene para la función de regresión de cualquier $x_i$ sobre las restantes variables.

Veamos a continuación algunas propiedades deducidas de la propia definición de función generatriz de momentos, que son necesarias para la demostración del teorema de la linealidad de la regresión en el sistema de Pearson multivariante.

Propiedades.-

a) Si $y(x_1,\ldots,x_k)$ se anula en los extremos de $x_i$, se tiene, integrando por partes con respecto a $x_i$ en (67) que:

(70) $t_i M$ es la función generatriz de momentos de $-\frac{\partial}{\partial x_i}y$.

b) Obteniendose por derivación con respecto a $t_i$ en (67), supuesta absolutamente convergente la integral, que:

(71) $\frac{\partial M}{\partial t_i}$ es la f.g.m. de $x_i y$ $(i=1,\ldots,k)$

c) Cuando también las derivadas de y se anulan en los limites de las $x_i$ claramente se obtiene repitiendo la integración por partes con respecto a las $x_i^s$ y repitiendo la derivación con respecto a las $t_i^s$ que:

(72) $$\frac{\partial^{\sum_{i=1}^{k}}}{\partial t_1^{s_1}\partial t_2^{s_2}\ldots\partial t_k^{s_k}}t_1^{r_1}t_2^{r_2}\ldots t_k^{r_k}M$$

es la f.g.m. de $$(-1)^{\sum_{i=1}^{k}}x_1^{s_1}x_2^{s_2}\ldots x_k^{s_k}\frac{\partial^{\sum_{i=1}^{k}}y}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\ldots\partial x_k^{r_k}}$$

Basandose en el teorema 2.1 anterior y en las propiedades de la f.g.m. se demuestra el siguiente teorema de Steyn referente a la linealidad de la regresión de las densidades que son soluciones del sistema de Pearson multivariante (62).

TEOREMA 2.2:"Dada la función de probabilidad $y=y(x_1,\dots,x_k)$ que es solución del sistema de ecuaciones diferenciales (62) y tal que y se anula en los límites de $x_i$, entonces la regresión de $x_i$ sobre las otras variables es lineal y viene dada por:

(73) $$(p_{ii}+2b_{iii})\hat{x}_i = -(p_{io}+b_{iio}) - \sum_{j\neq i}(p_{ij}+2b_{iij})x_j \text{"}$$

Demostración.-

Si en (62) se hace i=1, se tiene:

(74) $$\left(b_{1oo}+\sum_{j=1}^{k} b_{1jo}x_j+\sum_{j,h=1}^{k} b_{1jh}x_jx_h\right)\frac{\partial y}{\partial x_1}=\left(p_{10}+\sum_{j=1}^{k} p_{1j}x_j\right)y$$

y multiplicando por $\exp(\sum_{i=1}^{k} t_ix_i)$ e integrando en la $t_1,\dots t_k$-región, se obtiene:

(75) $$-b_{100}t_1M-\sum_{j=1}^{k} b_{1j0}\frac{\partial}{\partial t_j}(t_1M)-\sum_{j,h=1}^{k} b_{1jh}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_h}(t_1M)=p_{10}M+\sum_{j=1}^{k} p_{1j}\frac{\partial M}{\partial t_j}$$

teniendo en cuenta (70),(71) y (72).

Desarrollando las sumatorias en (75) convenientemente, tenemos:

(76) $$-b_{100}t_1M-b_{110}\frac{\partial}{\partial t_1}(t_1M)-\sum_{j=2}^{k} b_{1j0}\frac{\partial}{\partial t_j}(t_1M)-b_{111}\frac{\partial^2(t_1M)}{\partial t_j^2}$$

$$-2\sum_{j=2}^{k} b_{11j}\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_j}(t_1M)-2\sum_{j=3}^{k} b_{12j}\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial t_j}(t_1M)-\dots-2b_{1,k-1,k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_{k-1}\partial t_k}(t_1M) = p_{10}M+p_{11}\frac{\partial}{\partial t_1}M+\sum_{j=2}^{k} p_{1j}\frac{\partial}{\partial t_j}M$$

es decir:

(77) $$-b_{100}t_1M-b_{110}\left(M+t_1\frac{\partial M}{\partial t_1}\right)-\sum_{j=2}^{k} b_{1j0}t_1\frac{\partial M}{\partial t_j}-b_{111}\left(2\frac{\partial M}{\partial t_1}+\right.$$

$$\left.+t_1\frac{\partial^2 M}{\partial t_1^2}\right)-\sum_{j=2}^{k} b_{1jj}t_1\frac{\partial^2 M}{\partial t_j^2}-2\sum_{j=2}^{k} b_{11j}\left(\frac{\partial M}{\partial t_j}+t_1\frac{\partial^2 M}{\partial t_1\partial t_j}\right)-$$

$$-2\sum_{j=3}^{k} b_{12j}t_1\frac{\partial^2 M}{\partial t_2\partial t_j}-\dots-2b_{1,k-1,k}t_1\frac{\partial^2 M}{\partial t_{k-1}\partial t_k}=$$

$$=p_{10}M+p_{11}\frac{\partial M}{\partial t_1}+\sum_{j=2}^{k} p_{1j}\frac{\partial M}{\partial t_j}$$

y haciendo $t_1=0$, obtenemos:

(78) $$\left[(p_{11}+2b_{111})\frac{\partial M}{\partial t_1}\right]_{t_1=0} = \left[-(p_{10}+b_{110})M-\sum_{j=2}^{k}(p_{1j}+2b_{11j})\frac{\partial M}{\partial t_j}\right]_{t_1=0}$$

y empleando el teorema 2.1, se tiene:

(79) $$\hat{x}_1 = -\frac{(p_{10}+b_{110})+\sum_{j=2}^{k}(p_{1j}+2b_{11j})x_j}{p_{11}+2b_{111}}$$

Por lo que se obtiene, analogamente, para la ecuación de la regresión de $x_i$ sobre las otras variables, lo siguiente:

$$(p_{ii}+2b_{iii})\hat{x}_i = -(p_{i0}+b_{ii0})-\sum_{j\neq i}(p_{ij}+2b_{iij})x_j \quad \text{c.q.d.}$$

Como se observa el anterior Teor.2.1 caracteriza a las distribuciones continuas multivariantes cuya regresión parcial de una variable respecto de las restantes venga dada por una función racional; lo cual constituye un problema de caracterización más general que el problema de regresión constante estudiado por KAGAN-LINNIK-RAO en el Cap.V de Characterization Problems in Mathematical Statistcs, Wiley (1.973).

El resultado del Teor.2.2 no puede extenderse, en general manteniendo la condición necesaria y suficiente (69), a las soluciones de los sistemas (65) o (66).

# CAPITULO III

## ESTRUCTURAS EXPONENCIALES

. Las e.e. exponenciales extendidas a $({}^{p}A_{f}^{g}.)$

-la familia y la e.e. exponencial en $({}^{p}A_{f}^{g}.)$

-teorema de equivalencia

-estructura exponencial canónica

-teorema de completitud

. La función caracteristica de las e.e. exponenciales canónicas en $({}^{p}A_{f}^{g}.)$

. Teorema sobre la exhaustividad de las e.e. exponenciales

. Inferencia en las e.e. exponenciales generalizadas

-estimación en una e.e. exponencial

-tests en una e.e. exponencial canónica escalar generalizada

. Relaciones entre las e.e. de Pearson y exponenciales

RESUMEN Y FINES DEL CAPITULO III.-

La importancia de las familias exponenciales estriba en que contienen a las distribuciones más importantes de la Estadística, como casos especiales; así p.e. son familias exponenciales las distribuciones normales de cualquier dimensión, las distribuciones de tipo Pearson-III, las distribuciones de Poisson, las binomiales, $\chi^2$, etc.; aunque no lo son, en general, las distribuciones $\beta$ y $\Gamma$ descentradas, entre otras.

Conocido es también, su papel básico en la suficiencia. Y como son familias que alcanzan la cota de Cramer-Rao, los tests sobre ellas, tienen propiedades optimas ( un análisis detallado muy actual puede verse en ZACKS "The theory of statistical inference", Wiley 1.971 Cap.III y IV -pág.188 en relación con la cota de Cramer-Rao-).

El estudio de estas familias desde Poincaré y Boltzman se ha intensificado considerablemente; ya Blackwell-Girshich en 1.954 da como expresión de la densidad de una familia exponencial, la siguiente:

$$p_{\theta}(x/\theta) = C(\theta).\exp(\theta x).r(x)$$

estudiando problemas concretos sobre ellas, como el de determinar procedimientos monótonos de decisión (vease Blackwell-Girshich, pág.181 Sección 7.4).

Más recientemente Lehmann (1.959) extiende la definición anterior de f.e. al campo multidimensional. Este será el marco adecuado a nuestras generalizaciones, yá que estas se desarrollarán sobre espacios multidimensionales, con ayuda de la transformada de Laplace sobre $({}^{p}A_{f}^{g}.)$ (Cap.II 2ªParte, de esta Memoria).

La densidad de una f.e. dada por Lehmann y seguida por Linnik (1.967) adopta la forma:

$$p_{\theta}(x) = C(\theta)\ \exp \sum_{j=1}^{s} Q_j(\theta).T_j(x)\ h(x)$$

Con el concepto de estructura estadística introduci do por Barra en 1.971, como triple (W,U,P) donde P es una familia de leyes de probabilidad en un espacio probabilizable (W,U), se ha dado el último paso en el estudio de las f.e.; consistiendo este en sumergir dichas familias en una estructura estadística, con la condición de que la familia de leyes de probabilidad P sea del tipo dado por Lehmann, dando lugar con ello al estudio de las estructuras estadísticas exponenciales completas o incompletas (cuyo estudio no ha hecho más que comenzar [20] pág.89). En este sentido, hemos abordado en el Cap. anterior las estructuras estadísticas de Pearson.

En el presente trabajo se considera una estructura exponencial más general que la considerada por Barra, de manera que, contenga como caso particular a esta estructura exponencial y mantenga las propiedades analiticas más interesantes.

La herramienta utilizada para la construcción de la estructura exponencial generalizada, es el espacio operacional introducido por Aldanondo en 1.968 y estudiado por otros autores en trabajos recientemente publicados (vease Rodriguez Cano [29] Gutierrez Jaimez [14] ). Investigandose la permanencia de las propiedades fundamentales cuando se introduce el mencionado espacio operacional y la corres pondiente transformada de Laplace sobre dicho espacio, para lo cual se ha extendido el concepto de transformada de Laplace generalizada al campo s-dimensional (vease la 2ªParte del Cap.I de esta Memoria).

Como se sabe la propiedad clave de estas familias es su comportamiento respecto de la suficiencia. Por eso gran parte del estudio que se sigue, se dedica a preparar las bases analiticas para investigar dicho caracter en las f.e. generalizadas.

Las dificultades analiticas son grandes, y estan ligadas a las de las familias canónicas, intimamente relacionadas a su vez con las propiedades de tipo analitico de las transformadas de Laplace y Fourier sobre ( $A_f^g$.).

Finalmente se aborda, siguiendo los pasos de Barra en el análisis de la Inferencia por métodos de Análisis Funcional, el estudio de los conceptos básicos de Estimación y Contraste en las familias citadas, con la utilización de los conceptos analizados en la 1ª Parte del Cap.I de esta Memoria.

Entre los más importantes trabajos que actualmente se llevan a cabo sobre familias exponenciales, destacan los que se refieren al empleo de los métodos generales de la Inferencia clásica y bayesiana, sobre dichas familias. En este sentido los recientes articulos de Matthes-Truax [21], R.E. Schwartz [32] y de P.J.Bickel [5] son de gran importancia. También es muy importante el reciente texto de Zacks -anteriormente citado- con una bibliografia puesta al dia en la materia.

## ESTRUCTURAS ESTADISTICAS EXPONENCIALES EXTENDIDAS A $({}^{p}A_{f}^{g}.)$.-

En el orden de ideas, que ha prevalecido en el Cap. II de esta Memoria para la obtención de funciones de densidad en el espacio operacional $(A_{f}^{g}.)$ o en el $({}^{p}A_{f}^{g}.)$ (vease 1ª y 2ª parte del Cap.II), introducidos en la 2ª parte del Cap.I, está la consideración de densidades de tipo exponencial sobre los espacios operacionales referidos.El estudio de dichas densidades nos conduce a las familias exponenciales generalizadas y su inclusión en el triple estructural nos lleva al estudio de las estructuras estadísticas exponenciales extendidas, en general,a $({}^{p}A_{f}^{g}.)$(*), de forma analoga a lo que ocurria en el Cap.II, donde la consideración del conjunto de densidades que satisfacen a unas determinadas ecuaciones diferenciales, nos daba los sistemas de Pearson (escalar y vectorial); y si dichos sistemas se ubicaban en una e.e., se obtenia las e.e. de tipo Pearson.

Sobre todo interesa resaltar el papel privilegiado que ocupan las llamadas e.e. exponenciales canónicas, definidas mediante la transformada de Laplace de una medida (vease Cap.I pág.46 y siguientes), por sus potentes y elegantes resultados.

### 1.- La familia exponencial en $({}^{p}A_{f}^{g}.)$.

Sea el espacio $\mathbb{R}^k$ dotado de la tribu de sus borelianos $B_{\mathbb{R}^k}$ y m una medida $\sigma$-finita definida en $B_{\mathbb{R}^k}$. Consideremos la familia de las densidades $p_\theta(x)$ con respecto a m que tienen la forma:

$$(1)\qquad p_\theta(x,F,G)=C(\theta).\exp\left\{G(x)\dotplus\sum_{j=1}^{s}Q_j(\theta).T_j\left[Z(x)\right]\right\}\ h\left[Z(x)\right]$$

con $s\leq k$ y $Z(x)=F(x)\dotminus F(x_0)$. Las densidades de tipo (1) constituyen, por definición, una familia exponencial generalizada(**); donde: a) $x\in\mathbb{R}^k$

(*) Un estudio de dichas estructuras, ha presentado el autor de esta Memoria, en las III Jornadas Hispano-Lusas, Sevilla 1.974 y será publicado en las Actas de dichas Jornadas.

(**) La anterior definición mantiene la linea marcada por LINNIK en[20]y el criterio de generalización, señalado a lo largo, de esta Memoria.

b) $\theta$ es un parámetro que toma sus valores en un conjunto abstracto $\Theta$.

c) $Q_j(\theta)$ son funciones arbitrarias del parámetro $\theta$.

d) $T_j[Z(x)]$ y $h[Z(x)]$ son funciones medibles con respecto a la tribu $B_{\mathbb{R}^k}$.

e) $F(x)$ y $G(x)$ son las funciones introducidas mediante la utilización de un operador de $({}^pA_f^g.)$ concreto.

Es evidente, que la familia exponencial en $({}^pA_f^g.)$, dada por (1), comprende a la f.e. en $({}^pA_1^0.)$ dada por Lehmann, Linnik y Barra, mediante:

(2) $$p_\theta(x) = C(\theta)\ \exp\left\{\sum_{j=1}^{s} Q_j(x).T_j(x)\right\} h(x)$$

pues, basta hacer en (1), $G(x)=0$, $F(x)=1$ y $x_0=0$ para que (1) coincida con (2).

La expresión (1) puede reducirse, llamando a:

(3) $$e^{G(x)}\ h[Z(x)] = h^g(x)$$

e introduciendo el espacio convexo (vease la demostración de Lemann para la convexidad en [19] pág. 51) de los parámetros naturales:

(4) $$Q_j(\theta) = \theta_j \quad (j=1,\dots,s)$$

a una del tipo:

(5) $$p_\theta^g(x) = C(\theta)\ \exp\left\{\sum_{j=1}^{s} \theta_j\ T_j[Z(x)]\right\} h^g(x)$$

siendo la conducta de los parámetros numericos $\theta_j$ de gran importancia en el estudio de las familias exponenciales (vease Linnik págs. 4 y 90; donde, mediante relaciones entre los parámetros $\theta_j$, llamadas ligazones o ligaduras, de la forma: $\Pi_n(\theta_1,\dots,\theta_s)=0$ $n=1,\dots,r$; $r < s$, nacen las familias exponenciales incompletas cuyo estudio no ha hecho más que comenzar).

<u>Las familias exponenciales pueden encuadrarse en la Estadística Estructural</u>, en la forma siguiente:

(*) Decimos que la e.e. dominada (vease definición (I.1ªP.2)): $(\mathbb{R}^k,\ B_{\mathbb{R}^k},\ p_\theta;\ \theta \in \Theta)$

es una estructura exponencial generalizada, si el soporte de $p_\theta$

(*) La definición de e.e. exponencial está dada bajo la linea marcada por Barra.

no depende de $\theta$: $\forall\ \theta \in \mathbb{R}^k$ $E=\{x\in \mathbb{R}^k / p_\theta(x,F,G) > 0\}$ ,
y si el espacio vectorial de las funciones de E engendrado por la familia de funciones en E:

(6) $$\ln \frac{p_\theta(x,F,G).\exp(-G(x))}{p_{\theta_0}(x,F,G)} \quad , \ \theta \in \Theta$$

donde $\theta_0$ es un punto de $\Theta$ de dimensión finita.

<u>Teorema de equivalencia.</u>-

"La definición de e.e. exponencial generalizada es equivalente a decir que $p_\theta(x,F,G)$ tiene la forma (1)".

La demostración de este Teor. está basada en el Teor. 6 de Barra pág.27, recogido en la pág.16 de esta Memoria, adecuado a las funciones (6). Para ello se comprueba, facilmente, en primer lugar que las funciones (6) y las funciones constantes constituyen un espacio vectorial V, por lo que puede escribirse:

(7) $$\ln \frac{p_\theta(x,F,G)\exp(-G(x))}{p_{\theta_0}(x,F,G)} = k_\theta + \Sigma Q_j(\theta).T_j\,[Z(x)]$$

de donde despejando $p_\theta(x,F,G)$ se tiene:

(8) $$p_\theta(x;F,G) = e^{G(x)} p_{\theta_0}(x,F,G)\ e^{k_\theta + \Sigma Q_j(\theta).T_j[Z(x)]}$$

y llamando a $p_{\theta_0}(x,F,G) = h\,[Z(x)]$ y a $\exp(k_\theta)=C(\theta)$, se concluye que (8) coincide con (1); y reciprocamente, si se sustituye (1) en (7) se obtiene una identidad.

2.- <u>Estructuras exponenciales canónicas.</u>

Por su importancia, cabe destacar el siguiente caso particular de e.e. exponencial:

Sea una medida medida positiva moderada m en ($\mathbb{R}^s$, $B_{\mathbb{R}^s}$), se llama e.e.canónica en ($^PA^g_f$.) asociada a m, toda estructura estadística de la forma:

(9) $$\left[\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s}, \frac{dP_\theta}{dm} = \frac{\exp\left\{\langle\theta, [F(x_i)-F(x_i^0)]\rangle + s\,[G(x^0)-G(x)]\right\} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i)}{L_m^g(-\theta)}\right]$$

donde $\theta \in \Theta \subset D'_m$ (simétrico de $D_m$ con respecto al origen).

En la restricción operacional($^PA^0_1$.) la e.e. (9) queda reducida a:

(10) $$\left[\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s}, \frac{dP_\theta}{dm} = \frac{e^{\langle\theta,x\rangle}}{L_m(-\theta)} \;;\; \theta \in \Theta \subset D'_m\right]$$

que es la expresión dada por Barra (pág.167) para la e.e. canónica en 1.971; existiendo un precedente en el estudio de estas leyes de probabilidad, definidas mediante la transformada de Laplace, debido a S.RIOS (1.953)(vease[31] pág.112-119).

Es inmediato comprobar que (9) corresponde a una estructura exponencial del tipo (5), donde:

$$C(\theta) = \frac{1}{L_m^g(-\theta)} \;;\; h^g(x) = \exp\left\{s\left[G(x^0)-G(x)\right]\right\} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i)$$

$$\langle\theta, \left[F(x_i)-F(x_i^0)\right]\rangle = \sum_{j=1}^{s} \theta_j\, T_j\left[Z(x)\right] \;;\; Z(x_i) = F(x_i) - F(x_i^0)$$

<u>Teorema de completitud</u>.-

<u>Sea la e.e. (9), si $\Theta$ es de interior no vacio, dicha estructura es completa</u>.

La demostración del teorema está basada en la definición de e.e. completa (vease pág. 8 de esta Memoria) y en las propiedades de la transformada de Laplace introducida por (63) en la pág.48.

Consideremos la función $r(x)$ en $R^s$ tal que la integral:

$$\int_{\mathbb{R}^s} r(x)\, e^{\langle\theta, [F(x_i)-F(x_i^0)]\rangle + s[G(x^0)-G(x)]} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i)\, dm$$

se anula $\forall\theta \in \Theta$ y un punto $\theta_0$ de $\Theta$ (yá que por hipótesis $\Theta$ es no vacio), entonces la medida $m'$ definida por:

(11) $$dm' = r(x)\, e^{\langle\theta_0, [F(x_i)-F(x_i^0)]\rangle}\, dm$$

es moderada y se tiene, supuestas las $f_i(x_i)$ estrictamente positivas, que:

(12) $$\theta_0 - \mathrm{Re}(\theta) \in \Theta \Longrightarrow L^g_{m'}\left[\mathrm{Re}(\theta)\right] = 0$$

yá que:

$$L^g_{m'}\left[\mathrm{Re}(\theta)\right] = \int_{R^s} e^{-\langle \mathrm{Re}(\theta), [F(x_i)-F(x_i^0)]\rangle + s[G(x^0)-G(x)]} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i)\, dm' =$$

$$= \int_{R^s} e^{-\langle [\theta_0 + \mathrm{Re}(\theta)], Z(x_i)\rangle + s[G(x^0)-G(x)]} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i)\, r(x)\, dm = 0$$

puesto que dicha integral se anula $\forall\theta \in \Theta$ por hipótesis, luego se deduce que $m'$ es nula y por consiguiente $r(x)$ es nula m-p.p. por lo tanto la e.e. es completa.

Resultados relativos a la función caracteristica de las e.e. exponenciales canónicas extendidas al algebra $({}^{p}A^{g}_{f}.)$.-

En el caso de manejar e.e. del tipo (10), se obtiene para la f.c. de la familia de las densidades de dicha estructura, una expresión que es el cociente de dos transformadas de Laplace (vease [31] pág.113 ó [4] pág.168).

Uno de los objetivos que se persiguen en este parrafo, es, mantener este resultado para la familia de las densidades de la e.e. (9); para ello utilizaremos la f.c. dada por (77) en la 1ª parte del Cap.II de esta Memoria, pero adecuada al caso multidimensional que nos ocupa; es decir, la f.c. de un vector aleatorio X de $\mathbb{R}^k$ con f.D. P(x), en $({}^{p}A^{g}_{f}.)$, será:

(13) $$\forall t\in \mathbb{R}^k:\ \alpha^{G}(t_1,\dots,t_k)=E^{G}\left[e^{\langle it,X\rangle}\right]=\int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle it,Z(x)\rangle}\,dP$$

dicha f.c. comprende a la habitual en la restricción operacional $({}^{p}A^{0}_{1}.)$ y como su analoga en el campo unidimensional satisface al Teor. de Bochner, manteniendo el Teor. de la f.c. para la suma de v.a. independientes- analogo al (II.1ªP.(86)), demostrado para v.a. unidimensionales -

Sobre la analiticidad de la función caracteristica.-

Se demuestra en el caso clásico (vease Barra pág.165) que la transformada de Laplace de una medida m moderada, $L_m(z)$, es una función analítica con $z\in\mathbb{R}^s$. La demostración de este resultado se basa en dos puntos:

1º) la reducción del caso s-dimensional, al unidimensional, según resultado analítico del Teor. de HARTOGS (vease Hormander, An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, 1.966 pág.28 ó Dieudonné [19] pág.223).

2º) el suponer que todos los momentos de la medida m existen, es decir, que estan acotados.

Al estudiar el comportamiento de la transformada de Laplace generalizada, $L^{g}_{m}(z)$, se encuentra la dificultad de que las derivadas de orden r de $L^{g}_{m}(z)$, respecto a z r veces, y en el punto z=0, no expresan los momentos generalizados, que ,también por hipótesis, se suponen finitos como en el caso clásico. Asi p.e., el resultado que se obtiene en el caso unidimensional es:

$$\left.\frac{\partial^r L_m^g(z)}{\partial z^r}\right|_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{G(x_0)-G(x)}\left[Z(x)\right]^r f(x)\ (-1)^r\ dm$$

que no coincide con los momentos en $(A_f^g.)$ definidos en (II.1ªP. (75)) y que en caso de necesidad se tomará, por hipótesis,acotada la expresión anterior.

Ante esta dificultad, optamos por manejar la f.c. generalizada $\alpha^G(t)$ definida en (II.1ªP.(77)), puesto que dicha función está relacionada directamente con los momentos generalizados, manejados en esta Memoria, como se ha puesto de manifiesto en (II.1ªP.(78)), teniendose:

(14)
$$\frac{\partial^r \alpha^G(t)}{\partial t^r} = \int_{\mathbb{R}} \left[Z(x)\right]^r . i^r . e^{itZ(x)} p(x)\ dm$$

ahora bien, si todos los momentos respecto de la medida m existen por hipótesis, entonces (14) está acotado $\forall r$, pero ello implica que (14) para t=0 es menor que infinito y por ser esto: $E^G\left[X^r\right]<\infty$ , la función caracteristica admite derivadas de cualquier orden, es decir, es analítica.

Por otra parte, aplicando el desarrollo de Taylor, se tiene:

$$\alpha^G(t)=\alpha^G(t_0)+\sum_{r=1}\left.\frac{\partial^r \alpha^G(t)}{\partial t^r}\right|_{t=t_0} \frac{1}{r!}\ \frac{1}{i^r}\ (t-t_0)^r\ ,\ \forall t_0$$

es decir, que $\alpha^G(t)$ puede expresarse mediante: $\sum_r a_r(t-t_0)$; lo que coincide con la definición clásica de función analitica ( vease Dieudonné, pág.198).

Más adelante se verá otra forma de llegar a la analiticidad de la f.c. generalizada, pero referida exclusivamente a las e.e. exponenciales canónicas, mediante la transformada de Laplace asociada a dichas e.e.

Definidos los momentos de una distribución s-dimensional en forma analoga al caso clásico y en el orden de ideas marcado por la extensión del operador esperanza matemática $E^G$, introducido en (II.1ªP.(73)), esto es, p.e. en el caso bidimensional el momento generalizado $\alpha^G_{kj}$ viene dado por:

$$\alpha^G_{kj} = E^G[X^k . Y^j] = \int_{\mathbb{R}^2} [Z(x)]^k . [Z(y)]^j \; p(x,y) \; dx \; dy$$

se obtiene el siguiente Teor. para las e.e. exponenciales.

<u>Teorema.</u>- "Sea X un vector aleatorio en $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ que tiene por ley de probabilidad, la ley $p_\theta = \frac{dP_\theta}{dm}$ de la e.e. (9); la f.c. de X en $({}^pA^g_f.)$ es igual a:

(15)(*) $$\forall\, t \in \mathbb{R}^s, \; \alpha^G_X(t) = \frac{L^g_m(-it-\theta)}{L^g_m(-\theta)} \quad "$$

La demostración resulta, inmediatamente, de aplicar la definición de f.c. en $({}^pA^g_f.)$ (13) a las densidades de (9), efectivamente:

$$\alpha^G_X(t) = \int_{\mathbb{R}^s} e^{\langle it, Z(x)\rangle} \frac{1}{L^g_m(-\theta)} \; e^{\langle \theta, Z(x)\rangle \dotplus s[G(x^0)-G(x)]} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i) dm$$

luego, resulta (15) evidentemente.

Los momentos generalizados de X se obtienen mediante derivación de la f.c., obteniendose, en particular, que:

(16)(*) $$\{E^G(X)\} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}_\theta \; \ln L^g_m(-\theta)$$

$$(\Lambda^G_X) = \left( \frac{\partial^2}{\partial\theta_k \partial\theta_j} \ln L^g_m(-\theta);\; k,j=1,\dots,s\right)$$

de donde se deduce que:

(17)(*) $$\frac{1}{i} \frac{\partial \alpha^G(t)}{\partial t_j}\Bigg|_{t_j=0} = \frac{\partial}{\partial\theta_j} \ln L^g_m(-\theta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_j} \ln L^g_m(-\theta) = \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 \alpha^G(t)}{\partial t_k \partial t_j}\Bigg|_{t_k=t_j=0}$$

(*) expresiones analogas a las obtenidas por S.RIOS (1.953) en $\mathbb{R}$ y por BARRA (1.971) en $\mathbb{R}^s$, en los trabajos citados anteriormente, para las densidades de las e.e. canónicas. Coincidiendo(*) con los de dichos autores en la restricción operacional $(A^0_1.)$

Haciendo uso de la hipótesis de que los momentos de de la densidad exponencial canónica existen y teniendo en cuenta las relaciones del tipo (17), se deduce directamente que existen las derivadas de cualquier orden de la f.c., incluso en el punto cero, es decir, que la f.c. es analitica; pudiendose expresar, en el caso unidimensional, en la forma:

$$\alpha^G(t) = \sum_{r=0} \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial \theta^r} \ln L_m^g(-\theta)\ t^r$$

y en el caso multidimensional, mediante el desarrollo de Mac-Laurin correspondiente.

......ooOoo......

<u>Teorema.-</u> Sea T un vector aleatorio en $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$ que tiene como ley de probabilidad, la ley $p_\theta$ de las e.e. (9), designaremos por U y V respectivamente los vectores de las h primeras componentes de T y de las k últimas (h+k=s) y descomponemos de igual forma $\theta$ en $\theta=(\lambda, \mu)$ entonces existe la medida $m_\lambda$ en $(\mathbb{R}^k, B_{\mathbb{R}^k})$ tal, que la ley de probabilidad de V, $P_V^\theta$ está definida por:

(18)
$$dP_V^\theta = \frac{1}{L_m^g(-\theta)}\, e^{\langle\mu, Z(v_j)\rangle + \sum_{j=1}^{k}\left[G_j(v_o)-G(v)\right]} \prod_{j=1}^{k} f_j(v_j)\, dm_\lambda$$

La demostración puede referirse, siempre, al caso donde m es una ley de probabilidad; se designa por (X,Y) un vector aleatorio que sigue esta ley, calculandose la e.m. respecto a m.

Se tiene $\forall\, A \in B_{\mathbb{R}^k}$ que:

$$P_V^\theta(A) = \frac{1}{L_m^g(-\theta)}\, E\left\{1_A e^{\langle\lambda, Z(u_i)\rangle + \sum_{i=1}^{h}\left[G_i(u_o)-G_i(u)\right]} \prod_{i=1}^{h} f_i(u_i) + \right.$$
$$\left. + e^{\langle\mu, Z(v_j)\rangle + \sum_{j=h+1}^{k}\left[G_j(v_o)-G(v)\right]} \prod_{j=h+1}^{k} f_j(v_j)\right\}$$

expresión que se transforma, utilizando el Teor. de la esperanza condicionada (vease S.S.WILKS, Mathematical statistics. Wiley-Toppan, 1.962; pág.84), en la siguiente:

$$\frac{1}{L_m^g(-\theta)}\, E_Y\left\{1_A e^{\langle\mu, Z(v_j)\rangle + \sum_{j=h+1}^{k}\left[G_j(v_o)-G_j(v)\right]} \prod_{j=h+1}^{k} f_j(v_j)\right\} \cdot$$
$$\cdot E_X\left\{ e^{\langle\lambda, Z(u_i)\rangle + \sum_{i=1}^{h}\left[G_i(u_o)-G_i(u)\right]} \prod_{i=1}^{h} f_i(u_i) \Big/ Y\right\}$$

es decir:

$$P_V^{\theta}(A)=\int_A e^{\langle\mu, Z(v_j)\rangle + \sum_{j=h+1}^{k}\left[G_j(v_o)-G_j(v)\right]} \prod_{j=h+1}^{k} f_j(v_j).$$

$$E_X\left\{e^{\langle\lambda, Z(u_i)\rangle + \sum_{i=1}^{h}\left[G_i(u_o)-G_i(u)\right]} \prod_{i=1}^{h} f_i(u_i)\Big/ Y\right\}dm_Y$$

quedando establecida la tesís del teorema sobre la existencia de la medida $m_\lambda$ , que viene definida por:

(19) $$\frac{dm_\lambda}{dm_Y} = E_X\left\{e^{\langle\lambda, Z(u_i)\rangle + \sum_{i=1}^{h}\left[G_i(u_o)-G_i(u)\right]} \prod_{i=1}^{h} f_i(u_i)\Big/ Y\right\}$$

luego:

(20) $$\frac{dm_\lambda}{dm_Y} = L^g_{m^y_{X/Y}}(-\lambda)$$

donde $m_Y$ y $m^y_{X/Y}$ designan respectivamente la ley marginal de Y y la ley condicional de $\underset{\sim}{X}$ respecto de Y.

<u>Teorema de exhaustividad para las e.e. exponenciales</u>.-

<u>1ª Parte</u>.- La e.e. exponencial generalizada:

(21) $$\overset{n}{\otimes}\left(\mathbb{R}^k,\ B_{\mathbb{R}^k},\ C(\theta)e^{G(x)+\sum_{j=1}^{s} Q_j(\theta)T_j[Z(x)]}h\left[Z(x)\right]\right);\ s\leq k$$

admite el estadístico exhaustivo $\mathfrak{Z}$ con valores en $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$ definido por:

(22) $$\mathfrak{Z}\left[Z(x_1),\ldots,Z(x_n)\right]=\left\{\sum_{i=1}^{n} T_j\left[Z(x_i)\right];j=1,..,s\right\}$$

La demostración de este teorema se deduce inmediatamente del Teor. de factorización (pág.12 de esta Memoria).

<u>2ª Parte</u>.- Supongamos dada la densidad:

(23) $$p_\theta(x)= C(\theta).\exp\left\{G+\sum_{j=1}^{s} Q_j(\theta).T_j\left[Z(x)\right]\right\} h\left[Z(x)\right]$$

con $x\in\mathbb{R}^k$, $k\leq s$; que es una ley k-dimensional y donde s es un parámetro de la ley que es independiente de k.(en particular, puede tomarse k=1 y s puede ser también 1 independientemente, esto ocurre en el caso escalar).

Se toma una muestra de tamaño n, la e.e. asociada al muestreo es la (21) El problema es, estudiar las propiedades del estadístico (22), que es un estadístico vectorial, en el caso general de s y k >1; es decir:

(24) $\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n)=\left\{\sum_{i=1}^{n}T_1\left[Z(x_i)\right];\ldots;\sum_{i=1}^{n}T_s\left[Z(x_i)\right]\right\}$

donde:

(25) $Z(x_i)=\left\{F_1(x_{i1})-F_1(x_{i1}^o),\ldots,F_k(x_{ik})-F_k(x_{ik}^o)\right\}$

por ello en el caso de que $s=1$, sólo queda una componente que es la primera, esto es: $\sum_{i=1}^{n}T_1\left[Z(x_i)\right]$ , y si además $k=1$, las $x_i$ son escalares, queda por tanto:

(26) $\sum_{i=1}^{n}T_1\left[F_1(x_{i1})-F_1(x_{i1}^o)\right]$

Como el estadístico $\mathcal{T}$ es un vector y nuestro objetivo es calcular como se distribuye dicho $\mathcal{T}$ , debemos expresarlo de forma que se pueda escribir su distribución, usando el Teor. anterior-pág.126 de distribución de una suma de v.a. independientes, ello se consigue, mediante los siguientes cambios de variable:

a) introduciendo el vector:

(27) $\overline{T}=\left\{T_1[Z(x)],\ldots,T_s[Z(x)]\right\}$ con $x\in\mathbb{R}^k$

b) introduciendo los parametros naturales (4)

c) y considerando, respecto de las medidas, aquella medida v sobre $(\mathbb{R}^k, B_{\mathbb{R}^k})$ tal, que mediante $\overline{T}$ se transforma en la medida $m$ dada inicialmente sobre $(\mathbb{R}^s, B_{\mathbb{R}^s})$, considerandose, simultaneamente, una medida $\mu$ que domina a la exponencial y tal que $dv=h\left[Z(x)\right]d\mu$ ;(observese que la función $\overline{T}$ pasa de medir variables k-dimensionales, k es la dimensión de la ley, a medir variables s-dimensionales, s es el parámetro de la ley, lo que está de acuerdo con el hecho de que $\mathcal{T}$ dependiera de variables k-dimensionales y mediante el cambio a) anterior pase a expresarse como suma de s variables).

Se comprueba que $\mathcal{T}(x_1,\ldots x_n)$ se expresa mediante $\overline{T}$ según:

(28) $\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n)=\left\{\overline{T}\left[Z(x_1)\right]+\ldots+\overline{T}\left[Z(x_n)\right]\right\}$.

Comprobación.-

$\overline{T}(x_1)=\left\{T_1\left[Z(x_1)\right],\ldots,T_s\left[Z(x_1)\right]\right\}$

.........................

..............................

$$\overline{T}(x_n)=\left\{T_1\left[Z(x_n)\right],\ldots,T_s\left[Z(x_n)\right]\right\}$$

es decir:

$$\overline{T}(x_1)+\ldots+\overline{T}(x_n)=\left\{\sum_{i=1}^{n}T_1\left[Z(x_i)\right],\ldots,\sum_{i=1}^{n}T_s\left[Z(x_i)\right]\right\}=\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n)$$

De donde, utilizando el Teor. anterior de pág.126 se deduce lo siguiente:

1º.- $\overline{T}(x_1),\ldots,\overline{T}(x_n)$ son independientes, en efecto: como $x_1,\ldots,x_n$ son las componentes de una muestra aleatoria independiente, resultan que también lo son los vectores $\overline{T}(x_1),\ldots,\overline{T}(x_n)$.

2º.- La distribución de cada uno de estos $\overline{T}(x_i)$ es una exponencial canónica generalizada con $x\in\mathbb{R}^s$.

3º.- Finalmente, por (II.1ªP.(86)) y por (15), se deduce que $\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n)$ tiene una densidad cuya función caracteristica será el producto de las f.c. de los $\overline{T}(x_i)$, es decir:

(29)
$$\alpha_{\mathcal{T}}^{G}(t)=\frac{L_m^g(-it-\theta)}{L_m^g(-\theta)}\times\overset{n)}{\ldots}\times\frac{L_m^g(-it-\theta)}{L_m^g(-\theta)}=\overset{n}{\otimes}\frac{L_m^g(-it-\theta)}{L_m^g(-\theta)}$$

Por todo ello, el Teor. puede enunciarse asi:

"La e.e. (21) admite un estadístico exhaustivo $\mathcal{T}$ con valores en$(\mathbb{R}^s,B_{\mathbb{R}^s})$,(es decir, un vector s-dimensional) que está definido por (22)-1ª Parte-

El vector $\mathcal{T}$ induce una e.e. determinada por la distribución cuya f.c. viene dada por (29) ( que en el caso clásico es exponencial canónica)-2ª Parte-"

No puede demostrarse que el producto de $L_m^g$ esté ligado a la convolución, dicho en otras palabras, que el producto de e.e. exponenciales canónicas generalizadas no tiene que ser otra estructura exponencial canónica generalizada. En el caso clásico, aplicando el Teor. del producto de transformadas de Laplace (*), se tiene que:

(30)
$$\alpha_{\mathcal{T}}(t)=\overset{n}{\otimes}\frac{L_m(-it-\theta)}{L_m(-\theta)}=\frac{L_{\overset{n}{*}m}(-it-\theta)}{L_{\overset{n}{*}m}(-\theta)}\ ;\quad \text{con } L_{\overset{n}{*}m}=L_m*\overset{n)}{\ldots}*L_m$$

que es la f.c. de una e.e. exponencial canónica (vease[4] pág.170

(*)Vease KAWATA[18] pág. 255

CONCEPTOS BASICOS SOBRE INFERENCIA EN LAS ESTRUCTURAS EXPONENCIALES GENERALIZADAS.-

A) Estimación en una estructura exponencial.-

Sean

(31) $$\left[\mathbb{R}^s,\ B_{\mathbb{R}^s},\ \frac{dP_\theta}{dm} = \frac{e^{\langle\theta, Z(x)\rangle + s\left[G(x^0)-G(x)\right]} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i);\ \theta \in \theta}{L_m^g(-\theta)}\right]$$

una estructura exponencial completa y $q(\theta)$ una función númerica definida en $\theta$, determinar (en caso de que exista) el estimador insesgado X de q, es resolver la ecuación:

(32) $$q(\theta) L_m^g(-\theta) = \int_{\mathbb{R}^s} e^{\langle\theta, Z(x)\rangle + s\left[G(x^0)-G(x)\right]} \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i) X(x)\, dm$$

$\forall\ \theta \in \theta$.

En efecto, si m es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, escribiendo $\frac{dm}{dx} = r$, la ecuación (32) pasa a ser:

(33) $$q(\theta)\ L_r^g(-\theta) = L_{Xr}^g(-\theta)$$

donde $L_r^g(-\theta)$ es la transformada de Laplace en $({}^P A_f^g.)$ de la función r.

Notemos que si se ha podido determinar un estimador insesgado de q, por ser la familia completa, dicho estimador es necesariamente de varianza minima.

B) Tests en una estructura exponencial canónica generalizada de un parámetro.-

Supongamos un estadístico cuya distribución sea una exponencial canónica generalizada; en particular se sabe, por un resultado clásico de Barra, que todo estadístico exhaustivo sigue una ley exponencial canónica asociada a la estructura exponencial general.

Sea, entonces, la e.e. exponencial canónica generalizada siguiente:

(34) $$\left[\mathbb{R},\ B_{\mathbb{R}},\ dP_\theta(x) = C(\theta)\ e^{G(x_0)-G(x)+\theta\left[F(x)-F(x_0)\right]} f(x)\, dv(x)\right.$$

donde v es una medida positiva moderada en $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ y $\theta \in D_v'$, sien do $D'_v$ el simétrico con respecto al origen de $D_v$ que es un intervalo finito o infinito de $\mathbb{R}$; y donde $C(\theta)=\dfrac{1}{L^g_v(-\theta)}$.

El objetivo es construir tests basados en estadísticos que se distribuyan de acuerdo con dicha medida de probabilidad (exponencial canónica generalizada).

En lo que sigue, consideraremos la estructura (34) y supondremos que v no está concnetrada en un sólo punto $x^*$, yá que en este caso como $D_v$ es no vacio todas las leyes $P_\theta$ son identicas a la medida de Dirac en el punto $x^*$ y esta estructura no tiene interes.

Lema 1.- Se deduce inmediatamente del Teor. de la completitud de las e.e. de tipo (9) (vease pág.122 de esta Memoria) que, si las imagenes $\beta_\Phi$ y $\beta_{\Phi'}$ de dos tests $\Phi$ y $\Phi'$ son iguales en un intervalo abierto de $D'_v$, los dos tests son iguales v-p.p. Efectivamente:

$$\left.\begin{aligned}\beta_\Phi(\theta)&=E_{P_\theta}(\Phi)=\int \Phi\, dP_\theta\\ \beta_{\Phi'}(\theta)&=E_{P_\theta}(\Phi')=\int \Phi'\, dP_\theta\end{aligned}\right\} \int(\Phi-\Phi')\,dP_\theta=0 \Longrightarrow \Phi=\Phi' \text{ v-p.p}$$

Lema 2.- La imagen $\beta_\Phi(\theta)$ de cualquier test $\Phi$ es analitica en todo punto interior de $D'_v$.

En efecto, sean un test $\Phi$ y la medida positiva v' definida por:

(35) $$dv' = \Phi\, dv$$

la condición $0\leq \Phi \leq 1$ implica $D_{v'}\supset D_v$, luego $D^0_{v'}\supset D^0_v$, teniendose:

(36) $$\beta_\Phi(\theta)=\int_R \Phi\, dP_\theta=\frac{\int_{\mathbb{R}} \Phi\, e^{\theta Z(x)+G(x_0)-G(x)} f(x).dv}{L^g_v(-\theta)}=\frac{L^g_{v'}(-\theta)}{L^g_v(-\theta)}$$

esta expresión (cuyo denominador no se anula y es positivo) es analítica (bajo la hipótesis de existencia de momentos, antes introducida) en el interior de $D_v$, luego $\beta_\Phi(\theta)$ lo es igualmente en el interior de $D'_v$. En particular $\beta_\Phi(\theta)$ es contínua y derivable por lo que se tiene de (35) y (36) lo siguiente:

(37) $$\beta_\Phi(\theta)=C(\theta)\, L^g_{v'}(-\theta)=C(\theta)\int_{\mathbb{R}} e^{\theta Z(x)+G(x_0)-G(x)} f(x)\,\Phi\, dv$$

de donde:

$$(38)\quad \frac{d}{d\theta}\beta_{\Phi}(\theta)=\int_{\mathbb{R}}\Phi\left[C'(\theta)+Z(x)C(\theta)\right]e^{\theta Z(x)+G(x_0)-G(x)}f(x)\ dv$$

y como:

$$C(\theta)=\frac{1}{\int_{\mathbb{R}}e^{\theta Z(x)+G(x_0)-G(x)}f(x)\ dv};\quad C'(\theta)=-\left[C(\theta)\right]^2\int_{\mathbb{R}}Ze^{\theta Z+G_0-G}f\ dv$$

sustituyendo en (38) tenemos:

$$(39)\quad \frac{d}{d\theta}\beta_{\Phi}(\theta)=\int_{\mathbb{R}}\Phi\left(-C^2\int_{R}Z.e^{\theta Z+G_0-G}f\ dv+ZC\right)e^{\theta Z+G_0-G}f\ dv=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}C\Phi Z\ e^{\theta Z+G_0-G}f\ dv-\int_{\mathbb{R}}\Phi C\ e^{\theta Z+G_0-G}f\ dv\int_{\mathbb{R}}CZ\ e^{\theta Z+G_0-G}f\ dv=$$

$$=E\left[Z\Phi\right]-E\left[\Phi\right]E\left[Z\right]$$

Lema 3.- Sea $\Phi$ un test en (34), si existe un valor $\theta$ para el cual se tenga:

$$\beta_{\Phi}(\theta)=1\ \text{(respectivamente 0)}$$

entonces $\Phi=1$ (respectivamente 0) v-p.p.

Esta propiedad se deduce de que la función:

$$p_{\theta}(x)=\frac{dP_{\theta}}{dv}=C(\theta)\ e^{\theta Z(x)+G(x_0)-G(x)}f(x)$$

es estrictamente positiva, siempre que también lo sea $f(x)=F'(x)$, y si una función r es positiva y tal que para un cierto valor de $\theta$, se tenga: $\int r\ dP_{\theta}=0$, entonces $r=0$ v-p.p.

Para el estudio de los tests óptimos en las e.e. exponenciales es necesario introducir los conceptos de tests unilaterales y bilaterales en una estructura exponencial escalar.

Definición.- Se llama <u>test unilateral</u> a la derecha (respectivamente a la izquierda) a cualquier test $\Phi$ tal que:

$$\forall\theta\in D'_V,\quad 0<\beta_{\Phi}(\theta)<1$$

y que exista una constante C tal que:

$$(40)\quad \begin{array}{l} x>C \Longrightarrow \Phi=1\ \text{(resp. 0)} \\ x<C \Longrightarrow \Phi=0\ \text{(resp. 1)} \end{array}$$

Señalemos, por último, que el cambio de $\Phi$ por $1-\Phi$ transforma un test unilateral por la derecha en por la izquierda y viceversa.

Lema 4.- Para cualquier par de puntos $\theta < \theta'$ de $D'_v$, todo test unilateral por la derecha (resp. por la izquierda) es admisible como test de $\theta$ contra $\theta'$ (resp. de $\theta'$ contra $\theta$).

Sean $\Phi$ un test unilateral por la derecha y C la constante asociada, ponemos:

$$A = \frac{C(\theta')}{C(\theta)} e^{(\theta' - \theta)Z(C)} > 0$$

se tiene:

$$p_{\theta'}(x) = \frac{1}{L_v^g(-\theta')} e^{\theta' Z(x) + G(x_0) - G(x)} f(x)$$

$$p_{\theta}(x) = \frac{1}{L_v^g(-\theta)} e^{\theta Z(x) + G(x_0) - G(x)} f(x)$$

Observese que $A = \dfrac{p_{\theta'}(C)}{p_{\theta}(C)}$ es estrictamente positivo deduciendose, si $f(x) > 0 \Longrightarrow Z(x)$ es creciente, que:

$p_{\theta'} > Ap_{\theta} \Longrightarrow \Phi = 1$, yá que la desigualdad se verifica para $x > C$; analogamente se tiene:

$p_{\theta'} < Ap_{\theta} \Longrightarrow \Phi = 0$, puesto que la desigualdad se verifica para $x < C$.

Y puesto que A es estrictamente positiva, del Teorema 3 de Barra de la pág. 68: "Sean $P_o, P_1, \ldots, P_N$, N+1 leyes de Probabilidad en $(W, U)$ y $p_o, \ldots, p_N$ sus densidades con respecto a una medida m positiva; cualesquiera que sean las constantes $\lambda_o, \ldots, \lambda_{N-1}$ positivas, todo test $\Phi$ tal que:

$$p_N(w) > \sum_{j=o}^{N-1} \lambda_j \, p_j(w) \Longrightarrow \Phi(w) = 1$$

$$p_N(w) < \sum_{j=o}^{N-1} \lambda_j \, p_j(w) \Longrightarrow \Phi(w) = 0$$

es admisible como test de $\mathcal{P}_o = \{P_o, \ldots, P_{N-1}\}$ contra $P_N$." Deducimos que $\Phi$ es admisible.

Definición.- Se llama <u>test bilateral</u> a todo test $\Phi$ que no es v-p.p. igual ni a un test unilateral, ni a 0, ni a 1, y tal que existen dos constantes C y C' tales que:

$$(41)\qquad \begin{array}{l} C < x < C' \Longrightarrow \Phi = 1 \\ x < C \text{ o } x > C' \Longrightarrow \Phi = 0 \end{array}$$

Lema 5.- **Cualquiera** que sean los tres valores $\theta < \theta_1 < \theta'$ en $D'_v$, todo test bilateral es admisible como test de $(\theta, \theta')$ contra $\theta_1$.

Sean $C$ y $C'$ las dos constantes asociadas al test bilateral $\Phi$ considerado y sean $A$ y $A'$ las soluciones del sistema lineal:

$$(42)\qquad \begin{array}{l} A\, p_\theta(C) + A'\, p_{\theta'}(C) = p_{\theta_1}(C) \\ A\, p_\theta(C') + A'\, p_{\theta'}(C') = p_{\theta_1}(C') \end{array}$$

es decir:

$$(43)\qquad \begin{array}{l} A\, C(\theta)\, e^{\theta Z(C)} + A'\, C(\theta')\, e^{\theta' Z(C)} = C(\theta_1)\, e^{\theta_1 Z(C)} \\ A\, C(\theta)\, e^{\theta Z(C')} + A'\, C(\theta')\, e^{\theta' Z(C')} = C(\theta_1)\, e^{\theta_1 Z(C')} \end{array}$$

se comprueba que $A$ y $A'$ son estrictamente positivas, puesto que:

$$(44)\qquad A = \frac{C(\theta_1)C(\theta')\left[\exp(\theta_1 Z(C) + \theta' Z(C')) - \exp(\theta_1 Z(C') + \theta' Z(C))\right]}{C(\theta)C(\theta')\left[\exp(\theta Z(C) + \theta' Z(C')) - \exp(\theta' Z(C) + \theta Z(C'))\right]}$$

y como:

$$\text{sg}\left[e^{\theta_1 Z(C) + \theta' Z(C')} - e^{\theta_1 Z(C') + \theta' Z(C)}\right] = \text{sg}\left[\frac{e^{\theta_1 Z(C) + \theta' Z(C')}}{e^{\theta_1 Z(C) + \theta' Z(C)}} - \frac{e^{\theta_1 Z(C') + \theta' Z(C)}}{e^{\theta_1 Z(C) + \theta' Z(C)}}\right]$$

$= \text{sg}\left[e^{\theta[Z(C') - Z(C)]} - e^{\theta_1[Z(C') - Z(C)]}\right] > 0$, yá que $\theta' > \theta$ y la exponencial es estrictamente creciente.

De la misma forma el signo del denominador de (44) también es positivo, luego $A > 0$. Y de manera analoga se deduce que $A' > 0$.

Se tiene , analogamente a los tests unilaterales, que:

$$\begin{array}{l} p_{\theta_1} > A p_\theta + A' p_{\theta'} \Longrightarrow \Phi = 1 \\ p_{\theta_1} < A p_\theta + A' p_{\theta'} \Longrightarrow \Phi = 0 \end{array}$$

y despues del Teor. 3 de Barra, citado en la pág. anterior, se deduce que $\Phi$ es admisible.

Nota sobre las inter-relaciones de las e.e. de Pearson y exponenciales.-

Como final de este trabajo, veamos algunas de las relaciones (pueden encontrarse otras; p.e. con diversas hipótesis sobre la función g(x) del álgebra operacional) entre las familias de las densidades de las e.e. estudiadas, en los Cap.II y III de esta Memoria. Distinguiendo dos apartados: a) el referido al caso clásico (las e.e. estan definidas sobre el espacio operacional $(A_1^o.)$) y b) referido a e.e. generalizadas de Pearson en $(A_1^g.)$ y e.e. exponenciales clásicas.

No tiene interes, el caso en que ambas e.e. esten dadas mediante álgebras diferenciales generalizadas, yá que en tal caso, por mantenerse las formas, se obtienen identicos resultados que en el apartado a); y el caso recíproco del b), evidentemente, tampoco es interesante.

a) En este caso, no existe una relación de inclusión entre las e.e. estudiadas, sino que, las familias de densidades respectivas, constituyen dos conjuntos no disjuntos; puesto que, hay algunas densidades que son de tipo Pearson y exponenciales a la vez, mientras que hay otras que son de Pearson, pero no exponenciales y viciversa. Para concretar este hecho, tomaremos tres distribuciones: la de Weibull (vease pág.73 de esta Memoria) y los tipos III y IV de Pearson.

i) La distribución de Weibull, no satisface al sistema de Pearson clásico (II.1ªP.(1)) si $\delta \neq 1$, y en el caso que se considere a $\delta$ fijo (siendo, por tanto, $\eta$ el parámetro), dicha distribución puede expresarse bajo la forma:

$$(45) \qquad y = \frac{\delta}{\eta^\delta} \exp\left(- \frac{1}{\eta^\delta} x^\delta\right) x^{\delta - 1}$$

que responde a la densidad de una e.e. exponencial (2) (en el caso de que $\eta$ sea fijo y $\delta$ sea el parámetro, no puede afirmarse lo anterior).

ii) La densidad tipo III de Pearson, viene dada (vease Linnik[20] pág.11) por:

(46)
$$p(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{m}}{(m-1)!}\,x^{m-1}\,e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\[2ex] 0 & x < 0\end{cases}$$

donde m es un valor fijo y el parámetro $\lambda$ está comprendido entre cero e infinito.

Dicha densidad pertenece, evidentemente, a la familia de las densidades de las e.e. de Pearson y exponenciales.

iii) Considerando, finalmente, el tipo IV de Pearson, que responde a la ecuación diferencial (vease Cansado [7]) siguiente:

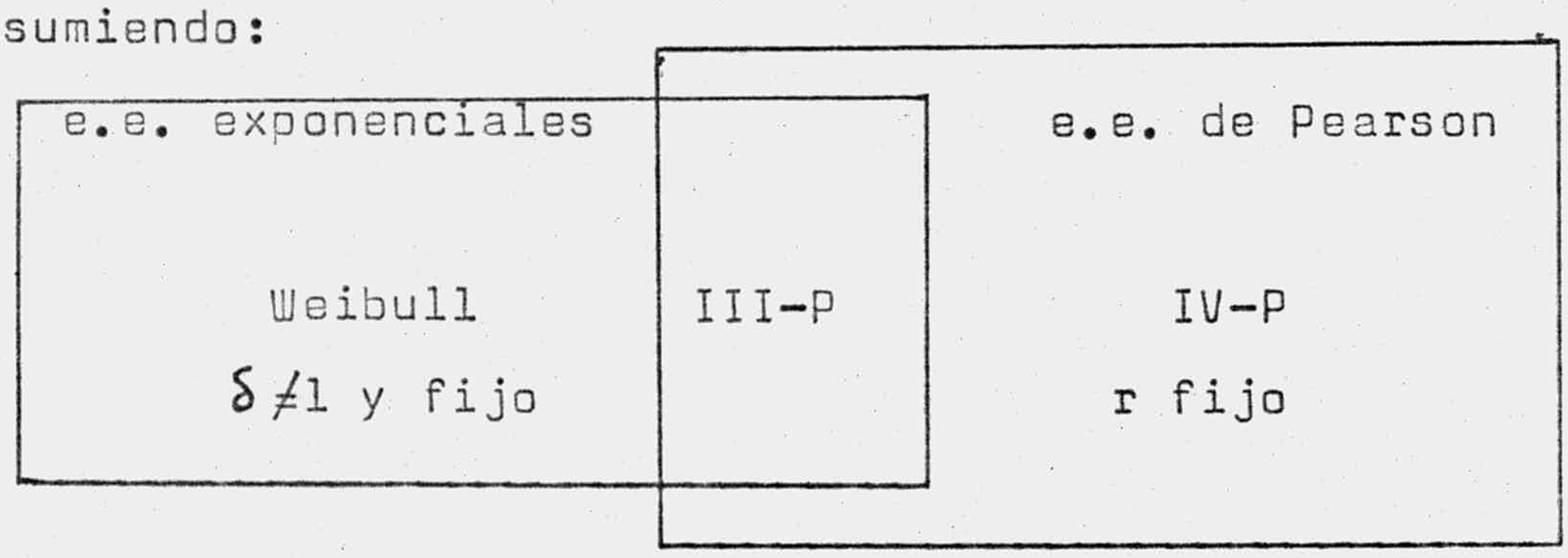
(47)
$$\frac{y'}{y} = \frac{r - 2sx}{1 \div x^2}$$

por lo que, tiene una densidad del tipo:

(48)
$$y = K\,\frac{e^{r \operatorname{arctg} x}}{(1 \div x^2)^s}$$

que para r fijo ( s es el parámetro, en tal caso) no admite una descomposición del tipo de las densidades de las e.e. exponenciales. Resumiendo:

(49)




El resultado anterior, tan debil, se preveia, al no poder relacionarse mediante la ecuación diferencial de Pearson, la densidad de tipo exponencial, es decir, no puede deducirse alguna relación interesante, entre el segundo miembro de (II. 1ªP.(1)) y $Q(\theta)T'(x) \div \dfrac{h'(x)}{h(x)}$, mientras (previamente) no se conozcan las funciones Q, T, y h que intervienen en las e.e. exponenciales.

b) Como se ha puesto de manifiesto en la pág.74 de esta Memoria, la distribución de Weibull satisface al sistema de Pearson en $(A_1^9.)$. Cabe pensar que, bajo ciertas condiciones restrictivas, las e.e. exponenciales en $(A_1^0.)$ satisfagan a una ecuación diferencial del tipo (II.1ªP.(10)).

Una de las posibles soluciones, es que:

(50) $$\frac{x + b}{p + qx + rx^2} = \frac{h'(x)}{h(x)} \quad y \quad g(x) = Q(\theta).T'(x)$$

(condiciones que ocurren p.e. en la distribución de Weibull).

Por todo ello, puede enunciarse el siguiente:

Teorema.- "Una condición suficiente, pero no necesaria, para que una densidad del tipo exponencial clásico, satisfaga al sistema de Pearson generalizado en ($A_1^g$.) es, que la función h(x) de la densidad exponencial verifique al sistema de Pearson clásico."

Efectivamente, al dividir la densidad derivada de la e.e. exponencial por ella misma y compararla con el segundo miembro de la ecuación (II.1ªP.(10)), se obtiene que dichas expresiones son iguales, si consideramos como función g del operador ($a_1^g$.) la dada por $Q(\theta).T'(x)$ y si h(x) verifica a (II.1ªP. (1)).

El anterior resultado, nos conduce al siguiente razonamiento: las distribuciones de tipo exponencial que tengan una h(x) que satisfaga al sistema de Pearson clásico, verifican al sistema de Pearson generalizado. Por lo tanto las conclusiones obtenidas para este sistema son válidas para las citadas distribuciones.

Veamos p.e. como pueden obtenerse los momentos de la distribución de Weibull (que satisface al teorema), utilizando la relación entre los momentos, obtenida en (II.1ªP.(11)), del sistema de Pearson generalizado.

Si en (II.1ªP.(11)) hacemos n=k-1, para la distribución de Weibull (que tiene por caracteristicas: b=p=q=0, r= $\frac{1}{\delta - 1}$ y $g(x) = -\delta x^{\delta-1}/\eta^{\delta}$ , tenemos:

$$(k+1)\frac{1}{\delta -1}\,\alpha_k = \int_0^{\infty} \frac{\delta x^{-1}}{\eta^{\delta}} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta}} \frac{x^2}{\delta -1}\, x^{k-1}\, dx - \alpha_k$$

luego:

(51) $$\alpha_k = \frac{1}{K+\delta}\int_0^{\infty} \frac{\delta x^{\delta + k}}{\eta^{\delta}} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta -1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta}} dx$$

expresión que se transforma, haciendo el cambio de variable:

$\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\delta}=t$, en:

(52) $$\alpha_k = \frac{\delta}{k+\delta}\int_0^{\infty} \eta^k \, t^{1+\frac{k}{\delta}} \, e^{-t} dt = \frac{\delta\eta^k}{k+\delta}\,\Gamma\left(1+\frac{\delta+k}{\delta}\right)$$

por lo que resulta:

(53) $$\alpha_k = \frac{\delta}{k+\delta}\,\eta^k\,\frac{\delta+k}{\delta}\,\Gamma\left(\frac{\delta+k}{\delta}\right) = \eta^k\,\Gamma\left(1+\frac{k}{\delta}\right)$$

que es el momento de orden k, de dicha distribución (vease Trocóniz [13] pág.63)

## BIBLIOGRAFIA

[1] Aldanondo, I. (1.968). Métodos de resolución de ecuaciones y sistemas diferenciales lineales en "aleph". Tomo I, Publ. F.C. Granada.

[2] Aldanondo, I. (1.969). Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en derivadas parciales en el operador "aleph". Publ. Seminario Mat. Garcia de Galdeano, Vol. 10; U. de Zaragoza. pág.47-70.

[3] Apostol, T.M. (1.960). Análisis matemático. Reverté.

[4] Barra, J.R. (1.971). Notions fondamentales de statistique mathématique. Dunod-Université.

[5] Bickell, P.J. (1.973). On the asymptotic shape of Bayesian sequential tests of $\theta \leq 0$ versus $\theta > 0$ for exponencial families. Ann. of St. Vol.I; nº2, pág.231-240.

[6] Cansado, E. (1.947-48). Funciones caracteristicas de las distribuciones de Pearson. Hispano-Americana Vol.7, nº 3, pág. 117-127 y Vol.8, nº 5, pág.203-225.

[7] Cansado, E. (1.950). Exposición sistemática de las distribuciones de Pearson. Trab. de Est., vol.1-Cuad.III, pág.279-287.

[8] Cansado, E. (1.950). Distribuciones logaritmicas de Pearson. Trab. de Est. Vol.1-Cuad.III, pág.297-305.

[9] Cramer, H. (1.963). Métodos matemáticos de Estadística (3ª edición). Aguilar.

[10] Dieudonné, J. (1.966). Fundamentos de análisis moderno. Reverté.

[11] Eagleson, G.K. (1.964). Polynomial expansions of bivariate distributions. Ann. of Math. St. Vol.35, pág.1208-1215.

[12] Elderton, W.P. y Johnson, N.L. (1.969). Systems of frequency curves. Cambridge University Press.

[13] Fernández de Trocóniz, A. (1.970). Distribución de Weibull. Métodos prácticos de estimación y contraste. Trab. de Est.

y de I.O., Vol.XXI-Cuad.3, pág.43-65.

[14] Gutierrez Jaimez,R.(1.972). Contribución al estudio de procesos markovianos de difusión extendidos a álgebras especiales de operadores. Tésis doctoral, Univ. de Granada.

[15] Herrerias Pleguezuelo,R.(1.974). Algunas propiedades analíticas de las estructuras exponenciales generalizadas. Actas de las III Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas (por aparecer).

[16] Johnson,N.L. y Kotz,S.(1.972). Distributions in Statistcs: Continuous multivariate distributions. Wiley.

[17] Juan Hernández,E.(1.951-52). Generalización de las leyes de probabilidad de Laplace-Gauss y Cauchy. Trab. de Est. Vol.II Cuad.3; pág.291-310 y Vol.III-Cuad.1 y 2; pág.153-157.

[17]b Kagan-Linnik-Rao.(1.973). Characterization Problems in Mathematical Statistcs. Wiley.

[18] Kawata,T.(1.972). Fourier analysis in Probability Theory. Academic Press.

[19] Lehmann,E.(1.959). Testinng statistical hypotheses. Wiley.

[20] Linnik,Y.V.(1.967). Leçons sur les problèmes de statistique analytique. Gauthier-Villars.

[21] Matthes,T.K. y Truax,D.R.(1.967). Tests of composite hypotheses for the multivariate exponential family. Ann. Math. St. Vol.38, pág.681-697.

[22] Métivier,M.(1.968). Notions fondamentales de theorie des probabilités. Dunod.

[23] Mihaĭla,I.M.(1.968). Development of the trivariate frecuency function in Gram-Charlier series. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées. Vol.13, pág.803-813.

[24] Narumi,S.(1.923). On the general forms of bivariate frecuency distributions which are mathematically posible when regression and variation are subjected to limiting condition. Biometrika. Vol.15, pág.77-88 y 209-221.

[25] Navarro Sagristá,S.(1.952). Sobre una generalización de las curvas de Pearson al caso bidimensional. Trab. de Est. Vol. III-Cuad.3, pág.273-313.

[26] Neveu,J.(1.964). Bases mathématiques du Calcul des Probabilités. Masson.

[27] Pearson,K.(1.923). Notes on skew frequency surfaces. Biometrika. Vol.15, pág.222-230.

[28] Pearson,K.(1.923). On non-skew frequency surfaces. Biometrika. Vol.15, pág.231-244.

[29] Rodriguez Cano,J.J.(1.970). Resolución de ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores lineales. Tésis doctoral. U. de Sevilla.

[30] Roy,L.K.(1.971). An extension of the Pearson systems of frequency curves. Trab. de Est. y de I.O. Vol.XXII-Cuad.1 y 2, pág.113-123.

[31] Rios,S.(1.953). Algunas leyes de probabilidad y procesos estocásticos que se reducen a un tipo general de Laplace-Stieltjes. Hispano-Americana. Tomo XIII; nº 1 y 2, pág.112-119.

[32] Schwartz,R.E.(1.969). In invariant proper Bayes tests for exponential families. Ann. Math. St. Vol.40; nº1, pág.270-283.

[33] Steyn,H.S.(1.960). On regression properties of discrete systems of probability functions. Proc. of the Royal Acad. of Sciences Amsterdan. Vol.63, pág.302-311.

[34] Uven,M.J.van.(1.947-48). Extensions of Pearson's probability distributions to two variables. Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam. Vol.50, pág.1.063-1.070 y 1.252-1.264; y en Vol.51, pág.41-52 y 191-196.

[35] Wilks,S.S.(1.962). Mathematical statistics. Wiley.

[36] Zacks, S. (1.971). The theory of statical inference. Wiley.

DILIGENCIA:

Reunido el Tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

D. Sixto Ríos García

D. Francisco Sales Vallés

D. Rafael Infante Macías

D. Alfonso Guiraum Martín

D. Ramón Gutiérrez Jaimez

para juzgar la Tesis Doctoral del Licenciado Don Rafael Herrerías Pleguezuelo

...dó por ... otorgar la calificación de Sobresaliente "cum laude"

para que conste, se extiende firmada por los componentes del Tribunal, la presente diligencia.

Granada, a 19 de Abril de 1975

El Secretario,

El Presidente,

Vocal,

El Vocal,

El Vocal,