

C. NICOLAS MADRID

DESARROLLO Y APLICACIONES DE LA  
TEORIA DE ANALISIS DIMENSIONAL  
DE PALACIOS EN LA TRANSMISION  
DEL CALOR

TESIS DOCTORAL

1986



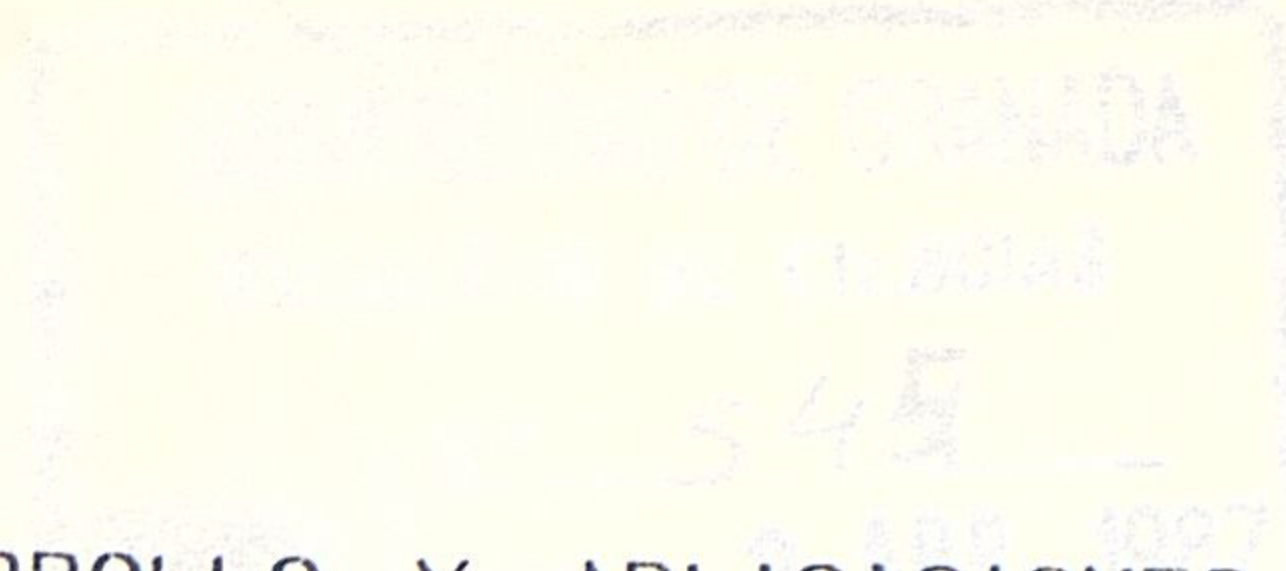
Biblioteca Universitaria de Granada



01533610

15/14

R. 32.810



El Trabajo "DESARROLLO Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE ANALISIS DIMENSIONAL DE PALACIOS EN LA TRANSMISION DEL CALOR", realizado por D.Carmelo Nicolás Madrid García y dirigido por D.Antonio Herranz García, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático Numerario de la Escuela Universitaria Politécnica de Cartagena de la Universidad de Murcia, y por D.Albino Arenas Gomez, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático Numerario de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de la Universidad Politécnica de Madrid, ha sido presentado como TESIS DOCTORAL el día 9 de febrero de 1987 en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada ante el tribunal formado por los profesores:

PRESIDENTE:

Dr.D. José Aguilar Peris, Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid,

VOCALES:

Dr.D. Gerardo Pardo Sánchez, Catedrático de la Universidad de Granada,

Dr.D. Cristobal Fernández Pineda, Catedrático de la Universidad de Málaga,

Dr.D. Jesús Biel Gayé, Catedrático de la Universidad de Granada,

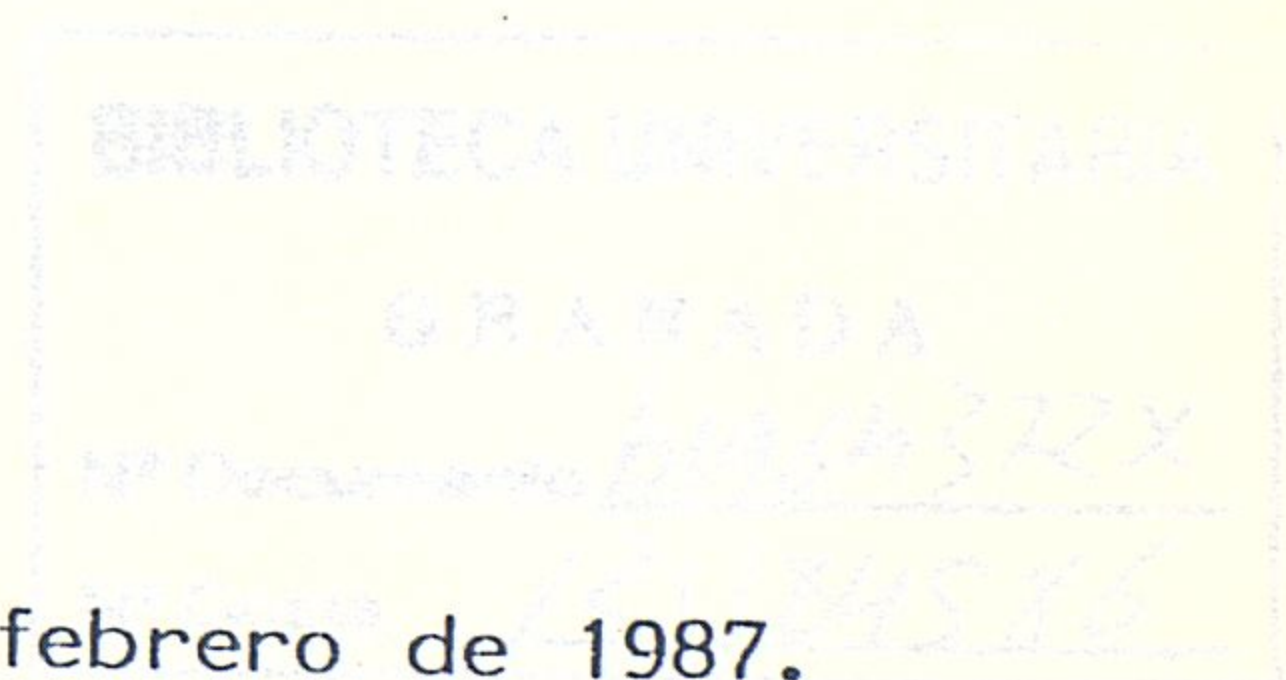
SECRETARIO:

Dr.D. Luis Navarro Veguillas, Profesor Titular de la Universidad Central de Barcelona,

actuando como ponente D.Jesús Biel Gayé, y habiendo obtenido la calificación de

" APTO CUM LAUDE "

Granada, 9 de febrero de 1987.





DESARROLLO Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE  
ANALISIS DIMENSIONAL DE PALACIOS  
EN LA TRANSMISION DEL CALOR

Memoria que presenta CARMELO NICOLAS  
MADRID GARCIA para optar al Grado de  
Doctor en Ciencias Físicas por la  
Universidad de Granada.

Fdo: Carmelo Nicolás Madrid García

Dirigido por:

ANTONIO HERRANZ GARCIA, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático Numerario de la Escuela Universitaria Politécnica de Cartagena de la Universidad de Murcia, y

ALBINO ARENAS GOMEZ, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático Numerario de la Escuela Universitaria de Ingeniería Industrial de la Universidad Politécnica de Madrid.

Noviembre, 1986



R. 82.810

LA UNIVERSITARIA POLITECNICA  
CATEDRA DE FISICA (MINAS)  
CARTAGENA

Prof. Dr. ANTONIO HERRANZ

ANTONIO HERRANZ GARCIA, DOCTOR EN CIENCIAS FISICAS Y CATEDRATICO  
DE LA ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE CARTAGENA, DE LA UNIVERSIDAD  
DE MURCIA,

CERTIFICA: que la memoria titulada:

DESARROLLO Y APLICACIONES DE LA TEORIA DE ANALISIS DIMENSIONAL DE  
PALACIOS EN LA TRANSMISION DEL CALOR.

Que presenta D. Carmelo Nicolás Madrid García, para aspirar al  
Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada, ha sido  
realizada en esta cátedra bajo su dirección y la de D. Albino Arenas  
Gómez, Doctor en Ciencias Físicas.

*Primente  
JESUS BLA GARCIA*

*Albino Arenas*

*Antonio Herranz*

Albino Arenas Gomez

Antonio Herranz García

I N D I C E

1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- OBJETIVO DEL TRABAJO

1.1.1.- Planteamiento del problema

1.1.2.- Justificación del problema

1.1.3.- Seriedad del problema

1.1.4.- Solución del problema

$$(U, E, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, W, X, Y, Z)$$

1.1.5.- Carácter vectorial del problema

1.1.6.- Carácter del momento

1.1.7.- Contratación de los recursos

1.1.8.- Conclusiones

INTRODUCCION.....	1
-------------------	---

PARTE I

BASES DIMENSIONALES EN LA TRANSMISION DEL CALOR

I.1.- LEYES FUNDAMENTALES Y BASE DIMENSIONAL DE LA TRANSMISION DEL CALOR.....	20
I.2.- EQUIVALENTE MECANICO DEL CALOR.....	22
I.3.- BASE DIMENSIONAL ESTRICTA.....	23
I.4.- BASE DIMENSIONAL NO ACORDE CON LA TEORIA DE PALACIOS.....	30
I.5.- POSIBLE BASE DIMENSIONAL AMPLIADA, ACORDE CON LA TEORIA DE PALACIOS.....	32
I.6.- CONCLUSIONES.....	35

PARTE II

APLICACIONES

1.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL.....	38
1.1.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL. CASO GENERAL.....	42
1.1.1.- Solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).....	43
1.1.2.- Solución con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M).....	46
1.1.3.- Solución con la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ )...	49
1.1.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).....	53
1.1.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	56
1.1.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	66
1.1.7.- Contrastación de los resultados.....	67
1.1.8.- Conclusiones.....	69

2.5.- Carácter vectorial de las soluciones

2.6.- Carácter del monomio  $N_p$

1.2.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL. MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO.....	70
1.2.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	71
1.2.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	73
1.2.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ ...	74
1.2.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .....	75
1.2.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	77
1.2.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	86
1.2.7.- Contrastación de los resultados.....	87
1.2.8.- Conclusiones.....	88
1.3.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL. FLUIDO NO VISCOSO.....	91
1.3.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	91
1.3.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	92
1.3.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ ...	93
1.3.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .....	94
1.3.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	95
1.3.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	98
1.3.7.- Contrastación de los resultados.....	99
1.3.8.- Conclusiones.....	100
2.- TRANSMISION DE CALOR POR CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA INCLINADA.....	103
2.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	104
2.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	105
2.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .....	105
2.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .....	108
2.5.- Carácter vectorial de las soluciones.....	109
2.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	110

2.7.-	Contrastación de los resultados.....	112
2.8.-	Conclusiones.....	113
3.-	CONVECCION LIBRE ENTRE DOS PLACAS VERTICALES.....	115
3.1.-	Solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).....	116
3.2.-	Solución con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M).....	117
3.3.-	Solución con la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ )....	118
3.4.-	Solución con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ )..	120
3.5.-	Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	121
3.6.-	Carácter del monomio $N_P$ .....	121
3.7.-	Contrastación de los resultados.....	122
3.8.-	Conclusiones.....	123
4.-	CONVECCION LIBRE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL.....	125
4.1.-	Solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).....	126
4.2.-	Solución con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M).....	126
4.3.-	Solución con la base usual y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ).....	127
4.4.-	Solución con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ )....	128
4.5.-	Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	129
4.6.-	Carácter del monomio $N_P$ .....	134
4.7.-	Contrastación de los resultados.....	135
4.8.-	Conclusiones.....	135
5.-	CONVECCION LIBRE EN UN CILINDRO HORIZONTAL.....	137
5.1.-	Solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).....	138
5.2.-	Solución con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M).....	139
5.3.-	Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	140
5.4.-	Carácter del monomio $N_P$ .....	141
5.5.-	Contrastación de los resultados.....	142
5.6.-	Conclusiones.....	143

7.2.1.- Solución con la base usual

144



6.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UNA PARED VERTICAL.....	145
6.1.- VELOCIDAD MEDIA DEL VAPOR SATURADO EN LA PELICULA LIQUIDA.....	150
6.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.....	151
6.2.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	152
6.2.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	153
6.2.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ ...	154
6.2.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .....	155
6.2.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	156
6.2.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	165
6.2.7.- Contrastación de los resultados.....	166
6.2.8.- Posible mejora de la solución.....	167
6.2.9.- Conclusiones.....	170
6.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.....	172
6.3.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	172
6.3.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	173
6.3.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ ...	174
6.3.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .....	176
6.3.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	177
6.3.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	178
6.3.7.- Contrastación de los resultados.....	179
6.3.8.- Posible mejora de la solución.....	179
6.3.9.- Conclusiones.....	181
7.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UN CILINDRO VERTICAL.....	183
7.1.- VELOCIDAD MEDIA DEL VAPOR SATURADO EN LA PELICULA LIQUIDA.....	183
7.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.....	184
7.2.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	184

7.2.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	184
7.2.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .....	185
7.2.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .....	186
7.2.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	187
7.2.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	192
7.2.7.- Contrastación de los resultados.....	192
7.2.8.- Posible mejora de la solución.....	193
7.2.9.- Conclusiones.....	194
7.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.....	196
7.3.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	196
7.3.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	197
7.3.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .....	197
7.3.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .....	198
7.3.5.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	200
7.3.6.- Carácter del monomio $N_p$ .....	201
7.3.7.- Contrastación de los resultados.....	202
7.3.8.- Posible mejora de la solución.....	202
7.3.9.- Conclusiones.....	204
8.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION SOBRE UNA PARED INCLINADA.....	206
8.1.- VELOCIDAD MEDIA DEL VAPOR SATURADO EN LA PELICULA LIQUIDA.....	207
8.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.....	208
8.2.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	209
8.2.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	210
8.2.3.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ ...	211
8.2.4.- Solución con la base dimensional ampliada y discriminada $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .....	212

8.2.5.-	Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	214
8.2.6.-	Carácter del monomio $N_p$ .....	215
8.2.7.-	Contrastación de los resultados.....	216
8.2.8.-	Posible mejora de la solución.....	216
8.2.9.-	Conclusiones.....	218
8.3.-	COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.....	220
8.3.1.-	Solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).....	221
8.3.2.-	Solución con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M).....	222
8.3.3.-	Solución con la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ )... ..	223
8.3.4.-	Solución con la base dimensional ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).....	224
8.3.5.-	Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	225
8.3.6.-	Carácter del monomio $N_p$ .....	226
8.3.7.-	Contrastación de los resultados.....	227
8.3.8.-	Posible mejora de la solución.....	227
8.3.9.-	Conclusiones.....	229
9.-	TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR EN UNA PARED VERTICAL..	232
9.1.-	Solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).....	234
9.2.-	Solución con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M).....	236
9.3.-	Solución con la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).....	237
9.4.-	Solución con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ )..	238
9.5.-	Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	240
9.6.-	Carácter del monomio $N_p$ .....	244
9.7.-	Contrastación de los resultados.....	245
9.8.-	Posible mejora de la solución.....	245
9.9.-	Conclusiones.....	247

10.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR SOBRE UN CILINDRO HORIZONTAL.....	250
10.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	251
10.2.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	252
10.3.- Carácter vectorial de las soluciones.....	252
10.4.- Carácter del monomio $N_p$ .....	253
10.5.- Contrastación de los resultados.....	254
10.6.- Posible mejora de la solución.....	255
10.7.- Conclusiones.....	257
11.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO EN FLUJO DE BAJA VELOCIDAD.....	259
11.1.- Solución con la base ampliada $(L, Q, T, \theta, M)$ .....	260
11.2.- Solución con la base ampliada y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ ...	262
11.3.- Soluciones con las bases usual $(L, Q, T, \theta)$ y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .....	263
11.4.- Carácter vectorial de las soluciones. Base ampliada.....	265
11.5.- Carácter del monomio $N_p$ .....	266
11.6.- Contrastación de los resultados.....	267
11.7.- Conclusiones.....	268
12.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO CON FLUJO A ALTA VELOCIDAD.....	271
12.1.- Solución con la base usual $(L, Q, T, \theta)$ .....	271
12.2.- Solución con la base usual y discriminada $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .....	272
12.3.- Contrastación de los resultados.....	274
12.4.- Comparación de los problemas 11 y 12 .....	274
12.5.- Conclusiones.....	277

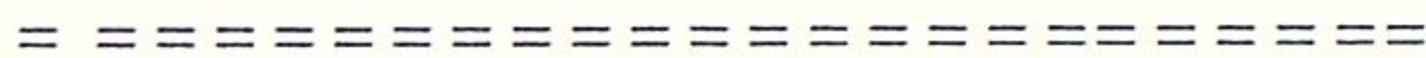
CONCLUSIONES..... 278

CUADRO RESUMEN..... 287

REFERENCIAS..... 289

APENDICE..... 295

I N T R O D U C C I O N



La Mecánica de Fluidos...  
 durante el siglo XVII...  
 la Hidrodinámica...  
 cinco siglos...  
 obtenidos grandes resultados...  
 fue desarrollando multitud de...  
 solución de los problemas que sus construcciones...  
 sin preocuparse de buscarles base teórica alguna...  
 tífico, Reynolds, buscó y halló apoyo experimental...  
 nico, Froude, buscó base física a sus experimentos...  
 síntesis de las investigaciones teóricas de los unos...  
 de los otros, lo cual hace que se considere a Besudil...  
 moderna Mecánica de fluidos.

Presentamos en este trabajo un desarrollo teórico, y unas aplicaciones prácticas, en fenómenos de transmisión del calor, de la teoría de Análisis dimensional de Palacios.

El Análisis dimensional presenta el doble aspecto de establecer unos fundamentos básicos de la Física, y de permitir aplicaciones fecundas a problemas concretos y complejos. Ambas cuestiones surgen con cierta independencia y con un carácter muy empírico.

El proceso seguido por el Análisis dimensional es, por ejemplo, semejante al de la mecánica de fluidos, campo de interés también para el Análisis dimensional, que, por ser bien conocido, nos sirve para ilustrar los pasos dados por el Análisis dimensional.

La Mecánica de fluidos moderna nace con Prandtl , que en las primeras décadas del siglo actual elaboró la síntesis entre la Hidráulica práctica y la Hidrodinámica teórica.

Cinco matemáticos geniales del siglo XVIII, Bernoulli, Clairaut, D'Alembert, Lagrange y Euler habían elaborado, con el naciente cálculo diferencial e integral, una síntesis hidrodinámica perfecta, pero no habían obtenido grandes resultados prácticos. Por otra parte, el técnico hidráulico fue desarrollando multitud de fórmulas empíricas y experiencias en la resolución de los problemas que sus construcciones hidráulicas le presentaban, sin preocuparse de buscarles base teórica alguna. Excepcionalmente, un científico, Reynolds, buscó y halló apoyo experimental a sus teorías, y un técnico, Froude, buscó base física a sus experimentos; pero Prandtl hizo la síntesis de las investigaciones teóricas de los unos y de las experiencias de los otros, lo cual hace que se considere a Prandtl como el fundador de la moderna Mecánica de fluidos.

Pues bien, un desarrollo paralelo, análogo, puede observarse en el Análisis dimensional, pudiendo considerarse que el Análisis dimensional moderno nace, como teoría física completa, con Palacios, que elaboró la síntesis entre las aplicaciones prácticas del Análisis dimensional y sus bases teóricas.

Entre los antecedentes hay que considerar a ciertos matemáticos ilustres que habían estudiado algunas cuestiones aisladas pero importantes del Análisis dimensional, especialmente la referente a la homogeneidad, como Levi-Civita (\*), Ehrenfest-Afanassjewa (\*\*), y Ricardo San Juan (\*\*\*), quienes habían demostrado que los sistemas de dimensiones usados en cada capítulo de la Física forman grupos abelianos con base finita, análogos a los sistemas hipercomplejos, lo cual permitía sistematizar las teorías físicas, y resultaban así elegantemente clasificados los sistemas de unidades y sus transformaciones, tanto cuando se conserva la base, según se hacía hasta ahora, como cuando se cambia ésta.

Por otra parte, las aplicaciones prácticas del Análisis dimensional cuentan con una vieja historia, cuya utilidad manifiesta se revela, no sólo en el campo de la Física teórica, sino en problemas técnicos, en los ensayos con modelos reducidos de aviones, buques y construcciones hidráulicas. Estas cuestiones fueron ya estudiadas por los antiguos griegos, Ptolomeo y Pappus de Alejandría, y aunque modernamente también se ocuparon de ellas Galileo, Kepler, Huyghens, Descartes y Leibniz, la contribución más importante la realizó Newton en su Principia (II, proposición 32), donde estableció el "principio de similitud", al fundamentar la Mecánica como rama de la Ciencia.

---

(\*) Levi-Civita y Amaldi: Lezione di Meccanica Razionale, 1, Bologna.

(\*\*) Ehrenfest-Afanassjewa : Math. Ann., 77, 259, (1916).

(\*\*\*) San Juan, R.: Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos, Rev. Acad. Cienc., de Madrid, t.39.



El principio de similitud se ha aplicado a la teoría de modelos por ingenieros aeronáuticos y navales así como por expertos en balística, entre los que destacaron Bashforth y Froude, quienes obtuvieron las leyes conocidas por sus nombres: ley de Bashforth referida a la resistencia al movimiento de proyectiles en el seno de un fluido, y la ley de Froude para la resistencia de modelos reducidos de barcos.

Pasado más de un siglo desde el trabajo de Newton, el tema fue tratado por Jean Baptiste Joseph Fourier en su obra clásica *La Théorie Analytique de la Chaleur*, publicada en 1822 (\*).

Fourier introdujo dos nociones que son de capital importancia en el contenido moderno de la materia. La primera es la concepción de lo que hoy se denomina "fórmula dimensional", y la segunda es el reconocimiento de la "homogeneidad dimensional" de las ecuaciones de la Física.

Las ideas de Fourier fueron aplicadas con gran éxito a fines del pasado siglo por Reynolds, Lodge, Fitzgerald, Rücker, Williams, Jeans y, muy especialmente, por lord Rayleigh. Las aplicaciones consistieron, primero, en la comprobación de la homogeneidad de las ecuaciones con el fin de descubrir errores de cálculo y, después, por iniciativa principalmente de lord Rayleigh, se aplicó el Análisis dimensional a la resolución de problemas cuyo tratamiento directo presentaba dificultades matemáticas insuperables. Lord Rayleigh empleó por primera vez las magnitudes con exponentes dimensionales nulos en Mecánica de fluidos.

De los autores mencionados, queremos destacar que fue Williams, en 1892, quien sugiere por primera vez la idea de considerar la dimensión longitudinal en tres direcciones mutuamente perpendiculares (\*\*).

---

(\*) Fourier, B. J.: *Théorie Analytique de la Chaleur*, Gauthier-Villars, cap.II, sección 9, París, (1888).

(\*\*) Williams, W.: *On the Relation of the Dimensions of Physical Quantities to Directions in Space*, *Phil. Mag.*, 34, 234, (1892).

En el año 1914 apareció en Norteamérica un trabajo de Buckingham (\*) en el que se da una regla para averiguar el número de monomios de exponentes dimensionales nulos que pueden formarse con todas las magnitudes que intervienen en el fenómeno estudiado. Tales monomios se denominan números  $\Pi$  y, por eso, dio Bridgman a la citada regla el nombre de "teorema de pi".

En realidad, Fourier había ya previsto que toda ecuación física debía consistir en un monomio de dimensión nula igualado a una función cuyos argumentos tuvieran también dimensiones nulas, y el llamado teorema de pi era ya empleado tácitamente, por los físicos ingleses antes mencionados, especialmente por Jeans. Además, según hizo notar Métral (\*\*), el teorema en cuestión había sido ya enunciado por Vaschy (\*\*\*) el año 1892, aunque sin referirse expresamente a los monomios de dimensión nula. De todas formas, el trabajo de Buckingham tuvo la fortuna de atraer la atención de físicos, matemáticos e ingenieros del mundo entero.

En los Estados Unidos, Bridgman (1922), en Inglaterra, Porter (1933), en Francia, Esnault-Pelterie (1945), en Rusia, Riabouchinsky (1912) y en Alemania, Planck (1906) contribuyeron al desarrollo del Análisis dimensional. Incluso Einstein (1911) lo aplicaba para estimar la frecuencia de oscilación de los átomos en un sólido rígido.

En la segunda mitad del siglo XX, Huntley utiliza la idea desarrollada por Williams y la introduce en los capítulos V y VI de su libro (\*\*\*\*), con el nombre de "componentes de las dimensiones fundamentales".

---

(\*) Buckingham, E.: Phys. Rev., 4 , 345 , (1914).

(\*\*) Métral, A.: Homogénéité et Similitude en Aerodynamique, (1892), París.

(\*\*\*) Vaschy, M.A.: Comptes Rendus de l'Académie, 114 , 1416 , (1892), y 115, 597 , (1892).

(\*\*\*\*) Huntley, H.E.: Dimensional Analysis, McDonald, (1952).

Finalmente, Langhaar (1951) publica un tratado en el que dedica mucha atención a la teoría de modelos, y que alcanza gran difusión entre los ingenieros por sus aplicaciones prácticas.

Llegados a este punto, y después de la intervención de los físicos más eminentes, sería de esperar que el Análisis dimensional estuviera ya asentado sobre bases sólidas, y que hubiera unanimidad acerca de la manera de emplearlo. Lejos de ser así, los físicos se hallaban divididos en grupos, cuyas opiniones discrepaban en cuestiones esenciales, incluso en el concepto mismo de dimensión. Como muestra transcribimos lo que al respecto dicen algunos autores:

Fourier, (1888), "Es necesario hacer notar que cada magnitud, indeterminada o constante, tiene una dimensión que le es propia, y que los términos de una ecuación no podrían ser comparados si no tuviesen el mismo exponente de dimensiones".

"La dimensión de  $c$  con relación a la unidad de longitud vale  $(-3)$ , la de  $K$  es  $(-1)$  y la de  $h$  es  $(-2)$ "; hace análogas consideraciones respecto de las variables tiempo y temperatura, llamando a esos números "exponentes dimensionales con relación a la longitud, tiempo y temperatura".

Chwolson, (1912), define las dimensiones de acuerdo con Fourier, diciendo que: "Si la unidad derivada  $A$  varía proporcionalmente a la potencia  $p$  de la unidad de longitud, a la potencia  $q$  de la unidad de masa y a la potencia  $r$  de la unidad de tiempo, se dice que la unidad  $A$  tiene la dimensión  $p$  con relación a la unidad de longitud, la dimensión  $q$  con relación a la unidad de masa y la dimensión  $r$  con relación a la unidad de tiempo".

Tolman, (1917), considera que "la verdadera esencia de las magnitudes, desde el punto de vista físico, está representada por su respectiva fórmula dimensional".

Bridgman, (1920), "Las dimensiones no tienen en modo alguno carácter absoluto, sino que han de definirse, precisamente, a partir del proceso que se utilice para medir la magnitud respectiva".

Diesselhorst, (1929), "Los símbolos de las fórmulas dimensionales no son unidades especiales, sino tan solo representantes de cada tipo de magnitud y estos representantes se denominan dimensión de la magnitud respectiva".

Reichenbach, (1932), "Cada magnitud física se supone dotada de una dimensión que caracteriza su cualidad".... "Hay arbitrariedad en la manera de reducir la dimensión de una magnitud dada a las dimensiones fundamentales: longitud, masas y tiempo y que, por eso, se supone arbitrariamente que carecen de dimensión, no sólo ciertos factores numéricos, sino hasat funciones de estado (como la temperatura)".

Langhaar, (1951), comenta que las discusiones sobre el concepto de dimensión son excesivamente filosóficas. Añade que la característica principal que él le atribuye a la dimensión es que sirven para revelar cómo cambia el valor numérico de una magnitud cuando cambian las unidades básicas con las que se realiza la medida.

Además de estas contradictorias opiniones sobre el concepto básico de dimensión, tampoco existía acuerdo sobre la base dimensional a utilizar en la aplicación del teorema de pi a cada capítulo de la Física, lo cual desembocaba en la obtención de resultados dispares. Como ejemplo citamos tres obras clásicas relacionadas con la materia de nuestro trabajo:

W.H. McAdams en su texto "Transmisión de calor", emplea como base dimensional (L,M,T, $\theta$ ). En contraposición, A.J. Chapman en su libro "Transmisión del

calor", usa como base dimensional  $(L, M, T, \theta, Q)$ . Con Chapman coincide Gröber en su obra sobre transmisión del calor, en la utilización de la base pentadimensional. Por supuesto, las soluciones que obtiene McAdams al aplicar el Análisis dimensional a los problemas de convección no coinciden con los de Chapman o Gröber, ya que discrepan en algo tan esencial como la multiplicidad de la base dimensional. Y esto es frecuente en los tratadistas del Análisis dimensional, quienes tampoco tienen un criterio unánime al respecto: Así, por ejemplo, Bridgman (\*) en los problemas de transmisión de calor usaba una base tetradimensional  $(L, M, T, \theta)$ , mientras Huntley empleaba una pentadimensional, a veces,  $(L, M, T, \theta, Q)$  (\*\*), y a veces  $(L, M_{\mu}, M_1, T, \theta)$  (\*\*\*), donde  $M_{\mu}$  designa lo que él llama "cantidad de materia" y  $M_1$  la masa inercial.

Parece claro que si el Análisis dimensional ha de servir para algo, es preciso que exista un sistema unívoco, de modo que a cada magnitud corresponda una fórmula dimensional perfectamente determinada, pues sólo con esta condición podemos estar seguros de que será correcta la solución obtenida al aplicar el teorema de pi a un problema debidamente planteado.

Frente a este estado de cosas no es de extrañar la afirmación de Bridgman en la edición revisada de su clásica obra (1931):

"Desde la primera edición de este libro, he observado con gran sorpresa que, a pesar de lo que a mí me parecía una lúcida y convincente exposición, existen todavía diferencias en puntos de vista fundamentales, de modo que esta materia no se puede considerar libre de controversia", y esta controversia se mantiene hasta la primera edición de la obra de Palacios, que

---

(\*) Bridgman, P.W.: Dimensional Analysis, Yale University, 92 , (1922).

(\*\*) Huntley, H.E.: Dimensional Analysis, 123 , Dover, (1952).

(\*\*\*) " " " 125 " "

se publica en 1955 y es traducida al inglés y al francés (\*).

Utilizando los fundamentos teóricos de los matemáticos mencionados anteriormente, en especial, la teoría de las funciones homogéneas generalizadas, y las aplicaciones prácticas del Análisis dimensional, desarrolladas por los físicos e ingenieros anteriormente citados, Palacios elabora una síntesis entre ambos y construye, por primera vez, una teoría del Análisis dimensional, con el significado completo de la palabra teoría. Dice, en la introducción de su obra (\*):

"Trataremos en este trabajo de desarrollar una teoría del Análisis dimensional basada en hechos elevados a la categoría de postulados, y que resultan ser en número de dos. El primero se refiere a la índole de las ecuaciones físicas; el segundo atañe al significado de las constantes universales, y permite clasificarlas en ineludibles y superfluas".

"Nuestros postulados bastan para crear un sistema dimensional unívoco, y su validez deberá comprobarse por vía experimental, esto es, en problemas de Análisis dimensional cuya solución completa sea conocida".

En el texto clásico de Bridgman, considerado una autoridad en la materia, no se ofrece una teoría, sino un método, como reconoce explícitamente su autor, repitiendo, sólo en la primera página del Prefacio, la palabra "método" del Análisis dimensional, siete veces. De forma análoga, los restantes autores consultados, o reconocen estar exponiendo un método (una regla, una técnica), o bien, no se aprecia la construcción de ninguna teoría en sus obras.

---

(\*) Palacios, J.: Análisis dimensional, Espasa-Calpe, 16, Madrid, (1955).

(\*) Palacios, J.: Analysis Dimensionnelle, Gauthier-Villars, París, (1960).

(\*) Palacios, J.: Dimensional Analysis, McMillan, London, (1964).

La obra de Palacios es la primera teoría del Análisis dimensional con las propiedades lógicas que distinguen una teoría de otros fragmentos de conocimiento científico, como son, la deducibilidad y la unidad conceptual . En ella están perfectamente puntualizados: 1) Su correlato u objeto, 2) sus supuestos básicos (axiomas) y 3) su dominio de validez.

Dice Mario Bunge, reconocida autoridad en Filosofía de la Ciencia (\*):

"Las síntesis están más allá de la ciencia inicial...Es una peculiaridad de la ciencia contemporánea el que la actividad científica más importante -la más profunda y la más fecunda- se centre en torno a teorías, y no en torno a la recolección de datos, las clasificaciones de los mismos o hipótesis sueltas...Las explicaciones y las predicciones se realizan también en el seno de teorías. Dicho brevemente: lo que caracteriza la ciencia moderna es la insistencia en la teoría, en la teoría empíricamente contrastable".

La unidad conceptual de la teoría de Palacios se manifiesta, como en cualquier teoría científica, en un sistema de hipótesis que se supone que da una explicación de un sector de la realidad. Subrayemos que una teoría es un sistema, o sea, un cuerpo unitario, y no simplemente un conjunto de fórmulas. La sistematicidad o unidad de la teoría es formal (consiste en ser un sistema hipotético deductivo, es decir, un cuerpo cuyas partes son o bien hipótesis iniciales o bien consecuencias de ellas) y material (los conceptos clave de la teoría están distribuidos entre las fórmulas de la teoría, de tal modo que ningún concepto específico de ella queda aislado de los demás).

La deducibilidad de la teoría se manifiesta en que posee un núcleo

---

(\*) Bunge, M.: Investigación científica, Ariel, 413 , (1969).

axiomatizado compuesto de axiomas y definiciones, que permiten la introducción de premisas subsidiarias, y a partir de este núcleo se demuestran otros enunciados (teoremas).

Por otra parte, la teoría de Palacios tiene una característica deseable, aunque no obligatoria en una teoría: su base axiomática es independiente. Además, en lo que respecta a su forma, posee todo lo que se puede esperar de una teoría: consistencia formal interna y externa, independencia de las primitivas y de los axiomas. Cuando una teoría satisface esas condiciones y, además, contiene una enumeración explícita y completa de sus primitivas y de sus reglas, se dice que está formalizada. La de Palacios es, pues, una teoría formalizada. En forma simbólica se puede decir:

Formalización = Simbolización + Axiomatización + Reglas + Supuestos

Una teoría es una creación original, no una disposición de elementos cuidadosamente anclados en la experiencia (por ejemplo, operativamente "definidos"). Los datos particulares no son materiales de construcción de la teoría, sino simplemente -una vez cribados- ocasión de la actividad teorizadora y contrastación de las teorías: los datos particulares plantean problemas y constituyen otras tantas condiciones que la teoría tiene que satisfacer en alguna medida. Si la teoría es verdadera, se encontrarán los datos particulares como consecuencia de los supuestos generales de la teoría, en conjunción con otros datos particulares. El caso singular tiene unas cuantas funciones; planteará un problema, sugerirá tal vez una conjetura, puede a veces refutarla, e ilustrará una teoría: pero no puede producirla.

Del núcleo axiomatizado de la teoría de Palacios se deduce de forma inequívoca la base de un conjunto de magnitudes (para lo cual es fundamental



el segundo postulado), el caracterizarlas como bases superabundantes, estrictas o mutiladas, y bases con discriminación espacial de las dimensiones, el concepto de dimensión, de fórmula dimensional, el criterio de homogeneidad y el de constantes ineludibles y superfluas. Y, finalmente, a partir de sus dos postulados y de sus definiciones, se demuestra, se deduce, el teorema de pi, perdiendo así el carácter anterior de hipótesis previa.

Por todo ello, el Análisis dimensional, que no era más que un conjunto de reglas semiempíricas ha pasado a ser, por obra de Palacios, una teoría, lo cual no excluye la posibilidad de otra, u otras, como el mismo autor reconoce implícitamente en la introducción de su obra, al decir "una teoría" y no "la teoría". Pero, por ahora, la suya es la única existente, con la particularidad de que su aplicación conduce en todos los casos estudiados a soluciones más precisas, o al menos iguales, a las tradicionales del Análisis dimensional (nunca menos precisas o erróneas).

En los dos aspectos señalados, teórico y aplicado, de la teoría de Palacios, hemos realizado nuestro trabajo. En la parte I, desarrollamos su teoría en el campo de la Transmisión de calor en uno de los aspectos más conflictivos: la base dimensional, y en la parte II la aplicamos a diversos problemas, poniendo de manifiesto la mejora que, en cada caso, se logra mediante nuestro planteamiento, y comparamos nuestras soluciones con las teóricas o experimentales conocidas, comprobando así su validez. Con ello creemos que se consolida y difunde más dicha teoría, tanto desde el punto de vista básico como aplicado.

El proceso seguido en la parte I del presente trabajo se apoya en que en la teoría de Análisis dimensional de Palacios se señala el hecho de

que, para determinados fenómenos, la base dimensional utilizada puede resultar, bien excesiva, o bien deficiente, y se indica la posibilidad de encontrar la base dimensional específica más adecuada para cada caso concreto. Obtenemos nosotros deductivamente, a partir de la teoría de Palacios, las bases dimensionales posibles en la Transmisión de calor, lo que nos lleva a delimitar varias partes o tipos de fenómenos, como subcapítulos dentro del capítulo general de Transmisión de calor, a los que corresponden bases dimensionales específicas.

De este modo, creemos haber construido los pilares básicos, necesarios a priori, para encarar con entera confianza la resolución de fenómenos concretos pertenecientes a una u otra parte del capítulo de Transmisión de calor. Además se esclarece el confuso panorama existente en torno a la base dimensional adecuada. Diferentes autores usan distintas bases, no establecidas teórica y deductivamente, al tratar de resolver un mismo problema mediante el Análisis dimensional, lo cual les conduce a resultados distintos, como ya hemos señalado anteriormente, que pueden ser muy imprecisos o incluso erróneos.

En resumen, nuestra contribución en la parte I, consiste en haber deducido la base adecuada correspondiente a cualquier fenómeno calorífico, para lo cual, hemos clasificado la Transmisión de calor en diferentes partes y hemos obtenido la base dimensional correspondiente a cada una de ellas, lo que permite, posteriormente, encuadrar cualquier problema calorífico en una de ellas y obtener así su base dimensional estricta. Esto nos asegurará una solución correcta al problema.

En la parte II (Aplicaciones) resolvemos mediante Análisis dimensional los siguientes problemas:

- 1.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL.
- 2.- TRANSMISION DE CALOR POR CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA INCLINADA.
- 3.- CONVECCION LIBRE ENTRE DOS PLACAS VERTICALES.
- 4.- CONVECCION LIBRE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL.
- 5.- CONVECCION LIBRE EN UN CILINDRO HORIZONTAL.
- 6.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UNA PARED VERTICAL.
- 7.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UN CILINDRO VERTICAL.
- 8.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION SOBRE UNA PARED INCLINADA.
- 9.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR EN UNA PARED VERTICAL.
- 10.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR SOBRE UN CILINDRO HORIZONTAL.
- 11.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO EN FLUJO DE BAJA VELOCIDAD.
- 12.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO CON FLUJO A ALTA VELOCIDAD.

En todos ellos, se pone de manifiesto la validez de la división en subcapítulos del capítulo general de la Transmisión del calor y la utilización de sus correspondientes bases dimensionales estrictas, efectuada en la parte I, puesto que se llega a soluciones correctas.

Por otra parte, en algunos casos tratados, en los que no existe solución teórica exacta, obtenemos, con la ayuda de la base dimensional adecuada, soluciones más precisas que las que proporcionan el análisis teórico aproximado o el Análisis dimensional usual, siendo entonces dichas soluciones un eficaz auxiliar de la experimentación, pues disminuye el número de experiencias necesarias para establecer la correspondiente fórmula empírica,

reduciéndose, en algunos casos, a una sola medida que determina el valor de una constante adimensional  $C$ .

De forma general, el procedimiento seguido en la resolución de cada problema, mediante el Análisis dimensional, puede quedar dividido en las siguientes etapas sucesivas:

- a) Exposición de las variables independientes que intervienen en el proceso y las constantes tanto universales como características presentes en la teoría del fenómeno considerado.
- b) Establecimiento de las fórmulas dimensionales de las magnitudes y constantes que intervienen en el problema, en la base dimensional utilizada.
- c) Cálculo, mediante el teorema de  $\pi$ , deducido de la teoría de Palacios, del número de monomios independientes que pueden formarse con las variables dadas, y la forma de los mismos.
- d) Expresión de la solución en función del sistema completo de monomios  $\pi$ .

Todos estos aspectos se han desarrollado de forma explícita y detallada en la resolución del primer problema "Convección libre en una placa vertical (caso general)", con la intención de que pueda servir de modelo, habiendo simplificado el planteamiento de los restantes, salvo en aquellos aspectos que resultan peculiares.

Comenzamos, generalmente, las aplicaciones con una descripción fenomenológica del problema y un desarrollo teórico exacto o aproximado del mismo, lo que nos permite establecer cuáles son las variables que intervienen en el proceso. En algunos casos omitimos el desarrollo teórico por ser análogo, con las diferencias propias introducidas por la geometría, al de aplicaciones tratadas con anterioridad, a las que nos referiremos oportunamente.

Resolvemos los problemas, en primer lugar, mediante el Análisis dimensional clásico, y hemos tomado, como base habitual, una tetradimensional,  $(L, Q, T, \theta)$ , que dentro de la disparidad de criterios de los diferentes autores, parece ser la más frecuentemente empleada. A continuación, resolvemos el problema con la base adecuada, deducida en la parte I, que para aquellos fenómenos de transmisión de calor en los que no se produce conversión de calor en trabajo o viceversa, y sólo para ellos, es pentadimensional  $(L, Q, T, \theta, M)$ , que llamamos ampliada.

Posteriormente aplicamos la "discriminación de las dimensiones del espacio" expuesta por Palacios, a los problemas mencionados anteriormente, y procedemos a su resolución con la base dimensional usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  o  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y con la ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  o  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

Con este proceso evolutivo se pone de manifiesto que en los problemas (1-4, 6-9 y 11), pertenecientes al tipo de fenómenos de transmisión de calor sin conversión de energía mecánica en calorífica o viceversa, tanto la discriminación de las dimensiones del espacio como la ampliación de la base proporcionan soluciones más precisas que las dadas por el Análisis dimensional clásico, y que la solución más precisa es la obtenida con la aplicación conjunta de los dos procedimientos, esto es, con la base dimensional ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  ó  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

La discriminación aumenta el número de ecuaciones en los problemas de Análisis dimensional, con lo que, en general, disminuye el número de monomios  $\pi$  independientes.

Asimismo, en los problemas 5 y 10 la ampliación de la base dimensional mejora las soluciones halladas con el Análisis dimensional clásico. En estos

dos casos no es posible realizar la discriminación dimensional debido a que las características geométricas y físicas, de los respectivos fenómenos, impiden la aplicación de la discriminación a todas las variables que intervienen en el proceso.

En el problema 12 ocurre, por el contrario, que al producirse disipación de energía mecánica en calorífica en el fenómeno estudiado, no es posible, según se deduce en la parte I, la ampliación de la base dimensional sin aumentar el número de variables. La utilización indebida de dicha base en la resolución del problema conduciría a resultados erróneos. En este caso la solución más precisa es la hallada con la base usual y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

Mediante otra de las consecuencias de la teoría de Análisis dimensional de Palacios: Carácter vectorial de las dimensiones, ponemos de manifiesto que la utilización de la base usual con o sin discriminación espacial, en los fenómenos de transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa (1-11), supone una proyección de vectores-dimensión penta, hexa o heptadimensionales sobre subespacios tetra, penta o hexadimensionales, respectivamente, lo que implica una mutilación de vectores, con la consiguiente pérdida de información en cada uno de los fenómenos estudiados.

En cada uno de los casos tratados contrastamos la solución más precisa obtenida por nosotros con otras soluciones conocidas, ya sean teóricas exactas, aproximadas o empíricas según los casos, lo que permite, por una parte, comprobar la validez de nuestros resultados y, por otra, comparar la profundidad que alcanza el Análisis dimensional en la resolución de problemas respecto de la que obtienen los otros métodos de cálculo mencionados anteriormente.

En las aplicaciones, (6-10), correspondientes a la transmisión de calor por condensación y ebullición pelicular sobre diferentes superficies, logramos obtener una mejora adicional de la solución como consecuencia de un tratamiento distinto al habitual, consistente en elegir adecuadamente variables que son especialmente idóneas para los fenómenos estudiados. En tales casos obtenemos, mediante este procedimiento, el mejor resultado que puede proporcionar el Análisis dimensional: la solución exacta salvo una constante adimensional.

Se finaliza, en cada una de las aplicaciones, con unas conclusiones parciales en las que se indican los resultados y ventajas más significativas obtenidas con nuestro planteamiento, incidiendo, de forma general, en los siguientes aspectos: a) base estricta para cada problema tratado; b) efectos de la utilización de la discriminación de las dimensiones del espacio; c) números adimensionales; d) solución más precisa.

La recopilación reducida (resumen) de todas las conclusiones parciales constituye las conclusiones generales expuestas al final de esta memoria.

Añadimos un Cuadro-Resumen con la finalidad de facilitar al lector la comparación de los distintos resultados.

Hemos recogido en un Apéndice, que figura al final, una parte de una tesina que, como introducción a este trabajo, presentamos en la Universidad de Granada en 1983. En dicho Apéndice se exponen y amplían, con explicación pormenorizada, los aspectos de la teoría de Análisis dimensional de Palacios que directamente se aplican en este trabajo. Resulta conveniente su lectura previa para quienes no estén muy familiarizados con la teoría de Palacios, y, por otra parte, queremos también contribuir así a la mayor difusión de dicha teoría, de gran interés tanto desde el punto de vista básico como aplicado.

P A R T E I

BASES DIMENSIONALES EN LA  
TRANSMISION DEL CALOR



## I.- BASES DIMENSIONALES EN LA TRANSMISION DEL CALOR.

Veremos a continuación, a partir de la teoría de Análisis Dimensional de Palacios, cuáles son las diferentes bases dimensionales que han de tomarse en consideración en la transmisión del calor, estableciendo de manera inequívoca y rigurosa las partes o subcapítulos en que, según el Análisis dimensional, ha de considerarse dividida la transmisión del calor, así como sus correspondientes bases dimensionales.

Se señala en dicha teoría [1] el hecho de que determinadas bases dimensionales pueden ser, bien excesivas, o bien deficientes para algunos problemas o capítulos de la Física.

Indica Palacios [2] que para un problema dado, perteneciente a un capítulo determinado de la Física, la base estricta puede no coincidir con la base propia del capítulo de la Física a la que pertenece, deduciendo la forma de obtener la base estricta para cada problema o subcapítulo particular de la Física.

### I.1.- LEYES FUNDAMENTALES Y BASE DIMENSIONAL DE LA TRANSMISION DEL CALOR.

Para obtener la base dimensional de una teoría física se debe comenzar por establecer las leyes fundamentales de dicha teoría [3].

Palacios considera, de acuerdo con el primer y segundo postulados de su teoría de Análisis Dimensional, que, como leyes fundamentales en la conducción del calor, pueden elegirse las siguientes [4]:

" 1.- La cantidad de calor que fluye a través de un elemento de superficie  $ds$ , situado en el seno del sólido, en el tiempo  $dt$ , viene dada por la expresión:

$$dQ = -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt, \quad (1)$$

donde  $K$  es un coeficiente característico del sólido que se denomina conductividad térmica."

" 2.- Si el cuerpo está sumergido en un medio fluido y se evitan las corrientes de convección, el calor que se pierde a través de la superficie de contacto entre ambos medios  $ds$ , en el tiempo  $dt$ , vale:

$$dQ = h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt, \quad (2)$$

donde  $h$  es otro coeficiente que depende del sólido y del medio en que está sumergido, denominado conductividad superficial."

" 3.- Si un elemento de volumen,  $dV$ , del cuerpo considerado, recibe una cantidad de calor,  $dQ$ , experimenta un aumento de temperatura dado por:

$$\delta\theta = \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \quad (3)$$

donde  $c'$  es otra constante característica del cuerpo que se denomina calor específico de la unidad de volumen."

Añade Palacios la ecuación de propagación del calor, que, por ser dimensionalmente combinación lineal de las anteriores, puede incluirse o suprimirse sin que ello afecte a la multiplicidad de la base.

La multiplicidad de la base se obtiene mediante la matriz de los exponentes de las magnitudes en cada una de las ecuaciones (1) a (3), según establece Palacios [5]. En este caso, pues, dicha matriz es:

Q	$\theta$	r	t	K	h	$c'$	
1	-1	-1	-1	-1	0	0	(4)
1	-1	-2	-1	0	-1	0	
-1	1	3	0	0	0	1	

La característica de la matriz es  $h = 3$ , de modo que habrá  $m = n - h = 7 - 3 = 4$  magnitudes fundamentales.

Se trata ahora de elegir, de entre las siete magnitudes citadas, combinaciones de cuatro de ellas, de modo que las tres restantes formen un determinante distinto de cero. Entre las posibles combinaciones que se pueden formar se encuentra  $(r, Q, t, \theta)$ , cuyas respectivas dimensiones son  $(L, Q, T, \theta)$ , que constituye la base dimensional utilizada usualmente en la

resolución de problemas.

Añade Palacios: "En la propagación del calor en medios sólidos no hay movimiento de cuerpos materiales, y por eso no intervienen ni masas ni densidades. Tanto la teoría como el Análisis Dimensional pueden ser desarrollados ignorando la relación dimensional entre el calor y las magnitudes mecánicas L, M, T, a condición de reemplazar M por Q en la base."

#### I.2.- EQUIVALENTE MECANICO DEL CALOR.

Ahora bien, si tomamos en consideración fenómenos mecánicos, debemos agregar nuevas magnitudes primarias y sus correspondientes leyes fundamentales, a las anteriormente escritas (1) a (3), para formar la nueva base dimensional.

En aquellos fenómenos en los que intervengan el calor y el trabajo, debemos incluir la relación que existe entre Q y W, puesto que ya no son independientes.

El principio de equivalencia de Joule establece una proporcionalidad entre el calor absorbido, Q, y el trabajo realizado, W:

$$(W) \sim (Q) \tag{5}$$

Al pasar a la ecuación entre medidas es preciso introducir una constante; así, se puede escribir que

$$W = J.Q \tag{6}$$

siendo J una constante universal, ya que no depende de la naturaleza del material empleado.

De acuerdo con el segundo postulado del Análisis Dimensional de Palacios, las magnitudes Q y W no son inseparables, no coexisten a la vez en el mismo cuerpo, sino que se transforman la una en la otra, por lo que la constante J es superflua y se puede eliminar mediante una adecuada elección de unidades [6]. Veamos lo que ello implica en el planteamiento general de la base dimensional.

I.3.- BASE DIMENSIONAL ESTRICTA.

Habida cuenta de la aparición de fenómenos mecánicos en la transmisión del calor, se pueden considerar las siguientes leyes fundamentales:

$$\begin{aligned}dQ &= -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt \\dQ &= h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt \\ \delta\theta &= \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \\ F &= m_i \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \\ F &= \frac{m_g \cdot m'_g}{r^2} \\ m_g &= G^{1/2} \cdot m_i \\ W &= F \cdot r \\ W &= J \cdot Q\end{aligned} \tag{7}$$

Podemos observar que las tres primeras leyes son las correspondientes a la teoría del calor. Las tres siguientes son las leyes fundamentales de la mecánica newtoniana según las introduce Palacios en [7]. La siguiente es la definición del trabajo que, por ser monomía, puede incluirse entre las leyes fundamentales sin que se altere la multiplicidad de la base dimensional [8]. La última

$$W = J \cdot Q \tag{8}$$

pone en conexión las leyes del calor y de la mecánica.

Según el segundo postulado de la teoría de Análisis Dimensional de Palacios, podemos hacer  $J = 1$  ya que es una constante universal superflua [9]. De este modo, la (8) se reduce a

$$W = Q \tag{9}$$

de modo que se igualan las dimensiones del calor y el trabajo:

$$[W] = [Q] \tag{10}$$

Pueden escribirse ahora las ecuaciones fundamentales de la forma:

$$dQ = -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt$$

$$dQ = h \cdot \Delta \theta \cdot ds \cdot dt$$

$$\delta \theta = \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV}$$

$$F = m_i \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$F = \frac{m_g \cdot m'_g}{r^2}$$

$$m_g = G^{1/2} \cdot m_i$$

$$W = F \cdot r$$

$$Q = W$$

(11)

La matriz formada por los exponentes de cada una de las magnitudes en las respectivas ecuaciones, es:

Q	W	$\theta$	r	t	F	$m_i$	K	h	$c'$	G	$m_g$
1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	0
1	0	-1	-2	-1	0	0	0	-1	0	0	0
-1	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	-2
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(12)

La característica de la matriz es  $h = 8$ , luego  $m = n - h = 12 - 8 = 4$  magnitudes podrán escogerse arbitrariamente para formar la base, con tal de que el determinante formado por las columnas restantes no sea nulo. Entre las posibles bases que se pueden formar se encuentran  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, M, T, \theta)$ , que son las que se utilizan habitualmente en la resolución de problemas.

Según Palacios [10], la ley de proporcionalidad entre masa inerte y masa gravitatoria permite prescindir de  $m_g$ , pero a condición de añadir G a las variables cuando se trate de problemas de gravitación. No es aceptable la simple supresión de G en las fórmulas fundamentales, que

conduciría a una reducción de la base dimensional, lo cual, según la teoría de Palacios, supone una mutilación y no debe efectuarse [11]. Procediendo así, resulta innecesario el subíndice por lo que podemos llamar  $m$  a la masa inerte, en lugar de  $m_i$ . Según esto, el sistema (11) pasaría a ser:

$$\begin{aligned}
 dQ &= -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt \\
 dQ &= h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt \\
 \delta\theta &= \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \\
 F &= m \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \\
 F &= G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \\
 W &= F \cdot r \\
 Q &= W
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

El cuadro de exponentes es ahora:

Q	W	$\theta$	r	t	F	m	K	h	c'	G
1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0
1	0	-1	-2	-1	0	0	0	-1	0	0
-1	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	1	-2	0	0	0	-1
0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Número de variables  $n = 11$  ; característica  $h = 7$  ; multiplicidad de la base  $m = n-h = 11-7 = 4$  . Entre las bases posibles figuran  $(L, M, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta)$ , ya que, suprimidas éstas, las restantes dan  $h = 7$ .

Estas leyes básicas, (13), (o bien (11) si se quiere incluir  $m_g$  explícitamente), constituyen el sistema de leyes fundamentales más general para la parte de la Física que podríamos denominar "la transmisión de calor combinada con efectos mecánicos".

El estudio de problemas concretos se efectuará pues mediante leyes derivadas a partir del sistema de leyes fundamentales.

Podemos, sin embargo, establecer capítulos concretos dentro de dicha parte de la Física, para los cuales algunas de las leyes no serán aplicables y otras podrán adoptar formas más restringidas, a manera de casos particulares legales. Los sistemas de leyes así obtenidos fijarán la multiplicidad de la base en cada capítulo, con la consiguiente repercusión en el Análisis Dimensional.

Veamos pues los siguientes casos:

A).- Para fenómenos de tipo astronómico,  $m$  y  $r$  serán variables independientes y se ha de añadir la constante  $G$  de gravitación a las variables. Si nos atenemos a fenómenos en la superficie terrestre, tanto  $M$  como  $R$  (masa y radio de la Tierra respectivamente) son constantes. Y como aquí  $G$  sólo interviene en una ley, podemos tomar  $\frac{G.M}{R^2}$  como una nueva constante:  $g \equiv \frac{G.M}{R^2}$ , de modo que sustituimos  $F = G \frac{m.M}{R^2}$  por  $F = m.g$  o bien  $P = m.g$ , ya que la fuerza  $F$  es el peso.

El sistema de leyes es ahora:

$$\begin{aligned}dQ &= -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt \\dQ &= h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt \\ \delta\theta &= \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \\ F &= m \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \\ F &= m.g \\ W &= F.r \\ Q &= W\end{aligned} \tag{15}$$

El cuadro de exponentes es:

Q	W	$\theta$	r	t	F	m	K	h	c'	g
1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0
1	0	-1	-2	-1	0	0	0	-1	0	0
-1	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	-1
0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(16)

Número de variables  $n = 11$  ; característica  $h = 7$  ; multiplicidad de la base  $m = n-h = 11-7 = 4$  . Bases posibles:  $(L,M,T,\theta)$ ,  $(L,Q,T,\theta)$ , ..., etc.

Se puede agregar, al sistema (15), la definición de  $g \equiv \frac{G.M}{R^2}$  del potencial gravitatorio, que introduce una nueva variable, la constante  $G$ , no modificándose la multiplicidad de la base.

B).- Cuando se trate de medios continuos, no tendrá sentido hablar de masas individualizadas  $m$  , sino de elementos  $dm$  que ocupan volúmenes  $dV$ .

Así, por ejemplo, el calor pasa de un elemento de volumen al contiguo,  $dV$ , cuya temperatura se eleva un  $\delta\theta$  que depende del calor específico por unidad de volumen  $c'$  que es la constante característica que interviene en el proceso; el calor que retiene el elemento  $dV$  es el balance entre el que entra y el que sale por las paredes  $ds$  del elemento de volumen, en cuyo valor interviene la constante característica  $K$  ; al desplazarse unas partes de fluido,  $dV$ , respecto de las contiguas, habrá un fenómeno de inercia dado por su masa  $dm$ , de modo que la variable característica del proceso es la masa por unidad de volumen, o sea la densidad  $\rho \equiv \frac{dm}{dV}$  ; el peso específico o peso por unidad de volumen que denominamos  $\gamma$  ; etc.

Así pues, en medios continuos no es preciso tomar otras leyes distintas de las de la mecánica de sólidos [12], sino que se aplican éstas a los elementos de masa y de volumen que allí aparecen, tomando la forma adecuada en cada caso. La ley de la dinámica, por ejemplo, para la masa  $dm$  será:



$dF = dm \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$  , y, para la unidad de volumen, si  $dm$  ocupa  $dV$ , dividiendo por  $dV$  , será  $\frac{dF}{dV} = \frac{dm}{dV} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$  , es decir:  $F_v = \rho \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$  . Análogamente, el peso será  $dP = dm \cdot g$  , y, por unidad de volumen,  $\frac{dP}{dV} = \frac{dm}{dV} \cdot g$  , o sea:  $\gamma = \rho \cdot g$  .

Como peso, se puede considerar el peso por unidad de volumen o peso específico,  $\gamma$  ; o bien, el peso aparente,  $P_v$  , por unidad de volumen; o el empuje,  $E_v$ , por unidad de volumen, si se toma en el segundo miembro el balance de densidades:  $\rho - \rho_a$  , por ejemplo. En todos los casos:  $\gamma$  ,  $P_v$  ,  $E_v$  , es fuerza por unidad de volumen de modo que la llamamos  $F_v$  en general para la obtención de la base dimensional, y luego, en cada caso particular, se especificará.

El sistema (15) para medios continuos pasa a ser:

$$\begin{aligned} dQ &= -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt \\ dQ &= h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt \\ \delta\theta &= \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \\ F_v &= \rho \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \\ F_v &= \rho \cdot g \\ W &= F \cdot r \\ Q &= W \\ F_v &= \frac{dF}{dV} \\ \rho &= \frac{dm}{dV} \end{aligned} \tag{17}$$

donde hemos añadido las fórmulas de definición de las magnitudes secundarias  $F_v$  y  $\rho$  .

El cuadro de los exponentes es:

Q	W	$\theta$	r	t	F	m	K	h	c'	g	$F_v$	$\rho$
1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
1	0	-1	-2	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0
-1	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1
0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	3	0	0	-1	0	0	0	0	0	1

(18)

La multiplicidad de la base es  $m = n-h = 13-9 = 4$ , puesto que la característica es  $h = 9$ . Son bases posibles:  $(L, M, T, \theta)$ ,  $(L, Q, T, \theta)$  entre otras.

C).- Según Palacios, "en teoría de los líquidos y de los gases, considerados como medios continuos, no se introducen ni nuevas magnitudes primarias ni nuevas leyes universales por lo que el sistema dimensional es el mismo" [12]. Existen, sin embargo, ciertos fenómenos regidos por leyes específicas que son relaciones entre las magnitudes anteriores con inclusión de una nueva variable, la cual se puede considerar como una constante característica. Es el caso de la tensión superficial  $\sigma$  o la viscosidad  $\mu$ . En propiedad, debemos considerarlas leyes particulares, derivadas de las generales antes expuestas, y dejarlas fuera del sistema general de las leyes fundamentales. Su inclusión en el sistema no es necesaria a los efectos del Análisis Dimensional, ya que, al ser una ecuación más con una única variable nueva, la multiplicidad de la base no se altera. Por otra parte, dicha inclusión tampoco es necesaria para dotar de dimensión a la constante característica nueva ( $\sigma$  ó  $\mu$ , por ejemplo), ya que ésta queda determinada por la ley particular en cuestión que, a los efectos dimensionales, sirve como ecuación de definición de la constante. El que quede como optativo el incluir o no tales leyes particulares en el sistema de leyes fundamentales se

supedita, por supuesto, a que éstas sean expresiones monomias, pues en caso contrario quedarían excluidas por incumplir el primer postulado de la Teoría de Palacios.

Según hemos visto, tanto los sistemas de leyes más generales (11) y (13) como los particulares (15) y (17) conducen a las mismas bases dimensionales. En lo sucesivo usaremos el sistema de la forma (11) ó (13), más general y análogo a lo establecido por Palacios.

#### I.4.- BASE DIMENSIONAL NO ACORDE CON LA TEORIA DE PALACIOS.

Veamos qué sucede si incluimos el principio de equivalencia escrito de la forma (8), entre las leyes fundamentales (13). Esto es, sustituimos  $W = Q$  por  $W = J.Q$ , pasando a considerar la constante universal  $J$  explícitamente, lo cual no es imprescindible según el segundo postulado del Análisis Dimensional de Palacios, que nos indica que dicha constante es superflua; pero tampoco es erróneo.

En efecto, el sistema queda de la forma:

$$\begin{aligned}dQ &= -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt \\dQ &= h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt \\ \delta\theta &= \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \\ F &= m \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \\ F &= G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \\ W &= F \cdot r \\ W &= J \cdot Q\end{aligned} \tag{19}$$

La matriz formada por los exponentes de las magnitudes en cada una de las ecuaciones es:

Q	W	$\theta$	r	t	F	m	K	h	c'	G	J
1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	0
1	0	-1	-2	-1	0	0	0	-1	0	0	0
-1	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	2	0	1	-2	0	0	0	-1	0
0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

(20)

La característica de la matriz es  $h = 7$ , el número de magnitudes que se pueden elegir arbitrariamente para formar la base es  $m = n-h = 12-7 = 5$ . Una de las bases posibles es la formada por  $(L, Q, T, \theta, M)$ . Así pues, la multiplicidad de la base ha aumentado en una unidad.

De forma general, para el tipo de problemas en que se produce conversión de calor en trabajo o viceversa, la utilización de la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  lleva consigo necesariamente la adición de la constante  $J$  a la lista de variables, y, por ello, el número de monomios resultante en un caso concreto es el mismo que el que se obtiene con la base usual de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$  deducida en (12) ó en (14).

En efecto, sea un problema de Análisis Dimensional en el que intervengan  $N$  variables; con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , la característica de la matriz de los exponentes dimensionales será  $H$ , y el número de monomios adimensionales que resulta es  $i = N-H$ , [13]. Con la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  aumentará, en general, en una unidad la característica de la matriz de los exponentes dimensionales, pasando a valer  $H+1$ . Sin embargo, el número de monomios  $\Pi$  no se reduce (lo que mejoraría la solución al ser más precisa), ya que se debe incluir la constante  $J$  entre las variables, que serán ahora  $N+1$ . El número de monomios  $\Pi$  independientes es, pues, ahora:

$$i' = N' - H' = (N+1) - (H+1) = N - H = i$$

y, en consecuencia, no se logra mejorar la solución.

### I.5.- POSIBLE BASE DIMENSIONAL AMPLIADA, ACORDE CON LA TEORIA DE PALACIOS.

Hemos establecido, de forma general, la base dimensional para fenómenos de transmisión de calor en los cuales existe conversión de calor en trabajo o viceversa, y, por tanto, tiene sentido el principio de equivalencia.

Pasemos ahora a considerar aquellos problemas en los que existen fenómenos de transmisión del calor y fenómenos de índole mecánica, pero con independencia, esto es, sin que se produzca transformación de calor en trabajo o viceversa.

Para este tipo de problemas la ecuación  $W = J.Q$  no tiene sentido. No existe. No es aplicable. Así pues, el equivalente mecánico del calor no debe intervenir, puesto que no es introducido por ninguna expresión.

De acuerdo con el significado de dimensión dado por Palacios, cuando no existe transformación de calor en trabajo o viceversa, ambas magnitudes  $Q$  y  $W$  son introducidas por diferentes leyes, independientemente. Sus medidas y unidades estarán relacionadas con las de otras magnitudes físicas, pero no entre sí directamente, esto es, la elección de unidad de  $W$  es totalmente independiente de la elección de unidad de  $Q$ . Y como el significado de dimensión es el de relación entre unidades, si son éstas independientes, sus relaciones también, luego será la dimensión de  $Q$  independiente, distinta de la de  $W$ .

Veamos pues cómo se plantea la nueva base dimensional.

El calor se introduce mediante las leyes fundamentales de la transmisión del calor, y el trabajo mediante las leyes de la mecánica, análogamente al sistema (13), por ejemplo.

Las ecuaciones fundamentales a considerar para el tipo de problemas anteriormente expuesto son:

$$dQ = -K \cdot (\text{grad } \theta \cdot \vec{ds}) \cdot dt \quad (16)$$

$$dQ = h \cdot \Delta\theta \cdot ds \cdot dt \quad (17)$$

$$\delta\theta = \frac{1}{c'} \cdot \frac{dQ}{dV} \quad (18)$$

$$F = m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (21)$$

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

$$W = F \cdot r$$

La matriz de los exponentes de las magnitudes en cada una de las ecuaciones es:

Q	W	$\theta$	r	t	F	m	K	h	c'	G
1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	0	0
1	0	-1	-2	-1	0	0	0	-1	0	0
-1	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	-1	2	1	-1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	1	-2	0	0	0	-1
0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0

La característica es  $h = 6$ , por lo que se pueden elegir  $m = n-h = 11-6 = 5$  magnitudes arbitrarias para formar la base, con tal de que el determinante formado por las restantes columnas sea distinto de cero.

Entre los grupos de cinco magnitudes que se pueden elegir para formar la base se encuentra (L,Q,T, $\theta$ ,M).

Vemos por tanto que la multiplicidad de la base ha aumentado en una unidad. La llamaremos, en lo sucesivo, base ampliada.

Al mismo resultado se llega si este planteamiento se realiza en los sistemas de leyes (11), (15), ó (17), en lugar de (13).

Al plantear, ahora, por Análisis Dimensional, un problema correspondiente a este capítulo: "Fenómenos de transmisión de calor existiendo efectos mecánicos pero sin conversión de calor en trabajo o viceversa", obtendremos, en general, con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M), mejor solución (más

precisa) que con las bases usuales  $(L, Q, T, \theta)$  o  $(L, M, T, \theta)$ . En efecto, la característica de la matriz de los exponentes dimensionales aumentará en una unidad:  $H = h+1$ . Sin embargo, al no tomarse en consideración la constante  $J$  (inexistente en este planteamiento) el número de variables del problema se mantiene:  $N = n$ , contrariamente a lo que sucedía en el apartado anterior. Así pues, el número de monomios adimensionales ahora es

$$i' = N-H = n-(h+1) = (n-h)-1 = i-1,$$

de modo que disminuye en una unidad, con la consiguiente ganancia de información.

En apartados sucesivos resolveremos por Análisis Dimensional diversos problemas de este tipo pertenecientes a dicho capítulo de la Física. Veremos cómo, en cada caso, mejora la solución respecto del tratamiento clásico. Esta base ampliada, unida a otras consecuencias de la teoría de Palacios, de gran utilidad, conduce, en problemas complicados con solución teórica exacta inalcanzable, a soluciones exactas salvo una constante numérica a determinar. En tales casos se puede afirmar que se ha hallado la solución teórica funcional exacta de manera deductiva, aunque indirectamente a través de la Teoría del Análisis Dimensional.

Es importante resaltar lo siguiente. Cuando se plantea un problema por Análisis Dimensional es práctica usual entre los tratadistas hacer dos tipos de consideraciones de carácter intuitivo, no deductivo. El primero, acerca de cuáles variables intervendrán en el problema y cuáles no, guiados para ello en su "sentido físico". El segundo consiste en, una vez resuelto el problema, desestimar ciertos monomios adimensionales o fijar sus relaciones por consideraciones "a priori" sobre el comportamiento físico de las variables. Nuestra ampliación de la base dimensional incide en este segundo punto, puesto que, una vez fijadas las variables, impide la existencia de relaciones entre ellas que, sin la ampliación, eran posibles, o previsibles. Y ello de manera deductiva, rigurosa, a partir de la formulación básica de la

teoría, en lugar de mediante consideraciones intuitivas de carácter físico, que, con frecuencia, varían de unos autores a otros y que se refieren directa y exclusivamente al problema concreto de que se trate.

#### I.6.- CONCLUSIONES.

Se deduce directamente de la teoría del Análisis Dimensional de Palacios que en la transmisión del calor se pueden establecer tres capítulos de la Física independientes, a los que corresponden bases dimensionales distintas:

##### I) TRANSMISION SIMPLE DE CALOR (no intervienen fenómenos mecánicos).

Cuando tratamos fenómenos de propagación del calor en medios sólidos, donde no intervienen magnitudes mecánicas, es decir, masas, densidades, fuerzas, etc., las leyes fundamentales a considerar son únicamente las relativas a la transmisión del calor. En dichos fenómenos la base que se debe utilizar es:

$$(L, Q, T, \theta)$$

siendo para este tipo de fenómenos la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  excesiva.

##### II) TRANSMISION GENERAL DE CALOR, CON INTERVENCION DE EFECTOS MECANICOS, Y CON TRANSFORMACION DE CALOR EN TRABAJO Y VICEVERSA.

En los casos en que, además de transmisión de calor, existen fenómenos mecánicos (por tanto intervienen magnitudes como masas, densidades, fuerzas, etc.), y se produce conversión de calor en trabajo o viceversa, la base dimensional que se ha de utilizar, teniendo en cuenta el segundo postulado de Palacios, es:

$$(L, Q, T, \theta) \quad \text{ó} \quad (L, M, T, \theta)$$

y la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  es excesiva.

##### III) TRANSMISION DE CALOR, UNIDA A FENOMENOS MECANICOS, SIN CONVERSION DE CALOR EN TRABAJO O VICEVERSA.

En los fenómenos en que coexisten efectos mecánicos y de transmisión



de calor, sin que se produzca transformación de calor en trabajo o viceversa, la ecuación  $W = J.Q$  no rige, y el equivalente mecánico del calor no interviene. Para éste tipo de problemas la base estricta es:

$$(L, Q, T, \theta, M)$$

y la base tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$  es deficiente.

COMPRESION LIBRE EN UNA PARED VERTICAL.

Consideremos la deformacion de un elemento libre desde una  
placa horizontal en un fluido en un estado de compresion libre en la placa.

P A R T E II

A P L I C A C I O N E S

### 1.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL.

Consideremos la transferencia de calor por convección libre desde una placa vertical de altura  $L$ , con temperatura uniforme  $\theta_p$ , a un fluido en contacto con ella, con temperatura  $\theta_0$  a suficiente distancia de la placa.

En un principio pasa calor de la placa al fluido próximo a ésta, produciéndose una diferencia de temperaturas entre la del fluido cercano a la placa y la del fluido libre. La capa calentada por la pared disminuye de densidad y experimenta, por ello, un empuje hacia arriba con respecto al fluido inmediato. Esta fuerza produce un movimiento del fluido, en dirección vertical ascendente, a lo largo de la superficie, dando lugar a la transmisión de calor por convección.

El movimiento del fluido es de tipo laminar y, además, la región de los gradientes de velocidad y temperatura se limita a una delgada capa inmediata a la placa. Consideramos independientes de la temperatura las siguientes propiedades del fluido: viscosidad  $\mu$ , calor específico  $c$ , conductividad térmica  $K$ .

Designando con  $\theta_\infty$  la diferencia entre la temperatura de la partícula y la del fluido no perturbado, esto es:  $\theta_\infty = \theta - \theta_0$ , el empuje hidrostático por unidad de volumen es:

$$f_v = \rho g \beta \theta_\infty \quad (23)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de dilatación del fluido que expresa la variación de volumen específico,  $V_e = \frac{1}{\rho}$ , con la temperatura:

$$\beta = \frac{1}{V_e} \frac{dV_e}{d\theta}$$

Schmidt y Beckmann [14] analizaron el problema de convección libre desde una placa vertical, obteniendo una solución analítica.

Tomando como origen de coordenadas un punto del borde inferior de la placa, el eje  $X$  vertical contenido en la placa, el eje  $Y$  normal a

ella y el Z perpendicular a ambos, podemos escribir las ecuaciones de la capa límite del modo siguiente:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (\theta - \theta_0) \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\rho c \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (26)$$

siendo las condiciones en los límites:

$$\begin{aligned} y = 0 & : \quad \theta = \theta_p, \quad u = 0 \\ y = \infty & : \quad \theta = \theta_0, \quad u = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

La coordenada x se toma positiva a lo largo de la placa en la dirección del empuje hidrostático. El término correspondiente al gradiente de presión se considera despreciable.

La ecuación de continuidad (25) queda satisfecha al introducir una función de corriente  $\Psi(x,y)$  definida por:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Las ecuaciones (24), (25) y (26) se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias considerando como única variable independiente el parámetro:

$$\eta = C \frac{y}{x^{1/4}}, \text{ siendo}$$

$$C = \left[ \frac{\rho^2 g \beta (\theta_p - \theta_0)}{4\mu^2} \right]^{1/4}, \text{ esto es:}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \frac{\rho^2 g \beta \Delta \theta}{4\mu^2} \right)^{1/4} \frac{y}{x^{1/4}} = \left( \frac{1}{4} \right)^{1/4} \left( \frac{\rho^2 g \beta \Delta \theta x^3}{\mu^2} \right)^{1/4} \frac{y}{x} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} N_{Gr,x}^{1/4} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $N_{Gr,x}$  es el número de Grashof local y  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_o$ .

Las componentes de la velocidad del fluido se pueden expresar del siguiente modo:

$$u = \frac{4\mu c^2}{\rho} x^{1/2} F'(\eta) \quad (29)$$

$$v = \frac{\mu}{\rho} C x^{-1/4} [\eta F'(\eta) - 3 F(\eta)] \quad (30)$$

siendo  $F(\eta)$  una función indeterminada del parámetro  $\eta$ .

$$F(\eta) = \frac{\rho \Psi(x,y)}{4\mu c x^{3/4}} \quad (31)$$

Finalmente, definiendo una temperatura adimensional función únicamente de  $\eta$

$$\xi = \frac{\theta - \theta_o}{\theta_p - \theta_o} = \frac{\theta - \theta_o}{\Delta\theta} \quad (32)$$

y sustituyendo (29), (30) y (32) en (24) y (26) resulta:

$$F''' + 3FF'' - 2(F')^2 + \xi = 0 \quad (33)$$

$$\xi'' + 3N_{Pr} F \xi' = 0 \quad (34)$$

con las condiciones en los límites

$$F'(0) = 0 \quad , \quad \xi(0) = 1 \quad (35)$$

$$F'(\infty) = 0 \quad , \quad \xi(\infty) = 0 \quad (36)$$

Sin embargo las ecuaciones (33) y (34) están todavía relacionadas, y deben resolverse simultáneamente. Supongamos por el momento que la solución ha sido hallada; entonces una parte de la solución sería el gradiente de temperaturas adimensional en la pared,  $\xi'(0)$ . Esta magnitud es necesariamente función únicamente del número de Prandtl, ya que es el único parámetro que aparece en la ecuación (34).

$$f(N_{Pr}) = -\xi'(0) \quad (37)$$

Por tanto, el coeficiente local de transmisión del calor es:

$$h_x = - \frac{K (\partial\theta/\partial y)_o}{\theta_p - \theta_o} = - K \xi'(0) \frac{d\eta}{dy} = - K \xi'(0) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} N_{Gr,x}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{x}$$

$$h_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K}{x} N_{Gr,x}^{\frac{1}{4}} f(N_{Pr})$$

Integrando entre  $x = 0$  y  $x = L$  se calcula el coeficiente medio de transmisión del calor,

$$\bar{h} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K}{L} N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} f(N_{Pr}) \tag{38}$$

En forma adimensional las expresiones para el coeficiente de transmisión del calor son:

$$N_{Nu,x} = \frac{h_x x}{K} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} N_{Gr,x}^{\frac{1}{4}} f(N_{Pr}) \tag{39}$$

$$N_{Nu,L} = \frac{h \cdot L}{K} = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}} N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} f(N_{Pr}) \tag{40}$$

=====

### 1.1.- CONVECCIÓN LINEAL

En la actualidad, sólo para un número limitado de problemas, los más simples, al introducir determinadas suposiciones con el fin de simplificarlos, se ha logrado obtener soluciones analíticas para el sistema de ecuaciones diferenciales del intercambio de calor por convección. Dicha situación se explica por la gran complejidad de las ecuaciones o, en definitiva, por el carácter complejo y multilateral del contenido de los mismos procesos.

A causa de las limitadas posibilidades para llevar a cabo la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales aducidas anteriormente, el método intermedio de aproximación, que es en éste aspecto el Análisis dimensional, adquiere gran importancia en el estudio de los procesos de emisión calorífica, como auxiliar de la experimentación, que es quien dice la última

palabra.

A continuación resolveremos el problema de convección libre desde una placa vertical mediante el Análisis dimensional.

En general, el proceso a seguir conlleva dos aspectos bien diferentes, aunque interrelacionados, que hay que establecer previamente a la resolución algebraica del problema.

El primero consiste en saber a qué capítulo de la Física pertenece el fenómeno que queremos estudiar. Una vez concretado este punto las leyes fundamentales, sobre las que se funda la teoría de dicho capítulo, permiten establecer la base dimensional estricta que se ha de utilizar para la resolución del problema en cuestión.

El segundo aspecto se refiere a la elección de las variables que intervienen en el fenómeno. Dicha elección se encuentra íntimamente ligada a la naturaleza física del fenómeno, expresado mediante las ecuaciones particulares que rigen y sus respectivas condiciones de contorno.

#### 1.1.- CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA VERTICAL. CASO GENERAL.

Se pretende calcular, mediante el Análisis dimensional, el coeficiente medio de transmisión del calor  $h$ .

Para resolver un problema por Análisis dimensional es preciso conocer las variables que intervienen en el fenómeno. En nuestro caso, el coeficiente de transmisión del calor se obtiene resolviendo las ecuaciones (24), (25) y (26), por tanto, dichas ecuaciones, añadiendo las condiciones de contorno, serán las que nos sirvan para saber cuáles son las variables independientes que deben intervenir.

Dicho coeficiente  $h$  depende de:  $L$  altura de la placa,  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_o$  diferencia entre la temperatura de la placa y la del fluido no perturbado,  $E_v = \rho g \beta$  empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura,  $c'$  calor

específico por unidad de volumen del fluido (relacionado con el calor específico por unidad de masa,  $c$ , por:  $c' = \rho \cdot c$ ),  $\mu$  viscosidad dinámica del fluido,  $\rho$  densidad del fluido y  $K$  conductividad térmica del mismo. Es por tanto:

$$h = f(L, \Delta\theta, E_v, c', \mu, \rho, K) \quad (41)$$

Resolvemos el problema por Análisis dimensional con las bases usual,  $(L, Q, T, \theta)$ , y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ . A continuación discriminamos ambas bases,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , y exponemos las nuevas soluciones, a las que se llega con su ayuda, comparando finalmente las que se obtienen con una u otra base.

#### 1.1.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL $(L, Q, T, \theta)$ .

El primer paso para la resolución del problema consistirá en conocer las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen.

La masa en esta base no es magnitud fundamental. Su dimensión se obtiene del siguiente modo:

$$[Q] = [W] \quad ; \quad [Q] = [W] = [f] \cdot [r] = [m] \cdot [a] \cdot [r]$$

$$[m] = \frac{[Q]}{[a] \cdot [r]} = \frac{Q}{L \cdot T^{-2} \cdot L} = L^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \quad (42)$$

La dimensión de la fuerza será:

$$[f] = [m] \cdot [a] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot L \cdot T^{-2} = L^{-1} \cdot Q \quad (43)$$

Así, las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema, en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , son:

$$\begin{aligned} [L] &= L & [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [\Delta\theta] &= \theta & [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \\ [E_v] &= [\rho g \beta] = L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c'] &= [\rho c] = L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (44)$$



Para obtener el número de monomios adimensionales e independientes de que consta la solución del problema, debemos hallar la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales de las magnitudes que intervienen en el fenómeno. Esta matriz viene dada por:

	L	$\Delta\theta$	$E_V$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
L	1	0	-4	-3	-3	-5	-1	-2
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1

(45)

El número de monomios adimensionales es la diferencia entre el número de magnitudes que intervienen en el problema y la característica de la matriz formada por los exponentes dimensionales de dichas magnitudes. La característica de la matriz es  $H = 4$ , así pues habrá  $i = N - H = 8 - 4 = 4$  monomios independientes. Podemos elegir arbitrariamente el valor de los exponentes dimensionales de cuatro magnitudes y, para conocer los de los restantes, deberemos resolver el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_L - 4 \epsilon_{E_V} - 3 \epsilon_{c'} - 3 \epsilon_{\mu} - 5 \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - 2 \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{E_V} + \epsilon_{c'} + \epsilon_{\mu} + \epsilon_{\rho} + \epsilon_K + \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{\mu} + 2 \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{\Delta\theta} - \epsilon_{E_V} - \epsilon_{c'} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0
 \end{aligned}$$

(46)

Para resolver el sistema de ecuaciones, elegimos como exponentes conocidos los de las magnitudes  $L, \rho, K, y h$ . De modo que, para el primer monomio, tomamos:  $\epsilon_L = 1$ ;  $\epsilon_{\rho} = 0$ ;  $\epsilon_K = 0$ ;  $\epsilon_h = 0$ , y, resolviendo el sistema de ecuaciones los valores de los restantes exponentes son:

$$\epsilon_{\Delta\theta} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{E_V} = 1 \quad ; \quad \epsilon_{c'} = -1 \quad ; \quad \epsilon_{\mu} = 0$$

con lo que el primer monomio resulta ser:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot L}{c'} = \frac{\rho g \beta \cdot L}{\rho c} = \frac{g \beta L}{c}$$

Para el segundo monomio hacemos:  $\epsilon_L = 0$  ;  $\epsilon_\rho = 1$  ;  $\epsilon_K = 0$  y  $\epsilon_h = 0$  , y los restantes exponentes toman los siguientes valores:

$$\epsilon_{\Delta\theta} = 1 ; \epsilon_{E_v} = -2 ; \epsilon_{c'} = 3 ; \epsilon_\mu = -2$$

siendo entonces el segundo monomio:

$$\Pi_2 = \frac{\rho \cdot c'^3 \cdot \Delta\theta}{\mu^2 \cdot E_v^2} = \frac{\rho \cdot \rho^3 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta}{\mu^2 \cdot (\rho g \beta)^2} = \frac{\rho^2 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta}{\mu^2 \cdot (g \beta)^2}$$

Obtenemos el tercer monomio haciendo:  $\epsilon_L = 0$  ;  $\epsilon_\rho = 0$  ;  $\epsilon_K = 0$  ,  $\epsilon_h = 1$  , entonces:

$$\epsilon_{\Delta\theta} = -1 ; \epsilon_{E_v} = 1 ; \epsilon_{c'} = -3 ; \epsilon_\mu = 1$$

resultando:

$$\Pi_3 = \frac{\mu \cdot h \cdot E_v}{c'^3 \cdot \Delta\theta} = \frac{\mu \cdot h \cdot \rho g \beta}{\rho^3 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta} = \frac{\mu \cdot h \cdot g \beta}{\rho^3 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta}$$

Por último, el cuarto monomio se obtiene dando a los cuatro exponentes electivos los valores:  $\epsilon_L = 0$  ;  $\epsilon_\rho = 0$  ;  $\epsilon_K = 1$  y  $\epsilon_h = 0$  , siendo los restantes exponentes:

$$\epsilon_{\Delta\theta} = -1 ; \epsilon_{E_v} = 2 ; \epsilon_{c'} = -4 ; \epsilon_\mu = 1$$

de modo que el cuarto monomio es:

$$\Pi_4 = \frac{\mu \cdot K \cdot E_v^2}{c'^4 \cdot \Delta\theta} = \frac{\mu \cdot K \cdot (\rho g \beta)^2}{\rho^4 \cdot c^4 \cdot \Delta\theta} = \frac{\mu \cdot K \cdot (g \beta)^2}{\rho^2 \cdot c^4 \cdot \Delta\theta}$$

Como toda combinación lineal de monomios adimensionales e independientes es otro monomio adimensional independiente, podemos combinar los monomios del siguiente modo, obteniendo cuatro nuevos monomios independientes:

$$\Pi_1 = \frac{g \beta L}{c}$$

$$\Pi'_2 = \Pi_1^3 \cdot \Pi_2 = \frac{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta \theta \cdot L^3}{\mu} = N_{Gr,L}$$

$$\Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4^{-1} = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu,L}$$

$$\Pi'_4 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_4^{-1} = \frac{\mu \cdot c}{K} = N_{Pr}$$

La solución del problema la podemos expresar como una función de los nuevos monomios  $\Pi_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \Pi'_4$ , en lugar de ser una función de los primitivos  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ , ya que  $\Pi'_2, \Pi'_3$  y  $\Pi'_4$  son combinación de  $\Pi_2, \Pi_3$  y  $\Pi_4$ , respectivamente, con algunos de los anteriores. Será pues:

$$F(\Pi_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \Pi'_4) = 0,$$

$$F\left(\frac{g\beta L}{c}, N_{Gr,L}, N_{Nu,L}, N_{Pr}\right) = 0 \quad (47)$$

Como el coeficiente de transmisión del calor, h, incógnita del problema, sólo se encuentra presente en el  $N_{Nu,L}$ , está indicado, por consiguiente, presentar la solución despejando  $N_{Nu,L}$ . Será pues:

$$N_{Nu,L} = F_1\left(N_{Gr,L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c}\right) \quad (48)$$

en donde aparece una función indeterminada de tres monomios independientes.

### 1.1.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

La elección de las magnitudes físicas que componen la lista de variables depende, en cada caso, del fenómeno particular que se pretenda estudiar, no de la base dimensional que se utilice para resolver el problema en cuestión. Así pues, para el problema de convección libre en una placa vertical, la lista de variables que intervienen en el fenómeno quedó especificada en 1.1.1.

La resolución del problema con una base u otra, lleva consigo el que las magnitudes, en general, varíen de dimensiones.

En el apartado anterior la masa no era magnitud fundamental y su dimensión venía dada por

$$[ m ] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^2$$

Como ahora utilizamos la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M), la masa es magnitud fundamental, de modo que:

$$[ m ] = M$$

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema en la base ampliada (L,Q,T,θ,M) son:

$$\begin{aligned}
 [ L ] &= L & ; & \quad [ \mu ] = L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\
 [ \Delta \theta ] &= \theta & ; & \quad [ \rho ] = L^{-3} \cdot M \\
 [ E_v ] = [ \rho g \beta ] &= L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M & ; & \quad [ K ] = L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [ c' ] = [ \rho c ] &= L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [ h ] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Podemos construir, a partir de aquí, la matriz formada por los exponentes dimensionales de cada una de las magnitudes:

	L	Δθ	E <sub>v</sub>	c'	μ	ρ	K	h
L	1	0	-2	-3	-1	-3	-1	-2
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
θ	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	1	0	0

Despejando en el sistema:

La característica de la matriz es  $H = 5$  ; habrá  $i = N - H = 8 - 5 = 3$  monomios adimensionales. Podemos elegir arbitrariamente el valor de los exponentes dimensionales de tres magnitudes, y, para conocer los de las restantes, deberemos resolver el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_L - 2 \epsilon_{E_V} - 3 \epsilon_{c'} - \epsilon_{\mu} - 3 \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - 2 \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{c'} + \epsilon_K + \epsilon_h &= 0 \\
 - 2 \epsilon_{E_V} - \epsilon_{\mu} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{\Delta\theta} - \epsilon_{E_V} - \epsilon_{c'} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{E_V} + \epsilon_{\mu} + \epsilon_{\rho} &= 0
 \end{aligned} \tag{51}$$

Podemos dar valores arbitrarios a 3 de ellos, por ejemplo,  $\epsilon_{c'}$ ,  $\epsilon_{\rho}$ ,  $\epsilon_h$ . El resto se obtiene del sistema de ecuaciones. Para el primer monomio tomamos,  $\epsilon_{c'} = 1$  ;  $\epsilon_{\rho} = 0$  ;  $\epsilon_h = 0$ , de donde, resolviendo el sistema, resulta:

$$\epsilon_L = 3 \quad ; \quad \epsilon_{\Delta\theta} = 1 \quad ; \quad \epsilon_{E_V} = 1 \quad ; \quad \epsilon_{\mu} = -1 \quad ; \quad \epsilon_K = -1$$

El monomio es, pues:

$$\Pi_1 = \frac{E_V \cdot \Delta\theta \cdot c' \cdot L^3}{\mu \cdot K} = \frac{\rho g \beta \cdot \Delta\theta \cdot \rho c \cdot L^3}{\mu \cdot K} = \frac{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta\theta \cdot c \cdot L^3}{\mu \cdot K}$$

Para el segundo monomio hacemos,  $\epsilon_{c'} = 0$  ;  $\epsilon_{\rho} = 1$  ;  $\epsilon_h = 0$ , de donde:

$$\epsilon_L = 3 \quad ; \quad \epsilon_{\Delta\theta} = 1 \quad ; \quad \epsilon_{E_V} = 1 \quad ; \quad \epsilon_{\mu} = -2 \quad ; \quad \epsilon_K = 0$$

Con estos exponentes, el monomio resulta:

$$\Pi_2 = \frac{E_V \cdot \Delta\theta \cdot \rho \cdot L^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta\theta \cdot L^3}{\mu^2} = N_{Gr, L}$$

El tercer monomio se obtendrá tomando:  $\epsilon_{c'} = 0$  ;  $\epsilon_{\rho} = 0$  ;  $\epsilon_h = 1$ .

Despejando en el sistema:

$$\epsilon_L = 1 \quad ; \quad \epsilon_{\Delta\theta} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{E_V} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{\mu} = 0 \quad ; \quad \epsilon_K = -1$$

Siendo entonces:

$$\Pi_3 = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu, L}$$

En lugar del monomio  $\Pi_1$ , consideramos la combinación:  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1}$ , resultando:

$$\Pi'_1 = \frac{\mu \cdot C}{K} = N_{Pr}$$

La solución del problema será una función de los monomios  $\Pi'_1$ ,  $\Pi_2$ , y  $\Pi_3$ :

$$F(\Pi'_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0, \text{ o sea,}$$

$$F(N_{Pr}, N_{Gr,L}, N_{Nu,L}) = 0 \quad (52)$$

Como la incógnita es el coeficiente de transmisión del calor  $h$ , que está incluida en el  $N_{Nu,L}$ , interesa expresar la solución despejando el  $N_{Nu,L}$ . Será pues:

$$N_{Nu,L} = F_2(N_{Gr,L}, N_{Pr}) \quad (53)$$

en donde aparece una función indeterminada de dos monomios independientes.

Si comparamos las soluciones (48) y (53) obtenidas utilizando la base usual tetradimensional y la base ampliada respectivamente, la única diferencia, entre una y otra, estriba en que la función indeterminada  $F_1$  es más complicada que la  $F_2$ , ya que posee un monomio más en su argumento. Por tanto, podemos decir que la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  nos ofrece una solución más precisa que la hallada con la base usual tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ .

### 1.1.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

En este apartado aplicaremos el método de la discriminación de las dimensiones del espacio. Dicho método consiste, en nuestro caso particular, en reemplazar la base  $(L, Q, T, \theta)$  por la que se obtiene considerando por separado tres componentes  $L_x, L_y, L_z$  de la longitud, que, añadiendo el calor  $Q$ , la temperatura  $\theta$  y el tiempo  $t$ , dan una base de seis dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

problema en la base



Para ello consideramos un sistema de ejes coordenados en la placa, tomando el origen en el borde de ella. El eje X vertical, el Y normal a la placa, y el Z perpendicular a ambos, como indica la fig.nº II.1 .

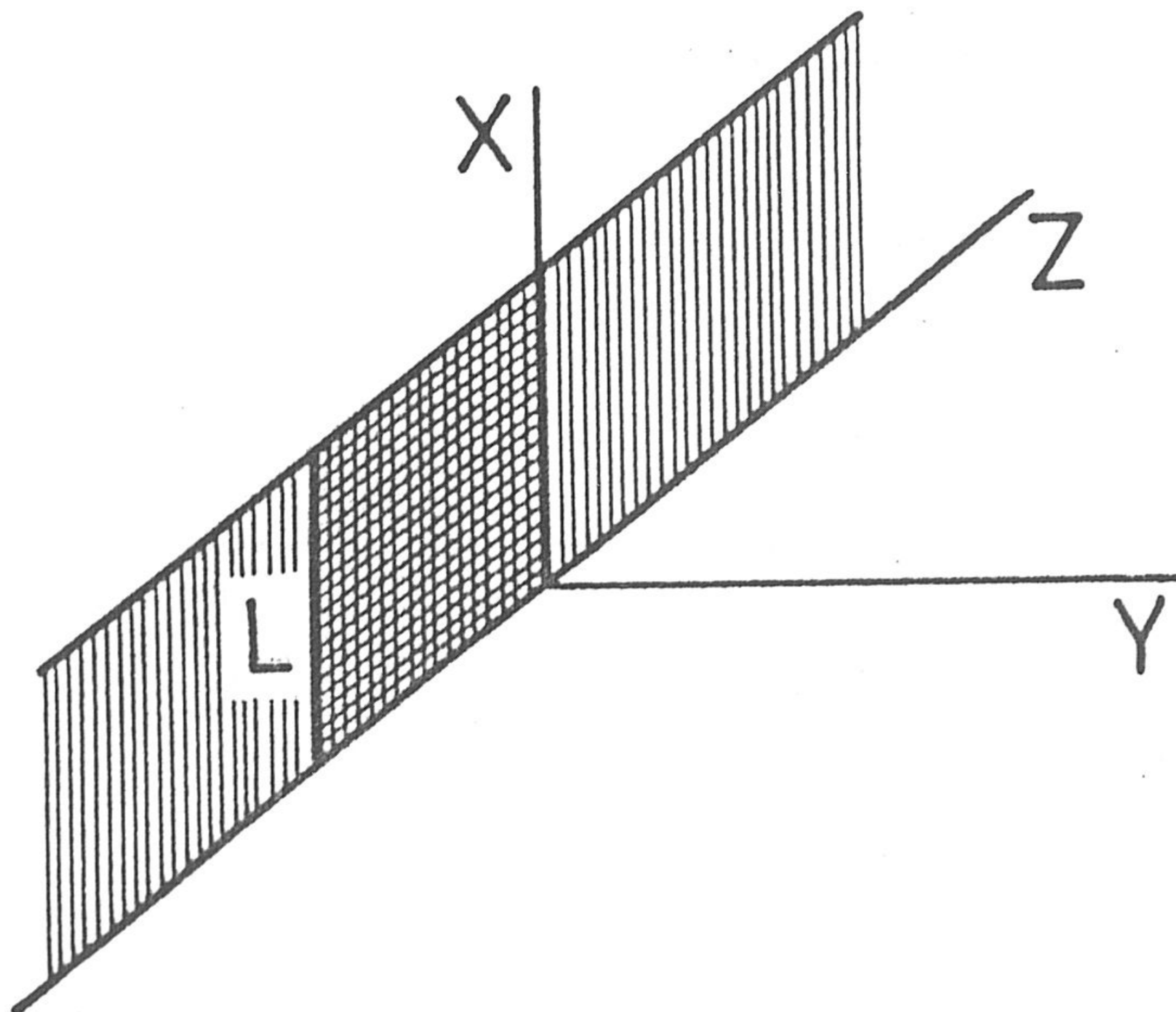


fig.II.1

En esta nueva base, en general, las fórmulas dimensionales de las magnitudes variarán respecto de las obtenidas con las dos bases anteriormente utilizadas.

La masa en esta base no es magnitud fundamental. Su dimensión, ya que el movimiento es vertical, es la siguiente:

$$[Q] = [W] \quad ; \quad [Q] = [W] = [f] \cdot [r] = [m] \cdot [a] \cdot [r]$$

$$[m] = \frac{[Q]}{[a] \cdot [r]} = \frac{Q}{L_x \cdot T^{-2} \cdot L_x} = L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \quad (54)$$

La dimensión de la fuerza es:

$$[f] = [m] \cdot [a] = L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot L_x \cdot T^{-2} = L_x^{-1} \cdot Q \quad (55)$$

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema en la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ) son:

$$\begin{aligned}
 [L] &= L_x & ; & \quad [\mu] = L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & \quad [\rho] = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \\
 [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [K] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las magnitudes anteriores es:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	-2	-1	-3	-3	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	-1	1	-1	1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1

La tercera y cuarta fila son proporcionales, por tanto, no existe ningún menor de orden seis distinto de cero.

La característica de la matriz de los exponentes dimensionales es  $H = 5$ , luego hay:  $i = N - H = 8 - 5 = 3$  monomios independientes, los cuales se obtendrán resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_L - 2 \epsilon_{E_v} - \epsilon_{c'} - 3 \epsilon_{\mu} - 3 \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 - \epsilon_{E_v} - \epsilon_{c'} + \epsilon_{\mu} - \epsilon_{\rho} + \epsilon_K &= 0 \\
 \epsilon_{E_v} + \epsilon_{c'} + \epsilon_{\mu} + \epsilon_{\rho} + \epsilon_K + \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{\mu} + 2 \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{\Delta\theta} - \epsilon_{E_v} - \epsilon_{c'} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Elegimos arbitrariamente los valores de los exponentes de las variables anteriores  $c', \mu$  y  $\rho$ . Tomamos pues:



$\epsilon_{c'} = 1$  ;  $\epsilon_{\mu} = 0$  ;  $\epsilon_{\rho} = 0$  ; los restantes exponentes son:

$\epsilon_L = -1$  ;  $\epsilon_{\Delta\theta} = 0$  ;  $\epsilon_{E_v} = -1$  ;  $\epsilon_K = 0$  ;  $\epsilon_h = 0$

y el primer monomio resulta:

$$\Pi_1 = \frac{c'}{E_v \cdot L} = \frac{\rho c}{\rho g \beta \cdot L} = \frac{c}{g \beta L}$$

Considerando ahora  $\epsilon_{c'} = 0$  ;  $\epsilon_{\mu} = 1$  ;  $\epsilon_{\rho} = 0$  , se tiene para los restantes exponentes:

$\epsilon_L = 0$  ;  $\epsilon_{\Delta\theta} = -1$  ;  $\epsilon_{E_v} = -2$  ;  $\epsilon_K = -3$  ;  $\epsilon_h = 4$

de donde el segundo monomio toma la forma:

$$\Pi_2 = \frac{\mu \cdot h^4}{K^3 \cdot E_v^2 \cdot \Delta\theta} = \frac{\mu \cdot h^4}{K^3 \cdot (\rho g \beta)^2 \cdot \Delta\theta}$$

Y el tercer monomio se obtiene haciendo  $\epsilon_{c'} = 0$  ;  $\epsilon_{\mu} = 0$  ;  $\epsilon_{\rho} = 1$ , con lo cual:

$\epsilon_L = -1$  ;  $\epsilon_{\Delta\theta} = -1$  ;  $\epsilon_{E_v} = -3$  ;  $\epsilon_K = -2$  ;  $\epsilon_h = 4$

por lo que el tercer monomio es:

$$\Pi_3 = \frac{\rho \cdot h^4}{K^2 \cdot E_v^3 \cdot \Delta\theta \cdot L} = \frac{\rho \cdot h^4}{K^2 \cdot (\rho g \beta)^3 \cdot \Delta\theta \cdot L} = \frac{h^4}{K^2 \cdot \rho^2 \cdot (g \beta)^3 \cdot \Delta\theta \cdot L}$$

Realicemos ahora una transformación útil de los monomios obtenidos directamente.

$$\Pi'_1 = \Pi_1^{-1} = \frac{g \beta L}{c}$$

$$\Pi'_2 = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-1} = \frac{\mu \cdot c}{K} = N_{Pr}$$

$$\Pi'_3 = \Pi_2^2 \cdot \Pi_3^{-1} = \left( \frac{h \cdot L}{K} \right)^4 \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta\theta \cdot L^3} \right) = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}$$

Obsérvese que la relación entre los números de Nusselt y Grashof para dar el nuevo monomio  $\Pi'_3$  no procede de los productos u operaciones realizadas anteriormente, cuya única finalidad es mostrar más claramente cuál es la

solución hallada. La relación  $N_{Nu,L}^{-4} \cdot N_{Gr,L}$  resulta directamente del método del Análisis dimensional de Palacios con dimensión nula, mientras que  $N_{Nu,L}$  y  $N_{Gr,L}$  por separado no la tienen. En efecto, las dimensiones de  $N_{Nu,L}$  y  $N_{Gr,L}$ , en la base que utilizamos en este apartado son:

$$N_{Nu,L} = \left[ \frac{h \cdot L}{K} \right] = \frac{L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \cdot L_x}{L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}} = L_x \cdot L_y^{-1}$$

$$N_{Gr,L} = \left[ \frac{g \beta \Delta \theta \cdot L^3}{\nu^2} \right] = L_x \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot \theta \cdot L_x^3 \cdot \left( \frac{L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T}{L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2} \right)^{-2} = L_x^4 \cdot L_y^{-4}$$

Los tres nuevos monomios son, pues:

$$\Pi'_1 = \frac{g \beta L}{c} \quad ; \quad \Pi'_2 = N_{Pr} \quad ; \quad \Pi'_3 = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}$$

La función solución buscada contiene en su argumento estos tres monomios adimensionales:

$$F(\Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3) = 0 \quad ; \quad F\left(\frac{g \beta L}{c}, N_{Pr}, N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}\right) = 0 \quad (59)$$

o bien, despejando el  $N_{Nu,L}$ , que incluye el coeficiente de transmisión del calor,

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{1/4} \cdot F_3\left(N_{Pr}, \frac{g \beta L}{c}\right) \quad (60)$$

La solución obtenida con la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , (60), es más precisa que la (48) hallada con la misma base sin discriminar  $(L, Q, T, \theta)$ , ya que la función indeterminada  $F_3$  contiene en su argumento un monomio menos que la  $F_1$ .

#### 1.1.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .

Puede observarse que tanto la ampliación de la base como la discriminación dan soluciones, (53) y (60), que son más precisas que la clásica (48). Pero, además, la reducción de la solución ocurre por la desaparición

de monomios distintos en cada caso:  $\frac{g\beta L}{c}$  en el primero, y  $N_{Gr,L}$ , que se une al  $N_{Nu,L}$  para formar un sólo monomio, en el segundo. Dado, pues, que ambas reducciones son independientes, resulta apropiado utilizar la nueva base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M) también con la discriminación de las dimensiones del espacio, es decir, la base ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Ahora, la masa forma parte de la base dimensional, por lo que es magnitud fundamental, a diferencia del apartado anterior donde era magnitud secundaria. La dimensión de la masa será pues:

$$[m] = M, \text{ y la de la fuerza } [f] = L_x \cdot T^{-2} \cdot M \quad (61)$$

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que componen la lista de variables que intervienen en el problema son las siguientes:

$$\begin{aligned} [L] &= L_x & ; & \quad [\mu] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & \quad [\rho] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \\ [E_v] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M & ; & \quad [K] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (62)$$

cuyos exponentes dimensionales forman la matriz que determina el número de monomios independientes de que consta la solución del problema.

El número de estos monomios viene dado por  $i = N-H$ , siendo H la característica de la matriz y N el número de variables que intervienen en el fenómeno. La matriz es la siguiente:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	c'	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	-1	1	-1	1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	1	0	0

La característica de la matriz es  $H = 6$  , luego hay  $i = N-H = 8-6 = 2$  monomios independientes.

El sistema de ecuaciones lineales y homogéneas formado por los exponentes dimensionales de las variables es:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_L - \epsilon_{c'} - \epsilon_{\mu} - \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 - \epsilon_{E_V} - \epsilon_{c'} + \epsilon_{\mu} - \epsilon_{\rho} + \epsilon_K &= 0 \\
 - \epsilon_{E_V} - \epsilon_{c'} - \epsilon_{\mu} - \epsilon_{\rho} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{c'} + \epsilon_K + \epsilon_h &= 0 \\
 - 2 \epsilon_{E_V} - \epsilon_{\mu} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{\Delta\theta} - \epsilon_{E_V} - \epsilon_{c'} - \epsilon_K - \epsilon_h &= 0 \\
 \epsilon_{E_V} + \epsilon_{\mu} + \epsilon_{\rho} &= 0
 \end{aligned} \tag{63}$$

Podemos dar valores arbitrarios a dos de ellos, por ejemplo  $\epsilon_{\mu}$  y  $\epsilon_h$ . El valor de los restantes exponentes se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones.

Considerando  $\epsilon_{\mu} = 1$  y  $\epsilon_h = 0$  , los demás exponentes toman los siguientes valores:

$$\epsilon_L = 0 \quad ; \quad \epsilon_{\Delta\theta} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{E_V} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{c'} = 1 \quad ; \quad \epsilon_{\rho} = -1 \quad ; \quad \epsilon_K = -1$$

de donde el primer monomio viene dado por:

$$\Pi_1 = \frac{\mu \cdot c'}{\rho \cdot K} = \frac{\mu \cdot c}{K} = N_{Pr}$$

Tomando  $\epsilon_{\mu} = 0$  y  $\epsilon_h = 4$  y resolviendo el sistema se obtiene:

$$\epsilon_L = 1 \quad ; \quad \epsilon_{\Delta\theta} = -1 \quad ; \quad \epsilon_{E_V} = -1 \quad ; \quad \epsilon_{c'} = -2 \quad ; \quad \epsilon_{\rho} = 1 \quad ; \quad \epsilon_K = -2$$

y el segundo monomio es:

$$\Pi_2 = \frac{\rho \cdot h^4 \cdot L}{\Delta\theta \cdot E_V \cdot c'^2 \cdot K^2} = \frac{\rho \cdot h^4 \cdot L}{\Delta\theta \cdot (\rho g \beta) \cdot (\rho c)^2 \cdot K^2} = \frac{h^4 \cdot L}{\Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot (g \beta) \cdot c^2 \cdot K^2}$$

Podemos sustituir  $\Pi_2$  por una combinación de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , obteniendo un nuevo monomio adimensional  $\Pi'_2$ , del siguiente modo:

$$\Pi'_2 = \Pi_1^2 \cdot \Pi_2 = \frac{\mu^2 \cdot c'^2}{\rho^2 \cdot K^2} \cdot \frac{\rho \cdot h^4 \cdot L}{\Delta\theta \cdot E_v \cdot c'^2 \cdot K^2} = \left( \frac{h \cdot L}{K} \right)^4 \cdot \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot L^3}$$

$$\Pi'_2 = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}$$

La función solución contiene en su argumento los monomios  $\Pi_1$  y  $\Pi'_2$ , así pues:

$$F(\Pi_1, \Pi'_2) = 0 \quad ; \quad F\left(N_{Pr}, N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}\right) = 0 \quad (64)$$

de donde, despejando el  $N_{Nu,L}$ :

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F(N_{Pr}) \quad (65)$$

que es más precisa que las soluciones (48), (53) y (60) anteriormente obtenidas.

#### 1.1.5.- CARACTÉR VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

En A.4.5 se pone de manifiesto que entre la dimensión de una magnitud y sus exponentes dimensionales respecto a una base determinada, existe la misma relación formal que entre un vector y sus componentes respecto a un sistema de ejes coordenados.

En el problema de convección libre, las magnitudes que intervienen tienen las siguientes fórmulas dimensionales en la base (L,Q,T, $\theta$ ), obtenidas en el apartado 2.1.1 :

$$\begin{aligned} [L] &= L & ; & & [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \\ [E_v] &= L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & & [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c'] &= L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & & [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned}$$

En la base ampliada (L,Q,T,θ,M), en general cambiarán las dimensiones de las variables, siendo éstas, según vimos en el apartado 2.1.2 :

$$\begin{aligned}
 [L]' &= L & ; & & [\mu]' &= L^{-1}.T^{-1}.M \\
 [\Delta\theta]' &= \theta & ; & & [\rho]' &= L^{-3}.M \\
 [E_v]' &= L^{-2}.T^{-2}.\theta^{-1}.M & ; & & [K]' &= L^{-1}.Q.T^{-1}.\theta^{-1} \\
 [c']' &= L^{-3}.Q.\theta^{-1} & ; & & [h]' &= L^{-2}.Q.T^{-1}.\theta^{-1}
 \end{aligned}$$

Al realizar el cambio de base, observamos que las únicas variables que han modificado su dimensión son: el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura  $E_v$ , la viscosidad  $\mu$ , y la densidad  $\rho$ .

En la base (L,Q,T,θ) son:

$$\begin{aligned}
 [E_v] &= L^{-4}.Q.\theta^{-1} \\
 [\mu] &= L^{-3}.Q.T \\
 [\rho] &= L^{-5}.Q.T^2
 \end{aligned} \tag{66}$$

y en la base (L,Q,T,θ,M):

$$\begin{aligned}
 [E_v]' &= L^{-2}.T^{-2}.\theta^{-1}.M \\
 [\mu]' &= L^{-1}.T^{-1}.M \\
 [\rho]' &= L^{-3}.M
 \end{aligned} \tag{67}$$

La comparación entre las fórmulas dimensionales (66) y (67), sugiere la representación, de la base (L,Q,T,θ) como un subespacio vectorial de la base (L,Q,T,θ,M), o, dicho de otro modo, que los vectores dimensionales (66), representados en el espacio (L,Q,T,θ), son las proyecciones de los vectores (67), representados en la base pentadimensional (L,Q,T,θ,M), sobre el subespacio tetradimensional (L,Q,T,θ).

Para poner de manifiesto explícitamente lo que implica la reducción del espacio pentadimensional al subespacio tetradimensional, podemos hacer un cambio de base (manteniendo la multiplicidad de la base, por supuesto),

de manera que la diferencia entre las fórmulas dimensionales en ambas bases exista solamente en uno de los exponentes dimensionales, no en todos, como sucede en los sistemas (66) y (67). La ampliación de la base realizada, ha consistido en añadir la dimensión fundamental  $M$ , lo cual nos ha conducido a que el monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ , que era adimensional en la base tetradimensional, en nuestra base pentadimensional tenga dimensión:

$$\left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Llamamos  $N_P$  a este monomio y  $P$  a su dimensión, que tomamos ahora en la base dimensional. Así pues, en lugar de ampliar  $(L, Q, T, \theta)$  pasando a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , pasamos a  $(L, Q, T, \theta, P)$ .

El problema consiste en realizar un cambio de base, de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, P)$ , siendo:

$$P = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (68)$$

Trataremos de averiguar las fórmulas dimensionales de  $E_V$ ,  $\mu$  y  $\rho$ , en esta nueva base  $(L, Q, T, \theta, P)$ . Conocemos las dimensiones de esas magnitudes en la antigua base  $(L, Q, T, \theta, M)$ , así como el cambio específico:

$$P = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Por consiguiente:

$$[M] = L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P \quad (69)$$

Sustituyendo el cambio de base (69) en (67), se obtienen las fórmulas dimensionales en la base  $(L, Q, T, \theta, P)$  que designamos por  $[ ]''$ :

$$[E_V]'' = L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot [M] = L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P = L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P$$

$$[\mu]'' = L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P = L^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P \quad (70)$$

$$[\rho]'' = L^{-3} \cdot [M] = L^{-3} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P = L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P$$

Si comparamos ahora (70) con (66), resulta:

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= [E_v] \cdot P \\ [\mu]'' &= [\mu] \cdot P \\ [\rho]'' &= [\rho] \cdot P \end{aligned} \quad (71)$$

de donde podemos decir que los vectores dimensionales  $[E_v]$ ,  $[\mu]$ ,  $[\rho]$  son las proyecciones de los vectores  $[E_v]''$ ,  $[\mu]''$ ,  $[\rho]''$  sobre el subespacio de cuatro dimensiones (L,Q,T, $\theta$ ).

El significado físico de lo que antecede es el siguiente: la teoría por nosotros desarrollada nos indica que el problema de convección, más aún, el tipo o capítulo de fenómenos en los cuales no existe conversión de calor en trabajo o viceversa, es propiamente, físicamente, pentadimensional, siendo por lo tanto el uso de la base usual tetradimensional una "mutilación", (según la denominación de Palacios), que reduce la información en los problemas, siendo por consiguiente incorrecta.

No podemos nosotros representar el paso de 5 a 4 dimensiones con tanta facilidad y claridad como se hace en el caso de pasar de 3 a 2, proyectando sobre un plano, por la dificultad obvia de imaginar espacios de 4 y 5 dimensiones. Lo expondremos, pues, en tres fases, en las que, a las variables L y P, se añaden sucesivamente Q, T,  $\theta$ . La representación gráfica completa, se puede imaginar como una combinación de ellas, fig.II.2, fig.II.3 y fig.II.4.

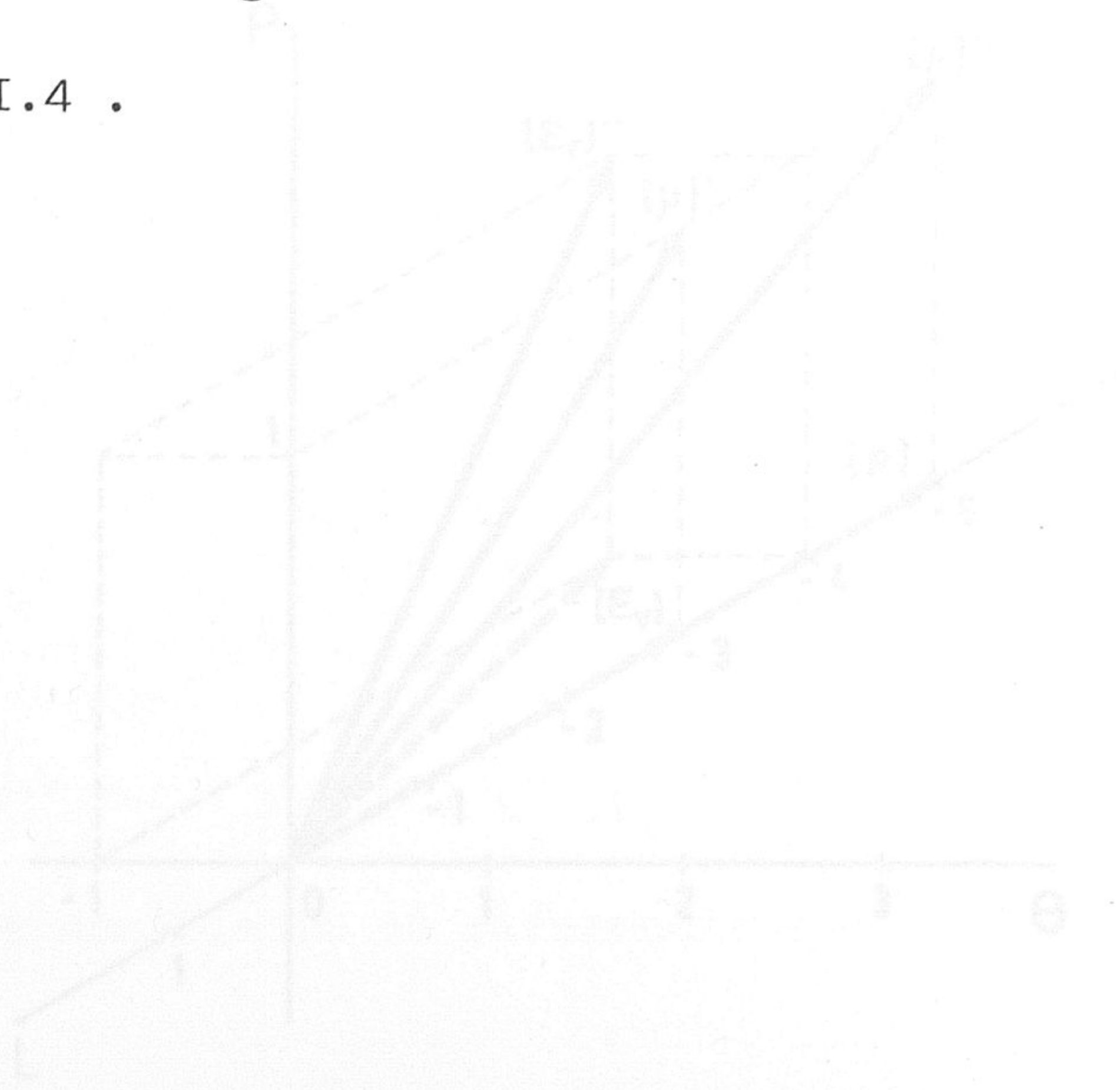


fig.II.4



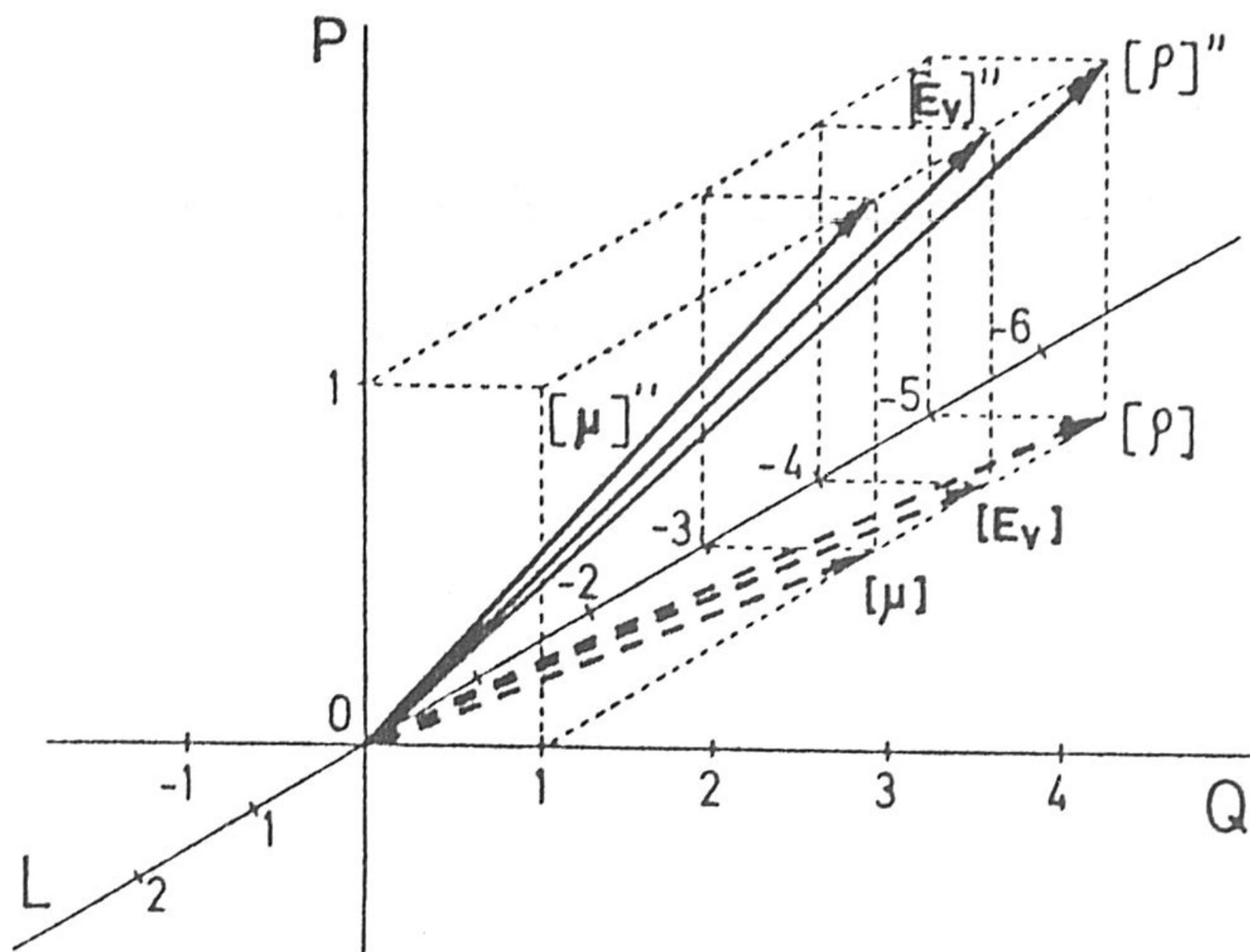


fig.II.2

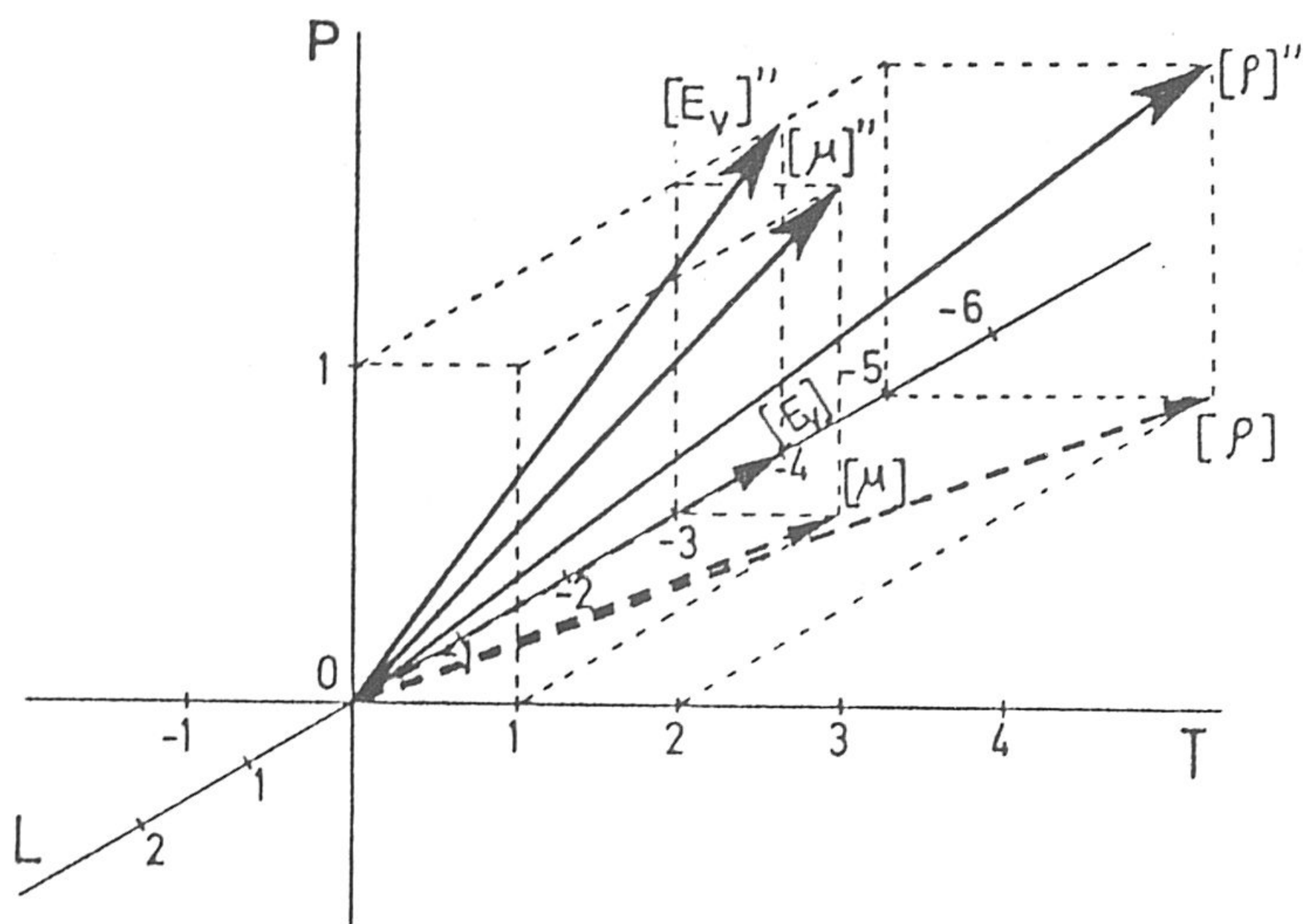


fig.II.3

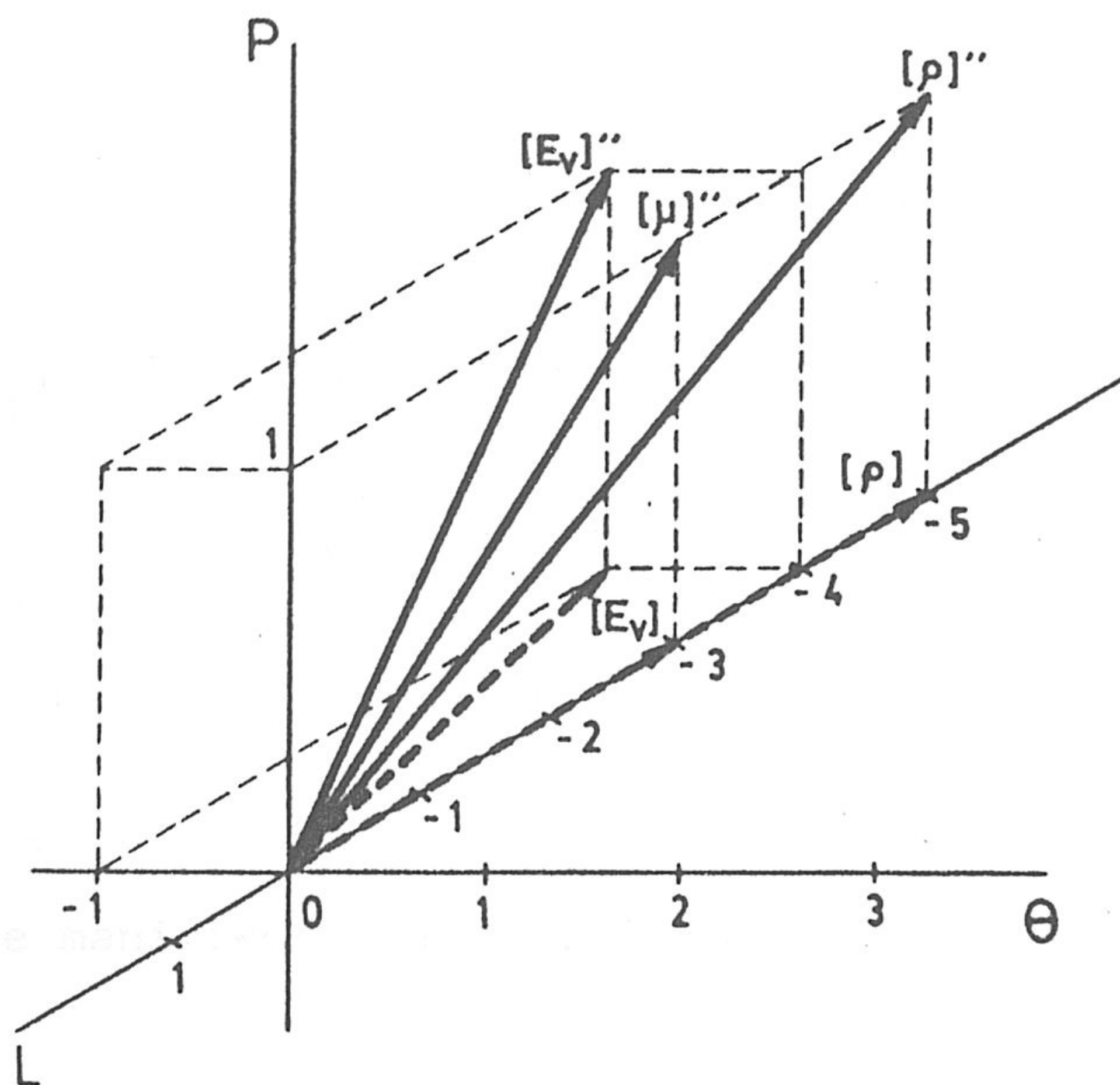


fig.II.4

CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE DISCRIMINADA.

La discriminación de las dimensiones del espacio, esto es, sustitución de una dimensión  $L$  por tres  $L_x, L_y, L_z$ , es una ampliación de la base dimensional independiente de la que hemos desarrollado anteriormente. Por consiguiente ambas se superponen dando lugar a la base discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , de 7 dimensiones, que dará el máximo de información en los problemas a los que se aplique. La no realización de la ampliación por nosotros propuesta, supone una reducción a la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  de sólo 6 dimensiones.

En la analogía vectorial, equivale a sustituir los vectores de las dimensiones de las magnitudes que intervienen en el problema en un espacio de 7 dimensiones, por sus proyecciones en un subespacio de 6 dimensiones, análogamente a lo realizado con las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

Las únicas magnitudes que experimentan cambio dimensional al escribirlas en una base y en otra, comparando (56) y (62), son: el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura  $E_v$ , la viscosidad  $\mu$ , y la densidad  $\rho$ . Las dimensiones de dichas magnitudes en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  son, según (56):

$$\begin{aligned} [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\ [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (72)$$

y en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  son, según (62):

$$\begin{aligned} [E_v]' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \\ [\mu]' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [\rho]' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \end{aligned} \quad (73)$$

Para poner de manifiesto la diferencia que supone el uso de una u otra

base, podemos realizar un cambio de base en la base de 7 dimensiones, de manera que la diferencia entre las fórmulas dimensionales de las magnitudes en ambas bases exista sólo en uno de los exponentes dimensionales, no en todos, como sucede en los sistemas (72) y (73).

La ampliación de la base realizada ha consistido, además de la debida a la discriminación espacial, en añadir la dimensión fundamental M, lo cual nos conduce a que el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$ , que era adimensional en la base de 6 dimensiones, en la base de 7 dimensiones tenga la dimensión siguiente:

$$\left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Podemos ahora realizar un cambio de base, pasando de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , tomando como nueva dimensión básica,  $P_x$ , la dimensión de este monomio:

$$P_x = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (74)$$

En la nueva base dimensional  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$  la masa ya no será magnitud fundamental. Su dimensión es ahora:

$$[M] = L_x^2 \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \quad (75)$$

Sustituyendo (75) en (73) se obtienen las dimensiones de las magnitudes en la nueva base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , que notaremos por  $[ ]''$ :

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot [M] = L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = \\ &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P_x \\ [\mu]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = \\ &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \cdot P_x \\ [\rho]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \end{aligned} \quad (76)$$

De la comparación de las dimensiones (76) y (72) se obtiene:

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= [E_v] \cdot P_x \\ [\mu]'' &= [\mu] \cdot P_x \\ [\rho]'' &= [\rho] \cdot P_x \end{aligned} \tag{77}$$

quedando de manifiesto que la diferencia entre las nuevas dimensiones y las antiguas se puede referir a una sola dimensión nueva  $P_x$ , permaneciendo invariables los restantes exponentes dimensionales.

La reducción de la base de 7 dimensiones a 6 se reduce, pues, a anular la dimensión  $P_x$ .

Otra cuestión importante a dilucidar es si el paso de la base con  $L$  a la base discriminada con  $L_x, L_y, L_z$ , que supone ampliar la multiplicidad en dos dimensiones, interfiere con la ampliación de la multiplicidad en una dimensión que nosotros establecemos, de modo que realmente no se obtenga ninguna ventaja, por quedar ambas ampliaciones interrelacionadas. Así puede parecer si se comparan las dimensiones de (72) con las de (73), ya que se modifican tanto los exponentes de  $L_x, L_y, L_z$ , como los de  $Q$  y  $M$ , e incluso de  $T$ . Sin embargo, al tomar en la base la dimensión  $P_x$ , se pone de manifiesto que es en una sólo variable  $N_p$  en la que recae el peso de la modificación que introduce nuestra ampliación de la base: en efecto, los exponentes dimensionales de  $L_x, L_y, L_z$  en (72) (base reducida) y (76) (base ampliada) son los mismos. Es pues cosa diferente e independiente la discriminación de las dimensiones del espacio respecto de nuestra ampliación, pudiendo utilizarse, pues, la una o la otra o ambas.

En la analogía entre dimensiones y vectores, el sistema (77) pone de manifiesto que  $[E_v], [\mu]$  y  $[\rho]$  son las proyecciones de  $[E_v]''$ ,  $[\mu]''$  y  $[\rho]''$  en el espacio de 6 dimensiones o subespacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

Como no podemos representar gráficamente el paso de 7 a 6 dimensiones con la facilidad y claridad con que se realiza al pasar de 3 a 2, proyectando sobre un plano, por la dificultad de imaginar espacios de más de 3 dimensiones, lo expondremos en 5 fases en que a las variables  $L_x$  y  $P_x$  se añaden sucesivamente  $L_y, L_z, Q, T, \theta$ . De esta manera, podemos imaginar cómo varían las magnitudes con cada una de las magnitudes de la base (fig.II.5, fig.II.6, fig.II.7, fig.II.8 y fig.II.9).

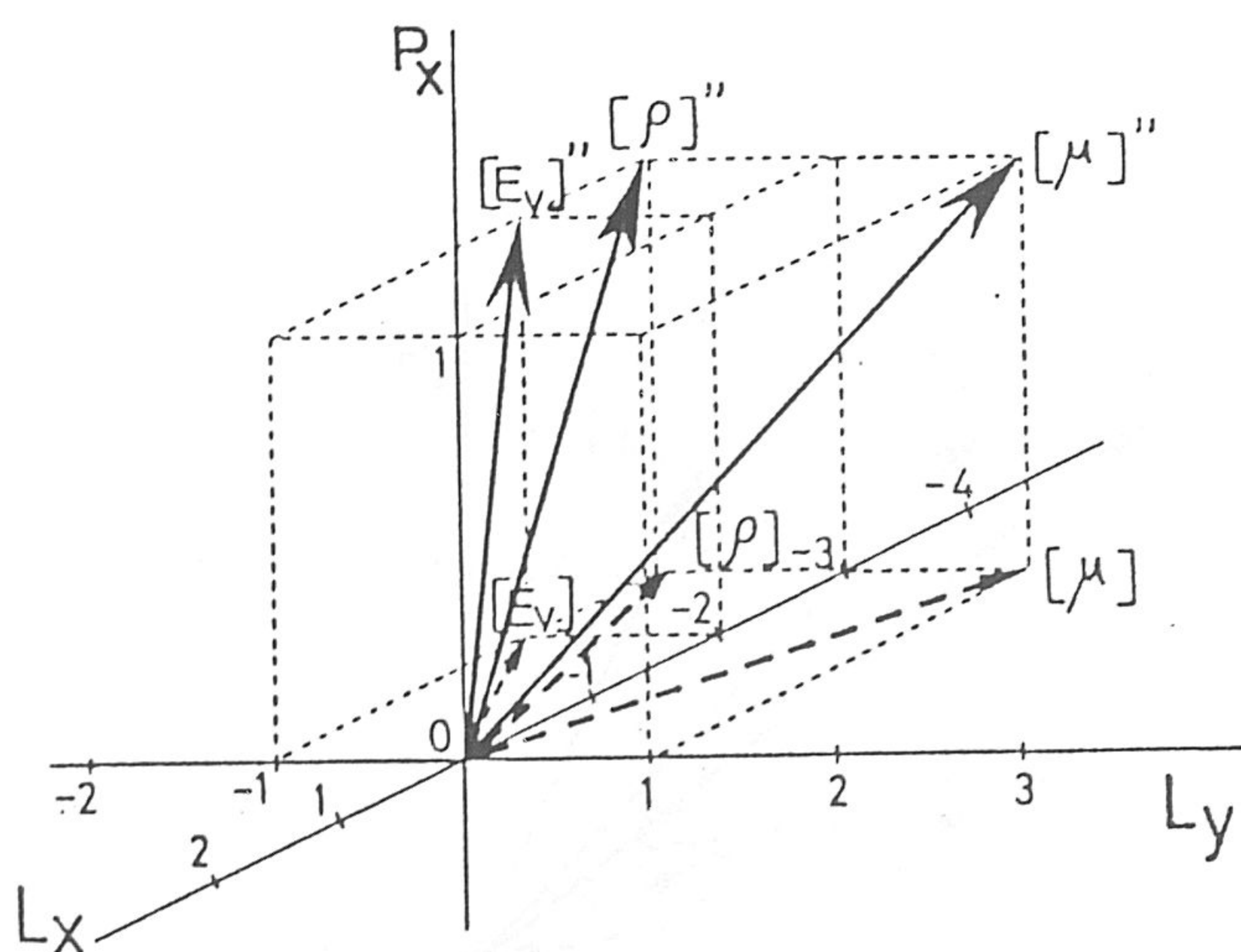


fig.II.5

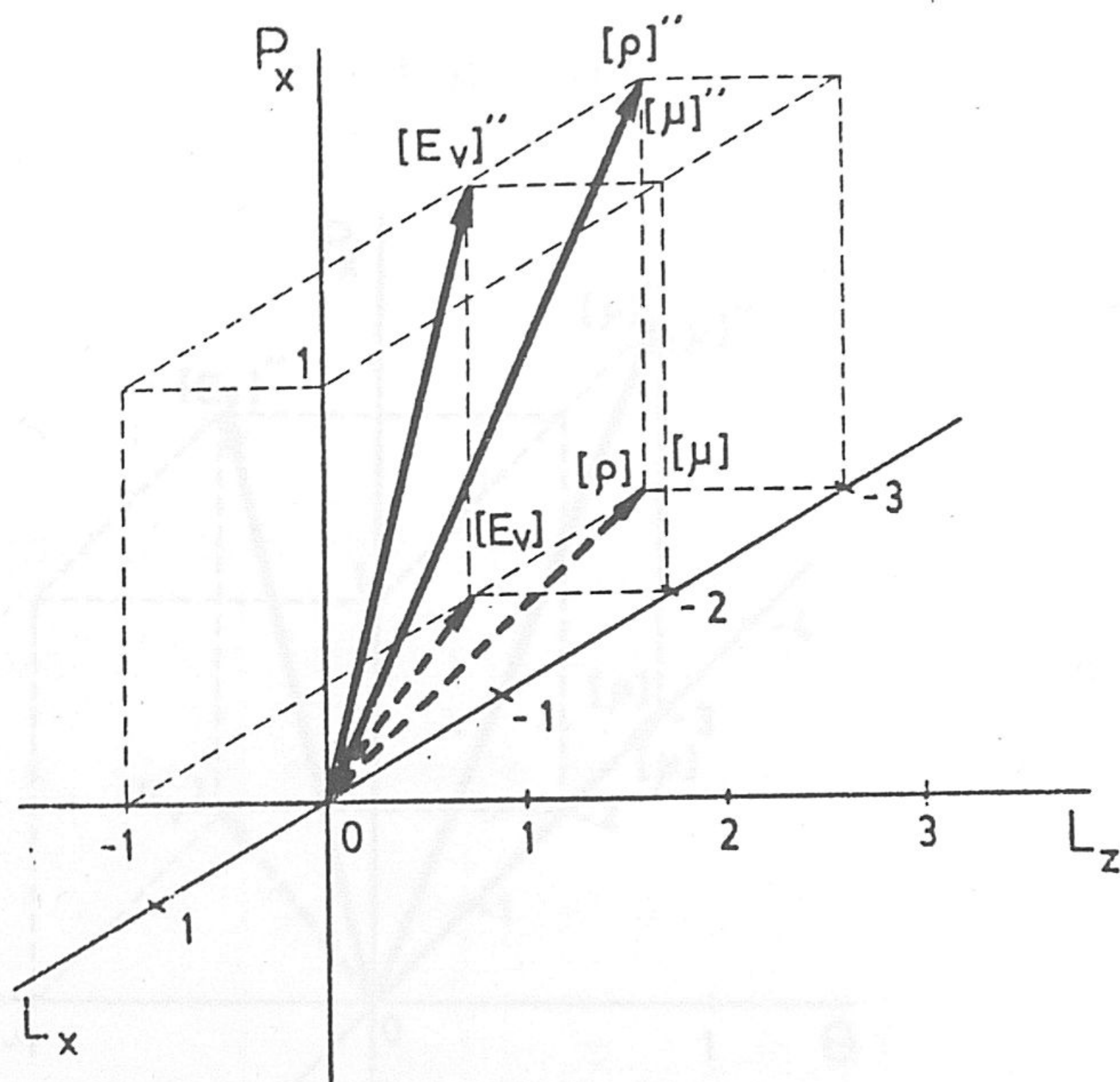


fig.II.6

fig.II.9

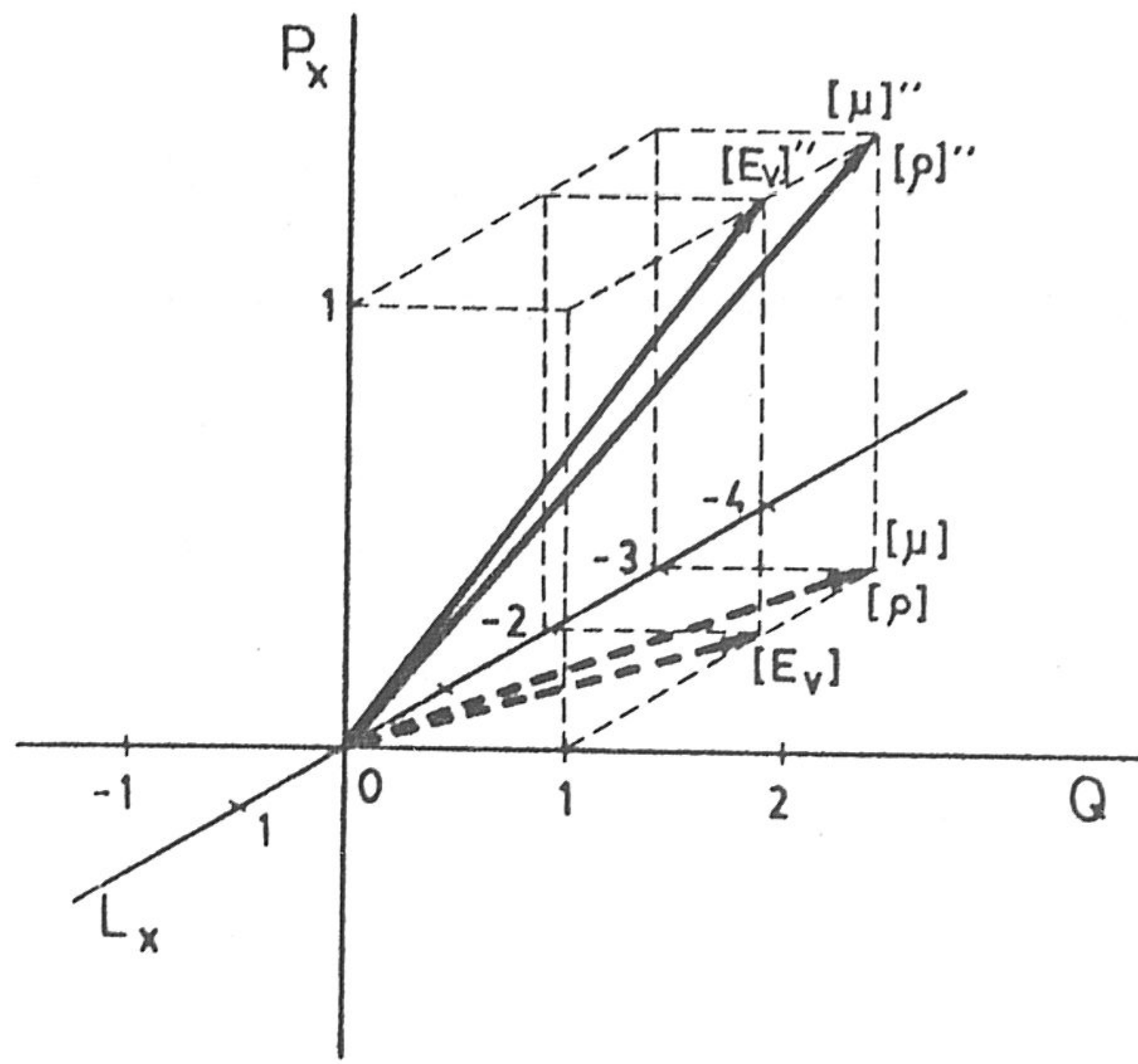


fig.II.7

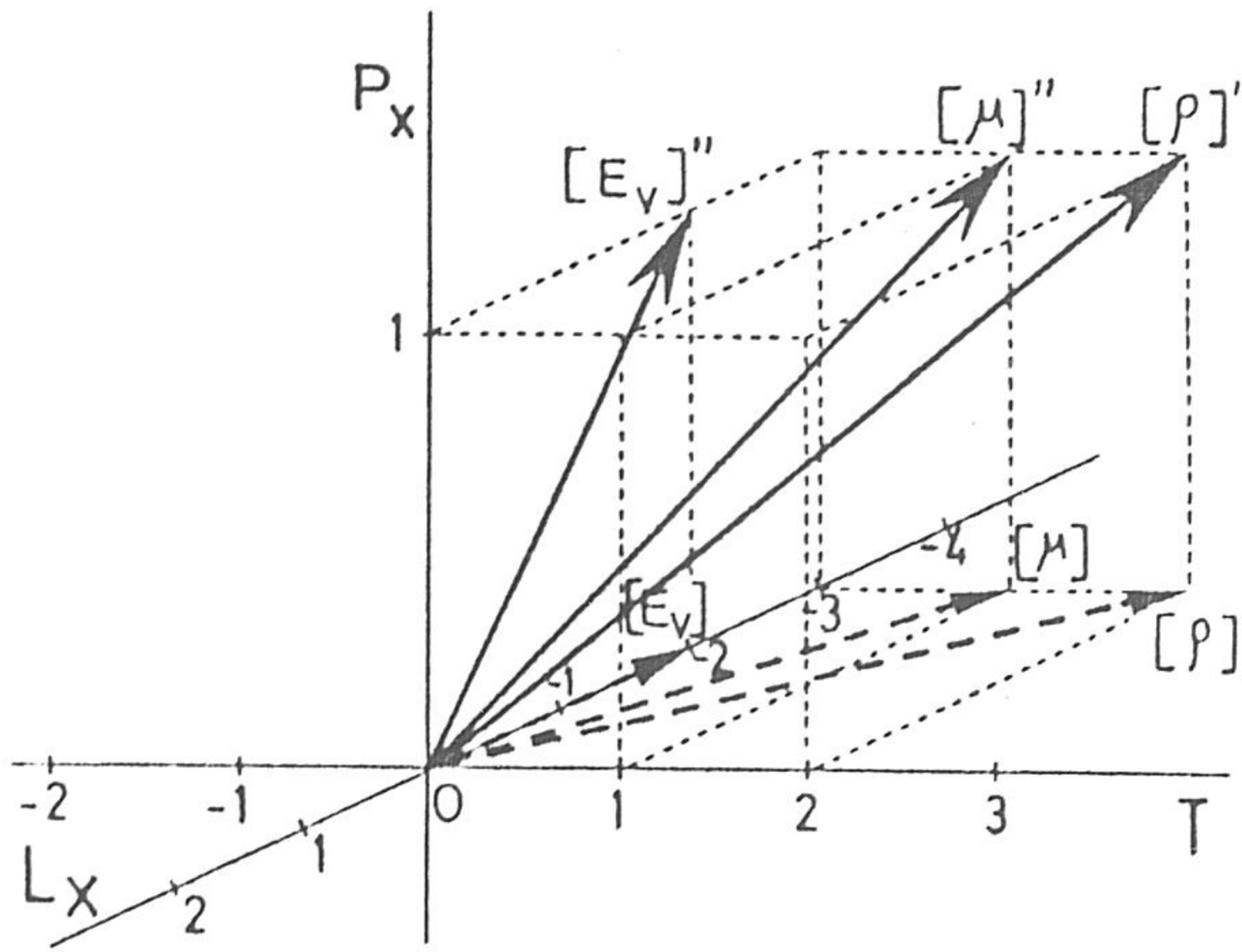


fig.II.8

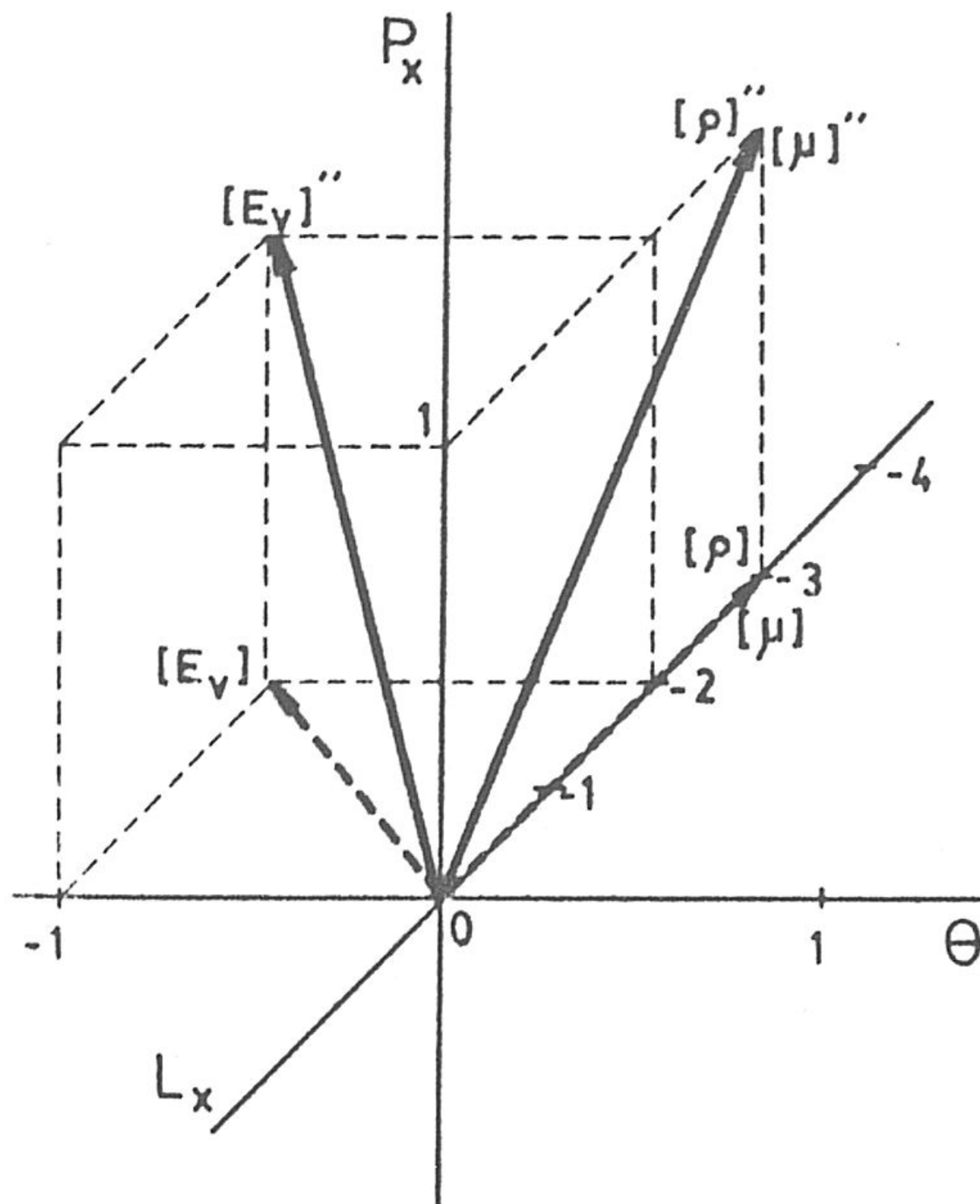


fig.II.9

1.1.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$  .

Veamos ahora cuál es el significado físico del monomio que desaparece al ampliar la base.

La ampliación de la base dimensional, de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , o de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$  de las soluciones. La forma de este monomio corresponde precisamente a la relación entre trabajo y calor. En efecto, el numerador,  $g\beta L$ , representa el trabajo realizado por las fuerzas de empuje hidrostático por unidad de masa y de incremento de temperatura, al ascender una distancia  $L$ , mientras que el denominador,  $c$ , es el calor absorbido también por unidad de masa y temperatura. Esto es, si tomamos el elemento de masa  $dm$  :

$$N_P = \frac{dm \cdot g\beta L \cdot d\theta}{dm \cdot c \cdot d\theta} = \frac{dW}{dQ}$$

siendo  $dW = dm \cdot d\theta \cdot g\beta L$  el trabajo de las fuerzas verticales de ascensión y  $dQ = dm \cdot d\theta \cdot c$  el calor absorbido por  $dm$  .

Ahora bien,  $dW$  no procede de  $dQ$ , o viceversa, de modo que el monomio no representa una relación real, física, observable, sino sólo una posible relación funcional. Como la ampliación de la base dimensional procede de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, según dedujimos anteriormente (I.5), en ella el monomio  $N_P$  pierde su carácter individual y, simplemente, sus componentes quedan incluidos en otros monomios. Esto es, de nuestra base ampliada se deriva necesariamente la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional de la relación del calor al trabajo.

En las bases ampliadas con y sin discriminación espacial  $(L, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ ,  $N_P$  tiene dimensión no nula, respectivamente (68) y (74):

$$P = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

$$P_x = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

y, así, dicho monomio  $N_P$  deja de formar parte de los monomios adimensionales independientes,  $\Pi_i$ , que constituyen la solución.

Es importante señalar que nuestro planteamiento difiere radicalmente del aplicado con frecuencia por los tratadistas de Análisis dimensional. Así, una vez planteado y resuelto un problema por Análisis dimensional, aducen que cierta variable no ha de intervenir, mediante razonamientos de carácter físico sobre el fenómeno de que se trate, eliminando a continuación el monomio en el que figura tal variable. Por el contrario, nosotros deducimos la base dimensional estricta a partir de las leyes generales, y el Análisis dimensional da directamente la inviabilidad de dicho monomio. Además, en nuestro caso, tal modo de razonar sería inaplicable habida cuenta de que las variables  $g, \beta, L, c$ , que constituyen el monomio en cuestión, sí intervienen en el fenómeno.

#### 1.1.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

El interés de nuestro trabajo se centra en que, con la ampliación de la base, (I.5), y con la discriminación de las dimensiones del espacio, [15] y [16], se mejoran las soluciones del problema, del cual no es posible obtener una solución teórica exacta.

Existen consideraciones teóricas aproximadas [17] que indican que, en la solución, siempre el  $N_{Nu}$  debe ser proporcional a  $N_{Gr}^{1/4}$ , lo que está de acuerdo con nuestros resultados (60) y (65).

La confirmación de nuestras soluciones ha de realizarse contrastándolas con las fórmulas empíricas encontradas por los diferentes autores.

Así, según Gröber, [17], cuando la temperatura junto a la pared depende exclusivamente del  $N_{Pr}$ , debe ser:

$$N_{Nu} = 0,945 \cdot N_{Gr}^{1/4} \cdot f(N_{Pr})$$



Schmidt y Beckmann [14] dan como solución para la convección libre en una placa vertical la siguiente ecuación:

$$N_{Nu} = 0,52 \cdot \left( N_{Gr} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (78)$$

Ostrach [18] obtuvo que la relación del  $N_{Nu}$  a la raíz cuarta del  $N_{Gr}$  era función del  $N_{Pr}$  :

$$\frac{N_{Nu}}{N_{Gr}^{\frac{1}{4}}} = f(N_{Pr}) \quad (79)$$

Sugawara y Michiyoshi [19] empleando un método analítico aproximado y calculando para diferentes casos han obtenido una expresión de la forma:

$$N_{Nu} = N_{Gr}^{\frac{1}{4}} \cdot f(N_{Pr}) \quad (80)$$

que en el intervalo  $0,6 < N_{Pr} < 20$  se puede representar, aproximadamente, por medio de:

$$N_{Nu} = 0,550 \cdot N_{Gr}^{\frac{1}{4}} \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (81)$$

Lorentz [20] obtuvo para el problema que nos ocupa la ecuación:

$$N_{Nu} = 0,548 \cdot \left( N_{Gr} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (82)$$

Eckert [21], obtuvo, para convección libre desde placas verticales, la relación:

$$N_{Nu} = 0,68 \cdot \left( \frac{N_{Pr}}{0,952 + N_{Pr}} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left( N_{Gr} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (83)$$

En definitiva, pues, hemos conseguido hallar directamente, mediante el Análisis dimensional, la proporcionalidad entre el  $N_{Nu}$  y el  $N_{Gr}^{\frac{1}{4}}$ , así como la no intervención del monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ , resultados ambos confirmados ampliamente por las fórmulas empíricas.

### 1.1.8.- CONCLUSIONES.

1ª.- Según hemos deducido en (I.5), la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "estricta" para los "Fenómenos de transmisión de calor existiendo efectos mecánicos pero sin conversión de calor en trabajo o viceversa", mientras que la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  resulta "deficiente" o "mutilada" (Palacios [2]), lo cual queda confirmado en la resolución del problema de "convección libre en una placa vertical (caso general)", perteneciente a dicho tipo de fenómenos.

2ª.- Teniendo en cuenta las características geométricas y físicas del problema, hemos discriminado las dimensiones del espacio, obteniendo soluciones más precisas [15], que las que se consiguen sin la discriminación espacial; además, dicha mejora es independiente de la que produce la ampliación de la base por nosotros propuesta.

3ª.- En este problema el número de Nusselt y el número de Grashof no son "números adimensionales"; sus dimensiones son  $[N_{Nu,L}] = L_x \cdot L_y^{-1}$ ,  $[N_{Gr,L}] = L_x^4 \cdot L_y^{-4}$ , respectivamente, en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , siendo adimensional el cociente  $\frac{N_{Nu,L}^4}{N_{Gr,L}}$  que forma parte de las soluciones (60) y (65), con lo cual se confirma lo dicho por Arenas y Herranz en [22] a [24].

4ª.- La utilización de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  en lugar de la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , estricta para este problema, lleva consigo una pérdida de información o "mutilación" [25], y se puede interpretar como una proyección de vectores-dimensión pentadimensionales, en un subespacio de cuatro dimensiones.

5ª.- El significado físico del monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$  es precisamente el de la relación entre calor y trabajo. Dicho monomio desaparece de las soluciones al ampliar la base de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  lo cual queda confirmado por la experiencia.

6ª.- Las soluciones obtenidas con las distintas bases dimensionales son:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_1 \left( N_{Gr, L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (48)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_2 (N_{Gr, L}, N_{Pr}) \quad (53)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = N_{Gr, L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (60)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = N_{Gr, L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 (N_{Pr}) \quad (65)$$

Hemos logrado mejorar la solución de dos maneras independientes. La primera es debida a la discriminación de las dimensiones del espacio (compárense (48) con (60) y (53) con (65)). La segunda se consigue mediante la ampliación de la base por nosotros propuesta; en efecto, comparando las soluciones de la base usual (48) y (60) con las respectivas de la base ampliada (53) y (65), vemos que la mejora de la solución reside en la desaparición del monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ . Dicho monomio  $\Pi$ , según Palacios [26], es un monomio "espurio" que aparece por haberse utilizado una base "deficiente": la usual tetradimensional (L, Q, T,  $\theta$ ).

7ª.- Nuestra solución más precisa es la

$$N_{Nu, L} = N_{Gr, L}^{\frac{1}{4}} \cdot f(N_{Pr}) \quad (65)$$

Mediante el Análisis dimensional hemos conseguido hallar directamente la proporcionalidad entre el  $N_{Nu}$  y el  $N_{Gr}^{\frac{1}{4}}$ , así como la no intervención del monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ .

Dado que no existe solución teórica exacta, la validez de nuestro resultado (65) ha de ser confirmado por vía experimental, lo cual, en efecto, queda de manifiesto comparando nuestra solución (65) con las fórmulas empíricas halladas por diversos autores ([14], [19], [20] y [21]).

## 1.2.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL. MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO.

Se trata de resolver el problema anterior con la particularidad de que el movimiento del fluido se produce lentamente.

Aunque las fuerzas de inercia son proporcionales a la densidad y para este caso las consideramos despreciables, no podemos eliminar la densidad de nuestra lista de variables, pues aparece también en otros términos de la ecuación del movimiento (24), uno de los cuales representa la fuerza de volumen cuya importancia en la convección libre es grande. En la ecuación de la energía (26), la densidad está multiplicada por el calor específico  $c$ , luego si introducimos el calor específico por unidad de volumen  $c' = \rho \cdot c$ , no aparece de modo explícito la densidad. Las variables que debemos considerar son pues:

$L$  : Altura de la placa.

$\mu$  : Coeficiente de viscosidad dinámica.

$c' = \rho \cdot c$  : Calor específico por unidad de volumen.

$K$  : Conductividad térmica.

$\Delta\theta$  : Temperatura diferencial.

$E_v = \rho g \beta$  : Empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura.

$h$  : Coeficiente de transmisión del calor.

En consecuencia el coeficiente de transmisión del calor  $h$  depende, en este caso particular, de las siguientes variables:

$$h = f(L, \Delta\theta, E_v, c', \mu, K) \quad (84)$$

Resolvemos el problema, como en el apartado anterior, con las bases usual y ampliada, con y sin discriminación.

#### 1.2.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T, $\theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema son las (44) prescindiendo de la densidad que ahora no interviene. La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables en la base usual (L,Q,T, $\theta$ ) es:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	K	h
L	1	0	-4	-3	-3	-1	-2
Q	0	0	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0
$\Pi_2$	0	-1	1	-3	1	0	1
$\Pi_3$	0	-1	2	-4	1	1	0

(85)

La característica de la matriz es 4 luego hay  $i = N-H = 7-4 = 3$  monomios independientes. Para conocer los exponentes de las variables en cada uno de los monomios se procede de modo análogo al seguido en los casos anteriores, resolviendo el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo formado por los exponentes dimensionales de las variables.

Podemos elegir arbitrariamente los valores exponenciales de tres cualesquiera de las variables de tal manera que el determinante formado por las columnas restantes sea distinto de cero. Elegimos en este caso los de L, K y h, obteniéndose los monomios  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$  indicados en (85). Así pues:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot L}{c'} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot h \cdot E_v}{\Delta\theta \cdot c'^3} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot K \cdot E_v^2}{\Delta\theta \cdot c'^4} \quad ;$$

teniendo en cuenta que  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$ , resulta:

$$\Pi_1 = \frac{g\beta L}{c} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot h \cdot g\beta}{\rho^2 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot K \cdot (g\beta)^2}{\rho^2 \cdot c^4 \cdot \Delta\theta}$$

En lugar de  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$  podemos tomar:

$$\Pi'_2 = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-1} = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu,L}$$

$$\Pi'_3 = \Pi_1^3 \cdot \Pi_3^{-1} = \left( \frac{\rho^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot L^3}{\mu} \right) \cdot \left( \frac{\mu \cdot c}{K} \right) = N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}$$

que, junto con  $\Pi_1$ , conducen a la solución:

$$F(\Pi_1, \Pi_2', \Pi_3') = 0 \quad ; \quad F\left(\frac{g\beta L}{c}, N_{Nu,L}, N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}\right) = 0 \quad (86)$$

o bien, despejando el  $N_{Nu,L}$  :

$$N_{Nu,L} = F_1\left(N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c}\right) \quad (87)$$

Veamos ahora qué solución se obtiene utilizando la base ampliada (L,Q,T,θ,M).

1.2.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

Como en el fenómeno no se produce conversión de calor en trabajo, o viceversa, podemos utilizar la base dimensional ampliada. La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables, en la base (L,Q,T,θ,M), teniendo en cuenta sus fórmulas dimensionales en dicha base (49), es:

	L	Δθ	E <sub>v</sub>	c'	μ	K	h
L	1	0	-2	-3	-1	-1	-2
Q	0	0	0	1	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	-1	-1
θ	0	1	-1	-1	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	0	0
Π <sub>1</sub>	3	1	1	1	-1	-1	0
Π <sub>2</sub>	1	0	0	0	0	-1	1

(88)

La característica de la matriz es  $H = 5$  por lo que el número de monomios adimensionales independientes es  $i = N-H = 7-5 = 2$ . Procediendo del mismo que en el caso (1.1), resultan los monomios que se indican en (88). Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot c' \cdot \Delta\theta \cdot L^3}{\mu \cdot K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu,L} \quad ;$$

teniendo en cuenta que  $E_v = \rho g \beta$  y que  $c' = \rho \cdot c$ , el monomio  $\Pi_1$  se puede expresar como:

$$\Pi_1 = \left( \frac{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta \theta \cdot L^3}{\mu} \right) \cdot \left( \frac{\mu \cdot c}{K} \right) = N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}$$

que junto con  $\Pi_2$  proporciona la solución:

$$N_{Nu,L} = F_2 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right) \quad (89)$$

que es más precisa que la solución (87) obtenida con la base dimensional usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

1.2.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

Consideramos un sistema de ejes coordenados en la placa, semejante al que tomamos en el apartado (1.1.3), fig.II.1 . Teniendo en cuenta el método de la discriminación de las dimensiones del espacio, las fórmulas dimensionales de las magnitudes que ahora intervienen en el problema, en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las de (56), excluyendo la densidad que ahora no interviene.

En esta base la matriz de los exponentes dimensionales resulta ser:

	L	$\Delta \theta$	$E_v$	c'	$\mu$	K	h	
$L_x$	1	0	-2	-1	-3	-1	-1	
$L_y$	0	0	-1	-1	1	1	0	
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	
Q	0	0	1	1	1	1	1	(90)
T	0	0	0	0	1	-1	-1	
$\theta$	0	1	-1	-1	0	-1	-1	
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0	
$\Pi_2$	0	-1	-2	0	1	-3	4	

La característica de la matriz es  $H = 5$  , de donde las variables pueden formar dos monomios independientes:  $i = N-H = 7-5 = 2$  . Según indicamos anteriormente (1.2), del sistema de ecuaciones lineal y homogéneo formado por los exponentes dimensionales de las variables, se obtienen los

exponentes con que las variables aparecen en cada uno de los monomios (90).

Así pues:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot L}{c'} = \frac{\rho g \beta \cdot L}{\rho \cdot c} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot h^4}{E_v^2 \cdot \Delta \theta \cdot K^3} = \frac{\mu \cdot h^4}{(\rho g \beta)^2 \cdot \Delta \theta \cdot K^3} \quad ;$$

en lugar de  $\Pi_2$ , tomamos  $\Pi'_2 = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ ,

$$\Pi'_2 = \left( \frac{h \cdot L}{K} \right)^4 \cdot \left( \frac{K}{\mu \cdot c} \right) \cdot \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta \theta \cdot L^3} \right) = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1} \cdot N_{Pr}^{-1}$$

resultando, de los monomios  $\Pi_1$  y  $\Pi'_2$ , la solución:

$$N_{Nu,L} = \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{g \beta L}{c} \right) \quad (91)$$

La discriminación de las dimensiones del espacio en la base (L,Q,T,θ) ha mejorado en precisión a la solución (87).

Veamos ahora cómo es posible obtener una solución aun más precisa discriminando las dimensiones del espacio en la base ampliada (L,Q,T,θ,M).

#### 1.2.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

A diferencia del apartado anterior, ahora, la masa es magnitud fundamental y forma parte de la base dimensional.

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema son las (62), que conducen a la matriz de los exponentes dimensionales siguiente:

	L	Δθ	$E_v$	$c'$	μ	K	h	
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1	
$L_y$	0	0	-1	-1	1	1	0	
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	
Q	0	0	0	1	0	1	1	(92)
T	0	0	-2	0	-1	-1	-1	
θ	0	1	-1	-1	0	-1	-1	
M	0	0	1	0	1	0	0	
Π	1	-1	-1	-1	1	-3	4	



La característica de la matriz es 6 y por tanto  $i = N-H = 7-6 = 1$ , de modo que conseguimos el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional: un solo monomio, esto es, la solución exacta salvo una constante numérica.

El monomio, según la última fila de (92), es:

$$\Pi = \frac{\mu \cdot L \cdot h^4}{E_v \cdot \Delta\theta \cdot K^3 \cdot c'} = \frac{\mu \cdot L \cdot h^4}{\rho^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot K^3 \cdot c} = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1} \cdot N_{Pr}^{-1}$$

de donde:

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (93)$$

Este resultado, como ha sido obtenido de forma deductiva a partir de una teoría coherente y completa de Análisis dimensional, podemos afirmar que es la solución teórica funcional exacta. (Decimos "funcional", pues queda establecida la relación entre las variables pero no así el factor numérico C, que se ha de determinar experimentalmente, para lo cual basta con una sola medida en algún caso particular).

Se trata de una solución teórica funcional exacta obtenida de manera indirecta mediante el Análisis dimensional, y no de manera directa mediante las leyes físicas que rigen el fenómeno en cuestión. La diferencia reside en que la solución teórica directa conduce a la relación que debe existir entre las variables para dar cuenta del fenómeno concreto considerado (ley particular obtenida deductivamente a partir de las leyes físicas generales del capítulo de la Física correspondiente), mientras que la solución teórica funcional indirecta mediante el Análisis dimensional, aun siendo perfectamente deductiva, expresa solamente la "única" (en este caso, por constar de un solo monomio) relación funcional posible entre las variables, "compatible" con la "forma" de las leyes físicas generales del capítulo en cuestión.

1.2.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Por un procedimiento análogo al realizado en (1.1.5), demostraremos que los vectores dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema, representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores dimensionales representados en la base pentadimensional  $(L, Q, T, \theta, M)$ , sobre el subespacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ .

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que componen la lista de variables, en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , son según (44) las siguientes:

$$\begin{aligned} [L] &= L \\ [\Delta\theta] &= \theta \\ [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c'] &= [\rho \cdot c] = L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [E_V] &= [\rho g \beta] = L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \end{aligned}$$

y en la base ampliada pentadimensional  $(L, Q, T, \theta, M)$  son según (49):

$$\begin{aligned} [L]' &= L \\ [\Delta\theta]' &= \theta \\ [\mu]' &= L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [K]' &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [h]' &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c']' &= [\rho \cdot c]' = L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [E_V]' &= [\rho g \beta]' = L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \end{aligned}$$

Observamos que las únicas variables que han modificado su dimensión al representarlas en una base u otra son: el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura  $E_V$  y la viscosidad  $\mu$ , de tal modo que:

ción de  $(L, Q, T, \theta, M)$

En la base  $(L, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [E_V] &= L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (94)$$

y en la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ :

$$\begin{aligned} [\mu]' &= L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [E_V]' &= L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \end{aligned} \quad (95)$$

Para poner de manifiesto explícitamente que los vectores-dimensión (94) son las proyecciones sobre el subespacio  $(L, Q, T, \theta)$  de los vectores (95), representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, M)$ , realizamos un cambio de base, de manera que la diferencia entre las fórmulas dimensionales de las variables en ambas bases exista únicamente en una de las magnitudes fundamentales.

Si nos fijamos en las soluciones del problema, dadas en (1.2.1) y (1.2.2), se observa que el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$ , que era adimensional en la base tetradimensional, en la base ampliada pentadimensional tiene la dimensión:

$$\left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = \frac{L \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L}{Q \cdot \theta^{-1} \cdot M^{-1}} = L^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M$$

Llamamos  $P$  a la dimensión de este monomio y lo consideramos formando parte de la base dimensional, es decir, en lugar de ampliar la base  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  la ampliamos a  $(L, Q, T, \theta, P)$ .

El problema, en definitiva, consistirá en realizar un cambio de base para pasar de  $(L, Q, T, \theta, M)$  a  $(L, Q, T, \theta, P)$ , siendo:

$$P = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \quad (96)$$

Como en nuestro caso particular la única diferencia entre una base y otra consiste en la sustitución de  $M$  por  $P$ , basta con poner  $M$  en función de  $(L, Q, T, \theta, P)$ . De (96) se obtiene:

$$[M] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P \quad (97)$$

donde ponemos  $M$  entre corchetes para indicar que en la nueva base no es magnitud fundamental.

Sustituyendo el cambio de base (97) en (95), se obtienen las fórmulas dimensionales de las magnitudes en la nueva base  $(L, Q, T, \theta, P)$ :

$$[E_V]'' = L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot [M] = L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P = L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P \quad (98)$$

$$[\mu]'' = L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P = L^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P$$

y comparando (94) con (98) se observa que:

$$[E_V]'' = [E_V] \cdot P \quad (99)$$

$$[\mu]'' = [\mu] \cdot P$$

de modo que podemos decir que los vectores dimensionales  $[E_V]$  y  $[\mu]$  son las proyecciones de los vectores  $[E_V]''$  y  $[\mu]''$  sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ .

Por tanto, el problema de convección libre (movimiento muy lento), es propiamente pentadimensional, y la utilización de la base usual tetradimensional nos reducirá la información en el problema, siendo por consiguiente incorrecta.

Como obviamente existe incapacidad de representar gráficamente el paso de 5 a 4 dimensiones, podemos formarnos una idea de la proyección citada anteriormente, realizando la representación gráfica de las magnitudes en tres fases, en las que a las variables  $L$  y  $P$ , se añaden sucesivamente  $T$ ,  $Q$ ,  $\theta$ . La representación gráfica completa se puede imaginar como una combinación de ellas (figuras II.10, II.11 y II.12).

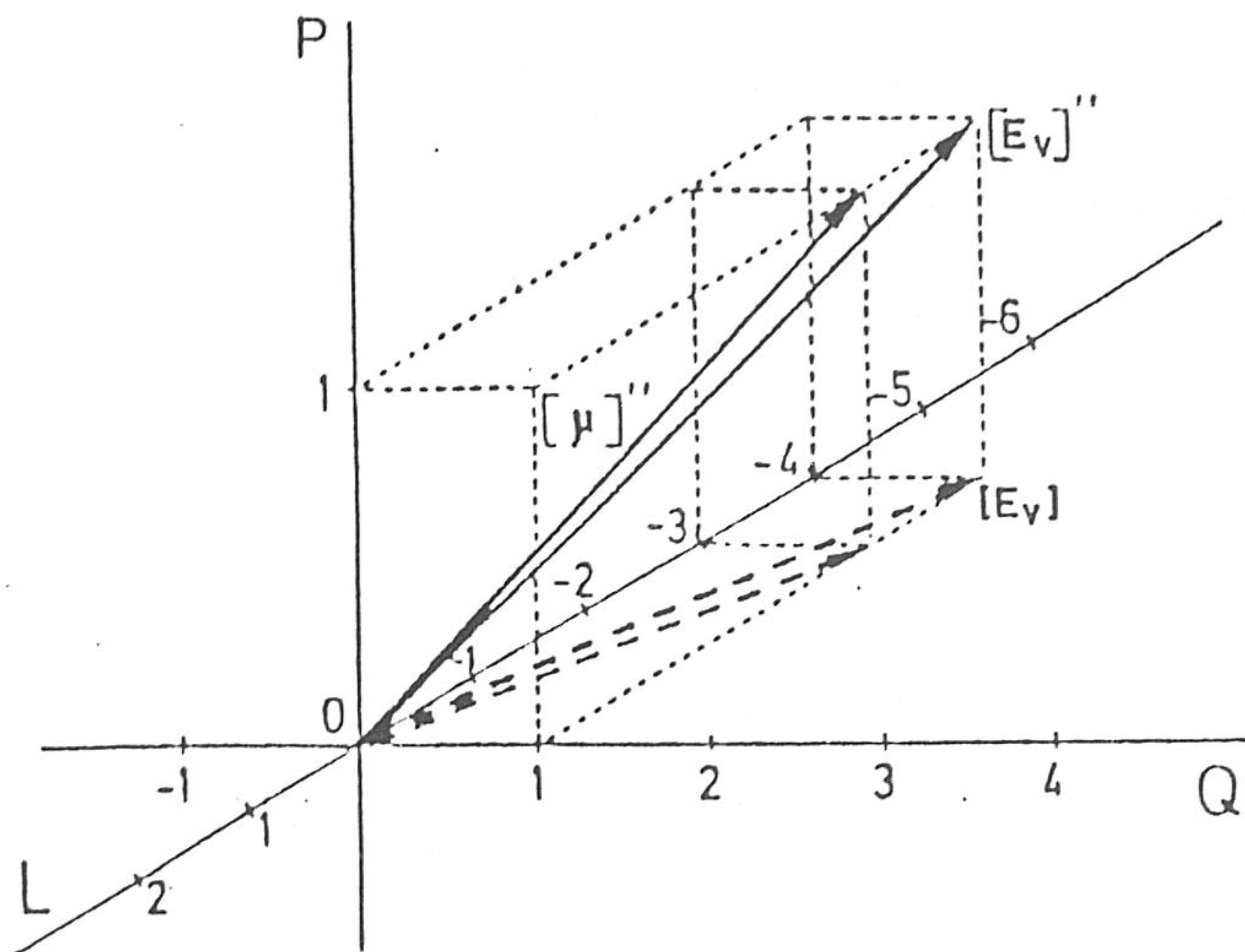


fig.II.10

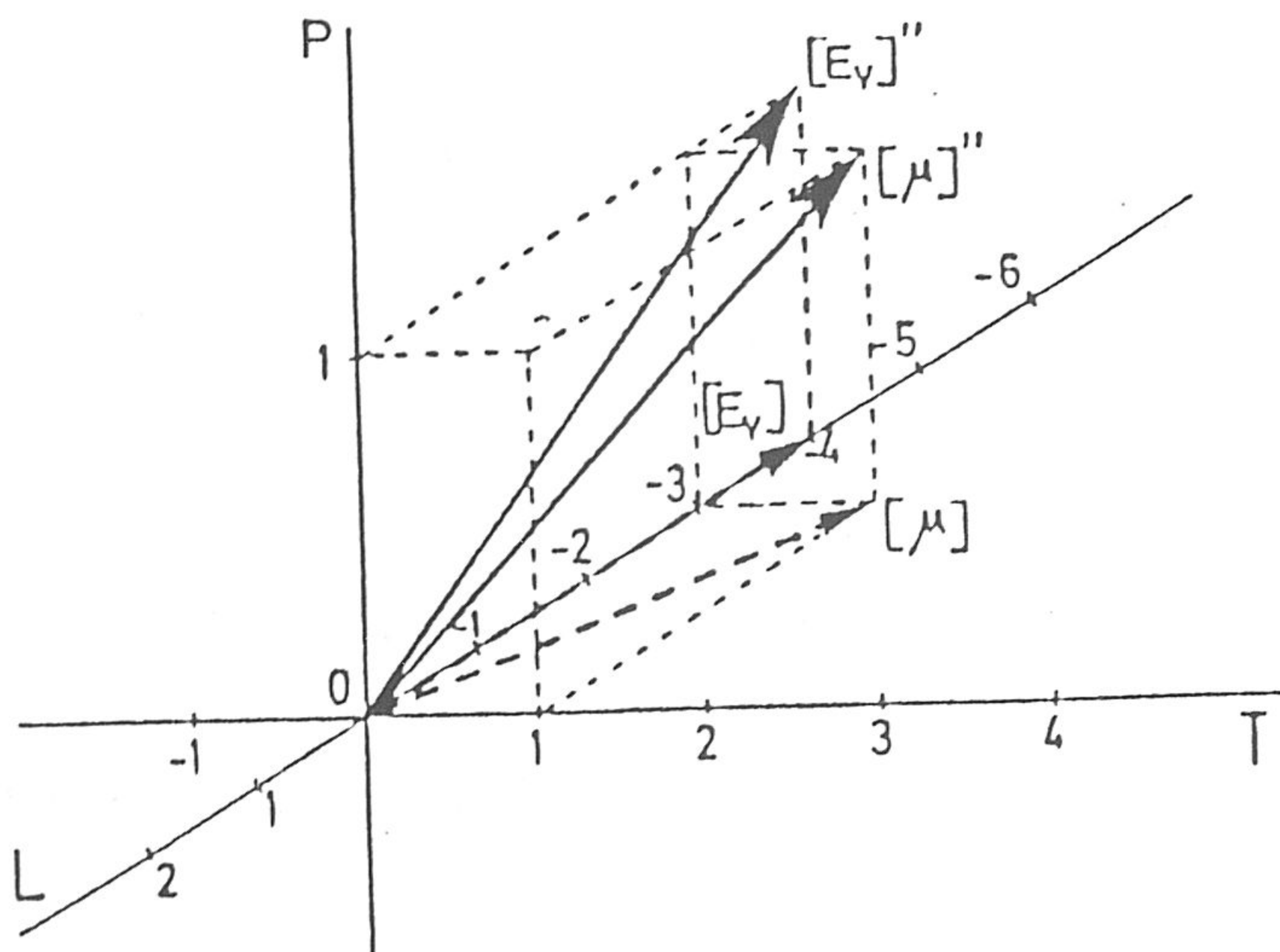


fig.II.11

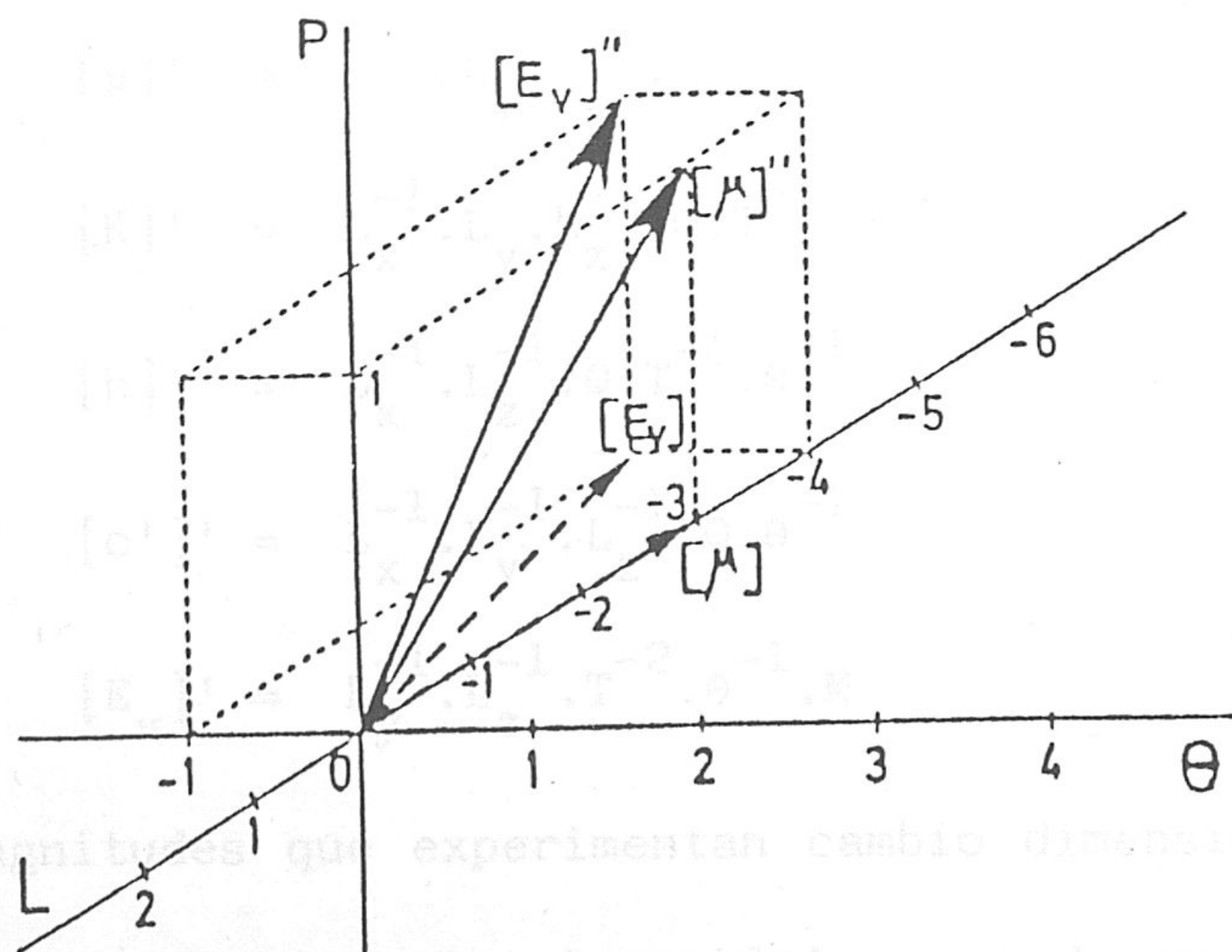


fig.II.12

CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE DISCRIMINADA.

Veamos ahora, por un procedimiento análogo al realizado con las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta, M)$ , cuál es la relación entre los vectores dimensionales representados en el espacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y los representados en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .

Según (56) las fórmulas dimensionales de las magnitudes, que intervienen en el problema en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [L] &= L_x \\ [\Delta\theta] &= \theta \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\ [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [h] &= L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \end{aligned}$$

y según (62), en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , las dimensiones de estas magnitudes son:

$$\begin{aligned} [L]' &= L_x \\ [\Delta\theta]' &= \theta \\ [\mu]' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [K]' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [h]' &= L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c']' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [E_v]' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \end{aligned}$$

Las únicas magnitudes que experimentan cambio dimensional, al escribir las en una base y en otra son: la viscosidad  $\mu$  y el empuje hidrostático

por unidad de volumen y temperatura  $E_v$ . En la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  son:

$$[\mu] = L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \quad (100)$$

$$[E_v] = L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1}$$

y en la base de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ :

$$[\mu]' = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \quad (101)$$

$$[E_v]' = L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M$$

Para poner de manifiesto la relación existente entre las dos bases dimensionales, conviene realizar un cambio de base en la base ampliada de 7 dimensiones.

En la resolución del problema utilizando una u otra base, realizada en (1.2.3) y (1.2.4), aparece como hecho significativo el que el monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ , que era adimensional en la base de 6 dimensiones, en la base ampliada de 7 dimensiones tiene de dimensión:

$$\left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = \frac{L_x \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L_x}{Q \cdot \theta^{-1} \cdot M^{-1}} = L_x^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M$$

Nos interesa, para expresar la relación entre las bases de 6 y 7 dimensiones, realizar un cambio de base, pasando de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , siendo la nueva dimensión básica  $P_x$ :

$$P_x = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \quad (102)$$

En la nueva base la masa no será magnitud fundamental y su dimensión es:

$$[M] = L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \quad (103)$$

Sustituyendo (103) en (101) se obtienen las dimensiones de las magnitudes en la nueva base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ :

$$\begin{aligned}
 [\mu]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = \\
 &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \cdot P_x \\
 [E_v]'' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot [M] = L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = \\
 &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P_x
 \end{aligned}
 \tag{104}$$

De la comparación de las dimensiones (104) y (100) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [\mu]'' &= [\mu] \cdot P_x \\
 [E_v]'' &= [E_v] \cdot P_x
 \end{aligned}
 \tag{105}$$

Por tanto, la diferencia entre las nuevas dimensiones y las primitivas queda en función únicamente de la dimensión nueva  $P_x$ , permaneciendo invariables los restantes exponentes dimensionales.

Considerando la analogía entre dimensiones y vectores, el sistema (105) pone de manifiesto que los vectores dimensionales (100) son las proyecciones de los vectores (104) sobre el espacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

La representación gráfica, por razones ya expuestas en (1.1.5), se realiza en 5 fases en las que a las variables  $L_x$  y  $P_x$  se añaden sucesivamente  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $Q$ ,  $T$  y  $\theta$ . De esta manera podemos imaginar como representación gráfica completa la combinación de todas ellas (figuras II.13, II.14, II.15, II.16 y II.17).



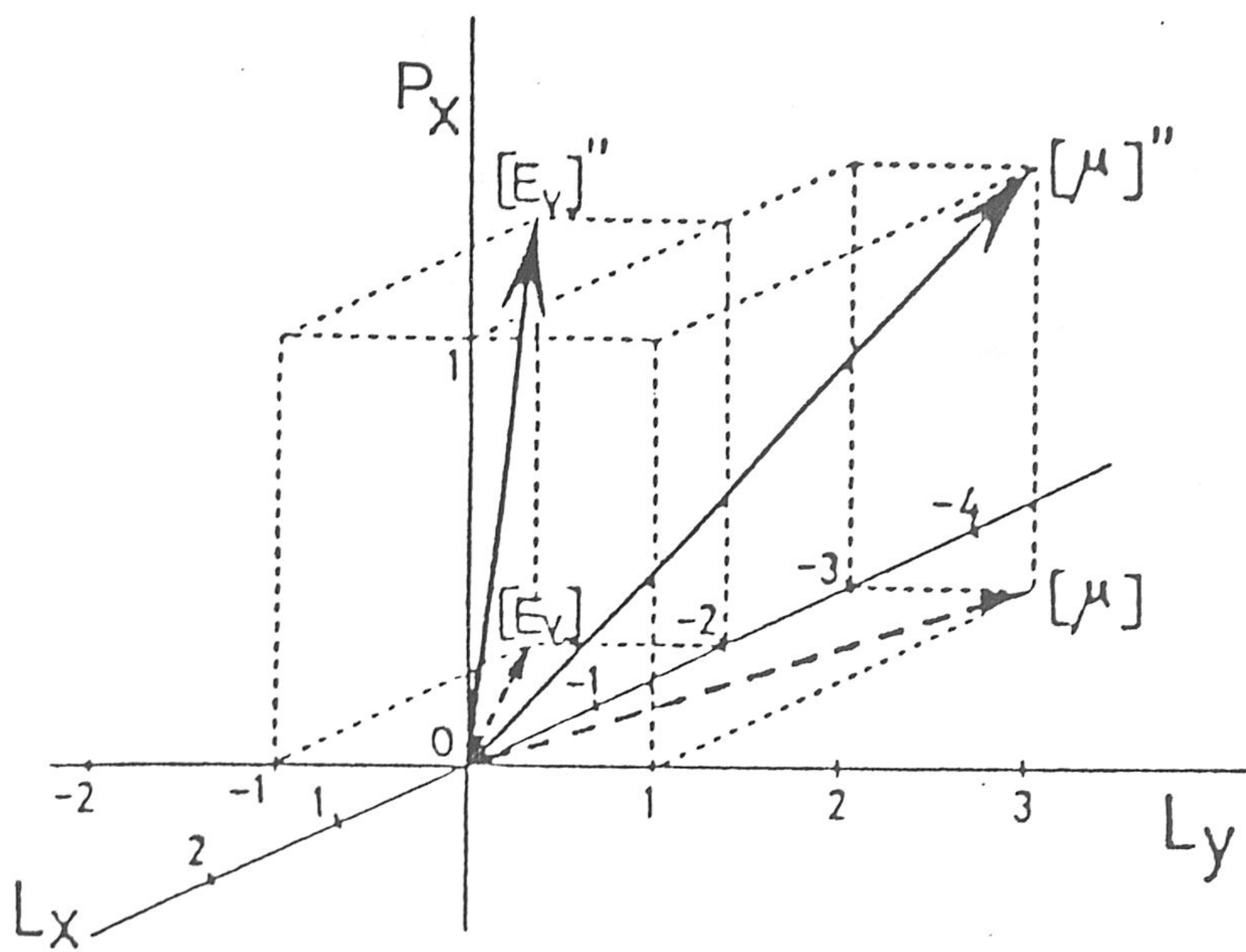


fig.II.13

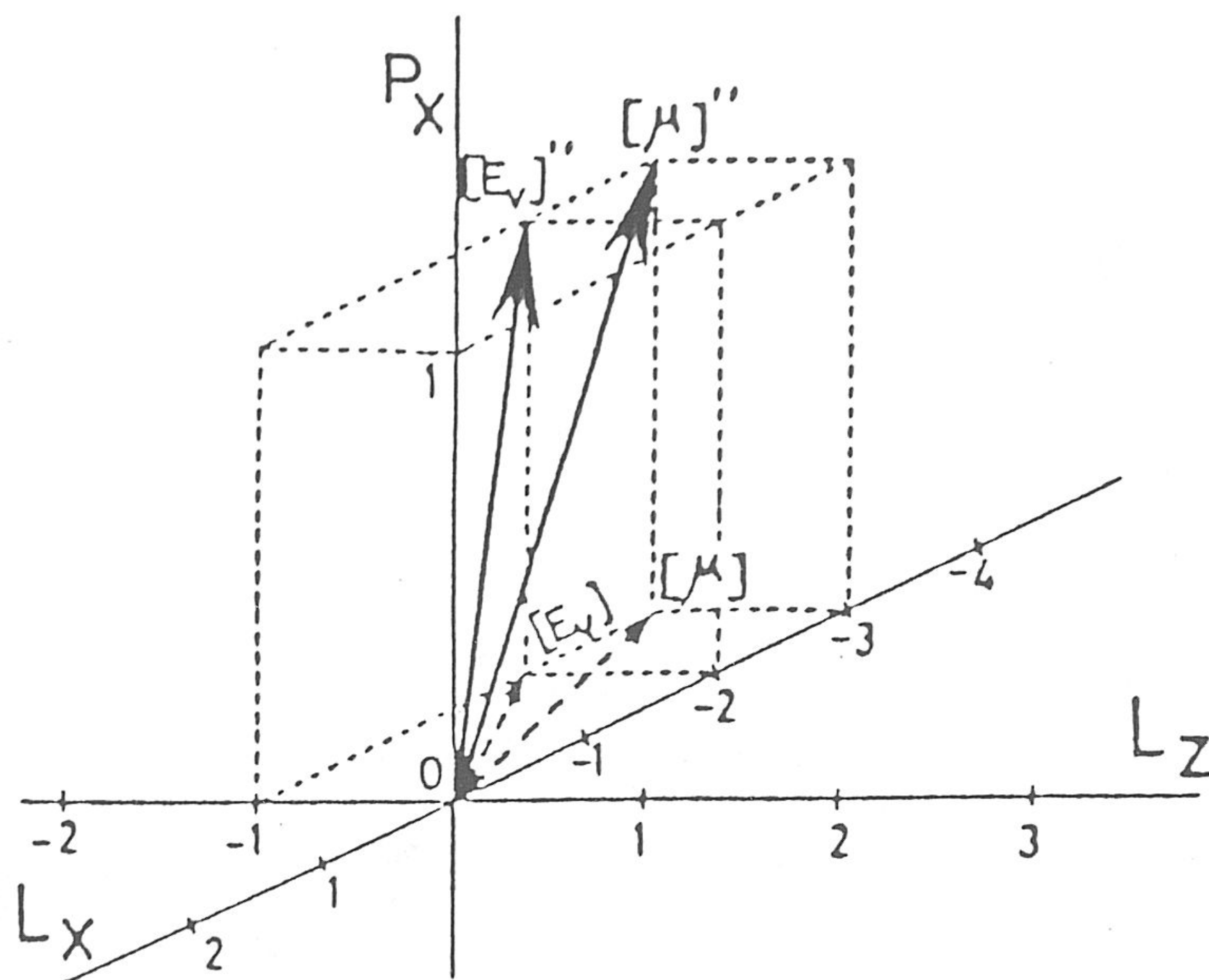


fig.II.14

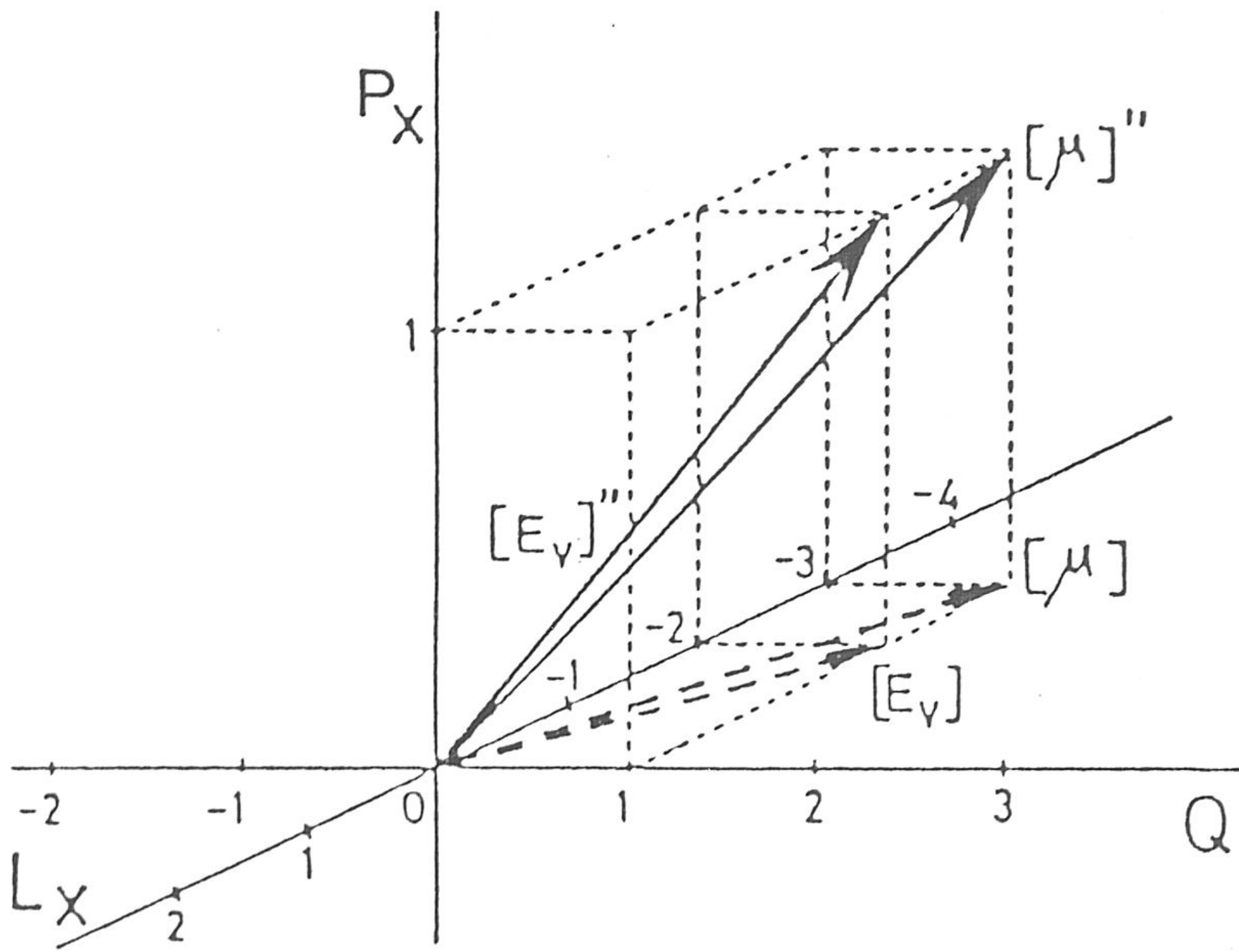


fig.II.15

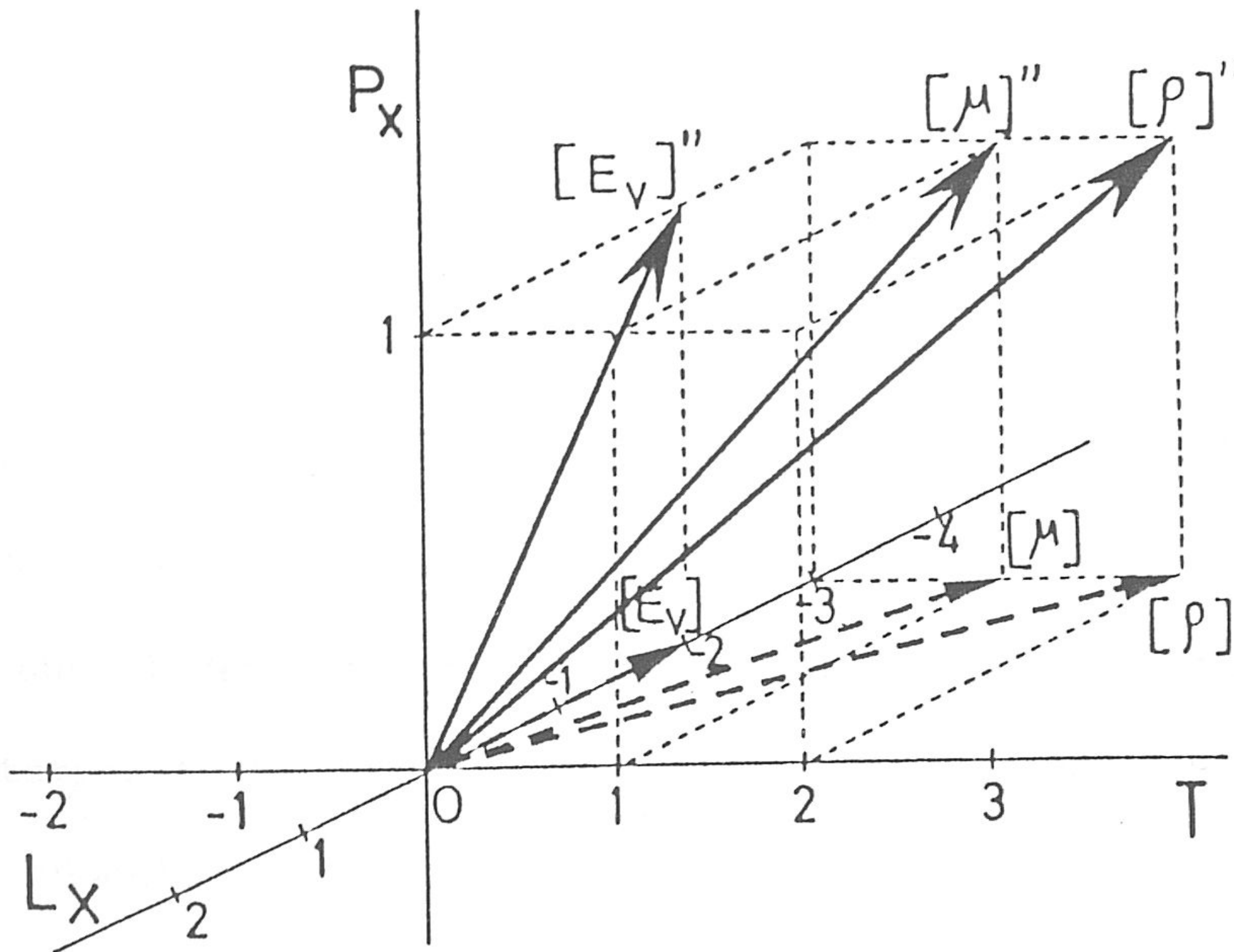


fig.II.16

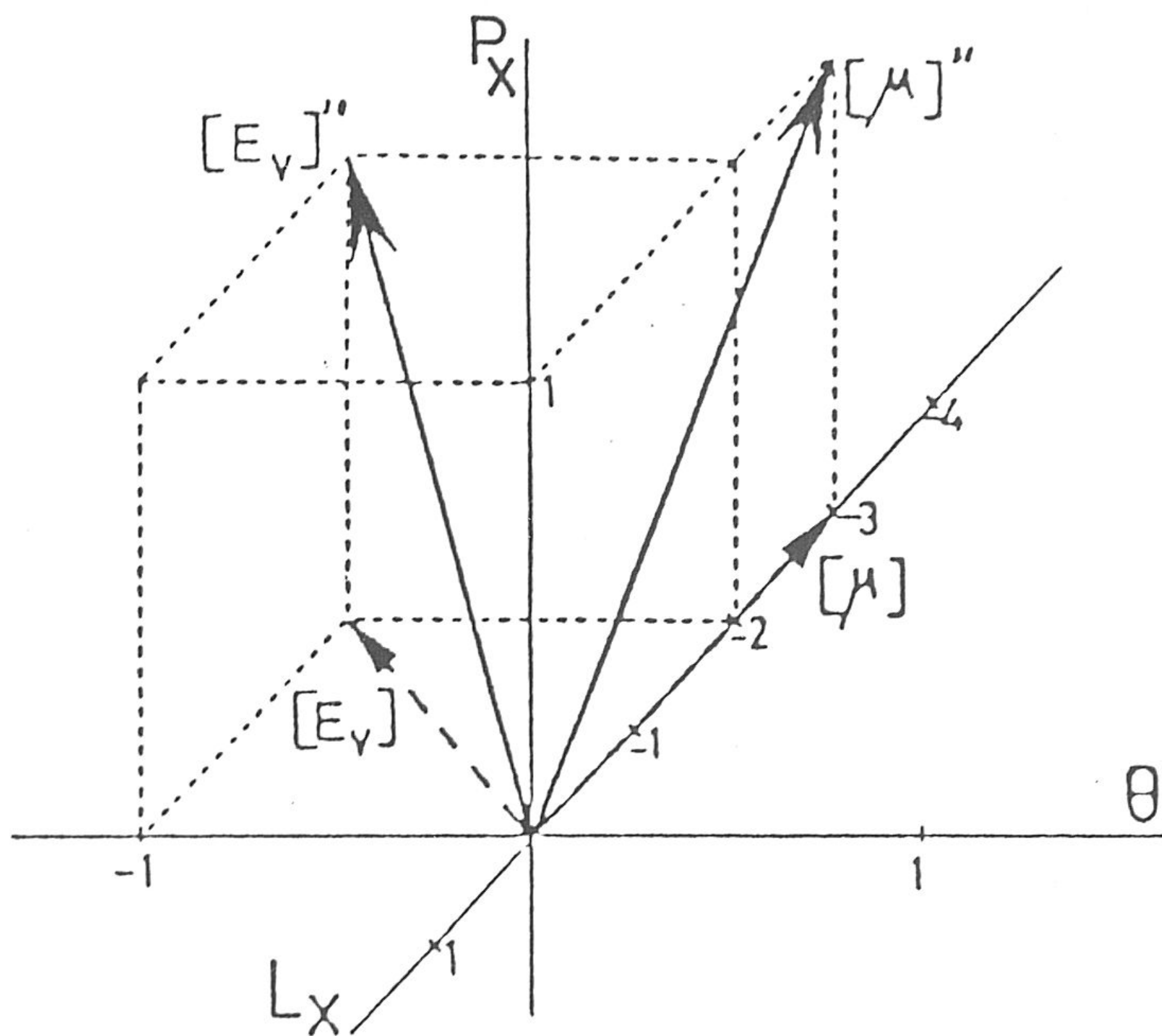


fig.II.17

1.2.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$ .

El monomio  $N_P$ , cuya dimensión hemos introducido en la base dimensional, posee un carácter o naturaleza física que es interesante señalar.

La ampliación de la base, de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$  de las soluciones. La forma de este monomio corresponde precisamente a la relación entre calor y trabajo. En efecto, el numerador,  $g\beta L$ , representa el trabajo realizado por las fuerzas del empuje hidrostático por unidad de masa y de incremento de temperatura, al ascender una distancia  $L$ , mientras que el denominador,  $c$ , es el calor absorbido, también por unidad de masa y temperatura. Esto es, si tomamos el elemento de masa  $dm$ , cuya temperatura aumenta  $d\theta$ , el trabajo de las fuerzas verticales de ascensión es  $dW = g\beta L \cdot dm \cdot d\theta$  y el calor absorbido por  $dm$  es  $dQ = c \cdot dm \cdot d\theta$ . Así pues:

$$N_P = \frac{g\beta L}{c} = \frac{g\beta L \cdot dm \cdot d\theta}{c \cdot dm \cdot d\theta} = \frac{dW}{dQ} \quad (106)$$

Ahora bien,  $dW$  no procede de hecho de  $dQ$ , o viceversa, de modo que el monomio no representa una relación real, física, observable, sino sólo una posible relación funcional. Como la ampliación de la base dimensional procede de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, según dedujimos anteriormente (I.5) en ella el monomio  $N_P$  no puede conservarse como una relación independiente del resto del fenómeno, pierde su carácter individual y, simplemente, sus componentes quedan incluidas en otros monomios. Esto es, de nuestra base ampliada se deriva necesariamente la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional de la relación entre calor y trabajo.

En las bases  $(L, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ ,  $N_P$  tiene dimensión no nula y, así, dicho monomio deja de formar parte de los monomios adimensionales independientes  $\Pi_i$ , que constituyen la solución. La base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es, en este caso, una base insuficiente, mutilada, obteniéndose con ella el monomio  $N_P$ , espurio.

#### 1.2.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

El resultado anteriormente expuesto (93) está de acuerdo con los datos y fórmulas experimentales dados por diversos autores. Así:

Lorentz [20] consiguió deducir analíticamente la ecuación

$$N_{Nu,L} = F \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right) \quad (107)$$

que es precisamente la solución (89), obtenida con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

Shuh [27] ha extendido los cálculos de Polhausen a números de Prandtl muy grandes, según indica la tabla I. La relación  $\frac{N_{Nu,L}}{\left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right)^{1/4}}$  se hace constante para  $N_{Pr} > 100$

$N_{Pr}$	$\frac{N_{Nu,L}}{N_{Gr,L}^{1/4}}$	$\frac{N_{Nu,L}}{(N_{Gr,L} \cdot N_{Pr})^{1/4}}$
0,01	0,0765	0.242
0,73	0,479	0,518
10	1,102	0,619
100	2,064	0,652
1000	3,64	0,663

TABLA I

Touloukian, Hawkins y Jakob [28] han estudiado experimentalmente la convección libre en una pared vertical calentada, encontrando unos resultados representados por:

$$N_{Nu,L} = 0,726 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right)^{1/4} \quad (108)$$

que coincide con nuestra solución (93), tomando la constante  $C$  el valor:  $C = 0,726$ .

Eckert y Jackson [29] encontraron nuestra solución (93) para el valor de  $C = 0,555$ . Saunders [30], con  $C = 0,55$ ; Colburn [31], con  $C = 0,55$ ; McAdams [32] y Chapman [33] con  $C = 0,59$ .

Nuestra solución (93) queda pues ampliamente confirmada por la experiencia. Como, por otra parte, no existe solución teórica exacta, puede considerarse nuestra solución (93) como solución teórica funcional exacta.

La solución se completa con el valor de  $C$  dado por la experiencia.

#### 1.2.8.- CONCLUSIONES.

1ª.- El problema de "Convección libre en una placa vertical, movimiento de deslizamiento", se encuentra incluido en el capítulo de la Física que estudia los "Fenómenos de transmisión de calor existiendo efectos mecánicos, pero sin conversión de calor en trabajo o viceversa", por lo que la base

"estricta" es la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , mientras que la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es "deficiente" o "mutilada", según la terminología de Palacios [2].

2ª.- Con la discriminación de las dimensiones del espacio según se deduce de la teoría de Palacios, se obtienen soluciones aun más precisas [15], con una mejora que es independiente (por referirse a monomios  $\Pi$  distintos) de la que reporta la mera ampliación de la base.

3ª.- Se confirma (Arenas y Herranz, [22] a [24]) que los llamados "números adimensionales" no son tales, de manera general. Aquí, no son adimensionales ni el número de Nusselt ni el número de Grashof. En efecto, en las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  tienen de dimensión:

$$[N_{Nu, L}] = L_x^1 \cdot L_y^{-1}$$

$$[N_{Gr, L}] = L_x^4 \cdot L_y^{-4}$$

siendo adimensional únicamente la relación  $\frac{N_{Nu, L}^4}{N_{Gr, L}}$ , que es quien aparece en las soluciones (91) y (93).

4ª.- El paso de la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  (estricta), a la reducida  $(L, Q, T, \theta)$  puede interpretarse como una proyección de vectores-dimensión pentadimensionales, en un subespacio tetradimensional, lo que conlleva una "mutilación" acompañada de pérdida de información [25].

5ª.- La ampliación de la base dimensional, de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$  de las soluciones. El significado físico de  $N_P$  corresponde precisamente a la relación entre trabajo y calor, inexistente en este caso.

6ª.- Las soluciones obtenidas con cada una de las bases dimensionales son:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_1 \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (87)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_2 \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr} \right) \quad (89)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (91)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = C \cdot \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (93)$$

Mediante la discriminación de las dimensiones del espacio hemos logrado mejorar la solución: tanto la solución (91) como la (93) son mejores, por más precisas, que las obtenidas con sus respectivas bases no discriminadas.

Con la ampliación de la base dimensional por nosotros propuesta, se consigue una mejora adicional de la solución. Comparando las soluciones de la base usual con y sin discriminación (87) y (91) con las respectivas de la base ampliada (89) y (93), hemos puesto de manifiesto que la mejora reside en la desaparición del monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ . Dicho monomio  $\Pi$  es un monomio "espurio" que aparece por haberse utilizado la base usual tetradimensional que para este problema es "deficiente". (Palacios [26]).

7ª.- La solución hallada con la base dimensional ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  es:

$$N_{Nu, L} = C \cdot \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (93)$$

En este caso hemos logrado obtener la solución más precisa que puede proporcionar el Análisis dimensional.

No existe solución teórica exacta de este problema.

Nuestra solución coincide con las fórmulas experimentales de Shuh [27], Touloukian [28], Eckert [29], Saunders [30], Colburn [31], McAdams [32] y Chapman [33], que obtienen para  $C$  los valores: 0,66 ; 0,726 ; 0,555 ; 0,55 ; 0,55 ; 0,59 ; 0,59, respectivamente.

1.3.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL. FLUIDO NO VISCOSO.

Otro caso particular interesante es aquél en el que las fuerzas viscosas son despreciables frente a las de inercia. En tal caso no interviene el coeficiente de viscosidad, de modo que  $\mu$  desaparece de la lista de variables, quedando el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ , en función de:

$$h = f(L, \Delta\theta, E_v, c', \rho, K) \quad (109)$$

Como en los problemas anteriores trataremos de calcular el coeficiente de transmisión del calor  $h$ , utilizando las diferentes bases dimensionales.

1.3.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T, $\theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema son las (44), excepto la viscosidad que ahora no es variable independiente.

La matriz formada por los exponentes dimensionales de cada una de las magnitudes es:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\rho$	K	h
L	1	0	-4	-3	-5	-1	-2
Q	0	0	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0
$\Pi_2$	0	-1	2	-5	1	2	0
$\Pi_3$	0	0	-1	1	0	-1	1

(110)

La característica de la matriz es  $H = 4$ , luego son  $i = N - H = 7 - 4 = 3$  los monomios adimensionales independientes.

Los exponentes de las variables en los respectivos monomios (110) se hallan, mediante un procedimiento análogo al descrito en (1.1), resolviendo el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo formado por dichos exponentes.



Así, resulta:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot L}{c'} = \frac{g\beta L}{c} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot K^2 \cdot E_v^2}{\Delta\theta \cdot c'^5} = \frac{K^2 \cdot (g\beta)^2}{\Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot c^5} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{c' \cdot h}{E_v \cdot K} = \frac{h \cdot c}{g\beta \cdot K}$$

En lugar de  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$  tomamos

$$\Pi'_2 = \Pi_1^3 \cdot \Pi_2^{-1} = N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2$$

$$\Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3 = N_{Nu,L}$$

y sustituimos el sistema completo de monomios  $\Pi$  independientes formado por  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  por el sistema:  $\Pi_1, \Pi'_2, \Pi'_3$ . Con ellos, la solución es:

$$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (111)$$

### 1.3.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

La matriz formada por los exponentes dimensionales es la que resulta de eliminar en (50) la columna correspondiente a la viscosidad  $\mu$ , que ahora no interviene, así pues

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\rho$	K	h
L	1	0	-2	-3	-3	-1	-2
Q	0	0	0	1	0	1	1
T	0	0	-2	0	0	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	0	0
$\Pi_1$	-3/2	-1/2	-1/2	-1	1/2	1	0
$\Pi_2$	-1/2	-1/2	-1/2	-1	1/2	0	1

La característica de la matriz es 5 y el número de monomios independientes es  $i = 2$ . Son según (112):

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \rho^{1/2}}{L^{3/2} \cdot \Delta\theta^{1/2} \cdot E_v^{1/2} \cdot c'} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{h \cdot \rho^{1/2}}{L^{1/2} \cdot \Delta\theta^{1/2} \cdot E_v^{1/2} \cdot c'}$$

y, sustituyendo  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$ , pasan a ser:

$$\Pi_1 = \frac{K}{L^{3/2} \cdot \Delta\theta^{1/2} \cdot (g\beta)^{1/2} \cdot \rho c} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{h}{L^{1/2} \cdot \Delta\theta^{1/2} \cdot (g\beta)^{1/2} \cdot \rho c}$$

En lugar de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , consideramos otros  $\Pi'_1$ ,  $\Pi'_2$ , también independientes, obtenidos según:

$$\Pi'_1 = \Pi_1^{-2} = N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2$$

$$\Pi'_2 = \Pi_1^{-1} \cdot \Pi_2 = N_{Nu,L}$$

resultando ser, por consiguiente, la solución:

$$N_{Nu,L} = F_2 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2 \right) \quad (113)$$

que supera en precisión a la (111) hallada con la base dimensional usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

Veamos, ahora, qué mejora adicional introduce la discriminación de las dimensiones del espacio.

### 1.3.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

Tomando el sistema de ejes situado respecto de la placa como se indica en la fig.II.1 (pg.50), las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema son las (56). Y el cuadro de los exponentes dimensionales se reduce a:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	-2	-1	-3	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	-1	-1	1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	-1	-1
$\Pi_1$	-1	0	-1	1	0	0	0
$\Pi_2$	-1	-1	-3	0	1	-2	4

(114)

La característica de la matriz es 5 , luego el número de monomios es  $i = 2$  .

$$\Pi_1 = \frac{c'}{E_v \cdot L} = \frac{c}{g\beta L} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot h^4}{L \cdot \Delta\theta \cdot E_v^3 \cdot K^2} = \frac{h^4}{L \cdot \Delta\theta \cdot (g\beta)^3 \cdot \rho^2 \cdot K^2}$$

que los transformamos en unos  $\Pi'_1$  y  $\Pi'_2$  de la forma:

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= \Pi_1^{-1} = \frac{g\beta L}{c} \\ \Pi'_2 &= \Pi_1^{-2} \cdot \Pi_2 = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Pr}^{-2} \cdot N_{Gr,L}^{-1} \end{aligned}$$

La solución es, pues:

$$N_{Nu,L} = \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (115)$$

la cual es más precisa que la (111) obtenida con la base dimensional usual sin discriminar (L,Q,T,θ).

#### 1.3.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ,M).

La matriz formada por los exponentes dimensionales, en esta base, se construye a partir de las fórmulas dimensionales (62), prescindiendo de la viscosidad  $\mu$  , que no interviene en este caso particular. Así pues:

	L	Δθ	E <sub>v</sub>	c'	ρ	K	h
L <sub>x</sub>	1	0	0	-1	-1	-1	-1
L <sub>y</sub>	0	0	-1	-1	-1	1	0
L <sub>z</sub>	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	1	0	1	1
T	0	0	-2	0	0	-1	-1
θ	0	1	-1	-1	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	0	0
Π	1	-1	-1	-2	1	-2	4

La característica es  $H = 6$  y por tanto hay un único monomio independiente:  $i = N-H = 7-6 = 1$  .

Los exponentes de las variables en dicho monomio se hallan de un modo análogo al descrito en (1.1), resultando, según (116):

$$\Pi = \frac{\rho \cdot h^4 \cdot L}{K^2 \cdot \Delta\theta \cdot c_v^2 \cdot E_v} = \frac{h^4 \cdot L}{K^2 \cdot \Delta\theta \cdot c^2 \cdot \rho^2 \cdot (g\beta)} = \left(\frac{h \cdot L}{K}\right)^4 \cdot \left(\frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot L^3}\right) \cdot \left(\frac{K}{\mu \cdot c}\right)^2$$

$$\Pi = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1} \cdot N_{Pr}^{-2}$$

de donde se deduce:

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left(N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad (117)$$

que es más precisa que las (113) y (115) obtenidas respectivamente con la base usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

Obtenemos, con esta base, la solución más determinada que suministra el Análisis dimensional: la solución teórica funcional exacta, esto es, queda establecida de qué forma intervienen en la función todas las variables, siendo suficiente, para hallar la solución completa, realizar una única determinación de la constante adimensional  $C$ .

### 1.3.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

En A.4.5 se pone de manifiesto que entre la dimensión de una magnitud y sus exponentes dimensionales respecto a una base determinada, existe la misma relación formal que entre un vector y sus componentes respecto a un sistema de ejes coordenados.

Demostraremos que los vectores-dimensión de las magnitudes que intervienen en este problema, representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en la base dimensional  $(L, Q, T, \theta, M)$  sobre el subespacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ .

La diferencia con el caso general (1.1) es que ahora no interviene la viscosidad como variable independiente. Las fórmulas dimensionales de las

magnitudes que componen la lista de variables, en las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta, M)$ , son respectivamente (44) y (49). Comparándolas observamos que las únicas magnitudes que han modificado su dimensión son: el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura  $E_v$  y la densidad  $\rho$ .

En la base  $(L, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [E_v] &= L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (118)$$

y en la base  $(L, Q, T, \theta, M)$

$$\begin{aligned} [E_v]' &= L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \\ [\rho]' &= L^{-3} \cdot M \end{aligned} \quad (119)$$

Para poner de manifiesto que los vectores-dimensión (118) son las proyecciones sobre el subespacio  $(L, Q, T, \theta)$  de los vectores (119), representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, M)$ , realizamos un cambio de base, de manera que la diferencia entre las fórmulas dimensionales de las variables en ambas bases exista únicamente en una de las magnitudes fundamentales.

Por un razonamiento análogo al realizado en (1.1.5) y (1.2.5), llamamos  $N_P$  al monomio  $\frac{g\beta L}{c}$  cuya dimensión en la base ampliada es:

$$[P] = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \quad (120)$$

Tomamos ahora  $[P]$  como dimensión fundamental,  $P$ , siendo pues la de la masa, derivada:  $[M] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P$ .

Hacemos un cambio de base pasando de  $(L, Q, T, \theta, M)$  a  $(L, Q, T, \theta, P)$ , para lo cual sustituimos la dimensión de la masa en (119), resultando:

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= L^{-4} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P \\ [\rho]'' &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P \end{aligned} \quad (121)$$

Comparando (118) con (121), resulta

$$[E_v]'' = [E_v] \cdot P \quad (122)$$

$$[\rho]'' = [\rho] \cdot P$$

podemos decir, por consiguiente, que los vectores dimensionales  $[E_v]$  y  $[\rho]$  son las proyecciones de los vectores  $[E_v]''$  y  $[\rho]''$  sobre el subespacio de cuatro dimensiones.

La representación gráfica parcial de esta proyección de vectores de 5 a 4 dimensiones es la misma que la representada en la fig.II.2, fig.II.3 y fig.II.4, sin más que eliminar en ellas el vector correspondiente a la viscosidad, que ahora no interviene.

Procediendo análogamente con las bases discriminadas, se demuestra que los vectores dimensionales en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$

$$[E_v] = L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \quad (123)$$

$$[\rho] = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2$$

son las proyecciones de los vectores-dimensión en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$

$$[E_v]'' = L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P_x = [E_v] \cdot P_x \quad (124)$$

$$[\rho]'' = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = [\rho] \cdot P_x$$

sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , siendo

$$P_x = [N_p] = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \cdot [M]$$

La representación vectorial de dicha proyección es la misma que la realizada en (1.1.5), fig.II.5, fig.II.6, fig.II.7, fig.II.8 y fig.II.9, sin más que eliminar en ellas la viscosidad, que ahora no interviene.

1.3.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$  .

Al igual que en los problemas anteriores, convección libre en una placa vertical (caso general y movimiento muy lento del fluido), en el caso particular de fluido no viscoso se observa que la ampliación de la base dimensional, de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , o de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$  de las soluciones.

El significado físico de dicho monomio es el de una relación entre trabajo y calor. En efecto, si tomamos el elemento de masa  $dm$ , es:

$$N_P = \frac{dm \cdot g\beta L \cdot d\theta}{dm \cdot c \cdot d\theta} = \frac{dW}{dQ} ,$$

donde  $dW = dm \cdot g\beta L \cdot d\theta$  es el trabajo realizado por las fuerzas del empuje hidrostático, y  $dQ = dm \cdot c \cdot d\theta$  es el calor absorbido por el  $dm$ .

Sin embargo,  $dW$  no procede de  $dQ$ , o viceversa, por lo que el monomio  $N_P$  representa únicamente una posible relación funcional y no una relación real, observable. Debido a que la ampliación de la base dimensional (I.5) procede de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, la utilización de la base ampliada implica necesariamente la desaparición como monomio adimensional de la relación del calor al trabajo.

En efecto, en las bases ampliadas con y sin discriminación espacial,  $(L, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ ,  $N_P$  tiene dimensión no nula. Son estas dimensiones, respectivamente (68) y (74):

$$P = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

$$P_x = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Por consiguiente, dicho monomio  $N_P$ , en estas bases, no puede ser uno de los monomios adimensionales independientes,  $\Pi_i$ , que constituyen la solución.

### 1.3.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Como teóricamente no existe solución analítica exacta, tenemos que recurrir a las medidas experimentales, donde tampoco se ha logrado una situación exactamente coincidente con los resultados obtenidos por nosotros, debido a que no es posible desprestigiar el rozamiento en las capas próximas a la pared aun en el caso de corriente turbulenta completamente desarrollada [34], por lo que no cabe esperar que las fórmulas experimentales coincidan exactamente con la (117), así como tampoco coinciden con la deducida por Boussinesq [35]:

$$N_{Nu,L} = F \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2 \right) \quad (125)$$

A pesar de esta limitación experimental, las fórmulas empíricas concuerdan satisfactoriamente con (117). Así, por ejemplo, las medidas de Touloukian, Hawkins y Jakob [28] implican una solución empírica que difiere de la nuestra (117) solamente en el orden de las centésimas tanto en el exponente del  $N_{Pr}$  como del  $N_{Gr,L}$ .

A este respecto, McAdams [36] señala que son necesarios más datos experimentales para aclarar la situación. Gröber [34], para el caso de turbulencia completamente desarrollada, propone escribir la ecuación de Boussinesq (125) en la forma:

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^m \right)^n \quad (126)$$

que está conforme con la nuestra (117), en la que determinamos los valores de  $m$  y  $n$ .

Como hemos indicado, no existen fórmulas para la transmisión de calor en convección libre y régimen turbulento que merezcan la confianza de las obtenidas en régimen laminar. A las señaladas anteriormente se puede añadir una basada enteramente en datos experimentales [37]:

$$N_{Nu,L} = 0,10 \cdot N_{Ra,L}^{1/3} \quad (127)$$



siendo el  $N_{Ra,L} = N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}$ , que se propone como válida para valores del número de Rayleigh superiores a  $10^8$ .

Sin embargo los últimos resultados obtenidos en este campo no la recomiendan [38], debido a que los datos en que se basan son pocos, además de imprecisos, y para pocos valores del  $N_{Pr}$ .

Asimismo Ipsen [39] hace constar que las diferencias encontradas entre los exponentes de la fórmula dada por [37] y las previstas por el Análisis dimensional son debidas a que la conductividad continúa teniendo importancia en el flujo de calor, al realizar la experiencia, lo cual, unido a los comentarios de Gröber señalados anteriormente [34], permite suponer que las medidas experimentales irán aproximándose a nuestra solución (117) al aumentar el  $N_{Gr,L}$ , coincidiendo exactamente cuando  $N_{Gr,L} \rightarrow \infty$ .

De cualquier modo, recientes experimentos realizados confirman nuestra ecuación (117). Bayley [40] ha obtenido para  $N_{Pr} = 0,01$  y  $10^{10} < N_{Gr,L} < 10^{15}$  la siguiente ecuación:

$$N_{Nu,L} = 0,060 \cdot N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \quad (128)$$

que está de acuerdo con el exponente del  $N_{Gr,L}$  de nuestra ecuación (117), frente al  $1/3$  dado por [37]. Warner y Arpaci [41], en un experimento realizado con aire, obtuvieron unos resultados en perfecto acuerdo con Bayley.

Dado que los estudios actuales sobre convección libre son escasos, comparados con los de convección forzada, como señala Gebhart [42], deben conseguirse más datos para la elaboración de una teoría al respecto. Es por ello por lo que consideramos de especial interés nuestra solución (117).

### 1.3.8.- CONCLUSIONES.

1ª.- la resolución del problema de convección libre en una placa vertical (fluido no viscoso), en el cual no se produce conversión de calor

en trabajo, corrobora el que para aquellos "Fenómenos de transmisión de calor existiendo efectos mecánicos, pero sin conversión de calor en trabajo o viceversa", la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M), deducida en (I.5), es "estricta", y la base usual (L,Q,T,θ) es "deficiente" o "mutilada", (Palacios [2]).

2ª.- Si las características del problema lo permiten, se pueden discriminar las dimensiones del espacio, con lo cual resultan soluciones más precisas [15], que las que se obtienen con la sola ampliación de la base, al quedar eliminados monomios  $\Pi$  diferentes.

3ª.- El número de Nusselt y el número de Grashof pierden el carácter de "números adimensionales", en este caso particular, confirmando lo dicho por Arenas y Herranz en ([22] a [24]). En efecto, tienen la dimensión  $[N_{Nu,L}] = L_x \cdot L_y^{-1}$  y  $[N_{Gr,L}] = L_x^4 \cdot L_y^{-4}$ , respectivamente, en las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ . Sí es adimensional la relación  $\frac{N_{Nu,L}^4}{N_{Gr,L}}$  que aparece en las soluciones (115) y (117).

4ª.- La reducción de la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M) a la usual (L,Q,T,θ), en este caso particular, origina una pérdida de información [25], y puede interpretarse, teniendo en cuenta la analogía entre dimensiones y vectores, como una proyección sobre un subespacio tetradimensional de vectores-dimensión pentadimensionales.

5ª.- El monomio  $N_p = \frac{g\beta L}{c}$ , que representa la relación entre calor y trabajo, desaparece de las soluciones al utilizar la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M) propuesta por nosotros. Esto es debido a que dicha relación es sólo formal, sin significar conversión de calor en trabajo, condición que está en el punto de partida del problema.

6ª.- Las soluciones que proporcionan las distintas bases dimensionales son:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_1 \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr}^2, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (111)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_2 \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr}^2 \right) \quad (113)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (115)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = C \cdot \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (117)$$

La primera de las soluciones es la usual y las restantes las obtenidas por nosotros. Si comparamos la primera de las expresiones con la tercera y la segunda con la cuarta respectivamente, se observa que con la discriminación de las dimensiones del espacio hemos mejorado la solución.

Comparando ahora la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, respectivamente, se pone de manifiesto que mediante la ampliación de la base dimensional por nosotros propuesta se logra una mayor precisión consistente en la desaparición del monomio  $\frac{g\beta L}{c}$  de las soluciones, que según Palacios [26] es un monomio "espurio" que aparece al utilizarse una base dimensional "deficiente", en este caso la usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

7ª.- No existe solución teórica exacta.

Con la base dimensional ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , hemos logrado la solución más precisa que puede proporcionar el Análisis dimensional, a falta sólo de determinar el valor numérico de una constante adimensional. Esta es:

$$N_{Nu, L} = C \cdot \left( N_{Gr, L} \cdot N_{Pr}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (117)$$

La validez de nuestro resultado (117) ha de ser confirmada por la experimentación. A pesar de las limitaciones existentes para la realización de dicha contrastación ([34], [36], [39] y [42]), las fórmulas empíricas ([28], [40] y [41]) concuerdan satisfactoriamente con (117).

## 2.- TRANSMISION DE CALOR POR CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA INCLINADA.

Sea una placa de longitud  $L$  inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto del plano horizontal con temperatura uniforme  $\theta_p$ , en contacto con un fluido que posee una temperatura  $\theta_o$  a suficiente distancia de la placa. Las magnitudes físicas propias del fluido que intervienen en el fenómeno son: viscosidad  $\mu$ , calor específico por unidad de volumen  $c'$ , conductividad térmica  $K$ , coeficiente de dilatación  $\beta$ , y la densidad  $\rho$ . La incógnita es la cantidad de calor que por unidad de temperatura, de superficie y de tiempo pasa desde la placa al fluido, o coeficiente de transmisión del calor,  $h$ . Llamaremos temperatura diferencial a  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_o$ .

El coeficiente de dilatación  $\beta$ , que es el aumento de volumen por unidad de volumen y de incremento de temperatura, produce una disminución del peso específico que da lugar a un empuje vertical, origen de la convección libre; es pues apropiado tomar como variable, en lugar de  $\beta$ , el empuje por unidad de volumen y de incremento de temperatura:  $E = \rho g \beta$ .

Ahora bien, debido a la inclinación de la placa, las capas de fluido en la capa límite se mueven paralelamente a dicha placa, de modo que en la ecuación del movimiento interviene solamente la componente del empuje paralela a la superficie inclinada:

$$E_t = E \cdot \text{sen } \alpha = \rho g \beta \cdot \text{sen } \alpha$$

Así pues el coeficiente de transmisión del calor depende de las siguientes variables:

$$h = f(L, \Delta\theta, E_t, c', \mu, \rho, K) \quad (129)$$

$$\text{siendo } c' = \rho \cdot c \quad \text{y} \quad E_t = \rho g \beta \cdot \text{sen } \alpha \quad (130)$$

Resolveremos el problema por Análisis dimensional con la base usual,  $(L, Q, T, \theta)$ , y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ . A continuación, discriminaremos ambas

bases,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , y expondremos las nuevas soluciones obtenidas, comparándolas después con las anteriores.

2.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL  $(L, Q, T, \theta)$ .

El cuadro de los exponentes dimensionales en esta base, teniendo en cuenta (44), es:

	L	$\Delta\theta$	$E_t$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
L	1	0	-4	-3	-3	-5	-1	-2
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0	0
$\Pi_2$	0	1	-2	3	-2	1	0	0
$\Pi_3$	0	-1	1	-3	1	0	0	1
$\Pi_4$	0	-1	2	-4	1	0	1	0

(131)

La característica de la matriz es  $H = 4$ , luego el número de monomios adimensionales es  $i = N - H = 8 - 4 = 4$ . Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{E_t \cdot L}{c'} ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot c'^3 \cdot \Delta\theta}{\mu^2 \cdot E_t^2} ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h \cdot E_t}{c'^3 \cdot \Delta\theta} ; \quad \Pi_4 = \frac{\mu \cdot K \cdot E_t^2}{c'^4 \cdot \Delta\theta}$$

En lugar de estos tomamos:

$$\Pi_1 = \frac{E_t \cdot L}{c'} = \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$$

$$\Pi_2' = \Pi_1^3 \cdot \Pi_2 = \frac{E_t^3 \cdot \rho \cdot \Delta\theta \cdot L^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot L^3}{\mu^2} \text{sen } \alpha = N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\Pi_3' = \Pi_1 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4^{-1} = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu,L}$$

$$\Pi_4' = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_4^{-1} = \frac{\mu \cdot c}{K} = N_{Pr}$$

Como  $N_{Nu,L}$  contiene a la incógnita  $h$ , la solución es de la forma:

$$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha , N_{Pr} , \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right) \quad (132)$$

2.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

Ahora las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema son las (49), y la matriz de los exponentes es:

	L	Δθ	E <sub>t</sub>	c'	μ	ρ	K	h
L	1	0	-2	-3	-1	-3	-1	-2
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
θ	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	1	0	0
Π <sub>1</sub>	3	1	1	1	-1	0	-1	0
Π <sub>2</sub>	3	1	1	0	-2	1	0	0
Π <sub>3</sub>	1	0	0	0	0	0	-1	1

(133)

La característica de la matriz es  $H = 5$ , y el número de monomios adimensionales que pueden formar las variables es  $i = N-H = 8-5 = 3$ . Según (133), son:

$$\Pi_1 = \frac{E_t \cdot \Delta\theta \cdot c' \cdot L^3}{\mu \cdot K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{E_t \cdot \Delta\theta \cdot \rho \cdot L^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h \cdot L}{K}$$

teniendo en cuenta (130) y tomando  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1}$  se pueden expresar de la forma:

$$\Pi'_1 = N_{Pr} \quad ; \quad \Pi_2 = N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha \quad ; \quad \Pi_3 = N_{Nu,L}$$

resultando pues la solución:

$$N_{Nu,L} = F_2 \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha, N_{Pr} \right) \quad (134)$$

que es más precisa que la solución (132) obtenida con la base (L,Q,T,θ).

2.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ).

Tomamos un sistema de ejes coordenados intrínseco a la placa, X, Y, Z, como se indica en la fig.II.18. Los ejes X y Z en el plano de la placa y

el Y perpendicular a la misma.

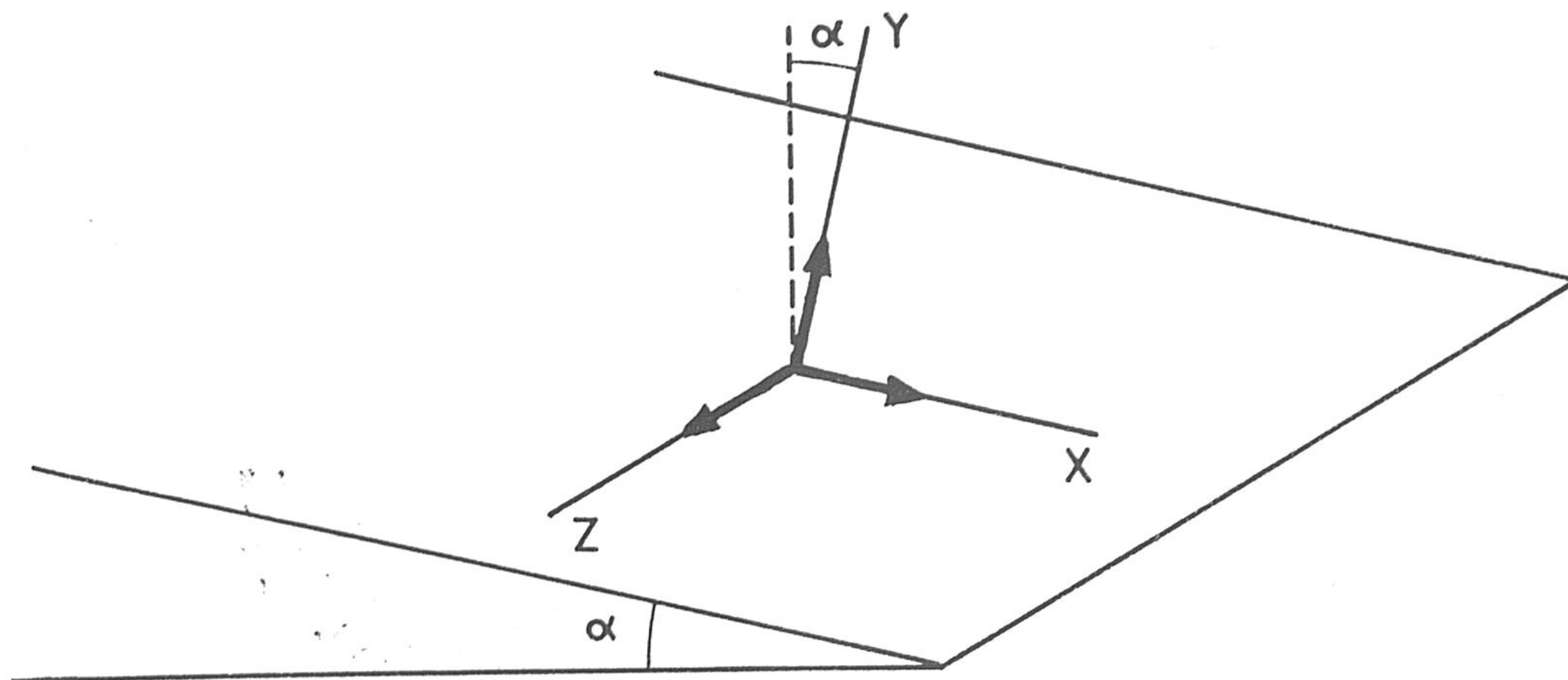


fig.II.18

De la teoría de Análisis dimensional de Palacios se deduce la posibilidad de discriminar las dimensiones del espacio. En nuestro caso se trata de reemplazar la base  $(L, Q, T, \theta)$  por la que se obtiene considerando por separado tres componentes  $L_x, L_y, L_z$  de la longitud, que añadiendo el calor  $Q$ , la temperatura  $\theta$  y el tiempo dan una base de seis dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ . Es aplicable cuando resulta posible distinguir las direcciones espaciales en las dimensiones de todas las variables.

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el fenómeno, en esta base, son:

$$\begin{aligned}
 [L] &= L_x & ; & \quad [\mu] = L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & \quad [\rho] = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \\
 [E_t] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [K] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{135}$$

y el cuadro de los exponentes dimensionales es:

	L	$\Delta\theta$	$E_t$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	-2	-1	-3	-3	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	-1	1	-1	1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0	0
$\Pi_2$	0	-1	-2	0	1	0	-3	4
$\Pi_3$	-1	-1	-3	0	0	1	-2	4

(136)

Como la característica de la matriz es  $H = 5$ , hay  $i = N-H = 8-5 = 3$  monomios adimensionales independientes. Los exponentes con que las variables aparecen en cada uno de los tres monomios indicados en (136), se obtienen por un procedimiento análogo al realizado en (1.1). Así pues:

$$\Pi_1 = \frac{E_t \cdot L}{c'} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot h^4}{K^3 \cdot E_t^2 \cdot \Delta\theta} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot h^4}{K^2 \cdot E_t^3 \cdot \Delta\theta \cdot L}$$

En lugar de  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ , tomamos  $\Pi'_2 = \Pi_1^{-1} \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-1}$  y  $\Pi'_3 = \Pi_2^2 \cdot \Pi_3^{-1}$ ,

quedando entonces:

$$\Pi_1 = \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \quad ; \quad \Pi'_2 = N_{Pr} \quad ; \quad \Pi'_3 = \frac{N_{Nu,L}^4}{N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha}$$

de donde se deduce

$$N_{Nu,L} = \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right) \quad (137)$$

que supera en precisión a la solución (132) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ .



2.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Considerando el sistema de ejes coordenados en la placa como se indica en (2.3), aplicamos el método de la discriminación de las dimensiones del espacio reemplazando la base ( $L, Q, T, \theta, M$ ) por ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ). Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, son ahora:

$$\begin{aligned}
 [L] &= L_x & ; & \quad [\mu] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & \quad [\rho] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \\
 [E_t] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M & ; & \quad [K] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

y la matriz de los exponentes dimensionales es:

	L	$\Delta\theta$	$E_t$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	-1	1	-1	1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	1	0	0
$\Pi_1$	0	0	0	1	1	-1	-1	0
$\Pi_2$	1	-1	-1	-2	0	1	-2	4

La característica es  $H = 6$ , luego hay  $i = N - H = 8 - 6 = 2$  monomios dimensionales independientes. Según las dos últimas filas de (139) son:

$$\Pi_1 = \frac{\mu \cdot c'}{\rho \cdot K} = N_{Pr} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{h^4 \cdot \rho \cdot L}{\Delta\theta \cdot E_t \cdot c'^2 \cdot K^2}$$

En lugar de  $\Pi_2$ , tomamos  $\Pi'_2 = \Pi_1^2 \cdot \Pi_2$ , y teniendo en cuenta (130),

$$\Pi'_2 = \frac{N_{Nu,L}^4}{N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha}$$

que junto con  $\Pi_1$  proporciona la solución:

$$N_{Nu,L} = \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4(N_{Pr}) \quad (140)$$

que es más precisa que la solución (137), obtenida con la base dimensional  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , debido a la ampliación de la base, y que la solución (134), obtenida con la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ , debido a la discriminación de las dimensiones del espacio.

## 2.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES.

Entre la dimensión de una magnitud y sus exponentes dimensionales respecto a una base determinada, existe la misma relación formal que entre un vector y sus componentes respecto a un sistema de ejes coordenados.

Procedemos de modo análogo al realizado en (1.1.5). La única diferencia estriba en que allí es variable independiente el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura,  $E_v$ , y aquí lo es su componente tangencial:  $E_t = E \cdot \text{sen } \alpha$ . (Hemos llamado aquí  $E$  al empuje por unidad de volumen y temperatura que corresponde al  $E_v$  del caso anterior (1.3)). Sin embargo como el  $\text{sen } \alpha$  es adimensional resulta ser:

$$[E_t] = [E_v]$$

y todo lo dicho allí es válido ahora para el caso de convección libre sobre una placa inclinada un ángulo  $\alpha$ . Llamamos  $P$  a la dimensión del monomio  $\frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$ , esto es:

$$P = \left[ \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Tomamos  $P$  como fundamental, lo que nos permite realizar un cambio de base dimensional pasando de  $(L, Q, T, \theta, M)$  a  $(L, Q, T, \theta, P)$ , que como no varía la multiplicidad, y son independientes, es correcto hacerlo. Puede observarse, en definitiva, que los vectores-dimensión de las magnitudes que intervienen en

el problema, representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en la base pentadimensional  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , (71).

Las representaciones gráficas parciales de la proyección anteriormente mencionada corresponden a la figura II.2, la II.3 y la II.4, realizadas en (1.1.5), sin más que sustituir  $[E_v]$  por  $[E_t]$ .

Asimismo, se demuestra que los vectores-dimensión de las magnitudes que intervienen en el problema, representados en el espacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en la base de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$  sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , (77). En efecto, en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , es:

$$P_x = \left[ \frac{g\beta L \cdot \text{sen} \alpha}{c} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

y las representaciones gráficas de la proyección son las mismas que las realizadas en (1.1.5) (figuras: II.5, II.6, II.7, II.8 y II.9) sin más que sustituir  $[E_v]$  por  $[E_t]$ .

El significado físico es el siguiente: la teoría por nosotros desarrollada nos indica que la base estricta para el problema de convección libre, más aún, para el tipo o capítulo de fenómenos en los cuales no existe conversión de calor en trabajo, es la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  o su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , siendo por tanto el uso de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  o su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  lo que denomina Palacios una "mutilación" que reduce la información que puede suministrar el Análisis dimensional en los problemas.

## 2.6.- CARACTER DEL MONOMIO $N_p$ .

Si comparamos las soluciones (132) y (137) con (134) y (140) respectivamente, se observa que la ampliación de la base dimensional, de  $(L, Q, T, \theta)$

a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , y de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $\frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$ , que llamaremos  $N_P$ , de las soluciones.

Es interesante señalar que el monomio que hace desaparecer la ampliación de la base, tiene una forma peculiar. El monomio  $N_P$  es adimensional en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ . En la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  su dimensión es:

$$[N_P] = P = \left[ \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right] = \left[ \frac{E_t \cdot L}{c'} \right] = \frac{L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \cdot L}{L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1}} = \frac{L^2 \cdot M \cdot T^{-2}}{Q} = \frac{[W]}{[Q]}$$

Así pues, la dimensión de  $N_P$  ahora no es nula, y corresponde precisamente a la relación entre las dimensiones del trabajo y del calor.

Por otra parte, el sentido físico de  $N_P$  es el siguiente. Tomando un elemento de masa  $dm$ ,  $N_P$  se puede escribir:

$$N_P = \frac{g\beta \cdot dm \cdot d\theta \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{dm \cdot c \cdot d\theta}$$

El numerador es el trabajo de  $dm$  si se desplaza verticalmente una altura  $L \cdot \text{sen } \alpha$ , y el denominador,  $dm \cdot c \cdot d\theta$ , es el calor absorbido por  $dm$ . Ahora bien, dichos calor y trabajo son independientes, no se transforman el uno en el otro. En este problema no rige la ley de Joule. Precisamente según hemos visto (I.5), la ampliación de la base dimensional se ha deducido para aplicarse al capítulo de "Transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa". En este capítulo, la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  es estricta y el monomio  $N_P$  de dimensión  $[W]/[Q]$  desaparece de las soluciones. Por el contrario, en este capítulo la base  $(L, Q, T, \theta)$ , es deficiente, el monomio  $N_P$  tiene dimensión nula y queda en las soluciones como un monomio espurio.

En las soluciones teóricas o empíricas no aparece  $N_P$ , lo que confirma nuestros resultados.

Estas consideraciones sobre  $N_P$  son válidas, paralelamente, para las bases dimensionales discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  según se puede comprobar fácilmente.

## 2.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La disponibilidad de correlaciones empíricas que traten el problema de convección libre sobre una placa inclinada es muy limitada. Por ello, es imposible evaluar con precisión el coeficiente de transmisión del calor para un ángulo de inclinación arbitrario.

Rich [43] supuso teóricamente que el coeficiente de transmisión del calor para una placa inclinada podría tratarse del mismo modo que para una placa vertical, si el empuje hidrostático era sustituido por su componente tangencial a la superficie inclinada. En sus datos experimentales, sin embargo, no se encuentra influencia apreciable del ángulo sobre el coeficiente de transmisión del calor entre 90° (pared vertical) y 50°.

Michiyoshi [44] resolvió por un método aproximado las ecuaciones de la capa límite mediante la sustitución de una capa elíptica cilíndrica por una banda. Sus resultados muestran que el coeficiente de transmisión del calor se hace mayor que el dado por Rich conforme disminuye el ángulo de inclinación con el plano horizontal.

Los resultados experimentales obtenidos por Vliet [45] confirman el pronóstico realizado por Rich, en la región laminar, no existiendo influencia del ángulo de inclinación sobre el coeficiente de transmisión del calor en la región turbulenta.

Los datos experimentales más completos son los hallados por Fujii e Imura [46] que proporcionan la solución:

$$N_{Nu,L} = 0,56 \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \quad (141)$$

válida en el rango  $10^5 < N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \cdot \text{sen } \alpha < 10^{11}$ , y concluyen que en la región laminar de la capa límite a lo largo de la placa el coeficiente de transmisión se expresa como:

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \quad (142)$$

donde el coeficiente  $C$  corresponde al de la solución teórica para una placa vertical.

## 2.8.- CONCLUSIONES.

1ª.- El problema de convección libre en una placa inclinada forma parte del tipo de "Fenómenos de transmisión de calor existiendo efectos mecánicos pero sin conversión de calor en trabajo o viceversa". Para él, según hemos deducido en (I.5) y teniendo en cuenta las definiciones de Palacios [2], la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "estricta", mientras que la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es "deficiente" o "mutilada".

2ª.- Mediante la discriminación de las dimensiones del espacio hemos logrado mejorar las soluciones que aporta el Análisis dimensional clásico [15], siendo la precisión conseguida distinta que la que suministra la utilización de la base ampliada por nosotros.

3ª.- En la resolución del problema volvemos a confirmar (Arenas y Herranz [22] a [24]) que el número de Nusselt y el número de Grashof no son adimensionales, en general. En las bases dimensionales  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  tienen por dimensión:

$$[N_{Nu, L}] = L_x \cdot L_y^{-1} \quad ; \quad [N_{Gr, L}] = L_x^4 \cdot L_y^{-4}$$

siendo adimensional únicamente la relación  $\frac{N_{Nu, L}^4}{N_{Gr, L}}$ , que está incluida en las soluciones obtenidas con las bases discriminadas.

4ª.- Según la analogía entre dimensiones y vectores, los vectores-dimensión representados en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  "mutilada" son las proyecciones sobre un subespacio de cuatro dimensiones, de los vectores-dimensión representados en el espacio de cinco dimensiones  $(L, Q, T, \theta, M)$ , lo que conduce, en este problema, a una pérdida de información [25].

5ª.- El monomio  $\frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$  que desaparece de las soluciones al utilizar la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , en lugar de la usual  $(L, Q, T, \theta)$ , posee un significado concreto: el de la relación algebraica o formal, no física, entre calor y trabajo.

6ª.- El empleo de las diferentes bases dimensionales conduce a las siguientes soluciones:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_1 \left( N_{Gr, L} \cdot \text{sen } \alpha, N_{Pr}, \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right) \quad (132)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_2 \left( N_{Gr, L} \cdot \text{sen } \alpha, N_{Pr} \right) \quad (134)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = \left( N_{Gr, L} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right) \quad (137)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) : N_{Nu, L} = \left( N_{Gr, L} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4(N_{Pr}) \quad (140)$$

Con la discriminación de las dimensiones del espacio hemos logrado determinar la función del  $N_{Gr, L}$  (137) y (140), que quedaba indeterminada en las soluciones (132) y (134) dadas por las bases dimensionales no discriminadas, mejorando de este modo la solución.

Por otra parte, comparando las soluciones de la base usual (132) y (137) con las respectivas de la base ampliada (134) y (140), ponemos de manifiesto que la ampliación de la base dimensional, efectuada por nosotros, proporciona una nueva mejora en la solución, (desaparece el monomio  $\frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$ ). Según Palacios [26], dicho monomio  $\Pi$  figura en las soluciones (132) y (137) por haberse utilizado una base "deficiente", la usual  $(L, Q, T, \theta)$ , siendo pues, un monomio "espurio".

7ª.- El que en las soluciones figure explícitamente la función  $\text{sen } \alpha$  del ángulo  $\alpha$  es otra aportación positiva que da nuestro planteamiento. En efecto, dado que  $\alpha$  es adimensional, el tratamiento usual de Análisis dimensional no logra sino dejarlo dentro de la función indeterminada como un monomio  $\Pi$  más.

g<sup>a</sup>.- Nuestra solución más precisa es la hallada con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ):

$$N_{Nu,L} = \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen} \alpha \right)^{1/4} \cdot F_4(N_{Pr}) \quad (140)$$

Como no existe solución exacta, confirmamos nuestra solución (140) con los resultados obtenidos experimentalmente. Así, en efecto, la solución (140) concuerda con la fórmula empírica dada por Fujii e Imura [34].

### 3.- CONVECCION LIBRE ENTRE DOS PLACAS VERTCALES.

Los fenómenos de convección libre en el interior de espacios cerrados son complejos debido a que pueden existir diferentes tipos de configuraciones de flujo. En el caso de dos placas horizontales las dimensiones lineales de la placa no influyen en la transmisión del calor, pues las corrientes de convección se forman independientemente y cada una de ellas ocupa una pequeña zona. En cambio, cuando la placa es vertical, los movimientos de convección se producen a lo largo de toda ella, y por tanto sus dimensiones lineales sí afectan al coeficiente de transmisión del calor  $h$ .

Consideremos el caso de un fluido situado entre dos placas verticales paralelas, separadas una distancia  $b$  y ambas de altura  $L$ . En los números de Nusselt y Grashof intervendrá, como dimensión característica, la distancia entre las placas  $b$ . Las propiedades del fluido: densidad  $\rho$ , viscosidad  $\mu$ , conductividad térmica  $K$ , calor específico  $c'$ , son las correspondientes al valor medio entre las temperaturas de las dos placas. En cuanto a la temperatura, tomamos como variable  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$  que es la diferencia de temperatura entre las dos placas.

Este problema no tiene solución teórica exacta a causa de la dificultad existente para llevar a cabo la resolución analítica, completa, de las ecuaciones que lo rigen. Por lo tanto, la solución que aporta el Análisis



dimensional suministra una importante información que simplifica la labor del experimentador.

3.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T,θ).

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema son las mismas que en el caso (1.1), (44), sin más que añadir la dimensión de la distancia de separación entre las placas:  $[b] = L$ .

En esta base el cociente  $\tilde{w} = L/b$  es un factor de forma, con lo que el cuadro de los exponentes dimensionales se reduce a:

	b	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
L	1	0	-4	-3	-3	-5	-1	-2
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0	0
$\Pi_2$	0	1	-2	3	-2	1	0	0
$\Pi_3$	0	-1	1	-3	1	0	0	1
$\Pi_4$	0	-1	2	-4	1	0	1	0

(144)

La característica de la matriz es cuatro y el número de monomios independientes es  $i = 8-4 = 4$ . Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot b}{c'} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\Delta\theta \cdot c'^3 \cdot \rho}{E_v^2 \cdot \mu^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h \cdot E_v}{\Delta\theta \cdot c'^3} \quad ; \quad \Pi_4 = \frac{\mu \cdot K \cdot E_v^2}{\Delta\theta \cdot c'^4}$$

o bien, teniendo en cuenta que  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$  :

$$\Pi_1 = \frac{g \beta b}{c} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot c^3}{\mu^2 \cdot (g \beta)^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h \cdot g \beta}{\rho^2 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta} \quad ; \quad \Pi_4 = \frac{\mu \cdot K \cdot (g \beta)^2}{\rho^2 \cdot \Delta\theta \cdot c^4}$$

a los que hay que añadir el monomio de forma:  $\tilde{w} = L/b$ .

Transformemos los monomios del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= \Pi_1 \cdot \tilde{w} = \frac{g\beta L}{c} & \Pi'_3 &= \Pi_1 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4^{-1} = N_{Nu,b} \\ \Pi'_2 &= \Pi_1^3 \cdot \Pi_2 = N_{Gr,b} & \Pi'_4 &= \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_4^{-1} = N_{Pr} \end{aligned}$$

que, junto con el factor de forma  $\tilde{w} = L/b$ , conducen a la solución:

$$N_{Nu,b} = F_1 \left( N_{Gr,b}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c}, \frac{L}{b} \right) \quad (145)$$

### 3.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

En la base (L,Q,T,θ,M), las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema vienen dadas por (49), teniendo en cuenta además que  $[b] = L$ . El cociente  $\tilde{w} = L/b$  es un monomio de forma y los exponentes dimensionales de las variables, en dicha base, forman la siguiente matriz:

	b	Δθ	E <sub>v</sub>	c'	μ	ρ	K	h
L	1	0	-2	-3	-1	-3	-1	-2
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
θ	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	1	0	0
Π <sub>1</sub>	3	1	1	1	-1	0	-1	0
Π <sub>2</sub>	3	1	1	0	-2	1	0	0
Π <sub>3</sub>	1	0	0	0	0	0	-1	1

(146)

La característica de la matriz es  $H = 5$  y las magnitudes pueden formar entre sí tres monomios independientes. Los exponentes con que las variables aparecen en cada uno de los monomios se obtienen por un procedimiento análogo al seguido en (1.1), y resultan ser los indicados en las tres últimas filas de (146):

$$\Pi_1 = \frac{\Delta\theta \cdot E_v \cdot c' \cdot b^3}{\mu \cdot K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\Delta\theta \cdot E_v \cdot \rho \cdot b^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h \cdot b}{K}$$

o bien, teniendo en cuenta que  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$

$$\Pi_1 = \frac{\rho^2 \cdot c \cdot g \beta \cdot \Delta \theta \cdot b^3}{\mu \cdot K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho^2 \cdot g \beta \cdot \Delta \theta \cdot b^3}{\mu} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h \cdot b}{K} \quad ; \quad \tilde{w} = \frac{L}{b}$$

En lugar de  $\Pi_1$ , tomamos  $\Pi'_1$  según:

$$\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1} = N_{Pr}$$

Y como  $\Pi_2 = N_{Gr,b}$ ,  $\Pi_3 = N_{Nu,b}$ , y,  $\tilde{w} = L/b$ , la solución vendrá dada por:

$$N_{Nu,b} = F_2 \left( N_{Gr,b}, N_{Pr}, \frac{L}{b} \right) \quad (147)$$

que supera en precisión a la obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  (145).

### 3.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

Consideramos un sistema de ejes situado del siguiente modo: el eje X vertical, el Y normal a las dos placas, y el Z perpendicular a ambos. Ahora, las fórmulas dimensionales de las variables vienen dadas por (56), añadiendo la distancia de separación entre las placas, b, que tiene de dimensión:

$$[b] = L_y \quad (148)$$

Observamos que la discriminación de las dimensiones del espacio ha hecho desaparecer el monomio de forma  $L/b$ , ya que, en esta base, no es adimensional, sino de dimensión  $L_x \cdot L_y^{-1}$ .

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , es:

	b	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	0	1	0	-2	-1	-3	-3	-1	-1
$L_y$	1	0	0	-1	-1	1	-1	1	0
$L_z$	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\Pi_2$	0	-1	-1	-3	0	0	1	-2	4
$\Pi_3$	0	0	-1	-2	0	1	0	-3	4
$\Pi_4$	0	1	0	1	-1	0	0	0	0

(149)

Ahora, la característica de la matriz es  $H = 5$  y el número de monomios es  $i = N-H = 9-5 = 4$ . Según las cuatro últimas filas de (149) son:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot b}{K} ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot h^4}{\Delta\theta \cdot E_v^3 \cdot K^2 \cdot L} ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h^4}{\Delta\theta \cdot E_v^2 \cdot K^3} ; \quad \Pi_4 = \frac{E_v \cdot L}{c'}$$

que, como  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$ , quedan:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot b}{K} = N_{Nu,b} ; \quad \Pi_2 = \frac{h^4}{\rho^2 \cdot (g\beta)^3 \cdot \Delta\theta \cdot K^2 \cdot L} ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h^4}{\rho^2 \cdot (g\beta)^2 \cdot \Delta\theta \cdot K^3} ; \quad \Pi_4 = \frac{g\beta L}{c}$$

En lugar de considerar  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ , tomamos unos  $\Pi'_2$  y  $\Pi'_3$  de la forma siguiente:

$$\Pi'_2 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4^{-1} = N_{Pr}$$

$$\Pi'_3 = \Pi_1^4 \cdot \Pi_2^{-2} \cdot \Pi_3^{-2} = N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}$$

que junto con  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  nos permiten expresar la solución:

$$N_{Nu,b} = F_3 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, \frac{g\beta L}{c}, N_{Pr} \right) \quad (150)$$

La discriminación de las dimensiones del espacio proporciona una mejor solución, ya que la (145) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es menos precisa que la (150).

3.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Tomando el sistema de ejes anteriormente descrito (3.3), las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en la base ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ), vienen dadas por (62) y (148). La matriz de los exponentes dimensionales es ahora:

	b	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
$L_y$	1	0	0	-1	-1	1	-1	1	0
$L_z$	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
$\theta$	0	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$\Pi_1$	1	0	0	0	0	0	0	-1	1
$\Pi_2$	0	1	-1	-1	-2	0	1	-2	4
$\Pi_3$	0	1	-1	-1	-1	1	0	-3	4

(151)

Resultan ahora sólo  $i = 3$  monomios adimensionales, puesto que la característica de la matriz es 6. Son, según (151):

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot b}{K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot L \cdot h^4}{\Delta\theta \cdot E_v \cdot c'^2 \cdot K^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot L \cdot h^4}{\Delta\theta \cdot E_v \cdot c' \cdot K^3}$$

y como son  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$ , resulta, sustituyendo:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot b}{K} = N_{Nu, b} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{L \cdot h^4}{K^2 \cdot g \beta \cdot \Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot c^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot L \cdot h^4}{K^3 \cdot g \beta \cdot \Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot c}$$

Transformamos los monomios  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$  pasando a unos  $\Pi'_2$  y  $\Pi'_3$  según:

$$\Pi'_2 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_3 = N_{Pr}$$

$$\Pi'_3 = \Pi_1^4 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-2} = N_{Gr, b} \cdot \frac{b}{L}$$

resultando finalmente la solución:

$$N_{Nu,b} = F_4 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, N_{Pr} \right) \quad (152)$$

que, por una parte, supera en precisión a la solución (147) hallada con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , y por otra, a la (150) obtenida con la base usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

### 3.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Como las únicas magnitudes que cambian de dimensión al ampliar la base dimensional, esto es, al pasar de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  o de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , son el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura,  $E_v$ ; la viscosidad,  $\mu$ , y la densidad,  $\rho$ , el tratamiento en este apartado es análogo al realizado en (1.1.5).

Así pues de la comparación entre (70) y (66), se deduce que los vectores-dimensión  $[E_v]$ ,  $[\mu]$  y  $[\rho]$  representados en el espacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores  $[E_v]''$ ,  $[\mu]''$  y  $[\rho]''$  representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.2, II.3 y II.4).

Asimismo, comparando (76) con (72) se llega a la conclusión de que los vectores-dimensión (72) representados en el espacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores (76) representados en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.5, II.6, II.7, II.8 y II.9).

### 3.6.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Si comparamos las soluciones (145) y (150) obtenidas respectivamente con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  y su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , con las halladas (147) y (152) con las bases ampliadas  $(L, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ ,

Al no existir solución teórica, procede comparar nuestras soluciones con los datos experimentales.

se observa que al ampliar la base desaparece de las soluciones el monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ .

Veamos cuál es el significado físico de este monomio, que llamamos  $N_P$ . Si tomamos un  $dm$  de fluido,  $N_P$  se puede expresar como:

$$N_P = \frac{dm \cdot g\beta L \cdot d\theta}{dm \cdot c \cdot d\theta} = \frac{dW}{dQ}$$

siendo  $dW = dm \cdot g\beta L \cdot d\theta$  el trabajo de las fuerzas verticales de ascensión y  $dQ = dm \cdot c \cdot d\theta$  el calor absorbido por el  $dm$ . Así pues, el monomio  $N_P$  representa precisamente la relación entre trabajo mecánico y calor. Relación sólo dimensional y formal, no de transformación, puesto que ese calor es independiente del trabajo de la gravedad.

Dicho monomio es adimensional en las bases usual  $(L, Q, T, \theta)$ , y usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , mientras que en la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , tiene dimensión, que llamamos  $P$  y  $P_x$  respectivamente:

$$P = [N_P] = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} = \frac{[dW]}{[dQ]}$$

y en la base ampliada y discriminada:

$$P_x = [N_P] = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} = \frac{[dW]}{[dQ]}$$

es por ello, por lo que el monomio  $N_P$  deja de formar parte de los monomios adimensionales independientes,  $\Pi_i$ , que constituyen la solución.

Además, como la ampliación de la base dimensional procede de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, según dedujimos anteriormente (I.5), en ella el monomio  $N_P$  pierde su carácter individual, y sus componentes quedan incluidos en otros monomios. Es decir, de nuestra base ampliada se deriva necesariamente, en este caso, la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional de la relación del calor al trabajo.

### 3.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Al no existir solución teórica, procede comparar nuestras soluciones con los datos experimentales.

En el caso de espacios de aire entre dos placas verticales, Jakob [47] ha obtenido una correlación entre los resultados de diferentes autores;

para  $2 \cdot 10^4 < N_{Gr,b} < 2 \cdot 10^5$  es  $N_{Nu,b} = 0,18 \frac{N_{Gr,b}^{1/4}}{(L/b)^{1/9}}$  (153)

Asimismo, Emery y Chu [48] han investigado experimentalmente el comportamiento de capas verticales encerradas de fluido con  $3 < N_{Pr} < 30.000$ , y recomiendan, para  $10^3 < N_{Pr} \cdot N_{Gr,b} < 10^7$ , la expresión:

$$N_{Nu,b} = 0,280 \frac{(N_{Pr} \cdot N_{Gr,b})^{1/4}}{(L/b)^{1/4}} \quad (154)$$

que está en perfecto acuerdo con la ecuación (152), obtenida por nosotros, siendo la función indeterminada  $F_4$  de la forma:

$$F_4 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, N_{Pr} \right) = 0,280 \cdot \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L} \cdot N_{Pr} \right)^{1/4}$$

### 3.8.- CONCLUSIONES.

1ª.- Hemos deducido en (I.5) que la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "estricta" y la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  "deficiente"; Palacios [2], en aquellos "Fenómenos de transmisión del calor coexistiendo con efectos mecánicos sin que se produzca conversión de calor en trabajo o viceversa"; la resolución del problema de "convección libre entre dos placas verticales", incluido en dicho tipo de fenómenos, ratifica lo anteriormente expuesto.

2ª.- La discriminación espacial ha conducido a soluciones más determinadas que las dadas por las bases dimensionales sin discriminar [15], siendo la precisión originada por dicho método autónoma de la proporcionada por la ampliación de la base.

3ª.- En este caso, el número de Grashof tiene, en las bases dimensionales  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , la dimensión:  $[N_{Gr,b}] = L_x \cdot L_y^{-1}$ ,



confirmando así lo expuesto por Arenas y Herranz ([22] a [24]). Es adimensional, sin embargo  $(N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L})$  que queda incluido en las soluciones (150) y (152).

4ª.- Como, para este problema, la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "estricta" y la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es "mutilada", los vectores-dimensión tetradimensionales son las proyecciones, sobre un subespacio de cuatro dimensiones, de los vectores-dimensión pentadimensionales, ocasionando [25] la utilización de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  una pérdida de información en el problema.

5ª.- El monomio  $N_P$  que es concretamente la relación entre un calor y un trabajo, ambos independientes, queda excluido de las soluciones al ampliar la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

6ª.- Las distintas bases dimensionales utilizadas reportan las siguientes soluciones:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu,b} = F_1 \left( N_{Gr,b} , N_{Pr} , \frac{g\beta L}{c} , \frac{L}{b} \right) \quad (145)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu,b} = F_2 \left( N_{Gr,b} , N_{Pr} , \frac{L}{b} \right) \quad (147)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu,b} = F_3 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L} , N_{Pr} , \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (150)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu,b} = F_4 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L} , N_{Pr} \right) \quad (152)$$

La ecuación (145) es la dada por el Análisis dimensional clásico, mientras que las ecuaciones (147), (150) y (152) son las obtenidas por nosotros.

La discriminación de las dimensiones del espacio produce una mejora de la solución: las funciones indeterminadas  $F_3$  y  $F_4$  son más precisas que las  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente, por contener un monomio menos en sus argumentos.

La ampliación de la base dimensional, propuesta por nosotros, origina una nueva mejora en la solución, distinta e independiente de la que ofrece

la discriminación espacial, por remitirse a monomios  $\Pi$  diferentes. En efecto, dicha ampliación suprime el monomio  $\frac{g\beta L}{c}$  de las soluciones, según se observa en las expresiones (147) y (152).

7ª.- No existe solución analítica exacta.

A través de la teoría de Análisis dimensional de Palacios y mediante la ampliación de la base por nosotros propuesta damos la solución más aproximada, esto es:

$$N_{Nu,b} = F_4 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, N_{Pr} \right) \quad (152)$$

que está en perfecto acuerdo con la fórmula recomendada por Emery y Chu [48].

#### 4.- CONVECCION LIBRE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL.

Si en lugar de una placa se trata de un cilindro vertical, el problema se resuelve de modo semejante salvo en lo que respecta a la discriminación espacial.

Sea  $L$  la altura del cilindro. Suponemos que el diámetro del cilindro es grande comparado con el espesor de la capa límite; el fenómeno sucede principalmente cerca de la pared, por consiguiente no interviene el diámetro como variable.

Se trata de hallar el coeficiente de transmisión del calor  $h$ . Dicho cálculo presenta dificultades teóricas insuperables, ya que no se conocen las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales que rigen la teoría del fenómeno, empleándose habitualmente la información que suministra el Análisis dimensional. Utilizando el método de la discriminación de las dimensiones del espacio [15] y la ampliación de la base dimensional, realizada por nosotros (I.5), vamos a ver cómo es posible aumentar la información que aporta el Análisis dimensional clásico.

Las magnitudes a considerar son las mismas que en una placa vertical (41), por tanto:

$$h = f(L, \Delta\theta, E_v, c', \mu, \rho, K) \quad (155)$$

La discriminación de las dimensiones del espacio se realiza de modo diferente. Tomando el eje X según el eje del cilindro, los otros dos, Y y Z, resultan indiscernibles, por lo que sólo podemos distinguir entre la dirección paralela al eje (dimensión  $L_x$ ) y la dirección normal al eje (que por estar en el plano YZ llamamos  $L_{yz}$ ). Así, la base usual discriminada es  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y la ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

Vemos las soluciones que aportan las distintas bases.

#### 4.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL $(L, Q, T, \theta)$ .

Como las variables que intervienen en el problema de convección libre en un cilindro vertical son las mismas que en una placa vertical, sus fórmulas dimensionales, en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , coincidirán (44) y proporcionarán una solución idéntica a la (48):

$$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (156)$$

siendo (156) la solución dada por el Análisis dimensional clásico.

#### 4.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA $(L, Q, T, \theta, M)$ .

Asimismo, las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen, en la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ , son las (49) y la solución que se obtiene con esta base es la misma (53) que para la pared vertical:

$$N_{Nu,L} = F_2 \left( N_{Gr,L}, N_{Pr} \right) \quad (157)$$

que es más precisa que la solución (156) hallada con la base usual.

4.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las variables en esta base son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 [L] &= L_x & [\mu] &= L_x^{-3} \cdot Q \cdot T \\
 [\Delta\theta] &= \theta & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \\
 [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{158}$$

lo que conduce a la siguiente tabla de exponentes dimensionales:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	-2	-1	-3	-3	-1	-1
$L_{yz}$	0	0	-2	-2	0	-2	0	-1
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0	0
$\Pi_2$	0	-1	-2	0	1	0	-3	4
$\Pi_3$	-1	-1	-3	0	0	1	-2	4

Como la característica de la matriz es 5, hay  $i = 8-5 = 3$  monomios adimensionales independientes. Para conocer los exponentes de las variables en cada uno de los monomios se procede de un modo análogo al seguido en (1.1), resolviendo el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo formado por los exponentes dimensionales de las variables. Así, según las tres últimas filas de (159), los tres monomios son:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot L}{c'} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot h^4}{E_v^2 \cdot K^3 \cdot \Delta\theta} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot h^4}{E_v^3 \cdot K^2 \cdot \Delta\theta \cdot L}$$

o bien teniendo en cuenta que  $E_v = \rho g \beta$  y  $c' = \rho \cdot c$  :

$$\Pi_1 = \frac{g\beta L}{c} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot h^4}{\rho^2 \cdot K^3 \cdot (g\beta)^2 \cdot \Delta\theta} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h^4}{\rho^2 \cdot K^2 \cdot (g\beta)^3 \cdot \Delta\theta \cdot L}$$

En lugar de  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ , consideramos  $\Pi'_2$  y  $\Pi'_3$  del siguiente modo:

$$\Pi'_2 = \Pi_1^{-1} \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-1} = N_{Pr} \quad ; \quad \Pi'_3 = \Pi_2^2 \cdot \Pi_3^{-1} = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}$$

resultando finalmente:

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{1/4} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (160)$$

que es más precisa que la (156) obtenida con la base dimensional usual (L,Q,T,θ).

#### 4.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ).

Ahora, en la base ampliada y discriminada, las fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned} [L] &= L_x & [\mu] &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [\Delta\theta] &= \theta & [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot M \\ [E_v] &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} & [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (161)$$

El cuadro de los exponentes dimensionales de las variables es:

	L	$\Delta\theta$	$E_v$	c'	$\mu$	$\rho$	K	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
$L_{yz}$	0	0	-2	-2	0	-2	0	-1
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	1	0	1	1	0	0
$\Pi_1$	0	0	0	1	1	-1	-1	0
$\Pi_2$	1	-1	-1	-2	0	1	-2	4

(162)

La característica de la matriz es 6 , luego el número de monomios adimensionales independientes es  $i = 2$  . Son, según (162):

$$\Pi_1 = \frac{\mu \cdot c'}{\rho \cdot K} = \frac{\mu \cdot c}{K} = N_{Pr}$$

$$\Pi_2 = \frac{L \cdot h^4 \cdot \rho}{K^2 \cdot c'^2 \cdot E_v \cdot \Delta\theta} = \frac{L \cdot h^4}{K^2 \cdot \rho^2 \cdot c^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta}$$

en vez de  $\Pi_2$  , tomamos  $\Pi'_2 = \Pi_1^2 \cdot \Pi_2 = N_{Nu,L}^4 \cdot N_{Gr,L}^{-1}$  que junto con  $\Pi_1$  conduce a la solución:

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{1/4} \cdot F_4(N_{Pr}) \quad (163)$$

que supera en precisión, por una parte a la solución (160) obtenida con la base usual y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , y por otra a la hallada (157) con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

#### 4.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Según se deduce de la teoría de Análisis dimensional de Palacios (A.4.5), entre los vectores y sus componentes respecto a un sistema de ejes, existe la misma relación algebraica que entre la dimensión de una magnitud y sus exponentes dimensionales respecto a una base dimensional. Veamos a continuación que es lo que implica la analogía vectorial en el caso que nos ocupa.

Como las variables que intervienen en el problema de convección libre en una pared vertical (1.1) son las mismas que en el de un cilindro vertical, todo lo dicho allí (1.1.5), respecto de los vectores-dimensión en las bases usual  $(L, Q, T, \theta)$  y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , es válido ahora. Así pues, de la comparación entre (70) y (66), se deduce que los vectores-dimensión representados en el espacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión del espacio  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio de

cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.2, II.3 y II.4).

Veamos: ahora qué es lo que ocurre con los vectores-dimensión representados en las bases usual y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ . Comparando (158) y (161) se observa que las únicas magnitudes que experimentan cambio dimensional en una base y otra, son:

$E_v, \mu$  y  $\rho$ .

En la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (164)$$

y en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$

$$\begin{aligned} [E_v]' &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot M \\ [\mu]' &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [\rho]' &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot M \end{aligned} \quad (165)$$

La ampliación de la base realizada ha consistido en añadir la dimensión fundamental  $M$ , lo cual nos conduce a que el monomio  $N_P = \frac{g\beta L}{c}$ , que era adimensional en la base de 5 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , en la base de 6 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  tenga la dimensión:

$$P_x = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (166)$$

El problema consiste en realizar un cambio de base, pasando de  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  a  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ , siendo la nueva dimensión básica  $P_x$ . La dimensión de  $[M]$  que ahora no es fundamental, será, de (166):

$$[M] = L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \quad (167)$$

Sustituyendo (167) en (165) se obtienen las dimensiones de las magnitudes en la nueva base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ , que notaremos por  $[ ]''$

$$\begin{aligned}
 [E_v]'' &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot [M] = L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \cdot P_x \\
 [\mu]'' &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P_x \\
 [\rho]'' &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x
 \end{aligned}
 \tag{168}$$

que comparándolas con (164) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [E_v]'' &= [E_v] \cdot P_x \\
 [\mu]'' &= [\mu] \cdot P_x \\
 [\rho]'' &= [\rho] \cdot P_x
 \end{aligned}
 \tag{169}$$

Así pues, queda de manifiesto que los vectores-dimensión (164), representados en el espacio  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores (168) representados en el espacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 5 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

Como no podemos representar gráficamente el paso de 6 a 5 dimensiones con la facilidad y claridad con que se realiza al pasar de 3 a 2, proyectando sobre un plano, por la dificultad de imaginar espacios de más de 3 dimensiones, lo expondremos en 4 fases en que a las dimensiones  $L_x$  y  $P_x$  se añaden sucesivamente,  $L_{yz}$ ,  $Q$ ,  $T$ ,  $\theta$ . De este modo, podemos imaginar cómo varían los vectores-dimensión de las magnitudes en cada una de las bases, (figuras: II.19, II.20, II.21 y II.22).



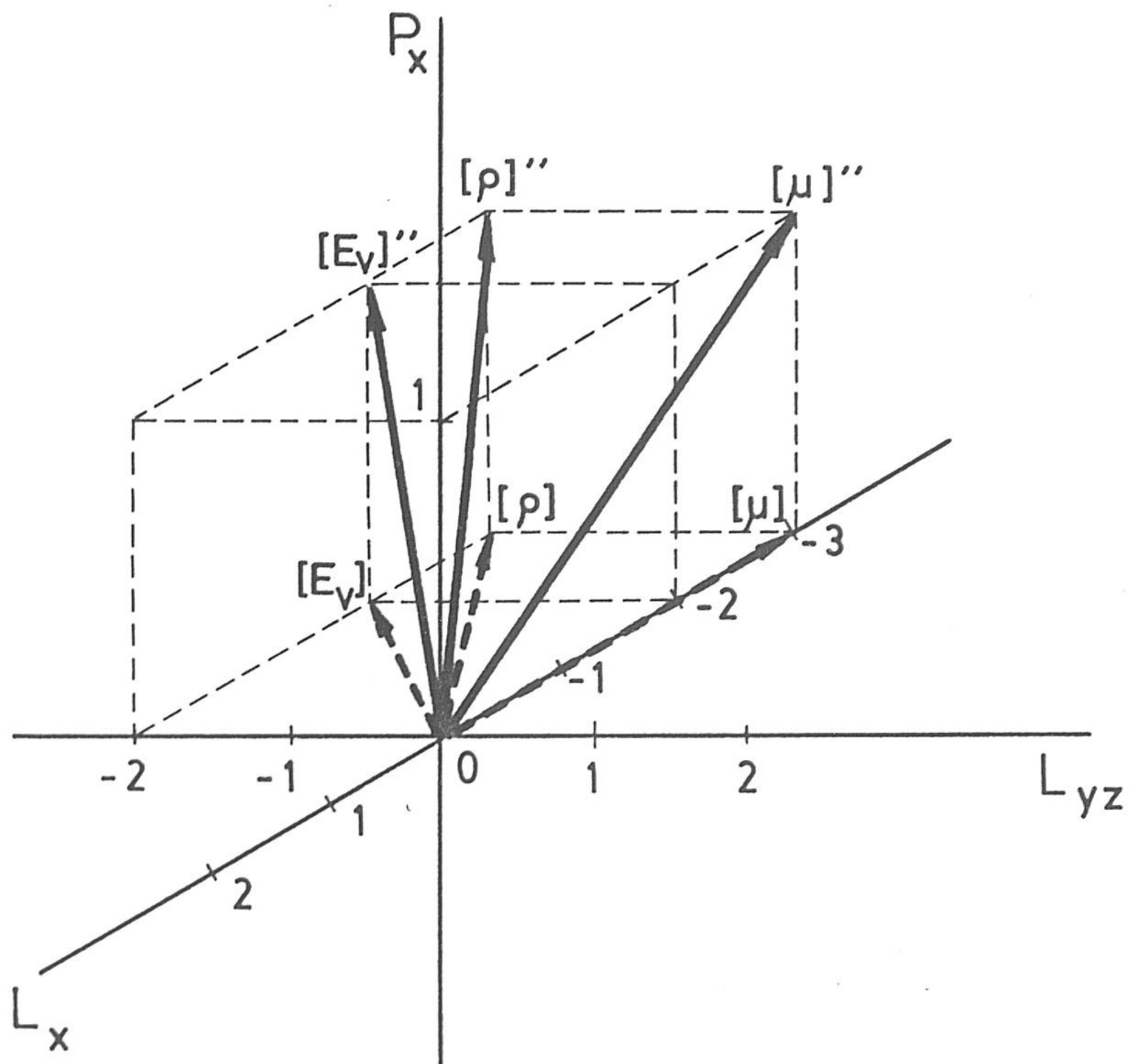


fig.II.19

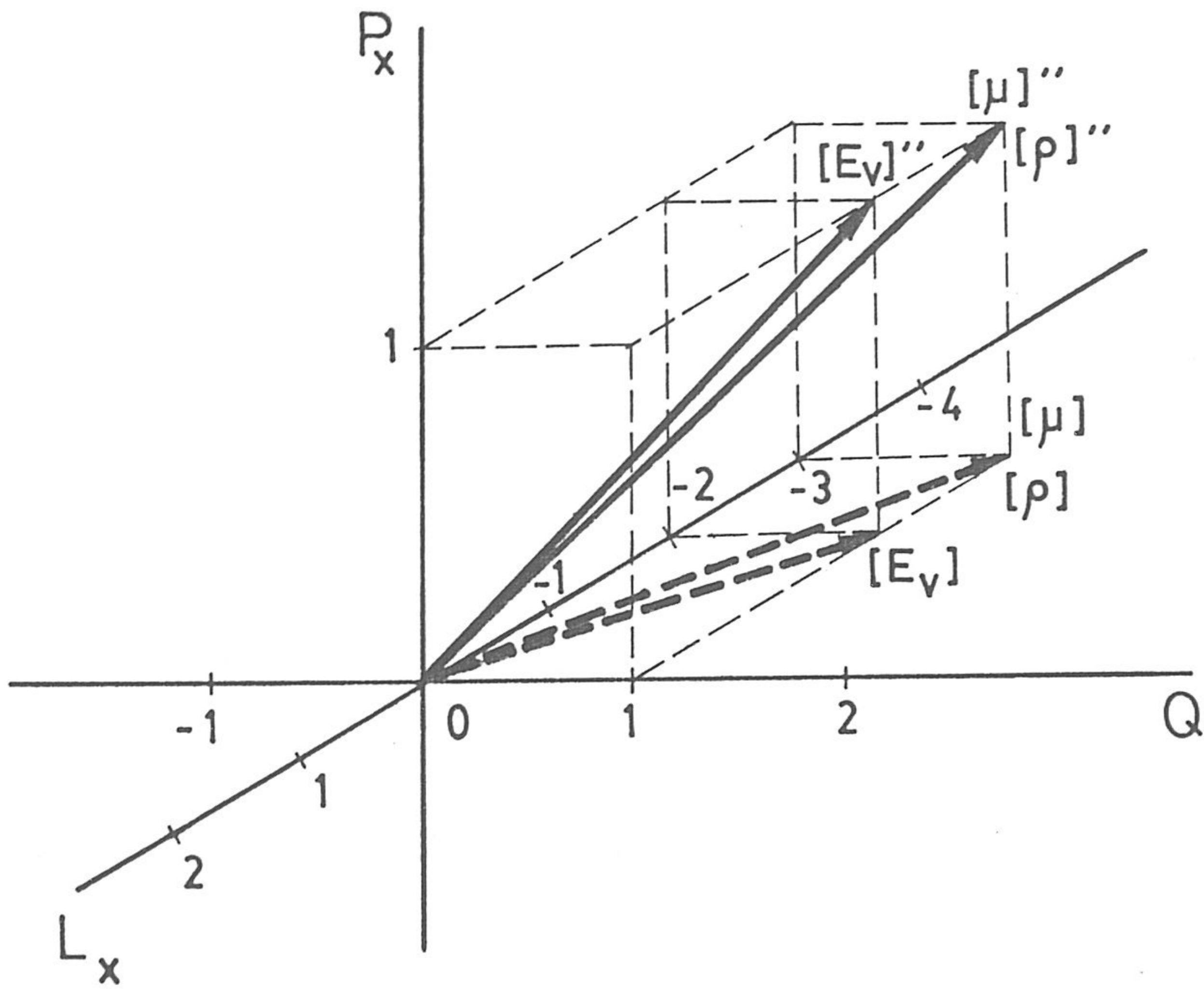


fig.II.20

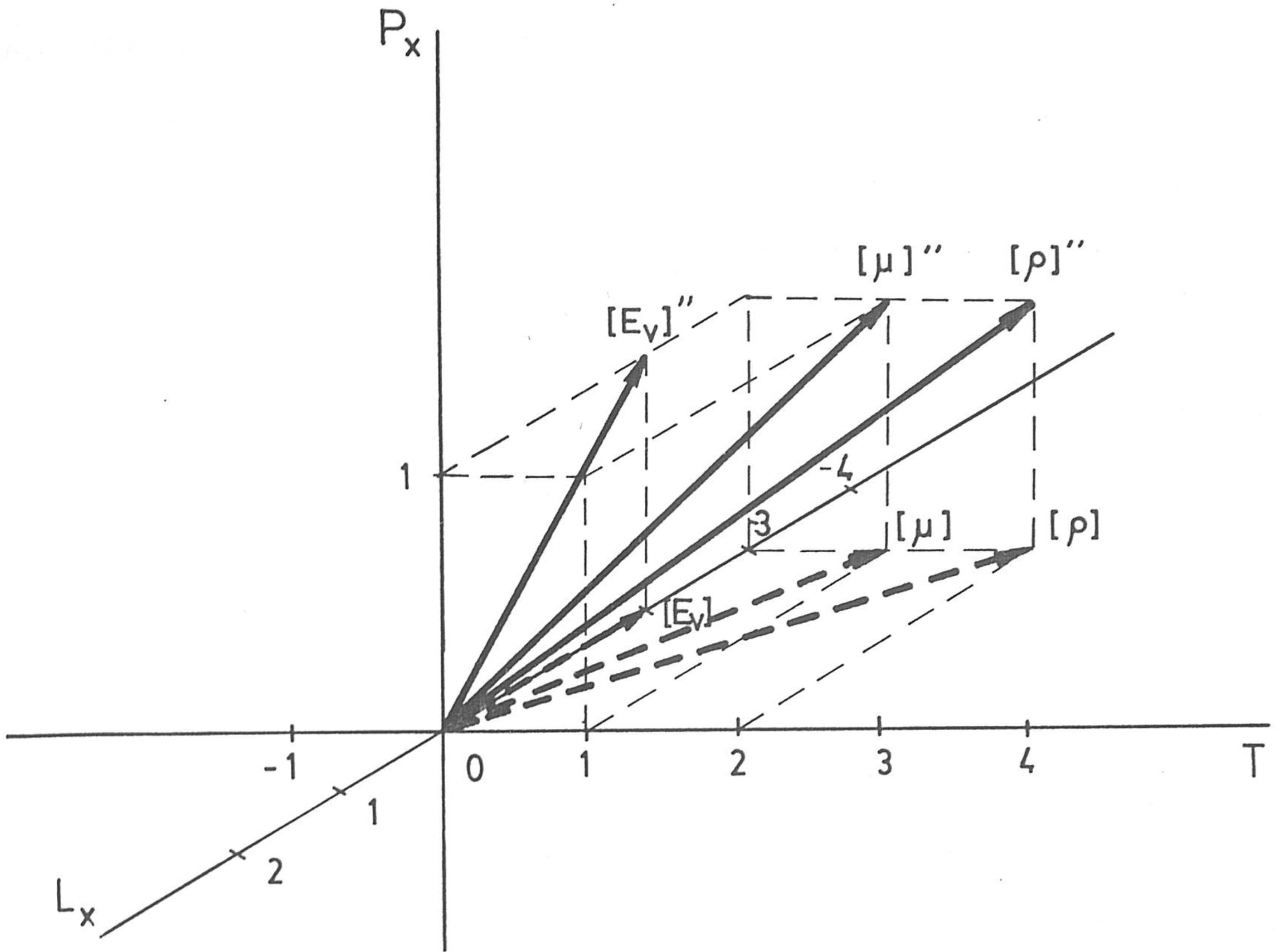


fig.II.21

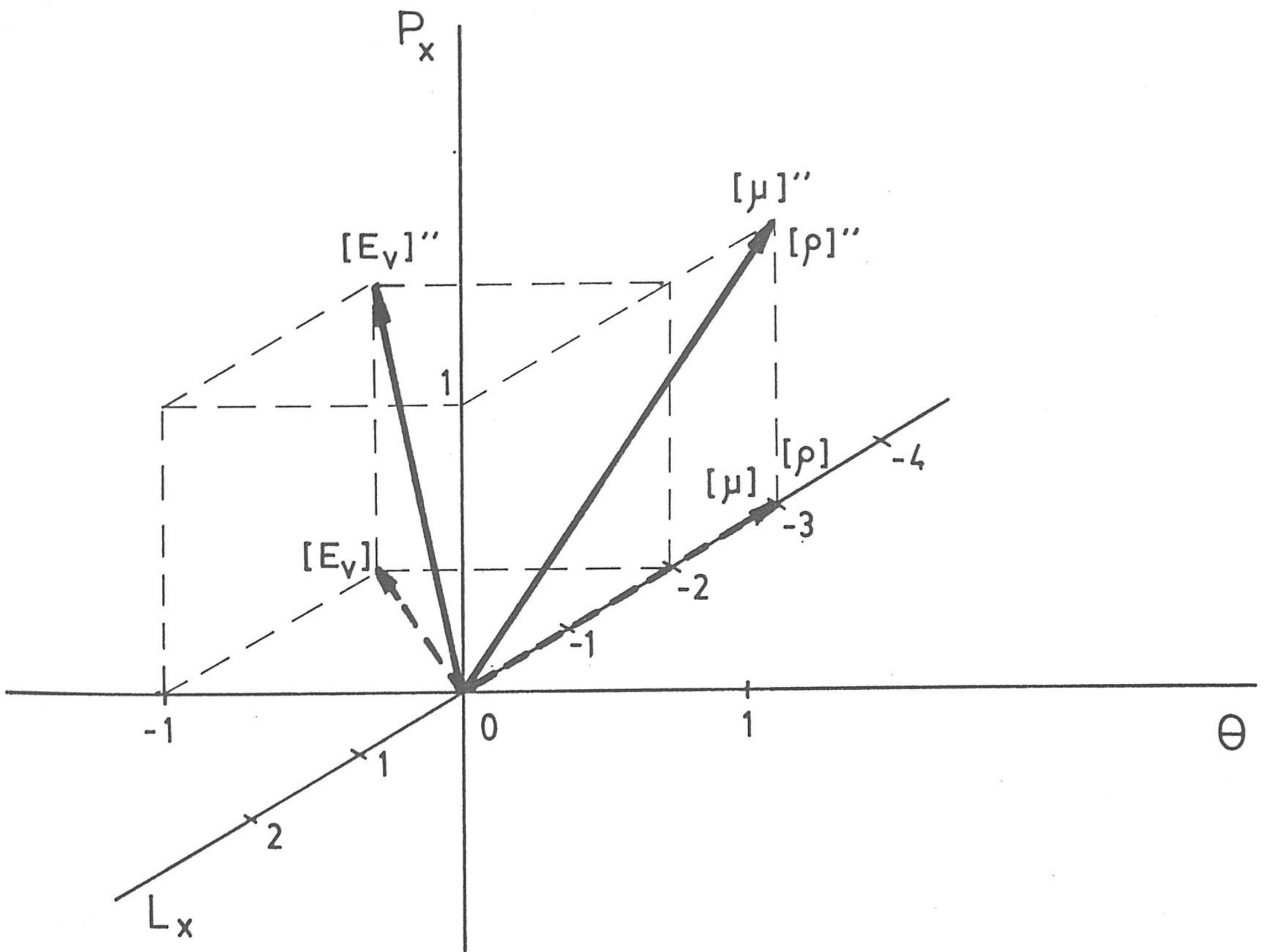


fig.II.22

#### 4.6.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Lo que ahora nos interesa es la forma del monomio que desaparece al ampliar la base. Sucede que las soluciones obtenidas presentan un carácter peculiar: se observa en ellas la desaparición del monomio  $\frac{g\beta L}{c}$  cuando ampliamos la base dimensional tanto de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  como de  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ . Llamamos  $N_P$  a dicho monomio, es decir:

$$N_P = \frac{g\beta L}{c} \quad (170)$$

El significado físico de este monomio es el de la relación entre una energía calorífica y un trabajo mecánico. En efecto, el numerador,  $g\beta L$ , representa el trabajo realizado por las fuerzas de empuje hidrostático por unidad de masa y de incremento de temperatura, al ascender una distancia  $L$ , mientras que el denominador,  $c$ , es el calor absorbido también por unidad de masa y temperatura. Esto es, si tomamos el elemento de masa  $dm$ , cuya temperatura aumenta  $d\theta$ , el trabajo de las fuerzas verticales de ascensión es  $dW = g\beta L \cdot dm \cdot d\theta$  y el calor absorbido por  $dm$  es  $dQ = c \cdot dm \cdot d\theta$ . Su cociente es el monomio en cuestión (170).

Ahora bien, dichos calor y trabajo son independientes, no se transforman el uno en el otro. En este problema no rige la ley de Joule y, por lo tanto, es apropiado ampliar la base dimensional según obtuvimos anteriormente (I.5). La ampliación conduce a que el monomio  $N_P$  desaparezca de las soluciones como monomio independiente.

En efecto, en las soluciones (157) y (163), obtenidas ampliando la base, no aparece el monomio  $N_P$ , que aquí tiene dimensión no nula. En la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ :

$$[N_P] = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1},$$

y en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  es:

$$[N_P] = \left[ \frac{g\beta L}{c} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad .$$

En los casos, pues, de transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo, o viceversa, para los que la base ampliada (L,Q,T,θ,M) es estricta, y la base usual (L,Q,T,θ) es deficiente, el monomio  $N_P$  tiene, en la base usual, el carácter de monomio espurio, no existiendo ni en la solución obtenida con la base ampliada ni en las soluciones dadas por diferentes autores, como veremos a continuación.

#### 4.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La solución (163) es la misma que la (65) obtenida para una placa vertical en el caso general, lo que está de acuerdo con los resultados obtenidos diversos autores.

Así, McAdams [49], Chapman [50], King [51], Kreith [52], Parker, Boggs y Blick [53], entre otros, coinciden en establecer que las ecuaciones obtenidas para placas verticales se pueden utilizar para calcular el coeficiente de transmisión del calor en convección libre para cilindros verticales con precisión satisfactoria.

#### 4.8.- CONCLUSIONES.

1ª.- La resolución del problema de "Convección libre en un cilindro vertical", corrobora, (I.5), el que para aquellos fenómenos de transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa, la base ampliada (L,Q,T,θ,M) es "estricta", y la base usual (L,Q,T,θ) "deficiente" (Palacios, [2]).

2ª.- Hemos obtenido, mediante la discriminación de las dimensiones del espacio, soluciones más precisas que las conseguidas con el Análisis dimensional clásico [15], con una mejora independiente de la que lleva consigo la ampliación de la base efectuada por nosotros.

ampl 3ª.- En las bases dimensionales discriminadas  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , los números de Nusselt y de Grashof dejan de ser adimensionales, y tienen de dimensión:  $[N_{Nu,L}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$ ,  $[N_{Gr,L}] = L_x^4 \cdot L_{yz}^{-4}$ , respectivamente, ratificando así lo expuesto por Arenas y Herranz ([22] a [24]). Es adimensional solamente (160) y (163) el cociente  $\frac{N_{Nu,L}^4}{N_{Gr,L}}$ .

4ª.- La utilización de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  en lugar de la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , en este problema, supone una pérdida de información [25], y puede interpretarse como una proyección de vectores-dimensión sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ .

5ª.- En el caso que nos ocupa, el monomio  $N_p$ , que es la relación entre una energía calorífica y un trabajo mecánico, sin transformación recíproca, tiene en la base usual "deficiente", el carácter de monomio "espurio" [26], no existiendo en las soluciones obtenidas con la base ampliada.

6ª.- Las soluciones del problema dadas por el Análisis dimensional son:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (156)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu,L} = F_2 \left( N_{Gr,L}, N_{Pr} \right) \quad (157)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right) \quad (160)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 (N_{Pr}) \quad (163)$$

Con la discriminación espacial hemos mejorado la solución, así, (163) y (160) son más precisas que (157) y (156), respectivamente, halladas con las bases sin discriminar.

Un nuevo progreso añadido en la solución, independiente del obtenido con la discriminación de las dimensiones del espacio, lo proporciona la

ampliación de la base dimensional propuesta por nosotros. En efecto, las soluciones (157) y (163) obtenidas con la base ampliada son más precisas que las (156) y (160) halladas con las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , al desaparecer el monomio  $\frac{g\beta L}{c}$ .

7ª.- La solución más precisa, obtenida por nosotros, para el problema de convección libre en un cilindro vertical, es la hallada con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot f(N_{Pr}) \quad (163)$$

que concuerda con la correspondiente (65) de la pared vertical, lo que debe ocurrir según McAdams [49], Chapman [50], King [51], Kreith [52] y Parker, Boggs y Blick [53].

#### 5.- CONVECCION LIBRE EN UN CILINDRO HORIZONTAL.

Sea un cilindro horizontal de diámetro  $d$  a temperatura uniforme  $\theta_c$ , situado en el seno de un fluido. Se pretende averiguar la cantidad de calor que se transmite por unidad de superficie, de temperatura y de tiempo, es decir, el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ .

Dado que no existe solución teórica exacta es apropiado resolver el problema por Análisis dimensional, método auxiliar de la experimentación.

Las variables que intervienen en el problema son: conductividad térmica del fluido  $K$ , calor específico por unidad de volumen  $c'$ , empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura  $E_v$ , diámetro del cilindro  $d$ , diferencia de temperaturas entre el cilindro y el fluido no perturbado  $\Delta\theta = \theta_c - \theta_o$ , coeficiente de viscosidad  $\mu$  y densidad del fluido  $\rho$ . Por tanto, deberá ser:

$$h = f(d, \Delta\theta, E_v, c', \mu, \rho, K) \quad (171)$$

No es posible realizar en este caso la discriminación de las dimensiones del espacio debido a que la configuración geométrica del problema no es aplicable a todas las variables.

Veamos a continuación qué soluciones aportan las bases usual  $(L, Q, T, \theta)$  y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

5.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL  $(L, Q, T, \theta)$ .

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema son las (44), sin más que sustituir la dimensión de la altura de la placa,  $L$ , que figuraba allí, por  $[d] = L$ , que es la magnitud lineal que ahora interviene.

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables, en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , será, según (44):

	d	$\Delta\theta$	$E_v$	$c'$	$\mu$	$\rho$	K	h
L	1	0	-4	-3	-3	-5	-1	-2
Q	0	0	1	1	1	1	1	1
T	0	0	0	0	1	2	-1	-1
$\theta$	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-1	0	0	0	0
$\Pi_2$	0	1	-2	3	-2	1	0	0
$\Pi_3$	0	-1	1	-3	1	0	0	1
$\Pi_4$	0	-1	2	-4	1	0	1	0

(172)

La característica de la matriz es  $H = 4$ , por tanto el número de monomios adimensionales independientes es  $i = N - H = 8 - 4 = 4$ . Los exponentes con que las variables aparecen en cada uno de los monomios, que figuran en las cuatro últimas filas de (172), se obtienen por un proceso análogo al realizado en (1.1). Así pues, son estos:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot d}{c'} ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot c'^3 \cdot \Delta\theta}{E_v^2 \cdot \mu^2} ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h \cdot E_v}{\Delta\theta \cdot c'^3} ; \quad \Pi_4 = \frac{\mu \cdot K \cdot E_v^2}{\Delta\theta \cdot c'^4}$$

como son:  $c' = \rho \cdot c$  y  $E_v = \rho g \beta$ , los monomios anteriores se convierten en:

$$\Pi_1 = \frac{g \beta d}{c} ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho^2 \cdot c^3 \cdot \Delta\theta}{(g \beta)^2 \cdot \mu^2} ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot h \cdot (g \beta)}{\Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot c^3} ; \quad \Pi_4 = \frac{\mu \cdot K \cdot (g \beta)^2}{\Delta\theta \cdot \rho^2 \cdot c^4}$$

Para dar forma más adecuada a la solución, realizamos en los monomios las siguientes transformaciones:

$$\Pi'_2 = \Pi_1^3 \cdot \Pi_2 = N_{Gr,d} ; \quad \Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4^{-1} = N_{Nu,d} ; \quad \Pi'_4 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_4^{-1} = N_{Pr}$$

que junto con  $\Pi_1$  conducen a la solución:

$$N_{Nu,d} = F_1 \left( N_{Gr,d}, N_{Pr}, \frac{g \beta d}{c} \right) \tag{173}$$

5.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

En esta base, las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema vienen dadas por (49), si en lugar de considerar L, tomamos como magnitud lineal característica el diámetro del cilindro, d, que tiene de dimensión [d] = L.

Ahora el cuadro de los exponentes dimensionales es:

	d	Δθ	E <sub>v</sub>	c'	μ	ρ	K	h
L	1	0	-2	-3	-1	-3	-1	-2
Q	0	0	0	1	0	0	1	1
T	0	0	-2	0	-1	0	-1	-1
θ	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1
M	0	0	-1	0	1	1	0	0
Π <sub>1</sub>	3	1	1	1	-1	0	-1	0
Π <sub>2</sub>	3	1	1	0	-2	1	0	0
Π <sub>3</sub>	1	0	0	0	0	0	-1	1

(174)



Como la característica de la matriz es  $H = 5$ , hay  $i = 3$  monomios independientes adimensionales que, según las tres últimas filas de (174), son:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{E_v \cdot \Delta\theta \cdot c' \cdot d^3}{\mu \cdot K} = \frac{\rho^2 \cdot c \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot d^3}{\mu \cdot K} \\ \Pi_2 &= \frac{E_v \cdot \Delta\theta \cdot \rho \cdot d^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 \cdot g\beta \cdot \Delta\theta \cdot d^3}{\mu^2} = N_{Gr,d} \\ \Pi_3 &= \frac{h \cdot d}{K} = N_{Nu,d}\end{aligned}$$

en lugar de  $\Pi_1$ , tomamos  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1} = N_{Pr}$ , que junto con  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ , conducen a la solución:

$$N_{Nu,d} = F_2 \left( N_{Gr,d}, N_{Pr} \right) \quad (175)$$

Por tanto, la ampliación de la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  mejora la solución ya que la función  $F_1$  contiene en su argumento un monomio más que la función  $F_2$ .

### 5.3.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Podemos comparar las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en este problema en la base usual y en la base ampliada, que son las que figuran en (44) y (49) sin más que sustituir  $[L] = L$  por  $[d] = L$ . Observamos que las únicas variables que cambian de dimensión son: el empuje hidrostático por unidad de volumen y temperatura,  $E_v$ , la viscosidad,  $\mu$ , y la densidad  $\rho$ .

Por un procedimiento análogo al realizado en (1.1.5), se puede conseguir que las fórmulas dimensionales de dichas variables difieran en una única dimensión, que llamamos  $P$ , y a la que damos el carácter de fundamental:

$$P = \left[ \frac{g\beta d}{c} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Gracias a incorporar la dimensión P a las fundamentales, resulta patente que los vectores-dimensión  $[E_v]$ ,  $[\mu]$  y  $[\rho]$  representados en el espacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , (66), son las proyecciones de los vectores-dimensión  $[E_v]''$ ,  $[\mu]''$  y  $[\rho]''$  representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, P)$ , (70), sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.2, II.3 y II.4).

El significado físico es el siguiente: la teoría por nosotros desarrollada indica que el problema de convección, más aun, el capítulo o tipo de fenómenos en los cuales no existe conversión de calor en trabajo o viceversa, es propiamente, físicamente, pentadimensional, por lo que el uso de la base tetradimensional es una auténtica mutilación que reduce la información en los problemas, siendo por consiguiente incorrecta.

#### 5.4.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Al igual que en los problemas anteriores, en el caso que estudiamos, convección libre en un cilindro horizontal, se observa que la ampliación de la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g\beta d}{c}$  de las soluciones (173) y (175).

Dicho monomio tiene una forma peculiar y su significado físico es el de una relación entre trabajo y calor. Así, si tomamos un elemento de masa  $dm$

$$N_P = \frac{g\beta d \cdot dm \cdot d\theta}{c \cdot dm \cdot d\theta} = \frac{dW}{dQ} ,$$

el numerador  $dW = g\beta d \cdot dm \cdot d\theta$  representa el trabajo realizado por las fuerzas del empuje hidrostático al ascender una distancia  $d$ , y el denominador  $dQ = c \cdot dm \cdot d\theta$  es el calor absorbido por  $dm$  cuando su temperatura aumenta  $d\theta$ .

Sin embargo,  $dW$  no procede de  $dQ$ , o viceversa, por lo que el

monomio  $N_P$  representa únicamente una posible relación funcional y no una relación real, observable. Debido a que la ampliación de la base dimensional (I.5) procede de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, la utilización de la base ampliada implica necesariamente la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional del monomio  $N_P = \frac{g\beta d}{c}$ .

### 5.5.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Veremos a continuación que nuestra solución (175) está confirmada por los resultados teóricos aproximados y experimentales obtenidos por diversos autores.

Hermann [54] ha estudiado la convección libre en un cilindro horizontal. Su solución analítica de las ecuaciones de la capa límite en aire ( $N_{Pr} = 0,73$ ) es:

$$N_{Nu,d} = 0,372 \cdot N_{Gr,d}^{1/4} \quad (176)$$

Senftleben [55], mediante una serie de hipótesis, y utilizando un cierto número de constantes empíricas, ha propuesto una ecuación para el cilindro horizontal que, para  $N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} > 10^5$ , se reduce a:

$$N_{Nu,d} = 0,41 \cdot \left( N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} \right)^{1/4} \quad (177)$$

que para  $N_{Pr} = 0,74$  coincide con la dada por Hermann.

McAdams [56], en el intervalo  $10^4 < N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} < 10^9$ , da como solución la expresión:

$$N_{Nu,d} = 0,53 \cdot \left( N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} \right)^{1/4} \quad (178)$$

Mijeeva [57] propone que los coeficientes medios de transmisión del calor para tubos horizontales con flujo de convección libre laminar pueden calcularse, en el intervalo  $10^3 < N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} < 10^8$ , mediante la fórmula:

$$N_{Nu,d} = 0,50 \cdot \left( N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (179)$$

Finalmente, Chapman [58] comenta que para el caso tratado por nosotros se han manejado un gran número de datos experimentales, cuya correlación concuerda con la expresión

$$N_{Nu,d} = f \left( N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} \right) \quad (180)$$

#### 5.6.- CONCLUSIONES.

1ª.- Confirmamos, con la resolución del problema de "Convección libre en un cilindro horizontal", el hecho de que por ser un "fenómeno de transmisión del calor en donde no existe conversión de calor en trabajo o viceversa" es físicamente pentadimensional (I.5), siendo la base ampliada (L,Q,T,θ,M) "estricta" y el uso de la base usual (L,Q,T,θ) una "mutilación" (Palacios [2]) y, por tanto, incorrecta.

2ª.- Considerando la analogía entre dimensiones y vectores se hace patente el que los vectores-dimensión representados en el espacio (L,Q,T,θ) son las proyecciones, sobre un subespacio de cuatro dimensiones, de los vectores-dimensión representados en el espacio (L,Q,T,θ,M), por lo que la utilización de la base usual (L,Q,T,θ) supone una pérdida de información en el problema, [25].

3ª.- Como la ampliación de la base dimensional (I.5) proviene de suprimir la relación formal entre calor y trabajo, por ser independientes entre sí, el monomio  $N_p$ , que representa precisamente dicha relación, queda fuera de la solución al utilizar la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M).

4ª.- Las soluciones obtenidas con la base usual (L,Q,T,θ) y con la base ampliada (L,Q,T,θ,M) son:

$$(L, Q, T, \theta) : N_{Nu,d} = F_1 \left( N_{Gr,d}, N_{Pr}, \frac{g\beta d}{c} \right) \quad (173)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) : N_{Nu,d} = F_2 \left( N_{Gr,d}, N_{Pr} \right) \quad (175)$$

Comparando (173) con (175) se pone de manifiesto que con la ampliación de la base dimensional, por nosotros propuesta, se obtiene una solución más precisa que la hallada con la base usual. Dicha mejora se basa en la desaparición del monomio  $\frac{g\beta d}{c}$ , "espurio" [26], que surge inapropiadamente en (173) por haberse utilizado una base "deficiente".

5ª.- La solución más determinada, hallada a partir del Análisis dimensional de Palacios y con la ampliación de la base dimensional, es:

$$N_{Nu,d} = f \left( N_{Gr,d} \cdot N_{Pr} \right) \quad (175)$$

que está en perfecto acuerdo con las fórmulas empíricas obtenidas por Senftleben [55], McAdams [56], Mijeeva [57] y Chapman [58].

6.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UNA PARED VERTICAL.

El fenómeno de la condensación tiene lugar cuando un vapor saturado se pone en contacto con una superficie sólida, la cual está a una temperatura inferior. Si el líquido condensado tiende a mojar la superficie sólida, se produce la condensación en película, que es un fenómeno muy frecuente. Si la superficie sólida es vertical, la película líquida desliza hacia abajo, por la acción de la gravedad. A no ser que la velocidad del vapor sea muy elevada, o que la película de líquido sea muy gruesa, el movimiento del fluido condensado es laminar, y se transfiere calor desde la superficie de separación vapor-líquido hacia la superficie sólida por simple conducción, y, si esta superficie es vertical, el espesor de la película aumenta de modo continuo, desde la parte superior a la inferior.

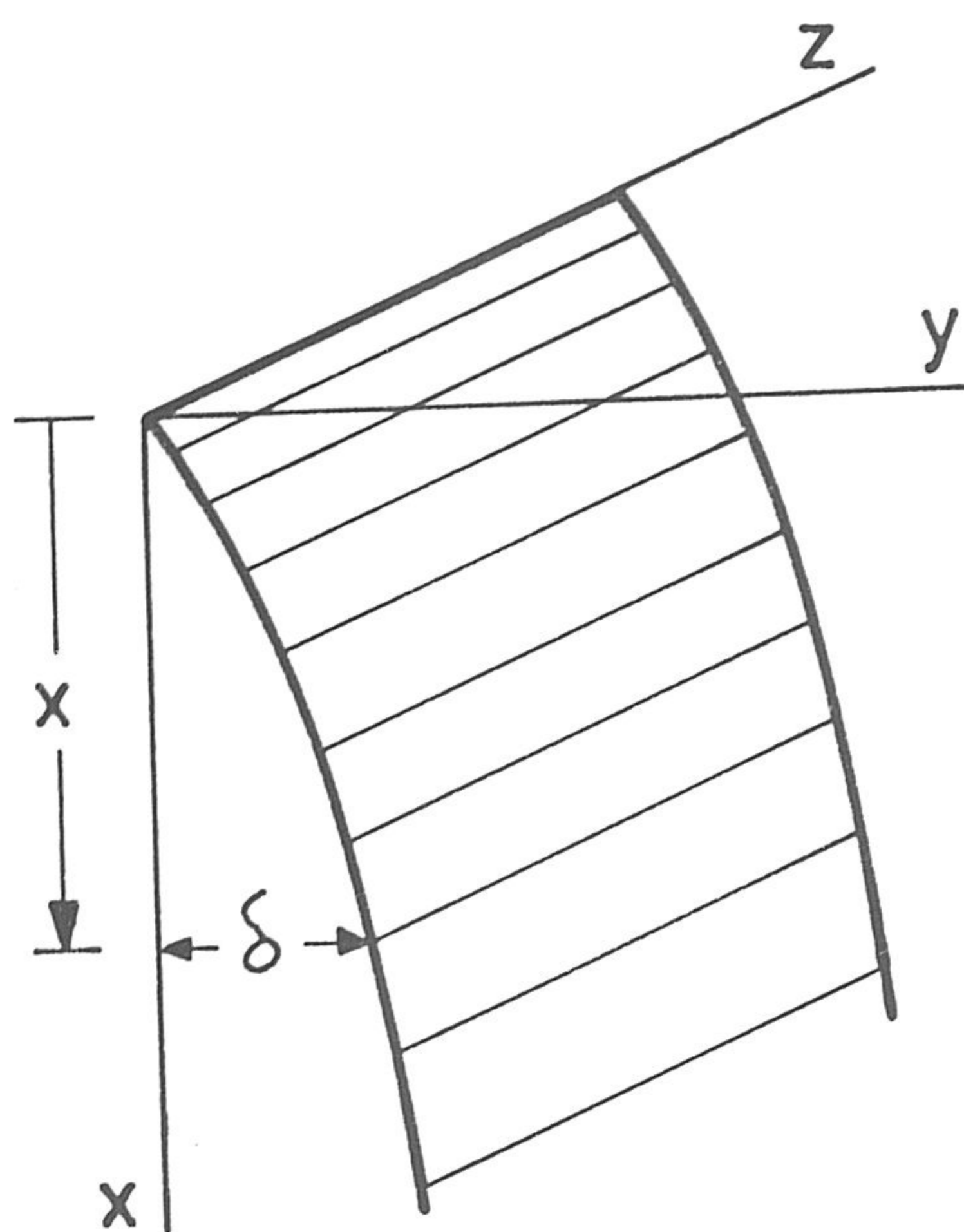


fig.II.23

Nusselt [59], en su teoría de la condensación en película laminar, supone que la condensación produce únicamente una película líquida con distribución laminar de velocidades. Si el vapor se encuentra estancado, o

moviéndose con velocidades muy pequeñas, se pueden despreciar las variaciones de cantidad de movimiento y las fuerzas tangenciales que actúan en la superficie de separación de las fases líquida y gaseosa. También son despreciables las fuerzas de inercia en el líquido por ser la película muy delgada. Consecuencia de estas hipótesis es que no sea preciso considerar más que las fuerzas gravitatorias y las viscosas que actúan en la película líquida.

Resumiendo, se hacen las siguientes suposiciones en el tratamiento teórico del problema:

a) Las fuerzas de inercia que aparecen en la película líquida de condensado son despreciables frente a las viscosas y gravitatorias.

b) El calor transmitido por convección en la película y por conducción a lo largo de ella se desprecia; sólo tiene importancia la conducción transversalmente a la película.

c) No hay fricción en la superficie de separación vapor-líquido.

d) La superficie externa de la película está a una temperatura constante igual a la de saturación  $\theta_s$ .

e) Las propiedades físicas del fluido condensado son independientes de la temperatura.

f) La tensión superficial en la superficie libre de la película no afecta a la naturaleza del flujo.

g) La densidad del vapor es pequeña en comparación con la del fluido condensado.

La ecuación del movimiento de la película de líquido, con estas hipótesis, cuando la pared es vertical, adquiere la forma:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\rho g = -\gamma \quad (181)$$

donde  $u$  es la velocidad descendente del fluido condensado,  $\gamma$  el peso

específico,  $\mu$  la viscosidad dinámica. El eje X es vertical y el Y normal a la pared (fig.II.23).

Las condiciones en los límites son  $u = 0$  en la pared ( $y = 0$ ) y  $\frac{du}{dy} = 0$  en la superficie libre ( $y = \delta$ ), sobre la cual, de acuerdo con las hipótesis, no se ejercen fuerzas ( $\delta$  es el espesor de la película). La solución de la ecuación (181) es:

$$u(y) = \frac{\rho g}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (182)$$

y la velocidad media vale:

$$\bar{u} = \frac{\rho g \cdot \delta^2}{3\mu} \quad (183)$$

De la ecuación de la energía, teniendo en cuenta las hipótesis efectuadas, resulta:

$$\frac{d\theta^2}{dy^2} = 0 \quad (184)$$

con las condiciones en los límites  $\theta = \theta_p$  en  $y = 0$  y  $\theta = \theta_s$  en  $y = \delta$  (los subíndices p y s señalan, respectivamente, las temperaturas de la pared y de saturación del vapor). Al resolver la ecuación (184) resulta un flujo de calor independiente de y, que vale

$$q = \frac{K \cdot (\theta_s - \theta_p)}{\delta} \quad (185)$$

El coeficiente de transmisión del calor que queremos calcular se define, y resulta en este caso:

$$h = \frac{q}{\theta_s - \theta_p} = \frac{K}{\delta} \quad (186)$$

Para hallar el espesor de la película líquida  $\delta(x)$  utilizamos la siguiente ecuación de continuidad, que expresa la igualdad entre el aumento de la intensidad de corriente de masa líquida a lo largo de la pared y la



cantidad de vapor condensado sobre ella. Si  $G = \rho \bar{u} \delta$  es la intensidad de la corriente por unidad de anchura de pared y  $\lambda$  el calor de condensación por unidad de masa,

$$\frac{dG}{dx} = \rho \frac{d}{dx} (\bar{u} \delta) = \frac{q}{\lambda} = \frac{K \cdot (\theta_s - \theta_p)}{\delta \cdot \lambda} \quad (187)$$

Al sustituir  $\bar{u}$  por su valor (183) se obtiene una ecuación diferencial de  $\delta(x)$ :

$$\delta^3 \cdot d\delta = \frac{K \cdot (\theta_s - \theta_p) \cdot \mu}{\rho^2 g \cdot \lambda} dx \quad (188)$$

con la condición inicial  $\delta = 0$  en  $x = 0$ , pues se supone que la condensación comienza en  $x = 0$ .

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot K \cdot (\theta_s - \theta_p) \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (189)$$

valor que sustituido en la ecuación (186) permite conocer el coeficiente local de transmisión del calor a la distancia  $x$  del punto donde comienza la condensación

$$h_x = \left( \frac{K^3 \cdot \rho^2 g \cdot \lambda}{4 \cdot (\theta_s - \theta_p) \cdot \mu \cdot x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (190)$$

El coeficiente medio de transmisión del calor entre  $x = 0$  y  $x = L$  vale

$$h_m = 0,943 \cdot \left[ \frac{K^3 \cdot \rho^2 g \cdot \lambda}{(\theta_s - \theta_p) \cdot \mu \cdot L} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (191)$$

Si con el coeficiente medio de transmisión del calor  $h_m$  y la altura  $L$  formamos un número de Nusselt, podemos escribir la ecuación (191) en forma adimensional

$$N_{Nu,L} = \frac{h_m \cdot L}{K} = 0,943 \cdot \left[ \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot L^3}{(\theta_s - \theta_p) \cdot \mu \cdot K} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (192)$$

Así pues, el problema de transmisión de calor por condensación queda resuelto con el cálculo consecutivo de la velocidad media de la película líquida,  $\bar{u}$ , el espesor de la película,  $\delta(x)$ , y el coeficiente de transmisión del calor. Por ello, trataremos a continuación de hallar estas tres magnitudes mediante la teoría de Análisis dimensional.

Respecto del tratamiento con Análisis dimensional diremos, en primer lugar, que en el apartado (I.5) hemos deducido, a partir de la teoría de Palacios, el que para fenómenos que incluyan transmisión de calor, sin que haya conversión de calor en trabajo, o viceversa, puede utilizarse la que denominamos "base ampliada"  $(L, Q, T, \theta, M)$  con, en general, ventaja sobre la base dimensional usual. La transmisión de calor por condensación se encuentra dentro de este tipo de fenómenos. En el presente caso hacemos uso de ésto, además de otras consecuencias de la teoría del Análisis dimensional de Palacios. Comparamos las soluciones que se obtienen con la base usual,  $(L, Q, T, \theta)$  o  $(L, M, T, \theta)$ , y con la ampliada, resultando siempre más precisas estas últimas y en concordancia con las soluciones teóricas. A continuación, empleamos la "discriminación de las dimensiones del espacio" (desarrollada por Palacios [15] dentro de su teoría de Análisis dimensional, y que ya había sido dada empíricamente por Williams [60], primero y por Huntley [16], después) para intentar mejorar las soluciones anteriores.

Obtenemos así, con la base usual discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , soluciones más precisas que con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , y con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , mejores soluciones que con la base ampliada,  $(L, Q, T, \theta, M)$ . Es interesante señalar que la mejora de las soluciones en ambos casos, ampliación y discriminación, es independiente: afecta a monomios adimensionales diferentes; por consiguiente, usando ambos sistemas se debe obtener el resultado óptimo. Y así es, en efecto. Según veremos, la

base ampliada y discriminada, por conducir a soluciones más precisas que las halladas con las otras bases señaladas, resulta la más adecuada.

6.1.- VELOCIDAD MEDIA DEL VAPOR SATURADO EN LA PELICULA LIQUIDA.

La velocidad media de la película de vapor saturado se halla resolviendo la ecuación diferencial (181). Dicha ecuación, con las condiciones de contorno, permite establecer la lista de variables que intervienen en el problema. La solución será una función de ellas:

$$\bar{u} = f(\gamma, \delta, \mu) \quad (193)$$

El fenómeno que estudiamos pertenece al capítulo de la Mecánica cuya base dimensional es (L,M,T), sin que intervengan por consiguiente las posibles bases que establecíamos en (I.5). Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema, en esta base, son:

$$\begin{aligned} [\bar{u}] &= L.T^{-1} & ; & & [\gamma] = [\rho g] &= L^{-2}.M.T^{-2} \\ [\delta] &= L & ; & & [\mu] &= L^{-1}.M.T^{-2} \end{aligned}$$

y la matriz formada por los exponentes dimensionales, es:

	$\bar{u}$	$\gamma$	$\delta$	$\mu$	
L	1	-2	1	-1	
M	0	1	0	1	
T	-1	-2	0	-2	
$\Pi$	1	-1	-2	1	(194)

La característica de la matriz es  $H = 3$  y las magnitudes pueden formar un solo monomio adimensional independiente:  $i = N-H = 4-3 = 1$ . Según la última fila de (194), es:

$$\Pi = \frac{\bar{u} \cdot \mu}{\gamma \cdot \delta^2}$$



que proporciona la solución:

$$\bar{u} = C \cdot \frac{\gamma \cdot \delta^2}{\mu} \quad (195)$$

o bien, teniendo en cuenta que  $\gamma = \rho g$  :

$$\bar{u} = C \cdot \frac{\rho g \cdot \delta^2}{\mu} \quad (196)$$

de modo que conseguimos el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional: un solo monomio, esto es, la solución exacta salvo una constante numérica.

Según hemos visto la ecuación (196) coincide con la obtenida teóricamente (183), con  $C = 1/3$ .

## 6.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

Se pretende calcular, mediante el Análisis dimensional, el espesor de la película líquida  $\delta(x)$ .

Para resolver un problema por Análisis dimensional es preciso conocer las variables que intervienen en el fenómeno. En nuestro caso, el espesor de la película líquida se obtiene resolviendo la ecuación (188). Dicha ecuación, con las condiciones de contorno, permite averiguar cuáles son las variables independientes.

El espesor de la película líquida dependerá de la distancia del punto considerado al borde superior de la pared,  $x$ ; de la diferencia de temperatura entre la de la pared y la de saturación,  $\Delta\theta = \theta_s - \theta_p$ ; del calor latente de condensación por unidad de masa,  $\lambda$ , así como de las propiedades del líquido: peso específico,  $\gamma = \rho g$ ; coeficiente de viscosidad,  $\mu$ ; densidad,  $\rho$ ; conductividad térmica,  $K$ . Así pues:

$$\delta(x) = f(x, \Delta\theta, \gamma, \mu, K, \lambda, \rho) \quad (197)$$

Resolvemos el problema por Análisis dimensional con las bases usual,  $(L, Q, T, \theta)$ , y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , cuya viabilidad hemos demostrado (I.5)

para determinado tipo de problemas, entre los que se encuentra el que estamos tratando. A continuación, discriminamos ambas bases dimensionales,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , y exponemos las nuevas soluciones, a las que se llega con su ayuda.

6.2.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL  $(L, Q, T, \theta)$ .

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , son:

$$\begin{aligned}
 [\delta] &= L & ; & & [x] &= L \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L^{-4} \cdot Q \\
 [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T & ; & & [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\lambda] &= L^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2
 \end{aligned}
 \tag{198}$$

El cociente  $\tilde{w} = \delta/x$  es un monomio de forma. La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables en la base usual es:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$
L	1	0	-4	-3	-1	2	-5
Q	0	0	1	1	1	0	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0
$\Pi_1$	2	0	1	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0
$\Pi_3$	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1

(199)

La característica de la matriz de los exponentes dimensionales es 4, y, por tanto, el número de soluciones linealmente independientes del sistema precedente es:  $i = 7-4 = 3$ , que da lugar a los tres monomios adimensionales independientes indicados en el cuadro anterior:

$$\Pi_1 = \frac{x^2 \cdot \gamma}{\mu \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho g \cdot x^2}{\mu \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{x \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \rho}{\mu} \quad ;$$

en lugar de  $\Pi_1$  y  $\Pi_3$ , consideramos  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_3$  y  $\Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3^{-1}$ , quedando entonces:

$$\Pi'_1 = \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi'_3 = \frac{g \cdot x}{\lambda}$$

que junto con el factor de forma  $\tilde{w} = \delta/x$ , conducen a la solución:

$$\delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (200)$$

### 6.2.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

Para hallar las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el fenómeno, en la base ampliada, basta recurrir a sus definiciones, resultando:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L & ; & & [x] &= L \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} \\ [\mu] &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} & ; & & [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho] &= L^{-3} \cdot M \end{aligned} \quad (201)$$

El cuadro de los exponentes dimensionales será, pues:

	x	Δθ	γ	μ	K	λ	ρ
L	1	0	-2	-1	-1	0	-3
Q	0	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0
θ	0	1	0	0	-1	0	0
M	0	0	1	1	0	-1	1
$\Pi_1$	3	0	1	-2	0	0	1
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0

(202)

Como la característica de la matriz es 5, el número de monomios independientes será  $i = 2$ , además del factor de forma  $\tilde{w} = \delta/x$ .

$$\Pi_1 = \frac{\gamma \cdot \rho \cdot x^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 \cdot g \cdot x^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \tilde{w} = \delta/x$$

de donde se deduce:

$$\delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (203)$$

6.2.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).

Consideramos un sistema de ejes coordenados en la pared. El eje X vertical, el Y horizontal y perpendicular a la pared y el Z perpendicular a ambos (fig.II.23).

Las fórmulas dimensionales de las variables, en la base dimensional ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ), serán pues:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L_y & ; & & [x] &= L_x \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= L_x^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (204)$$

En esta base  $\delta$  y  $x$  tienen distinta dimensión por lo que no forman un monomio independiente.

Los exponentes dimensionales forman el siguiente cuadro:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	$\delta$
$L_x$	1	0	-2	-3	-1	2	-3	0
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	1
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	0
Q	0	0	1	1	1	0	1	0
T	0	0	0	1	-1	-2	2	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	0
$\Pi_1$	0	0	2	-2	0	-1	0	4
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_3$	1	0	1	0	0	-1	-1	0

(205)

La característica de la matriz es  $H = 5$ , luego hay  $i = N-H = 8-5 = 3$  monomios adimensionales independientes. Los exponentes con que cada una de las variables aparecen en cada uno de los monomios se hallan por un procedimiento análogo al realizado en (1.1). Según las tres últimas filas de (205), son:

$$\Pi_1 = \frac{\delta^4 \cdot \gamma^2}{\mu^2 \cdot \lambda} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g^2}{\mu^2 \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\gamma \cdot x}{\rho \cdot \lambda} = \frac{g \cdot x}{\lambda}$$

que conducen a la solución:

$$\delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (206)$$

La discriminación de las dimensiones del espacio ha mejorado la solución (200) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

#### 6.2.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .

Comparando las soluciones obtenidas hasta ahora, se observa que tanto por la ampliación de la base como por la discriminación, (203) y (206) son más precisas que la clásica (200). Además, la reducción de la solución ocurre por la desaparición de monomios distintos en cada caso:  $\frac{g \cdot x}{\lambda}$  en el primero, y  $\frac{\rho^2 \cdot g \cdot x^3}{\mu^2}$  en el segundo. Dado, pues, que ambas reducciones son independientes, resulta apropiado utilizar la nueva base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  también con la discriminación de las dimensiones del espacio, es decir, la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .

Tomando los ejes coordenados en la pared como en el apartado anterior, las nuevas fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L_y & ; & & [x] &= L_x \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \\ [\mu] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \end{aligned} \quad (207)$$



y la matriz de exponentes dimensionales es:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	$\delta$
$L_x$	1	0	0	-1	-1	0	-1	0
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	1
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	0
Q	0	0	0	0	1	1	0	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	0
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	-1	0	1	-2	0	0	1	4
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0

(208)

La característica de la matriz es 6, luego hay  $i = 2$  monomios adimensionales independientes. Según las dos últimas filas de (208) son:

$$\Pi_1 = \frac{\delta^4 \cdot \gamma \cdot \rho}{\mu^2 \cdot x} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 g}{\mu^2 \cdot x} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$$

de donde se deduce:

$$\delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot x}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (209)$$

que es más precisa que la (203) obtenida con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M) y que la (206) hallada con la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).

sistemas (210) y (211).

#### 6.2.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

La ampliación de la base realizada, ha consistido en añadir la dimensión fundamental M, lo cual nos ha conducido a que el monomio  $\delta_p = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$  que era adimensional en la base tetradimensional, en nuestra base pentadimensional tenga por dimensión:

Si comparamos las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema, (198) y (201), en las bases (L,Q,T, $\theta$ ) y (L,Q,T, $\theta$ ,M) respectivamente, observamos que las variables que han modificado su dimensión son: el peso específico,  $\gamma$ , la viscosidad,  $\mu$ , el calor de condensación,  $\lambda$ , y la densidad,  $\rho$ .

En la base (L,Q,T,θ) son, según (198):

$$\begin{aligned}
[\gamma] &= L^{-4} \cdot Q \\
[\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\
[\lambda] &= L^2 \cdot T^{-2} \\
[\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2
\end{aligned}
\tag{210}$$

y en la base (L,Q,T,θ,M), de (201):

$$\begin{aligned}
[\gamma]' &= L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} \\
[\mu]' &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} \\
[\lambda]' &= Q \cdot M^{-1} \\
[\rho]' &= L^{-3} \cdot M
\end{aligned}
\tag{211}$$

Esta diferencia permite considerar a la base (L,Q,T,θ) como un subespacio vectorial de la base (L,Q,T,θ,M), lo que implica que los vectores-dimensión (210), representados en el espacio (L,Q,T,θ), sean las proyecciones de los vectores (211), representados en la base pentadimensional (L,Q,T,θ,M), sobre el subespacio tetradimensional (L,Q,T,θ).

Para poner de manifiesto explícitamente dicha proyección, podemos realizar un cambio de base (manteniendo la multiplicidad), de manera que la diferencia entre las fórmulas dimensionales en ambas bases exista solamente en uno de los exponentes dimensionales, no en todos, como ocurre en los sistemas (210) y (211).

La ampliación de la base realizada, ha consistido en añadir la dimensión fundamental M, lo cual nos ha conducido a que el monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$ , que era adimensional en la base tetradimensional, en nuestra base pentadimensional tenga por dimensión:

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}
\tag{212}$$

Llamaremos P a la dimensión de  $[N_P]$ . Tomamos ahora la dimensión P

de dicho monomio  $N_P$  formando parte de la base dimensional, es decir, en lugar de ampliar  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , pasamos de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, P)$ . En esta nueva base la masa no es magnitud fundamental sino que tiene por dimensión, según (212):

$$[M] = L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P \quad (213)$$

introduciendo (213) en (211) obtenemos las fórmulas dimensionales de las magnitudes en la base  $(L, Q, T, \theta, P)$ , que notamos con  $[ ]''$  :

$$\begin{aligned} [\gamma]'' &= L^{-2} \cdot [M] \cdot T^{-2} = L^{-2} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P \cdot T^{-2} = L^{-4} \cdot Q \cdot P \\ [\mu]'' &= L^{-1} \cdot [M] \cdot T^{-1} = L^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P \cdot T^{-1} = L^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P \\ [\lambda]'' &= Q \cdot [M]^{-1} = Q \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \cdot P^{-1} = L^2 \cdot T^{-2} \cdot P^{-1} \\ [\rho]'' &= L^{-3} \cdot [M] = L^{-3} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P = L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P \end{aligned} \quad (214)$$

Si comparamos ahora (210) con (214), resulta:

$$\begin{aligned} [\gamma]'' &= [\gamma] \cdot P \\ [\mu]'' &= [\mu] \cdot P \\ [\lambda]'' &= [\lambda] \cdot P^{-1} \\ [\rho]'' &= [\rho] \cdot P \end{aligned} \quad (215)$$

de donde se deduce que los vectores-dimensión  $[\gamma]$ ,  $[\mu]$ ,  $[\lambda]$  y  $[\rho]$  son las proyecciones de los vectores  $[\gamma]''$ ,  $[\mu]''$ ,  $[\lambda]''$  y  $[\rho]''$  sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ .

Puesto que no se puede realizar la representación gráfica del paso de 5 a 4 dimensiones, por la dificultad obvia de imaginar espacios de 4 y 5 dimensiones, expondremos la representación en tres fases, en las que a las variables  $L$  y  $P$  se añaden sucesivamente  $Q$ ,  $T$  y  $\theta$ . La representación gráfica completa se puede imaginar como una combinación de ellas, (figuras: II.24, II.25 y II.26).

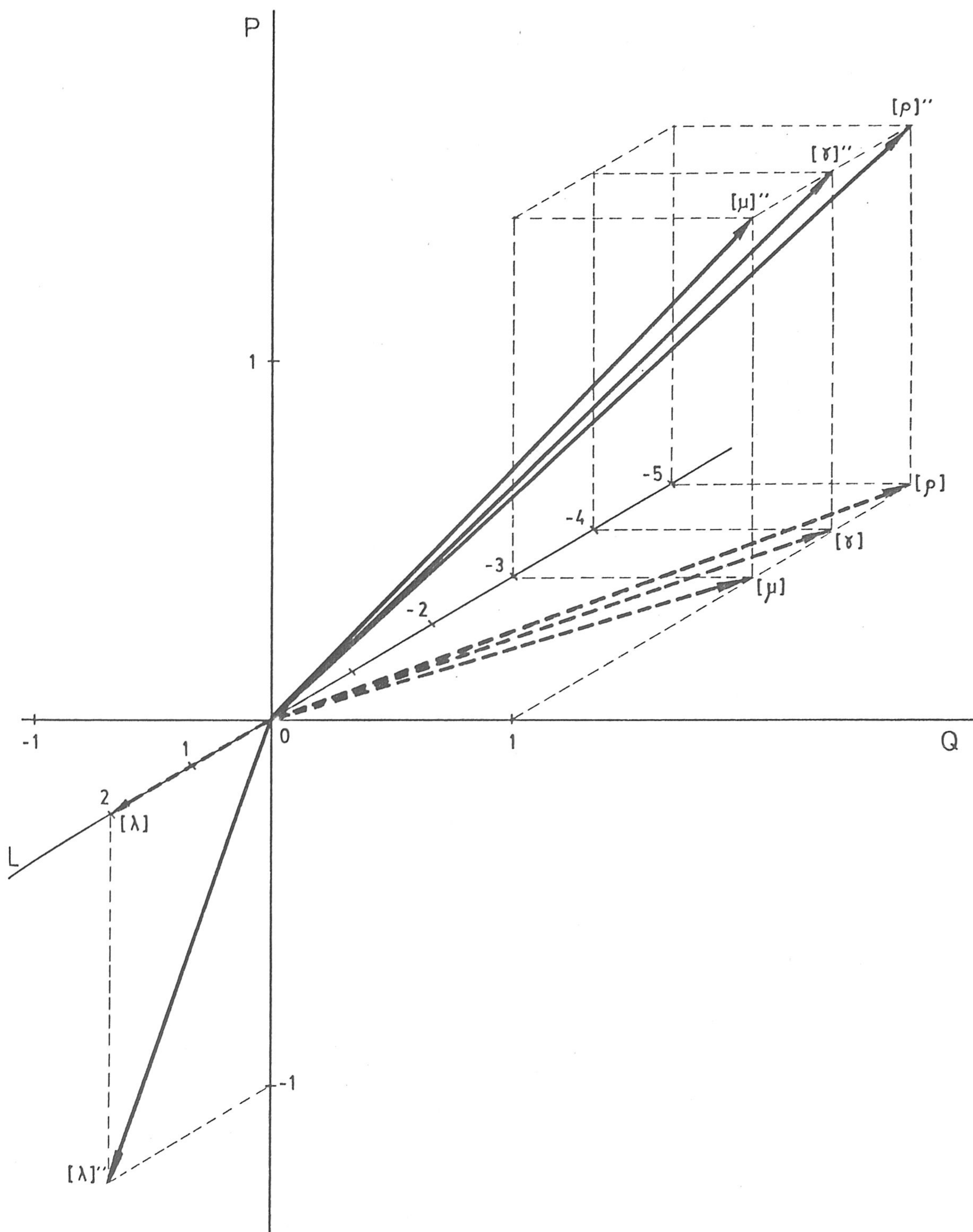


fig.II.24

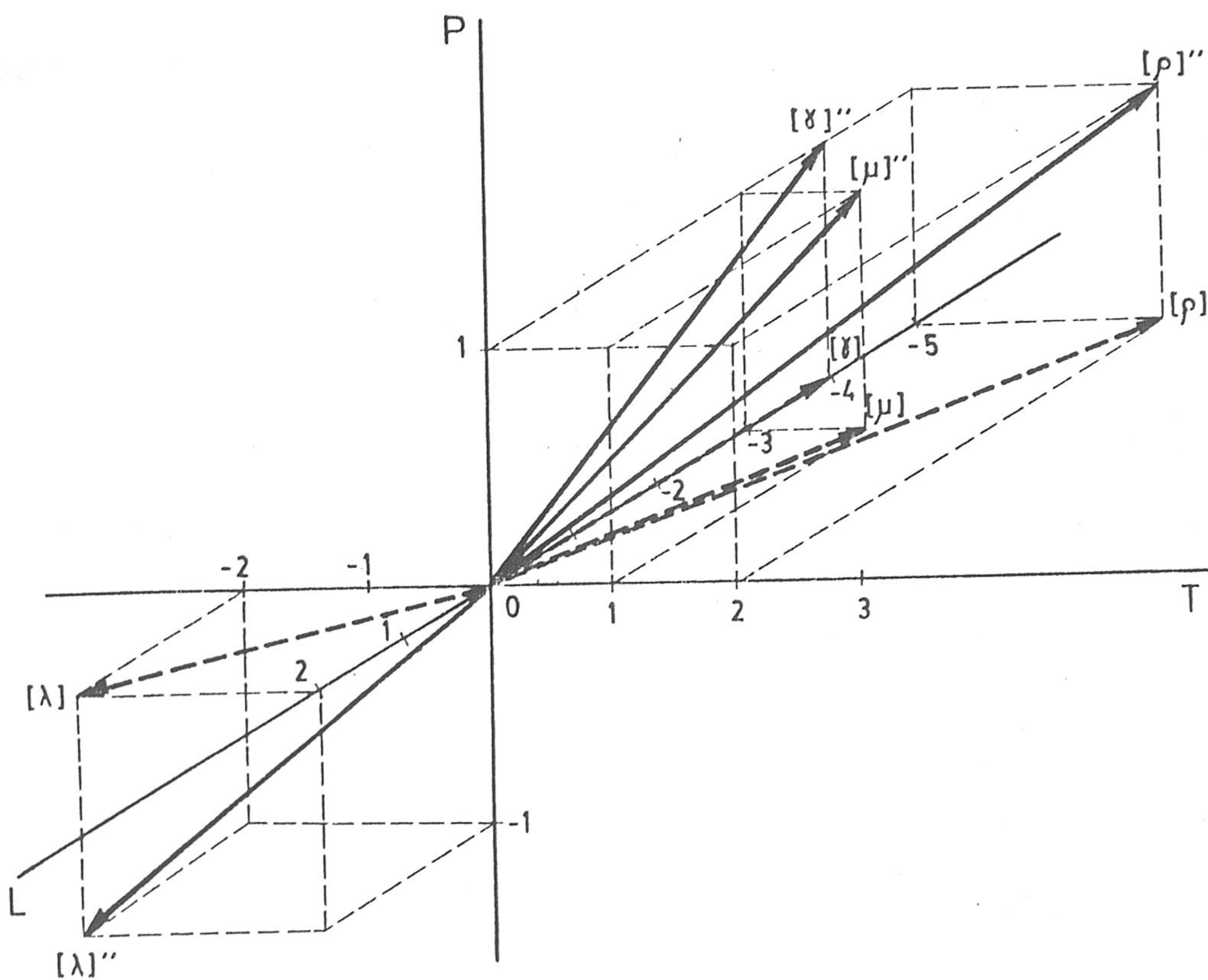


fig.II.25

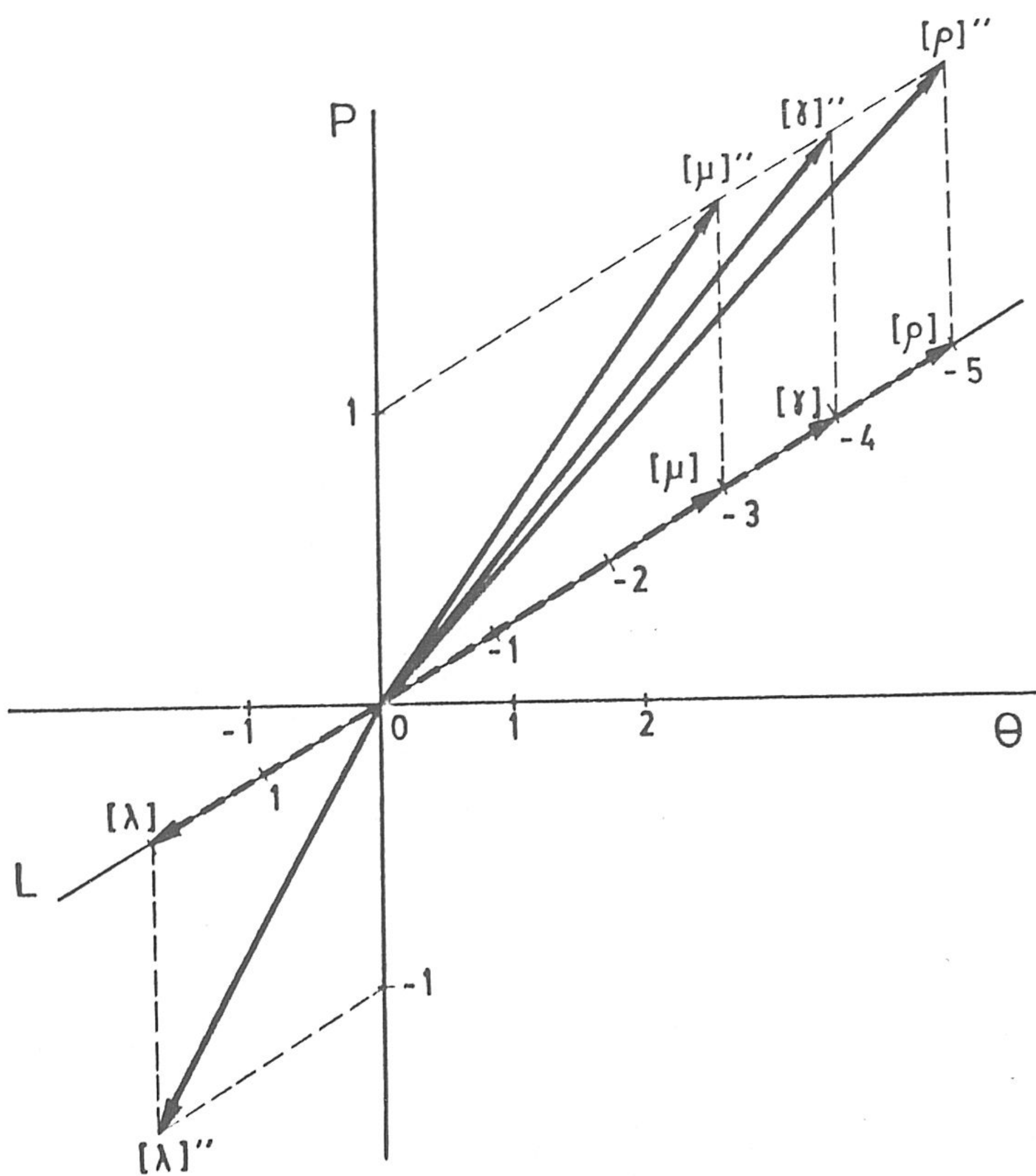


fig.II.26

CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE DISCRIMINADA.

La discriminación de las dimensiones del espacio, esto es, la sustitución de una dimensión  $L$  por tres  $L_x, L_y, L_z$ , es una ampliación de la base independiente de la que hemos desarrollado anteriormente. Por consiguiente ambas se superponen dando la base discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , de 7 dimensiones. La no realización de la ampliación propuesta por nosotros, supone una reducción a la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  de sólo 6 dimensiones.

En la analogía vectorial, equivale a sustituir los vectores-dimensión de las magnitudes que intervienen en el problema en un espacio de 7 dimensiones, por sus proyecciones en un subespacio de 6 dimensiones, análogamente a lo realizado con las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

En efecto, comparando las fórmulas dimensionales (204) y (207), se observa que las variables que cambian de dimensión al expresarlas en una base u otra son:  $\gamma, \mu, \lambda$  y  $\rho$ . En la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [\gamma] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\ [\lambda] &= L_x^2 \cdot T^{-2} \\ [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \tag{216}$$

y en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ :

$$\begin{aligned} [\gamma]' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \\ [\mu]' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [\lambda]' &= Q \cdot M^{-1} \\ [\rho]' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \end{aligned} \tag{217}$$

Llamamos  $N_P$  al monomio  $\frac{g \cdot x}{\lambda}$ . Realizamos a continuación un cambio de base, tomando la dimensión de  $[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right]$ , que llamaremos  $P_x$ , como

fundamental, es decir, en lugar de ampliar la base de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , lo hacemos a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ . Así pues:

$$P_x = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (218)$$

De aquí se deduce que en la nueva base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$  la masa no es magnitud fundamental. Su dimensión es:

$$[M] = L_x^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P_x \quad (219)$$

Sustituyendo (219) en (217) se obtienen las fórmulas dimensionales en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$

$$\begin{aligned} [\gamma]'' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot [M] = L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L_x^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P_x = L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot P_x \\ [\mu]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \cdot P_x \\ [\lambda]'' &= Q \cdot [M]^{-1} = Q \cdot L_x^2 \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \cdot P_x^{-1} = L_x^2 \cdot T^{-2} \cdot P_x^{-1} \\ [\rho]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot T^2 \cdot Q \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \end{aligned} \quad (220)$$

De la comparación de las fórmulas dimensionales (216) y (220) se obtiene:

$$\begin{aligned} [\gamma]'' &= [\gamma] \cdot P_x \\ [\mu]'' &= [\mu] \cdot P_x \\ [\lambda]'' &= [\lambda] \cdot P_x^{-1} \\ [\rho]'' &= [\rho] \cdot P_x \end{aligned} \quad (221)$$

quedando de manifiesto que la diferencia entre las nuevas dimensiones y las antiguas se puede referir a una sola dimensión nueva  $P_x$ , permaneciendo invariables los restantes exponentes dimensionales.

Considerando la analogía entre dimensiones y vectores, el sistema (221) pone de manifiesto que los vectores-dimensión (216) son las proyecciones de los vectores (220), representados en un espacio de 7 dimensiones,

sobre el subespacio de 6 dimensiones ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).

La representación gráfica de dichas proyecciones se puede ver en las figuras: II.27, II.28, II.29, II.30 y II.31 .

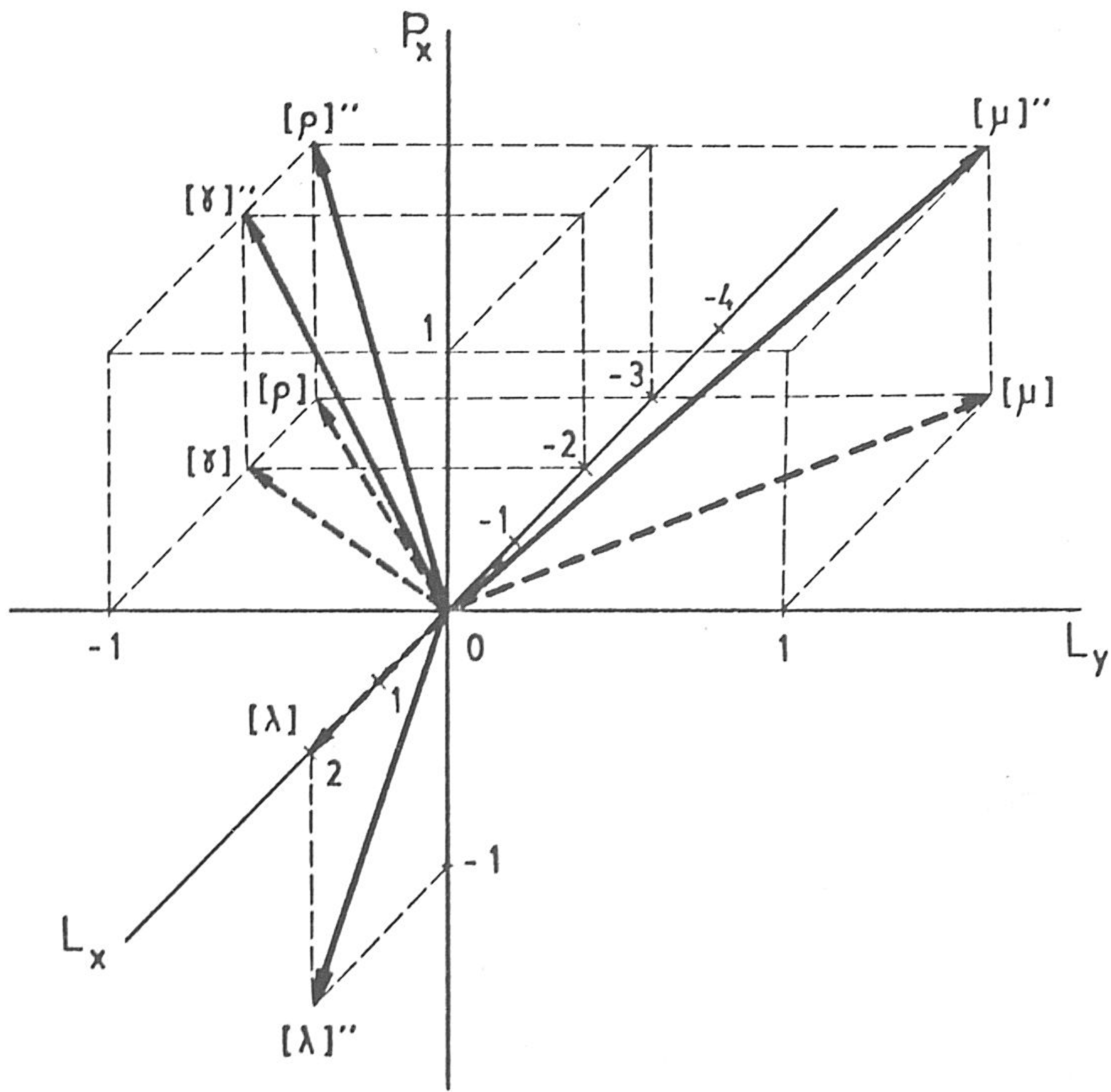


fig.II.27

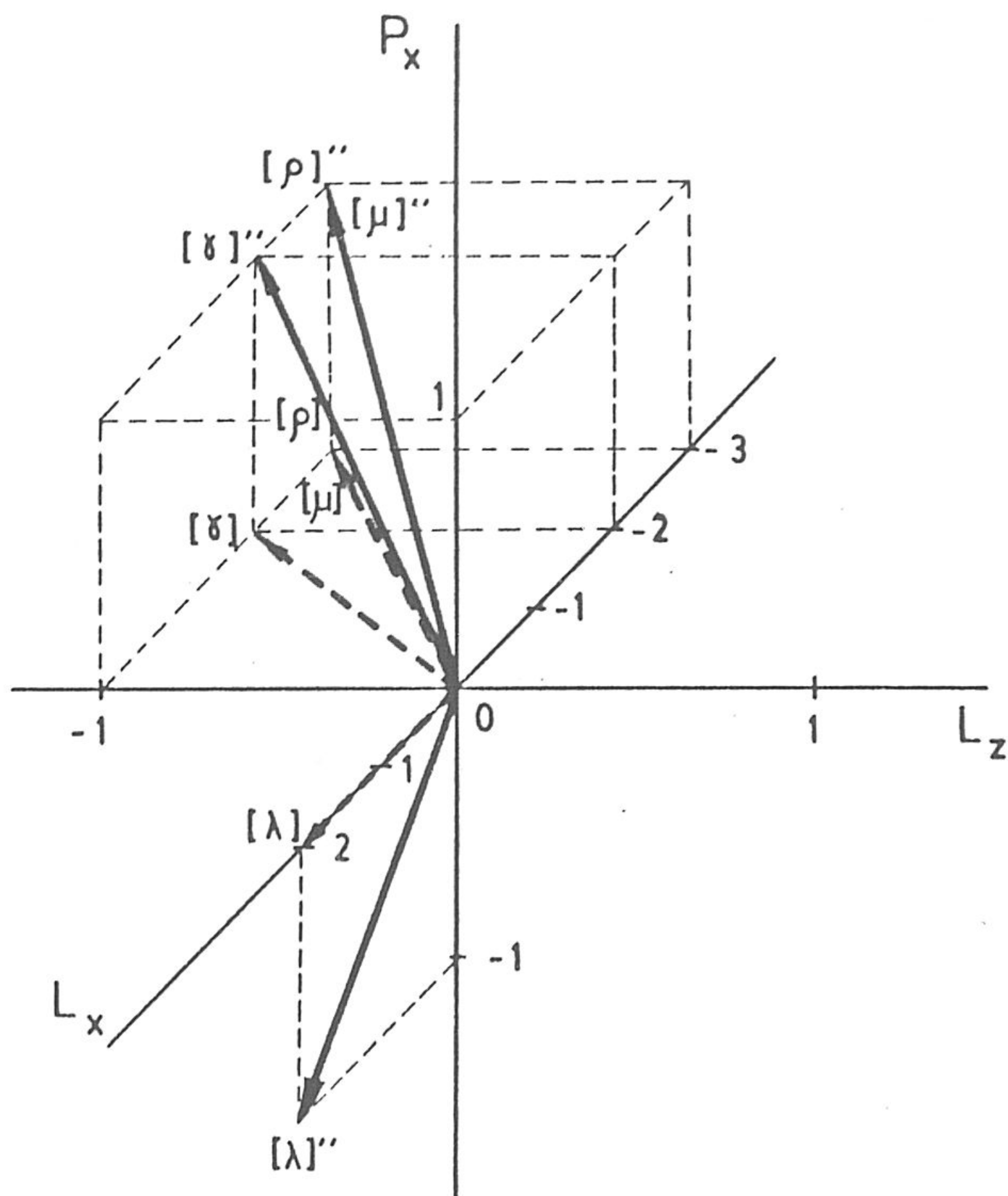


fig.II.28



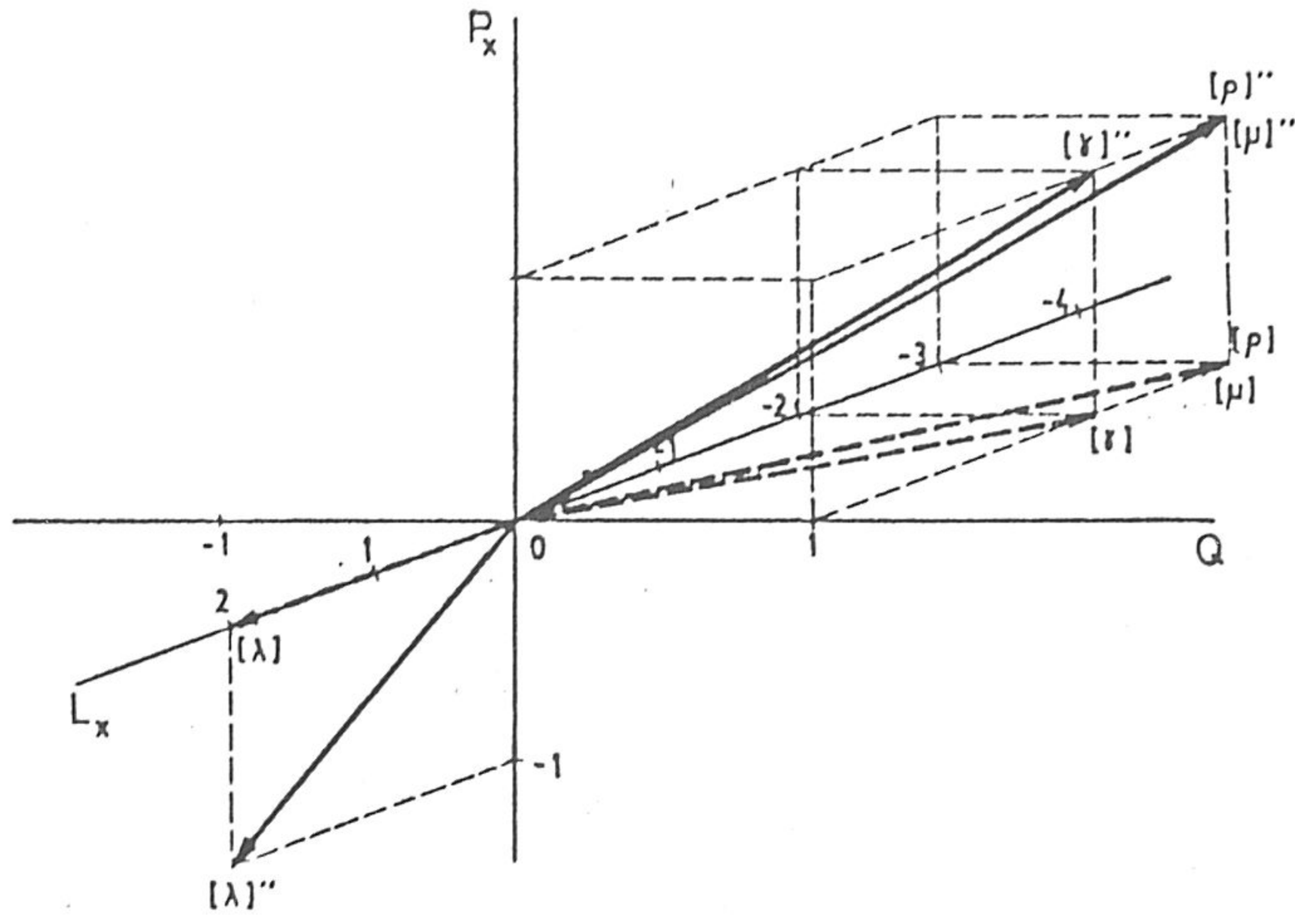


fig.II.29

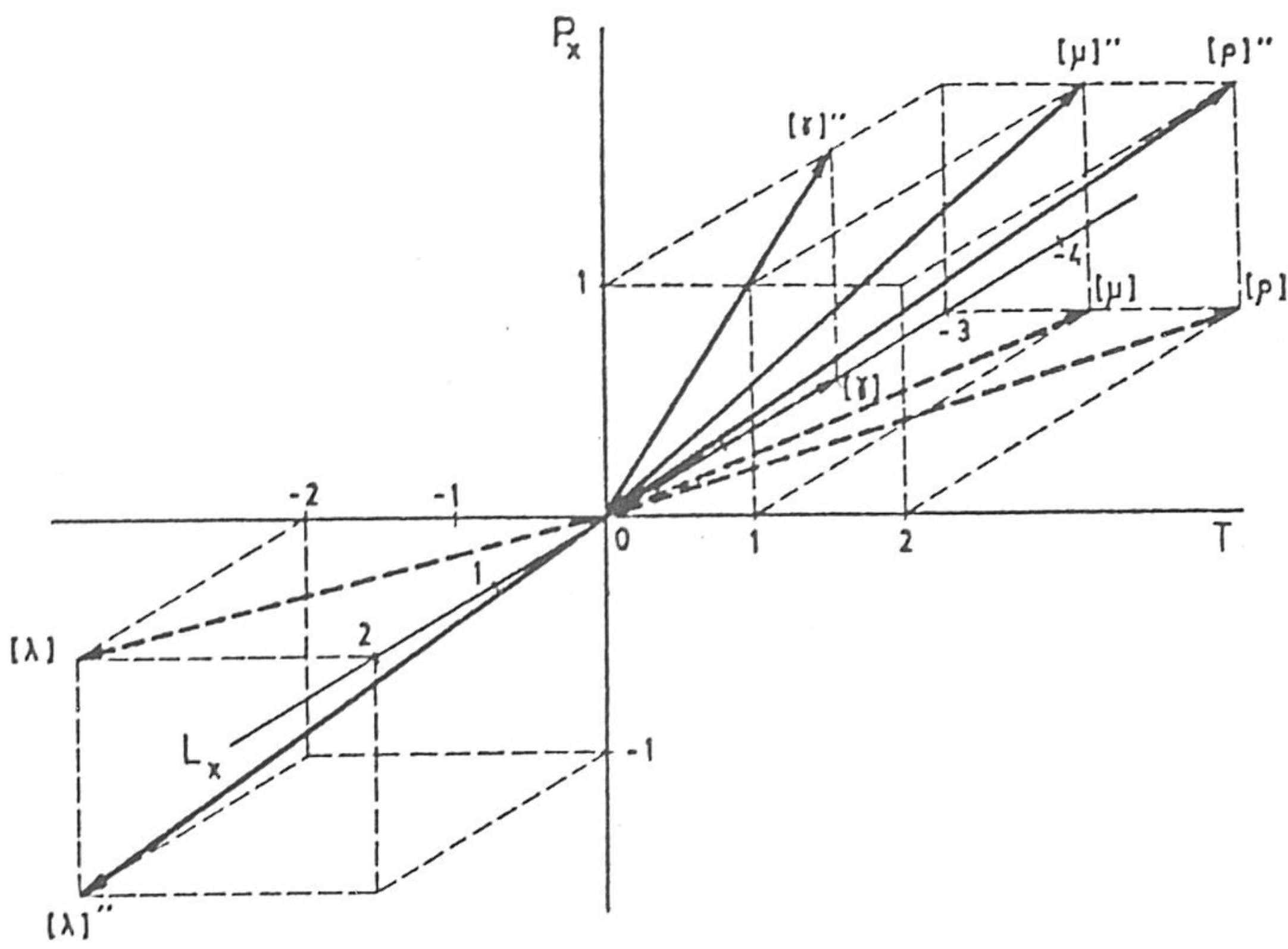


fig.II.30

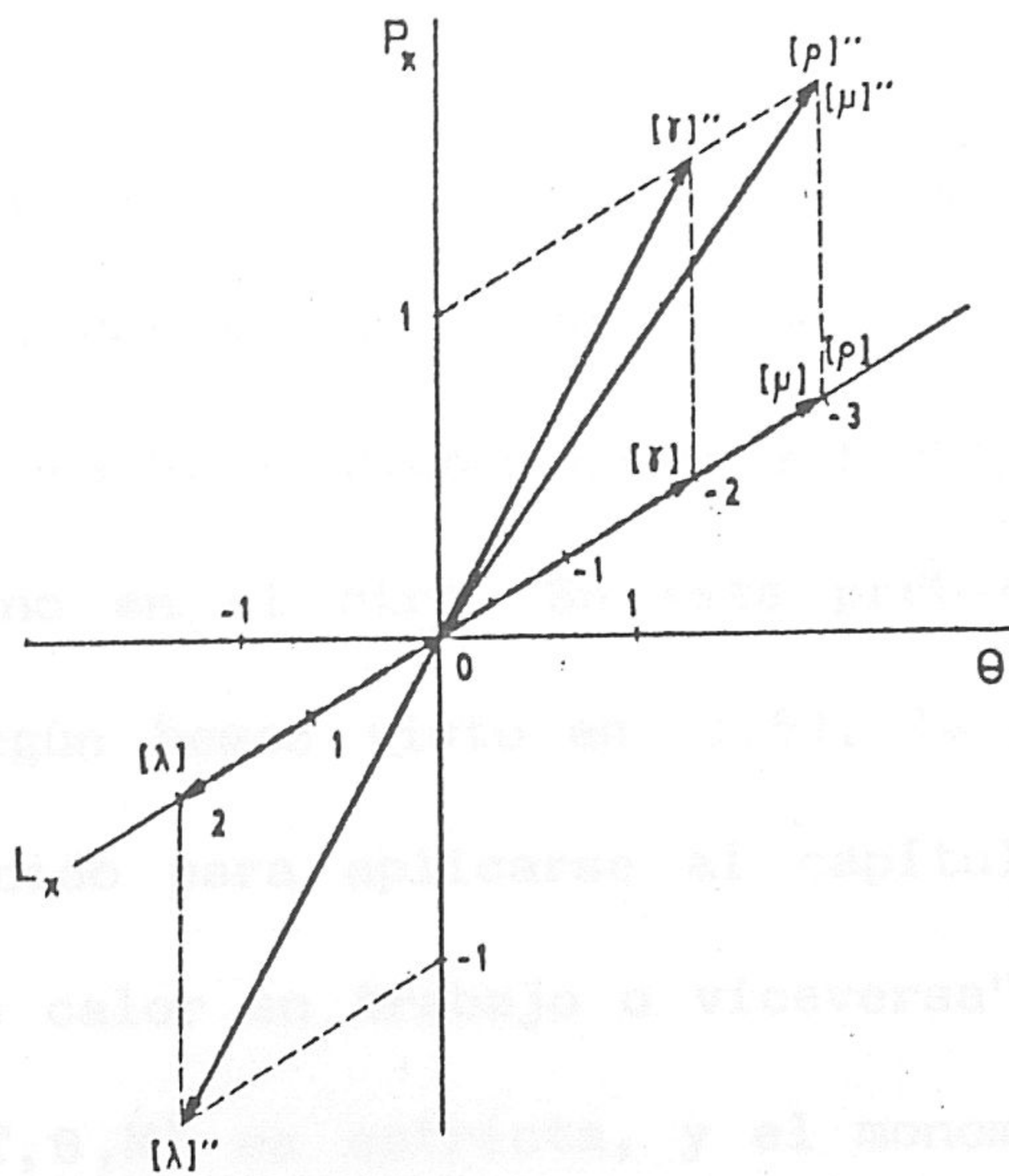


fig.II.31

6.2.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$ .

Hemos puesto de manifiesto que tanto la ampliación de la base dimensional, como la discriminación de las dimensiones del espacio, eliminan sendos monomios de la solución. Dichos monomios son distintos, independientes, por lo que la mejora de las soluciones debida a ambas formas de plantear los problemas es doblemente eficaz.

Es interesante señalar que el monomio que hace desaparecer la ampliación de la base  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$ , tiene una forma peculiar.

La dimensión de  $N_P$  es en la base usual (L,Q,T, $\theta$ ):

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = \frac{L T^{-2} \cdot L}{[Q/m]} = \frac{L^2 \cdot [m] \cdot T^{-2}}{Q}$$

En esta base es  $[Q] = [W] = L^2 \cdot [m] \cdot T^{-2}$ , luego queda de dimensión nula.

Con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M), es:

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = \frac{L T^{-2} \cdot L}{Q \cdot M^{-1}} = \frac{L^2 \cdot M \cdot T^{-2}}{Q} = \frac{[W]}{[Q]} \quad (222)$$

Así pues, la dimensión de  $N_P$  ahora no es nula, correspondiendo precisamente a la relación entre las dimensiones del trabajo y del calor.

Por otra parte, el sentido físico de  $N_P$  es el siguiente. Multiplicando y dividiendo por  $dm$ , es:

$$N_P = \frac{g \cdot x \cdot dm}{\lambda \cdot dm} = \frac{dW}{dQ} \quad (223)$$

El numerador  $dW = g \cdot x \cdot dm$  es el trabajo de  $dm$  si se desplaza verticalmente una distancia  $x$ . El denominador,  $dQ = \lambda \cdot dm$ , es el calor de condensación de la masa  $dm$ . Ahora bien, dichos calor y trabajo son independientes, no se transforman el uno en el otro. En este problema no rige la ley de Joule. Precisamente, según hemos visto en (I.5), la ampliación de la base dimensional se ha deducido para aplicarse al capítulo de "Transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa". En este capítulo la base dimensional (L,Q,T, $\theta$ ,M) es estricta, y el monomio  $N_P$ , de dimensión

$[W]/[Q]$  , desaparece de las soluciones. Por el contrario, en este capítulo la base  $(L, Q, T, \theta)$ , (o bien  $L, M, T, \theta$ ), es deficiente, el monomio  $N_P$  tiene dimensión nula y queda en la solución como un monomio espurio.

Estas consideraciones sobre  $N_P$  son válidas, paralelamente, para las bases dimensionales discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y discriminada y ampliada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  según se comprueba fácilmente. En efecto, en la base usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  es:

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = \frac{L_x T^{-2} \cdot L_x}{[Q/m]} = \frac{L_x^2 \cdot [m] \cdot T^{-2}}{Q}$$

pero como  $[Q] = [W] = L_x^2 \cdot [m] \cdot T^{-2}$  , el monomio  $N_P$  queda de dimensión nula.

En la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = \frac{L_x T^{-2} \cdot L_x}{Q \cdot M^{-1}} = \frac{L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2}}{Q} = \frac{[W]}{[Q]}$$

la dimensión de  $N_P$  no es nula, y vuelve a corresponder a la relación entre las dimensiones del trabajo y del calor.

#### 6.2.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La solución analítica (189) obtenida por Nusselt [59] es:

$$\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot \Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 g \lambda} \right)^{1/4} \tag{189}$$

Nuestra solución (209) hallada con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , está en perfecto acuerdo con (189), coincidiendo con ella si hacemos

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) = \left( \frac{4 \cdot K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)^{1/4}$$

### 6.2.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

Para calcular teóricamente el espesor de la película  $\delta(x)$  se ha utilizado la ecuación de continuidad (187) que expresa la igualdad entre el aumento de la intensidad de la corriente de masa líquida a lo largo de la pared y la cantidad de vapor condensado sobre ella.

Ahora bien, en los fluidos, sistemas continuos, como es nuestro caso, lo adecuado es trabajar con elementos de volumen, para pasar de unas regiones a otras, en lugar de con elementos de masa. En efecto, los elementos de masa, además de permitir evaluar la cantidad de fluido, introducen un sentido de "inercia" no siempre presente en los problemas; por el contrario, los elementos de volumen incorporan exclusivamente el carácter de "extensión".

Consideramos, pues, indicado introducir como variable independiente el calor de condensación por unidad de volumen, que llamamos  $\lambda'$ , en lugar de por unidad de masa,  $\lambda$ , como suele hacerse (será pues  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$ ). Por la misma razón, no se considera, a efectos gravitatorios, el peso por unidad de masa,  $g$ , sino el peso específico  $\gamma$ . La densidad no interviene como variable independiente, ya que se desprecian los efectos de inercia, y sólo aparece al sustituir  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$  ó  $\gamma = \rho \cdot g$ .

De acuerdo con esto, la ecuación de continuidad (187) se puede escribir de forma que exprese la igualdad entre el aumento de la intensidad de corriente de volumen de líquido a lo largo de la pared y la cantidad de volumen de vapor condensado sobre ella. Sea  $G' = \bar{u} \cdot \delta$  el volumen de líquido por unidad de tiempo y anchura de pared; como era  $G = \rho \cdot \bar{u} \cdot \delta$ , es ahora  $G = \rho \cdot G'$ . Con esto, la (187) queda:

$$\frac{dG}{dx} = \rho \cdot \frac{dG'}{dx} = \rho \cdot \frac{d}{dx} (\bar{u} \cdot \delta) = \frac{q}{\lambda'} \cdot \rho = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\delta \cdot \lambda'} \cdot \rho$$

o bien, eliminando  $\rho$ :

$$\frac{dG'}{dx} = \frac{d}{dx} (\bar{u} \cdot \delta) = \frac{q}{\lambda'} = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\delta \cdot \lambda'} \quad (224)$$

Sustituyendo  $\bar{u}$  por su valor dado por (183), e introduciendo el peso específico  $\gamma$ , se obtiene la ecuación diferencial de  $\delta(x)$ :

$$\delta^3 \cdot d\delta = \frac{K \cdot \Delta\theta \cdot \mu}{\gamma \cdot \lambda'} \cdot dx \quad (225)$$

con la condición inicial  $\delta = 0$  en  $x = 0$ . Y se llega a la solución:

$$\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot K \cdot \Delta\theta \cdot \mu \cdot x}{\gamma \cdot \lambda'} \right)^{\frac{1}{4}}$$

que es la misma que la (189) habida cuenta de que  $\gamma = \rho \cdot g$  y  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$ .

Así pues, el espesor de la película líquida, con este nuevo planteamiento, no depende de la densidad como variable independiente, y ahora es función de las siguientes magnitudes

$$\delta(x) = f(x, \Delta\theta, \gamma, \mu, \lambda', K) \quad (226)$$

que utilizaremos para resolverlo por Análisis dimensional.

Dado que tanto la ampliación de la base como la discriminación de las dimensiones del espacio reducen la solución clásica, resolvemos el problema directamente con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Tomando el sistema de ejes coordenados en la pared como en el apartado (6.2.3), las fórmulas dimensionales de las variables, en la base ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ), son:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L_y & ; & \quad [x] = L_x \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & \quad [\gamma] = L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \\ [\mu] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & \quad [K] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda'] &= [\rho \cdot \lambda] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \end{aligned} \quad (227)$$

La matriz de los exponentes dimensionales es:

concuerta con la solución (189) obtenida por el método de las aproximaciones a), b), c), d), e), f) y g), pag. 146, siendo la constante dimensional  $C = 2^{\frac{1}{4}}$ . Además, con este nuevo tratamiento, hemos logrado

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda'$	$\delta$
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	0
$L_y$	0	0	-1	1	1	-1	1
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	0
Q	0	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	-1	-1	1	-1	-1	1	4

(228)

La característica de la matriz es  $H = 6$  y hay un solo monomio adimensional independiente  $i = 1$ . Dicho monomio es, según la última fila de (228):

$$\Pi = \frac{\delta^4 \cdot \gamma \cdot \lambda'}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}$$

que, como son  $\gamma = \rho \cdot g$  y  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$ , queda:  $\Pi = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \lambda}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}$ , de donde se deduce la solución:

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda} \right)^{1/4} \tag{229}$$

De este modo, hemos conseguido el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional, esto es, la solución exacta salvo una constante numérica. Esta solución, como ha sido obtenida de forma deductiva a partir de una teoría coherente y completa de Análisis dimensional, podemos afirmar que es la solución teórica funcional exacta. Decimos "funcional", pues queda establecida la relación entre las variables pero no así el factor numérico  $C$ .

Nuestra solución (229) obtenida con la base ampliada y discriminada, concuerda con la solución teórica (189) obtenida por Nusselt [59] con las aproximaciones: a), b), c), d), e), f) y g), pag.146, siendo la constante adimensional  $C = 2^{1/2}$ . Además, con este nuevo tratamiento, hemos logrado

precisar la forma de la función  $F_4$  contenida en la solución (209) hallada con el tratamiento clásico.

#### 6.2.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- Como en el problema tratado, "cálculo del espesor de la película de líquido condensado", no existe conversión de calor en trabajo o viceversa, con su resolución, queda confirmado (I.5) el que la base "estricta" para este tipo de fenómenos es la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  y la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es "deficiente" [2].

2ª.- La utilización del método de la discriminación de las dimensiones del espacio, deducido en la teoría de Análisis dimensional de Palacios [15], supone mayor precisión en la solución, independiente de la que causa la ampliación de la base realizada en (I.5), por eliminar monomios diferentes.

3ª.- Los vectores-dimensión en la base  $(L, Q, T, \theta)$  son las proyecciones, sobre un subespacio tetradimensional, de los vectores-dimensión pentadimensionales, por ello, para este problema, el uso de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  en lugar de la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  supone una "mutilación", lo que lleva consigo una pérdida de información [25].

4ª.- La ampliación de la base dimensional, realizada por la inexistencia de conversión de calor en trabajo o viceversa, suprime el monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$  de las soluciones, que es justamente una relación algebraica, aunque no física, entre calor y trabajo.

5ª.- Las soluciones obtenidas, a partir del Análisis dimensional de Palacios y con la ampliación de la base dimensional por nosotros propuesta, son:

que coincide con la solución hallada por Musselt [59], siendo  $C = 2^3$ .

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad \delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (200)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad \delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (203)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad \delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (206)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad \delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot x}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (209)$$

Hemos logrado mejorar la solución mediante dos procedimientos distintos.

El primero consiste en la discriminación de las dimensiones del espacio; con él, hemos reducido las funciones  $F_1$  y  $F_2$  a las  $F_3$  y  $F_4$ , respectivamente, siendo estas últimas más sencillas que las anteriores.

El segundo corresponde a la ampliación de la base dimensional deducida por nosotros en (I.5); así, las soluciones (203) y (209) son más precisas que las (200) y (206), respectivamente, por ser las funciones  $F_2$  y  $F_4$  menos complejas que las  $F_1$  y  $F_3$ .

6ª.- Una mejora ulterior la logramos con una más adecuada elección de variables que la habitualmente usada, obteniendo así la solución más precisa:

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (229)$$

con lo que conseguimos determinar la forma de la función  $F_4$  dada en (209), esto es:

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right) = C \cdot \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$$

que coincide con la solución hallada por Nusselt [59], siendo  $C = 2^{\frac{1}{2}}$ .



### 6.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

Se pretende calcular, mediante el Análisis dimensional, la cantidad de calor que por unidad de temperatura, de superficie y de tiempo se transmite en el proceso de la condensación en película sobre una pared vertical, esto es, el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ . Según la ecuación (186), dicho coeficiente será función de las mismas variables de que dependa el espesor de la película,  $\delta$ , estudiada en el apartado anterior, y, además, de la conductividad térmica  $K$ .

Así pues, el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ , es función de las siguientes magnitudes:

$$h = f(L, \Delta\theta, \gamma, \mu, K, \lambda, \rho) \quad (230)$$

donde  $L$  es la altura de la pared,  $\Delta\theta = \theta_s - \theta_p$  la diferencia de temperaturas entre la de saturación y la de la pared,  $\gamma = \rho \cdot g$  el peso específico,  $\mu$  la viscosidad,  $K$  la conductividad térmica,  $\lambda$  el calor latente por unidad de masa y  $\rho$  la densidad del fluido condensado.

Resolvemos el problema con las distintas bases dimensionales.

#### 6.3.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T, $\theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en la base (L,Q,T, $\theta$ ), son las dadas en (198), sin más que cambiar el espesor de la película  $\delta$  por el coeficiente de transmisión del calor, que es la incógnita ahora. Su dimensión es:

$$[h] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \quad ;$$

y el cuadro formado por los exponentes dimensionales de las variables queda:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
L	1	0	-4	-3	-1	2	-5	-2
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	2	0	1	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_3$	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
$\Pi_4$	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(231)

La característica de la matriz es  $H = 4$ , luego el número de monomios independientes es  $i = N-H = 8-4 = 4$ . Los exponentes con que las variables aparecen en cada uno de los cuatro monomios, se obtienen de forma análoga a (1.1), y vienen expuestos en las cuatro últimas filas de (231). Así pues:

$$\Pi_1 = \frac{\gamma \cdot L^2}{\mu \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho g \cdot L^2}{\mu \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}}; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}; \quad \Pi_3 = \frac{L \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \rho}{\mu}; \quad \Pi_4 = \frac{\Delta\theta \cdot L \cdot h}{\mu \cdot \lambda}$$

Tomamos  $\Pi'_1$ ,  $\Pi'_3$ ,  $\Pi'_4$  en lugar de los  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$ , dados por:  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_3$ ,  $\Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3^{-1}$  y  $\Pi'_4 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_4$ ; de modo que el sistema de monomios independientes queda:

$$\Pi'_1 = \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu}; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}; \quad \Pi'_3 = \frac{g \cdot L}{\lambda}; \quad \Pi'_4 = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu,L}$$

resultando finalmente la solución:

$$N_{Nu,L} = F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L}{\lambda} \right) \quad (232)$$

### 6.3.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T, $\theta$ ,M).

Los exponentes dimensionales se obtienen como en (6.2.2), y teniendo en cuenta, además, la dimensión del coeficiente de transmisión del calor:

$$[h] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1},$$

la matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables en la base ampliada es:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
L	1	0	-2	-1	-1	0	-3	-2
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_2$	3	0	1	-2	0	0	1	0
$\Pi_3$	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(233)

Como la característica de la matriz es 5, el número de monomios independientes es  $i = 3$ . Son según (233):

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\gamma \cdot \rho \cdot L^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h \cdot L \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$$

En vez de  $\Pi_3$ , tomamos  $\Pi'_3 = \Pi_1^{-1} \cdot \Pi_3 = \frac{h \cdot L}{K} = N_{Nu,L}$ , de donde, la solución es:

$$N_{Nu,L} = F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (234)$$

siendo más precisa que la (232) obtenida con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ), pues la función indeterminada,  $F_2$ , que aparece en (234), contiene un monomio menos que la función indeterminada  $F_1$ , que aparecía en (232).

### 6.3.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).

Tomamos el sistema de ejes como en (6.2.3). Los exponentes dimensionales en la base ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ) se obtienen del mismo modo (204). La dimensión de h es:

$$[h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

6.3.4 El cuadro de exponentes es, pues:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
$L_x$	1	0	-2	-3	-1	2	-3	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_2$	1	0	1	0	0	-1	-1	0
$\Pi_3$	0	4	-2	-2	0	-3	0	4

(235)

La característica de la matriz es 5, por consiguiente el número de monomios adimensionales independientes es  $i = 8-5 = 3$ , que resultan ser:

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\gamma \cdot L}{\rho \cdot \lambda} = \frac{g \cdot L}{\lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\Delta\theta^4 \cdot h^4}{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \gamma^2} = \frac{\Delta\theta^4 \cdot h^4}{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \rho^2 \cdot g^2}$$

Con la intención de que la solución tome una forma más adecuada consideramos un  $\Pi'_3$  del modo siguiente:

$$\Pi'_3 = \Pi_1^{-4} \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 = N_{Nu,L}^4 \cdot \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g \cdot L^3} \right)$$

y la solución se puede expresar en función de los tres monomios  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi'_3$  según:

$$N_{Nu,L} = \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot L^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L}{\lambda} \right) \quad (236)$$

La discriminación de las dimensiones del espacio ha mejorado la solución (232) obtenida con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ).

6.3.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Considerando el sistema de ejes coordenados en la pared como se indica en (6.2.3), aplicamos el método de la discriminación espacial reemplazando la base ( $L, Q, T, \theta, M$ ) por ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ). Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema vienen dadas ahora por (207). Teniendo en cuenta además que:

$$[h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

la matriz de los exponentes dimensionales es:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	1	4	-1	-2	0	-4	-1	4
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0

(237)

Al ser la característica de la matriz 6, hay dos monomios independientes:

$$\Pi_1 = \frac{L \cdot \Delta\theta^4 \cdot h^4}{\gamma \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4 \cdot \rho} = \frac{L \cdot \Delta\theta^4 \cdot h^4}{\rho^2 \cdot g \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4} ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$$

En lugar de  $\Pi_1$ , podemos tomar  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-4} = N_{Nu,L}^4 \cdot \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g \cdot L^3} \right)$ , de donde se deduce el siguiente resultado:

$$N_{Nu,L} = \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot L^3}{\mu^2} \right)^{1/4} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (238)$$

Esta solución es más precisa que la (234) obtenida con la base

ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , y también que la (236) hallada con la base usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , pues la función indeterminada  $F_4$ , que aparece en (238), depende de un solo monomio, mientras que las restantes soluciones dependen de más de uno. En consecuencia, resulta más sencillo determinar  $F_4$ , que cualquiera de las otras,  $F_1$ ,  $F_2$  o  $F_3$ , que es la finalidad del Análisis dimensional.

### 6.3.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Como de todas las magnitudes que intervienen en el problema, las únicas que cambian de dimensión al ampliar la base dimensional, esto es, al pasar de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  o de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , son: el peso específico,  $\gamma$ , la viscosidad,  $\mu$ , el calor de condensación por unidad de masa,  $\lambda$ , y la densidad,  $\rho$ , el tratamiento de este apartado es el mismo que el efectuado en (6.2.5).

Por un procedimiento análogo al realizado allí, se puede llegar a que las fórmulas dimensionales de dichas variables, en una u otra base, difieran en una única dimensión fundamental  $P$ , siendo,

$$P = \left[ \frac{g \cdot L}{\lambda} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

y, de la comparación entre (210) y (214), se deduce que los vectores-dimensión  $[\gamma]$ ,  $[\mu]$ ,  $[\lambda]$  y  $[\rho]$  representados en el espacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión  $[\gamma]''$ ,  $[\mu]''$ ,  $[\lambda]''$  y  $[\rho]''$  representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ ; figuras: II.24, II.25 y II.26.

Análogamente ocurre con las bases dimensionales  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ : las fórmulas dimensionales de las variables en dichas bases se pueden expresar de modo que difieran en una única dimensión fundamental  $P_x$ :

$$P_x = \left[ \frac{g \cdot L}{\lambda} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

y, comparando (216) con (220), se llega a la conclusión de que los vectores-dimensión (216), representados en el espacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores (220) representados en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.27, II.28, II.29, II.30 y II.31).

### 6.3.6.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Si comparamos las soluciones (232) y (236) obtenidas respectivamente mediante la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  y su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , con las halladas (234) y (238) con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  y su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , se observa que, al ampliar la base dimensional, desaparece de las soluciones el monomio  $\frac{g \cdot L}{\lambda}$ .

Veamos cuál es el significado físico de este monomio que llamamos  $N_P$ . Si tomamos un elemento de masa de fluido  $dm$ ,  $N_P$  se puede expresar como:

$$N_P = \frac{g \cdot L}{\lambda} = \frac{dm \cdot g \cdot L}{dm \cdot \lambda} = \frac{dW}{dQ} \quad (239)$$

siendo  $dW = dm \cdot g \cdot L$  el trabajo correspondiente a que  $dm$  se desplace verticalmente una distancia  $L$ , y  $dQ = dm \cdot \lambda$  el calor de condensación de la masa  $dm$ . Así pues, el monomio  $N_P$  representa precisamente la relación entre un trabajo mecánico y un calor.

Dicho monomio es adimensional en las bases: usual  $(L, Q, T, \theta)$  y usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , mientras que en la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , tiene de dimensión:

$$P = [N_P] = \left[ \frac{g \cdot L}{\lambda} \right] = \frac{L^2 \cdot M \cdot T^{-2}}{Q} = \frac{[dW]}{[dQ]}$$

y en la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ :

$$P_x = [N_P] = \left[ \frac{g \cdot L}{\lambda} \right] = \frac{L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2}}{Q} = \frac{[dW]}{[dQ]}$$

Debido a que el monomio  $N_P$  adquiere una dimensión no nula con la ampliación de las bases dimensionales, deja de formar parte de los monomios adimensionales independientes,  $\Pi_i$ , que constituyen la solución, y desaparece de ésta.

Como la ampliación de la base dimensional proviene de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, según dedujimos anteriormente (I.5), en ella el monomio  $N_P$  pierde su carácter individual, y sus componentes quedan incluidos en otros monomios. Así pues, de la ampliación de la base deducida por nosotros se deriva necesariamente la desaparición, como monomio  $\Pi$  adimensional, de la relación entre calor y trabajo.

#### 6.3.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La solución hallada por Nusselt [59] es:

$$N_{Nu,L} = 0.943 \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot L^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{1/4} \quad (240)$$

que se encuentra en perfecto acuerdo con la solución (238) obtenida por nosotros con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ), y coinciden cuando  $F_4$  sea de la forma:

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) = 0,943 \cdot \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)^{-1/4}$$

#### 6.3.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

Basándonos en la argumentación efectuada en (6.2.8) podemos tomar como variable independiente el calor de condensación por unidad de volumen en lugar de por unidad de masa. Así, el coeficiente de transmisión del calor  $h$  es función de las siguientes variables

$$h = f(L, \Delta\theta, \gamma, \mu, K, \lambda') \quad (241)$$



Resolvemos el problema directamente con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , que es la más apropiada, ya que, como ha quedado de manifiesto en todos los casos anteriores, tanto la ampliación de la base como la discriminación de las dimensiones del espacio reducen las soluciones.

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , vienen dadas por (227), añadiendo:

$$[h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

de modo que la matriz formada por los exponentes dimensionales es:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda'$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	1	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	-1
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	1	1	-1	1	-3	-1	4

(242)

Al ser la característica de la matriz  $H = 6$ , hay  $i = N - H = 7 - 6 = 1$  un solo monomio independiente, que según la última fila de (242) se puede expresar como:

$$\Pi = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta \cdot \mu \cdot L}{K^3 \cdot \gamma \cdot \lambda'} = N_{Nu,L}^4 \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot L^3} \right),$$

donde hemos sustituido:  $\gamma = \rho \cdot g$  ;  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$  ;  $N_{Nu,L} = \frac{h \cdot L}{K}$  .

La solución es, pues:

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot L^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{243}$$

ya que la incógnita  $h$  está en  $N_{Nu,L}$  .

Así, hemos conseguido el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional, la solución exacta salvo una constante numérica, esto es, la "solución funcional exacta".

La solución (243), por una parte, supera en precisión a la solución (238) hallada con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  obtenida con el tratamiento clásico, y por otra, se encuentra en perfecto acuerdo con la solución analítica (240) obtenida por Nusselt teniendo la constante adimensional el valor  $C = 0,943$ .

### 6.3.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- Con el cálculo del coeficiente de transmisión del calor por condensación en una pared vertical, en el cual no se produce transformación de calor en trabajo o viceversa, hemos ratificado, (I.5), el que la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "estricta", para el conjunto de fenómenos de transmisión de calor que posean dicha peculiaridad, mientras que la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es al mismo tiempo "deficiente".

2ª.- Discriminando las dimensiones del espacio obtenemos una mayor precisión en la solución del problema [15], con total independencia de la que origina la oportuna ampliación de la base dimensional deducida en (I.5).

3ª.- Hemos confirmado que, en ocasiones, los denominados "números adimensionales" no lo son (Arenas y Herranz [22] a [24]). En el problema que aquí tratamos el número de Nusselt no es adimensional, y en las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  tiene la dimensión:  $[N_{Nu, L}] = L_x \cdot L_y^{-1}$ .

4ª.- El tránsito de la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  "estricta" a la usual  $(L, Q, T, \theta)$  supone, en lo que respecta a los vectores-dimensión, una proyección sobre un subespacio tetradimensional, lo que denota una "mutilación", o merma de información en el problema [25].

5ª.- Constatamos el hecho de que el monomio  $N_P = \frac{g \cdot L}{\lambda}$ , que expresa la relación, sólo formal, entre un calor y un trabajo, desaparece de las soluciones al ampliar la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

6ª.- Las soluciones halladas mediante el Análisis dimensional son las siguientes:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L}{\lambda} \right) \quad (232)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (234)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, L} = \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L}{\lambda} \right) \quad (236)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, L} = \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (238)$$

Con la discriminación de las dimensiones del espacio hemos conseguido soluciones más precisas que con las bases sin discriminar; así es, las soluciones (236) y (238) son más precisas que las (232) y (234), respectivamente.

La ampliación de la base propuesta por nosotros mejora aún más la solución; comparando las soluciones halladas con la base usual (232) y (236) con las logradas respectivamente con la base ampliada (234) y (238) se observa que la mejora reside en la eliminación del monomio  $\frac{g \cdot L}{\lambda}$ .

7ª.- El uso de variables no usuales, específicamente adecuadas al problema: el calor de condensación por unidad de volumen y el peso específico, nos proporciona una mejora adicional en los resultados, y llegamos en definitiva a la solución

$$N_{Nu, L} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot L^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (243)$$

que, por una parte, fija la función  $F_4$  de la ecuación (238), y por otra coincide con la solución analítica de Nusselt [59] para  $C = 0,943$ .

## 7.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UN CILINDRO VERTICAL.

En este problema se trata de estudiar por Análisis dimensional, la transmisión de calor por la pared de un cilindro vertical de altura  $H$  en cuyo exterior se deposita una delgada capa de fluido, que desciende lentamente, originada por la condensación de un vapor saturado contiguo.

Cuando consideramos tubos de diámetro grande en comparación con el espesor de la película de líquido, el tratamiento teórico del problema es el mismo que el realizado en el caso de la pared vertical.

Desde el punto de vista del Análisis dimensional el problema también se resuelve de modo semejante salvo en lo que respecta a la discriminación.

Las magnitudes físicas que más interesa conocer, de las que caracterizan el problema de la condensación en película laminar, son: la velocidad media del vapor saturado, el espesor de la película líquida y el flujo calorífico. Calcularemos, sucesivamente, cada una de ellas, por Análisis dimensional.

### 7.1.- VELOCIDAD MEDIA DEL VAPOR SATURADO EN LA PELICULA LIQUIDA.

Las únicas fuerzas que intervienen en la película líquida son las viscosas y gravitatorias, de modo que la ecuación del movimiento es (181). Dicha ecuación, con sus condiciones de contorno, nos indica las variables de las cuales depende la velocidad media del vapor saturado, siendo pues:

$$\bar{u} = f(\gamma, \delta, \mu) \quad (244)$$

y la solución que se obtiene, mediante el Análisis dimensional, coincide, por ser las mismas variables, con la hallada en (6.1):

$$\bar{u} = C \cdot \frac{\gamma \cdot \delta^2}{\mu} = C \cdot \frac{\rho g \cdot \delta^2}{\mu} \quad (245)$$

## 7.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

El espesor de la película líquida depende de las siguientes magnitudes: distancia del punto considerado al borde superior del cilindro,  $x$  ; diferencia de temperaturas entre la de saturación y la de la pared del cilindro,  $\Delta\theta = \theta_s - \theta_p$  ; calor latente de condensación por unidad de masa,  $\lambda$  ; peso específico,  $\gamma = \rho \cdot g$  ; coeficiente de viscosidad,  $\mu$  ; densidad,  $\rho$  , y conductividad térmica,  $K$  . Así pues:

$$\delta(x) = f(x, \Delta\theta, \gamma, \mu, K, \lambda, \rho) \quad (246)$$

### 7.2.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T,\theta).

Como las variables que intervienen en el problema de condensación en película sobre un cilindro vertical, son las mismas que en una pared vertical, sus fórmulas dimensionales en la base usual (L,Q,T,\theta), coincidirán con las (198), y proporcionarán una solución idéntica a la (200), esto es:

$$\delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (247)$$

### 7.2.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,\theta,M).

Asimismo, las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen, en la base (L,Q,T,\theta,M), son las (201) y la solución que se obtiene en esta base es la misma (203) que para la pared vertical

$$\delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (248)$$

que supera en precisión a la solución (247) hallada con la base usual (L,Q,T,\theta).

Sin embargo, la discriminación de las dimensiones del espacio se realiza de forma diferente. Tomando el eje  $X$  según el eje del cilindro, los otros dos,  $Y$  y  $Z$ , resultan indiscernibles, por lo que sólo podemos distinguir entre la dirección paralela al eje (dimensión  $L_x$ ) y la dirección

normal al eje (que por estar en el plano YZ llamamos  $L_{yz}$ ). Así, la base usual y discriminada es  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y la ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

Veamos ahora qué soluciones proporcionan ambas bases.

7.2.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

Las fórmulas dimensionales de las variables en esta base son:

$$\begin{aligned}
 [x] &= L_x & ; & & [\delta] &= L_{yz} \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \\
 [\mu] &= L_x^{-3} \cdot Q \cdot T & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\lambda] &= L_x^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2
 \end{aligned}
 \tag{249}$$

y el cuadro formado por los exponentes dimensionales es:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	$\delta$
$L_x$	1	0	-2	-3	-1	2	-3	0
$L_{yz}$	0	0	-2	0	0	0	-2	1
Q	0	0	1	1	1	0	1	0
T	0	0	0	1	-1	-2	2	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	0
$\Pi_1$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_2$	1	0	1	0	0	-1	-1	0
$\Pi_3$	0	0	2	-2	0	-1	0	4

Como la característica de la matriz es  $H = 5$  las variables pueden formar entre sí:  $i = N - H = 8 - 5 = 3$  monomios adimensionales independientes.

Estos son:

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\gamma \cdot x}{\rho \cdot \lambda} = \frac{g \cdot x}{\lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\delta^4 \cdot \gamma^2}{\mu^2 \cdot \lambda} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g^2}{\mu^2 \cdot \lambda}$$

La función solución buscada contiene en su argumento estos tres monomios adimensionales:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0, \text{ o sea, } F\left(\frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda}, \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g^2}{\mu^2 \cdot \lambda}\right) = 0$$

o bien, despejando el espesor de la película líquida:

$$\delta(x) = \left(\frac{\mu^2 \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3\left(\frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda}\right) \quad (251)$$

La solución obtenida con la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , (251), es más precisa que la hallada con la misma base sin discriminar  $(L, Q, T, \theta)$ , (247), ya que la función indeterminada  $F_3$  contiene en su argumento un monomio menos que la  $F_1$ .

#### 7.2.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

Tomando los ejes coordenados en el cilindro como en el apartado anterior, las nuevas fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned} [x] &= L_x & ; & & [\delta] &= L_{yz} \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M \\ [\mu] &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot M \end{aligned} \quad (252)$$

y los exponentes dimensionales forman el siguiente cuadro:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	$\delta$
$L_x$	1	0	0	-1	-1	0	-1	0
$L_{yz}$	0	0	-2	0	0	0	-2	1
Q	0	0	0	0	1	1	0	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	0
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_2$	-1	0	1	-2	0	0	1	4

(253)

La característica de la matriz es  $H = 6$ , luego hay  $i = N-H = 8-6 = 2$  monomios independientes. La resolución del sistema de ecuaciones lineales y homogéneas formado por los exponentes dimensionales de las variables, proporciona los exponentes con que dichas variables aparecen en cada uno de los dos monomios. Estos vienen dados en las dos últimas filas de (253), así pues:

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\delta^4 \cdot \gamma \cdot \rho}{\mu^2 \cdot x} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 g}{\mu^2 \cdot x}$$

de donde se deduce

$$\delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot x}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (254)$$

que es más precisa que las soluciones (247), (248) y (251) anteriormente obtenidas.

#### 7.2.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Como las variables que intervienen en el cálculo del espesor de la película líquida en una pared vertical (6.2) son las mismas que en el caso de un cilindro vertical, todo lo tratado allí, (6.2.5), respecto de los vectores-dimensión en las bases usual  $(L, Q, T, \theta)$  y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , es válido aquí. Por tanto, de la comparación entre (210) y (214) se deduce que los vectores-dimensión representados en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , (210), son las proyecciones de los vectores-dimensión (214) representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.24, II.25. y II.26).

Veamos ahora qué es lo que ocurre con los vectores-dimensión representados en la base usual y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , y ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ . Comparando (249) y (252) se observa que las magnitudes que cambian de dimensión al ponerlas en una u otra base son:  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  y  $\rho$ .



En la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [\gamma] &= L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q & ; & & [\mu] &= L_x^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [\lambda] &= L_x^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (255)$$

y en la base dimensional  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$

$$\begin{aligned} [\gamma]' &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M & ; & & [\mu]' &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [\lambda]' &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho]' &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot M \end{aligned} \quad (256)$$

Esta diferencia sugiere la representación de la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  como un subespacio vectorial de la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , o dicho de otro modo, que los vectores-dimensión (255), representados en el espacio  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores (256), representados en la base de seis dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , sobre el subespacio de cinco dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

La ampliación de la base realizada conduce a que el monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$  que era adimensional en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , tenga de dimensión en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x}{\lambda} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (257)$$

Para poner esto de manifiesto, procuraremos que la diferencia entre las fórmulas dimensionales en ambas bases exista solamente en uno de los exponentes dimensionales. Para ello, definimos una nueva dimensión básica:  $P_x = [N_P] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$ . Realizamos a continuación un cambio de base en la base ampliada, pasando de  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  a  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ . En la nueva base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$  la masa no es fundamental, y su dimensión se deduce de la de  $P_x$ :

$$[M] = L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \quad (258)$$

Sustituyendo (258) en (256) se obtienen las fórmulas dimensionales de

las variables en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ , que designaremos por  $[ ]''$  :

$$\begin{aligned}
 [\gamma]'' &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot [M] = L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot P_x \\
 [\mu]'' &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P_x \\
 [\lambda]'' &= Q \cdot [M]^{-1} = Q \cdot L_x^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot P_x^{-1} = L_x^2 \cdot T^{-2} \cdot P_x^{-1} \\
 [\rho]'' &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x
 \end{aligned} \tag{259}$$

Si comparamos ahora (255) con (259), resulta:

$$\begin{aligned}
 [\gamma]'' &= [\gamma] \cdot P_x \\
 [\mu]'' &= [\mu] \cdot P_x \\
 [\lambda]'' &= [\lambda] \cdot P_x^{-1} \\
 [\rho]'' &= [\rho] \cdot P_x
 \end{aligned} \tag{260}$$

quedando de manifiesto que los vectores-dimensión (255), representados en el espacio  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores (259) representados en el espacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$  sobre el subespacio de 5 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

Realizamos la representación gráfica de dicha proyección en 4 etapas en que a las variables  $L_x$  y  $P_x$  se añaden sucesivamente  $L_{yz}$ ,  $Q$ ,  $T$ ,  $\theta$  (figuras: II.32, II.33, II.34 y II.35).



fig. II.33

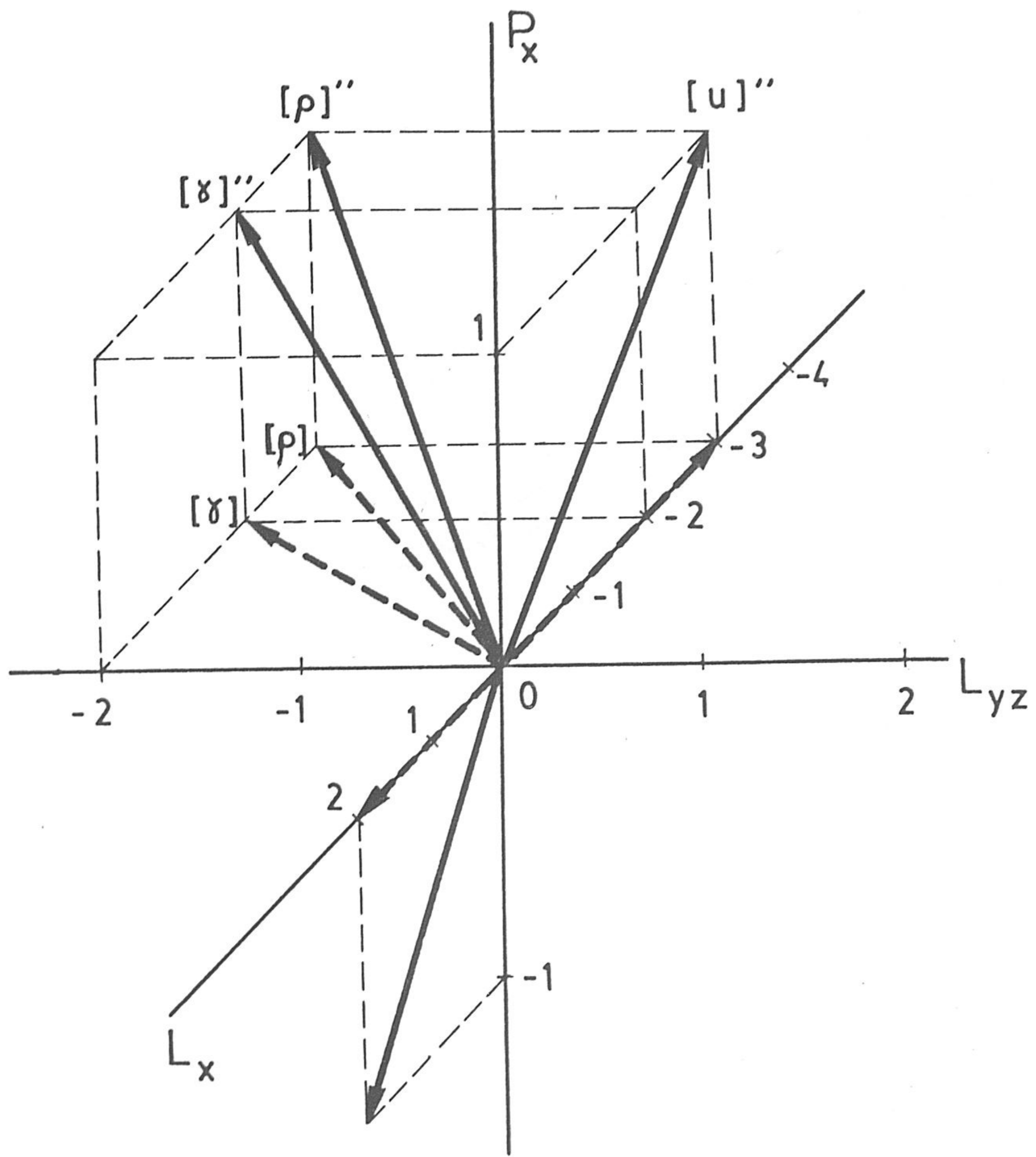


fig.II.32

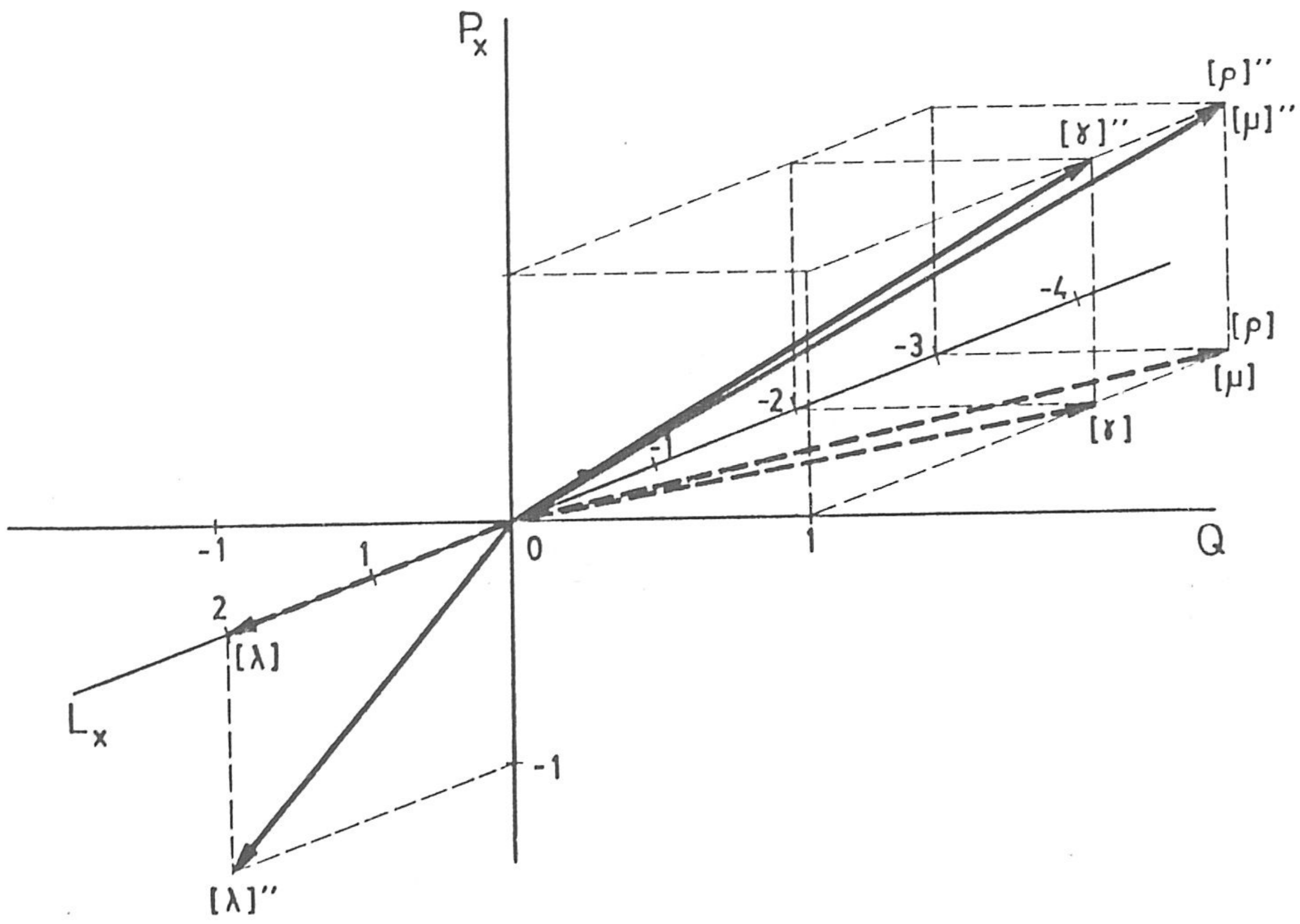


fig.II.33

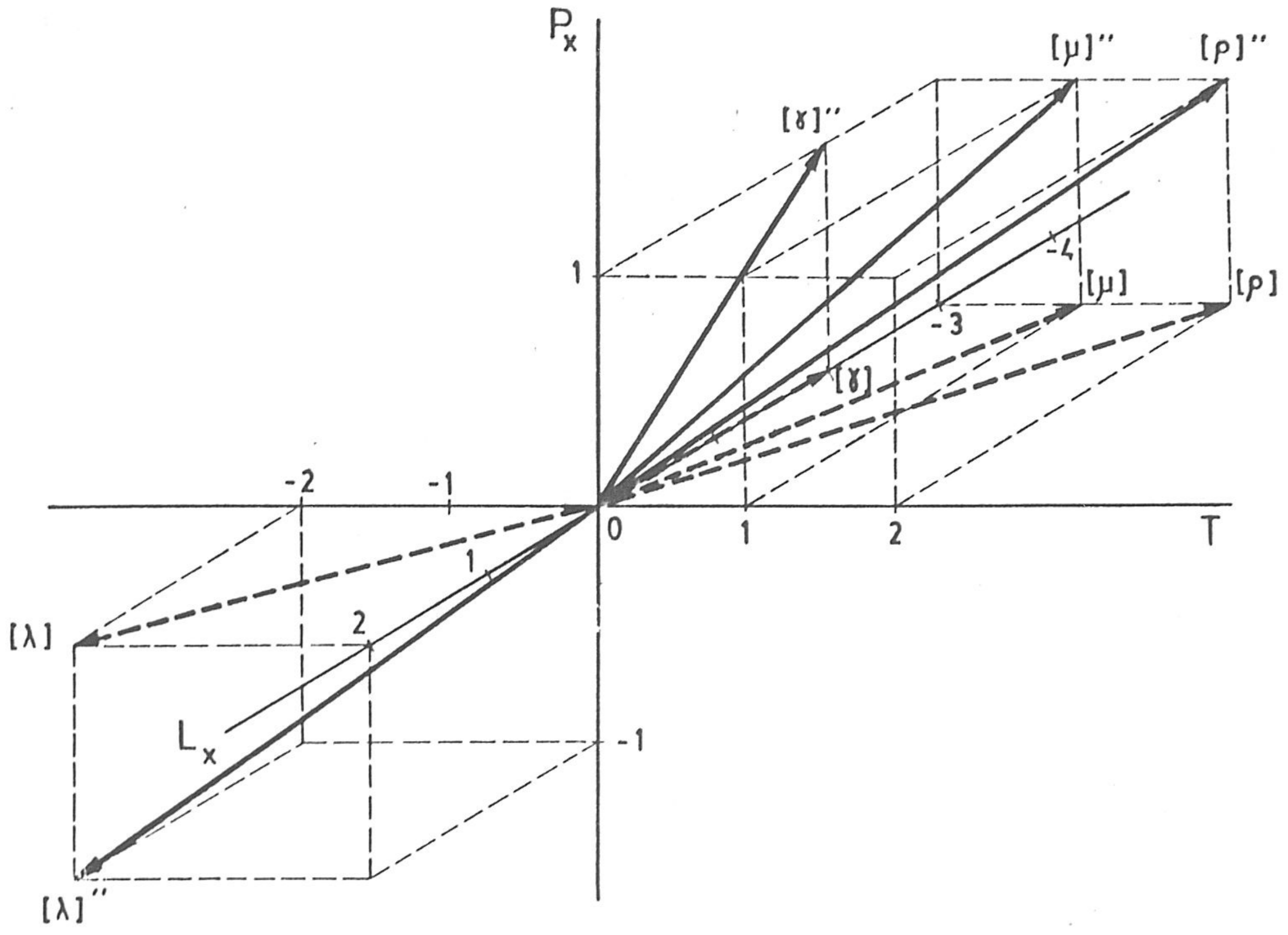


fig.II.34

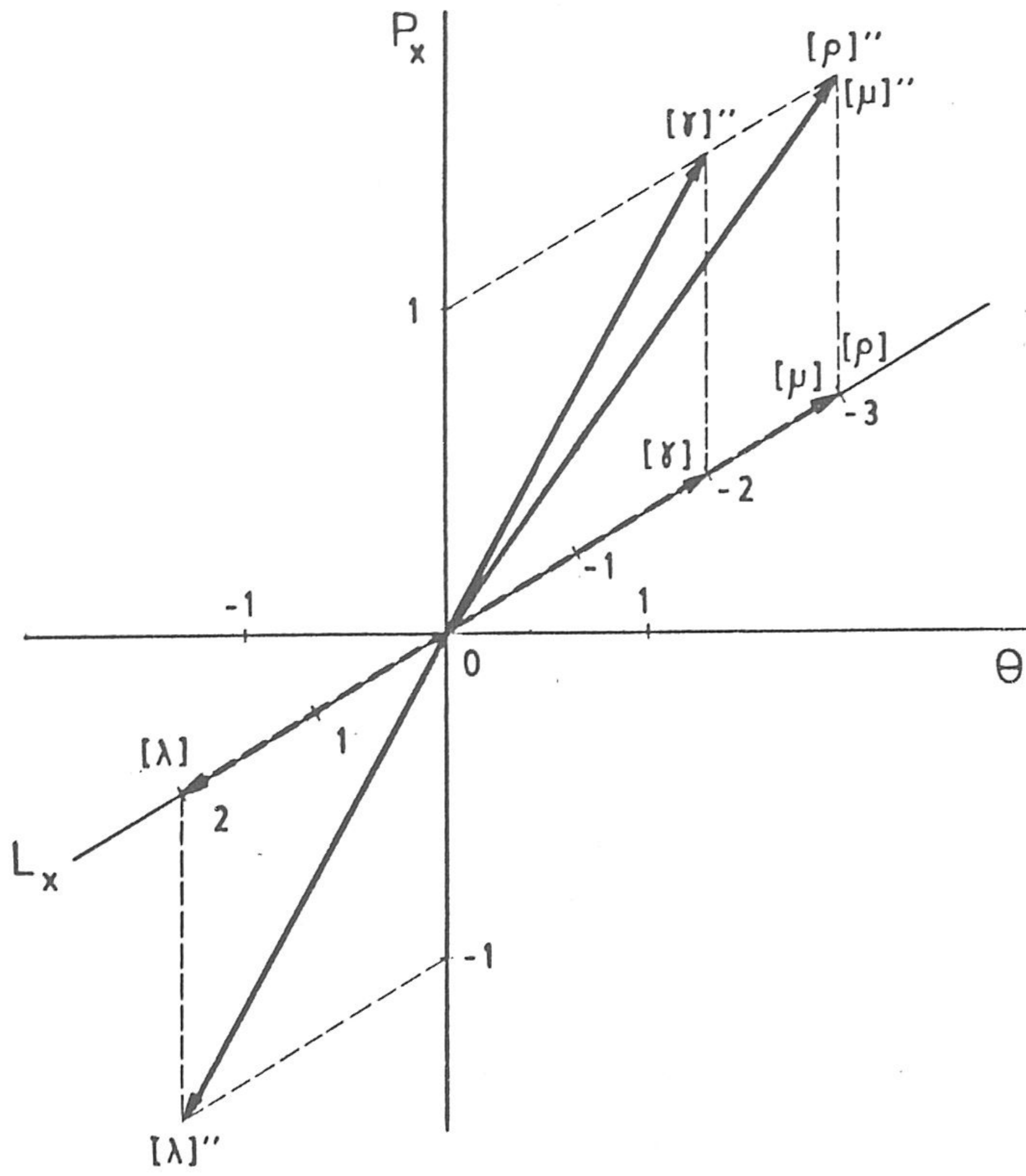


fig.II.35

7.2.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$  .

Si comparamos las soluciones (248) y (254) con (247) y (251) respectivamente, se observa que la ampliación de la base dimensional, de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , y de  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$  de las soluciones.

El sentido físico del monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$  se trató en (6.2.6) y, por un razonamiento análogo al realizado allí, se deduce que  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$  representa la relación entre un trabajo mecánico y el calor de condensación, esto es:

$$N_P = \frac{g \cdot x \cdot dm}{\lambda \cdot dm} = \frac{dW}{dQ}$$

Sin embargo,  $dW$  no procede de  $dQ$ , o viceversa, por lo que el monomio  $N_P$  representa únicamente una posible relación funcional algebraica y no una relación real, observable. Debido a que la ampliación de la base dimensional (I.5) procede de suprimir dicha relación formal entre calor y trabajo, la utilización de la base ampliada supone necesariamente la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional del monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$ .

7.2.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La solución analítica del espesor de la película líquida en un cilindro vertical es la misma que para una pared vertical (189):

$$\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot \Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$$

y la solución (254) obtenida con la base dimensional ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , está de acuerdo con ella, siendo la función  $F_4$  de la forma:

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) = \left( \frac{4 \cdot K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$$

7.2.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

Según lo expuesto en (6.2.8), tomamos como variable independiente el calor de condensación por unidad de volumen,  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$ , en lugar de por unidad de masa. Ahora, el espesor de la película líquida es función de las siguientes variables:

$$\delta(x) = f(x, \Delta\theta, \gamma, \mu, \lambda', K) \quad (261)$$

Puesto que tanto la ampliación de la base como la discriminación de las dimensiones del espacio reducen la solución clásica, resolvemos el problema directamente con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ) que dará el resultado mejor.

Tomando el sistema de ejes coordenados indicado en el apartado (6.2.2), las fórmulas dimensionales de las variables, en la base ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ) son:

$$\begin{aligned} [x] &= L_x & ; & & [\delta] &= L_{yz} \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma] &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M \\ [\mu] &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [\lambda'] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \\ [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (262)$$

y la matriz formada por los exponentes dimensionales es:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	$\lambda'$	K	$\delta$
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	0
$L_{yz}$	0	0	-2	0	-2	0	1
Q	0	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-2	-1	0	-1	0
$\theta$	0	1	0	0	0	-1	0
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	-1	-1	1	-1	1	-1	4

(263)

Como la característica de la matriz es  $H = 6$ , las variables pueden

formar entre sí un solo monomio adimensional independiente  $i = N-H = 7-6 = 1$ . Este es:

$$\Pi = \frac{\delta^4 \cdot \gamma \cdot \lambda'}{\Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \lambda}{\Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}$$

de donde resulta la solución:

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (264)$$

que concuerda con la solución (189) obtenida por Nusselt [59] cuando la constante adimensional  $C$  toma el valor de  $2^{\frac{1}{2}}$ .

Así pues, con este nuevo planteamiento, hemos conseguido el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional: la solución exacta salvo una constante numérica, o "solución funcional exacta".

#### 7.2.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- Teniendo en cuenta las definiciones de Palacios [2] y lo deducido por nosotros en (I.5), la base ampliada (L,Q,T,θ,M) es "estricta" y la usual (L,Q,T,θ) "deficiente" para el capítulo de la Física compuesto por "fenómenos de transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa", lo que confirma el tratamiento del problema realizado en este apartado.

2ª.- Mediante la discriminación espacial hemos hallado soluciones más precisas que las dadas por el Análisis dimensional clásico [15], no teniendo dicha precisión relación alguna con la que se deriva de la ampliación de la base dimensional efectuada por nosotros.

3ª.- El hecho de acortar en un grado la multiplicidad de la base dimensional, al pasar de la ampliada (L,Q,T,θ,M) a la reducida (L,Q,T,θ), en este problema, lleva implícito una "mutilación" o pérdida de información [25], y se traduce, según la analogía vectorial, en una proyección de vectores-dimensión pentadimensionales en un subespacio tetradimensional.

4ª.- La utilización de la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M) da como resultado la supresión como monomio Π adimensional del monomio  $N_P = \frac{g \cdot x}{\lambda}$ , que aparece en las soluciones obtenidas con la base usual (L,Q,T,θ). El significado físico de  $N_P$  es concretamente la relación algebraica, pero sin realidad física, entre un trabajo mecánico y una energía calorífica.

5ª.- En el caso del espesor de la película líquida en un cilindro vertical hemos obtenido las siguientes soluciones:

$$(L,Q,T,\theta) \quad : \quad \delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (247)$$

$$(L,Q,T,\theta,M) \quad : \quad \delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (248)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta) \quad : \quad \delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right) \quad (251)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M) \quad : \quad \delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot x}{\rho^2 \cdot g} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (254)$$

Comparando (247) y (248) con (251) y (254) respectivamente, se observa que con la discriminación espacial hemos conseguido soluciones más precisas, por contener funciones indeterminadas más simples, que las halladas con las bases sin discriminar.

Asimismo, con la ampliación de la base dimensional, propuesta por nosotros, logramos soluciones aún más precisas: las soluciones (248) y (254) halladas con la base ampliada, son más exactas que las (247) y (251), respectivamente, halladas con la base usual por la indeterminación en las funciones  $F_2$  y  $F_4$  menor que en las  $F_1$  y  $F_3$ .

6ª.- Hemos logrado una mejora posterior de la solución al elegir variables habitualmente no utilizadas, que son especialmente idóneas para el problema, hallando de este modo el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional:



$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (264)$$

La solución (264) fija la función  $F_4$  de (254) y concuerda con la obtenida por Nusselt [59] tomando  $C$  el valor  $2^{\frac{1}{2}}$ .

### 7.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

Se trata, ahora, de hallar mediante el Análisis dimensional, la cantidad de calor que por unidad de temperatura, de superficie y de tiempo se transmite en la condensación pelicular sobre un cilindro vertical de altura  $H$ , es decir, el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ . Como mencionamos anteriormente cuando el diámetro es grande en comparación con el espesor de la película, nos encontramos ante un caso análogo al de la pared vertical, y el problema se resuelve de modo semejante salvo en lo que respecta a la discriminación espacial.

Al suceder el fenómeno principalmente cerca de la pared el diámetro no intervendrá como variable y la única dimensión longitudinal a tener en cuenta será la altura del cilindro,  $H$ . Por consiguiente:

$$h = f(H, \Delta\theta, \gamma, \mu, K, \lambda, \rho) \quad (265)$$

#### 7.3.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T, $\theta$ ).

La solución con la base usual (L,Q,T, $\theta$ ) coincide con la solución (232) obtenida para la pared vertical sin más que sustituir  $L$  por  $H$ . En efecto, allí considerábamos  $L$ , altura de la pared en lugar de  $H$ , altura del cilindro, pero como ambas magnitudes tienen las mismas dimensiones en la base (L,Q,T, $\theta$ ), las soluciones respectivas serán idénticas. Así pues, para un cilindro vertical de altura  $H$  la solución en la base usual es:

$$N_{Nu,H} = F_1 \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot H^3}{\mu}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot H}{\lambda} \right) \quad (266)$$

7.3.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

Por un razonamiento análogo al realizado en el apartado anterior, la solución (234) obtenida con la base ampliada, para una pared vertical, coincidirá con la del cilindro vertical, sin más que sustituir L por H. Así pues, con la base ampliada (L,Q,T,θ,M) es:

$$N_{Nu,H} = F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (267)$$

que supera en precisión a la solución (266) hallada con la base usual.

Sin embargo la discriminación de las dimensiones del espacio se realiza de forma diferente. Sea un sistema de ejes coordenados en el cilindro del siguiente modo: el eje X según el eje del cilindro, y el Y y el Z perpendiculares entre sí y al X. Los ejes Y y Z resultan indiscernibles, por lo que sólo podemos distinguir entre la dirección paralela al eje (dimensión  $L_x$ ) y la dirección normal al eje ( que por estar en el plano YZ llamamos  $L_{yz}$  ). Así, la base usual discriminada es ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ) y la ampliada y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ).

Resolvemos ahora el problema con ambas bases.

7.3.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las variables en esta base son las siguientes:

$$\begin{aligned} [H] &= L_x & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\lambda] &= L_x^2 \cdot T^{-2} \\ [\gamma] &= L_x^{-2} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot Q \cdot T & ; & & [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (268)$$

Que nos conduce a la siguiente tabla de exponentes dimensionales:

	H	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
$L_x$	1	0	-2	-3	-1	2	-3	-1
$L_{yz}$	0	0	-2	0	0	0	-2	-1
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_2$	1	0	1	0	0	-1	-1	0
$\Pi_3$	0	4	-2	-2	0	-3	0	4

(269)

La característica de la matriz es 5 , luego hay  $i = 8-5 = 3$  monomios adimensionales independientes.

Los exponentes con que las variables aparecen en cada uno de los monomios, tres últimas filas de (269), se hallan mediante un proceso análogo al descrito en (1.1). Así, resulta:

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\gamma \cdot H}{\rho \cdot \lambda} = \frac{g \cdot H}{\lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\Delta\theta^4 \cdot h^4}{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \gamma^2} = \frac{\Delta\theta^4 \cdot h^4}{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \rho^2 \cdot g^2}$$

Transformamos el monomio  $\Pi_3$  del siguiente modo

$$\Pi'_3 = \Pi_1^{-4} \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 = N_{Nu,H}^4 \cdot \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g \cdot H^3} \right)$$

que, junto con  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  proporciona la solución:

$$N_{Nu,H} = \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot H^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot H}{\lambda} \right) \quad (270)$$

que supera en precisión a la solución (266) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

#### 7.3.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

Las fórmulas dimensionales de las variables en la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  se obtienen análogamente.

$$\begin{aligned}
 [H] &= L_x & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\lambda] &= Q \cdot M^{-1} \\
 [\gamma] &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M & ; & & [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot M \\
 [\mu] &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{271}$$

y la matriz de los exponentes dimensionales es:

	H	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1
$L_{yz}$	0	0	-2	0	0	0	-2	-1
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	1	4	-1	-2	0	-4	-1	4
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0

La característica de la matriz es 6, y el número de monomios adimensionales independientes que pueden formar las variables entre sí es:  $i = 2$ .

Según las dos últimas filas de (272) son:

$$\Pi_1 = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta^4 \cdot H}{\gamma \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4 \cdot \rho} = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta^4 \cdot H}{\rho^2 \cdot g \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4} ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$$

En vez de  $\Pi_1$ , tomamos  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-4} = N_{Nu,H}^4 \cdot \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 \cdot g \cdot H^3} \right)$ , resultando, finalmente, la solución:

$$N_{Nu,H} = \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot H^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)
 \tag{273}$$

que supera en precisión a la solución (267) hallada con la base ampliada (L,Q,T, $\theta$ ,M) y a la (270) obtenida con la base usual discriminada.

7.3.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

El tratamiento de este apartado es el mismo que el realizado en (7.2.5), ya que las magnitudes que modifican su dimensión, al ampliar la base dimensional, esto es, al pasar de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  o de  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  son las mismas que allí: peso específico  $\gamma$ , viscosidad  $\mu$ , calor de condensación  $\lambda$ , y densidad  $\rho$ .

Así pues, se puede conseguir que las fórmulas dimensionales de dichas variables en las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta, M)$ , difieran en una única dimensión fundamental  $P$ , siendo, en este caso

$$P = \left[ \frac{g \cdot H}{\lambda} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

y de la comparación de (210) y (214) se deduce que los vectores-dimensión (210) representados en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión (214) representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.24, II.25 y II.26).

Otro tanto ocurre con las bases  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ : las fórmulas dimensionales de las variables en dichas bases se pueden expresar de modo que difieran en una única dimensión fundamental  $P_x$

$$P_x = \left[ \frac{g \cdot H}{\lambda} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

y, comparando (255) con (259), se llega a la conclusión de que los vectores-dimensión (255) representados en el espacio  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores (259) representados en el espacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 5 dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ ; figuras: II.32, II.33, II.34 y II.35.

7.3.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$  .

En este apartado se trata de identificar físicamente el monomio que desaparece al ampliar la base. En efecto, las soluciones obtenidas presentan un carácter peculiar: se observa en ellas la desaparición del monomio  $\frac{g.H}{\lambda}$  cuando ampliamos la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  o de  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ . Llamamos  $N_P$  a dicho monomio,

$$N_P = \frac{g.H}{\lambda} \quad (274)$$

El sentido físico de  $N_P$  es el siguiente. Si multiplicamos y dividimos por  $dm$  en (274):

$$N_P = \frac{g.H.dm}{\lambda . dm} = \frac{dW}{dQ} \quad (275)$$

el numerador  $dW = g.H.dm$  es el trabajo correspondiente a que  $dm$  se desplace verticalmente una distancia  $H$ , y el denominador  $dQ = \lambda . dm$  es el calor de condensación de la masa  $dm$ . Ahora bien, dichos calor y trabajo son independientes, no se transforman el uno en el otro. En este problema no rige la ley de Joule y, por lo tanto, es apropiado ampliar la base dimensional según dedujimos anteriormente (I.5). La ampliación conduce a que el monomio  $N_P$  desaparezca de las soluciones como monomio independiente.

En efecto, en las soluciones (267) y (273), obtenidas ampliando la base, no aparece el monomio  $N_P$ , que aquí no tiene dimensión nula. En la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  es:

$$P = [N_P] = \left[ \frac{g.H}{\lambda} \right] = L^2 . M . T^{-2} . Q^{-1}$$

y en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ :

$$P_x = [N_P] = \left[ \frac{g.H}{\lambda} \right] = L_x^2 . M . T^{-2} . Q^{-1}$$

En los casos, pues, de transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo, o viceversa, para los que la base ampliada es estricta, y la

base usual es deficiente, el monomio  $N_p$  tiene, en la base usual, el carácter de monomio espurio, no existiendo ni en la solución obtenida con la base ampliada ni en la solución analítica aproximada dada por Nusselt [59].

### 7.3.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La solución analítica aproximada para cilindros vericales es la misma que para una pared vertical (240), sin más que sustituir la altura de la pared  $L$  por la altura del cilindro  $H$  :

$$N_{Nu,H} = 0,943 \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot H^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (276)$$

por lo cual nuestra solución (273) obtenida con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ) se encuentra en perfecto acuerdo con ella, y coinciden cuando  $F_4$  sea de la forma:

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) = 0,943 \cdot \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$$

### 7.3.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

Según expusimos en (6.2.8), en los medios continuos, como es el caso que nos ocupa, es más propio trabajar con elementos de volumen que con elementos de masa y, por tanto, es oportuno considerar como variable independiente el calor de condensación por unidad de volumen  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$ , en lugar de por unidad de masa. Con este nuevo planteamiento, el coeficiente de transmisión del calor  $h$  es función de las siguientes variables:

$$h = f (H, \Delta\theta, \gamma, \mu, K, \lambda') \quad (277)$$

Resolvemos el problema directamente con la mejor de las bases utilizadas: la ampliada y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ), ya que como ha quedado de manifiesto, tanto la ampliación de la base como la discriminación de las dimensiones del espacio reducen las soluciones.

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema en esta base son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 [H] &= L_x & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\lambda'] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \\
 [\gamma] &= L_{yz}^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M & ; & & [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\mu] &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M
 \end{aligned}
 \tag{278}$$

de modo que la matriz formada por los exponentes dimensionales es:

	H	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\mu$	K	$\lambda'$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1
$L_{yz}$	0	0	-2	0	0	-2	-1
Q	0	0	0	0	1	1	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	-1
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	1	1	-1	1	-3	-1	4

(279)

Al ser la característica de la matriz 6, hay  $i = 7-6 = 1$  un solo monomio independiente, que según la última fila de (279) se puede expresar como:

$$\Pi = \frac{h^4 \cdot H \cdot \Delta\theta \cdot \mu}{\gamma \cdot \lambda' \cdot K^3} = N_{Nu,H}^4 \cdot \left( \frac{\mu \cdot \Delta\theta \cdot K}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot H^3} \right)$$

que conduce a la solución:

$$N_{Nu,H} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot H^3}{\mu \cdot \Delta\theta \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}
 \tag{280}$$

la cual supera en precisión a la solución (273) obtenida con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ) y con el planteamiento clásico.

La fórmula anterior está de acuerdo con la solución analítica (276) obtenida por Nusselt tomando la constante adimensional el valor  $C = 0,943$ .



### 7.3.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- El cálculo del coeficiente de transmisión de calor en la condensación pelicular en un cilindro vertical, pone de manifiesto, (I.5), el que para aquellos "fenómenos de transmisión de calor en los que no tiene lugar conversión de calor en trabajo o viceversa", la base dimensional "estricta" es la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , mientras que la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  resultará "deficiente" o "mutilada" [2].

2ª.- Con la discriminación de las dimensiones del espacio obtenemos soluciones más precisas que las alcanzadas con el Análisis dimensional clásico [15], al perder el carácter "adimensional" monomios incluidos en las soluciones dadas por las bases sin discriminar.

3ª.- El número de Nusselt, en este problema, pierde la condición de "número adimensional", adquiriendo en las bases usual  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y ampliada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  la dimensión  $[N_{Nu, H}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$ , confirmando, de este modo, los resultados obtenidos por Arenas y Herranz ([22] a [24]).

4ª.- Considerando la analogía entre dimensiones y vectores, la utilización de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , en lugar de la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , representa una proyección de vectores-dimensión sobre un subespacio de cuatro dimensiones, lo cual, para este problema, supone una "mutilación" de la base dimensional, además de producir una reducción de información [25].

5ª.- El significado físico del monomio  $N_P = \frac{g \cdot H}{\lambda}$  es la relación, meramente formal, irreal, entre calor y trabajo. Dicho monomio, que surge impropriamente al utilizarse una base "deficiente": la usual tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , desaparece de las soluciones al emplearse la base dimensional ampliada.

6ª.- Con las distintas bases dimensionales hemos hallado las siguientes soluciones:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, H} = F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot H}{\lambda} \right) \quad (266)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, H} = F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (267)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta) \quad : \quad N_{Nu, H} = \left( \frac{\rho^2 g \cdot H^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot H}{\lambda} \right) \quad (270)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M) \quad : \quad N_{Nu, H} = \left( \frac{\rho^2 g \cdot H^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (273)$$

Con la discriminación de las dimensiones del espacio obtenemos una mejora inicial en la solución, así las soluciones (270) y (273) halladas con las bases discriminadas, son más precisas que las soluciones (266) y (267), respectivamente, proporcionadas por las bases sin discriminar.

Una segunda aproximación a la solución final se deriva de la ampliación de la base dimensional deducida por nosotros en (I.5). Dicha ampliación, soluciones (267) y (273), mejora los resultados obtenidos con la base usual, soluciones (266) y (270).

7ª.- Hemos conseguido el mejor resultado que puede aportar el Análisis dimensional, con una mejora adicional y última, al realizar una elección de variables, distinta a la más frecuentemente efectuada. La solución es:

$$N_{Nu, H} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot H^3}{\mu \cdot \Delta \theta \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (280)$$

que precisa la función  $F_4$  que aparece en la solución (273) obtenida con la base ampliada y discriminada y con el planteamiento clásico, además de coincidir con la solución analítica dada por Nusselt [59], para  $C = 0,943$ .

8.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION SOBRE UNA PARED INCLINADA.

El estudio teórico de la condensación sobre una pared inclinada es semejante al de la pared vertical, sin más que tomar la componente tangencial del peso, esto es, sustituir  $\gamma$  por  $\gamma \cdot \text{sen } \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo de inclinación de la pared, con lo cual, el coeficiente de transmisión del calor obtenido para la pared inclinada es igual al deducido para la pared vertical multiplicado por  $(\text{sen } \alpha)^{1/4}$ .

Pero, desde el punto de vista de la discriminación, presenta la dificultad de que el empleo de los ejes señalados en los problemas anteriores: uno vertical y dos horizontales, no permite discriminar dimensionalmente la longitud de la pared, que no tiene ninguna de esas direcciones. Para resolver esta dificultad, situamos los ejes sobre la placa inclinada, según se indica en la figura.II.36. Los ejes X y Z en el plano de la pared y el Y perpendicular a la misma. Esto ofrece la dificultad de que no es posible discriminar el peso específico, pues tiene dirección vertical, pero afortunadamente, sólo la componente del peso específico en la dirección X, que llamaremos  $\gamma_x$ , interviene en el proceso, y ésta es fácilmente discriminable en el sistema de ejes elegido.

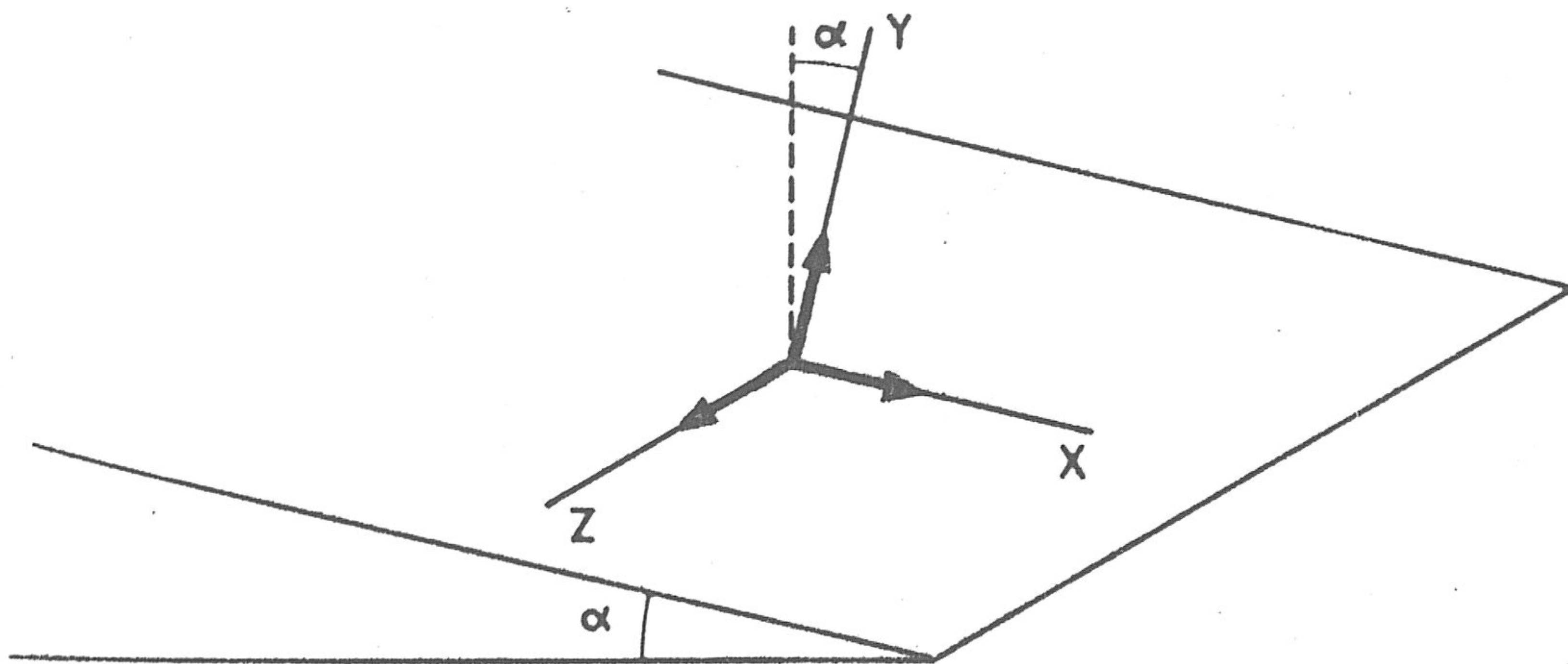


fig.II.36

La película líquida resbala, pues, sobre la pared inclinada debido a la componente tangencial del peso específico:

$$\gamma_x = \gamma \cdot \text{sen } \alpha = \rho g \cdot \text{sen } \alpha \quad (281)$$

Calculamos a continuación la velocidad media del vapor saturado, el espesor de la película líquida y el coeficiente de transmisión del calor.

### 8.1.- VELOCIDAD MEDIA DEL VAPOR SATURADO.

La ecuación del movimiento de la película de líquido será ahora, sustituyendo en (181)  $\gamma$  por  $\gamma_x = \gamma \cdot \text{sen } \alpha$  :

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\gamma_x = -\rho g \cdot \text{sen } \alpha \quad (282)$$

Las condiciones en los límites son  $u = 0$  en la pared ( $y = 0$ ) y  $\frac{du}{dy} = 0$  en la superficie libre ( $y = \delta$ ), sobre la cual, de acuerdo con las hipótesis, no se ejercen fuerzas ( $\delta$  es el espesor de la película).

La ecuación (302), con sus condiciones de contorno, indica las variables de las cuales depende la velocidad media de la película, así pues:

$$\bar{u} = f(\gamma_x, \delta, \mu) \quad (283)$$

Las variables que intervienen en el problema, en la base (L,M,T), tienen las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} [\bar{u}] &= L \cdot T^{-1} & ; & & [\gamma_x] &= [\rho g \cdot \text{sen } \alpha] = L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} \\ [\delta] &= L & ; & & [\mu] &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2} \end{aligned}$$

y la matriz formada por los exponentes dimensionales es:

	$\bar{u}$	$\gamma_x$	$\delta$	$\mu$
L	1	-2	1	-1
M	0	1	0	1
T	-1	-2	0	-2
$\Pi$	1	-1	-2	1

(284)

La característica de la matriz es  $H = 3$  por lo que las magnitudes pueden formar un solo monomio adimensional:  $i = N-H = 4-3 = 1$ . Según la última fila de (304), es:

$$\Pi = \frac{\bar{u} \cdot \mu}{\gamma_x \cdot \delta^2} = \frac{\bar{u} \cdot \mu}{\rho g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \delta^2}$$

que conduce a la solución:

$$\bar{u} = C \cdot \frac{\rho g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \delta^2}{\mu} \quad (285)$$

Se consigue, pues, el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional: un solo monomio, esto es, la solución exacta salvo una constante numérica.

#### 8.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

El espesor de la película líquida se obtiene resolviendo la ecuación diferencial que resulta de sustituir la velocidad media (285) en (187), esto es:

$$\delta^3 \cdot d\delta = \frac{K \cdot \Delta\theta \cdot \mu}{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda} \cdot dx \quad (286)$$

con la condición de contorno  $\delta = 0$  en  $x = 0$ , pues se supone que la condensación comienza en  $x = 0$ .

Así pues, el espesor de la película líquida  $\delta$ , depende de las siguientes variables:

$x$  : Distancia del punto considerado al borde superior de la pared.

$\Delta\theta$ : Diferencia entre la temperatura de saturación del vapor y la de la pared  $\Delta\theta = \theta_s - \theta_p$ .

$\gamma_x$ : Componente tangencial del peso específico.

$\mu$  : Viscosidad dinámica.

K : Conductividad térmica.

$\lambda$  : Calor latente de condensación por unidad de masa.

$\rho$  : Densidad del líquido condensado.

por tanto,

$$\delta(x) = f(x, \Delta\theta, \gamma_x, \mu, K, \lambda, \rho) \quad (287)$$

Resolvemos el problema con cada una de las bases dimensionales.

### 8.2.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T, $\theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en esta base, son:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L & ; & & [x] &= L \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma_x] &= L^{-4} \cdot Q \\ [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T & ; & & [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= L^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (288)$$

El cociente  $\tilde{w} = \delta/x$  es un monomio de forma, de modo que la matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables en la base usual queda de la forma:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$
L	1	0	-4	-3	-1	2	-5
Q	0	0	1	1	1	0	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0
$\Pi_1$	2	0	1	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0
$\Pi_3$	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1

(289)

La característica de la matriz es 4, y, por tanto, el número de soluciones linealmente independientes es:  $i = 7-4 = 3$ , que da lugar a los

tres monomios adimensionales independientes, indicados en el cuadro anterior:

$$\Pi_1 = \frac{x^2 \cdot \gamma_x}{\mu \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^2}{\mu \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x}{\mu}$$

En vez de  $\Pi_1$  y  $\Pi_3$ , consideramos  $\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_3$  y  $\Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3^{-1}$ , resultando:

$$\Pi'_1 = \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi'_3 = \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda}$$

que junto con el factor de forma  $\tilde{w} = \delta/x$ , conducen a la solución

$$\delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right) \quad (290)$$

### 8.2.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

En esta base, las fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L & ; & & [x] &= L \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma_x] &= L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} \\ [\mu] &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} & ; & & [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho] &= L^{-3} \cdot M \end{aligned} \quad (291)$$

El cuadro de los exponentes dimensionales será, pues:

	x	Δθ	γ <sub>x</sub>	μ	K	λ	ρ
L	1	0	-2	-1	-1	0	-3
Q	0	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0
θ	0	1	0	0	-1	0	0
M	0	0	1	1	0	-1	1
Π <sub>1</sub>	3	0	1	-2	0	0	1
Π <sub>2</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0

Como la característica de la matriz es  $H = 5$ , tenemos  $i = N - H = 7 - 5 = 2$  monomios independientes, a los que hay que añadir el factor de

forma  $\tilde{w} = \delta/x$  . Así pues:

$$\Pi_1 = \frac{\gamma_x \cdot \rho \cdot x^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \tilde{w} = \delta/x$$

de donde se deduce:

$$\delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (293)$$

que supera en precisión a la solución (290) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

### 8.2.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .

Considerando el sistema de ejes coordenados en la pared como se indica en la fig.II.36, podemos discriminar las dimensiones del espacio, y pasar de la base  $(L, Q, T, \theta)$  a la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ . Ahora, las fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned} [\delta] &= L_y & ; & & [x] &= L_x \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma_x] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ [\lambda] &= L_x^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \quad (294)$$

En esta base  $\delta$  y  $x$  tienen distinta dimensión por lo que no constituyen un monomio independiente.

Los exponentes dimensionales forman el siguiente cuadro:



	x	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	$\delta$
$L_x$	1	0	-2	-3	-1	2	-3	0
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	1
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	0
Q	0	0	1	1	1	0	1	0
T	0	0	0	1	-1	-2	2	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	0
$\Pi_1$	0	0	2	-2	0	-1	0	4
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_3$	1	0	1	0	0	-1	-1	0

(295)

La característica de la matriz es  $H = 5$ , y el número de monomios independientes es  $i = 8 - 5 = 3$ . Según las tres últimas filas de (295), son estos:

$$\Pi_1 = \frac{\delta^4 \cdot \gamma_x^2}{\mu^2 \cdot \lambda} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\mu^2 \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\gamma_x \cdot x}{\rho \cdot \lambda} = \frac{g \cdot x \cdot \text{sen} \alpha}{\lambda}$$

que proporcionan la solución:

$$\delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x \cdot \text{sen} \alpha}{\lambda} \right) \quad (296)$$

La discriminación espacial ha mejorado la solución (290) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ .

#### 8.2.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .

Si comparamos las soluciones obtenidas hasta ahora, se observa que tanto la ampliación de la base como la discriminación espacial, (293) y (296), han mejorado la solución clásica (290). Además, la mejora de la solución, en cada caso, proviene de la desaparición de monomios distintos:  $\frac{g \cdot x \cdot \text{sen} \alpha}{\lambda}$  en el primero, y  $\frac{\rho^2 \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot x^3}{\mu^2}$  en el segundo. Dado, pues, que

ambas reducciones son independientes, resulta apropiado utilizar la base ampliada (L,Q,T,θ,M) también con la discriminación de las dimensiones del espacio, es decir, la base (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ,M).

Tomando los ejes coordenados como en el apartado anterior, las nuevas fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned}
 [\delta] &= L_y & ; & & [x] &= L_x \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma_x] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \\
 [\mu] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\lambda] &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M
 \end{aligned} \tag{297}$$

que conducen al siguiente cuadro de exponentes dimensionales:

	x	Δθ	γ <sub>x</sub>	μ	K	λ	ρ	δ
L <sub>x</sub>	1	0	0	-1	-1	0	-1	0
L <sub>y</sub>	0	0	-1	1	1	0	-1	1
L <sub>z</sub>	0	0	-1	-1	-1	0	-1	0
Q	0	0	0	0	1	1	0	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	0
θ	0	1	0	0	-1	0	0	0
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
Π <sub>1</sub>	-1	0	1	-2	0	0	1	4
Π <sub>2</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0	0

La característica de la matriz es H = 6, luego hay i = N-H = 8-6 = 2 monomios adimensionales independientes. Los exponentes con que cada una de las variables aparecen en ambos monomios se hallan por un procedimiento análogo al realizado en (1.1). Según las dos últimas filas de (298) serán:

$$\Pi_1 = \frac{\delta^4 \cdot \gamma_x \cdot \rho}{\mu^2 \cdot x} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha}{\mu^2 \cdot x} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$$

de donde se deduce:

$$\delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot x}{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (299)$$

que es más precisa que la (293) hallada con la base ampliada (L,Q,T,θ,M) y también que la (296) encontrada con la base dimensional usual y discriminada (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ).

#### 8.2.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Veamos ahora qué implicaciones resultan al aplicar, a las fórmulas dimensionales de las magnitudes en una u otra base, la analogía entre dimensiones y vectores puesta de manifiesto en (A.4.5).

Por un procedimiento análogo al realizado en (6.2.5), se demuestra que los vectores-dimensión, de las magnitudes que intervienen en el problema, representados en el espacio (L,Q,T,θ), son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en la base pentadimensional (L,Q,T,θ,P), sobre el subespacio tetradimensional (L,Q,T,θ), (215). Respecto de la nueva dimensión fundamental, P, que hemos introducido, la única diferencia estriba en que en (6.2.5) es variable independiente el peso específico, γ, mientras que aquí lo es su componente tangencial, γ<sub>x</sub> = γ · sen α. Sin embargo como el sen α es adimensional resulta que:

$$[\gamma_x] = [\gamma]$$

y todo lo dicho allí es válido para el caso de condensación sobre una placa inclinada, siendo en la base (L,Q,T,θ,M):

$$P = \left[ \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (300)$$

La representación gráfica parcial de la proyección anteriormente

mencionada corresponde a las figuras: II.24, II.25 y II.26, sustituyendo en ellas  $[\gamma]$  por  $[\gamma_x]$ .

Asimismo, los vectores-dimensión de las magnitudes que intervienen en el problema, representados en el espacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , (221), siendo ahora en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ :

$$P_x = \left[ \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (301)$$

#### 8.2.6.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Si comparamos las soluciones (290) y (296) obtenidas con la base usual y su discriminada, con las halladas con la base ampliada y su discriminada (293) y (299), respectivamente, se observa que la ampliación de la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$  y, discriminando, de  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  a  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , elimina el monomio  $N_P = \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda}$  de las soluciones.

Puede observarse que dicho monomio tiene una forma peculiar. El monomio  $N_P$  es adimensional en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , pero, en la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , tiene de dimensión:

$$[N_P] = \left[ \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right] = \left[ \frac{\gamma_x \cdot x}{\rho \cdot \lambda} \right] = \frac{L^{-2} T^{-2} M \cdot L}{L^{-3} M \cdot Q M^{-1}} = \frac{L^2 \cdot M \cdot T^{-2}}{Q} = \frac{[W]}{[Q]}$$

Así pues, la dimensión de  $N_P$  ahora no es nula y corresponde precisamente a la relación entre las dimensiones del trabajo y del calor.

Por otra parte, el sentido físico de  $N_P$  es el siguiente: si tomamos en elemento de masa  $dm$ ,

$$N_P = \frac{dm \cdot g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda \cdot dm} ,$$

el numerador,  $dm \cdot g \cdot x \cdot \sin \alpha$ , representa el trabajo realizado por  $dm$  si se desplaza verticalmente una altura  $x \cdot \sin \alpha$ , y el denominador,  $\lambda \cdot dm$ , es el calor de condensación de la masa  $dm$ . Ahora bien, dichos calor y trabajo son independientes; no se transforman el uno en el otro. En este problema no rige la ley de Joule. Precisamente según hemos visto (I.5), la ampliación de la base dimensional se ha deducido para aplicarse al capítulo de "transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa". En este capítulo la base  $(L, Q, T, \theta)$  es deficiente, el monomio  $N_p$  tiene dimensión nula y queda explícito en las soluciones como un monomio espurio.

Estas consideraciones sobre  $N_p$  son válidas, paralelamente, para las bases discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  según se comprueba fácilmente.

#### 8.2.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

La solución (299) obtenida con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , se encuentra en perfecto acuerdo con la hallada mediante la teoría de Nusselt [59] :

$$\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot \Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (302)$$

#### 8.2.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

Por un procedimiento análogo al considerado en (6.2.8), tomamos como variable independiente el calor de condensación por unidad de volumen en lugar de por unidad de masa. Así, el espesor de la película líquida es ahora función de las siguientes variables:

$$\delta(x) = f(x, \Delta\theta, \gamma_x, \mu, \lambda', K) \quad (303)$$

y resolvemos el problema directamente con la base ampliada y discriminada

salvo una constante



$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  que es la que ha proporcionado la solución más precisa.

En esta base, las magnitudes que intervienen toman las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned}
 [\delta] &= L_y & ; & & [x] &= L_x \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [\gamma_x] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M \\
 [\mu] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \\
 [\lambda'] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q
 \end{aligned} \tag{304}$$

y el cuadro formado por los exponentes dimensionales es:

	x	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda'$	$\delta$
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	0
$L_y$	0	0	-1	1	1	-1	1
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	0
Q	0	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-2	-1	-1	0	0
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	-1	-1	1	-1	-1	1	4

(305)

La característica de la matriz es  $H = 6$ , por tanto, las variables pueden formar entre sí un solo monomio adimensional independiente  $i = N - H = 7 - 6 = 1$ . Este es:

$$\Pi = \frac{\delta^4 \cdot \gamma_x \cdot \lambda'}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x} = \frac{\delta^4 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot \text{sen } \alpha}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}$$

de donde se deduce:

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{306}$$

que es la solución teórica funcional exacta, esto es, la solución exacta salvo una constante adimensional.

La solución (306) concuerda con la hallada (302) mediante la teoría de Nusselt de la condensación en película, tomando  $C$  el valor  $2^{1/2}$ .

#### 8.2.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- Hemos deducido en (I.5) que para los "fenómenos de transmisión de calor en los cuales no existe conversión de calor en trabajo o viceversa", la base dimensional, que llamamos ampliada,  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "estricta" y la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  es "deficiente" [2], lo cual confirmamos con la resolución del problema aquí tratado.

2ª.- Si las condiciones geométricas y físicas del problema lo admiten, como ocurre en este caso, discriminamos las dimensiones del espacio, obteniendo de este modo soluciones más precisas que las que proporcionan las bases dimensionales sin discriminar [15].

3ª.- El empleo de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  en vez de la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , supone una "mutilación" con pérdida de información [25], y los vectores-dimensión representados en la base usual son las proyecciones, sobre un subespacio de cuatro dimensiones, de los vectores-dimensión representados en el espacio de cinco dimensiones  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

4ª.- La ampliación de la base dimensional deducida en (I.5) al considerar fenómenos en los que no se produce conversión de calor en trabajo o viceversa, suprime el monomio  $N_P = \frac{g \cdot x \cdot \text{sen} \alpha}{\lambda}$  de las soluciones, que representa la relación algebraica entre un calor y un trabajo.

5ª.- Mediante el Análisis dimensional de Palacios y con la ampliación de la base propuesta por nosotros hemos obtenido las siguientes soluciones:

$$(L, Q, T, \theta) : \delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right) \quad (290)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) : \delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (293)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) : \delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g \cdot \text{sen}^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right) \quad (296)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) : \delta(x) = \left( \frac{\mu^2 \cdot x}{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (299)$$

Las funciones indeterminadas  $F_3$  y  $F_4$  son más simples que las  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente, por lo que a partir de la discriminación espacial hemos precisado las soluciones dadas por el Análisis dimensional clásico.

Asimismo, la ampliación de la base dimensional proporciona una nueva mejora que, sumada a la anterior, nos acerca aún más al resultado final; las soluciones (293) y (299) halladas con la base ampliada son más precisas que las (290) y (296), respectivamente, aportadas por la base usual.

6ª.- Con nuestro planteamiento logramos que en las soluciones figure la función  $\text{sen } \alpha$  del ángulo  $\alpha$ . Esto no sucede con el tratamiento usual de Análisis dimensional, pues al ser  $\alpha$  adimensional queda incluido en la función indeterminada como un nuevo monomio  $\Pi$  independiente, por lo que dicha solución es menos precisa que las halladas por nosotros.

7ª.- Una mejora adicional se consigue haciendo uso de las variables extensivas por unidad de volumen:  $\gamma$  y  $\lambda'$  en lugar de por unidad de masa, y suprimiendo  $\rho$  entre las variables, según se justifica en (6.2.8).

La solución final así obtenida es la funcional exacta:

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (306)$$



Esta solución mejora la (299) hallada con la base ampliada y discriminada, y con el planteamiento habitual.

La expresión (306) concuerda con la que proporciona Nusselt [59], tomando  $C$  el valor  $2^{1/2}$ .

### 8.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

El problema consiste, ahora, en averiguar el coeficiente de transmisión del calor por una pared inclinada un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal, contigua a un vapor, cuando, por condensación, se forma una delgada capa de líquido sobre la pared, que se desliza sobre ella hacia abajo.

Las variables que intervienen en el fenómeno son:

$L$  : Longitud de la pared.

$h$  : Coeficiente de transmisión del calor.

$K$  : Conductividad térmica.

$\mu$  : Viscosidad dinámica.

$\gamma_x$  : Componente tangencial del peso específico.

$\Delta\theta$  : Diferencia entre la temperatura de la pared y la de saturación del vapor,  $\Delta\theta = \theta_s - \theta_p$ .

$\rho$  : Densidad del líquido condensado.

$\lambda$  : Calor latente de condensación por unidad de masa.

El coeficiente de transmisión del calor depende, por lo tanto, de las siguientes variables:

$$h = f(L, \Delta\theta, \gamma_x, \mu, K, \lambda, \rho) \quad (307)$$

Resolvamos el problema con cada una de las bases dimensionales.

8.3.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T,θ).

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en la base (L,Q,T,θ), son las mismas (288) que las del caso anterior, a las que añadimos:

$$[L] = L \quad ; \quad [h] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables en dicha base es:

	L	Δθ	γ <sub>x</sub>	μ	K	λ	ρ	h
L	1	0	-4	-3	-1	2	-5	-2
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
θ	0	1	0	0	-1	0	0	-1
Π <sub>1</sub>	2	0	1	-1	0	-½	0	0
Π <sub>2</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0	0
Π <sub>3</sub>	1	0	0	-1	0	½	1	0
Π <sub>4</sub>	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(308)

La característica de la matriz es 4, luego el número de monomios adimensionales independientes es  $i = 4$ . Los exponentes de las variables en los cuatro monomios se obtienen de manera análoga a (1.1), y vienen dados por las cuatro últimas filas de (308). Así pues:

$$\Pi_1 = \frac{\gamma_x \cdot L^2}{\mu \cdot \lambda^{1/2}} = \frac{\rho g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^2}{\mu \cdot \lambda^{1/2}} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{L \cdot \lambda^{1/2} \cdot \rho}{\mu} \quad ; \quad \Pi_4 = \frac{\Delta\theta \cdot L \cdot h}{\mu \cdot \lambda}$$

Transformemos los monomios Π<sub>1</sub> y Π<sub>3</sub> del siguiente modo:

$$\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_3 = \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3^{-1} = \frac{\rho g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L}{\rho \cdot \lambda} \quad (311)$$

que supera en precisión a la solución (309) hallada con la base dimensional usual.

que junto con  $\Pi_2$  y  $\Pi_4$  conducen a la solución:

$$h = \frac{\mu \cdot \lambda}{\Delta\theta \cdot L} \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L}{\lambda} \right) \quad (309)$$

8.3.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T, $\theta$ ,M).

En esta base, las fórmulas dimensionales de las variables son (291), además de:

$$[L] = L \quad ; \quad [h] = L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

Ahora los exponentes dimensionales de las variables forman el siguiente cuadro:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
L	1	0	-2	-1	-1	0	-3	-2
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	3	0	1	-2	0	0	1	0
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_3$	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(310)

Al ser la característica de la matriz 5, las variables pueden formar  $i = 3$  monomios adimensionales independientes entre sí. Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{\rho \cdot \gamma_x \cdot L^3}{\mu^2} = \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\Delta\theta \cdot L \cdot h}{\mu \cdot \lambda}$$

de donde se deduce:

$$h = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\Delta\theta \cdot L} \right) \cdot F_3 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (311)$$

que supera en precisión a la solución (309) hallada con la base dimensional usual.

8.3.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).

Considerando el sistema de ejes coordenados en la pared como indicamos anteriormente (fig.II.36), las fórmulas dimensionales de las variables en la base discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ), son la de (294) añadiendo:

$$[L] = L_x \quad ; \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$$

y los exponentes dimensionales forman el siguiente cuadro:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
$L_x$	1	0	-2	-3	-1	2	-3	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_2$	1	0	1	0	0	-1	-1	0
$\Pi_3$	0	4	-2	-2	0	-3	0	4

(312)

Como la característica de la matriz es  $H = 5$ , el número de monomios adimensionales independientes es  $i = N-H = 8-5 = 3$ . Según las tres últimas filas de (312) son:

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\gamma_x \cdot L}{\rho \cdot \lambda} = \frac{g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L}{\lambda} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta^4}{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \gamma_x^2} = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta^4}{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}$$

lo que nos permite escribir la solución de la forma:

$$h = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\Delta\theta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L}{\lambda} \right) \quad (313)$$

Así pues, la discriminación de las dimensiones del espacio reduce la solución (309) obtenida con la base usual ( $L, Q, T, \theta$ ).

8.3.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

El cuadro de los exponentes dimensionales de las variables que intervienen en el problema, teniendo en cuenta (293) y que  $[h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}$ ,  $[L] = L$ , es ahora:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda$	$\rho$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	1	4	-1	-2	0	-4	-1	4
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0

(314)

La característica de la matriz es 6, y el número de monomios independientes es 2.

$$\Pi_1 = \frac{\Delta\theta^4 \cdot h^4 \cdot L}{\rho \cdot \gamma_x \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4} = \frac{\Delta\theta^4 \cdot h^4 \cdot L}{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}$$

resultando, pues, la solución:

$$h = \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4}{\Delta\theta^4 \cdot L} \right)^{1/4} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (315)$$

La solución (315) es más precisa que la (311) obtenida con la base ampliada ( $L, Q, T, \theta, M$ ) y que la (313) hallada con la base usual y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta$ ).

Los resultados podrían expresarse en función del  $N_{Nu,L} = \frac{h \cdot L}{K}$ , no haciéndolo así por simple conveniencia a la hora de la contrastación. Sin embargo, constatamos aquí el hecho de que el  $N_{Nu,L}$  no es adimensional en

las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , siendo su dimensión:

$$[N_{Nu, L}] = \left[ \frac{h \cdot L}{K} \right] = \frac{L_x^{-1} L_z^{-1} Q T^{-1} \theta^{-1} \cdot L_x}{L_x^{-1} L_y L_z^{-1} Q T^{-1} \theta^{-1}} = L_x \cdot L_y^{-1}$$

8.3.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Mediante un desarrollo semejante al realizado en (6.2.5), se deduce que los vectores-dimensión de las variables que intervienen en el problema, representados en la base usual, son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en el espacio de cinco dimensiones  $(L, Q, T, \theta, P)$ , sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ .

$$\begin{aligned} [\gamma_x]'' &= [\gamma_x] \cdot P \\ [\mu]'' &= [\mu] \cdot P \\ [\lambda]'' &= [\lambda] \cdot P^{-1} \\ [\rho]'' &= [\rho] \cdot P \end{aligned} \tag{316}$$

siendo  $P$  la nueva dimensión fundamental, que, en la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , es:

$$P = \left[ \frac{g \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Otro tanto ocurre con las bases discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ : las fórmulas dimensionales de las variables en dichas bases se pueden expresar de modo que difieran en una única dimensión fundamental  $P_x$ , que en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  es:

$$P_x = \left[ \frac{g \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

de modo que los vectores-dimensión de las variables, representados en el espacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.27, II.28, II.29, II.30 y II.31).

### 8.3.6.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Si comparamos las soluciones (309) y (313) obtenidas respectivamente con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  y su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , con las halladas (311) y (315) con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  y su discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , se observa que al ampliar la base desaparece de las soluciones el monomio  $\frac{g.L.\text{sen}\alpha}{\lambda}$ , que llamamos  $N_P$  .

Veamos a continuación cuál es el significado físico de este monomio  $N_P$  . Si tomamos un  $dm$  de fluido,  $N_P$  se puede expresar como:

$$N_P = \frac{dm.g.L.\text{sen}\alpha}{\lambda . dm} = \frac{dW}{dQ}$$

siendo  $dW = dm.g.L.\text{sen}\alpha$  el trabajo realizado por  $dm$  al descender una altura,  $L.\text{sen}\alpha$ , y  $dQ = \lambda.dm$  el calor de condensación de la masa  $dm$  . Así pues, el monomio  $N_P$  representa precisamente la relación formal entre trabajo y calor, no física pues no se trata de un proceso de conversión de calor en trabajo o viceversa.

Dicho monomio es adimensional en las bases usual  $(L, Q, T, \theta)$  y usual y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , mientras que en la base dimensional ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , adopta la dimensión

$$[N_P] = \left[ \frac{g.L.\text{sen}\alpha}{\lambda} \right] = \frac{L^2.M.T^{-2}}{Q} = \frac{[dW]}{[dQ]}$$

que antes tomamos como fundamental:  $P = [N_P]$ .

En la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  es

$$[N_P] = \left[ \frac{g.L.\text{sen}\alpha}{\lambda} \right] = \frac{L_x^2.M.T^{-2}}{Q} = \frac{[dW]}{[dQ]},$$

la cual hemos tomado en la base dimensional:  $P_x = [N_P]$ , en el apartado anterior del carácter vectorial de las dimensiones.

Al quedar  $N_P$  dotado de dimensión, necesariamente deja de formar

parte de los monomios adimensionales independientes,  $\Pi_i$ , que constituyen la solución.

Además, como la ampliación de la base dimensional (I.5) procede de suprimir dicha relación formal entre trabajo y calor, en ella el monomio  $N_p$  pierde su carácter individual, y sus componentes quedan incluidos en otros monomios. Esto es, de nuestra base ampliada se deriva necesariamente la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional de la relación entre trabajo y calor.

### 8.3.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

En el caso de una superficie inclinada en ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal, la teoría de Nusselt proporciona la siguiente solución [61]:

$$h = 0,943 \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot L} \right)^{1/4} \quad (317)$$

que está en perfecto acuerdo con la solución (315) obtenida por nosotros con la base ampliada y discriminada ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ), pues basta que  $F_4$  sea:

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) = 0,943 \cdot \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)^{3/4}$$

para que coincidan exactamente.

### 8.3.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

De acuerdo con el razonamiento que expusimos en (6.2.8), podemos considerar como variable independiente el calor de condensación por unidad de volumen,  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$ , en lugar de por unidad de masa. Ahora el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ , es función de las siguientes variables:

$$h = f(L, \Delta\theta, \gamma_x, \mu, K, \lambda') \quad (318)$$



Como ha quedado de manifiesto, en todos los casos anteriores, tanto la ampliación de la base como la discriminación de las dimensiones del espacio reducen las soluciones, por lo que es apropiado resolver el problema directamente con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ .

En esta base, las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema son:

$$\begin{aligned}
 [L] &= L_x & ; & \quad [\Delta\theta] = \theta \\
 [\gamma_x] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M & ; & \quad [\mu] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\
 [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [\lambda'] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \\
 [h] &= L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{319}$$

y el cuadro de los exponentes dimensionales es:

	L	$\Delta\theta$	$\gamma_x$	$\mu$	K	$\lambda'$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	1	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	-1
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	1	1	-1	1	-3	-1	4

La característica de la matriz es  $H = 6$ , luego hay un solo monomio adimensional independiente  $i = N - H = 7 - 6 = 1$ , siendo éste, según la última fila de (320), el siguiente:

$$\Pi = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta \cdot \mu \cdot L}{\gamma_x \cdot \lambda' \cdot K^3} = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta \cdot \mu \cdot L}{\rho^2 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}$$

donde hemos sustituido  $\gamma_x = \gamma \cdot \text{sen } \alpha = \rho \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$  ;  $\lambda' = \rho \cdot \lambda$  .

Resulta pues la solución:

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot L} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (321)$$

De este modo hemos conseguido el resultado más preciso que puede aportar el Análisis dimensional, esto es, la solución exacta salvo una constante numérica, o "solución teórica funcional exacta".

La solución (321) se encuentra en perfecto acuerdo con la solución (317) que proporciona la teoría de Nusselt, tomando la constante adimensional el valor  $C = 0,943$ .

### 8.3.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- En el apartado (I.5) hemos deducido, a partir de la teoría de Palacios, el que para "fenómenos que incluyan transmisión de calor, sin que haya conversión de calor en trabajo o viceversa", debe utilizarse la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  "estricta" en lugar de la usual  $(L, Q, T, \theta)$  "deficiente" [2]; como la "transmisión de calor por condensación en una pared inclinada" se encuentra dentro de este tipo de fenómenos, con su resolución ratificamos lo dicho en (I.5).

2ª.- Considerando el método de la discriminación espacial se obtienen mejores soluciones [15], haciendo notar que dicha mejora es independiente, por afectar a monomios adimensionales diferentes, de la que proporciona la ampliación de la base.

3ª.- Confirmamos (Arenas y Herranz [22] a [24]), el que los "números adimensionales", en ocasiones, pierden dicho carácter adimensional. En nuestro caso, en las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , el  $N_{Nu, L}$  tiene la dimensión:  $[N_{Nu, L}] = L_x \cdot L_y^{-1}$ .

4ª.- Los vectores-dimensión en la base (L,Q,T,θ) son las proyecciones, sobre un subespacio tetradimensional, de los vectores-dimensión pentadimensionales, constituyendo, para este problema, el paso de la base (L,Q,T,θ,M) a la base (L,Q,T,θ), una "mutilación" y reducción de información [25].

5ª.- El monomio  $N_P = \frac{g.L.\text{sen}\alpha}{\lambda}$  que representa la relación sólo formal, no física, entre un trabajo mecánico y una energía calorífica, aparece en las soluciones al utilizarse una base "deficiente", la usual tetradimensional, y es suprimido de ellas al emplearse la base dimensional ampliada.

6ª.- Las soluciones obtenidas con cada una de las bases dimensionales son:

$$(L,Q,T,\theta) \quad : \quad h = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\Delta\theta \cdot L} \right) \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen} \alpha \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L \cdot \text{sen} \alpha}{\lambda} \right) \quad (309)$$

$$(L,Q,T,\theta,M) \quad : \quad h = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\Delta\theta \cdot L} \right) \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen} \alpha \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (311)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad h = \left( \frac{\mu^2 \cdot \lambda^3 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\Delta\theta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L \cdot \text{sen} \alpha}{\lambda} \right) \quad (313)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad h = \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \mu^2 \cdot \lambda^4}{\Delta\theta^4 \cdot L} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right) \quad (315)$$

Comparando las soluciones entre sí, constatamos el hecho de que las sucesivas aproximaciones a la solución final se deben a dos procedimientos distintos e independientes: la discriminación de las dimensiones del espacio y la ampliación de la base propuesta por nosotros. Así es en efecto que las soluciones (313) y (315) son más precisas que las (309) y (311), respectivamente, debido a la discriminación, y las soluciones (311) y (315) son

más exactas que las (309) y (313), respectivamente, a causa de la ampliación de la base dimensional.

7ª.- Hemos conseguido precisar la función del ángulo  $\alpha$ , en la forma de un  $\sin \alpha$  que queda incluido en algunos monomios, mientras que, por ser adimensional el ángulo, el Análisis dimensional usual lo incluye en la solución como un monomio  $\Pi$  adimensional más, con la consiguiente pérdida de información respecto de nuestras soluciones.

8ª.- Con una adecuada elección de variables, no usual, obtenemos una mejora posterior y definitiva, esto es: la solución exacta salvo una constante adimensional:

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \sin \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot L} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (321)$$

que, con  $C = 0,943$ , coincide con la solución (317) suministrada por la teoría de Nusselt [61], además de fijar la función indeterminada  $F_4$  contenida en la solución (315).

### 9.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR EN UNA PARED VERTICAL.

El fenómeno físico denominado ebullición o evaporación pelicular es el siguiente. Sea una pared vertical caliente en contacto con un líquido, de modo que pasa calor de la primera al segundo. Los experimentos han demostrado con precisión que si el flujo de calor a través de la superficie sólida considerada es superior a un cierto valor,  $q_{max}$ , aparece un modo de evaporación denominado evaporación pelicular, que consiste en que, en lugar de las burbujas de vapor que en principio se forman junto a un gran número de puntos de la superficie, se observa la aparición de una película de vapor, más o menos continua, a través de la cual se transmite el calor al líquido que se evapora, por conducción, convección y radiación.

Esta película gaseosa afecta recíprocamente al paso de calor. La incógnita del problema que resolveremos por Análisis dimensional, reside en averiguar el valor del coeficiente de transmisión del calor en la evaporación pelicular sobre una pared vertical.

Se han expuesto varias teorías diferentes para explicar el fenómeno de la evaporación pelicular. Generalmente se supone que al elevarse la temperatura de la superficie  $\theta_p$ , crece el número de núcleos de evaporación hasta que las burbujas se sueldan unas a otras y forman la película de vapor.

Una vez formada la película de vapor, se suele utilizar un modelo aproximado, para su estudio, semejante al de la teoría de la condensación en película laminar, que ya hemos tratado anteriormente en el capítulo 6 .

Se considera constante la temperatura de la pared  $\theta_p$ , y además que el líquido se encuentra a su temperatura de saturación  $\theta_s$ .

La energía que llega a la región de la superficie de separación vapor-líquido, forma vapor, absorbiéndose la energía  $r$  por unidad de masa.

El empuje hidrostático origina el movimiento ascendente de la película de vapor, que es parcialmente contrarrestado por las tensiones tangenciales en la pared sólida y en la superficie de separación vapor-líquido.

En el caso de una pared vertical, se supone que una película continua de vapor sobrecalentado, adyacente a la pared sólida, se mueve verticalmente hacia arriba en régimen laminar. El espesor de la película es pequeño, comparado con el tamaño de la pared, y el calor se transmite a través de la película por conducción. También se supone que las fuerzas de inercia son más pequeñas que las viscosas y las debidas al empuje hidrostático.

Por lo que respecta al Análisis dimensional, señalemos en primer lugar, que haremos uso de la teoría de Palacios, incluyendo la posibilidad de ampliación de la base dimensional que hemos puesto de manifiesto en (I.5). Según ésta, en aquellos fenómenos de transmisión de calor en los que no se produce transformación de calor en trabajo o viceversa, la base estricta es  $(L, Q, T, \theta, M)$ , en contraposición a la usualmente utilizada  $(L, Q, T, \theta)$ . En el proceso de transmisión de calor en la ebullición no existe conversión de calor en trabajo, y por tanto, es aplicable la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ . Comprobaremos que la ampliación de la base proporciona resultados más precisos que los clásicos.

Asimismo, en el caso de la pared plana, haremos uso de la discriminación de las dimensiones del espacio [15], [16], [60], ampliamente desarrollada por nosotros [22], [23], [24], en problemas de fluidos y transmisión de calor, con el objeto de mejorar aún más las soluciones obtenidas con las otras bases. Así, discriminando la base usual,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , se halla una solución mejor que con la base  $(L, Q, T, \theta)$ , y discriminando la base ampliada,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , resulta la solución más precisa de todas.

Sea, pues, una pared vertical de altura  $H$ , con temperatura uniforme  $\theta_p$ , desde donde se transmite calor a un fluido de densidad  $\rho_1$ , el cual se encuentra, en sus proximidades, a la temperatura de saturación  $\theta_s$  ( $\theta_s$  inferior a  $\theta_p$ ). Como resultado de la transferencia calorífica se forma una película de vapor adyacente a la pared sólida; dicha película se mueve verticalmente hacia arriba, en régimen laminar, debido al empuje hidrostático. En tales condiciones, el coeficiente de transmisión del calor  $h$  depende de las siguientes variables:

$$h = f(H, \Delta\theta, E_v, \mu, K, r, \rho) \quad (322)$$

siendo:  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_s$  la diferencia entre la temperatura de la pared y la de saturación del líquido,  $E_v = (\rho_1 - \rho)g$  el empuje hidrostático por unidad de volumen,  $\mu$  la viscosidad del vapor,  $r$  el calor latente de evaporación por unidad de masa,  $\rho$  la densidad del vapor y  $K$  la conductividad térmica del vapor.

#### 9.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T, $\theta$ ).

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema se hallan a partir de sus fórmulas de definición, resultando:

$$\begin{aligned} [H] &= L & ; & & [\Delta\theta] &= \theta \\ [E_v] &= L^{-4} \cdot Q & ; & & [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [r] &= L^2 \cdot T^{-2} \\ [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 & ; & & [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (323)$$

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables que intervienen en el problema en la base (L,Q,T, $\theta$ ), es:

	H	$\Delta\theta$	$E_v$	$\mu$	K	r	$\rho$	h
L	1	0	-4	-3	-1	2	-5	-2
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	2	0	1	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0
$\Pi_3$	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
$\Pi_4$	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(324)

Como la característica de la matriz es 4, y el número de variables es 8, el número de monomios adimensionales independientes es  $i = 8 - 4 = 4$ .

Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot H^2}{\mu \cdot r^{1/2}} = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot H^2}{\mu \cdot r^{1/2}} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot H \cdot r^{1/2}}{\mu} \quad ; \quad \Pi_4 = \frac{\Delta\theta \cdot H \cdot h}{\mu \cdot r}$$

Para facilitar la solución, combinamos los monomios entre sí y tomamos en su lugar los cuatro siguientes:

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= \Pi_1 \cdot \Pi_3 = \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g \cdot H^3}{\mu^2} \\ \Pi'_2 &= \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \\ \Pi'_3 &= \Pi_1 \cdot \Pi_3^{-1} = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot H}{\rho \cdot r} \\ \Pi'_4 &= \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_4 = \frac{h \cdot H}{K} \end{aligned} \tag{325}$$

La solución será una función indeterminada de los cuatro monomios:  $\Pi'_1$ ,  $\Pi'_2$ ,  $\Pi'_3$ ,  $\Pi'_4$ , de donde, despejando h, resulta:

$$h = \frac{K}{H} \cdot F_1 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot H}{\rho \cdot r} \right) \tag{326}$$



9.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

En la base ampliada pentadimensional las fórmulas dimensionales de las variables son:

$$\begin{aligned}
 [H] &= L & ; & & [\Delta\theta] &= \theta \\
 [E_v] &= L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} & ; & & [\mu] &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} \\
 [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [r] &= Q \cdot M^{-1} \\
 [\rho] &= L^{-3} \cdot M & ; & & [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{327}$$

El cuadro de los exponentes dimensionales es ahora

	H	Δθ	E <sub>v</sub>	μ	K	r	ρ	h
L	1	0	-2	-1	-1	0	-3	-2
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
θ	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
Π <sub>1</sub>	1	0	0	0	-1	0	0	1
Π <sub>2</sub>	3	0	1	-2	0	0	1	0
Π <sub>3</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0	0

(328)

La característica de la matriz es  $H = 5$ , luego el número de monomios adimensionales independientes es  $i = N - H = 8 - 5 = 3$ . Los exponentes con que las variables aparecen en los monomios se hallan por un procedimiento análogo al seguido en (1.1), y vienen indicados en las tres últimas filas de (328). Así pues

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot H}{K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot E_v \cdot H^3}{\mu^2} = \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot H^3}{\mu^2} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}$$

siendo, pues, la solución:

$$h = \frac{K}{H} \cdot F_2 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) \quad (329)$$

que supera en precisión a la solución (326) obtenida con la base dimensional usual (L,Q,T,θ).

9.3.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ).

Consideramos un sistema de ejes coordenados en la pared del siguiente modo: el eje X vertical, el Y normal a la pared, y el Z horizontal contenido en la pared. Ahora la masa no es magnitud fundamental (54) y (55), y las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el fenómeno, en la base (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ) son:

$$\begin{aligned} [H] &= L_x & ; & \quad [\Delta\theta] = \theta \\ [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q & ; & \quad [\mu] = L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\ [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [r] = L_x^2 \cdot T^{-2} \\ [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 & ; & \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (330)$$

La matriz formada por los exponentes dimensionales es:

	H	Δθ	E <sub>v</sub>	μ	K	r	ρ	h
L <sub>x</sub>	1	0	-2	-3	-1	2	-3	-1
L <sub>y</sub>	0	0	-1	1	1	0	-1	0
L <sub>z</sub>	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
θ	0	1	0	0	-1	0	0	-1
Π <sub>1</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0	0
Π <sub>2</sub>	1	0	1	0	0	-1	-1	0
Π <sub>3</sub>	0	4	-2	-2	0	-3	0	4

(331)

La característica de la matriz es 5 . Así pues, las variables pueden formar entre sí  $i = 8-5 = 3$  monomios adimensionales independientes. Según las tres últimas filas de (331) son:

$$\Pi_1 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{E_v \cdot H}{\rho \cdot r} = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot H}{\rho \cdot r} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta^4}{\mu^2 \cdot r^3 \cdot E_v^2} = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta^4}{\mu^2 \cdot r^3 \cdot (\rho_1 - \rho)^2 \cdot g^2}$$

de donde, la solución vendrá dada por:

$$h = \left( \frac{\mu^2 \cdot r^3 \cdot (\rho_1 - \rho)^2 \cdot g^2}{\Delta\theta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot H}{\rho \cdot r} \right) \quad (332)$$

Vemos pues, que la discriminación de las dimensiones del espacio (332) ha mejorado la solución (326) dada por el Análisis dimensional clásico.

#### 9.4.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Si comparamos las soluciones obtenidas hasta ahora, se observa que tanto la ampliación de la base como la discriminación espacial, (329) y (332), reducen la solución clásica (326). Pero, además, la reducción de la solución ocurre por la desaparición de monomios distintos en cada caso:

$\frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot H}{\rho \cdot r}$  en el primero, y  $\frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g \cdot H^3}{\mu^2}$  en el segundo. Dado, pues, que

ambas reducciones son independientes, resulta apropiado utilizar la nueva base ampliada ( $L, Q, T, \theta, M$ ) también con la discriminación de las dimensiones del espacio, es decir, la base ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ).

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen en el problema son las siguientes

La solución (332) obtenida con la base dimensional ampliada y discriminada, ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ), supera en precisión a la (326) hallada con la

$$\begin{aligned}
 [H] &= L_x & ; & \quad [\Delta\theta] = \theta \\
 [E_v] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \cdot T^{-2} & ; & \quad [\mu] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} \\
 [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [r] = Q \cdot M^{-1} \\
 [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M & ; & \quad [h] = L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{333}$$

cuyos exponentes dimensionales forman la matriz que determina el número de monomios independientes de que consta la solución del problema

	H	$\Delta\theta$	$E_v$	$\mu$	K	r	$\rho$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	0	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	0	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
$\Pi_1$	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{4}$	1
$\Pi_2$	0	1	0	-1	1	-1	0	0

La característica de la matriz es 6 . En consecuencia, las 8 variables que intervienen en el problema podrán formar 2 monomios adimensionales independientes:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot \Delta\theta \cdot H^{\frac{1}{4}}}{E_v^{\frac{1}{4}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \rho^{\frac{1}{4}} \cdot r} = \frac{h \cdot \Delta\theta \cdot H^{\frac{1}{4}}}{[(\rho_1 - \rho)g]^{\frac{1}{4}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \rho^{\frac{1}{4}} \cdot r} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}$$

que conducen a la solución:

$$h = \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot \mu^2 \cdot r^4}{\Delta\theta^4 \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right)
 \tag{335}$$

La solución (335), obtenida con la base dimensional ampliada y discriminada, ( $L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M$ ), supera en precisión a la (332) hallada con la

base usual y discriminada,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , pues la función indeterminada  $F_4$  contiene un monomio menos que  $F_3$ . Por la misma razón, supera en precisión también a la (329) obtenida con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ . Y comparada con la solución proporcionada por la base usual, (326), se observa que la ventaja obtenida es de dos monomios.

También podemos expresar nuestras soluciones en función del número de Nusselt:  $N_{Nu,H} = \frac{h.H}{K}$ . Es interesante señalar que aquí, con las bases discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , el número de Nusselt deja de ser un "número adimensional", pasando a ser su dimensión

$$[N_{Nu,H}] = \left[ \frac{h.H}{K} \right] = \frac{L_x^{-1} L_z^{-1} Q T^{-1} \theta^{-1} \cdot L_x}{L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} Q T^{-1} \theta^{-1}} = L_x \cdot L_y^{-1}$$

#### 9.5.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

Si comparamos las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el fenómeno, en las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L, Q, T, \theta, M)$ , (323) y (327) respectivamente, se observa que las únicas magnitudes que cambian de dimensión son: el empuje hidrostático por unidad de volumen,  $E_v$ , la viscosidad,  $\mu$ , el calor latente de evaporación por unidad de masas,  $r$ , y la densidad,  $\rho$ .

En la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  tienen las dimensiones:

$$\begin{aligned} [E_v] &= L^{-4} \cdot Q & ; & & [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T \\ [r] &= L^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \end{aligned} \tag{336}$$

y en la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ :

$$\begin{aligned} [E_v]' &= L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} & ; & & [\mu]' &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} \\ [r]' &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho]' &= L^{-3} \cdot M \end{aligned} \tag{337}$$

Para poner de manifiesto explícitamente lo que implica la reducción

del espacio pentadimensional al subespacio tetradimensional, podemos realizar un cambio de base, en la base ampliada (L,Q,T,θ,M), de manera que la diferencia entre las fórmulas dimensionales (336) y (337), exista en una sola dimensión fundamental.

La ampliación de la base realizada, esto es, el paso de (L,Q,T,θ) a (L,Q,T,θ,M), ha consistido en añadir la dimensión fundamental M, lo cual

nos ha conducido a que el monomio  $N_P = \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho.r}$ , que era adimensional en la base tetradimensional, en nuestra base pentadimensional tenga dimensión:

$$[N_P] = \left[ \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho.r} \right] = L^2.M.T^{-2}.Q^{-1} \quad (338)$$

Vamos a llamar P a esta dimensión, o sea,  $P = [N_P] = L^2.M.T^{-2}.Q^{-1}$ . Consideremos, ahora, P formando parte de la base dimensional. Esto es, en lugar de ampliar (L,Q,T,θ) a (L,Q,T,θ,M), ampliamos a (L,Q,T,θ,P). En esta nueva base la masa no es magnitud fundamental, pues de (338) se obtiene:

$$[M] = L^{-2}.T^2.Q.P \quad (339)$$

y las fórmulas dimensionales de las variables, en la base (L,Q,T,θ,P), se encuentran sustituyendo (339) en (337):

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= L^{-2}.[M].T^{-2} = L^{-2}.L^{-2}.T^2.Q.P.T^{-2} = L^{-4}.Q.P \\ [\mu]'' &= L^{-1}.[M].T^{-1} = L^{-1}.L^{-2}.T^2.Q.P.T^{-1} = L^{-3}.Q.T.P \\ [r]'' &= Q.[M]^{-1} = Q.L^2.T^{-2}.Q^{-1}.P^{-1} = L^2.T^{-2}.P^{-1} \\ [\rho]'' &= L^{-3}.[M] = L^{-3}.L^{-2}.T^2.Q.P = L^{-5}.Q.T^2.P \end{aligned} \quad (340)$$

Si comparamos (340) con (336), resulta:

$$\begin{aligned}
 [E_v]'' &= [E_v] \cdot P \\
 [\mu]'' &= [\mu] \cdot P \\
 [r]'' &= [r] \cdot P^{-1} \\
 [\rho]'' &= [\rho] \cdot P
 \end{aligned}
 \tag{341}$$

quedando de manifiesto que la diferencia entre las nuevas dimensiones y las antiguas se puede referir a una sola dimensión nueva, P , permaneciendo invariables los restantes exponentes dimensionales.

En la analogía entre dimensiones y vectores, el sistema (341) pone de manifiesto que los vectores-dimensión representados en el espacio (L,Q,T,θ), son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en el espacio de 5 dimensiones (L,Q,T,θ,P), sobre el subespacio de cuatro dimensiones (L,Q,T,θ).

De forma análoga se procede con las fórmulas dimensionales de las variables (330) y (333) en las bases (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ) y (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ,M) respectivamente.

En la base (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ) son:

$$\begin{aligned}
 [E_v] &= L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q & ; & & [\mu] &= L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \\
 [r] &= L_x^2 \cdot T^{-2} & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2
 \end{aligned}
 \tag{342}$$

y en la base (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ,M)

$$\begin{aligned}
 [E_v]' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M \cdot T^{-2} & ; & & [\mu]' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} \\
 [r]' &= Q \cdot M^{-1} & ; & & [\rho]' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot M
 \end{aligned}
 \tag{343}$$

El problema consiste en realizar un cambio de base, pasando de (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ,M) a (L<sub>x</sub>,L<sub>y</sub>,L<sub>z</sub>,Q,T,θ,P<sub>x</sub>), siendo P<sub>x</sub> la nueva dimensión básica:

$$P_x = [N_P] = \left[ \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho \cdot r} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1} \quad (344)$$

En la nueva base dimensional la masa no es magnitud fundamental:

$$[M] = L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \quad (345)$$

Sustituyendo (345) en (342) se obtienen las dimensiones de las magnitudes en la nueva base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ :

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot [M] \cdot T^{-2} = L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \cdot T^{-2} = L_x^{-2} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot P_x \\ [\mu]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot [M] \cdot T^{-1} = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \cdot T^{-1} = L_x^{-3} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T \cdot P_x \\ [r]'' &= Q \cdot [M]^{-1} = Q \cdot L_x^2 \cdot Q^{-1} \cdot T^{-2} \cdot P_x^{-1} = L_x^2 \cdot T^{-2} \cdot P_x^{-1} \\ [\rho]'' &= L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot [M] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot L_x^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x = L_x^{-3} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x \end{aligned} \quad (346)$$

De la comparación de las dimensiones (342) y (346) se obtiene

$$\begin{aligned} [E_v]'' &= [E_v] \cdot P_x \\ [\mu]'' &= [\mu] \cdot P_x \\ [r]'' &= [r] \cdot P_x^{-1} \\ [\rho]'' &= [\rho] \cdot P_x \end{aligned} \quad (347)$$

Así pues, de (347) se deduce que los vectores-dimensión representados en el espacio  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en el espacio de 7 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, P_x)$ , sobre el subespacio de 6 dimensiones  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$ .



9.6.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$  .

Las soluciones obtenidas con las diferentes bases dimensionales presentan un carácter peculiar: se observa en ellas la aparición y desaparición

del monomio  $\frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho.r}$  , que es adimensional en las bases  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y de dimensión no nula en las respectivas bases ampliadas  $(L, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ . Lo llamaremos  $N_P$  ; así,

$$N_P = \left[ \frac{E_v.H}{\rho.r} \right] = \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho.r} \quad (348)$$

tiene en la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  la dimensión

$$P = [N_P] = \left[ \frac{E_v.H}{\rho.r} \right] = \frac{L^{-2} T^{-2} M.L}{L^{-3} M.Q M^{-1}} = \frac{L^2 M T^{-2}}{Q} ,$$

esto es:

$$P = [N_P] = \frac{[W]}{[Q]}$$

y en la base  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ :

$$P_x = [N_P] = \left[ \frac{E_v.H}{\rho.r} \right] = \frac{L_y^{-1} L_z^{-1} T^{-2} M.L_x}{L_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1} M.Q M^{-1}} = \frac{L_x^2 M T^{-2}}{Q}$$

o sea,

$$P_x = [N_P] = \frac{[W]}{[Q]}$$

En suma, el monomio  $N_P$  representa la relación entre las dimensiones de  $W$  y  $Q$  , que es adimensional en la base usual y de dimensión no nula en la ampliada.

El significado físico del monomio  $N_P$  es la relación entre un trabajo mecánico y una energía calorífica. Si multiplicamos y dividimos por  $dV$  en (348), se obtiene:

$$N_P = \frac{(\rho_1 - \rho)g.H.dV}{\rho.r.dV} = \frac{dW}{dQ}$$

El numerador  $dW = (\rho_1 - \rho)g.H.dV$  es el trabajo realizado por  $dV$  al ascender  $H$  debido al empuje hidrostático. En el denominador figura,  $dQ = \rho.r.dV$ , que es el calor de evaporación de  $dV$ . Como ambas energías son independientes, su relación no procede de la ley de Joule, que aquí no rige, lo cual conduce a que la ampliación de la base elimine el monomio  $N_P$  de la solución.

#### 9.7.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Considerando una teoría análoga a la de la condensación en película, se obtiene teóricamente la solución:

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g.r.K^3}{\Delta\theta \cdot \mu.H} \right)^{1/4} \quad (349)$$

Para la constante  $C$ , Isachenko [62] da el valor  $C = 0,667$  si el líquido se encuentra en reposo, y  $C = 0,943$  cuando el líquido posee una velocidad igual a la del vapor en la superficie de separación líquido-vapor.

La solución (335) obtenida con la base dimensional ampliada y discriminada se encuentra en perfecto acuerdo con la (349) dada por Isachenko, y coincide plenamente sin más que hacer:

$$F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) = C \cdot \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right)^{3/4}$$

#### 9.8.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCIÓN.

Al igual que en el problema de condensación sobre una pared vertical, (6.2.8), y por las razones allí expuestas, es adecuado tomar como variable independiente el calor de evaporación por unidad de volumen,  $r'$ , en lugar del calor de evaporación por unidad de masa,  $r$ , relacionados ambos por  $r' = \rho.r$ . Con este planteamiento el coeficiente de transmisión del calor  $h$

depende de las siguientes variables

$$h = f (H, \Delta\theta, E_v, \mu, K, r') \quad (350)$$

siendo  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_s$  la diferencia entre la temperatura de la pared y la de saturación del líquido,  $E_v = (\rho_l - \rho)g$  el empuje hidrostático por unidad de volumen,  $\mu$  la viscosidad del vapor,  $r'$  el calor latente de evaporación por unidad de volumen y  $K$  la conductividad térmica.

Resolvemos el problema directamente con la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , pues según hemos visto anteriormente proporciona la solución más precisa. En dicha base, las magnitudes que intervienen toman las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} [H] &= L_x & ; & \quad [\Delta\theta] = \theta \\ [E_v] &= L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M & ; & \quad [\mu] = L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\ [K] &= L_x^{-1} \cdot L_y \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & \quad [r'] = L_x^{-1} \cdot L_y^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \\ [h] &= L_x^{-1} \cdot L_z^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (351)$$

La matriz de los exponentes dimensionales es:

	H	$\Delta\theta$	$E_v$	$\mu$	K	$r'$	h
$L_x$	1	0	0	-1	-1	-1	-1
$L_y$	0	0	-1	1	1	-1	0
$L_z$	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
Q	0	0	0	0	1	1	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	-1
$\theta$	0	1	0	0	-1	0	-1
M	0	0	1	1	0	0	0
$\Pi$	1	1	-1	1	-3	-1	4

Al ser la característica de la matriz 6, las variables que intervienen en el problema únicamente pueden formar un monomio adimensional independiente:  $i = 7-6 = 1$ .

$$\Pi = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta \cdot \mu \cdot H}{K^3 \cdot E_v \cdot r'} = \frac{h^4 \cdot \Delta\theta \cdot \mu \cdot H}{K^3 \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot \rho \cdot r}$$

de donde se deduce

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot K^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (353)$$

que es la solución teórica funcional exacta del problema (decimos "funcional", pues establece la relación entre las variables pero no así el factor numérico C, que se ha de determinar experimentalmente para lo cual basta con una sola medida en algún caso particular).

La solución (353) obtenida con la base ampliada y discriminada concuerda con la solución (349) dada por Isachenko.

#### 9.9.- CONCLUSIONES.

1ª.- Como en el problema de "transmisión de calor en la ebullición pelicular en una pared vertical" no existe conversión de calor en trabajo, con su resolución a partir del Análisis dimensional de Palacios, confirmamos (I.5) el que para aquellos "fenómenos de transmisión de calor en los que no se produce conversión de calor en trabajo o viceversa", la base "estricta" es (L, Q, T,  $\theta$ , M), en contraste con la usualmente utilizada (L, Q, T,  $\theta$ ) que es "deficiente" [2].

2ª.- La utilización de la discriminación de las dimensiones del espacio proporciona, por sí sola, una aproximación, a la solución final, independiente de la que ofrece la ampliación de la base propuesta por nosotros.

3ª.- El número de Nusselt, en este caso, deja de ser un "número adimensional", pasando a tener, en las bases dimensionales (L<sub>x</sub>, L<sub>y</sub>, L<sub>z</sub>, Q, T,  $\theta$ )

y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , la dimensión:  $[N_{Nu, H}] = L_x \cdot L_y^{-1}$  ; ratificamos así los resultados obtenidos por Arenas y Herranz ([22] a [24]).

4ª.- Ponemos de manifiesto que el empleo de la base dimensional usual  $(L, Q, T, \theta)$  en lugar de la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , en este caso, supone una "mutilación" de la base dimensional y en consecuencia una pérdida de información en el problema [25], pudiéndose interpretar, según la analogía entre dimensiones y vectores, como una proyección de vectores pentadimensionales, sobre un subespacio tetradimensional.

5ª.- La ampliación de la base dimensional, deducida en (I.5), expulsa de las soluciones el monomio  $N_P = \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho \cdot r}$  cuyo significado es el de la relación algebraica, no real, entre un trabajo y un calor. Dicho monomio es un monomio "espurio" que surge al usarse una base "deficiente": la usual  $(L, Q, T, \theta)$  [26].

6ª.- Las soluciones a las que hemos llegado a partir del Análisis dimensional de Palacios son:

$$(L, Q, T, \theta) \quad : \quad h = \frac{K}{H} \cdot F_1 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g.H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho \cdot r} \right) \quad (326)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) \quad : \quad h = \frac{K}{H} \cdot F_2 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g.H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) \quad (329)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta) \quad : \quad h = \left( \frac{\mu^2 \cdot r^3 \cdot (\rho_1 - \rho)^2 \cdot g^2}{\Delta\theta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho)g.H}{\rho \cdot r} \right) \quad (332)$$

$$(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M) \quad : \quad h = \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g \cdot \mu^2 \cdot r^4}{\Delta\theta^4 \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) \quad (335)$$

Las soluciones (332) y (335) obtenidas con las bases discriminadas son más precisas que las (326) y (329) halladas con las bases sin discriminar, pues las funciones indeterminadas  $F_3$  y  $F_4$  contienen cada una un monomio menos que las  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente. Asimismo, las soluciones (329) y (335) logradas con la base ampliada son más determinadas que las (326) y (332) dadas por la base usual. En consecuencia, tanto la discriminación espacial como la ampliación de la base proporcionan sucesivas aproximaciones, independientes entre sí, a la solución final, por lo que la utilización al unísono de los dos métodos suministrará la solución más exacta (335).

7ª.- Como consecuencia de un tratamiento del problema diferente al realizado habitualmente, debido a una elección más adecuada de variables, logramos la mayor información que puede obtenerse a partir del Análisis dimensional:

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot K^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (353)$$

expresión que concuerda con la obtenida por Isachenko [62] cuando  $C$  toma los valores 0,667, ó 0,943.

10.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR SOBRE UN CILINDRO HORIZONTAL.

Para el caso de cilindros horizontales, consideramos la ebullición pelicular en la parte exterior de los mismos, y será válido lo dicho anteriormente (capítulo 9), con las diferencias propias de su geometría característica. El vapor se mueve sobre la superficie lateral del tubo, a lo largo del perímetro, hacia la generatriz superior, y, a medida que se acumula, se elimina en forma de burbujas ascendentes. La película de vapor tiene un espesor muy pequeño (fracciones de milímetro), y el movimiento del vapor, en ésta, tiene carácter laminar. Esta teoría fue desarrollada por Bromley [63] en 1950.

Suponemos un cilindro horizontal de diámetro  $d$ , rodeado de una película de vapor recalentado que separa la pared del cilindro del líquido que lo rodea. Se desprecia la influencia de las burbujas de vapor que se separan del cilindro junto a su generatriz superior. Consideramos constante la temperatura de la pared  $\theta_p$ , así como que el líquido se encuentra a su temperatura de saturación  $\theta_s$ . Despreciamos los efectos de la transmisión de calor por radiación.

El coeficiente de transmisión del calor  $h$ , dependerá, pues, de las siguientes variables: diámetro del cilindro  $d$ , diferencia de temperaturas  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_s$ , empuje hidrostático por unidad de volumen  $E_v = (\rho_l - \rho)g$ , viscosidad dinámica del vapor  $\mu$ , conductividad térmica del vapor  $K$ , calor de vaporización por unidad de masa  $r$ , densidad del vapor  $\rho$ . Así:

$$h = f(d, \Delta\theta, E_v, \mu, K, r, \rho) \quad (354)$$

Veamos qué soluciones aportan las bases dimensionales usual  $(L, Q, T, \theta)$  y ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ .

10.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T,θ).

La matriz formada por los exponentes dimensionales, de las variables que intervienen en el problema, en la base (L,Q,T, ), se obtienen a partir de las fórmulas dimensionales (323) sin más que sustituir H , altura de la pared vertical, por d , diámetro del cilindro horizontal. Así pues:

	d	Δθ	E <sub>v</sub>	μ	K	r	ρ	h
L	1	0	-4	-3	-1	2	-5	-2
Q	0	0	1	1	1	0	1	1
T	0	0	0	1	-1	-2	2	-1
θ	0	1	0	0	-1	0	0	-1
Π <sub>1</sub>	2	0	1	-1	0	-1/2	0	0
Π <sub>2</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0	0
Π <sub>3</sub>	1	0	0	-1	0	1/2	1	0
Π <sub>4</sub>	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(355)

La característica de la matriz es 4 ; como hay 8 variables, el número de monomios adimensionales independientes es  $i = 8-4 = 4$  .

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot d^2}{\mu \cdot r^{1/2}} = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d^2}{\mu \cdot r^{1/2}} ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot d \cdot r^{1/2}}{\mu} ; \quad \Pi_4 = \frac{\Delta\theta \cdot d \cdot h}{\mu \cdot r}$$

en lugar de  $\Pi_1$  y  $\Pi_3$  , consideramos  $\Pi'_1$  y  $\Pi'_3$  , obtenidos según:

$$\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_3 = \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g \cdot d^3}{\mu^2} ; \quad \Pi'_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_3^{-1} = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r}$$

los cuales, junto con  $\Pi_2$  y  $\Pi_4$  , conducen a la solución:

$$h = \left( \frac{\mu \cdot r}{d \cdot \Delta\theta} \right) \cdot F_1 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho)g \cdot d^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r} \right) \quad (356)$$



10.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M).

Las fórmulas dimensionales de las variables, en la base ampliada (L,Q,T,θ,M), son las (327), añadiendo [d] = L . Y el cuadro de los exponentes dimensionales en esta base es:

	d	Δθ	E <sub>v</sub>	μ	K	r	ρ	h
L	1	0	-2	-1	-1	0	-3	-2
Q	0	0	0	0	1	1	0	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	0	-1
θ	0	1	0	0	-1	0	0	-1
M	0	0	1	1	0	-1	1	0
Π <sub>1</sub>	3	0	1	-2	0	0	1	0
Π <sub>2</sub>	0	1	0	-1	1	-1	0	0
Π <sub>3</sub>	1	1	0	-1	0	-1	0	1

(357)

Como la característica de la matriz es 5 , las variables pueden formar entre sí tres monomios adimensionales independientes:

$$\Pi_1 = \frac{E_v \cdot \rho \cdot d^3}{\mu^2} = \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2} ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} ; \quad \Pi_3 = \frac{\Delta\theta \cdot d \cdot h}{\mu \cdot r}$$

resultando entonces:

$$h = \left( \frac{\mu \cdot r}{d \cdot \Delta\theta} \right) \cdot F_2 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2} , \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) \quad (358)$$

que es más precisa que la solución (356) obtenida con la base dimensional usual.

10.3.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES.

Comparando las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema, en las bases usual y ampliada, (323) y (327), con [d] = L en lugar de [H] = L , se observa que las únicas variables que cambian de

dimensión son: el empuje hidrostático por unidad de volumen,  $E_v$ ; la viscosidad,  $\mu$ ; el calor latente de evaporación por unidad de masa,  $r$ ; y la densidad,  $\rho$ .

Por un procedimiento semejante al realizado en (9.5), se pueden expresar dichas fórmulas dimensionales de manera que difieran en una única dimensión fundamental  $P$ , siendo en la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$

$$P = \left[ \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

Así, de (341) se deduce que los vectores-dimensión  $[E_v]$ ,  $[\mu]$ ,  $[r]$ ,  $[\rho]$  representados en el espacio tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , (336), son las proyecciones de los vectores  $[E_v]''$ ,  $[\mu]''$ ,  $[r]''$ ,  $[\rho]''$  representados en el espacio pentadimensional  $(L, Q, T, \theta, P)$ , (340), sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ .

El significado físico es el siguiente: la teoría por nosotros desarrollada (I.5) nos indica que, para el problema de ebullición pelicular, más aún, para el tipo o capítulo de fenómenos en los cuales no existe conversión de calor en trabajo o viceversa, la base estricta es la ampliada, por lo que el uso de la base usual es una mutilación que reduce la información en los problemas, puesto que se sustituyen ciertos vectores-dimensión por sus proyecciones, siendo por consiguiente incorrecta.

#### 10.4.- CARACTER DEL MONOMIO $N_P$ .

Al igual que en el problema anterior, en el caso de transmisión de calor por ebullición pelicular sobre un cilindro horizontal, se observa que la ampliación de la base dimensional de  $(L, Q, T, \theta)$  a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , elimina

el monomio  $N_P = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r}$  de las soluciones.

Dicho monomio tiene una forma particular y su significado físico es el de una relación entre trabajo y calor. En efecto, si tomamos un elemento de volumen  $dV$  :

$$N_P = \frac{(\rho_1 - \rho)g.d.dV}{\rho.r.dV} = \frac{dW}{dQ} ,$$

el numerador  $dW = (\rho_1 - \rho)g.d.dV$  es el trabajo realizado por  $dV$  al ascender  $d$  debido al empuje hidrostático, y el denominador  $dQ = \rho.r.dV$  es el calor latente de evaporación de  $dV$ . Esta relación es meramente formal, no física, puesto que  $dW$  no proviene de  $dQ$ , o viceversa. Ambos son independientes.

La base dimensional usual  $(L, Q, T, \theta)$  se obtiene considerando que el calor es homogéneo con la energía mecánica (I.3), así pues, el monomio  $N_P$  es adimensional en dicha base y aparece en la solución (356).

Sin embargo, existen fenómenos, como el que estudiamos en este caso, en los cuales no se produce transformación de calor en trabajo: no rige el principio de equivalencia de Joule. Por tanto, según hemos deducido en (I.5), a partir de la teoría de Palacios, la base estricta es la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , siendo la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  deficiente. En la base ampliada el calor y el trabajo no son homogéneos: el primero interviene mediante la transmisión de calor y el segundo es introducido por la mecánica, independientemente.

Por ello, la utilización de la base ampliada implica necesariamente la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional del monomio  $N_P$ .

#### 10.5.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Diferentes autores concuerdan en expresar el coeficiente de transmisión del calor del siguiente modo:

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot K^3 \cdot r}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot d} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (359)$$

Bromley [63] ha estudiado la ebullición con películas estables sobre el exterior de tubos horizontales experimental y analíticamente, y sus resultados experimentales concuerdan con la expresión (359) con exactitud satisfactoria, siendo  $C = 0,62$ .

Isackenko [62] obtienen la misma (359) con  $C = 0,58$  y  $C = 0,72$  según sea la condición de contorno considerada en la superficie de separación líquido-vapor, valores que, para McAdams [64], son  $C = 0,512$  y  $C = 0,724$ , respectivamente.

Chapman [65] propone la misma solución (359) con  $C = 0,725$ .

La solución (359) obtenida por diferentes autores está de acuerdo con la solución (358) hallada con la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M), tomando la función  $F_2$  la forma:

$$F_2 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2} \right)^{1/4} \cdot \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right)^{3/4}$$

#### 10.6.- POSIBLE MEJORA DE LA SOLUCION.

Por razones análogas a las expuestas en (6.2.8), tomamos ahora como variable independiente el calor de vaporización por unidad de volumen  $r' = \rho \cdot r$ , en lugar de por unidad de masa. Con esta consideración y las hipótesis propias del problema, el coeficiente de transmisión del calor  $h$ , depende del diámetro del cilindro  $d$ , de la diferencia de temperaturas  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_s$ , del empuje hidrostático por unidad de volumen  $E_v = (\rho_1 - \rho)g$ , de la viscosidad dinámica  $\mu$ , de la conductividad térmica  $K$ , y del calor latente de vaporización por unidad de volumen  $r' = \rho \cdot r$ . Es pues:

$$h = f(d, \Delta\theta, E_v, \mu, K, r') \quad (360)$$

Resolvemos el problema con la base ampliada (L,Q,T,θ,M), que proporcionará una solución más precisa que la que aporte la base usual (L,Q,T,θ).

Las fórmulas dimensionales, de las variables que intervienen en el problema, en la base (L,Q,T,θ,M) son:

$$\begin{aligned}
 [d] &= L & ; & & [\Delta\theta] &= \theta \\
 [E_v] &= L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M & ; & & [\mu] &= L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M \\
 [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [r'] &= L^{-3} \cdot Q \\
 [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{361}$$

que proporcionan el siguiente cuadro de exponentes dimensionales:

	d	Δθ	E <sub>v</sub>	μ	K	r'	h
L	1	0	-2	-1	-1	-3	-2
Q	0	0	0	0	1	1	1
T	0	0	-2	-1	-1	0	-1
θ	0	1	0	0	-1	0	-1
M	0	0	1	1	0	0	0
Π <sub>1</sub>	1	0	0	0	-1	0	1
Π <sub>2</sub>	3	-1	1	-1	-1	1	0

Como la característica de la matriz es H = 5, el número de monomios

independientes es i = N-H = 7-5 = 2 . Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot d}{K} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{E_v \cdot r' \cdot d^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} = \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K}$$

resultando la solución:

$$h = \frac{K}{d} \cdot F \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)
 \tag{363}$$

La solución (359) obtenida por diferentes autores está de acuerdo con la solución (363) hallada con la base dimensional ampliada (L,Q,T,θ,M), y concuerda con ella cuando:

$$F \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right) = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}$$

10.7.- CONCLUSIONES.

1ª.- Hemos puesto de manifiesto en (I.5) que la base ampliada (L,Q,T,θ,M) es "estricta" y la base usual (L,Q,T,θ) "deficiente" [2], en los "fenómenos de transmisión de calor sin existir conversión de calor en trabajo o viceversa"; con la resolución del problema de "transmisión de calor por ebullición pelicular sobre un cilindro horizontal", que pertenece a dicha clase de fenómenos, corroboramos lo expuesto anteriormente.

2ª.- Como, para el problema tratado, la base "estricta" es la ampliada (L,Q,T,θ,M) y la base usual (L,Q,T,θ) es "deficiente", la reducción de la primera a la segunda, según la analogía entre dimensiones y vectores, representa una proyección de vectores-dimensión pentadimensionales sobre un subespacio tetradimensional, lo cual implica una "mutilación" acompañada de pérdida de información [25].

3ª.- El monomio  $N_P = \frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r}$  que representa la relación entre un calor y un trabajo, ambos independientes, sin relación física entre sí, es suprimido de las soluciones al ampliar la base dimensional de (L,Q,T,θ) a (L,Q,T,θ,M).

4ª.- Las bases usual y ampliada proporcionan las siguientes soluciones:

$$(L,Q,T,\theta) \quad : \quad h = \left( \frac{\mu \cdot r}{d \cdot \Delta\theta} \right) \cdot F_1 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho) g \cdot d}{\rho \cdot r} \right) \quad (356)$$

$$(L,Q,T,\theta,M) \quad : \quad h = \left( \frac{\mu \cdot r}{d \cdot \Delta\theta} \right) \cdot F_2 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot r} \right) \quad (358)$$

La ampliación de la base dimensional, propuesta por nosotros, mejora la solución hallada con la base usual; comparando la solución (356) obtenida con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , con la alcanzada (358) con la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , se observa que la mejora de la solución es debida a la desaparición como monomio  $\Pi$  adimensional del monomio  $\frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r}$ .

5ª.- Una mayor aproximación a la solución final la logramos mediante una más adecuada elección de variables, justificada en (6.2.8). Esta es:

$$h = \frac{K}{d} \cdot F \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K} \right) \quad (363)$$

que se encuentra en perfecto acuerdo con las soluciones dadas por: Bromley [63], Isachenko [62], McAdams [64] y Chapman [65], cuando la función indeterminada es:

$$F \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K} \right) = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}$$

11.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO EN FLUJO DE BAJA VELOCIDAD.

Consideremos un tubo de diámetro  $D$ , a temperatura  $\theta_p$ , por el que circula un fluido con velocidad media  $u$  y a temperatura  $\theta_\infty$ . Se pretende calcular la cantidad de calor que, por unidad de superficie y temperatura, cede el fluido a las paredes del tubo, que es el coeficiente de transmisión del calor,  $h$ .

Ateniéndonos al orden de magnitud de la velocidad del fluido, el problema general, así planteado, puede convertirse en dos fenómenos físicos bien diferentes:

1º.- Cuando los gradientes de velocidad son relativamente pequeños, el término correspondiente a la disipación en la ecuación de la energía es despreciable frente a los restantes términos.

2º.- Cuando las velocidades de los fluidos son muy grandes es necesario considerar la disipación de energía en forma de calor que produce el rozamiento interno, pues la función de disipación en la ecuación de la energía alcanza valores considerables, cuando en la corriente existen fuertes gradientes de velocidad.

Desde el punto de vista del Análisis dimensional, cada uno de los casos forma parte de un capítulo diferente de la transmisión del calor, según hemos deducido a partir de la teoría de Análisis dimensional de Palacios (Parte I):

El primero pertenece al tipo de problemas de "transferencia de calor en los cuales intervienen efectos mecánicos pero no se produce conversión de calor en trabajo o viceversa". La base dimensional estricta para este tipo de fenómenos es la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ . La base  $(L, Q, T, \theta)$  es incorrecta (mutilada).



El segundo se encuentra incluido en el capítulo de "transmisión del calor con conversión de energía mecánica en calorífica", siendo  $(L, Q, T, \theta)$  la base dimensional estricta para este tipo de fenómenos.

Resolvemos a continuación el caso (1º) con la correspondiente base dimensional estricta  $(L, Q, T, \theta, M)$ , haciendo uso también de otra consecuencia de la teoría de Palacios: la discriminación de las dimensiones del espacio.

A continuación (capítulo 12) resolveremos el caso (2º) con la correspondiente base estricta  $(L, Q, T, \theta)$  y su discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

El coeficiente de transmisión del calor,  $h$ , depende de las siguientes variables: diámetro del tubo,  $D$ ; longitud del tubo,  $L$ ; diferencia de temperaturas entre el fluido no enfriado y la pared  $\Delta\theta = \theta_\infty - \theta_p$ ; velocidad media del fluido  $u$ , así como de las propiedades físicas de éste: conductividad térmica,  $K$ ; calor específico por unidad de volumen,  $c'$ ; viscosidad,  $\mu$ , y densidad,  $\rho$ . Así pues:

$$h = f(D, L, \Delta\theta, u, K, c', \mu, \rho) \quad (364)$$

Como los gradientes de velocidad son pequeños, la función de disipación se considera despreciable y, por tanto, no se produce conversión de energía mecánica en calorífica en el fenómeno de transmisión del calor. La base dimensional estricta es entonces  $(L, Q, T, \theta, M)$ . (Más adelante discriminaremos las dimensiones del espacio utilizando la base:  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ ).

#### 11.1.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA $(L, Q, T, \theta, M)$ .

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema en dicha base son:

$$\begin{aligned}
 [D] &= L & ; & & [L] &= L \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [u] &= L \cdot T^{-1} \\
 [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [c'] &= L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\
 [\mu] &= L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [\rho] &= L^{-3} \cdot M \\
 [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & & & & 
 \end{aligned} \tag{365}$$

Hay un factor de forma dado por  $\tilde{w} = D/L$ .

El cuadro de los exponentes dimensionales de las variables es:

	D	$\Delta\theta$	u	K	c'	$\mu$	$\rho$	h
L	1	0	1	-1	-3	-1	-3	-2
Q	0	0	0	1	1	0	0	1
T	0	0	-1	-1	0	-1	0	-1
$\theta$	0	1	0	-1	-1	0	0	-1
M	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Pi_1$	1	0	0	-1	0	0	0	1
$\Pi_2$	1	0	1	-1	1	0	0	0
$\Pi_3$	1	0	1	0	0	-1	1	0

La característica de la matriz es 5, luego el número de monomios adimensionales es  $i = 8 - 5 = 3$ . Son estos:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot D}{K} = N_{Nu,D} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{u \cdot D \cdot c'}{K} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = N_{Re,D}$$

En lugar de  $\Pi_2$  consideramos  $\Pi'_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-1}$

$$\Pi'_2 = \frac{\mu \cdot c'}{\rho \cdot K} = N_{Pr}$$

que junto con  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$  y  $\tilde{w}$  proporcionan la solución

$$N_{Nu,D} = F_1 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L} \right) \tag{367}$$

11.2.- SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ).

Consideramos un sistema de ejes en el cilindro: el eje X según el eje del cilindro y el Y y el Z en el plano diametral y perpendiculares entre sí. En este caso, por simetría, los ejes Y y Z resultan indiscernibles, por lo que sólo podemos distinguir entre la dirección paralela al eje (dimensión  $L_x$ ) y la dirección normal al eje (que por estar en el plano YZ llamamos  $L_{yz}$ ). Así, la base dimensional ampliada y discriminada es ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ). Ahora D y L no tienen la misma dimensión, por lo cual desaparece el factor de forma anterior. Las nuevas dimensiones son:

$$\begin{aligned}
 [D] &= L_{yz} & ; & & [L] &= L_x \\
 [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [u] &= L_x \cdot T^{-1} \\
 [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\
 [\mu] &= L_x^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M & ; & & [\rho] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot M \\
 [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{368}$$

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables en la base ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ) es:

	D	L	$\Delta\theta$	u	K	c'	$\mu$	$\rho$	h
$L_x$	0	1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1
$L_{yz}$	1	0	0	0	0	-2	0	-2	-1
Q	0	0	0	0	1	1	0	0	1
T	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	-1
$\theta$	0	0	1	0	-1	-1	0	0	-1
M	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Pi_1$	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
$\Pi_2$	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0
$\Pi_3$	2	-1	0	1	-1	1	0	0	0

(369)

Como la característica de la matriz es 6, hay  $i = 9-6 = 3$  monomios adimensionales independientes. Los exponentes que las variables toman en cada uno de los monomios vienen indicados en las tres últimas filas de (369), y se obtienen por un proceso análogo al seguido en (1.1). Los tres monomios son:

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot D}{K} = N_{Nu,D} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{\mu \cdot c'}{\rho \cdot K} = N_{Pr} \quad ; \quad \Pi_3 = \frac{c' \cdot u \cdot D^2}{K \cdot L}$$

Si tomamos  $\Pi'_3 = \Pi_3 \cdot \Pi_2^{-1} = \frac{c' \cdot u \cdot D^2}{K \cdot L} \cdot \frac{\rho \cdot K}{\mu \cdot c'} = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} \cdot \frac{D}{L}$ , así pues:

$$\Pi'_3 = N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}$$

que, junto con  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , proporcionan la solución

$$N_{Nu,D} = F_2 \left( N_{Pr}, N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right) \quad (370)$$

La solución (370) hallada con la discriminación de las dimensiones del espacio es más precisa que la (367) obtenida con la base sin discriminar  $(L, Q, T, \theta, M)$ , pues la función  $F_2$  contiene un monomio menos que  $F_1$  en su argumento.

### 11.3.- SOLUCIONES CON LAS BASES USUAL $(L, Q, T, \theta)$ Y DISCRIMINADA $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  son:

$$\begin{aligned} [D] &= L & ; & & [L] &= L \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [u] &= L \cdot T^{-1} \\ [K] &= L^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [c'] &= L^{-3} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [\mu] &= L^{-3} \cdot Q \cdot T & ; & & [\rho] &= L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \\ [h] &= L^{-2} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & & & & \end{aligned} \quad (371)$$

(El planteamiento y resolución matemáticos de este problema es idéntico al desarrollado en el apartado 12.1 del capítulo siguiente, debido a coincidir exactamente las variables, por lo que lo omitimos aquí a fin de evitar innecesarias repeticiones).

La solución que resulta es:

$$N_{Nu,D} = F_3 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (372)$$

Discriminemos, ahora, las dimensiones del espacio. Consideramos el sistema de ejes en el cilindro indicado en (11.2). Las dimensiones de las variables en la base usual y discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ) son:

$$\begin{aligned} [D] &= L_{yz} & ; & & [L] &= L_x \\ [\Delta\theta] &= \theta & ; & & [u] &= L_x \cdot T^{-1} \\ [K] &= L_x^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} & ; & & [c'] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot \theta^{-1} \\ [\mu] &= L_x^{-3} \cdot Q \cdot T & ; & & [\rho] &= L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \\ [h] &= L_x^{-1} \cdot L_{yz}^{-1} \cdot Q \cdot T^{-1} \cdot \theta^{-1} \end{aligned} \quad (373)$$

(Análogamente a lo dicho antes, el planteamiento y resolución completos puede verse en el apartado 12.2 del capítulo siguiente).

La base dimensional ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ) proporciona la solución:

$$N_{Nu,D} = F_4 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (374)$$

Puede observarse que las soluciones (367) y (370) son mejores, por más precisas, que las (372) y (374), respectivamente, ya que las funciones indeterminadas  $F_1$  y  $F_2$  contienen sendos monomios menos que las  $F_3$  y  $F_4$ .

11.4.- CARACTER VECTORIAL DE LAS SOLUCIONES. BASE AMPLIADA.

De las magnitudes que intervienen en el problema sólo modifican su dimensión, al expresarlas en la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  y en la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , la viscosidad,  $\mu$ , y la densidad,  $\rho$ .

En la base  $(L, Q, T, \theta)$  son, según (371):

$$[\mu] = L^{-3} \cdot Q \cdot T$$
$$[\rho] = L^{-5} \cdot Q \cdot T^2$$

y en la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , son, de (365):

$$[\mu]' = L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot M$$
$$[\rho]' = L^{-3} \cdot M$$

Realizando, como en los casos anteriores, un cambio de base en la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  consistente en tomar como magnitud fundamental, en lugar de la masa  $M$ , la dimensión del monomio que desaparece de las soluciones en la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ :

$$P = \left[ \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

resulta que, en la nueva base  $(L, Q, T, \theta, P)$ , las dimensiones de las magnitudes pasan a ser:

$$[\mu]'' = L^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P = [\mu] \cdot P$$
$$[\rho]'' = L^{-5} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P = [\rho] \cdot P$$

Queda así de manifiesto que, teniendo en cuenta la analogía entre dimensiones y vectores (A.4.5), los vectores-dimensión  $[\mu]$  y  $[\rho]$ , representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones de los vectores-dimensión representados en el espacio  $(L, Q, T, \theta, M)$ , sobre el subespacio de cuatro dimensiones  $(L, Q, T, \theta)$ , (figuras: II.24, II.25 y II.26).

Análogamente, con las bases dimensionales discriminadas  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , tomando como fundamental la dimensión:

$$P_x = \left[ \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

en lugar de M, las fórmulas dimensionales, en la nueva base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ , son:

$$[\mu]'' = L_x^{-3} \cdot Q \cdot T \cdot P_x$$

$$[\rho]'' = L_x^{-3} \cdot L_{yz}^{-2} \cdot Q \cdot T^2 \cdot P_x$$

que, comparando con (373), resulta

$$[\mu]'' = [\mu] \cdot P_x$$

$$[\rho]'' = [\rho] \cdot P_x$$

de modo que los vectores-dimensión  $[\mu]$  y  $[\rho]$ , representados en el espacio  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ , son las proyecciones sobre un subespacio pentadimensional, de los vectores-dimensión  $[\mu]''$  y  $[\rho]''$  representados en el espacio de seis dimensiones  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, P_x)$ . (figuras: II.32, II.33, II.34 y II.35).

11.5.- CARACTER DEL MONOMIO  $N_P$ .

Si comparamos las soluciones (367) y (370) obtenidas con la base ampliada, con las (372) y (374) halladas con la base usual, se observa que el monomio  $\frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta}$ , que figura en las segundas, desaparece de las primeras, al perder el carácter de adimensional en la base ampliada.

A dicho monomio lo llamamos  $N_P$  :

$$N_P = \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \tag{375}$$

Kraussold [69], [70], ha propuesto la siguiente para el campo

Si multiplicamos y dividimos por  $dm$  :

$$N_P = \frac{dm \cdot u^2}{dm \cdot c \cdot \Delta\theta} \quad (376)$$

el numerador  $dm \cdot u^2$  es el doble de la energía cinética del elemento de masa  $dm$  cuando se mueve con velocidad  $u$ , y el denominador  $dm \cdot c \cdot \Delta\theta$  es el calor absorbido por  $dm$  cuando su temperatura varía  $\Delta\theta$ . Así pues, el monomio  $N_P$  representa la relación entre una energía mecánica y una calorífica, siendo dicha relación únicamente formal, algebraica, no física, ya que en este problema no se produce conversión de energía mecánica en calorífica o viceversa, pues desde el principio consideramos despreciable la disipación de energía.

#### 11.6.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Contrastemos a continuación la solución (370) con los resultados teóricos y empíricos obtenidos por diferentes autores.

Sieder y Tate [66] utilizando la teoría de Graetz-Nusselt obtienen unos resultados empíricos que se pueden resumir en la ecuación siguiente:

$$N_{Nu,D} = 1,86 \cdot \left( N_{Pr} \cdot N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right)^{1/3} \quad (377)$$

que confirma nuestra solución (370).

Asimismo, Hausen [67] mediante interpolación obtuvo la ecuación teórica aproximada:

$$N_{Nu,D} = 3,65 + \frac{0,0668 \cdot N_{Pr} \cdot N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}}{1 + 0,045 \left[ N_{Pr} \cdot N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right]^{2/3}} \quad (378)$$

que también está conforme con la solución obtenida por nosotros.

Kraussold [68], [69], ha propuesto la siguiente para el campo



$5000 < N_{Pr} \cdot N_{Re,D} < 40.000$  y  $100 < D/L < 400$  :

$$N_{Nu,D} = C \cdot \left( N_{Pr} \cdot N_{Re,D} \right)^{0,23} \cdot \left( \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (379)$$

Pohlhausen [70] obtuvo para una placa plana, experimentalmente, la expresión:

$$N_{Nu,x} = 0,664 \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot N_{Re,x}^{\frac{1}{2}}$$

calculando los parámetros con el diámetro  $D$ , dicha ecuación se puede escribir:

$$N_{Nu,D} = 0,664 \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \left( N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (380)$$

que concuerda con la solución (370).

Elser [71] ha deducido la relación simplificada:

$$N_{Nu,D} = 0,578 \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \left( N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (381)$$

que está de acuerdo con la solución obtenida por nosotros para:

$$F_2 \left( N_{Pr}, N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right) = 0,578 \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \left( N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

### 11.7.- CONCLUSIONES.

1ª.- La resolución del problema de "transferencia de calor por convección forzada en un tubo con flujo de baja velocidad", en el cual no se produce conversión de energía mecánica en calorífica o viceversa por ser la disipación de energía despreciable, corrobora lo deducido por nosotros en (I.5): en los "fenómenos de transmisión de calor en los que no existe

conversión de calor en trabajo o viceversa", la base estricta es la ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , mientras que la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  resulta deficiente [2].

2ª.- La discriminación de las dimensiones del espacio da soluciones más precisas que el Análisis dimensional clásico [15], siendo dicha mejora adicional, distinta e independiente de la que suministra la ampliación de la base dimensional.

3ª.- Confirmamos (Arenas y Herranz, [22] a [24]) que en ocasiones los llamados "números adimensionales" no lo son. En este caso el número de Reynolds pierde el carácter adimensional, pasando a tener, en las bases  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , la dimensión  $[N_{Re,D}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$ , siendo adimensional únicamente el producto  $N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}$ .

4ª.- El uso incorrecto de la base usual  $(L, Q, T, \theta)$ , en este problema, lleva consigo una "mutilación" junto con una pérdida de información [25], y vectorialmente significa una proyección de vectores-dimensión pentadimensionales, sobre un subespacio tetradimensional.

5ª.- El monomio  $N_P = \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta}$ , cuyo significado es el de la relación formal entre una energía mecánica y una energía calorífica, no forma parte de las soluciones dadas por la base ampliada, resultado éste que concuerda con los obtenidos por diferentes autores.

6ª.- Las soluciones que proporcionan cada una de las bases dimensionales son:

$$(L, Q, T, \theta) : N_{Nu, D} = F_3 \left( N_{Pr}, N_{Re, D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right) \quad (372)$$

$$(L, Q, T, \theta, M) : N_{Nu, D} = F_1 \left( N_{Pr}, N_{Re, D}, \frac{D}{L} \right) \quad (367)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta) : N_{Nu, D} = F_4 \left( N_{Pr}, N_{Re, D} \cdot \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right) \quad (374)$$

$$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M) : N_{Nu, D} = F_2 \left( N_{Pr}, N_{Re, D} \cdot \frac{D}{L} \right) \quad (370)$$

Comparando las soluciones entre sí se pone de manifiesto lo siguiente: Por una parte, la discriminación espacial origina una mejora de la solución: así, las soluciones (374) y (370) son más precisas que las (372) y (367), respectivamente. Por otra, la ampliación de la base dimensional produce una mayor precisión, adicional e independiente de la anterior; en efecto, las soluciones (367) y (370) obtenidas con la base ampliada son mejores que las (372) y (374), respectivamente, halladas con la base usual  $(L, Q, T, \theta)$  y su discriminada.

7ª.- La solución más exacta es la que suministra la base ampliada y discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ :

$$N_{Nu, D} = F_2 \left( N_{Pr}, N_{Re, D} \cdot \frac{D}{L} \right) \quad (370)$$

que concuerda con los resultados obtenidos por: Sieder y Tate [66], Hausen [67], Kraussold [68] y [69], Pohlhausen [70], y Elser [71].

12.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO CON FLUJO A ALTA VELOCIDAD.

Cuando la velocidad del fluido en el tubo supera a la mitad de la velocidad del sonido en el mismo, empieza a tener importancia la disipación de energía por viscosidad en la capa límite, con la consiguiente aparición de calor.

La transmisión de calor a la pared del tubo es el resultado combinado del calentamiento debido a la disipación viscosa y del aporte de calor por el mismo fluido.

Este problema pertenece al tipo de fenómenos de transmisión de calor con transformación de energía mecánica en calorífica o viceversa, para los cuales hemos deducido a partir de la teoría de Palacios (I.5), que la base dimensional estricta es  $(L, Q, T, \theta)$ , siendo la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$ , excesiva.

Las variables que intervienen en el problema son las mismas que en el caso anterior. La solución del problema será pues de la forma:

$$h = f(D, L, \Delta\theta, u, K, c', \mu, \rho) \quad (382)$$

12.1.- SOLUCION CON LA BASE USUAL  $(L, Q, T, \theta)$ .

Las fórmulas dimensionales de las variables que intervienen en el problema son las (371).

Como las magnitudes  $D$  y  $L$  tienen la misma dimensión, en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , su cociente es un factor de forma  $\tilde{w} = D/L$ .

La matriz formada por los exponentes dimensionales, en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , es:

	D	$\Delta\theta$	u	K	c'	$\mu$	$\rho$	h
L	1	0	1	-1	-3	-3	-5	-2
Q	0	0	0	1	1	1	1	1
T	0	0	-1	-1	0	1	2	-1
$\theta$	0	1	0	-1	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	1	0	0	-1	0	0	0	1
$\Pi_2$	1	-1	3	-1	0	0	1	0
$\Pi_3$	0	-1	2	-1	0	1	0	0
$\Pi_4$	1	0	1	-1	1	0	0	0

(383)

La característica de la matriz es 4 , luego hay  $i = N-H = 8-4 = 4$  monomios adimensionales independientes.

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot D}{K} = N_{Nu,D} ; \quad \Pi_2 = \frac{\rho \cdot u^3 \cdot D}{K \cdot \Delta\theta} ; \quad \Pi_3 = \frac{\mu \cdot u^2}{K \cdot \Delta\theta} ; \quad \Pi_4 = \frac{c' \cdot u \cdot D}{K} ; \quad \tilde{w} = D/L$$

En lugar de  $\Pi_2, \Pi_3$  y  $\Pi_4$  , consideramos  $\Pi'_2, \Pi'_3$  y  $\Pi'_4$  del siguiente modo:

$$\Pi'_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_3^{-1} = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = N_{Re,D}$$

$$\Pi'_3 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4 = \frac{\mu \cdot c'}{\rho \cdot K} = N_{Pr}$$

$$\Pi'_4 = \Pi_2 \cdot \Pi_4^{-1} = \frac{\rho \cdot u^2}{c' \cdot \Delta\theta} = \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta}$$

que, junto con  $\Pi_1$  y  $\tilde{w}$  , proporcionan la solución:

$$N_{Nu,D} = f_1 \left( N_{Pr} , N_{Re,D} , \frac{D}{L} , \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (384)$$

### 12.2.- SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ).

Considerando un sistema de ejes como en (11.2), las fórmulas dimensionales de las variables pasan a ser las (393).

La matriz formada por los exponentes dimensionales de las variables

es de la forma:

	D	L	$\Delta\theta$	u	K	c'	$\mu$	$\rho$	h
$L_x$	0	1	0	1	-1	-1	-3	-3	-1
$L_{yz}$	1	0	0	0	0	-2	0	-2	-1
Q	0	0	0	0	1	1	1	1	1
T	0	0	0	-1	-1	0	1	2	-1
$\theta$	0	0	1	0	-1	-1	0	0	-1
$\Pi_1$	1	0	1	-2	0	0	-1	0	1
$\Pi_2$	0	0	1	-2	1	0	-1	0	0
$\Pi_3$	0	0	-1	2	0	-1	0	1	0
$\Pi_4$	2	-1	0	1	0	0	-1	1	0

(385)

Al ser la característica 5, el número de monomios independientes es  $i = 9 - 5 = 4$ .

$$\Pi_1 = \frac{h \cdot \Delta\theta \cdot D}{\mu \cdot u^2} ; \quad \Pi_2 = \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot u} ; \quad \Pi_3 = \frac{\rho \cdot u^2}{c' \cdot \Delta\theta} = \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} ; \quad \Pi_4 = \frac{\rho \cdot u \cdot D^2}{\mu \cdot L} = N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}$$

En lugar de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  tomamos  $\Pi'_1$  y  $\Pi'_2$  de la forma:

$$\Pi'_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1} = N_{Nu,D} ; \quad \Pi'_2 = \Pi_2^{-1} \cdot \Pi_3^{-1} = N_{Pr}$$

que con  $\Pi_3$  y  $\Pi_4$  dan la solución:

$$N_{Nu,D} = f_2 \left( N_{Pr} , N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} , \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (386)$$

Nuestra solución (386) reporta la ventaja, sobre la solución clásica del Análisis dimensional (384), de que establece que el número de Nusselt no depende del número de Reynolds y de  $D/L$  separadamente sino de su producto. En este caso el número de Reynolds no es adimensional, sino que su dimensión es:  $[N_{Re,D}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$ , siendo adimensional el producto  $N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}$ .

12.3.- CONTRASTACION DE LOS RESULTADOS.

Nuestra solución (386) supera la teórica aproximada con Análisis dimensional de Kay [72] y Chapman [73].

12.4.- COMPARACION DE LOS PROBLEMAS 11 Y 12 .

Para el problema 11 (baja velocidad), en el cual se consideraba despreciable la disipación de energía y, por tanto, no se producía conversión de energía mecánica en calorífica o viceversa, la base estricta era la ampliada (L,Q,T,θ,M) y sus soluciones correctas eran:

$$N_{Nu,D} = F_1 \left( N_{Pr} , N_{Re,D} , \frac{D}{L} \right) \quad (367)$$

dada por la base (L,Q,T,θ,M), y

$$N_{Nu,D} = F_2 \left( N_{Pr} , N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right) \quad (370)$$

obtenida con la base discriminada ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M$ ). La base usual (L,Q,T,θ) es, para este caso, una base "deficiente" que proporciona las soluciones inexactas (372) y (374).

Cuando las velocidades de los fluidos son muy grandes, problema 12 , se hace patente la disipación de energía en forma de calor, por lo que existe conversión de energía mecánica en calorífica. La base estricta para este tipo de fenómenos es la usual, que proporciona las soluciones:

$$N_{Nu,D} = f_1 \left( N_{Pr} , N_{Re,D} , \frac{D}{L} , \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (384)$$

hallada con la base (L,Q,T,θ), y

$$N_{Nu,D} = f_2 \left( N_{Pr} , N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} , \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (386)$$

lograda con la discriminación espacial, ( $L_x, L_{yz}, Q, T, \theta$ ).

La base ampliada ha de considerarse, para este caso, excesiva, y su uso conduce a soluciones falsas.

Si comparamos las soluciones (384) y (386) del problema 12 con las (367) y (370) del problema 11, se observa que la diferencia estriba en la aparición o no del monomio  $\frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta}$ . A dicho monomio lo llamamos  $N_P$ :

$$N_P = \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta}$$

y representa la relación entre una energía mecánica y una calorífica. En efecto, si multiplicamos y dividimos por  $dm$ , resulta que:

$$N_P = \frac{dm \cdot u^2}{dm \cdot c \cdot \Delta\theta}$$

el numerador es el duplo de la energía cinética de  $dm$  al moverse con velocidad  $u$ , y el denominador es el calor absorbido por  $dm$ .

En el problema 12 el calor procede de la energía mecánica, de modo que el monomio  $N_P$  significa una relación real, física, observable, y por tanto aparece en las soluciones como una relación independiente del resto del fenómeno. Aquí el  $N_P$  sí es adimensional: en la base  $(L, Q, T, \theta)$ , que es la adecuada en este caso, es

$$[N_P] = \left[ \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right] = \frac{L^2 T^{-2}}{L^2 T^{-2} \theta^{-1} \cdot \theta} = L^0 \cdot Q^0 \cdot T^0 \cdot \theta^0$$

En la base discriminada  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  también es nula:

$$[N_P] = \left[ \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right] = \frac{L_x^2 T^{-2}}{L_x^2 T^{-2} \theta^{-1} \cdot \theta} = L_x^0 \cdot L_{yz}^0 \cdot Q^0 \cdot T^0 \cdot \theta^0$$

Por lo cual, con toda propiedad, este monomio aparece en las soluciones (384) y (386).



La simple ampliación de la base a  $(L, Q, T, \theta, M)$ , en el problema 12, será errónea, pues suprime ese monomio  $N_p$  que realmente existe en la solución e interviene decisivamente en el propio fenómeno físico.

En el planteamiento teórico, básico, de la base dimensional, con la teoría de Palacios, según vimos en (I.3), se puede añadir  $Q = W$  a las ecuaciones fundamentales, lo que conduce a  $[Q] = [W]$ , resultando inadecuada la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  y correcta o estricta la tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ .

También es posible, no es incorrecto, aunque queda fuera de la teoría de Palacios, usar en el problema 12 la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ , lo que exige incluir la constante universal  $J$  entre las variables (como vimos en I.4), siendo  $J$  de dimensión  $[J] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$ . Este planteamiento conduce al resultado correcto. No es acorde, sin embargo, con la teoría de Palacios que, por su segundo postulado, declara a la  $J$  "constante superflua" por lo que su uso debe ser rechazado. El empleo de la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  sin incluir  $J$  en la lista de variables es lo que resulta totalmente incorrecto y conduce a resultados erróneos, haciendo desaparecer de la solución de Análisis dimensional variables que son esenciales en el fenómeno físico.

Se confirma en el problema 11 que (I.5) para aquellos "fenómenos en que coexisten efectos mecánicos y de transmisión del calor sin que haya conversión de energía mecánica en calorífica o viceversa", las bases ampliadas con o sin discriminación espacial:  $(L, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  son estrictas. Las bases usuales  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  son deficientes y conducen a monomios espurios que no deben aparecer en la solución.

Y en el problema 12 que (I.3) para los "fenómenos en los que coexisten efectos mecánicos y de transmisión del calor, con transformación de calor en trabajo o viceversa", las bases dimensionales usuales  $(L, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  son estrictas, y las bases ampliadas  $(L, Q, T, \theta, M)$  y

$(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  son excesivas y no deben utilizarse pues conducen a resultados incorrectos, ya que eliminan relaciones entre variables que realmente gobiernan el proceso.

#### 12.5.- CONCLUSIONES.

1ª.- Confirmamos (I.3), de acuerdo con la teoría de Análisis dimensional de Palacios, que la base dimensional usual  $(L, Q, T, \theta)$  es "estricta" para aquellos "fenómenos de transmisión de calor existiendo transformación de energía mecánica en calorífica o viceversa", mientras que la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "excesiva" o "superabundante" [2].

2ª.- Con la utilización de la discriminación de las dimensiones del espacio logramos mejorar la solución que suministra el Análisis dimensional clásico [15].

3ª.- El número de Reynolds deja de ser, en este problema, un "número adimensional"; su dimensión en la base  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  es  $[N_{Re,D}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$ , y lo que queda adimensional apareciendo en las soluciones es el producto  $N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}$ , ratificando así los resultados obtenidos por Arenas y Herranz ([22] a [24]).

4ª.- El empleo de la base ampliada  $(L, Q, T, \theta, M)$  "excesiva", en este problema, conduce a resultados erróneos, ya que elimina el monomio  $N_p$  de las soluciones. Dicho monomio, que representa una relación real, observable, entre una energía calorífica y otra mecánica debe aparecer en las soluciones por existir disipación de energía en el fenómeno.

5ª.- La solución más precisa obtenida a partir del Análisis dimensional de Palacios es:

$$N_{Nu,D} = f_2 \left( N_{Pr}, N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (386)$$

que concuerda con los resultados obtenidos por Kay [72] y Chapman [73].

C O N C L U S I O N E S  
=====

1ª.- Hemos deducido, a partir de la teoría de Análisis dimensional de Palacios, que a los diferentes procesos de propagación del calor podemos atribuir bases dimensionales específicas, llegando así a subdividir el capítulo de la Transmisión del Calor en las partes siguientes, de acuerdo con las respectivas leyes fundamentales:

A) "Transmisión simple de calor".

En los fenómenos de propagación del calor en medios sólidos, donde no intervienen magnitudes mecánicas, la base dimensional estricta es la tetradimensional  $(L, Q, T, \theta)$ , o sus discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  ó  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

B) "Transmisión de calor, con existencia de efectos mecánicos, pero sin conversión de calor en trabajo o viceversa".

En los fenómenos en que intervienen efectos mecánicos y de transmisión del calor pero sin que se produzca conversión de energía mecánica en calorífica o viceversa, la base estricta es la pentadimensional  $(L, Q, T, \theta, M)$ , o sus discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  ó  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ . La base  $(L, Q, T, \theta)$  es deficiente o mutilada.

C) "Transmisión General de calor, con existencia de efectos mecánicos, y con transformación de calor en trabajo o viceversa".

Para aquellos fenómenos en que, además de transmisión de calor, intervienen efectos mecánicos y se produce conversión de calor en trabajo, o viceversa, la base dimensional estricta es la  $(L, Q, T, \theta)$ , o sus discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  ó  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ . La base dimensional  $(L, Q, T, \theta, M)$ , ó sus discriminadas  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  ó  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ , es excesiva y conduce a resultados erróneos.

En ninguno de los tres casos ha de incluirse el equivalente mecánico del calor,  $J$ , entre las variables.

2ª.- Las soluciones más precisas de los problemas tratados, obtenidas mediante la aplicación de la teoría de Análisis dimensional de Palacios, y confirmadas por las fórmulas teóricas, teóricas aproximadas o empíricas existentes, según los casos, son:

1.1.- CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA VERTICAL. CASO GENERAL.

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot f \left( N_{Pr} \right) \quad (65)$$

1.2.- CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA VERTICAL. MOVIMIENTO DE DESLIZAMIENTO.

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (93)$$

1.3.- CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA VERTICAL. FLUIDO NO VISCOSO.

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (117)$$

2.- TRANSMISION DE CALOR POR CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA INCLINADA.

$$N_{Nu,L} = \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}} \cdot f \left( N_{Pr} \right) \quad (140)$$

3.- CONVECCION LIBRE ENTRE DOS PLACAS VERTICALES.

$$N_{Nu,b} = f \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, N_{Pr} \right) \quad (152)$$

4.- CONVECCION LIBRE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL.

$$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot f \left( N_{Pr} \right) \quad (163)$$

5.- CONVECCION LIBRE EN UN CILINDRO HORIZONTAL.

$$N_{Nu,d} = f \left( N_{Gr,d} , N_{Pr} \right) \quad (175)$$

6.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UNA PARED VERTICAL.

6.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (229)$$

6.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

$$N_{Nu,L} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot L^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (243)$$

7.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UN CILINDRO VERTICAL.

7.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (264)$$

7.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

$$N_{Nu,H} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot H^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (280)$$

8.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UNA PARED INCLINADA.

8.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

$$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (306)$$

8.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot L} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (321)$$

9.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR EN UNA PARED VERTICAL.

$$h = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot K^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (353)$$

10.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR SOBRE UN CILINDRO HORIZONTAL.

$$h = \frac{K}{d} \cdot f \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right) \quad (363)$$

11.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO EN FLUJO DE BAJA VELOCIDAD.

$$N_{Nu,D} = f \left( N_{Pr}, N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right) \quad (370)$$

12.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO CON FLUJO A ALTA VELOCIDAD.

$$N_{Nu,D} = f \left( N_{Pr}, N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta} \right) \quad (386)$$

En todos los casos hemos reducido en uno o varios grados el orden de indeterminación de la función que obtienen los diferentes autores con el Análisis dimensional habitual.

En aquellos casos en los que no existe solución teórica exacta, proponemos la nuestra como fórmula teórica aproximada mediante Análisis dimensional que rige el fenómeno en cuestión, a contrastar con la experiencia. En algunos casos proponemos la fórmula final, monomía, que llamamos "solución teórica funcional exacta" ya que queda una sola constante numérica adimensional, a determinar por la experimentación.

3ª.- Hemos confirmado en varios casos que, en ocasiones, los denominados "números adimensionales" pueden poseer una dimensión no nula según han expuesto Arenas y Herranz ([22] a [24]).

En efecto, el número de Nusselt adquiere la dimensión

$$[N_{Nu,L}] = L_x \cdot L_y^{-1}$$

con las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$ , en los problemas 1.1 , 1.2 , 1.3 , 2 , 4 , 6.3 y 8.3, y

$$[N_{Nu,H}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$$

con las bases  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$  en el problema 7.3 , y

$$[N_{Nu,H}] = L_x \cdot L_y^{-1}$$

con las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  en el problema 9 .

El número de Grashof toma la dimensión

$$[N_{Gr,L}] = L_x^4 \cdot L_y^{-4}$$

con las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  en los problemas 1.1 , 1.2 , 1.3 , 2 y 4 , y

$$[N_{Gr,b}] = L_x \cdot L_y^{-1}$$

con las mismas bases en el problema 3 .

Asimismo, el número de Reynolds no es adimensional en los problemas 11 y 12, siendo su dimensión:

$$[N_{Re,D}] = L_x \cdot L_{yz}^{-1}$$

con las bases  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .



4ª.- Todos los casos tratados tienen en común la aparición de unos monomios peculiares que denominamos  $N_P$ , los cuales representan una relación genérica entre una energía mecánica y una calorífica:

$$N_P = \frac{W}{Q}$$

Dichos monomios son:

1.- CONVECCION LIBRE EN UNA PLACA VERTICAL.

$$\frac{g\beta L}{c}$$

2.- TRANSMISION DE CALOR POR CONVECCION LIBRE SOBRE UNA PLACA INCLINADA.

$$\frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$$

3.- CONVECCION LIBRE ENTRE DOS PLACAS VERTICALES.

$$\frac{g\beta L}{c}$$

4.- CONVECCION LIBRE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL.

$$\frac{g\beta L}{c}$$

5.- CONVECCION LIBRE EN UN CILINDRO HORIZONTAL.

$$\frac{g\beta d}{c}$$

6.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UNA PARED VERTICAL.

6.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

$$\frac{g \cdot x}{\lambda}$$

6.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

$$\frac{g \cdot L}{\lambda}$$

7.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION EN UN CILINDRO VERICAL.

7.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

$$\frac{g \cdot x}{\lambda}$$

7.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

$$\frac{g \cdot H}{\lambda}$$

8.- TRANSMISION DE CALOR POR CONDENSACION SOBRE UNA PARED INCLINADA.

8.2.- ESPESOR DE LA PELICULA LIQUIDA.

$$\frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda}$$

8.3.- COEFICIENTE DE TRANSMISION DEL CALOR.

$$\frac{g \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda}$$

9.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR EN UNA PARED VERTICAL.

$$\frac{(\rho_1 - \rho) g \cdot H}{\rho \cdot r}$$

10.- TRANSMISION DE CALOR POR EBULLICION PELICULAR SOBRE UN CILINDRO HORIZONTAL.

$$\frac{(\rho_1 - \rho) \cdot g \cdot d}{\rho \cdot r}$$

11.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO EN FLUJO DE BAJA VELOCIDAD.

$$\frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta}$$

12.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION FORZADA EN UN TUBO CON FLUJO A ALTA VELOCIDAD.

$$\frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta}$$

Todos ellos tienen por dimensión

$$[N_P] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

en la base  $(L, Q, T, \theta, M)$ , y

$$[N_P] = L_x^2 \cdot M \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$$

en las bases  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta, M)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta, M)$ .

Los monomios  $N_P$  tienen dimensión nula en las bases  $(L, Q, T, \theta)$ ,  $(L_x, L_y, L_z, Q, T, \theta)$  y  $(L_x, L_{yz}, Q, T, \theta)$ .

En los problemas del 1 al 11, que forman parte del tipo de fenómenos de transmisión de calor sin conversión de calor en trabajo o viceversa, el monomio  $N_P$  corresponde precisamente a la relación formal o algebraica (no física u observable) entre un trabajo y un calor, por lo que desaparece de las soluciones cuando utilizamos la base "estricta"  $(L, Q, T, \theta, M)$  o sus discriminadas, y aparece en ellas cuando se emplea la base usual "deficiente"  $(L, Q, T, \theta)$  o sus discriminadas.

Por el contrario, el problema 12 ilustra el tipo de fenómenos de transmisión de calor con transformación de energía mecánica en calorífica. En este caso, el monomio  $N_P$  representa una relación real, física, observable, entre una energía mecánica y una calorífica, apareciendo en la solución cuando utilizamos la base  $(L, Q, T, \theta)$  "estricta", de acuerdo con lo que realmente sucede. Por el contrario, la base  $(L, Q, T, \theta, M)$  es "excesiva" en este caso, y conduce a resultados erróneos puesto que elimina el monomio  $N_P$ , que debe necesariamente estar presente en la solución.

C U A D R O      R E S U M E N  
=====

Hemos confeccionado el siguiente CUADRO-RESUMEN para poner de manifiesto claramente las distintas soluciones a los problemas tratados, que han sido obtenidas por nosotros.

En cada fila pueden compararse las soluciones, haciéndose patente la mejora que se logra con las distintas bases. La exposición pormenorizada de los resultados de dicha comparación se ha realizado en las conclusiones parciales, al final de cada uno de los capítulos de la Parte II .

La expresión mejor, o fórmula de Análisis dimensional más aproximada, se señala en el CUADRO-RESUMEN mediante un recuadro.

Añadimos también las respectivas soluciones conocidas: Teórica, Teórica aproximada ó empírica (columna V), que es útil para contrastar la certeza de nuestras soluciones, lo cual hemos desarrollado también en cada capítulo.

Comparando las soluciones de las columnas I y II con las respectivas de las III y IV se puede observar la mejora que, en cada caso, introduce la discriminación dimensional.

Además, las soluciones de las columnas I y III comparadas con las respectivas de las II y IV, muestran la desaparición de monomios de la forma:  $\frac{g\beta L}{c}$  ,  $\frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c}$  ,  $\frac{g \cdot L}{\lambda}$  ,  $\frac{g \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda}$  ,  $\frac{(\rho_1 - \rho)g \cdot d}{\rho \cdot r}$  ,  $\frac{u^2}{c \cdot \Delta\theta}$  .

Señalamos con signos diferentes las soluciones conocidas de la columna V : teórica exacta (TE), teórica aproximada (TA), Empírica (E)...

DENOMINACION DEL PROBLEMA	I.-SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T,θ)	II.-SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M)	III.-SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA. (L <sub>x</sub> ,L <sub>y</sub> ,L <sub>z</sub> ,Q,T,θ) ó (L <sub>x</sub> ,L <sub>yz</sub> ,Q,T,θ)	IV.-SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA. (L <sub>x</sub> ,L <sub>y</sub> ,L <sub>z</sub> ,Q,T,θ,M) ó (L <sub>x</sub> ,L <sub>yz</sub> ,Q,T,θ,M)	V.-SOLUCION CONOCIDA: TEORICA EXACTA (TE), TEORICA APROXIMADA (TA), EMPIRICA (E).
1.1.-Convección libre sobre una placa vertical. Caso general.	$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = F_2 (N_{Gr,L}, N_{Pr})$	$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_4(N_{Pr})$	(TA) $N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot f(N_{Pr})$
1.2.-Convección libre sobre una placa vertical. Movimiento de deslizamiento.	$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = F_2 (N_{Gr,L} \cdot N_{Pr})$	$N_{Nu,L} = (N_{Gr,L} \cdot N_{Pr})^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = C \cdot (N_{Gr,L} \cdot N_{Pr})^{\frac{1}{4}}$	(E) $N_{Nu,L} = 0,726 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \right)^{\frac{1}{4}}$
1.3.-Convección libre sobre una placa vertical. Fluido no viscoso.	$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = F_2 (N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2)$	$N_{Nu,L} = (N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = C \cdot (N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $N_{Nu,L} = F \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr}^2 \right)$
2.-Transmisión de calor por convección libre sobre una placa inclinada.	$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha, N_{Pr}, \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = F_2 (N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha, N_{Pr})$	$N_{Nu,L} = (N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L \cdot \text{sen } \alpha}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = (N_{Gr,L} \cdot \text{sen } \alpha)^{\frac{1}{4}} \cdot F_4(N_{Pr})$	(E) $N_{Nu,L} = 0,56 \cdot \left( N_{Gr,L} \cdot N_{Pr} \cdot \text{sen } \alpha \right)^{\frac{1}{4}}$
3.-Convección libre entre dos placas verticales.	$N_{Nu,b} = F_1 \left( N_{Gr,b}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c}, \frac{L}{b} \right)$	$N_{Nu,b} = F_2 \left( N_{Gr,b}, N_{Pr}, \frac{L}{b} \right)$	$N_{Nu,b} = F_3 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,b} = F_4 \left( N_{Gr,b} \cdot \frac{b}{L}, N_{Pr} \right)$	(E) $N_{Nu,b} = 0,280 \frac{(N_{Pr} \cdot N_{Gr,b})^{\frac{1}{4}}}{(L/b)^{\frac{1}{4}}}$
4.-Convección libre en un cilindro vertical.	$N_{Nu,L} = F_1 \left( N_{Gr,L}, N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = F_2 (N_{Gr,L}, N_{Pr})$	$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( N_{Pr}, \frac{g\beta L}{c} \right)$	$N_{Nu,L} = N_{Gr,L}^{\frac{1}{4}} \cdot F_4(N_{Pr})$	(TA) $N_{Nu} = N_{Gr}^{\frac{1}{4}} \cdot f(N_{Pr})$
5.-Convección libre en un cilindro horizontal.	$N_{Nu,d} = F_1 \left( N_{Gr,d}, N_{Pr}, \frac{g\beta d}{c} \right)$	$N_{Nu,d} = F_2 (N_{Gr,d}, N_{Pr})$	NO PROCEDE LA DISCRIMINACION	NO PROCEDE LA DISCRIMINACION	(E) $N_{Nu,d} = 0,50 \cdot (N_{Gr,d} \cdot N_{Pr})^{\frac{1}{4}}$
6.2.-Transmisión de calor por condensación en una pared vertical. Espesor de la película líquida.	$\delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right)$	$\delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)$	$\delta(x) = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right)$	$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot \Delta\theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$
6.3.-Transmisión de calor por condensación en una pared vertical. Coeficiente de transmisión del calor.	$N_{Nu,L} = F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L}{\lambda} \right)$	$N_{Nu,L} = F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda} \right)$	$N_{Nu,L} = \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta\theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L}{\lambda} \right)$	$N_{Nu,L} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $N_{Nu,L} = 0,943 \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot L^3}{\Delta\theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}$

DENOMINACION DEL PROBLEMA	I.-SOLUCION CON LA BASE USUAL (L,Q,T,θ)	II.-SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA (L,Q,T,θ,M)	III.-SOLUCION CON LA BASE USUAL Y DISCRIMINADA. (L <sub>x</sub> ,L <sub>y</sub> ,L <sub>z</sub> ,Q,T,θ) ó (L <sub>x</sub> ,L <sub>yz</sub> ,Q,T,θ)	IV.-SOLUCION CON LA BASE AMPLIADA Y DISCRIMINADA. (L <sub>x</sub> ,L <sub>y</sub> ,L <sub>z</sub> ,Q,T,θ,M) ó (L <sub>x</sub> ,L <sub>yz</sub> ,Q,T,θ,M)	V.-SOLUCION CONOCIDA: TEORICA EXAC- TA (TE), TEORICA APROXIMADA (TA), EMPIRICA (E).
7.2.-Transmisión de calor por condensación en un cilindro vertical. Espesor de la película líquida.	$\delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g x^3}{\mu^2}, \frac{K \Delta \theta}{\mu \lambda}, \frac{g x}{\lambda} \right)$	$\delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g x^3}{\mu^2}, \frac{K \Delta \theta}{\mu \lambda} \right)$	$\delta(x) = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x}{\lambda} \right)$	$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta \theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot \Delta \theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}$
7.3.-Transmisión de calor por condensación en un cilindro vertical. Coeficiente de transmisión del calor.	$N_{Nu,H} = F_1 \left( \frac{\rho^2 g H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot H}{\lambda} \right)$	$N_{Nu,H} = F_2 \left( \frac{\rho^2 g H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right)$	$N_{Nu,H} = \left( \frac{\rho^2 g H^3}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot H}{\lambda} \right)$	$N_{Nu,H} = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot H^3}{\mu \cdot \Delta \theta \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $N_{Nu,H} = 0,943 \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \lambda \cdot H^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K} \right)^{\frac{1}{4}}$
8.2.-Transmisión de calor por condensación en una pared inclinada. Espesor de la película líquida.	$\delta(x) = x \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right)$	$\delta(x) = x \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot x^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right)$	$\delta(x) = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\rho^2 \cdot g \cdot \text{sen}^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot x \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right)$	$\delta(x) = C \cdot \left( \frac{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $\delta(x) = \left( \frac{4 \cdot \Delta \theta \cdot K \cdot \mu \cdot x}{\rho^2 \cdot g \cdot \lambda \cdot \text{sen } \alpha} \right)^{\frac{1}{4}}$
8.3.-Transmisión de calor por condensación en una pared inclinada. Coeficiente de transmisión del calor.	$h = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\Delta \theta \cdot L} \right) \cdot F_1 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right)$	$h = \left( \frac{\mu \cdot \lambda}{\Delta \theta \cdot L} \right) \cdot F_2 \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot L^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda} \right)$	$h = \left( \frac{\mu \cdot \lambda^3 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\Delta \theta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot \lambda}, \frac{g \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{\lambda} \right)$	$h = C \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot L} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $h = 0,943 \cdot \left( \frac{\rho^2 g \cdot \text{sen } \alpha \cdot \lambda \cdot K^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot L} \right)^{\frac{1}{4}}$
9.-Transmisión de calor por ebullición pelicular en una pared vertical.	$h = \frac{K}{H} \cdot F_1 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho) g \cdot H}{\rho \cdot r} \right)$	$h = \frac{K}{H} \cdot F_2 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot H^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot r} \right)$	$h = \left( \frac{\mu^2 \cdot r^3 \cdot (\rho_1 - \rho)^2 \cdot g^2}{\Delta \theta^4} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_3 \left( \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho) g \cdot H}{\rho \cdot r} \right)$	$h = C \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot K^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}}$	(TE) $h = 0,667 \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot K^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot H} \right)^{\frac{1}{4}}$
10.-Transmisión de calor por ebullición pelicular sobre un cilindro horizontal.	$h = \left( \frac{\mu \cdot r}{d \cdot \Delta \theta} \right) \cdot F_1 \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot d^3}{\mu^2}, \frac{K \cdot \Delta \theta}{\mu \cdot r}, \frac{(\rho_1 - \rho) g \cdot d}{\rho \cdot r} \right)$	$h = \frac{K}{d} \cdot F \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot r \cdot d^3}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot K} \right)$	NO PROCEDE LA DISCRIMINACION	NO PROCEDE LA DISCRIMINACION	(TE) $h = 0,58 \cdot \left( \frac{\rho \cdot (\rho_1 - \rho) g \cdot K^3 \cdot r}{\Delta \theta \cdot \mu \cdot d} \right)^{\frac{1}{4}}$
11.-Transferencia de calor por convección forzada en un tubo en flujo de baja velocidad.	$N_{Nu,D} = F_3 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right)$	$N_{Nu,D} = F_1 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L} \right)$	$N_{Nu,D} = F_4 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right)$	$N_{Nu,D} = F_2 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L} \right)$	(E) $N_{Nu,D} = 0,578 \cdot N_{Pr}^{\frac{1}{3}} \cdot \left( N_{Re,D} \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}}$
12.-Transferencia de calor por convección forzada en un tubo con flujo a alta velocidad.	$N_{Nu,D} = f_1 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right)$	La base ampliada es excesiva en este caso, debido a la conversión de energía mecánica en calor. Su uso conduce a un resultado erróneo.	$N_{Nu,D} = f_2 \left( N_{Pr}, N_{Re,D}, \frac{D}{L}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right)$	La base ampliada y discriminada es excesiva en este caso, debido a la conversión de energía mecánica en calor. Su uso conduce a un resultado erróneo.	(TA) $N_{Nu,D} = f \left( N_{Re,D}, N_{Pr}, \frac{u^2}{c \cdot \Delta \theta} \right)$

R E F E R E N C I A S

=====



- [1].- Palacios, J., Análisis dimensional, Espasa-Calpe, Madrid, (1964),  
pg. 84 a 87.
- [2].- " " " " pg. 61 a 63.
- [3].- " " " " pg. 49 y 55.
- [4].- " " " " pg. 153 y 154.
- [5].- " " " " capítulos IV y V.
- [6].- " " " " pg. 46.
- [7].- " " " " pg. 96.
- [8].- " " " " pg. 57 y 58.
- [9].- " " " " pg. 45.
- [10].- " " " " pg. 88.
- [11].- " " " " pg. 63 y 84.
- [12].- " " " " pg. 117.
- [13].- " " " " pg. 70.
- [14].- Schmidt, E. y Beckmann, W., Tech. Mech. und Thermod., 1 , 341-391 ,  
(1930).
- [15].- Palacios, J., Análisis dimensional, Espasa-Calpe, 90-92 , Madrid,  
(1964).
- [16].- Huntley, H.E., Dimensional Analysis, McDonald, London, (1962).
- [17].- Gröber y Erk, S., Transmisión del calor, Selecciones científicas,  
322-324, (1967).
- [18].- Ostrach, S., National Advisory Comm. for Aeronautics, Tech. 2635,  
(1952).
- [19].- Sugawara, S y Michiyoshi, I., Memoirs of the Faculty of Eng. Kyoto  
Univ., 13 , 149-161, (1951).
- [20].- Lorentz, L., Annalen der Physik und Chemie (Wied. Ann.), 13 ,  
582-606, (1939).



- [40].- Bayley, F.J., Proc. Inst. Mech. Engrs., 109 , 361 , (1955).
- [41].- Warner, C.V., y Arpaci, V.S., Inst. J. Heat mass transfer, 11 , 397 , (1967).
- [42].- Gebhart, B., Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 370 , (1971).
- [43].- Rich, B.R., An investigation of heat transfer from an inclined flat plate in free convection, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., 75 , 489-499 , (1953).
- [44].- Michiyoshi, I., Heat transfer from an inclined thin flat plate by natural convection, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 30 , 261-266 , (1964).
- [45].- Vliet, G.C., Natural convection local heat transfer on constant-heat-flux inclined surfaces, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., 91c , 511-516 , (1969).
- [46].- Fujii, T., y Imura, H., Natural convection heat transfer from a plate with arbitrary inclination, Int. J. Heat and Mass Transfer, 15 , 755-767 , (1972).
- [47].- Jakob, M., Free heat convection through enclosed plane gas layers, Trans. ASME, 68 , 189-194 , (1946).
- [48].- Emery, A., y Chu, N.C., Heat transfer across vertical layers, Trans. ASME, 87 , nº1 , 110-116 , (1965).
- [49].- McAdams, W.H., Transmisión de calor, Ed. Castillo, Madrid, 139-140 , (1964).
- [50].- Chapman, A.J., Transmisión del calor, Interciencia, Madrid, 297-298 , (1968).
- [51].- King, W.J., Mech. Eng., 22 , (1) , 1 , (1927).
- [52].- Kreith, F., y Black., W.Z., La transmisión del calor, principios fundamentales, Alhambra, Madrid, 257 , (1969).

- [53].- Parker, J.D., Boogs, J.H., y Blick, E.F., Introduction to fluid mechanics and heat transfer, Addison-Wesley, 282 , (1969).
- [54].- Hermann, R., Wärmeübergang bei freier strömung am waagerechten zylinder in zweiätamigen gasen, V.D.I, Forschungsheff, nº379 , (1936).
- [55].- Senftleben, H., Die wärmeabgabe von körpern verschiedener form in flüssigkeiten und gasen bei freier strömung, Z. angew, Phys. 3, 361-373 , (1951).
- [56].- McAdams, W.H., Heat transmission, 3ª ed , McGraw-Hill, New York, 176, (1954).
- [57].- Mijeev, M.A., y Mijeeva, I.M., Fundamentos de termotransferencia, Ed. Mir, Moscú, 106 , (1979).
- [58].- Chapman, A.J., Transmisión de calor, Interciencia, Madrid, 294-295 , (1968).
- [59].- Nusselt, W., Die oberflächenkondensation des wasserdampfes, Z. V.D.I, 60 , 541-546 , 569-575 , (1916).
- [60].- Willians, W., On the relations of the dimensions of Physical quantities in space, Phil. Mag., 357-398 , (1892).
- [61].- Gebhart, B., Heat transfer, McGraw-Hill, New York, 435 , (1971).
- [62].- Isachenko, V., Osipova, V., y Sukomel, A., Transmisión del calor, Boixareu editores Marcombo, 418 , (1973).
- [63].- Bromley, L.A., Heat transfer in stable film boiling, Chem. Eng. Progr., 46 , 221-227 , (1950).
- [64].- McAdams, W.H., Transmisión del calor, Ed. Castillo, Madrid, 408 , (1964).
- [65].- Chapman, A.J., Transmisión del calor, Interciencia, 322 , (1968).
- [66].- Sieder, E.N., y Tate, G.E., Heat transfer and pressure drop of liquids in tubes, Ind. Eng. Chem., 28 , 1429 , (1936).

- [67].- Hausen, H., Darstellung des wärmeüberganges in rohren durch verallgemeinerte potenzbeziehungen, Z. V.D.I, Beihefte Verfahrenstechnik, nº4 , 91 , (1943).
- [68].- Kraussold, H., Die wärmeübertragung bei zäher flüssigkeiten in rohren, VDI-Forschungsheft, nº351 , (1931)
- [69].- Kraussold, H., Der konvektive wärmeübergang, Technik, Berlin, 3 , 205-257 , (1949).
- [70].- Pohlhausen, K., Z. angew Math. Mech., 1 , 252 , (1921).
- [71].- Elser, K., Der wärmeübergang im rohreninlauf, Allgem. Wärmetech, 3 , 30 , (1952).
- [72].- Kay, J.M., Introducción a la mecánica de fluidos y transferencias de calor, Ed. Marcombo, 149 y 220 , (1964).
- [73].- Chapman, A.J., Heat transfer, McMillan, 189 , (1984).

A P E N D I C E

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA GENERAL DE  
ANALISIS DIMENSIONAL DE PALACIOS

I N D I C E

A.1.-	LOS ENTES DE LA FISICA. SU MEDIDA.....	297
A.1.1.-	Observables en la Física.....	297
A.1.2.-	Magnitudes y cantidades.....	297
A.1.3.-	Criterio de igualdad.....	298
A.1.4.-	Definición de suma.....	298
A.1.5.-	Unidades y medidas.....	299
A.1.6.-	Magnitudes primarias y secundarias.....	300
A.2.-	PRIMER POSTULADO.....	302
A.2.1.-	Naturaleza de las leyes fundamentales.....	302
A.2.2.-	Las ecuaciones de la Física.....	303
A.2.3.-	Constantes características y universales.....	303
A.3.-	SEGUNDO POSTULADO.....	306
A.3.1.-	Las constantes universales.....	306
A.3.2.-	Magnitudes inseparables.....	306
A.3.3.-	Segundo Postulado (enunciado).....	307
A.3.4.-	Sistemas de unidades coherentes.....	307
A.3.5.-	Base de un conjunto de magnitudes.....	310
A.3.6.-	Medidas absolutas y relativas.....	313
A.4.-	EL CONCEPTO DE DIMENSION. APLICACION AL CASO DE LA MECANICA.....	314
A.4.1.-	Fórmulas dimensionales.....	314
A.4.2.-	Dinámica del sólido rígido.....	315
A.4.2.1.-	Magnitudes primarias.....	315
A.4.2.2.-	Ecuaciones fundamentales.....	316
A.4.2.3.-	Sistema dimensional.....	316
A.4.2.4.-	La energía como magnitud primaria.....	318
A.4.3.-	Cambios de base.....	319
A.4.4.-	Factores de conversión.....	320
A.4.5.-	Analogía entre dimensiones y vectores.....	321
A.4.6.-	Bases superabundantes y bases estrictas.....	322
A.4.7.-	Bases mutiladas.....	326

### A.1. LOS ENTES DE LA FISICA.

#### A.1.1.- OBSERVABLES EN LA FISICA.

En Física se opera con entes que se caracterizan por algún efecto observable. La descripción de tal efecto constituye la definición cualitativa o epistémica del ente en cuestión. Es anterior e independiente de toda ley física. Las definiciones epistémicas sirven para saber de qué se habla y para reconocer cada observable siempre que nos encontremos delante de él. Los observables podrán ser comparables o no entre sí.

Se dice que dos observables (A) y (B) son comparables entre sí cuando existe una definición operacional y universal de la razón:

$$\frac{(A)}{(B)} = n ,$$

donde n es un número que indica que (A) es n veces mayor que (B) , esto es:

$$(A) = n.(B) .$$

El adjetivo operacional significa que han de describirse los aparatos en la comparación, así como las operaciones a realizar. El requisito de universalidad exige que la razón hallada sea independiente de la naturaleza de los cuerpos utilizados en la construcción de los aparatos.

Una vez definida la razón entre observables queda definida la igualdad y la suma, pues de

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1 \quad ; \quad \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2 \quad ; \quad \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3$$

se deduce

$$(A_1) = (A_0) \quad \text{si} \quad n_1 = 1$$

$$(A_1) + (A_2) = (A_3) \quad \text{si} \quad n_1 + n_2 = n_3$$

Recíprocamente, si es posible establecer la igualdad y la suma de cantidades, queda definida su razón.

#### A.1.2.- MAGNITUDES Y CANTIDADES.

De un conjunto de observables  $(A_0), (A_1), (A_2), \dots$ , comparables entre sí dos a dos, se dice que son cantidades de una misma magnitud.

La altura de un edificio, la distancia entre dos puntos y la amplitud de las oscilaciones de un oscilador lineal, son cantidades de la magnitud llamada longitud. El día y la duración de las oscilaciones de un péndulo son cantidades



de tiempo. El peso de un cuerpo y el esfuerzo necesario para doblar una barra son cantidades de fuerza, etc.

Las magnitudes son, pues, conceptos abstractos a los que se llega a partir de las cantidades. La distinción entre las diferentes magnitudes es muy necesaria cuando se trata de precisar las ideas, lo cual no es siempre sencillo y evidente.

#### A.1.3.- CRITERIO DE IGUALDAD.

El criterio de igualdad va involucrado con el concepto o definición epistémica de cada magnitud, pues es obvio admitir que una magnitud se manifiesta con igual cuantía en dos casos distintos cuando sus efectos observables son iguales. Se dirá, por ejemplo, que dos cuerpos tienen igual temperatura cuando un termómetro cualquiera, aun con escala arbitraria o sin numerar, señala lo mismo al ser puesto en contacto primero con uno y después con el otro. El criterio de igualdad es intrínseco, es decir, se establece sin necesidad de recurrir a la medida de otras magnitudes. Así, para decidir si dos vehículos marchan con igual velocidad, bastará observar si se conserva constante su distancia, y no será preciso medir ni espacios ni tiempos.

#### A.1.4.- DEFINICION DE SUMA.

La suma, en general, no es inmediata, por lo que es preciso establecerla por definición. La definición de suma será, en general, específica, distinta para cada una de las magnitudes de que se trate. El criterio de igualdad suele ser más fácil de establecer que la definición de suma.

Por ejemplo, si dos vehículos avanzan manteniendo constante su separación, las velocidades son iguales, pero si no sucede así, no podemos decir otra cosa que el que sus velocidades son distintas, pero no podemos saber si una es  $n$  veces superior a la otra; no se puede establecer la suma de velocidades o su producto por un número, sin medir espacios o tiempos o ambas cosas, de modo que la velocidad no es magnitud física medible directamente, aun cuando sea claro el concepto de velocidad (magnitud).

Toda definición de suma ha de incluir un criterio de equivalencia, según el cual, la suma ha de poder ser sustituida por los sumandos con los mismos efectos observables, y recíprocamente los sumandos por la suma.

Veamos algunas definiciones de suma:

a) Suma por acumulación.

Para algunas magnitudes la suma se define por la reunión de los sumandos. Así, la suma de las masas de varios cuerpos se obtiene sin más que reunirlos en el platillo de una balanza, la suma de cargas eléctricas situándolas en un mismo conductor, etc.

Para dar por buena la suma por acumulación es preciso comprobar en cada

caso que se cumplen los requisitos formales de la suma. Ello requiere que exista la correspondiente ley de conservación, que nos asegure que la suma no cambia cualquiera que sea la manera de juntar los cuerpos en que se hallen las cantidades que se trata de sumar. Gracias a dicha ley quedan cumplidas las condiciones de conmutabilidad, uniformidad, asociabilidad y existencia del cero.

b) Suma vectorial.

Existen magnitudes cuyas cantidades, dirigidas y aplicadas en un mismo punto, pueden ser sustituidas por una sola cantidad. La suma en este caso, establece que las magnitudes en cuestión se comportan como vectores, es decir, les es aplicable la regla del polígono y ocurre que, para todos los efectos considerados, la resultante es equivalente al conjunto de las componentes.

c) La temperatura.

La temperatura tiene un carácter especial, pues no ocurre que de la reunión de dos cuerpos resulte una temperatura que pueda tomarse como la suma de las que tenían cada uno por separado, ni se concibe la existencia de dos temperaturas en un mismo punto. De aquí que no sirva ninguno de los criterios anteriores, pero no por eso deja de ser la temperatura una magnitud física, pues el segundo principio permite definir la razón entre dos temperaturas por vía operacional y universal.

#### A.1.5.- UNIDADES Y MEDIDAS.

Elijamos para cada magnitud una cantidad determinada,  $(A_0) = U_A$  y demosle el nombre de unidad. Podemos, a continuación, comparar físicamente las cantidades  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$ ,....., con la cantidad única  $U_A$  :

$$\frac{(A_1)}{U_A} = A_1 \quad ; \quad \frac{(A_2)}{U_A} = A_2 \quad ; \quad \frac{(A_3)}{U_A} = A_3 \quad ; \dots\dots$$

así pues, se ha hecho corresponder a cada cantidad  $(A)$ , de la magnitud en cuestión, un número,  $A$ , que se llama medida de la cantidad  $(A)$  con la unidad  $U_A$ .

Al cambiar la unidad  $U_A$  por otra  $U'_A$ , resultará otra medida de la cantidad  $(A)$  diferente a la anterior:

$$\frac{(A)}{U'_A} = A' \quad ,$$

y se tiene evidentemente:

$$\frac{A}{A'} = \frac{U'_A}{U_A}$$

El cociente de las medidas de una misma cantidad, en unidades diferentes, es igual a la inversa de la razón entre unidades.

Las cantidades constituyen el dato primario, pues existen con anterioridad a las unidades. Estas últimas son elecciones convencionales, mientras que las

cantidades son invariantes con relación a los cambios de unidades, y, en este sentido, pueden decirse de ellas que tienen realidad objetiva.

#### A.1.6.- MAGNITUDES PRIMARIAS Y SECUNDARIAS.

La definición de la razón entre cantidades de la misma magnitud, o la de la suma, ha de establecerse en cada caso particular, y a este respecto cabe distinguir dos tipos de magnitudes. Para algunas magnitudes, que llamaremos magnitudes físicas primarias, dicha definición puede formularse sin necesidad de fijar una unidad para dicha magnitud, y sin que sea preciso tampoco medir otras magnitudes distintas.

Se pueden, sin embargo, establecer otras magnitudes, que llamaremos secundarias, en las que no existe la suma por equivalencia ni se puede medir la razón entre sus cantidades sin recurrir a la medida de otras magnitudes. Ejemplos de magnitudes secundarias son la velocidad, el ímpetu, el trabajo, la frecuencia y todas las constantes características de los cuerpos. Estas magnitudes no requieren definición epistémica, pues su concepto deriva de la fórmula con que se especifican las operaciones que se han de realizar, mediante las medidas de otras magnitudes, para obtener la medida de la magnitud en cuestión. Expresiones tales como:

$$a \equiv \frac{d^2s}{dt^2} \quad ; \quad W \equiv f \cdot s \quad ; \quad \rho \equiv \frac{m}{V} \quad ,$$

han de considerarse como identidades en las que el primer miembro no es sino una expresión abreviada del segundo. Por eso resulta adecuado decir que estas magnitudes lo son por definición, y conviene ponerlo de manifiesto en cada caso.

En la fórmula de definición de las magnitudes secundarias está contenido el criterio de suma, que no se postula, sino que deriva de dicha fórmula.

Podría prescindirse de las magnitudes secundarias reemplazándolas por sus respectivas definiciones, pero conviene conservarlas porque simplifican considerablemente el lenguaje.

De un modo general, si  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , son las medidas de ciertas magnitudes coexistentes en un mismo cuerpo, o en un mismo fenómeno, tales como su volumen, su masa, su distancia a un origen, la fuerza a que está sometido, etc....., se pueden tomar estas medidas como argumento de una función y escribir:

$$y = f ( x_1, x_2, \dots )$$

Si cambiamos las unidades  $u'_1, u'_2, \dots$ , al observar el mismo fenómeno, cambiarán las medidas  $x'_1, x'_2, \dots$ , resultando por consiguiente un valor numérico  $y'$  distinto de,  $y$ . La  $f$  es en principio arbitraria, de modo que puede definirse cualquier magnitud secundaria.

Sería conveniente conservar el signo de identidad en las fórmulas de definición de las magnitudes secundarias, pero en casi todos los libros se sustituye

por el de igualdad, con lo que se confunden con las ecuaciones que sirven para expresar las leyes físicas. Conviene, sin embargo, distinguir claramente entre leyes y definiciones. Las primeras son susceptibles de comprobación experimental; en las segundas no tiene sentido tal comprobación, pues se trata de identidades. Por eso no es correcto, aunque sea frecuente, considerar la ley de Newton como una definición y decir que la fuerza es el producto de la masa por la aceleración.

... para ser superior con respecto a la referencia ... unidades, pues basta la definición de la razón ...

... postulado de la teoría del Análisis dimensional de J. Palacios, ... PUEDEN ESCOGERSE LAS LEYES FUNDAMENTALES PARA CADA RAMA DE LA FÍSICA ... CONSISTAN EN RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE POTENCIAS DETERMINADAS DE LAS CANTIDADES QUE INTERVIENEN EN EL FENÓMENO CONSIDERADO ...

... general, pues, cualquier ley física fundamental puede formularse de la siguiente manera:

$$f(y) = (x_1)^{a_1} \dots (x_n)^{a_n} \quad (A.1)$$

... donde los exponentes  $a_1, \dots, a_n$  son números fijos, independientes de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno.

... Esta afirmación es un postulado basado en hechos, y no la consecuencia de algún principio metafísico.

A.2. PRIMER POSTULADO.

A.2.1.- NATURALEZA DE LAS LEYES FUNDAMENTALES DE LA FISICA.

Toda teoría física se basa en cierto número de leyes fundamentales de las que, por los métodos de la lógica matemática, se deducen las leyes derivadas. Es de notar que la distinción entre una y otra especie de leyes es, hasta cierto punto, convencional, pues hay cierta libertad en la elección de las leyes, independientes entre sí, sobre las que se funda un teoría determinada.

Así, por ejemplo, en la ley fundamental de la Mecánica:

$$f = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} ,$$

una opinión muy extendida es que esta ecuación sirve para precisar el concepto de fuerza, definiéndola como el producto de la masa del cuerpo sobre el que actúa por la aceleración que le imprime. Esta opinión es inadmisibile porque degrada el concepto de fuerza convirtiéndola en magnitud secundaria, y porque la ley de inercia quedaría sin contenido por no afirmar nada que sea cierto o falso.

La manera correcta de enunciar la ley de Newton consiste en comenzar por definir cuantitativamente la masa, la fuerza y la aceleración, como magnitudes primarias las dos primeras y como magnitud secundaria la tercera, pero con definición previa e independiente de esta ley, y luego afirmar que la aceleración de un móvil es directamente proporcional a la fuerza que sobre él actúa y está en razón inversa de su masa. Simbolicamente:

$$(f) \sim (m).(a)$$

donde el signo  $\sim$  significa "proporcional a".

Esta manera de considerar las leyes físicas pone de manifiesto su carácter universal, es decir, el hecho de que pueden ser enunciadas sin hacer referencia a ningún sistema particular de unidades, pues basta la definición de la razón entre cantidades.

El primer postulado de la teoría del Análisis dimensional de J.Palacios, afirma que: " PUEDEN ESCOGERSE LAS LEYES FUNDAMENTALES PARA CADA RAMA DE LA FISICA DE MODO QUE CONSISTAN EN RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE POTENCIAS DETERMINADAS DE LAS CANTIDADES QUE INTERVIENEN EN EL FENOMENO CONSIDERADO ".

De un modo general, pues, cualquier ley física fundamental puede formularse de la siguiente manera:

$$(y) \sim (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n} \tag{A.1}$$

donde los exponentes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son números fijos, independientes de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno.

Esta afirmación es un postulado basado en hechos, y no la consecuencia de algún principio metafísico.

Las leyes derivadas no siempre adoptan la forma (A.1) . Por ejemplo el periodo de oscilación del péndulo simple está dado por la ecuación:

$$T = l^{1/2} \cdot g^{-1/2} \cdot f(\theta) ,$$

donde  $f(\theta)$  es una función no monomía de argumento  $\theta$  .

A.2.2.- LAS ECUACIONES DE LA FISICA.

En los libros de Física que proceden metódicamente, el enunciado verbal de cada ley física va seguido de una ecuación algebraica que se considera como la expresión cabal y completa de dicha ley física. Aun cuando no se diga expresamente, la sustitución del signo de proporcionalidad por el de igualdad indica que se han sustituido las cantidades por sus medidas. Admitiremos, pues, que las ecuaciones físicas relacionan las medidas de las cantidades que en ellas intervienen.

A.2.3.- CONSTANTES CARACTERISTICAS Y CONSTANTES UNIVERSALES.

Al pasar de la relación de proporcionalidad entre cantidades a la ecuación entre medidas, será preciso, en general, introducir un factor de proporcionalidad,  $C$  , con cuyo auxilio se podrá sustituir la expresión

$$(y) \sim (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n}$$

por la ecuación

$$y = C \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{A.2}$$

El valor numérico de  $C$  se obtendrá mediante la fórmula:

$$C = \frac{y}{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}} , \tag{A.3}$$

que exige conocer los exponentes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  y medir en un caso particular  $y, x_1, \dots, x_n$  . El valor obtenido dependerá, en general, de las unidades utilizadas para realizar las medidas anteriores.

La ecuación (A.3) puede considerarse como la fórmula de definición de  $C$ , que adquiere con ello la cualidad de magnitud secundaria.

Al medir la constante de proporcionalidad  $C$  , pueden ocurrir dos casos:

1.- La medida de  $C$  depende de la naturaleza del cuerpo. Se dice entonces que  $C$  es una constante característica, o específica.

Ejemplo:

La ley de Hooke aplicada a un alambre de longitud  $l$  y sección  $a$  , sometido a una fuerza  $f$  , se expresa así:

$$(f) \sim \frac{(a) \cdot (\delta l)}{(l)}$$

y al pasar a la ecuación entre medidas resulta:

$$f = E \frac{a \cdot \delta l}{l}$$

donde E es el módulo de Young, magnitud secundaria definida por la identidad

$$E \equiv \frac{f \cdot l}{a \cdot \delta l}$$

y su medida resulta depender de la naturaleza del alambre y de las unidades que se adopten para medir la longitud, el área y la fuerza.

Por su propia naturaleza las constantes características son ineludibles, porque la ecuación (A.2) no tiene validez general sin la presencia del factor C. Se pueden elegir las unidades de modo que resulte C = 1 para un cuerpo particular, pero será C ≠ 1 cuando se aplique la ecuación a otro cuerpo cualquiera. Por ejemplo, calor específico del agua o densidad del agua igual a 1.

2.- Puede suceder que el valor del factor de proporcionalidad sea independiente de la naturaleza del cuerpo. A toda ecuación fundamental que se conserva invariable numéricamente cuando cambia la naturaleza de los cuerpos con que se opera corresponde una constante universal.

Ejemplos:

a) Constante de la gravitación, G.

Aun cuando no siempre se diga las leyes de la gravitación son dos, a saber:

Los cuerpos se atraen en razón directa de sus masas gravitatorias y en razón inversa del cuadrado de su distancia

$$(f) \sim \frac{(m_g) \cdot (m'_g)}{(d)^2}$$

La masa inercial es proporcional a la masa gravitatoria:

$$(m_g) \sim (m_i).$$

Al pasar de estas expresiones a las respectivas ecuaciones entre medidas resultan sendas constantes universales, que pueden tomar valores diferentes según sean las unidades que se adopten para la distancia, la fuerza y para ambas especies de masas. Eligiendo convenientemente las unidades se pueden hacer igual a 1 algunas de ellas. Por ejemplo, utilizando el sistema cegesimal, la primera vale 1, y la segunda es G :

$$f = \frac{m_g \cdot m'_g}{d^2} \quad ; \quad m_g = G^{1/2} m_i$$

de las que se deduce:

$$f = G \frac{m_i \cdot m'_i}{d^2}$$

siendo G la constante de la gravitación.

La existencia e implicaciones de las constantes de la Física es tema fundamental en el presente trabajo.

b) Equivalente mecánico del calor.

Entre el calor,  $Q$ , absorbido por un sistema en una transformación cíclica, y el trabajo producido,  $W$ , existe la ecuación

$$W = J \cdot Q ,$$

donde  $J$  es el equivalente mecánico del calor, cuyo valor sólo depende de las unidades en que se miden  $W$  y  $Q$ . Tratamos ampliamente sobre esta cuestión en (PARTE I).



### A.3. SEGUNDO POSTULADO.

#### A.3.1.- LAS CONSTANTES UNIVERSALES.

Las constantes universales aparecen en las leyes sin haber sido definidas previamente, ni cualitativa ni cuantitativamente. No son atributos de cada cuerpo, variables de unos a otros, lo cual hace que no sean magnitudes, pues se presentan siempre con igual cuantía. Como únicamente existe un ejemplar de cada una, habrían de ser, si fuesen magnitudes, unidades de sí mismas, y su medida sería siempre el valor 1. No son números fijos, porque su valor depende de las unidades que se adopten para medir las cantidades que concurren con ellas en cada una de las ecuaciones.

Finalmente, su existencia es, en cierto modo, precaria, pues la que hemos llamado constante dinámica no se encuentra en ningún libro de Física; el equivalente mecánico del calor, que ocupaba extensos capítulos en los libros de comienzo de siglo, ha desaparecido totalmente en los libros modernos de Física; las constantes del vacío,  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ , que no se encuentran en los tratados clásicos, empiezan a aparecer en los contemporáneos.

Existe la tendencia a reducir el número de las constantes universales. Lo más sencillo sería eliminar todas ellas, pero como no se dispone de suficientes unidades arbitrarias, cada autor suprime las que menos le agradan y aparecen a diario trabajos en los que, con tal o cual poda de constantes, se pretende dar cierto sentido esotérico a determinadas leyes físicas.

El planteamiento de cualquier problema de Análisis dimensional requiere decidir previamente qué constantes universales han de conservarse y cuáles pueden suprimirse. Es forzoso, por tanto, fijar un criterio que permita averiguar qué constantes universales son imprescindibles y cuáles son superfluas.

#### A.3.2.- MAGNITUDES INSEPARABLES.

Si examinamos la lista de las ecuaciones fundamentales en que intervienen constantes universales, observamos que pueden clasificarse en dos grupos: las que relacionan dos magnitudes y las que relacionan más de dos magnitudes.

a) Constantes que relacionan dos magnitudes.

$$m_g = G^{1/2} \cdot m_i$$

$G \equiv$  Constante de la gravitación.

$$W = J \cdot Q$$

$J \equiv$  Equivalente mecánico del calor.

$$N = N_A \cdot n$$

$N_A \equiv$  Número de Avogadro.

$$\epsilon = \frac{1}{2} K \cdot v$$

$K \equiv$  Constante de Boltzmann.

$$\Delta\epsilon = h \cdot v$$

$h \equiv$  Constante de Planck.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \epsilon_0 \equiv \text{Constante dieléctrica en el vacío.}$$

$$\Delta\epsilon = c^2 \cdot \Delta m_i \quad c \equiv \text{Velocidad de la luz.}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \mu_0 \equiv \text{Permeabilidad magnética en el vacío.}$$

b) Constantes que relacionan más de dos magnitudes.

$$f = C m_i \frac{d^2 s}{dt^2} \quad C \equiv \text{Constante dinámica.}$$

$$d\vec{f} = \gamma I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \quad \gamma \equiv \text{Constante electromagnética.}$$

Entre las constantes del grupo a) destaca el equivalente mecánico del calor  $J$ , que relaciona dos magnitudes, el calor y el trabajo, que, como es sabido, no son funciones de estado. Ambas se refieren a transformaciones, y la ecuación que las liga expresa que si, al final de la transformación, el sistema recobra su estado inicial, el calor absorbido se transforma totalmente en trabajo. Esta ecuación, por consiguiente, expresa que ambas magnitudes, si bien epistémicamente diferentes, pues sus efectos característicos son distintos, pueden transformarse la una en la otra, y el tránsito está regido por un principio de conservación, cuya expresión matemática es la citada ecuación.

Las restantes ecuaciones del grupo a) tienen un rasgo en común: relacionan magnitudes inseparables, es decir, magnitudes tales que la presencia de una de ellas en un objeto lleva consigo la presencia de la otra en el mismo objeto, de tal modo que, a cuantías iguales de la primera corresponden cuantías iguales de la segunda.

Dada la conveniente simplificación que supone suprimir las constantes, procede eliminarlas todas salvo aquellas cuya anulación conduzca a confusión, lo cual sucede con las magnitudes inseparables (coexistentes y proporcionales), ya que, al desaparecer la constante, quedarían confundidas.

#### A.3.3.- SEGUNDO POSTULADO.

" SON INELUDIBLES LAS CONSTANTES UNIVERSALES QUE RELACIONAN DOS MAGNITUDES INSEPARABLES, Y SUPERFLUAS TODAS LAS DEMAS ".

Gracias a este postulado se puede enunciar el teorema de pi de un modo preciso. Su justificación consistirá en probar que, con su auxilio, se obtiene la solución correcta en todos los problemas.

#### A.3.4.- SISTEMAS COHERENTES DE UNIDADES.

Al pasar de las relaciones de proporcionalidad entre cantidades a las ecuaciones entre medidas, debiera especificarse el sistema de unidades adoptado para tal propósito. Pero en la mayoría de los libros de Física, se escriben las

ecuaciones fundamentales y se desarrollan las teorías sin hablar para nada de unidades. Tan sólo en las aplicaciones a problemas prácticos es preciso decir cuáles son las unidades utilizadas.

Las unidades de las magnitudes secundarias quedan impuestas por sus fórmulas de definición, pero hay arbitrariedad completa en la elección de unidades de las magnitudes primarias a condición de conservar en cada ecuación fundamental la correspondiente constante universal. Pero si ésta es superflua, cabe atribuirle un valor numérico fijo, con la consiguiente restricción en la libertad de elección de unidades. Así, en una ecuación de la forma:

$$A = K \cdot B^{\alpha_1} \cdot C^{\alpha_2} \dots$$

se puede dar a la constante  $K$ , si es superflua, el valor 5, por ejemplo.

Entonces, si se realiza un experimento en el que  $B = C = \dots = 1$ , habrá de ser:

$$A = 5, \text{ o sea, } (A) = 5 \cdot U_A$$

lo que prueba que la unidad  $U_A$  no puede ser arbitraria, sino que habrá de ser, precisamente, 5 veces menor que la cantidad  $(A)$  presente en el experimento en cuestión.

Sean  $K_1, K_2, \dots$ , el sistema de coeficientes numéricos elegidos convencionalmente para sustituir las constantes universales superfluas en las ecuaciones fundamentales. Las unidades compatibles con dichos coeficientes forman un sistema coherente con los mismos. Desde luego, lo más sencillo será hacer  $K_1 = K_2 = \dots = 1$ . Se supondrá que es así mientras no se advierta lo contrario.

Toda ecuación fundamental en la que se ha suprimido la respectiva constante universal define una unidad, no una magnitud ni una cantidad, en función de las restantes.

Al escribir las ecuaciones, no es preciso mencionar las unidades porque se sobrentiende que han de utilizarse precisamente sistemas coherentes.

Los sistemas (centímetro, gramo, segundo, dina) y (metro, kilogramo, segundo, newton) son sistemas coherentes con la ecuación:

$$f = m \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{A.4}$$

mediante la cual quedan definidas la dina y el newton, respectivamente, en función de las restantes unidades.

En cambio el sistema (metro, kilogramo, segundo, kilopondio), en el que la nueva unidad de fuerza se define como el peso de un kilogramo de masa inerte, no es coherente con la ecuación anterior, pues como  $1Kp = 9,81 N$ , la ecuación entre medidas se convierte en:

$$f = \frac{1}{9,81} m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2},$$

y aparece el coeficiente parásito,  $\frac{1}{9,81}$ , que procede de no haber usado un sistema coherente con la ecuación (A.4).

Al utilizar sistemas de unidades coherentes desaparecen los coeficientes parásitos.

Está generalizada la opinión de que las leyes físicas definen magnitudes. La ecuación (A.4), por ejemplo, es considerada como la definición operacional de la fuerza, no reparando en que la teoría de la relatividad ha alterado dicha ecuación sin que por ello haya sido preciso modificar la definición de la fuerza como magnitud primaria, pues subsisten inalterados los criterios de igualdad y de suma. Las ecuaciones fundamentales, por tanto, no definen magnitudes; lo que sí sucede es que de cada ecuación se deduce la unidad coherente de una magnitud sin más que imponer la condición de que no aparezca un coeficiente parásito.

Sea, en general, una ecuación que no requiera la presencia de un factor de proporcionalidad:

$$y = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{A.5}$$

Esta ecuación fija la unidad de (y) en cuanto se hayan elegido las unidades de  $(x_1), \dots, (x_n)$ , pues será  $y = 1$  cuando el segundo miembro valga 1. Pero podrá elegirse arbitrariamente la unidad de (y) a condición de que aparezca un factor de proporcionalidad, C :

$$y' = C \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{A.6}$$

cuyo valor, dadas las medidas de  $x_1, \dots, x_n$  dependerá de la unidad arbitraria con que se mida (y).

Como se ve, la introducción de una constante universal superflua equivale a la presencia de un coeficiente parásito, que permite utilizar unidades cualesquiera para la magnitud (y). De la comparación de (A.5) y (A.6), resulta:

$$C = \frac{y'}{y}, \text{ pero como } y = \frac{(y)}{u_y \text{ coherente}}, \quad y' = \frac{(y)}{u_y \text{ arbitraria}}, \text{ es}$$

$$C = \frac{y'}{y} = \frac{u_y \text{ coherente}}{u_y' \text{ arbitraria}}$$

Las constantes universales superfluas son coeficientes parásitos.

Por ejemplo, en el sistema cegesimal la ecuación (A.4) exige que la unidad de fuerza coherente con ella sea la dina. Pero, si en el mismo sistema se quiere medir la fuerza en pondios (peso de un gramo), habremos de introducir la constante dinámica, y será:

$$C = \frac{1 \text{ dina}}{1 \text{ pondio}} = \frac{1}{981}$$

Esto ocurre con la ley de transformación entre el trabajo mecánico y el calor, en el que aparece la constante J, llamada equivalente mecánico del

calor.

$$W = J \cdot Q$$

Esta constante es universal, y superflua de acuerdo con la teoría de Palacios. El trabajo  $W$  y el calor  $Q$  no son magnitudes inseparables, esto es, coexistentes y proporcionales, puesto que se transforman el uno en el otro estando, por tanto, perfectamente "separadas". Es posible pues eliminar  $J$  con una adecuada elección de unidades.

Si damos a  $J$  el valor 1, es  $W = Q$ , de modo que el calor y el trabajo se podrán medir en las mismas unidades.

$$u_W = u_Q = 1 \text{ Julio},$$

esto es, la ecuación  $W = Q$  fija la unidad de  $Q$ , una vez que sea elegida la de  $W$ .

Se puede elegir arbitrariamente la unidad de  $Q$ , a condición de introducir el factor de proporcionalidad  $J$ :

$$\frac{1}{J} = \frac{Q'}{Q} = \frac{u_Q \text{ coherente}}{u'_Q \text{ arbitraria}}, \text{ o sea,}$$

$$J = \frac{Q}{Q'} = \frac{u'_Q \text{ arbitraria}}{u_Q \text{ coherente}}.$$

Tratamos este tema ampliamente en el capítulo I.

Resumiendo, diremos que un sistema de unidades es coherente con un sistema de ecuaciones cuando éstas son satisfechas, en cada caso particular, al sustituir los símbolos por sus respectivas medidas.

A.3.5.- BASE DE UN CONJUNTO DE MAGNITUDES.

Sea un teoría física cuyas ecuaciones fundamentales, de acuerdo con el primer postulado, se expresan mediante relaciones de proporcionalidad entre monomios con exponentes fijos, independientes de la naturaleza de los cuerpos con los que se opera. Al pasar a las ecuaciones entre medidas, aparecerán como factores de proporcionalidad las constantes específicas y las constantes universales y se podrá escribir:

$$X_1^{\epsilon_{11}} \dots X_s^{\epsilon_{1s}} = C_1^{\epsilon_1}$$

.....  
.....

$$X_1^{\epsilon_{v1}} \dots X_s^{\epsilon_{vs}} = C_v^{\epsilon_v}$$

donde los exponentes  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_v$ , serán nulos o iguales a 1 según que la respectiva constante sea superflua o ineludible, cosa que queda determinada sin

ambigüedad por el segundo postulado. Podemos unificar la notación, representando las constantes con los mismos símbolos que las variables, con lo que el sistema fundamental de ecuaciones podrá escribirse así:

$$\begin{aligned} X_1^{\epsilon_{11}} \dots X_n^{\epsilon_{1n}} &= 1 \\ \dots & \\ X_1^{\epsilon_{v1}} \dots X_n^{\epsilon_{vn}} &= 1 \end{aligned} \tag{A.7}$$

En este sistema de ecuaciones se supone que las medidas  $X_1, \dots, X_n$ , han sido obtenidas mediante un sistema de unidades coherente con dichas ecuaciones.

Si consideramos un nuevo sistema de unidades  $U'_1, \dots, U'_n$ , coherente con las ecuaciones (A.7), las nuevas medidas estarán relacionadas con las antiguas mediante las fórmulas:

$$\frac{X_1}{X'_1} = \frac{U'_1}{U_1} = \xi_1, \dots, \frac{X_n}{X'_n} = \frac{U'_n}{U_n} = \xi_n$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (A.7) y considerando que, para que el nuevo sistema sea coherente, deben de desaparecer todos los coeficientes parásitos, han de ser:

$$\begin{aligned} \xi_1^{\epsilon_{11}} \dots \xi_n^{\epsilon_{1n}} &= 1 \\ \dots & \\ \xi_1^{\epsilon_{v1}} \dots \xi_n^{\epsilon_{vn}} &= 1 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Estas son las condiciones que ligan las nuevas unidades con las primitivas cuando pasamos de un sistema de unidades coherente a otro también coherente. Tomando logaritmos, los  $\epsilon_{ij}$  pasan, de ser los exponentes, a ser coeficientes de las incógnitas  $\log \xi_j$ , y en los segundos miembros queda el  $\log 1$  que es cero. Se convierte pues (A.8) en un sistema homogéneo de  $v$  ecuaciones y  $n$  incógnitas.

Si  $h$  es la característica de la matriz formada con los exponentes  $\epsilon_{ij}$ , habrá  $m = n - h$  factores arbitrarios, lo que significa que pueden elegirse arbitrariamente las unidades de  $m$  magnitudes. Cada conjunto de magnitudes cuyas unidades se eligen arbitrariamente forman una base y su número  $m$ , tal que  $m = n - h$ , es la multiplicidad de la base.

En resumen: para formar un sistema de unidades, coherente con un sistema de ecuaciones, pueden elegirse arbitrariamente tantas unidades como indica la diferencia,  $m = n - h$ , entre el número de magnitudes y la característica de la

matriz formada con los exponentes con que dichas magnitudes figuran en las ecuaciones dadas.

Falta considerar ahora las ecuaciones de definición de las magnitudes secundarias. Tales fórmulas pueden ser cualesquiera, pues obedecen tan sólo a razones de utilidad. No cabe, pues, sentar ningún posulado, pero sí se pueden indagar las condiciones que han de cumplir las fórmulas de definición para que permanezcan invariables en los cambios de sistemas coherentes.

Sea una fórmula de definición:

$$y \equiv f (X_1, \dots, X_n) \tag{A.9}$$

Desde luego esta ecuación determina por sí misma la unidad  $U_y$ , en que ha de medirse la magnitud  $y$ , cuando se han fijado las unidades  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ . Otro sistema de unidades,  $U'_1, \dots, U'_n$ , que sea coherente con las ecuaciones fundamentales y con (A.9), habrá de proporcionar medidas que satisfagan la ecuación:

$$y' = f (X'_1, \dots, X'_n) \tag{A.10}$$

La relación entre las unidades nuevas y antiguas, inversa de las medidas, es, según vimos:

$$\frac{y}{y'} = \frac{U'_y}{U_y} = \xi_y \quad ; \quad \frac{X_1}{X'_1} = \frac{U'_1}{U_1} = \xi_1 \quad ; \dots ; \quad \frac{X_n}{X'_n} = \frac{U'_n}{U_n} = \xi_n$$

Despejando  $y, X_1, \dots, X_n$  y sustituyendo en (A.9), resulta:

$$\xi_y y' = f (\xi_1 X'_1, \dots, \xi_n X'_n)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la  $y'$  dada por (A.10), habrá de suceder que:

$$f (\xi_1 X'_1, \dots, \xi_n X'_n) = \xi_y f (X'_1, \dots, X'_n) \quad ,$$

debiendo ser el factor  $\xi_y = \frac{U'_y}{U_y}$  independiente de las medidas  $X'_1, \dots, X'_n$ .

Las únicas fórmulas de definición que admiten sistemas de unidades coherentes son las condicionalmente homogéneas, y las condiciones que han de satisfacer los factores  $\xi_1, \dots, \xi_n$  están impuestas por las ecuaciones (A.8).

Nótese que las ecuaciones fundamentales fijan la multiplicidad de la base, pero no determinan las magnitudes que forman: dicen "cuántas" pero no "cuales". Pueden éstas ser primarias o secundarias, indistintamente, y hasta se pueden incluir en ellas las constantes específicas y las universales. Por eso resulta inadecuado llamar fundamentales a las magnitudes escogidas para formar la base y derivadas a las demás. El uso, sin embargo, ha consagrado esta denominación.

A.3.6.- MEDIDAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS.

En toda medición se compara una cantidad con otra de la misma especie que se adopta como unidad. Cuando esta unidad es arbitraria, la medida se llama relativa, mientras que, cuando forma parte de un sistema coherente, la medida se llama absoluta.

Si, por ejemplo, se miden corrientes eléctricas en un galvanómetro de espejo y, hechas las oportunas correcciones, se expresan los resultados en milímetros de la escala, las medidas serán relativas. Para que una medida sea absoluta es preciso aforar el aparato de manera que se pueda pasar de los milímetros leídos en la escala al valor de la intensidad expresada en unidades coherentes, por ejemplo, en amperios.



A.4. EL CONCEPTO DE DIMENSION. APLICACION AL CASO DE LA MECANICA.

A.4.1.- FORMULAS DIMENSIONALES.

Sea una teoría física cuyas ecuaciones fundamentales cumplen el primer postulado de la teoría de Palacios. Empleando un sistema de unidades coherente con dichas ecuaciones, no habrá coeficientes parásitos, y si, para simplificar la cuestión, se atribuye el valor uno a todas las constantes superfluas, dichas ecuaciones podrán escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_1^{\epsilon_{11}} \dots X_n^{\epsilon_{1n}} &= 1 \\ \dots & \\ X_1^{\epsilon_{v1}} \dots X_n^{\epsilon_{vn}} &= 1 \end{aligned}$$

Entre las X figuran las constantes características y las constantes universales ineludibles, que quedan definidas sin ningún tipo de abigüedad por el segundo postulado. En consecuencia, todos los exponentes  $\epsilon_{ij}$  serán números fijos conocidos.

Si realizamos un cambio de sistema de unidades también coherente con el sistema de ecuaciones, emplearemos los símbolos  $[X_1], \dots, [X_n]$  para designar la razón entre las nuevas unidades y las primitivas:

$$[X_i] \equiv \frac{U'_i}{U_i} = \xi_i$$

Con esta notación las condiciones que han de cumplir los números  $[X_i]$ , serán, según (A.8)

$$\begin{aligned} [X_1]^{\epsilon_{11}} \dots [X_n]^{\epsilon_{1n}} &= 1 \\ \dots & \\ [X_1]^{\epsilon_{v1}} \dots [X_n]^{\epsilon_{vn}} &= 1 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Sean  $X_1, \dots, X_m$  las magnitudes escogidas para formar la base. En el paso de un sistema coherente a otro también coherente serán datos los valores de  $[X_1], \dots, [X_m]$  y las ecuaciones (A.11) permitirán despejar los valores de los números  $[X_r]$  correspondientes a las restantes magnitudes, resultando expresiones monomias tales como:

$$[X_r] = [X_1]^{\alpha_{r1}} \dots [X_m]^{\alpha_{rm}} \tag{A.12}$$

Esta expresión no es otra cosa que la fórmula dimensional de la magnitud

$X_r$  respecto de la base  $X_1, \dots, X_m$ .

El conjunto de los exponentes  $\alpha_{1r}, \dots, \alpha_{mr}$  constituye la dimensión de  $X_r$  con relación a dicha base.

Los símbolos que figuran entre los paréntesis rectos de las fórmulas dimensionales son las razones entre las unidades de dos sistemas coherentes cualesquiera.

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes secundarias se obtienen fácilmente a partir de sus fórmulas de definición con tal de que se cumpla el requisito de ser homogéneas con las condiciones (A.12), esto es, que tengan la forma:

$$y \equiv X_1^{\epsilon_1} \dots X_m^{\epsilon_m} f \left( \frac{X_{m+1}}{X_1^{\alpha_{11}} \dots X_m^{\alpha_{m1}}}, \dots, \frac{X_n}{X_1^{\alpha_{1s}} \dots X_m^{\alpha_{ms}}} \right)$$

donde  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  son los exponentes dimensionales de  $y$ , siendo los monomios

$$\frac{X_{m+1}}{X_1^{\alpha_{11}} \dots X_m^{\alpha_{m1}}}, \dots, \frac{X_n}{X_1^{\alpha_{1s}} \dots X_m^{\alpha_{ms}}}$$

de dimensión nula, donde  $n = m + s$ .

#### A.4.2.- DINAMICA DE LOS SOLIDOS RIGIDOS.

Trataremos, por via de ejemplo, de hallar las fórmula dimensionales de las magnitudes que intervienen en la dinámica Newtoniana del punto material.

##### A.4.2.1.- Magnitudes primarias.

Aparte de las magnitudes espaciales y del tiempo se opera en Mecánica con tres magnitudes primarias: fuerza, masa inercial y masa gravitatoria. Su definición epistémica consistirá en la descripción del efecto observable característico, y para que adquieran el carácter de magnitudes físicas es preciso establecer para cada una la razón entre sus cantidades por vía operatoria y universal, o bien la definición de la suma, según vimos.

Fuerza ( $f$ ) : Ente por cuya virtud se modifica el movimiento de los cuerpos rígidos en una dirección determinada. Se postula que las fuerzas coexistentes en un mismo punto se suman por sí mismas, por la regla del polígono; son vectores.

Las fuerzas producen también deformaciones y este efecto puede tomarse asimismo como definición epistémica.

Masa inercial ( $m_i$ ) : Ente por cuya virtud cada cuerpo requiere una fuerza para que en él se produzca un cambio de movimiento. Se postula que la masa inercial es aditiva por acumulación.

Masa gravitatoria ( $m_g$ ) : Ente en cuya virtud cada cuerpo ejerce acciones atractivas sobre los demás. Se postula que la masa gravitatoria es aditiva por acumulación.

Estas tres magnitudes, juntamente con la longitud,  $s$ , y el tiempo,  $t$ , forman el sistema de magnitudes primarias de la Mecánica. Todas las demás son magnitudes secundarias que se introducen mediante la respectiva fórmula de definición.

#### A.4.2.2.- Ecuaciones fundamentales.

Las cinco magnitudes mecánicas primarias están ligadas por tres ecuaciones fundamentales:

$$f = m_i \frac{d^2 s}{dt^2} \quad ; \quad f = \frac{m_g \cdot m'_g}{d^2} \quad ; \quad m_g = G^{1/2} m_i$$

y, de acuerdo con el segundo postulado, sólo la tercera requiere la presencia de una constante universal. Además esta ecuación permite eliminar  $m_g$  de todas las ecuaciones, y ya no será preciso hablar de masas gravitatorias. Con ésto, sólo quedan cuatro magnitudes primarias y dos ecuaciones fundamentales:

$$f = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad ; \quad f = G \frac{m \cdot m'}{s^2}$$

Cuando se trata de un sistema de cuerpos cuyas acciones gravitatorias mutuas son incomparablemente menores que las ejercidas sobre ellas por la atracción terrestre, bastará tomar en consideración, además del tiempo, de las coordenadas que definan la configuración del sistema y de las fuerzas de otra índole, la masa inercial,  $m$ , de cada cuerpo, y su peso  $W = m \cdot g$ .

Para hallar el factor de proporcionalidad  $G$ , basta hallar experimentalmente la fuerza que se ejerce entre dos masas,  $m$  y  $m'$ , colocadas a una distancia  $s$ , y aplicar la última ecuación fundamental. La medida de  $G$  dependerá de las unidades de fuerza, masa y longitud.

#### A.4.2.3.- Sistema dimensional.

Elegimos como leyes fundamentales las siguientes ecuaciones, que relacionan cinco magnitudes primarias y la constante universal  $G$  :

$$f = m_i \frac{d^2 s}{dt^2} \quad ; \quad f = G \frac{m_i^2}{s^2} \quad ; \quad m_g = G^{1/2} m_i \quad (A.13)$$

Las demás magnitudes que se manejan en la mecánica (velocidad, aceleración, momento, ímpetu, impulso, etc.) son magnitudes secundarias cuya fórmula dimensional se deducirá de la respectiva fórmula de definición en cuanto se conozcan las dimensiones de las magnitudes que figuren en ella.

Por comparación con las ecuaciones (A.7), podemos formar la matriz compuesta por los exponentes:

$$f \cdot t^2 \cdot s^{-1} \cdot m_i^{-1} = 1$$

$$f \cdot s^2 \cdot m_i^{-2} \cdot G^{-1} = 1$$

$$m_g \cdot m_i^{-1} \cdot G^{-\frac{1}{2}} = 1$$

La matriz de los exponentes, quedará de la siguiente forma:

s	$m_i$	t	f	G	$m_g$
-1	-1	2	1	0	0
2	-2	0	1	-1	0
0	-1	0	0	- $\frac{1}{2}$	1

correspondiendo cada fila a los exponentes de las magnitudes primarias que figuran en cada una de las ecuaciones fundamentales.

La característica de la matriz es  $h = 3$ , por tanto habrá,  $m = n - h = 6 - 3 = 3$  magnitudes fundamentales. Podrán escogerse para formar la base tres magnitudes cualesquiera con tal de que sean independientes, es decir, con tal de que no sea nulo el determinante formado por las columnas correspondientes a las magnitudes restantes.

Los únicos determinantes de tercer orden nulos son:

s	t	f	$m_i$	t	G
-1	2	1	-1	2	0
2	0	1	-2	0	-1
0	0	0	-1	0	- $\frac{1}{2}$

por lo que cualquier combinación ternaria formada con las magnitudes dadas puede servir para formar la base, con excepción de  $(m_i, G, m_g)$ , correspondiente a la primera matriz de tercer orden nula, y  $(s, f, m_g)$ , correspondiente a la segunda.

Cabe, todavía, añadir, a las leyes fundamentales, las fórmulas de definición de las magnitudes secundarias. Con ello aumenta el número de ecuaciones, pero también el de variables. La multiplicidad de la base no se altera, puesto que cada vez que se agrega una magnitud secundaria se añade la respectiva fórmula de definición que, evidentemente, no es consecuencia de las escritas anteriormente. Es decir, cada vez que añadimos una fórmula de definición aumentamos  $n \rightarrow n+1$ , pero la característica de la matriz también aumenta en una unidad  $h \rightarrow h+1$ , y por tanto, el número de magnitudes que se pueden elegir arbitrariamente no se altera, ya que:

$$m = (n+1) - (h+1) = n - h,$$

como teníamos anteriormente. (Hacemos uso de ello en los sucesivos sistemas para la obtención de las bases dimensionales en PARTE I).

Las posibles ternas que se pueden formar con las seis magnitudes son las siguientes:

$$\begin{array}{cccc}
 (s, t, m_i) & ; & (s, t, m_g) & ; & (s, t, G) & ; & (s, t, f) \\
 (s, m_i, m_g) & ; & (s, m_i, f) & ; & (s, m_g, G) & ; & (s, m_g, f) \\
 (s, G, f) & ; & (s, m_i, G) & ; & (t, m_i, G) & ; & (t, m_i, f) \\
 (t, m_g, m_i) & ; & (t, m_g, G) & ; & (t, m_g, f) & ; & (t, G, f) \\
 (m_i, m_g, G) & ; & (m_i, m_g, f) & ; & (m_i, G, f) & ; & (m_g, G, f)
 \end{array}$$

de las cuales  $(m_i, G, m_g)$  y  $(s, f, m_g)$ , no son correctas por lo anteriormente expuesto.

Como se ve, lo que fija la Teoría es el número de magnitudes fundamentales, no cuáles sean estas. El conjunto de magnitudes físicas que formen la base de la Mecánica puede ser muy variado, con las pocas limitaciones que hemos visto. Teóricamente no hay razón para preferir unas u otras magnitudes para tomarlas como fundamentales. Existe, solamente, un criterio de índole práctico, consistente en escoger aquellas que ofrezcan una mayor facilidad para construir los patrones, realizar las contrastaciones, etc.

Se suele adoptar en Mecánica la base  $(s, m_i, t)$ . Se ha convenido en sustituir, para las magnitudes fundamentales, los símbolos  $[s]$ ,  $[m_i]$  y  $[t]$ , que representan las dimensiones, por las letras L, M, T, respectivamente. Con estos convenios, las ecuaciones (A.13) conducen a:

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \cdot M^{-1} \cdot T^2 \cdot [f] &= 1 \\
 L^2 \cdot M^{-2} \cdot [f] \cdot [G]^{-1} &= 1 \\
 M^{-1} \cdot [G]^{-1/2} \cdot [m_g] &= 1
 \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$[f] = L \cdot M \cdot T^{-2} \quad ; \quad [G] = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \quad ; \quad [m_g] = L^{3/2} \cdot M^{1/2} \cdot T^{-1}$$

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes secundarias se obtienen inmediatamente a partir de sus fórmulas de definición. Por ejemplo:

VELOCIDAD	$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{s}}{dt}$	;	$[v] = L \cdot T^{-1}$
ACELERACION	$\vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$	;	$[a] = L \cdot T^{-2}$
TRABAJO	$W \equiv \vec{f} \cdot \vec{s}$	;	$[W] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$

#### A.4.2.4.- La energía como magnitud primaria.

En la mecánica newtoniana la ecuación:

$$\vec{f} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) ,$$



es consecuencia de la ecuación fundamental  $f = m \frac{d^2s}{dt^2}$ , por lo que el incremento experimentado por la energía cinética vale:

$$\delta E_{cin} = \vec{f} \cdot \vec{s} = W$$

Por otra parte, en los campos conservativos, cabe definir en cada punto otra magnitud secundaria, el potencial, mediante la fórmula:

$$dV = - \frac{1}{2} \sum f_i \cdot dx_i, \quad i = 1, 2, 3$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son las componentes, con relación a los ejes  $x_1, x_2, x_3$  de la fuerza, que actúa sobre la masa  $m$  colocada en el punto considerado. Integrando esta ecuación a lo largo de una curva cualquiera que vaya desde el punto 1 al punto 2, resulta

$$(V_1 - V_2) \cdot m = W,$$

y está indicado el definir una nueva magnitud, la energía potencial, mediante la fórmula:

$$E_{pot} = V \cdot m$$

con lo cual será:

$$-\delta E_{pot} = W$$

que indica que el trabajo es igual a la disminución de la energía potencial.

Hasta aquí, ambas formas de energía, la cinética y la potencial, aparecen como magnitudes secundarias, con sendas fórmulas de definición, y ligadas por una ley:

$$\delta E_{cin} = -\delta E_{pot},$$

que expresa la posible transformación de una en otra.

La energía adopta el rango de magnitud física primaria gracias a un principio de conservación merced al cual una cuantía dada de energía puede adoptar diversas formas (mecánica, térmica, eléctrica, etc.) que son equivalentes en el sentido de que con todas ellas puede obtenerse el mismo trabajo, es decir, levantar un peso hasta la misma altura.

Epistémicamente, la energía se definirá como el ente capaz de realizar trabajo, y el principio de conservación permite decir que una energía es equivalente a la suma de otras dos cuando con la primera se puede levantar un peso hasta la misma altura que con las otras dos. Nótese que para definir la suma de energías no hay necesidad de hablar de unidades y, por eso, la energía es una magnitud primaria.

A.4.3.- CAMBIOS DE BASE.

Sea  $[x] = M_1^{\alpha_1} \dots M_m^{\alpha_m}$  (A.14), la fórmula dimensional de la magnitud  $x$  respecto de la base  $(M_1, \dots, M_m)$ .



Se trata de averiguar su fórmula dimensional respecto de otra base  $(M'_1, \dots, M'_m)$ , en la que pueden figurar magnitudes cualesquiera, primarias o secundarias. Si las fórmulas dimensionales de las antiguas magnitudes básicas con relación a las nuevas son:

$$\begin{aligned}
 [M'_1] &= [M_1]^{\epsilon_{11}} \dots [M_m]^{\epsilon_{1m}} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 [M'_m] &= [M_1]^{\epsilon_{m1}} \dots [M_m]^{\epsilon_{mm}}
 \end{aligned}$$

bastará sustituir en (A.14) para obtener:

$$[x] = [M'_1]^{\alpha'_1} \dots [M'_m]^{\alpha'_m}$$

y los nuevos exponentes dimensionales valdrán:

$$\begin{aligned}
 \alpha'_1 &= \epsilon_{11} \alpha_1 + \dots + \epsilon_{m1} \alpha_m \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 \alpha'_m &= \epsilon_{1m} \alpha_1 + \dots + \epsilon_{mm} \alpha_m
 \end{aligned}
 \tag{A.15}$$

A.4.4.- FACTORES DE CONVERSION.

Gracias a la interpretación de las fórmulas dimensionales dada anteriormente, resulta muy sencillo averiguar en qué se convierte la unidad de cualquier magnitud cuando se alteran de cualquier manera las unidades fundamentales o el valor atribuido a una constante universal.

Sea, por ejemplo, una magnitud,  $x$ , con la siguiente fórmula dimensional:

$$[x] = L^\lambda \cdot M^\mu \cdot T^\tau$$

Si  $U_1, U_m, U_t$  y  $U'_1, U'_m, U'_t$  son respectivamente, las unidades fundamentales en el sistema primitivo y en el nuevo, será:

$$\left[ \frac{U'_x}{U_x} \right] = \left[ \frac{U'_1}{U_1} \right]^\lambda \left[ \frac{U'_m}{U_m} \right]^\mu \left[ \frac{U'_t}{U_t} \right]^\tau, \tag{A.16}$$

con lo que queda resuelto el problema.

Por su peculiar manera de ser, las constantes universales carecen de unidad propia, por lo que, en lugar de razón entre unidades habrá que considerar la razón inversa de las medidas. Así, de:

$$[c] = L^\lambda \cdot M^\mu \cdot T^\tau$$

se deduce:

(\*) H. San Juan, *Rev. Acad. Cienc. Exact. Fis. Mat. Madrid*, 1954, 28, 1, 1-10.

$$\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ U_1 \end{bmatrix}^\lambda \begin{bmatrix} U'_m \\ U_m \end{bmatrix}^\mu \begin{bmatrix} U'_t \\ U_t \end{bmatrix}^\tau$$

La ecuación (A.16) justifica el llamado cálculo con unidades, que sirve para averiguar cómo se alteran las unidades derivadas cuando cambian las unidades básicas, pero es preciso tener en cuenta que dicho cálculo sólo puede utilizarse cuando ambos sistemas son coherentes con un mismo sistema de ecuaciones fundamentales.

Los siguientes ejemplos servirán para aclarar lo anteriormente expuesto.

A) Sabiendo que en el sistema cegesimal la constante de la gravitación universal vale  $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$  averiguar su valor en el sistema (m, Kg, s).

$$[G] = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$\begin{bmatrix} G' \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ cm} \\ 1 \text{ m} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \text{ g} \\ 1 \text{ Kg} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \text{ s} \\ 1 \text{ s} \end{bmatrix}^{-2} = 10^{-3}$$

$$G' = 10^{-3} \cdot G = 6,67 \cdot 10^{-11}$$

B) Averiguar cuál ha de ser la unidad de tiempo para que, conservando el centímetro y el gramo, adquiera la constante de gravitación el valor 1 .

$$\frac{1}{6,67 \cdot 10^{-8}} = \left[ \frac{1 \text{ s}}{U'_t} \right]^{-2} ; \quad U'_t = \frac{10^4}{6,67^{1/2}} \text{ segundos}$$

#### A.4.5.- ANALOGIA ENTRE DIMENSIONES Y VECTORES.

El concepto de dimensión como ente individual resulta muy claro gracias a que R.San Juan (\*) ha puesto de manifiesto que entre la dimensión de una magnitud y sus exponentes dimensionales respecto de una base determinada, existe la misma relación que entre un vector y sus componentes respecto de un sistema de ejes coordenados, relación formal que se llama isomorfismo.

Se definen los vectores en Física como magnitudes de tal naturaleza que, previa la adopción de un sistema de ejes coordenados, y de sendas escalas en los mismos, pueden representarse por tres números  $x_1, x_2, x_3$ , que se denominan componentes del vector, con la condición de que, si se aplica un cambio de ejes, las nuevas componentes estén ligadas con las primitivas por ecuaciones lineales:

$$x'_i = \epsilon_{1i} x_1 + \epsilon_{2i} x_2 + \epsilon_{3i} x_3 \quad (\text{A.17})$$

Basta generalizar esta definición a un espacio de  $m$  dimensiones, comparar (A.17) con (A.15), para ver que existe una analogía formal completa, o isomorfismo, de tal modo que a los exponentes dimensionales,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , de la magnitud  $x$  con relación a la base  $(M_1, \dots, M_m)$  corresponden las componentes de un vector en un espacio de  $m$  dimensiones.

(\*) R. San Juan : Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebricos, Rev. Acad. Cienc., de Madrid, t.39.



Así como existen los vectores con independencia del sistema particular de ejes elegidos para su representación, así también podemos imaginar que a toda magnitud física corresponde una dimensión, que existe con independencia de la base que se adopte; pero no, y esto es conceptualmente muy importante, con independencia de las leyes fundamentales de la teoría.

Los exponentes dimensionales hacen las veces de componentes de la dimensión considerada como vector, y varían al cambiar la base. Así pues, la existencia de tales vectores dimensión no es debida a su propia naturaleza básica, como propiedad intrínseca de la magnitud física de que se trate, sino que, por el contrario, emana de la existencia de las leyes. Además, el que el vector dimensión de una magnitud sea uno determinado, procede de la forma que tengan las leyes, no de la naturaleza propia de la magnitud.

El espacio vectorial de las magnitudes es un espacio afín: en él tiene significado la composición y descomposición de vectores, suma y producto por un número. No es un espacio métrico; carecen de significado el módulo del vector, producto escalar, ángulo, métrica, etc. No es ni siquiera un espacio completo con infinitos puntos o vectores de posición, pues el número de leyes es finito, y las componentes de los vectores-dimensión, que proceden de los exponentes de las leyes, son números enteros, o cocientes, en general sencillos, de números enteros.

A.4.6.- BASES SUPERABUNDANTES Y BASES ESTRICTAS.

Se ha visto que, cuando se toman en consideración todas las magnitudes que intervienen en una teoría, la multiplicidad de la base queda determinada por el sistema de ecuaciones fundamentales. Pero suele suceder que, en determinados fenómenos, no entren en juego todas las magnitudes de la teoría, y la referida base puede ser excesiva. Esta cuestión es de mucho interés para nuestro trabajo.

Sean varias magnitudes,  $x_1, \dots, x_n$ , cuyas fórmulas dimensionales con relación a cierta base  $(M_1, \dots, M_m)$  son:

$$[x_r] = [M_1]^{\alpha_{r1}} \dots [M_m]^{\alpha_{rm}} \quad ; \quad r = 1, \dots, n \quad ;$$

se trata de saber si dicha base es superabundante y, en caso afirmativo, de averiguar cómo ha de ser la base estricta.

Traducido este problema al lenguaje vectorial se enuncia así: Dados varios vectores, cuyas componentes con relación a determinada base  $m$ -dimensional son  $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nm})$ , averiguar si es posible utilizar para su representación una base menor, y la manera de obtenerla.

La respuesta es la siguiente: El número de vectores (o magnitudes) que se requieren para formar una base estricta es igual a la característica,  $h$ , de la matriz formada con las componentes (o con los exponentes dimensionales) en otra

base cualquiera.

Como vectores (o magnitudes) de la nueva base pueden tomarse  $h$  cualesquiera entre los dados, con tal de que sean linealmente independientes; han de ser tales que la ecuación

$$\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_h x_h = 0$$

sólo admita la solución trivial  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_h = 0$ , lo cual equivale a decir que la característica de la matriz formada por sus componentes (o exponentes dimensionales) ha de valer  $h$ . De aquí se deduce la siguiente regla:

Para formar una base estricta se forma la matriz de los exponentes dimensionales con respecto a otra base cualquiera:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

y entre los menores no nulos se seleccionan los de mayor rango. A cada uno de ellos corresponde una base estricta, formada por las magnitudes cuyos exponentes dimensionales figuren en él.

Como ejemplo consideremos la rotación de un sólido rígido sometido a un par elástico y con amortiguamiento proporcional a la velocidad angular; las magnitudes que intervienen y sus fórmulas dimensionales con relación a la base (L, M, T) son:

Amplitud angular:	$[\theta] = L^0 \cdot M^0 \cdot T^0$	
Momento de Inercia:	$[I] = L^2 \cdot M \cdot T^0$	
Periodo:	$[t] = L^0 \cdot M^0 \cdot T$	(A.18)
Coeficiente de rozamiento:	$[a] = L^2 \cdot M \cdot T^{-1}$	
Par elástico:	$[K] = L^2 \cdot M \cdot T^{-2}$	

y la matriz de los exponentes dimensionales es:

	$\theta$	$I$	$t$	$a$	$K$	
L	0	2	0	2	2	
M	0	1	0	1	1	(A.19)
T	0	0	1	-1	-2	

En ella son nulos todos los menores de tercer orden, y no los de segundo, por lo que  $h = 2$ , y las bases estrictas constarán de dos magnitudes.

En definitiva, hemos visto que la base (L, M, T), para el problema considerado, es superabundante. No es imprescindible una base tridimensional en este caso particular. Las fórmulas dimensionales que se relacionan en (A.18) no son incorrectas, pero el número de magnitudes que forman la base dimensional es excesivo, resultando innecesaria la introducción de tres dimensiones básicas.

Veamos ésto qué significa. La dimensión de una magnitud es la relación entre dos unidades de dicha magnitud. El que una magnitud se tome como fundamental, por lo que su dimensión formará parte de la base dimensional, significa que la elección de unidades es arbitraria. En Mecánica, en general, se pueden elegir arbitrariamente las unidades de longitud, masa y tiempo, por lo que la base es (L, M, T). Pero en nuestro caso basta con fijar dos unidades para que queden determinadas las demás. El problema es pues, en realidad, bidimensional.

Sucede algo semejante al caso del movimiento de un proyectil, que es aparentemente tridimensional, pero que, como transcurre en el plano formado por la velocidad inicial y la gravedad, es en realidad bidimensional, y basta con tomar la velocidad inicial contenida en el plano YZ para que se trabaje sólo con esas dos coordenadas. En nuestro caso los ejes no son los espaciales X, Y, Z, sino que, con la analogía de Palacios entre dimensiones y vectores, los ejes corresponden a las magnitudes fundamentales, los unitarios en los ejes son las dimensiones de la base, y las dimensiones derivadas se representan mediante vectores cuyas componentes son los exponentes de las dimensiones respectivas. En la fig.A.1 se representan las dimensiones de las magnitudes que intervienen en nuestro problema. Obsérvese que todas las dimensiones están en un mismo plano, lo cual corresponde analíticamente a que la característica de la matriz (A.19) sea  $h = 2$ .

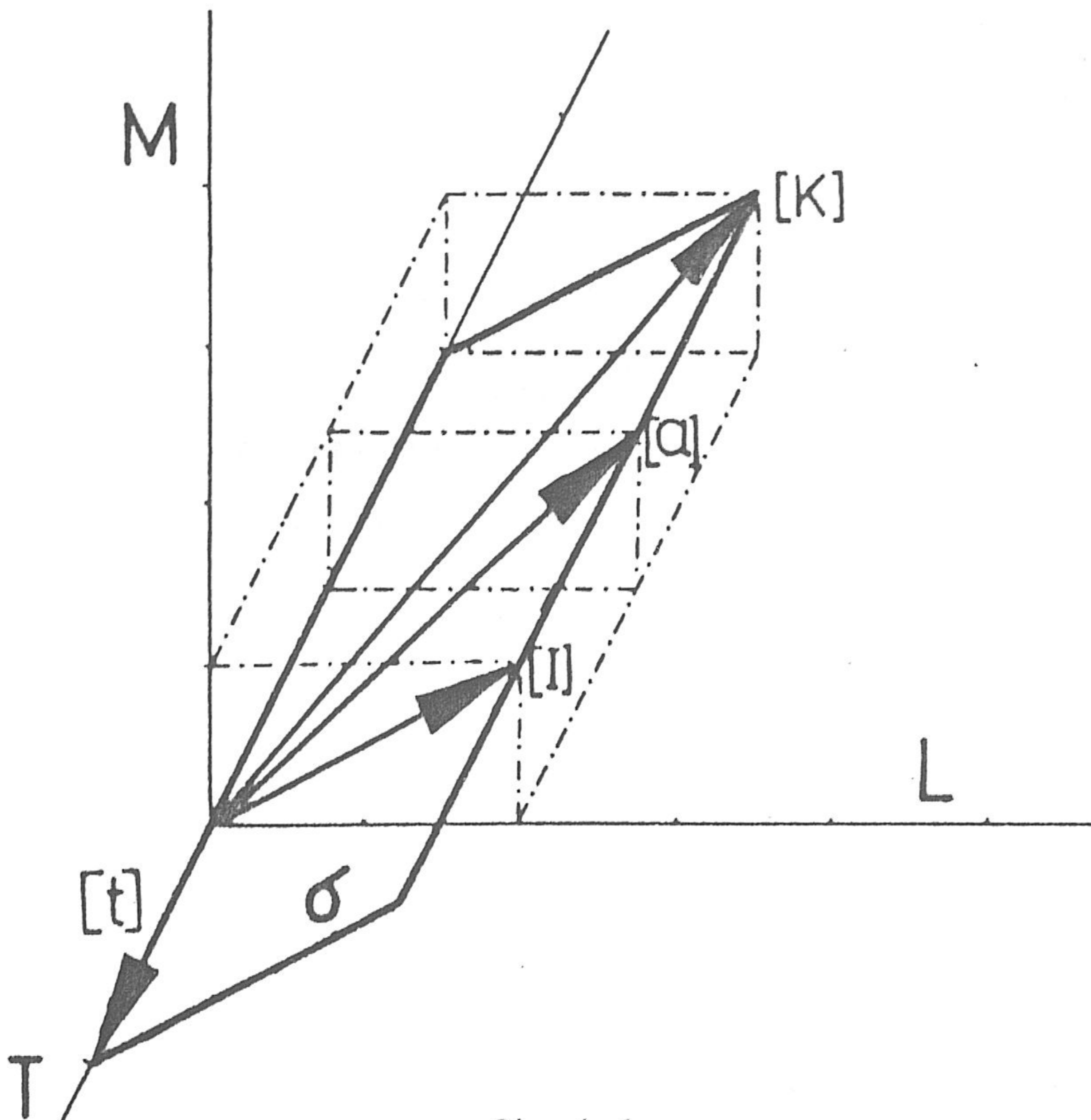


fig.A.1

Como las magnitudes  $I, t, a, K$ , son dimensionalmente independientes dos a dos, con una pareja cualquiera puede formarse una base estricta. Así, por ejemplo, tomando como base la pareja  $(I, a)$  y designando por  $[I] = I$  y  $[a] = A$ , las fórmulas dimensionales de las restantes magnitudes son:

$$[\theta] = I^0 \cdot A^0 ; [t] = I \cdot A^{-1} ; [K] = I^{-1} \cdot A^2 \quad (\text{A.20})$$

lo cual significa que el cambio o elección de unidades de  $I$  y  $a$  es arbitrario, mientras que las unidades restantes vienen impuestas por las expresiones (A.20). En la fig.A.2 se da la representación vectorial de las magnitudes anteriores en la base  $(I, A)$ . Ahora el plano del papel es el plano  $\sigma$  de la fig.A.1 .

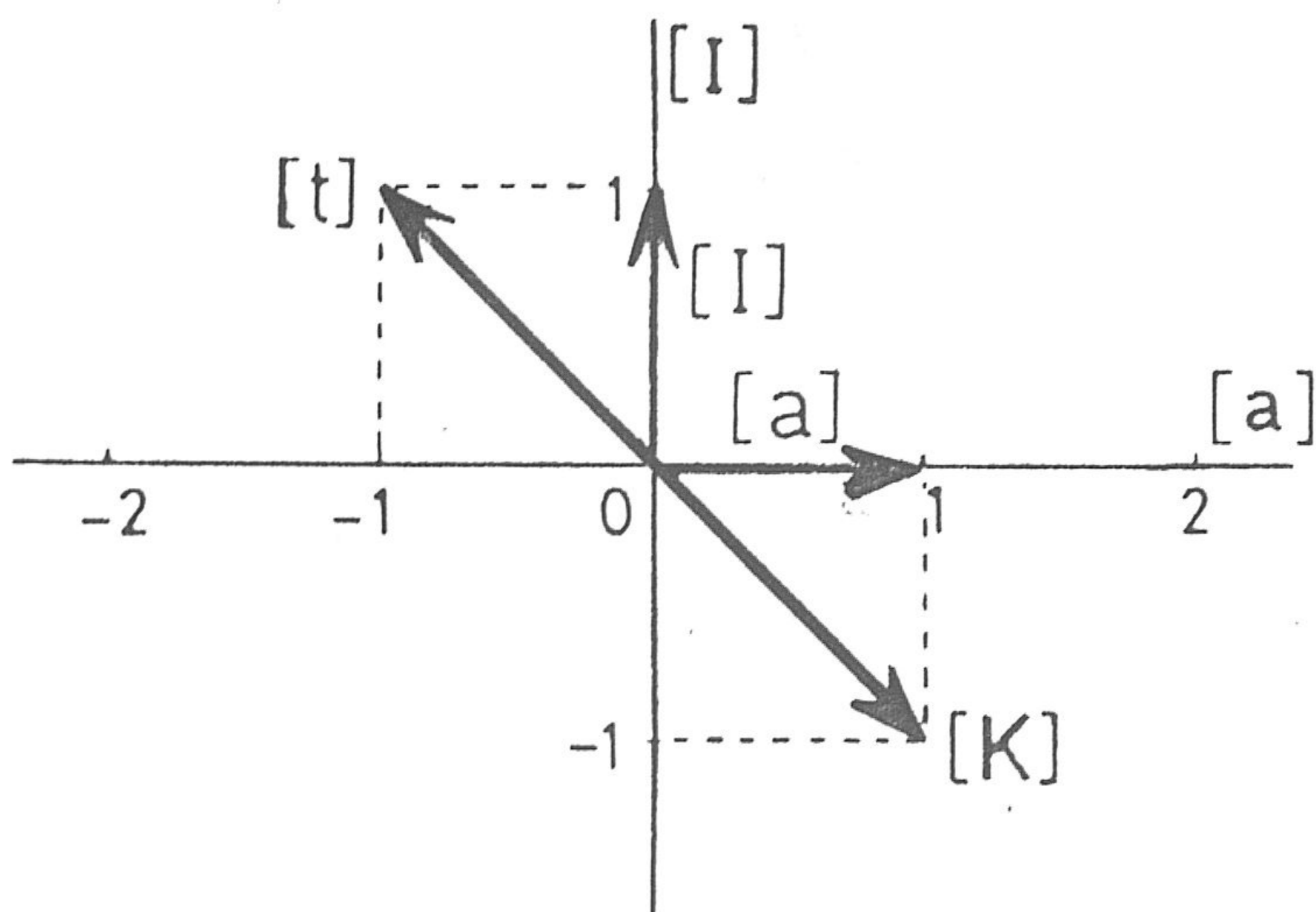


fig.A.2

La ortogonalidad de los ejes tiene sólo significado gráfico, ya que el espacio vectorial de las dimensiones no tiene definida una métrica. No tiene sentido el módulo o el ángulo entre los vectores. Se trata de un plano afín.

Otra posible base estricta es la formada por la pareja  $[I] = I$ ,  $[t] = T$  respecto de la cual las fórmulas dimensionales son:

$$[\theta] = I^0 \cdot T^0 ; [a] = I \cdot T^{-1} ; [K] = I \cdot T^{-2}$$

En la fig.A.3 se representan vectorialmente las magnitudes  $[\theta], [a], [K]$ , en el subespacio  $\sigma$ , en función de la base vectorial  $(I, T)$ .

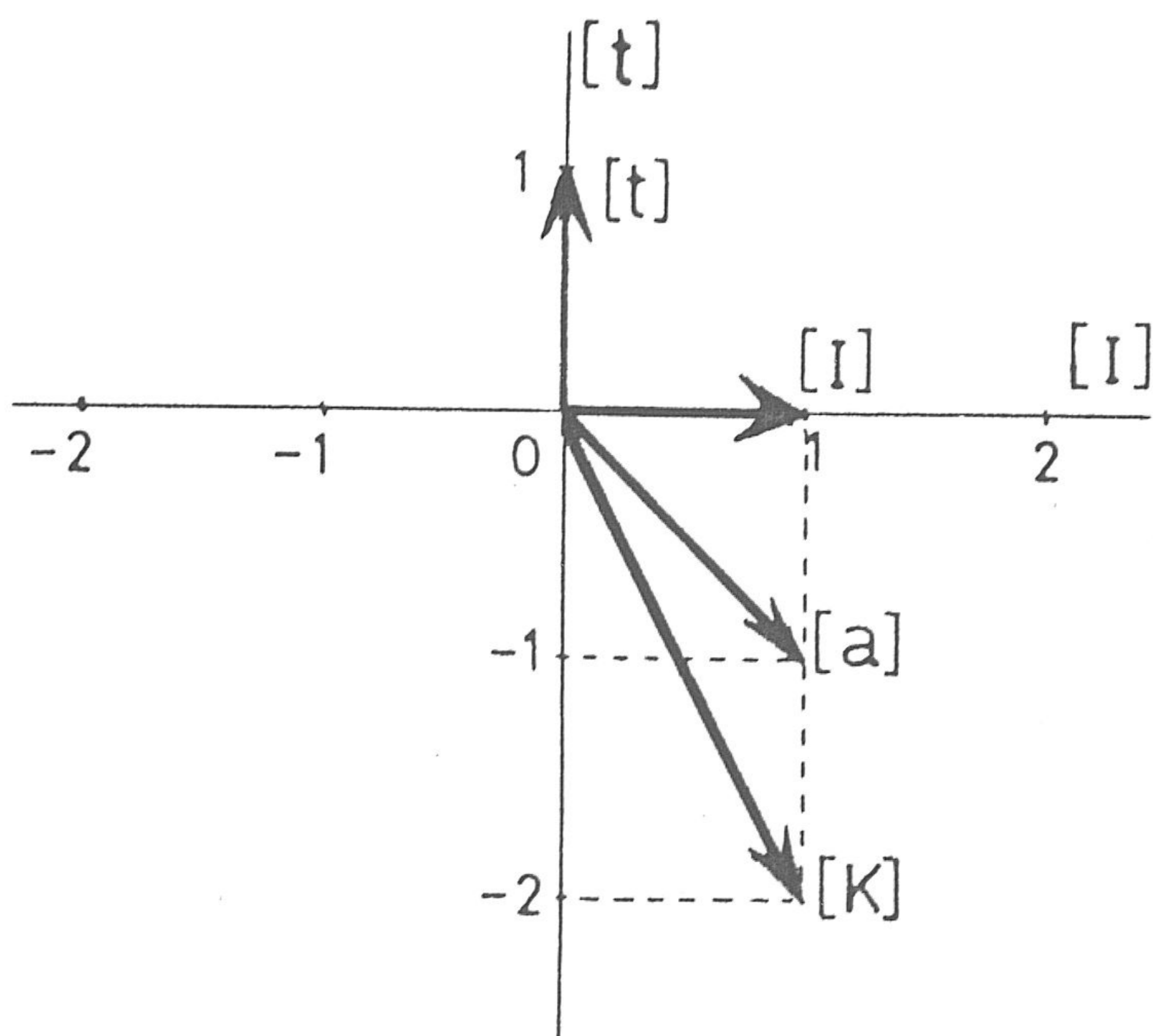


fig.A.3

A.4.7.- BASES MUTILADAS.

La eliminación de algunas de las constantes universales ineludibles (o específicas) en las ecuaciones fundamentales lleva consigo la reducción en una unidad de la multiplicidad de la base, con lo que todo el sistema dimensional resulta alterado. En la analogía entre dimensiones y vectores, esto equivale a que en un espacio vectorial sólo consideráramos, de cada vector, su proyección sobre el subespacio que resulta de prescindir de una dimensión. Al mutilar la base puede suceder que dos magnitudes, que tenían distinta dimensión en la base completa, aparezcan como equidimensionales en la mutilada, pues bastará que los correspondientes vectores tengan igual proyección en el subespacio restante.

Consideremos, como ejemplo, la mecánica newtoniana, cuya base dimensional usual ha sido deducida en A.4.2.3. Si en dicha teoría se suprime la constante de la gravitación, las ecuaciones fundamentales de la dinámica del punto material se convierten en:

$$f = m_i \frac{d^2 s}{dt^2} \quad ; \quad f = \frac{m_i^2}{s^2} \quad ; \quad m_g = m_i$$

Para deducir la multiplicidad de la nueva base dimensional, hemos de calcular la característica de la matriz compuesta por los exponentes dimensionales de las distintas magnitudes en cada una de las ecuaciones, para lo cual, escribimos las ecuaciones fundamentales de la siguiente forma:

$$f \cdot t^2 \cdot s^{-1} \cdot m_i^{-1} = 1$$

$$f \cdot s^2 \cdot m_i^{-2} = 1$$

$$m_g \cdot m_i^{-1} = 1$$

y la matriz de los exponentes dimensionales es:

s	$m_i$	t	f	$m_g$
-1	-1	2	1	0
2	-2	0	1	0
0	-1	0	0	1

La característica de la matriz es  $h = 3$ , por tanto habrá,  $m = n-h = 5-3 = 2$  magnitudes fundamentales, es decir, la multiplicidad de la base es 2, y podrán escogerse para formar la base dos magnitudes cualesquiera con tal de que sean independientes, o sea, con tal de que no sea nulo el determinante formado por las columnas correspondientes a las magnitudes restantes. Adoptando, por ejemplo, la base (L,T), de la homogeneidad de las ecuaciones fundamentales se obtiene:

$$[f]' = [m_i]' \cdot L \cdot T^{-2}$$

$$[f]' = [m_i]'^2 \cdot L^{-2}$$

$$[m_g]' = [m_i]'$$

y despejando las dimensiones de las magnitudes derivadas, que señalamos con (') en la nueva base, resulta:

$$[m_i]' = [m_g]' = L^3 \cdot T^{-2}$$

$$[f]' = L^4 \cdot T^{-4} \tag{A.21}$$

$$[G]' = L^0 \cdot T^0$$

Evidentemente la suprimida constante  $G$  queda con dimensión nula. Las mismas fórmulas dimensionales se hubieran obtenido si, en lugar de hacer  $G = 1$ , se hubiera impuesto a dicha constante un valor numérico cualquiera, a condición de que permaneciese constante para todo cambio de unidades. Se ve que las magnitudes  $m_i$  y  $m_g$ , que tenían distinta dimensión en la base completa, resultan ser equidimensionales en la mutilada.

En la base primitiva, generalmente utilizada en la mecánica, (L, M,T), las magnitudes tienen las siguientes dimensiones:

$$[f] = L \cdot M \cdot T^{-2} \quad ; \quad [m_i] = M \tag{A.22}$$

$$[G] = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \quad ; \quad [m_g] = L^{3/2} \cdot M^{1/2} \cdot T^{-1}$$

Su representación vectorial en el espacio de las dimensiones (L, M, T) viene dada por la figura A.4:

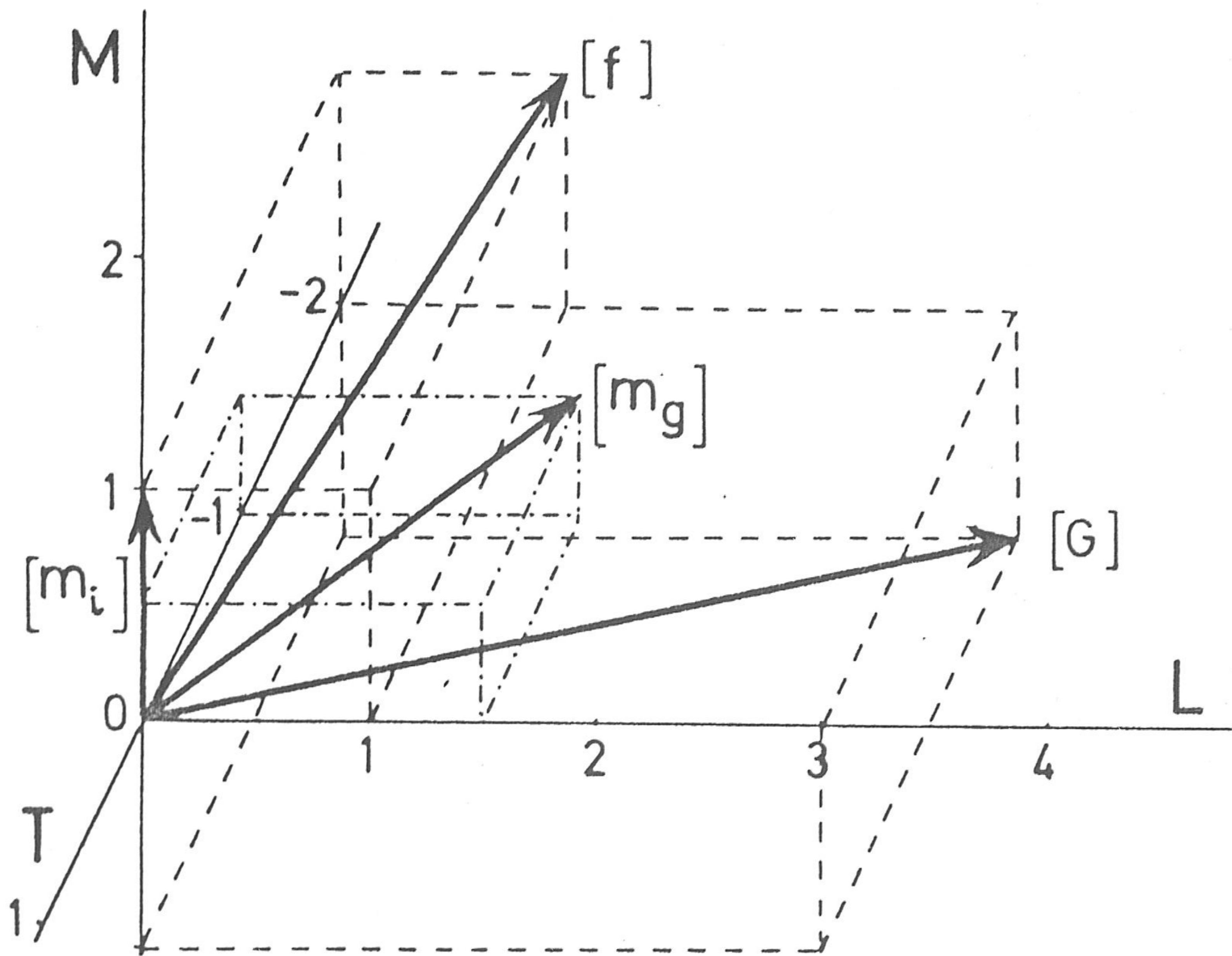


fig. A.4

Si suprimimos la constante universal  $G$ , la multiplicidad de la base disminuye en una unidad. Si adoptamos como nueva base la formada por  $(L, T)$ , las nuevas dimensiones de las demás magnitudes vienen dadas por (A.21). Este proceso también afecta a las dimensiones de otras magnitudes secundarias y primarias. Para hallar las dimensiones en la base mutilada  $(L, T)$ , se realiza un cambio de base a partir de  $(L, M, T)$ , para lo cual, en las dimensiones usuales (A.22), se anula la dimensión de  $G$ :

$$[G] = 1 = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$$

lo que hace que una de ellas ya no sea fundamental; como era  $[m_i] = M$  resulta:

$$1 = L^3 \cdot [m_i]^{-1} \cdot T^{-2}$$

de donde,

$$[m_i]' = L^3 \cdot T^{-2} \quad ; \quad (A.23)$$

sustituyendo (A.23) en el sistema (A.22) resulta el (A.21) : Del mismo modo, para otras magnitudes, como, por ejemplo, el trabajo, sería:

$$[W]' = L^2 \cdot [m_i]' \cdot T^{-2} = L^2 \cdot L^3 \cdot T^{-2} \cdot T^{-2} = L^5 \cdot T^{-4} \quad ;$$

para la densidad:

$$[\rho]' = [m_i]' \cdot L^{-3} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^{-3} = T^{-2}$$

Las dimensiones correspondientes a magnitudes cinemáticas no sufrirán cambio

alguno, pues en ellas no intervienen ni  $m_i$  ni  $m_g$  :

$$[v]' = L \cdot T^{-1} \quad ; \quad [a]' = L \cdot T^{-2}$$

para la intensidad del campo gravitatorio es:

$$[g]' = [G] \frac{[m_i]'}{[r]'^2} = \frac{[m_i]'}{[r]'^2} = [m_i]' \cdot L^{-2} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^{-2} = L \cdot T^{-2}$$

Las energías cinética y potencial en la nueva base tomarán las siguientes dimensiones:

$$[E_c]' = [m_i]' \cdot [v]'^2 = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^2 \cdot T^{-2} = L^5 \cdot T^{-4}$$

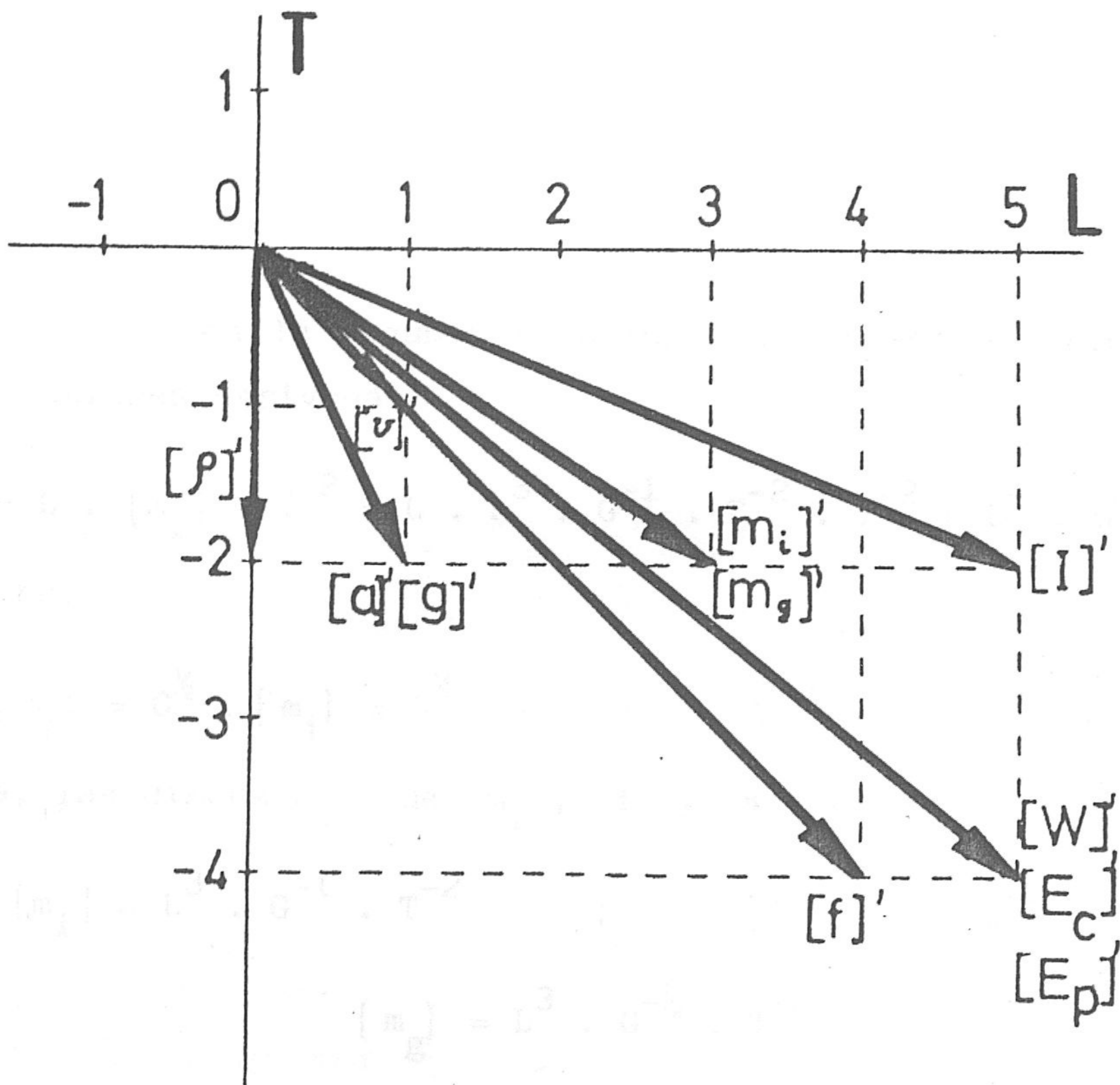
$$[E_p]' = [m_i]' \cdot [g]' \cdot [h]' = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = L^5 \cdot T^{-4}$$

Para el momento de inercia:

$$[I]' = [m_i]' \cdot [r]'^2 = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^2 = L^5 \cdot T^{-2}$$

.....  
 ..... etc.

La fig.A.5 nos muestra la representación de estas magnitudes en el subespacio (L,T).



Ahora bien, si suprimimos de las ecuaciones fundamentales  $G$ , es decir, damos a  $G$  un valor numérico invariable, como puede verse en la fig.A.5



En este ejemplo se pone de manifiesto que dos magnitudes  $m_i$  y  $m_g$ , distintas, con diferente definición epistémica, esto es, caracterizadas por fenómenos físicos distintos y medibles independientemente por separado, que tenían distinta dimensión en la base completa, quedan confundidas ahora pues aparecen con la misma dimensión en la base mutilada: los vectores correspondientes a  $[m_i]$  y  $[m_g]$  tienen la misma proyección sobre el subespacio (L,T).

El alcance de la mutilación de una base dimensional debida, en nuestro caso, a la supresión de la constante universal  $G$ , se puede poner mejor de manifiesto si en lugar de considerar la base tridimensional (L, M, T), consideramos (L, G, T) que es otra de las bases dimensionales que se pueden tomar para la mecánica según demostramos en A.4.2.3.

Para ello escribimos las ecuaciones fundamentales de la mecánica:

$$f = m_i \frac{d^2 s}{dt^2} \quad ; \quad f = G \frac{m_i^2}{r^2} \quad ; \quad m_g = G^{1/2} m_i$$

y tomamos dimensiones respecto de la base ahora considerada (L, G, T):

$$[f] = G \frac{[m_i]^2}{L^2} = L^{-2} \cdot G \cdot [m_i]^2 \quad ; \quad [f] = L \cdot [m_i] \cdot T^{-2}$$

$$[m_g] = G^{1/2} \cdot [m_i]$$

dividiendo las dos primeras ecuaciones dimensionales se tiene:

$$\frac{[f]}{[f]} = \frac{L^{-2} \cdot G \cdot [m_i]^2}{L \cdot [m_i] \cdot T^{-2}} = L^{-3} \cdot G \cdot T^2 \cdot [m_i] = 1$$

de donde,

$$[m_i] = L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2}$$

sustituyendo  $[m_i]$  en la segunda ecuación del sistema anterior obtenemos las restantes dimensiones derivadas:

$$[f] = L \cdot [m_i] \cdot T^{-2} = L \cdot L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \cdot T^{-2} = L^4 \cdot G^{-1} \cdot T^{-4}$$

y de la tercera,

$$[m_g] = G^{1/2} \cdot [m_i] = G^{1/2} \cdot L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} = L^3 \cdot G^{-1/2} \cdot T^{-2}$$

En definitiva, las dimensiones de  $m_i$ ,  $f$  y  $m_g$  en la base (L, G, T) son:

$$[m_i] = L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \quad ; \quad [f] = L^4 \cdot G^{-1} \cdot T^{-4}$$

$$[m_g] = L^3 \cdot G^{-1/2} \cdot T^{-2} \tag{A.24}$$

Ahora bien, si suprimimos de las ecuaciones fundamentales la constante universal  $G$ , es decir, damos a  $G$  un valor numérico invariable, que puede ser la unidad,

en cuyo caso queda sin dimensiones, la base pasa a ser (L,T) bidimensional, y las fórmulas dimensionales de las restantes magnitudes se obtendrán haciendo en ellas  $G = 1$ .

$$[m_i]' = [m_g]' = L^3 \cdot T^{-2} \quad ; \quad [f]' = L^4 \cdot T^{-4} \quad (A.25)$$

Este mismo proceso puede realizarse para otras magnitudes primarias o secundarias. Así por ejemplo, la velocidad  $v$ , aceleración  $a$ , trabajo  $W$ , densidad  $\rho$ , energía cinética  $E_c$ , intensidad del campo gravitatorio  $g$ , energía potencial  $E_p$ , momento de inercia  $I$ , toman las siguientes dimensiones en la base (L,G,T):

$$\begin{aligned} [v] &= L \cdot T^{-1} \quad ; \quad [a] = L \cdot T^{-2} \\ [W] &= [f] \cdot [s] = L^4 \cdot G^{-1} \cdot T^{-4} \cdot L = L^5 \cdot G^{-1} \cdot T^{-4} \\ [\rho] &= \frac{[m_i]}{[V]} = L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^{-3} = G^{-1} \cdot T^{-2} \\ [E_c] &= [m_i] \cdot [v]^2 = L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^2 \cdot T^{-2} = L^5 \cdot G^{-1} \cdot T^{-4} \\ [g] &= \frac{[f]}{[m_i]} = \frac{L^4 \cdot G^{-1} \cdot T^{-4}}{L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2}} = L \cdot T^{-2} \\ [E_p] &= [m_i] \cdot [g] \cdot [h] = L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = L^5 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \\ [I] &= [m_i] \cdot [r]^2 = L^3 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^2 = L^5 \cdot G^{-1} \cdot T^{-2} \\ &\dots\dots\dots\text{etc.} \end{aligned}$$

Al suprimir la constante  $G$  la base pasa a ser la bidimensional (L,T), y las dimensiones de las magnitudes derivadas en la nueva base son las siguientes:

$$\begin{aligned} [v]' &= L \cdot T^{-1} \quad ; \quad [a]' = L \cdot T^{-2} \\ [W]' &= [f]' \cdot [s]' = L^4 \cdot T^{-4} \cdot L = L^5 \cdot T^{-4} \\ [\rho]' &= \frac{[m_i]'}{[V]'} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^{-3} = T^{-2} \\ [E_c]' &= [m_i]' \cdot [v]'^2 = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^2 \cdot T^{-2} = L^5 \cdot T^{-4} \\ [g]' &= \frac{[f]'}{[m_i]'} = \frac{L^4 \cdot T^{-4}}{L^3 \cdot T^{-2}} = L \cdot T^{-2} \\ [E_p]' &= [m_i]' \cdot [g]' \cdot [h]' = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = L^5 \cdot T^{-4} \\ [I]' &= [m_i]' \cdot [r]'^2 = L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^2 = L^5 \cdot T^{-2} \end{aligned}$$

En la fig. A.6 representamos gráficamente los vectores dimensionales de las magnitudes derivadas consideradas, tanto respecto de la base tridimensional (L,G,T) como de la bidimensional (L,T). En ella se pone de manifiesto que la

base (L,T) es un subespacio de la base tridimensional (L, G, T); los vectores-dimensión notados con (') son las proyecciones sobre el plano (L,T) de los vectores-dimensión representados en el espacio (L, G, T).

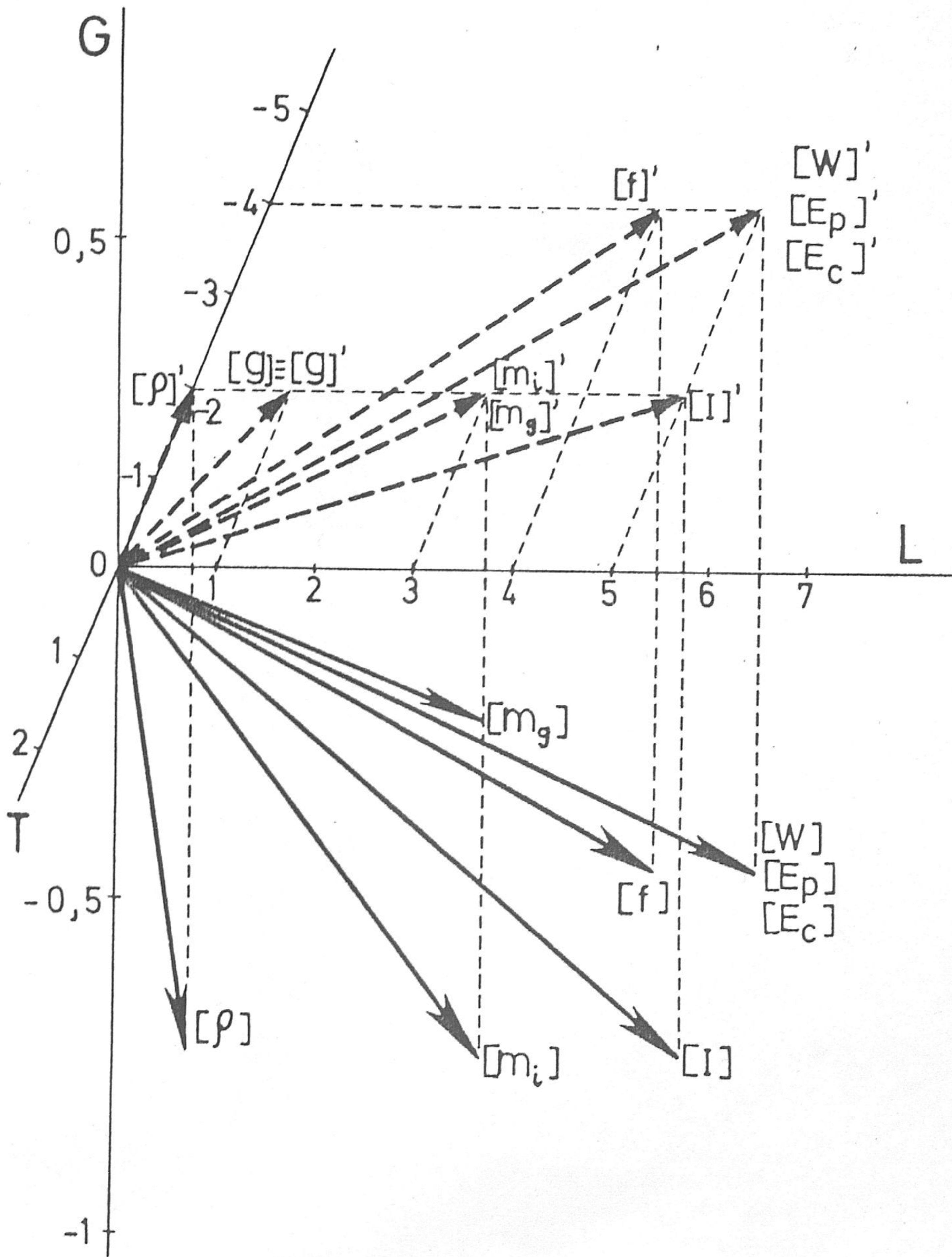


fig. A.6

Estas consideraciones sobre el significado físico y vectorial de la ampliación, reducción o mutilación de las dimensiones de las magnitudes físicas, de modo general o para cada problema, son muy interesantes para nuestro trabajo, habiendo sido desarrolladas en la Parte II .