T
13
104

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS



Departamento de Física Teórica y del Cosmos

TÉCNICA DE POLARIZACIONES DE ORDEN SUPERIOR EN CUANTIZACIÓN Y ANOMALÍAS

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

JULIO GUERRERO GARCÍA

1995

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento b19655022
Nº Copia B120031

UNIVERSIDAD DE GRANADA

COMISION DE DOCTORADO

UNIVERSIDAD DE GRANADA
SECRETARIA GENERAL
- REGISTRO -
- 9 OCT. 1995
SALIDA N.º 13618

Fecha: cinco de Octubre de 1995
Su Refª.
Nuestra Refª.
Fecha de Salida:
Unidad de Origen: COMISIÓN DE DOCTORADO

Destinatario:

Iltmo. Sr. Decano
FACULTAD DE CIENCIAS
GRANADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 16-10-95
ENTRADA NUM. 2386

En cumplimiento del artículo 32 de las Normas Reguladoras de los estudios de Tercer Ciclo de esta Universidad, adjunto se remite un ejemplar de la Tesis Doctoral presentada por el Doctorando D.JULIO GUERRERO GARCIA titulada TECNICA DE POLARIZACIONES DE ORDEN SUPERIOR EN CUANTIZACION Y ANOMALIAS y dirigida por el Profeso/es Dr/es VICTOR ALDAYA VALVERDE con objeto de mantenerla depositada desde el día cuatro de Octubre de 1995 hasta el día diez de Noviembre de 1995 para que pueda ser examinada por cualquier Doctor que así lo desee.

Granada a cinco de Octubre de 1995.

EL PRESIDENTE DE LA COMISION
DE DOCTORADO,

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Comisión de Doctorado

JUAN CAMPOS FERNANDEZ
Vicerrector de Enseñanzas Propias
y Postgrado

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 16-10-95
ENTRADA NUM. 2386

VÍCTOR ALDAYA VALVERDE, Investigador Científico del C.S.I.C en el Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional de la Universidad de Granada y en el I.F.I.C. (Centro Mixto Universidad de Valencia-C.S.I.C.).

CERTIFICO:

Que la presente Memoria **"Técnica de Polarizaciones de Orden Superior en Cuantización y Anomalías"** ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Física Teórica y del Cosmos y en el Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional de la Universidad de Granada por Julio Guerrero García, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada la referida Tesis.

Granada, a 4 de Octubre de 1995.

Fdo. Víctor Aldaya Valverde.

EL DOCTORANDO

Fdo. JULIO GUERRERO GARCÍA

UNIVERSIDAD DE GRANADA
4 OCT. 1995
COMISION DE DOCTORADO

Índice

1 INTRODUCCIÓN 5

I CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS 11

2 CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS 13
- 2.1 Introducción. . . . 13
- 2.2 Grupos de Lie. . . . 14
- 2.3 Cuantización Geométrica. . . . 16
- 2.4 Cuantización sobre Grupos. . . . 17
- 2.5 Invariantes Noether y Teoría Clásica. . . . 24

3 CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA 27
- 3.1 Introducción . . . 27
- 3.2 Cuantización sobre grupos con transformaciones finitas . . . 28
- 3.3 Cuantización algebraica: cuantización con ligaduras . . . 29
  - 3.3.1 Operadores buenos . . . 30
- 3.4 Un ejemplo: partícula con velocidad constante . . . 31
- 3.5 Caso en que el subgrupo de ligaduras posee dinámica . . . 33

4 POLARIZACIONES DE ORDEN SUPERIOR. ANOMALÍAS 35
- 4.1 Polarizaciones de orden infinito y operadores pseudodiferenciales . . . 38

II SISTEMAS RELATIVISTAS EN EL ESPACIO DE CONFIGURACIÓN 43

5 PARTÍCULA LIBRE RELATIVISTA CON ESPÍN 45
- 5.1 Cuantización en el espacio de momentos. . . . 49
- 5.2 Cuantización en el espacio de configuración. . . . 50
- 5.3 Invariantes Noether. . . . 53

6 EL GRUPO DE S-POINCARÉ **55**
6.1 Introducción 55
6.2 Espacio de configuración relativista: el grupo de S-Poincaré 56
6.3 Representaciones del grupo de S-Poincaré 58
6.3.1 Polarización $\mathcal{P}_p^1$: Realización en el espacio de momentos 59
6.3.2 Polarización $\mathcal{P}_x^{HO}$: Realización en el espacio de configuración 60
6.3.3 Polarización $\mathcal{P}_k^{HO}$: Realización en el espacio de configuración relativista 61
6.3.4 Funciones de onda de Shapiro 62

7 EL OSCILADOR ARMÓNICO RELATIVISTA **63**
7.1 Introducción. 63
7.2 Cuantización del oscilador no relativista. 64
7.3 El oscilador armónico relativista. 68
7.3.1 La representación de Bargmann-Fock. 70
7.3.2 Cuantización en el espacio de configuración: polinomios de Hermite relativistas 72
7.3.3 La transformación de Bargmann relativista 77
7.4 Representación mínima: Unitariedad y espectro de N. 79
7.5 Perturbación del producto escalar 82

8 ESTADOS COHERENTES CANÓNICOS **85**
8.1 Introducción 85
8.2 Estados coherentes relativistas. 86
8.3 Operadores de creación y destrucción canónicos: estados coherentes canónicos 89
8.3.1 Estados coherentes canónicos 91

III ANOMALÍAS (EN DIMENSIÓN FINITA) **95**

9 ANOMALÍAS TOPOLÓGICAS: EFECTO HALL **97**
9.1 Introducción. Grupos de Heisenberg-Weyl "compactificados": números cuánticos fraccionarios 97
9.2 Grupo de Heisenberg-Weyl en el cilindro 98
9.2.1 ¿Existe algún operador tipo posición? 101
9.3 Grupo de Heisenberg-Weyl en el toro 102
9.3.1 Números cuánticos enteros 104
9.3.2 Números cuánticos fraccionarios 109
9.3.3 Caso irracional 112
9.4 Partícula libre Galileana en la circunferencia 113
9.4.1 Violación del teorema de Ehrenfest 115
9.5 Partícula cargada en un campo magnético homogéneo sobre el toro 116

9.5.1 Partícula cargada en un campo magnético homogéneo 117
9.5.2 Partícula cargada en un campo mágnetico homogéneo sobre el toro 122

10 ANOMALÍAS ALGEBRAICAS: GRUPO DE SCHRÖDINGER 125
10.1 Órbita sobre el vacío 129
10.2 Polarización de orden superior 131

IV APÉNDICES 133

A CUANTIZACIÓN DEL ESPÍN. 135

B CÁLCULO DE $\tilde{X}^{LHO}_{a^0}$. 141
B.1 Polarización tipo Klein-Gordon. 141
B.2 Polarización tipo Schrödinger 143

C CALCULO DE $\tilde{X}^{LHO}_{\vec{p}}$. 147

ÍNDICE

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Desde que surgió la Mecánica Cuántica a principios de este siglo, el papel de las simetrías de un sistema físico ha ido adquiriendo una importancia cada vez mayor, por lo que deben tenerse muy en cuenta en cualquier formalismo de cuantización. En relación con esto, es obligado preguntarse si la Teoría Cuántica debe construirse a partir de la Teoría Clásica (en principio una descripción aproximada, diríamos gruesa, de la realidad) cuando la realidad física es cuántica (al menos mientras los experimentos no digan lo contrario), por lo que resulta natural exigirle que no deba recurrir a ésta para la descripción del sistema cuántico.

Profundizando en la idea anterior, es sabido que la Teoría Clásica no es el límite $\hbar \to 0$ de la Teoría Cuántica, al menos no en el sentido en que la Teoría Newtoniana es el límite $c \to \infty$ de la Teoría de la Relatividad General. En este último caso el proceso subyacente es el de contracción de grupos, por lo que el grupo de simetrías de uno y otro son diferentes. Resultaría imposible reconstruir el sistema relativista a partir de la aproximación de orden cero, que es el sistema newtoniano.

Sin embargo, el grupo de simetrías clásico (si es que existe) y el cuántico son "casi" el mismo, de forma que podríamos decir que el grupo "clásico" es la aproximación local (en el sentido que en su momento precisaremos) del grupo "cuántico". Tal vez sea por ello por lo que los métodos semiclásicos dan buenos resultados en la mayoría de los casos, y que con los métodos convencionales de cuantización vía principio de correspondencia se haya podido cuantizar casi todos los sistemas físicos estudiados.

En este sentido, un formalismo de cuantización basado en un grupo (el grupo de simetrías "cuantico") como es la Cuantización Sobre Grupos (CSG, Group Approach to Quantization, AGQ, en inglés) tiene la ventaja de que se basa entera y únicamente en el grupo de simetrías del sistema, además de no requerir la resolución previa del correspondiente sistema clásico (que puede ser difícil de resolver o simplemente no existir).

La CSG se presenta no ya como una elegante reformulación de la Mecánica Cuántica (o de la Teoría Cuántica de Campos, aunque en esta *Memoria* no trataremos con campos), sino como un método que, además de profundizar en los entresijos de la propia Teoría

Cuántica, permite obtener de forma explícita toda la información contenida en el grupo de simetrías.

Respecto a otros métodos de cuantización geómetricos, como la Cuantización Geométrica, el método de la CSG presenta muchas ventajas, entre las que podemos citar, como la más destacada y la que lo hace un método realmente potente y versátil, la posibilidad de incorporar nuevas técnicas (siempre dentro del marco dado por el grupo) para afrontar nuevos problemas que aparecen al estudiar sistemas cada vez más complejos. Prueba de ello son la incorporación de las pseudoextensiones en el formalismo para cuantizar los grupos semisimples (y Poincaré), la incorporación de transformaciones discretas en el grupo así como el dar cuenta de ligaduras dentro del propio grupo, con lo que se llega a una reformulación de la CSG denominada Cuantización Algebraica (CA, Algebraic Quantization on a Group, AQG, en inglés), la introducción de la noción de anomalía y su caracterización algebraica (para un tipo de anomalía que denominaremos algebraica, frente a otra que denominaremos topológica, que aparece como consecuencia de la topología no trivial del grupo), que fue motivada por el estudio del grupo de Virasoro, ejemplo típico de grupo anómalo en dimensión infinita, aunque posteriormente se encontró un ejemplo de grupo anómalo en dimensión finita, el grupo de Schrödinger. Por último, y como un paso de gigante en la empresa de la cuantización, las polarizaciones de orden superior surgen como una herramienta útil (imprescindible en algunos casos) para obtener la cuantización en otras representaciones diferentes a las "naturales" proporcionadas por la polarización de primer orden, tales como la representación en el espacio de configuración, que era la asignatura pendiente de la CSG.

Dentro de este estado de cosas, el trabajo de esta *Memoria* representa la consolidación de las polarizaciones de orden superior dentro de la CSG de forma que ya no asusta nada, por ejemplo, el encontrar la representación en el espacio de configuracion para cualquier sistema, aunque para ello haya que recurrir a polarizaciones de orden infinito con todo lo que ello conlleva, como son los operadores pseudodiferenciales, las funciones de onda operatoriales, etc..

También ha sido reavivada la CA, al encontrar la utilidad de las ligaduras como forma de imponer condiciones de contorno periódicas en sistemas con topología no trivial. Esto nos ha abierto los ojos a un mundo fascinante donde existen cuantizaciones no equivalentes para un mismo sistema, operadores que no son buenos (anomalías topologicas) pero que pueden ser interpretados como generadores de cambios de cuantización, etc., y como nuestro mayor logro, el dar cuenta de números cuánticos fraccionarios con aplicación directa al Efecto Hall Cuántico Fraccionario, un problema muy en boga hoy en día no sólo dentro del marco de la Materia Condensada, sino de la misma Física Teórica. El potencial de la CA aún no ha sido explotado en su totalidad, de manera que seguirá siendo una herramienta de trabajo diario en próximos trabajos, pues estamos convencidos de su fecundidad.

Por último, hemos retomamos el grupo de Schrödinger con su anomalía algebraica y obtenemos de nuevo que el valor $N = \frac{1}{4}$ (N es el índice de Bargmann, que caracteriza las

representaciones de $SL(2,R)$) es el que nos permite reducir la representación de forma que el espacio de Hilbert resultante es el del oscilador armónico y los generadores de $SL(2,R)$ se expresan como polinomios cuadráticos en los generadores del oscilador armónico. Esto contrasta con el hecho de que, clásicamente, la realización de los invariantes Noether asociados a $SL(2,R)$ en términos de los del oscilador armónico se produce sólo para $N = 0$. Esta diferencia entre el valor clásico y el cuántico para el cual la representación se *reduce* es uno de los efectos típicos de las anomalias, y ocurre, por ejemplo, en cualquier sistema que contenga al grupo de Virasoro en su grupo se simetrías (que posea invariancia conforme en dos dimensiones o invariancia bajo reparametrización de la circunferencia).

Tras esta Introducción, la distribución de la *Memoria* en capítulos es la siguiente:

Parte I: CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS:

En el Capítulo 2, tras una breve visita a los grupos de Lie y a la Cuantización Geométrica, sentamos las bases de la Cuantización Sobre Grupos, tomando como ejemplo el grupo de Galileo. Se obtiene, como un subproducto, la teoría clásica del sistema a través de los invariantes Noether.

En el Capítulo 3 se generaliza la CSG permitiendo transformaciones discretas y ligaduras, para llegar a la Cuantización Algebraica, donde aparecen las nociones de cuantizaciones no equivalentes y operadores buenos y malos. Se ilustra el procedimiento con la cuantización de la partícula galileana restrigida a moverse con velocidad constante.

En el Capítulo 4 se permite la entrada de operadores del álgebra envolvente en la polarización, con lo que se llega al concepto de *polarizaciones de orden superior*. Esto nos permite cuantizar sistemas en el espacio de configuración, que será la base de toda la **Parte II** de esta *Memoria*. En este capítulo se aplica al caso de la partícula galileana en el espacio de configuración. Se hace un estudio general de las polarizaciones de orden superior, la forma de las funciones de onda y operadores cuánticos resultantes y se demuestra la irreducibilidad de la representación a que conduce.

Parte II: SISTEMAS RELATIVISTAS EN ESPACIO DE CONFIGURACIÓN:

En el Capítulo 5 hacemos el estudio completo del grupo de Poincaré, grupo de simetrías de la partícula libre relativista con espín, haciendo hincapié en la representación en el espacio de configuración para la cual necesitamos introducir operadores de orden infinito en la polarización, uno de los cuales, cuando lo escribimos por la derecha, da lugar al *operador posición*, el cual se caracteriza por verificar relaciones de conmutación canónicas con el operador momento. La definición de un operador posición en un sistema relativista es un problema delicado, pues en el álgebra de Poincaré no existe ningún generador que pueda ser interpretado como posición (el generador de los boosts no nos sirve), hemos de recurrir al álgebra envolvente, y la dificultad reside en que este operador no cierra álgebra de dimensión infinita con el álgebra de Poincaré, lo cual crea problemas de unitariedad de la representación que se resuelven imponiendo una ordenación normal.

En el Capítulo 6, abordamos el problema de la posición en mecánica cuántica relativista desde un punto de vista completamente diferente: en lugar de buscar un operador posición que verifique reglas de conmutación canónicas con el operador momento de Poincaré, vamos a buscar un *nuevo operador momento* en el álgebra envolvente de Poincaré (en 1+1D) que verifique reglas de conmutación canónicas con el generador de los boosts de Poincaré. Este nuevo operador momento cierra un álgebra finita con Poincaré, de forma que la exponenciamos a un grupo y realizamos su cuantización mediante la CSG. Gracias al nuevo operador momento obtenemos una representación, mediante polarizaciones de orden superior, que conduce a un *espacio de configuración relativista*, donde los operadores y las funciones de onda adquieren expresiones galileanas.

El Capítulo 7 lo dedicamos al estudio del *oscilador relativista* (basado en la simetría $SL(2,R)$), obteniendo las representaciones en el espacio de Bargmann-Fock y en configuración, ésta última mediante una polarizacion de segundo orden que conduce a una ecuación de tipo Klein-Gordon. Las funciones de onda en el espacio de configuración son esencialmente los *Polinomios de Hermite Relativistas*, que verifican relaciones de ortogonalidad con peso variable, y que tienden a los polinomios de Hermite usuales en el límite $c \to \infty$. Obtenemos la *Transformación de Bargmann Relativista*, que es el isomorfismo entre las dos representaciones anteriores y que también tiende a la Transformación de Bargamnn usal en el limite $c \to \infty$. Es posible recurrir a una polarización de orden infinito para definir el espacio de configuración, que da lugar a la ecuación de Schrödinger del oscilador armónico con correcciones relativistas (damos tan sólo los primeros términos). Si resolvemos esta ecuación mediante la teoría de perturbaciones usual de la Mecánica Cuántica reobtenemos los Polinomios de Hermite Relativistas orden por orden en $1/c^2$, y nos damos cuenta también de que, al mismo tiempo que vamos perturbando la función de onda, *hay que ir perturbando el producto escalar.*

En el Capítulo 8, además de obtener de manera simple con nuestro formalismo los *estados coherentes relativistas*, que no son más que los estados coherentes generalizados de Perelomov para $SL(2,R)$, obtenemos unos estados coherentes relativistas *canónicos* definidos como los autoestados de un nuevo operador destrucción construido (junto con su correspondiente operador creación) a partir de los operadores creación-destrucción de $SL(2,R)$ de manera que verifiquen relaciones de conmutación canónicas (de nuevo se construyen gracias a las polarizaciones de orden superior). La construcción de estos operadores creación-destrucción (que junto con el operador energía definen un oscilador armónico no relativista) a partir de los de $SL(2,R)$ es invertible (por ser no polínomica), es decir, podemos construir unos operadores creación-destrucción que verifiquen un álgebra de $SL(2,R)$ a partir de los operadores del oscilador armónico convencional como funciones no polinómicas, de manera que la construcción es válida para cualquier valor del índice de Bargmann que caracteriza la representación. Esta construcción constrasta con la realizada en el Capítulo 10, que es cuadrática y anómala, es decir, sólo se puede realizar para un valor concreto del índice de Bargmann, que además no coincide con el valor para el que la construcción clásica es posible.

Parte III: ANOMALÍAS (EN DIMENSIÓN FINITA)

En el Capítulo 9 hacemos un estudio general de la cuantización del grupo de Heisenberg-Weyl sobre espacios de fases con topología no trivial (el cilindro y el toro). La topología no trivial se obtiene imponiendo ligaduras que simulan las condiciones de contorno periódicas, por lo que el formalismo que empleamos es el de la Cuantización Algebraica, desarrollada en el Capítulo 3. Como consecuencia de las ligaduras, aparecen cuantizaciones no equivalentes y algunos operadores resultan ser malos (no preservan el espacio de Hilbert), lo cual se ha interpretado en la literatura como *anomalías* (que nosotros denominaremos *topológicas* para distinguirla de la *anomalía algebraica* que aparece en el grupo de Schrödinger y que se estudia en el Capítulo 10). Como resultado importante en este capítulo, se generaliza la condición de integralidad de la clase de la forma simpléctica (clase de Chern de la variedad cuántica) en la Cuantización Geométrica a clases (números cuánticos) fraccionarias, para lo cual hay que substituir el fibrado de linea usual por un fibrado vectorial de rango el denominador de la clase de la forma simpléctica, y con clase de Chern su numerador. Este estudio se aplica a dos ejemplos de interés físico, como son la partícula libre en la circunferencia, con aplicación a sistemas de corrientes en anillos superconductores, y la partícula cargada en un campo magnético sobre el toro, con aplicación al Efecto Hall Cuántico, donde los numeros cuánticos fraccionarias dan cuenta del Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

En el Capítulo 10 estudiamos el grupo de Schrödinger, que constituye un ejemplo en dimensión finita de sistema anómalo. Los sistemas anómalos se caracterizan, algebraicamente, por carecer de una polarización de primer orden completa. Para reducir la representación hay que recurrir a una polarización de orden superior (u órbita sobre el vacío), la cual sólo existe para un cierto valor del parámetro que caracteriza la representación, que no coincide con el valor para el que se consigue la reducción del sistema en el caso clásico. Además, es sólo para este valor para el que se pueden expresar los operadores no básicos en términos de los básicos. Finalmente, vemos las aplicaciones del grupo de Schrödinger en problemas tan dispares como la Óptica Cuántica o los teoremas *no go* en Mecánica Cuántica.

APÉNDICES.

La *Memoria* se completa con varios apéndices. En el Apéndice A se cuantiza el espín para facilitar el trabajo del Capítulo 5. En el Apéndice B desarrollamos la técnica que nos permite obtener polarizaciones de orden superior de forma sencilla y elegante, y encontramos los operadores de orden superior que conducen a las ecuaciones de tipo Klein-Gordon y de tipo Schrödinger, necesarios para la construcción de las polarizaciones de orden superior en el Capítulo 5. Por último, en el Apéndice C encontramos el operador de orden superior que completa la polarizacion de orden superior en el Capítulo 5 y cuya versión derecha da lugar al operador posición.

Parte I

CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS

Capítulo 2

CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS

2.1 Introducción.

En este capítulo vamos a sentar las bases del formalismo de cuantización que vamos a emplear en esta *Memoria*. La Cuantización Sobre Grupos (CSG, Group Approch to Quantization, GAQ, en inglés) es un formalismo mediante el cual se construyen las representaciones irreducibles y unitarias de un grupo de Lie sobre el espacio de Hilbert de las funciones complejas sobre el grupo (convenientemente restringidas para conseguir la irreducibilidad). Este grupo de Lie será el grupo de las simetrías, espacio-temporales e internas (que generalmente constituyen un grupo de Lie), de un sistema físico, de tal forma que, podriamos decir, caracterizan completamente al sistema. Esto es muy importante en nuestro formalismo, ya que el único punto de partida es la ley de grupo del grupo de Lie (aunque, retrocediendo un poco más, podemos decir que el álgebra de Lie asociada a este grupo sería el punto de partida, pues exponenciando ésta obtenemos la ley de grupo). El resto de los conceptos que se introducen a posteriori (polarizaciones de primer orden, órbitas sobre el vacío, polarizaciones de orden superior, ...), aunque juegan un papel importante y a veces crucial, van encaminados a reducir la representación, pues la representación constituida por las funciones sobre todo el grupo es altamente reducible.

Se podría decir que el origen de la CSG es la Cuantización Geométrica, un formalismo de cuantización en el que se construyen representaciones irreducibles y unitarias del álgebra de Poisson de los observables clásicos de un sistema físico. Para ello se requiere encontrar primero la variedad de soluciones asociada al problema clásico. En este sentido la Cuantización Geométrica es una técnica de cuantización convencional, de construcción de la solución cuántica a partir de la solución clásica mediante una serie de prescripciones, mientras que la CSG no cuantiza nada en el sentido de que construye la solución cuántica directamente a partir de las simetrías (cuánticas). No utiliza para nada el sitema clásico (que puede no existir) asociado a este sistema cuántico, aunque, como un subproducto,

puede obtenerse la solución clásica sin más que substituir el grupo de simetrías cuántico por el clásico (ya veremos en qué se diferencian).

Antes de introducir la CSG daremos algunas nociones de grupos de Lie y un repaso esquemático a la Cuantización Geométrica, los problemas que no resuelve y, posteriormente, veremos como la CSG los soluciona.

2.2 Grupos de Lie.

En un grupo de Lie se entremezclan dos conceptos muy importantes, el de estructura de grupo y el de variedad diferenciable, de forma que ambas estructuras son compatibles.

Un grupo de Lie es por tanto un grupo G en el que sus elementos son puntos de una variedad diferenciable de forma que las operaciones de composición $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g * g'$, y de inversión $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, son diferenciables.

Por un lado, por tratarse de un grupo, podemos definir las aplicaciones traslación por la izquierda $\mathrm{L}_g : G \to G$, $\mathrm{L}_g(g') = g * g'$, y traslación por la derecha $\mathrm{R}_g : G \to G$, $\mathrm{R}_g(g') = g' * g$, donde $g, g' \in G$, que son diferenciables por serlo la composición o producto del grupo.

Y por otro lado, por tratarse de una variedad diferenciable, podemos introducir el concepto de campo de vectores sobre la variedad, que es una aplicación $X : G \to T(G)$, donde $T(G)$ es el espacio tangente a G (considerado como variedad). El espacio tangente es la unión de todos los espacios vectoriales tangentes en cada punto g a la variedad G . Éstos, a su vez, están constituidos por todos los vectores tangentes a la variedad en ese punto g. El concepto de vector tangente a una variedad G en un punto g se puede introducir como una aplicación que a cada función definida en un abierto que contiene a g le asocia un número (la derivada direccional de la función en g según una curva que pasa por g y que caracteriza al vector tangente; ver [KN 63]), o como una clase de equivalencia de curvas que pasan por g y las cuales son todas tangentes entre sí (véase [AM 67]).

Combinando los conceptos de traslaciones en el grupo con el de campos de vectores, podemos introducir el de campo de vectores invariante por la izquierda (todos los conceptos que se introduzcan son también válidos por la derecha, basta cambiar L por R), que son aquellos que verifican $(\mathrm{L}_g)_* X = X, \forall g \in G$, o, equivalentemte, $\mathrm{L}_g^T \circ X \circ \mathrm{L}_{g^{-1}} = X$. El conjunto de campos de vectores invariantes por la izquierda sobre el grupo G se denomina $\chi^L(G)$, y tiene estructura de álgebra de Lie, ya que si $X_1, X_2 \in \chi^L(G)$, $(\mathrm{L}_g)_*[X_1, X_2] = [(\mathrm{L}_g)_* X_1, (\mathrm{L}_g)_* X_2] = [X_1, X_2]$, con lo cual $[X_1, X_2] \in \chi^L(G)$.

Definimos el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de un grupo de Lie G como $\mathcal{G} \equiv T_e(G)$, donde e es el elemento neutro del grupo, aunque en realidad $\mathcal{G}$ es isomorfa a $T_g(G), \forall g \in G$. Las álgebras de Lie constituidas por los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha son isomorfas entre sí y a $\mathcal{G}$. Una propiedad importante para nuestro formalismo de cuantización es el hecho de que los campos de vectores invariantes por la izquierda conmutan con los campos invariantes por la derecha, $[X^L, X^R] = 0$, $\forall X^L \in \chi^L(G)$, $\forall X^R \in \chi^R(G)$.

Del mismo modo, combinando las traslaciones en el grupo con las 1-formas (concepto dual al de campo de vectores; aplicaciones $\alpha : G \to T^*(G)$), obtenemos las 1-formas invariantes por la izquierda, que son aquellas que verifican $(\mathrm{L}_g)^*\alpha = \alpha$.

Dado un vector tangente $X_g \in T_g(G)$, existe un único campo de vectores invariante por la izquierda X^L tal que $X^L(g) = X_g$ (lo mismo ocurre con las 1-formas). Ésto nos permite definir la 1-forma canónica izquierda sobre el grupo G , θ^L, que es $\mathcal{G}$ -valorada, como aquella que verifica $\theta^L(X^L) = X$, donde $X^L \in \chi^L(G)$ y $X^L(e) = X \in \mathcal{G}$.

Eligiendo una base $X_{(i)}$ en $\mathcal{G}$ y su dual $\theta^{(j)}$ en $\mathcal{G}^*$, podemos expresar la 1-forma canónica izquierda sobre el grupo como $\theta^L = X_{(i)}\,\theta^{L\,(i)}$. A estas 1-formas $\theta^{L\,(i)}$ se les denomina componentes de la 1-forma canónica izquierda θ^L, y verifican $\theta^{L\,(i)}(X^L_{(j)}) = \delta^i_j$, es decir, la dualidad se preserva al pasar del entorno de la identidad a todo el grupo.

Las propiedades que verifican estas 1-formas son:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{L}_g)^*\theta^L &= \theta^L \\
(\mathrm{R}_g)^*\theta^L &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\,\theta^L \\
(\mathrm{L}_g)^*\theta^R &= \mathrm{Ad}(g)\,\theta^R \\
(\mathrm{R}_g)^*\theta^R &= \theta^R\,,
\end{aligned}$$

que en forma diferencial se escriben:

$$\begin{aligned}
L_{X^R}\theta^L &= 0 \\
L_{X^L}\theta^L &= -\mathrm{ad}(X)\,\theta^L \\
L_{X^R}\theta^R &= \mathrm{ad}(X)\,\theta^R \\
L_{X^L}\theta^R &= 0\,,
\end{aligned}$$

y que nos dicen que θ^L es invariante bajo las tranformaciones del grupo generadas por los campos derechos X^R (y θ^R bajo X^L).

Podemos escribir las ecuaciones anteriores en componentes:

$$\begin{aligned}
L_{X^R_{(i)}}\theta^{L\,(j)} &= 0 \\
L_{X^L_{(i)}}\theta^{L\,(j)} &= -C^j_{ik}\,\theta^{L\,(k)} \\
L_{X^R_{(i)}}\theta^{R\,(j)} &= C^j_{ik}\,\theta^{R\,(k)} \\
L_{X^L_{(i)}}\theta^{R\,(j)} &= 0\,,
\end{aligned}$$

donde las C^j_{ik} son las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathcal{G}$, y donde se observa que las álgebras $\chi^L(G)$ y $\chi^R(G)$ son isomorfas, si bien sus constantes de estructura tienen signos contrarios.

La 1-forma canónica izquierda sobre el grupo jugará un papel importante en la CSG, más concretamente una de sus componentes, $\theta^{L\,(\zeta)}$, la dual del campo $\tilde{X}^L_\zeta$ que genera las transformaciones de fase de las funciones de onda.

2.3 Cuantización Geométrica.

Muy esquemáticamente, la Cuantización Geométrica [Sou 70, Kos 70, Sni 70, Woo 80] es un formalismo que pretende encontrar las representaciones irreducibles y unitarias del álgebra de Poisson $\mathcal{F}(\mathrm{S})$ de un sistema clásico S sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, asociado de forma natural. Es decir, se trata de asociar a cada observable clásico $f \in \mathrm{S}$ un operador hermítico f actuando sobre $\mathcal{H}$ de manera que la representación sea irreducible y que preserve la estructura simpléctica:

$$\widehat{\{f,g\}} = [\hat{f},\hat{g}]\,. \tag{2.1}$$

Una construcción *naif* de estos operadores consistiría en asociar a cada función f de $\mathcal{F}(\mathrm{S})$ el generador infinitesimal X_f de su actuación natural sobre S, definido por $X_f(g) = \{f,g\}$. Esta asignación cumple (2.1) gracias a la identidad de Jacobi, pero no es un isomorfismo de álgebras de Lie ya que posee núcleo, puesto que asigna el operador nulo a las funciones c constantes sobre S. Esto provocaría que, por ejemplo, el corchete $\{x,p\} = 1$ pasase a ser $[\hat{x},\hat{p}] = 0$, cosa en absoluto deseable pues eliminaría la esencia de la cuantización.

Podemos solventar el problema añadiendo una nueva variable a S, $\zeta \in U(1)$. Se obtiene así lo que se denomina variedad cuántica P, que es un fibrado principal sobre S con fibra $U(1)$, y se restringen las funciones complejas sobre P que verifiquen $\Psi(\zeta p) = \zeta\Psi(p)$ (es decir, que sean secciones del fibrado P). Si llamamos Ξ al generador de la actuación vertical sobre la fibra $U(1)$, $\Xi = i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$, la condición anterior se expresa en forma diferencial como $\Xi\Psi = i\Psi$. De este modo a las funciones constantes c sobre S les podemos asociar el operador $\hat{c} = -ic\Xi$. Los operadores cuánticos los podemos definir ahora (en coordenadas locales sobre S, q_i, p^j) como:

$$\hat{f} = -i\left[X_f + \left(f - p^i\frac{\partial}{\partial p^i}\right)\Xi\right]\,. \tag{2.2}$$

La noción que nos falta para completar la estructura de la Cuantización Geométrica es la de la 1-forma Θ de conexión en P, verificando $i_\Xi\Theta = 1$ y $i_\Xi d\Theta = 0$, y de forma que $d\Theta/U(1)$ define una estructura simpléctica sobre S=P/$U(1)$, que es isomorfa a la que S poseía. Los operadores $\tilde{X}_f$ ($\equiv i\hat{f}$ en (2.2)) asociados a una función f sobre S verifican:

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}_f}\Theta &= f \\ i_{\tilde{X}_f}d\Theta &= -df\,, \end{aligned}$$

y en particular se verifica que $L_{\tilde{X}_f}\Theta = 0$.

De esta forma la aplicaion $f \to \tilde{X}_f$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, y por tanto una representación fiel. Ésta, sin embargo, no es irreducible, ya que se pueden encontrar operadores no triviales $\hat{X}_g$ que conmutan con todos los $\tilde{X}_f$. Esto se soluciona encontrando

un conjunto maximal de operadores $\hat{X}_g$ que cierren subálgebra (para que sea integrable), la cual se denomina subálgebra de polarización, y que al imponer que se anulen sobre el espacio de Hilbert *físico* nos reducen la representación.

La Cuantización Geométrica, aunque permite cuantizar muchos sistemas (la mayoría sencillos), presenta el problema de que requiere resolver primero las ecuaciones clásicas (problema más difícil a veces que resolver el correspondiente cuántico), y que con frecuencia no es posible encontrar una polarización (no existe) que reduzca por completo la representación, problema éste relacionado con la presencia de anomalías (véanse los Capítulos 4 y 10).

Otro inconveniente que presenta es que las polarizaciones conducen siempre a representaciones en las que las ecuaciones de movimiento[1] y los operadores son de primer orden, como por ejemplo, para la partícula libre galileana en el espacio de momentos, no pudiéndose obtener la ecuación de Schrödinger (de segundo orden) en el espacio de configuración.

2.4 Cuantización sobre Grupos.

El formalismo de la CSG consiste en construir las representaciones irreducibles y unitarias de un grupo de Lie (que se supone el grupo de las simetrías de un sistema físico) sobre el espacio de Hilbert de las funciones complejas sobre el grupo (con ciertas condiciones).

Las ventajas que presenta la CSG sobre la Cuantización Geométrica son varias:

1. No parte de la variedad de soluciones de un sistema clásico, con lo cual no presupone la exitencia del correspondiente sistema clásico ni requiere resolver primero las ecuaciones clásicas de movimiento.

2. Incorpora la evolución temporal de una manera explícita, con lo que se obtiene la ecuación de evolución del sistema de forma natural.

3. Las simetrías del sistema se realizan directamente a través de los propios generadores del grupo actuando sobre las funciones de onda definidas sobre el grupo.

4. Es posible definir de manera unívoca, salvo equivalencias, las posibles polarizaciones, además de permitir generalizarlas a polarizaicones de orden superior, incluyendo operadores del álgebra envolvente asociada al grupo.

El grupo de partida para la CSG es un grupo de Lie $\tilde{G}$, que generalmente es la extensión central del grupo de semiinvariancia G del sistema físico por el grupo $U(1)$. Esto significa que al grupo G le añadimos un parámetro más, $\zeta \in U(1)$, de tal forma que el generador asociado a este parámetro conmuta con todos los demás (es central), pero

[1] En principio, la Cuantización Geométrica no proporciona ecuaciones de movimiento, ya que se realiza sobre la variedad de soluciones, pero con un pequeño truco se pueden incorporar, véase [Woo 80].

sin ser $\tilde{G}$ producto directo de G por $U(1)$. Para que esto sea posible es necesario que el grupo G tenga cohomología no trivial, es decir, que admita funciones $\xi : G \times G \to R$ verificando las condiciones de 2-cociclo:

$$\begin{aligned} \xi(g', g) + \xi(g' * g, g'') &= \xi(g', g * g'') + \xi(g, g'') \\ \xi(e, e) &= 0 , \end{aligned} \tag{2.3}$$

y que no sean de la forma $\xi(g, g') = \eta(g * g') - \eta(g) - \eta(g')$ para alguna función η sobre G (en caso de que exista η, a ξ se le denomina coborde y a η la función generatriz del coborde).

De esta forma la ley de grupo para $\tilde{G}$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} g'' &= g' * g \\ \zeta'' &= \zeta' \zeta e^{i\xi(g', g)} , \end{aligned} \tag{2.4}$$

de manera que si ξ es un cociclo la ley de composicion (2.4) de ζ no se puede llevar a la forma de producto directo $\hat{\zeta}'' = \hat{\zeta}' \hat{\zeta}$ mediante ningún cambio de variable sobre el grupo $\tilde{G}$ [2].

En este punto conviene resaltar que el grupo de Lie que se "cuantiza" es $\tilde{G}$ y no G por tres motivos:

1. En muchos casos el Lagrangiano no es invariante, sino tan sólo semiinvariante, bajo el grupo de simetrías G , mientras que es estrictamente invariante bajo $\tilde{G}$ (como ocurre, por ejemplo, para la partícula libre galileana).

2. El parámetro $\zeta \in U(1)$ da cuenta de la fase de las funciones de onda, de forma que al imponer (como se hace en la Cuantización Geométrica) $\Psi(\zeta \tilde{g}) = \zeta \Psi(\tilde{g})$, o, equivalentemente, $\Xi \Psi = i \Psi$ (condición de $U(1)$-función para la función de onda Ψ), donde Ξ es el generador asociado a la componente $\zeta \in U(1)$, estamos recuperando la invariancia de fase de la Mecánica Cuántica.

3. En el grupo G aparecen conmutadores de la forma $[\hat{x}, \hat{p}] = 0$, como ocurre con los generadores del grupo de Galileo, y nos interesa que sea $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, cosa que se consigue extendiendo centralmente el grupo.

Como hemos comentado, es la cohomología no trivial de G la que permite extenderlo centralmente, y es el 2° grupo de cohomología de G valorado en $U(1)$, $H^2_o(G, U(1))$, el que determina cuántos cociclos no equivalentes (no relacionados a través de un coborde) hay y, por tanto, cuántas cuantizaciones no equivalentes admite el sistema físico. Para el caso del grupo de Galileo, por ejemplo, sólo existe una clase de cociclos, y por tanto

[2] Es fácil comprobar que si ξ es un coborde generado por η, con el cambio $\hat{\zeta} = \zeta e^{i\eta(g)}$, entonces (2.4) se escribe $\hat{\zeta}'' = \hat{\zeta}' \hat{\zeta}$, siendo por tanto el grupo $\tilde{G}$ producto directo de G por $U(1)$.

sólo hay una cuantización posible (aunque en dimensión 1+1 posee dos clases de cociclos y por tanto dos cuantizaciones no equivalentes).

Sin embargo, existen grupos de Lie con cohomología trivial (todos los grupos de Lie semisimples de dimensión finita, por ejemplo, o el grupo de Poincaré), y que por consiguiente no admiten extensiones centrales que no puedan ser llevadas a producto directo mediante una adecuada reparametrización. No obstante lo anterior, puede existir una clase de cobordes que se comporten como cociclos (denominados pseudocociclos), en el sentido de que al realizar una contracción del grupo[3] se convierten en verdaderos cociclos. Esto ocurre, por ejemplo, con el grupo de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$, que tiene cohomología trivial pero que al hacer la contracción $c \to \infty$ adquiere cohomología, convirtiéndose en Galileo. Podemos ver esto pensando en que la función generatriz que en Poincaré genera los pseudocociclos no tiene límite $c \to \infty$, mientras el coborde sí lo tiene, convirtiéndose de esta forma en un verdadero cociclo.

Se puede demostrar (sin recurrir al argumento de la contracción de grupos) que estos pseudocociclos generan una verdadera cohomología de Čech, interpretando el grupo G como un fibrado principal (en el caso de grupos semisimples, la fibra la constituye un subgrupo de Cartan), véase para ello [AA 85b].

Una forma de construir pseudocociclos consiste en partir de funciones generatrices que sean lineales (localmente) en los parámetros de la fibra (y que harán el papel de "tiempos"). Por ejemplo, en el grupo de Poincaré se generan los pseudocociclos mediante funciones lineales en a^0 $(= ct)$, y en $SU(2)$ (el grupo de las rotaciones) mediante funciones localmente lineales en θ, donde $\eta = e^{i\theta}$ es el parámetro del subgrupo de Cartan.

En definitiva, el punto de partida de la CSG es un grupo de Lie $\tilde{G}$ que es extensión (o pseudoextensión) central del grupo G de semiinvariancia (o invariancia) de un sistema físico. Una vez que tenemos el grupo $\tilde{G}$ en una parametrización determinada, $\tilde{g} = (g^{(i)}, \zeta) \in \tilde{G}$, con $g^{(i)} \in G$ y $\zeta \in U(1)$, junto con la ley de grupo:

$$\begin{aligned} g''^{(i)} &= g''^{(i)}(g', g) \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)} , \end{aligned}$$

podemos calcular los campos de vectores invariantes por la izquierda asociados a cada parámetro:

$$\tilde{X}_i^L = \left.\frac{\partial g''^{(j)}}{\partial g^{(i)}}\right|_{g=e,g'=g} \frac{\partial}{\partial g(j)} + \left.\frac{\partial \zeta''}{\partial g^{(i)}}\right|_{\tilde{g}=\tilde{e},g'=g} \Xi , \tag{2.5}$$

y los campos de vectores invariantes por la derecha:

$$\tilde{X}_i^R = \left.\frac{\partial g''^{(j)}}{\partial g'^{(i)}}\right|_{g'=e} \frac{\partial}{\partial g(j)} + \left.\frac{\partial \zeta''}{\partial g'^{(i)}}\right|_{\tilde{g}'=\tilde{e}} \Xi . \tag{2.6}$$

---

[3]Una contracción significa hacer el grupo más abeliano tendiendo a cero algunos parámetros que aparecen en las constantes de estructura del álgebra, anulando de esta forma algunos de los conmutadores.

En general, a los campos de vectores de G los denotaremos sin tilde, y a los de $\tilde{G}$ con una tilde, de forma que

$$\tilde{X}_i^L = X_{(i)}^L + \tilde{X}_i^{L(\zeta)}\Xi, \tag{2.7}$$

donde $\Xi \equiv \tilde{X}_\zeta^L = \tilde{X}_\zeta^R = i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$, y $\tilde{X}_i^{L(\zeta)}$ es la componente en Ξ del campo $\tilde{X}_i^L$ (e igual para los derechos).

Una vez que hemos obtenido los campos de vectores, podemos calcular las 1-formas invariantes por la izquierda, empleando la propiedad $\theta^{L\,(i)}(\tilde{X}_j^L) = \delta_j^i$. A partir de ellas construimos la 1-forma canónica invariante por la izquierda, $\theta^L = \tilde{X}_{(i)}\,\theta^{L\,(i)}$, donde $\tilde{X}_{(i)} = \tilde{X}_i^L\Big|_{g=e}$. De todas ellas, la que nos interesa es la componente en $U(1)$, $\Theta \equiv \theta^{L\,(\zeta)}$, que será nuestra 1-forma de cuantización. Sin embargo Θ tiene núcleo, así que $d\Theta$ no es una forma simpléctica; es tan sólo presimpléctica.

Definimos el módulo característico como $\mathcal{G}_\Theta = \left\{\tilde{X}/i_{\tilde{X}}\Theta = 0 = i_{\tilde{X}}d\Theta\right\}$, es decir, como $Ker\Theta \cap \mathrm{Ker}d\Theta$, que define un sistema integrable de campos de vectores, de tal modo que $\left(\tilde{G}/\mathcal{G}_\Theta, d\Theta/\mathcal{G}_\Theta\right)$ es una variedad simpléctica. El módulo característico es efectivamente un módulo, pues si $\tilde{X} \in \mathcal{G}_\Theta$ se tiene que $f(g)\tilde{X} \in \mathcal{G}_\Theta$ donde $f(g)$ es cualquier funcion sobre el grupo G . Se puede demostrar que $\mathcal{G}_\Theta$ es generado por una subálgebra (la subálgebra característica) de $\mathcal{G}$, que coincide (en la identidad) con el núcleo del cociclo del álgebra de Lie $\Sigma : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to R$, que caracteriza la extensión y que asigna 1 a los pares de campos canónicos conjugados y 0 al resto.

Los generadores $\tilde{X}^L$ que se encuentran en el módulo característico son los asociados a las variables que no tienen carácter dinámico (que podríamos llamar "tiempos"), de forma que al conmutarlas con todas las demás nunca dan Ξ.

En el formalismo de la CSG, los campos de vectores invariantes por la derecha jugarán el papel de operadores (pre)cuánticos (salvo constantes multiplicativas) actuando sobre el espacio de Hilbert de las funciones complejas sobre el grupo, $\Psi(\tilde{g}), \tilde{g} \in \tilde{G}$, verificando la condición de $U(1)$-función, $\Xi\Psi = i\Psi$, con lo que el parámetro ζ factoriza de forma trivial, $\Psi(\zeta, g) = \zeta\Phi(g)$, dando cuenta de la fase arbitraria que caracteriza a las funciones de onda en la Mecánica Cuántica. Pero esta representación es altamente reducible, como se puede comprobar por la existencia de operadores no triviales, los campos izquierdos, que conmutan con los operadores cuánticos, es decir, los campos derechos. Por lo tanto, habrá que reducir la representación exigiendo que el máximo posible de campos izquierdos se anulen sobre el espacio de las funciones de onda *físicas*.

La misión de reducir la representación lo lleva a cabo lo que se denomina *polarización*, $\mathcal{P}$, que es un conjunto de campos invariantes por la izquierda los cuales exigiremos que se anulen sobre la función de onda, $\tilde{X}^L\Psi = 0, \forall\tilde{X}^L \in \mathcal{P}$, restringiendo así los argumentos de los que depende ésta.

Es natural exigir que $\mathcal{P}$ incluya a la subálgebra característica, ya que los campos que forman ésta describen tan sólo la evolución "temporal" del sistema, siendo las ecuaciones de movimiento imprescindibles para reducir la representación. Además, para que el

sistema de operadores sea integrable es necesario que cierre álgebra, por tanto podemos definir la polarización como:

Definición.- *Una polarización (de primer orden) completa es una subálgebra maximal izquierda que contiene al módulo característico y que excluye a* Ξ.

La exclusión de Ξ evita que en la polarización estén presentes pares coordenada-momento, que al conmutar dan Ξ. En definitiva, una polarización contiene a los generadores del módulo característico y la mitad de cada uno de los pares coordenada-momento. Esto nos dará una representación determinada para la función de onda, dependiendo ésta sólo de algunos de los parámetros del grupo (del resto dependará de forma bien determinada o no dependerá en absoluto). La irreducibilidad de la representación constituida por los operadores cuánticos (campos de vectores invariantes por la derecha) actuando sobre las $U(1)$-funciones sobre el grupo polarizadas esta garantizada por la maximalidad de la polarización (siempre que el sistema no sea anómalo, en cuyo caso hay que recurrir a otras técnicas para reducir la representación, véase el Capítulo 10).

Para ilustrarlo, veamos el caso simple de la cuantización de la partícula libre galileana sin espín. La ley de grupo para el grupo de Galileo extendido es[4]:

$$\begin{aligned} t'' &= t' + t \\ \vec{x}'' &= \vec{x}' + R'(\vec{\epsilon})\,\vec{x} + \vec{v}'t \\ \vec{v}'' &= \vec{v}' + R'(\vec{\epsilon})\,\vec{v} \\ \vec{\epsilon}'' &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}'^{\,2}}{4}}\,\vec{\epsilon} + \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\,\vec{\epsilon}' + \frac{1}{2}\vec{\epsilon}' \times \vec{\epsilon} \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{im[\vec{x}'R'\vec{v} + t(\vec{v}'R'\vec{v} + v'^2/2)]/\hbar}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde R es la matriz de rotaciones (véase el Apéndice A). Hemos introducido dos constantes, una de ellas es la masa m de la partícula (el parámetro que caracteriza la extensión), y la otra, con dimensiones de acción, es $\hbar$, que en principio no estaba en el grupo, pero se requiere para hacer que el exponente del cociclo sea adimensional. Ésta es una forma elegante de introducir la constante de Planck, que, como veremos más tarde, no se requiere para obtener la solución clásica, ya que el grupo se extiende por la recta real en vez de por $U(1)$, con lo que el cociclo es aditivo en lugar de multiplicativo y no hay necesidad de que sea adimensional.

Los campos de vectores invariantes por la izquierda son:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^L_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{1}{2}mv^2\,\Xi \\ \tilde{X}^L_{\vec{x}} &= R\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \end{aligned}$$

[4]Esta ley se puede obtener de forma sencilla a través de la actuación del grupo sobre el espacio-tiempo euclídeo.

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^L_{\vec{v}} &= R\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} + m\vec{x}\,\Xi\right) \\
\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} &= X^{L\ SU(2)}_{(\vec{\epsilon})} \\
\tilde{X}^L_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi\,,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

y los campos invariantes por la derecha son:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_{t} &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}^R_{\vec{x}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + m\vec{v}\,\Xi \\
\tilde{X}^R_{\vec{v}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{v}} + t\frac{\partial}{\partial \vec{x}} + mt\vec{v}\,\Xi \\
\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}} &= X^{R\ SU(2)}_{(\vec{\epsilon})} + \vec{x}\times\frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \vec{v}\times\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \\
\tilde{X}^R_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi\,,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $X^{L\ SU(2)}_{(\vec{\epsilon})}$ (e igual para el derecho) es el generador del grupo de rotaciones $SU(2)$ solamente y sin pseudoextender (véase el Apéndice A, haciendo allí $j = 0$, ya que estamos en el caso sin espín).

Los conmutadores (no nulos) de los campos derechos son (los de los izquierdos difieren en un signo global):

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}^R_{x^i}, \tilde{X}^R_{v^j}] &= -\delta_{ij}\frac{m}{\hbar}\Xi \\
[\tilde{X}^R_{t}, \tilde{X}^R_{v^i}] &= \tilde{X}^R_{x^i} \\
[\tilde{X}^R_{\epsilon^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] &= -\eta_{ij.}{}^{k}\tilde{X}^R_{\epsilon^k} \\
[\tilde{X}^R_{x^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] &= -\eta_{ij.}{}^{k}\tilde{X}^R_{x^k} \\
[\tilde{X}^R_{v^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] &= -\eta_{ij.}{}^{k}\tilde{X}^R_{v^k}\,.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

La 1-forma de cuantización, dual del generador Ξ, es

$$\Theta = -\vec{x}\cdot d\vec{p} - \frac{p^2}{2m}dt + \frac{d\zeta}{i\zeta}\,, \tag{2.12}$$

de donde podemos calcular el módulo caracerístico:

$$\mathcal{G}_\Theta = < \tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} > \ . \tag{2.13}$$

El módulo característico, como vemos, está generado por el campo de vectores asociado al tiempo y por los asociados a las rotaciones (para el caso con espín dos de ellos saldrán fuera al adquirir éstos carácter dinámico).

Es fácil encontrar aquí una polarización completa, que es:

$$\mathcal{P} =< \tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}}, \tilde{X}^L_{\vec{x}} > \ . \tag{2.14}$$

Imponiendo las condiciones de polarización, $\tilde{X}^L\Psi = 0, \forall \tilde{X}^L \in \mathcal{P}$, junto con la condición de $U(1)$-función, llegamos a una función de onda de la forma:

$$\Psi(\zeta, \vec{x}, \vec{v}, t, \vec{\epsilon}) = \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}mv^2 t}\varphi(\vec{v})\,, \tag{2.15}$$

donde $\varphi(\vec{v})$ es una función arbitraria, salvo normalizacion[5].

Los operadores cuánticos los definiremos ahora proporcionales a los campos derechos:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}} &= i\hbar\tilde{X}^R_t \\
\hat{\vec{\mathrm{P}}} &= -i\hbar\tilde{X}^R_{\vec{x}} \\
\hat{\vec{\mathrm{K}}} &= \frac{i\hbar}{m}\tilde{X}^R_{\vec{v}} \\
\hat{\vec{\mathrm{J}}} &= -i\hbar\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}\,.
\end{aligned}$$

Su actuación sobre la función de onda una vez restringida a sólo $\varphi(\vec{v})$, pues ésta es la que corresponde a la forma estándar de la representación irreducible, es:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}}\varphi(\vec{v}) &= \frac{1}{2}mv^2\varphi(\vec{v}) \\
\hat{\vec{\mathrm{P}}}\varphi(\vec{v}) &= m\vec{v}\varphi(\vec{v}) \\
\hat{\vec{\mathrm{K}}}\varphi(\vec{v}) &= i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\varphi(\vec{v}) \\
\hat{\vec{\mathrm{J}}}\varphi(\vec{v}) &= -i\hbar\vec{v}\times\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\varphi(\vec{v})\,.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Se aprecia claramente que estos operadores toman las expresiones usuales de la Mecánica Cuántica. Hay que resaltar que los operadores $\hat{\mathrm{E}}$ y $\hat{\vec{\mathrm{J}}}$ se escriben en función de $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ y $\hat{\vec{\mathrm{K}}}$, de forma que:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{\mathrm{P}}}\right)^2 \\
\hat{\vec{\mathrm{J}}} &= -\hat{\vec{\mathrm{P}}}\times\hat{\vec{\mathrm{K}}}\,.
\end{aligned}$$

[5]La medida de integración que usamos para el producto escalar es la medida invariante sobre el grupo, que podemos construir mediante el producto exterior de todas las 1-formas izquierdas (de este modo tiene derivada de Lie nula respecto a los campos derechos). El producto escalar así definido, si el grupo no es compacto, requerirá un proceso de regularización, que en la mayoría de los casos será trivial (véase el Capítulo 7 para un caso en el que la regularización no es trivial).

Esto es un hecho general que ocurre también en Mecánica Clásica entre invariantes Noether. Los invariantes Noether asociados a variables no simplécticas (cuyos corchetes de Poisson no dan uno), como E y $\vec{J}$ (véase sección siguiente), se escriben siempre en función de los invariantes Noether asociados a variables simplécticas, como $\vec{\mathrm{K}}$ y $\vec{\mathrm{P}}$. En el caso de Galileo hemos conseguido escribir los operadores que podríamos llamar no básicos en función de los básicos, aunque esto en general no es posible, como ocurre en el caso de que existan anomalías, de manera que sólo es posible hacerlo para algunos valores de los parámetros que caracterizan la representación (véase los Capítulos 4 y 10).

Una vez que hemos obtenido la solución en el espacio de momentos ("representación" de momentos), nos preguntamos si podemos encontrar otra polarización completa que nos dé la solución en otro espacio diferente, como sería la del espacio de configuración ("representación" de posición). La respuesta es negativa, ya que si queremos que la función de onda final no dependa de $\vec{v}$ (o que dependa a través de una función fija, común a todas las soluciones), hemos de incluir en la polarización el campo $\tilde{X}^L_{\vec{v}}$, pero el conmutador de éste con $\tilde{X}^L_t$ es $\tilde{X}^L_{\vec{x}}$, que con $\tilde{X}^L_{\vec{v}}$ da Ξ, con lo cual cierran todo el álgebra. Para resolver este problema hemos de generalizar el concepto de polarización completa para cuantizar el sistema en una "representación" diferente o, como ocurre en algunos sistemas denominados anómalos, simplemente para cuantizarlos ya que carecen de una polarización completa. Esto lo hacemos introduciendo el concepto de polarización de orden superior, que por su relevancia merece un estudio aparte que se hará en el Capítulo 4. Ahora estudiaremos la Teoría Clásica asociada a nuestro sistema cuántico.

2.5 Invariantes Noether y Teoría Clásica.

La variedad de soluciones clásica viene parametrizada por los invariantes Noether, que en el formalismo de la CSG se obtienen de forma sencilla mediante

$$F_i = i_{\tilde{X}^R_i}\Theta\,. \tag{2.17}$$

Para los invariantes Noether siempre es posible expresar los no básicos en función de los básicos. Por ejemplo, en el caso de Galileo, los invariantes Noether son:

$$\begin{aligned}
F_{\vec{x}} &\equiv i_{\tilde{X}^R_{\vec{x}}}\Theta = m\vec{v} \equiv \vec{\mathrm{P}} \\
F_{\vec{v}} &\equiv i_{\tilde{X}^R_{\vec{v}}}\Theta = -\vec{a} + t\vec{v} \equiv -\mathrm{K} \\
F_t &\equiv i_{\tilde{X}^R_t}\Theta = -\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{\vec{\mathrm{P}}^2}{2m} \\
F_{\vec{c}} &\equiv i_{\tilde{X}^R_{\vec{c}}}\Theta = m\vec{a}\times\vec{v} \equiv \hat{\mathrm{J}} = \vec{\mathrm{K}}\times\vec{\mathrm{P}}\,.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

El formalismo de la CSG también permite obtener la teoría clásica completa, es decir, incluyendo la evolución temporal. Esto se consigue aplicando el mismo formalismo pero

en lugar de al grupo $\tilde{G}$, a otro grupo $\bar{G}$, que es la extensión del grupo G por la recta real en lugar de por $U(1)$. El nuevo parámetro será $\theta \in R$. El generador vertical Ξ es ahora $\Xi = \frac{\partial}{\partial\theta}$, y la condición de $U(1)$-función, $\Xi\Psi = i\Psi$, se substituye por la de $\Xi\Psi = 1$.

Sigamos con el ejemplo del grupo de Galileo. La ley de grupo es ahora la misma que antes pero substituyendo la de ζ por la de θ, que será de la forma:

$$\theta'' = \theta' + \theta + m[\vec{x}\,'R'\vec{v} + t(\vec{v}\,'R'\vec{v} + v'^2)/2]\,, \tag{2.19}$$

donde ya no es necesario introducir el parámetro $\hbar$ puesto que θ puede tener dimensiones. Es decir, la teoría clásica no requiere la constante de Plank. La teoría clásica es la expresión local de la cuántica, en el sentido de que la recta real R puede ser considerada como una carta local de $U(1)$, de la forma $\zeta = e^{\frac{i}{\hbar}\theta}$. Es decir, el límite clásico consiste en abrir la circunferencia $U(1)$. Pero no siempre es posible abrir la circunferencia, dependerá del grupo G que consideremos. Por esta razón no podemos afirmar que el límite clásico sea hacer $\hbar \to 0$. Por ejemplo, el espín no admite análogo clásico, es un fenomeno puramente cuántico ya que el grupo $SU(2)\tilde{\otimes}U(1)$ no admite que se "abra" la circunferencia sin romper su estructura. Podemos verlo mejor si pensamos que $SU(2)$ (que puede pseudoextenderse por $U(1)$) no admite pseudoextensiones por R. Esto es debido a que el fibrado principal $SU(2)\tilde{\otimes}U(1)$ lo es gracias a la estructura de fibrado principal de $SU(2)$ con base S^2 y grupo estructural $U(1)$ (que es donde la pseudocohomología es una verdadera cohomología de Čech), pero no es posible construir un fibrado principal (con estructura de grupo) que tenga como base S^2 y fibra R

La condición $\Xi\Psi = 1$ hace que la función de onda se descomponga de la forma $\Psi(\theta, g) = \theta + \Phi(g)$. Para el caso de Galileo, imponiendo la polarización completa se tiene que la función clásica es de la forma $\Phi = \Phi(\vec{v}, t)$, satisfaciendo ésta la ecuación:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = 0\,, \tag{2.20}$$

que es precisamente la ecuación de Hamilton-Jacobi sin más que identificar Φ con la función principal S de Hamilton. Los operadores son ahora $\vec{\mathrm{P}}\Phi = \vec{p}$ y $\vec{\mathrm{K}}\Phi = \frac{\partial}{\partial\vec{p}}\Phi$.

Como vemos, la CSG también nos proporciona el límite clásico de la teoría cuántica, en su version de Hamilton-Jacobi, por lo que puede considerarse un formalismo unificador en el sentido de que las versiónes clásica y cuántica de un sistema no se construyen de forma diferente, sino que que se construyen del mismo modo sólo que a partir de grupos "diferentes", en el sentido de que en un caso el grupo de simetría se extiende por R y en el otro por $U(1)$.

Capítulo 3

CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA

3.1 Introducción

La CSG, tal y como la hemos desarrollado hasta ahora, sólo nos permite cuantizar grupos de Lie conexos (y simplemente conexos), y donde el grupo estructural que caracteriza el fibrado $\widetilde{G} \to G$ es $U(1)$ o R, pero no otro grupo más grande (no abeliano, en general). La Cuantización Algebraica (CA, Algebraic Quantization on a Group, AQG, en inglés), desarrollada posteriormente [ANR 89] (véase también [ACG 95], donde se estudian algunas aplicaciones interesantes), supone una generalización de la CSG que permite ambas cosas:

- por un lado permite la inclusión de transformaciones discretas en el formalismo (como la inversión espacial, las permutaciones, etc ...) y el expresar todas las operaciones en términos de transformaciones finitas en lugar de las infinitesimales empleadas hasta ahora,

- y por otro lado permite generalizar el grupo estructural $U(1)$ a un grupo más grande T (que puede ser no central, e incluso no abeliano), de forma que ahora $\widetilde{G}$ tenga estructura de fibrado principal (derecho, si T es no central) con grupo estructural T, y que T a su vez tenga estructura de fibrado principal con grupo estructural $U(1)$. La condición de $U(1)$-función $\Xi\Psi = i\Psi$ impuesta hasta ahora también habrá que generalizarla de forma apropiada a una condición de T-función, con la aparición de fenómenos nuevos, tales como las cuantizaciones no equivalentes y los operadores malos. La necesidad de considerar un grupo estructural T más grande que $U(1)$ viene impuesta por el requerimiento de incluir ligaduras dentro del formalismo de cuantización.

Por lo tanto, vamos a desarrollar la CA en dos pasos, generalizando la CSG a transformaciones finitas primero, y posteriormente generalizando el grupo estructural $U(1)$ a un grupo más grande T.

3.2 Cuantización sobre grupos con transformaciones finitas

En esta sección damos una reformulación de la CSG empleando transformaciones finitas en lugar de generadores infinitesimales. Cuando el grupo sea conexo ambas formulaciones serán equivalentes, pero la versión finita tiene la ventaja de permitirnos trabajar con transformaciones discretas, es decir, con grupos no conexos.

Al igual que en la CSG, partimos en primer lugar de la ley de grupo $g'' = g' * g$. A partir de ésta obtenemos el *subgrupo característico*, que es la contrapartida finita de la subálgebra característica (núcleo del cociclo del álgebra de Lie). El subgrupo característico G_C se define, por tanto, como el máximo subgrupo horizontal ($G_C \cap U(1) = \mathbf{1}_{\widetilde{G}}$) tal que

$$[G_C, \widetilde{G}] \cap U(1) = \mathbf{1}_{\widetilde{G}} \,, \tag{3.1}$$

donde $[g, g'] \equiv g * g' * g^{-1} * g'^{-1}$ es el conmutador del grupo. El siguiente punto es definir el concepto de *subgrupo de polarización completa* $G_{\mathcal{P}}$ (versión finita de la subálgebra de polarización completa), que es un subgrupo maximal que incluye al subgrupo característico y que es horizontal,

$$G_C \subset G_{\mathcal{P}} \,, \quad G_{\mathcal{P}} \cap U(1) = \mathbf{1}_{\widetilde{G}} \,. \tag{3.2}$$

El espacio de Hilbert se define como el espacio de funciones complejas $\Psi(g)$ sobre $\widetilde{G}$ que verifican la condición de $U(1)$-función por la izquierda[1]

$$\Psi(\zeta * g) = \zeta \Psi(g) \,, \tag{3.3}$$

y que están polarizadas por la derecha,

$$\Psi(g * G_{\mathcal{P}}) = \Psi(g) \,. \tag{3.4}$$

En particular, las traslaciones derechas por el subgrupo característico serán las transformaciones de evolución generalizadas, dando cuenta, por ejemplo. de la versión finita de la ecuación de Schrödinger (cuya versión infinitesimal se puede obtener sin más que desarrollar en serie de potencias en t y quedándose con el primer término del desarrollo).

Los operadores cuánticos, en esta formulación, serán todas las transformaciones del grupo $\widetilde{G}$ actuando por la izquierda. Es decir,

$$\hat{g}' \Psi(g) = \Psi(g' * g) \,. \tag{3.5}$$

De esta forma, obtenemos una representación irreducible del grupo G sobre funciones complejas sobre el propio grupo (polarizadas) mediante la actuación izquierda del mismo.

Una vez que hemos reformulado la CSG en términos de transformaciones finitas, ya estamos preparados para generalizar la cuantización a sistemas con ligaduras, es decir, con grupo estructural T más grande.

---

[1]Como el subgrupo $U(1)$ es central da igual imponer la condición de $U(1)$-función por la izquierda que por la derecha, pero lo hacemos por la izquierda por consistencia con el caso en que T es más grande que $U(1)$.

3.3 Cuantización algebraica: cuantización con ligaduras

Generalizar el grupo $U(1)$ a otro más grande T, significa que el grupo $\tilde{G}$ es ahora un grupo con estructura de fibrado principal derecho con grupo estructural T. El grupo T, a su vez, tendrá estructura de fibrado principal con fibra $T_0 \equiv U(1)$ o R. Denominaremos Cuantización Algebraica (CA) a la generalización de la CSG permitiendo transformaciones discretas y un grupo estructural T mas grande que $U(1)$.

La fibración de T por $U(1)$ será en general no trivial. Si la fibración fuese no trivial. eso implicaría que en el grupo T existirían pares coordenada-momento, de manera que, en principio, no se puede imponer todo T como ligaduras de forma consistente. Este extremo lo consideraremos con mas detalle en la seccion siguiente, por lo que en toda esta sección la fibración de T por $U(1)$ es trivial (T se puede escribir como $T = \check{T} \times U(1)$, con $\check{T}$ siendo el subgrupo de ligaduras propiamente dicho.

Vayamos, pues, con los fundamentos de la CA, para el caso en que la fibración de T por $U(1)$ es trivial. Las definiciones de subgrupo característico y de polarización permanecen inalteradas (se definen siempre en relación con el subgrupo $U(1) = T_0$, es decir, la condición de horizontalidad se define siempre en términos de un subgrupo unidimensional (central).

El siguiente paso es considerar una representación D del grupo T en un espacio vectorial complejo E. Si el grupo T es no abeliano, sus representaciones pueden ser no unidimensionales, por lo que la dimensión de E puede ser mayor que uno.

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ está constituido por aquellas funciones sobre el grupo $\tilde{G}$ E-valoradas que satisfacen la condición de polarización (3.4) y verifican la condicion de T-función por la izquierda:

$$\Psi(g_T * g) = D(g_T)\Psi\,. \tag{3.6}$$

Hay que hacer notar que la construcción del espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ depende de la representación particular D^α de T que elijamos, donde α es un índice que caracteriza la representación, y por tanto, pertenece al dual de T, que definimos como el espacio de representaciones irreducibles de T. Si la representación fuese reducible, podría descomponerse en suma directa de representaciones irreducibles, de forma que D podría escribirse por cajas y el espacio vectorial E se descompondría en suma directa de espacios vectoriales invariantes por todo el grupo T. Por tanto, nos restringiremos a representaciones D^α irreducibles de forma que el espacio de representación E no contenga subespacios invariantes.

Así pues, denotaremos por D^α la representación de T escojida, y por $\mathcal{H}^\alpha(\tilde{G})$ al espacio de Hilbert correspondiente. Tan sólo nos faltan los operadores cuánticos, que, al igual que en la sección anterior, se definen como los elementos de $\tilde{G}$ actuando por la izquierda. Sin embargo, podría ocurrir (como es de hecho el caso cuando T es no central) que no todos

los operadores cuánticos preserven el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{\alpha}(\tilde{G})$, hecho fácil de entender pues la condición de T-función se impone por la izquierda, que es por donde actúan los operadores cuánticos (vistos como transformaciones finitas), con lo que es posible que no todas las transformaciones de $\tilde{G}$ sean compatibles con la acción de las de T.

3.3.1 Operadores buenos

Llamaremos *operadores buenos* a aquellas transformaciones de $\tilde{G}$ que preservan el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{\alpha}(\tilde{G})$, es decir, que son compatibles con la condición de T-función. Por contraposición, a las transformaciones que no preservan esta condición los llamaremos operadores *malos*, aunque algunos de estos operadores tienen interpretación física, pues pueden interpretarse como transformaciones que cambian de una cuantización a otra no equivalente.

La cuestión que surge ahora es la de caracterizar los operadores buenos. Esta cuestión no es sencilla, ya que no podemos dar condiciones necesarias, tan sólo suficientes, para caracterizarlos. Denotaremos por $G_{\mathcal{H}}$ el conjunto (grupo?) de operadores buenos, de forma que $g_{\mathcal{H}} \in G_{\mathcal{H}}$ si

$$(\hat{g}_{\mathcal{H}}\Psi)(g_T * g) = D(g_T)(\hat{g}_{\mathcal{H}}\Psi)(g) \tag{3.7}$$

para toda $\Psi \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, para todo $g \in \tilde{G}$. La condición de función polarizada es preservada automáticamente por todos los operadores ya que las acciones derecha e izquierda conmutan. La condición anterior equivale a

$$\Psi(g_{\mathcal{H}} * g_T * g) = \Psi(g_T * g_{\mathcal{H}} * g) \tag{3.8}$$

para todas las funciones del espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$. A simple vista es fácil ver que si $g_{\mathcal{H}}$ conmuta con todo elemento g_T de T, entonces $g_{\mathcal{H}}$ es un operador bueno. Por tanto, el conmutar con todo T es una condición suficiente para ser operador bueno. En realidad, basta con que el conmutador (del grupo) de $g_{\mathcal{H}}$ con g_T sea un elemento del núcleo de $D(T)$, para que $g_{\mathcal{H}}$ sea operador bueno. Por tanto, el grupo $G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ que verifica

$$[G^{(1)}_{\mathcal{H}}, T] \subset Ker D(T)\,, \tag{3.9}$$

está incluido en $G_{\mathcal{H}}$.

Podemos obtener otra condición suficiente para encontrar operadores buenos, y ésta hace uso de la condición de polarización (3.4). Con un poco de cálculo se puede comprobar[2] que el grupo $G^{(2)}_{\mathcal{H}}$ que verifica

$$\mathrm{Ad}(\tilde{G})([G^{(2)}_{\mathcal{H}}, T]) \subset G_{\mathcal{P}} \tag{3.10}$$

está también incluido en $G_{\mathcal{H}}$ (Ad es la acción adjunta del grupo, $Ad(g)(g') = g * g' * g^{-1}$).

[2]Esta es de hecho la definición adoptada en [ANR 89], pero como veremos no da cuenta de todos los operadores buenos.

No es posible, a priori, dictaminar si $G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ y $G^{(2)}_{\mathcal{H}}$ son iguales, está incluido el uno en el otro, si intersectan no trivialmente o si lo hacen sólo en la identidad. Aparentemente no están relacionados, pues $G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ depende de la representación $D(T)$ elegida, y no depende del subgrupo de polarización, mientras que $G^{(2)}_{\mathcal{H}}$ depende de la polarización elegida pero no depende para nada de la representación $D(T)$.

Definimos $G'_{\mathcal{H}}$ como el mínimo grupo que contiene a $G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ y a $G^{(2)}_{\mathcal{H}}$, es decir, el grupo envolvente de la union de los dos grupos, construido con productos (con un número arbitrario de términos) de elementos de ambos grupos. Es fácil ver, por inducción, que $G'_{\mathcal{H}} \subset G_{\mathcal{H}}$, ya que cualquier elemento de $G'_{\mathcal{H}}$ se puede escribir como producto de elementos de $G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ y $G^{(2)}_{\mathcal{H}}$ y cada uno de ellos verifica (3.9) o (3.10). Sin embargo, puede haber operadores buenos que no verifiquen (3.9) ni (3.10), como son los elementos de $G'_{\mathcal{H}}$ que no están en $G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ ni en $G^{(2)}_{\mathcal{H}}$ (si es que ese conjunto es no vacío).

Esto agota, aparentemente, todas las posibilidades para los operadores buenos, y estaríamos tentados a decir que $G_{\mathcal{H}} = G'_{\mathcal{H}}$. Sin embargo, por construcción, $G'_{\mathcal{H}} \subset \tilde{G}$, y podría ocurrir que existiesen operadores que preservasen el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ y que no fuesen elementos de $\tilde{G}$, ni tan siquiera generadores de este (es decir, campos de vectores invariantes por la derecha que son los que generan las transformaciones izquierdas en el grupo). Estos operadores podrían estar en el álgebra envolvente del álgebra de Lie del grupo, por lo escapan de nuestro análisis. La única posibilidad sería encontrar esos operadores del álgebra envolvente que preservan el espacio de Hilbert, cerrar un álgebra de Lie (que puede ser de dimensión infinita) con el álgebra de Lie original, exponenciarlo y realizar la cuantización algebraica de este grupo. De esta forma, los operadores que antes eran del álgebra envolvente ahora son generadores del nuevo grupo y por tanto generan transformaciones finitas que serán operadores buenos que estarán en el nuevo $G_{\mathcal{H}}$.

En todos los ejemplos que hemos estudiado, ha resultado ser $G^{(2)}_{\mathcal{H}} = G^{(1)}_{\mathcal{H}}$ o $G^{(2)}_{\mathcal{H}} \subset G^{(1)}_{\mathcal{H}}$, y por tanto siempre $G'_{\mathcal{H}} = G^{(1)}_{\mathcal{H}}$. Parece ser, pues, que (3.9) agota todas las posibilidades para operadores buenos dentro del grupo.

3.4 Un ejemplo: partícula con velocidad constante

Vamos a aplicar, a modo de ejemplo, el formalismo de la CA a un sistema simple como es la particula libre Galileana sometida a la restricción de moverse con una velocidad dada. El sistema es el mismo que nos ha servido para ilustrar la CSG en el capítulo anterior, por lo que ahora, y por ser el grupo conexo (ya que no consideramos la inversion espacial) haremos el estudio con generadores infinitesimales en lugar de con transformaciones finitas.

La restricción de que la partícula se mueva con velocidad constante la podemos imponer si definimos el subálgebra de ligaduras $\mathcal{T}$ como $\mathcal{T} =< \tilde{X}^R_{\vec{x}}, \Xi >$, es decir, incluyendo las traslaciones en el subgrupo estructural T. Las representaciones de $\mathcal{T}$ son de la forma:

$$dD^{\vec{V}}(\Xi) = i\,, \quad dD^{\vec{V}}(\tilde{X}^R_{\vec{x}}) = \frac{i}{\hbar} m\vec{V}\,, \tag{3.11}$$

donde $\vec{V}$ es un vector constante de R^3 con dimensiones de velocidad. Para cada elección de $\vec{V}$ tenemos una representación no equivalente de $\mathcal{T}$ y por tanto una cuantización no equivalente de $\tilde{G}$. La condición de T-función se escribe entonces:

$$\tilde{X}^R_{\vec{x}}\Psi^{\vec{V}} = \frac{i}{\hbar}m\vec{V}\Psi^{\vec{V}}\,, \tag{3.12}$$

además de la condición usual de $U(1)$-función $\Xi\Psi^{\vec{V}} = i\Psi^{\vec{V}}$. Si imponemos la condición de T-función a las funciones polarizadas (2.15), obtenemos para $\varphi^{\vec{V}}(\vec{v})$ la forma:

$$\varphi^{\vec{V}}(\vec{v}) = \delta(\vec{v} - \vec{V})\,, \tag{3.13}$$

es decir, representan estados de velocidad constante e igual a $\vec{V}$.

Ahora tan sólo nos queda calcular los operadores buenos. Si empleamos la caracterización (3.10) (o su contrapartida en el álgebra de Lie), que no depende de la representación elegida para $\mathcal{T}$, obtenemos que el subálgebra de operadores buenos es:

$$\mathcal{G}^{(2)}_{\mathcal{H}} =< \tilde{X}^R_t, \tilde{X}^R_{\vec{x}} > \ . \tag{3.14}$$

Por tanto, tan sólo el operador energía y el operador momento son buenos, mientras que el generador de los boosts (el operador posición) y las rotaciones son operadores malos, según el criterio dado por (3.10).

Que el generador de los boosts es un operador malo es claro desde el punto de vista físico, ya que genera cambios de velocidad en la función de onda y por tanto, lo podriamos interpretar como un generador de cambio de representación. Es decir, un boost finito en $\vec{v}_0$ pasaría la función de onda $\varphi^{\vec{V}}(\vec{v})$ a $\varphi^{\vec{V}+\vec{v}_0}(\vec{v})$, que se halla en un espacio de Hilbert perteneciente a otra cuantización no equivalente.

También podríamos pensar lo mismo del generador de las rotaciones: $\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}$ es un operador malo ya que las rotaciones finitas "rotan" el vector $\vec{V}$, cambiándolo a otro $R(\vec{\epsilon})\vec{V}$, por lo que la función de onda pasaría a estar en otro espacio de Hilbert correspondiente a una cuantización no equivalente. Sin embargo, es fácil ver que si el "eje" de la rotación coincide con la dirección del vector $\vec{V}$, este no cambia, por lo que las rotaciones en la dirección de $\vec{V}$ serían operadores buenos, y el generador de rotaciones en esa dirección también, es decir, $\vec{V}\cdot\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}$ es un operador bueno. La caracterización (3.10) no da por tanto cuenta de este operador bueno, cosa que es fácil de entender si tenemos en cuenta que esta caracterización no depende de la representación de $\mathcal{T}$ elegida mientras que $\vec{V}\cdot\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}$ sí.

La caracterización (3.9) sí da cuenta de este operador bueno, ya que (3.9) depende de la representación de $\mathcal{T}$ elegida. Es fácil ver que el núcleo de $dD^{\vec{V}}(\tilde{X}^R_{\vec{x}})$ viene dado por la proyección de $\tilde{X}^R_{\vec{x}}$ sobre el plano ortogonal a $\vec{V}$, de donde se deduce a partir de (3.9) que el subálgebra de operadores buenos es

$$\mathcal{G}^{(1)}_{\mathcal{H}} =< \tilde{X}^R_t, \tilde{X}^R_{\vec{x}}, \vec{V}\cdot\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}} > \tag{3.15}$$

Vemos por tanto con este ejemplo tan simple que las caracterizaciones del subgrupo de operadores buenos (3.9) y (3.10) no coinciden, siendo en este caso la primera la que da cuenta de más operadores buenos, incluyendo a los de la segunda.

3.5 Caso en que el subgrupo de ligaduras posee dinámica

Esta sección la vamos a dedicar al caso en que la fibración por $U(1)$ del grupo T es no trivial, es decir, T contiene pares coordenada-momento que dan $U(1)$ bajo conmutación (bien sea en el álgebra o en el grupo). Cuando se da esta situación, en general no es posible imponer todo el grupo T como ligaduras, tan sólo podremos imponer un subgrupo T_B de T. Ejemplos de sistemas en los que el subgrupo de ligaduras posee dinámica son la cuerda bosónica (con subgrupo de ligaduras Virasoro) (véase [ANR 89]) y el grupo de Heisenberg-Weyl sobre el toro con forma simpléctica de clase fraccionaria (con aplicación física al Efecto Hall Cuántico Fraccionario, véase el Capítulo 9 y [ACG 95]).

La razón por la que no podemos imponer todo T como ligaduras es la misma por la que no podemos imponer todo el grupo $\tilde{G}$ como restricción para reducir la representación en la CSG y hemos de elegir un subgrupo o subálgebra de polarización, pues si impusiesemos todo el grupo la representación que obtendríamos sería trivial.

Existe otra justificación más cercana a la intuición física. Ilustremoslo con un ejemplo. Supongamos que T contiene a las traslaciones y los boosts como subgrupos, los cuales obviamente forman un par coordenada-momento. Imponer todo T como ligaduras significaría imponer que el sistema tuviese posición y momento definidos, lo cual violaría el principio de incertidumbre de Heisenberg (que está contenido en el propio formalismo de la CSG). No podemos, pues, imponer como ligaduras coordenadas y momentos al mismo tiempo.

La construcción del subgrupo T_B es muy simple. Elejimos un subgrupo de polarización T_p de T, que se define del mismo modo que $G_{\mathcal{P}}$ respecto $\tilde{G}$, y tomamos $T_B = T_p \times U(1)$. El grupo T_B tiene fibración trivial por $U(1)$ porque T_p es horizontal y no contiene pares coordenada-momento. Se procede entonces con el formalismo de la CA tal y como hemos descrito en la sección precedente pero substituyendo el grupo T por el subgrupo T_B en todas partes.

Lo que no resulta tan sencillo es la elección del subgrupo de polarización T_p, por diversas razones:

- diferentes elecciones de subgrupos T_p, que considerados dentro de T darían lugar a representaciones equivalentes de T, cuando se imponen como ligaduras en $\tilde{G}$ dan lugar a cuantizaciones no equivalentes.

- en determinados casos (cuando el sistema tiene un estado de vacío), debe existir una cierta relación entre la polarizacion T_p de T y la polarización $G_{\mathcal{P}}$ de $\tilde{G}$, de lo contrario las condiciones de ligadura impuestas por T_p resultan ser incompatibles con la representación de $\tilde{G}$. En este caso el subgrupo de polarización T_p debe estar incluido en $G'_{\mathcal{P}}$, que se define como el subgrupo dual al subgrupo de polarización $G_{\mathcal{P}}$, en el que se han intercambiado coordenadas por momentos. En términos de álgebras de Lie, si $\mathcal{P}$ es el subálgebra izquierda de polarización, su dual $\mathcal{P}'$ es la

versión derecha de $\mathcal{P}$ cambiando las coordenadas por los momentos, por lo que $\mathcal{T}_p$ debe estar incluido en $\mathcal{P}'$.

- si el sistema tiene una simetría de tipo gauge, los generadores de esta simetría deben estar en el módulo característico. Sin embargo, si el grupo de gauge es anomálo (en el sentido de la anomalía de Virasoro o de Schrödinger), el grupo de gauge entero no cabe en la polarización, por lo que podremos incluir sólo (grosso modo) la mitad de los generadores, el resto los tendremos que imponer como ligaduras, formando parte del grupo T. En realidad lo que se hace es que se incluye todo el subgrupo de gauge en T, pero por ser anómalo T tiene fibración no trivial y hay que elegir un subgrupo de polarización T_p. La elección de T_p se realiza como en el caso anterior, es decir, $T_p \in G'_{\mathcal{P}}$, ya que de lo contrario las ligaduras serían triviales, es decir, si en T_p se encuentran los mismos generadores que en $G_{\mathcal{P}}$ (y no los duales) las condiciones de ligaduras serían triviales.

Capítulo 4

POLARIZACIONES DE ORDEN SUPERIOR. ANOMALÍAS

Existen sistemas físicos cuyos grupos de simetría asociados no admiten una polarización completa, como ocurre en el caso del grupo de Virasoro o el grupo de Schrödinger (véase [AN 91, ABLN 92]). También puede ser conveniente representar el sistema en un espacio diferente al que nos proporciona la polarización completa; por ejemplo, nos podría interesar obtener las funciones de onda en el espacio de configuración, pero, como todos sabemos, la ecuación de Schrödinger en el espacio de configuración es una ecuación diferencial de segundo orden, que no puede ser obtenida mediante polarizaciones de primer orden.

Podemos caracterizar un sistema anómalo como aquél que carece de una polarización completa. Las anomalías aparecerán cuando existan unas variables de tipo rotaciones que mezclen de forma no diagonalizable los pares coordenada-momento, de forma que no se pueda construir una subálgebra propia que contenga al módulo característico y la mitad de las variables coordenada-momento.

El concepto de anomalía es el mismo que la no existencia de polarización en la variedad simpléctica de la Cuantización Geométrica, sólo que allí el problema no es soluble, mientras que en el marco de la CSG sí podemos encontrarle solución. En relación con la cuantización canónica, la anomalía se manifiesta mediante la aparición de términos en los conmutadores cuánticos que no aparecían en los corchetes de Poisson clásicos.

Para el caso de los sistemas anómalos, una solución parcial consiste en emplear una *polarización no completa* (de primer orden) o simplemente polarización, que definimos como una subálgebra izquierda de $\mathcal{G}$ que contiene una *subálgebra* de $\mathcal{G}_\Theta$ y que excluye a Ξ.

Aplicando la polarización no completa obtenemos una representación que tiene el inconveniente de que es reducible, y lo que es más importante, no podemos expresar todos los operadores no básicos en función de los básicos. Esto es una consecuencia típica de las anomalías, ya que al no ser la polarización completa nos faltan ecuaciones que nos

relacionen unos operadores con otros.

Si el sistema posee un vacío y un conjunto de operadores creación-destrucción, es posible reducir esta representación encontrando la órbita sobre el vacío de los operadores construcción, que conduce a un subespacio irreducible y al mismo tiempo nos soluciona el problema de expresar los operadores no básicos en términos de los básicos, aunque esto sólo será posible en general para algunos valores de los parámetros que caracterizan la representación. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en el grupo de Virasoro [AN 91] y en el grupo de Schrödinger [ABLN 92], un caso este último de sistema anómalo de dimensión finita.

Sin embargo, no siempre tenemos la suerte de que el sistema tenga un vacío (en el caso del grupo de Schrödinger hay dos representaciones no equivalentes, una con vacío y otra sin él), por lo que se ha de buscar una solución más general al problema de las anomalías. Ésta consiste en permitir que entren en la polarización operadores del álgebra envolvente, es decir, operadores de orden superior, por lo que introduciremos el concepto de polarización de orden superior.

Definición.- *Una polarización de orden superior es un ideal izquierdo maximal del álgebra envolvente izquierda que incluye una polarización no completa y excluye a* Ξ.

Hemos relajado la exigencia de que los operadores cierren subálgebra, requiriendo sólo que generen un ideal izquierdo porque, al no estar restringidos a ser operadores de primer orden y al exigir que los operadores en la polarización se anulen sobre la función de onda, basta con que el conmutador de dos operadores de la polarización dé un operador que sea "proporcional" (en el álgebra envolvente, es decir, puede ir "multiplicado" por la izquierda por otros operadores que no estén en la polarización) a otro que esté en la polarización. En los casos más simples podremos construir subálgebras finitas, aunque en otros casos sólo encontraremos un sistema de generadores de un ideal izquierdo (como ocurre en Virasoro).

En el caso anómalo, podemos encontrar una polarización de orden superior tan sólo para algunos valores de los parámetros que caracterizan la representación, que se suelen denominar *valores cuánticos*, para los cuales logramos reducir por completo la representación y la construcción de los operadores no básicos en función de los básicos sigue siendo posible.

Como ya hemos comentado, aunque el sistema no sea anómalo, nos puede interesar obtener la solución en una "representación" diferente. Por ejemplo, para el grupo de Galileo, nos gustaría obtener la representación en el espacio de configuración. Como hemos visto, podemos construir una polarización no completa que estaría constituida por una subálgebra del módulo característico, las rotaciones $\tilde{X}^L_{\vec{c}}$, y por $\tilde{X}^L_{\vec{v}}$. Esto nos conduce sin embargo a un representación reducible, ya que no tenemos la ecuación de movimiento del sistema, es decir, la ecuación de Schrödinger, al mismo tiempo que no podemos expresar el operador energía $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ en términos de los operadores básicos x y $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Construimos por tanto una polarización de orden superior de la forma:

$$\mathcal{P}^{HO} =< \tilde{X}^L_{\vec{v}}, \tilde{X}^L_{\vec{c}}, \tilde{X}^L_t - \frac{i\hbar}{2m}\left(\tilde{X}^L_{\vec{x}}\right)^2 > \ . \tag{4.1}$$

El último operador, de segundo orden, es el que proporciona la ecuación de Schrödinger en el espacio de configuración, de manera que las soluciones son de la forma:

$$\Psi = \zeta e^{-\frac{im}{\hbar}\vec{v}\cdot\vec{x}}\Phi(\vec{x},t)\,, \tag{4.2}$$

donde $\Phi(\vec{x},t)$ satisface la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi\,. \tag{4.3}$$

Los operadores cuánticos son ahora:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}}\Phi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi \\
\hat{\vec{\mathrm{P}}}\Phi &= -i\hbar\vec{\nabla}\Phi \\
\hat{\vec{\mathrm{K}}}\Phi &= \left[\vec{x} + i\hbar t\,\vec{\nabla}\right]\Phi \\
\hat{\vec{\mathrm{J}}}\Phi &= -i\hbar\vec{x}\times\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\Phi\,,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde es de nuevo la ecuación de Schrödinger la que nos permite expresar el operador energía en función del operador momento.

En esta *Memoria* emplearemos sistemáticamente las polarizaciones de orden superior para cuantizar sistemas (relativistas) no anómalos en el espacio de configuración (Parte II) y para cuantizar el grupo de Schrödinger (Parte II), como ejemplo de sistema anómalo en dimensión finita.

En el Capítulo 5 tratamos el caso de la partícula libre relativista con espín en el espacio de configuración, para lo cual necesitamos una polarización de orden infinito que da lugar a una ecuación tipo Schrödinger con correcciones relativistas, y nos define un *operador posición* para Poincaré, aunque este nuevo operador no cierra álgebra finita con Poincaré. Esto hace que la representación del grupo de Poincaré en el espacio de configuración presente problemas de unitariedad que son resueltos imponiendo a mano una ordenación normal. El Capítulo 6 nos proporciona una solución alternativa al problema de la posición en Poincaré, que consiste en añadir un nuevo operador al álgebra de Poincaré, el cual se comporta como un operador momento que satisface relaciones de conmutación canónicas con el operador de los boosts. Con la ayuda de este nuevo operador momento podemos definir, introduciendo nuevamente una polarización de orden infinito, un *espacio de configuración relativista* en el que todos los operadores son hermíticos de forma natural.

En el Capítulo 7, empleamos una polarización de segundo orden para obtener la representación en el espacio de configuración del oscilador relativista. Esta polarización de

segundo orden conduce a lo que sería la ecuación de Klein-Gordon en el espacio de Anti-de Sitter. Es posible encontrar una polarización de orden infinito, aunque aquí hemos obtenido tan sólo los primeros términos, que conducen a una ecuación de Schrödinger que es la del oscilador armónico con correcciones relativistas. En el Capítulo 8 se definen unos operadores creación-destrucción para el oscilador relativista, nuevamente mediante el uso de las polarizaciones de orden superior, que satisfacen relaciones de conmutación canónicas, y que nos permiten introducir unos estados coherentes relativistas canónicos con propiedades identicas a los del oscilador no relativista.

Por último, en el Capítulo 10, se emplean las polarizaciones de orden superior para reducir la representación en el caso anómalo del grupo de Schrödinger para un valor concreto del parámetro que caracteriza la representación (y que no coincide con el valor clásico), aunque en el caso de la representación con vacío es posible reducirla recurriendo a la órbita sobre el vacío de toda el álgebra envolvente derecha.

4.1 Polarizaciones de orden infinito y operadores pseudodiferenciales

Una particularidad interesante de las polarizaciones de orden infinito es el carácter pseudodiferencial (o en diferencias finitas) de las ecuaciones de polarización y de los operadores cuánticos, en algunos sentidos análogo a la realización de algunos operadores sobre grupos cuánticos [Mir 91, AFW 94]. El conjunto de ecuaciones de polarización constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de orden infinito que, en general, cierran álgebra sólo débilmente: el conmutador de dos operadores (ecuaciones) es cero sólo sobre las funciones de onda soluciones de las ecuaciones de polarización.

Vamos a hacer un estudio general (aunque no riguroso) sobre las polarizaciones de orden superior, la existencia de soluciones y la irreducibilidad de las representaciones a que conducen. Por supuesto, la irreducibilidad de las representaciones en el caso de polarizaciones de primer orden (completas) la tenemos garantizada (véase el Capítulo 2).

Dado un grupo $\tilde{G}$ y su algebra de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$, el cociclo $\Sigma : \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow R$ del álgebra de Lie nos permite clasificar las variables en *no simplécticas* y *simplécticas*. Las variables no simplécticas, g^i, $i = 1, ..., k$, son las asociadas a campos de vectores que están en el núcleo del cociclo, mientras que las simplécticas se distribuyen por pares coordenada-momento (toda vez que el cociclo es llevado a su forma canónica), g^j, $j = k+1, ..., k+2r = n \equiv \dim \tilde{\mathcal{G}}$, con r el número de pares coordenada-momento.

El módulo característico estará generado por los campos de vectores asociados a las variables no simplécticas, $\mathcal{G}_\Theta =< \tilde{X}^L_{g^i},\ i = 1, ..., k >$. Si el sistema es no anómalo, existirá una polarización de primer orden completa, que podemos suponer de la forma $\mathcal{P} =< \tilde{X}^L_{g^j},\ j = 1, ..., k+r >$, es decir, conteniendo el módulo característico y la mitad de los campos invariantes por la izquierdos asociados a las variables simplécticas. En estas condiciones, las ecuaciones de polarización $\tilde{X}^L \Psi = 0, \forall \tilde{X}^L \in \mathcal{P}$ admiten solución, de

forma que junto con la condición de $U(1)$-función $\Xi\Psi = i\Psi$ la representación que definen los campos derechos $\tilde{X}^R_{g^i}$, $i = 1, ..., n$ (que preservan las condiciones de polarización, puesto que conmutan con todos los izquierdos) sobre el espacio de Hilbert de las $U(1)$-funciones polarizadas es irreducible, lo cual se deduce de la maximalidad de la polarización.

Las funciones de onda se escriben como:

$$\Psi = e^{i\chi(g^i,\, i=1,...,n)}\Phi(g^j,\, j = k + r + 1, ..., k + 2r = n) \tag{4.5}$$

y los operadores derechos restringidos al espacio de Hilbert reducido, que se definen como

$$\tilde{X}^R_{g^i}|_\Phi \equiv e^{-i\chi}\tilde{X}^R_{g^i}e^{i\chi} \tag{4.6}$$

quedan expresados tan sólo en términos de g^j y $\frac{\partial}{\partial g^j}$, con $j = k + r + 1, ..., k + 2r = n$.

Pasemos ahora a las polarizaciones de orden superior. Nos gustaría poder llegar a las mismas (o similares) conclusiones sobre la forma de las funciones de onda y operadores derechos y la irreducibilidad de la representación. Vamos a ver que las cosas no son tan simples.

La forma general para una polarización de orden superior será[1]:

$$\mathcal{P}^{HO} =< \hat{F}_s(\tilde{X}^L_{g^i},\, i = 1, ..., n),\, s = 1, ..., k + r > \tag{4.7}$$

donde los operadores $\hat{F}_s$ seran series de potencias (en general infinitas) en los generadores del álgebra de Lie izquierda, es decir, los $\hat{F}_s$ están en el álgebra envolvente izquierda. Estos operadores deben satisfacer las relaciones de conmutación adecuadas para que definan una polarización de orden superior.

Las condiciones de polarización se escriben ahora $\hat{F}_s\Psi = 0$, $s = 1, ..., k + r$, y es de esperar que, junto con la condición de $U(1)$-función, definan un espacio de Hilbert sobre el que los campos invariantes por la derecha actuen de forma irreducible, que las funciones de onda polarizadas se escriban de forma similar a (4.5) y que los operadores derechos de puedan escribir también como en (4.6).

Desafortunadamente, no podemos obtener una expresión como (4.5) para las funciones de onda que satisfacen ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno, ya que el teorema de Frobenius no es aplicable en este caso, y la polarización no define foliaciones (subvariedades lagrangianas) de la variedad. Sin embargo, veremos que sí obtenemos una factorización similar (al menos formalmente) a la dada por (4.5).

Las ecuaciones de polarización de orden superior (4.7), cuando demos la realizacion explícita de los campos invariantes por la izquierda en términos de los paramatros del grupo, se escribirán:

$$\hat{G}_s(g^i, \frac{\partial}{\partial g^j},\, i, j = 1, ..., n)\Psi = 0\,, \quad s = 1, ..., k + r \tag{4.8}$$

---

[1]Suponemos ahora que la representación que queremos obtener es aquella en que la función de onda depende de g^j, $j = k + r + 1, ..., k + 2r = n$, para la cual no existe polarización de primer orden completa.

La forma de los operadores $\hat{G}_s$ dependerá de la parametrización explícita $\{g^i,\, i = 1,...,n\}$ del grupo $\tilde{G}$ que escojamos, pero estos operadores compartirán con los $\hat{F}_s$ (definidos sobre el álgebra envolvente) las mismas reglas de conmutación, pues son una representación de éstos. Nos interesa ahora expresar estas ecuaciones de polarización en una forma que podriamos denominar "canónica", que sería:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial g^s} - \hat{O}_s\right]\Psi = 0\,,\ s = 1,...,k+r \tag{4.9}$$

donde $\hat{O}_s = \hat{O}_s(g^i, i = 1,...,n;\ \frac{\partial}{\partial g^j}, j = k + r + 1,...,n)$. Esta forma canónica de las ecuaciones de polarización nos permite expresar las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial g^s}, s = 1,...,k+r$ en términos (esencialmente) de las parciales $\frac{\partial}{\partial g^j}, j = k + r + 1,...,k + 2r = n$, que es en última instancia la que nos permite factorizar las funciones de onda. Veamos en primer lugar como serían las funciones de onda y los operadores cuánticos y luego veremos bajo qué condiciones podemos pasar de (4.8) a (4.9).

Las soluciones de (4.9) son, formalmente:

$$\Psi = e^{i\hat{\chi}(g^i,\, i=1,...,n;\, \hat{O}_s,\, s=1,...,k+r)}\Phi(g^j, j = k + r + 1,...,n) \tag{4.10}$$

es decir, las funciones polarizadas se escriben formalmente como en el caso de primer orden (4.5), pero no son realmente funciones, sino operadores actuando sobre una función arbitraria.

Los operadores cuánticos restringidos a su actuación sobre Φ, se definen como en el caso de primer orden (4.6):

$$\tilde{X}^R_{g^i}|_\Phi \equiv e^{-i\hat{\chi}}\tilde{X}^R_{g^i}e^{i\hat{\chi}} \tag{4.11}$$

de manera que quedan expresados tan sólo en términos de g^i, $\frac{\partial}{\partial g^j}$, $j, k = k + r + 1,...,n$. De esta forma, nos queda una representacioń irreducible del álgebra $\tilde{G}$ sobre un espacio de Hilbert de funciones sólo de g^j, $j = k + r + 1,...,k + 2r = n$.

Estudiemos ahora bajo qué condiciones podemos pasar de las ecuaciones de polarización de orden superior (4.8) a la forma canónica (4.9), para ver posteriormente cuándo el sistema (4.9) admite solución. Finalmente, demostraremos que la representación obtenida mediante las polarizaciones de orden superior es irreducible.

El paso de (4.8) a (4.9) consiste en despejar (formalmente) $\frac{\partial}{\partial g^s}$, $s = 1,...,k + r$ en términos de $\frac{\partial}{\partial g^j}$, $j = k+r+1,...,n$ y g^i, $i = 1,...,n$. Para el caso de funciones, el teorema que nos permite hacer esto es el de la *función implícita*, que dice, grosso modo, que para que el conjunto de n ecuaciones con $n + m$ variables $f_s(\vec{y}, \vec{x}) = 0$, $s = 1,...,n$ admita solución $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ en un abierto de $\vec{x}_0$ (donde $f_s(\vec{y}_0 \equiv \vec{g}(\vec{x}_0), \vec{x}_0) = 0$, $s = 1,...,n$), es necesario que el determinante jacobiano $n \times n$ $\det[\frac{\partial}{\partial y_i}f_j(\vec{y}, \vec{x})]$ sea no nulo en el punto $\vec{y}_0, \vec{x}_0$.

Ahora hemos de buscar un teorema análogo pero con operadores diferenciales, es decir, que nos permita despejar unas derivadas parciales en función de otras. Podemos intentar hacer un enunciado de este teorema, que por el momento sólo tendría rango de *conjetura*:

Sea el conjunto de ecuaciones

$$\hat{G}_s(g^i, \frac{\partial}{\partial g^j}, i, j = 1, ..., n)\Psi = 0\,, \quad s = 1, ..., k + r \tag{4.12}$$

entonces si el "determinante jacobiano" $(k+r) \times (k+r)$, $\det \left[\frac{\partial}{\partial(\frac{\partial}{\partial g^i})} \hat{G}_s \right] \neq 0$, es no nulo en un cierto punto $g_o \in \tilde{G}$ (que podria ser $g_o = e$), entonces existe un abierto (la componente conexa de la identidad) en el que el conjunto de ecuaciones anterior se puede escribir en forma "canónica":

$$\left[i\frac{\partial}{\partial g^s} - \hat{O}_s \right] \Psi = 0\,, \; s = 1, ..., k + r \tag{4.13}$$

Estas ecuaciones tienen la forma de la *ecuación del calor*, aunque describen una evolución unitaria, pues los operadores $\hat{O}_s$ son hermíticos, mientras que en la ecuación de calor serían antihermiticos de manera que la evolución es acretiva o disipativa. Usando los mismos teoremas que en el caso de la ecuación del calor (adaptados a nuestro caso) se concluye la existencia y unicidad (para cada elección de condiciones iniciales) de las soluciones, de manera que éstas se pueden escribir de la forma dada en (4.10).

En cuanto a la irreducibilidad de la representación, ésta estaría garantizada por la maximalidad de la polarización de orden superior, en virtud de un teorema dado en [AM 95]. La prueba de este teorema se basa en que si la representación no fuese reducible, existiría un operador que conmutase con la representación (con los campos derechos) y que no fuese trivial. Si conmuta con todos los campos derechos eso implica que el operador pertenece al álgebra envolvente iquierda, y, al ser no trivial y preservar la representación, lo podriamos incluir en la polarización, lo cual contradice la hipótesis de que la polarización era maximal, por tanto el operador que conmuta con la representación debe ser trivial y esta última irreducible.

Parte II

SISTEMAS RELATIVISTAS EN EL ESPACIO DE CONFIGURACION

Capítulo 5

PARTÍCULA LIBRE RELATIVISTA CON ESPÍN

Abordamos en este capítulo la cuantización de la partícula libre relativista con espín, tanto en el espacio de momentos como en el de configuración. La cuantización en el espacio de momentos no presenta mayores problemas pues existe una polarización total de primer orden. En el espacio de configuración, sin embargo, y a diferencia de lo que ocurre en el caso de la partícula libre no relativista, surge el problema de que el campo de vectores $\tilde{X}^L_{\vec{p}}$ asociado a los boosts no podemos incluirlo en la polarización, por lo que habrá que substituirlo por un operador de orden superior[1]. Éste, trasladado a la derecha nos dará el operador posición. El origen de este problema reside en que en el álgebra de Poincaré no existe un operador posición (que satisfaga relaciones de commutación canónicas con el operador momento), y hay que buscarlo, por tanto, en el algebra envolvente de ésta. En cuanto al espín, en el Apéndice A se hace un estudio detallado de la cuantización del grupo de rotaciones, de manera que en este capítulo tan sólo emplearemos los resultados allí obtenidos.

La ley de grupo para el grupo de Poincaré $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ puede escribirse:

$$a''^{\mu} = a'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu} \tag{5.1}$$

$$\Lambda'' = \Lambda' \Lambda \,, \tag{5.2}$$

donde $a^{\mu} = (a^0 = ct, \vec{a})$ son las coordenadas que parametrizan las translaciones espacio-temporales, y Λ son las matrices del grupo de Lorentz SL(2,C). Estas matrices se pueden descomponer de la forma $\Lambda = R(\vec{\epsilon})B(\vec{\alpha})$, donde $\vec{\epsilon}$ parametriza las rotaciones ($R(\vec{\epsilon})$ es la matriz de rotaciones) y $\vec{\alpha}$ los boosts ($B(\vec{\alpha})$ es la matriz de los boosts).

---

[1] En el caso sin espín no aparece esta traba, y es posible encontrar una polarización que contenga a $\tilde{X}^L_{\vec{p}}$, aunque también se puede introducir un operador de orden superior como polarización, obteniéndose los mismos resultados, y que llevado a la derecha dé cuenta del operador posición sin espín.

Las expresiones de estas matrices son:

$$R(\vec{\epsilon}) = \sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}I - \frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon} \tag{5.3}$$

$$B(\vec{\alpha}) = \sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}I + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha}}{2}\,, \tag{5.4}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

El ángulo de rotación viene dado por $\frac{|\vec{\epsilon}|}{2} = \sin\frac{\varphi}{2}$, y el parámetro del boost por $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \sinh\frac{\chi}{2}$, con $\chi = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}$, donde v es la velocidad.

La ley de grupo para el grupo de Lorentz queda:

$$\Lambda''(\vec{\epsilon}\,'',\vec{\alpha}\,'') = \Lambda'(\vec{\epsilon}\,',\vec{\alpha}\,')\Lambda(\vec{\epsilon},\vec{\alpha})\,, \tag{5.5}$$

donde

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}\,'' = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}\,''^{\,2}}{4}}}\Bigg\{\Bigg[&\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}\,'^{\,2}}{4}}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}\,'^{\,2}}{4}} + \frac{1}{8}(\vec{\alpha}\,'\times\vec{\epsilon})\cdot\vec{\alpha} \\
&+\frac{\vec{\alpha}\,'\cdot\vec{\alpha}}{4}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}\,'^{\,2}}{4}}\Bigg]\vec{\epsilon} + \sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}\,'^{\,2}}{4}}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\vec{\epsilon}\,' \\
&-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}\,'^{\,2}}{4}}\vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}(\vec{\epsilon}\,'\times\vec{\alpha}\,')\times\vec{\alpha} \\
&+\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}(\vec{\epsilon}\,'\cdot\vec{\alpha}\,')\,\vec{\alpha} + \frac{1}{8}(\vec{\epsilon}\,'\cdot\vec{\alpha}\,')\,\vec{\alpha}\times\vec{\epsilon} \\
&-\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}\,'^{\,2}}{4}}(\vec{\alpha}\,'\times\vec{\alpha})\times\vec{\epsilon} + \frac{1}{8}[(\vec{\epsilon}\,'\times\vec{\alpha}\,')\times\vec{\alpha}]\times\vec{\epsilon} \\
&+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}\,'^{\,2}}{4}}\vec{\epsilon}\,'\times\vec{\epsilon}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\vec{\alpha}\,'' = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}\,''^{\,2}}{4}}}\left\{\left(1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}\,'^{\,2}}{4}}\vec{\alpha}\,' + \sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}R'(\vec{\epsilon}\,')\vec{\alpha}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}\,(\vec{\alpha}\,'\cdot R'(\vec{\epsilon}\,')\vec{\alpha})\,\vec{\alpha}\,'\right\}\,, \tag{5.7}$$

y donde

$$\vec{\alpha}\,''^{\,2} = 2\left\{\left(1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{2}\right)\left(1+\frac{\vec{\alpha}\,'^{\,2}}{2}\right)\right.$$

$$+\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,\prime\,2}}{4}}\,(\vec{\alpha}^{\,\prime}\cdot R'(\vec{\epsilon}^{\,\prime})\vec{\alpha})-1\Bigg\} \tag{5.8}$$

$$R(\vec{\epsilon})^{i}{}_{j} = \left(1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{2}\right)\delta^{i}_{j}-\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\eta^{i}{}_{jk}\epsilon^{k}+\frac{1}{2}\epsilon^{i}\epsilon_{j}\,. \tag{5.9}$$

Esta ley de grupo es la misma que puede encontrarse en [AA 85a], sólo que redefiniendo $\vec{\epsilon}\to-\frac{\vec{\epsilon}}{2}$ y $\vec{\alpha}\to-\frac{\vec{\alpha}}{2}$. Esta redefinición se hace para que los operadores cuánticos coincidan con los usuales de la Mecánica Cuántica (véase, por ejemplo, [GP 89]).

La relación entre $\vec{\alpha}$ y el momento $\vec{p}$, es:

$$\vec{p} = mc\sqrt{1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{4}}\vec{\alpha} \tag{5.10}$$

$$p^{0} \equiv \sqrt{m^{2}c^{2}+\vec{p}^{\,2}} = mc\left(1+\frac{\vec{\alpha}^{\,2}}{2}\right)\,. \tag{5.11}$$

Esta ley de grupo la pseudoextendemos mediante el coborde generado por $\eta=-mca^{0}+\vec{a}\cdot\vec{p}$ [AA 85a] :

$$\begin{aligned}\xi_{\eta} = {} & \left[\vec{a}^{\,\prime}+\frac{\vec{p}^{\,\prime}}{mc}a^{0}+R'\vec{a}+\frac{(\vec{p}^{\,\prime}\cdot R'\vec{a})\vec{p}^{\,\prime}}{mc(p'^{0}+mc)}\right]\cdot\left[\frac{p^{0}}{mc}\vec{p}^{\,\prime}+R'\vec{p}\right.\\ & \left.+\frac{(\vec{p}^{\,\prime}\cdot R'\vec{p})\vec{p}^{\,\prime}}{mc(p'^{0}+mc)}\right]-(p^{0}-mc)a^{0}-(\vec{p}^{\,\prime}\cdot R'\vec{a})\\ & -\vec{a}^{\,\prime}\cdot\vec{p}^{\,\prime}-\vec{a}\cdot\vec{p}\,,\end{aligned} \tag{5.12}$$

y también, para dar cuenta del espín, por el coborde generado por $2ij\theta$, donde

$$e^{i\theta}=\frac{\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}+i\vec{n}\cdot\vec{\epsilon}/2}{\sqrt{1-r^{2}/4}}\,, \tag{5.13}$$

$r^{2}=(\vec{\epsilon}\times\vec{n})^{2}$ y $\vec{n}$ es un vector arbitrario que indica la dirección de cuantización del espín [ABGN 93a]. El parámetro de la pseudoextensión, j, que al cuantizar sólo puede tomar valores semienteros, será el espín de la partícula.

Por tanto, la ley de composición para el parámetro de $U(1)$, ζ, queda:

$$\zeta''=\zeta'\zeta e^{\frac{i}{\hbar}\xi_{\eta}}e^{2ij(\theta''-\theta'-\theta)}\,. \tag{5.14}$$

con lo cual ya tenemos la ley de grupo completa para aplicar el formalismo de la cuantización sobre grupos.

Los campos de vectores invariantes por la izquierda son:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^L_{a^0} &= \frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial a^0} + \frac{\vec{p}}{mc}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{a}} + (p^0 - mc)\frac{p^0}{mc}\Xi \\
\tilde{X}^L_{\vec{a}} &= R(\vec{\epsilon})\left[\frac{\vec{p}}{mc}\frac{\partial}{\partial a^0} + \frac{\partial}{\partial \vec{a}} + \frac{1}{mc(p^0+mc)}\vec{p}(\vec{p}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{a}}) + \frac{(p^0-mc)}{mc}\vec{p}\,\Xi\right] \\
\tilde{X}^L_{\vec{p}} &= R(\vec{\epsilon})\left[\frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \frac{1}{mc(p^0+mc)}\vec{p}(\vec{p}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{p}}) + \left(\vec{a} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{p})\vec{p}}{mc(p^0+mc)}\right)\Xi\right] + \\
&\quad \frac{1}{mc(p^0+mc)}R^{-1}(\vec{\epsilon})\vec{p}\times\left(\tilde{X}^{LSU(2)}_{\vec{\epsilon}} + j\vec{n}\,\Xi\right) \qquad (5.15)\\
\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} &= \tilde{X}^{LSU(2)}_{\vec{\epsilon}} \\
\tilde{X}^L_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi,
\end{aligned}$$

donde $\tilde{X}^{LSU(2)}_{\vec{\epsilon}}$ es el campo de vectores invariante por la izquierda asociado al grupo de rotaciones sólamente (véase Apéndice A). Los campos de vectores invariantes por la derecha son:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_{a^0} &= \frac{\partial}{\partial a^0} \\
\tilde{X}^R_{\vec{a}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{a}} + \vec{p}\,\Xi \\
\tilde{X}^R_{\vec{p}} &= \frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial \vec{p}} - \frac{1}{mc(p^0+mc)}\vec{p}\times\left(\tilde{X}^{RSU(2)}_{\vec{\epsilon}} + j\vec{n}\,\Xi\right) \\
&\quad + \frac{a^0}{mc}\frac{\partial}{\partial \vec{a}} + \frac{\vec{a}}{mc}\frac{\partial}{\partial a^0} + \left[\frac{a^0}{mc}\vec{p} + \frac{p^0}{mc}\vec{a} - \vec{a}\right]\Xi \qquad (5.16)\\
\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}} &= \tilde{X}^{RSU(2)}_{\vec{\epsilon}} + \vec{a}\times\frac{\partial}{\partial \vec{a}} + \vec{p}\times\frac{\partial}{\partial \vec{p}} \\
\tilde{X}^R_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi,
\end{aligned}$$

y las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}^R_{a^i}, \tilde{X}^R_{p^j}] &= \delta_{ij}\left(\frac{1}{mc}\tilde{X}^R_{a^0} - \frac{1}{\hbar}\Xi\right) \\
[\tilde{X}^R_{a^0}, \tilde{X}^R_{p^i}] &= \frac{1}{mc}\tilde{X}^R_{a^i} \\
[\tilde{X}^R_{p^i}, \tilde{X}^R_{p^j}] &= \frac{1}{m^2c^2}\eta_{ij.}{}^{k}\left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right) \qquad (5.17)\\
[\tilde{X}^R_{\epsilon^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] &= -\eta_{ij.}{}^{k}\left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right) \\
[\tilde{X}^R_{a^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] &= -\eta_{ij.}{}^{k}\tilde{X}^R_{a^k} \\
[\tilde{X}^R_{p^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] &= -\eta_{ij.}{}^{k}\tilde{X}^R_{p^k}\,.
\end{aligned}$$

Las reglas de conmutación para los campos izquierdos difieren de éstas en un signo global.

Vemos que al pseudoextender las rotaciones, no sólo éstas adquieren carácter dinámico, sino que también los propios $\tilde{X}^L_{p^i}$ entre si dan relaciones de conmutación típicas de variables canónicas conjugadas, de ahí la necesidad de buscar operadores de orden superior que los substituyan en la polarización y que nos proporcionen la cuantización en el espacio de configuración.

La 1-forma de cuantización es ahora:

$$\Theta = -(p^0 - mc)da^0 - \left(\vec{a} + \frac{\vec{p} \times \vec{S}}{mc(p^0 + mc)}\right) \cdot d\vec{p} + \Theta^{SU(2)} + \frac{d\zeta}{i\zeta}\,, \tag{5.18}$$

donde $\vec{S} = jR(\vec{\epsilon})\vec{n}$ y $\Theta^{SU(2)}$ es la 1-forma de cuantización del grupo de rotaciones (véase Apéndice A). Posteriormente veremos que $\vec{S}$ es el espín de la partícula (clásico, es decir, el invariante Noether), y que verifica que $\vec{S}^2 = j^2$.

El módulo característico es ahora tan sólo:

$$\mathcal{G}_\Theta = < \tilde{X}^L_{a^0}, \vec{n} \cdot \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} >\,, \tag{5.19}$$

ya que las otras dos componentes del generador de rotaciones han adquirido carácter dinámico.

5.1 Cuantización en el espacio de momentos.

Al igual que en el caso de la partícula libre no relativista, el sistema admite una polarización total, pero ahora, y debido a la presencia del espín, ésta es de la forma:

$$\mathcal{P} = < \tilde{X}^L_{a^0}, \tilde{X}^L_{\vec{a}}, \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} - i\vec{n} \times \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} > \,. \tag{5.20}$$

Aunque $\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} - i\vec{n} \times \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}}$ son tres campos de vectores, es fácil comprobar que sólo dos de ellos son independientes, como debía ser. Imponiendo esta polarización junto con la condición de $U(1)$-función, $\Xi\Psi = i\Psi$, obtenemos la siguiente función de onda:

$$\begin{aligned} \Psi^{(j)}_\mu &= \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}(p^0 - mc)a^0} \Phi^{(j)}_\mu(\vec{\epsilon}, \vec{p}) \\ \Phi^{(j)}_\mu &= \chi^{(j)}_\mu(\vec{\epsilon})\Phi(\vec{p})\,, \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde $\chi^{(j)}_\mu(\vec{\epsilon})$ son las funciones de onda de $SU(2)$ (véase Apéndice A). Se observa que la función de onda factoriza la dependencia en $\vec{\epsilon}$, al contrario de lo que cabría esperar del hecho de que $[\tilde{X}^R_{p^i}, \tilde{X}^R_{p^j}] = \frac{1}{m^2c^2}\eta_{ij.}{}^k \left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right)$. Sin embargo, esta mezcla aparece en los operadores cuánticos actuando sobre la función de onda, en concreto en el boost:

$$\hat{\mathrm{E}}\Phi^{(j)}_\mu = (p^0 - mc)\Phi^{(j)}_\mu$$

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{\mathrm{P}}}\Phi^{(j)}_{\mu} &= \vec{p}\,\Phi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\mathrm{J}}}\Phi^{(j)} &= \left[-i\hbar\vec{p}\times\frac{\partial}{\partial\vec{p}}+\hbar\vec{\Sigma}^{(j)}\right]\Phi^{(j)} \\
\hat{\vec{\mathrm{K}}}\Phi^{(j)} &= \left[i\hbar\frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}+\frac{\hbar}{mc(p^0+mc)}\vec{p}\times\vec{\Sigma}^{(j)}\right]\Phi^{(j)}\,,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

donde

$$\hat{\mathrm{E}} = i\hbar\tilde{X}^R_{a^0},\;\; \hat{\vec{\mathrm{P}}} = -i\hbar\tilde{X}^R_{\vec{a}},\;\; \hat{\vec{\mathrm{K}}} = i\hbar\tilde{X}^R_{\vec{p}},\;\; \hat{\vec{\mathrm{J}}} = -i\hbar\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}, \tag{5.23}$$

y

$$\vec{\Sigma}^{(j)}\Phi^{(j)} = -i\left[\tilde{X}^{RSU(2)}_{\vec{\epsilon}} + j\vec{n}\Xi\right]\Phi^{(j)}\,. \tag{5.24}$$

Para el caso $j=\frac{1}{2}$, y empleando notación matricial, podemos escribir $\chi^{(1/2)}_{-1/2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \chi^{(1/2)}_{1/2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, con lo que (véase Apéndice A):

$$\hat{\vec{\mathrm{K}}}\,|_{j=1/2} = i\hbar\frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial\vec{p}} - \frac{\hbar}{mc(p^0+mc)}\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\times\vec{p}\right)\,, \tag{5.25}$$

donde el generador de los boosts toma la forma habitual en la representación canónica del grupo de Poincaré.

5.2 Cuantización en el espacio de configuración.

Como ya hemos comentado, la cuantización en el espacio de configuración para el caso con espín tiene la dificultad adicional de que los generadores de los boosts no pueden incluirse como polarización, debiendo substituirse por operadores de orden superior, además de la necesidad de un operador de orden superior que substituya a $\tilde{X}^L_{a^0}$. Para este último existen dos posibilidades: uno de segundo orden, que conduce a la ecuación de Klein-Gordon, y otro de orden infinito que da lugar a una ecuación de tipo Schrödinger de orden infinito. Las expresiones de estos operadores son (véase Apéndice B):

$$\tilde{X}^{L\,2\mathrm{nd}}_{a^0} = \tilde{X}^L_{a^0} + \frac{i\hbar}{2mc}\left[\left(\tilde{X}^L_{a^0}\right)^2 - \left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2\right], \tag{5.26}$$

$$\tilde{X}^{LHO}_{a^0} = \tilde{X}^L_{a^0} + \frac{i}{\hbar}\left\{\hat{\mathrm{P}}^L_0 - mc\right\}\,, \tag{5.27}$$

donde

$$\hat{\mathrm{P}}^L_0 \equiv \sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2}\,. \tag{5.28}$$

En el Apéndice B se hallan las soluciones a estas polarizaciones[2], y se hace notar que la polarización de segundo orden conduce a una representación reducible (contiene dos subespacios invariantes, el de soluciones de energía positiva y el de energía negativa) del grupo $\mathcal{P}_+^\uparrow$, mientras que la polarización de orden infinito conduce a una representación irreducible de éste (con soporte en el espacio de soluciones de energía positiva, en este caso). En lo sucesivo trabajaremos siempre con la polarización de orden infinito.

Para el operador de orden infinito que substituye a $\tilde{X}^L_{\vec{p}}$, y que verifiqua las condiciones deseadas, encontramos (véase Apéndice C):

$$\hat{\vec{\mathrm{Q}}}^L \equiv \tilde{X}^{LHO}_{\vec{p}} = \hat{\vec{\mathrm{R}}}^L - \frac{1}{mc(\hat{\mathrm{P}}^L_0 + mc)} \hat{\vec{\Sigma}}^L \times \tilde{X}^L_{\vec{a}} \,, \tag{5.29}$$

donde

$$\hat{\vec{\mathrm{R}}}^L \equiv \frac{1}{2}\left[\hat{\mathrm{F}}^L \tilde{X}^L_{\vec{p}} + \tilde{X}^L_{\vec{p}} \hat{\mathrm{F}}^L\right] \tag{5.30}$$

$$\hat{\mathrm{F}}^L \equiv \frac{mc}{\hat{\mathrm{P}}^L_0} \tag{5.31}$$

$$\hat{\vec{\Sigma}}^L \equiv \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} + i\hbar \tilde{X}^L_{\vec{a}} \times \hat{\vec{\mathrm{R}}}^L \,. \tag{5.32}$$

Con este operador y con $\tilde{X}^{LHO}_{a^0}$, construimos la polarización de orden superior:

$$\mathcal{P}^{HO} = < \tilde{X}^{LHO}_{a^0}, \hat{\vec{\mathrm{Q}}}^L, \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} - i\vec{n} \times \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} > \,. \tag{5.33}$$

La integración de las ecuaciones de polarización presenta en este caso mayor dificultad de lo habitual, en especial la de $\hat{\vec{\mathrm{Q}}}^L$, pues las soluciones a que conducen no se parecen en nada a las que hemos obtenido hasta ahora. Generalmente, al imponer una condición de polarización logramos que la función de onda no dependa de uno de los parámetros del grupo o que dependa a través de una función fija para todas las soluciones. Cuando trabajamos con polarizaciones de orden infinito, sobre todo con aquéllas que no cierran subálgebra, sino que generan un ideal izquierdo, puede ocurrir que la dependencia en estos parámetros venga dada a través de un operador actuando sobre el resto de la función de onda. Veamos cómo es la función de onda que verifica las condiciones de polarización:

$$\Psi^{(j)}_\mu = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{O}} \varphi(\vec{a}, a^0) \chi^{(j)}_\mu(\vec{\epsilon}) \,, \tag{5.34}$$

donde la función $\varphi(\vec{a}, a^0)$ verifica la ecuación tipo Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial a^0} = \left[\sqrt{m^2c^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{a}^2}} - mc\right] \varphi \,. \tag{5.35}$$

[2]Por simplicidad se hace para el caso sin espín, $j = 0$, pero los resultados son los mismos para espín arbitrario en lo que respecta a la parte de la función de onda que no depende de las variables de rotación

En el Apéndice B se muestra cómo se llega a esta ecuación para φ resolviendo $\tilde{X}^{LHO}_{a^0}.\Psi = 0$ orden por orden en potencias de $1/c$.

Ésta es la que denominamos "ecuación tipo Schrödinger". Es una ecuación de primer orden en la parcial respecto al tiempo y de orden infinito en las parciales respecto al espacio, por lo que no es una ecuación manifiestamente covariante, como lo es la ecuación de Klein-Gordon o la usual de Dirac. Obvíamente éste es el precio que hay que pagar por utilizar el mínimo número de componentes en la función de onda, pero esta ecuación es tan válida como cualquier otra, y nos resuelve los problemas de reducibilidad planteados con la ecuación de Klein-Gordon.

Volviendo a la funcion de onda (5.34), $\hat{\vec{\mathrm{O}}}$ es un operador de orden infinito, que tiene la forma:

$$\hat{\vec{\mathrm{O}}}\varphi\chi^{(j)}_{\mu} = \left[\vec{a} + \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}} \times \hat{\vec{\mathrm{S}}}}{\hat{\mathrm{P}}^0(\hat{\mathrm{P}}^0 + mc)} + \frac{i\hbar}{\hat{\mathrm{P}}^{02}}\hat{\vec{\mathrm{P}}}\right]\varphi\chi^{(j)}_{\mu}\,, \tag{5.36}$$

donde $\hat{\vec{\mathrm{S}}} = \hbar\vec{\Sigma}^{(j)}$. Podría parecer que el hecho de que la función de onda factorice en un operador fijo actuando sobre una función arbitraria y no en una función fija por una función arbitraria, no nos permitirá restringir las soluciones a sólo la función $\varphi\chi^{(j)}_{\mu}$, pero viendo cómo actúan los campos derechos comprobamos que preservan esta estructura de la función de onda, por lo que es lícito factorizarla:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= \left(\hat{\mathrm{P}}^0 - mc\right)\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\mathrm{P}}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{a}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\mathrm{K}}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= \left[\vec{a}\frac{\hat{\mathrm{P}}^0}{mc} - a^0\frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}}}{mc} + \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}} \times \hat{\vec{\mathrm{S}}}}{mc(\hat{\mathrm{P}}^0 + mc)} - \frac{i\hbar}{mc\hat{\mathrm{P}}^0}\hat{\vec{\mathrm{P}}}\right]\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\mathrm{J}}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= \left[\hat{\vec{\mathrm{S}}} + \vec{a} \times \hat{\vec{\mathrm{P}}}\right]\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu}\,.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Si ahora definimos el operador posición como $\hat{\vec{\mathrm{Q}}} = i\hbar\hat{\vec{\mathrm{Q}}}^R$, donde $\hat{\vec{\mathrm{Q}}}^R$ es la versión derecha del operador que hemos impuesto como polarización, este operador adquiere una expresión sencilla, junto con los operadores $\hat{\vec{\mathrm{R}}} \equiv i\hbar\hat{\vec{\mathrm{R}}}^R$ y $\hat{\vec{\Sigma}} \equiv -i\hbar\hat{\vec{\Sigma}}^R$:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{\mathrm{Q}}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= \left[\vec{a} - \frac{a^0}{\hat{\mathrm{P}}^0}\hat{\vec{\mathrm{P}}} - i\hbar\frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}}}{2\hat{\mathrm{P}}^{02}}\right]\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\mathrm{R}}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= \left[\hat{\vec{\mathrm{Q}}} + \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}} \times \hat{\vec{\mathrm{S}}}}{\hat{\mathrm{P}}^0(\hat{\mathrm{P}}^0 + mc)}\right]\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\Sigma}}\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu} &= \left[\hat{\vec{\mathrm{J}}} - \hat{\vec{\mathrm{R}}} \times \hat{\vec{\mathrm{P}}}\right]\,\varphi\chi^{(j)}_{\mu}\,.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Hay que ser muy cuidadosos a la hora de hacer cálculos con este tipo de "funciones", ya que no conmutan unas partes de la función con las otras, y por ejemplo no es válida la regla $e^A e^B = e^{A+B}$. Esta propiedad, lejos de complicar el resultado (aunque sí los cálculos), hace que las expresiones finales tengan la limpieza arriba expuesta.

Con la intención de comparar con resultados convencionales [FG 70, Bac 88], damos a continuación las expresiones que toman estos mismos operadores de orden superior sobre las funciones de onda en el espacio de momentos (5.21), donde adquiren expresiones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{\mathrm{Q}}}\Phi^{(j)}_{\mu} &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\vec{p}} - \frac{\vec{p}}{2p^{02}}\right)\Phi^{(j)}_{\mu} \\
\hat{\vec{\mathrm{R}}}\Phi^{(j)} &= \left(\hat{\vec{\mathrm{Q}}} + \frac{\vec{p}\times\hat{\vec{\mathrm{S}}}}{p^0(p^0+mc)}\right)\Phi^{(j)} \\
\hat{\vec{\Sigma}}\Phi^{(j)} &= \left(\hat{\vec{\mathrm{J}}} + \vec{p}\times\hat{\vec{\mathrm{R}}}\right)\Phi^{(j)},
\end{aligned} \tag{5.39}$$

lo que nos permite interpretarlos como el operador de Newton-Wigner, el operador posición medio y el operador de espín medio, respectivamente [FW 50, NW 49, Bac 88]. Del mismo modo, el operador $\hat{\vec{\mathrm{S}}}$ lo podemos interpretar como el espín intrínseco de la partícula, gracias a la relación:

$$\hat{\vec{\mathrm{S}}} = \hat{\vec{\mathrm{J}}} + \hat{\vec{\mathrm{P}}}\times\hat{\vec{\mathrm{Q}}}\,. \tag{5.40}$$

Para terminar, y con ánimo de respaldar nuestras interpretaciones, vamos a ver la teoría clásica[3] asociada a la partícula libre relativista con espín.

5.3 Invariantes Noether.

A partir de (5.16) y (5.18) podemos obtener los invariantes Noether de la teoría:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{(a^0)} &\equiv i_{\bar{X}^R_{a^0}}\Theta = -(p^0 - mc) \equiv -(\mathrm{P}^0 - mc) \\
\mathrm{F}_{(\vec{a})} &\equiv i_{\bar{X}^R_{\vec{a}}}\Theta = \vec{p} \equiv \vec{\mathrm{P}}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{(\vec{\epsilon})} &\equiv i_{\bar{X}^R_{\vec{\epsilon}}}\Theta = \mathrm{F}_{(\vec{\epsilon})}{}^{SU(2)} + \vec{a}\times\vec{p} + \frac{(\mathrm{S}\times\vec{p})\times\vec{p}}{mc(p^0+mc)} \equiv \hat{\mathrm{J}} - j\vec{n} \\
\mathrm{F}_{(\vec{p})} &\equiv i_{\bar{X}^R_{\vec{p}}}\Theta = \frac{p^0}{mc}\left[-\vec{a} + \frac{a^0}{p^0}\vec{p} + \frac{\vec{\mathrm{S}}\times\vec{p}}{mc(p^0+mc)}\left(1+\frac{mc}{p^0}\right)\right] \equiv -\vec{\mathrm{K}}\,,
\end{aligned}$$

donde $\vec{\mathrm{S}} \equiv \mathrm{F}_{(\vec{\epsilon})}{}^{SU(2)} + j\vec{n}$, (véase Apéndice A) es también una cantidad conservada. Con las definiciones $\mathrm{P}^0 \equiv -\mathrm{F}_{(a^0)} + mc$, $\hat{\mathrm{J}} \equiv \mathrm{F}_{(\vec{\epsilon})} + j\vec{n}$ eliminamos el efecto de la pseudoextensión.

[3] Más correctamente, cuando se trata del espín deberíamos hablar de teoría semiclásica.

Si introducimos las siguientes cantidades conservadas:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{Q}} &\equiv \vec{a} - \frac{a^0}{\mathrm{P}^0}\vec{\mathrm{P}} - \frac{\vec{\mathrm{S}}\times\vec{\mathrm{P}}}{mc(\mathrm{P}^0+mc)} = \frac{mc}{\mathrm{P}^0}\vec{\mathrm{K}} + \frac{\vec{\mathrm{S}}\times\vec{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}^0(\mathrm{P}^0+mc)} \\
\vec{R} &\equiv \vec{\mathrm{Q}} - \frac{\vec{\mathrm{S}}\times\vec{\mathrm{P}}}{\mathrm{P}^0(\mathrm{P}^0+mc)} = \frac{mc}{\mathrm{P}^0}\vec{\mathrm{K}} \qquad (5.42)\\
\vec{\Sigma} &\equiv \vec{\mathrm{S}} - \frac{\vec{\mathrm{P}}\times(\vec{\mathrm{S}}\times\vec{\mathrm{P}})}{\mathrm{P}^0(\mathrm{P}^0+mc)},
\end{aligned}$$

podemos reescribir los invariantes Noether asociados con las rotaciones como

$$\hat{\mathrm{J}} = \vec{\mathrm{Q}}\times\vec{\mathrm{P}} + \vec{\mathrm{S}} = \vec{R}\times\vec{\mathrm{P}} + \vec{\Sigma}\,. \qquad (5.43)$$

Esta última fórmula nos dice que podemos interpretar $\vec{\mathrm{Q}}, \vec{R}, \vec{\mathrm{S}}$ y $\vec{\Sigma}$ como las contrapartidas clásicas de los operadores cuánticos introducidos en la sección anterior, $\hat{\vec{\mathrm{Q}}}, \hat{\vec{\mathrm{R}}}, \hat{\vec{\mathrm{S}}}$ y $\hat{\vec{\Sigma}}$, respectivamente.

También podemos expresar la 1-forma de Poincaré-Cartan de un modo más sencillo:

$$\Theta_{PC} = -\vec{\mathrm{Q}}\cdot d\vec{\mathrm{P}} + \frac{(\vec{\mathrm{S}}\times\vec{n})\cdot d\vec{\mathrm{S}}}{(j+\vec{S}\cdot\vec{n})}\,, \qquad (5.44)$$

lo que justifica la interpretación de $\vec{\mathrm{Q}}$ ($\hat{\vec{\mathrm{Q}}}$) como la variable (operador) de posición. El término orbital de Θ_{PC} está escrito en coordenadas de Darboux, y el término de espín en la forma canónica sobre la esfera $\vec{\mathrm{S}}^2 = j^2$.

También podemos decir que el momento angular intrínseco $\vec{\mathrm{S}}$ resulta ser la parte espacial del cuadrivector de Pauli-Lubanski W^μ [Bac 77] "boosteado" (transladado mediante una transformación de Lorentz) con parámetros $-\vec{\mathrm{P}}, \vec{\mathrm{S}} = \vec{\mathrm{W}} - (\mathrm{W}_0/(\mathrm{P}^0+mc))\vec{\mathrm{P}}$, y además $\vec{\Sigma} = \vec{\mathrm{W}}/\mathrm{P}^0$.

Capítulo 6

EL GRUPO DE S-POINCARÉ

6.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos obtenido, mediante la técnica de las polarizaciones de orden superior, un operador posición para la partícula libre relativista con espín. El problema es que este operador posición, que se encuentra en el álgebra envolvente del álgebra de Poincaré, no cierra un álgebra finita con esta última, lo que provoca, por ejemplo, que la ordenación de este operador para que sea hermítico haya que imponerla a mano, mientras que si lo pudiesemos englobar dentro de un álgebra conocida y exponenciable, la ordenación de este operador nos vendría dada automáticamente al cuantizar el grupo[1].

Como fue discutido en el Capítulo 4, en el caso de la Mecánica Cuántica Relativista, la realización en el espacio de momentos es, de forma natural, unitaria, debido al hecho de que $\{\hat{O}_t, \hat{O}_x\}$ genera un álgebra isomorfa al álgebra de Poincaré (en 1+1D). Sin embargo, en el espacio de configuración, $\{\hat{O}_t, \hat{O}_p\}$ genera un álgebra de dimensión infinita isomorfa a la generada por $\{\hat{H}, \hat{x}\}$, donde $\hat{x}$ es el operador posición (nótese que $[\hat{x}, \hat{H}] = i\frac{\hat{p}}{\hat{H}} \approx i\frac{\hat{p}}{mc} - i\frac{\hat{p}^3}{2m^3c^3} + ...$), lo que provoca que esta representación tenga problemas de unitariedad y sea necesario unitarizarla a mano.

En este capítulo vamos a extender el álgebra de Poincaré (en 1+1D) incluyendo un generador nuevo, $\hat{\pi}$, función del operador $\hat{p}$, que verifica relaciones de conmutación canónicas con el generador de los boosts, $\hat{k}$, y que por tanto lo interpretaremos como un nuevo operador momento. Este álgebra, que denominaremos de S-Poincaré por razones que más adelante resultarán obvias, es finita (no requiere la introducción de ningún otro generador) y, a diferencia de la de Poincaré, posee cohomología no trivial. Exponenciaremos este álgebra a un grupo, el grupo de S-Poincaré, y consideraremos las representaciones en el espacio de momentos (con polarización de primer orden), en el espacio de configuración ordinario (con polarización de orden infinito), y en un espacio de configuración relativista

[1] Realmente sí conocemos el álgebra infinita que contiene a Poincaré y al operador posición (y también al operador momento que vamos a introducir en este capítulo). La exponenciación de este álgebra y su consiguiente cuantización será objeto de futuros trabajos.

[Mir 91] (con polarización de orden infinito también) en el que la variable de la que dependen las funciones de onda no es la x, parámetro naturalmente asociado al operador posición (no presente en el algebra de Poincaré), sino uno que denominaremos k, y que es el parámetro naturalmente asociado a los boosts.

Esta última representación resulta ser unitaria de forma natural, y, como corolario, nos proporciona una representacion del subálgebra de Poincaré en el espacio de configuración relativista que resulta ser también unitaria de forma natural. De esta forma eludimos el problema de buscar un operador posición con los problemas que éste conlleva (aunque en el capítulo anterior lo hayamos resuelto de forma satisfactoria).

6.2 Espacio de configuración relativista: el grupo de S-Poincaré

Además de los problemas mencionados arriba, el grupo de Poincaré tiene otros problemas derivados del hecho de que el operador momento $\hat{p}$ no genera traslaciones en el espectro[2] del operador de los boosts $\hat{k}$, o, equivalentemente, la coordenada x del espacio de Minkowski usual no pertenece al espectro del operador $\hat{k}$. Por tanto, podríamos decir que el germen de todos los problemas con el espacio de configuración en Poincaré está en el hecho de que el parámetro que empleamos, la x del espacio de Minkowski, no es el adecuado debido a que no está asociado de forma natural al operador correspondiente, el de los boosts. Una forma de solucionarlo es introducir el operador posición (Capítulo 5), y otra, no menos interesante, emplear, en lugar de la variable x, la variable k asociada de forma natural a los boosts, además del operador que genera translaciones en esta variable, el nuevo operador momento $\hat{\pi}$.

Por tanto, la solución que aquí proponemos es mantener el operador $\hat{k}$ como básico y buscar un nuevo operador momento $\hat{\pi}$ tal que

$$[\hat{k}, \hat{\pi}] = i\hat{1}\,, \tag{6.1}$$

donde ahora $\hat{\pi}$ cierra un álgebra de dimensión finita con el álgebra de Poincaré: el álgebra de S-Poincaré. El operador $\hat{\pi}$ genera translaciones en el espectro de $\hat{k}$, k. El espectro de $\hat{\pi}$, $\pi \equiv mc\chi$, se relaciona con p a través de

$$\pi \equiv mc \sinh^{-1} \frac{p}{mc} = mc \cosh^{-1} \frac{p^0}{mc}\,. \tag{6.2}$$

La variable χ es el ángulo hiperbólico que parametriza (la hoja superior de) el hiperboloide $p^{02} - p^2 = m^2c^2$, también denominado espacio de *Lobachevsky* (véase [Mir 91] y referencias allí citadas).

---

[2] Estamos hablando en el mismo sentido en el que decimos que el operador momento genera translaciones en la coordenada x que pertenece al espectro del operador posición en Mecánica Cuántica no relativista.

La ley de grupo que proponemos para el grupo de S-Poincaré es:

$$\begin{aligned}
x^{0\prime\prime} &= x^{0\prime} + \frac{p^{0\prime}}{mc}\, x^0 + \frac{p'}{mc}\, x \\
x'' &= x' + \frac{p^{0\prime}}{mc}\, x + \frac{p'}{mc}\, x^0 \\
p'' &= \frac{p^0}{mc}\, p' + \frac{p^{0\prime}}{mc}\, p \\
k'' &= k' + k \\
\zeta'' &= \zeta'\zeta \exp[imc(x^{0\prime\prime} - x^{0\prime} - x^0)] \exp[imck' \sinh^{-1} \frac{p}{mc}] .
\end{aligned} \tag{6.3}$$

La ley de composición del nuevo parámetro k es simplememte aditiva y no modifica las tres primeras líneas, que corresponden a la ley de grupo de Poincaré sin extender (las cuatro primeras líneas corresponden al grupo de S-Poincaré no extendido), debido a que el nuevo operador momento conmuta con todo el álgebra de Poincaré sin extender. Es decir, podemos imaginarnos la variable k como parametrizando un espacio invariante bajo Poincaré. En cuanto a la última línea, correspondiente al parámetro ζ, el conmutador (6.1) requiere la presencia de un cociclo no trivial, el cual toma la forma estándar $\exp(ik'\pi)$. De la ley de grupo obtenemos los campos de vectores invariantes por la izquierda,

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^L_{x^0} &= \frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{p}{mc}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p^0(p^0 - mc)}{mc}\,\Xi \\
\tilde{X}^L_{x} &= \frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p}{mc}\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{p(p^0 - mc)}{mc}\,\Xi \\
\tilde{X}^L_{p} &= \frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial p} + (k + \frac{p^0}{mc}\, x)\Xi \\
\tilde{X}^L_{k} &= \frac{\partial}{\partial k} \\
\tilde{X}^L_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi ,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

y los invariantes por la derecha,

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_{x^0} &= \frac{\partial}{\partial x^0} \\
\tilde{X}^R_{x} &= \frac{\partial}{\partial x} + p\,\Xi \\
\tilde{X}^R_{p} &= \frac{p^0}{mc}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{x^0}{mc}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{mc}\frac{\partial}{\partial x^0} + \left(\frac{p}{mc}\, x^0 + \frac{p^0}{mc}\, x - x\right)\Xi \\
\tilde{X}^R_{k} &= \frac{\partial}{\partial k} + mc \sinh^{-1}\frac{p}{mc}\,\Xi \\
\tilde{X}^R_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi .
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Los conmutadores entre estos campos de vectores (digamos los derechos) son:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X}^R_{x^0}, \tilde{X}^R_x\right] &= 0 \\
\left[\tilde{X}^R_{x^0}, \tilde{X}^R_p\right] &= \frac{1}{mc}\tilde{X}^R_x \\
\left[\tilde{X}^R_{x^0}, \tilde{X}^R_k\right] &= 0 \\
\left[\tilde{X}^R_x, \tilde{X}^R_p\right] &= \frac{1}{mc}\tilde{X}^R_{x^0} - \Xi \\
\left[\tilde{X}^R_x, \tilde{X}^R_k\right] &= 0 \\
\left[\tilde{X}^R_k, \tilde{X}^R_p\right] &= -\Xi\,.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

La 1-forma de cuantización, es decir, la componente en $U(1)$ de la 1-forma canónica invariante por la izquierda, es

$$\begin{aligned}
\Theta &= -(x + \frac{mc}{p^0}\,k)dp - (p^0 - mc)dx^0 + \frac{d\zeta}{i\zeta} \\
&= -(x\cosh\frac{\pi}{mc} + k)d\pi - mc(\cosh\frac{\pi}{mc} - 1)dx^0 + \frac{d\zeta}{i\zeta}\,.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

A partir de ésta obtenemos los invariantes Noether:

$$\begin{aligned}
i_{\tilde{X}^R_{x^0}}\Theta &= -(p^0 - mc) \\
i_{\tilde{X}^R_x}\Theta &= p \\
i_{\tilde{X}^R_p}\Theta &= -\frac{p^0}{mc}\,x + \frac{p}{mc}\,x^0 - k \equiv -\mathrm{K} \\
i_{\tilde{X}^R_k}\Theta &= mc\sinh^{-1}\frac{p}{mc} \equiv \pi\,.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

La medida de integración invariante sobre todo el grupo, definida como el producto de todas las 1-formas invariantes por la izquierda, resulta ser:

$$\Omega = \frac{mc}{p^0}dx^0 \wedge dx \wedge dp \wedge dk = dx^0 \wedge dx \wedge d\pi \wedge dk\,. \tag{6.9}$$

El módulo característico de Θ (el núcleo del cociclo del álgebra de Lie) es $\mathcal{G}_\Theta = <\tilde{X}^L_{x^0}, \tilde{X}^L_x - \tilde{X}^L_k>$, y deberá ser incluido (o al menos una subálgebra propia de éste) en cualquier polarización que escojamos.

6.3 Representaciones del grupo de S-Poincaré

Tres polarizaciones equivalentes sobre el grupo de S-Poincaré surgen de forma natural, una de primer orden y dos de orden infinito (que obtenemos siguiendo la técnica que ya

hemos explicado), que son:

$$\mathcal{P}_p^1 = < \tilde{X}^L_{x^0}, \tilde{X}^L_x - \tilde{X}^L_k, \tilde{X}^L_x + \tilde{X}^L_k > \approx < \tilde{X}^L_{x^0}, \tilde{X}^L_x, \tilde{X}^L_k > \tag{6.10}$$

$$\mathcal{P}_x^{HO} = < \tilde{X}^L_{x^0} + \left[\sqrt{m^2c^2 - (\tilde{X}^L_x)^2} - mc\right] \Xi, \tilde{X}^L_k + mc \sinh^{-1}(\frac{i}{mc}\tilde{X}^L_x)\,\Xi, \tilde{X}^L_p > \tag{6.11}$$

$$\mathcal{P}_k^{HO} = < \tilde{X}^L_{x^0} + mc\left[\cosh(\frac{i}{mc}\tilde{X}^L_k) - 1\right] \Xi, \tilde{X}^L_x + mc \sinh(\frac{i}{mc}\tilde{X}^L_k)\,\Xi, \tilde{X}^L_p > \tag{6.12}$$

Estas polarizaciones dan lugar a representaciones unitarias e irreducibles en el espacio de momentos, espacio de configuración y espacio de configuración relativista, respectivamente.

6.3.1 Polarización $\mathcal{P}_p^1$: Realización en el espacio de momentos

Las ecuaciones de polarización, una vez que la variable ζ ha sido factorizada mediante la condición de $U(1)$-función, dan lugar a las funciones de onda:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{X}^L_{x^0}\Psi = 0 \\ \tilde{X}^L_x\Psi = 0 \\ \tilde{X}^L_k\Psi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Psi = \exp[-i(p^0 - mc)x^0]\Phi(p)\,, \tag{6.13}$$

sobre las que actúan los campos de vectores invariantes por la derecha como operadores cuánticos:

$$\begin{aligned} i\tilde{X}^R_{x^0}\Psi &= (p^0 - mc)\Psi \\ -i\tilde{X}^R_x\Psi &= p\Psi \\ i\tilde{X}^R_p\Psi &= i\frac{p^0}{mc}\exp[-i(p^0 - mc)x^0]\,\frac{\partial\Phi}{\partial p} \\ -i\tilde{X}^R_k\Psi &= mc\sinh^{-1}\frac{p}{mc}\,\Psi\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

La factorización de la exponencial en la función de onda no presenta ningún problema, con lo que nos queda tan sólo la actuación sobre $\Phi(p)$,

$$\begin{aligned} \hat{p}^0\,\Phi &= p^0\Phi \equiv mc\cosh\frac{\pi}{mc}\,\Phi \\ \hat{p}\,\Phi &= p\Phi \equiv mc\sinh\frac{\pi}{mc}\,\Phi \\ \hat{k}\,\Phi &= i\frac{p^0}{mc}\frac{\partial\Phi}{\partial p} \equiv i\frac{\partial\Phi}{\partial\pi} \\ \hat{\pi}\,\Phi &= mc\sinh^{-1}\frac{p}{mc}\,\Phi \equiv \pi\,\Phi\,. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Esta representación es claramente unitaria, como debía ser. Nótese que el operador de los boosts $\hat{k}$ puede escribirse como $i\frac{\partial}{\partial\pi}$, es decir, genera translaciones en el espectro del operador $\hat{\pi}$, haciendo que el operador $\hat{\pi}$ sea un operador momento canónico respecto del operador de los boosts.

6.3.2 Polarización $\mathcal{P}_x^{HO}$: Realización en el espacio de configuración

Siguiendo el mismo procedimiento, obtenemos las funciones de onda:

$$\tilde{X}_p^L \Psi = 0 \;\Rightarrow\; \Psi = \exp[-ixp]\exp[-imck\sinh^{-1}\frac{p}{mc}]\,\Phi(x^0,x,k)\,, \tag{6.16}$$

$$\left\{\tilde{X}_k^L + mc\sinh^{-1}(\frac{i}{mc}\tilde{X}_x^L)\,\Xi\right\}\Psi = 0 \;\Rightarrow -i\frac{\partial\Phi}{\partial k} = mc\sinh^{-1}(\frac{-i}{mc}\frac{\partial}{\partial x})\,\Phi$$
$$\Rightarrow \Phi(x^0,x,k) = \exp[imck\sinh^{-1}(\frac{-i}{mc}\frac{\partial}{\partial x})]\,\phi(x^0,x)\,, \tag{6.17}$$

$$\left\{\tilde{X}_{x^0}^L + \left[\sqrt{m^2c^2-(\tilde{X}_x^L)^2}-mc\right]\Xi\right\}\Psi = 0 \;\Rightarrow i\frac{\partial\phi}{\partial x^0} = \left[\sqrt{m^2c^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}-mc\right]\phi$$
$$\Rightarrow \phi(x^0,x) = \exp\{-ix^0[\sqrt{m^2c^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}-mc]\}\,\varphi(x)\,, \tag{6.18}$$

$$\Psi = \exp[-ixp]\exp[-imck\sinh^{-1}\frac{p}{mc}]$$
$$\times\exp[imck\sinh^{-1}(\frac{-i}{mc}\frac{\partial}{\partial x})]\exp\{-imcx^0[\sqrt{m^2c^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}-mc]\}\,\varphi(x)\,. \tag{6.19}$$

Los operadores cuánticos (ya restringidos a $\varphi(x)$) son:

$$\begin{aligned}
\hat{p}^0\varphi &= \sqrt{m^2c^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\,\varphi \\
\hat{p}\varphi &= -i\frac{\partial}{\partial x}\,\varphi \\
\hat{k}\varphi &= \left[\frac{x}{mc}\sqrt{m^2c^2-\frac{\partial^2}{\partial x^2}}+k+i\frac{x^0}{mc}\frac{\partial}{\partial x}\right]\varphi \\
\hat{\pi}\varphi &= mc\sinh^{-1}(\frac{-i}{mc}\frac{\partial}{\partial x})\,\varphi\,.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Esta realización (restringidos a x y $\frac{\partial}{\partial x}$, es decir, eliminando la "evolución" en k y x^0) no es unitaria, a pesar de que la representación sobre las funciones de onda completas sí lo es, debido al hecho de que el operador $\hat{k}$ no es hermítico, como puede apreciarse claramente en la expresión que toma arriba. Este problema, que en la literatura se soluciona por simple simetrización del operador (solución meramente superficial, sin profundizar en la verdadera naturaleza del problema), nosotros lo resolvemos mediante la introducción de las polarizaciones de orden superior y del operador posición. La polarización $\mathcal{P}_k^{HO}$ representa una alternativa a este problema.

6.3.3 Polarización $\mathcal{P}_k^{HO}$: Realización en el espacio de configuración relativista

Las ecuaciones de polarización conducen ahora a:

$$\tilde{X}_p^L \Psi = 0 \;\Rightarrow\; \Psi = \exp[-ixp] \exp[-imck \sinh^{-1} \frac{p}{mc}] \, \Phi(x^0, x, k) \,, \tag{6.21}$$

$$\left\{ \tilde{X}_{x^0}^L + mc \left[\cosh(\frac{i}{mc} \tilde{X}_k^L) - 1 \right] \Xi \right\} \Psi = 0 \;\Rightarrow i \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} = mc \left[\cosh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) - 1 \right] \Phi$$

$$\Rightarrow \Phi(x^0, x, k) = \exp\{-imcx^0 [\cosh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) - 1]\} \, \phi(x, k) \,, \tag{6.22}$$

$$\left\{ \tilde{X}_x^L + mc \sinh(\frac{i}{mc} \tilde{X}_k^L) \Xi \right\} \Psi = 0 \;\Rightarrow -i \frac{\partial \phi}{\partial x} = mc \sinh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) \, \phi$$

$$\Rightarrow \phi(x, k) = \exp[imcx \sinh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k})] \, \varphi(k) \,, \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \exp[-ixp] \exp[-imck \sinh^{-1} \frac{p}{mc}] \\ &\times \exp\{-imcx^0 [\cosh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) - 1]\} \exp[imcx \sinh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k})] \, \varphi(k) \,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Los operadores cuánticos, restringidos a su actuación sobre $\varphi(k)$, son:

$$\begin{aligned} \hat{p}^0 \varphi &= mc \cosh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) \, \varphi \\ \hat{p} \varphi &= mc \sinh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) \, \varphi \\ \hat{k} \varphi &= k \, \varphi - x^0 \sinh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) \, \varphi + x \cosh(\frac{-i}{mc} \frac{\partial}{\partial k}) \, \varphi \\ \hat{\pi} \varphi &= -i \frac{\partial}{\partial k} \varphi \,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Como puede observarse, esta representación del grupo de S-Poincaré, o más precisamente la que se obtiene una vez que se elimina la "evolución" en las variables x^0 y x del operador $\hat{k}$, es unitaria e irreducible y contiene una representación unitaria e irreducible del subgrupo de Poincaré.

Un comentario análogo al realizado tras la ecuación (6.16) viene a cuento ahora, o también, a la inversa, el nuevo parámetro k permite que el operador $\hat{k}$ pueda escribirse como un operador multiplicativo.

6.3.4 Funciones de onda de Shapiro

Las autofunciones del operador momento $\hat{p}$ en el espacio de configuración relativista son las conocidas funciones de onda de Shapiro [Mir 91]:

$$\hat{p}\varphi_p(k) = p\varphi_p(k) \Rightarrow mc\sinh(\frac{-i}{mc}\frac{\partial}{\partial k})\,\varphi_p = p\varphi_p$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_p(k) = \exp[imck\sinh^{-1}\frac{p}{mc}] \equiv \exp[ik\pi] = \left(\frac{p^0 - p}{mc}\right)^{-imck} . \qquad (6.26)$$

Capítulo 7

EL OSCILADOR ARMÓNICO RELATIVISTA

7.1 Introducción.

La búsqueda de un oscilador armónico relativista (Relativistic Harmonic Oscillator, RHO) posee una historia ya muy larga, que se remonta a Yukawa [Yuk 53], seguido por los trabajos de Feynman et al. [FKR 71] y muchos otros [KN 78, KN 86, KW 88, AH 89].

Dentro del formalismo de la cuantización sobre grupos también se ha hecho una propuesta de RHO ([ABN 91]). Ésta se basa, claro está, en consideraciones de simetría, y en la determinación de cómo debería ser el álgebra de observables para este sistema, teniendo en cuenta las tres condiciones que cabría esperar que ésta satisfaga, ésto es:

1. la naturaleza relativista,

2. que en el límite $c \to \infty$ reproduzca el oscilador no relativista y

3. que en el límite $\omega \to 0$ reproduzca la partícula libre relativista.

El álgebra de operadores físicos más simple que verifica estas condiciones es:

$$[\hat{E}, \hat{x}] = -i\frac{\hbar}{m}\hat{p}, \quad [\hat{E}, \hat{p}] = im\omega^2\hbar\hat{x}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \frac{1}{mc^2}\hat{E}), \tag{7.1}$$

donde $\hat{E}$, $\hat{x}$ y $\hat{p}$ son el generador del tiempo, de los boosts y de las translaciones, respectivamente, u operador energía, operador de los boosts y operador momento. Hemos de tener cuidado en no llamar a $\hat{x}$ operador posición, como la notación sugiere, pues éste es un sistema relativista y el operador de los boosts no es el operador posición, como ya hemos discutido en el caso de la partícula libre relativista, donde calculamos explícitamente la forma de éste y vimos que no era un generador del grupo, sino un operador de orden infinito (en el espacio de configuración).

Bajo el limite $c \to \infty$ obtenemos

$$[\hat{E}, \hat{x}] = -i\frac{\hbar}{m}\hat{p}, \quad [\hat{E}, \hat{p}] = im\omega^2\hbar\hat{x}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\,, \tag{7.2}$$

que es el álgebra de Lie del grupo de Newton [BL 68], el asociado con el oscilador no relativista.

Bajo el límite $\omega \to 0$ (es decir, "desconectando" la fuerza restauradora), obtemos

$$[\hat{E}, \hat{x}] = -i\frac{\hbar}{m}\hat{p}, \quad [\hat{E}, \hat{p}] = 0, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \frac{1}{mc^2}\hat{E})\,, \tag{7.3}$$

que es el álgebra de la partícula libre relativista en 1+1D. Más correctamente, se trata de una versión afín del álgebra de Poincaré, debido al hecho de que se ha pseudoextendido, lo cual equivale a una redefinición de la energía que permite realizar el límite no relativista sin problemas de infinitos.

El álgebra (7.1) corresponde a (una versión afín de) el grupo de Anti-deSitter en 1+1D, $SO(1,2)$, homomorfo a $SL(2,R)$ ($SL(2,R) \approx SO(1,2)/Z_2$), lo cual nos permite emplear también el formalismo de los operadores creación-destrucción y su representación en el espacio de Bargmann-Fock (BF) ([AABC 90]). La representación en el espacio de configuración (que generaliza la usual no relativista, descrita en términos de los polinomios de Hermite) y la obtenida en el espacio de BF se pueden relacionar, al igual que se hace para el caso no relativista, mediante una transformación de Bargmann relativista, que generaliza la usual no relativista.

En primer lugar, y para que sirva de ejemplo, estudiaremos el oscilador no relativista, en las dos representaciones, y construiremos la transformación de Bargmann, que no es más que el isomorfismo entre ellas. Posteriormente haremos lo mismo para el caso relativista.

7.2 Cuantización del oscilador no relativista.

La ley de grupo que emplearemos, y cuya algebra es (7.2), es la siguiente:

$$\begin{aligned}
t'' &= t' + t \\
x'' &= x + x'\cos\omega t + \frac{p'}{m\omega}\sin\omega t \\
p'' &= p + p'\cos\omega t - m\omega x'\sin\omega t \\
\zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{2\hbar}(x'p\cos\omega t - p'x\cos\omega t + (\frac{p'p}{m\omega} + \omega x'x)\sin\omega t)}\,,
\end{aligned} \tag{7.4}$$

que corresponde a una extensión central del grupo de Newton. Se trata de una verdarera extensión ya que este grupo tiene cohomología no trivial.

Con la ley de grupo podemos calcular los campos de vectores invariantes por la izquierda:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^L &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} - m\omega^2 x\frac{\partial}{\partial p} \\
\tilde{X}_x^L &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{p}{2\hbar}\Xi \\
\tilde{X}_p^L &= \frac{\partial}{\partial p} - \frac{x}{2\hbar}\Xi \\
\tilde{X}_\zeta^L &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi\,.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

y los campos invariantes por la derecha:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^R &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}_x^R &= \cos\omega t\frac{\partial}{\partial x} - m\omega\sin\omega t\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2\hbar}(p\cos\omega t + m\omega x\sin\omega t)\Xi \\
\tilde{X}_p^R &= \cos\omega t\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{m\omega}\sin\omega t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2\hbar}(x\cos\omega t - \frac{p}{m\omega}\sin\omega t)\Xi \\
\tilde{X}_\zeta^R &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi\,.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Las reglas de conmutación de estos últimos son:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X}_t^R,\ \tilde{X}_x^R\right] &= -m\omega^2\tilde{X}_p^R \\
\left[\tilde{X}_t^R,\ \tilde{X}_p^R\right] &= \frac{1}{m}\tilde{X}_x^R \\
\left[\tilde{X}_x^R,\ \tilde{X}_p^R\right] &= -\frac{1}{\hbar}\Xi\,.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

El sistema admite una polarización de primer orden, que viene dada por $< \tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L \pm im\omega\tilde{X}_p^L >$. Esto sugiere un cambio de coordenadas en el grupo: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p$, $a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p$, bajo el cual la ley de grupo se escribe:

$$\begin{aligned}
t'' &= t' + t \\
a'' &= a'e^{-i\omega t} + a \\
a^{*\prime\prime} &= a^{*\prime}e^{i\omega t} + a^* \\
\zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{2}(ia'a^*e^{-i\omega t} - ia^*a'e^{i\omega t})}\,,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

y los campos:

$$\tilde{X}_t^L = \frac{\partial}{\partial t} - i\omega a\frac{\partial}{\partial a} + i\omega a^*\frac{\partial}{\partial a^*}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA
4 OCT. 1995
COMISION DE DOCTORADO

$$\begin{aligned} \tilde{X}^L_a &= \frac{\partial}{\partial a} - \frac{i}{2}a^*\Xi \\ \tilde{X}^L_{a^*} &= \frac{\partial}{\partial a^*} + \frac{i}{2}a\Xi\,, \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}^R_t &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \tilde{X}^R_a &= e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}a^*\Xi \\ \tilde{X}^R_{a^*} &= e^{i\omega t}\frac{\partial}{\partial a^*} - \frac{i}{2}e^{i\omega t}a\Xi\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

De las dos polarizaciones equivalentes, adoptaremos $P =< \tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_a >$, que, junto con la condición de $U(1)$-función, conduce a las siguentes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Xi.\Psi = i\Psi &\rightarrow \Psi = \zeta\Phi(a, a^*, t) \\ \tilde{X}^L_a.\Psi = 0 &\rightarrow \Psi = \zeta e^{-\frac{aa^*}{2}}\phi(a^*, t) \\ \tilde{X}^L_t.\Psi = 0 &\rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} + i\omega a^*\frac{\partial\phi}{\partial a^*} = 0, \end{aligned} \tag{7.11}$$

donde la última es la ecuación de movimiento del oscilador armónico en la representación de BF, cuya solución general es [Bar 67]:

$$\phi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(a^*, t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(a^*e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{\pi n!}}\,. \tag{7.12}$$

En el lenguaje estándar de la Mecánica Cuántica, los autovectores del operador $\hat{E} = i\hbar\tilde{X}^R_t$ se escriben $|n>$, los del operador destrucción $\hat{a} = \tilde{X}^R_{a^*}$ como $|a, t>$ (los llamados estados coherentes), y $\Phi_n \equiv e^{-\frac{aa^*}{2}}\phi_n(a^*, t)$ como $< a, t|n >$, es decir, los autovectores del operador energía en la representación de los estados coherentes. En esta representación la actuación de los operadores cuánticos $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger = -\tilde{X}^R_a$ (que se relacionan con los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ de la forma estándar) y $\hat{E}$ es:

$$\begin{aligned} \hat{a}\Phi_n &= \sqrt{n}\Phi_{n-1} \\ \hat{a}^\dagger\Phi_n &= \sqrt{n+1}\Phi_{n+1} \\ \hat{E}\Phi_n &= n\hbar\omega\Phi_n\,, \end{aligned} \tag{7.13}$$

y el producto escalar que define el espacio de Hilbert viene dado por:

$$< \Psi'|\Psi >= \int d(\mathrm{Re}a^*)d(\mathrm{Im}a)dte^{-aa^*}\phi'^*(a^*, t)\phi(a^*, t)\,, \tag{7.14}$$

donde la función peso la proporciona el factor comun $e^{-\frac{aa^*}{2}}$ de las funciones de onda en (7.11), y la medida de integración es el volumen invariante sobre el grupo $\theta^{L(a)} \wedge \theta^{L(a^*)} \wedge \theta^{L(t)}$ (ver [AA 87]).

Vemos que la CSG conduce de forma natural a la representación en el espacio de BF, del mismo modo que en la partícula galileana conducía a la representación en el espacio de momentos. Pero al igual que allí, podemos imponer una polarización de orden superior para obtener la representación en el espacio de configuración (o en el de momentos, que para el caso del oscilador son simétricos), y de esta manera obtener la forma usual de las funciones de onda en términos de una gausiana por polinomios de Hermite. Para obtener la representación en el espacio de configuración (además de volver a la parametrización x, p) hemos de incluir $\tilde{X}_p^L$ en la polarización, pero entonces hemos de buscar un operador de orden superior para $\tilde{X}_t^L$. La polarización que se obtiene es la misma que en el caso de Galileo[1]:

$$P^{HO} =< \tilde{X}_p^L,\ \tilde{X}_t^L - \frac{i\hbar}{2m}\tilde{X}_x^L\tilde{X}_x^L >\,, \tag{7.15}$$

y las ecuaciones a que conduce son:

$$\begin{aligned} \Xi.\Psi = i\Psi \quad &\rightarrow \quad \Psi = \zeta\psi(x,p,t) \\ \tilde{X}_p^L.\Psi = 0 \quad &\rightarrow \quad \Psi = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{px}{2}}\Phi(x,t) \\ (\tilde{X}_t^L - \frac{i\hbar}{2m}\tilde{X}_x^L\tilde{X}_x^L).\Psi = 0 \quad &\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\Phi\,, \end{aligned} \tag{7.16}$$

con las ya conocidas soluciones

$$\Phi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(x,t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}e^{-in\omega t}H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)\,. \tag{7.17}$$

El producto escalar viene dado por

$$< \Psi_n|\Psi_m >= \int dpdxdt\Phi_n^*(x,t)\Phi_m(x,t)\,, \tag{7.18}$$

donde la medida de integración es de nuevo el volumen invariante sobre el grupo $\theta^{L(p)} \wedge \theta^{L(x)} \wedge \theta^{L(t)}$. Como la dependencia en p desaparece del integrando, la integración en p contribuye con un factor constante (aunque infinito), por lo que se puede regularizar trivialmente dando lugar al producto escalar usual

$$< \Phi_n|\Phi_m >= \int dxdt\Phi_n^*(x,t)\Phi_m(x,t) = \delta_{nm}\,. \tag{7.19}$$

---

[1]Si quisiésemos obtener la representación en el espacio de momentos, ésta sería $P^{HO} =< \tilde{X}_x^L,\ \tilde{X}_t^L - \frac{i\hbar}{2}m\omega^2\tilde{X}_p^L\tilde{X}_p^L >$.

De nuevo, en la notación estándar $\Phi_n(x,t)$ lo escribiríamos como $< x,t|n >$, y la equivalencia entre las dos representaciones obtenidas, es decir, la transformacion de Bargmann [Bar 67], que lleva los estados $\Phi_n(a^*,t)$ a los estados $\Phi_n(x,t)$ se escribe formalmente

$$< x,t'|n >= \int d(\mathrm{Re}a^*)d(\mathrm{Im}a)dt < x,t'|a,t >< a,t|n > , \qquad (7.20)$$

donde el núcleo $< x,t'|a,t >$ es

$$\begin{aligned} < x,t'|a,t > &= \frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}\exp(-2i\omega(t'-t))+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}xa\exp(-i\omega(t'-t))} \times \\ & e^{-\frac{1}{2}(\frac{m\omega}{\hbar}x^2+|a|^2)} . \end{aligned} \qquad (7.21)$$

El primer factor exponencial constituye la función generatriz de los polinomios de Hermite $H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)$ [NU 88]. De este modo, la transformación de Bargmann (más bien su núcleo), está asociada a la función generatriz de los polinomios de Hermite.

7.3 El oscilador armónico relativista.

Para cuantizar el oscilador armónico relativista seguiremos el mismo procedimiento que para el caso no relativista. Tan sólo hemos de substituir la ley de grupo (7.4) por la correspondiente al álgebra de Lie (7.1). Este álgebra de Lie es isomorfa a la de $SL(2,R)$ (pseudoextendida), así que el grupo que buscamos es $SL(2,R)$ o algún recubridor suyo (normalmente se trabaja con el recubridor universal). En la práctica, la única diferencia estriba en el carácter del parámetro $N \equiv \frac{mc^2}{\hbar\omega}$ de la pseudoextensión, que para $SL(2,R)$ debe ser semientero mayor que $\frac{1}{2}$, y para el recubridor universal sólo debe ser real positivo.

Por tanto la forma en que exponenciemos el álgebra no importa (salvo por el carácter de N), así que vamos a dar directamente la ley de grupo, que ha sido obtenida a partir de la actuación del grupo de anti-deSitter sobre el espacio-tiempo y con una parametrización adecuada del tiempo para que tenga los límites $c \to \infty$ y $\omega \to 0$ correctos. La obtención de esta ley de grupo aparece de forma detallada en [ABGN 93b]. Ésta es:

$$\begin{aligned} \sin\omega t'' &= \frac{\omega}{\alpha''}(\frac{\alpha}{mc^2\alpha'}p'x'\sin\omega t'\sin\omega t + \frac{\alpha P_0'}{m\omega\alpha' c}\cos\omega t'\sin\omega t \\ &+ \frac{\omega}{\alpha' mc^3}xx'P_0'\sin\omega t' + \frac{\alpha'\alpha}{\omega}\cos\omega t\sin\omega t' + \frac{p'x}{mc^2\alpha'}\cos\omega t') \\ x'' &= \frac{p'\alpha}{m\omega}\sin\omega t + \alpha x'\cos\omega t + \frac{xP_0'}{mc} \\ p'' &= \frac{\omega xp}{\alpha c^2}(\frac{p'}{m}\sin\omega t + \omega x'\cos\omega t) + \frac{P_0}{c\alpha}(\frac{p'}{m}\cos\omega t - \omega x'\sin\omega t) + \frac{pP_0'}{mc} \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{\hbar}(\delta''-\delta'-\delta)} , \end{aligned} \qquad (7.22)$$

donde

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv \sqrt{mc^2 + p^2 + m^2\omega^2 x^2} \\ \alpha &\equiv \sqrt{1 + \frac{\omega^2 x^2}{c^2}} \\ \delta &\equiv -mc^2 t - f \\ f &\equiv -\frac{2mc^2}{\omega} tan^{-1}\left[\frac{mc^2}{\omega px}(\alpha - 1)(\frac{P_0}{mc} - \alpha)\right] . \end{aligned} \tag{7.23}$$

El término f en la función generatriz δ se introduce para que el coborde por el que se pseudoextiende (que se convierte en un verdadero cociclo al hacer el límite $c \to \infty$) tienda al cociclo empleado en (7.4), pero no contribuye a las constantes de estructura del álgebra ya que se trata de un verdadero coborde (no tiende a un cociclo en el límite).

Los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^L &= \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} - m\omega^2 x\frac{\partial}{\partial p} + \frac{P_0}{mc\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t} \\ \tilde{X}_p^L &= \frac{P_0}{mc}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{mcx}{P_0 + mc\hbar}\Xi \\ \tilde{X}_x^L &= \frac{P_0}{mc}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p}{mc^2\alpha^2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{pmc}{P_0 + mc\hbar}\Xi , \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^R &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \tilde{X}_p^R &= \frac{\alpha}{m\omega}\sin\omega t\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{\omega xp}{mc^2\alpha}\sin\omega t + \frac{P_0}{mc\alpha}\cos\omega t)\frac{\partial}{\partial p} + \\ &\quad \frac{x}{mc^2\alpha}\cos\omega t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{(P_0 + mc)\alpha}(P_0 x\cos\omega t - \frac{pc}{\omega}\sin\omega t)\frac{1}{\hbar}\Xi \\ \tilde{X}_x^R &= \alpha\cos\omega t\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{\omega^2 xp}{c^2\alpha}\cos\omega t - \frac{P_0\omega}{c\alpha}\sin\omega t)\frac{\partial}{\partial p} - \frac{x\omega}{c^2\alpha}\sin\omega t\frac{\partial}{\partial t} + \\ &\quad \frac{m}{(P_0 + mc)\alpha}(P_0\omega x\sin\omega t + pc\cos\omega t)\frac{1}{\hbar}\Xi , \end{aligned} \tag{7.25}$$

verificando las relaciones de conmutación (las mismas para los campos invariantes por la izquierda, salvo un signo global):

$$\begin{aligned} \left[\tilde{X}_t^R,\ \tilde{X}_x^R\right] &= -m\omega^2\tilde{X}_p^R \\ \left[\tilde{X}_t^R,\ \tilde{X}_p^R\right] &= \frac{1}{m}\tilde{X}_x^R \\ \left[\tilde{X}_x^R,\ \tilde{X}_p^R\right] &= \frac{1}{mc^2}\tilde{X}_t^R - \frac{1}{\hbar}\Xi . \end{aligned} \tag{7.26}$$

7.3.1 La representación de Bargmann-Fock.

Como en el caso no relativista, exite una polarización de primer orden, $< \tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L \pm im\omega\tilde{X}_p^L >$, con lo que de nuevo conviene hacer el cambio de variables en la ley de grupo:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p \\ z^* &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p \\ \eta &\equiv e^{i\theta} = e^{i\frac{\omega}{2}(t+\frac{1}{2mc^2}f)}, \end{aligned} \tag{7.27}$$

con lo cual ésta se escribe ahora:

$$\begin{aligned} z'' &= z'\eta^{-2} + z\kappa' + \frac{z}{N(1+\kappa)}(z^*z'\eta^{-2} + z'^*z\eta^2) \\ z^{*\prime\prime} &= z'^*\eta^2 + z^*\kappa' + \frac{z^*}{N(1+\kappa)}(zz'^*\eta^2 + z'z^*\eta^{-2}) \\ \eta'' &= \sqrt{\frac{2}{1+\kappa''}}\left[\sqrt{\frac{1+\kappa'}{2}}\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta'\eta + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa'}}\sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\frac{z'z^*}{2N}\eta'\eta^*\right] \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta(\eta''\eta'^{-1}\eta^{-1})^{-2N} \\ \kappa &\equiv \sqrt{1+\frac{2zz^*}{N}}, \end{aligned} \tag{7.28}$$

donde se ha eliminado la función f del coborde porque ya no se necesita para recuperar la ley de grupo (7.8) en el límite $c \to \infty$.

Sin embargo la función f sí aparece en el cambio de variable del tiempo[2], y esto es así porque en realidad no se ha obtenido esta ley de grupo de la ley (7.22), sino que se han obtenido ambas por separado; la ley (7.28) se obtiene en [AABC 90] a partir de la acción natural de $SU(1,1) \approx SL(2,R)$ sobre C^2. Las variables z, z^* se relacionan con las del hiperboloide $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 1$ a través de $z_1 = \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta, z_2 = \frac{1}{\sqrt{2N}}\sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\eta z$, y η parametriza el subgrupo $U(1)$ de Cartan.

Los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha son:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_z^L &= \kappa\frac{\partial}{\partial z} + \frac{iz^*}{2N(1+\kappa)}\left(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - \frac{iz^*}{1+\kappa}\Xi \\ \tilde{X}_{z^*}^L &= \kappa\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{iz}{2N(1+\kappa)}\left(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{iz}{1+\kappa}\Xi \\ \tilde{X}_\eta^L &= i\eta\frac{\partial}{\partial\eta} - 2iz\frac{\partial}{\partial z} + 2iz^*\frac{\partial}{\partial z^*} \end{aligned} \tag{7.29}$$

[2]Además, la relación entre el tiempo de $SL(2,R)$, θ, y el de $S0(1,2)$ lleva el factor $\frac{1}{2}$ debido a que $SL(2,R) \approx S0(1,2)/Z_2$.

$$\tilde{X}^L_\zeta = i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi\,,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_z &= \frac{\eta^{-2}}{(1+\kappa)}\left[\frac{(1+\kappa)^2}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{z^{*2}}{N}\frac{\partial}{\partial z^*} - i\frac{z^*}{N\omega}\left(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + iz^*\Xi\right] \\
\tilde{X}^R_{z^*} &= \frac{\eta^2}{(1+\kappa)}\left[\frac{(1+\kappa)^2}{2}\frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{z^2}{N}\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{z}{N\omega}\left(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - iz\Xi\right] \qquad (7.30)\\
\tilde{X}^R_\eta &= i\eta\frac{\partial}{\partial\eta} \\
\tilde{X}^R_\zeta &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi\,.
\end{aligned}$$

La polarización que tomaremos es $\mathcal{P} =< \tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_z >$, al igual que en el caso galileano. Por conveniencia escribimos Ψ como $(1+\kappa)^{-\gamma N}\chi(z, z^*, \eta, \zeta)$, con lo que las ecuaciones de polarización conducen a:

$$\begin{aligned}
\Xi.\Psi = i\Psi &\rightarrow \Psi = \zeta(1+\kappa)^{-\gamma N}\chi(z, z^*, \eta) \\
\tilde{X}^L_z.\Psi = 0 &\rightarrow \kappa\frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{i}{2N}\frac{z^*}{1+\kappa}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} = 0,\ \ \gamma = 1 \qquad (7.31)\\
\tilde{X}^L_\eta.\Psi = 0 &\rightarrow \frac{\partial\chi}{\partial\theta} - 2iz\frac{\partial\chi}{\partial z} + 2iz^*\frac{\partial\chi}{\partial z^*} = 0\,,
\end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned}
\Psi(\zeta, z, z^*, \theta) &\equiv \zeta\sum_n c_n e^{-2in\theta}\chi_n(z, z^*) \\
&= \zeta(1+\kappa)^{-N}\sum_n c_n e^{-2in\theta}(1+\kappa)^{-n}z^{*n} \\
&\equiv \zeta\sum_n c_n\tilde{\Psi}^N_n(z, z^*, \theta), \qquad (7.32)
\end{aligned}$$

donde hemos introducido

$$\tilde{\Psi}^N_n(z, z^*, \theta) \equiv \tilde{C}^N_n e^{-2in\theta}\tilde{\Phi}^N_n(z, z^*) \equiv \tilde{C}^N_n e^{-in\theta}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N-n} z^{*n} \qquad (7.33)$$

$$\tilde{C}^N_n = \frac{1}{\pi\sqrt{n!}}\sqrt{\frac{(2N+n-1)!}{(2N-1)!(2N)^n}}\sqrt{\frac{2N-1}{2N}}\,.$$

Hay que resaltar que todas estas expresiones tienen el límite $c \rightarrow \infty$ correcto, lo cual nos da siempre un control sobre los resultados que nos van apareciendo. Al igual que en el caso no relativista, adoptamos la notación $|n >$ y $< z, \theta|n >$ para los autoestados del operador energia y su expresion en la representación de las "z", así como $\hat{E}, \hat{z}$ y $\hat{z}^\dagger$ para

los operadores $\tilde{X}_t^R, \tilde{X}_{z^*}^R$ y $-\tilde{X}_z^R$, respectivamente. Sin embargo, al contrario que para el caso no relativista, la variable z ya no es autovalor del operador destrucción $\hat{z}$, sino tan sólo está relacionada con el invariante Noether z_0.

Podemos construir la representación abstracta del espacio de Fock, que para los estados normalizados

$$< 0|0 >= 1,\ |n >= \frac{(\hat{z}^\dagger)^n|0>}{\sqrt{n!\prod_{s=1}^{n-1}(1+\frac{s}{2N})}}, \tag{7.34}$$

toma la expresión:

$$\begin{aligned} \hat{z}|n> &= \sqrt{n(1+\frac{n-1}{2N})}|n-1> \\ \hat{z}^\dagger|n> &= \sqrt{(n+1)(1+\frac{n}{2N})}|n+1> \\ \hat{E}|n> &= \hbar\omega n|n> . \end{aligned} \tag{7.35}$$

En el producto escalar aparece un peso adicional, ya que el volumen invariante sobre el "hiperboloide de masas" en $SL(2,R)$, dado por la forma simpléctica $\omega = (d\Theta$ módulo la ecuación de movimiento) [3], es $d(\mathrm{Im}z)d(\mathrm{Re}z^*)/\kappa$, que como vemos tiene un factor adicional $1/\kappa$. Por tanto el producto escalar en el espacio de BF es:

$$\begin{aligned} < \tilde{\Psi}_n^N|\tilde{\Psi}_m^N > &= \tilde{C}_n^N\tilde{C}_m^N \int \frac{d(Rez^*)d(Imz)}{\kappa} d\theta e^{-2i(m-n)\theta} \\ &\times \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-2N-n-m} z^n z^{*m} = \delta_{nm} , \end{aligned} \tag{7.36}$$

7.3.2 Cuantización en el espacio de configuración: polinomios de Hermite relativistas

Para obtener la cuantización en el espacio de configuración, nos encontramos con el mismo problema que en el caso del oscilador no relativista; no podemos encontrar una polarización de primer orden que contenga a $\tilde{X}_p^L$ y al módulo característico generado por $\tilde{X}_t^L$ (ya que éstos cierran todo el álgebra). Por tanto buscamos una polarización de orden superior que contenga a $\tilde{X}_p^L$ (para que efectivamente nos conduzca al espacio de configuración), y el campo $\tilde{X}_t^L$ sea substituido por un operador de orden superior. La polarización más sencilla es:

$$< (\tilde{X}_t^L)^2 - c^2(\tilde{X}_x^L)^2 + \frac{2imc^2}{\hbar}\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_p^L > . \tag{7.37}$$

[3] También puede obtenerse de la forma usual, al igual que en el caso no relativista, como $\theta^{L(z)} \wedge \theta^{L(z^*)} \wedge \theta^{L(\theta)}$.

Sin embargo, al operador de orden superior se le puede añadir una función arbitraria de $\tilde{X}_p^L$, además de un término proporcional a $\tilde{X}_\zeta^L \equiv \Xi$ que sea una función constante sobre el grupo. Por tanto, podemos elegir un operador de la forma

$$(\tilde{X}_t^L)^2 - c^2(\tilde{X}_x^L)^2 + \frac{2imc^2}{\hbar}\tilde{X}_t^L - m^2c^2\omega^2(\tilde{X}_p^L)^2\,, \tag{7.38}$$

que podemos reescribir como

$$(\tilde{X}_t^L + \frac{imc^2}{\hbar})^2 - c^2(\tilde{X}_x^L)^2 - m^2c^2\omega^2(\tilde{X}_p^L)^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\,, \tag{7.39}$$

una vez que se ha aplicado la condición de $U(1)$-función. Si tenemos en cuenta que la función de onda relativista ϕ, debido a la pseudoextensión (que hace que tenga límite $c \to \infty$ finito) tiene la masa en reposo restada, y que la función de onda física φ debería llevarla, con lo cual $\varphi = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\phi$, el operador de orden superior (7.39) realiza (al menos con campos izquierdos) la restricción clásica de la capa de masas

$$E^2 - c^2P^2 - m^2c^2\omega^2K^2 = m^2c^4\,, \tag{7.40}$$

donde E, P, y K son los invariantes Noether asociados a la translación temporal, las translaciones espaciales y los boosts, respectivamente.

La polarización de orden superior que elegimos es

$$< \tilde{X}_t^{HO} \equiv (\tilde{X}_t^L)^2 - c^2(\tilde{X}_x^L)^2 + \frac{2imc^2}{\hbar}\tilde{X}_t^L + \lambda\frac{imc^2\omega}{\hbar}\Xi\,, \tilde{X}_p^L >\,, \tag{7.41}$$

donde hemos introducido el parámetro λ, que lo mantenemos arbitrario por el momento.

Nótese que, al igual que ocurre en el caso de la partícula libre relativista, esta polarización, aunque es de segundo orden, es radicalmente diferente a la del oscilador no relativista (o la partícula galileana), y tiene estructura de ecuación de Klein-Gordon más que de ecuación de Schrödinger. Esto, por supuesto, se debe a que se trata de un sistema relativista y, como tal, admite una ecuación de Klein-Gordon, aunque al igual que hemos hecho con la partícula libre relativista seremos capaces de encontrar una ecuación tipo Schrödinger.

Las ecuaciones a que conduce esta polarización son:

$$\begin{aligned}
\Xi.\Psi = i\Psi \;&\rightarrow\; \Psi = \zeta\Phi(x,p,t) \\
\tilde{X}_p^L.\Psi = 0 \;&\rightarrow\; \Psi = \zeta e^{\frac{i}{\hbar}f}\phi(x,t) \\
\tilde{X}_t^{HO}.\Psi = 0 \;&\rightarrow\; \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{2imc^2}{\hbar\alpha^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} - 2\omega^2 x\frac{\partial\phi}{\partial x} - c^2\alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \\
&\qquad \frac{m^2c^4}{\hbar^2\alpha^2}\phi + \lambda\frac{mc^2\omega}{\hbar}\phi = 0\,,
\end{aligned} \tag{7.42}$$

donde f es la función que aparece en (7.23). Si restauramos la energía en reposo, obtenemos una ecuación tipo Klein-Gordon a partir de la tercera de (7.42):

$$\hat{C}\varphi \equiv -\frac{c^2}{\omega^2}\Box\varphi = N(N-\lambda)\varphi\,, \tag{7.43}$$

donde

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2\omega^2 x}{c^2}\frac{\partial}{\partial x} - \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7.44}$$

es el D'Alambertiano en un espacio-tiempo de anti-deSitter y $N = \frac{mc^2}{\hbar\omega}$. En [ABGN 93b] se estudia la conexión con el movimiento en un espacio homogeneo bajo el grupo $SO(1,2)$, es decir, el movimiento en un universo de anti-deSitter. Empleamos la notación $\hat{C}\varphi$ para resaltar que el término de la izquierda en (7.43), que es la realización cuántica del término de la izquierda de la restricción (7.40) (salvo un factor constante), es el operador de Casimir del álgebra de $SL(2,R)$, en esta parametrización [Bac 77].

Para aclarar algunas ideas, veamos qué relación hay entre los valores propios del Casimir y los pesos máximos. Para $SL(2,R)$[4], la relación entre los valores propios C del Casimir, y el peso máximo $W_m \equiv \frac{E_0}{\hbar\omega}$ es:

$$C = W_m(W_m - 1), \tag{7.45}$$

y, a la inversa,

$$\frac{E_0}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4C}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4N(N-\lambda)}}{2} \equiv \frac{1}{2} + N_\lambda\,, \tag{7.46}$$

donde se ha utilizado que $C = N(N-\lambda)$. Se ha elegido el signo positivo de los dos posibles para la raíz cuadrada, por la misma razón que en el caso de la partícula libre relativista con polarización tipo Klein-Gordon. En principio, el parámetro λ lo mantendremos arbitrario, aunque puede ser particularizado para obtener, por ejemplo, la polarización más simple que se da en (7.37) con $\lambda = 0$, y para la cual $C = N^2$, que conduce a una representación que podríamos llamar de Casimir, o podemos tomar el valor $\lambda = 1$, para la cual el peso máximo es N y el Casimir es $N(N-1)$, que se correspondería con una polarización de peso máximo, que fue la obtenida en [ABN 91].

La ecuación (7.43) se puede resolver por desarrollo en serie. Si escribimos la función de onda de energía definida de la forma

$$\varphi_n \equiv e^{-ib_n\omega t}\alpha^{-c_n}H_n^{(N,\lambda)}\,, \tag{7.47}$$

y la substituimos en la ecuación (7.43), obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} b_n &= c_n \\ c_n &= c_0 + n \equiv \frac{1}{2} + N_\lambda + n\,, \end{aligned} \tag{7.48}$$

[4]Para $SU(2)$ la relación es $C = j(j+1)$, donde $-j$ es el peso máximo.

y las funciones $H_n^{(N,\lambda)}$ (que serán polinomios) satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1+\frac{\xi^2}{N})\frac{d^2}{d\xi^2}H_n^{(N,\lambda)} - \frac{2}{N}(N_\lambda + n - \frac{1}{2})\xi\frac{d}{d\xi}H_n^{(N,\lambda)} + \frac{n}{N}(2N_\lambda + n)H_n^{(N,\lambda)} = 0\,, \qquad (7.49)$$

donde $\xi \equiv \sqrt{\frac{n\omega}{\hbar}}x$.
Esta ecuación diferencial, aunque no es de la forma estándar, ya que tiene una dependencia extra en n en el coeficiente de la primera derivada, conduce a un sistema de polinomios ortogonales. Hay que notar que al contrario de lo que ocurre en el caso no relativista donde existe un peso fijo (la gausiana), la ortogonalidad aquí se verifica respecto a un peso fijo multiplicado además por un peso que depende del índice n. Más adelante discutiremos un poco más este asunto.

Para encontrar los polinomios $H_n^{(N,\lambda)}(\xi)$ escribimos un desarrollo de la forma (similar al del caso no relativista):

$$H_n^{(N,\lambda)}(\xi) = \sum_{s=0}^{[n/2]} a_{n,n-2s}^{(N,\lambda)}(2\xi)^{n-2s}\,. \qquad (7.50)$$

La ecuación (7.49) proporciona las relaciones de recurrencia entre los coeficientes $a^{(N,\lambda)}$,

$$a_{n,n-2s}^{(N,\lambda)} = -\frac{(s+1)(N_\lambda+s+1)}{N(n-2s)(n-2s-1)}a_{n,n-2(s+1)}^{(N,\lambda)}\,, \qquad (7.51)$$

de la cual se obtiene la expresión general

$$a_{n,n-2s}^{(N,\lambda)} = (-1)^s\frac{N^s n!N_\lambda!(2N_\lambda+n)!}{(2N)^n s!(N_\lambda+s)!(2N_\lambda)!(n-2s)!}, \quad s=0,...[\frac{n}{2}]\,. \qquad (7.52)$$

Las relaciones de recurrencia entre los polinomios $H_n^{N_\lambda}$ son:

$$H_{n+1}^{(N,\lambda)}(\xi) = \left[2\frac{(N_\lambda+n+\frac{1}{2})}{N}\xi - (1+\frac{\xi^2}{N})\frac{d}{d\xi}\right]H_n^{(N,\lambda)}(\xi) \qquad (7.53)$$

$$\frac{d}{d\xi}H_n^{(N,\lambda)}(\xi) = \frac{n}{N}(2N_\lambda+n)H_{n-1}^{(N,\lambda)}(\xi)\,, \qquad (7.54)$$

y la fórmula de Rodrigues:

$$H_n^{(N,\lambda)}(\xi) = (-1)^n(1+\frac{\xi^2}{N})^{N_\lambda+n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{d\xi^n}\left[(1+\frac{\xi^2}{N})^{-(N_\lambda+\frac{1}{2})}\right]\,. \qquad (7.55)$$

Las fórmulas (7.53) y (7.54) nos proporcionan la expresión explícita de los operadores de creación $\hat{Z}^\dagger \equiv -\tilde{X}_x^R - im\omega\tilde{X}_p^R$ y destrucción $\hat{Z} \equiv \tilde{X}_x^R - im\omega\tilde{X}_p^R$ actuando sobre los $H^{(N,\lambda)}$. Éstos son:

$$\hat{Z}^\dagger|_{H_n^{(N,\lambda)}} H_n^{(N,\lambda)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} H_{n+1}^{(N,\lambda)} \tag{7.56}$$

$$\hat{Z}|_{H_n^{(N,\lambda)}} H_n^{(N,\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{n}{N}(2N_\lambda + n) H_{n-1}^{(N,\lambda)} .$$

Un método alternativo para obtener las soluciones consiste en encontrar el vacío, mediante una caracterización algebraica del mismo como es la imposición de que sea anulado por el operador destrucción $\hat{Z}|0>=0$, y que tenga una cierta energía, $\hat{E}|0>=(\frac{1}{2}+N_\lambda)|0>$, para encontrar después la órbita sobre el vacío, es decir, la actuación sucesiva del operador creación $\hat{Z}^\dagger$ sobre el vacío $|0>$. Este fue el método originalmente empleado en [ABN 91] para calcular los polinomios H_n^N (que se corresponden a $\lambda = 1$), y también fue utilizado anteriormente en [NK 90], y se trata de un método general para obtener las representaciones irreducibles de un sistema que admita un vacío.

Podría parecer que tenemos dos parámetros que nos caracterizan la representación, N y λ, pero en realidad, como se puede deducir a partir de las ecuaciones que caracterizan los polinomios y la energía, dos conjuntos de polinomios con parámetros (N,λ) y (N',λ') son equivalentes si $N'(N'-\lambda') = N(N-\lambda)$, difiriendo tan sólo en un cambio de escala en la variable x, que pasa a $x' = \sqrt{\frac{N'}{N}}x$.

En todas las expresiones se puede comprobar que al hacer el límite $c \to \infty$ se recupera la contrapartida no relativista (para cualquier valor de λ). Por ejemplo, los polinomios $H_n^{(N,\lambda)}(\xi)$ (ver más abajo) tienden a los polinomios de Hermite ordinarios, y el vacío $\alpha^{-\frac{1}{2}-N_\lambda}$ tiende a la gausiana $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Un valor interesante para λ es $\lambda = 0$, que se corresponde a la representación tipo Casimir, y para el cual $N_{\lambda=0} = \check{N} \equiv \frac{\sqrt{1+4N^2}}{2}$, con lo cual el espectro de energías es:

$$E_n^{(N,0)} = (\frac{1}{2} + \check{N} + n)\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\omega + \sqrt{\frac{(\hbar\omega)^2}{4} + (mc^2)^2} + n\hbar\omega\,, \tag{7.57}$$

donde se observa una mezcla no trivial entre la energía del vacío $\frac{1}{2}\hbar\omega$ y la energía de la masa en reposo.

En cualquier caso, para $c \to \infty$, $E_n^{(N,\lambda)} - mc^2 \to (\frac{1}{2} + n - \frac{\lambda}{2})\hbar\omega$, que corresponde a la energía del oscilador armónico no relativista, desplazada en un valor $-\lambda/2$.

Las funciones de onda normalizadas son

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{(N,\lambda)}(x,t) &\equiv C_n^{(N,\lambda)} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n^{(N,\lambda)} - mc^2)t} \Phi_n^{(N,\lambda)}(x) \\
&= C_n^{(N,\lambda)} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n^{(N,\lambda)} - mc^2)t} \alpha^{-(\frac{1}{2}+N_\lambda+n)} H_n^{(N,\lambda)}(\xi) \qquad (7.58) \\
C_n^{(N,\lambda)} &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{(2N_\lambda)!(2N)^n}{(2N_\lambda+n)!}} \sqrt{\frac{\Gamma(N_\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{N}\Gamma(N_\lambda)}},
\end{aligned}$$

que lo son respecto al producto escalar

$$\begin{aligned} < \Psi_n^{(N,\lambda)} | \Psi_m^{(N,\lambda)} > &= C_n^{(N,\lambda)} C_m^{(N,\lambda)} \int dx dt e^{-i(m-n)\omega t} \alpha^{-(1+2N_\lambda+n+m)} H_n^{(N,\lambda)} H_m^{(N,\lambda)} \\ &= \delta_{nm} \,, \end{aligned} \tag{7.59}$$

donde de nuevo hemos usado la medida invariante sobre el grupo y eliminado la dependencia en p, pero esta vez hemos tenido que realizar un proceso de regularización no trivial. Esto es así porque el volumen invariante sobre el grupo es $\frac{dpdxdt}{P_0}$, donde P_0 depende de p y también de x. Realizamos en primer lugar la integración en p introduciendo un cut-off, que mantenemos para integrar en x. Se puede comprobar que si dividimos por la norma del vacío, el límite al hacer el cut-off infinito esta definido, y además este proceso no introduce nigún factor adicional, lo que nos permite definir el producto escalar tal y como lo hemos hecho.

Los primeros polinomios de Hermite relativistas $H_n^{(N,\lambda)}(\xi)$ son

$$\begin{aligned} H_0^{(N,\lambda)} &= 1 \\ H_1^{(N,\lambda)} &= 2(\frac{2N_\lambda + 1}{2N})\xi \\ H_2^{(N,\lambda)} &= 4(\frac{2{N_\lambda}^2 + 3N_\lambda + 1}{2N^2})\xi^2 - 2(\frac{2N_\lambda + 1}{2N}) \\ H_3^{(N,\lambda)} &= 8(\frac{4{N_\lambda}^3 + 6{N_\lambda}^2 + 11N_\lambda + 3}{4N^3})\xi^3 - 12(\frac{4{N_\lambda}^2 + 8N_\lambda + 3}{4N^2})\xi \,. \end{aligned} \tag{7.60}$$

7.3.3 La transformación de Bargmann relativista

Al igual que se hace para el caso no relativista, podemos definir aquí la transformación de Bargmann relativista como aquella que relaciona las funciones de onda $< x,t|n >$ y $< z,\theta|n >$, en el espacio de configuración y en el de BF respectivamente. A diferencia del caso no relativista, la variable z ya no es autovalor del operador $\hat{Z}$, pero sí sigue estando relacionada con el invariante Noether z_0 asociado a este operador, $z = z_0 e^{-2i\theta}$.

Por tanto, construiremos la transformación de Bargmann relativista que relacione los estados

$$< x,t|n > \equiv \Psi_n^N(x,t) \,, \tag{7.61}$$

con los estados

$$< z,\theta|n > \equiv \tilde{\Psi}_n^N(z,z^*,\theta) \,, \tag{7.62}$$

por lo que la RBT es el núcleo $< x,t|z,\theta >$ de la transformación integral

$$< x,t|n > = \int \frac{dzdz^*}{\kappa} d\theta < x,t|z,\theta >< z,\theta|n > \,, \tag{7.63}$$

es decir:

$$< x,t|z,\theta >= \sum_{n=0}^{\infty} < x,t|n >< n|z,\theta > \tag{7.64}$$

$$= \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N} \alpha^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^N \tilde{C}_n^N \alpha^{-n} H_n^N(\xi) \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-n} z^n e^{-in(\omega t-2\theta)}, \tag{7.65}$$

Ésta puede verse como la función generatriz de la función de onda completa en el espacio de configuración. En ella hemos elegido el valor particular $\lambda = 1$ ($N_\lambda = N - \frac{1}{2}$) para que la transformación vaya de representación de peso máximo a representación de peso máximo, aunque también se puede hacer en general ya que, como hemos mencionado, todas son equivalentes (habría que tener en cuenta el factor de cambio de escala).

A partir de la fórmula de Rodrigues (7.55) particularizada a $\lambda = 1$, podemos deducir una representación integral de los polinomios $H_n^N(\xi) \equiv H_n^{(N,1)}(\xi)$ [NU 88, ZDT 93]:

$$H_n^N(\xi) = (-1)^n \left(1+\frac{\xi^2}{N}\right)^{N+n} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{(1+\frac{s^2}{N})^N (s-\xi)^{n+1}}, \tag{7.66}$$

donde C es un contorno que incluye el punto $s = \xi$ y excluye los puntos $\pm i\sqrt{N}$. Así podemos dar a $< x,t|z,\theta >$ una representación integral:

$$\begin{aligned} < x,t|z,\theta > \;\; - \;\; & \hat{C}^N \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N} \alpha^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{-n}}{2^{\frac{n}{2}} n!} \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-n} z^n e^{-in(\omega t-2\theta)} \\ & \times (-1)^n \left(1+\frac{\xi^2}{N}\right)^{n+N} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{(1+\frac{s^2}{N})^N (s-\xi)^{n+1}}, \end{aligned} \tag{7.67}$$

$$\hat{C}^N = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{1}{\pi} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2N-1}{2N}} \sqrt{\frac{\Gamma(N)}{\sqrt{N}\Gamma(N-\frac{1}{2})}}.$$

En (7.67) los símbolos $\int$ y Σ se pueden conmutar y la sumatoria que aparece es una serie geométrica, que puede ser sumada:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n e^{-in(\omega t-2\theta)} \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-n} \frac{\alpha^n}{2^{\frac{n}{2}}(s-\xi)^n} = \\ \frac{(s-\xi)(1+\kappa)}{(s-\xi)(1+\kappa)+\sqrt{2}ze^{-i(\omega t-2\theta)}\alpha}, \end{aligned} \tag{7.68}$$

así que $< x,t|z,\theta >$ adquiere la forma integral

$$\begin{aligned} < x,t|z,\theta > \;\; = \;\; & \hat{C}^N \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N} \alpha^N \frac{1}{2\pi i} \times \\ & \int_C \frac{(1+\kappa)ds}{(1+\frac{s^2}{N})^N [(s-\xi)(1+\kappa)+\sqrt{2}z\exp(-i(\omega t-2\theta))\alpha]}, \end{aligned} \tag{7.69}$$

donde el integrando tiene un polo simple en $s_0 = \xi - \frac{\sqrt{2}z\exp(-i(\omega t-2\theta))\alpha}{1+\kappa}$. Finalmente se obtiene (por el teorema de los residuos):

$$< x,t|z,\theta >= \hat{C}^N \left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N} \alpha^N \left[1+\frac{s_0^2}{N}\right]^{-N} . \tag{7.70}$$

En el límite $N \to \infty$ ($c \to \infty$), $< x,t|z,\theta >$ reproduce la expresión (7.21) salvo por el factor $\sqrt{\omega/2}$ [5].

7.4 Representación mínima: Unitariedad y espectro de N.

En primer lugar vamos a comentar algunas de las diferencias, en cuanto a la evolución temporal, que la teoría presenta respecto al caso no relativista. La primera y más crucial diferencia es el hecho de que el tiempo no se puede factorizar de una forma natural, como comentaremos luego. También observamos la presencia de unos pesos parciales α^{-n} en la función de onda en el espacio de configuración, o $\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-n}$ en el espacio de BF (aunque en este caso se pueden "ocultar" mediante la transformación $z \to \sqrt{\frac{2}{N}}\frac{z}{1+\kappa}$, que lleva el plano complejo al disco unidad abierto, ver [Bar 47]), que son consecuencia de la presencia de una derivada parcial respecto al tiempo en los operadores, cosa que no ocurre en el caso no relativista.

En cuanto a la factorización del tiempo, se observa que la integración sobre t que se realiza en el producto escalar (7.59) es crucial para que las soluciones que hemos obtenido sean ortogonales, ya que como funciones de x tan sólo no lo son. Además, si prescindimos de la integración en el tiempo y factorizamos el tiempo de forma naif de las funciones de onda, llegamos a la desagradable situación de que los operadores $\hat{Z}$ y $\hat{Z}^\dagger$ ya no son uno el adjunto del otro (además de que la energía no es hermítica, debido a que sus autofunciones $\Phi_n^N(x)$ [6] no son ortogonales). Por tanto, la teoría deja de ser unitaria.

Para resolver la situación vamos a intentar aclarar algunas ideas sobre lo que hemos hecho y sobre lo que significa factorizar el tiempo. Para el caso no relativista espacio y tiempo están claramente diferenciados, y las transformaciones de uno no afectan al otro; por ejemplo, los boosts galileanos no afectan al tiempo, como se puede deducir del hecho de que la ley de composición para el tiempo es aditiva. Por tanto, podemos factorizar el tiempo de las funciones de onda y del producto escalar, y en cuanto a los operadores hemos de substituir $\frac{\partial}{\partial t}$ en función de $\frac{\partial}{\partial x}$ y x según nos dicta la ecuación de Schrödinger, y obtenemos una descripción completa en términos sólo de x, que es independiente del

[5] Este factor aparece debido a que el tiempo θ se ha elegido aquí sin dimensiones, y dividido por 2, para dar cuenta de que $SL(2,R) \approx SO(1,2)/Z_2$.

[6] Fijamos aquí también $\lambda = 1$ pòr concretar.

tiempo. Podemos decir que hemos reducido por completo la representación (hemos impuesto todas las condiciones de polarización, incluyendo la que proporciona la ecuación de Schrödinger).

El problema que se nos planteaba puede ser resuelto, es decir, podemos unitarizar la representación en sólo x, modificando la medida de integración, $dx \to \frac{dx}{\alpha^2}$, y redefiniendo los operadores $\hat{Z}$ y $\hat{Z}^\dagger$ de forma apropiada. Con estos cambios, el producto escalar y los operadores quedan:

$$< \Phi_n'^N | \Phi_n'^N >= C_n'^N C_m'^N \int \frac{dx}{\alpha^2} \Phi_n^{N*}(x) \Phi_m^N(x) = \delta_{nm} \tag{7.71}$$

$$\begin{aligned}
C_n'^N &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{(2N-1)!(2N)^n}{(2N+n-1)!}} \sqrt{\frac{N+n}{N}} \sqrt{\frac{\Gamma(N+1)}{\sqrt{N}\Gamma(N+\frac{1}{2})}} \\
\hat{Z}\Phi_n'^N &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \sqrt{\frac{N+n-1}{N+n}} \left[\hbar\alpha\frac{d}{dx} + \frac{N+n}{N\alpha} m\omega x\right] \Phi_n'^N \\
\hat{Z}^\dagger\Phi_n'^N &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \sqrt{\frac{N+n+1}{N+n}} \left[-\hbar\alpha\frac{d}{dx} + \frac{N+n}{N\alpha} m\omega x\right] \Phi_n'^N ,
\end{aligned}$$

donde lógicamente aparece un factor de normalización $C_n'^N$ nuevo. Podemos observar que los operadores $\hat{Z}$ y $\hat{Z}^\dagger$ han adquirido dependencia extra en factores que contienen a n, además de la substitución $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to \hbar\omega n$.

El proceso que hemos realizado no es más que lo que se conoce como *método de los multiplicadores* , técnica muy usada en la literatura a la hora de representar grupos [Bar 47, Her 66, Lan 75, Mac 78] cuando no existe una medida invariante bajo el grupo en el espacio soporte de la representación. Realmente hemos empleado una técnica mixta, ya que se ha introducido una medida $\frac{dx}{\alpha^2}$ que es invariante sólo bajo el subgrupo $U(1)$ de la evolución temporal, de forma que el operador energía es hermítico con esta medida y no se ve afectado por los multiplicadores, mientras que el resto de los operadores se modifican mediante los multiplicadores (o más bien por la versión infinitesimal de éstos, ya que se introducen para transformaciones finitas, mientras que los operadores generan transformaciones infinitesimales). La modificación del producto escalar que hemos realizado es también la que se obtendría mediante la técnica estándar de la Mecánica Cuántica, cuando se tienen unas funciones de onda $\varphi(x,t)$ que satisfacen una ecuación tipo Klein-Gordon a través del operador $\Box$ de (7.44) asociado a una métrica $ds^2 = c^2\alpha^2 dt^2 - \alpha^{-2}dx^2$, y se define entonces un producto escalar $\int \frac{dx}{\alpha^2}\varphi^*\varphi'$ de tal forma que sea invariante bajo el tiempo.

Por tanto, aunque la representación (7.71) no es manifiestamente covariante, constituye una verdadera teoría de polinomios ortogonales (aunque con pesos parciales) asociada al oscilador relativista. Ahora estos polinomios sí son de verdad ortogonales respecto al producto escalar en x, gracias a la nueva medida introducida.

Para completar, nos gustaría establecer la transformación de Bargmann entre esta nueva representación independiente del tiempo y la equivalente en el espacio de BF. En este último caso no se pierde la unitariedad de la representación al factorizar el tiempo, pero, aunque en principio podríamos establecer una transformación de Bargmann independiente del tiempo entre esta representación trivialmente restringida y la que hemos encontrado en el espacio de configuración en sólo x, nos encontramos con que ambas representaciones no son del todo equivalentes, ya que la familia de representaciones (7.71) admite un espectro para el parámetro N más grande. Esto se observa claramente a partir de la norma del vacío. En la representación manifiestamente covariante (7.58) la norma del vacío sólo está definida para $N > \frac{1}{2}$, mientras que en la representación independiente del tiempo (7.71) la norma del vacío es finita también para $N > 0$. Hay que decir que las representaciones irreducibles y unitarias (univaluadas) del grupo $SL(2,R)$ se corresponden con los valores de N semienteros mayores que $\frac{1}{2}$, el resto de los valores están asociados a representaciones del recubridor universal.

Por tanto, si queremos obtener una transformación de Bargmann que nos relacione representaciones equivalentes (aunque lo sean del recubridor universal), hemos de extender primero la representación en el espacio de BF, aunque realmente no sea necesario para que ésta sea unitaria. Para ello modificamos primero el producto escalar, que es el que realmente determina el rango de valores para N, pero preservando la ortogonalidad de las funciones de energía definida, para que el producto escalar siga siendo invariante bajo el tiempo. Posteriormente introducimos los multiplicadores adecuados para que los operadores creación y destrucción sigan siendo uno el adjunto del otro. La representación queda:

$$< \tilde{\Phi}'^N_n | \tilde{\Phi}'^N_n >= \tilde{C}'^N_n \tilde{C}'^N_m \int \frac{d(Rez^*)d(Imz)}{\kappa(1+\kappa)} \tilde{\Phi}^{N*}_n(x)\tilde{\Phi}^N_m(x) = \delta_{nm}$$

$$\tilde{C}'^N_n = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi n!}} \sqrt{\frac{2(2N+n)!}{(2N)!(2N)^n}} \tag{7.72}$$

$$\hat{z}\tilde{\Phi}'^N_n = \sqrt{\frac{2N+n-1}{2N+n}} \left(\frac{(1+\kappa)}{2} \frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{z^2}{N(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z(N+n)}{(1+\kappa)N} \right) \tilde{\Phi}'^N_n$$

$$\hat{z}^\dagger \tilde{\Phi}'^N_n = \sqrt{\frac{2N+n+1}{2N+n}} \left(-\frac{(1+\kappa)}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{z^{*2}}{N(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{z^*(N+n)}{(1+\kappa)N} \right) \tilde{\Phi}'^N_n ,$$

aunque son posibles otras elecciones del producto escalar, de forma que la medida de integración se puede elegir de la forma $\frac{1}{\kappa(1+\kappa)^k}$ con $k \geq 0$, pero hemos elegido $k = 1$ por simplicidad. La transformación de Bargmann entre las dos representaciones es ahora:

$$\begin{aligned} < x|z > \; = \; & \hat{C}'^N \left(\frac{1+\kappa}{2} \right)^{-N} \alpha^N \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{(1+\frac{s^2}{N})^N (s-\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\ & \sqrt{\frac{(2N+n)(N+n)}{N}} \frac{\alpha^n}{2^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1+\kappa}{2} \right)^{-n} \frac{z^n}{(s-\xi)^n} \end{aligned} \tag{7.73}$$

$$\hat{C}'^N = \frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi N}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\Gamma(N+1)}{\sqrt{N}\Gamma(N+\frac{1}{2})}},$$

donde la serie que aparece ya no es una serie geométrica, aunque sí es convergente, ya que la sucesión de sus términos es alternada y convergente a cero.

Finalmente hacemos algunos comentarios sobre lo que sería el oscilador relativista en 3+1D con espín. El grupo de simetría que tomaríamos sería el de anti-deSitter $SO(3,2)$, cuyo álgebra doblemente pseudoextendida (por la masa y por el espín) es:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X}^R_{a^i},\ \tilde{X}^R_{p^j}\right] &= \delta_{ij}\left(\frac{1}{mc}\tilde{X}^R_{a^0} - \frac{1}{\hbar}\Xi\right)\\
\left[\tilde{X}^R_{a^0},\ \tilde{X}^R_{\vec{p}}\right] &= \frac{1}{mc}\tilde{X}^R_{\vec{a}}\\
\left[\tilde{X}^R_{a^0},\ \tilde{X}^R_{\vec{a}}\right] &= -\frac{m\omega^2}{c}\tilde{X}^R_{\vec{p}}\\
\left[\tilde{X}^R_{a^i},\ \tilde{X}^R_{a^j}\right] &= \frac{\omega^2}{c^2}\eta_{ij.}{}^k\left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right)\\
\left[\tilde{X}^R_{p^i},\ \tilde{X}^R_{p^j}\right] &= \frac{1}{m^2c^2}\eta_{ij.}{}^k\left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right)\\
\left[\tilde{X}^R_{a^i},\ \tilde{X}^R_{\epsilon^j}\right] &= -\eta_{ij.}{}^k\tilde{X}^R_{a^k}\\
\left[\tilde{X}^R_{p^i},\ \tilde{X}^R_{\epsilon^j}\right] &= -\eta_{ij.}{}^k\tilde{X}^R_{p^k}\\
\left[\tilde{X}^R_{\epsilon^i},\ \tilde{X}^R_{\epsilon^j}\right] &= -\eta_{ij.}{}^k\left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right),
\end{aligned} \tag{7.74}$$

donde, como en el grupo de Poincaré, $\vec{n}$ es un vector unitario indicando la dirección de cuantización del espín. Aunque este álgebra admite una polarización de primer orden completa como el caso 1+1D (que conduce a la representación en el espacio de BF, es posible introducir una polarización de orden superior (infinto, de hecho) para obteber una representación de BF en términos de operadores de creación y destrucción que podriamos llamar *medios*, mientras que en el espacio de configuración o de momentos necesitariamos el operador posición o el operador momento *medios*, respectivamente. Para mayor complicación, al no disponer de la ley de grupo para $SO(3,2)$, hemos de calcularla orden por orden, lo cual complica aún más las cosas[7]. Un tratamiento paralelo siguiendo la formulación Lagrangiana puede encontrarse en [NN 94].

7.5 Perturbación del producto escalar

Del mismo modo a como hemos hecho en la partícula libre relativista, además de la polarización tipo Klein-Gordon, podemos tratar de buscar una polarización tipo Schrödinger

[7]El caso del oscilador relativista en 3+1D con espín será tratado en próximos trabajos.

(perturbada por potencias sucesivas de $\frac{1}{c}$ y de ω) [AG 95c]. Podemos emplear, pues, la misma técnica alli utilizada. Al igual que entonces, y teniendo en cuenta la relacion clásica entre invariantes Noether, es de esperar que la energía se escriba como una raíz cuadrada,

$$\hat{\mathrm{E}} = \sqrt{m^2c^2 + \hat{\vec{\mathrm{P}}} - \frac{m^2\omega^2}{c^2}\hat{\vec{\mathrm{K}}}}\,. \tag{7.75}$$

Sin embargo, y debido a la no conmutatividad de los operadores, la definición de esta raíz cuadrada como un desarrollo en serie presenta ambigüedades, lo cual es un problema típico de ordenación normal. Por tanto, a nivel cuántico, lo más que se puede hacer es dar un desarrollo en serie para el operador $\hat{\mathrm{E}}$ en términos de potencias de $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ y $\hat{\vec{\mathrm{K}}}$, sin poder dar en general su expresión sumada. Esto es precisamente lo que ocurre cuando calculamos la polarización.

Así pues, hemos de substituir el operador de segundo orden (tipo Klein-Gordon), por uno que calculamos mediante la técnica explicada en el Apéndice B, con lo que obtenemos (a orden más bajo):

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t^{HO} \;=\; & \tilde{X}_t^L - \frac{i\hbar}{2m}(\tilde{X}_x^L)^2 - \frac{\hbar^2}{2m^2c^2}\left[k_1\tilde{X}_t^L(\tilde{X}_x^L)^2 + k_2\tilde{X}_x^L\tilde{X}_t^L\tilde{X}_x^L + \right.\\ & \left. k_3(\tilde{X}_x^L)^2\tilde{X}_t^L\right] + \frac{i\hbar}{8m^3c^2}(\tilde{X}_x^L)^4 + O(\frac{1}{c^4})\,,\end{aligned} \tag{7.76}$$

donde hemos mantenido la ambigüedad en la ordenación de los operadores que no conmutan para que sea lo más general posible. La condición de que efectivamente sea una polarización impone la restricción $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, $k_1 = k_3$. Con esto las ecuaciones análogas a (7.16) y (7.42) son:

$$\begin{aligned}\Xi.\Psi = i\Psi \;&\rightarrow\; \Psi = \zeta\Phi(x,p,t)\\ \tilde{X}_p^L.\Psi = 0 \;&\rightarrow\; \Psi = \zeta e^{\frac{i}{\hbar}f}\varphi(x,t)\\ \tilde{X}_t^{HO} = 0 \;&\rightarrow\; \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{i}{8m^3c^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + \frac{i}{2m}(1 + \frac{3}{2}\frac{\omega^2x^2}{c^2})\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{i\omega^2x}{2mc^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} -\\ &\qquad \frac{i}{2}m\omega^2x^2(1 - \frac{1}{4}\frac{\omega^2x^2}{c^2})\varphi - \frac{i}{4}\frac{\omega^2}{mc^2}(1-k_2)\varphi + O(\frac{1}{c^4})\,,\end{aligned} \tag{7.77}$$

y si restringimos las soluciones a aquéllas de energía definida $\varphi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\chi(x)$, obtenemos la siguiente ecuación para χ:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{8m^3c^2}\frac{d^4}{dx^4} + \frac{1}{2m}(1 + \frac{3}{2}\frac{\omega^2x^2}{c^2})\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{2mc^2}x\frac{d}{dx}\right.\\ &\left. - \frac{1}{2}m\omega^2x^2(1 - \frac{\omega^2x^2}{4c^2}) + E - \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{mc^2}(1-k_2)\right]\chi = 0\,,\end{aligned} \tag{7.78}$$

por supuesto válida salvo orden $O(\frac{1}{c^4})$. No es difícil comprobar que las funciones $\chi_n^\lambda(x) = \alpha^{-(\frac{1}{2}+n+N_\lambda)} H_n^{(N,\lambda)}(\xi)$, con $\lambda = \frac{k_2}{2N}$, son soluciones con energía $E_n^{(N,\lambda)} = \hbar\omega(\frac{1}{2} + N_\lambda + n)$, nuevamente salvo órdenes en $\frac{1}{c^4}$.

Podríamos preguntarnos si podemos resolver la ecuación (7.78) utilizando directamente la teoría de perturbaciones convencional de la Mecánica Cuántica en lugar de acudir a las soluciones ya conocidas de antemano (por otra parte exactas). Sin embargo, debido a que el problema se ha reducido automáticamente a un problema independiente del tiempo ($\frac{\partial}{\partial t}$ se substituye en función de x y $\frac{\partial}{\partial x}$), ya sabemos que el producto escalar con medida dx no nos sirve, puesto que las soluciones de energía definida no son ortogonales con este producto escalar. Esto se refleja en que los términos perturbativos de orden ω^2 que aparecen en (7.78) no son hermíticos con esta medida de integración.

Pero la teoría de perturbaciones usual no nos dice nada cuando los términos perturbativos que se añaden no son hermíticos (de hecho ésta es una situación poco frecuente que no suele darse en los problemas usuales de física atómica y nuclear), por lo que tendremos que modificarla de forma que vayamos perturbando el producto escalar al mismo tiempo que las funciones de onda y la energía.

Puede paracer artificioso lo de ir perturbando el producto escalar a medida que vamos añadiendo términos al desarrollo en serie, pero téngase en cuenta que la teoría de perturbaciones no tiene nada que ver con la forma en cómo se obtienen los términos nuevos orden por orden, ya que éstos vienen dados a priori, a través de una teoría más general, como ocurre por ejemplo para el átomo de hidrógeno relativista, en el que se obtienen mediante una transformación de Foldy-Wouthuysen [FW 50, BD 64] a partir de la ecuación de Dirac. En este sentido, podemos decir que lo que nosotros llamamos ecuación tipo Schrödinger sería la transformada tipo Foldy-Wouthuysen de una ecuación de Dirac para el oscilador relativista.

Si perturbamos el producto escalar, es decir, si encontramos una medida de integración para la cual los términos perturbativos que aparecen en (7.78) sean hermíticos (junto con los de orden cero), salvo órdenes en $\frac{1}{c^4}$, la medida de integración es, como cabía esperar, $\frac{dx}{\alpha^2}$ (salvo ordenes en $\frac{1}{c^4}$), lo cual no por esperado es menos sorprendente (de hecho así se hizo primeramente), y supone una magnífica confirmación (para ambos casos) del enfoque del trabajo.

Capítulo 8

ESTADOS COHERENTES CANÓNICOS

8.1 Introducción

Los estados coherentes del oscilador armónico fueron introducidos en los principios del desarrollo de la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Radiación de diferentes formas, aunque todas ellas equivalentes. Atendían a diferentes e interesantes propiedades que poseen éstos, con aplicaciones prácticas directas, principalmente en Óptica Cuántica (véase el trabajo pionero de Glauber [Gla 63]). Estas propiedades, que son caracterizaciones equivalentes de aquéllos, son:

a) son estados de mínima incertidumbre en $q - p$,

b) son autoestados del operador destrucción $\hat{a}$, o

c) son el resultado de aplicar el operador *desplazamiento*, $e^{i(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})}$, sobre el vacío, $|0>$.

Entre las aplicaciones prácticas de los estados coherentes, podemos mencionar el bajo ruido en amplicación, como consecuencia de a), o la coherencia óptica, como consecuencia de b), (véase, por ejemplo, [Yuen 76, DMMR 93]).

La Mecánica Cuántica Relativista se caracteriza por relaciones de conmutación de la forma $[\hat{x}, \hat{p}] \approx \hat{E}$, donde $\hat{E}$ es el operador energía del sistema, por lo que las relaciones de incertidumbre ya no son de la forma $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$, sino $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}| < \frac{\hat{E}}{mc^2} > |$, por lo que el mínimo absoluto de incertidumbre puede ser alcanzado sólo por el vacío del sistema (si lo tiene). Para el caso que nos ocupa, esto es, el caso del oscilador armónico relativista, con relaciones de conmutación dadas en (7.2), podemos intentar definir el análogo a los estados coherentes pero teniendo en cuenta las particularidades derivadas del carácter relativista de las relaciones de conmutación. Por ejemplo, las tres definiciones de estados coherentes

son ahora no equivalentes. Cuando el sistema posee un grupo de simetría conocido, la definición c) es la usualmente adoptada [Per 72, Per 86], y a estos estados se les denomina estados coherentes generalizados.

En este capítulo veremos, en primer lugar, cómo dentro del esquema de la CSG podemos obtener un conjunto de estados coherentes, que denominaremos los *estados coherentes relativistas*, que reproducen los obtenidos por Perelomov [Per 72] haciendo el cambio de variable

$$z_D = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{z}{1+\kappa}, \quad N \equiv \frac{mc^2}{\hbar\omega}, \quad \kappa \equiv \sqrt{1+\frac{2zz^*}{N}}, \tag{8.1}$$

del plano complejo C, donde están definidos los parametros del grupo $SL(2,R)$ z, z^* en nuestra parametrización, al disco unidad D, en la parametrización de Perelomov.

Posteriormente, y empleando la técnica de las polarizaciones de orden superior, encontraremos unos operadores creación-destrucción $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ de orden infinito, que serán funciones no polinómicas de los operadores básicos $\hat{z}$, $\hat{z}^\dagger$ de $SL(2,R)$ y que satisfarán relaciones de conmutación canónicas. Con estos operadores estaremos en disposición de definir unos *estados coherentes (relativistas) canónicos* de la forma usual. Estos estados coherentes canónicos tendrán propiedades análogas a los ordinarios (no relativistas), por estar definidos en términos de coordenadas canónicas o de Darboux [AM 67].

La construcción que realizamos (no polinómica) de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ en términos de los generadores de $SL(2,R)$, $\hat{z}$ y $\hat{z}^\dagger$, es invertible, pero la relación inversa (también no polinómica), es decir, la de los operadores $\hat{z}$ y $\hat{z}^\dagger$ en términos de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ no debe ser confundida con la realización cuadrática "estándar" de los generadres de $SL(2,R)$ como $\hat{K}_- = \frac{1}{2}(\hat{a})^2$, $\hat{K}_+ = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger)^2$ y $\hat{K}_3 = \frac{1}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$, que aparece, por ejemplo, en Óptica Cuántica. Esta realización cuadrática cierra álgebra con los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ (nuestra realización no polinómica no cierra un álgebra finita), pero posee el inconveniente de que tan sólo se puede realizar para dos representaciones irreducibles de $SL(2,R)$ (de su recubridor universal), aquellas con índice de Bargmann $k = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ ($N = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, en nuestra notación).

8.2 Estados coherentes relativistas.

En el esquema de la CSG, los estados coherentes relativistas (generalizando los estándar no relativistas [Gla 63]), así como las funciones de onda correspondientes, se definen por medio de relaciones infinitesimales (ecuaciones diferenciales de polarización) [AABC 90], en lugar de por la acción finita del grupo sobre el vacío [Per 72, Per 86] (véase [NK 90, KM 64, KS 68] para un estudio más general de familias supercompletas de estados no necesariamente asociados con un grupo). Éstos son definidos simplemente como [AABC 90, AG 93]:

$$|z> \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_n^N(z,z^*)^* |N,n> \leftrightarrow \tilde{\Phi}_n^N(z,z^*) =< z|N,n> \tag{8.2}$$

$$\tilde{\Phi}_n^N(z,z^*) \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{n!}}\sqrt{\frac{(2N)_n}{(2N)^n}}\sqrt{\frac{2N-1}{2N}}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N-n} z^{*n},$$

donde los estados $|N,n>$ constituyen el espacio de Fock para el oscilador armónico relativista (7.34-7.36).

Las funciones de onda $\tilde{\Phi}_n^N(z,z^*)$ no son más que las dadas en (7.33) con la dependencia temporal factorizada, aunque por simplicidad hemos absorbido en ellas el factor de normalización. La evolución temporal de los estados coherentes relativistas es muy simple: $|z,t>\equiv|e^{-i\omega t}z>$.

Estos estados soportan una representación irreducible del álgebra de $SL(2,R)$ con índice de Bargmann $k=N$

$$\left[\hat{\mathrm{H}},\hat{\mathrm{z}}\right]=-\hat{\mathrm{z}}\,,\quad \left[\hat{\mathrm{H}},\hat{\mathrm{z}}^\dagger\right]=\hat{\mathrm{z}}^\dagger\,,\quad \left[\hat{\mathrm{z}},\hat{\mathrm{z}}^\dagger\right]=\hat{\mathrm{I}}+\frac{1}{N}\hat{\mathrm{H}} \tag{8.3}$$

donde los operadores son esencialmente los generadores derechos del grupo $SL(2,R)$ [AABC 90, ABGN 93b]. La relación con la notación estandar para los generadores de $SL(2,R)$ es

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{z}} &= \frac{1}{\sqrt{2N}}\hat{K}_- = \frac{1}{\sqrt{2N}}(\hat{K}_1-i\hat{K}_2)\\ \hat{\mathrm{z}}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2N}}\hat{K}_+ = \frac{1}{\sqrt{2N}}(\hat{K}_1+i\hat{K}_2)\\ \hat{\mathrm{H}} &= \hat{K}_3-N\,.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Sin embargo, nuestros generadores poseen la ventaja de que admiten límite no relativista (generando el algebra del oscilador armónico).

Las funciones de onda $<z|z'>$ en la representación de los propios estados coherentes relativistas son:

$$\begin{aligned}<z'|z> &= \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\Phi}_n^N(z',z'^*)\tilde{\Phi}_n^N(z,z^*)^*\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2N-1}{2N}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N}\left(\frac{1+\kappa'}{2}\right)^{-N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2N)_n}{n!(2N)^n}\left(\frac{2z'^*}{1+\kappa'}\frac{2z}{1+\kappa}\right)^n\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2N-1}{2N}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N}\left(\frac{1+\kappa'}{2}\right)^{-N}\left[1-\frac{2z'^*z}{N(1+\kappa')(1+\kappa)}\right]^{-2N}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Como en el caso no relativista, los estados coherentes relativistas constituyen un conjunto supercompleto, y satisfacen la propiedad de reproducción (análoga a la de la delta de Dirac) respecto a la medida del grupo:

$$I = \int\frac{dzdz^*}{\kappa}|z><\dot{z}| \tag{8.6}$$

$$|z'> = \int\frac{dzdz^*}{\kappa}|z><z|z'>\,. \tag{8.7}$$

Los valores esperados de $\hat{z}$ y $\hat{z}^\dagger$ en los estados coherentes son

$$\begin{aligned} < \hat{z} > &\equiv \frac{< z|\hat{z}|z >}{< z|z >} = z \\ < \hat{z}^\dagger > &= z^* , \end{aligned} \tag{8.8}$$

haciendo que las variables $z, z^* \in C$ especialmente adecuadas para parametrizar la representación de Bargmann-Fock. Si definimos los operadores $\hat{\mathrm{X}}$ y $\hat{\mathrm{P}}$ del modo estándar,

$$\hat{\mathrm{X}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{z} + \hat{z}^\dagger \right) , \qquad \hat{\mathrm{P}} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left(\hat{z}^\dagger - \hat{z} \right) , \tag{8.9}$$

obtenemos para los valores esperados $< \hat{\mathrm{X}} >= x$, $< \hat{\mathrm{P}} >= p$, donde x y p se definen de la misma forma. Estas variables constituyen el espacio de fases para la partícula moviéndose en un espacio-tiempo de Anti-deSitter (véase [ABGN 93b] donde se hace una discusión sobre la elección adecuada del tiempo). En particular, se deduce que estos valores esperados siguen las trayectorias clásicas (geodésicas).

Partiendo de la representación manifiestamente covariante en el espacio de configuración, (7.58), podemos definir los estados $|x, t >$ como

$$|x, t > \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^N(x, t)^* |N, n > \ . \tag{8.10}$$

Estos estados no son autoestados del operador de los boosts $\hat{x}$ de la misma manera que los estados $|z, t >$ no son autoestados del operador destrucción $\hat{z}$ (ésta es una característica genérica de los sistemas relativistas). La medida de integración respecto a la cual estos estados forman un conjunto completo es $dxdt$, y se puede obtener a partir de la medida de integración sobre todo el grupo regularizando la integración en p (véase Capítulo 7 y [ABGN 93b]).

Ambas representaciones son por supuesto equivalentes, y están relacionadas por tanto mediante un isomorfismo, la transformación de Bargmann relativista (Capítulo 7 y [AG 93]), cuyo kernel no es otra cosa que la función de onda de los estados coherentes $|z, t >$ en la representación de configuración $|x, t >$ (o viceversa).

La variable temporal se puede factorizar (de manera no trivial) en la representación manifiestamente covariante en configuración, dando lugar a una representación mínima $\{|x >, x \in R\}$. La nueva medida de integración es ahora dx/α^2, y es esta medida precisamente la que convierte los polinomios de Hermite Relativistas (multiplicados por los pesos parciales α^{-N-n}) en un conjunto de funciones ortogonales [ABGN 93b, ZDT 93, Nag 94].

Las relaciones de incertidumbre para los operadores $\hat{\mathrm{X}}$ y $\hat{\mathrm{P}}$ sobre los estados $|z >$ son:

$$\Delta\hat{\mathrm{X}}\Delta\hat{\mathrm{P}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\kappa^2 + \frac{1}{4N^2}\left[4|\dot{z}|^4 - (z^2 + z^{*2})^2\right]} \geq \frac{1}{2}\hbar\kappa = \frac{1}{2}| < \left[\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathrm{P}}\right] > | . \tag{8.11}$$

La igualdad se consigue para $z = |z|e^{in\pi/2}$, es decir, z real o imaginario puro, definiendo los denominados "estados inteligentes" [AGST 74], pero sólo para $z = 0$ (el vacío) se alcanza el mínimo absoluto.

Como ya hemos comentado, nuestros estados coherentes relativistas se corresponden con la definición c) de la Introducción, y pueden ser identificados con los estados coherentes generalizados definidos sobre el disco unidad complejo [Per 72], toda vez que se realiza el cambio de variables $z_D = \sqrt{\frac{2}{N}}\frac{z}{1+\kappa} \in D\ (z \in C)$, e identificamos $k \equiv N$, donde D es el disco unidad complejo y k es el índice de Bargmann que caracteriza la representación irreducible de $SL(2,R)$. Para el cálculo de las relaciones de incertidumbre en el disco unidad D, véase [WE 85].

Resulta natural preguntarse si una caracterización análoga a la b) puede emplearse para definir estados coherentes del oscilador relativista. En efecto, existe solución para la ecuación de autovalores relativista $\hat{z}|\rho >= \rho|\rho >$. Haciendo uso de las relaciones de conmutación (8.3) y la representación en el espacio de Fock (7.36), obtenemos para estos autoestados:

$$|\rho >= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2N}\rho)^n}{\sqrt{n!(2N)_n}}|N,n>\,, \tag{8.12}$$

donde c_0 es un factor de normalización arbitrario (realmente es una función de ρ). En el límite $c \to \infty$ estos estados tienden a los usuales no relativistas, al igual que los estados coherentes relativistas. Si hacemos el cambio de variales $\rho \to \rho/\sqrt{N}$, y eligiendo $c_0 = 1$, estos estados resultan ser los obtenidos por Barut y Girardello [BG 71]. La conexión entre nuestros generadores y los suyos es $\hat{z} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\hat{L}_-$ y $\hat{z}^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{N}}\hat{L}_+$.

Más aún, recientemente [Tri 94], se ha demostrado que ambos conjuntos de estados coherentes (los de Perelomov y los de Barut y Girardello) son casos particulares de una definición más general de estados coherentes, los denominados estados inteligentes generalizados, los cuales minimizan las relaciones de incertidumbre de Robertson-Schrödinger [RN 68, Schr 30]. Para el caso en que los operadores en cuestión satisfagan relaciones de conmutación canónicas estos estados han sido llamados estados correlatados [DKM 80], aunque se ha probado que éstos coinciden con estados "esqüizados" ordinarios (véase [Tri 94] y referencias allí citadas.).

8.3 Operadores de creación y destrucción canónicos: estados coherentes canónicos

La técnica de las polarizaciones de orden superior nos ha permitido encontrar un operador posición para la partícula libre relativista con espín (Capítulo 5), y también un nuevo operador momento canónicamente asociado al operador de los boosts (Capítulo 6), además de permitirnos resolver problemas anómalos, como el del grupo de Schrödinger [AN 91]. Vamos a aplicarla ahora para buscar unos operadores de creación y destrucción de orden

superior que satisfagan relaciones de conmutación canónicas. Buscamos por tanto series de potencias en $\tilde{X}_z^L$ y $\tilde{X}_{z^\bullet}^L$,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{z^\bullet}^{L\,HO} &= \tilde{X}_{z^\bullet}^L + \frac{\alpha}{N}\tilde{X}_z^L\tilde{X}_z^L\tilde{X}_{z^\bullet}^L + \ldots \\ \tilde{X}_\eta^{L\,HO} &= \tilde{X}_\eta^L - \mu\tilde{X}_z^L\tilde{X}_{z^\bullet}^L - \frac{\nu}{N}\tilde{X}_z^L\tilde{X}_z^L\tilde{X}_{z^\bullet}^L\tilde{X}_{z^\bullet}^L + \ldots,\end{aligned} \tag{8.13}$$

tales que $\mathcal{P}^{HO} =< \tilde{X}_\eta^{L\,HO}, \tilde{X}_{z^\bullet}^{L\,HO} >$ contenga a $\tilde{X}_\eta^L$ y excluya el generador central Ξ. Los coeficientes de estas series de potencias los determinamos exigiendo que $\mathcal{P}^{HO}$ sea una polarización y que los operadores derechos asociados (y sus adjuntos) definan una acción unitaria sobre las funciones de onda (que resultan ser las mismas que con la polarización de primer orden). Explícitamente,

$$\begin{aligned}\left[\tilde{X}_\eta^{L\,HO}, \tilde{X}_{z^\bullet}^{L\,HO}\right] &= -2\tilde{X}_{z^\bullet}^{L\,HO} \\ \tilde{X}_z^{R\,HO} &= -(\tilde{X}_{z^\bullet}^{R\,HO})^\dagger \qquad (8.14) \\ \left[\tilde{X}_z^{R\,HO}, \tilde{X}_{z^\bullet}^{R\,HO}\right] &= \hat{1}\,, \qquad (8.15)\end{aligned}$$

Los operadores de creación y destrucción de orden superior canónicos que obtenemos son:

$$\begin{aligned}\hat{z}^{HO} &\equiv \hat{a} = \hat{z} - \left(\frac{1}{4N} - \frac{3}{32N^2}\right)\hat{z}^\dagger\hat{z}\hat{z} + \frac{7}{32N^2}\hat{z}^\dagger\hat{z}^\dagger\hat{z}\hat{z}\hat{z} + \ldots \equiv \sqrt{\frac{2}{1+\hat{\kappa}}}\hat{z} \qquad (8.16) \\ \hat{z}^{\dagger\,HO} &\equiv \hat{a}^\dagger = \hat{z}^\dagger\sqrt{\frac{2}{1+\hat{\kappa}}}\end{aligned}$$

y el operador energía es:

$$\hat{\mathrm{H}}^{HO} = N\left(\hat{\kappa} - 1\right) = \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{8.17}$$

donde $\hat{\kappa} \equiv \sqrt{1 + \frac{2}{N}\left(\hat{z}^\dagger\hat{z}\right)}$ y el operador $\sqrt{\frac{2}{1+\hat{\kappa}}}$ deben entenderse como función del único operador $\left(\hat{z}^\dagger\hat{z}\right)$. Mantenemos la notación $\hat{\mathrm{H}}^{HO}$ para el operador energía, incluso aunque este operador sea sólo cuadrático en $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$, para recordarnos su origen como operador de orden infinito (en términos de los operadores básicos $\hat{z}, \hat{z}^\dagger$).

Las relaciones de conmutación entre $\hat{\mathrm{H}}^{HO}$, $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ resultan ser las del oscilador harmónico no relativista, y la acción de estos nuevos operadores sobre los estados del espacio de Fock relativista reproducen la representación del oscilador no relativista, aún cuando los estados $|N, n>$ que soportan la representación son los mismos autoestados del operador energía relativista. Lo que ocurre es que ambos conjuntos de operadores creación-destrucción, los relativistas y los canónicos, comparten el mismo operador energía (y por tanto el mismo espectro).

8.3.1 Estados coherentes canónicos

Resulta ahora natural definir los estados coherentes canónicos $|a>$ como los autoestados del operador destrucción canónico, $\hat{a}|a>=a|a>$, que son:

$$|a>=e^{-|a|^2/2}\sum_n \frac{a^n}{\sqrt{n!}}|N,n>\,, \tag{8.18}$$

e introducir la representación de Bargmann-Fock asociado (que resulta ser el no relativista) de la forma usual:

$$<a|N,n>=<n,N|a>^*=e^{-|a|^2/2}\frac{a^{*n}}{\sqrt{n!}}\equiv\tilde{\Phi}_n^{N.R.}(a)\,, \tag{8.19}$$

con medida de integración $dada^*$.
La conexión con la representación de Bargmann-Fock relativista viene dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_a(z) &\equiv <z|a>=\sum_{n=0}^{\infty}<z|N,n><n,N|a>=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\Phi}_n(z)\tilde{\Phi}_n^{N.R.}(a)^* \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2N-1}{2N}}e^{-|a|^2/2}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{-N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sqrt{(2N)_n}\left(\frac{2az^*}{(2N)(1+\kappa)}\right)^n\end{aligned} \tag{8.20}$$

Esta serie es convergente en todo el plano complejo, definiendo así una función entera, como puede ser comprobado por criterios estándar de convergencia de series. Podemos hacer un desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{N}$ (es decir, de $\frac{1}{c^2}$):

$$<z|a>\approx\frac{1}{\pi}e^{-|a|^2/2}e^{-|z|^2/2}e^{az^*}\left\{1-\frac{1}{4N}\left[1-\frac{1}{2}\left(|z|^2-az^*\right)\left(3|z|^2-az^*\right)\right]+...\right\} \tag{8.21}$$

Si definimos los operadores

$$\begin{aligned}\hat{q} &\equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) \\ \hat{\pi} &\equiv i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)\,,\end{aligned} \tag{8.22}$$

que satisfacen

$$[\hat{q},\hat{\pi}]=i\hbar\hat{1}\,, \tag{8.23}$$

y del mismo modo podemos definir sus correspondientes funciones clásicas. q y π. Para estos operadores obtenemos, como era de esperar,

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{\pi}=\frac{\hbar}{2} \tag{8.24}$$

sobre los estados coherentes canónicos $|a>$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
4 OCT. 1995
COMISION DE DOCTORADO

Con ayuda de estos operadores podemos introducir una nueva representación que llamaremos representación canónica mínima en el espacio de configuración. Sus estados asociados, $|q>$, son los autoestados del operador posición canónico $\hat{q}$. Éstos resultan ser

$$|q>=\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)|N,n> \tag{8.25}$$

donde $\xi\equiv\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ y H_n son los polinomios de Hermite ordinarios (no relativistas). La medida de integración respecto a la cual estos estados forman un conjunto completo es dq.

Podemos obtener el análogo al kernel $<z|a>$ (8.20) en el espacio de configuración, es decir, $<x|q>$, que relaciona los polinomios de Hermite con los polinomios de Hermite Relativistas:

$$\begin{aligned}<x|q> &= \sum_{n=0}^{\infty}<x|N,n><n,N|q>=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^N(x)\Phi_n^{N.R.}(q)^* \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}e^{-\xi^2/2}\alpha^{-N}\sqrt{\frac{\Gamma(N)}{\sqrt{N}\Gamma(N-\frac{1}{2})}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{-n}}{2^n n!}\sqrt{\frac{(2N)^n}{(2N)_n}}H_n^N(\chi)H_n(\xi)\end{aligned} \tag{8.26}$$

En el límite $c\to\infty$ $(N\to\infty)$, $<x|q>\to\delta(x-q)$, como corresponde al oscilador armónico no relativista. Para N grande podemos obtener un desarrollo en potencias de $\frac{1}{N}$:

$$\begin{aligned}<x|q> \approx\ & \delta(x-q)+\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{1}{64N}\Big\{12(1+\chi^2)\delta(\xi-\chi)+4\left[9\xi+3\chi+\xi^3+\chi^3\right]\times \\ & \delta'(\xi-\chi)+6\left[(\xi^2-\chi^2)+2\right]\delta''(\xi-\chi)+4(\xi+\chi)\delta'''(\xi-\chi)\Big\}+\ldots\end{aligned} \tag{8.27}$$

Para N finito, podemos estudiar la convergencia de la serie teniendo en cuenta que ésta depende del comportamiento a n grande. Para $n>>N$ podemos usar la expresión asintótica de los polinomios de Hermite Relativistas dada en [Nag 94] (además de la usual para los usuales no relativistas) y obtenemos (salvo factores que no dependen de n):

$$\Phi_n^N(x)\Phi_n^{N.R.}(q)^*\sim n^{-\frac{3}{4}}\cos\left[\sqrt{2n+1}\xi-n\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[(n+N)\arcsin\frac{1}{\alpha}-N\frac{\pi}{2}\right] \tag{8.28}$$

En el caso particular en que $\xi=\chi=0$ la serie resultante es $\sum(2n)^{-\frac{3}{4}}$, que es por supuesto divergente. Para el resto de los valores la convergencia de la serie está garantizada por la convergencia de la integral

$$\int_{\mu}^{\infty}x^{-\frac{3}{4}}e^{i\left[ax+b\sqrt{2x+1}\right]}dx \tag{8.29}$$

con $\mu\geq 1$.

Hagamos ahora una pequeña incursión en la post-cuantización. El valor esperado $< a|\hat{z}|a >$ nos puede ayudar para definir una función clásica $z = z(a)$ relacionando las variables a, a^* y z, z^* como sigue:

$$< a|\hat{z}|a >= a \sum_{n=0}^{\infty} c_n < a| \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}\right)^n |a > , \tag{8.30}$$

donde c_n son los coeficientes de la serie de potencias $f(u) = \sqrt{1 + \frac{u}{2N}}$. Definimos entonces

$$z(a) = \sqrt{1 + \frac{|a|^2}{2N}}\, a \, . \tag{8.31}$$

Nótese que aunque $< a| \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}\right)^n |a > \neq < a|\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^n|a >= |a|^{2n}$, cualquier operador de la forma $\hat{F} = \hat{O}\hat{a}^m$ (o $\hat{G} = \hat{a}^{\dagger p}\hat{O}$), donde $\left[\hat{\mathrm{H}}^{HO}, \hat{O}\right] = 0$, define una función clásica $F(a)$ (o $G(a)$) mediante la fórmula:

$$F(a) = a^m \sum_n o_n |a|^{2n} \, , \quad G(a) = a^{*p} \sum_n o_n |a|^{2n} \, , \tag{8.32}$$

donde $< a|\hat{O}|a >= \sum_n o_n < a| \left(\hat{\mathrm{H}}^{HO}\right)^n |a >$.

Las funciones

$$a(z) = \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\, z \, , \quad a^*(z) = \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\, z^* \, , \tag{8.33}$$

la relación inversa de (8.31), resultan ser las coordenadas de Darboux que llevan la forma simpléctica $\Omega \equiv \frac{1}{\kappa} dz \wedge dz^*$ a su forma canónica $\Omega = da \wedge da^*$.

La existencia de operadores creación-destrucción canónicos conviviendo con los generadores de $SL(2,R)$, $\hat{z}$, $\hat{z}^\dagger$ y $\hat{H}$, parece un mero truco a primera vista, por lo que requiere algunos comentarios. En primer lugar, y como ya hemos comentado, esta coexistencia es posible gracias a que ambos osciladores, el no relativista y el relativista, comparten el mismo espectro y por tanto el mismo hamiltoniano $\hat{H}$, escrito de dos formas distintas: $\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \sqrt{1 + \frac{2}{N}\hat{z}^\dagger \hat{z}}$. La subálgebra de Poisson clásica que generan ambos sistemas $(H, a^*, a, z*, z)$ (de dimensión infinita) contiene dos subálgebras (H, a^*, a) y (H, z^*, z) que intersectan en H.

La situación es, en ciertos sentidos, similar a lo que ocurre en el caso del grupo de Schrödinger [Nie 73, AN 91], el cual (en 1+1 dimensiones) es generado por un conjunto análogo de operadores con la única diferencia de que sus conmutadores cierran un álgebra finita y, por tanto, es posible encontrar una representación en la que $\hat{z}$ and $\hat{z}^\dagger$ se escriben tan sólo como funciones cuadráticas de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$. Sin embargo, esta representación (cuántica) se realiza únicamente para ciertos valores del índice de Bargmann, $k = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, como consecuencia del caracter *anómalo* del grupo de Schrödinger [AN 91], con aplicaciones físicas en óptica cuántica de dos fotones [Yueń 76].

Más aún, el hecho de que no sólo el grupo $SL(2,R)$ sino también el grupo de Newton del oscilador armónico puedan ser representados sobre los mismos estados de un mismo espacio de Fock simplemente demuestra que es la representación completa y no sólo los estados la que caracteriza el sistema físico. De hecho, en este caso, los estados $|N,n>$ son soporte simultáneamente de la representación (7.36) y de la correspondiente al oscilador no relativista. Se verifica, trivialmente, que

$$< n|N,m >= \int \frac{dzdz^*}{\kappa} dada^* < n|a >< a|z >< z|N,m >= \delta_{n,m}\,, \qquad (8.34)$$

No hace falta decir que el oscilador armónico no relativista también admite la construcción de operadores de orden superior $\hat{z},\hat{z}^\dagger$ como funciones de los operadores básicos $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ (la inversa de la relación (8.16)): $\hat{z} = \sqrt{1+\frac{1}{2N}\hat{\mathrm{H}}}\,\hat{a}, \hat{z}^\dagger = \hat{a}^\dagger\sqrt{1+\frac{1}{2N}\hat{\mathrm{H}}}$, realizando así una representación de $SL(2,R)$ sobre estados $|n>$ para cualquier valor de N (o k) y no sólo para $N=\frac{1}{4},\frac{3}{4}$ como en el caso del grupo de Schrödinger. Este realización de los operadores $\hat{\mathrm{z}},\hat{\mathrm{z}}^\dagger$ en términos de $\hat{a},\hat{a}^\dagger$, que en nuestro esquema se obtendría como corolario, ya era conocida en la literatura como realización de Holstein-Primakoff [HP 40] para el caso de $SU(2)$ (en [Ger 83] se adapta a $SU(1,1)\approx SL(2,R)$).

Parte III

ANOMALÍAS (EN DIMENSIÓN FINITA)

Capítulo 9

ANOMALÍAS TOPOLÓGICAS: EFECTO HALL

9.1 Introducción. Grupos de Heisenberg-Weyl "compactificados": números cuánticos fraccionarios

En este capítulo vamos a abordar, mediante la potente y versátil herramienta que es la Cuantización Algebraica, un estudio general de sistemas con espacios de configuración (o de fases) con topología no trivial. Espacios de configuración con topología no trivial aparecen en casos tan diversos como Teorías Gauge, Gravedad Cuántica, y los más palpables de anillos superconductores y el Efecto Hall Cuántico, donde los instrumentos de medida cambian la topología del sistema de manera no trivial.

El problema más común que aparece cuando el espacio de configuración de un sistema tiene topología no trivial es la violación del teorema de Ehrenfest para ciertos operadores, un problema usualmente referido en la literatura como anomalías. A este tipo de anomalías les añadiremos el calificativo de *topológicas*, por ser la topología no trivial la responsable, en contraposición a las anomalías algebraicas que se manifiestan al nivel del álgebra de Lie [ABLN 92].

La violación del teorema de Ehrenfest para un operador dado está originada por la no globalidad de la función clásica correspondiente, tal y como ocurre en el caso de las coordenadas locales en la circunferencia. La Cuantización Geométrica fue desarollada precisamente para eso, para cuantizar sistemas en variedades simplécticas arbitrarias, pero como sabemos, presenta muchas limitaciones, como son la dificultad (e incluso imposibilidad) de encontrar una polarización adecuada para cuantizar un conjunto dado de funciones clasicas [Woo 80, IL 88], o el cuantizar un conjunto de operadores de forma que preserven la polarización dada.

Estos problemas los podemos solucionar empleando la CSG, o mejor aún, la CA para tratar los sistemas con topologia no trivial mediante ligaduras.

Vamos a considerar la cuantización, mediante el formalismo de la CA, del grupo de Heisenberg-Weyl sobre espacios de fases compactificados [ACG 95] (el cilindro y el toro). Aunque los cálculos explicitos los haremos para el caso 1D (es decir, un par coordenada-momento), los resultados pueden generalizarse inmediatamente a cualquier dimensión.

9.2 Grupo de Heisenberg-Weyl en el cilindro

Consideremos en primer lugar el caso en que sólo una de las coordenadas se ha compactificado, es decir, la variedad simpléctica es el cilindro, con la x como variable compactificada. Para estudiar este sistema dentro del marco de la CA, consideramos el grupo de Heisenberg-Weyl y elegimos el grupo T de manera que las ligaduras que imponga sobre la función de onda (mediante la condición de T-función) reproduzcan las condiciones de periodicidad[1] de la función de onda en la variable x.

En este caso, por tanto, el grupo $\tilde{G}$ es el grupo de H-W, parametrizado por x, p y ζ (x y p son reales y $\zeta \in U(1)$), considerado como fibrado principal derecho con grupo estructural T, donde T es a su vez un fibrado principal con base $\{e_k,\ k \in Z\}$ y fibra $U(1)$, donde $\{e_k,\ k \in Z\}$ es el subgrupo de $\tilde{G}$ de traslaciones finitas en la coordenada x en una cantidad kL, siendo L la longitud de la circunferencia que define el cilindro. Nótese que T es isomorfo a $U(1) \times Z$, por lo que la fibración por $U(1)$ es trivial y no es necesario elegir ningún subgrupo de polarización en T (es decir, $T_B = T$).

La ley de grupo para el grupo de H-W es:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + x \\ p'' &= p' + p \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{\hbar}[(1+\lambda)x'p + \lambda x p']} \end{aligned} \tag{9.1}$$

donde hemos introducido el parametro real arbitrario λ en la ley de composición de $U(1)$ para dar cuenta de una familia completa de extensiones centrales que difieren tan sólo en un coborde generado por la función $\eta(x,p) = \lambda xp$ (en particular, para $\lambda = -\frac{1}{2}$ se obtiene el cociclo de Bargmann). La utilidad de considerar esta familia completa de extensiones centrales se verá más tarde, cuando estudiemos el caso del grupo de H-W en el toro.

A partir de la ley de grupo obtenemos de forma inmediata los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{array}{llll} \tilde{X}^L_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda}{\hbar} p\,\Xi & & \tilde{X}^R_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1+\lambda}{\hbar} p\,\Xi \\ \tilde{X}^L_p = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1+\lambda}{\hbar} x\,\Xi & & \tilde{X}^R_p = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\lambda}{\hbar} x\,\Xi \\ \tilde{X}^L_\zeta = i\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi & & \tilde{X}^R_\zeta = i\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi \end{array} \tag{9.2}$$

y la 1-forma de cuantización:

$$\Theta = -\lambda p dx - (1+\lambda) x dp + \hbar \frac{d\zeta}{i\zeta} \tag{9.3}$$

[1] Funciones sobre R periódicas equivalen a funciones sobre la circunferencia.

Como no estamos considerando ningun tipo de evolución temporal (ni por rotaciones), la 1-forma de cuantización no tiene módulo característico, y el subgrupo característico es trivial, por lo que cualquier combinación de los generadores $\tilde{X}_x^L$ y $\tilde{X}_p^L$ constituye una polarización de primer orden completa (o sus correspondientes subgrupos constituyen subgrupos de polarización completa)[2]. Hay dos polarizaciones singularizadas, $\mathcal{P}_p =< \tilde{X}_x^L >$ y $\mathcal{P}_x =< \tilde{X}_p^L >$, o sus versiones finitas $G_{\mathcal{P}p} = \{\text{Tranlaciones espaciales}\}$ y $G_{\mathcal{P}x} = \{\text{Boosts}\}$, que conducen al espacio de momentos y al espacio de configuración, respectivamente.

La condición de T-función es $\Psi(g_T * g) = \mathcal{D}(g_T)\Psi(g), \forall g_T \in T, \forall g \in \tilde{G}$. En este caso $\mathcal{D}(\zeta, e_k) = \zeta D(e_k)$, donde $D(e_k)$ es una representación de $\{e_k,\, k \in Z\}$ ($\approx Z$) en los números complejos. Existen una infinidad de representaciones irreducibles no equivalentes, de la forma $D^\epsilon(e_k) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\epsilon kL}$, con $\epsilon \in [0, \frac{2\pi\hbar}{L})$ (la primera zona de Brillouin, en la nomenclatura de Estado Sólido). Por tanto, *existe una cuantización no equivalente asociada a cada elección de representación no equivalente para T, parametrizada por ϵ.* La condición T-función, explícitamente, impone la siguiente restricción a la función de onda:

$$e^{\frac{\imath}{\hbar}(1+\lambda)kLp}\Psi^\epsilon(x + kL, p, \zeta) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\epsilon kL}\Psi^\epsilon(x, p, \zeta) \tag{9.4}$$

Nótese que el espacio de funciones constreñidas puede identificarse con el espacio de secciones de un fibrado de línea sobre el cilindro, con conexión dada por (9.3). Esta identificación es, en última instancia, la que nos permite tratar H-W sobre el cilindro como H-W sobre el plano con condiciones de contorno periódicas y, en definitiva, aplicar el formalismo de la CA.

Imponemos ahora las condiciones de polarización para reducir la representación. En primer lugar, consideraremos la polarización $\mathcal{P}_p$ (o $G_{\mathcal{P}p}$) que conduce al espacio de momentos, con la siguiente expresión para las funciones de onda:

$$\Psi^\epsilon(x, p, \zeta) = \zeta e^{-\frac{\imath}{\hbar}\lambda xp}\Phi^\epsilon(p) \tag{9.5}$$

donde se ha usado el hecho de que $\Psi(\zeta g) = \zeta\Psi(g)$ (por la condición de $U(1)$-función que es parte de la condición de T-función).
Ambas condiciones juntas, (9.4) y (9.5), implican para la función de onda $\Phi^\epsilon(p)$ la forma:

$$\Phi^\epsilon(p) = \sum_{k\in Z} \alpha_k \phi_k^\epsilon(p) \tag{9.6}$$

donde $\phi_k^\epsilon(p) \equiv \delta(p - \epsilon - \frac{2\pi\hbar}{L}k)$, es decir, la función de onda tiene soporte sólo sobre valores discretos de p, que son $p_k^\epsilon = \epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in Z$. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}^\epsilon(\tilde{G})$ está constituido por las funciones de onda definidas por (9.5) y (9.6).

---

[2]Si añadimos algún tipo de evolución temporal, la cosa cambia y en general tan sólo será posible encontrar una polarización completa, o incluso podría ocurrir que ninguna si el sistema es anómalo (véase el Capítulo 10).

Los operadores cuánticos, definidos como $\hat{\vec{\mathrm{P}}} \equiv -i\hbar\tilde{X}_x^R$ y $\hat{\mathrm{X}} \equiv i\hbar\tilde{X}_p^R$, actúan sobre las funciones de onda de la forma usual:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\mathrm{P}}}\Psi^\epsilon &= p\Psi^\epsilon \\ \hat{\mathrm{X}}\Psi^\epsilon &= \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda xp}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right]\Phi^\epsilon , \end{aligned} \tag{9.7}$$

de donde se deduce inmediatamente que el operador posición $\hat{\mathrm{X}}$ no está definido, es decir, es un operador malo. Si recurrimos a la versión finita de los operadores, podemos obtener cuáles son buenos mediante la condición (3.9) (o también la (3.10), que en este caso conduce a los mismos resultados). El grupo de operadores buenos que se obtiene es el grupo de H-W $\tilde{G}$ pero con la variable p discreta en lugar de continua, tomando los valores $p_k \equiv p_k^0 = \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in Z$. Por tanto, los operadores buenos son (aparte de los cambios de fase, por otra parte triviales) todas las traslaciones (y por tanto su generador infinitesimal $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$) y los boosts finitos en una cantidad p_k, $k \in Z$. El operador posición $\hat{\mathrm{X}}$ no es un operador bueno en el sentido de que no preserva la estructura de las funciones de onda, es decir, no deja estable el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^\epsilon(\tilde{G})$ (para ϵ fijo). Este hecho será discutido en la próxima sección.

Vayamos ahora a la representación en el espacio de configuración, dada por la polarización $\mathcal{P}_x$, o el subgrupo de polarización $G_{\mathcal{P}x}$, cuyas soluciones son:

$$\Psi(x,p,\zeta) = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}(1+\lambda)px}\Phi(x) \tag{9.8}$$

Exigiendo la condición de T-función (9.4) a estas funciones de onda obtenemos:

$$e^{\frac{i}{\hbar}(1+\lambda)kLp}e^{-\frac{i}{\hbar}(1+\lambda)(x+kL)p}\Phi^\epsilon(x+kL) = e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon kL}e^{-\frac{i}{\hbar}(1+\lambda)xp}\Phi^\epsilon(x) \tag{9.9}$$

$\forall k \in Z$, de donde se sigue la condición de cuasiperiodicidad para las funciones de onda $\Phi^\epsilon(x)$:

$$\Phi^\epsilon(x+L) = e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon L}\Phi^\epsilon(x) \tag{9.10}$$

El hecho de que las funciones de onda sean periódicas salvo una fase (constante) nos dice simplemente que se transforman irreduciblemente bajo un representación (no trivial, si $\epsilon \neq 0$) del subgrupo de traslaciones finitas, que es isomorfo a Z. Hay que destacar que el resultado final no depende de λ, como debía ser, pues éste no debe depender del cociclo elegido.

Los operadores cuánticos, en esta representación, son:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\mathrm{P}}}\Psi^\epsilon &= \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}(1+\lambda)px}\left[-i\hbar\nabla\right]\Phi^\epsilon \\ \hat{\mathrm{X}}\Psi^\epsilon &= \zeta x\Psi^\epsilon . \end{aligned} \tag{9.11}$$

De nuevo, el operador posición $\hat{\mathrm{X}}$ es un operador malo, por la misma razón que antes, y los operadores buenos son los mismos de antes (en este caso particular, los operadores buenos

no dependen de la polarización ni de la representacion $D(T)$ elegidas). Por lo tanto, la posición es un observable que no tiene sentido para ningún sistema físico (Galileano) con la circunferencia como espacio de configuración (véase más adelante).

9.2.1 ¿Existe algún operador tipo posición?

La causa por la que el operador $\hat{\mathrm{X}}$ no es un operador bueno es porque la variable x no es periódica, es una coordenada local que no está definida globalmente: si $\phi(x)$ es una función cuasiperiódica, $x\phi(x)$ ya no es cuasiperiodica (para ningún valor de ϵ). Sin embargo, la función $\eta = e^{i\frac{2\pi}{L}x}$ es periódica, de forma que si definimos el operador $\hat{\eta} \equiv e^{i\frac{2\pi}{L}\hat{\mathrm{X}}}$ entonces $\hat{\eta}\Psi^\epsilon = e^{i\frac{2\pi}{L}x}\Psi^\epsilon$ verifica las mismas condiciones de cuasiperiodicidad que Ψ^ϵ. Podemos decir, por consiguiente, que $\hat{\eta}$ es un operador bueno.

La razón por la cual $\hat{\eta}$ es un operador bueno es precisamente porque genera boosts finitos buenos. Sabemos que los boosts buenos son los dados por $p_k = \frac{2\pi\hbar}{L}k$, es decir,

$$\Psi^\epsilon(p_k * g) = e^{\frac{2\pi\hbar}{L}k\tilde{X}^R_p}\Psi^\epsilon(g) = \left(e^{i\frac{2\pi}{L}\hat{\mathrm{X}}}\right)^{-k}\Psi^\epsilon(g) = \hat{\eta}^{-k}\Psi^\epsilon(g) \tag{9.12}$$

Esto significa que $\hat{\eta}^k$, $k \in Z$ son los únicos operadores posición buenos.

El operador finito $\hat{\eta}$ no es, obviamente, hermítico, más bien es unitario. Sin embargo $\hat{\eta}$ se puede escribir como $\hat{\eta} = \cos(\frac{2\pi}{L}\hat{\mathrm{X}}) + i\sin(\frac{2\pi}{L}\hat{\mathrm{X}})$, de forma que los operadores $\cos(\frac{2\pi}{L}\hat{\mathrm{X}})$ y $\sin(\frac{2\pi}{L}\hat{\mathrm{X}})$ son buenos (por ser funciones periódicas del operador $\hat{\mathrm{X}}$) y hermíticos. Como el conjunto de funciones $\{e^{i\frac{2\pi}{L}mx},\, m \in Z\}$ constituye una base de las funciones periodicas en el intervalo $[0, L]$, cualquier operador que sea función periódica del operador posición será un operador bueno.

En cualquier caso, podemos preguntarnos qué pasa con los boosts finitos que no son buenos, $\tilde{p} \neq p_k$, es decir, por las transformaciones del tipo $\Phi'(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{p}\hat{\mathrm{X}}}\Phi^\epsilon(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{p}x}\Phi^\epsilon(x)$. La función de onda transformada verifica las condiciones de contorno $\Phi'(x + L) = e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{p}(x+L)}\Phi^\epsilon(x + L) = e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon+\tilde{p})L}\Phi'(x)$, y por tanto pertenece al espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{\epsilon+\tilde{p}}(\tilde{G})$. Como las representaciones parametrizadas por ϵ y $\epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in Z$ son equivalentes, las funciones de onda transformadas caen en la representación parametrizada por $(\epsilon + \tilde{p})$ mod $\frac{2\pi\hbar}{L}$. De hecho, si $\tilde{p} = p_k$ para algún $k \in Z$, la función de onda transformada pertenece al mismo espacio de Hilbert que la original y recuperamos el resultado de que los boosts finitos en p_k son operadores buenos. En particular, $\Phi^\epsilon(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{\mathrm{X}}}\Phi^0(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon x}\Phi^0(x) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon x}\Phi(x)$, con $\Phi(x)$ satisfaciendo condiciones periódicas (usuales) de contorno. Esto significa que todos los espacios de Hilbert $\mathcal{H}^\epsilon(\tilde{G})$, aunque sean soporte de representaciones irreducibles no equivalentes, están relacionados entre si por medio de boosts finitos (malos), los cuales son transformaciones unitarias si los consideramos en la unión de todos los espacios de Hilbert $\cup_{\epsilon\in[0,2\pi\hbar/L)}\mathcal{H}^\epsilon(\tilde{G})$. Podemos decir que $\mathcal{H}^\epsilon(\tilde{G})$, para ϵ fijo, es demasiado pequeño para que los boosts puedan "vivir" dentro, y el generador de los boosts, el operador $\hat{\mathrm{X}}$, actuaría como generador infinitesimal de los cambios de

representación. El operador momento $\hat{\vec{P}}$, aunque es bueno (y hermítico) en cada uno de estos espacios de Hilbert $\mathcal{H}^{\epsilon}(\tilde{G})$, no es hermítico en la unión de todos ellos.

En este punto, es interesante mencionar que el conjunto de operdores $\hat{\vec{P}}$, $\hat{\eta}$ y $\hat{\eta}^{\dagger}$ cierra un álgebra de Lie que es isomorfa al álgebra del oscilador armónico no extendido. Los operadores $\hat{\eta}$ y $\hat{\eta}^{\dagger}$ actúan como operadores escalera sobre las autofunciones de $\hat{\vec{P}}$ (cuyo espectro es equiespaciado pero, al contrario de lo que ocurre en el oscilador armónico, no esta acotado inferiormente). Este tipo de construcción ha sido empleada en [OK 93] para estudiar Mecánica Cuántica sobre la circunferencia, con resultados similares a los aqui expuestos).

9.3 Grupo de Heisenberg-Weyl en el toro

Nos adentramos ahora en el fascinante mundo de la Mecánica Cuántica sobre el toro como variedad simpléctica. Aunque parezca un sistema simple, el hecho de que el espacio de fases sea compacto tiene grandes implicaciones, como veremos en esta sección.

Procedamos, pues, con el caso del grupo de H-W sobre el toro, que será parametrizado con coordenadas (x_1, x_2) en lugar de x y p porque en las aplicaciones físicas las coordenadas juegan el doble papel de coordenadas y momentos.

Aplicamos, como en el caso del cilindro, el formalismo de la CA con $\tilde{G}$ el grupo de H-W y con T un fibrado principal con base $\left\{e_{\vec{k}},\, \vec{k} \in Z \times Z\right\}$ y fibra $U(1)$, donde esta vez $e_{\vec{k}}$ representa una traslación en las coordenadas $\vec{x}$ en una cantidad $\vec{L}_{\vec{k}} \equiv (k_1 L_1, k_2 L_2)$, con k_1 y k_2 enteros. L_1 y L_2 son las longitudes de las dos circunferencias que definen el toro. La fibración de T es, en principio, no trivial, ya que las traslaciones en direcciones perpendiculares no conmutan (recuérdese que x_1 y x_2 hacen de par coordenada-momento), por lo que habremos de analizar todos los casos posibles de estructura de T.

La ley de grupo de $\tilde{G}$ es la misma que en caso del cilindro pero escrita en términos de x_1 y x_2:

$$\begin{aligned} \vec{x}\,'' &= \vec{x}\,' + \vec{x} \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{\hbar} m\omega[(1+\lambda)x_1' x_2 + \lambda x_1 x_2']} . \end{aligned} \tag{9.13}$$

Hemos tenido que introducir una nueva constante ω (con dimensionses de T^{-1}), además de la masa m (que está implícita en $p = mv$), para acomodar las dimensiones del exponente en la ley de composición de $U(1)$.

Los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha son:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^L_{x_1} &= \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \tfrac{\lambda}{\hbar} m\omega x_2\, \Xi & \tilde{X}^R_{x_1} &= \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \tfrac{1+\lambda}{\hbar} m\omega x_2\, \Xi \\ \tilde{X}^L_{x_2} &= \tfrac{\partial}{\partial x_2} + \tfrac{1+\lambda}{\hbar} m\omega x_1\, \Xi & \tilde{X}^R_{x_2} &= \tfrac{\partial}{\partial x_2} + \tfrac{\lambda}{\hbar} m\omega x_1\, \Xi \\ \tilde{X}^L_{\zeta} &= i\zeta \tfrac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi & \tilde{X}^R_{\zeta} &= i\zeta \tfrac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi , \end{aligned} \tag{9.14}$$

y la 1-forma de cuantización es:

$$\Theta = -\lambda m\omega x_2 dx_1 - (1+\lambda) m\omega x_1 dx_2 + \hbar \frac{d\zeta}{i\zeta} \tag{9.15}$$

Al igual que antes, la 1-forma de cuantización no tiene núcleo, por lo que no hay módulo característico (o el subgrupo característico es trivial) y cualquier combinación de $\tilde{X}^L_{x_1}$ y $\tilde{X}^L_{x_2}$ constituye una polarización de primer orden completa (y su contrapartida finita constituye un subgrupo de polarización completa). Estás las podemos escribir como $\mathcal{P}_{\vec{n}} =< \vec{n} \cdot \tilde{X}^L_{\vec{x}} >$, donde $\vec{n} = (n_1, n_2)$ es un vector unitario arbitrario. La elección de un vector $\vec{n}$ equivale a elegir una dirección particular en el plano para representar las funciones de onda (en realidad, las funciones de onda polarizadas dependerán de la variable ortogonal a la definida por $\vec{n}$). En principio, en el plano todas la direcciones son equivalentes, pero cuando impongamos ligaduras y las funciones de onda estén definidas sobre el toro, globalmente no todas las direcciones son equivalentes, ya que habrá unas direcciones que se correspondan con geodésicas cerradas (entre las que existirá toda una variedad de nudos "tóricos") y otras que se correspondan con geodésicas abiertas que llenan densamente el toro. Es fácil comprobar que la condición que debe verificar $\vec{n}$ para que la geodésica que lleva esa dirección sea cerrada es que $\frac{n_2}{n_1} = \frac{k_{02}}{k_{01}} \frac{L_2}{L_1}$, $k_{01}, k_{02} \in Z$, o que $\vec{n} = (1,0)$ o $\vec{n} = (0,1)$, es decir, $\vec{n}$ es de la forma $\vec{n} = \vec{L}_{\vec{k}_0}/|\vec{L}_{\vec{k}_0}|$, con $\vec{k}_0 \in Z \times Z$ (el vector $\vec{n}$ debe apuntar en la dirección de algún punto de la red definida por los vectores $\vec{L}_{\vec{k}}$, lo cual es lógico pues estos vectores se identifican con el origen cuando pasemos al toro tomando cociente por ellos). Del mismo modo, como nos interesa que la geodésica ortogonal a la definida por $\vec{n}$ sea también cerrada[3], es necesario y suficiente que $\frac{L_2^2}{L_1^2}$ sea un racional, excepto para los casos $\vec{n} = (1,0)$ y $\vec{n} = (0,1)$, para los que son siempre ortogonales y cerradas. Esta condición es similar a la de la conmensurabilidad de las frecuencias para que una figura de Lissajoux sea cerrada. En principio no impondremos ninguna restricción para el vector $\vec{n}$ (salvo que sea unitario), y luego veremos qué condiciones debe verificar para la autoconsistencia de la representación.

Por tanto imponemos como polarización $\mathcal{P}_{\vec{n}}$, que conduce a las siguientes funciones de onda:

$$\Psi = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar} m\omega[(\lambda n_1^2 - (1+\lambda) n_2^2) y_1 y_2 + (\lambda + \frac{1}{2}) n_1 n_2 y_1^2]} \Phi(y_2) \tag{9.16}$$

donde $y_1 \equiv \vec{n} \cdot \vec{x}$, $y_2 \equiv \vec{n} \cdot \hat{\mathrm{J}} \cdot \vec{x}$, y $(\hat{\mathrm{J}})_{ij} = \epsilon_{ij}$, con $\epsilon_{12} = 1$. La acción de los campos derechos sobre estas funciones es:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \tilde{X}^R_{\vec{x}} \Psi &= \frac{i}{\hbar} m\omega y_2 \Psi \\ \vec{n} \cdot \hat{\mathrm{J}} \cdot \tilde{X}^R_{\vec{x}} \Psi &= \zeta e^{-\frac{i}{\hbar} m\omega[(\lambda n_1^2 - (1+\lambda) n_2^2) y_1 y_2 + (\lambda + \frac{1}{2}) n_1 n_2 y_1^2]} \times \\ &\quad \left[\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{i}{\hbar} m\omega n_1 n_2 (1+2\lambda) y_2 \right] \Phi(y_2) \end{aligned} \tag{9.17}$$

[3]Ya que la función de onda polarizada dependerá de la variable ortogonal a la dirección definida por la polarización.

Antes de imponer las ligaduras, hemos de determinar primero la estructura del grupo T. Debemos hacerlo de forma finita, ya que T es un grupo no conexo, por lo que emplearemos el conmutador del grupo. El conmutador de dos elementos de $\left\{e_{\vec{k}}\right\}_{\vec{k}\in Z\times Z}$ es $[e_{\vec{k}'}, e_{\vec{k}}] = (0, 0, e^{\frac{i}{\hbar}m\omega L_1 L_2(k_1' k_2 - k_2' k_1)})$, donde hay que distinguir dos casos:

i) $e^{\frac{i}{\hbar}m\omega L_1 L_2(k_1' k_2 - k_2' k_1)} = 1 \,\forall\, \vec{k},\, \vec{k}' \in Z\times Z \;\Rightarrow\; [e_{\vec{k}'}, e_{\vec{k}}] = \mathbf{1}_{\widetilde{G}}$,

ii) $\exists\, \vec{k}$ y $\vec{k}'$ / $e^{\frac{i}{\hbar}m\omega L_1 L_2(k_1' k_2 - k_2' k_1)} \neq 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{1}_{\widetilde{G}} \neq [e_{\vec{k}'}, e_{\vec{k}}] \in U(1)$,

Para el caso *i)*, T es el producto directo $T = \left\{e_{\vec{k}},\, \vec{k} \in Z\times Z\right\} \times U(1)$, por lo que todo el grupo T puede imponerse como ligaduras.

En el caso *ii)*, en el que $e^{\frac{i}{\hbar}m\omega L_1 L_2(k_1' k_2 - k_2' k_1)} \neq 1$ para algunos valores de $\vec{k}$ y $\vec{k}'$ (un conjunto infinito discreto de valores, de hecho), hay dos posibilidades, dependiendo de que $\frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar}$ sea racional o irracional. En ninguno de estos casos podemos imponer todo el grupo T como ligaduras, y hemos de proceder tal y como se explicó en el Capítulo 3, eligiendo un subgrupo de polarización T_p de T.

Estudiaremos cada uno de estos casos por separado.

9.3.1 Números cuánticos enteros

Para que la condición *i)* se verifique, es necesario que

$$\frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = n \in N\,, \tag{9.18}$$

lo que implica una *cuantización* de la "frequencia" ω. Como veremos en las aplicaciones físicas, esta condición conducirá a la cuantización del flujo magnético a través de la superficie del toro. Esta condición de cuantización es de la misma naturaleza que la de cuantización de la carga magnética en monopolo de Dirac. En este caso, la CA tan sólo reproduce la condición de integralidad de la Cuantización Geométrica: la forma simplectica debe de ser de clase entera, siendo este entero la clase de Chern de la variedad cuántica.

El resto del procedimiento sigue las mismas líneas que en el caso del grupo de H-W sobre el cilindro: la condición de T-función es $\Psi(g_T * g) = \mathcal{D}(g_T)\Psi(g)$, con $\mathcal{D}(e_{\vec{k}}, \zeta) = \zeta D(e_{\vec{k}})$, donde $D(e_{\vec{k}})$ es una representación del grupo $\left\{e_{\vec{k}},\, \vec{k} \in Z\times Z\right\} \approx Z\times Z$ en los números complejos. Por el momento, nos limitaremos a la representación trivial $D^0(e_{\vec{k}}) = 1$, y posteriormente obtendremos el resto de las representaciones no equivalentes (y que darán lugar a cuantizaciones no equivalentes) mediante la acción de los operadores malos, que como vimos en el caso del cilindro, actúan como transformaciones de cambian de representación. La condicion de T-función es:

$$e^{\frac{i}{\hbar}m\omega[(1+\lambda)k_1 L_1 x_2 + \lambda k_2 L_2 x_1]}\Psi^0(\vec{x} + \vec{L}_{\vec{k}}, \zeta) = \Psi^0(\vec{x}, \zeta) \tag{9.19}$$

$\forall \vec{k} \in Z \times Z$. Aplicando estas ligaduras a las funciones de onda polarizadas (9.16), obtenemos la siguiente restricción para éstas:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{i}{\hbar}m\omega\left\{y_2+(1+2\lambda)n_1n_2y_1+[(1+\lambda)n_2^2-\lambda n_1^2](\vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{L}_{\vec{k}})\right\}(\vec{n}\cdot\vec{L}_{\vec{k}})} \times \\ & e^{-\frac{i}{\hbar}m\omega[(1+2\lambda)n_1n_2(y_1+y_2)](\vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{L}_{\vec{k}})}\Phi^0(y_2+\vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{L}_{\vec{k}}) \;=\; \Phi^0(y_2) \end{aligned} \tag{9.20}$$

$\forall \vec{k} \in Z \times Z$. Esta restricción tiene importantes consecuencias:

a) las únicas polarizaciones $\mathcal{P}_{\vec{n}}$ posibles son las dadas por $\vec{n} = (1,0)$ y $\vec{n} = (0,1)$,

b) la función de onda es distribucional, con soporte en valores equiespaciados de y_2, y

c) el parámetro λ esta también cuantizado.

De estos resultados se deduce también que la dimensión de la representación (y del espacio de Hilbert) es n, es decir, las representaciones del grupo de H-W sobre el toro tienen dimensión n, donde n viene dado por (9.18).

Explícitamente, los valores permitidos para las coordenadas son $x_2 = \frac{k}{n}L_2$, $k \in Z$ para $\vec{n} = (1,0)$ y $x_1 = \frac{k}{n}L_1$, $k \in Z$ para $\vec{n} = (0,1)$. Las funciones de onda son entonces:

$$\Phi^0(x_2) = \sum_{k\in Z} a_k \delta(x_2 - \frac{k}{n}L_2) \quad \text{para} \quad \vec{n} = (1,0) \tag{9.21}$$

$$\Phi^0(x_1) = \sum_{k\in Z} b_k \delta(x_1 - \frac{k}{n}L_1) \quad \text{para} \quad \vec{n} = (0,1) \tag{9.22}$$

Los coeficientes a_k y b_k no son del todo arbitrarios; debido a la condición de T-función, que ahora queda de la forma $\Phi^0(x_2+k_2L_2) = \Phi^0(x_2)$ (para $\vec{n} = (1,0)$) y $\Phi^0(x_1+k_1L_1) = \Phi^0(x_1)$ (para $\vec{n} = (0,1)$) $\forall \vec{k} \in Z \times Z$, satisfacen $a_{k+n} = a_k$, y $b_{k+n} = b_k$, $\forall k \in Z$. Por lo tanto hay solo n de ellos independientes, por lo que la dimensión de la representación es n, como ya habiamos anunciado. Los valores permitidos para λ son $\lambda = \frac{k}{n}$, $k \in Z$, es decir, en lugar de una familia uniparamétrica de cociclos equivalentes tenemos una familia discreta (los cociclos están cuantizados). Esto se entiende mejor en términos de las funciones generatrices de los cobordes, que tienen la forma $\lambda x_1 x_2$, o mejor aún, $e^{\frac{i}{\hbar}m\omega\lambda x_1x_2}$. Para que esta función sea cuasiperiódica, es decir, $e^{\frac{i}{\hbar}m\omega\lambda(x_1+k_1L_1)(x_2+k_2L_2)} = e^{i\epsilon\cdot\vec{L}_{\vec{k}}}e^{\frac{i}{\hbar}m\omega\lambda x_1x_2}, \forall \vec{k} \in Z \times Z$, además de la cuantización de x_1 y x_2, λ debe estar cuantizada.

De ahora en adelante, por concretitud, nos restringiremos al caso $\vec{n} = (1,0)$ (el caso $\vec{n} = (0,1)$ es completamente análogo y de hecho equivalente). Haciendo uso de la expresión (9.21) y del hecho de que $a_{k+n} = a_k, \forall k \in Z$, la sumatoria en la función de onda se puede reagrupar, con lo que llegamos a una expresión mucho más compacta para la función de onda:

$$\Phi^0(x_2) \;=\; \sum_{k\in Z} a_k \delta(x_2 - \frac{k}{n}L_2) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{k_2\in Z} a_{k+nk_2}\delta(x_2 - \frac{k+nk_2}{n}L_2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{k_2 \in Z} \delta(x_2 - \frac{k+nk_2}{n} L_2)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Lambda_k^0(x_2) \qquad (9.23)$$

donde $(x_2^{(k)} \equiv x_2 - \frac{k}{n} L_2)$

$$\Lambda_k^0(x_2) \equiv \sum_{k_2 \in Z} \delta(x_2^{(k)} - k_2 L_2) = \frac{1}{L_2} \sum_{q \in Z} e^{i2\pi q x_2^{(k)}/L_2} \qquad (9.24)$$

De nuevo reobtenemos que la dimensión del espacio de Hilbert $\mathcal{H}^0(\tilde{G})$ es n, ya que es generado por las funciones $\Lambda_k^0(x_2)$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Ahora hemos de determinar el subgrupo $G_{\mathcal{H}}$ de operadores buenos. Éstos vienen caracterizados, en este caso, porque el conmutador[4] $\left[e_{\vec{k}}, g\right]$ sea $1, \forall \vec{k} \in Z \times Z$, lo que implica $\frac{m\omega}{\hbar}(k_1 L_1 x_2 - k_2 L_2 x_1) = 2\pi k$, $k \in Z$, que junto con la condición de cuantización ω conduce a $\vec{x} = \frac{1}{n}\vec{L}_{\vec{k}}$. Por tanto, el subgrupo $G_{\mathcal{H}}$ de operadores buenos es el subgrupo de $\tilde{G}$ en el cual los parámetros $\vec{x}$ estan restringidos a valer $\vec{x} = \frac{1}{n}\vec{L}_{\vec{k}}$. En realidad, tan sólo un número finito de ellos, correspondientes a $\{\vec{x} = (\frac{k_1}{n}L_1, \frac{k_2}{n}L_2),\ k_1, k_2 = 0, 1, ..., n-1\}$, son realmente diferentes, debido a que la condición de T-función los relaciona. Como consecuencia, ninguna transformación infinitesimal (aparte de la de $U(1)$, que siempre es buena) preserva la estructura de las funciones de onda.

Si, tal y como hicimos en el caso del cilindro, introducimos los operadores (finitos) $\hat{\eta}_i \equiv e^{L_i \tilde{X}^R_{x_i}}$, $i = 1, 2$ (aunque aquí representan traslaciones finitas), podemos escribir los elementos de T como $e_{\vec{k}} \equiv (\hat{\eta}_1)^{k_1}(\hat{\eta}_2)^{k_2}$, y el subgrupo de operadores buenos como:

$$G_{\mathcal{H}} = \left\{ \zeta(\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}}(\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}},\ \ k_1, k_2 \in Z,\ \zeta \in U(1) \right\} \qquad (9.25)$$

Como en el caso del cilindro, los operdores malos pueden interpretarse como operadores de cambio de cuantización, de forma que todo el conjunto de operadores malos barre todo el espacio de de cuantizaciones no equivalentes. Como allí, la acción de los operadores malos saca las funciones de onda del espacio de Hilbert $\mathcal{H}^0(\tilde{G})$ y la lleva a un espacio de Hilbert diferente $\mathcal{H}^{\vec{\alpha}}(\tilde{G})$ correspondiente a una representación no equivalente de T parametrizada por $\vec{\alpha}$, donde $\vec{\alpha}$ está relacionado con el operador malo en particular. De esta forma, definimos las nuevas funciones de onda (nos restringimos ahora al factor relevante $\Phi(x_2)$ de la funcion de onda):

$$\Phi^{\vec{\alpha}}(x_2) \equiv e^{\alpha_1 \tilde{X}^R_{x_1} + \alpha_2 \tilde{X}^R_{x_2}} \Phi^0(x_2) = e^{i2\pi n \frac{x_2}{L_2}\frac{\alpha_1}{L_1}} \Phi^0(x_2 + \alpha_2)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{i2\pi n \frac{x_2}{L_2}\frac{\alpha_1}{L_1}} \Lambda_k^0(x_2 + \alpha_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Lambda_k^{\vec{\alpha}}(x_2) \qquad (9.26)$$

[4]En este las caracterizaciones (3.9) y (3.10) también coinciden.

donde

$$\Lambda_k^{\vec{\alpha}}(x_2) \equiv e^{i2\pi n \frac{x_2}{L_2}\frac{\alpha_1}{L_1}} \Lambda_k^0(x_2+\alpha_2) = e^{i2\pi n \frac{x_2}{L_2}\frac{\alpha_1}{L_1}} \frac{1}{L_2} \sum_{q\in Z} e^{i2\pi q(x_2^{(k)}+\alpha_2)/L_2} \tag{9.27}$$

y los valores de $\vec{\alpha}$ son diferentes de $\frac{1}{n}\vec{L}_{\vec{k}}$ (transformaciones buenas).

Para determinar las cuantizaciones no equivalentes (es decir, el mínimo rango de valores de los parametros α_1 y α_2 que barre el conjunto entero de cuantizaciones no equivalentes), hacemos actuar los operadores de T sobre las nuevas funciones de onda y determinamos las condiciones de cuasiperiodicidad que verifican:

$$(\hat{\eta}_1)^{k_1}\Phi^{\vec{\alpha}}(x_2) = e^{-i2\pi n\frac{\alpha_2}{L_2}k_1}\Phi^{\vec{\alpha}}(x_2) \tag{9.28}$$

$$(\hat{\eta}_2)^{k_2}\Phi^{\vec{\alpha}}(x_2) = e^{i2\pi n\frac{\alpha_1}{L_1}k_2}\Phi^{\vec{\alpha}}(x_2) \tag{9.29}$$

De aquídeducimos que $\alpha_1 \in [0, \frac{L_1}{n})$ y $\alpha_2 \in [0, \frac{L_2}{n})$ cubren todas las cuantizaciones no equivalentes. Este rango de valores está asociado, nuevamente, con la primera zona de Brillouin de la red recíproca, como se puede comprobar si definimos los parametros $\vec{\epsilon} \equiv m\omega\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{\alpha}$. Es fácil verificar que las funciones de onda $\{\Lambda_k^{\vec{\alpha}}(x_2),\ k=0,1,...,n-1\}$ constituyen el espacio soporte (generan todo $\mathcal{H}^{\vec{\alpha}}(\tilde{G})$) de las representaciones irreducibles y unitarias (parameterizadas por $\vec{\alpha}$) del subgrupo $G_{\mathcal{H}}$ de operadores buenos. Bajo estos operadores las funciones de onda se transforman:

$$(\hat{\eta}_1)^{k_1/n}\Lambda_k^{\vec{\alpha}}(x_2) = e^{i2\pi(\frac{k}{n}-\frac{\alpha_2}{L_2})k_1}\Lambda_k^{\vec{\alpha}}(x_2) \tag{9.30}$$

$$(\hat{\eta}_2)^{k_2/n}\Lambda_k^{\vec{\alpha}}(x_2) = e^{i2\pi\frac{\alpha_1}{L_1}k_2}\Lambda^{\vec{\alpha}}_{k-k_2 \bmod n}(x_2) \tag{9.31}$$

En un trabajo reciente, [Got 95], se demuestra que, para el caso $n=1$, el toro como variedad simpléctica admite una cuantización completa de toda su álgebra de Poisson (constituido por funciones periódicas en x_1 y x_2), es decir, el álgebra de Poisson completa puede ser representada irreduciblemente mediante operadores autoadjuntos actuando sobre un cierto espacio de Hilbert, por lo que el toro sería una variedad simpléctica para la que no se da ningún teorema no-go de cuantización (es decir, imposibilidad de representar irreduciblemente todo el álgebra de Poisson, tan sólo ciertas subálgebras, véase [GGH 95, Got 95] y referencias allí citadas).

Nosotros hemos obtenido el mismo resultado para n entero arbitrario. Más dificil todavía, hemos obtenido lo que podríamos llamar un teorema over-go para el toro, en el sentido en que podemos representar irreduciblemente más operadores que los asociados al álgebra de Poisson (los que pertenecen a T), que son los $(\hat{\eta}^{\frac{k_i}{n}}), k_i \in Z, i=1,2$. Para ser más precisos, hemos cuantizado las raices n-ésimas de las funciones clásicas. Esto ha sido posible gracias a que las representaciones que hemos obtenido se pueden considerar representaciones vectoriales, es decir, las funciones de onda son realmente secciones de un fibrado vectorial de dimensión n sobre el toro.

Como en el cilindro, aquí también podemos considerar la union de todos los espacios de Hilbert $\cup_{\vec{\alpha}}\mathcal{H}^{\vec{\alpha}}(\tilde{G})$. En este espacio de Hilbert los operadores malos $\tilde{X}^R_{\vec{x}}$ son hermíticos

y actúan irreduciblemente, realizando un representación unitaria e irreducible del grupo de H-W sobre el toro. Esta representación así obtenida resulta ser una generalización para n entero arbitrario de la conocida en Estado Sólido como kq-representación [Zak 68], donde tan sólo se considera el caso $n = 1$.

Resumiendo lo que llevamos dicho del caso n entero podemos decir que existen un continuo de cuantizaciones no equivalentes, correspondientes a otras tantas representaciones irreducibles y no equivalentes de T, parametrizadas por $\vec{\alpha}$ y que dan lugar a diferentes propiedades de cuasiperiodicidad en las funciones de onda. El valor $\vec{\alpha} = 0$, correspondiente a la representación trivial $D^0(e_{\vec{k}}) = 1$ de $\left\{e_{\vec{k}};\ \vec{k} \in Z \times Z\right\}$, reproduce las condiciones de periodicidad estándar. Las funciones de onda son las dadas en (9.26-9.27) con condiciones de cuasiperiodicidad dadas por (9.28-9.29) y el subgrupo de operadores buenos viene dado en (9.25).

Hay que resaltar la diferencia existente entre los dos tipos de representaciones obtenidas aquí. Por un lado, para un valor fijo de $\vec{\alpha}$, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{\vec{\alpha}}(\tilde{G})$ soporta una representación irreducible del subgrupo $G_{\mathcal{H}}$ de operadores buenos. En esta representación los operadores $\tilde{X}^R_{\vec{x}}$ no preservan el espacio de Hilbert; son operadores malos, aunque pueden interpretarse como generadores de cambio de representación. Por otro lado, la unión de todos los espacios de Hilbert $\cup_{\vec{\alpha}}\mathcal{H}^{\vec{\alpha}}(\tilde{G})$ soporta una representación irreducible del grupo de H-W completo sobre el toro, de tal modo que los operadores $\tilde{X}^R_{\vec{x}}$ son hermíticos y el subgrupo de operadores buenos actúa de forma diagonal.

LLegados a este punto, haremos un breve inciso para relacionar estos resultados con algo (aparentemente) disconexo. Consideremos el subgrupo discreto (aunque infinito) generado por $\left\{(\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}}(\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}},\ \ k_1, k_2 \in Z\right\}$, el cual constituye un fibrado principal con base $Z \times Z$ y fibra $Z_n \subset U(1)$. El álgebra del grupo de este subgrupo discreto (es decir, el álgebra obtenida al considerar los elementos de este grupo, o más bien una representación matricial de él, como generadores de un espacio vectorial con el conmutador usual de matrices como corchete de Lie) resulta ser un álgebra de Lie triginométrica (de dimensión infinita) [FFZ 90]. Por ser n entero, este grupo discreto tiene centro, de forma que si tomamos cociente por él (esto es lo que hace la condición de T-función), nos queda un grupo finito generado por $\left\{(\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}}(\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}},\ \ \ k_1, k_2 = 0, ..., n-1\right\}$. Este grupo finito, que puede verse como una version finita del grupo de H-W, constituye un fibrado principal con base $Z_n \times Z_n$ y fibra $Z_n \subset U(1)$, y admite una representación matricial simple [Weyl 31] (véase también [FFZ 90] y [F 89]). El álgebra del grupo correspondiente resulta ser la de $SU(n) \times U(1)$ para n impar o la de $U(n/2)$ para n par, en una base trigonométrica [FFZ 90]. Por medio de esta representación, el límite $n \to \infty$ (lo que podríamos llamar el límite clásico) es particularmente sencillo de realizar, dando lugar al álgebra de difeomorfismos (que preservan el área) de una superficie bidimensional (el toro, en este caso). Este álgebra, que se denomina ω_∞ en la literatura, es la versión clásica de una variedad de álgebras de dimensión infinita denominadas collectivamente W_∞, de interés creciente día a día (véase [Shen 92] para un review). En este sentido, el subgrupo de operadores

buenos $G_{\mathcal{H}}$ puede verse como la version cuantica del álgebra de difeomorfismos del toro, constituyendo de esta forma una realización de álgebra W_∞ sobre el toro.

9.3.2 Números cuánticos fraccionarios

Vamos a considerear ahora el caso en que $\frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = \frac{n}{r}$. En este caso T tiene estructura no trivial y hemos de seleccionar un subrupo de polarización T_p. T tiene subgrupo característico no trivial, es decir, existen elementos no triviales que conmutan con todo T. El subgrupo característico es $G_C = \{r\vec{L}_{\vec{k}}, \vec{k} \in Z^2\}$, y el subgrupo de polarización, que debe contener a G_C, será de la forma $T_p = G_C \cup \{k\vec{L}_{\vec{k}_p}, k \in Z\}$, donde $\vec{k}_p$ es un vector de enteros cuyas componentes son primos entre si o bien (1,0) ó (0,1). Esta condición es necesaria para que el subgrupo de polarización sea maximal, y por tanto la representación de T sea irreducible.

La condición de T-función es $\Psi(g_{T_B} * g) = \mathcal{D}(g_{T_B})\Psi(g)$, donde $T_B \equiv T_p \cup U(1)$ es el máximo subgrupo de ligaduras que se pueden imponer de forma consitente, y $\mathcal{D}(g_{T_B})$ es una representación de T_B en los números complejos. Procederemos como en el caso entero y comenzaremos con la representación trivial $\mathcal{D}^0(g_{T_p}, \zeta) = \zeta$ de T_p. Después, obtendremos todas las representaciones no equivalentes de T_B haciendo uso de los operadores malos. La condición de T_B-función sobre las funciones de onda polarizadas (9.16) queda, pues:

$$e^{\frac{i}{\hbar}m\omega\left\{y_2+(1+2\lambda)n_1n_2y_1+[(1+\lambda)n_2^2-\lambda n_1^2](\vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{L}_{r\vec{k}+k\vec{k}_p})\right\}(\vec{n}\cdot\vec{L}_{r\vec{k}+k\vec{k}_p})} \times$$
$$e^{-\frac{i}{\hbar}m\omega[(1+2\lambda)n_1n_2(y_1+y_2)](\vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{L}_{r\vec{k}+k\vec{k}_p})}\Phi^0(y_2+\vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot(\vec{L}_{r\vec{k}+k\vec{k}_p})) = \Phi^0(y_2) \qquad (9.32)$$

$\forall k \in Z$, y $\forall \vec{k} \in Z \times Z$. Al igual que ocurría en el caso entero, los únicos vectores de polarización $\vec{n}$ consistentes con estas restricciones son el $\vec{n} = (1,0)$ y el $\vec{n} = (0,1)$, y lo mismo ocurre para el vector de polarización $\vec{k}_p$ que define T_p, para el que los valores permitidos son $\vec{k}_p = (1,0)$ y $\vec{k}_p = (0,1)$.

Por concretitud, fijemos la polarización $\vec{n} = (1,0)$ (el caso $\vec{n} = (0,1)$ es completamente análogo y de hecho es equivalente). Las dos posibles eleciones de $\vec{k}_p$, perpendicular y paralelo a $\vec{n}$, conduce a representaciones no equivalentes[5], ambas con dimensión n y con λ restringido a tomar los valores $\lambda = k/n$, $k \in Z$:

a) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \vec{k}_p = (0,1)$, la función de onda tiene soporte en los valores $y_2 = x_2 = \frac{k}{n}L_2$, $k \in Z$, satisface $\Phi^0_\perp(x_2 + k_2L_2) = \Phi^0_\perp(x_2)$, y tiene la forma

$$\Phi^0_\perp(x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\Lambda^0_k(x_2) \qquad (9.33)$$

[5]Esta es una propiedad general de la CA algebraica, como ya comentamos en el Capítulo 3: para una polarizacion dada en $\widetilde{G}$, diferentes elecciones de subgrupos de polarización T_p en T pueden dan lugar a cuantizaciones no equivalentes, incluso en el caso en que estos subgrupos de polarización condujesen a representaciones equivalentes del subgrupo T.

donde $\Lambda_k^0(x_2)$ se define como en el caso entero. El subgrupo de operadores buenos es $G_{\mathcal{H}} = \{\frac{r}{n}\vec{L}_{\vec{k}},\ \vec{k} \in Z \times Z\} \cup \{\frac{k}{n}L_2,\ k \in Z\}$, aunque sólo un subgrupo finito de estos elementos son diferentes:

$$G_{\mathcal{H}}^{\perp} = \left\{(\hat{\eta}_1)^{r\frac{k_1}{n}},\ (\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}},\quad k_1, k_2 = 0, ..., n-1\right\} \tag{9.34}$$

b) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \parallel \vec{n} \quad \Rightarrow \vec{k}_p = (1,0)$, la función de onda tiene soporte en los valores $y_2 = x_2 = k\frac{r}{n}L_2$, $k = 0, 1, ...n-1$, satisface $\Phi_{\parallel}^0(x_2 + rk_2L_2) = \Phi_{\parallel}^0(x_2)$, y tiene la forma

$$\Phi_{\parallel}^0(x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Lambda_k^{r,0}(x_2) \tag{9.35}$$

donde $\Lambda_k^{r,0}(x_2) \equiv \frac{1}{rL_2}\sum_{q\in Z} e^{i2\pi q x_2^{r,(k)}/(rL_2)}$, con $x_2^{r,(k)} \equiv x_2 - \frac{k}{n}rL_2$, y el subgrupo de operadores buenos es $G_{\mathcal{H}} = \{\frac{r}{n}\vec{L}_{\vec{k}},\ \vec{k} \in Z \times Z\} \cup \{\frac{k}{n}L_1,\ k \in Z\}$. De nuevo, sólo un subgrupo finito de ellos son distintos:

$$G_{\mathcal{H}}^{\parallel} = \left\{(\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}},\ (\hat{\eta}_2)^{r\frac{k_2}{n}},\quad k_1, k_2 = 0, ..., n-1\right\} \tag{9.36}$$

Como en el caso entero, podemos calcular las representaciones no equivalentes aplicando el conjunto de operadores malos a la funcines de onda, con lo que obtenemos:

a) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \perp \vec{n}$ las funciones de onda tienen la forma

$$\Phi_{\perp}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Lambda_k^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \tag{9.37}$$

con $\Lambda_k^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \equiv e^{i2\pi\frac{n}{r}\frac{\alpha_{p1}}{L_1}\frac{x_2}{L_2}}\Lambda_k^0(x_2)$. Satisfacen

$$(\hat{\eta}_1)^{rk_1}\Phi_{\perp}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) = e^{-i2\pi n\frac{\alpha_{p2}}{L_2}k_1}\Phi_{\perp}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \tag{9.38}$$

$$(\hat{\eta}_2)^{k_2}\Phi_{\perp}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) = e^{i2\pi n\frac{\alpha_{p1}}{rL_1}k_2}\Phi_{\perp}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \tag{9.39}$$

con $\alpha_{p1} \in [0, r\frac{L_1}{n})$, $\alpha_{p2} \in [0, \frac{L_2}{n})$.

b) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \parallel \vec{n}$ las funciones de onda tienen la forma

$$\Phi_{\parallel}^{\vec{\beta}_p}(x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Lambda_k^{r,\vec{\beta}_p}(x_2) \tag{9.40}$$

con $\Lambda_k^{r,\vec{\beta}_p}(x_2) \equiv e^{i2\pi\frac{n}{r}\frac{\beta_{p1}}{L_1}\frac{x_2}{L_2}}\Lambda_k^{r,0}(x_2)$. Satisfacen

$$(\hat{\eta}_1)^{k_1}\Phi_{\parallel}^{\vec{\beta}_p}(x_2) = e^{-i2\pi n\frac{\beta_{p2}}{rL_2}k_1}\Phi_{\parallel}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \tag{9.41}$$

$$(\hat{\eta}_2)^{rk_2}\Phi_{\parallel}^{\vec{\beta}_p}(x_2) = e^{i2\pi n\frac{\beta_{p1}}{L_1}k_2}\Phi_{\parallel}^{\vec{\beta}_p}(x_2) \tag{9.42}$$

con $\beta_{p1} \in [0, \frac{L_1}{n})$, $\beta_{p2} \in [0, r\frac{L_2}{n})$.

Resulta sencillo verificar que las funcines de onda $\{\Lambda_k^{\vec{\alpha}_p}(x_2),\ k=0,1,...,n-1\}$ y $\{\Lambda_k^{r,\vec{\beta}_p}(x_2),\ k=0,1,...,n-1\}$ son soporte de representaciones unitarias e irreducibles (parametrizadas por $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$, respectivamente) de los correspondientes subgrupos de operadores buenos. Bajo estos operadores se transforman de la siguiente forma:

a) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \perp \vec{n}$

$$(\hat{\eta}_1)^{rk_1/n}\Lambda_k^{\vec{\alpha}_p}(x_2) = e^{i2\pi(\frac{k}{n}-\frac{\alpha_{p2}}{L_2})}\Lambda_k^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \quad (9.43)$$

$$(\hat{\eta}_2)^{k_2/n}\Lambda_k^{\vec{\alpha}_p}(x_2) = e^{i2\pi\frac{\alpha_1}{rL_1}k_2}\Lambda_{k-k_2 \bmod n}^{\vec{\alpha}_p}(x_2) \quad (9.44)$$

b) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \parallel \vec{n}$

$$(\hat{\eta}_1)^{k_1/n}\Lambda_k^{r,\vec{\beta}_p}(x_2) = e^{i2\pi(\frac{k}{n}-\frac{\beta_{p2}}{rL_2})}\Lambda_k^{r,\vec{\beta}_p}(x_2) \quad (9.45)$$

$$(\hat{\eta}_2)^{rk_2/n}\Lambda_k^{r,\vec{\beta}_p}(x_2) = e^{i2\pi\frac{\beta_{p1}}{L_1}k_2}\Lambda_{k-k_2 \bmod n}^{r,\vec{\beta}_p}(x_2) \quad (9.46)$$

Hay que hacer notar que aunque $\frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = \frac{n}{r}$, la dimensión de la representaciones sigue siendo n, y $\lambda = k/n$, $k \in Z$, como en el caso entero (en el caso $\vec{L}_{\vec{k}_p} \perp \vec{n}$ las funciones de onda incluso son las mismas); la diferencia reside en los subgrupos de operadores buenos, que aunque isomorfos como grupos, difieren en los valores específicos de las transformaciones. Estas representaciones pueden ser reinterpretadas como si tomásemos un toro r veces más grande en una dirección (determinada por el vector ortogonal a $\vec{k}_p$), es decir, el área del toro efectivo sería rL_1L_2, y por tanto $\frac{m\omega(rL_1L_2)}{2\pi\hbar} = n$. Así pues, se aplicaría el mismo resultado que en el caso entero aunque cambiando L_2 por rL_2 si $\vec{k}_p = (1,0)$ o L_1 por rL_1 si $\vec{k}_p = (0,1)$.

Haciendo resumen de lo dicho hasta ahora, existen dos familias de doble continuo de cuantizaciones no equivalentes, de acuerdo con las elecciones $\vec{L}_{\vec{k}_p} \perp \vec{n}$ y $\vec{L}_{\vec{k}_p} \parallel \vec{n}$, parametrizadas por $\vec{\alpha}_p$ and $\vec{\beta}_p$, respectivamente. Las funciones de onda son las dadas en (9.37) y (9.40), que satisfacen las condiciones de cuasiperiodicidad dadas por (9.38-9.39) y (9.41-9.42), respectivamente. Los subgrupos de operadores buenos son los dados por (9.34) y (9.36), respectivamente.

Fibrado vectorial asociado:

Si actuamos sobre las funciones de onda con los operadores malos de T (es decir, aquellos de T que no están en T_B), las funciones de onda van a parar a un espacio de Hilbert diferente en una representación no equivalente. Sin embargo, como estos operadores son finitos y su potencia r-ésima son operadores buenos, estas nuevas funciones de onda se transforman las unas en las otras bajo la acción del subgrupo T_{malos}, definido como el conjunto de operadores malos de T y la identidad. Por lo tanto, si construimos el espacio vectorial generado por estas r funciones (T_{malos} tiene r elementos), obtenemos una

representación unitaria e irreducible del grupo T entero de dimensión r, incluyendo los operadores malos. Explícitamente:

a) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \perp \vec{n}$ definimos

$$\Lambda^{\vec{\alpha}_p}_{k,j}(x_2) \equiv (\hat{\eta}_1)^j \Lambda^{\vec{\alpha}_p}_k(x_2) = e^{i2\pi \frac{n}{r} \frac{x_2}{L_2} j} \Lambda^{\vec{\alpha}_p}_k(x_2) \tag{9.47}$$

para $j = 0, 1, ..., r-1$, que satisfacen:

$$(\hat{\eta}_1)^{j'} \Lambda^{\vec{\alpha}_p}_{k,j}(x_2) = e^{-i2\pi n \frac{\alpha_{p2}}{L_2}(j + j' \operatorname{div} r)} \Lambda^{\vec{\alpha}_p}_{k,j+j' \bmod r}(x_2) \tag{9.48}$$

para $j, j' = 0, 1, ..., r-1$.

b) $\vec{L}_{\vec{k}_p} \parallel \vec{n}$ definimos

$$\Lambda^{r,\vec{\beta}_p}_{k,j}(x_2) \equiv (\hat{\eta}_2)^j \Lambda^{r,\vec{\beta}_p}_k(x_2) = \Lambda^{r,\vec{\beta}_p}_k(x_2 + jL_2) \tag{9.49}$$

para $j = 0, 1, ..., r-1$, que satisfacen:

$$(\hat{\eta}_2)^{j'} \Lambda^{r,\vec{\beta}_p}_{k,j}(x_2) = e^{i2\pi n \frac{\beta_{p1}}{L_1}(j + j' \operatorname{div} r)} \Lambda^{r,\vec{\beta}_p}_{k,j+j' \bmod r}(x_2) \tag{9.50}$$

para $j, j' = 0, 1, ..., r-1$.

Podemos imaginarnos esta construcción como un fibrado vectorial de dimensión r asociado al fibrado principal derecho $\widetilde{G}$ con grupo estructural T. Las funciones de onda (con r componentes) serían secciones de este fibrado vectorial asociado.

Como conclusión final, podemos decir que la CA generaliza a la Cuantización Geométrica en varios aspectos, en particular, en el que se refiere a números cuánticos (topológicos). El valor fraccionario $\frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = \frac{n}{r}$ generaliza a la tradicional clase entera de la forma simpléctica (la clase de Chern de la variedad cuántica). La Cuantización Geométrica de una variedad con "clase fraccionaria" $\frac{n}{r}$ conduciría a funciones de onda r-valuadas (en oposición a univaluadas). Eventualmente, este problema podría ser evitado sustituyendo el fibrado de línea usual por un fibrado vectorial complejo E de rango r y clase de Chern n, como el que hemos construido.

Así mismo, los comentarios hechos para el caso entero referentes a la kq-representación pueden ser trasladados al fibrado vectorial asociado en el caso fraccionario.

9.3.3 Caso irracional

Finalmente, y por completitud, comentaremos brevemente el caso en que $\rho \equiv \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar}$ es un número irracional. Como en el caso fraccionario, no podemos imponer todo el grupo T como ligaduras y hemos de elegir un subgrupo de polarización T_p. En este caso el subgrupo característico es trivial, por lo que $T_B = T_p \cup U(1)$, con $T_p = \{k\vec{L}_{\vec{k}_p}, k \in Z\}$

sólamente. Como antes, se puede probar que las únicas polarizaciones posibles son las dadas por $\vec{n} = (1,0)$ y $\vec{n} = (0,1)$, y que los únicos subgrupos de polarización T_p en T consistentes son los definidos por $\vec{k}_p = (1,0)$ y $\vec{k}_p = (0,1)$. Ninguna restricción para λ aparece en este caso y la estructura de la condición de T_B-función se parece mucho a la que aparecía en el caso del cilindro: las funciones de onda resultan tener soporte en una serie infinita e igualmente espaciada de valores de y_2 si $\vec{k}_p \parallel \vec{n}$ (tal y como ocurría en la representación de momentos en el caso del cilindro), o es cuasiperiódica en y_2 si $\vec{k}_p \perp \vec{n}$ (como en la representación de configuración en el caso del cilindro). En ambos casos las representaciones no equivalentes están caracterizadas $\epsilon \in [0, \frac{2\pi\hbar}{|\vec{L}_{\vec{k}_p}|})$. Las representaciones son por tanto de dimension infinita, y el subgrupo de operadores buenos es $G_{\mathcal{H}} = \{\frac{1}{\rho}\vec{L}_{\vec{k}}, \vec{k} \in Z \times Z\} \cup \{\alpha\vec{L}_{\vec{k}_p}, \alpha \in R\}$. Como consecuencia, además de las transformaciones discretas en $\vec{x} = \frac{1}{\rho}\vec{L}_{\vec{k}}$, el generador infinitesimal $\vec{L}_{\vec{k}_p} \cdot \tilde{X}^R_{\vec{x}}$ es también un operador bueno, esto es, las traslaciones arbitrarias en la dirección de $\vec{L}_{\vec{k}_p}$ son transformaciones buenas. Nótese que, al ser ρ un número irracional, $\frac{1}{\rho}\vec{L}_{\vec{k}}$ nunca toma el valor de un punto de T, aunque llena densamente el toro cuando variamos $\vec{k} \in Z \times Z$.

Por tanto, en este caso, una circunferencia ($x_1 = 0$ or $x_2 = 0$), como grupo, es lo máximo que podemos representar de forma fiel, pero el resto del toro no se puede representar, ni tan siquiera los puntos de T que no están en T_B. En particular, de los operadores de orden infinito $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$, tan sólo uno de ellos es un operador bueno (el que va en la dirección de $\vec{L}_{\vec{k}_p}$). En consecuencia, no podemos representar el grupo de H-W sobre el toro de forma fiel para valores irracionales de ρ.

9.4 Partícula libre Galileana en la circunferencia

Vamos a aplicar ahora los resultados obtenidos para el grupo de H-W sobre el cilindro y sobre el toro a sistemas físicos concretos (y simples) que poseen el cilindro o el toro como variedad simpléctica. Comenzaremos con el sistema más simple que posee el cilindro como variedad simpléctica, la partícula libre moviéndose en la circunferencia.

Podemos estudiar este problema añadiendo simplemente la evolución temporal a los resultados obtenidos en la sección anterior, sin que ello afecte para nada a las conclusiones alcanzadas allí. La única novedad es que ahora tenemos un nuevo operador $\hat{E}$ asociado con la evolucion temporal, el cual, gracias a la ecuación de Schrödinger (tanto en el espacio de configuración como el de momentos), se puede escribir en términos del operador momento como $\frac{1}{2m}\hat{\vec{P}}^2$. Como $\hat{\vec{P}}$ es un operador bueno, $\hat{E}$ resulta ser también un operador bueno[6].

[6]Como era de esperar, pues el operador energía genera la evolución temporal, de manera que si no fuese un operador bueno la evolución temporal no dejaría estable el espacio de Hilbert. Las ligaduras serían incompatibles con la evolución temporal y el sistema estaría mal definido desde el punto de vista físico.

Vamos a estudiar detalladamente el espectro de energía del sistema. Un conjunto de autofunciones común a $\hat{\mathrm{E}}$ y a $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ viene dado por:

$$\begin{aligned} \phi_n^\epsilon(x,t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}(\epsilon+\frac{2\pi\hbar}{L}n)^2 t} e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon+\frac{2\pi\hbar}{L}n)x} \\ \hat{\mathrm{E}}\phi_n^\epsilon &= \frac{1}{2m}(\epsilon+\frac{2\pi\hbar}{L}n)^2\phi_n^\epsilon \\ \vec{\mathrm{P}}\phi_n^\epsilon &= (\epsilon+\frac{2\pi\hbar}{L}n)\phi_n^\epsilon \end{aligned} \tag{9.51}$$

donde $n \in Z$. Nótese que que para $\epsilon = 0$ los estados n y $-n$ tienen la misma energía, lo que significa que todos los autoestados están doblemente degenerados excepto el vacío, que no lo está. Para cualquier otro valor de ϵ, los estados n y $-(n + 2\epsilon\frac{L}{2\pi\hbar})$ tienen la misma energía, pero $-(n + 2\epsilon\frac{L}{2\pi\hbar})$ es un autoestado sólo si $2\epsilon\frac{L}{2\pi\hbar} \in Z$, es decir, si $\epsilon\frac{L}{2\pi\hbar}$ es un entero o semientero. Esto significa que, en general, no hay degeneración en el espectro para ningún valor de ϵ excepto para los valores enteros, en cuyo caso todos los autoestados excepto el vacío son degenerados, y los semienteros, para los que todos los estados incluyendo el vacío son degenerados. El fenómeno de vacío degenerado en este modelo tan simple asemeja el fenomeno de θ-vacío en Teorías de Yang-Mills [AEP 83].

El fenómeno de cuantizaciones no equivalentes en la partícula libre sobre la circunferencia se puede reproducir, de forma equivalente, mediante la introducción de un coborde extra en (9.1) (de forma más precisa, en en la ley de grupo con la evolución temporal añadida, véase Capítulo 2) generado por la función ϵx, es decir, un factor multiplicativo de la forma $e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{p'}{m}t}$ en la ley de composición de $\zeta \in U(1)$. Para la partícula libre en la recta real, la única consecuencia de este término es la aparición de una diferencial total en la 1-forma de cuantización Θ (o lo que es lo mismo, de una derivada total en el lagrangiano), dando lugar a teorías (clásica y cuántica) equivalentes. La situación es diferente cuando la partícula está en la circunferencia: la función generatriz ϵx, o mejor dicho, $e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon x}$, no es univaluada sobre la circunferencia a no ser que $\epsilon = \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in Z$. Como consecuencia, dos cociclos que difieran en un coborde generado por ϵx (y que por tanto darían lugar a teorías equivalentes sobre la recta real) dan lugar a teorías no equivalentes sobre la circunferencia si $\epsilon \neq \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in Z$. Este proceso de creación de cohomología no trivial nos recuerda mucho la aparición de cohomología bajo la contraccion de grupos, como ocurre, por ejemplo, en el grupo de Poincaré, que no tiene cohomología pero en el que una clase de cobordes (generados por una función lineal en el tiempo) se convierten en verdaderos cociclos en el limite $c \to \infty$ (y en el que el grupo de Poincaré se convierte en el de Galileo), debido a que la función generatriz no está definida en este límite [AA 85b].

Otra forma, no menos interesante, de interpretar el fenómeno de las cuantizaciones no equivalentes parametrizadas por ϵ, al menos para el caso de una partícula cargada, es como un efecto de tipo Aharonov-Bohm. Las diferentes cuantizaciones se pueden realizar en la práctica produciendo (externamente al sistema, mediane un solenoide) un flujo magnético Φ a través de la circunferencia, de manera tal que la partícula no sienta el campo magnético, tan sólo el potencial vector (la disposición usual en un experimento tipo

Aharonov-Bohm). Bajo estas circunstancias, el efecto del potencial vector es el mismo que el de un boost, dando lugar a cuantizaciones no equivalentes dependiendo del valor del flujo a través de la circunferencia, de tal modo que $\epsilon = e\Phi/c$. Una aplicación física interesante es la del anillo superconductor atravesado por un flujo magnético, en el que, debido al efecto Meissner el flujo magnético es repelido fuera del material superconductor de manera que el campo magnético es efectivamente cero en el interior del material superconductor y sólo el potencial vector es relevante (efecto Aharonov-Bohm). Si el valor del flujo es[7] $k\Phi_0$, $k \in Z$, donde $\Phi_0 \equiv hc/e^*$ es el cuanto unidad de flujo magnético, no hay corriente neta en el anillo superconductor, pero para cualquier otro valor del flujo existe una corriente neta que tiene la forma dada en la Figura 1.

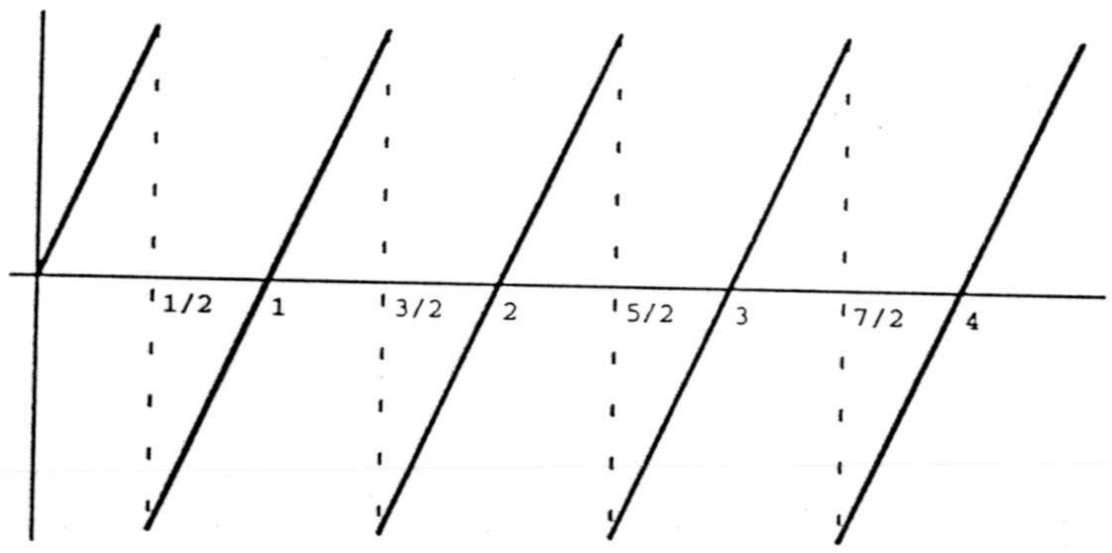

Figure 9.1: Corriente neta en el anillo superconductor frente a Φ/Φ_0.

Nótese la discontinuidad que aparece para los valores semienteros de Φ/Φ_0, donde la corriente no tiene un signo definido, como consecuencia, precisamente de la doble degeneración de todos los estados de energía (incluido el vacío), de manera que estados con velocidades en sentidos contrarios tienen la misma energía y por tanto no hay costo energético en pasar de uno a otro.

9.4.1 Violación del teorema de Ehrenfest

Uno de los problemas comunes a los sistemas con espacios de configuracion topológicamente no triviales es la violacion del teorema de Ehrenfest para ciertos operadores (los llamados operadores "anómalos") [Est 86].

El teorema de Ehrenfest lo que nos dice es que los valores esperados de los operadores cuánticos siguen las trayectorias clásicas de movimiento:

$$\frac{d}{dt} < \hat{A} >= \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \hat{A}\right] > \tag{9.52}$$

[7]En este caso la carga eléctrica efectiva es $e^* = 2e$ debido a que los electrones forman parejas de Cooper.

La explicación que se en da [Est 86] para la aparición de operdores "anómalos" es la de que cuando el operador $\hat{A}$ no preserva el dominio del hamiltoniano $\hat{H}$, entonces aparecen términos extras en la parte derecha de la igualdad de (9.52), que son interpretados como anomalías. En el esquema de la CA esta es una consecuencia natural de la aparición de operadores malos, que son aquellos que no preservan el espacio de Hilbert de funciones de onda que verifican la condición de T-función. En el lenguaje de la CA, diriamos que $\hat{A}$ es un operador malo, por lo que ni la parte izquierda ni la derecha de (9.52) tendrían sentido, ya que el operador $\hat{A}$ saca las funciones de onda del espacio de Hilbert donde el hamiltoniano es autoadjunto (como ya hemos comentado, $\hat{H}$ debe ser un operador bueno para que el sistema tenga algún sentido físico). La aparición del término "anómalo" que viola el teorema de Ehrenfest es consecuencia de ello.

Volviendo a la partícula libre galileana sobre la circunferencia, el teorema de Ehrenfest fallará para el operador posición, que como sabemos es un operador malo y por tanto la ecuación (9.52) no tiene sentido para él.

En conclusión, siempre que aparezcan operadores malos en una teoría, el teorema de Ehrenfest fallará para cada uno de estos operadores, y, en general, cualquier valor esperado que implique estos operadores estará mal definido, dando lugar a términos extras que eventualmente podemos interpretar como anomalías topológicas.

9.5 Partícula cargada en un campo magnético homogéneo sobre el toro

Consideremos ahora el problema, mucho más rico e interesante, de la partícula cargada moviéndose en un campo magnético homogéneo sobre el toro. Este problema esta relacionado con el modelo de Schwinger [Man 85], y tiene importantes aplicaciones en el Efecto Hall Cuántico [KDP 80, Lau 83, Tou 94]. El campo magnético es perpendicular a la superficie del toro, y el flujo magnético total resulta estar cuantizado (como veremos más adelante), de la misma manera que la carga del monopolo de Dirac está cuantizada [WY 75]. La conexión entre este sistema y el Efecto Hall Cuántico se basa en que la funcion de onda para éste factoriza (bajo una serie de asumpciones naturales) en un término que depende de las coordenadas relativas (que incluye las interacciones) y otro término que depende sólo de las coordenadas del centro de masas, que se comporta esencialmente como una partícula en un campo magnético transversal y homogéneo, y en la topología efectiva del dispositivo experimental; la topología de la cinta semiconductora junto con los terminales de medida de corriente y de voltaje es la de un toro con un agujero [Tou 94].

Antes de irnos al toro, consideraremos el sistema en el plano, para clarificar el sentido de las diferentes magnitudes que aparecen en el problema y para obtener una parametrización del sistema que haga más fácil estudiar el problema en el toro.

9.5.1 Partícula cargada en un campo magnético homogéneo

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético homogéneo puede ser factorizado en un problema bidimensional (en el plano normal al campo magnético) por un movimiento libre en la dirección del campo magnético. Así pues, nos restringiremos a un sistema bidimensional caracterizado por un conmutador no nulo entre los generadores de las traslaciones, $[\tilde{X}^L_{x^1}, \tilde{X}^L_{x^2}] = im\omega_c/\hbar$, donde ω_c es la frecuencia ciclotrón $\omega_c = \frac{q\mathcal{H}}{mc}$, $\mathcal{H}$ es la intensidad del campo magnético y q es la carga eléctrica de la partícula [LL 65, CDL 77].

Hemos de obtener una ley de grupo para este sistema que debe ser una deformación de la ley del grupo de Galileo (en dos dimensiones), debido al conmutador no nulo entre los generadores de traslaciones. Como el grupo de Galielo no admite ninguna extensión central que de lugar a $[\tilde{X}^L_{x^1}, \tilde{X}^L_{x^2}] = im\omega_c/\hbar$, es necesaria una deformación del álgebra no extendida: $\left[X^L_t, X^L_{\vec{x}}\right] = \omega_c \hat{\mathrm{J}} \cdot X^L_{\vec{x}}$. Llegamos entonces a la siguiente álgebra de Lie como la simetría cuántica del sistema:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_{\vec{x}}\right] &= \omega_c \hat{\mathrm{J}} \cdot \tilde{X}^L_{\vec{x}} \\
\left[\tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_{\vec{p}}\right] &= -\frac{1}{m}\tilde{X}^L_{\vec{x}} \\
\left[\tilde{X}^L_{x^i}, \tilde{X}^L_{p^j}\right] &= \frac{\delta_{ij}}{\hbar}\Xi \\
\left[\tilde{X}^L_{x^i}, \tilde{X}^L_{x^j}\right] &= \frac{m\omega_c}{\hbar}\epsilon_{ij}\Xi
\end{aligned} \tag{9.53}$$

Una ley de grupo para este álgebra de Lie extendida es:

$$\begin{aligned}
t'' &= t' + t \\
\vec{x}'' &= \vec{x} + \hat{\mathrm{M}}^{-1}(t) \cdot \vec{x}\,' + \frac{1}{m\omega_c}\left(\hat{\mathrm{N}}^{-1}(t) + \hat{\mathrm{J}}\right) \cdot \vec{p}\,' \\
\vec{p}\,'' &= \vec{p}\,' + \vec{p} \\
\zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{\hbar}\xi(g',g)}
\end{aligned} \tag{9.54}$$

donde el cociclo viene dado por:

$$\xi(g',g) = \frac{1}{2}\left\{m\omega_c \vec{x}\,' \cdot \hat{\mathrm{N}}(t) \cdot \vec{x} - \vec{p}\,' \cdot \hat{\mathrm{M}}(t) \cdot \vec{x} + \vec{x}\,' \cdot \hat{\mathrm{M}}(t) \cdot \vec{p} + \frac{1}{m\omega_c}\vec{p}\,' \cdot \left(\hat{\mathrm{N}}(t) - \hat{\mathrm{J}}\right) \cdot \vec{p}\right\} \tag{9.55}$$

Las matrices 2×2 vienen dadas por $\hat{\mathrm{M}}(t) \equiv \cos\omega_c t\, \hat{\mathrm{I}} - \sin\omega_c t\, \hat{\mathrm{J}}$, $\hat{\mathrm{N}}(t) \equiv \sin\omega_c t\, \hat{\mathrm{I}} + \cos\omega_c t\, \hat{\mathrm{J}}$, donde $\hat{\mathrm{M}}(t)$ y $\hat{\mathrm{N}}(t)$ son matrices ortogonales, y $\hat{\mathrm{J}}_{ij} \equiv \epsilon_{ij}$, $\epsilon_{12} = 1$. No hemos tenido en cuenta las rotaciones, pues éstas no juegan ningún papel dinámico, aunque tienen interés en que, cuando consideramos el sistema en el toro, representan un ejemplo simple de una simetría local que no puede ser realizada globalmente.

Los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha pueden ser obtenidos de forma simple a partir de la ley de grupo:

$$\tilde{X}^L_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \omega_c \vec{x} \cdot \hat{\mathrm{J}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \quad .$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^L_{\vec{x}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} - \frac{1}{2\hbar}\left[\vec{p} + m\omega_c \hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{x}\right]\Xi \\
\tilde{X}^L_{\vec{p}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \frac{\vec{x}}{2\hbar}\Xi \\
\tilde{X}^L_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi
\end{aligned} \tag{9.56}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_{t} &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}^R_{\vec{x}} &= \hat{\mathrm{M}}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{1}{2\hbar}\left[\hat{\mathrm{M}}(t)\cdot\vec{p} + m\omega_c\hat{\mathrm{N}}(t)\cdot\vec{x}\right]\Xi \\
\tilde{X}^R_{\vec{p}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \frac{1}{m\omega_c}\left(\hat{\mathrm{N}}(t) - \hat{\mathrm{J}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{x}} - \frac{1}{2\hbar}\left[\hat{\mathrm{M}}(t)\cdot\vec{x} - \frac{1}{m\omega_c}\left(\hat{\mathrm{N}}(t) - \hat{\mathrm{J}}\right)\cdot\vec{p}\right]\Xi \\
\tilde{X}^R_{\zeta} &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \equiv \Xi
\end{aligned} \tag{9.57}$$

A partir de (9.56) se calcula la 1-form de cuantización:

$$\Theta = \frac{1}{2}\left[\vec{p}\cdot d\vec{x} - \vec{x}\cdot d\vec{p} - m\omega_c\vec{x}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot d\vec{x}\right] - \left[\frac{p^2}{2m} + \omega_c\vec{p}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{x} + \frac{m\omega_c^2}{2}\vec{x}^2\right]dt + \hbar\frac{d\zeta}{i\zeta} \tag{9.58}$$

cuyo módulo característico es $\mathcal{G}_\Theta =< \tilde{X}^L_t >$. A partir de éste podemos obtener las ecuaciones clásicas de movimiento:

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \vec{P} \\
\vec{x} &= \hat{\mathrm{M}}^{-1}(t)\cdot\vec{r}_0 + \frac{1}{m\omega_c}\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{P}
\end{aligned} \tag{9.59}$$

donde $\vec{P}$ y $\vec{r}_0$ son vectores constantes arbitrarios, que parametrizan la variedad clásica de soluciones. Con ayuda de la constante ω_c, podemos introducir el vector $\vec{R} \equiv \frac{1}{m\omega_c}\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{P}$, mediante el que podemos reescribir la segunda de las ecuaciones de arriba como $\vec{x} = \hat{\mathrm{M}}^{-1}(t)\cdot\vec{r}_0 + \vec{R}$, es decir, las trayectorias clásicas son circunferencias centradas en $\vec{R}$, con radio $|\vec{r}_0|$.

Los invariantes Noether de la teoría, en términos de las constantes $\vec{r}_0$ y $\vec{R}$, son:

$$\begin{aligned}
i_{\tilde{X}^R_t}\Theta &= \frac{m\omega_c^2}{2}{\vec{r}_0}^2 \equiv H \\
i_{\tilde{X}^R_{\vec{x}}}\Theta &= m\omega_c\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{r}_0 \\
i_{\tilde{X}^R_{\vec{p}}}\Theta &= -(\vec{r}_0 + \vec{R}) \equiv x^0
\end{aligned} \tag{9.60}$$

donde H es la energía clásica del sistema. Nótese que la energía depende sólo del radio $|\vec{r}_0|$ de la circunferencia, y no de la posición $\vec{R}$ de su centro, como corresponde a un sistema con invariancia translacional[8].

Para obtener la representación en el espacio de configuración hemos de imponer condiciones de polarización similares a las de la particula libre galileana:

$$\mathcal{P}^{HO} =< \tilde{X}^L_{\vec{p}}, \tilde{X}^L_t - \frac{i\hbar}{2m}\left(\tilde{X}^L_{\vec{x}}\right)^2 > \tag{9.61}$$

Si resolvemos las ecuaciones de polarización obtenemos la siguiente forma general para las funciones de onda:

$$\Psi = \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}}\Phi(\vec{x},t) \tag{9.62}$$

donde $\Phi(\vec{x},t)$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + i\hbar\frac{\omega_c}{2}\vec{x}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{\nabla} + \frac{m\omega_c^2}{8}\vec{x}^2\right\}\Phi \tag{9.63}$$

Los operadores cuánticos son:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}}\Psi &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + i\hbar\frac{\omega_c}{2}\vec{x}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{\nabla} + \frac{m\omega_c^2}{8}\vec{x}^2\right]\Phi(\vec{x},t)\\
\hat{\vec{\mathrm{P}}}\Psi &= \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\left[-i\hbar\hat{\mathrm{M}}(t)\cdot\vec{\nabla} + \frac{m\omega_c}{2}\hat{\mathrm{N}}(t)\cdot\vec{x}\right]\Phi(\vec{x},t)\\
\hat{\vec{\mathrm{X}}}\Psi &= \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{M}}(t)+\hat{\mathrm{I}}\right)\cdot\vec{x} + \frac{i\hbar}{m\omega_c}\left(\hat{\mathrm{N}}(t)-\hat{\mathrm{J}}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\Phi(\vec{x},t)
\end{aligned} \tag{9.64}$$

Antes de seguir adelante y resolver la ecuación de Schrödinger, haremos un cambio de variables que nos aclarará el significado de las diferentes magnitudes de la teoría, y que facilitará la aplicación de la CA en la próxima sección. Si definimos la variable $\vec{r} \equiv \hat{\mathrm{M}}^{-1}(t)\cdot\vec{r}_0$, podemos reescribir la ley de grupo (9.54) y (9.55) de manera sencilla en términos de $\vec{r}$ y $\vec{R}$:

$$\begin{aligned}
t'' &= t' + t\\
\vec{r}\,'' &= \vec{r} + \hat{\mathrm{M}}^{-1}(t)\cdot\vec{r}\,'\\
\vec{R}'' &= \vec{R}' + \vec{R}\\
\zeta'' &= \zeta'\zeta e^{\frac{i}{\hbar}m\omega_c\left[\frac{1}{2}\vec{r}\,'\cdot\hat{\mathrm{N}}(t)\cdot\vec{r} - \left((1+\lambda)R'_1R_2 - \lambda R'_2R_1\right)\right]}
\end{aligned} \tag{9.65}$$

[8]El sistema posee invariancia translacional en el sentido convencional (ya que el campo magnético es homogéneo) aunque el generador de las traslaciones $\tilde{X}^R_{\vec{x}}$ no conmuta con el hamiltoniano $\tilde{X}^R_t$. De hecho, como veremos más tarde, existe un generador de traslaciones dentro del propio álgebra de Lie (el generador de las traslaciones magnéticas) que conmuta con el hamiltoniano.

donde hemos añadido el coborde generado por $-m\omega_c(\frac{1}{2}+\lambda)R_1 R_2$ para acomodar el cociclo, en la parte dependiente de $\vec{R}$, al que usamos cuando estudiamos el grupo de H-W sobre el toro (excepto en un signo menos global).
A partir de la nueva ley de grupo reobtenemos los campos de vectores invariantes por la iquierda y derecha en las nuevas coordenadas:

$$\begin{array}{lcllcl}
\tilde{X}^L_t & = & \frac{\partial}{\partial t} - \omega_c \vec{r}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}} & \tilde{X}^R_t & = & \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}^L_{\vec{r}} & = & \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{m\omega_c}{2\hbar}\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{r}\,\Xi & \tilde{X}^R_{\vec{r}} & = & \hat{\mathrm{M}}(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{m\omega_c}{2\hbar}\hat{\mathrm{N}}(t)\cdot\vec{r}\,\Xi \\
\tilde{X}^L_{R_1} & = & \frac{\partial}{\partial R_1} - \frac{\lambda}{\hbar}m\omega_c R_2\,\Xi & \tilde{X}^R_{R_1} & = & \frac{\partial}{\partial R_1} - \frac{1+\lambda}{\hbar}m\omega_c R_2\,\Xi \\
\tilde{X}^L_{R_2} & = & \frac{\partial}{\partial R_2} - \frac{1+\lambda}{\hbar}m\omega_c R_1\,\Xi & \tilde{X}^R_{R_2} & = & \frac{\partial}{\partial R_2} - \frac{\lambda}{\hbar}m\omega_c R_1\,\Xi \\
\tilde{X}^L_{\zeta} & = & i\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\equiv\Xi & \tilde{X}^R_{\zeta} & = & i\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\equiv\Xi
\end{array} \tag{9.66}$$

y las relaciones de conmutación son ahora:

$$\begin{array}{rcl}
\left[\tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_{\vec{r}}\right] & = & \omega_c\hat{\mathrm{J}}\cdot\tilde{X}^L_{\vec{r}} \\
\left[\tilde{X}^L_t, \tilde{X}^L_{\vec{R}}\right] & = & 0 \\
\left[\tilde{X}^L_{r^i}, \tilde{X}^L_{r^j}\right] & = & \frac{m\omega_c}{\hbar}\epsilon_{ij}\Xi \\
\left[\tilde{X}^L_{R^i}, \tilde{X}^L_{R^j}\right] & = & -\frac{m\omega_c}{\hbar}\epsilon_{ij}\Xi \\
\left[\tilde{X}^L_{\vec{r}}, \tilde{X}^L_{\vec{R}}\right] & = & 0
\end{array} \tag{9.67}$$

Un vistazo al álgebra (9.67) nos revela que se trata de una extensión central de la suma directa del álgebra del oscilador armónico (no extendida) y el álgebra de Heisenberg-Weyl (no extendida). Como consecuencia, podemos anticipar que la función de onda consistirá en una función de onda del oscilador armónico (dependiendo de t y $\vec{r}$) por una función de $\vec{R}$, y el espectro de energía coincide con el del oscilador armónico, aunque la degeneración de cada nivel de energía es infinita debida a la simetría del grupo de H-W, que tiene sólo representaciones unitarias de dimensión infinita (en el plano).

Como estamos interesados en la representación en el espacio de configuración, necesitamos una polarización de segundo orden. Ésta es:

$$\mathcal{P}^{HO} = < \tilde{X}^L_p, \tilde{X}^L_t - \frac{i\hbar}{2m}\left(\tilde{X}^L_{\vec{r}}\right)^2, \vec{n}\cdot\tilde{X}^L_{\vec{R}}, \vec{n}'\cdot\tilde{X}^L_{\vec{r}} > \tag{9.68}$$

donde $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ son vectores unitarios arbitrarios.

Si imponemos estas condiciones de polarización a la función de onda obtenemos la expresión general:

$$\Psi = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}m\omega[(\lambda n_1^2-(1+\lambda)n_2^2)y_1y_2+(\lambda+\frac{1}{2})n_1n_2y_1^2]}\Phi(y_2)e^{\frac{im\omega_c}{2\hbar}\kappa_2\kappa_1}\Omega(\kappa_2,t) \tag{9.69}$$

donde $y_1 \equiv \vec{n}\cdot\vec{R}$, $y_2 \equiv \vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{R}$, $\kappa_1 \equiv \vec{n}'\cdot\vec{r}$, $\kappa_2 \equiv \vec{n}'\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{r}$, $\Phi(y_2)$ es una función arbitraria y $\Theta(\kappa_2, t)$ satisface la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Omega(\kappa_2,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2_{\kappa_2} + \frac{m\omega_c^2}{2}\kappa_2^2\right]\Omega(\kappa_2,t) \tag{9.70}$$

Esta no es otra que la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico, por lo que las soluciones son:

$$\Omega(\kappa_2,t) = \sum_n A_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_c t} e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}\kappa_2^2} H_n(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}\kappa_2) \tag{9.71}$$

donde H_n son los polinomios de Hermite.

Como las funciones de onda factorizan, los operadores $\tilde{X}^R_{\vec{R}}$ actuarán sólo sobre el factor dependiente de $\vec{R}$, adquiriendo las mismas expresiones que en (9.17) (cambiando $\vec{x}$ por $\vec{R}$), y los operadores $\tilde{X}^R_{\vec{x}}$ actuarán sobre el factor dependiente de $\vec{r}$ y t, con las expresiones:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_{\kappa_1} \equiv \vec{n}\cdot\tilde{X}^R_{\vec{r}}\Omega(\kappa_2,t) &= \left[-\sin\omega_c t\frac{\partial}{\partial\kappa_2} + \frac{i}{\hbar}m\omega_c\kappa_2\cos\omega_c t\right]\Omega(\kappa_2,t)\\
\tilde{X}^R_{\kappa_2} \equiv \vec{n}\cdot\hat{\mathrm{J}}\cdot\tilde{X}^R_{\vec{r}}\Omega(\kappa_2,t) &= \left[\cos\omega_c t\frac{\partial}{\partial\kappa_2} + \frac{i}{\hbar}m\omega_c\kappa_2\sin\omega_c t\right]\Omega(\kappa_2,t)
\end{aligned} \tag{9.72}$$

una vez que los factores exponenciales (irrelevantes) de la funciones de onda han sido factorizados:

Usando la transformación dual a la que lleva $(\vec{x},\vec{p})$ a $(\vec{r},\vec{R})$, obtenemos la expresión de los operadores $\hat{\vec{\mathrm{X}}}$ y $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ en términos de $\tilde{X}^R_{\vec{r}}$ y $\tilde{X}^R_{\vec{R}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{\mathrm{P}}} \equiv \tilde{X}^R_{\vec{x}} &= \tilde{X}^R_{\vec{r}}\\
-\frac{i}{\hbar}\hat{\vec{\mathrm{X}}} \equiv \tilde{X}^R_{\vec{p}} &= \frac{1}{m\omega_c}\hat{\mathrm{J}}\cdot\left(\tilde{X}^R_{\vec{r}} - \tilde{X}^R_{\vec{R}}\right)
\end{aligned} \tag{9.73}$$

Además, denotaremos por $\hat{\vec{\mathrm{T}}}$ el operador $-i\hbar\tilde{X}^R_{\vec{R}} = \hat{\vec{\mathrm{P}}} - m\omega_c\hat{\mathrm{J}}\cdot\hat{\vec{\mathrm{X}}}$. Puede deducirse de forma sencilla que $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ tiene el significado físico de momento lineal (masa por velocidad), al que llamaremos simplemente momento, mientras que $\hat{\vec{\mathrm{T}}}$, que también es un operador momento, conmuta con el hamiltoniano y se suele denominar traslación magnética, y está asociado con las coordenadas $\vec{R}$ del centro de las circunferencias (trayectorias clásicas). Todavía podemos definir otro operador momento en la teoría, el momento canónico, como $\hat{\vec{\Pi}} \equiv -\frac{i\hbar}{2}\left(\tilde{X}^R_{\vec{r}} + \tilde{X}^R_{\vec{R}}\right)$, que posee la particularidad de que sus componentes conmutan entre si, y, como se puede comprobar, es *el generador de traslaciones*, ya que se escribe (para $t=0$) como $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$ actuando sobre $\Phi(x,t)$ en (9.62). Su expresión explícita y la de $\hat{\vec{\mathrm{T}}}$ sobre

$\Phi(x,t)$ son:

$$\begin{aligned}\hat{\vec{\Pi}}\Psi &= \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\left[-\frac{i\hbar}{2}\left(\hat{\mathrm{M}}(t)+\hat{\mathrm{I}}\right)\cdot\vec{\nabla}+\frac{m\omega_c}{4}\left(\hat{\mathrm{N}}(t)-\hat{\mathrm{J}}\right)\cdot\vec{x}\right]\Phi(\vec{x},t)\\ \hat{\vec{\mathrm{T}}}\Psi &= \zeta e^{-\frac{i}{2\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\left[-i\hbar\vec{\nabla}-\frac{m\omega_c}{2}\hat{\mathrm{J}}\cdot\vec{x}\right]\Phi(\vec{x},t)\end{aligned} \tag{9.74}$$

El papel jugado por los diferentes *momentos* puede ser clarificado mediante la introducción del operador *potencial vector* de la forma usual, $\hat{\vec{\mathrm{A}}}\equiv-\frac{m\omega_c}{2}\hat{\mathrm{J}}\cdot\hat{\vec{\mathrm{X}}}=\frac{i\hbar}{2}\left(\tilde{X}^R_{\vec{r}}-\tilde{X}^R_{\vec{R}}\right)$. De este modo, el operador momento canónico se escribe $\hat{\vec{\Pi}}=\hat{\vec{\mathrm{P}}}+\hat{\vec{\mathrm{A}}}$, y $\hat{\vec{\mathrm{T}}}=\hat{\vec{\mathrm{P}}}+2\hat{\vec{\mathrm{A}}}=\hat{\vec{\Pi}}+\hat{\vec{\mathrm{A}}}$. También es fácil verificar que $\hat{\mathrm{E}}=\frac{1}{2m}\hat{\vec{\mathrm{P}}}^2=\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{\Pi}}-\hat{\vec{\mathrm{A}}}\right)^2=\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{\mathrm{T}}}-2\hat{\vec{\mathrm{A}}}\right)^2$.

9.5.2 Partícula cargada en un campo mágnetico homogéneo sobre el toro

Antes de imponer las condiciones periódicas de contorno (a través de la condición de T-función) que nos lleve las funciones de onda al toro, primero hemos de determinar cómo estas condiciones de contorno afectan a cada una de las coordenadas. Claramente, $\vec{x}$ será afectada por las condiciones de contorno, pero no está claro que pasa con $\vec{p}$. Para aclarar la situación, vayámonos a las coordenadas $\vec{r}$ y $\vec{R}$, donde $\vec{R}$ es la posición (absoluta) del centro de las trayectorias (circunferencias) clásicas, y $\vec{r}$ es la posición (relativa) de la partícula respecto al centro de la circunferencia, es decir, $\vec{r}=\vec{x}-\vec{R}$. Por tanto, $\vec{R}$ estará sujeta a condiciones periódicas de contorno (las mismas que $\vec{x}$), mientras que $\vec{r}$ no lo estará, por ser una coordenada relativa. Además, como la energía clásica H es función de ${\vec{r}_0}^2={\vec{r}}^{\,2}$, condiciones periódicas sobre $\vec{r}$ implicaría una cota superior al espectro de energías, peor aún, un espectro de energías periódico, lo cual no tiene ningún sentido. Esto hace las coordenadas $\vec{r}$ y $\vec{R}$ más apropiadas para describir el sistema con condiciones periódicas de contorno (es decir, en el toro). Ahora ya estamos en condicines de aplicar los resultados obtenidos para el grupo de H-W en el toro, una vez que hemos reducido del problema (grosso modo) al estudio de un oscilador armónico por un grupo H-W en el toro, este último parametrizado por $\vec{R}$.

En lo que se refiere al grupo de H-W sobre el toro, aplicamos directamente los resultados obtenidos anteriormente. Podemos considerar también los casos *i)* y *ii)*, correspondientes a subgrupo estructural T con fibración por $U(1)$ trivial o no trivial, respectivamente.

Consideremos en primer lugar el caso *i)*, que es el más simple. La condición de integralidad se escribe:

$$\frac{m\omega_c L_1 L_2}{2\pi\hbar}=n\in Z \tag{9.75}$$

lo que implica, como ya habiamos anticipado, que el flujo magnético a través de la superficie del toro está cuantizado, de la misma manera que en el caso del monopolo de

Dirac, en el que la cuantización del flujo implica a su vez la cuantización de la carga del monopolo magnético. Por el mismo motivo, si en el caso del toro este flujo magnético fuese creado por un monopolo magnético, obtendríamos de nuevo la cuantización de su carga. Este tipo de condiciones de cuantización son las que garantizan, por ejemplo, la integralidad de la forma simpléctica en Cuantización Geometríca o que los *Wilson loops* sean variables univaluadas en las Teorías Gauge [Man 85].

La función de onda resulta ser la dada en (9.69), donde $\Phi(y_2)$ está sujeta a las mismas restricciones que en el caso de H-W sobre el toro, por lo que llegamos a la expresión (para $\vec{n} = (1,0)$):

$$\Phi^{\vec{\alpha}}(R_2) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Lambda_k^{\vec{\alpha}}(R_2) \tag{9.76}$$

donde $\vec{\alpha}$ se define como en aquel caso. La función de onda es distribucional con soporte en $R_2 = \alpha_2 + \frac{k}{n}L_2$, $k \in Z$ ($R_1 = \alpha_2 + \frac{k}{n}L_1$, $k \in Z$ para $\vec{n} = (0,1)$).

El subgroupo $G_{\mathcal{H}}$ de operadores buenos es el subgrupo de $\tilde{G}$ en el que los parametros $\vec{R}$ están restringidos a ser $\vec{R} = \frac{1}{n}\vec{L}_{\vec{k}}$. Los operadores cuánticos $\hat{\mathrm{E}}$ y $\tilde{X}^R_{\vec{r}}$ son operadores buenos, ya que la parte de oscilador armónico no está sujeta a ligaduras, mientras que el operador $\tilde{X}^R_{\vec{R}}$ es un operador malo.

Si analizamos estos resultados en términos de los operadores $\hat{\vec{\mathrm{X}}}$, $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$, $\hat{\vec{\mathrm{T}}}$ y $\hat{\vec{\Pi}}$ por medio de las expresiones dadas en la sección anterior, concluimos que el operador $\vec{\mathrm{P}}$ es un operador bueno, mientras que $\hat{\vec{\mathrm{X}}}$, $\hat{\vec{\mathrm{T}}}$ y $\hat{\vec{\Pi}}$ no lo son. Como consecuencia, el momento (o velocidad) da la partícula es una cantidad medible, pero la posición, el momento canónico y las traslaciones magnéticas no son observables. El potencial vector es, por tanto, un operador malo (y no es un observable), lo que provoca que, para este sistema, las magnitudes que dependan del gauge no sean buenos observales, mientras que las que sean invariantes gauge sí lo sean, como le ocurre a la velocidad de la partícula. Para todos los operadores malos, se pueden obtener sus corrspondientes transformaciones finitas (lo equivalente al operador finito $\hat{\eta}$), que serán operadores buenos.

Para el caso *ii*), sólo el caso fraccionario *a*) tiene sentido físico. Ahora la función de onda estaría definida sobre un toro r veces más grande en una dirección [NTW 85], o, lo que viene a ser lo mismo, es una función multivaluada (con r componentes). En la terminología del Efecto Hall Cuántico Fraccionario se dice que la función de onda del centro de masas correspondiente al vacío es degenerada, siendo la degeneración igual a r. En este caso, la conductividad Hall está asociada con el cociente $\frac{n}{r}$ de la clase de Chern del *fibrado determinante* asociado por el rango del fibrado vectorial [Var 94]. Este resultado da soporte a la idea de que el Efecto Hall Cuántico Fraccionario está siempre asociado con funciones de onda multivaluadas, es decir, con vacíos degenerados.

Capítulo 10

ANOMALÍAS ALGEBRAICAS: GRUPO DE SCHRÖDINGER

Aunque ya ha sido estudiado en [ABLN 92], en este capítulo vamos a hacer un estudio detallado del grupo de Schrödinger, dando las funciones de onda y encontrando los valores correctos de la anomalía, así como su relación con aplicaciones físicas en Óptica Cuántica, y su relación con los teoremas *no go* en cuantización estándar.

El grupo de Schrödinger es el máximo grupo de simetrías para la ecuación de Schrödinger con potencial a lo sumo cuadrático en las coordenadas. Matemáticamente lo podemos obtener a partir del grupo del oscilador armónico (o del grupo de Galileo) substituyendo el subgrupo uniparamétrico del tiempo por un grupo $SL(2,R)$.

Este grupo admite dos representaciones (cuantizaciones) no equivalentes, dependiendo de cuál sea el hamiltoniano que elijamos. Si elejimos el hamiltoniano de la partícula libre, obtenemos una representación con soporte en las funciones de onda de Galileo, mientras que si elejimos como hamiltoniano el del oscilador armónico obtenemos una representación con vacío con soporte en las funciones de onda del oscilador armónico. Ambas representaciones fueron dadas en [ABLN 92], de manera que aquí nos limitaremos a estudiar, de manera más detallada, la segunda representación (la de vacío).

La ley de grupo para el grupo de Schrödinger en las coordenadas adecuadas para obtener la representación de vacío es (véase [ABLN 92], aunque hemos redefinido los parámetros, para obtener resultados acordes con la notación estándar):

$$\begin{aligned}
\eta'' &= \sqrt{\frac{2}{1+\kappa''}}\left[\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\sqrt{\frac{1+\kappa'}{2}}\eta\eta' + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\sqrt{\frac{2}{1+\kappa'}}\frac{z^*z'}{2}\eta^*\eta'\right] \\
z'' &= z'\eta^{*2} + \kappa' z + \frac{z}{1+\kappa}[z^*z'\eta^{*2} + zz^{*\prime}\eta^2] \\
z^{*\prime\prime} &= z^{*\prime}\eta^2 + \kappa' z^* + \frac{z^*}{1+\kappa}[z^*z'\eta^{*2} + zz^{*\prime}\eta^2]
\end{aligned} \tag{10.1}$$

$$
\begin{aligned}
c'' &= c + \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta^* c' + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\frac{z}{\sqrt{2}}\eta c^{*\prime} \\
c^{*\prime\prime} &= c^* + \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta c^{*\prime} + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\frac{z^*}{\sqrt{2}}\eta^* c' \\
\zeta'' &= \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)}(\eta''\eta'^{-1}\eta^{-1})^{-2N}
\end{aligned}
$$

donde $\kappa \equiv \sqrt{1+2zz^*}$ y $\kappa'' = \kappa'\kappa + (z^* z'\eta^{*2} + z^{*\prime} z\eta^2)$. El cociclo $\xi(g', g)$ es:

$$
\xi(g',g) = \frac{i}{2}\left[\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta^* c' c^* - \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta c^{*\prime} c + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\frac{z}{\sqrt{2}}c^{*\prime} c^* - \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}\frac{z^*}{\sqrt{2}}c' c\right] \qquad (10.2)
$$

En esta ley de grupo se puede observar claramente que las tres primeras líneas corresponden a la ley de grupo de $SL(2,R)$ y las dos siguientes a la de un oscilador armónico sobre el que actúa de foma semidirecta $SL(2,R)$. La ley de grupo del $U(1)$ central recibe contribución del cociclo del oscilador (deformado por la acción de $SL(2,R)$) y del pseudocociclo de $SL(2,R)$. Hemos pseudoextendido el subgrupo $SL(2,R)$ para dar cuenta de la anomalía (véase más tarde en este capítulo).

Los campos de vectores invariantes por la izquierda son:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}^L_\eta &= i\eta\frac{\partial}{\partial\eta} - 2iz\frac{\partial}{\partial z} + 2iz^*\frac{\partial}{\partial z^*} - ic\frac{\partial}{\partial c} + ic^*\frac{\partial}{\partial c^*} \\
\tilde{X}^L_z &= \kappa\frac{\partial}{\partial z} + \frac{iz^*}{2(1+\kappa)}(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}) + \frac{c^*}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial c} - \frac{iNz^*}{1+\kappa}\Xi \\
\tilde{X}^L_{z^*} &= \kappa\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{iz}{2(1+\kappa)}(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}) + \frac{c}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial c^*} + \frac{iNz}{1+\kappa}\Xi \qquad (10.3) \\
\tilde{X}^L_c &= \frac{\partial}{\partial c} - \frac{ic^*}{2}\Xi \\
\tilde{X}^L_{c^*} &= \frac{\partial}{\partial c^*} + \frac{ic}{2}\Xi \\
\tilde{X}^L_\zeta &= i\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}
\end{aligned}
$$

y los invariantes por la derecha:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}^R_\eta &= i\eta\frac{\partial}{\partial\eta} \\
\tilde{X}^R_z &= \frac{\eta^{*2}}{1+\kappa}\left[\frac{(1+\kappa)^2}{2}\frac{\partial}{\partial z} + z^{*2}\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{iz^*}{2}(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}) + iNz^*\Xi\right] \\
\tilde{X}^R_{z^*} &= \frac{\eta^2}{1+\kappa}\left[\frac{(1+\kappa)^2}{2}\frac{\partial}{\partial z^*} + z^2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{iz}{2}(i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}) - iNz\Xi\right] \qquad (10.4)
\end{aligned}
$$

$$\tilde{X}^R_c = \eta^* \left[\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \frac{\partial}{\partial c} + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \frac{z^*}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial c^*} - \frac{i}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \frac{z^*}{\sqrt{2}} c - \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} c^* \right) \Xi \right]$$

$$\tilde{X}^R_{c^*} = \eta \left[\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \frac{\partial}{\partial c^*} + \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial c} + \frac{i}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \frac{z}{\sqrt{2}} c^* - \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} c \right) \Xi \right]$$

$$\tilde{X}^R_\zeta = \Xi$$

Los conmutadores (entre los campos invariantes por la izquierda) son:

$$\begin{array}{lll} \left[\tilde{X}^L_\eta, \tilde{X}^L_c\right] = i\tilde{X}^L_c & & \left[\tilde{X}^L_c, \tilde{X}^L_z\right] = 0 \\ \left[\tilde{X}^L_\eta, \tilde{X}^L_{c^*}\right] = -i\tilde{X}^L_{c^*} & & \left[\tilde{X}^L_{c^*}, \tilde{X}^L_{z^*}\right] = 0 \\ \left[\tilde{X}^L_\eta, \tilde{X}^L_z\right] = 2i\tilde{X}^L_z & & \left[\tilde{X}^L_c, \tilde{X}^L_{z^*}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{X}^L_{c^*} \\ \left[\tilde{X}^L_\eta, \tilde{X}^L_{z^*}\right] = -2i\tilde{X}^L_{z^*} & & \left[\tilde{X}^L_{c^*}, \tilde{X}^L_z\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{X}^L_c \\ \left[\tilde{X}^L_c, \tilde{X}^L_{c^*}\right] = i\Xi & & \left[\tilde{X}^L_z, \tilde{X}^L_{z^*}\right] = -\frac{i}{2}\tilde{X}^L_\eta + iN\Xi \end{array} \qquad (10.5)$$

donde puede verse que el efecto de la pseudoextensión de $SL(2,R)$ es un término central proporcional a N en el último conmutador. Veremos más adelante que este término va a desempeñar un papel muy importante en el proceso de la cuantización y dará lugar a la anomalía.

La 1-forma de cuantización, obtenida a partir de los campos invariantes por la izquierda, es:

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{i}{2}(c^* dc - c dc^*) - i \left[\frac{(1+\kappa)c^{*2}}{4\sqrt{2}\kappa} - \frac{z^* c c^*}{2(1+\kappa)} + \frac{z^{*2} c^2}{2\sqrt{2}\kappa(1+\kappa)} - \frac{N z^*}{1+\kappa} \right] dz \\ & + i \left[\frac{(1+\kappa)c^2}{4\sqrt{2}\kappa} - \frac{z c c^*}{2(1+\kappa)} + \frac{z^2 c^{*2}}{2\sqrt{2}\kappa(1+\kappa)} - \frac{N z}{1+\kappa} \right] dz^* \\ & - \left[\kappa c c^* - \frac{i}{\sqrt{2}}(z^* c^2 + z c^{*2}) + 2N(\kappa - 1) \right] \frac{d\eta}{i\eta} + \frac{d\zeta}{i\zeta} \end{aligned} \qquad (10.6)$$

La teoría clásica del sistema vendría dada por los invariantes Noether, que se definen como $F_i \equiv i_{\tilde{X}^R_i}\Theta$:

$$\begin{aligned} F_\eta &= -\kappa c c^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(z^* c^2 + z c^{*2}) - 2N(\kappa - 1) \\ F_c &= -i\eta^* \left[\sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \frac{z^* c}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} c^* \right] \\ F_{c^*} &= i\eta \left[\sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} \frac{z c^*}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} c \right] \quad . \end{aligned} \qquad (10.7)$$

$$
\begin{aligned}
F_z &= i\eta^{*2}\left[-\frac{(1+\kappa)c^{*2}}{4\sqrt{2}} - \frac{z^{*2}c^2}{2\sqrt{2}(1+\kappa)} + \frac{z^*cc^*}{2} + Nz^*\right] \\
F_{z^*} &= -i\eta^2\left[-\frac{(1+\kappa)c^2}{4\sqrt{2}} - \frac{z^2c^{*2}}{2\sqrt{2}(1+\kappa)} + \frac{zcc^*}{2} + Nz\right]
\end{aligned}
$$

Con un poco de cálculo, se puede comprobar que existe una relación entre invariantes Noether que nos permitiría expresar F_η en función de los demás:

$$
F_\eta^2 - 4NF_\eta + 2F_\eta F_c F_{c^*} - 4NF_c F_{c^*} - 8F_z F_{z^*} - \frac{4i}{\sqrt{2}}(F_z F_{c^*}^2 - F_{z^*}F_c^2) = 0 \qquad (10.8)
$$

por lo que la variedad de soluciones clásica tendría dimensión 4. También se puede comprobar que para $N = 0$ los invariantes Noether asociados a los parámetros de $SL(2,R)$ se pueden expresar en términos de los del oscilador armónico F_c y F_{c^*} como:

$$
\begin{aligned}
F_\eta &= -F_c F_{c^*} \\
F_z &= \frac{i}{2\sqrt{2}}F_c^2 \\
F_{z^*} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}F_{c^*}^2
\end{aligned} \qquad (10.9)
$$

de donde se deduce que para $N = 0$ la variedad de soluciones clásica tiene dimensión 2, como era de esperar. Es decir, el subgrupo $SL(2,R)$ no tiene dinámica para $N = 0$; juega el papel de "tiempo".

El módulo característico (generado por el núcleo del cociclo del álgebra de Lie) es el generado por $< \tilde{X}_\eta^L >$. Para $N = 0$ incluye todos los generadores de $SL(2,R)$, tal y como ocurre en la teoría clásica, es decir, para $N = 0$ la variedad de soluciones clásica tiene dimensión 2, mientras que para $N \neq 0$ tiene dimensión 4. Más adelante veremos que, en la versión cuántica, no es para $N = 0$ sino para $N = \frac{1}{4}$ cuando los generadores de $SL(2,R)$ se escriben en función de los generadores del oscilador armónico (operadores básicos). Esto es lo que se denomina una anomalía, ya que los valores clásico y cuántico de los parámetros que caracterizan la representación no coinciden, además de otras propiedades que veremos a lo largo de este capítulo.

Existe una polarización para el sistema (y su dual, al igual que ocurre para el oscilador armónico y para $SL(2,R)$, pero conduce a una representación tipo mar de Dirac con funciones de onda no normalizables):

$$
\mathcal{P} =< \tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_c^L, \tilde{X}_z^L > \qquad (10.10)
$$

Aquí nos encontramos con el primer síntoma de anomalía, pues aunque para $N \neq 0$ la polarización es completa, para $N = 0$ ésta no incluye todo el módulo característico, ya que la actuación de los generadores $\tilde{X}_z^L$ y $\tilde{X}_{z^*}^L$ no es diagonal (ni diagonalizable) sobre los generadores del oscilador armónico. Se tiene por tanto que para $N = 0$, valor para el

cual la variedad de soluciones clásicas tiene dimensión 2 (sólo dos funciones son básicas), cuánticamente existen 4 operadores básicos.

Las soluciones a esta polarización son de la forma:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} B_{nm} \Psi_m^{(n)} \tag{10.11}$$

con $\Psi_m^{(n)}$ de la forma:

$$\Psi_m^{(n)} = e^{-cc^*/2} e^{\frac{(\kappa-1)c^{*2}}{2\sqrt{2}z^*}} (1+\kappa)^{-N} \eta^{-n} (1+\kappa)^{-n/2} (z^*)^{\frac{n-m}{2}} c^{*m} \tag{10.12}$$

Obsérvese que debido al factor $(z^*)^{\frac{n-m}{2}}$, n y m deben tener la misma paridad, ya que de lo contrario la función de onda no sería analítica.

Es fácil ver que los operadores cuánticos (los campos invariantes por la derecha) actúan de la siguiente forma sobre las funciones de onda:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{E}}\Psi_m^{(n)} &\equiv i\tilde{X}_\eta^R \Psi_m^{(n)} = n\Psi_m^{(n)} \\
\hat{\mathrm{C}}^\dagger \Psi_m^{(n)} &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{X}_c^R \Psi_m^{(n)} = \Psi_{m+1}^{(n+1)} - \frac{m}{\sqrt{2}} \Psi_{m-1}^{(n+1)} \\
\hat{\mathrm{C}}\Psi_m^{(n)} &\equiv \sqrt{2}\tilde{X}_{c^*}^R \Psi_m^{(n)} = m\Psi_{m-1}^{(n-1)} \\
\hat{\mathrm{Z}}^\dagger \Psi_m^{(n)} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{X}_z^R \Psi_m^{(n)} = \frac{1}{2}\Psi_{m+2}^{(n+2)} - \frac{4N+n+m}{2\sqrt{2}} \Psi_m^{(n+2)} \\
\hat{\mathrm{Z}}\Psi_m^{(n)} &\equiv -2\sqrt{2}\tilde{X}_{z^*}^R \Psi_m^{(n)} = -\frac{n-m}{\sqrt{2}} \Psi_m^{(n-2)}
\end{aligned} \tag{10.13}$$

El espacio de Hilbert lo definiremos como el conjunto de funciones $\Psi_m^{(n)}$ con $n-m$ par, es decir, el conjunto de soluciones de las ecuaciones de polarización que son analíticas. La condición de analiticidad es una exigencia usual a la hora de seleccionar las funciones de onda que constituyen la representaciones irreducibles y unitarias de un grupo.

10.1 Órbita sobre el vacío

Otra forma de definir el espacio de Hilbert irreducible en el caso en que el sistema tenga un vacío es a partir de la órbita de todos los operadores derechos sobre el vacío. En primer lugar lo que tenemos que hacer es caracterizar el vacío, el cual lo definimos como el estado que es aniquilado por la versión dual $\mathcal{P}'$ de la polarización (version derecha de $\mathcal{P}$, pero intercambiando los pares coordenada-momento), es decir, por el operador energia $\hat{\mathrm{E}}$ y por los operadores destrucción $\hat{\mathrm{Z}}$ y $\hat{\mathrm{C}}$. Es fácil ver que el vacío resulta ser el estado $\Psi_0^{(0)}$, por lo que si calculamos la acción de los operadores creación sobre este estado obtenemos, para el operador $\hat{\mathrm{C}}^\dagger$ en primer lugar:

$$\Phi_n \equiv (\hat{\mathrm{C}}^\dagger)^n \Psi_0^{(0)} = \sum_{m=0}^{n} A_{n,m} \Psi_m^{(n)} \tag{10.14}$$

donde los coeficientes $A_{n,m}$ valen:

$$A_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad n - m \neq \text{par} \\ \frac{(-1)^{(n-m)/2} n!}{(n-m)(\frac{n-m}{2}-1)! m! 2^{\frac{3}{4}(n-m)-1}} & \text{si} \quad n - m = \text{par} \ (\neq 0) \end{cases} \tag{10.15}$$

Nótese que $A_{n,m} = 0$ si $n-m$ es impar, por lo que los estados Φ_n son todos analitícos, como era de esperar.

La acción del operador destrucción sobre estos estados es $\hat{\mathrm{C}}\Phi_n = n\Phi_{n-1}$, por lo que la órbita sobre el vacio del subálgebra de operadores del oscilador armónico es efectivamente el espacio de Fock del oscilador armónico, ya que el operador energía es diagonal, $\hat{\mathrm{E}}\Phi_n = n\Phi_n$ y el operador creación es $\hat{\mathrm{C}}^\dagger \Phi_n = \Phi_{n+1}$.

Hemos de ver qué ocurre con los generadores de $SL(2,R)$, es decir, cuál es la órbita sobre el vacío de estos operadores, y no sólo sobre el vacío sino también sobre los estados del oscilador armónico Φ_n (hay que calcular la envolvente del álgebra derecha). La órbita sobre el vacío del operador $\hat{\mathrm{Z}}^\dagger$ es:

$$\tilde{\Phi}_{2n} \equiv 2^n (\hat{\mathrm{Z}}^\dagger)^n \Psi_0^{(0)} = \sum_{m=0}^{2n} A_{2n,m}^{(N)} \Psi_m^{(2n)} \tag{10.16}$$

donde los primeros coeficientes son

$$\begin{aligned} A_{2,2}^{(N)} &= 1, \ A_{2,0}^{(N)} = -2\sqrt{2}N \\ A_{4,4}^{(N)} &= 1, \ A_{4,2}^{(N)} = -2\sqrt{2}(2N+1), \ A_{4,0}^{(N)} = 4N(2N+1) \\ &\ldots \end{aligned} \tag{10.17}$$

Obsérvese que aquí también los estados $\tilde{\Phi}_{2n}$ son todos analíticos, por lo que el espacio de Hilbert total está constituido por funciones analíticas. Se puede comprobar, para estos primeros términos, y se podría hacer en general, que $A_{2n,m}^{(N)} = A_{2n,m} + (N - \frac{1}{4}) R(N, 2n, m)$, y lo mismo es válido para los de n impar, es decir, $A_{2n+1,m}^{(N)} = A_{2n+1,m} + (N - \frac{1}{4}) R(N, 2n+1, m)$ (los estados impares $\tilde{\Phi}_{2n+1}$ se obtienen haciendo actuar el operador $\hat{\mathrm{Z}}^\dagger$ sobre el estado $\Phi_1 = \Psi_1^{(1)}$) con lo que para $N \neq \frac{1}{4}$, el espacio de Hilbert contiene más estados que los del oscilador armónico, de hecho, contendrá todas las soluciones (10.12) que sean analíticas.

Sin embargo, para $N = \frac{1}{4}$, el espacio de Hilbert obtenido mediante la actuación de todo el álgebra envolvente derecha sobre el vacío es tan sólo el constituido por los estados del oscilador armónico Φ_n, ya que $\tilde{\Phi}_n = \Phi_n$. Además, sobre este espacio de Hilbert los operadores de $SL(2,R)$ se escriben en términos de los del oscilador armónico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{E}} &= \hat{\mathrm{C}}^\dagger \hat{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathrm{Z}} &= \frac{1}{2}(\hat{\mathrm{C}})^2 \\ \hat{\mathrm{Z}}^\dagger &= \frac{1}{2}(\hat{\mathrm{C}}^\dagger)^2 \end{aligned} \tag{10.18}$$

El álgebra de Lie que nos queda para los operadores es el siguiente:

$$\begin{array}{lllllll}
\left[\hat{\mathrm{E}},\hat{\mathrm{C}}^{\dagger}\right] & = & \hat{\mathrm{C}}^{\dagger} & \left[\hat{\mathrm{C}},\hat{\mathrm{Z}}\right] & = & 0 \\
\left[\hat{\mathrm{E}},\hat{\mathrm{C}}\right] & = & -\hat{\mathrm{C}} & \left[\hat{\mathrm{C}}^{\dagger},\hat{\mathrm{Z}}^{\dagger}\right] & = & 0 \\
\left[\hat{\mathrm{E}},\hat{\mathrm{Z}}^{\dagger}\right] & = & 2\hat{\mathrm{Z}}^{\dagger} & \left[\hat{\mathrm{C}},\hat{\mathrm{Z}}^{\dagger}\right] & = & \hat{\mathrm{C}}^{\dagger} \\
\left[\hat{\mathrm{E}},\hat{\mathrm{Z}}\right] & = & -2\hat{\mathrm{Z}} & \left[\hat{\mathrm{C}}^{\dagger},\hat{\mathrm{Z}}\right] & = & -\hat{\mathrm{C}} \\
\left[\hat{\mathrm{C}},\hat{\mathrm{C}}^{\dagger}\right] & = & -1 & \left[\hat{\mathrm{Z}},\hat{\mathrm{Z}}^{\dagger}\right] & = & \hat{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}
\end{array} \tag{10.19}$$

La característica principal ahora de las relaciones de conmutación (10.5) es el conmutador $\left[\hat{\mathrm{Z}},\hat{\mathrm{Z}}^{\dagger}\right]=\hat{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}$, en el que aparece el sumando $\frac{1}{2}$ que no aparece en el conmutador clásico (donde $N=0$). Este es el efecto de la anomalía del grupo de Schrödinger. Obviamente, y debido a que se trata de una pseudoextensión, podemos ocultar el término $\frac{1}{2}$ absorviendolo en $\hat{\mathrm{E}}$, es decir, definiendo $\hat{\mathrm{E}}'\equiv\hat{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}$, por lo que aparentemente desaparece el efecto de la anomalía. Sin embargo, aunque la mona se vista de seda, mona se queda, y esta redefinición no oculta el hecho de que $N=\frac{1}{4}$, y no 0, como ocurre en el caso clásico.

10.2 Polarización de orden superior

Vamos ahora a reducir la representación usando el método de las polarizaciones de orden superior. La idea es, como siempre, buscar un operador de orden superior para el campo que no cabe en la polarización (10.10), es decir, para el campo $\tilde{X}^L_{z^*}$. Probamos con un operador de la forma $\tilde{X}^L_{z^*}+\alpha(\tilde{X}^L_{c^*})^2$, y obtenemos que este operador cabe en la polarización sólo si $\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ y $N=\frac{1}{4}$, con lo que

$$\mathcal{P}^{HO}=<\tilde{X}^L_{\eta},\tilde{X}^L_{c},\tilde{X}^L_{z},\tilde{X}^L_{z^*}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\tilde{X}^L_{c^*})^2> \tag{10.20}$$

Es fácil comprobar que las soluciones de estas ecuaciones de polarización son las mismas Φ_n que se obtienen mediante la órbita sobre el vacío. Es decir, con ambos métodos se obtienen los mismos resultados: que la representación dada por la polarización de primer orden (10.10) es reducible para $N=\frac{1}{4}$, en lugar de para $N=0$ tal y como ocurre para el caso clásico, y que es para $N=\frac{1}{4}$ cuando los operadores de $SL(2,R)$ se escriben en función de los del oscilador armónico, y no para $N=0$ que es cuando los invariantes Noether (clásicos) asociados a $SL(2,R)$ se escriben en función de los asociados al oscilador armónico.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
4 OCT. 1995
COMISION DE DOCTORADO

Parte IV

APÉNDICES

Apéndice A

CUANTIZACIÓN DEL ESPÍN.

Para cuantizar la partícula libre relativista con espín (así como la galileana), necesitamos primero encontrar las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones dentro del formalismo de la cuantización sobre grupos. Para ello emplearemos en primer lugar una parametrización que facilite este propósito, y es aquella en la cual se pone de manifiesto la estructura de fibrado principal que tiene $SU(2)$, con fibra el subgrupo de Cartan $U(1)$ (que no hay que confundirlo con el $U(1)$ que se introduce en la extensión o pseudoextensión). Con esta parametrización encontraremos las representaciones irreducibles, y posteriormente realizaremos un cambio de variables que nos lleve a la parametrización usual de las rotaciones mediante las variables $\vec{\epsilon}$, pero en la cual mantendremos arbitraria la dirección de cuantización, caracterizada por un vector unitario $\vec{n}$. Esto hará más clara y elegante la cuantización del grupo de Poincaré.

Para empezar, escribimos los elementos de $SU(2)$ como matrices complejas $\mathrm{U}(\xi) \equiv \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}$, $\xi \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in C^2$, con la condición $\xi^\dagger \xi \equiv |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Por tanto los elementos de $SU(2)$ son puntos de la esfera $S^3 \subset C^2$. La proyección $\pi : \xi \to \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi$ (donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli) va de S^3 a S^2, ya que $(\xi^\dagger \vec{\sigma} \xi)^2 = 1$, y $\pi^{-1}(\xi^\dagger \vec{\sigma} \xi), \forall \xi$, es isomorfo al subgrupo $U(1)$ de las matrices de $SU(2)$ con $z_2 = 0$.

De este conjunto de coordenadas globales no mínimas z_1 y z_2, y en el que la ley de grupo no es más que la que se deduce de la multiplicación de matrices, pasamos a otro conjunto de coordenadas mínimas pero locales, tomando una carta local en la variedad base S^2, con parámetros z, z^*, y para la fibra tomamos $\theta = -i \log \eta, \eta \in U(1) \subset SU(2)$. La relación entre estos dos conjuntos de parámetros es:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta \\ z_2 &= \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} z\eta \\ \kappa &= \sqrt{1-2zz^*}\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

La ley de grupo para los nuevos parámetros (a partir de la ley de multiplicación de matrices) queda:

$$\begin{aligned}
z'' &= z'\eta^{-2} + \kappa' z - \frac{z}{1+\kappa}[z^* z'\eta^{-2} + z^{*\prime} z\eta^2] \\
z^{*\prime\prime} &= z^{*\prime}\eta^2 + \kappa' z^* - \frac{z^*}{1+\kappa}[z z^{*\prime}\eta^2 + z' z^* \eta^{-2}] \\
\eta'' &= \sqrt{\frac{2}{1+\kappa''}}\left\{\sqrt{\frac{1+\kappa'}{2}}\sqrt{\frac{1+\kappa}{2}}\eta'\eta\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\kappa'}}\sqrt{\frac{1}{1+\kappa}} z^* z' \eta^* \eta'\right\} \qquad \text{(A.2)} \\
\kappa'' &= \kappa'\kappa - (z' z^* \eta^{-2} + z^{*\prime} z \eta^2)\,.
\end{aligned}$$

Esta ley de grupo para $SU(2)$ la pseudoextendemos centralmente para dotar de carácter dinámico a las rotaciones mediante el coborde generado por la función $e^{2ij\theta} = \eta^{2j}$. La parte central de la ley de grupo para $SU(2)\tilde{\otimes}U(1)$ queda:

$$\zeta'' = \zeta'\zeta(\eta''\eta'^{-1}\eta^{-1})^{2j}\,. \qquad \text{(A.3)}$$

De la ley de grupo (A.2-A.3) obtenemos los campos de vectores invariantes por la izquierda:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^L_z &= \kappa\frac{\partial}{\partial 2} z - \frac{i z^*}{2(1+\kappa)}\frac{\partial}{\partial 2}\theta + \frac{ij z^*}{1+\kappa}\Xi \\
\tilde{X}^L_{z^*} &= \kappa\frac{\partial}{\partial 2} z* + \frac{iz}{2(1+\kappa)}\frac{\partial}{\partial 2}\theta - \frac{ijz}{1+\kappa}\Xi \\
\tilde{X}^L_\eta &= \kappa\frac{\partial}{\partial 2}\theta - 2iz\frac{\partial}{\partial 2} z + 2iz^*\frac{\partial}{\partial 2} z* \qquad \text{(A.4)} \\
\tilde{X}^L_\zeta &= i\zeta\frac{\partial}{\partial 2}\zeta \equiv \Xi\,,
\end{aligned}$$

y los campos de vectores invariantes por la derecha:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^R_z &= \frac{e^{-2i\theta}}{2(1+\kappa)}\left[(1+\kappa)^2\frac{\partial}{\partial 2} z - 2z^{*2}\frac{\partial}{\partial 2} z* + iz^*\frac{\partial}{\partial 2}\theta - 2ijz^*\Xi\right] \\
\tilde{X}^R_{z^*} &= \frac{e^{2i\theta}}{2(1+\kappa)}\left[(1+\kappa)^2\frac{\partial}{\partial 2} z* - 2z^2\frac{\partial}{\partial 2} z - iz\frac{\partial}{\partial 2}\theta + 2ijz\Xi\right] \qquad \text{(A.5)} \\
\tilde{X}^R_\eta &= \frac{\partial}{\partial 2}\theta \\
\tilde{X}^R_\zeta &= i\zeta\frac{\partial}{\partial 2}\zeta \equiv \Xi\,.
\end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación para los campos derechos son (las mismas, cambiadas de signo para los izquierdos):

$$\begin{aligned} [\tilde{X}^R_\theta, \tilde{X}^R_z] &= -2i\tilde{X}^R_z \\ [\tilde{X}^R_\theta, \tilde{X}^R_{z^*}] &= +2i\tilde{X}^R_{z^*} \\ [\tilde{X}^R_z, \tilde{X}^R_{z^*}] &= -\frac{i}{2}\tilde{X}^R_\theta + i\Xi\,. \end{aligned} \tag{A.6}$$

De (A.4) calculamos la 1-forma de cuantización

$$\Theta = \frac{ij}{1+\kappa}(z^*dz - zdz^*) + 2j(\kappa-1)d\theta + \frac{d\zeta}{i\zeta}\,, \tag{A.7}$$

y a partir de los campos invariantes por la derecha calculamos los invariantes Noether

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{(\theta)} &\equiv i_{\tilde{X}^R_\theta}\Theta = 2j(1-\kappa) \\ \mathrm{F}_{(z)} &\equiv i_{\tilde{X}^R_z}\Theta = ijz^* \\ \mathrm{F}_{(z^*)} &\equiv i_{\tilde{X}^R_{z^*}}\Theta = -ijz\,. \end{aligned} \tag{A.8}$$

La pseudoextensión de la ley de grupo de $SU(2)$ en (A.2), que da lugar a la ley de grupo (A.2-A.3) de $SU(2)\tilde{\otimes}U(1)$, ha convertido a $SU(2)$ en un verdadero sistema dinámico donde la variable que juega el papel de "tiempo" es la de la fibra, θ (ver [AABC 90] para el caso similar de $\mathrm{SL}(2,\Re)\tilde{\otimes}\mathrm{U}(1)$). El módulo característico viene dado precisamente por el campo de vectores invariante por la izquierda asociado a esta variable "tiempo", $\mathcal{G}_\Theta =< \tilde{X}^L_\theta >$. Como cabía esperar, las variables (z, z^*) juegan el papel de par coordenada-momento de este sistema dinámico.

Es fácil encontrar una polarización total para $SU(2)\tilde{\otimes}U(1)$, que contiene al módulo característico y la mitad de las variables canónicas conjugadas. Tomaremos

$$\mathcal{P} =< \tilde{X}^L_\theta, \tilde{X}^L_z > \,. \tag{A.9}$$

Esta polarización, junto con la condición de $U(1)$-función, $\Psi = \zeta\Phi(z, z^*, \theta)$, nos dice que las funciones de onda son combinaciones lineales de las funciones:

$$\Phi^{(j)}_\nu(z, z^*, \theta) = (1+\kappa)^j \left[e^{-2i\theta}(1+\kappa)^{-1}z^*\right]^\nu\,, \tag{A.10}$$

donde ν va de 0 a $2j$. Haciendo el cambio $\mu = \nu - j$ tenemos

$$\Phi^{(j)}_\mu(z, z^*, \theta) = (1+\kappa)^{-\mu}e^{-2i(\mu+j)\theta}z^{*\mu+j}\,. \tag{A.11}$$

La actuación de los operadores cuánticos (esto es, los campos derechos), es:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^R_\theta\Psi^{(j)}_\mu &= -2i(\mu+j)\Psi^{(j)}_\mu \\ \tilde{X}^R_z\Psi^{(j)}_\mu &= -(j-\mu)\Psi^{(j)}_{\mu+1} \\ \tilde{X}^R_{z^*}\Psi^{(j)}_\mu &= \frac{1}{2}(j+\mu)\Psi^{(j)}_{\mu-1}\,. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Las funciones de onda normalizadas vienen dadas por:

$$\chi_{\mu}^{(j)} = (-1)^{\frac{j+\mu}{2}} \prod_{s=1}^{j+\mu} \sqrt{\frac{2(j-\mu+s)}{j+\mu-s+1}} \Psi_{\mu}^{(j)} , \tag{A.13}$$

e, introduciendo los operadores

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{J}}_{+} &= -\sqrt{2} i \tilde{X}_{z}^{R} \\ \hat{\mathrm{J}}_{-} &= -\sqrt{2} i \tilde{X}_{z}^{R} \\ \hat{\mathrm{J}}_{0} &= \frac{i}{2} \left(\tilde{X}_{\theta}^{R} + 2j\Xi \right) . \end{aligned} \tag{A.14}$$

donde $\hat{\mathrm{J}}_0$ lleva un término constante para deshacer el efecto de la pseudoextensión, obtenemos la forma usual de la representación:

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{J}}_{+}\chi_{\mu}^{(j)} &= \sqrt{j(j+1)-\mu(\mu+1)}\chi_{\mu+1}^{(j)} \\ \hat{\mathrm{J}}_{-}\chi_{\mu}^{(j)} &= \sqrt{j(j+1)-\mu(\mu-1)}\chi_{\mu-1}^{(j)} \\ \hat{\mathrm{J}}_{0}\chi_{\mu}^{(j)} &= \mu\chi_{\mu}^{(j)} . \end{aligned} \tag{A.15}$$

Para ver el motivo por el cual el parámetro j de la pseudoextensión queda cuantizado, hemos de analizar cuándo las funciones que hemos obtenido en coordenadas locales están definidas globalmente. Para ello las expresamos en términos de las coordenadas globales z_1, z_2, con lo que obtenemos:

$$\Phi_{\nu}^{(j)} = 2^{j-\nu/2} e^{2ij\theta} z_1^{j-\nu} z_2^{*\nu} , \tag{A.16}$$

donde se aprecia claramente que estas funciones son analíticas sólo para $2j, \nu \in$N. Es por tanto el argumento de la globalidad de las funciones, o sea, el que los cambios de carta estén bien definidos, el que impone el carácter semientero del espín.

Pasamos ahora a traducir los resultados anteriores a las variables $\vec{\epsilon}$, que son las que se utilizan para parametrizar las rotaciones en Poincaré. El cambio de coordenadas viene dado por:

$$U(\vec{\epsilon}) = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}} + \frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\epsilon}, , \tag{A.17}$$

o, más explícitamente, por:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} e^{i\theta} = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}} + i\epsilon_3/2 \\ z_2 &= \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}} z e^{i\theta} = (-\epsilon_2 + i\epsilon_1)/2 , \end{aligned} \tag{A.18}$$

donde se ha elegido una dirección preferente para la fibra, la del eje z, que posteriormente haremos arbitraria.

La ley de grupo en estas coordenadas queda:

$$\vec{\epsilon}'' = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}'^{\,2}}{4}}\vec{\epsilon} + \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\vec{\epsilon}' + \frac{1}{2}\vec{\epsilon}' \times \vec{\epsilon}. \tag{A.19}$$

Para la función generadora del coborde emplearemos

$$\eta = \frac{\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}} + i\vec{n}\cdot\vec{\epsilon}/2}{\sqrt{1 - r^2/4}}, \tag{A.20}$$

donde $r^2 = (\vec{\epsilon} \times \vec{n})^2$ y $\vec{n}$ va a ser el vector unitario (arbitrario) que indica la dirección de cuantización.

Los campos de vectores invariantes por la izquierda y por la derecha son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\frac{\partial}{\partial 2}\vec{\epsilon} - \frac{1}{2}\vec{\epsilon} \times \frac{\partial}{\partial 2}\vec{\epsilon} \\ &\quad + \frac{j}{1 - r^2/4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\vec{n} \times \vec{\epsilon} + (\vec{\epsilon}\cdot\vec{n})\vec{\epsilon}\right)\Xi \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}} &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\frac{\partial}{\partial 2}\vec{\epsilon} + \frac{1}{2}\vec{\epsilon} \times \frac{\partial}{\partial 2}\vec{\epsilon} \\ &\quad - \frac{j}{1 - r^2/4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\vec{n} \times \vec{\epsilon} - (\vec{\epsilon}\cdot\vec{n})\vec{\epsilon}\right)\Xi, \end{aligned} \tag{A.22}$$

verificando las reglas de conmutación

$$[\tilde{X}^R_{\epsilon^i}, \tilde{X}^R_{\epsilon^j}] = -\eta_{ij.}{}^{k}\left(\tilde{X}^R_{\epsilon^k} + jn_k\Xi\right). \tag{A.23}$$

Empleando las matrices de rotaciones (es decir, los elementos de $SO(3)$ asociados a los de $SU(2)$),

$$R(\vec{\epsilon}) = (1 - \epsilon^2/4)\mathrm{I} - \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\vec{\epsilon}\times\ + \frac{1}{2}(\vec{\epsilon}\cdot\ )\vec{\epsilon}, \tag{A.24}$$

introducimos las funciones $\vec{\mathrm{S}} = jR(\vec{\epsilon})\vec{n}$, que como veremos enseguida, están asociadas a los invariantes Noether, y como se puede comprobar fácilmente verifican $\vec{\mathrm{S}}^2 = j^2$. En términos de estas nuevas funciones, los campos de vectores invariantes por la derecha, la 1-forma de cuantización y su diferencial adquieren las expresiones:

$$\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}} = \vec{\mathrm{S}} \times \left[\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \frac{\partial}{\partial 2}\vec{\mathrm{S}}\right)\right] + \frac{j}{j + \vec{\mathrm{S}}\cdot\vec{n}}\vec{n} \times (\vec{\mathrm{S}} \times \vec{n})\Xi \tag{A.25}$$

$$\Theta = \frac{(\vec{n} \times \vec{\mathrm{S}}) \cdot d\vec{\mathrm{S}}}{j + \vec{S} \cdot \vec{n}} + \frac{d\zeta}{i\zeta} \tag{A.26}$$

$$d\Theta = \frac{\vec{n} \cdot (d\vec{\mathrm{S}} \overset{\times}{\wedge} d\vec{\mathrm{S}})}{2\vec{n} \cdot \vec{\mathrm{S}}} . \tag{A.27}$$

Es fácil comprobar que $i_{\vec{n}\cdot\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}}} d\Theta = 0$ y por tanto éste será el generador del módulo característico, y que la polarización viene dada por la expresión vectorial $\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} - i\vec{n} \times \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}}$, que tan sólo tiene dos componenetes independientes.

Los invariantes Noether son:

$$\mathrm{F}_{(\vec{\epsilon})} \equiv i_{\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}} \Theta = \vec{\mathrm{S}} - j\vec{n} \,, \tag{A.28}$$

donde se comprueba que, salvo el término constante $j\vec{n}$ que deshace el efecto de la pseudoextensión, son las funciones $\vec{\mathrm{S}}$.

Los corchetes de Poisson (clásicos) inducidos en la esfera $\vec{\mathrm{S}}^2 = j^2$ por $d\Theta$ reproducen el álgebra de $SU(2)$.

$$\{S_i, S_j\} = \eta_{ij}{}^k S_k \,. \tag{A.29}$$

Empleando una notación matricial para las funciones de onda, para el caso $j = \frac{1}{2}$ por ejemplo, $\chi^{(1/2)}_{-1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi^{(1/2)}_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, obtenemos la forma matricial usual de los operadores de espín $\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}}$:

$$\tilde{X}^R_{\vec{\epsilon}} + j\vec{n}\,\Xi\Big|_{j=1/2} = \frac{i}{2}\vec{\sigma} \,, \tag{A.30}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

Apéndice B

CÁLCULO DE $\tilde{X}^{L}_{a^0}{}^{HO}$.

En este Apéndice vamos a obtener la expresión para el operador $\tilde{X}^{L}_{a^0}{}^{HO}$ y a resolver la ecuación de polarización a que conduce. Para reducir la representación en el espacio de configuración de la partícula libre relativista (tanto con espín como sin espín, por lo que por simplicidad nos restringiremos al caso $j = 0$) necesitamos un operador de orden superior que substituya a $\tilde{X}^{L}_{a^0}$ y que cierre polarización con $\tilde{X}^{L1}_{\vec{p}}$ y $\tilde{X}^{L}_{\vec{\epsilon}}$. El problema es que $[\tilde{X}^{L}_{a^0}, \tilde{X}^{L}_{\vec{p}}] = -1/mc\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}$, y $\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}$ no puede estar en la polarización. Existen dos soluciones para el operador de orden superior $\tilde{X}^{L}_{a^0}{}^{HO}$:

B.1 Polarización tipo Klein-Gordon.

Es fácil comprobar que

$$\tilde{X}^{L}_{a^0}{}^{2\mathrm{nd}} = \tilde{X}^{L}_{a^0} + \frac{i\hbar}{2mc}\left[\left(\tilde{X}^{L}_{a^0}\right)^2 - \left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^2\right], \tag{B.1}$$

conmuta con $\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}$, por lo que

$$\mathcal{P}^{2nd} =< \tilde{X}^{L}_{a^0}{}^{2\mathrm{nd}}, \tilde{X}^{L}_{\vec{p}}, \tilde{X}^{L}_{\vec{\epsilon}} >, \tag{B.2}$$

es una polarización de segundo orden que nos proporcionará las funciones de onda en el espacio de configuración. Como veremos más tarde, esta polarización conduce a la ecuación de Klein-Gordon para las soluciones, por lo que la llamaremos polarización tipo Klein-Gordon.

Las condiciones $\Xi.\Psi = i\Psi$ y $\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}.\Psi = 0$ conducen a una función de onda de la forma

$$\Psi = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{a}}\varphi(\vec{a}, \hat{a})\,. \tag{B.3}$$

[1] Para el caso con espín deberá cerrar polarización con el operador de orden infinito que lo substituye, pero esta condicion se cumple de forma automática.

La condición $\tilde{X}^{L2\mathrm{nd}}_{a^0}.\Psi = 0$ nos da para $\varphi(\vec{a}, \hat{a})$ la ecuación

$$\frac{2imc}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{a}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{a}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\vec{a}^2}\right)\varphi\,, \tag{B.4}$$

que, como ya hemos mencionado, es la ecuación de Klein-Gordon, tan sólo que la función de onda tiene la energía en reposo restada. Restaurando la energía en reposo mediante el cambio $\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}mc\hat{a}}\varphi'$, obtenemos para φ' la ecuación de Klein-Gordon en su forma habitual:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{a}^2} - \frac{\partial^2}{\partial\vec{a}^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi' = 0\,. \tag{B.5}$$

Las soluciones de energía definida (o de momento definido, ya que ambos operadores conmutan) para (B.4) son de la forma:

$$\varphi_{\vec{P}}(\vec{a}, \hat{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(P^0 - mc)\hat{a}}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{a}}\,, \tag{B.6}$$

con $P^0 = \varepsilon E$, $E = \sqrt{m^2c^2 + \vec{P}^2}$ y $\varepsilon = \pm 1$.

Como era de esperar, la ecuación de Klein-Gordon admite los dos posibles signos para la energía. Sin embargo, mientras las soluciones de energía positiva tienen energía en reposo (con $\vec{P} = 0$) igual a cero (con la masa en reposo restada), las soluciones de energía negativa tienen energía en reposo $-2mc$. Esto es consecuencia de que al pseudoextender hemos supuesto que la masa era positiva, con lo cual las soluciones de energía negativa no están bien definidas. Podemos solucionarlo pseudoextendiendo con energía negativa (cambiando m por $-m$ en el coborde), o bien deshaciendo el efecto de la pseudoextensión y utilizando la ecuación (B.5), cuyas soluciones son:

$$\varphi'_{\vec{P}}(\vec{a}, \hat{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}P^0\hat{a}}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{a}}\,, \tag{B.7}$$

que se pueden escribir en forma covariante como $e^{-\frac{i}{\hbar}P^\mu a_\mu}$, con la restricción $P^0 = \varepsilon E$. Estas soluciones, que son ondas planas en el espacio de Minkowski, no son normalizables como es sabido, y por tanto no forman parte propiamente del espacio de Hilbert soporte de la representación. Sin embargo, se pueden construir paquetes de onda normalizables y "picados" en torno a un momento central $\vec{P}$ como se hace en la Mecánica Cuántica no relativista.

La coexistencia de las soluciones de energía positiva y negativa provoca que la representación sea reducible, ya que el espacio de soluciones se divide en dos subespacios invariantes bajo la acción del grupo de Poincaré $\mathcal{P}^\uparrow_+$, precisamente los de energía positiva y negativa. Junto al inconveniente de la reducibilidad, aparece otro directamente ligado a éste, y es el de no proporcionar la construcción de los operadores no básicos en términos de los básicos, es decir, del operador energía en términos del operador momento y el de los boosts (aunque en este caso, y por tratarse de un sistema libre, la energía sólo es función del momento).

B.2 Polarización tipo Schrödinger

Para motivar la técnica de construcción del operador $\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}$ de orden infinito, recurrimos al caso galileano, en el cual el operador que substituye a $\tilde{X}^L_t$ es $\tilde{X}^L_t - \frac{i\hbar}{2m}\left(\tilde{X}^L_{\vec{x}}\right)^2$, que puede obtenerse a simple vista. Calculemos explícitamente el conmutador de este operador con $\tilde{X}^L_{\vec{p}}$, para ver qué ocurre:

$$\begin{aligned}\left[\tilde{X}^L_t - \frac{i\hbar}{2m}\left(\tilde{X}^L_{\vec{x}}\right)^2, \tilde{X}^L_{p^i}\right] &= -\frac{1}{m}\tilde{X}^L_{x^i} - \frac{i\hbar}{2m}\left(\tilde{X}^L_{x^j}[\tilde{X}^L_{x^j}, \tilde{X}^L_{p^i}] + [\tilde{X}^L_{x^j}, \tilde{X}^L_{p^i}]\tilde{X}^L_{x^j}\right) \\ &= -\frac{1}{m}\tilde{X}^L_{x^i} - \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{2i}{\hbar}\tilde{X}^L_{x^i}\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{B.8}$$

La clave está por tanto en que $[\tilde{X}^L_{x^j}, \tilde{X}^L_{p^i}] = \frac{i}{\hbar}\delta_{ji}$ (sobre $U(1)$-funciones), y en contraer $\tilde{X}^L_{\vec{a}}$ con lo que nos estorba del conmutador que no cierra. Para el caso galileano el proceso acaba aquí , pero en Poincaré debemos hacerlo orden por orden en potencias de $1/c$.

Como primera aproximación probamos con:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0} = \tilde{X}^L_{a^0} - \frac{k_1}{mc}\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2\,, \tag{B.9}$$

donde k_1 lo calcularemos de modo que este operador conmute con $\tilde{X}^L_{\vec{p}}$ salvo órdenes en $1/c^2$:

$$\left[\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}, \tilde{X}^L_{\vec{p}}\right] = -\frac{1}{mc}\tilde{X}^L_{\vec{a}} - \frac{k_1}{mc}\left(\frac{2i}{\hbar}\tilde{X}^L_{\vec{a}} - \frac{2}{mc}\tilde{X}^L_{a^0}\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)\,, \tag{B.10}$$

con lo que $k_1 = \frac{i\hbar}{2}$. Se tiene por tanto que

$$\left[\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}, \tilde{X}^L_{\vec{p}}\right] = \frac{i\hbar}{m^2c^2}\tilde{X}^L_{a^0}\tilde{X}^L_{\vec{a}}\,. \tag{B.11}$$

El resultado de este conmutador lo contraemos con $\tilde{X}^L_{\vec{a}}$ y se lo añadimos a $\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}$:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0} = \tilde{X}^L_{a^0} - \frac{i\hbar}{2mc}\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2 + \frac{i\hbar k_2}{m^2c^2}\tilde{X}^L_{a^0}\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2\,. \tag{B.12}$$

Haciendo lo mismo que antes se obtiene que $k_2 = \frac{i\hbar}{2}$, con lo que

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0} = \tilde{X}^L_{a^0} - \frac{i\hbar}{2mc}\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m^2c^2}\tilde{X}^L_{a^0}\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2\,. \tag{B.13}$$

Podemos seguir con el proceso indefinidamente, pero no obtenemos ninguna expresión que sea fácilmente sumable (ya que se trata de un desarrollo en serie de dos variables). Realmente sí admite una expresión sumada sencilla, tan sólo que aún no estamos en condiciones de obtenerla (véase Apéndice C). Lo que sí podemos hacer es, aprovechando

que las funciones de onda verifican que $\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}\Psi = 0$, "despejar" $\tilde{X}^{L}_{a^0}$ en términos de $\left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^2$ orden por orden (el teorema de la función implícita nos lo permite, al menos localmente). Haciendo esto se tiene que, en primer orden:

$$\tilde{X}^{L}_{a^0} = \frac{i\hbar}{2mc}\left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^2 + O(\frac{1}{c^2}), \tag{B.14}$$

que nos recuerda bastante la ecuación de Schrödinger (su versión izquierda). A órdenes siguientes:

$$\tilde{X}^{L}_{a^0} = \frac{i\hbar}{2mc}\left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^2 + \frac{i\hbar^3}{8m^3c^3}\left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^4 + \frac{i\hbar^5}{16m^5c^5}\left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^6 + O(\frac{1}{c^6}), \tag{B.15}$$

que puede reconocerse como los primeros términos del desarrollo en serie de

$$\tilde{X}^{L}_{a^0} = -\frac{i}{\hbar}\left[\sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\left(\tilde{X}^{L}_{\vec{a}}\right)^2} - mc\right], \tag{B.16}$$

expresión que nos resulta muy familiar, pues (salvo el término en mc que es efecto de la pseudoextensión) nos realiza, al menos con campos izquierdos, la ligadura clásica entre las componentes del cuadrimomento, $p^0 = \pm\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$. La clave de por qué sólo obtenemos el signo positivo de la raíz está en que hemos pseudoextendido con masa "positiva", con lo que, al aperecer la masa en reposo restada, éstas son las que se encuentran en el entorno de $\vec{p} = 0$, que es el único al que podemos acceder con la construcción que hemos hecho (de nuevo por el teorema de la función implícita).

Hemos de resolver ahora las ecuaciones a que conduce la polarización de orden superior

$$\mathcal{P}^{HO} =< \tilde{X}^{LHO}_{a^0}, \tilde{X}^{L}_{\vec{p}}, \tilde{X}^{L}_{\vec{\epsilon}} >, \tag{B.17}$$

que son:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^{L}_{\vec{\epsilon}}.\Psi = 0 \quad &\rightarrow \quad \Psi \neq \Psi(\vec{\epsilon}) \\
\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}.\Psi = 0 \quad &\rightarrow \quad \Psi = \zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{a}}\varphi(\vec{a},\hat{a}) \\
\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}\Psi = 0 \quad &\rightarrow \quad \left[\frac{\partial}{\partial a^0} - \frac{i\hbar}{2mc}\nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2m^2c^2}\frac{\partial}{\partial a^0}\nabla^2 + \frac{i\hbar^3}{8m^3c^3}\nabla^4\right]\varphi(\vec{a},\hat{a}),
\end{aligned} \tag{B.18}$$

siendo la última válida salvo $O(\frac{1}{c^4})$. Si de nuevo despejamos $\frac{\partial}{\partial a^0}$ en términos de ∇^2, tenemos un desarrollo en serie fácilmente sumable dando como resultado:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial a^0} = \left\{\sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\nabla^2} - mc\right\}\varphi, \tag{B.19}$$

que es una ecuación que también nos resulta bastante familiar.

Las soluciones de esta ecuación con energía (o momento) definido son de la forma:

$$\varphi_{\vec{P}}(\vec{a},\hat{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E-mc)\hat{a}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{a}}\,, \tag{B.20}$$

que como vemos ahora sólo admiten un signo para la energía, el signo positivo (pseudoextendiendo con masa negativa obtendríamos la solución con energía negativa), conduciendo por tanto a una representación irreducible del grupo del grupo de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Nuevamente podemos restaurar la energía en reposo mediante el cambio $\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}mc\hat{a}}\varphi'$, que conduce a la ecuación

$$i\hbar\frac{\partial\varphi'}{\partial\hat{a}} = \sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\vec{a}^2}}\,\varphi'\,, \tag{B.21}$$

cuyas soluciones de energía definida son:

$$\varphi'_{\vec{P}}(\vec{a},\hat{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}E\hat{a}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{a}}\,. \tag{B.22}$$

Podemos encontrar soluciones arbitrarias a (B.21) sin más que integrarla formalmente,

$$\varphi'(\vec{a},\hat{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{a}\hat{\mathrm{P}}^0}\,\phi(\vec{a})\,, \tag{B.23}$$

donde

$$\hat{\mathrm{P}}^0\phi(\vec{a}) = \sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\vec{a}^2}}\,\phi(\vec{a}) = \sqrt{m^2c^2 + \hat{\vec{\mathrm{P}}}^2}\,\phi(\vec{a})\,, \tag{B.24}$$

aunque de forma más rigurosa deberíamos emplear la transformada de Fourier

$$\varphi'(\vec{a},\hat{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p'}{\sqrt{m^2c^2+\vec{p}\,'^2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,'\cdot\vec{a} - \frac{i}{\hbar}\hat{a}\sqrt{m^2c^2+\vec{p}\,'^2}}\tilde{\varphi}(\vec{p}\,')\,. \tag{B.25}$$

Si hacemos en (B.23) $\phi(\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{a}}$, y en (B.25) $\tilde{\varphi}(\vec{p}\,') = \delta^{(3)}(\vec{P}-\vec{p}\,')$ recuperamos (B.22).

La expresión (B.23), aunque es una solución formal, nos permite factorizar el tiempo de la función de onda para soluciones que no sean de energía definida, con la única diferencia de que la función que factorizamos es realmente un operador, de orden infinito además (en el sentido de que no se trata de una transformación finita generada por un generador del grupo, sino que es una transformación generada por un operador de orden infinito). Esto puede resultar un tanto complicado, pero se puede comprobar que los campos derechos preservan esta estructura de la función de onda y, por tanto, es lícito factorizar la exponencial como si se tratase de una función. Obtenemos así una representación irreducible con funciones sólo de $\vec{a}$ y operadores construidos con $\vec{a}$ y $\frac{\partial}{\partial\vec{a}}$ (para el caso sin espín).

Apéndice C

CALCULO DE $\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}}$.

En el caso del grupo de Poincaré con espín en el espacio de configuración, el campo $\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}$ no lo podemos incluir en la polarización, ya que al conmutar consigo mismo da rotaciones y éstas ya no están en el módulo característico (tan sólo una componente de las tres queda en el módulo característico). La idea es por tanto encontrar un operador de orden superior $\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}}$ que a ser posible conmute consigo mismo.

Para simplificar la busqueda, vamos a encontrar primero, y para el caso sin espín ($j = 0$), un operador que tenga las propiedades de operador posición (aunque estemos con campos izquierdos), es decir, que verfique $\left[\tilde{X}^{L}_{a^i}, \tilde{X}^{L\,HO}_{p^j}\right] = \frac{i}{\hbar}\delta_{ij}$. Como $[\tilde{X}^{L}_{a^i}, \tilde{X}^{L}_{p^j}] = \delta_{ij}\left(\frac{i}{\hbar} - \frac{1}{mc}\tilde{X}^{L}_{a^0}\right)$, empleamos la misma técnica que antes pero ahora contraemos lo que nos "sobra" del conmutador con $\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}$:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}} = \tilde{X}^{L}_{\vec{p}} - \frac{k_1}{mc}\tilde{X}^{L}_{a^0}\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}\,. \tag{C.1}$$

Obsérvese que hay ambiguedad a la hora de construir este término, ya que los campos $\tilde{X}^{L}_{a^0}$ y $\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}$ no conmutan. Por ahora haremos la construcción de este modo, aunque en principio podría emplearse cualquier ordenación ya que todas conducen a representaciones equivalentes entre sí . El caso más interesante es el simetrizado, ya que cuando pasemos a la derecha el operador resultante debe ser hermítico, y eso se consigue simetrizándolo.

El resultado que obtenemos es $k_1 = i\hbar$, y si continuamos el proceso obtenemos:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}} = \left[1 - \frac{i\hbar}{mc}\tilde{X}^{L}_{a^0} - \left(\frac{i\hbar}{mc}\right)^2\left(\tilde{X}^{L}_{a^0}\right)^2 - \left(\frac{i\hbar}{mc}\right)^3\left(\tilde{X}^{L}_{a^0}\right)^3 + O(\frac{1}{c^4})\right]\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}\,, \tag{C.2}$$

que es fácilmente sumable a:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}} = \hat{\mathrm{F}}^{L}\tilde{X}^{L}_{\vec{p}}\,, \tag{C.3}$$

donde

$$\hat{\mathrm{F}}^{L} \equiv \frac{mc}{mc + i\hbar\tilde{X}^{L}_{a^0}}\,. \tag{C.4}$$

Haciendo uso de que $\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}.\Psi = 0$, tenemos que sobre las soluciones

$$\tilde{X}^{LHO}_{\vec{p}} = \frac{mc}{\hat{\mathrm{P}}^L_0}\tilde{X}^L_{\vec{p}}\,, \tag{C.5}$$

donde $\hat{\mathrm{P}}^L_0 = \sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2}$. Este operador tiene todo el aspecto de operador posición (más bien lo sería su versión derecha, para el caso sin espín).

Tan sólo nos falta ver el resultado de conmutar este operador consigo mismo:

$$\left[\tilde{X}^{L\,HO}_{p^i}, \tilde{X}^{L\,HO}_{p^j}\right] = -\frac{1}{m^2c^2}\left(\hat{\mathrm{F}}^L\right)^2 \eta_{ij.}{}^k\left[\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} + i\hbar\tilde{X}^L_{\vec{a}} \times \tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}}\right]_k . \tag{C.6}$$

Como prometimos, damos la expresión sumada para $\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0}$, que ahora es fácil de obtener gracias a $\hat{\mathrm{F}}^L$, y que es:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{a^0} = \tilde{X}^L_{a^0} + \frac{imc}{\hbar}\left(\hat{\mathrm{F}}^L\right)^{-1}\left[1 - \left(1 + \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\left(\hat{\mathrm{F}}^L\right)^2\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2\right)^{1/2}\right] . \tag{C.7}$$

Pasemos ahora el caso con espín. El operador que hemos encontrado aún no nos sirve porque continua dando rotaciones al conmutarse entre sí . Probamos, pues, con un operador de la forma:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}} = \hat{\mathrm{F}}^L\tilde{X}^L_{\vec{p}} + \frac{k_1}{m^2c^2}\left(\hat{\mathrm{F}}^L\right)^2\left[\tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} + i\hbar\tilde{X}^L_{\vec{a}} \times \hat{\mathrm{F}}^L\tilde{X}^L_{\vec{p}}\right] \times \tilde{X}^L_{\vec{a}}\,, \tag{C.8}$$

donde de nuevo hemos contraído con $\tilde{X}^L_{\vec{a}}$ para deshacernos de lo que nos sobraba del conmutador.

Si repetimos el proceso orden por orden llegamos a una expresión fácilmente sumable, y cuya suma es:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}} = \hat{\mathrm{F}}^L\tilde{X}^L_{\vec{p}} - \frac{i}{\hbar}\hat{\mathrm{G}}^L\left(\hat{\vec{\Sigma}}^L \times \tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)\,, \tag{C.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{G}}^L &= \left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^{-2}\left[\left(1 + \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\left(\tilde{X}^L_{\vec{a}}\right)^2\right)^{-1/2} - 1\right]\,, \\
\hat{\vec{\Sigma}}^L &= \tilde{X}^L_{\vec{\epsilon}} + i\hbar\tilde{X}^L_{\vec{a}} \times \hat{\mathrm{F}}^L\tilde{X}^L_{\vec{p}}\,.
\end{aligned}$$

Si ahora empleamos que $\hat{\mathrm{F}}^L = \frac{mc}{\hat{\mathrm{P}}^L_0}$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\tilde{X}^{L\,HO}_{\vec{p}} = \hat{\mathrm{F}}^L\tilde{X}^L_{\vec{p}} - \frac{1}{mc(\hat{\mathrm{P}}^L_0 + mc)}\hat{\vec{\Sigma}}^L \times \tilde{X}^L_{\vec{a}}\,, \tag{C.10}$$

aunque de nuevo también podríamos emplear una version simetrizada, de hecho esto es lo que se hace en el Capítulo 3.

En cuanto a las soluciones de la ecuación diferencial (pseudodiferencial) a que este operador conduce (que se dan en el referido capítulo), tan sólo quisiera comentar la dificultad que entraña trabajar con funciones construidas a base de un operador actuando sobre una función arbitraria (debido a la no conmutatividad de unas partes de la función con otras, dándose por ejemplo que $e^A e^B = e^{A+B-\frac{1}{2}[A,B]}$), pero esto no enturbia la limpieza y elegancia del resultado final.

Bibliografía

[AM 67] R. Abraham and J.E. Marsden, it Foundations of Mechanics, W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1967

[AA 82] V. Aldaya and J.A.de Azcárraga, J. Math. Phys. **23**, 1297 (1982)

[AA 85a] V. Aldaya and J.A.de Azcárraga, Ann. Phys. **165**, 484 (1985)

[AA 85b] V. Aldaya and J.A.de Azcárraga, Int. J. Theor. Phys. **24**, 141 (1985)

[AN 87] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **113**, 375 (1987)

[AA 87] V. Aldaya and J.A.de Azcárraga, Fortschr. Phys. **35**, 437 (1987)

[ANR 89] V. Aldaya, J. Navarro-Salas and A. Ramirez, Commun. Math. Phys. **121**, 541-556 (1989).

[AABC 90] V. Aldaya, J.A.de Azcárraga, J. Bisquert and J.M. Cerveró, J. Phys. **A23**, 707 (1990)

[AN 90] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **126**, 575 (1990)

[ABN 91] V. Aldaya, J. Bisquert and J. Navarro-Salas, Phys. Lett. **A156**, 351 (1991)

[AN 91] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **139**, 433 (1991)

[ABLN 92] V. Aldaya, J. Bisquert, R. Loll and J. Navarro-Salas, J. Math. Phys. **33**, 3087 (1992)

[ABGN 92] V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero and J. Navarro-Salas, *Higher-order polarization technique in group quantization and position operator: the free relativistic particle and the relativistic harmonic oscillator*, proceeding of the XIX International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics, Salamanca 1992 (to appear in Anales de Física, Monografías, Eds. J. Mateos-Guilarte, M.A. del Olmo and M. Santander, Publ. Ciemat, Madrid).

[ABGN 93a] V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero and J. Navarro-Salas, J. Phys. **A 26**, 5375 (1993)

[ABGN 93b] V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero and J. Navarro-Salas, *Group-Theoretical Construction of the Quantum Relativistic Harmonic Oscillator*, (1993), Preprint UG-FT-34/93 ,FTUV/93-17, IFIC/93-11

[AG 93] V. Aldaya and J. Guerrero, J. Phys. **A26**, L1175 (1993)

[AG 95a] V. Aldaya and J. Guerrero, J. Phys. **A28**, L137 (1995)

[AG 95b] V. Aldaya and J. Guerrero, J. Math. Phys. **36**, 3191 (1995)

[AG 95c] V. Aldaya and J. Guerrero, Int. J. Mod. Phys. **B 9** (por aparecer) (1995)

[AG 95d] V. Aldaya and J. Guerrero (en preparación)

[AM 95] V. Aldaya and G. Marmo, *Higher-Order Quantization on a Lie Group*, (1995)

[ACG 95] V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, Comm. Math. Phys. (por aparecer) (1995)

[AGST 74] C. Aragone, G. Guerri, S. Salamo, and J.L. Tani, J. Phys. **A15**, L149 (1974)

[AH 89] R. Arshansky and L.P. Horwitz, J. Math. Phys. **30**, 66 (1989); **30**, 380 (1989)

[Ash 92] Ashtekar, A.: Mathematical problems of non-perturbative Quantum General Relativity, Lectures delivered at the 1992 Les Houches summer school on Gravitation and Cosmology (1992)

[AEP 83] Asorey, M., Esteve, J.G., Pacheco, A.F.: Phys. Rev. **D27**, 1852 (1983)

[AFW 94] N. Atakishiyev, A. Frank, and K. B. Wolf, J. of Math. Phys. **35**, 3253 (1994)

[BL 68] H. Bacry and J.M. Levy-Leblond, J. Math. Phys. **9**, 1605 (1968)

[Bac 77] H. Bacry, *Lectures on Group Theory and Particle Theory*, Gordon and Breach, New York, pp.393 (1977)

[Bac 88] H. Bacry,*Localizability and Space in Quantum Physics*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag (1988).

[Bar 47] V. Bargmann, Ann. Math. **48**, 568 (1947).

[Bar 54] V. Bargmann, Ann. Math. **59**, 1 (1954) .

[Bar 67] V. Bargmann, Commun. Pure Appl. Math. **14**, 187 (1961); **20**, 1 (1967)

[BG 71] A.O. Barut and L. Girardello, Commun. Math. Phys. **21**, 41 (1971)

[BLP 71] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L. Pitaevskii, *Relativistic Quantum theory*, Part I, Pergamon Press N.Y. (1971)

[BD 82] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982)

[BD 64] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1964)

[CDL 77] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F.: *Mécanique quantique*, Tome I, Hermann (1977)

[DKM 80] V.V. Dodonov, E.V. Kurmyshev and V.I. Man'ko, Phys. Lett. **A 79**, 150 (1980)

[DMMR 93] V.V. Dodonov, O.V. Man'ko, V.I. Man'ko and L. Rosa, *Thermal noise and oscillations of photon distribution for squeezed and correlated light*, INFN-NA-93/31

[Est 86] Esteve, J.G.: Phys. Rev. **D34**, 674 (1986)

[FFZ 90] Fairlie, D.B., Fletcher, P., Zachos, C.K.: J. Math. Phys. **31**, 1088 (1990)

[F 89] Floratos, E.G.: Phys. Lett. **B 228**, 335 (1989)

[FG 70] L. Fonda and G.C. Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, Marcel Dekker, N.Y. (1970)

[FW 50] L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950)

[FKR 71] R.P. Feynman, M. Kislinger and F. Ravndal, Phys. Rev. **D3**, 2706 (1971)

[GP 89] A. Galindo and P. Pascual, *Mecánica Cuántica*, vol. I, Eudema Universidad, Madrid (1989)

[Ger 83] C.C. Gerry, J. Phys. **A 16**, L1 (1983)

[Gla 63] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); **131** 2766 (1963)

[GGH 95] Gotay, M.J., Grundling, H., Hurst, C.A.: *A Groenewold-Van Hove Theorem for S^2* (dg-ga/9502008) (to appear in Transactions of the AMS) (1995)

[Got 95] Gotay, M.J., *On a Full Quantization of the Torus*, dg-ga/9507005 (1995)

[Her 66] R. Hermann, *Lie groups for physicists*, W.A. Benjamin, INC., New York (1966)

[HP 40] T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **A 58**, 1098 (1940)

[IL 88] Isham, C.J., Linden, N.: Class. Quant. Grav. **5**, 71 (1988)

[Jac 62] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience, New York (1962)

[KN 78] Y.S. Kim and M.E. Noz, Am. J. Phys. **46**, 480 (1978)

[KN 86] Y.S. Kim and M.E. Noz, *Theory and Applications of the Poincaré Group*, Reidel, Dordrecht (1986)

[KW 88] Y.S. Kim and E.P. Wigner, Phys. Rev. **A38**, 1159 (1988)

[Kla 64] J.R. Klauder, J. Math. Phys. **4**, 1055 (1963); **5**, 177 (1964)

[KM 64] J.R. Klauder and J. Mac Kenna, J. Math. Phys. **5**, 878 (1964)

[KDP 80] Klitzing, K. v., Dorda, G., Pepper, M.: Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980);

[KN 63] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience Publishers (1963)

[Kos 70] B. Kostant, *Quantization and Unitary Representations*, in Lecture Notes in Math. **170**, Springer-Verlag, Berlin (1970)

[KS 68] J.R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York (1968)

[LL 65] Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)

[L 90] Landsman, N.P.: Let. Math. Phys. **20**, 11 (1990)

[Lan 75] S. Lang,$SL_2(R)$, Addison-Wesley Publishing Company 1975

[Lau 83] Laughlin, R.B.: Phys. Rev. Lett. **54**, 1395 (1983)

[Mac 78] G.W. Mackey, *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory*, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin/Cummings 1978.

[Man 85] Manton, N.S.: Ann. of Phys. **159**, 220 (1985)

[Mir 91] R.M. Mir-Kasimov, J. Phys. **A 24**, 4283 (1991)

[Nag 94] B. Nagel, J. Math. Phys. **35**, 1549 (1994)

[NK 90] J. Navarro-Salas and J.R. Klauder, Class. Quant. Gravity **7**, 1207 (1990)

[NN 94] D.J. Navarro and J. Navarro-Salas, *A Relativistic Harmonic Oscillator Simulated by an Anti-de Sitter Background* , FTUV/94-27, IFIC/94-24

[NW 49] T. D. Newton and E. P. Wigner, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949).

[New 60] T.D. Newton, in *Theorie des Groups en Physique Classique et Quantique*, Vol. I, T. Kahan ed., Dunod, Paris (1960)

[Nie 73] U. Niederer, Helv. Phys. Acta **45**, 802 (1972); **46**, 191 (1973); **47**, 167 (1974)

[NU 88] A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* Birkhäuser Verlag Basl (1988)

[NTW 85] Niu, Q., Thouless, D.J., Wu, Y.S.: Phys. Rev. **B31**, 3372 (1985)

[OK 93] Ohnuki, Y., Kitakado, S.: J. Math. Phys. **34**, 2827 (1993)

[Per 72] A.M. Perelomov, Commun. Math. Phys. **26**, 22 (1972)

[Per 86] A.M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer, Berlin (1986)

[Rob 30] H.P. Robertson, Phys. Rev. **35**, 667 (1930)

[RN 68] H.P. Robertson and T.W. Noonan, *Relativity and Cosmology*, W.B. Sanders, Filadelfia (1968)

[Sal 61] E.J. Saletan, J. Math. Phys. **2**, 1 (1961)

[Schr 30] E. Schrödinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. p. 296, Berlin 1930

[Shen 92] Shen, X.: Int. J. Mod. Phys. **A 7**, 6953 (1992)

[Sni 70] J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1970)

[Sou 70] J.M. Souriau, *Structure des systemes dynamiques*, Dunod, Paris (1970)

[Tou 94] Thouless, D.J.: J. Math. Phys. **35**, 5362 (1994)

[Tri 94] D.A. Trifonov, J. Math. Phys. **35**, 2297 (1994)

[Var 94] Varnhagen, R.: *Topology and Fractional Quantum Hall Effect*, preprint BONN-Th-94-22, hep-th/9411040 (1994).

[Wig 39] E.P. Wigner, Ann. Math. **40**, 149 (1939) (appearing also in *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics*, F.J. Dyson ed. W.A. Benjamin N.Y. (1966))

[Weyl 31] Weyl, H.: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York (1931)

[WE 85] K. Wódkiewicz and J.H. Eberly, J. Opt. Soc. Am. **B2**, 458 (1985)

[Woo 80] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon, Oxford (1980).

[WY 75] Wu, T.T., Yang, C.N.: Phys. Rev. **D 12**, 3845 (1975)

[Yuen 76] H.P. Yuen, Phys. Rev. **A 13**, 2226 (1976)

[Yuk 53] H. Yukawa, Phys. Rev. **91**, 416 (1953)

[Zak 68] Zak, J.: Phys. Rev. **168**, 686 (1968)

[ZDT 93] A. Zarzo, J.S. Dehesa and J. Torres, *On a new set of polynomials representing the wave function of the relativistic harmonic oscillator*, Ann. Num. Math. (1995, in press)