

Proy. T-13/26

T  
12  
112

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Ciencias de la Computación  
e Inteligencia Artificial

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha 5-8-92  
ENTRADA NUM. 1462

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha 11 FEB. 1993  
SALIDA NUM. 272

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
29 JUL. 1992  
COMISION DE DOCTORADO

CLASIFICACION AUTOMATICA DE GALAXIAS

~~TESIS DOCTORAL~~

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
GRANADA  
Nº Documento 49662130  
Nº Copia 21210330

José Antonio García Soria

Granada, Julio de 1992

CLASIFICACION AUTOMATICA DE GALAXIAS

José Antonio García Soria

**CLASIFICACION AUTOMATICA DE GALAXIAS**

**MEMORIA QUE PRESENTA**

**José Antonio García Soria**

**PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
EN CIENCIAS (SECCION MATEMATICAS)**

**JULIO 1992**

**DIRECTORES:**

**DR. D. RAFAEL MOLINA SORIANO  
DR.D. NICOLAS PEREZ DE LA BLANCA CAPILLA**

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial  
Facultad de Ciencias

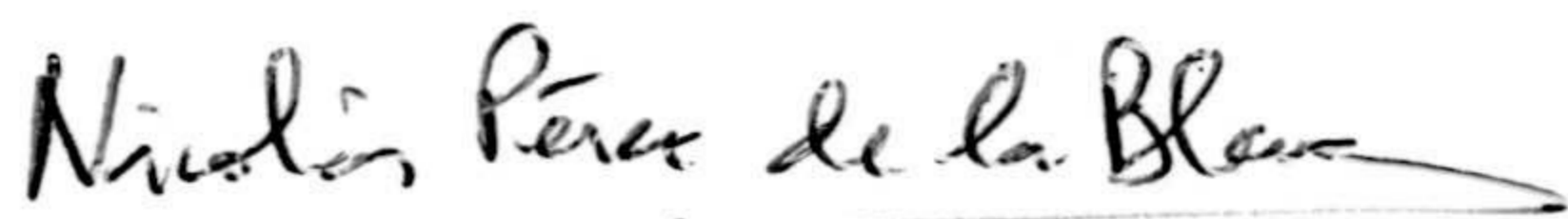
Universidad de Granada

La memoria que lleva por título "Clasificación automática de galaxias" que presenta José Antonio García Soria, para optar al grado de DOCTOR en Ciencias (Sección Matemáticas), ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Dr. D. Rafael Molina Soriano y Dr. D. Nicolás Pérez de la Blanca Capilla, profesores Titulares de Universidad de dicho Departamento.

Granada, Julio de 1992



Fdo: José Antonio García Soria



Fdo: Dr. D. Nicolás Pérez de la Blanca Capilla



Fdo: Dr. D. Rafael Molina Soriano

## AGRADECIMIENTOS

A Rafael Molina Soriano y Nicolás Pérez de la Blanca, directores de la Memoria, por su continuo apoyo y estímulo a lo largo de todo el trabajo al que tantas horas dedicaron y porque sin su ayuda el resultado final del trabajo hubiera sido muy distinto.

A Joaquín Fernandez-Valdivia por todo el tiempo y esfuerzo dedicado a este trabajo, y por el continuo apoyo que tan solo un amigo sabe prestar.

A todos mis compañeros de Departamento por su interés y seguimiento del trabajo, en especial a Silvia Acid, Jose Enrique Cano, Lourdes Campos, Luis Miguel de Campos, Juan Luis Castro, Francisco Cortijo, Antonio Gonzalez, Francisco Herrera e Ignacio Requena.

# Contenidos

<b>1</b>	<b>INTRODUCCION</b>	<b>5</b>
1.1	Presentación del problema. . . . .	5
1.1.1	Sistema de Clasificación. . . . .	7
1.2	Descripción por capítulos de la memoria. . . . .	13
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>15</b>
2.1	Introducción. . . . .	15
2.2	Análisis bayesiano de imágenes. . . . .	16
2.2.1	Modelización del conocimiento. . . . .	17
<b>3</b>	<b>CARACTERIZACION INICIAL</b>	<b>31</b>
3.1	Introducción. . . . .	31
3.2	Un modelo para la representación de la forma. . . . .	32
3.2.1	Segmentación de la imagen. . . . .	34
3.3	Caracterización de la forma galaxia. . . . .	57
3.3.1	Caracterización de una galaxia elíptica por la compacti- dad de la región $R_C$ . . . . .	58
3.3.2	Caracterización de una galaxia elíptica por el contorno $C$ de la región $R_C$ . . . . .	62
3.3.3	Caracterización de una galaxia espiral por la identificación de un patrón teórico en la curva de curvaturas $K$ calculada sobre $C$ . . . . .	66

<b>4</b>	<b>EXTRACCION AUTOMATICA DE RASGOS.</b>	<b>87</b>
4.1	Introducción. . . . .	87
4.2	Extracción automática del rasgo barra. . . . .	89
4.2.1	Descripción del patrón teórico y su ajuste a la forma. . . . .	89
4.2.2	Identificación de la presencia o ausencia del rasgo barra en la forma. . . . .	97
4.2.3	Extracción en su totalidad del rasgo barra. . . . .	101
4.3	Extracción automática del rasgo brazo. . . . .	106
4.3.1	Descripción de rasgos usando un modelo que incorpora tan sólo información relativa a la geometría local. . . . .	107
4.3.2	Modelización y ajuste a la forma. . . . .	113
4.3.3	Solución inicial para el procedimiento de simulación iterativa.	120
4.3.4	Extracción en su totalidad del rasgo brazo. . . . .	122
4.4	Caracterización final. . . . .	126
4.4.1	Caracterización final de galaxias elípticas. . . . .	126
4.4.2	Caracterización final de galaxias espirales. . . . .	129
4.5	Análisis de los resultados obtenidos. . . . .	132
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS</b>	<b>135</b>
5.1	Conclusiones. . . . .	136
5.2	Lineas futuras. . . . .	138
<b>A</b>		<b>139</b>
A.1	Identificación del rasgo barra sobre imágenes no-homogeneas. . . . .	139
A.2	Proceso de creación de la Base de datos. . . . .	142
A.3	Descripción de la Base de datos. . . . .	143
A.3.1	Índice. . . . .	143
A.3.2	Imágenes mas representativas. . . . .	145

<i>CONTENIDOS</i>	3
<b>B CLASIFICACIÓN SOBRE IMÁGENES CCD</b>	<b>153</b>
B.1 Introducción. . . . .	153
B.2 Captación de imágenes CCD. . . . .	154
B.3 Deconvolución. . . . .	155
B.4 Transformación al rango de niveles de gris. . . . .	156





# Capítulo 1

## INTRODUCCION

### 1.1 Presentación del problema.

La clasificación automática de objetos presentes en imágenes digitales, determina un problema clásico en el campo del Análisis de Imágenes, y si tales objetos son galaxias, surge un problema de clasificación especialmente interesante tanto desde el punto de vista teórico como práctico.

La identificación de rasgos que caracterizan la forma visual de la galaxia no es un proceso simple y menos aún si pretendemos abordarlo de forma automática, y esa es esencialmente la principal motivación de esta Tesis Doctoral. Expresado en otros términos, nuestro objetivo global será el poder contestar en el contexto del Análisis de Imágenes a la siguiente pregunta:

¿ Es posible, dada una imagen digitalizada de una galaxia, determinar una descripción de la misma en la que aparezcan representados los rasgos más destacados de su forma usados en la clasificación ?. Si tal descripción existe y es posible obtenerla automáticamente utilizando una secuencia de pasos, habremos determinado un procedimiento de clasificación automática.

Son varios los autores que han abordado la identificación de rasgos presentes en una galaxia, usando herramientas tan diferentes como gramáticas, análisis de Fourier, análisis de componentes principales o métodos estadísticos bayesianos.

Estos trabajos pueden ser divididos de forma natural en dos grupos:

- (A) En un primer grupo, los procedimientos de clasificación, utilizan métodos de reconocimiento de patrones sintácticos. En esta línea Balestreri et al [2] proporcionan un lenguaje pictórico muy simple, orientado a la descripción formal de galaxias en base a la detección de elementos simples (barra, núcleo, etc) y las relaciones entre los elementos detectados, usando gramáticas. Kurtz et al [57] proponen un esquema de interpretación automática de imágenes astronómicas que unifica técnicas de astronomía, psicología descriptiva y en particular emplea descriptores sintácticos de reconocimiento de patrones. Otro ejemplo del uso de métodos sintácticos es Thonnat [92], en donde se utiliza el perfil de intensidad luminosa como una herramienta en la clasificación.
- (B) Un segundo grupo de autores, proponen la identificación de rasgos mediante el ajuste de modelos estadísticos, y con esta metodología Kodaria et al [52] realizan un estudio estadístico del perfil de luminosidad de galaxias. Kent [50] obtiene la descomposición del perfil de luminosidad en dos componentes: núcleo y disco. La aplicación de técnicas estadísticas sobre la superficie de fotometría de galaxias es utilizada por Lauberts et al [58] y Simien [87]. Okamura [72] aplica Análisis de Componentes Principales en la extracción de rasgos. Ripley y Sutherland [78], usando una teoría desarrollada inicialmente por Grenander [35] [36] [38] [37], proceden a la descripción de la estructura de un brazo espiral en base a un proceso estocástico espacial. Seiden y Gerola [83] [31] usan Campos Aleatorios Markovianos para describir la formación y evolución de espirales. Este enfoque también se usa en Garcia et al [20] en la caracterización de formas sintéticas de brazos espirales y elipses.

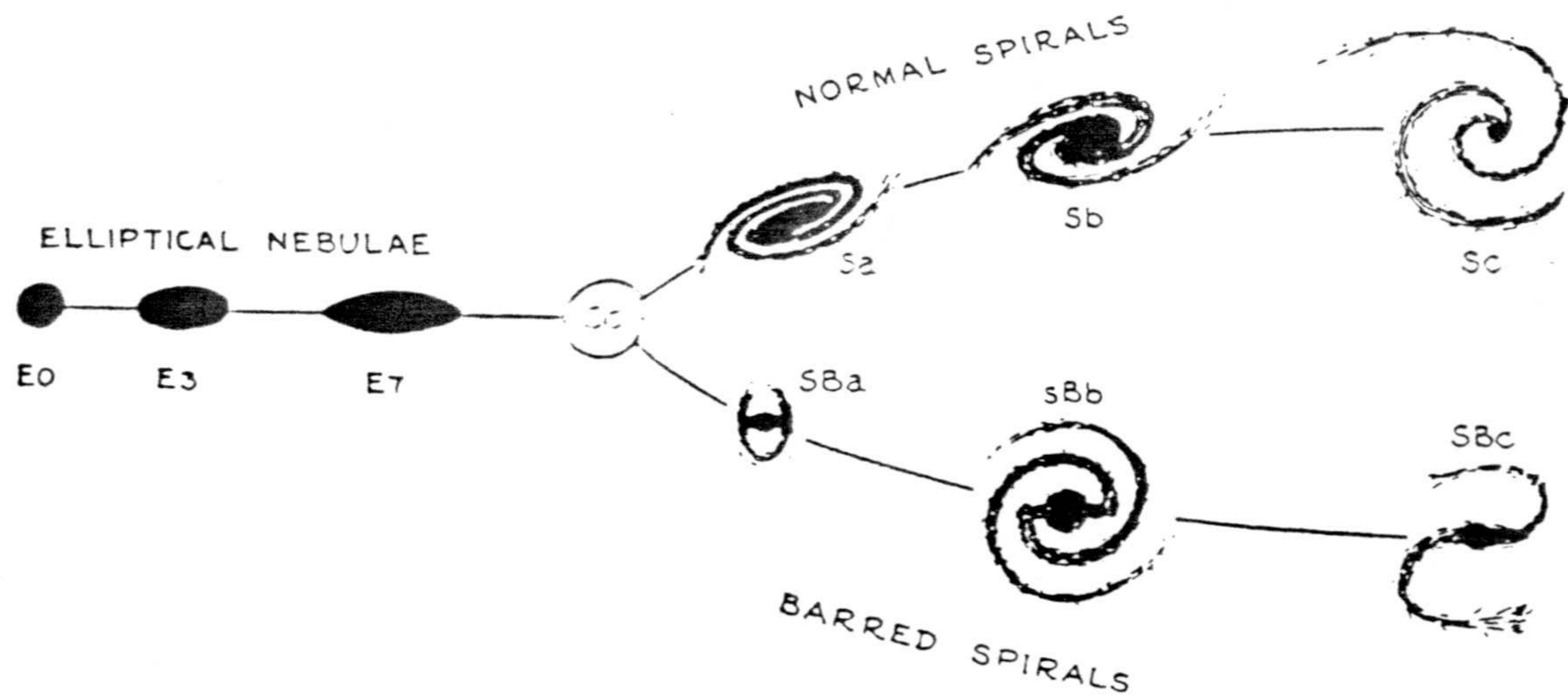


Figura 1.1: Sistema de clasificación.

### 1.1.1 Sistema de Clasificación.

En el esquema de clasificación que adoptaremos las clases de galaxias estarán determinadas en base a elementos morfológicos tales como la forma general, la aparición de brazos espirales, barras y anillos, la proporción relativa de la componente esferoidal en la forma, etc. Algunos esquemas de clasificación, bajo este enfoque, han sido los propuestos por Wolf [69], Vorontsov-Velyaminov [68] (ejemplos ambos de lo que Sandage [58] considera como un primer sistema a emplear en la clasificación de un objeto), Hubble [25] [26] [27] [28], Vaucouleurs [66] [67].

Concretamente el sistema de clasificación que nosotros consideramos fue propuesto por Hubble [27], y es descrito gráficamente en la Figura 1.1. Este esquema aunque publicado en 1930, y posteriormente extendido en otros sistemas [66], recoge las ideas esenciales a usar en la clasificación, ya que expresa la variabilidad de rasgos y las relaciones de conexión entre las distintas clases de galaxias en

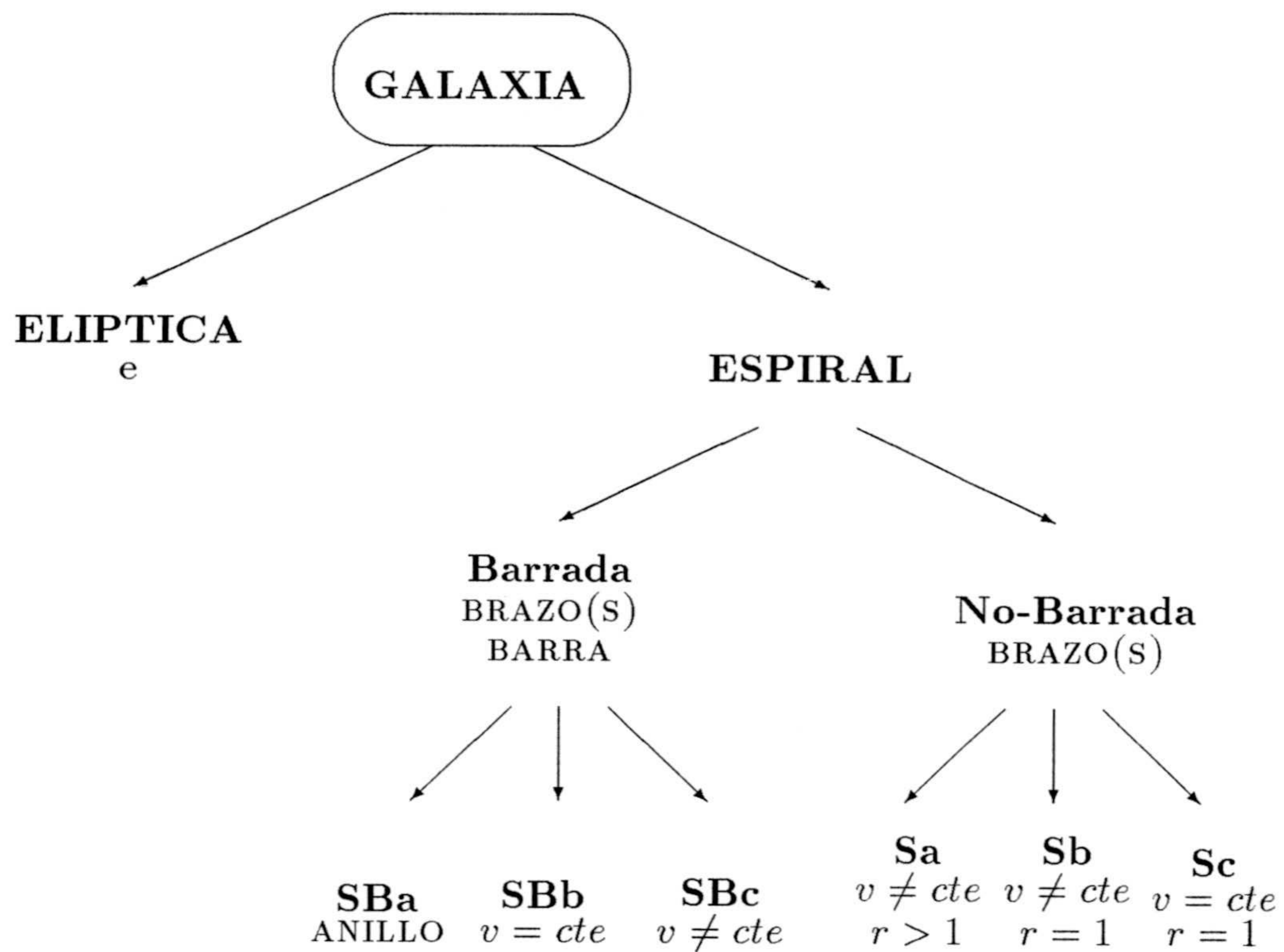


Figura 1.2: Descripción del clasificador en base a la presencia o ausencia de los rasgos barra, brazo(s) y anillo, y a los valores registrados para los parámetros 'e' elipticidad (cociente entre el eje mayor y el eje menor) del contorno de la galaxia, 'v' velocidad en el cambio de la curvatura a lo largo del brazo espiral y 'r' elipticidad del núcleo.

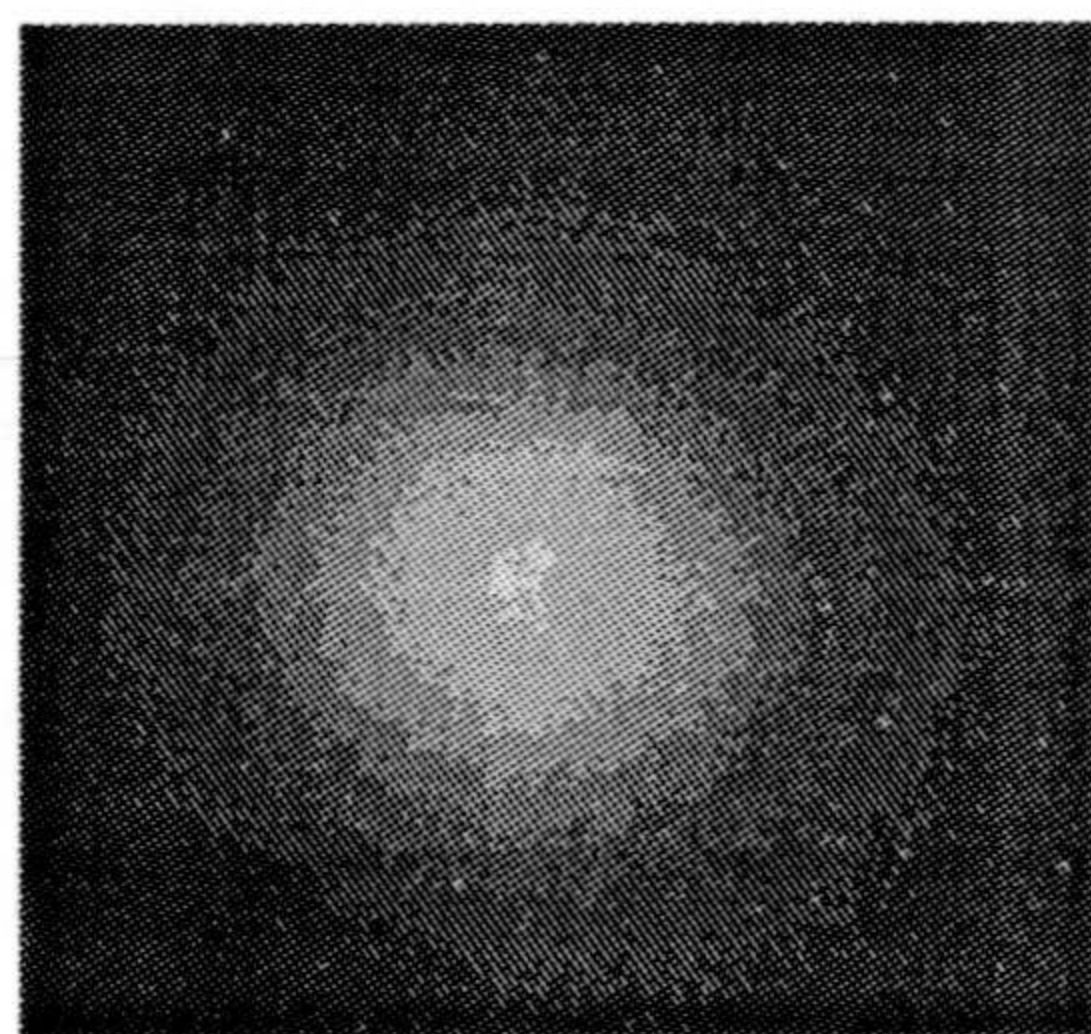
base a la forma tan solo, además de definir la estructura de cada tipo de galaxia en términos de los rasgos elementales que la componen.

El clasificador que usaremos es derivado a partir de este esquema (fig. 1.1) y puede ser descrito en términos de la figura 1.2, en donde se observa la importancia que tiene en la clasificación la presencia o ausencia de los rasgos barra, brazo(s) y anillo, junto a la extracción de las medidas 'e' elipticidad (cociente entre el eje mayor y el eje menor) del contorno de la galaxia, 'v' velocidad en el cambio de la curvatura a lo largo del brazo espiral y 'r' elipticidad del núcleo.

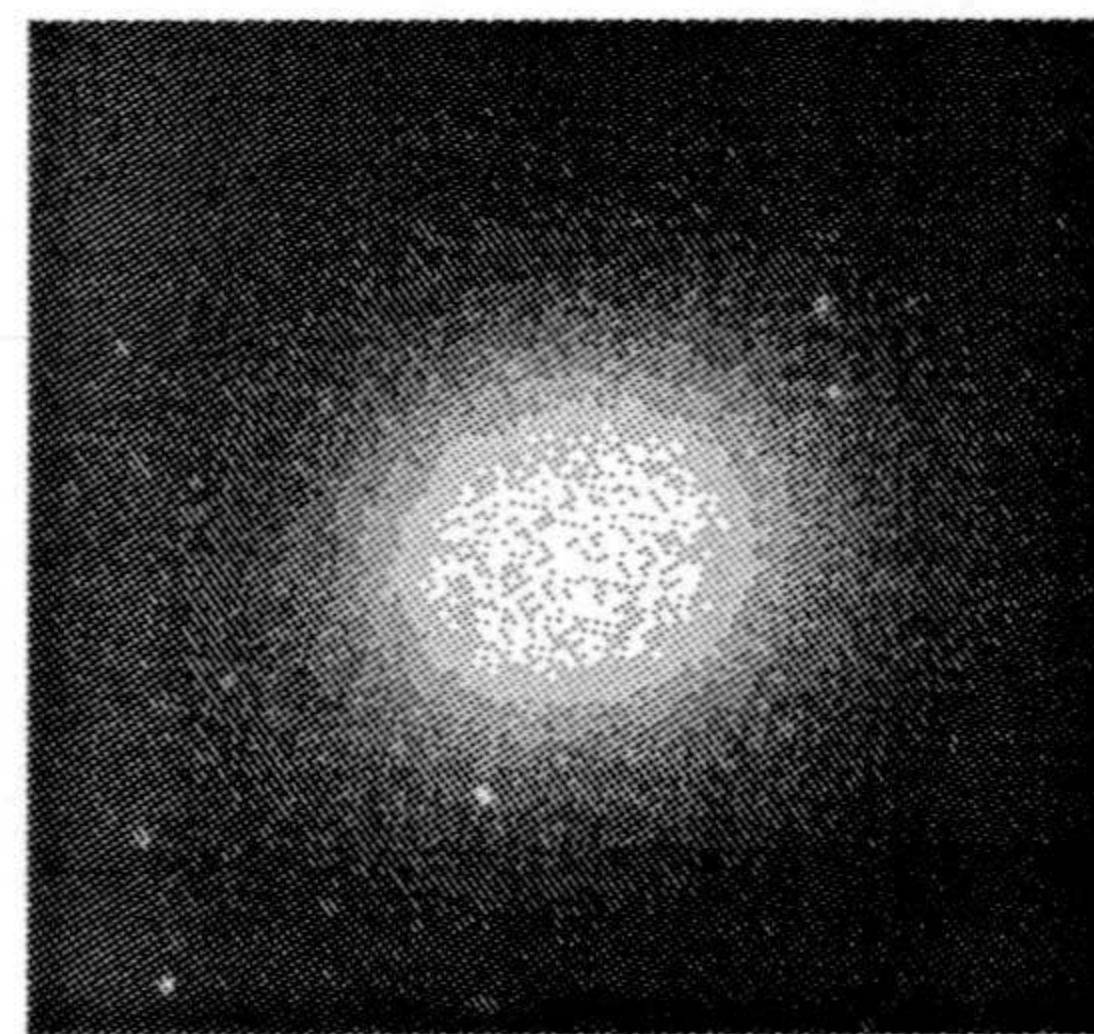
De este esquema descriptivo de clasificación podemos derivar una definición formal de las dos familias fundamentales de galaxias:

### Galaxias Elípticas (E)

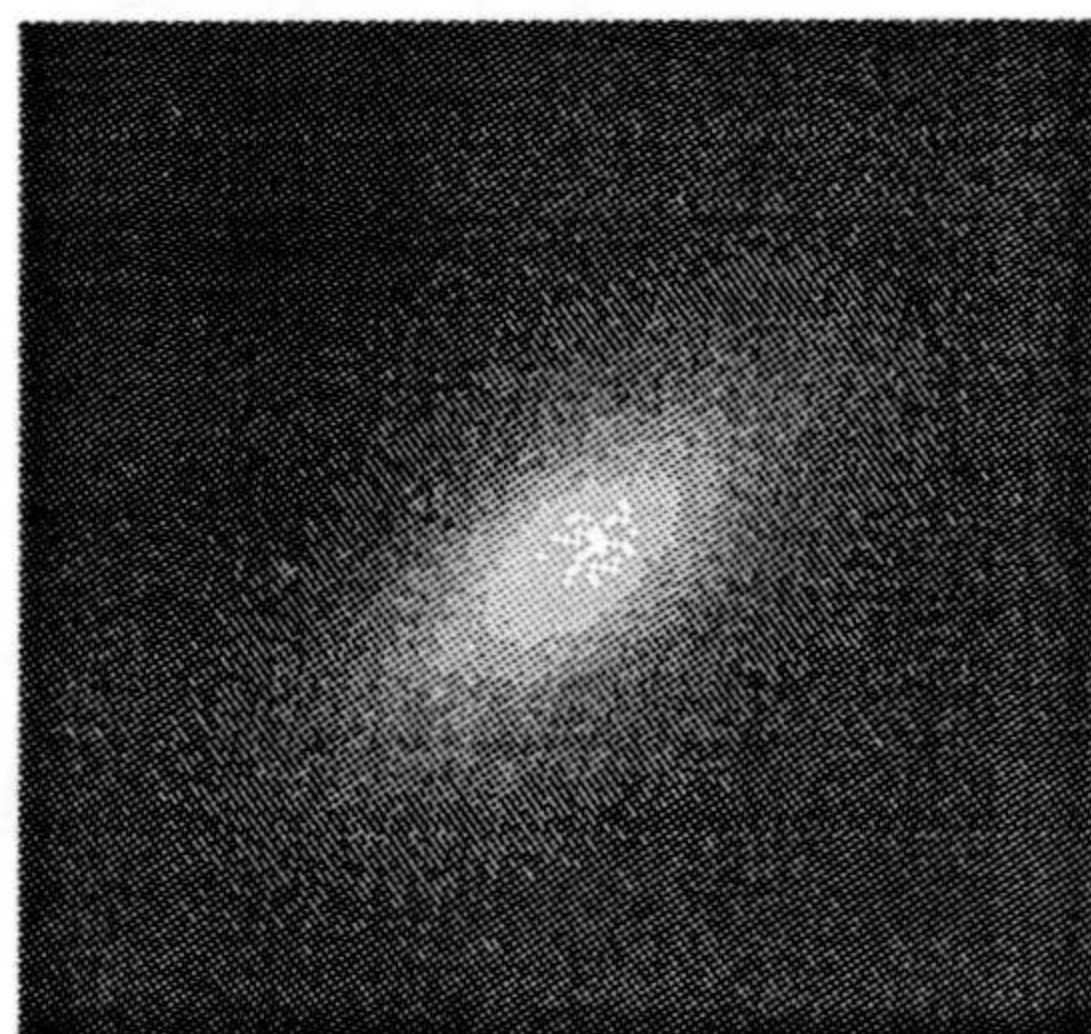
- MEDIDA EMPLEADA EN SU CLASIFICACION FINAL: ' $e$ ' (parámetro que expresa la elipticidad del contorno de la región galaxia).
- OBJETO ESENCIAL DE LA FORMA: ( presente ó ausente ) 'barra'.
- CLASES POSIBLES:  $E_{\eta}$ ,  $\eta = 0, 1, \dots, 7$ . El número  $\eta$  expresa la elipticidad multiplicada por 10.
- IMÁGENES DE EJEMPLO:



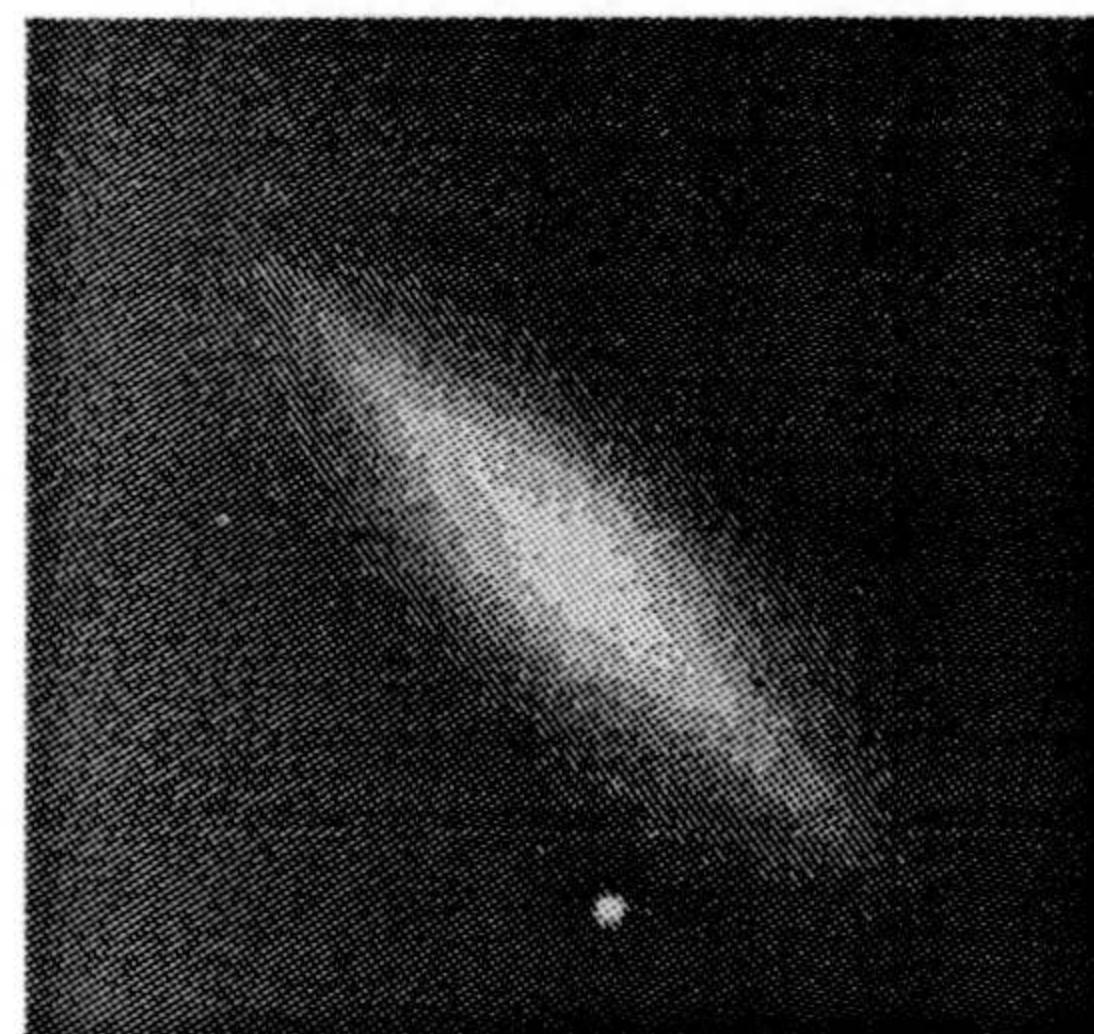
E0



E1



E6



E7

### Galaxias Espirales (S)

- MEDIDAS EMPLEADAS EN SU CLASIFICACIÓN FINAL: (1) ' $v$ ' (velocidad del cambio de la curvatura sobre el(los) brazo(s) presente(s) en la galaxia), (2) ' $r$ ' (elipticidad del núcleo).
- OBJETOS ESENCIALES DE LA FORMA: ( presentes ó ausentes ) 'barra', 'anillo' y 'brazo(s)'.
- CLASES POSIBLES:

#### Espiral Barrada (SB)

**SBa:** [Barra y Anillo].

**SBb:** [Brazo(s), Barra y ( $v = cte$ )].

**SBc:** [Brazo(s), Barra y ( $v \neq cte$ )].

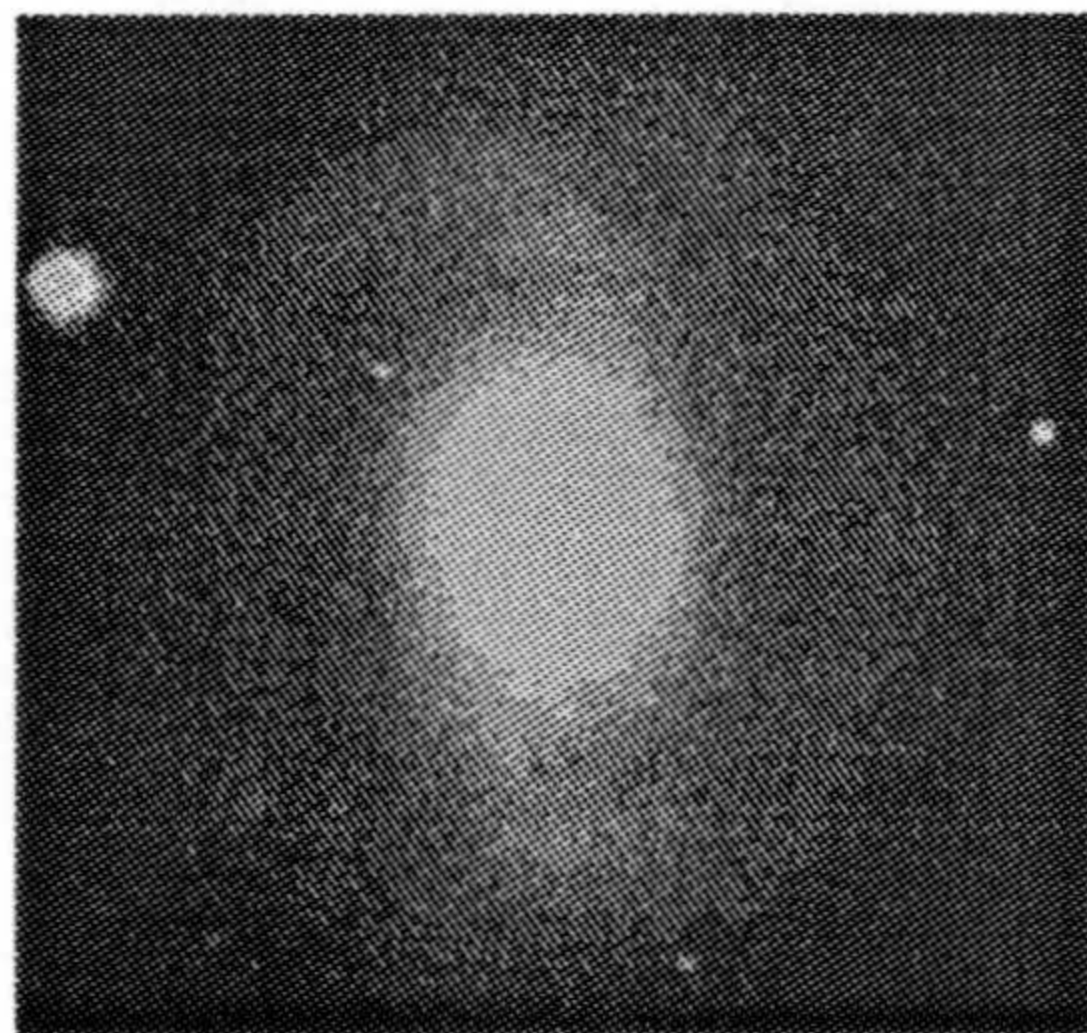
#### Espiral Normal (S)

**Sa:** [Brazo(s), ( $r > 1$ ) y ( $v \neq cte$ )].

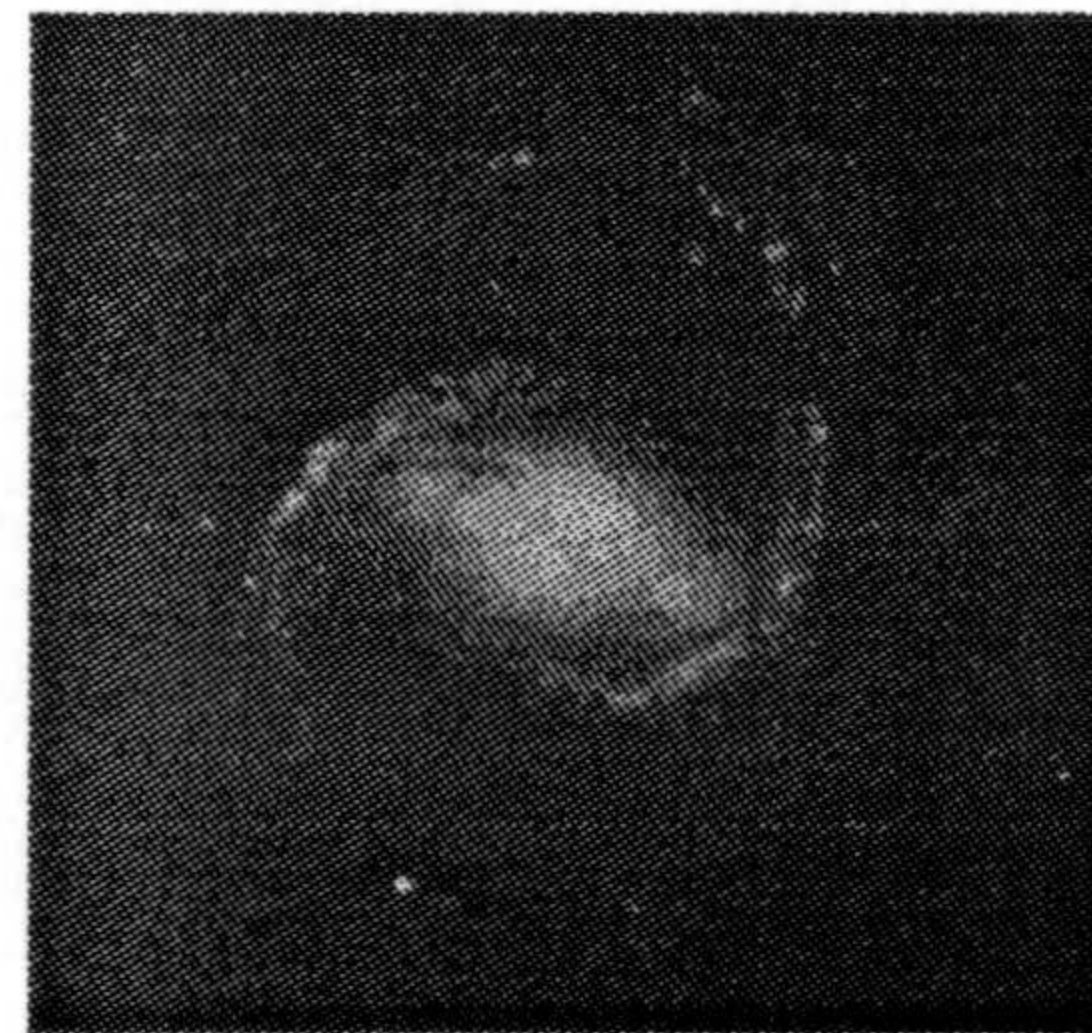
**Sb:** [Brazo(s), ( $r = 1$ ) y ( $v \neq cte$ )].

**Sc:** [Brazo(s), ( $r = 1$ ) y ( $v = cte$ )].

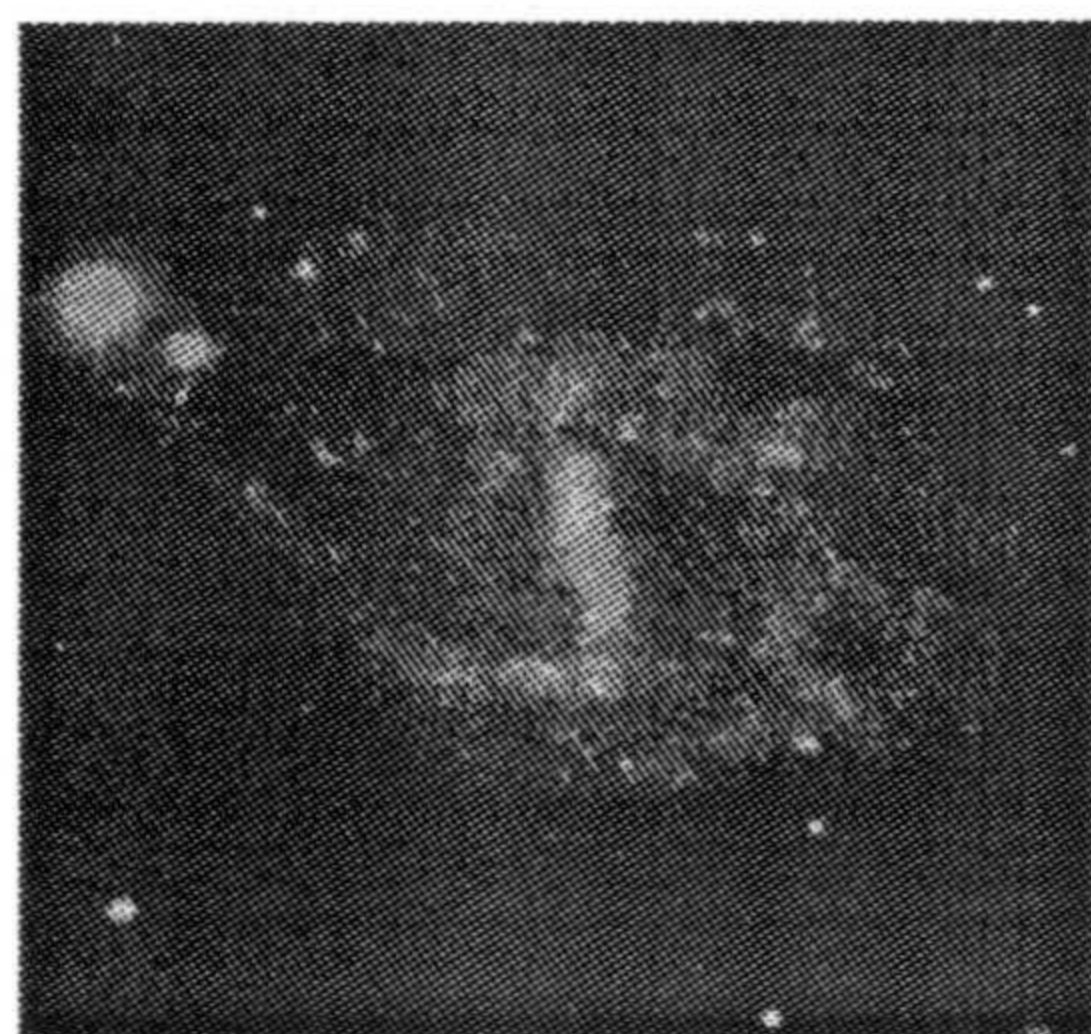
- IMÁGENES DE EJEMPLO:



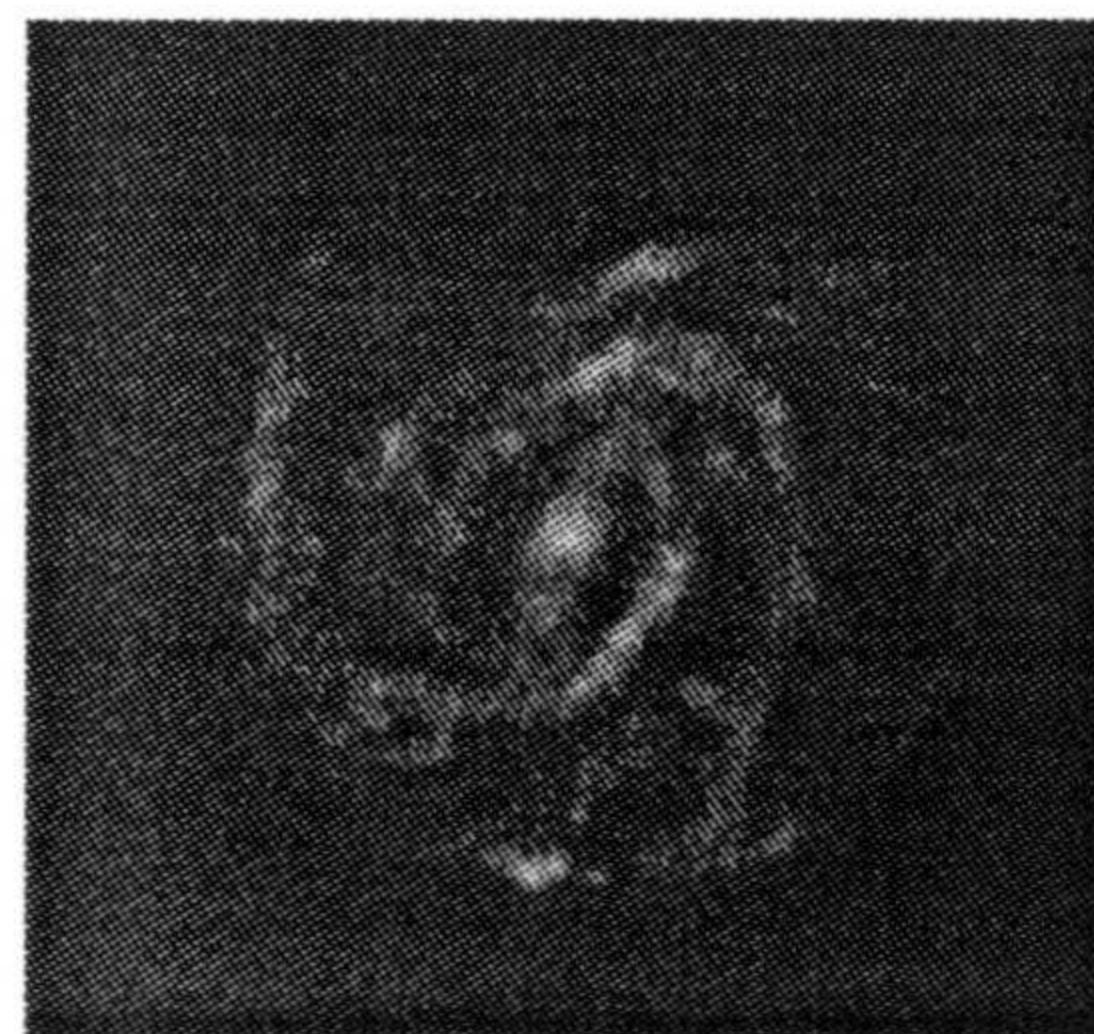
SBa



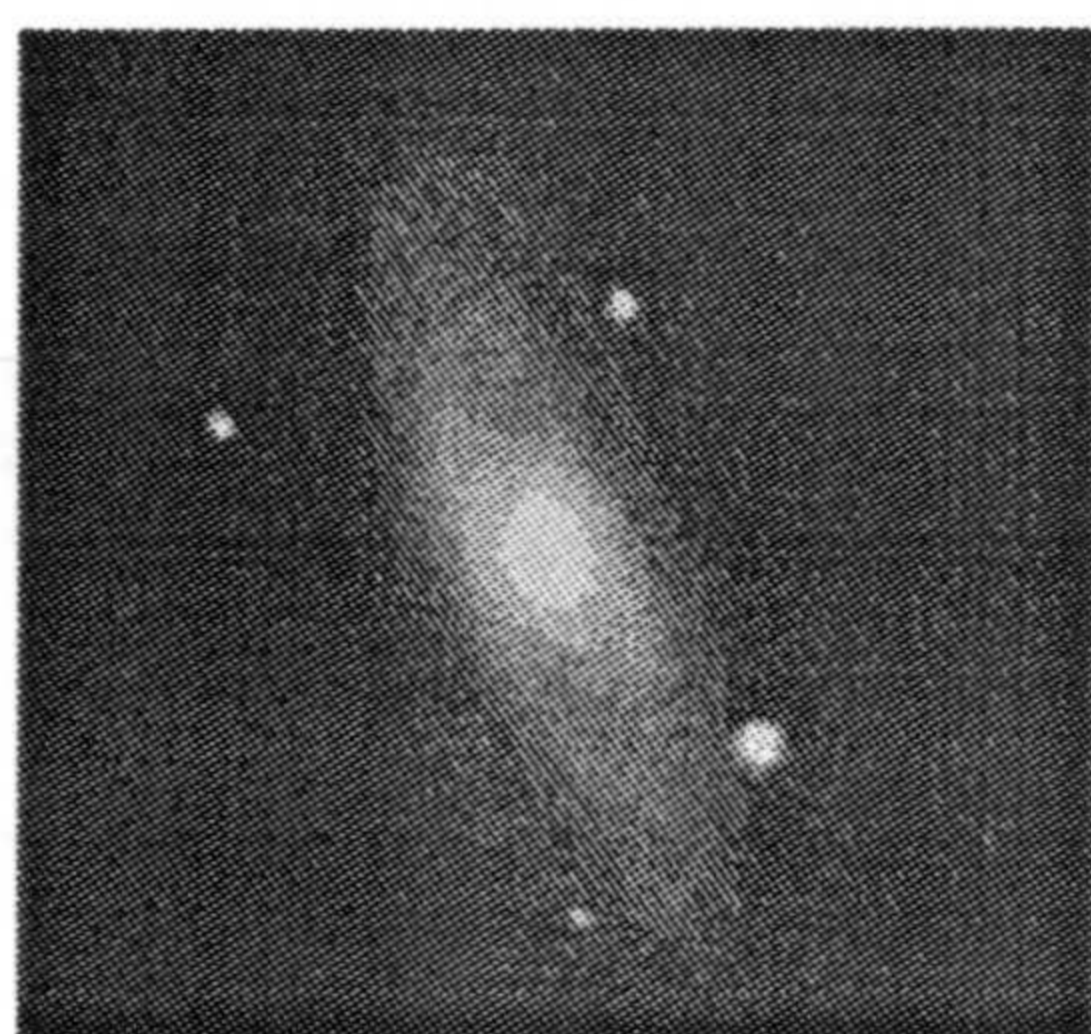
SBb



SBc



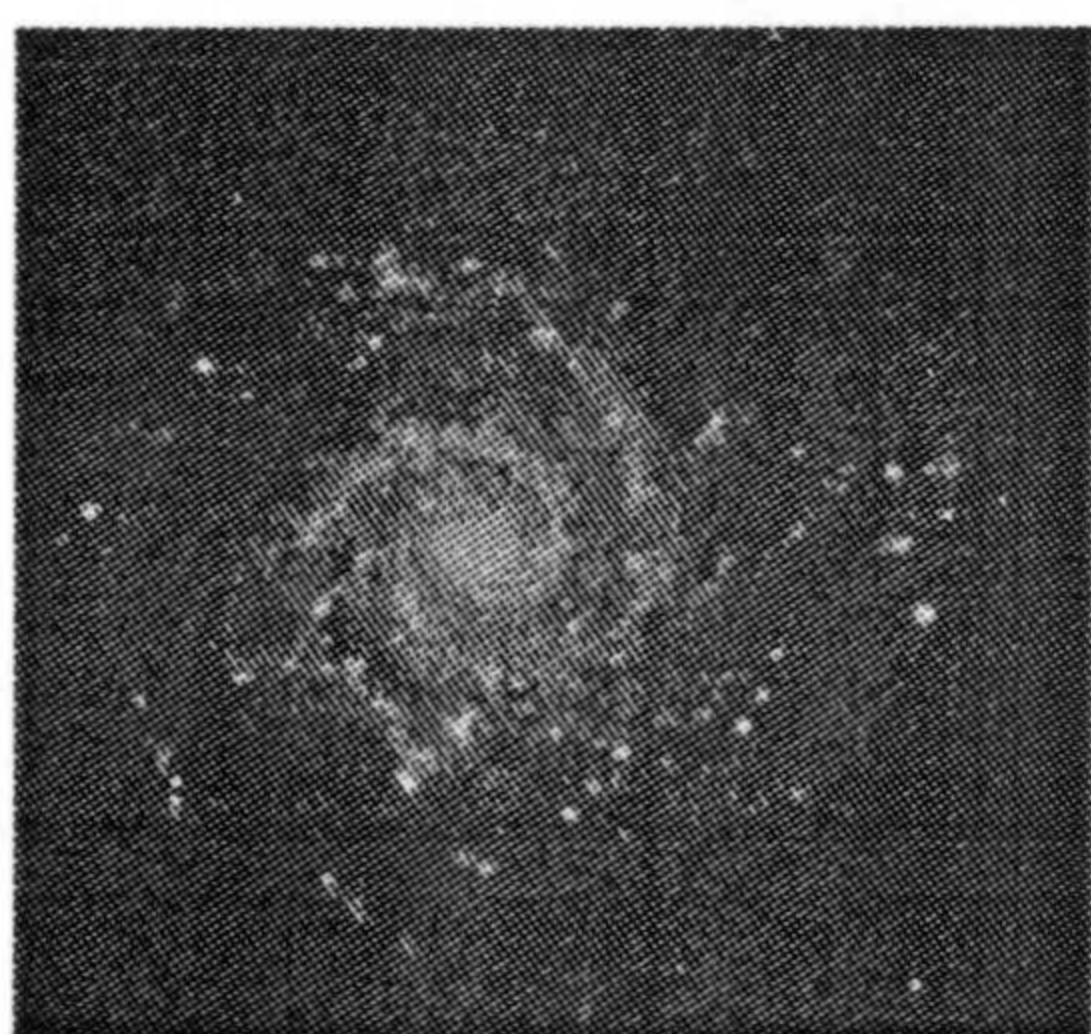
SBc



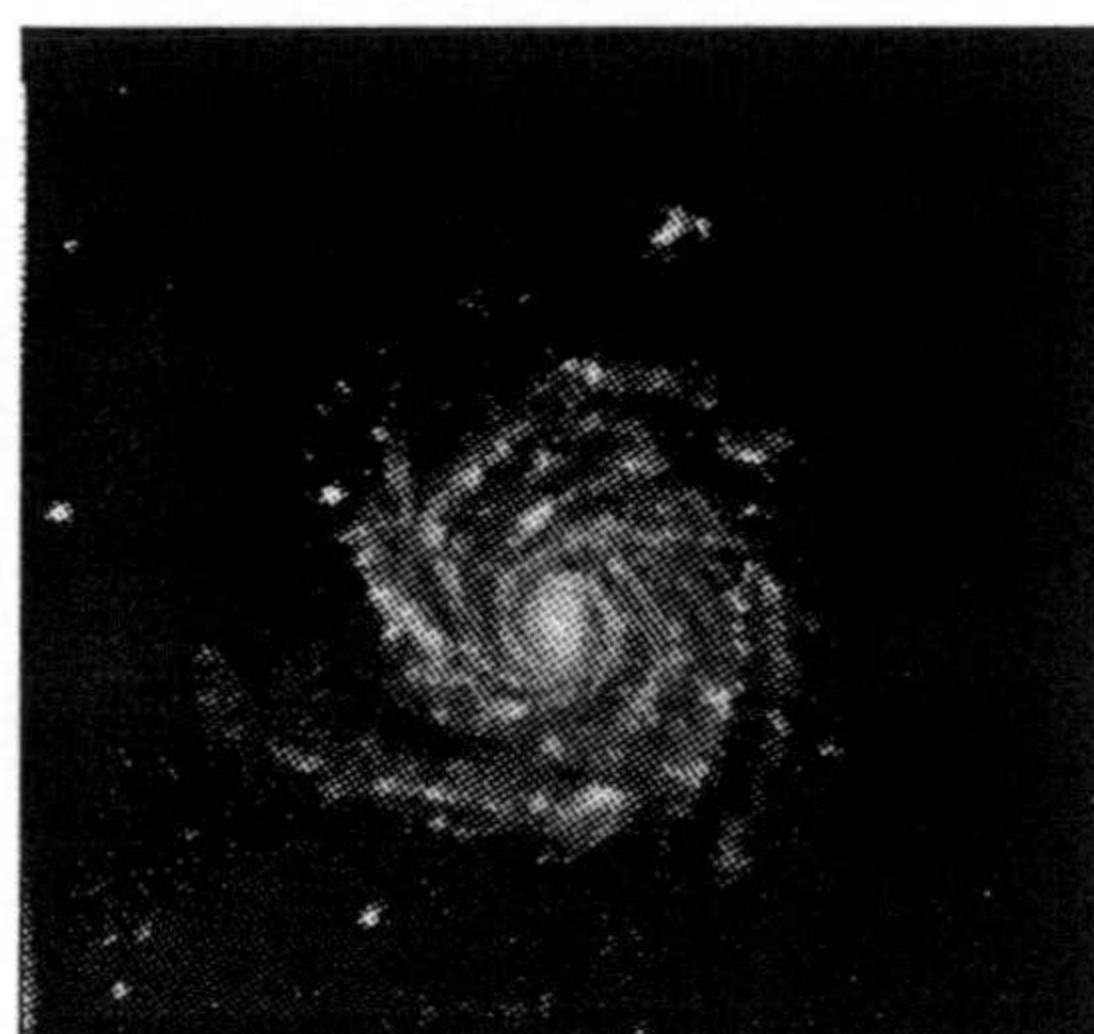
Sa



Sb



Sc



Sc



Al abordar este problema de clasificación surgen varias dificultades. La primera y fundamental viene motivada por el reducido tamaño de la muestra de imágenes de aprendizaje de la que es posible disponer en el mejor de los casos, y que se explica en base a la relativa novedad del riguroso estudio de la clasificación automática de galaxias. Este problema, que condiciona el proceso de creación de una base de datos sobre la cual verificar los procedimientos desarrollados, se tratará en el Apéndice A de la memoria.

La segunda dificultad surge en la identificación de rasgos que caracterizan una galaxia, y es el elevado coste computacional que implica considerar el ajuste iterativo de rasgos (brazo(s) y barra) a la forma, sin tener información adicional sobre la clase general, espiral o elíptica, a la que pertenece la galaxia. Por esta razón abordaremos en el capítulo 3 de esta memoria, la obtención de un método para la identificación inicial, empleando una técnica adecuada de caracterización de formas 2-D.

El tercer problema viene dado por el hecho de que los rasgos brazo(s) y barra presentan diferentes grados de variabilidad. Por tanto si la identificación de un rasgo se realiza en base a la existencia de un modelo teórico que expresa sus características e incluso su posible variación, es claro que la formulación del modelo dependerá del rango de variación que debe capturar, y por lo tanto es necesario considerar formulaciones distintas para rasgos distintos. Así mientras que el patrón teórico para el rasgo 'barra' es relativamente simple en su formulación (dado que posee una variabilidad limitada), en la modelización del rasgo 'brazo espiral' es necesario el empleo de un modelo capaz de capturar el alto grado de variabilidad que puede presentar (ver las imágenes de ejemplo de las dos familias de galaxias). Este problema es tratado en el Capítulo 4, y es presentada una modelización adecuada para cada uno de los rasgos de la forma.

Surge, finalmente, un cuarto problema. Dado que las galaxias determinan objetos tridimensionales y adoptaremos un tratamiento 2-D para el objeto galaxia, es obvio que estamos despreciando una parte de la información presente en la

galaxia. En un porcentaje muy elevado de las imágenes componentes de nuestra base de datos, el plano galáctico es aproximadamente paralelo al plano de la imagen, y por lo tanto se desprecia la información relativa a la estructura perpendicular al plano galáctico, por lo que las galaxias son tratadas como si fueran un disco infinitesimalmente delgado, lo cual es estandar en Astronomía para imágenes con las características de las aquí consideradas. La solución de este problema, es decir la recuperación de la información tridimensional, nos obligaría a asumir un modelo estructural para la galaxia. En este contexto destaca el trabajo de Kormendy [32], desarrollando un método de ajuste iterativo para la descomposición del perfil de las galaxias. Para realizar la descomposición del perfil de las galaxias, es esencial la aplicación de un modelo tridimensional sobre la distribución del volumen de emisión. Hamabe A. et al [22] [23], han desarrollado técnicas para analizar la estructura global tridimensional de las galaxias y pueden verse análisis similares sobre galaxias espirales en Kruit y Searle [34] [35].

## 1.2 Descripción por capítulos de la memoria.

En el Capítulo 2, describimos la idea central del Análisis Bayesiano y discutimos un marco teórico que unifica la representación de patrones. Una vez explicitados los elementos fundamentales de esta teoría, desarrollamos la formulación de los modelos más usuales para imágenes digitales en base a la identificación de estos elementos. También en este marco teórico describimos modelos más geométricos capaces de capturar la geometría local y global de formas.

En el Capítulo 3, presentamos un procedimiento para la clasificación inicial de la galaxia en elíptica (**E**) ó espiral (**S**), empleando una técnica de caracterización de formas 2-D invariante bajo rotaciones, traslaciones y transformaciones de escala. Describimos la información sobre la imagen, necesaria en la clasificación inicial y presentamos a continuación procedimientos orientados hacia su obtención (localización del centro de la galaxia, segmentación de la imagen, estimación del

contorno de la región galaxia y su caracterización mediante la identificación de un patrón teórico sobre la curva de curvaturas asociada a este contorno).

En el Capítulo 4, abordamos la clasificación final, y así sobre una galaxia que ya ha sido clasificada como elíptica, procedemos a determinar el valor de la elipticidad 'e' del contorno de la región galaxia, y a asignarle una subclase de acuerdo a este valor. En otro caso si la galaxia ha sido clasificada como espiral procedemos, en primer lugar, a la identificación de los brazos espirales presentes. En segundo lugar se determina, en base a la presencia o ausencia del rasgo 'barra' y siguiendo el clasificador adoptado (fig. 1.2), si la galaxia espiral es barrada ó no-barrada. En tercer lugar y ya dentro de la subclase espiral barrada ó espiral no-barrada según corresponda, procedemos a la asignación final de tipo a la galaxia, en base al esquema propuesto en el tercer nivel del clasificador (fig. 1.2), para lo cual será necesario la extracción del valor 'v' que expresa la velocidad de cambio de la curvatura sobre el brazo espiral ajustado.

En el Apéndice A, presentamos el procedimiento de captación de imágenes usado en la creación de la base de datos de galaxias, así como una descripción completa de la base sobre la cual aplicamos los resultados desarrollados en la memoria.

Finalmente se incluye un segundo apéndice donde se introduce el problema de la transformación de una imagen digitalizada mediante un mecanismo CCD a una imagen en el rango de los niveles de gris. La principal motivación para abordar este problema, es el hecho de que aunque el procedimiento de clasificación ha sido desarrollado sobre imágenes discretizadas en niveles de gris, su generalización a imágenes CCD necesita de la existencia de dicha transformación.

## Capítulo 2

# PRELIMINARES

### 2.1 Introducción.

En este capítulo, se recogen algunas de las herramientas matemáticas que emplearemos en la presente memoria para abordar la clasificación automática de galaxias, y en esa línea abordamos el estudio de la Teoría de Patrones.

Esta teoría proporciona modelos que en general son adecuados para representar las distintas facetas del proceso de formación de patrones. Además determina un marco teórico unificador donde es posible obtener tanto modelizaciones para el conocimiento empírico sobre un problema (los datos observados) como para el conocimiento a priori, los dos elementos del proceso de inferencia bayesiana que será presentado a continuación.

En el desarrollo que sigue se aborda la descripción de los aspectos más destacados de la Teoría de Patrones, y así en primer lugar serán presentados los elementos fundamentales de esta teoría. En segundo lugar obtendremos como un caso particular la formulación de un modelo para imágenes digitales basado en descripciones sobre píxeles. Finalmente se describe el modelo global de la forma, desarrollado también bajo este marco teórico.

## 2.2 Análisis bayesiano de imágenes.

El astrónomo cuando realiza la identificación visual del tipo morfológico de una galaxia, utiliza como herramienta fundamental el conocimiento adquirido en sus años de experiencia. Por tanto, el proceso natural que usa a la hora de hacer inferencia es la combinación de la información a priori sobre la estructura esperada dentro de la imagen con los datos observados. En este contexto puede usarse el Teorema de Bayes que combina los datos con el modelo a priori previamente especificado, en los términos de la formulación que se describe a continuación.

Consideremos  $S$  una imagen (perteneciente a una clase finito-dimensional  $\mathcal{S}$  de posibles imágenes reales) que podría ser observada bajo condiciones ideales, sin el ruido ni la distorsión que producen el emborronamiento atmosférico y los efectos instrumentales, y supongamos que la distribución  $P(S)$ , con  $S \in \mathcal{S}$ , captura la información a 'priori' sobre la estructura esperada dentro de la imagen. Consideremos además la imagen observada  $Z$  y el proceso de observación modelado en términos de la distribución de probabilidad  $P(Z | S)$  que incorpora los procesos de ruido, distorsión y emborronamiento. Dados estos elementos, la inferencia acerca de  $S$  está basada sobre la distribución a posteriori  $P(S | Z)$  obtenida mediante la expresión

$$P(S | Z) \propto P(Z | S)P(S). \quad (2.1)$$

Esta formulación se emplea de dos formas alternativas dependiendo de la calidad requerida en los resultados. En la primera se realiza la inferencia usando como estimador la imagen  $\hat{S}$  que maximiza las distribuciones marginales a posteriori ( $\hat{S}$  recibe el nombre de estimador MMP).

La segunda forma se obtiene al considerar como estimador el valor  $S^*$  que maximiza  $P(S | Z)$ , es decir

$$P(S^* | Z) = \max_{S \in \mathcal{S}} P(S | Z).$$

Este segundo estimador recibe el nombre de 'máximo a posteriori' (MAP).

La distribución a posteriori  $P(S | Z)$  es una poderosa herramienta para el Análisis de Imágenes, puesto que además de poder construir el estimador MMP ó MAP para la imagen original, también podemos examinar imágenes muestreadas desde  $P(S | Z)$ , estimar parámetros, diseñar test estadísticos para determinar la presencia o ausencia de objetos, u obtener una estimación de la clasificación de los píxeles en clases usando la formulación MMP ó la formulación MAP.

### 2.2.1 Modelización del conocimiento.

La inferencia desde la distribución a posteriori  $P(S | Z)$  en (2.1), exige tener completamente especificado el proceso de observación  $P(Z | S)$  y el modelo a priori  $P(S)$  para el problema concreto, por lo que es necesario describir un marco teórico adecuado para el desarrollo de ambos modelos.

En este contexto la teoría de patrones desarrollada por Grenander ([35], [36], [38]) es un marco unificador para la descripción de imágenes en términos de los procesos que las generan. A continuación presentamos ciertos aspectos de la teoría de patrones que son útiles en la descripción y análisis de los datos observados.

#### Elementos básicos de la Teoría de Patrones.

En el desarrollo que sigue, suponemos que el análisis de la estructura de patrones observados está basado en una teoría de formación de patrones.

Esta teoría describe como los patrones son sintetizados desde bloques elementales de construcción combinados de acuerdo a reglas preestablecidas para asegurar la obtención de una estructura específica. A partir de estos patrones ideales y como resultado de aplicar sobre ellos distintos procesos de deformación (también modelizados en esta teoría) se obtienen los patrones que serán realmente observados.

Los elementos fundamentales de la Teoría de Patrones son cuatro:

- (i) Un espacio de generadores  $G$ , los bloques básicos de construcción. Un ge-

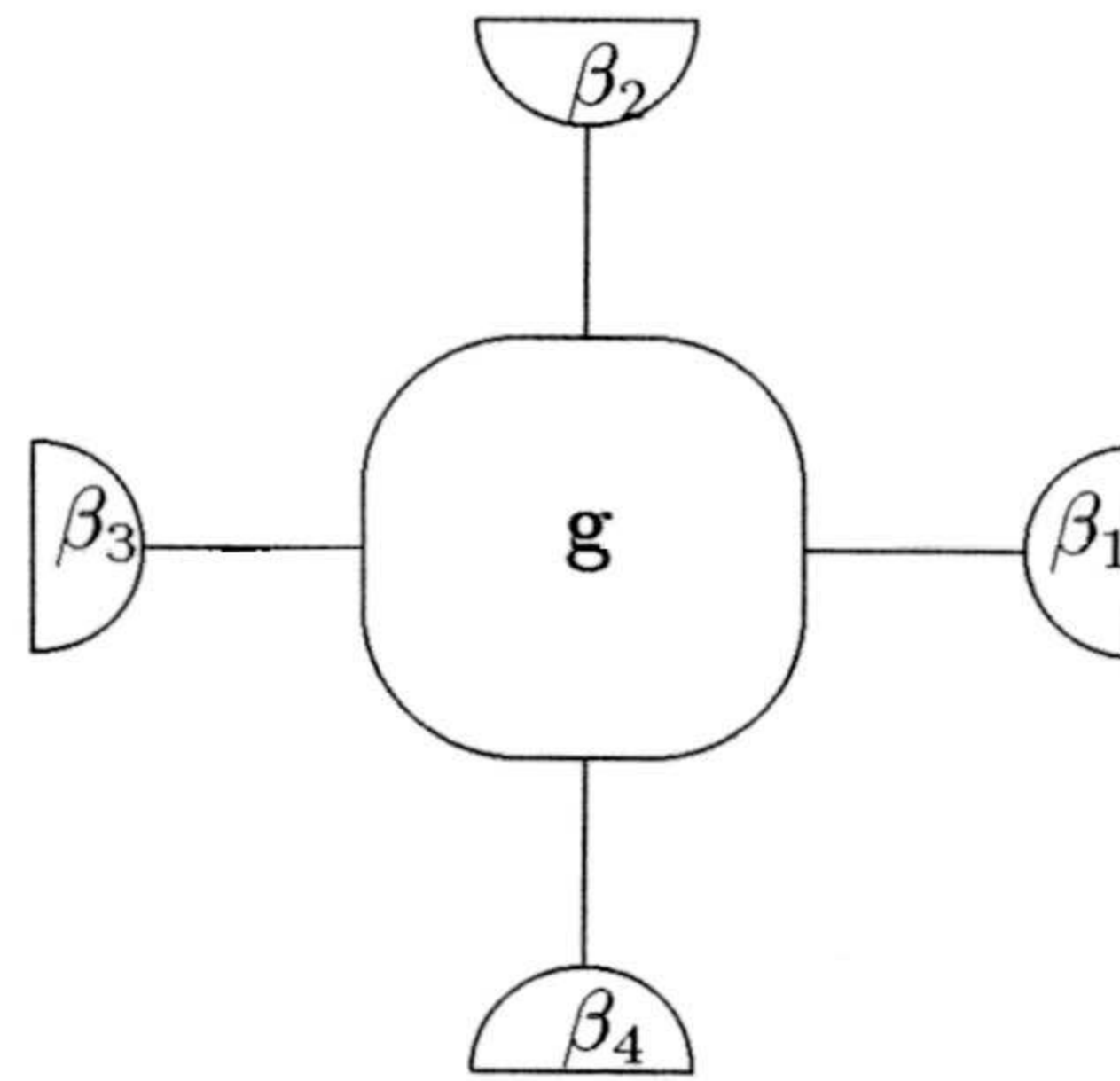


Figura 2.1: *Generador g, de aridad  $w(g) = 4$  y valores de enlace  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ .*

nerador  $g$  tiene *atributos* notados por  $a(g)$  que pueden tomar valores enteros, reales, vectores finitos ó elementos de conjuntos más generales. Además un generador puede tener un *identificador*, un nombre que lo distingue de los demás generadores usados para construir un patrón. Finalmente un generador tiene *enlaces* que determinan como el conjunto de generadores puede estar interconectado, y el número de enlaces de un generador  $g$  es su *aridad* notada por  $w(g)$ . Para determinar cuando un enlace de un generador es compatible con el enlace de otro generador usamos el valor de enlace  $\beta$ .

- (ii) El segundo elemento de esta teoría lo determinan las relaciones de enlace  $R = (\rho, A)$  que definen las estructuras permitidas en el proceso de construcción de los patrones. Notamos  $\rho$  a una relación entre pares de valores de enlace, y notamos por  $A$  el conjunto de estructuras admisibles.

Si consideramos un conjunto de generadores, es posible establecer conexiones entre ellos en base a un grafo conector  $\sigma$  que describe como los generadores, localizados en los nodos del grafo, están asociados entre sí. Un conjunto de generadores conectados determina una configuración  $c$ , y notamos  $C$  al espacio de configuraciones, descrito como

$$C = \{c \mid c = \sigma(g_1, g_2, \dots, g_n), (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n\}$$

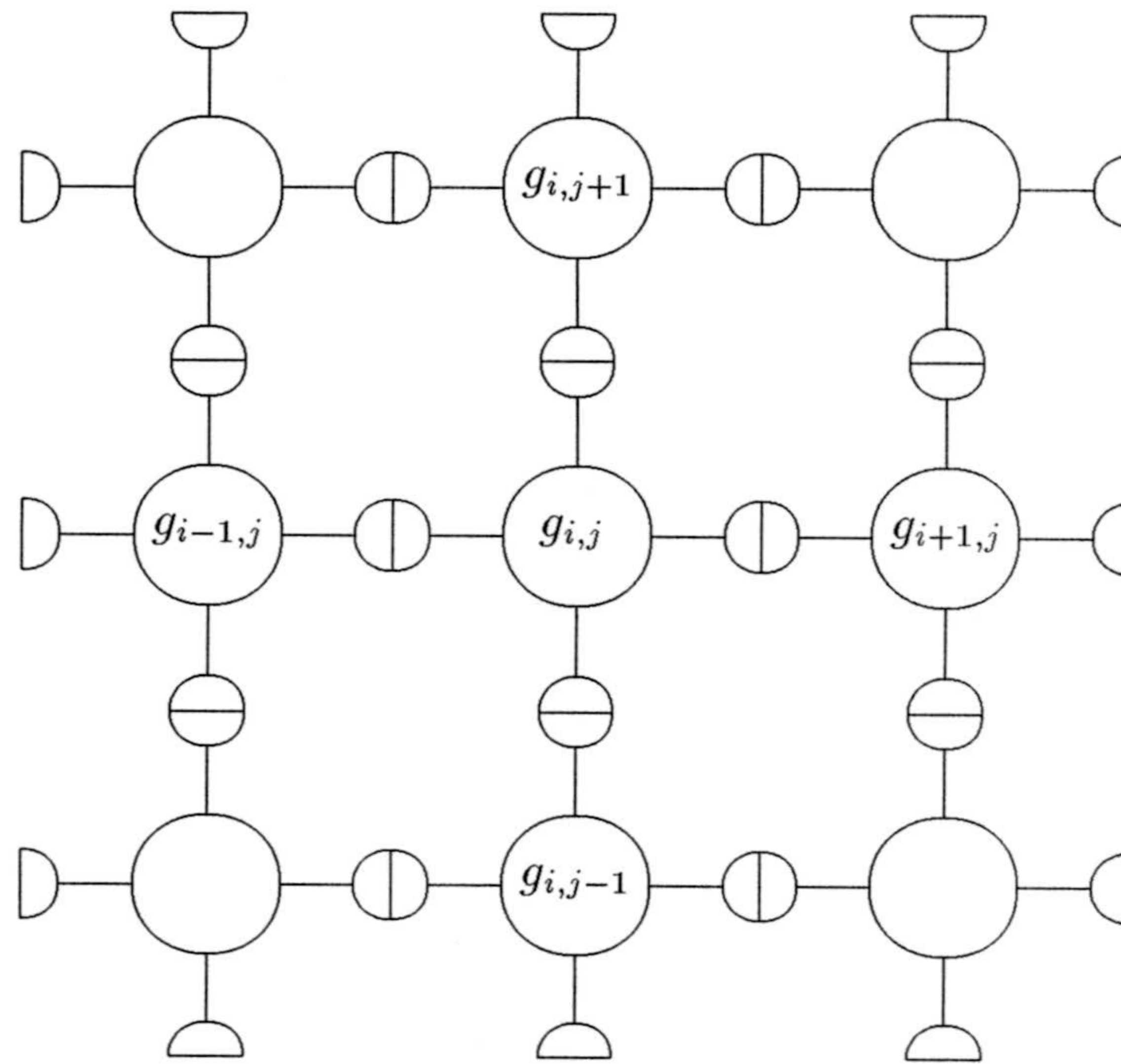


Figura 2.2: Configuración regular finita asociada a la relación de enlace  $(\rho, A)$  que define las estructuras permitidas en el proceso de construcción de imágenes digitales discretas, en donde  $\rho = \text{Igual}$  y  $A = \text{Retículo cuadrado finito}$ .

donde el grafo  $\sigma$  tiene  $n$  nodos. Una configuración  $c$  tiene *contenido*, el conjunto de generadores asociados, y *estructura*, el grafo  $\sigma$  que los conecta. Entonces  $c$  es regular de acuerdo al sistema de reglas  $R = (\rho, A)$ , y posee una estructura admisible, si verifica en primer lugar que  $\sigma \in A$ , y en segundo lugar la relación  $\beta\rho\hat{\beta}$  es verdadera para los valores de enlace  $\beta$  y  $\hat{\beta}$  de cualquier par de generadores conectados. Notaremos por  $C(R)$  el conjunto de configuraciones regulares.

- (iii) El tercer elemento de la teoría de patrones es la regla de identificación, introducida con el objetivo de distinguir rasgos de los patrones que son observables de otros que no lo son.

Esta regla define una relación de equivalencia  $R$  sobre  $C(R)$  que induce



una partición de  $C(R)$  en clases de equivalencia, y el conjunto de clases de equivalencia  $\mathcal{I} = C(R)/\mathbb{R}$  define el ‘álgebra de imágenes ideales’.

La estructura algebraica definida sobre  $C(R)$  induce la estructura asociada a  $\mathcal{I}$ , y es posible extender transformaciones de similaridad definidas sobre  $C(R)$  a transformaciones de similaridad bien definidas sobre  $\mathcal{I}$ .

La regla de identificación se usa para formalizar en el modelo la situación que se produce cuando dos configuraciones distintas  $c$  y  $c'$  en  $C(R)$ , pueden ser consideradas iguales dependiendo de como el observador obtenga la información sobre ellas y de como procese esta información. Así por ejemplo si las configuraciones  $c$  y  $c'$  determinan un par de imágenes digitales, el observador puede considerarlas equivalentes si es posible obtener una a partir de otra aplicando una adecuada transformación de rotación.

- (iv) El último elemento en los modelos de esta teoría es el mecanismo de deformación que relaciona imágenes observadas con imágenes ideales, considerando la deformación como una transformación  $D$  que aplica el álgebra  $\mathcal{I}$  en el conjunto de imágenes deformadas  $\mathcal{I}^D$

$$D : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}^D.$$

Así si los patrones considerados son los modelos habituales para imágenes digitales podemos encontrar dos tipos de deformaciones:

- (1) *aleatorias*, por ejemplo la deformación por ruido aditivo

$$\mathcal{I}^D = \mathcal{I} + \xi$$

donde notamos  $\xi$  al ruido aleatorio,

- (2) *no aleatorias*, por ejemplo el emborronamiento de las imágenes.

La especificación del mecanismo de deformación determina uno de los dos elementos para la inferencia bayesiana, concretamente el proceso de obser-

vación usado en la extracción de información empírica sobre el problema (las imágenes observadas).

Un importante aspecto de la teoría de patrones es la posibilidad de cuantificar la frecuencia de ocurrencia de las configuraciones o las imágenes ideales, ya que además de estos cuatro elementos es posible definir medidas de probabilidad sobre las imágenes.

Los patrones reales no son perfectamente regulares sino que exhiben un alto grado de variabilidad, y la dicotomía estructura regular/no regular es demasiado estricta para permitir capturar esta variabilidad. Se hace entonces necesario manejar un rango de valores de regularidad que se formula en términos de la asignación de una probabilidad a cada configuración (de forma que a mayor regularidad corresponde mayor probabilidad de ocurrencia).

A continuación presentamos una medida de probabilidad, a priori, sobre  $C(R)$ , describiendo como surge de forma natural al relajar la regularidad.

La regularidad estricta de una configuración  $c = \sigma(g_1, g_2, \dots, g_n)$  se formula como

$$\bigwedge_{\sigma} \beta_j(g_i) \rho \beta_{j'}(g_{i'}) = Verdad \quad (2.2)$$

en donde la conjunción se aplica sobre todos los pares de enlace que aparecen en el grafo  $\sigma$ . Entonces la relajación de esta regularidad estricta (2.2) se realiza sustituyendo la relación  $\rho$  sobre  $B \times B$ , donde  $B$  es el conjunto de los valores de enlace, por dos funciones:

- (1) una función de 'admisibilidad'  $A$  sobre  $B \times B$  que expresa la dependencia entre dos generadores conectados, y
- (2) una medida de probabilidad  $Q$  que expresa la probabilidad de ocurrencia de un determinado generador.

Estas dos funciones nos permiten sustituir la regularidad bi-valuada (estructura regular/no-regular) por una regularidad multivaluada (la regularidad de una

configuración se determina entonces como un valor en el intervalo  $[0, 1]$ ) que define la medida de probabilidad sobre  $C$

$$p(c) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^n Q(g_i) \prod_{\sigma} A[\beta_j(g_i), \beta_{j'}(g_{i'})] \quad (2.3)$$

donde el primer producto se aplica sobre todas las posibles localizaciones de generadores,  $i = 1, \dots, n$ , en el grafo  $\sigma$ , el segundo producto recorre todos los pares de enlace que aparecen en el grafo  $\sigma$ , y notando  $Z$  a la constante de normalización definida como

$$Z = \sum_{c \in C} p(c)$$

Haciendo una analogía con la física estadística notaremos por  $T$  a un parámetro positivo que expresa la 'temperatura' del patrón, y notaremos por  $E(c)$  a la energía total de  $c$ , que expresa la suma de todas las energías de interacción para un grafo  $\sigma$  fijo

$$E(c) = \sum_{i=1}^n k(g_i) + \sum_{\sigma} h(\beta_l, \beta_{l'}) \quad (2.4)$$

donde la primera suma representa las auto-interacciones de los generadores, la segunda suma recorre todos los pares de enlace en  $\sigma$  y la función  $h$  expresa la energía de interacción entre pares de enlaces.

La relación existente entre las energías del patrón,  $h$  y  $k$ , y las funciones  $Q$  y  $A$  en (2.3) se puede expresar como

$$Q(g) = K_1 \exp \left\{ -\frac{k(g)}{T} \right\} \quad (2.5)$$

$$A(\beta', \beta'') = K_2 \exp \left\{ -\frac{h(\beta', \beta'')}{T} \right\} \quad (2.6)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes de normalización adecuadas. Entonces se obtiene desde (2.3) que la probabilidad  $p_T(c)$  asociada a la configuración  $c$  es proporcional a

$$\exp \left\{ -\frac{E(c)}{T} \right\} \quad (2.7)$$

El comportamiento de la medida  $p_T(c)$  cuando  $T$  decrece a 0 es muy interesante ya que en el límite determina una medida uniforme sobre el conjunto  $M$  de

configuraciones de mínima energía

$$M = \{c' \mid E(c') = \min_c E(c)\}.$$

La densidad de probabilidad  $p$  sobre  $C$  definida en (2.3) induce una medida de probabilidad sobre el algebra de imágenes  $\mathcal{I}$ , de forma que si notamos  $I$  a una clase de equivalencia en  $\mathcal{I}$  tendremos que

$$P(I) = \sum_{c \in I} p(c).$$

Esta medida de probabilidad  $P$  se puede usar en un contexto bayesiano para modelar el conocimiento a priori sobre el problema.

La Teoría de Patrones es por tanto un marco teórico unificador donde se puede formular tanto el modelo a priori como el proceso de observación, ambos elementos esenciales en inferencia bayesiana.

### **Expresión de un modelo de la imagen basado en descripciones sobre píxeles en el marco de la teoría de patrones.**

Los modelos para imágenes digitales basados en descripciones sobre píxeles, determinan un ejemplo de una de las posibles interpretaciones para los elementos básicos de la teoría de patrones (generadores, relaciones de enlace, configuraciones, etc). Para constatar la validez de este hecho, abordaremos a continuación la explicitación de esos elementos básicos para el modelo en cuestión.

En este contexto la imagen se discretiza como un conjunto finito de puntos del plano que notaremos por  $Z$ , y donde

$$Z = \{z_{ij} = (x_i, y_j) \mid x_i \text{ e } y_j \text{ valores enteros, } 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M\}.$$

La estructura  $A$  adecuada para modelos sobre píxeles debe de ser capaz de reflejar las disposiciones espaciales de los píxeles, y por tanto adoptamos una elección para  $A$  de retículo rectangular finito, con el tipo de conexiones mostrado en la figura 2.2.

Un generador, en este modelo, describe la intensidad luminosa (o nivel de gris) de la imagen sobre un pixel  $z$  en  $Z$ , y por tanto los generadores determinan transformaciones de  $Z$  a un espacio de contraste finito  $\Lambda$  contenido en la recta real.

Cada generador  $g_{i,j}$  asociado al pixel  $z_{i,j}$  del interior del retículo, es decir verificando que

$$1 < i < N \text{ y } 1 < j < M$$

tiene aridad  $w(g_{i,j}) = 4$ , mientras que los generadores asociados a píxeles que se encuentran en la frontera del retículo tienen una aridad inferior (supuesto que adoptamos un modelo de fronteras libres para describir los vecinos de un pixel frontera). Concretamente los generadores

$$g_{1,1}, g_{1,M}, g_{N,1} \text{ y } g_{N,M}$$

asociados a los píxeles 'esquina'

$$z_{1,1}, z_{1,M}, z_{N,1}, \text{ y } z_{N,M}$$

tienen aridad 2, es decir

$$w(g_{1,1}) = w(g_{1,M}) = w(g_{N,1}) = w(g_{N,M}) = 2$$

y el resto de generadores asociados a píxeles 'frontera' tienen aridad 3, por tanto

$$w(g_{1,j}) = w(g_{N,j}) = 3, \text{ si } 1 < j < M$$

y

$$w(g_{i,1}) = w(g_{i,M}) = 3, \text{ si } 1 < i < N.$$

El conjunto de los generadores  $G$  es el conjunto finito

$$G = \{g_{i,j} \in \Lambda \mid 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M\}.$$

En este desarrollo cada generador  $g_{i,j}$ , con  $1 < i < N$  y  $1 < j < M$ , tendrá cuatro enlaces ( $\beta_{i,j}^1, \beta_{i,j}^2, \beta_{i,j}^3$  y  $\beta_{i,j}^4$ ) correspondientes a las cuatro direcciones

del pixel asociado (este, norte, oeste y sur), pero es posible la generalización a modelos con generadores de aridad superior.

El generador  $g_{i,j}$  tiene como atributo  $a(g_{i,j})$  el par de valores enteros  $(x_i, y_j)$

$$a(g_{i,j}) = (x_i, y_j)$$

y los valores de enlace de  $g_{i,j}$ , si este determina un generador en el interior del retículo, son

$$\beta_{i,j}^1 = (x_i + \frac{1}{2}\xi_1, y_j)$$

$$\beta_{i,j}^2 = (x_i, y_j + \frac{1}{2}\xi_2)$$

$$\beta_{i,j}^3 = (x_i - \frac{1}{2}\xi_1, y_j)$$

$$\beta_{i,j}^4 = (x_i, y_j - \frac{1}{2}\xi_2),$$

en donde generalmente  $\xi_1 = \xi_2 = 1$ . De forma semejante se definen, cuando tienen sentido, los valores de enlace asociados a generadores en la frontera del retículo. Así por ejemplo los valores de enlace del generador  $g_{1,1}$  son

$$\beta_{1,1}^1 = (x_1 + \frac{1}{2}\xi_1, y_1)$$

$$\beta_{1,1}^4 = (x_1, y_1 + \frac{1}{2}\xi_2)$$

mientras que  $\beta_{1,1}^2$  y  $\beta_{1,1}^3$  no están definidos (la aridad del generador  $g_{1,1}$  es 2).

Supondremos que el enlace correspondiente a la dirección este de  $g_{i,j}$  esta unido (es la continuación) del enlace 'dirección oeste' de  $g_{i+1,j}$ , que el enlace correspondiente a la 'dirección norte' de  $g_{i,j}$  esta unido (es la continuación) del enlace 'dirección sur' de  $g_{i,j+1}$ , etc. La relación de enlace  $\rho = IGUAL$  asegura que los píxeles sean contiguos ( estamos considerando que la relación de enlace es la igualdad de funciones).

La regla de identificación  $R$  se define como la relación de igualdad, y el conjunto cociente que se obtiene al definir esta relación de equivalencia sobre  $C(R)$  coincide por tanto con el espacio de configuraciones regulares, es decir

$$\mathcal{I} = C(R).$$

La obtención de la probabilidad  $P$  sobre  $C$  es inmediata a partir de (2.3),(2.5) y (2.6), y se define como

$$P_T(c) = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left( \sum_{i,j} k(g_{i,j}) + \sum_{\sigma} h(\beta_{i,j}^l, \beta_{i',j'}^{l'}) \right) \right\} \quad (2.8)$$

La elección considerada para la relación de enlace  $R = (\rho, A)$ , donde  $\rho =$  Igualdad y  $A$  un retículo cuadrado finito, induce sobre la probabilidad  $P$  una propiedad de markovianidad, ya que

$$P(g_{i,j} | resto) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left( k(g_{i,j}) + \sum_{\beta_{i,j}^l = \beta_{i',j'}^{l'}} h(\beta_{i,j}^l, \beta_{i',j'}^{l'}) \right) \right\} \quad (2.9)$$

es decir

$$P(g_{i,j} | resto) = P(g_{i,j} | g_{i',j'} \text{ conectados con } g_{i,j}) \quad (2.10)$$

La hipótesis de dependencia local sobre los píxeles de la imagen astronómica es aceptable, y podría ser justificada intuitivamente en base al suave decrecimiento que experimenta la intensidad luminosa sobre la galaxia desde su centro hacia el fondo de la imagen (ver las imágenes presentadas en el Apéndice A). Obtenemos entonces, que una clase de modelos a priori sobre píxeles, válida para este tipo de imágenes, viene determinada por la clase de modelos que aquí han sido descritos, y en este marco Seiden y otros [83] y Garcia y otros [20] determinan ejemplos de su utilización sobre imágenes astronómicas.

### Modelos a priori más geométricos: Modelo global de la forma de Grenander.

En el campo de la biología, Grenander [37] sobre formas de manos humanas y Knoerr [54] sobre una clase de hojas específicas, aplican un modelo matemático de la forma, más geométrico que los basados en descripciones sobre píxeles, que intenta capturar la estructura característica en términos de un 'esqueleto' y la posible variabilidad en la forma en términos del conjunto de transformaciones que

habría que aplicar al ‘esqueleto’ para producir cualquier individuo de la población de formas consideradas.

En Grenander y Keenan [38], se desarrolla el modelo teórico de la forma. Dicho modelo consta de cuatro componentes:

- (i) un espacio de generadores ( $G$ )
- (ii) un grafo conector ( $\sigma$ )
- (iii) relaciones de enlace ( $R = (\rho, A)$ )
- (iv) grupo de transformación ( $S; S : G \rightarrow G$ )

Un modelo de la forma debe de ser capaz de capturar la estructura geométrica global y las características geométricas locales. Los tres primeros componentes son elementos de la teoría de patrones y permiten capturar la geometría local en términos de las condiciones de regularidad impuestas. Sin embargo no podrán expresar la estructura global. Aquí es donde aparece el cuarto elemento del modelo (iv).

Se elige una configuración particular  $c^0$

$$c^0 = \sigma(g_0^0, g_1^0, \dots, g_{n-1}^0) \in C(R)$$

fijando  $(g_0^0, g_1^0, \dots, g_{n-1}^0) \in G^n$ .  $c^0$  es el ‘esqueleto’ y representa el prototipo de la forma que está siendo modelada. Para obtener el subconjunto de  $C(R)$  que define la forma de interés se procede a aplicar transformaciones  $s_j \in S$  a cada generador  $g_j^0 \in G$  del esqueleto, exigiendo que la configuración resultante sea regular:

$$E(c^0) = \{c \mid c = \sigma(s_0 g_0^0, s_1 g_1^0, \dots, s_{n-1} g_{n-1}^0) \in C(R), (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in S^n\}.$$

Haciendo esto para todo  $c^0$ , obtenemos una relación de equivalencia sobre  $C(R)$ , y las clases de equivalencia,  $E(C^0)$ , determinan las distintas clases de formas. Con el fin de obtener geometrías suficientemente generales permitimos que diferentes tipos de transformaciones sean aplicadas a diferentes generadores.

Observamos por tanto que el modelo de la forma considerado consta de



- (1) los cuatro elementos antes citados, y
- (2) un 'esqueleto' que describe la arquitectura de la forma.

Puesto que las transformaciones asociadas expresan la variabilidad de la forma, recibirán el tratamiento de variables aleatorias, ya que determinan el componente aleatorio del modelo. Un procedimiento general es considerar que las transformaciones  $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$  son dadas por un proceso de markov S-valuado sobre el grafo de aristas, asociado con el grafo conector  $\sigma$

$$\frac{1}{Z} \prod_{(i_1, i_2)} A(s_{i_1}, s_{i_2}) \prod_i Q(s_i)$$

$(i_1, i_2)$  : aristas vecinas

i: arista

A: función de Aceptación (expresa la dependencia estocástica entre  $s_{i_1}$  y  $s_{i_2}$ )

Q: función de peso (expresa la variación de preferencias entre los s-valores)

Z: constante de normalización

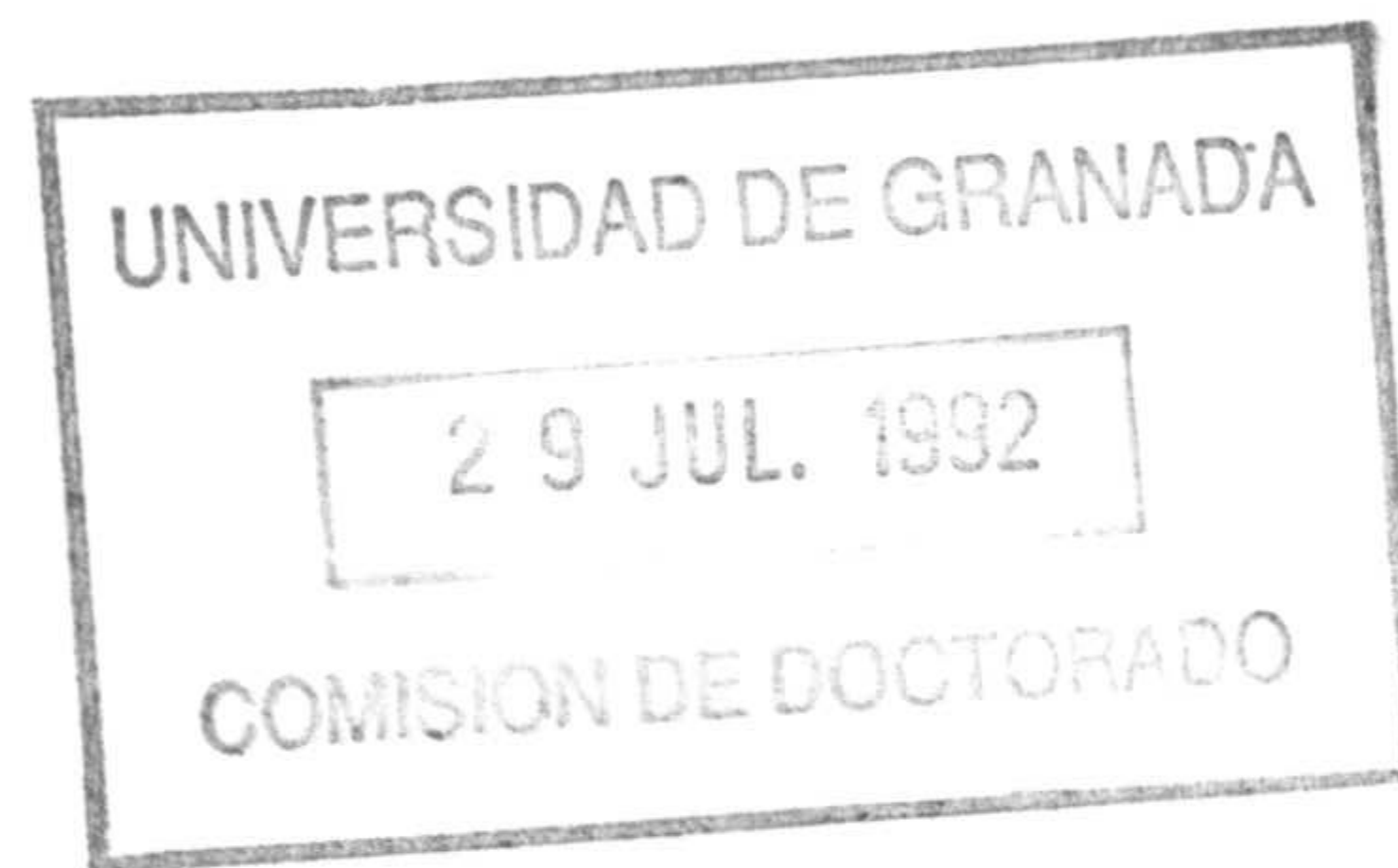
Por lo tanto, el modelo global de la forma se define en términos de los componentes (1),(2) antes considerados, junto a

- (3) un proceso de Markov sobre el grupo de transformaciones consideradas, que expresa las variaciones aleatorias de la forma.

La deseada geometría local y global es controlada, por tanto, a través de:

- (a) la especificación del esqueleto,
- (b) la elección del grupo de transformaciones, y
- (c) los valores de los parámetros del proceso de Markov.

Para finalizar este capítulo, donde se ha discutido la modelización del conocimiento implicado en un proceso de inferencia bayesiana, diremos que los modelos presentados en las últimas dos secciones (los modelos basados en descripciones sobre píxeles y el modelo global de la forma) se emplean a continuación en el procesamiento de la imagen y para la identificación de rasgos esenciales en la clasificación inicial y final de la galaxia.





## Capítulo 3

# CARACTERIZACION

# INICIAL

### 3.1 Introducción.

El problema abordado en este capítulo es la caracterización de galaxias espirales y de galaxias elípticas.

La solución de este problema exige determinar un modelo de representación para la galaxia que sea adecuado para su caracterización. Esta representación tendrá que ser simple, manejable y capaz de reflejar el rango de variabilidad que puede presentar la galaxia.

La obtención de una representación para la forma, implica un proceso de reducción de la información contenida en la imagen que finalmente produce el modelo usado en la caracterización de la galaxia espiral y elíptica.

En este contexto se enmarca el desarrollo que sigue, estructurado en dos secciones.

En la primera sección se desarrolla un proceso orientado a la extracción sobre la imagen digital de una curva plana y cerrada, que se deforma significativamente si aparecen brazos espirales en la galaxia, y que adopta una forma aproximada-

mente elíptica sobre galaxias de este tipo.

En la segunda sección se describen tres procedimientos de caracterización de la forma, que usan directa o indirectamente la representación de la galaxia que induce la curva plana extraída.

### 3.2 Un modelo para la representación de la forma.

La imagen digital  $I$ , donde

$$I = \{x_{(i,j)}^G \mid 1 \leq i, j \leq N\}$$

y  $x_{(i,j)}^G$  nota el nivel de gris observado en el pixel  $(i, j)$ , determina el conocimiento empírico sobre la galaxia.

La detección del rasgo brazo sobre  $I$ , permite identificar la galaxia como espiral. Pero la cantidad de información contenida en  $I$  es excesivamente elevada para poder diseñar procedimientos eficientes de caracterización. Luego resulta de interés determinar una forma de representación más adecuada.

En esa línea y en el desarrollo siguiente, describimos la extracción de una región del plano que adopta una forma aproximadamente elíptica sobre galaxias de este tipo, pero que sobre galaxias espirales muestra deformaciones producidas por los brazos presentes.

En este desarrollo analizamos si la forma característica de esta región es una herramienta suficiente para caracterizar galaxias espirales y elípticas.

Una representación adecuada para esta región es su frontera, dado que nuestra atención se centra sobre sus características externas (de manera específica las deformaciones de la región que producen los brazos si están presentes en la galaxia).

La frontera de esta región determina una curva plana y cerrada, que induce una representación simple de la forma global de la galaxia, y para la que es posible

diseñar procedimientos eficientes de caracterización.

En el esquema aquí desarrollado se considera que la caracterización del objeto bidimensional galaxia es inducida desde una adecuada caracterización para una curva plana asociada a él, y en esta misma línea de caracterizar formas 2D en base a una curva, se han desarrollado varias técnicas:

- (1) La transformada de Hough se ha usado para detectar formas simples (como líneas rectas en Hough [44], o círculos en Duda y Hart [16]) e incluso formas arbitrarias en imágenes (Ballard [3] y Davies [10]). La idea general que preside estos métodos es que en una transformada de Hough los elementos arista en la imagen 'votan' a favor de los parámetros de los objetos a los que podrían estar asociados y todos los 'votos' son registrados en un espacio paramétrico. Las 'puntuaciones' más altas indican la localización de los objetos en la imagen, con el riesgo de que pueden aparecer 'puntuaciones' falsas en el acumulador matricial debido a identificaciones erróneas con los datos. Su uso está especialmente indicado en ambientes controlados y sobre imágenes poco ruidosas.
- (2) La codificación de cadenas (Freeman [19], McKee y Aggarwal [63]) y las aproximaciones poligonales (Pavlidis [73] [74]) han sido también usadas en la representación de señales y curvas, pero no pueden aplicarse a nuestro problema puesto que en general no determinan técnicas invariantes frente a las transformaciones consideradas.
- (3) El contorno de un objeto bidimensional determina una curva plana que se puede considerar como una secuencia de segmentos de curvatura constante, separados por pequeñas zonas donde la curvatura varía rápidamente, y por tanto se obtiene otro método de representación de la curva plana al localizar estos puntos de máxima curvatura y conectarlos usando alguna forma de interpolación. Se han propuesto diferentes modelos para este método de

representación y una extensa recopilación de ellos se puede encontrar en Teh y Chin [91].

- (4) La representación de una curva plana en el espacio generalizado de escala (Mokhtarian [64]) es invariante bajo rotaciones, traslaciones y homotecias. La construcción del espacio de escala de la curva se basa en la búsqueda de los ceros de la curvatura a distintas escalas, luego el modelo de representación resultante contiene información sobre la curva a diferentes niveles de detalle. Estas propiedades hacen adecuado el espacio generalizado de escala para el matching.

En la línea de los dos últimos enfoques considerados, el tercer procedimiento de caracterización que desarrollamos usa la curva de curvaturas asociada a un contorno extraído de la forma. Pero en nuestro problema disponemos de conocimiento a priori sobre los rasgos de la curva de curvaturas que de forma significativa la caracterizan. Luego se justifica el desarrollo de un procedimiento de caracterización que en lugar de analizar en su totalidad las curvaturas, realiza una búsqueda de estos rasgos significativos.

En el desarrollo que sigue y en primer lugar, describimos un procedimiento de segmentación de la imagen, orientado a la extracción de una región cuya frontera es la curva plana y cerrada que induce la representación de la forma galaxia.

### **3.2.1 Segmentación de la imagen.**

#### **3.2.1.1 Clases de la imagen segmentada.**

En el proceso de segmentación que describimos, los píxeles de la imagen se clasifican en cuatro clases de acuerdo a su nivel de gris.

El número de clases en la segmentación, se obtiene a partir del siguiente esquema iterativo, que considera inicialmente una segmentación en dos clases. Dado que no existe ninguna región en esta partición, que muestre de manera

significativa las características externas deseadas (rasgos morfológicos que revelen la presencia de brazos cuando están presentes en la forma), será necesario intentar una segmentación considerando un número superior de clases.

El proceso de búsqueda del número adecuado de clases, se detiene al obtener sobre la imagen segmentada en cuatro clases, una región con las características exigidas.

La partición de la imagen se obtiene aplicando un procedimiento robusto y que usa información contextual sobre una segmentación inicial obtenida por umbralización.

En la selección de los valores de umbral (usados en la extracción de la segmentación inicial), se ha aplicado un algoritmo descrito en Mardia [62]. Mardia [62] muestra como el valor de umbralización que se obtiene se puede deducir empleando una regla de discriminación estadística bien conocida:

Sea una imagen que contiene  $K$  clases  $\Pi_i$ , con  $i = 1, \dots, K$ . Notemos por  $p_i$  la probabilidad a priori asociada a la clase  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ . Además notemos  $Z$  el nivel de gris en un pixel del retículo. Si  $l_i(Z)$  es la verosimilitud de pertenencia a la clase  $\Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , entonces la regla de clasificación Bayesiana asigna  $Z$  a la clase  $\Pi_j$  que verifica

$$p_j l_j(Z) = \max_{i=1, \dots, K} p_i l_i(Z).$$

Si el nivel de gris  $Z$  en la clase  $\Pi_i$  se distribuye según una ley Normal de media  $\mu_i$  y varianza  $\sigma_i^2$ , tendremos que la maximización de  $p_i l_i(Z)$  será equivalente a la maximización de  $S_i$ , donde

$$S_i = \log p_i - \frac{1}{2} \frac{(Z - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_i^2)$$

Esta regla de asignación se puede reformular en términos de valores de umbralización.

Así cuando  $K = 2$  y para  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , la regla de clasificación bayesiana



produce la partición de la imagen en dos clases de acuerdo al umbral

$$t = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_2)} \log \frac{p_2}{p_1} .$$

En general el fondo de la imagen (la clase  $\Pi_1$ ) es mas uniforme que la galaxia (la clase  $\Pi_2$ ) donde se observa una mayor variación en los niveles de gris. Luego la suposición  $\sigma_1 < \sigma_2$  sería mas realística.

En este caso ( $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ), el algoritmo de umbralización que particiona la imagen en dos clases, requiere dos valores de umbral  $t_+$  y  $t_-$  dados por

$$t_{\pm} = \frac{\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \pm \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \left\{ (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \log \frac{\sigma_1 p_2}{\sigma_2 p_1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

En este caso la regla de clasificación es:

$$Z \text{ pertenece a } \Pi_1 \text{ si } t_+ < Z < t_-,$$

en otro caso  $Z$  pertenece a  $\Pi_2$ .

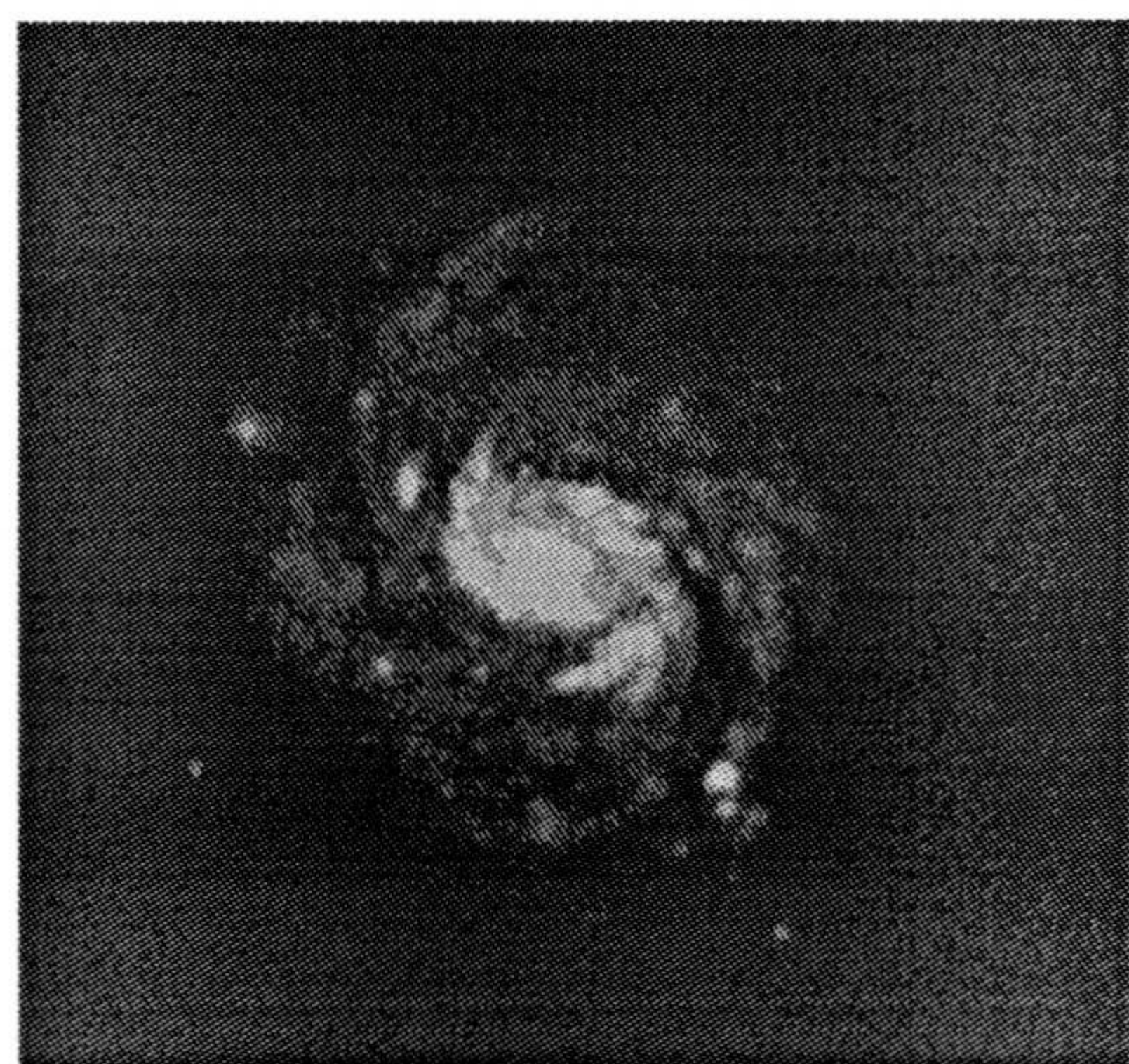
En la práctica los parámetros  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $p_i$ , con  $i = 1, \dots, K$ , son todos desconocidos por lo que deben ser previamente estimados sobre la imagen segmentada de manera provisional.

La segmentación inicial puede estar sensiblemente alejada de la segmentación correcta, justificandose la aplicación sobre ella de un procedimiento robusto de partición que usa información contextual. Este procedimiento se describe en la subsección 3.2.1.3.

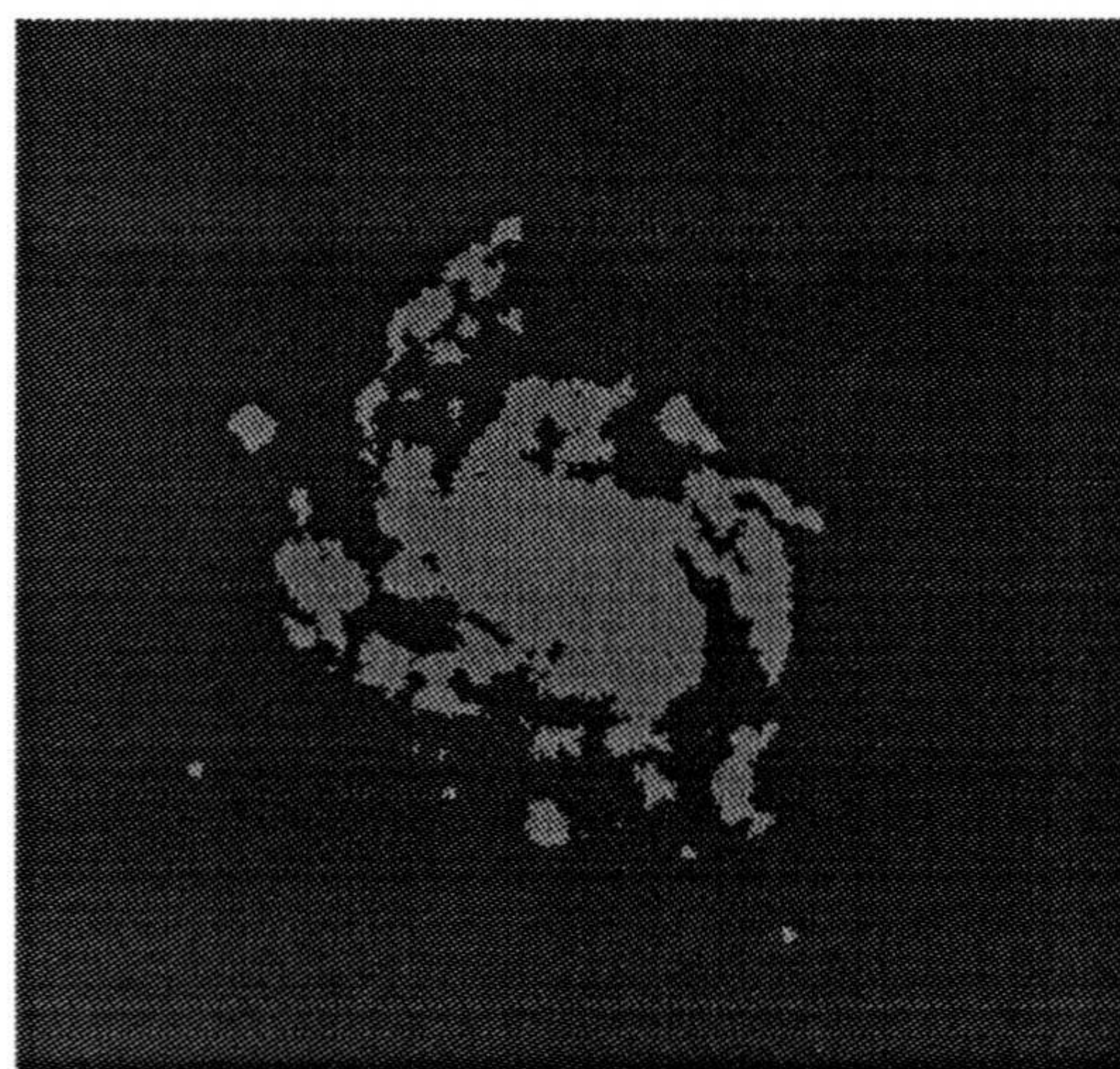
La partición de la imagen en dos clases de píxeles produce segmentaciones semejantes a las mostradas en las figuras 3.1 y 3.2.

Las dos clases obtenidas en la partición se pueden identificar (usando información relativa a los niveles de gris asociados) como

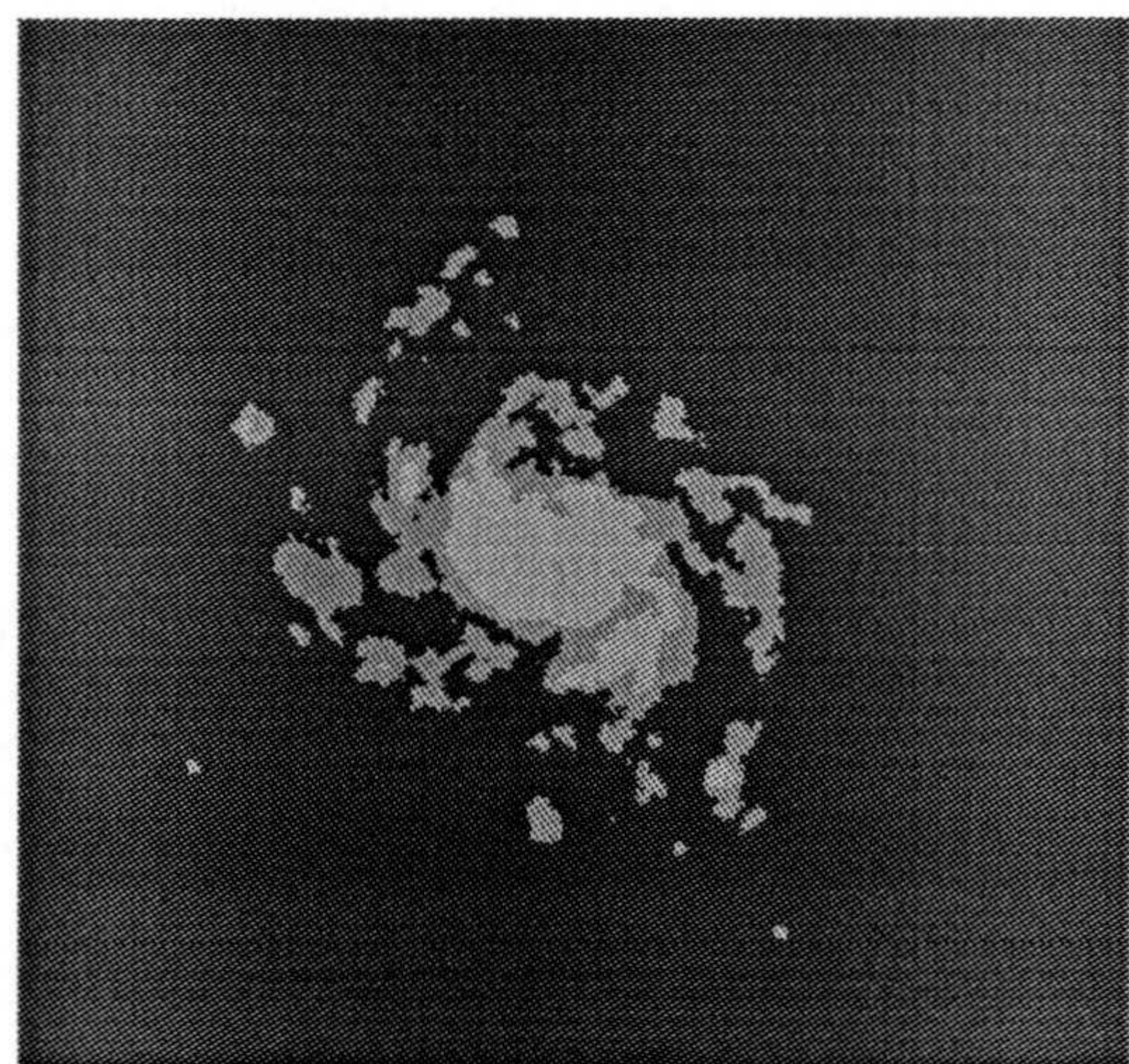
- (2.A) una primera clase de píxeles con nivel de gris bajo y aproximadamente constante, que se localizan en el fondo de la imagen, y
- (2.B) una segunda clase a la que pertenecen los píxeles localizados en la galaxia.



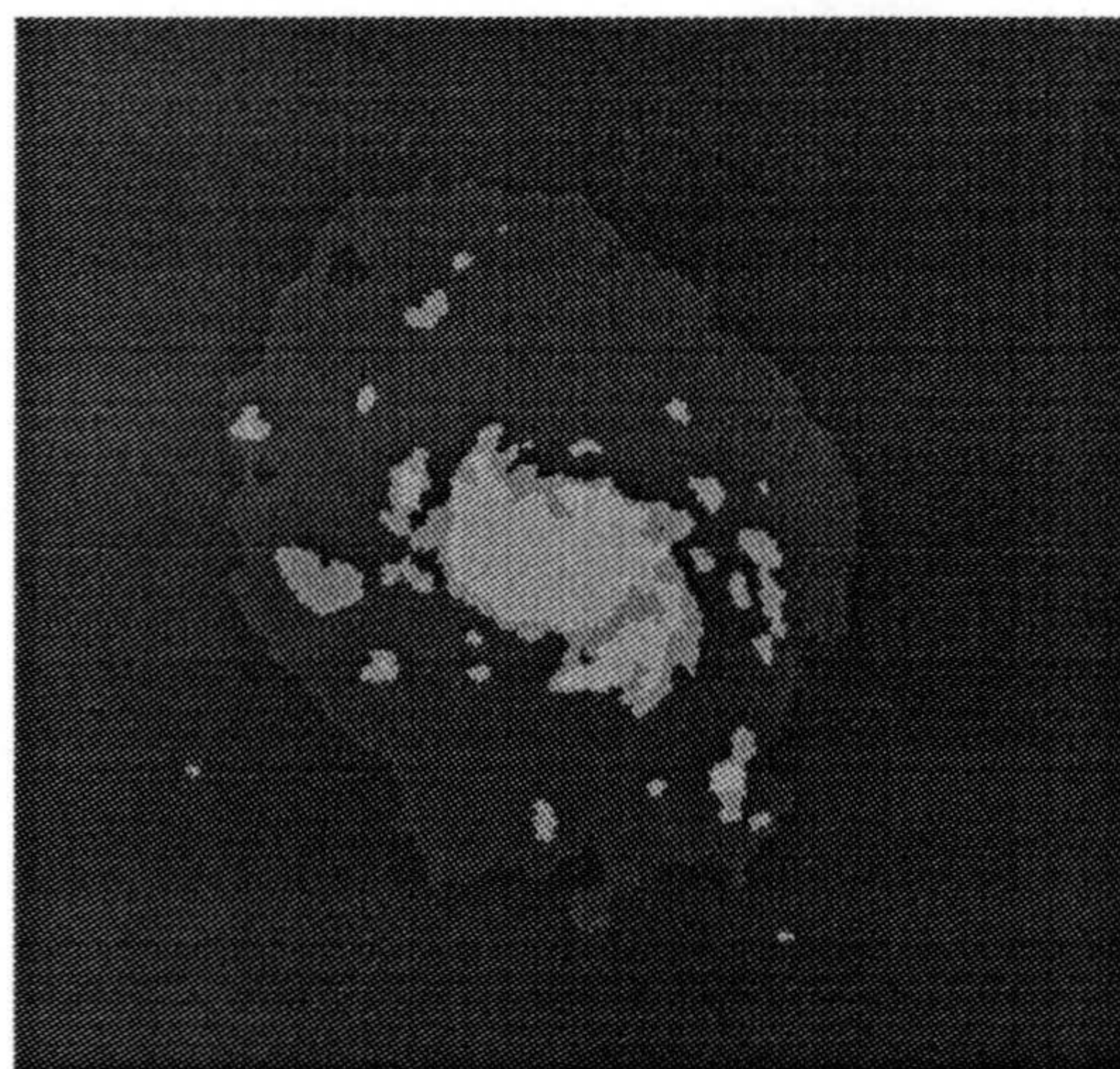
A



B



C



D

Figura 3.1: (A) muestra la galaxia espiral NGC-1068. (B),(C) y (D) muestran la segmentación de la imagen A en dos, tres y cuatro clases respectivamente.

Es un hecho observable que las regiones de la imagen segmentada en dos clases, muestran un alisamiento excesivo. Además sobre galaxias espirales no muestran deformaciones que se puedan atribuir a la presencia de brazos espirales en la forma de la galaxia (ver figuras 3.1 y 3.2).

El uso de dos clases es, como consecuencia, insuficiente a la hora de extraer la región  $R_C$  buscada.

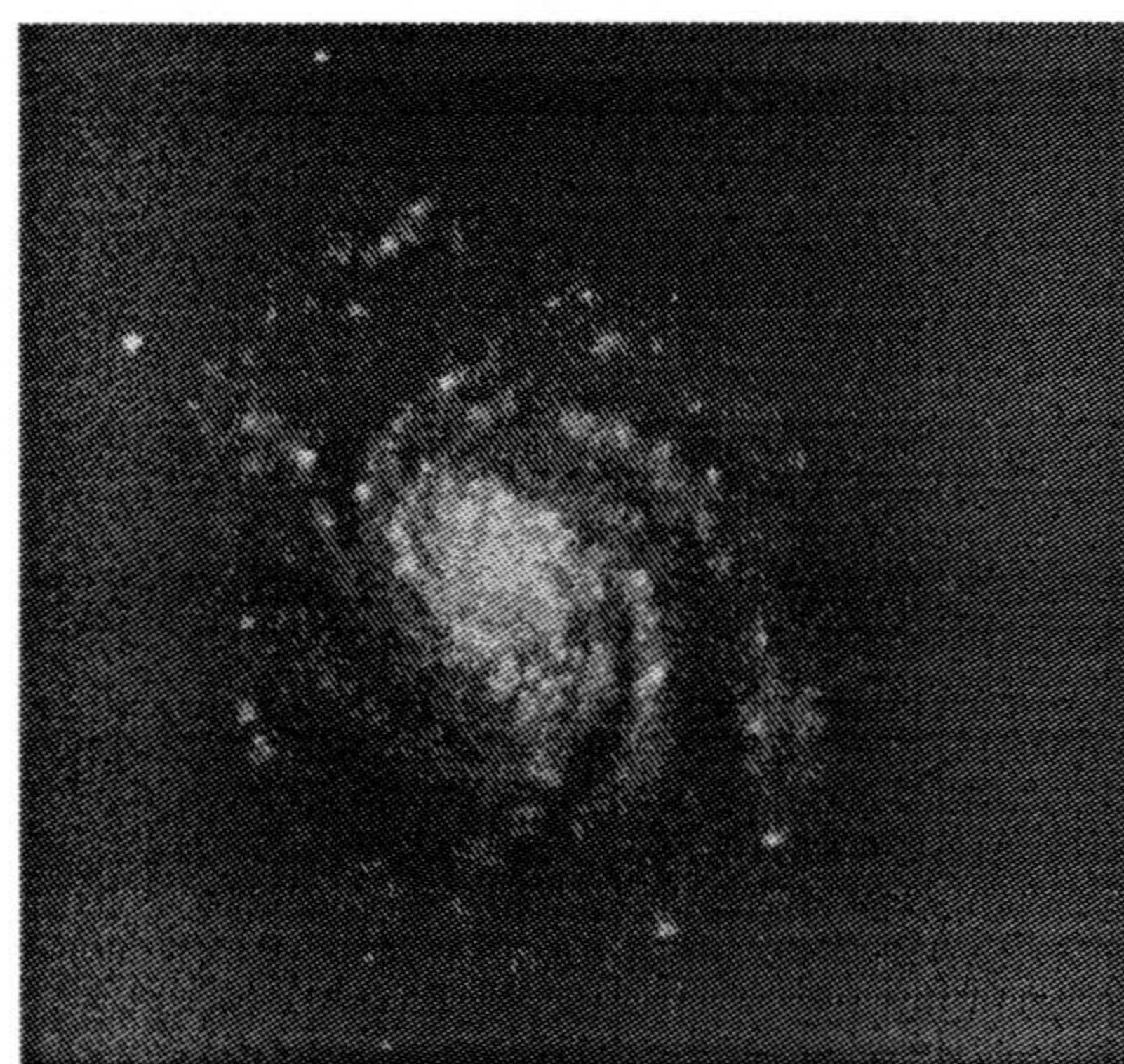
La partición de la imagen en tres clases de píxeles, produce segmentaciones similares a las mostradas en las figuras 3.1 y 3.2.

Las tres clases de píxeles en las que se particiona la imagen (en base a la intensidad luminosa característica) corresponden a:

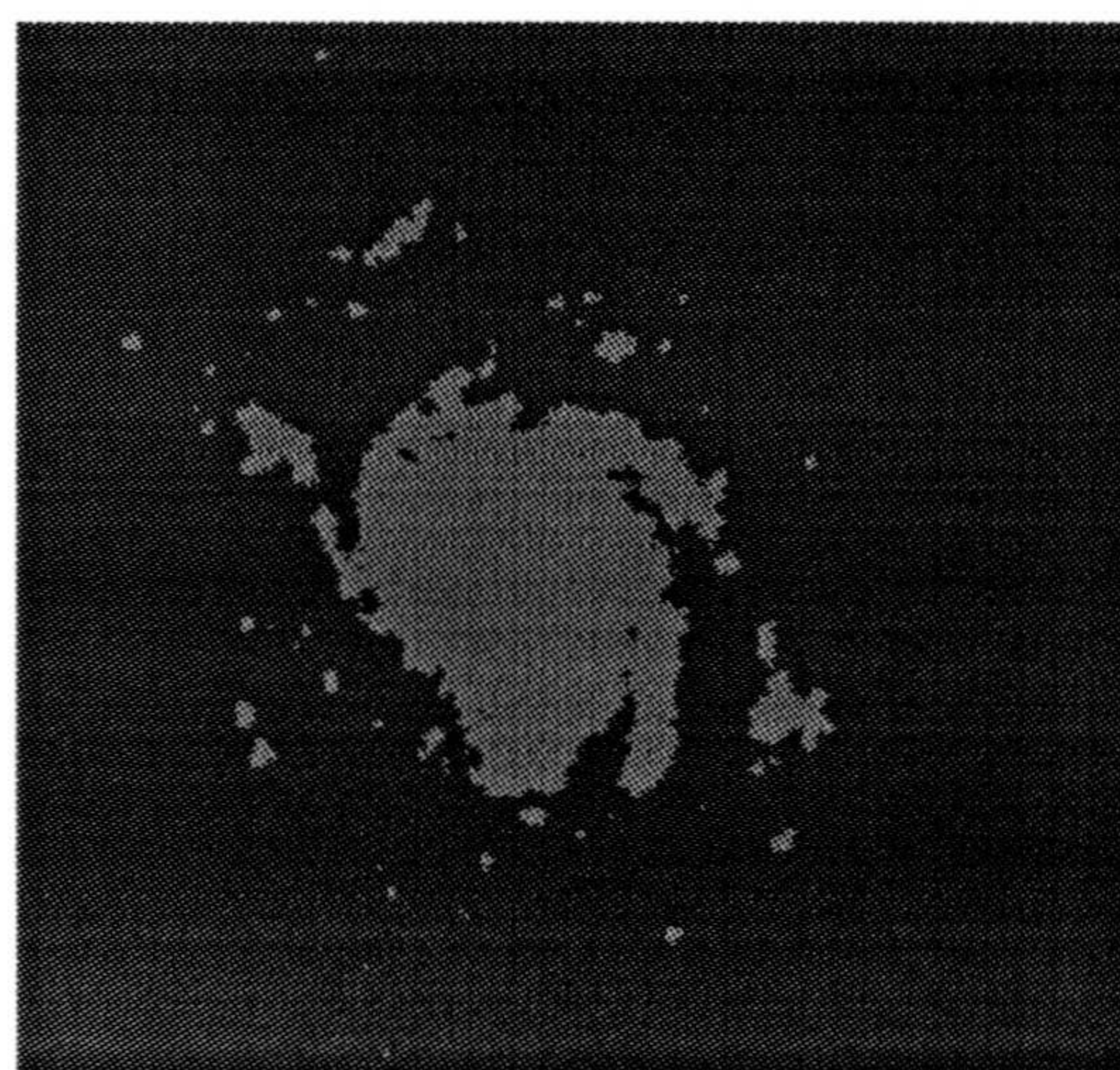
- (3.A) una primera clase formada por los píxeles que se clasifican claramente en el fondo de la imagen,
- (3.B) una segunda clase formada por píxeles que no es posible identificar como pertenecientes a la galaxia o al fondo de la imagen, y por píxeles que pertenecen a la galaxia pero con niveles de gris próximos a los observados en el fondo,
- (3.C) una tercera clase de píxeles interiores de la galaxia, donde se observan los niveles de gris más elevados. Estos píxeles se localizan en las proximidades del centro de la galaxia, en zonas interiores de los brazos espirales sobre galaxias de este tipo y en las proximidades del núcleo sobre galaxias elípticas.

Ninguna de las regiones resultantes de la segmentación posee las características externas exigidas. Luego ninguna de las fronteras entre las regiones que se obtienen al clasificar los píxeles en tres clases muestran de forma significativa deformaciones producidas por brazos (cuando estos aparecen en la forma):

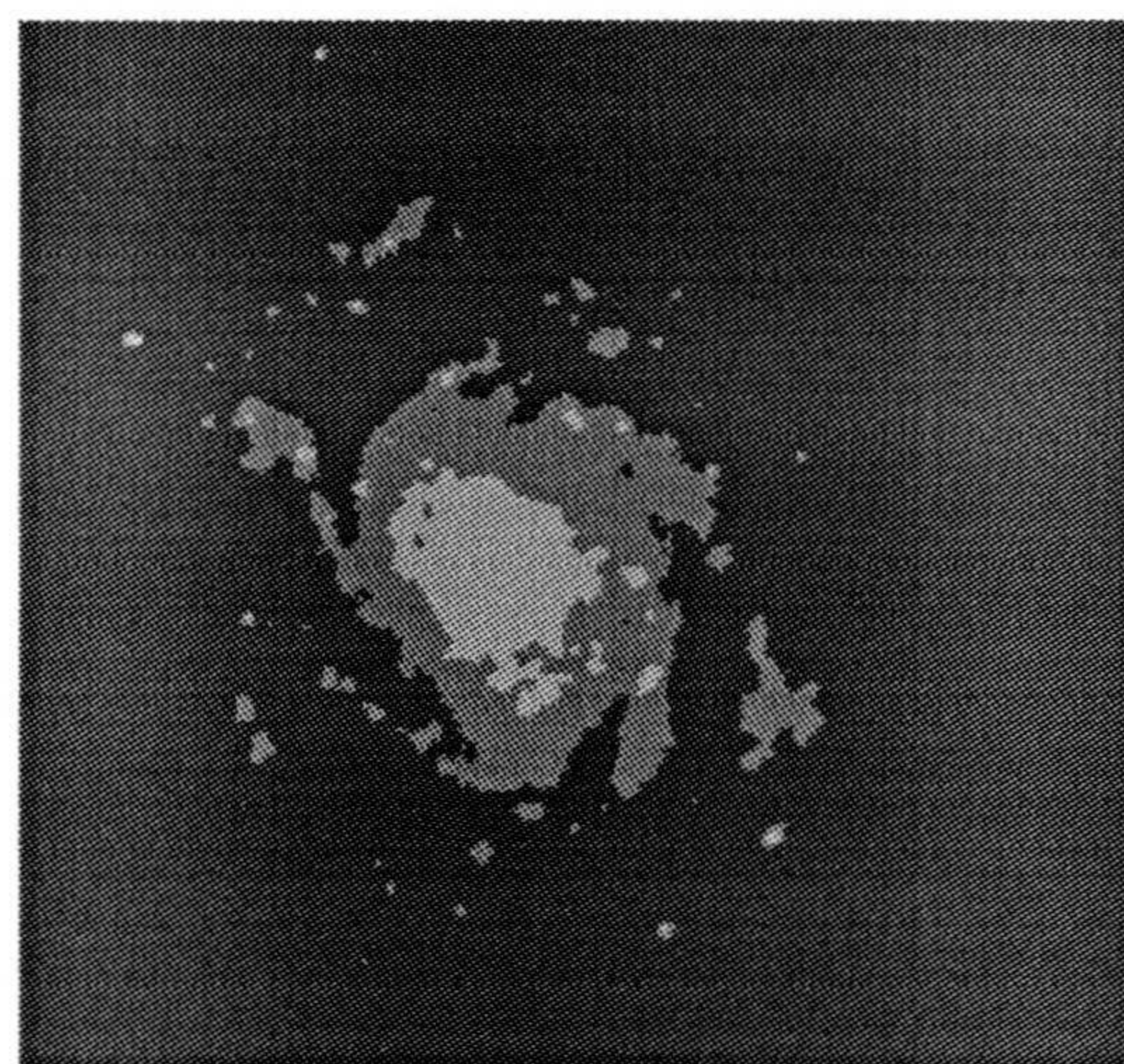
- Así la frontera entre las clases (3.A) y (3.B) es artificial y muestra un excesivo alisamiento. Estas características se explican como consecuencia



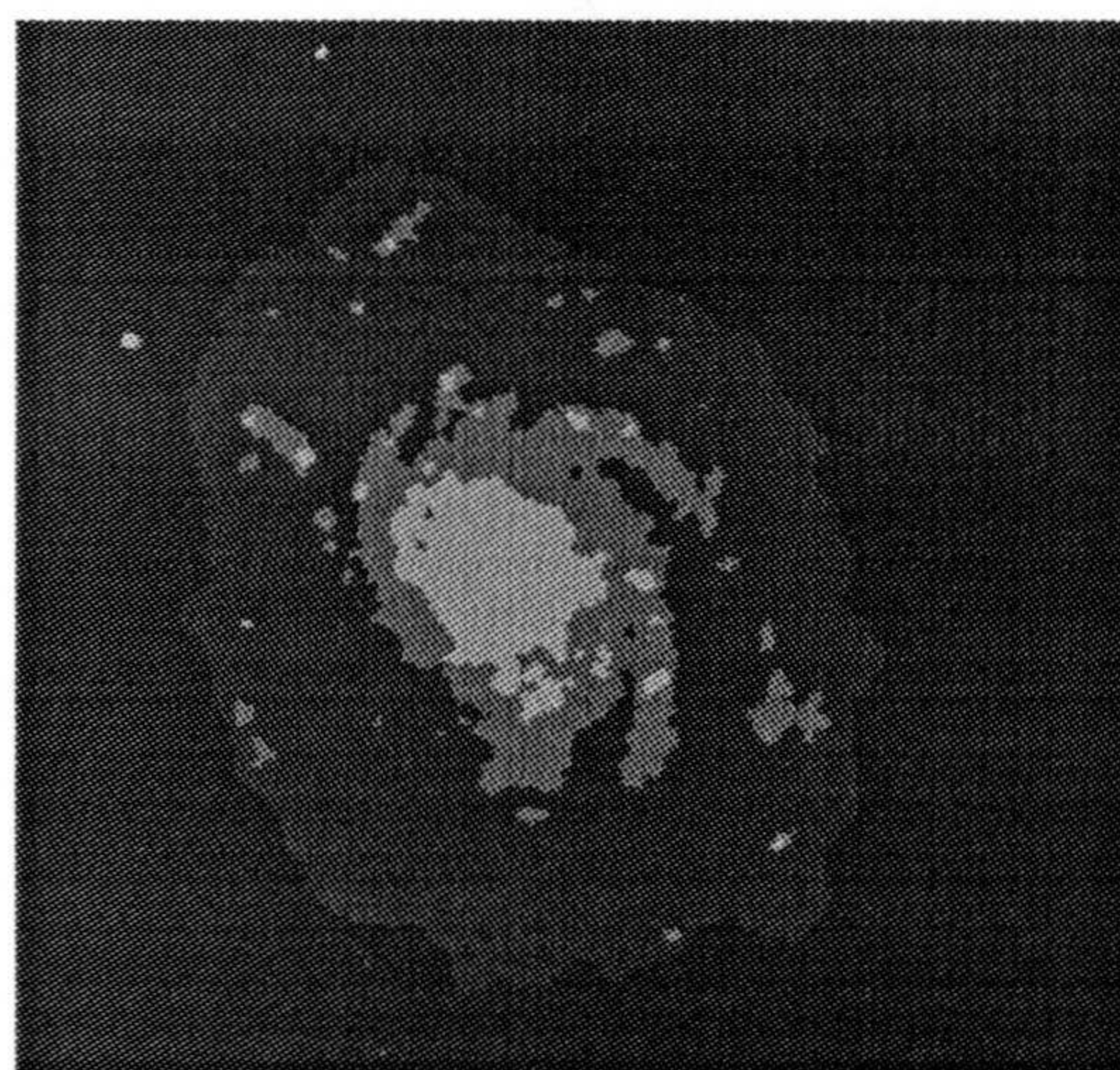
A



B



C



D

Figura 3.2: (A) muestra la galaxia espiral NGC-3810. (B), (C) y (D) muestran la segmentación de la imagen A en dos, tres y cuatro clases respectivamente.

del suave decrecimiento de la intensidad luminosa observada en la zona de transición entre ambas clases.

- La frontera entre (3.B) y (3.C) no determina una única curva plana y cerrada, ya que en general sobre galaxias espirales la clase (3.C) determina más de una región en la imagen (ver figura 3.2): así aparece una primera región correspondiente a los píxeles que se localizan alrededor del centro de la galaxia, mientras que las restantes regiones corresponden a píxeles con niveles de gris altos que se localizan sobre los brazos espirales.

Como conclusión observamos que la segmentación de la imagen en tres clases es inadecuada ya que no produce una región  $R_C$  capaz de representar la galaxia.

La segmentación de la imagen en cuatro clases produce imágenes como las mostradas en las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.3(b).

En ellas observamos que una partición de la imagen en cuatro clases tiende a separar en dos subclases distintas los píxeles que son clasificados, al segmentar usando solo tres clases, en la clase 3.B.

Las cuatro clases de la partición son:

- (Clase 1) una primera clase formada por píxeles que se localizan en las proximidades del centro de la galaxia, en zonas interiores de los brazos espirales sobre galaxias de este tipo y en las proximidades del núcleo sobre galaxias elípticas,
- (Clase 2) una segunda clase formada por píxeles fuera de la clase 1, pero que se localizan sin ambigüedades dentro de la galaxia,
- (Clase 3) una tercera clase formada por los píxeles con nivel de gris más bajo de la región galaxia y los píxeles del fondo que tienen los niveles más altos. Estos píxeles determinan una zona intermedia entre la clase 2 y el fondo de la imagen (la clase 4), sin que sea posible en general distinguir donde acaba la galaxia y donde comienza el fondo de la imagen. Además el nivel de gris a

lo largo de esta zona experimenta un suave decrecimiento, a diferencia de lo que ocurre en el fondo de la imagen donde el nivel de gris es prácticamente constante alrededor de un valor,

(Clase 4) una cuarta clase formada por los píxeles que se clasifican claramente en el fondo de la imagen.

Una de las fronteras que aparece en la imagen de píxeles clasificados en cuatro clases, la curva plana (notada por  $C$ ) que separa píxeles en la clase 2 de píxeles en la clase 3, determina el contorno de una región que contiene al centro de la galaxia. El contorno  $C$  se puede expresar como

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in T\}$$

donde  $t$  determina una función lineal de la longitud del contorno.

La región  $R_C$  que representa la forma de la galaxia se obtiene sobre la imagen segmentada como la región del plano que rodea el contorno  $C$ .

Esta región  $R_C$  contiene a los píxeles que una inspección clasifica sin ambigüedad en las proximidades del centro de la galaxia y en los brazos espirales sobre galaxias espirales, o en las proximidades del centro y la envolvente más próxima a él sobre galaxias elípticas. Sobre galaxias espirales, los píxeles que están en el borde externo de los brazos se clasifican en la clase 3 y por tanto fuera de  $R_C$ .

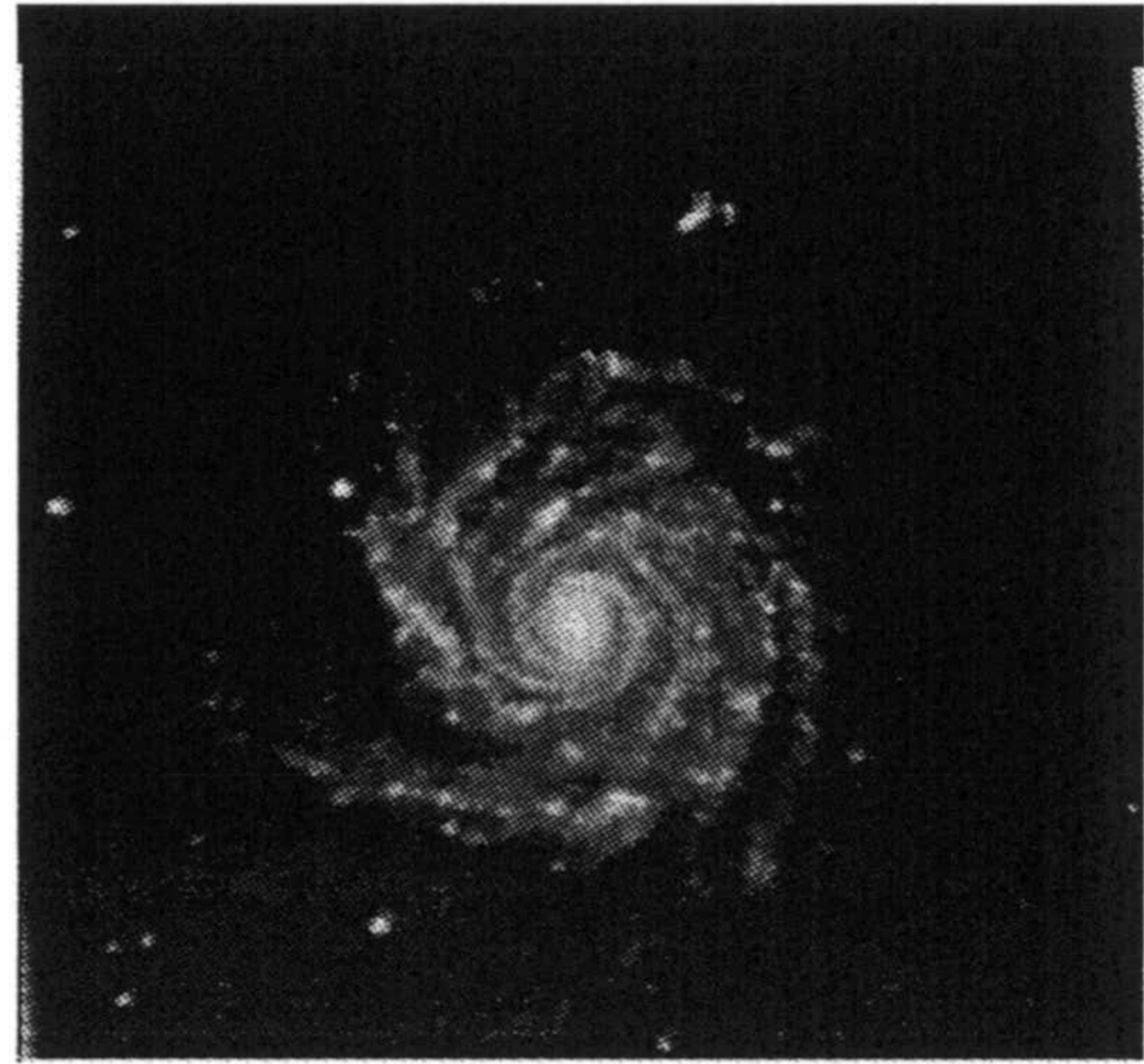
La consecuencia directa es que  $R_C$  muestra en sus características externas deformaciones claramente producidas por la presencia de brazos en la forma de la galaxia.

A continuación desarrollamos el proceso de segmentación de la imagen en cuatro clases.

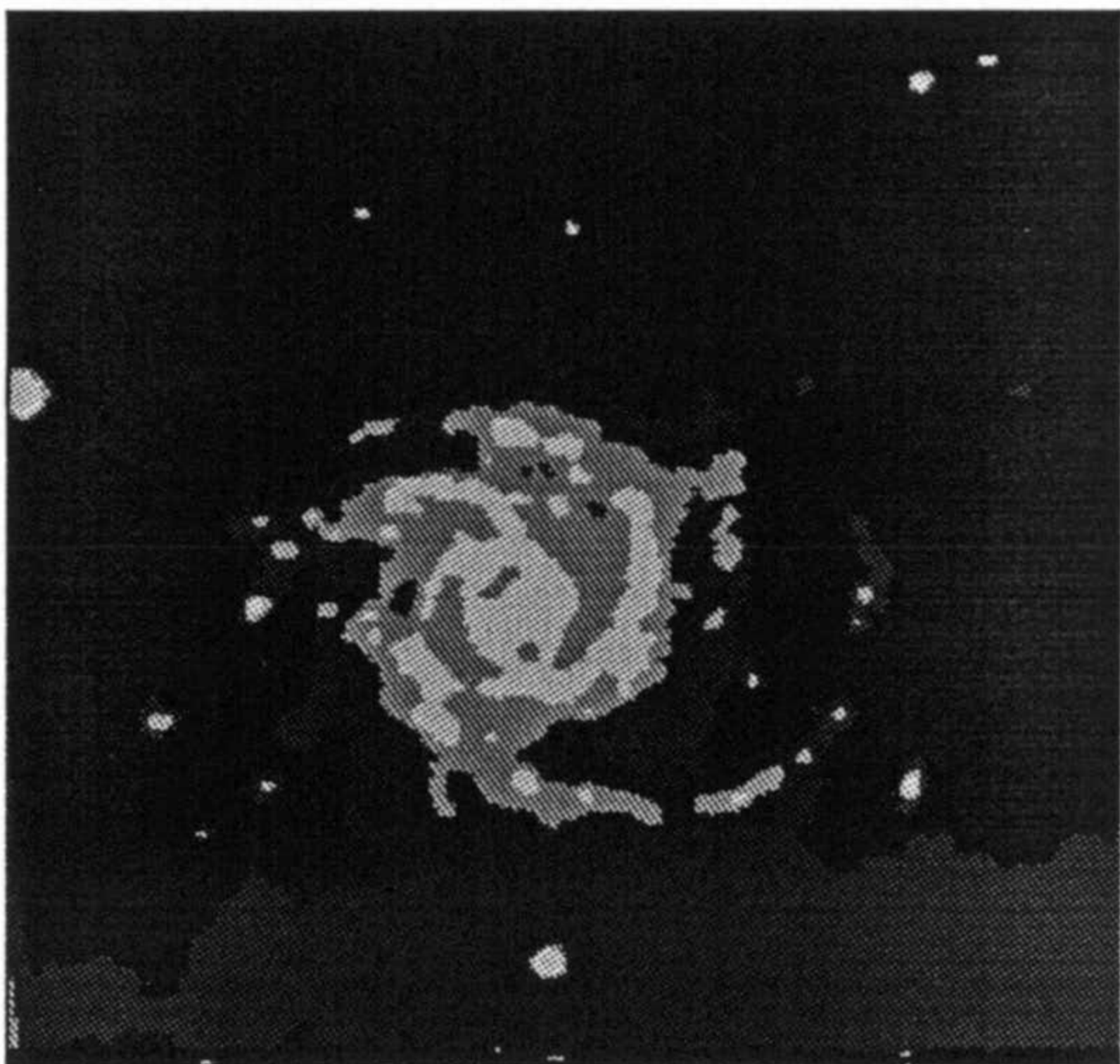
En primer lugar desarrollamos un procedimiento orientado a la obtención de una segmentación provisional en cuatro clases, utilizada para estimar los parámetros  $\sigma_i^2$  y  $\mu_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ , del algoritmo de umbralización descrito y que produce una segmentación inicial de la imagen.



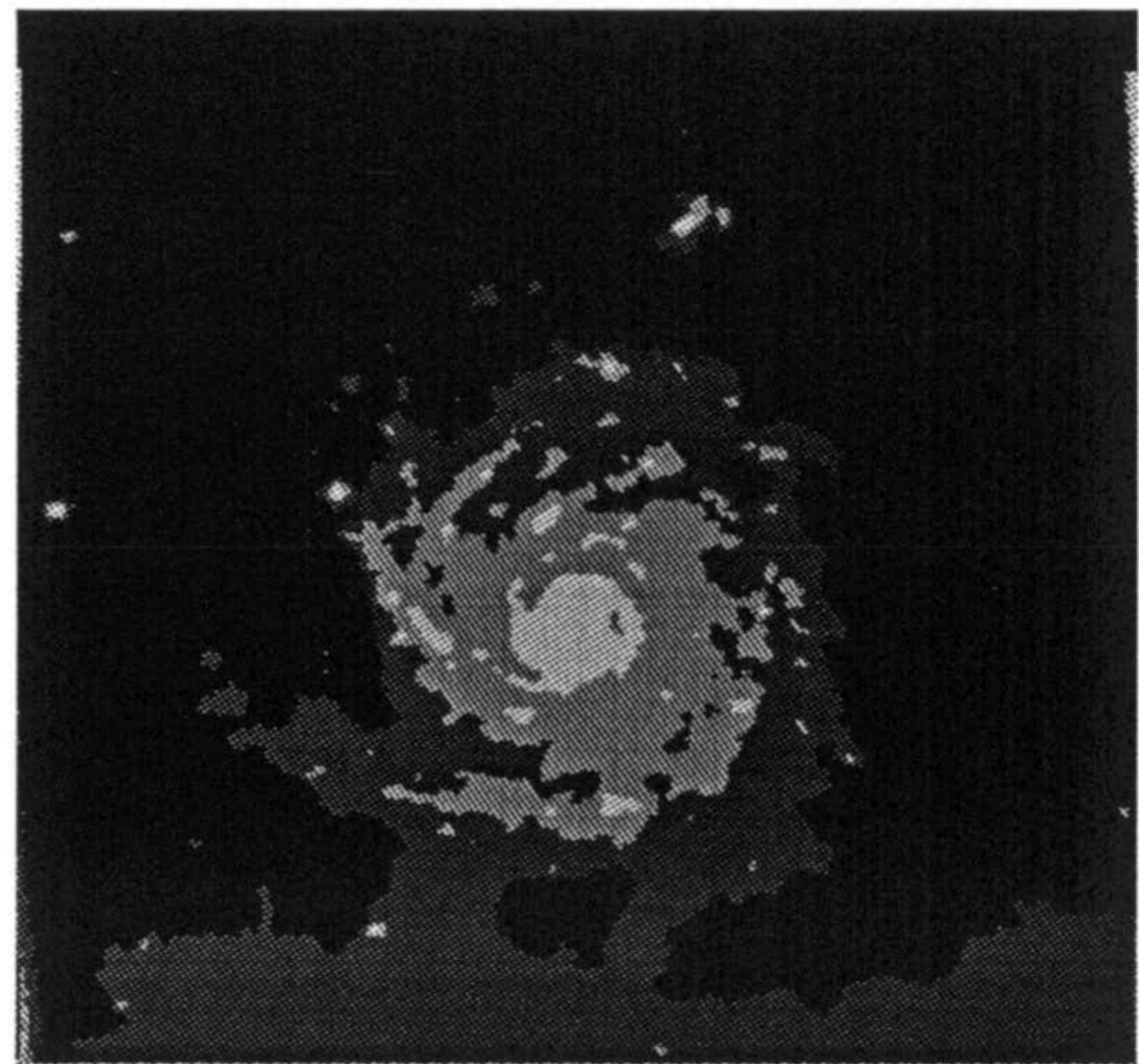
A



B

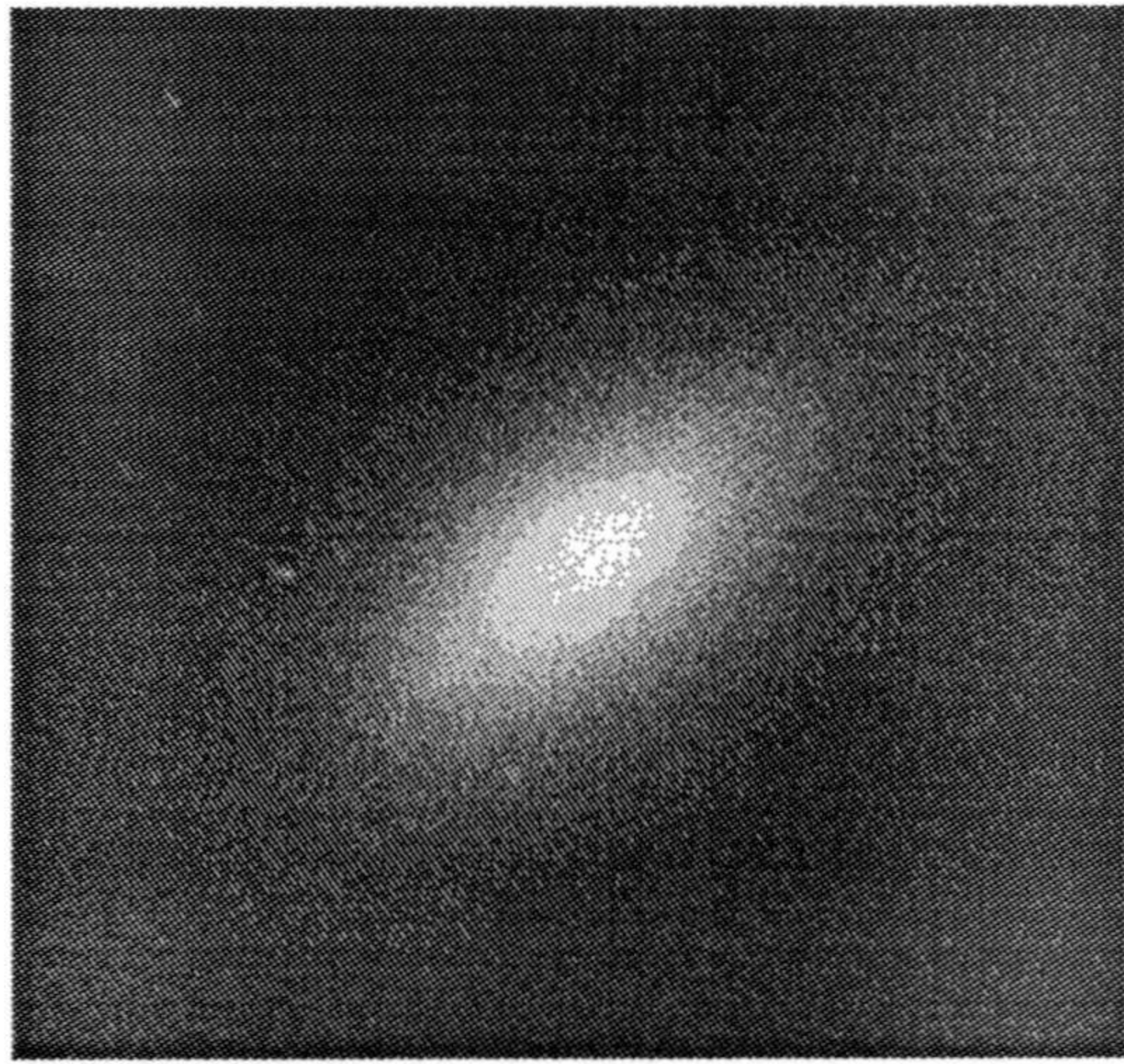


C

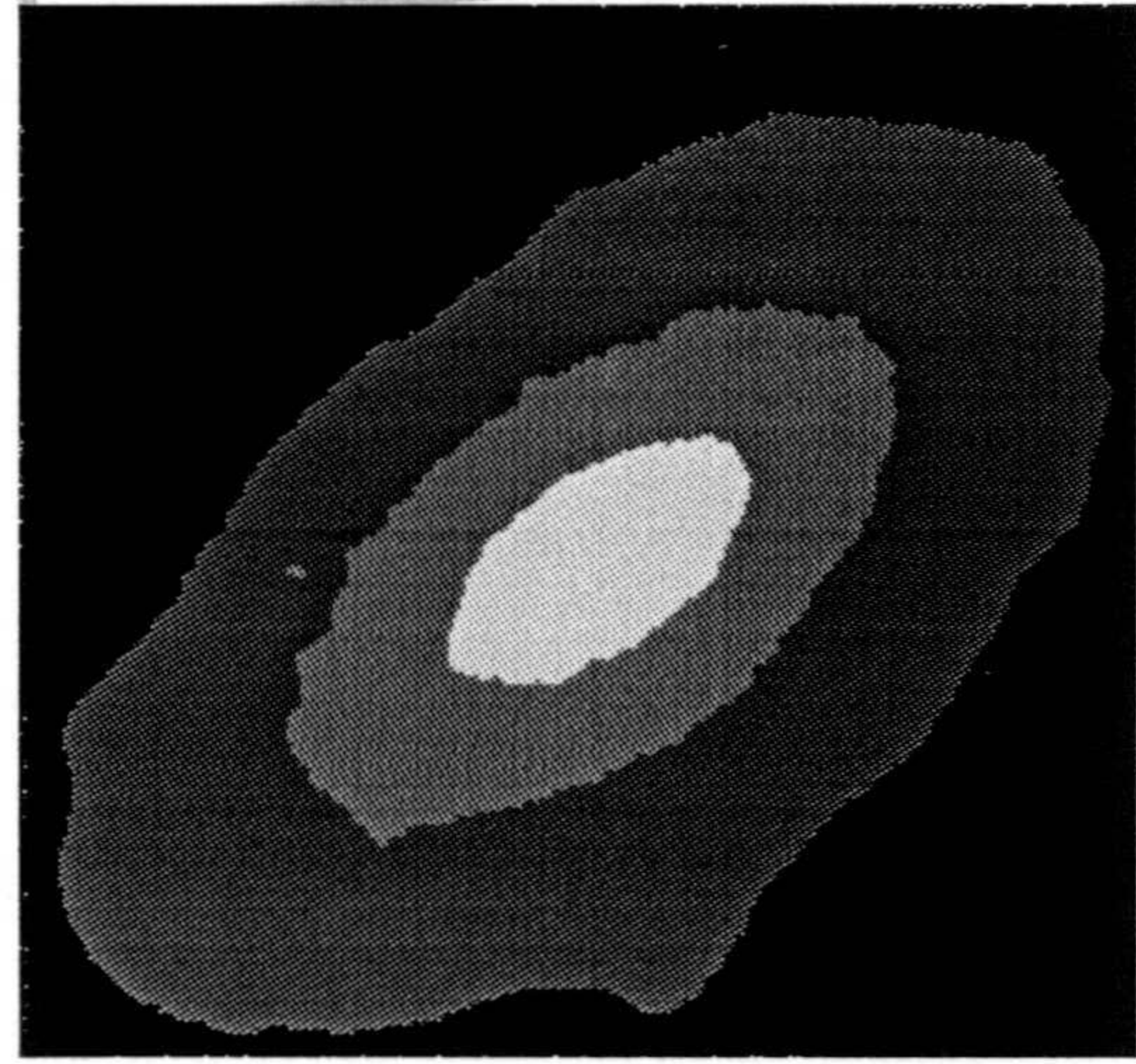
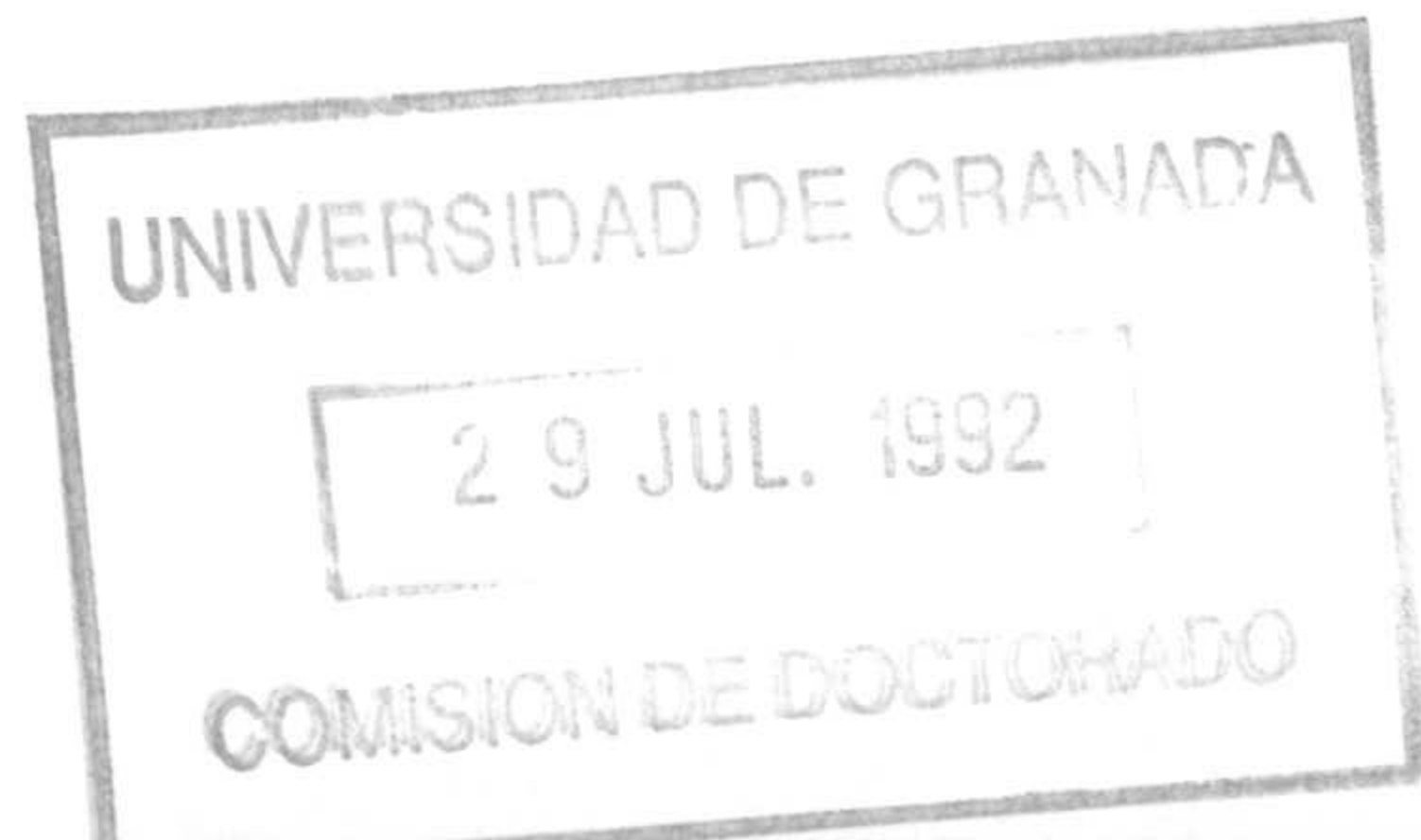


D

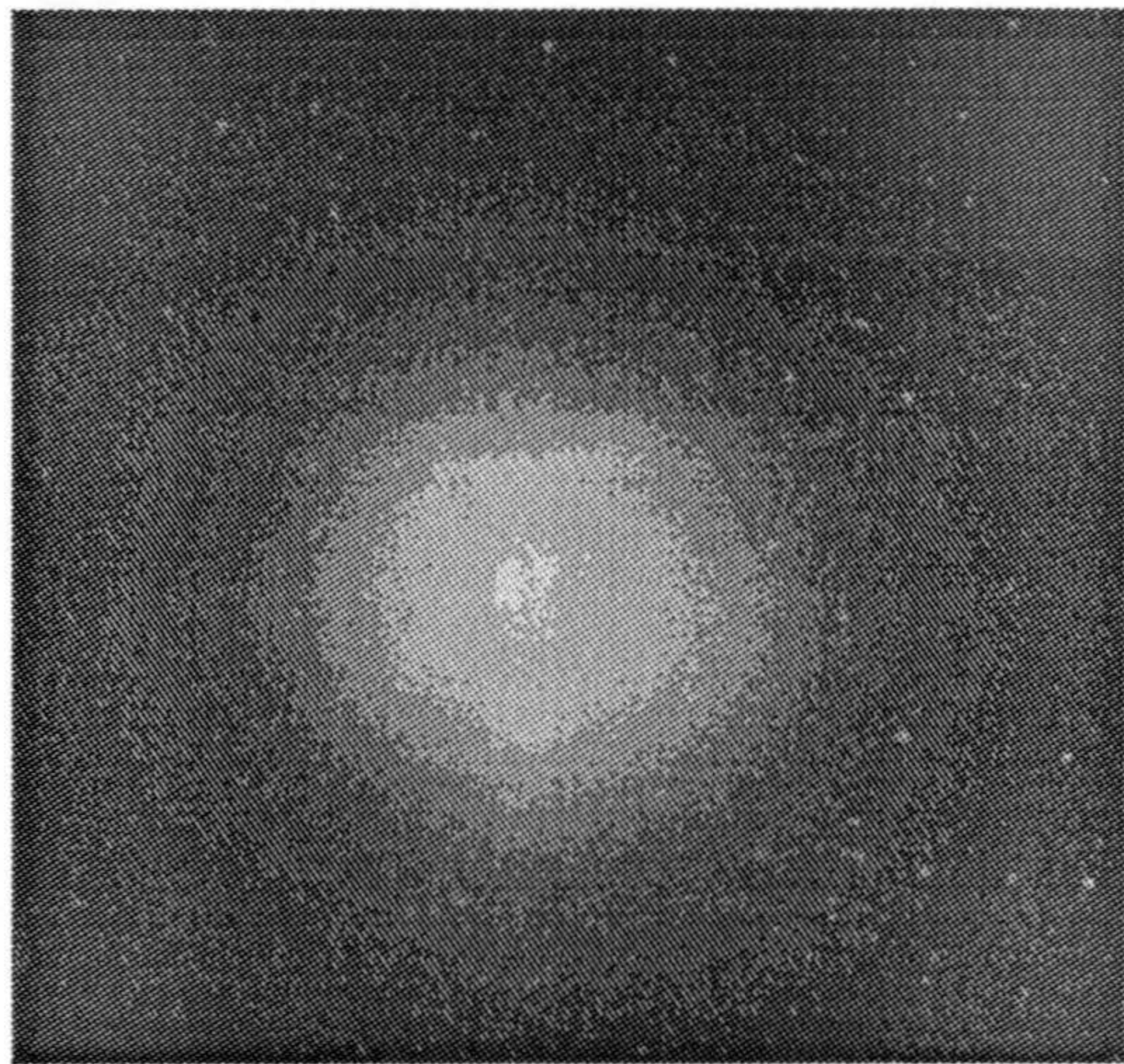
Figura 3.3: *C (D) muestra la segmentación final obtenida para A (respectivamente B).*



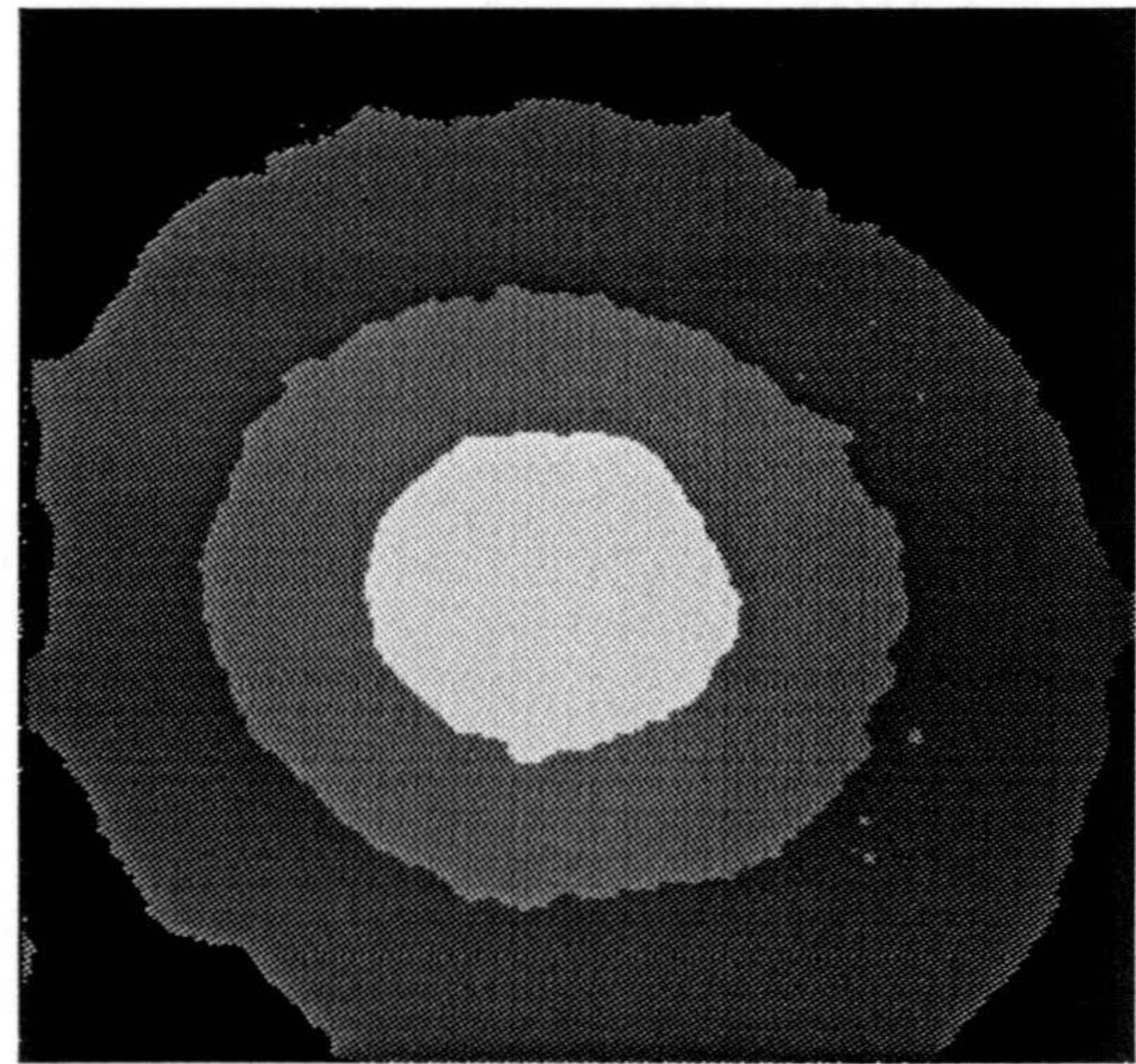
A



C



B



D

Figura 3.3(b): *C (D) muestra la segmentación final obtenida para A (respectivamente B).*



En segundo lugar describimos el procedimiento robusto empleado en la obtención de la segmentación final.

### 3.2.1.2 Extracción de una segmentación inicial.

La obtención de una segmentación inicial de la imagen en cuatro clases se realiza usando el algoritmo de umbralización que ha sido ya descrito.

Los parámetros de este algoritmo (varianza y media asociadas a cada una de las cuatro clases) son desconocidos, luego tendremos en primer lugar que estimar sus valores sobre una imagen segmentada provisionalmente.

A continuación describimos la asignación provisional de los píxeles en la imagen a alguna de las cuatro clases consideradas, que nos permite obtener estimadores para los parámetros  $\sigma_i^2$  y  $\mu_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Extracción de una segmentación provisional de la imagen sobre la que estimar  $\sigma_i^2$  y  $\mu_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ .**

En la clase 1 se clasifican los píxeles de la imagen sobre los que se observa un nivel de gris próximo al nivel de gris que se alcanza en el centro de la galaxia (el máximo observado sobre ella).

Como consecuencia y en una clasificación provisional podemos asignar a la clase 1, los píxeles con nivel de gris próximo al valor  $\eta_1$ , definido como

$$\eta_1 = \text{mínimo}\{x_s^G : s \in \text{Centro}\}$$

en donde notamos  $x_s^G$  el nivel de gris observado sobre el pixel  $s$ , y por **Centro** a un conjunto convexo de puntos del plano.

Al binarizar la imagen  $I$  (de acuerdo a un umbral que se calcula como la moda de los niveles de gris en  $I$ ) la galaxia determina un conjunto aproximadamente convexo. El 'centro' de este conjunto, que notamos por **Centro**, puede ser

obtenido mediante la aplicación de una secuencia de erosiones (proceso denominado ‘Ultimate Erosion’ descrito en Serra [84], y cuyas ideas esenciales resumimos a continuación). El conjunto convexo que determina la zona **Centro** así definida, está formado por píxeles de la imagen donde se alcanzan los niveles de gris mas elevados, y cuya localización determina una buena aproximación a la localización del centro de la galaxia en la imagen.

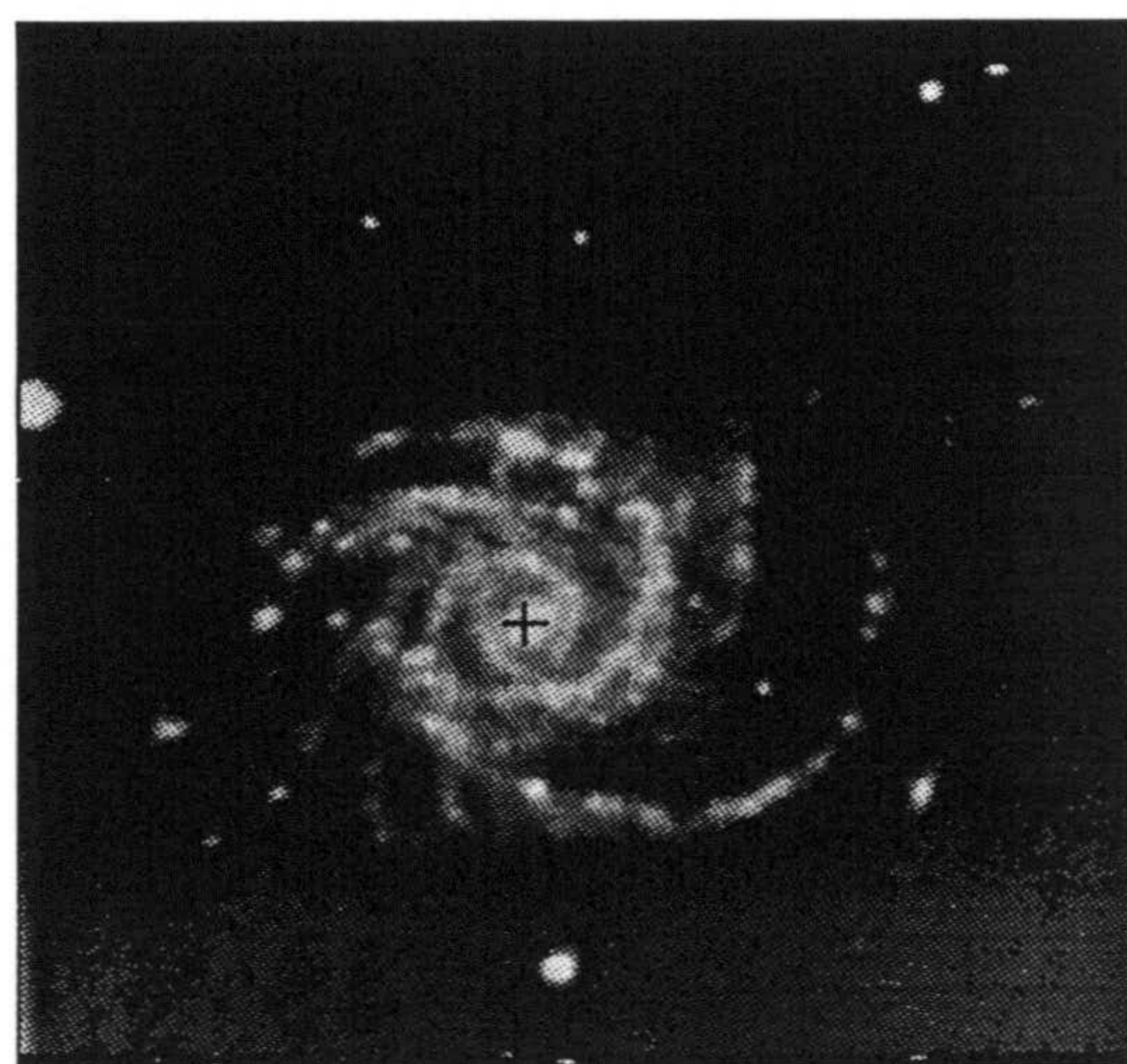
El procedimiento ‘Ultimate Erosion’ está basado en la aplicación iterativa de operaciones morfológicas simples hasta satisfacer una condición de parada, y sus pasos fundamentales se describen mediante la siguiente secuencia:

#### Procedimiento de Identificación del Centro

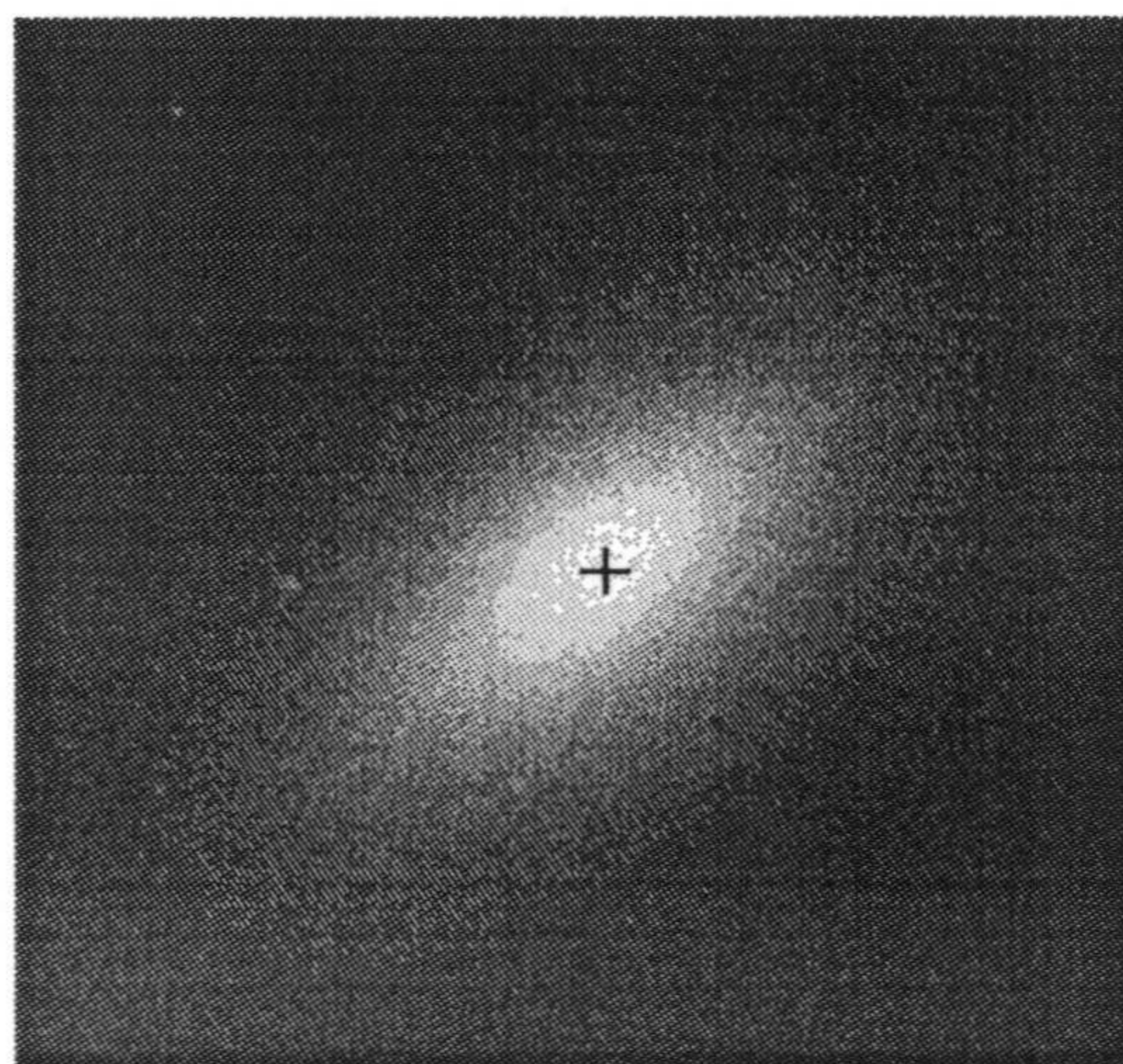
1. BINARIZAR LA IMAGEN DE ACUERDO A UN UMBRAL  $t$  QUE SE CALCULA COMO LA MODA DE LOS NIVELES DE GRIS PRESENTES.
2. APLICAR LA SECUENCIA FINITA DE EROSIONES  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ , DONDE  $Y_n$  ES LA ÚLTIMA OPERACIÓN DE EROSIÓN CUYA APLICACIÓN NO HACE DESAPARECER LA REGIÓN QUE DETERMINA LA GALAXIA.
3. IDENTIFICAR LA SUBREGIÓN **Centro** CON LA ÚNICA REGIÓN QUE AÚN QUEDA EN LA IMAGEN Y QUE DESAPARECE SI SE APLICA UNA EROSIÓN ADICIONAL. □

Este procedimiento produce la subregión deseada del plano (que contiene el centro de la galaxia) dado que

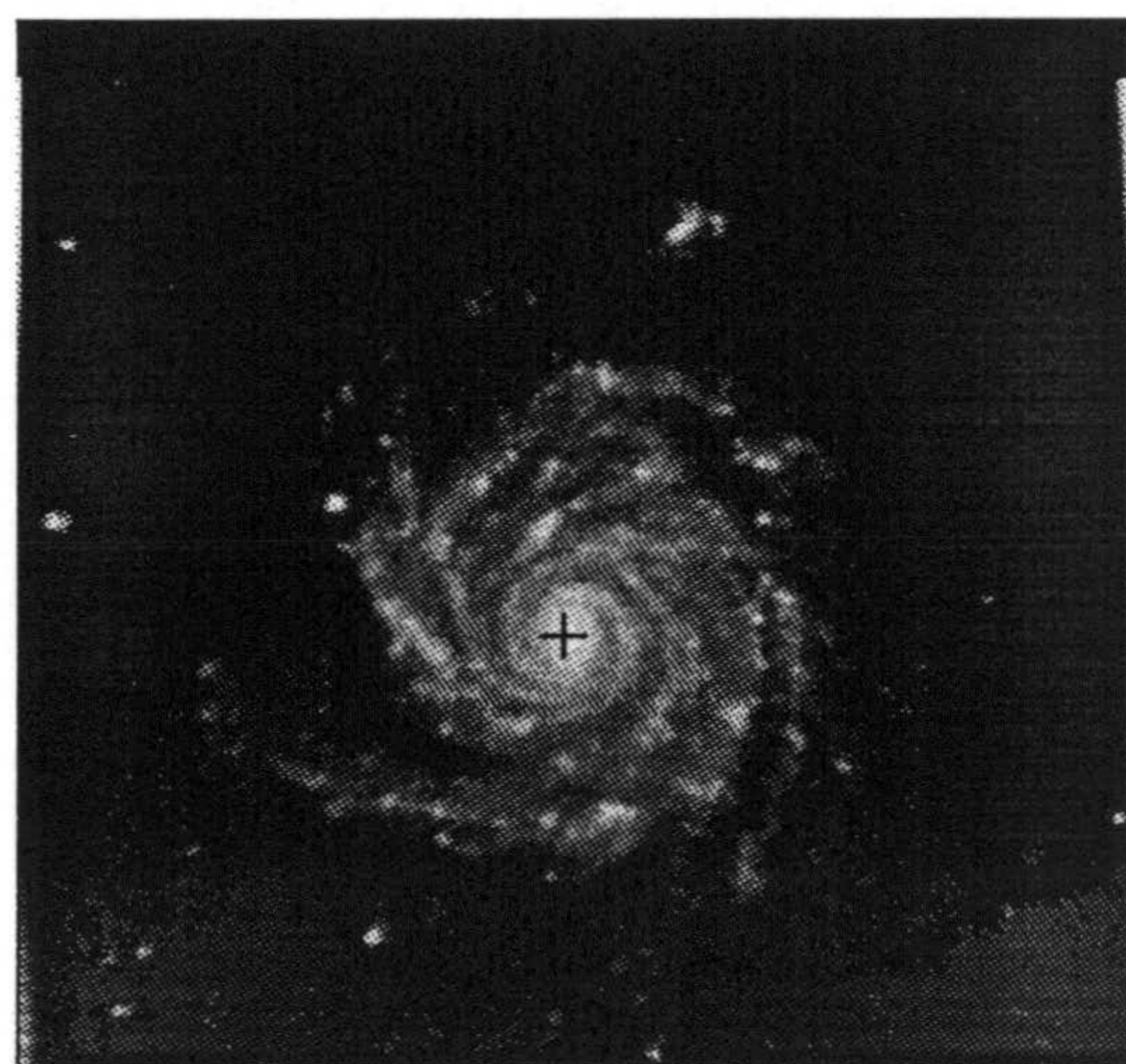
- las imágenes binarias, obtenidas en el paso 1 del procedimiento anterior, verifican que la mayor región presente corresponde al objeto galaxia, luego es la última región en desaparecer al aplicar una secuencia de operaciones de erosión sobre la imagen binaria,
- la erosión de una región al ser aplicada de forma iterativa sobre la región resultante en la erosión previa, determina un procedimiento para la extracción de la localización aproximada del centro de la región (Serra [84]).



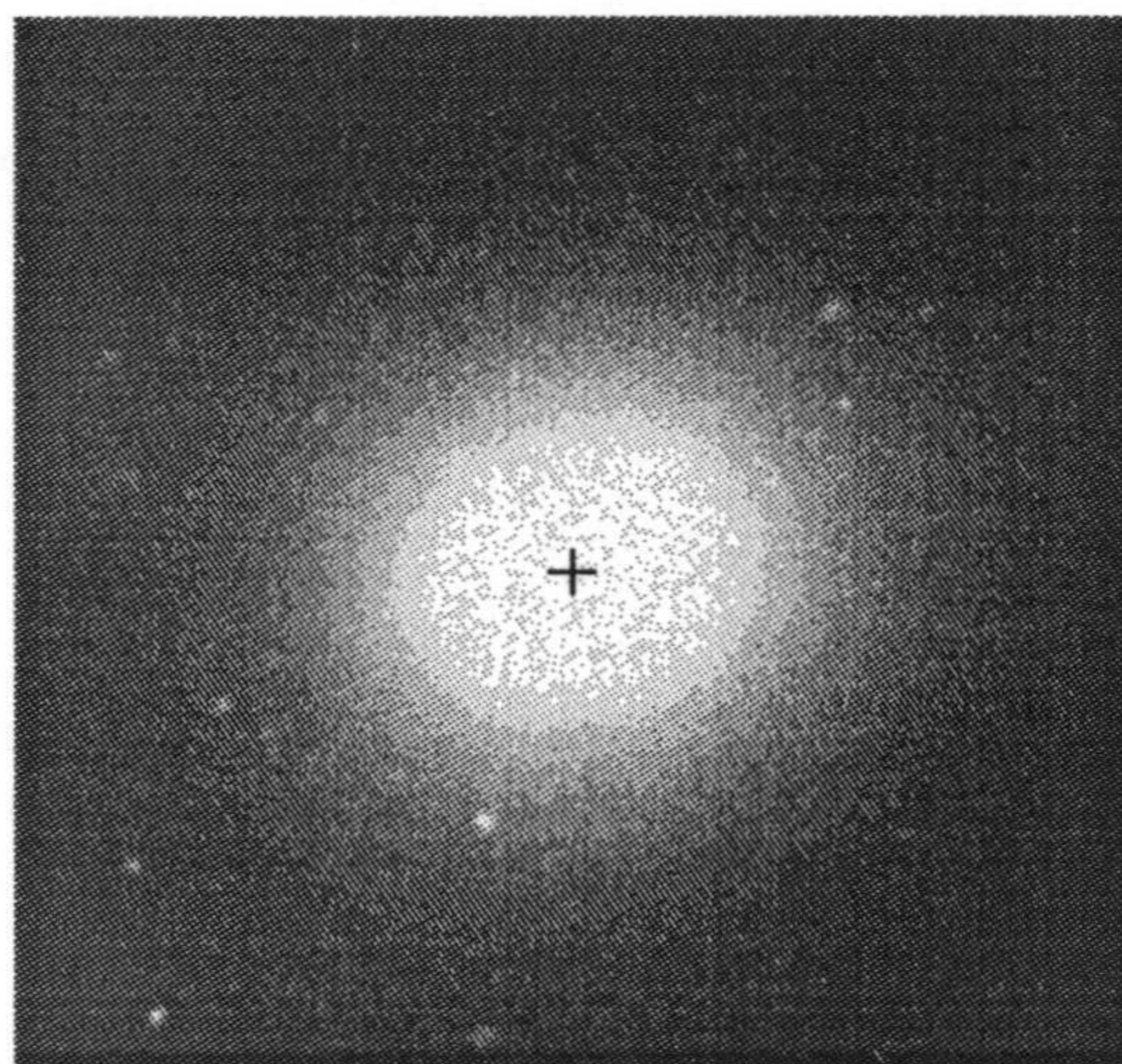
A



B



C



D

Figura 3.4: A (B) muestra el punto central de la subregión CENTRO extraída para la galaxia NGC-309 (respectivamente NGC-3377). C (D) muestra el punto central de la subregión CENTRO extraída para la galaxia NGC-1232 (respectivamente NGC-4278).

La figura 3.4 muestra el resultado de la aplicación de este procedimiento a imágenes de galaxias tanto espirales como elípticas.

Los niveles de gris observados en el fondo (la cuarta clase de la segmentación) se mantienen prácticamente constantes alrededor de un valor bajo.

Como consecuencia, asignamos provisionalmente a la clase 4 los píxeles con nivel de gris próximo al valor  $\eta_4$ , que se obtiene calculando un estimador robusto para el mínimo nivel de gris que se observa en la imagen, y así por ejemplo

$$\eta_4 = \text{Mediana}\{\mu_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$$

en donde

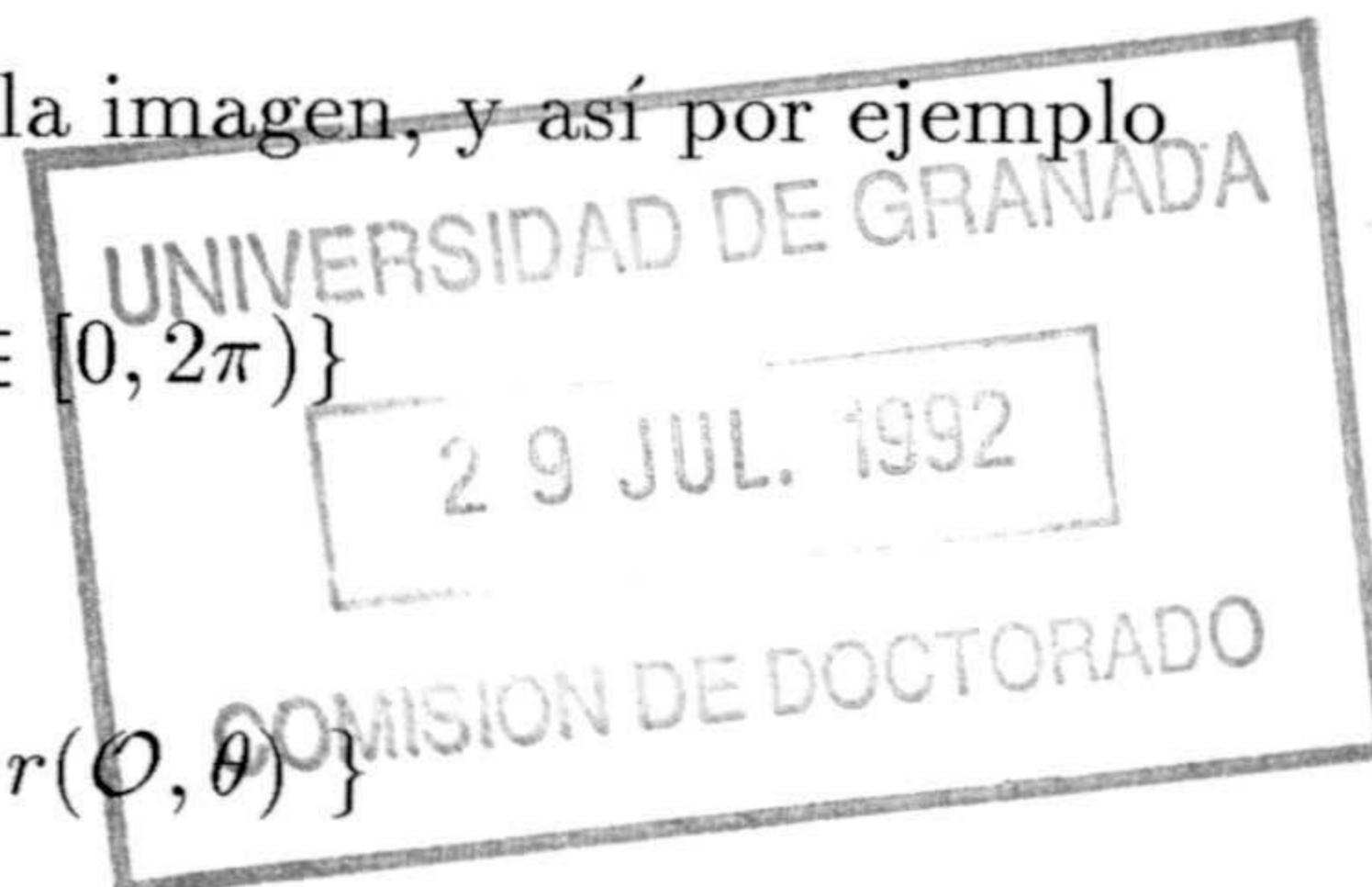
$$\mu_\theta = \text{Mínimo}\{x_s^G \mid s \in r(\mathcal{O}, \theta)\}$$

y  $\mu_\theta$  es el mínimo nivel de gris observado sobre la semirecta  $r(\mathcal{O}, \theta)$ , donde notamos por  $r(\mathcal{O}, \theta)$  a la semirecta que tiene su origen en el centro de la galaxia, notado por  $\mathcal{O}$ , y que forma un ángulo  $\theta$  con el eje horizontal.

La siguiente secuencia describe el procedimiento de extracción del valor  $\eta_4$

#### Procedimiento de extracción de $\eta_4$ .

1. INICIALIZAR  $\theta$  A 0.
2.  $Incr = \frac{2\pi c}{360}$ . EL VALOR  $c$  ES CONOCIDO Y MAYOR QUE 1, POR EJEMPLO  $c = 10$ .
3. MIENTRAS  $\theta < 2\pi$  REPETIR
  - 3.1. NOTAR POR  $\mu_\theta$  EL MÍNIMO NIVEL DE GRIS OBSERVADO SOBRE  $r(\mathcal{O}, \theta)$  DESDE EL ORIGEN  $\mathcal{O}$  HASTA ALCANZAR UN PIXEL  $s$  EN LA FRONTERA DE LA IMAGEN.
  - 3.2. RECALCULAR EL VALOR DE  $\theta$  COMO  $\theta = \theta + Incr$ .
4. ESTIMAR EL VALOR DE  $\eta_4$  COMO LA MEDIANA SOBRE EL CONJUNTO DE VALORES  $\{\mu_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$ . ES DECIR  $\eta_4 = \text{MEDIANA}\{\mu_\theta, \theta \in [0, 2\pi)\}$   $\square$



Si notamos C4 al conjunto definido como

$$C4 = \{s : x_s^G \leq \eta_4\},$$

y C1 al conjunto

$$C1 = \{s : x_s^G \geq \eta_1\},$$

tenemos una partición de la imagen  $I$  en píxeles que pertenecen a

$$C1 \cup C4$$

y píxeles pertenecientes al conjunto

$$I - (C1 \cup C4).$$

La aplicación de un procedimiento de partición en dos clases sobre el conjunto

$$I - (C1 \cup C4)$$

produce la extracción de un valor  $\eta_2$  (próximo a los niveles de gris observados en la clase 2) y de un valor  $\eta_3$  (próximo a los niveles de gris observados en la clase 3).

Para la partición de  $I - (C1 \cup C4)$  en dos clases se ha utilizado el siguiente procedimiento de umbralización iterativa (Mardia [61]).

#### **Procedimiento de Umbralización Iterativa**

1. SEPARAR  $I - (C1 \cup C4)$  EN DOS CLASES (NOTADAS POR C2 Y C3) DE ACUERDO A UN UMBRAL, POR EJEMPLO LA MEDIA DE LOS VALORES OBSERVADOS EN EL CONJUNTO  $I - (C1 \cup C4)$ .
2. REPETIR HASTA ALCANZAR VALORES ESTABLES
  - 2.1. CALCULAR SOBRE LA PARTICIÓN TEMPORAL (C2 Y C3) ESTIMADORES PARA  $\mu_i$ ,  $\sigma_i^2$  Y  $p_i$ , DONDE  $i = 2, 3$ . NOTAMOS POR  $p_i$  LA PROBABILIDAD A PRIORI ASOCIADA A LA POBLACIÓN CORRESPONDIENTE.

2.2. CALCULAR LOS UMBRALES  $t_+$  Y  $t_-$  COMO

$$t_{\pm} = \frac{\eta_3 \hat{\sigma}_2^2 - \eta_2 \hat{\sigma}_3^2}{\hat{\sigma}_2^2 - \hat{\sigma}_3^2} \pm \frac{\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_2^2 - \hat{\sigma}_3^2} \left\{ (\eta_2 - \eta_3)^2 + 2 (\hat{\sigma}_2^2 - \hat{\sigma}_3^2) \log \frac{\hat{\sigma}_2 p_3}{\hat{\sigma}_3 p_2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

2.3. SEPARAR EL CONJUNTO  $I - (C1 \cup C4)$  EN DOS CLASES DE ACUERDO A LA REGLA SIGUIENTE:

$Z$  PERTENECE A C2 SI  $t_+ < Z < t_-$ ,

EN OTRO CASO  $Z$  PERTENECE A C3.

□

La extracción de los valores  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  y  $\eta_4$  produce una partición provisional de la imagen (ver figura 3.5) al asignar a cada pixel  $s$  una clase de acuerdo al criterio:

$$x_s^E = k, \text{ con } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

si

$$|x_s^G - \eta_k| = \min_{l=1,2,3,4} |x_s^G - \eta_l|$$

donde  $x_s^E$  nota la clase del pixel  $s$  y  $x_s^G$  nota el nivel de gris observado en  $s$ .

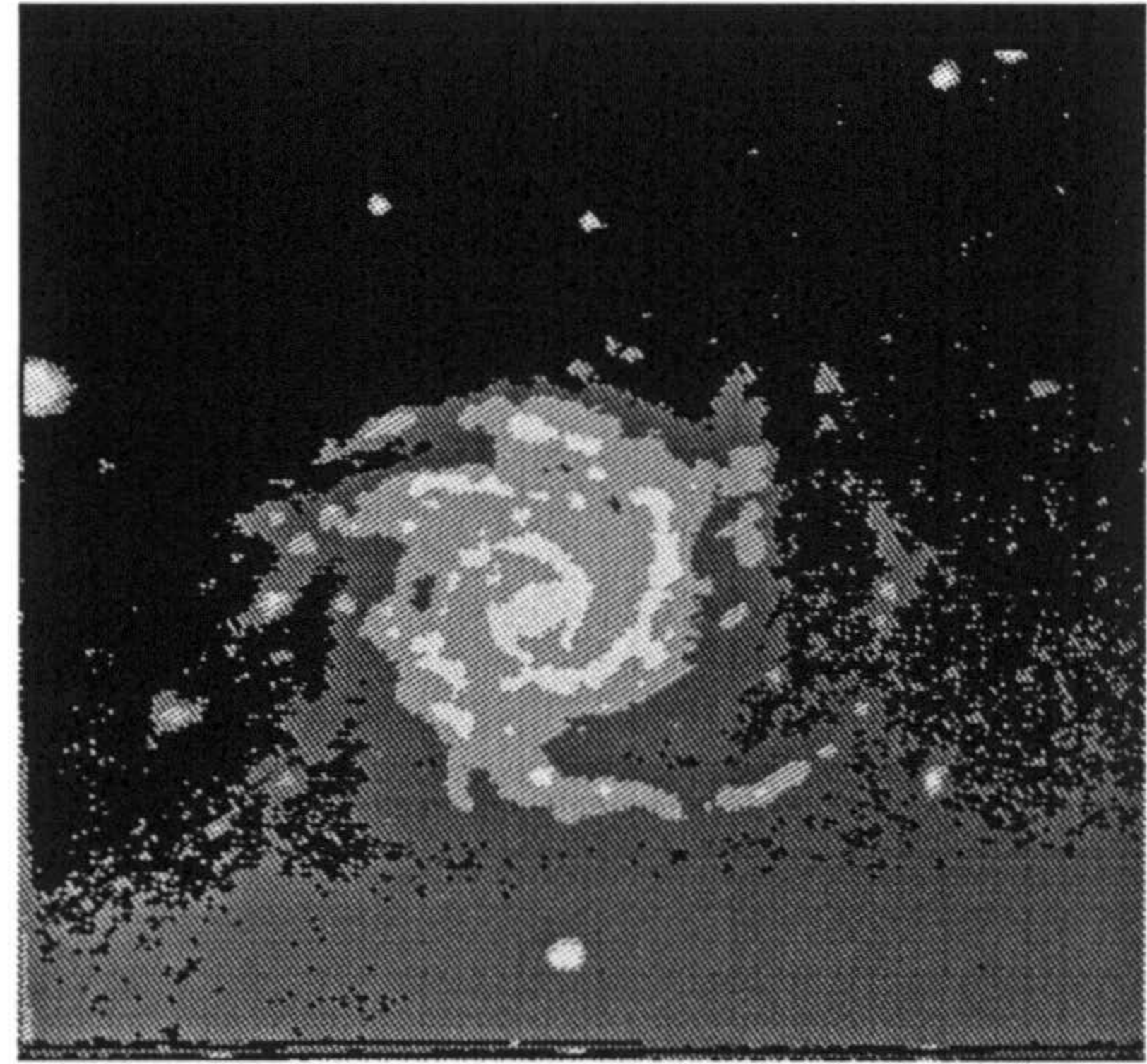
Sobre esta partición extraemos estimadores para los parámetros media y varianza asociados a cada una de las cuatro clases de la partición, que son usados en el algoritmo de umbralización (Mardia [62]), con en el fin de obtener una segmentación inicial de la imagen.

### 3.2.1.3 Descripción del procedimiento de segmentación final.

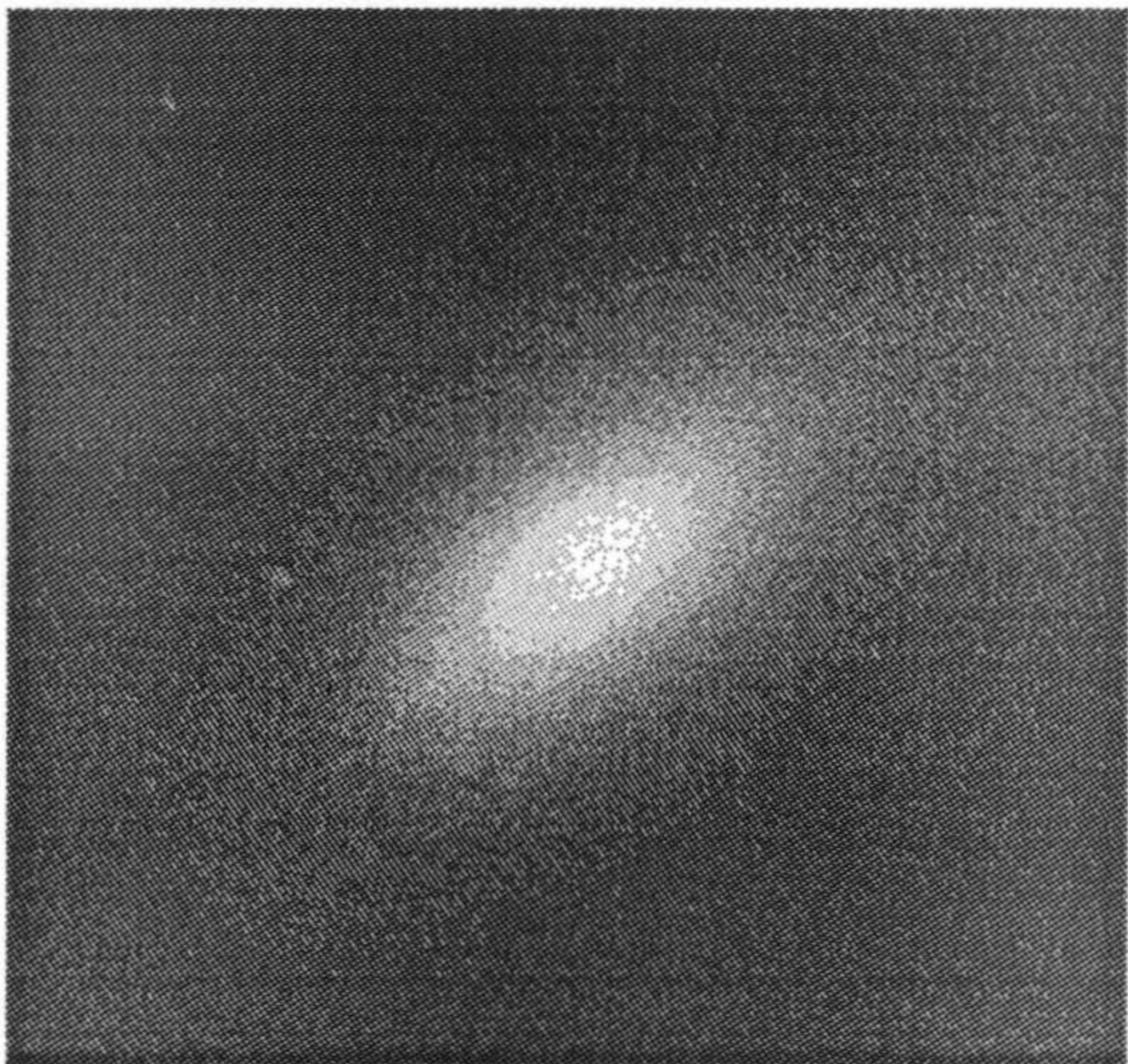
La segmentación inicial obtenida mediante el algoritmo de umbralización puede estar sensiblemente alejada de la segmentación correcta por las razones siguientes:



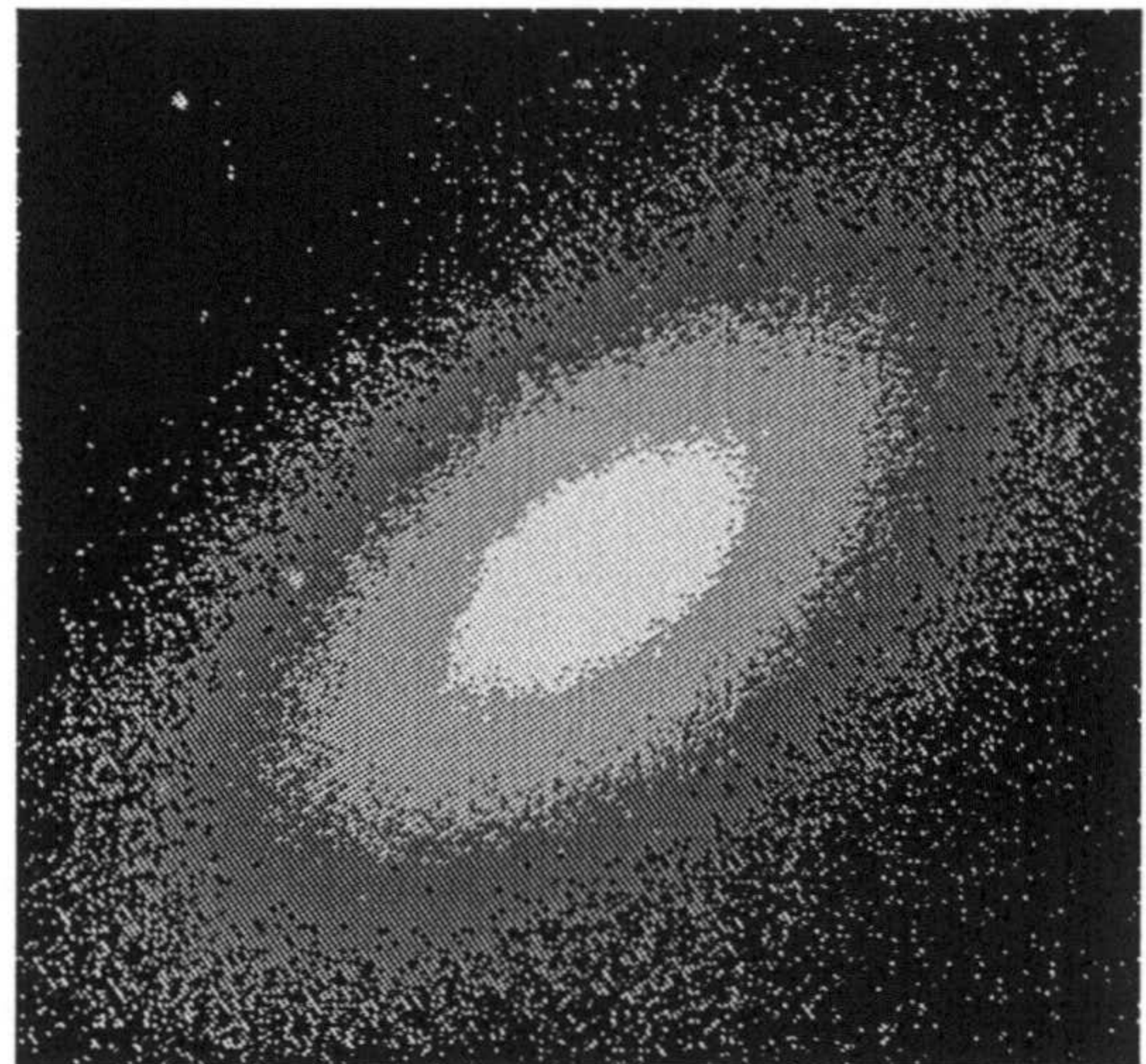
A



C



B



D

Figura 3.5: A (B) muestra la galaxia NGC-309 (respectivamente NGC-3377). C (D) muestra la segmentación inicial, en cuatro clases, obtenida para la galaxia NGC-309 (respectivamente NGC-3377).

- (1) Para algún valor de  $i$ , con  $i$  en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , el estimador  $\hat{\mu}_i$  es incorrecto. En este caso pueden haberse producido asignaciones erróneas de píxeles a la clase  $i$  o a las clases adyacentes.
- (2) La segmentación inicial no es localmente constante, y presenta transiciones bruscas sobre píxeles alejados de discontinuidades (aristas). Entonces nuestro conocimiento a priori sobre las propiedades de continuidad local que verifica la segmentación verdadera, nos induce a considerar que la segmentación inicial es incorrecta.

La limitada fiabilidad de la segmentación inicial nos obliga a considerar un método de segmentación robusto frente a elecciones incorrectas de los parámetros  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  y  $\hat{\mu}_4$ , y que a partir de esta segmentación inicial produce segmentaciones cercanas al óptimo, para el conocimiento empírico disponible (la imagen observada) y el conocimiento a priori sobre la segmentación ideal.

Nuestro objetivo a continuación será por tanto obtener un método fiable que resuelva el problema de la segmentación de una imagen astronómica en las cuatro clases consideradas, supuesto que describimos la imagen como una matriz  $N \times N$  de píxeles ( $N = 256$ ) que determina el retículo  $S$ , donde

$$S = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq N\}$$

Para cada pixel  $s$ , con  $s$  en  $S$ , observamos un valor de intensidad luminosa (expresado en el rango de niveles de gris  $\{0, 1, \dots, 255\}$ ) que notamos por  $X_s^G$ .

Sea entonces el proceso de etiquetas

$$X^E = \{X_s^E, s \in S\}$$

donde  $X_s^E$  indica la clase del pixel  $s$ , y verifica

$$X_s^E \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

El espacio de configuraciones asociado a este proceso es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^S.$$



El proceso de observación es conocido, ya que dado  $X^E$  podemos obtener la distribución de  $X_s^G$ , con  $s$  perteneciente al retículo  $S$ , a partir de la relación

$$X_s^G = \mu_{X_s^E} + \varepsilon_s$$

donde  $\varepsilon_s$  sigue una distribución normal unidimensional de media 0 y varianza  $\sigma_{X_s^E}^2$

$$\varepsilon_s \rightsquigarrow N(0, \sigma_{X_s^E}^2)$$

con

$$\sigma_{X_s^E}^2 \in \{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2\}$$

donde  $\sigma_i^2$  nota la varianza de los niveles de gris observados en la clase  $i$ -ésima, con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Además  $\mu_{X_s^E}$ , con  $\mu_{X_s^E} \in \{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4\}$ , expresa el nivel de gris asociado a la clase del pixel  $s$ . Estamos por tanto considerando ruido 'blanco' (aditivo e independiente).

Los valores  $\sigma_i^2$  en este modelo, determinan el grado de relevancia que tendrá en el proceso de la segmentación el conocimiento empírico del problema (los niveles de gris observados), luego valores elevados para  $\sigma_i^2$  implican una menor dependencia con respecto a los datos.

En nuestros experimentos  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) toma como valor la varianza muestral para los niveles de gris observados en los píxeles que son clasificados en la clase  $i$ -ésima de la segmentación inicial. Estos valores son elevados, luego introducen en el modelo un relajamiento con respecto al conocimiento empírico.

En el proceso considerado, la segmentación de la imagen produce una asignación de valores para el proceso de etiquetas  $\{X_s^E\}_{s \in S}$ , a partir de los niveles de gris en cada pixel.

Este proceso de segmentación se puede describir en términos de dos fases:

- (A) en la primera, se calcula la distribución a posteriori de  $X^E$  dados los valores de las intensidades  $\{X_s^G\}_{s \in S}$ ,

(B) en la segunda fase, se estima la segmentación como el máximo de esta distribución.

La ejecución del paso (B) tiene un elevado coste computacional, puesto que existen  $4^{N \times N}$  segmentaciones posibles, luego resulta inviable abordar directamente este problema y se justifica entonces el uso del procedimiento de optimización combinatoria 'simulated annealing'. Este procedimiento produce buenos resultados si se realiza una elección adecuada de la modelización para  $X^E$ .

A continuación explicitamos el modelo a priori para  $X^E$  que ha sido adoptado.

### Modelo a priori para $X^E$ .

Su elección se hará de forma que las realizaciones más probables de la distribución de probabilidad conjunta  $P(X^E)$  sean localmente constantes y con la posibilidad de transiciones bruscas en la proximidad de discontinuidades (aristas). Será un modelo basado en descripciones sobre píxeles de la familia de los campos aleatorios markovianos, y por tanto asumimos la existencia de dependencia local entre los píxeles.

El sistema de entornos considerado es

$$\eta = \{\eta_s, s \in S\}$$

donde el entorno  $\eta_s$  asociado a un pixel  $s$  en el interior del retículo, es el conjunto de los ocho píxeles adyacentes (en las ocho direcciones posibles), es decir los píxeles cuya disposición espacial mostramos a continuación

$$s : +6 \quad s : +5 \quad s : +4$$

$$s : +7 \quad s \quad s : +3$$

$$s : +8 \quad s : +1 \quad s : +2$$

Para definir el entorno de un pixel en la frontera del retículo  $S$  se usa un modelo de fronteras libres. Es decir los vecinos de un pixel  $s$  en la frontera son los píxeles del entorno  $\eta_s$  que pertenecen al retículo  $S$  (luego los píxeles en el conjunto  $\eta_s \cap S$ ).

La energía  $E(x^E)$  se define entonces como

$$E(x^E) = \beta \sum_{(r,t)} \phi(x_r^E - x_t^E)$$

donde  $(r, t)$  definen un par posible de vecinos para  $\eta$ , donde  $\phi(0) = -1$ ,  $\phi$  es par, no decreciente en  $[0, \infty)$  y de forma funcional

$$\phi(u) = 1 - \frac{2}{1 + u^2}, \quad u \in [-3, +3].$$

Bajo esta elección de energía, determinamos una distribución conjunta verificando las dos propiedades antes exigidas para las imágenes mas probables.

### **Elección del parámetro $\beta$ que controla la fuerza de interacción entre píxeles vecinos.**

Un campo aleatorio markoviano se puede definir especificando sus características locales [51], que en nuestro modelo tienen como forma funcional

$$P(x_s^E = c \mid x^E) \propto \exp \left\{ -\beta \sum_{t \text{ vecino de } s} \phi(x_s^E - x_t^E) \right\} \quad (3.1)$$

perfectamente especificada salvo la elección de  $\beta$ , y este parámetro puede estimarse por pseudoverosimilitud (Besag [5]) sobre una muestra de imágenes segmentadas. En nuestro caso no disponemos de una muestra de aprendizaje y en lugar de emplear esta metodología hemos obtenido valores adecuados para  $\beta$  usando algunas ideas geométricas (ver Ripley [76]):

Si consideramos el grupo de píxeles pertenecientes a una misma región de la imagen segmentada (mostrado en la figura 3.6), y exigimos que las etiquetas de la imagen segmentada sean localmente constantes, entonces debemos de elegir  $\beta$

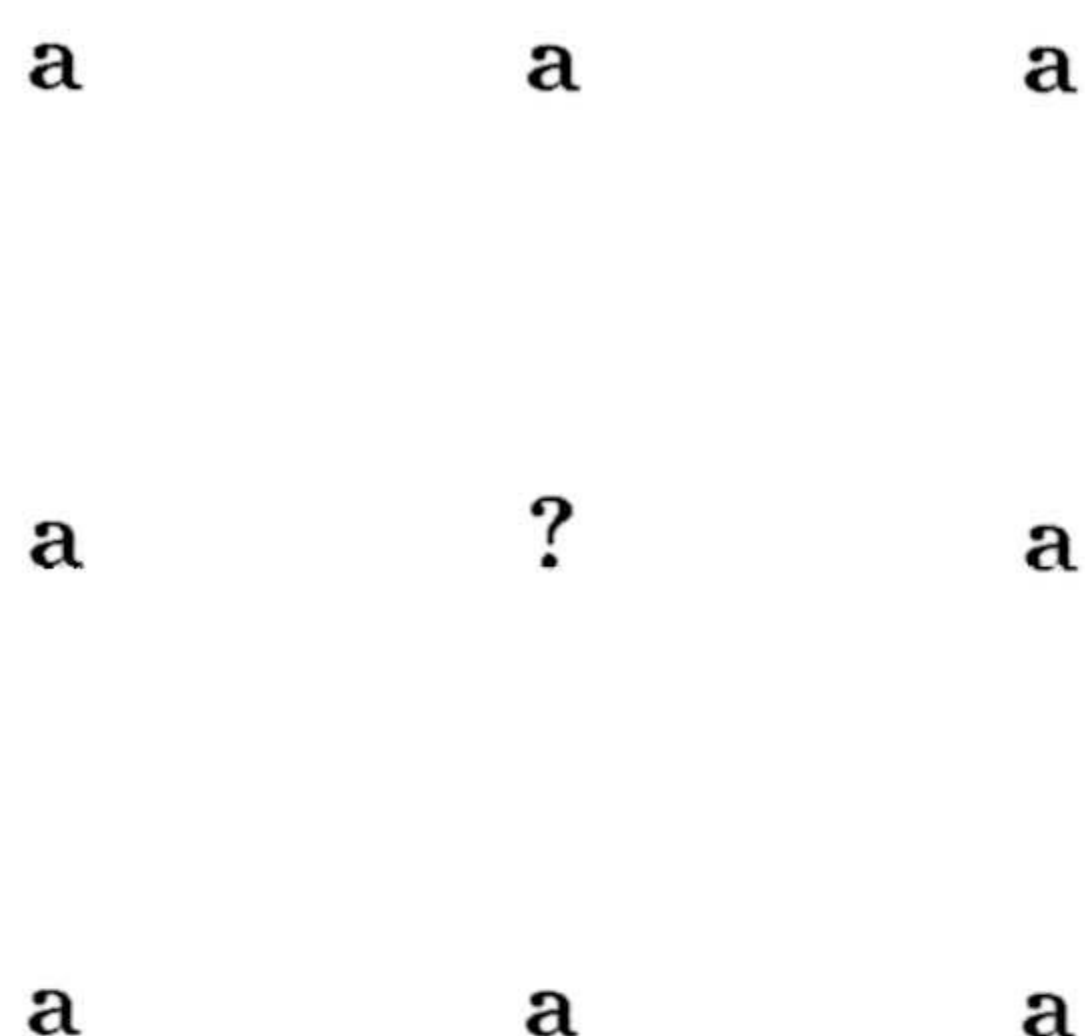


Figura 3.6: Localización de un pixel y sus vecinos, en donde los ocho vecinos tienen asociada la etiqueta  $\mathbf{a}$ , con  $\mathbf{a} \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

verificando

$$\frac{P(\mathbf{?} = \mathbf{a} \mid \text{resto de etiquetas})}{P(\mathbf{?} = \mathbf{c} \mid \text{resto de etiquetas})} > \frac{100}{1} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{c}$  es una etiqueta válida y distinta de la etiqueta  $\mathbf{a}$ , y dada la forma de las características locales en (3.2) bastará con exigir

$$\frac{P(\mathbf{?} = \mathbf{a} \mid \text{resto de etiquetas})}{P(\mathbf{?} = \mathbf{b} \mid \text{resto de etiquetas})} > \frac{100}{1} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{b}$  es una etiqueta válida que verifica

$$|a - b| = 1.$$

A partir de (3.2) y (3.4) obtenemos

$$\frac{\exp\{8\beta\}}{\exp\{0\beta\}} > 100$$

que es cierto para valores de  $\beta$  mayores de 0.6. Tenemos por tanto que una cota inferior para el valor de  $\beta$  es 0.6.

Por otro lado debemos permitir la existencia de esquinas, luego si consideramos el grupo de píxeles que se muestra en la figura 3.6(b) debemos exigir que

$$\frac{P(\mathbf{?} = \mathbf{b} \mid \text{resto de etiquetas})}{P(\mathbf{?} = \mathbf{a} \mid \text{resto de etiquetas})} > \frac{1}{100} \quad (3.4)$$



Figura 3.6(b): Localización de un píxel y sus vecinos. Las etiquetas *a* y *b* pertenecen a  $\{1, 2, 3, 4\}$ , y verifican que  $|a - b| = 1$ .

luego por (3.2) y (3.5) tendremos que

$$\frac{\exp\{3\beta\}}{\exp\{5\beta\}} > \frac{1}{100}$$

de donde obtenemos que  $\beta$  queda acotada superiormente por 2.3, y por tanto un rango de valores de  $\beta$  que satisfacen la condición de continuidad local viene dado por

$$0.6 \leq \beta \leq 2.3$$

### Obtención de un estimador adecuado para la imagen segmentada.

Una vez especificado el modelo a priori, y por tanto finalizada la fase (A), abordemos la segunda fase considerada en el proceso de segmentación (la fase B).

La distribución a posteriori de  $X^E$  es

$$cte \times \exp \left\{ -\beta \sum_{(r,t)} \phi(x_r^E - x_t^E) - \frac{1}{2} \sum_r \frac{(x_r^G - \mu_{x_r^G})^2}{\sigma^2} \right\}$$

que determina de nuevo un campo aleatorio markoviano.

Si  $P(x^E | x^G)$  nota la 'a posteriori' y consideramos

$$P_T(x^E | x^G) = (P(x^E | x^G))^{\frac{1}{T}}$$

cuando  $T \downarrow 0$ , la distribución  $P_T$  se concentra sobre la moda de la distribución a posteriori. Además  $P_T$  es también un campo aleatorio markoviano, luego si construimos una secuencia de muestras desde  $P_T$  con  $T \downarrow 0$ , estas muestras deberían converger a la segmentación buscada (Geman [26], Gidas [32]).

Una manera de simular un campo aleatorio markoviano es visitar un número determinado de veces todos los píxeles, reemplazando cada etiqueta por una realización de la distribución condicional dadas las etiquetas de los vecinos del pixel (y el nivel de gris observado en ese pixel para la simulación de la 'a posteriori'). Este proceso tiene como distribución de equilibrio el campo aleatorio markoviano sobre  $X^E$ , y se usa (Geman y Geman [26]) considerando una secuencia de iteraciones completas donde tras cada iteración la temperatura  $T$  desciende de acuerdo a la escala

$$T = 3/\ln(1 + \text{número de ciclos}).$$

Las figuras 3.3 y 3.3(b) muestran segmentaciones obtenidas con el proceso aquí desarrollado.

### 3.3 Caracterización de la forma galaxia.

La aplicación del proceso de segmentación descrito en la sección anterior produce una imagen de píxeles clasificados en cuatro clases y la extracción sobre esta imagen de una región  $R_C$  con las características externas exigidas.

En el desarrollo que sigue, presentamos tres procedimientos para la caracterización de galaxias, que usan directa o indirectamente la representación de la forma que determina esta región  $R_C$  para identificar si la galaxia es espiral o elíptica, incluso después de someterla a transformaciones geométricas usuales (rotaciones, cambios de escala y traslaciones).

En el primero de los tres enfoques presentados se usan dos descriptores de la forma:

- (1) el area de la región  $R_C$ , y

(2) el perímetro de  $R_C$  (es decir la longitud del contorno  $C$ )

para establecer una medida de la compacticidad de la región  $R_C$  que se define como

$$\frac{\text{perímetro}^2}{\text{area}}$$

La compacticidad es una medida que alcanza valores mínimos sobre regiones con forma de disco. Luego dado que las regiones  $R_C$  extraídas sobre galaxias elípticas tienen aproximadamente forma de disco, esperamos que los valores para la compacticidad observados sobre ellas sean significativamente menores que los valores de compacticidad que se observan sobre regiones  $R_C$  extraídas sobre galaxias espirales y que están deformadas por la presencia de brazos en la galaxia (ver figuras 3.7 y 3.7(b)).

El segundo enfoque aquí desarrollado aborda la caracterización de una galaxia elíptica en base a la medida de la distancia entre el contorno  $C$  de la región  $R_C$  y la elipse que mejor se ajusta a  $C$ .

El tercer enfoque que presentamos aborda la caracterización de la forma espiral en base a la identificación de un patrón analítico sobre la curva de curvaturas  $K$  calculada sobre  $C$ .

### 3.3.1 Caracterización de una galaxia elíptica por la compacticidad de la región $R_C$ .

El area de una región es una propiedad descriptiva básica que se define, sobre imágenes digitales, como el número de píxeles contenidos dentro de su frontera.

El perímetro de una región, otro descriptor simple, es la longitud de su frontera.

El uso de estos descriptores se limita a situaciones en las que el tamaño de los objetos de interés es invariante. Luego su uso directo para caracterizar la galaxia

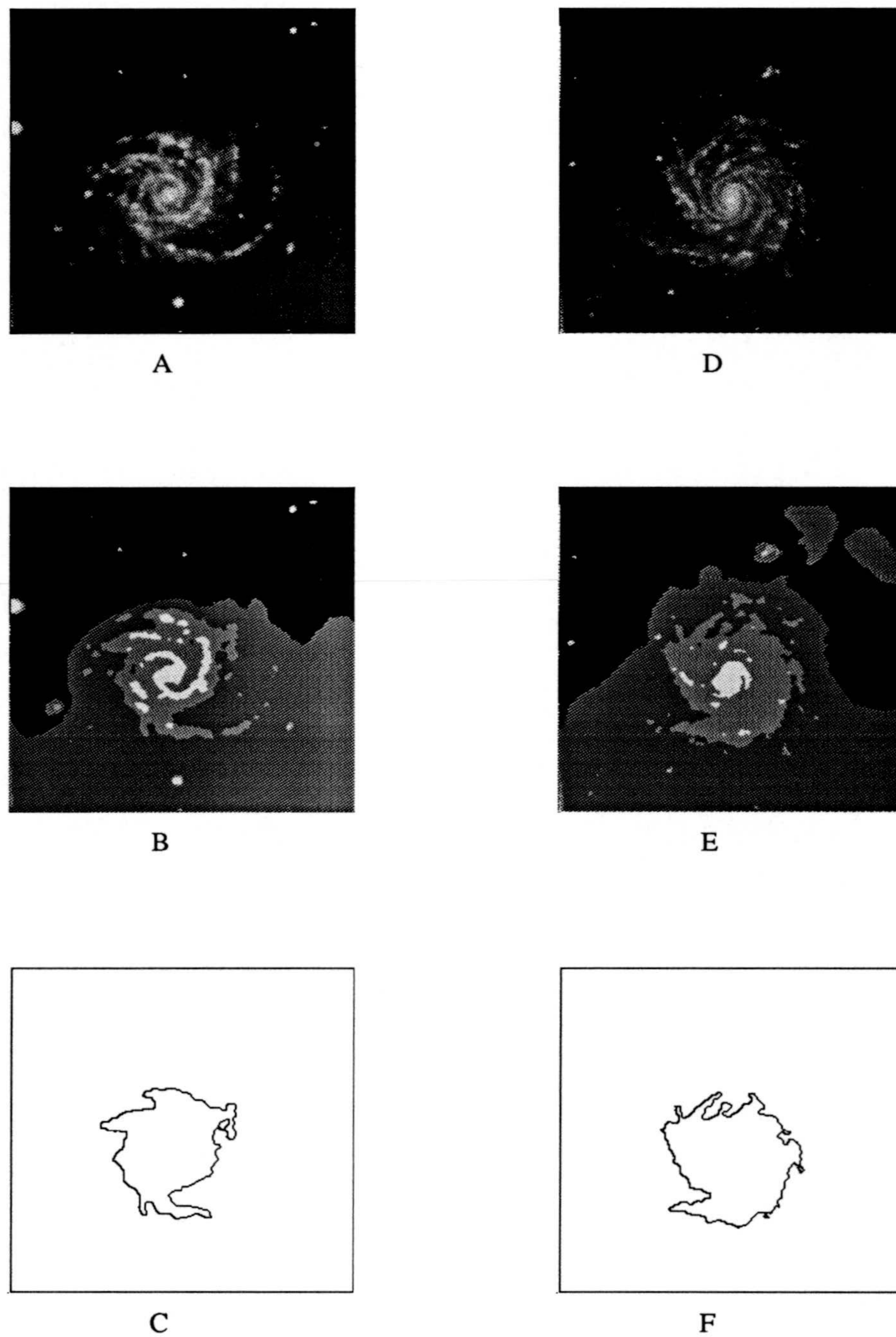


Figura 3.7: *B (E)* muestra la segmentación obtenida para *A* (respectivamente *D*). *C (F)* muestra la frontera que separa la clase 2 y la clase 1 en la imagen *B* (respectivamente *E*).



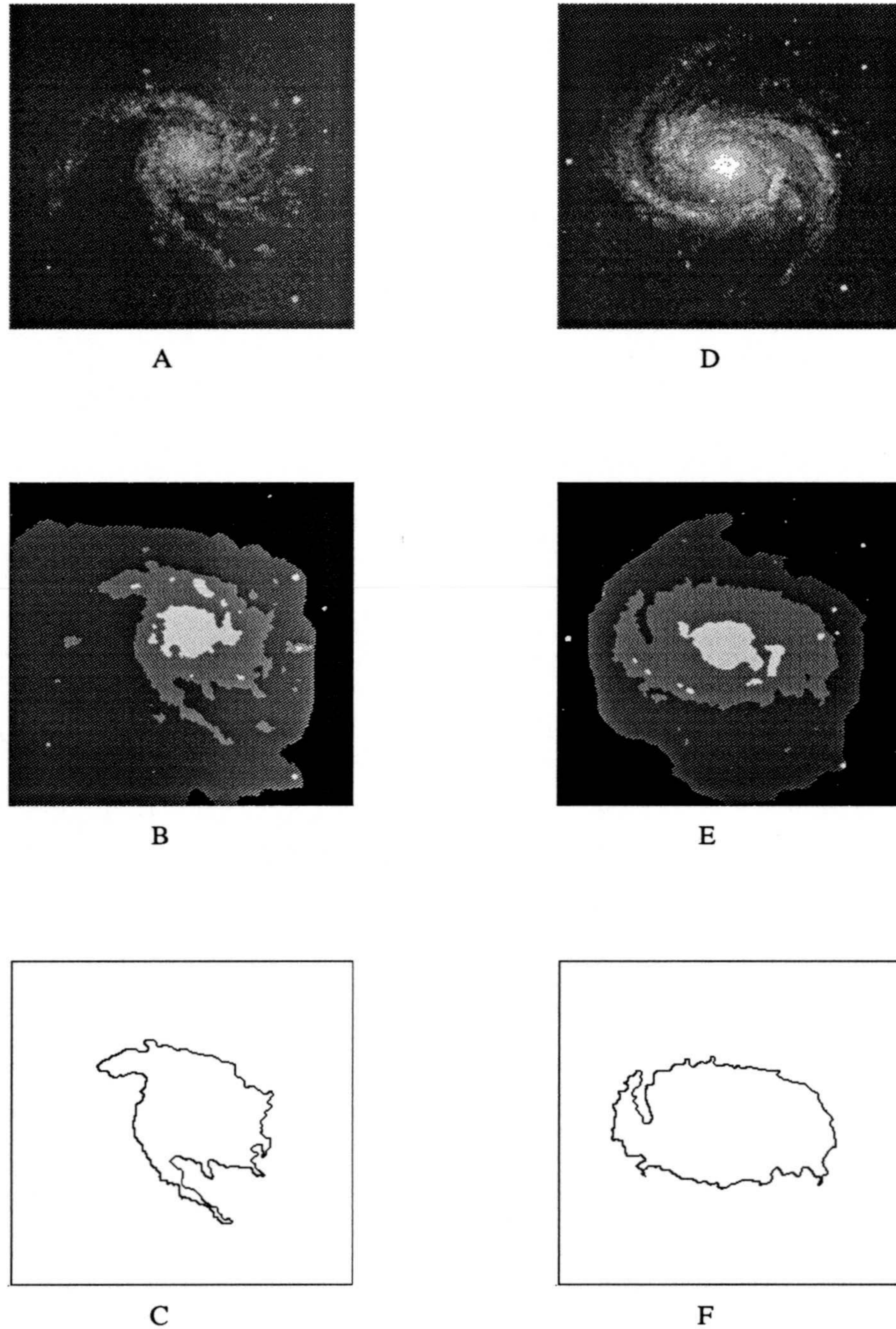


Figura 3.7(b): *B (E) muestra la segmentación obtenida para A (respectivamente D). C (F) muestra la frontera que separa la clase 2 y la clase 1 en la imagen B (respectivamente E).*

Clase	Media	Desviación
Espiral	4.635	$\pm 0.293$
Elíptica	1.474	$\pm 0.262$

Tabla 3.1: Media y desviación para la compacticidad.

mediante el estudio del objeto  $R_C$  no es posible ya que el tamaño de este objeto no es invariante.

La compacticidad de una región se define como

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\text{perímetro}^2}{\text{area}}$$

donde el factor  $\frac{1}{4\pi}$  permite que el mínimo valor de la compacticidad (alcanzado sobre regiones con forma de disco) sea igual a uno.

Luego si notamos por  $R_C^*$  a una región definida como

$$R_C^* = \{(i, j) \mid (i - i_0)^2 + (j - j_0)^2 \leq r^2\}$$

donde  $r$  y  $(i_0, j_0)$  son parámetros cualesquiera para los que  $R_C^*$  es una región interior del plano, tendremos que el valor mínimo de la compacticidad se alcanza sobre la región  $R_C^*$ . Es decir

$$\min\{\text{compacticidad}(R_C) \mid R_C \text{ región del plano}\} = \text{compacticidad}(R_C^*) = 1.$$

La compacticidad es una medida invariante frente a cambios de escala, y con excepción de los errores presentes en la rotación de una región digital, también determina una medida de la región invariante frente a transformaciones de rotación.

Se ha podido comprobar, sobre una muestra de tamaño  $n = 50$ , que la medida de la compacticidad sobre la región  $R_C$  extraída de una galaxia elíptica produce valores máximos que son inferiores a 2.5. Mientras el calculo de la compacticidad sobre una región  $R_C$  extraída de una galaxia espiral produce valores mínimos que son superiores a 4.0. La tabla 3.1 muestra la media y desviación para la compacticidad calculada sobre galaxias elípticas y espirales.

Luego los valores de la compacticidad sobre galaxias elípticas toman valores que son significativamente inferiores a los valores de la compacticidad de  $R_C$  para galaxias espirales, y su calculo determina un procedimiento de caracterización de la forma.

### 3.3.2 Caracterización de una galaxia elíptica por el contorno $C$ de la región $R_C$ .

Es una propiedad observable que el contorno  $C$  que rodea la región  $R_C$  extraída sobre una galaxia elíptica, se puede aproximar mediante una elipse cuya orientación y ejes principales coinciden con la orientación y los ejes principales del contorno  $C$ .

Esta propiedad determina un segundo enfoque para caracterizar galaxias elípticas si la máxima distancia entre un contorno  $C$ , extraído de una galaxia elíptica, y su aproximación elíptica es significativamente inferior a la mínima distancia existente entre un contorno  $C$ , extraído de una galaxia espiral, y una elipse.

A continuación desarrollamos la formulación de esta metodología y presentamos algunos resultados experimentales obtenidos.

En primer lugar describimos el procedimiento orientado a la obtención de la elipse que aproxima el contorno  $C$ .

En segundo lugar definimos la medida de la distancia entre el contorno  $C$  y su aproximación elíptica.

En tercer lugar mostramos algunos resultados experimentales obtenidos.

#### Obtención de una elipse que aproxima al contorno $C$ .

La elipse  $E$  que aproxima el contorno  $C$  se obtiene mediante el ajuste por mínimos cuadrados de un modelo elíptico a  $C$ .

En este desarrollo notamos por  $E_{(a,b,\theta)}$  la elipse de eje mayor  $a$ , eje menor  $b$  y cuyo eje mayor forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Luego  $E_{(a^*,b^*,\theta^*)}$  nota la elipse que mejor ajusta el contorno  $C$ , si  $a^*, b^*, \theta^*$  son los valores para los parámetros  $a, b$  y  $\theta$  que minimizan la función

$$F(a, b, \theta) = \sum_{(x,y) \in C} \left( \frac{(x \cos \theta - y \sin \theta - x_0)^2}{a^2} + \frac{(x \sin \theta + y \cos \theta - y_0)^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

donde notamos por  $(x_0, y_0)$  las coordenadas del centro de la galaxia.

Es decir

$$F(a^*, b^*, \theta^*) = \min_{a,b,\theta} F(a, b, \theta).$$

El ajuste por mínimos cuadrados se realiza usando una rutina de búsqueda cuadrática que minimiza en  $a, b$  y  $\theta$  la función  $F(a, b, \theta)$  (ver Press [75]). La rutina de búsqueda parte de una solución inicial para  $a, b$  y  $\theta$  calculada como se indica a continuación.

#### Búsqueda de una solución inicial para $a, b$ y $\theta$ .

Una aproximación elíptica inicial al contorno  $C$  se obtiene al considerar una elipse  $E$  con las dos propiedades siguientes:

- (1)  $E$  tiene la misma orientación de  $C$ ,
- (2) los ejes mayor y menor de  $E$  coinciden con los ejes (mayor y menor) de  $C$ .

El eje mayor del contorno  $C$  se define, en este desarrollo, como el segmento de línea recta  $\overline{P_1 P_2}$  que une el par de puntos opuestos  $P_1$  y  $P_2$  del contorno  $C$  más alejados entre sí (ver figura 3.8), es decir

$$P_1, P_2 \in C$$

y verifican que

$$d(P_1, P_2) = \max \{d(P, P') \mid P, P' \text{ puntos opuestos de } C\}$$

El eje menor del contorno se define como el segmento de recta  $\overline{P_3P_4}$  que une los puntos  $P_3$  y  $P_4$ , donde  $P_3$  y  $P_4$  son los puntos de intersección del contorno  $C$  con la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor de  $C$  (ver figura 3.8).

Una solución inicial para el eje mayor  $a$  de la elipse que aproxima  $C$  se obtiene mediante el eje mayor de  $C$  (segmento  $\overline{P_1P_2}$ ). De manera semejante el segmento  $\overline{P_3P_4}$  determina una solución inicial para el eje menor  $b$  asociado a la aproximación elíptica de  $C$ . La solución inicial para el parámetro  $\theta$  se calcula como el ángulo que forma  $\overline{P_1P_2}$  con la horizontal.

### Distancia entre $C$ y su aproximación elíptica.

La medida de la distancia entre un contorno  $C$  y su aproximación elíptica  $E$  tiene que ser insensible a cambios de escala. En esta línea definimos la distancia entre un contorno  $C$ , con  $N$  puntos,

$$C = \{p_i \mid i = 1, \dots, N\}$$

y su aproximación elíptica  $E$ ,

$$E = \{e_j \mid j = 1, \dots, M\}$$

como

$$d(C, E) = \frac{1}{|C|} \sum_{p_i \in C} \frac{d(p_i, e_{(p_i)})}{d(p_i, O)}$$

donde  $O$  es el centro de la galaxia,  $e_{(p_i)}$  es el punto de la elipse  $E$ , en el mismo cuadrante que  $p_i$  y que se obtiene al intersecar la elipse  $E$  con la recta que une  $p_i$  y  $O$ , y donde  $d(p_i, e_{(p_i)})$  y  $d(p_i, O)$  notan la distancia euclídea entre los puntos correspondientes ( ver figura 3.9). En este desarrollo suponemos que  $d(p_i, O) > 0$  para todo punto  $p_i$  del contorno  $C$ .

La medida  $d(C, E)$  es el promedio de las distancias normalizadas entre cada punto  $p_i$  del contorno  $C$  y el correspondiente punto  $e_{(p_i)}$  sobre la elipse  $E$  que aproxima  $C$ .

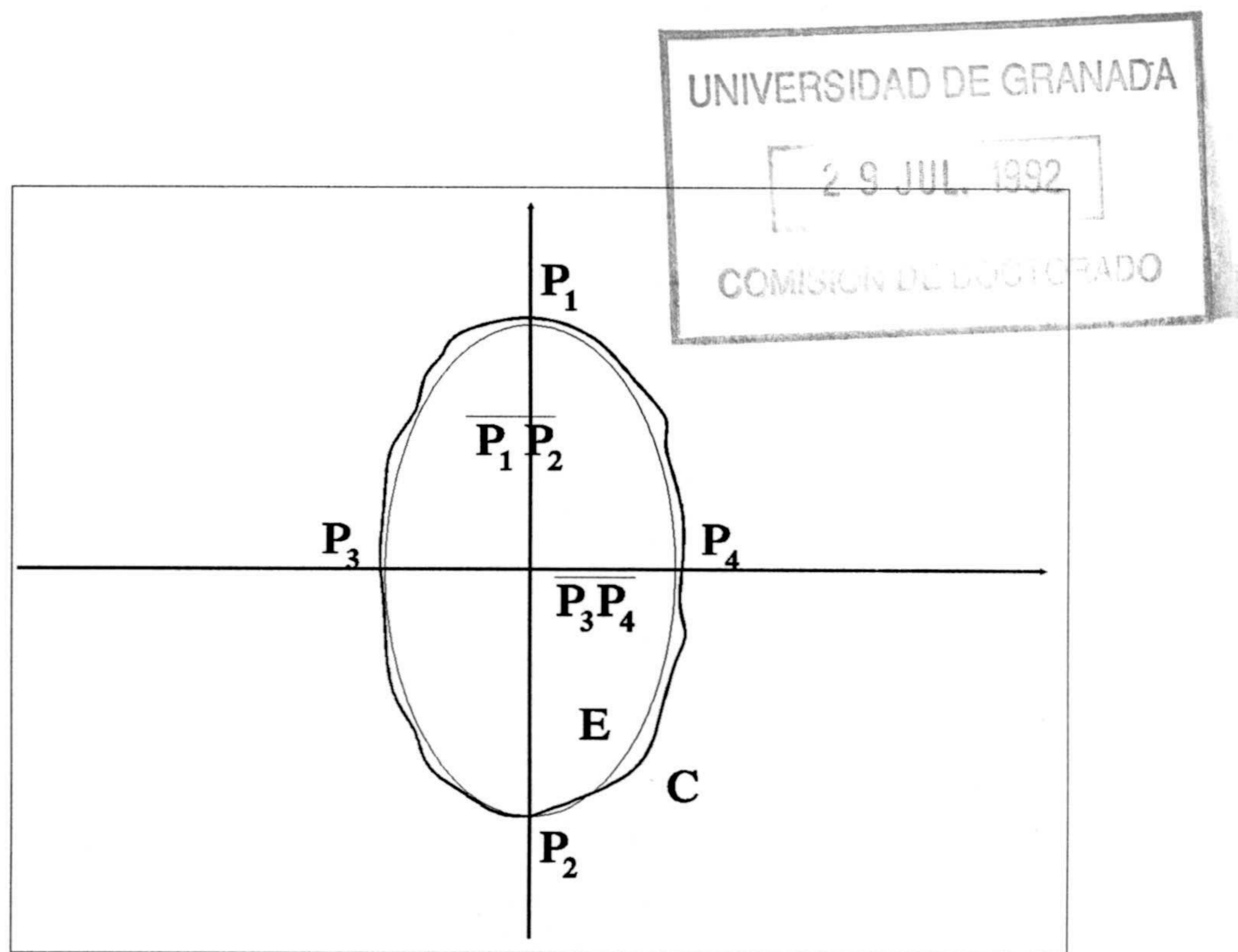


Fig. 3.8: Ejes mayor y menor del contorno C, y de la elipse asociada E.

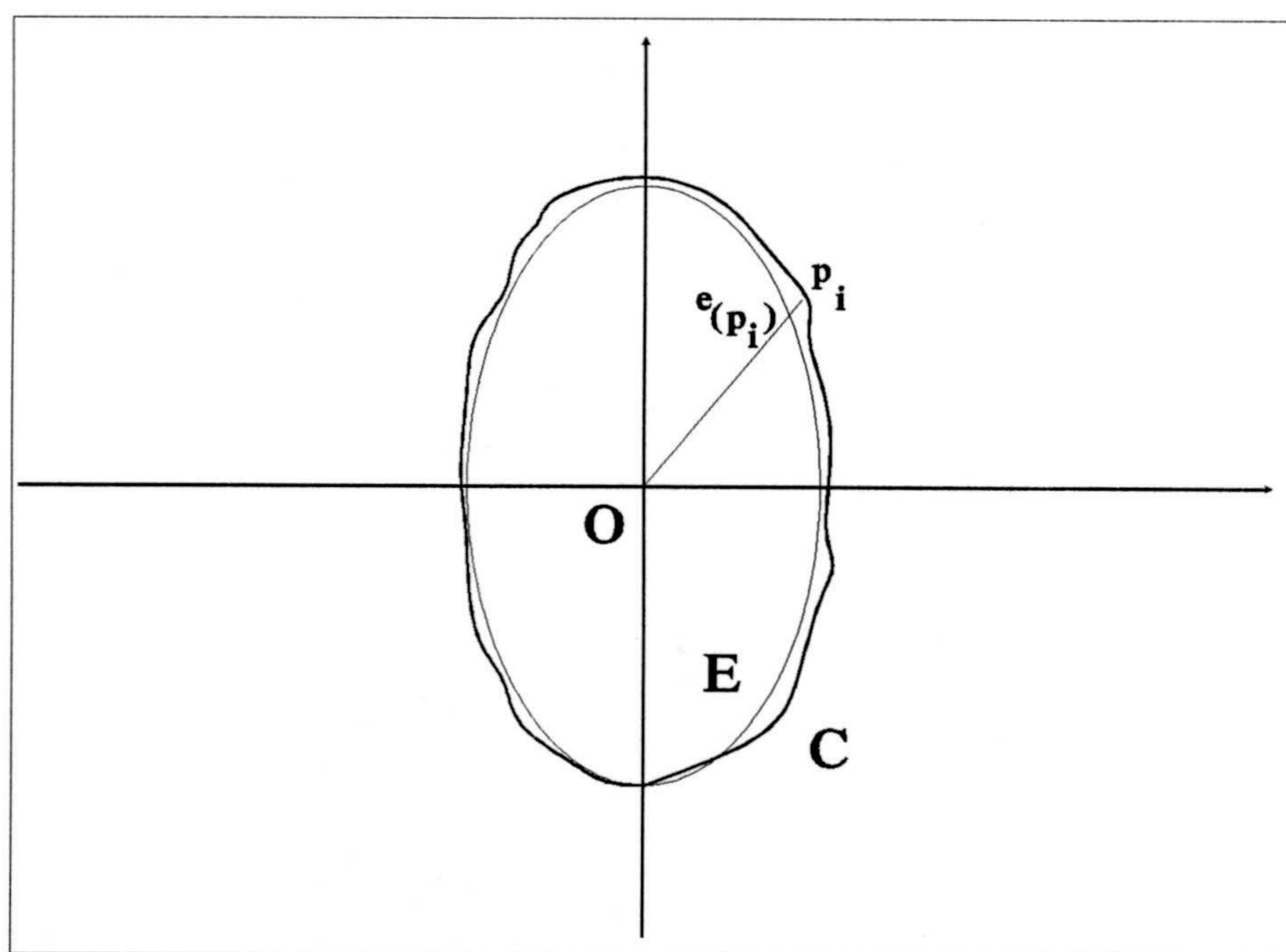


Fig 3.9: Distancia entre el contorno C y la elipse E.

Clase	Media	Desviación
Espiral	0.38	$\pm 0.193$
Elíptica	0.046	$\pm 0.02$

Tabla 3.2: Media y desviación para los valores de la distancia entre un contorno y su aproximación elíptica.

El valor mínimo alcanzado por la distancia  $d(C, E)$  es 0 y se obtiene cuando el contorno  $C$  coincide con su aproximación elíptica  $E$ , es decir cuando

$$p_i = e_{(p_i)}, \text{ para todo } p_i \in C$$

puesto que entonces

$$\begin{aligned} d(C, E) &= \frac{1}{|C|} \sum_{p_i \in C} \frac{d(p_i, e_{(p_i)})}{d(p_i, O)} \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{p_i \in C} \frac{0}{d(p_i, O)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

El valor máximo que alcanza la distancia  $d(C, E)$  está acotado superiormente por 1.

Empleando esta segunda metodología y sobre una muestra de tamaño  $n = 50$  de galaxias elípticas y espirales, se ha podido comprobar que la distancia normalizada entre un contorno  $C$  extraído de una galaxia elíptica y su aproximación elíptica, alcanza un valor máximo inferior a 0.08, mientras que la distancia normalizada entre un contorno  $C$  extraído de una galaxia espiral y su aproximación elíptica alcanza un valor mínimo superior a 0.23. La tabla 3.2 muestra los valores de la media y desviación para la distancia calculada sobre galaxias espirales y elípticas.

### 3.3.3 Caracterización de una galaxia espiral por la identificación de un patrón teórico en la curva de curvaturas $K$ calculada sobre $C$ .

A diferencia de los dos primeros enfoques presentados donde abordamos la caracterización de la forma elíptica, nuestro objetivo ahora es caracterizar la forma espiral.

La identificación de brazos en la forma es suficiente para determinar su pertenencia a la clase de galaxias espirales, pero la localización de los posibles brazos directamente en la imagen inicial es un proceso complejo y computacionalmente poco eficiente.

En el proceso de reducción de información antes descrito, hemos extraído de la imagen segmentada un contorno  $C$  que se deforma en presencia de brazos espirales. Pero la identificación automática de estas deformaciones no es posible ya que no aparece un patrón regular ajustable mediante una función analítica, y además la identificación de un patrón sobre  $C$  no determina una caracterización de la forma invariante frente a las transformaciones geométricas usuales.

En la curva de curvaturas  $K$  calculada para el contorno  $C$ , se observa que los valores de curvatura obtenidos sobre una zona de  $C$  deformada por la presencia de un brazo espiral, se ajustan a un patrón específico y reconocible analíticamente donde aparecen dos outliers de signo opuesto de las curvaturas observadas (ver figura 3.10 y 3.11). Esta propiedad será usada para determinar la presencia de brazos en la forma y consiguientemente caracterizar la galaxia como espiral. Además puesto que la caracterización se realiza identificando un patrón sobre el vector de curvaturas  $K$ , el procedimiento de caracterización será invariante frente a transformaciones de rotación, traslación y homotecia.

En el desarrollo que sigue y en primer lugar describimos el procedimiento de cálculo de los valores de curvatura para el contorno  $C$ .

En segundo lugar presentamos la forma funcional del patrón analítico a identificar sobre la curva de curvaturas  $K$  asociada a  $C$ .

En tercer lugar describimos un procedimiento eficiente orientado al ajuste del patrón sobre  $K$ .

En cuarto lugar analizamos las propiedades de este procedimiento de carac-



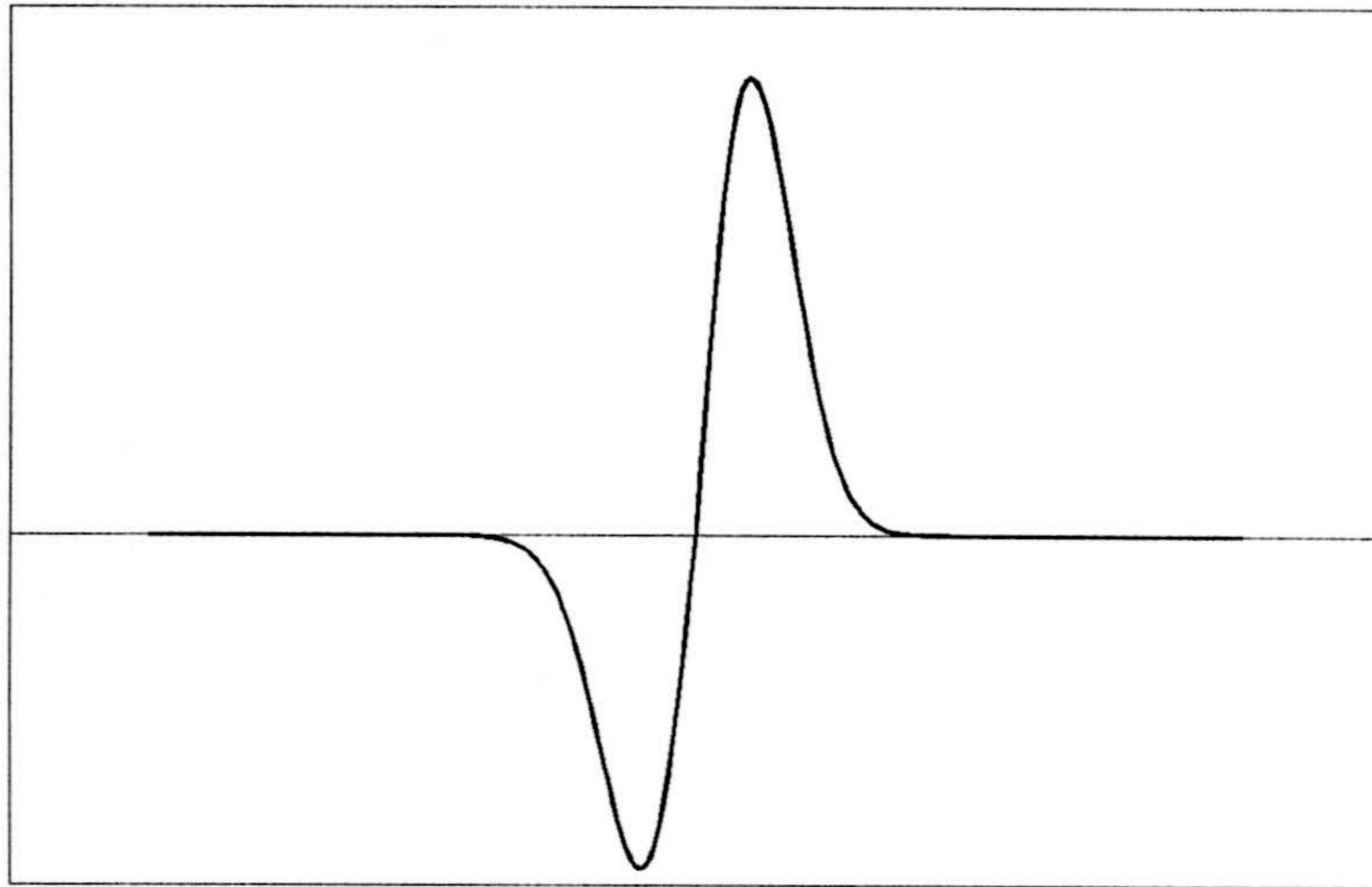


Fig. 3.10: Patrón analítico ajustable a las curvaturas calculadas sobre una zona, del contorno C, deformada por la presencia de un brazo espiral de curvatura positiva.

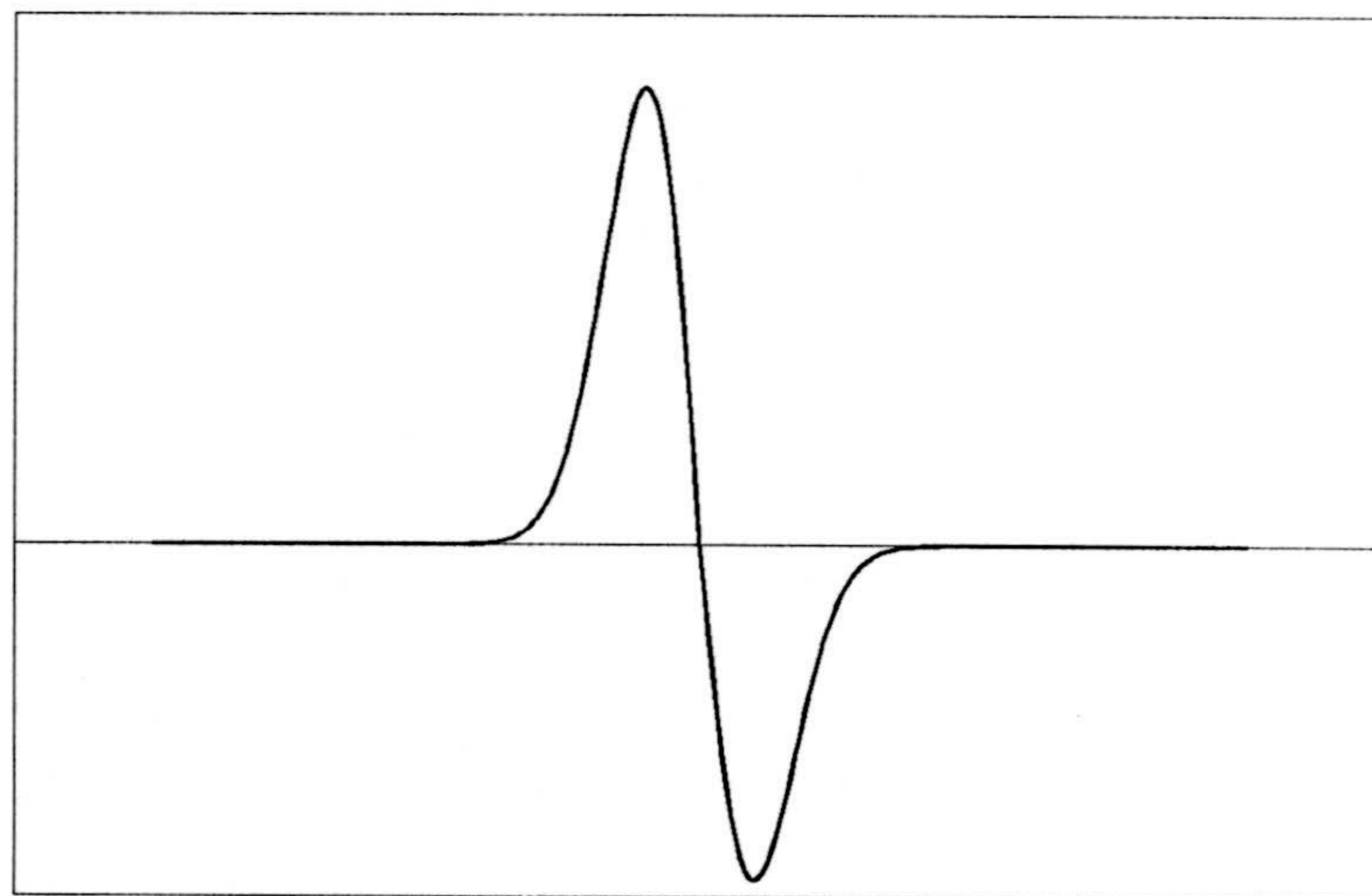


Fig. 3.11: Patrón analítico ajustable a las curvaturas calculadas sobre una zona del contorno C, deformada por la presencia de un brazo espiral de curvatura negativa.

terización de la forma espiral.

#### Extracción de la curva de curvaturas $K$ asociada a $C$ .

Como ya indicamos al principio del capítulo, la representación de la curva  $C$  (que induce una representación sobre la galaxia) debe de ser invariante frente a transformaciones de escala, rotación y traslación.

La familia de procedimientos que obtienen la representación de una curva plana en términos de su curva de curvaturas, verifican la propiedad de invarianza exigida y en esa línea se enmarca el modelo de representación que describimos. Concretamente la técnica propuesta es invariante frente a las transformaciones geométricas usuales, puesto que la caracterización de la forma se realiza mediante la identificación de una función analítica en la curva de curvaturas asociada a la frontera de la galaxia.

Mokhtarian [64] describe un buen desarrollo para el calculo de la curva de curvaturas  $K$  asociada a una curva plana  $C$ , que a continuación resumimos brevemente.

Sobre la curva  $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in T\}$  la curvatura se puede calcular como

$$k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{2}{3}}}$$

y si reexpresamos  $\frac{d^2y}{dx^2}$  y  $\frac{dy}{dx}$  en términos de las derivadas de  $x(t)$  y de  $y(t)$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

obtenemos que

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sobre curvas digitales, no está claro como definir una medida equivalente de la pendiente, ya que esta puede diferir solamente en múltiplos de  $\frac{\pi}{4}$  sobre puntos sucesivos de la curva, lo que elimina la posibilidad de variaciones pequeñas (variaciones entre 0 y  $\frac{\pi}{4}$ ).

Este problema se resuelve usando aproximaciones a la pendiente en un punto de la curva, calculando la curvatura no directamente sobre la curva  $C$  sino sobre una versión 'alisada' de  $C$ , de acuerdo a un determinado factor de alisamiento  $\sigma$ .

Con este fin las funciones  $x(t)$  y  $y(t)$  son convolucionadas con la función de densidad de una distribución normal de media 0 y varianza  $\sigma^2$  que notamos por  $g(t, \sigma)$

$$g(t, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Si notamos  $x(t, \sigma)$  a la convolución de  $x(t)$  con la densidad  $g(t, \sigma)$  tendremos que

$$\begin{aligned} x(t, \sigma) &= x(t) * g(t, \sigma) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}\right\} du \end{aligned}$$

con  $y(t, \sigma)$  definido de manera similar. Entonces sobre la curva alisada

$$\{(x(t, \sigma), y(t, \sigma)) \mid t \in T\}$$

el calculo de la curvatura requiere la obtención de las derivadas

$$\dot{x}(t, \sigma), \ddot{x}(t, \sigma), \dot{y}(t, \sigma), \ddot{y}(t, \sigma)$$

valores que pueden ser calculados usando

$$\dot{x}(t, \sigma) = x(t) * \left(\frac{\partial g(t, \sigma)}{\partial t}\right)$$

$$\ddot{x}(t, \sigma) = x(t) * \left(\frac{\partial^2 g(t, \sigma)}{\partial t^2}\right)$$

y de manera similar para  $\dot{y}(t, \sigma)$  y  $\ddot{y}(t, \sigma)$ .

El empleo de la anterior técnica produce sobre el contorno  $C$  una curva de curvaturas alisada

$$K = \{k(t, \sigma) \mid t \in T\}$$

con un factor de alisamiento dado por  $\sigma$ , y en donde la elección de  $\sigma$  se hace de forma que su valor corresponda al nivel de detalle deseado, siendo el límite  $\sigma = 0$  (equivalente a convolucionar con la función impulso).

La elección de  $\sigma$  está relacionada con la escala a la que se analiza el contorno, buscando un 'equilibrio' entre el excesivo ruido que se produce para valores de  $\sigma$  muy bajos y el excesivo alisamiento observado para valores elevados, y hemos comprobado experimentalmente que  $\sigma = 4$  es un valor adecuado para alcanzar ese equilibrio.

La elección del valor  $\sigma = 4$  es equivalente a alisar  $x(s)$  e  $y(s)$  en  $s = t$  usando para ello los valores de  $x(\cdot)$  e  $y(\cdot)$  observados sobre los vecinos de  $t$ , donde

$u$  es un vecino de  $t$ , si y solamente si  $u \in \{t - 10, t - 9, \dots, t + 9, t + 10\}$ .

Es decir que

$$\begin{aligned} x(t, \sigma = 4) &= \sum_{s=-L}^{s=+L} x(t-s)g(s, \sigma = 4) \\ &= \sum_{s=-10}^{s=+10} x(t-s)g(s, \sigma = 4) + \varepsilon \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y(t, \sigma = 4) &= \sum_{s=-L}^{s=+L} y(t-s)g(s, \sigma = 4) \\ &= \sum_{s=-10}^{s=+10} y(t-s)g(s, \sigma = 4) + \varepsilon \end{aligned}$$

con  $\varepsilon$  muy próximo a cero.

El tamaño aproximado del entorno de  $t$  cuando  $\sigma = 4$  se puede extraer del siguiente desarrollo.

Notemos por  $[a]$  el número entero más próximo al número real  $a$ . Notemos además por  $\max\{|x(s)|\}$  al mayor valor que puede tomar la coordenada  $x(\cdot)$ , supuesto que el eje de coordenadas está centrado en el centro de la galaxia. Si el centro de la galaxia coincide con el centro de la imagen digital, el valor máximo que puede alcanzar  $x(\cdot)$  es 128, luego  $\max\{|x(s)|\} = 128$ .

Bajo esta notación, y si el centro de la galaxia coincide con el centro de la imagen, tendremos que

$$\begin{aligned} [\max\{|x(t-s)|\}g(s, \sigma = 4)] = 0 &\iff \\ g(s, \sigma = 4) < \frac{0.5}{128} &\iff \\ |s| > 10 & \end{aligned}$$

de donde deducimos la dependencia que existe entre un punto  $t$  y los puntos en el intervalo  $\{t - 10, t - 9, \dots, t + 9, t + 10\}$ , que determina el entorno de  $t$ .

### 3.4.3.1 Identificación de un patrón en $K$ .

El contorno  $C$  extraído de la imagen segmentada se deforma significativamente si aparecen brazos espirales distinguibles en la forma de la galaxia (ver figura 3.12).

Si centramos nuestra atención sobre la zona del contorno deformada por la presencia de un brazo espiral en la galaxia, y calculamos los valores de curvatura asociados a esta zona (ver figura 3.12), observamos que estos valores alcanzan dos outliers de signo opuesto de las curvaturas observadas y se ajustan a un patrón teórico notado por  $p_+(s)$  (ó al patrón notado por  $p_-(s)$ ) cuando el brazo espiral tiene curvatura positiva ( respectivamente curvatura negativa ) y cuya representación gráfica mostramos en la figura 3.13.

El patrón teórico  $p_+(s)$  tiene la forma funcional

$$p_+(s) = \begin{cases} \phi_1 h(s, \sigma) & s \leq 0 \\ \phi_2 h(s, \sigma) & s > 0 \end{cases},$$

donde las constantes  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son reales positivos,

$$h(s, \sigma) = \frac{s}{\sigma^2} g(s, \sigma)$$

y donde  $g(s, \sigma)$  es la función de densidad de una distribución normal de media 0 y varianza  $\sigma^2$

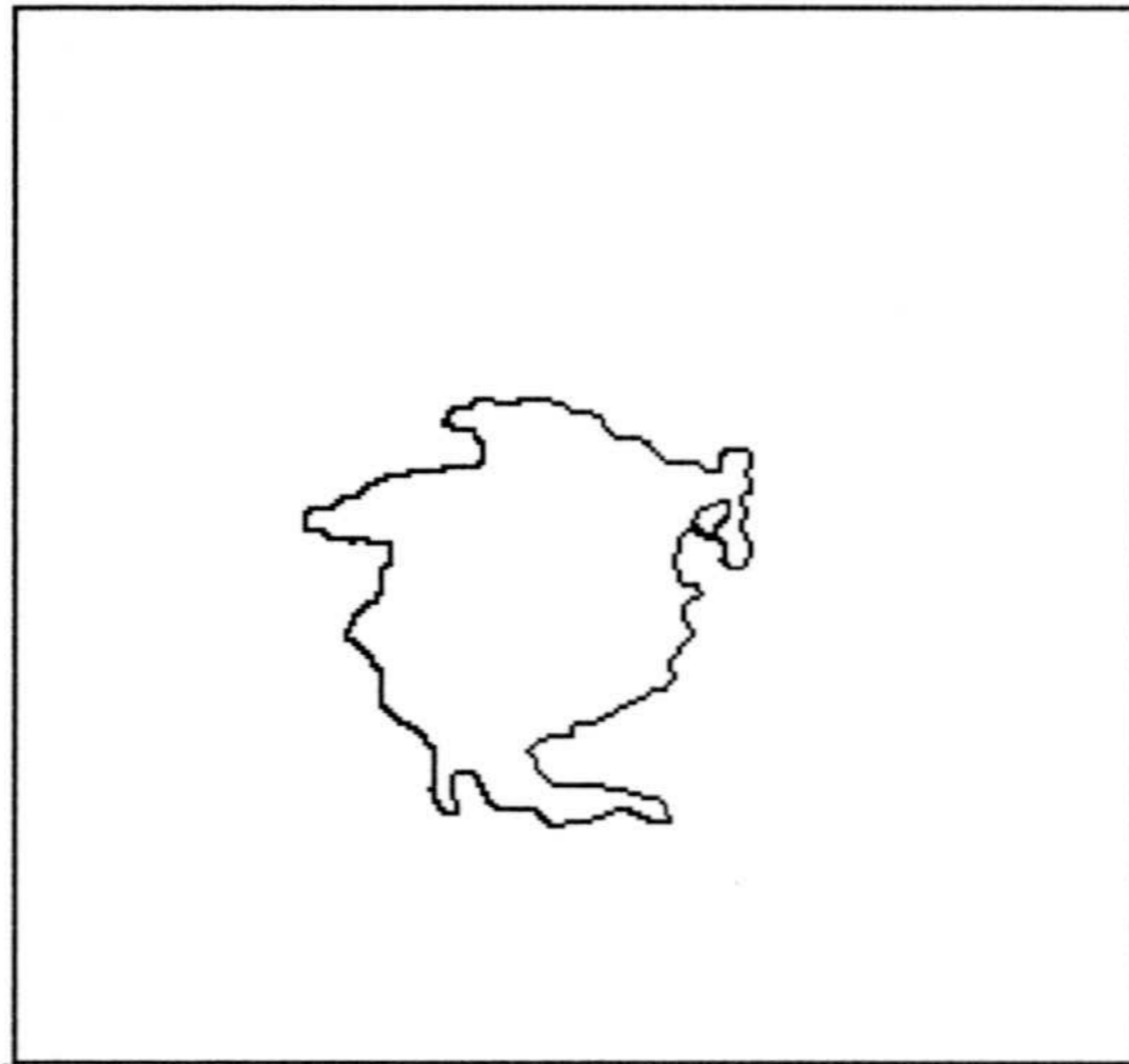
$$g(s, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{s^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

El patrón  $p_+$  se puede reexpresar como una función en línea

$$p_+(s) = (\phi_1 - \phi_2) \bar{h}(s, \sigma) + \phi_2 h(s, \sigma)$$

donde

$$\bar{h}(s, \sigma) = 1_{[s \leq 0]}(s) h(s, \sigma)$$

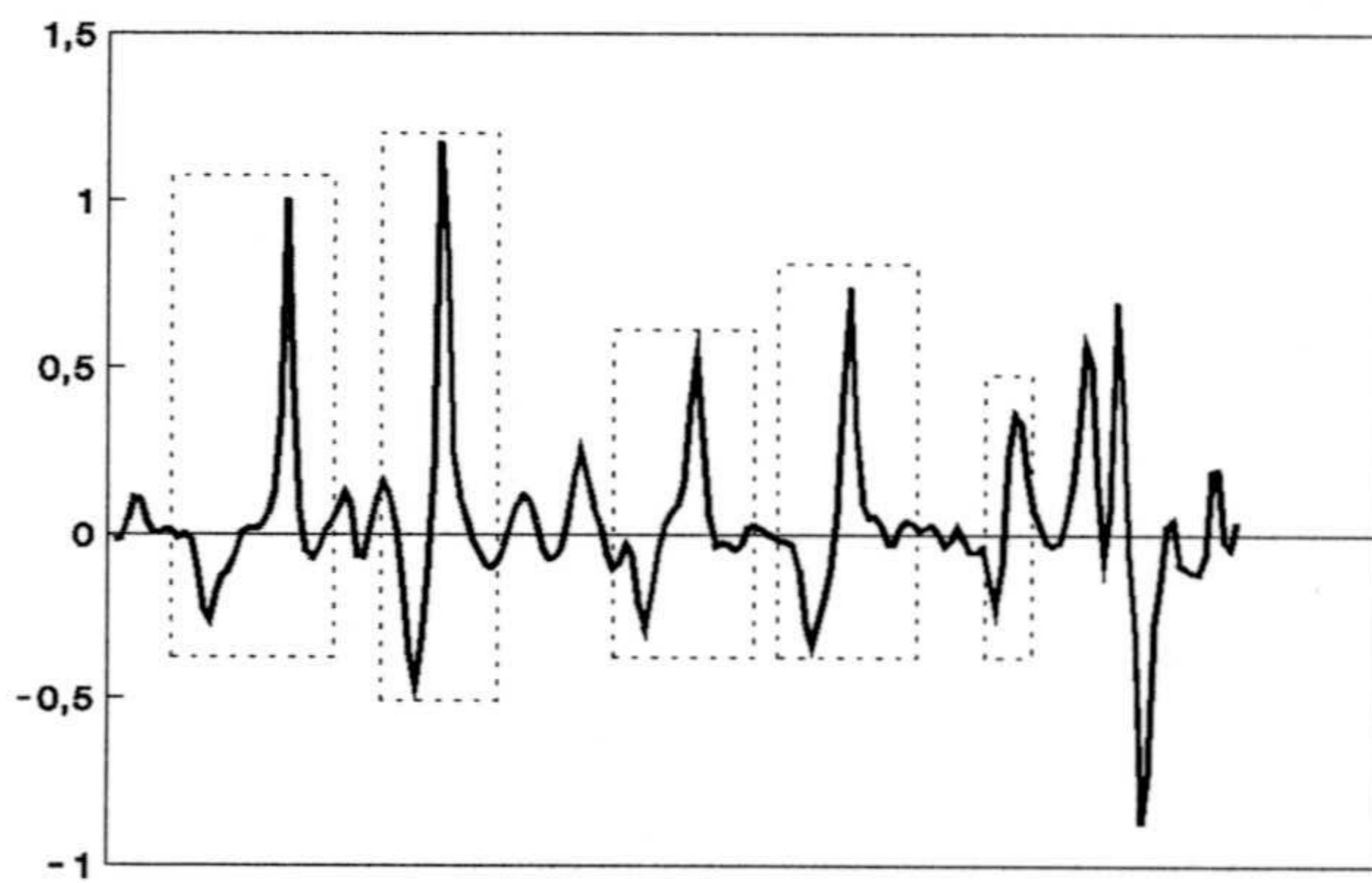


A

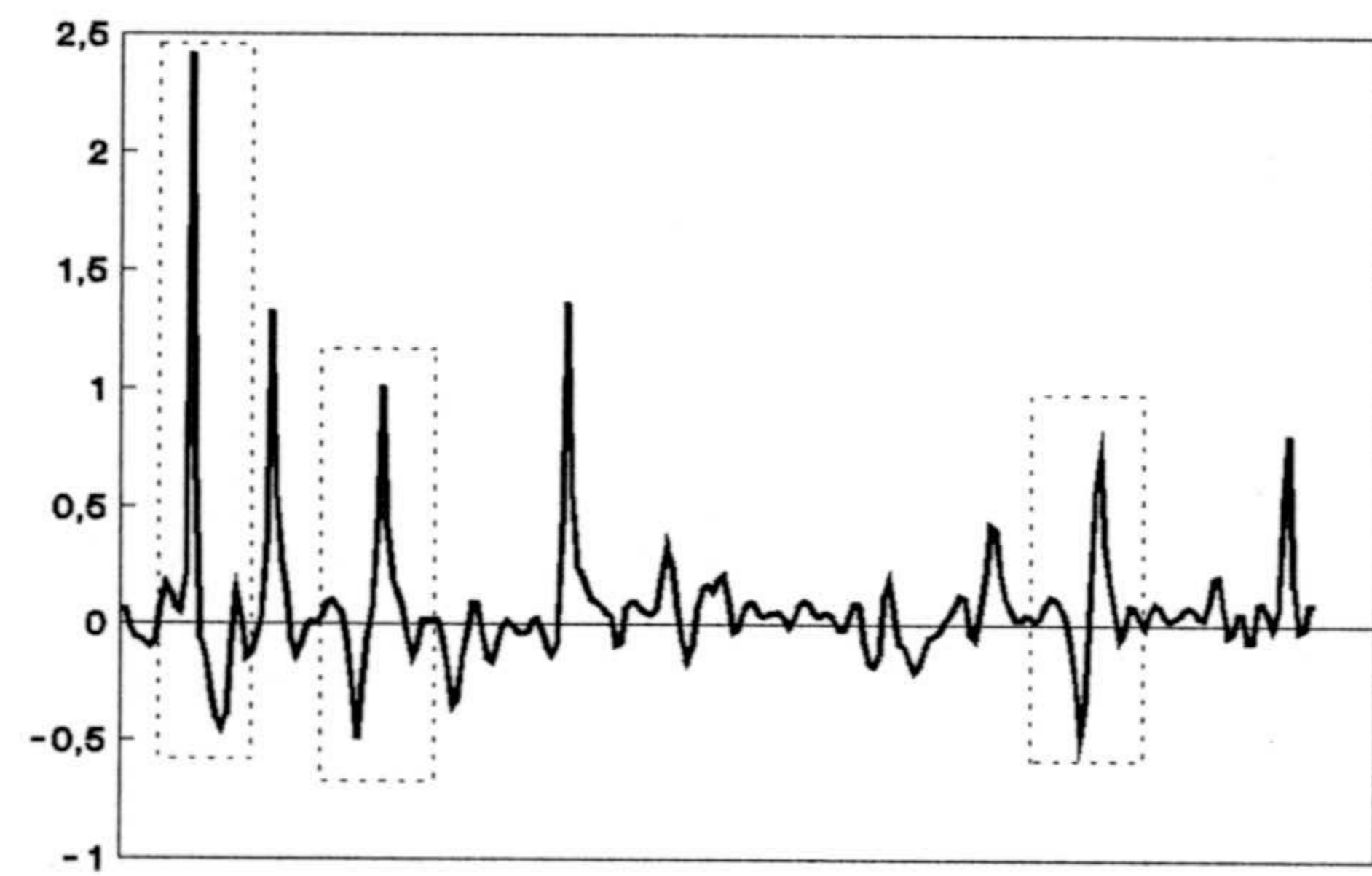


C

Fig. 3.12(a): A y C muestran contornos extraídos de formas espirales ( NGC-309 y NGC-4254 respectivamente ).

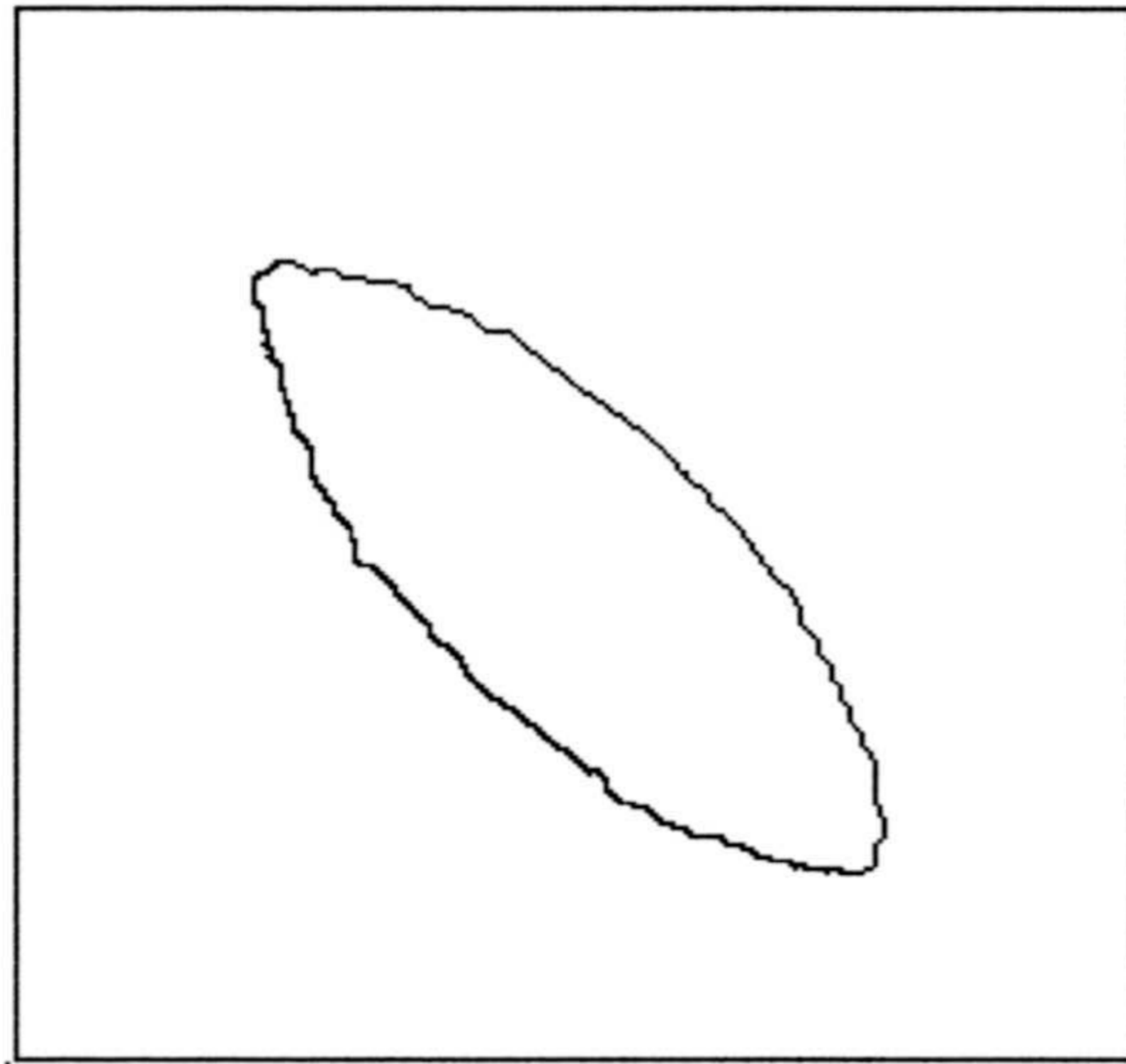


B

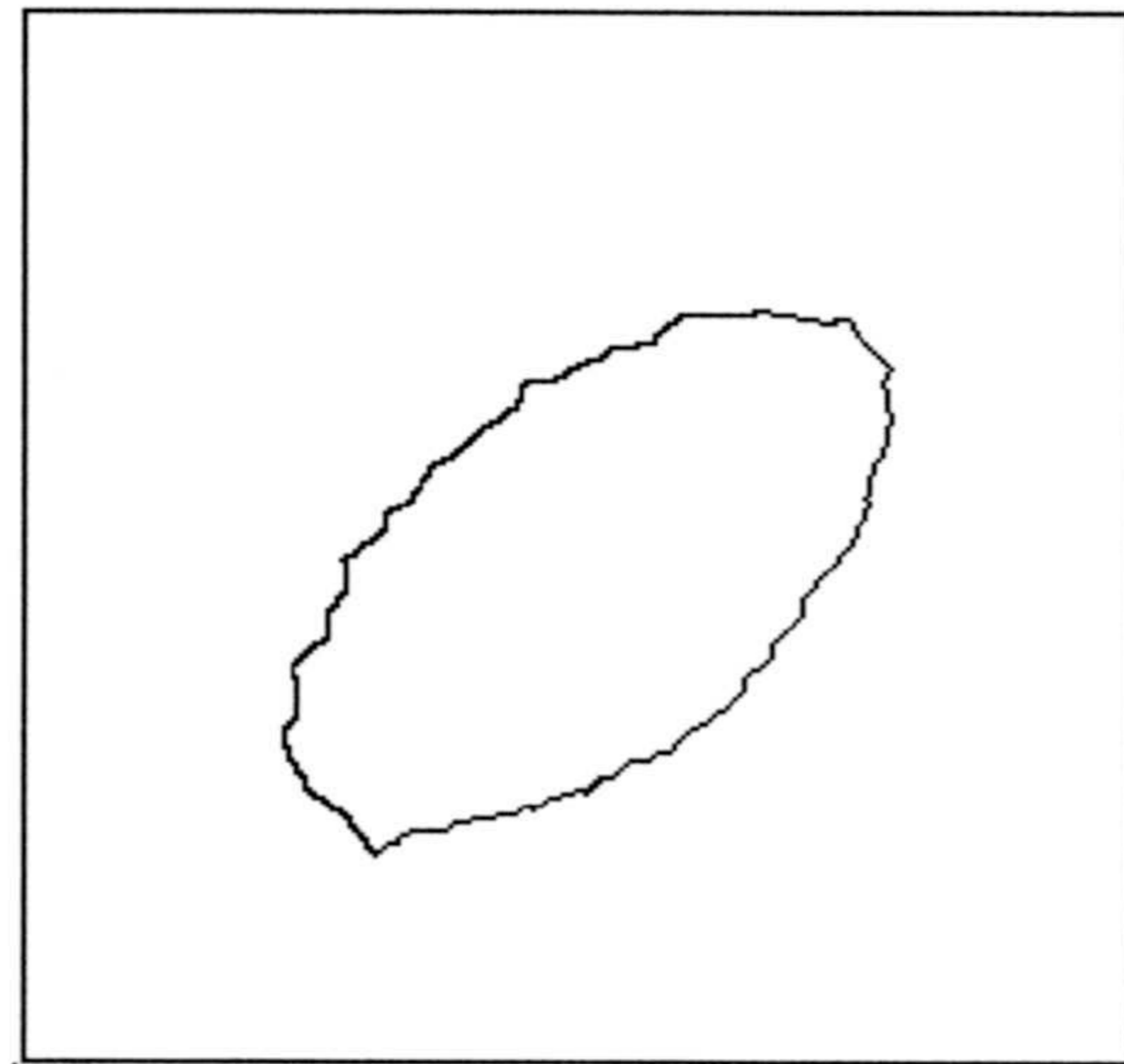


D

Fig. 3.12(b): B ( D ) es la curva de curvaturas K calculada sobre el contorno A ( respectivamente C ).

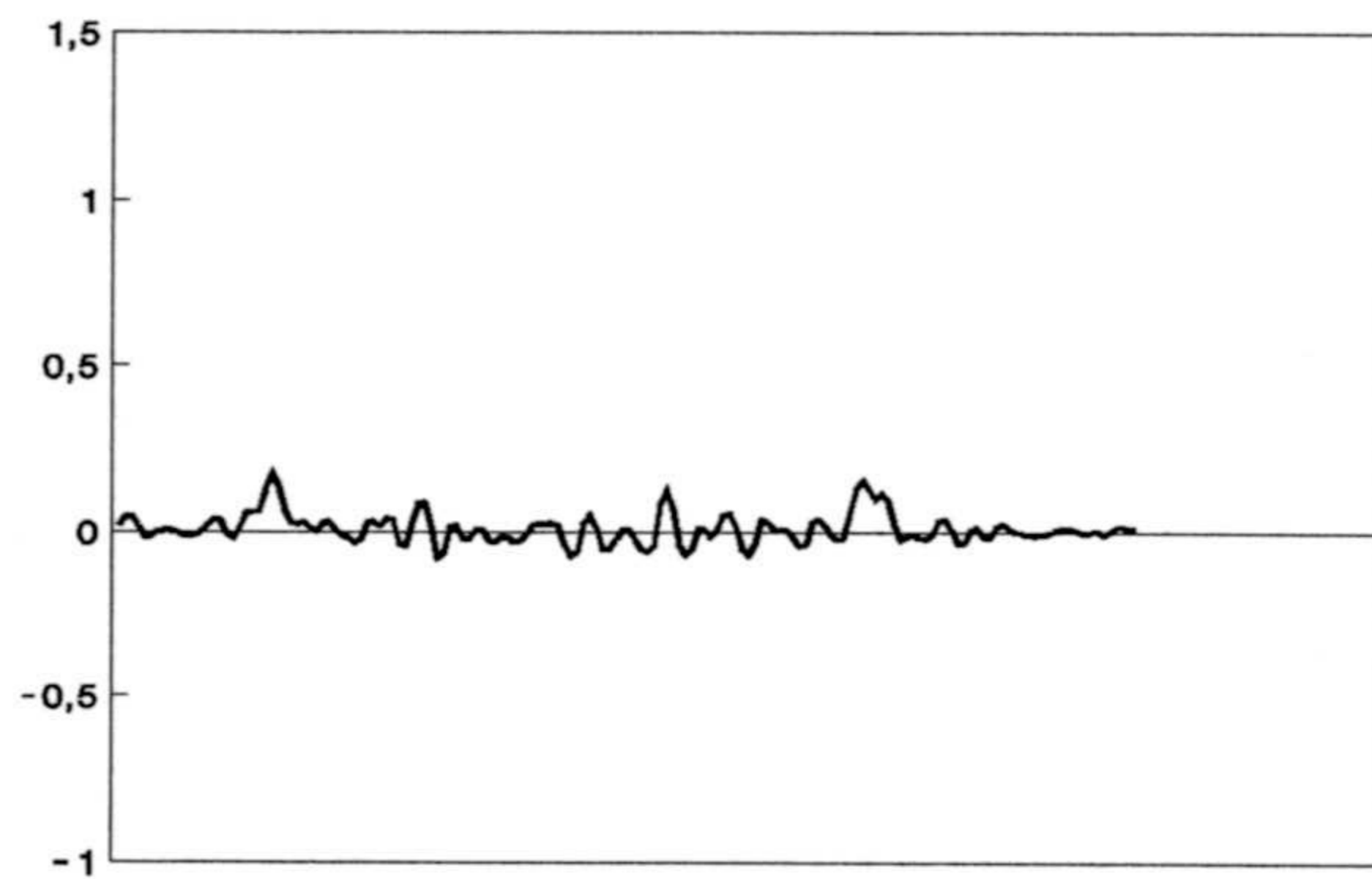


E

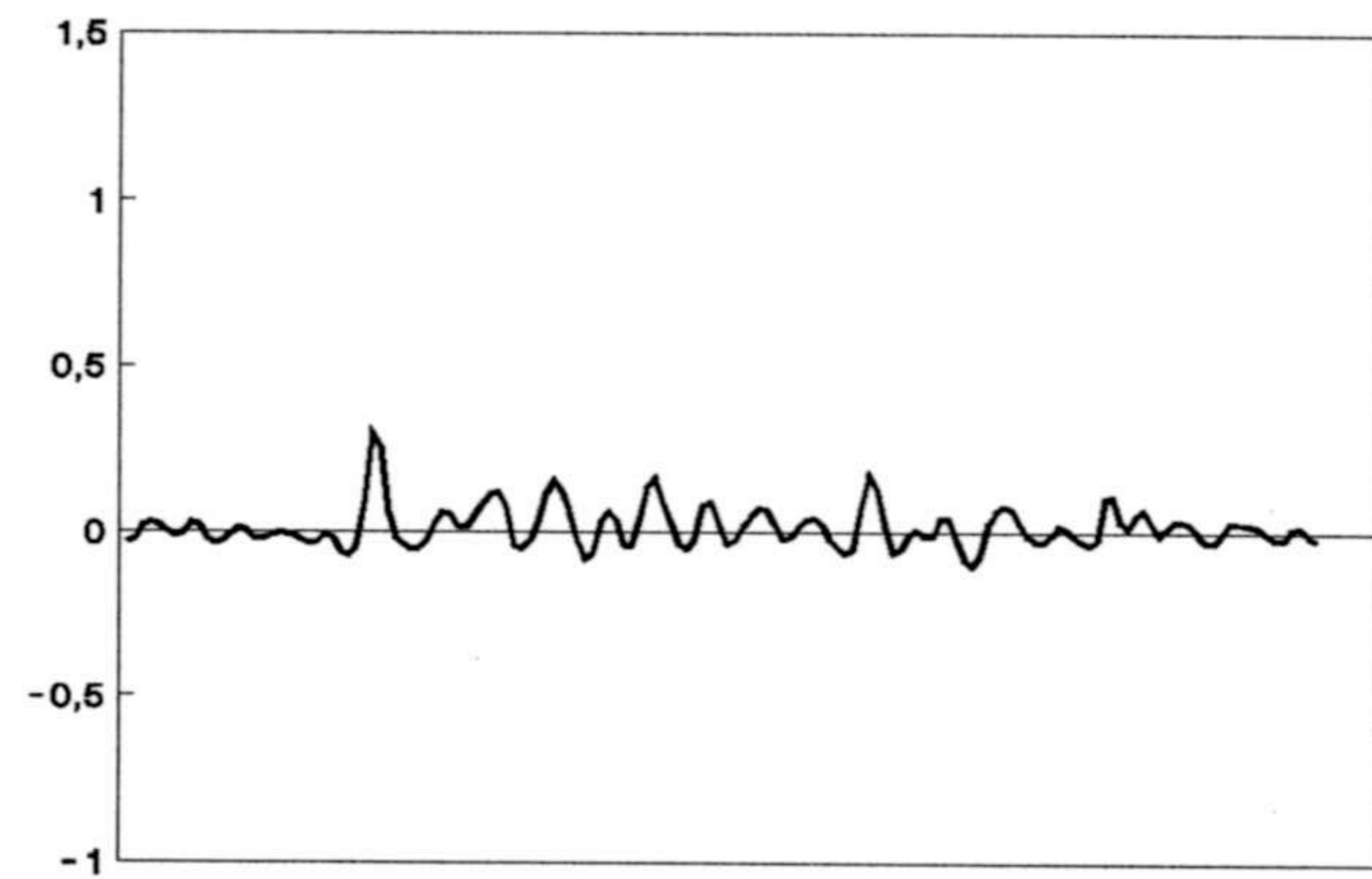


G

Fig. 3.12(c): E y G muestran contornos extraídos de formas elípticas ( NGC-3115 y NGC-3377 respectivamente ).



F



H

Fig. 3.12(d): F ( H ) es la curva de curvaturas K calculada sobre el contorno E (respectivamente G).

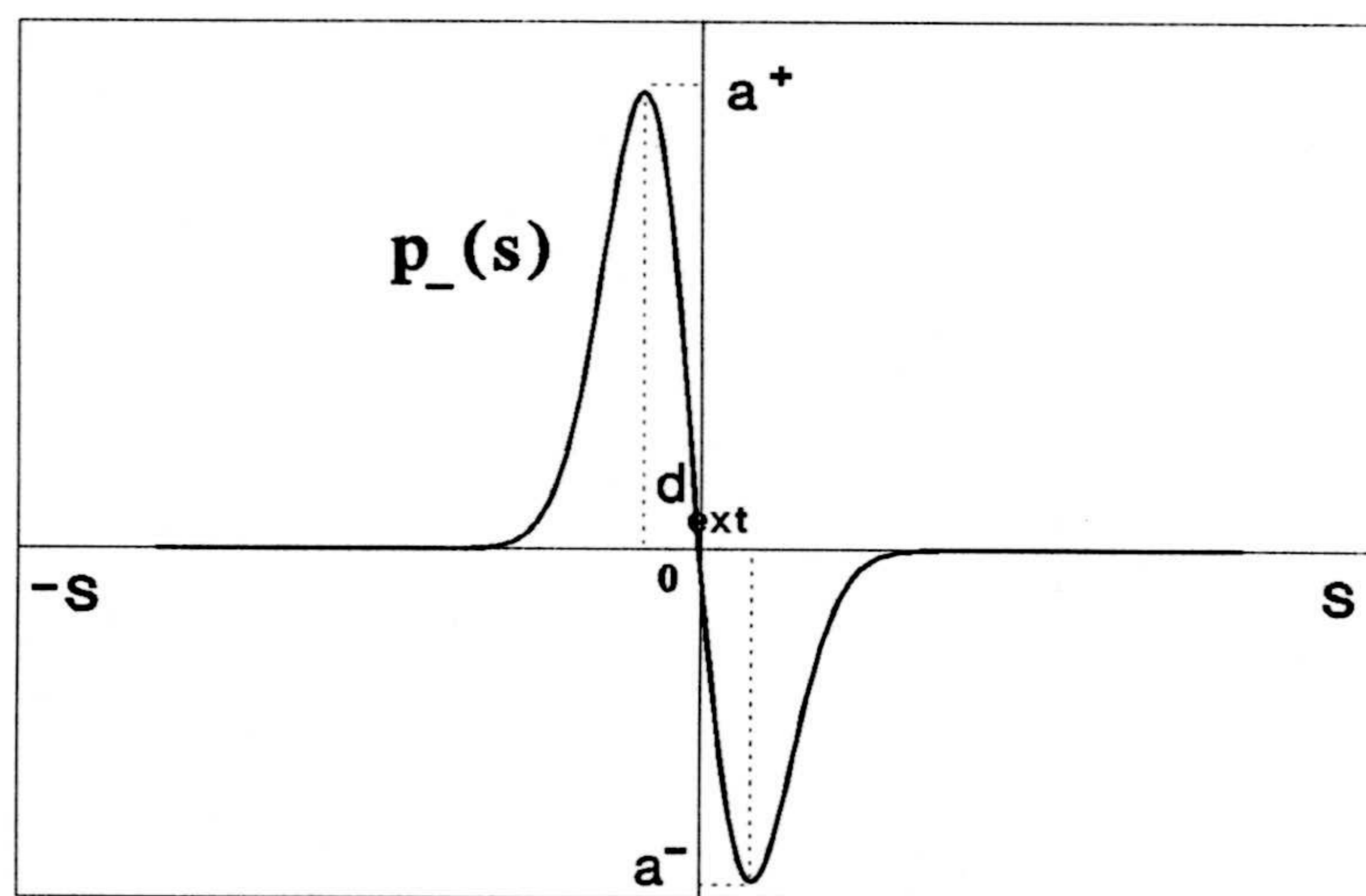
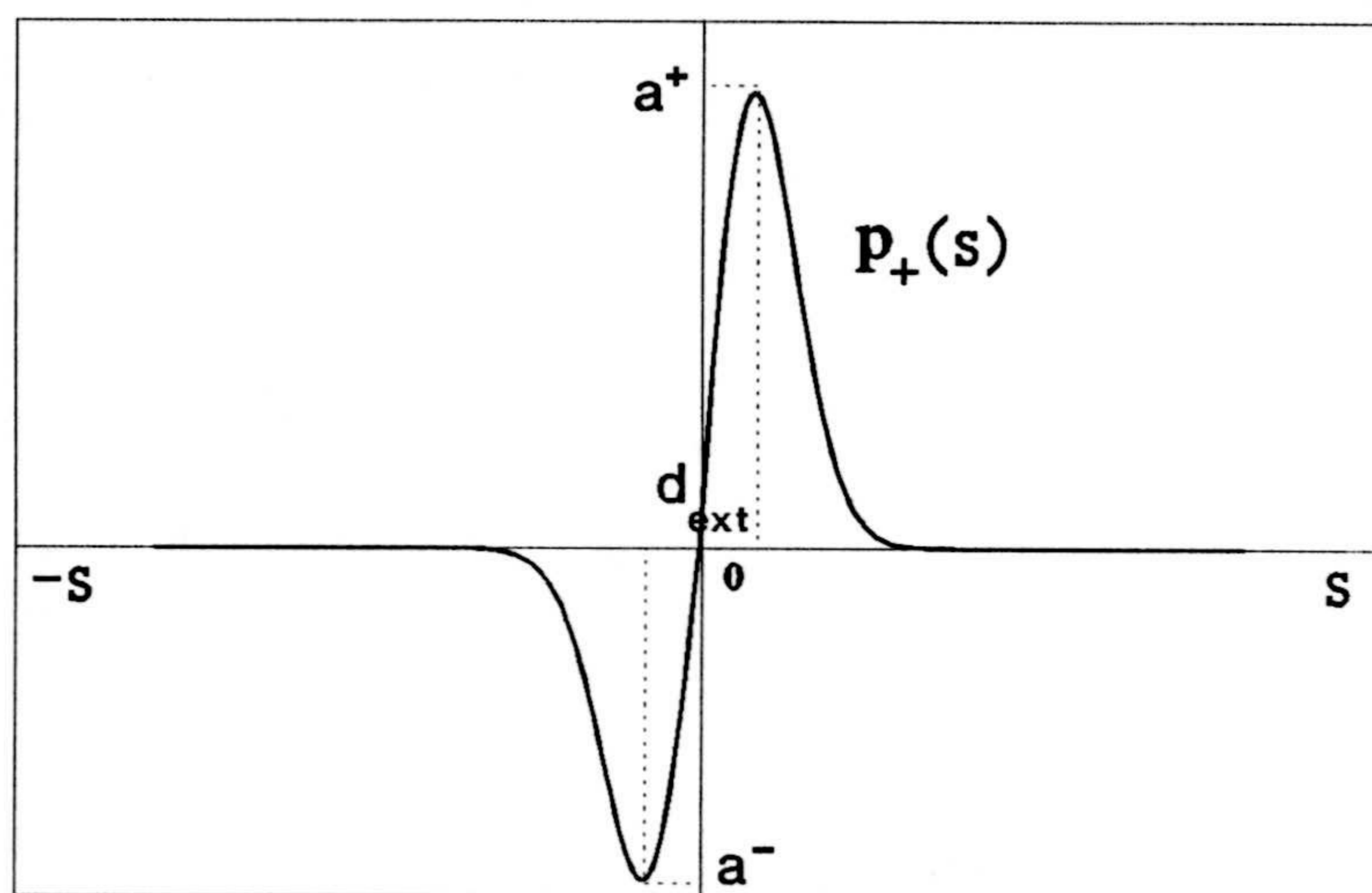


Fig. 3.13: Representaciones gráficas de los patrones teóricos.



y  $1_{[s \leq 0]}$  nota la función indicadora para el intervalo  $(-\infty, 0]$ .

En la práctica si el brazo espiral que aparece en la forma y deforma el contorno  $C$  tiene curvatura positiva, observamos que las curvaturas calculadas sobre la zona de  $C$  deformada se ajustan mediante un patrón del tipo  $p_+(s)$ , con representación gráfica mostrada en la figura 3.13. En el caso de un brazo espiral con curvatura negativa, las curvaturas asociadas a la zona de  $C$  que deforma este brazo se ajustan mediante un patrón  $p_-(s)$ , donde

$$p_-(s) = -p_+(s)$$

con representación gráfica mostrada en la figura 3.13.

Como consecuencia si el mejor ajuste se obtiene al identificar en  $K$  el patrón  $p_+(s)$  ( $p_-(s)$ ) tendremos que el brazo espiral que aparece en la forma de la galaxia tiene curvatura positiva (respectivamente negativa).

Los parámetros  $\phi_1, \phi_2$ , y  $\sigma$  son elegidos de forma que los valores extremos del patrón alcancen  $a^-$  y  $a^+$ , y para que la distancia entre las abscisas de los extremos sea  $d_{ext}$ .

La identificación del patrón teórico  $p_+(s)$  ó  $p_-(s)$  sobre la curva de curvaturas  $K$  se realiza determinando los valores de  $t$ , con  $t \in T$  que maximizan la correlación normalizada (con el patrón  $p_+(s)$ )

$$\frac{\sum_s k(s+t)p_+(s)}{(\sum k(s+t)^2 \sum p_+(s)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ó la correlación (con el patrón  $p_-(s)$ )

$$\frac{\sum_s k(s+t)p_-(s)}{(\sum k(s+t)^2 \sum p_-(s)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

La maximización en  $t$  de estas expresiones se puede calcular usando el Teorema de Correlación y la FFT (Transformada rápida de Fourier), pero observando algunas propiedades del patrón a identificar podremos calcular de forma más eficiente los valores de  $t$  en donde se obtienen los mejores ajustes.

Puesto que el valor máximo  $a^+$  y el valor mínimo  $a^-$  alcanzados por el patrón  $p_+(s)$  (o por  $p_-(s)$ ) tienen que ser outliers de los valores de curvatura  $k(t)$

observados, donde  $k(t) \in K = \{k(t) \mid t \in T\}$ , no será necesario considerar todos los ajustes posibles en  $t$ , con  $t \in T$ . Tan solo cada par de outliers de curvatura más próximos y con signo opuesto determinarán un posible ajuste del patrón en  $t^*$ , notando por  $t^*$  el punto medio entre las abscisas de los dos outliers.

#### Ajustes posibles del patrón ( $p_+(s)$ o $p_-(s)$ ) en $K$ .

En primer lugar es necesario precisar el concepto de outlier de las curvaturas observadas  $K = \{k(t) \mid t \in T\}$ .

Notemos por  $I$  un intervalo de confianza construido sobre  $K$  y que se define como

$$I = (\bar{k} - 3s, \bar{k} + 3s)$$

donde  $\bar{k}$  nota la media muestral

$$\bar{k} = \frac{1}{\text{Cardinal}(T)} \sum_{t \in T} k(t)$$

y  $s$  nota la desviación muestral

$$s^2 = \frac{1}{\text{Cardinal}(T)} \sum_{t \in T} (k(t) - \bar{k})^2$$

Diremos que un valor  $k(t)$  es un outlier de  $K = \{k(t) \mid t \in T\}$  si no pertenece al intervalo de confianza  $I$  construido sobre el conjunto  $K$ . Es posible distinguir dos tipos de outlier

- el primero viene dado por los valores de curvatura  $k$  en  $K$  que verifican

$$k < \bar{k} - 3s$$

y que determinan el conjunto notado por  $K_{inf}$ , donde

$$K_{inf} = \{k \in K \mid k < \bar{k} - 3s\},$$

- el segundo tipo de outlier viene dado por los valores  $k$  en  $K$  mayores de  $\bar{k} + 3s$ , y pertenecientes al conjunto  $K_{sup}$  donde

$$K_{sup} = \{k \in K \mid k > \bar{k} + 3s\}.$$

Una vez definido el concepto de outlier de la curvatura observada, procedemos en segundo lugar a determinar todas las posibles localizaciones en  $t$ , con  $t \in T$ , donde será intentado el ajuste del patrón  $p_+(s)$  (y  $p_-(s)$ ), pudiendo distinguir dos situaciones distintas:

- (1) Un primer caso en el que  $K_{inf} = \emptyset$  ó  $K_{sup} = \emptyset$ .

Puesto que el patrón  $p_+(s)$  ( ó  $p_-(s)$  ) alcanza en los extremos valores que deben ser outliers de curvatura de signo contrario ( un outlier perteneciente a  $K_{sup}$  y otro perteneciente a  $K_{inf}$ ), no será posible obtener ningún ajuste válido del patrón a la curva de curvaturas  $K$ .

Podemos concluir en este caso, que el contorno  $C$  extraído de la imagen segmentada, y con curva de curvaturas asociada  $K$ , no presenta deformaciones producidas por la aparición de brazos espirales en la forma, lo que caracteriza a la galaxia como elíptica.

- (2) Un segundo caso se produce cuando  $K_{inf} \neq \emptyset$  y  $K_{sup} \neq \emptyset$ .

Consideremos para cada outlier  $k(t') \in K_{inf}$ , el outlier  $k(t'') \in K_{sup}$  que verifica

$$|t' - t''| = \min_{t : k(t) \in K_{sup}} |t' - t|$$

es decir  $(k(t'), k(t''))$  determina un par de outliers de signo contrario donde  $k(t'')$  es el outlier perteneciente a  $K_{sup}$  de abcisa  $t''$  más próxima a la abcisa  $t'$  de  $k(t')$ .

Dado el par  $(k(t'), k(t''))$  podemos definir un único patrón  $p_+(s)$  ( y un único patrón  $p_-(s)$  ) que alcanza el valor mínimo  $k(t')$  y el valor máximo  $k(t'')$ . La única localización posible para el patrón así definido será el valor de  $t$ , con  $t \in T$ , que verifica

$$t = \frac{t' + t''}{2}$$

donde  $t'$  y  $t''$  son las abcisas asociadas a  $k(t')$  y  $k(t'')$  respectivamente.

En conclusión si notamos por  $P$  el conjunto definido como

$$P = \left\{ (k(t'), k(t'')) \in K_{inf} \times K_{sup} \mid t' \text{ y } t'' \text{ verifican } |t' - t''| = \min_{t \mid k(t) \in K_{sup}} |t' - t| \right\}$$

podemos definir el conjunto de todas las localizaciones  $t$  en  $T$ , donde es posible ajustar un patrón  $p_+(s)$  ( ó  $p_-(s)$  ) como el conjunto  $L$  donde

$$L = \left\{ t \in T \mid t = \frac{t' + t''}{2}, \text{ y } (k(t'), k(t'')) \in P \right\}.$$

Un buen ajuste del patrón  $p_+(s)$  ( ó  $p_-(s)$  ) en alguna de las localizaciones posibles de  $t$ , con  $t \in L$ , determina la presencia de deformaciones en el contorno  $C$  producidas por brazos espirales presentes en la forma, lo que caracteriza a la galaxia como espiral.

Siguiendo esta metodología y sobre una muestra de tamaño  $n = 50$  de ambas clases ( patrón presente ó patrón ausente ), se ha podido determinar que la presencia del patrón  $p_+$  ó  $p_-$  da lugar a ajustes que alcanzan un valor máximo de la correlación normalizada superior a 0.7, mientras que la ausencia del patrón da lugar a ajustes cuyo valor máximo de correlación no supera 0.3.

### Propiedades del procedimiento de caracterización.

La caracterización de la forma de la galaxia en base al ajuste de un patrón sobre las curvaturas calculadas para un contorno  $C$  de la imagen segmentada tiene las propiedades siguientes:

- (1) El procedimiento de caracterización es computacionalmente muy eficiente puesto que la identificación del patrón  $p_+(s)$  ó  $p_-(s)$  en  $K$  se reduce a considerar los mejores ajustes sobre valores de  $t$  pertenecientes al conjunto  $L$ , donde

$$L = \left\{ t \in T \mid t = \frac{t' + t''}{2}, \text{ y } (k(t'), k(t'')) \in P \right\},$$

y donde

$$P = \left\{ (k(t'), k(t'')) \in K_{inf} \times K_{sup} \mid t' \text{ y } t'' \text{ verifican } |t' - t''| = \min_{t \mid k(t) \in K_{sup}} |t' - t| \right\}.$$

- (2) La caracterización de la galaxia se realiza identificando un patrón en la curva de curvaturas  $K$ , luego este procedimiento para la caracterización de la forma será invariante frente a transformaciones de rotación, traslación y homotecia.
- (3) Será posible determinar si la curvatura de los brazos espirales que aparecen en la forma de la galaxia es positiva o negativa dependiendo de que el mejor ajuste se obtenga para  $p_+(s)$  (tendremos entonces brazos de curvatura positiva) o para  $p_-(s)$  (en el caso de brazos con curvatura negativa).
- (4) Además podremos localizar soluciones iniciales para los brazos espirales que aparecen en la forma, y será posible especificar su forma funcional en términos de una ecuación del tipo

$$r = \alpha \exp \beta \theta.$$

**Asignación de valores a los parámetros  $\sigma, \phi_1, \phi_2$  del patrón  $p_+(s)$  y  $p_-(s)$ .**

El patrón  $p_+(s)$  alcanza dos valores extremos, un máximo y un mínimo en  $s = \pm\sigma$ , y puesto que  $p_-(s) = -p_+(s)$  ( es decir  $|p_-(s)| = |p_+(s)|$ ) tendremos que  $p_-(s)$  alcanza dos valores extremos en  $s = \pm\sigma$ . Como consecuencia podemos concluir que la distancia entre los valores de  $s$  en los que se alcanzan los extremos ( notada por  $d_{ext}$  ) es igual a  $2\sigma$

$$d_{ext} = 2\sigma. \tag{3.5}$$

El patrón  $p_+(s)$  toma el valor máximo

$$p_+(\sigma) = \frac{\phi_2}{\sqrt{2\pi e\sigma^2}} > 0$$

y el valor mínimo

$$p_+(-\sigma) = -\frac{\phi_1}{\sqrt{2\pi e\sigma^2}} < 0$$

luego  $p_+(p_-)$  tiene un mínimo ( respectivamente un máximo ) en  $-\sigma$  y tiene un máximo ( respectivamente un mínimo ) en  $\sigma$ .

Luego para que un patrón  $p_+(s)$  alcance el valor máximo  $a^+$  y alcance el valor mínimo  $a^-$ , deberá verificar que

$$p_+(\sigma) = \frac{\phi_2}{\sqrt{2\pi e\sigma^2}} = a^+ \quad (3.6)$$

$$p_+(-\sigma) = -\frac{\phi_1}{\sqrt{2\pi e\sigma^2}} = a^- \quad (3.7)$$

A partir de las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) obtenemos los valores de los parámetros  $\sigma$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  ( para el patrón  $p_+(s)$  ) en función de  $a^+$ ,  $a^-$  y  $d_{ext}$

$$\sigma = \frac{1}{2}d_{ext} \quad (3.8)$$

$$\phi_1 = -\frac{a^-}{4}\sqrt{2\pi e} d_{ext}^2 \quad (3.9)$$

$$\phi_2 = \frac{a^+}{4}\sqrt{2\pi e} d_{ext}^2 \quad (3.10)$$

y de forma semejante se obtienen los parámetros del patrón  $p_-(s)$

$$\sigma = \frac{1}{2}d_{ext} \quad (3.11)$$

$$\phi_2 = -\frac{a^-}{4}\sqrt{2\pi e} d_{ext}^2 \quad (3.12)$$

$$\phi_1 = \frac{a^+}{4}\sqrt{2\pi e} d_{ext}^2. \quad (3.13)$$

### 3.4.3.3 Extracción de soluciones iniciales para los brazos espirales presentes en la forma.

Una de las propiedades del procedimiento de caracterización adoptado es la posibilidad de identificar soluciones iniciales para los brazos de la galaxia. A continuación desarrollamos la obtención explícita de la forma funcional asociada a estas soluciones iniciales.

En el procedimiento de caracterización una galaxia se identifica como espiral si es posible ajustar un patrón  $p_+(s)$  (o  $p_-(s)$ ) en alguna localización de la curva de curvaturas calculada sobre un contorno  $C$  extraído de la imagen.

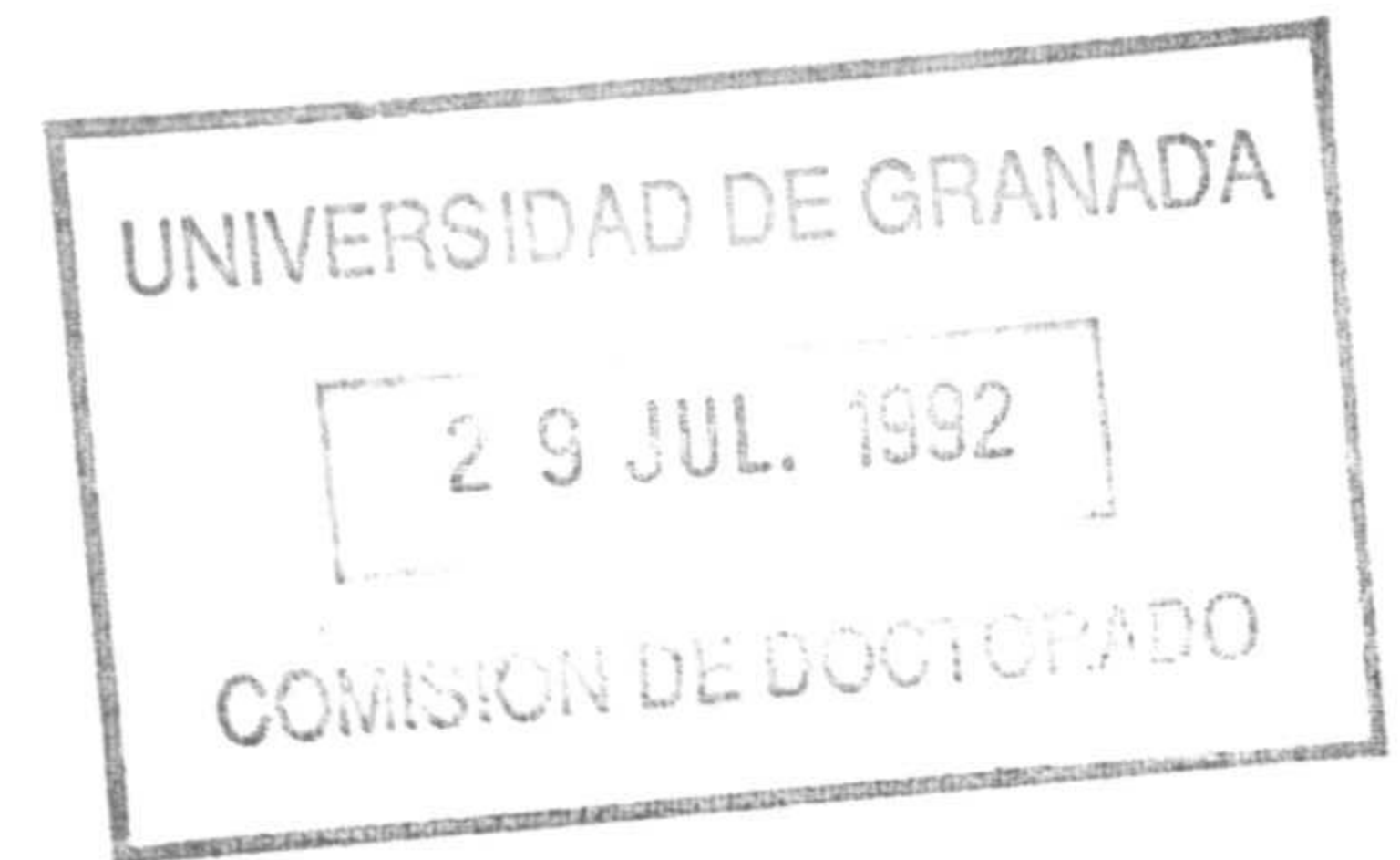
El patrón  $p_+(s)$  localizado (vamos a suponer en este desarrollo que los brazos en la galaxia tienen curvatura positiva, lo que no será restrictivo puesto que un desarrollo análogo es posible para brazos de curvatura negativa) alcanza en sus extremos el par de outliers de signo opuesto  $(k(t'), k(t'')) \in P$ , es decir

$$p_+(-\sigma) = k(t'),$$

$$p_+(\sigma) = k(t'')$$

y además

$$d_{ext} = |t' - t''|$$



de donde podemos deducir los parámetros  $\sigma, \phi_1, \phi_2$  del patrón  $p_+(s)$  usando (3.4), (3.5) y (3.6)

$$\sigma = \frac{1}{2}|t' - t''|$$

$$\phi_1 = -\frac{k(t')}{4}\sqrt{2\pi e} (t' - t'')^2$$

$$\phi_2 = \frac{k(t'')}{4}\sqrt{2\pi e} (t' - t'')^2$$

Sería interesante deducir información relativa al brazo espiral que deforma la zona del contorno  $C$  sobre cuyas curvaturas hemos ajustado el patrón  $p_+(s)$ . Más precisamente estamos interesados en determinar explícitamente la forma funcional del brazo espiral (logarítmico), de ecuación

$$r = \alpha \exp(\beta\theta)$$

lo que equivale a especificar en la anterior expresión el valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Obtención de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que definen la forma funcional del brazo espiral logarítmico.

El patrón  $p_+(s)$  ha sido ajustado sobre la curva de curvaturas

$$K = \{k(t) \mid t \in T\}$$

y alcanza un valor máximo que notamos por  $k(t'')$ .

Notemos por  $T_+^\uparrow$  a un subconjunto de  $T$ , donde

$$T_+^\uparrow = \{t_i \in T \mid i = 1, \dots, n\}$$

y donde  $t$  pertenece a  $T_+^\uparrow$  si el valor de curvatura  $k(t)$  observado en  $t$  es ajustado por un valor de la zona creciente ( hacia  $k(t'')$  ) y positiva del patrón  $p_+(s)$  identificado en  $K$  (ver figura 3.14).

Además notemos por  $B$  a un subconjunto del contorno  $C$ , donde

$$B = \{(x(t_i), y(t_i)) \in C \mid t_i \in T_+^\uparrow\}.$$

$B$  determina a los puntos del contorno  $C$  que tienen asociados los valores de curvatura  $k(t_1), \dots, k(t_n)$  y donde  $t_i \in T_+^\uparrow$ . Es decir  $B$  determina las coordenadas de puntos del contorno en una zona deformada por la presencia del brazo (de ecuación  $r = \alpha^* \exp \beta^* \theta$  ) y con valores de curvatura positiva y creciente hacia  $k(t'')$ .

Notemos por  $B'$  un conjunto asociado a  $B$  y definido como

$$B' = \left\{ (r(t_i), \theta(t_i)) \mid r(t_i) = \sqrt{x(t_i)^2 + y(t_i)^2}, \theta(t_i) = \arctan \frac{y(t_i)}{x(t_i)}, t_i \in T_+^\uparrow \right\}.$$

La forma funcional del brazo espiral

$$r = \alpha^* \exp \beta^* \theta$$

se determina especificando el valor de los parámetros  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  en la ecuación anterior. Estos valores son obtenidos a partir de las ecuaciones

$$r_1 = \alpha^* \exp \beta^* \theta_1$$



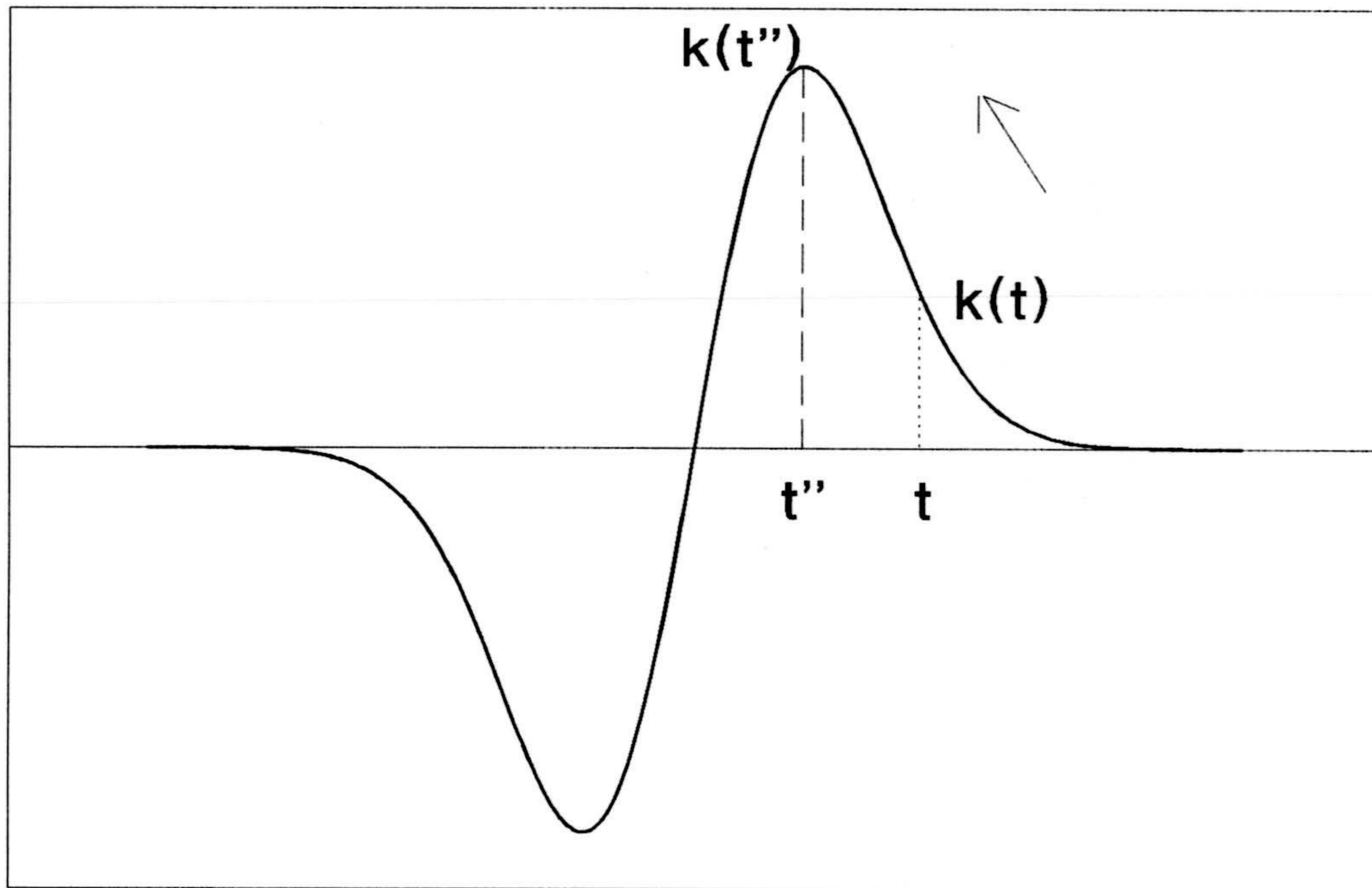


Figura 3.14: El valor de curvatura  $k(t)$  observado en  $t$  es ajustado por un valor de la zona creciente (hacia  $k(t'')$ ) y positiva del patrón teórico identificado en  $K$ .

$$r_2 = \alpha^* \exp \beta^* \theta_2$$

en donde  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$  determinan dos elementos del conjunto  $B'$ , luego

$$\beta^* = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

y

$$\alpha^* = r_1 \exp \left\{ -\frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \ln \frac{r_2}{r_1} \right\}.$$



## Capítulo 4

# EXTRACCION AUTOMATICA DE RASGOS.

### 4.1 Introducción.

La extracción automática de una descripción para la galaxia en la que aparezcan representados los rasgos más destacados de la forma, determina un procedimiento de clasificación automática. Así en este capítulo abordamos la identificación automática de estos rasgos.

En esa línea y sobre una galaxia cuya pertenencia a la clase de galaxias elípticas ha sido determinada mediante alguna de las técnicas descritas en el anterior capítulo, procederemos a determinar el valor de la elipticidad asociada a la forma, y a asignarle una subclase de acuerdo a este valor ( $E_0, E_1, \dots, E_7$ ). En otro caso y sobre una galaxia identificada como espiral usando las técnicas descritas en el capítulo 3, en primer lugar se determina la presencia (ausencia) del rasgo barra que clasifica la galaxia como espiral barrada (respectivamente espiral no-barrada). En segundo lugar se realiza la extracción de los brazos espirales presentes, ya que cuando la barra está presente en la forma, los brazos comienzan donde termina la barra. En tercer lugar y ya dentro de la subclase espiral barrada

ó espiral no-barrada según corresponda, procedemos a la asignación final de tipo a la galaxia, mediante el análisis de la velocidad de cambio de curvaturas sobre los brazos espirales (de acuerdo al clasificador adoptado y que se muestra en la figura 1.2).

En el desarrollo que sigue analizamos hasta que punto es posible automatizar el proceso de extracción de rasgos, determinando la derivación de un sistema de clasificación automático.

En primer lugar analizamos la extracción del rasgo barra: presentando un patrón teórico que captura su geometría global, para abordar a continuación el desarrollo de un procedimiento orientado a la obtención del mejor ajuste de este patrón a la forma, cuya calidad contrastada mediante un criterio estadístico que se describe, permite confirmar la presencia o ausencia de la barra, y si el rasgo está presente en la forma describimos la metodología empleada para la extracción en su totalidad de la barra, ya que previamente solo se garantiza su identificación de manera parcial.

En segundo lugar presentamos una justificación del uso de modelos geométricos en lugar de modelos contextuales basados en descripciones sobre píxeles para la descripción de los rasgos.

En tercer lugar abordamos el proceso de extracción automática del rasgo brazo sobre galaxias espirales: describimos la modelización de espirales, analizamos el proceso de ajuste del rasgo a la forma, abordamos la obtención de soluciones iniciales para este procedimiento, y presentamos un proceso que permite capturar el brazo espiral en su totalidad.

En cuarto lugar analizamos hasta que punto es posible derivar un sistema de clasificación automático: describimos un sistema de clasificación automática para galaxias elípticas mediante la extracción del grado de elipticidad, y analizamos un sistema de clasificación automática para galaxias espirales que se deriva de la extracción automática de rasgos (brazos y barra).

## 4.2 Extracción automática del rasgo barra.

La barra es un rasgo que puede aparecer en la forma de una galaxia espiral o elíptica.

La identificación del rasgo barra en la forma de una galaxia elíptica no aporta información sobre su posible clasificación, aunque resulta fundamental a la hora de poder construir un modelo teórico sobre la forma de la galaxia elíptica. Sin embargo la presencia o ausencia del rasgo barra en la forma de una galaxia espiral, determina su clasificación. Así si la barra aparece en la forma, la galaxia espiral pertenece a la subclase de espirales barradas (ver figura 4.1), mientras que en ausencia de la barra, la galaxia pertenece a la subclase de espirales no-barradas (ver figura 4.1). Como consecuencia deducimos la necesidad de estudiar este rasgo tan significado dentro de la forma.

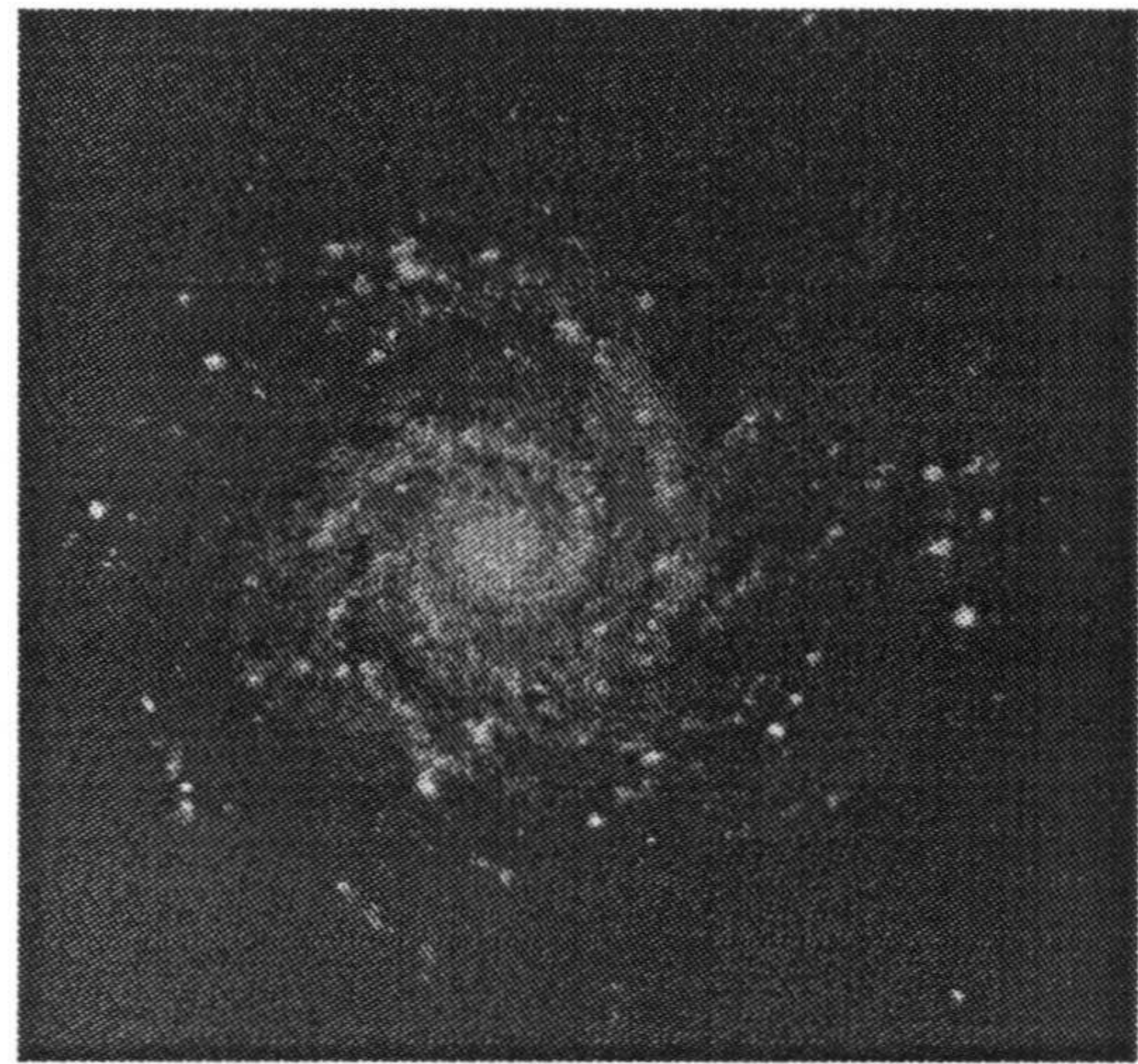
A continuación presentamos algunos resultados obtenidos en este sentido, y así en primer lugar tras describir un modelo teórico para el rasgo barra se desarrolla un procedimiento orientado al ajuste de este modelo sobre la imagen. En segundo lugar se describe un procedimiento que determina de la presencia o ausencia de la barra en base a la calidad del ajuste obtenido. En el caso de presencia del rasgo barra, se describe un procedimiento de alargamiento del patrón, cuya aplicación permite capturar en su totalidad la barra identificada inicialmente de una forma parcial.

### 4.2.1 Descripción del patrón teórico y su ajuste a la forma.

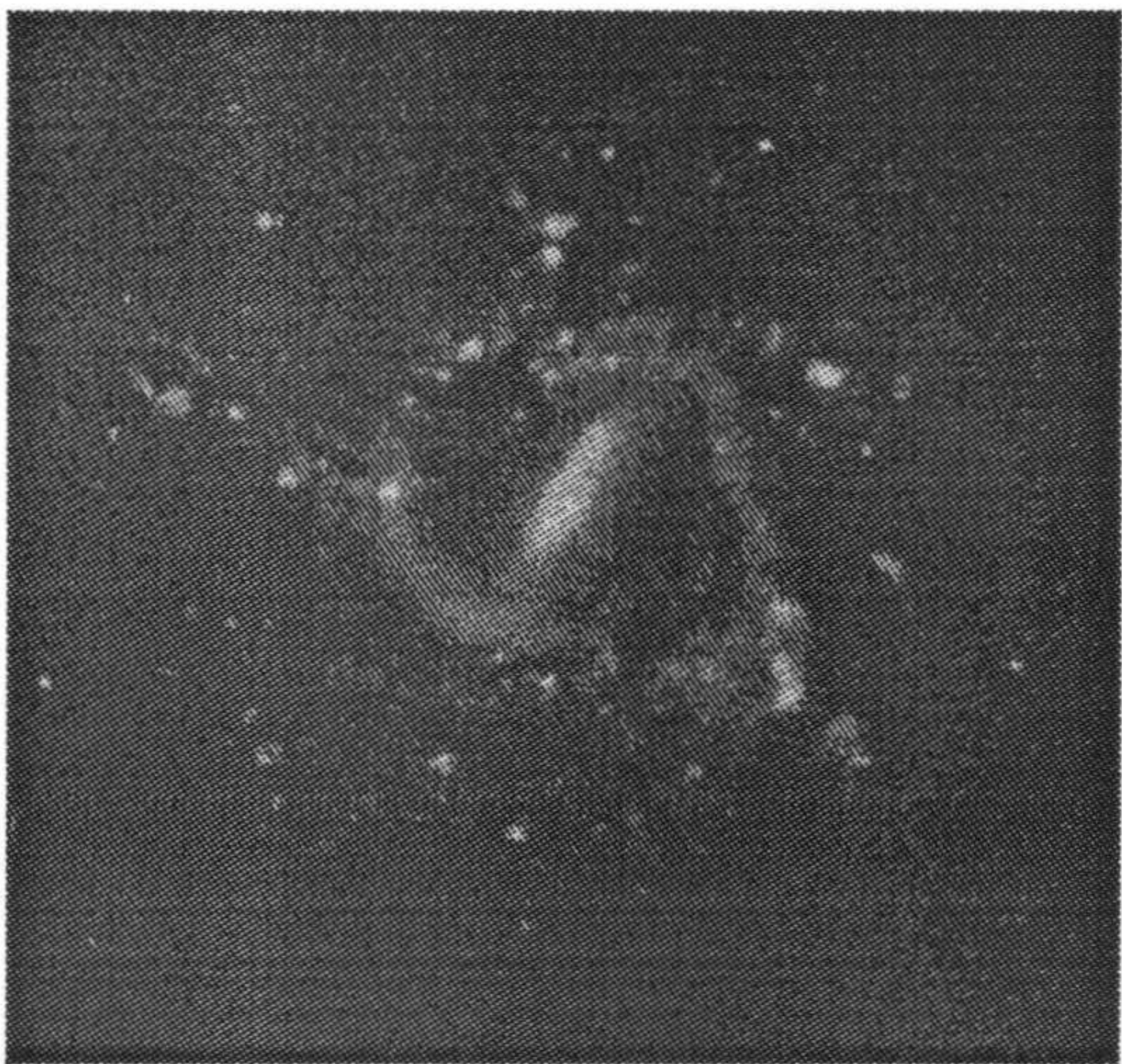
La información a priori sobre el rasgo barra a detectar nos permite construir un patrón teórico para la estructura buscada. Teniendo en cuenta la morfología de la barra (ver figura 4.1) se ha elegido como patrón dos sectores rectangulares que sobresalen (por extremos opuestos) de una circunferencia de radio  $r$  (notada  $C(r)$ ) y cuyo centro coincide con el centro de la galaxia. La representación gráfica



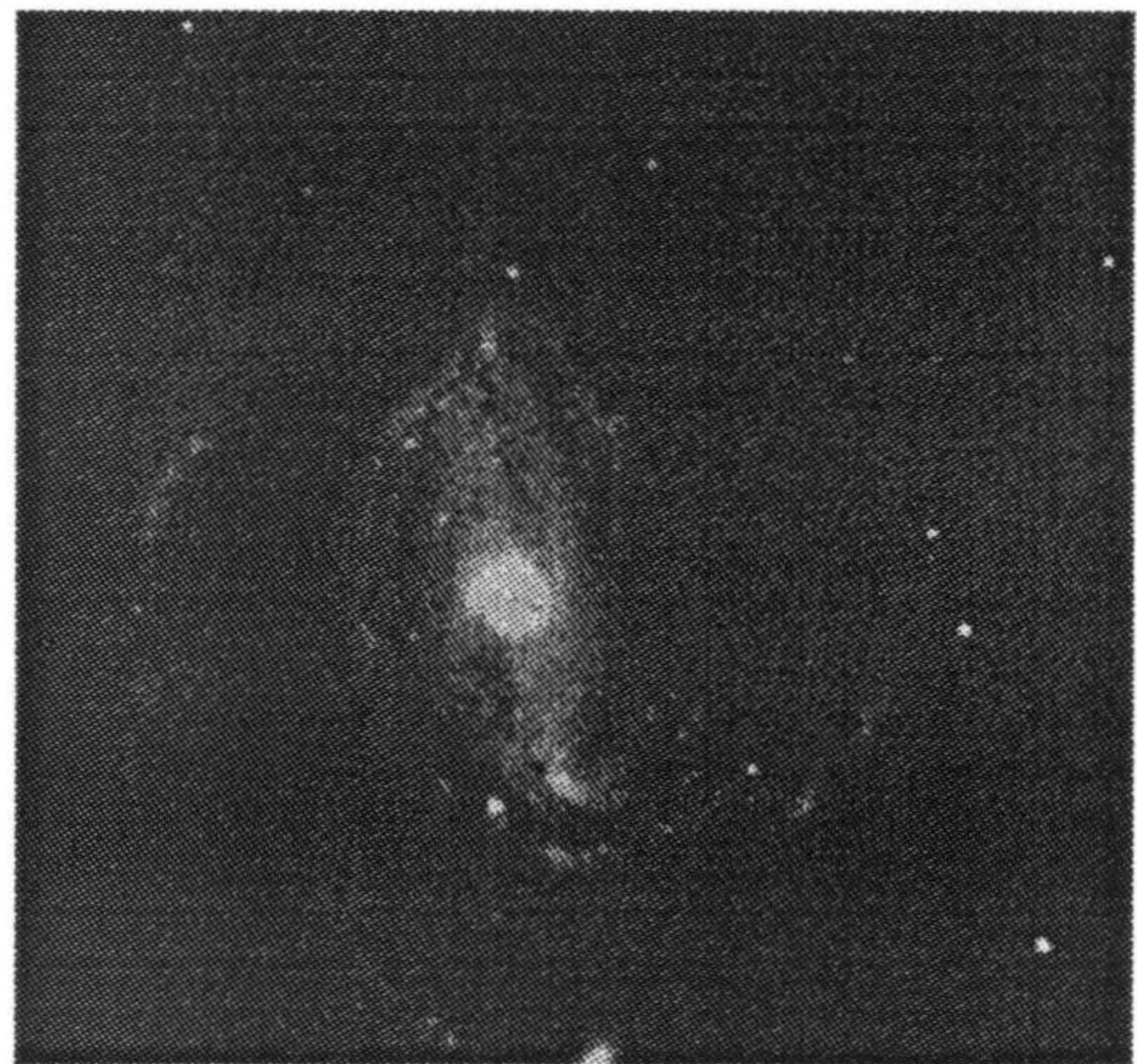
A



B



C



D

Figura 4.1: A y B muestran dos espirales no-barradas. C y D muestran dos espirales barradas.

de este patrón teórico podría ser la presentada en la figura 4.2.

En este desarrollo notamos  $(x, y)$  y  $(-x, -y)$  las coordenadas de dos puntos opuestos sobre la circunferencia  $C(r)$ , notamos  $\theta$  el ángulo que se define como  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , y notamos  $S_{(x,y)}$  y  $S_{(-x,-y)}$  dos conjuntos de puntos del plano que se definen como

$$S_{(x,y)} = \{(x + c_1, y + c_2) \mid c_1 = t_1 \cos \theta - t_2 \sin \theta, c_2 = t_1 \sin \theta + t_2 \cos \theta\}$$

en donde  $t_1$  toma valores en el intervalo  $[0, l]$  y donde  $t_2$  toma valores en  $[-w, w]$ , y

$$S_{(-x,-y)} = \{(-i, -j) \mid (i, j) \in S_{(x,y)}\}$$

donde  $l$  es la longitud de los sectores,  $2w$  es la anchura de los sectores y los valores para  $l$  y  $w$  se obtienen en función del radio  $r$  de la circunferencia  $C(r)$  desde la que sobresalen los sectores. El patrón teórico, notado por  $B_{(x,y)}$ , y asociado a los sectores  $S_{(x,y)}$  y  $S_{(-x,-y)}$  se define como

$$B_{(x,y)}(i, j) = \begin{cases} \hat{\mu}_1 & \text{si } (i, j) \in S_{(x,y)} \cup S_{(-x,-y)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde  $\hat{\mu}_1$  es el nivel de gris asociado a la clase de píxeles localizados en las proximidades del centro de la galaxia. Esta elección para el nivel de gris asociado a los píxeles  $(i, j)$  sobre la barra, se justifica por las características morfológicas del rasgo (el nivel de gris observado en la barra es prácticamente constante y próximo al nivel de gris alcanzado en el centro).

El ajuste de este patrón teórico a la galaxia se realiza mediante el procedimiento de matching descrito a continuación.

Este procedimiento no es invariante frente a traslaciones ni rotaciones. En la práctica este problema está resuelto dado que el ajuste del patrón se intenta sobre las distintas localizaciones que determinan los puntos, con gradiente positivo, en  $C(r)$  (circunferencia centrada en el centro de la galaxia y de radio  $r$ ), con  $r$  variando en un rango adecuado. Los valores posibles para  $r$  son aquellos que



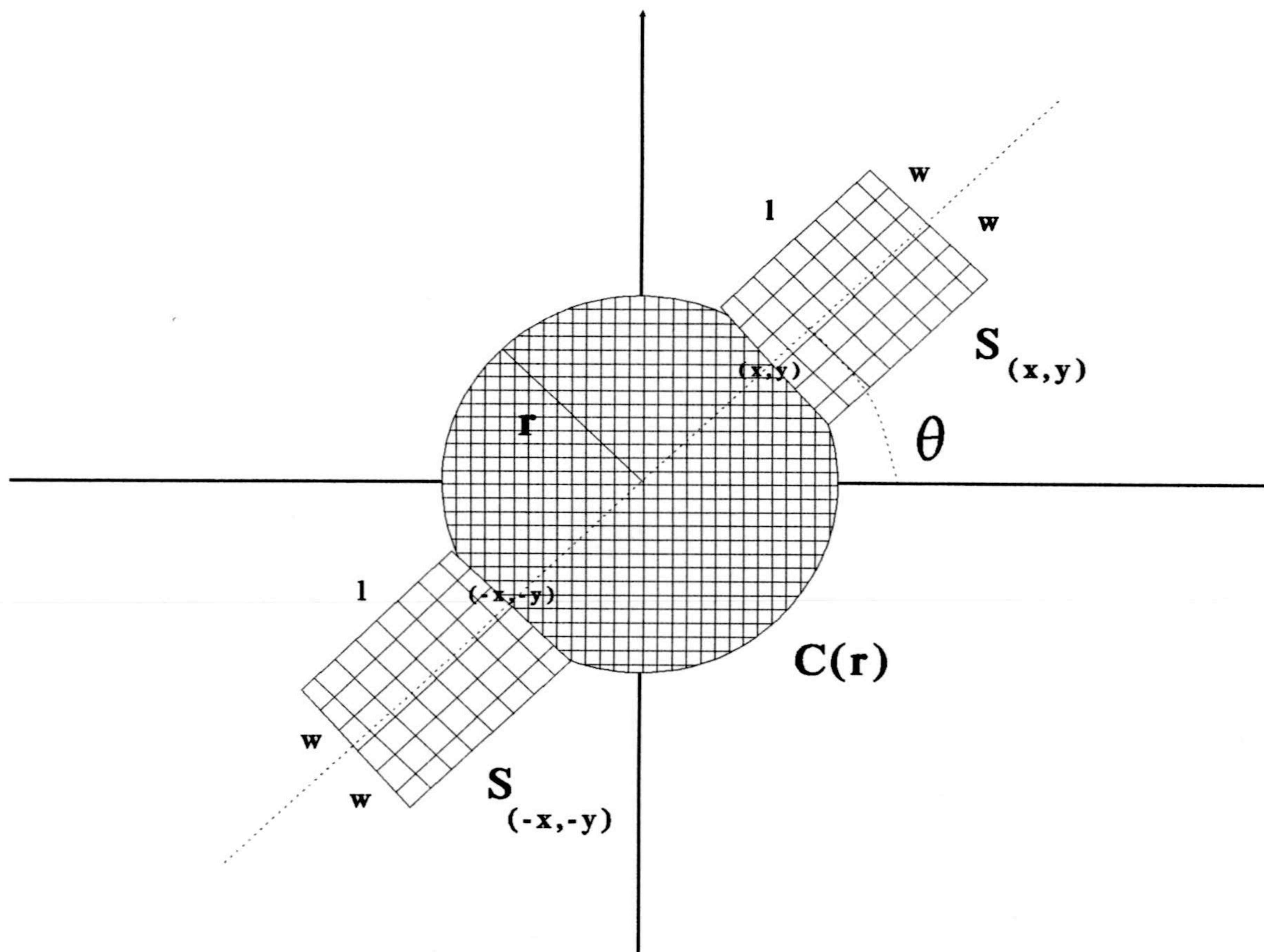


Figura 4.2: Representación gráfica del patrón teórico barra.  $S_{(x,y)}$  y  $S_{(-x,-y)}$  son los dos extremos opuestos de la barra.  $C(r)$  es una circunferencia de radio  $r$ , a la que están unidos los extremos de la barra.

determinan circunferencias  $C(r)$  fuera de la zona 'centro de la galaxia' (píxeles en las proximidades del centro de la galaxia y pertenecientes a la clase 1 de la segmentación obtenida mediante el proceso descrito en el capítulo 3) y dentro de la región galaxia (la clase 2 de la segmentación). Es decir  $(x', y')$  perteneciente a  $C(r)$  y con gradiente  $G(x', y')$  positivo (luego existe una fuerte discontinuidad del nivel de gris en la localización  $(x', y')$  de la imagen), determina un posible ajuste de la imagen con el patrón  $B_{(x', y')}$  definido como

$$B_{(x', y')}(i, j) = \begin{cases} \hat{\mu}_1 & \text{si } (i, j) \in S_{(x', y')} \cup S_{(-x', -y')} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Aunque el procedimiento de matching tampoco es invariante frente a transformaciones de escala, conseguimos evitar los errores que esta deficiencia produce con una adecuada definición inicial para el tamaño del patrón inicial (los parámetros  $l$  y  $w$ ), basada en un estudio experimental sobre una muestra significativa de imágenes de galaxias barradas. La elección inicial de valor para el parámetro  $l$  (longitud de los sectores rectangulares que determinan la barra) no pretende capturar en su totalidad la barra, ya que el procedimiento aquí desarrollado y que determina la presencia o ausencia del rasgo sólo necesita de un ajuste parcial (aunque si suficientemente significativo). En este desarrollo supondremos que el valor del parámetro  $l$  se elige de forma que el peor ajuste del patrón barra se alcance en una región homogénea (el fondo de la imagen sobre galaxias espirales y dentro de la envolvente elíptica sobre galaxias elípticas).

En este desarrollo notamos por  $b_r(x, y)$  una función definida sobre los puntos  $(x, y)$  en  $C(r)$  como:

$$b_r(x, y) = \frac{1}{|S_{(x, y)}| + |S_{(-x, -y)}|} \sum_{(i, j) \in S_{(x, y)} \cup S_{(-x, -y)}} (x_{(i, j)}^G - \hat{\mu}_1)^2 \quad (4.1)$$

donde  $|S_{(x, y)}|$  nota el número de píxeles de la imagen en  $S_{(x, y)}$  y de forma similar se define  $|S_{(-x, -y)}|$ , y  $x_{(i, j)}^G$  nota el nivel de gris observado en el píxel  $(i, j)$  de la imagen. Es decir, para cada punto  $(x, y) \in C(r)$  con gradiente  $G(x, y)$  positivo,

obtenemos el valor  $b_r(x, y)$  que expresa la varianza entre la imagen y el patrón teórico

$$B_{(x,y)}(i, j) = \begin{cases} \hat{\mu}_1 & \text{si } (i, j) \in S_{(x,y)} \cup S_{(-x,-y)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además notamos por  $S_1^2(r)$  el mejor ajuste obtenido entre el patrón  $B_{(x,y)}$  (con  $(x, y)$  en  $C(r)$  y verificando que  $G(x, y)$  es positivo) y la imagen, es decir

$$S_1^2(r) = \min\{b_r(x, y) \mid (x, y) \in C(r) \text{ y } G(x, y) \text{ positivo}\}$$

y notamos por  $S_2^2(r)$  el peor ajuste obtenido entre el patrón  $B_{(x,y)}$  con  $(x, y)$  en  $C(r)$  y la imagen, es decir

$$S_2^2(r) = \max\{b_r(x, y) \mid (x, y) \in C(r) \text{ y } G(x, y) \text{ positivo}\}.$$

Identificamos el ajuste mas verosimil como el obtenido entre la imagen y el patrón  $B_{(x^*, y^*)}$  con  $(x^*, y^*)$  en  $C(r^*)$ , si se verifica que

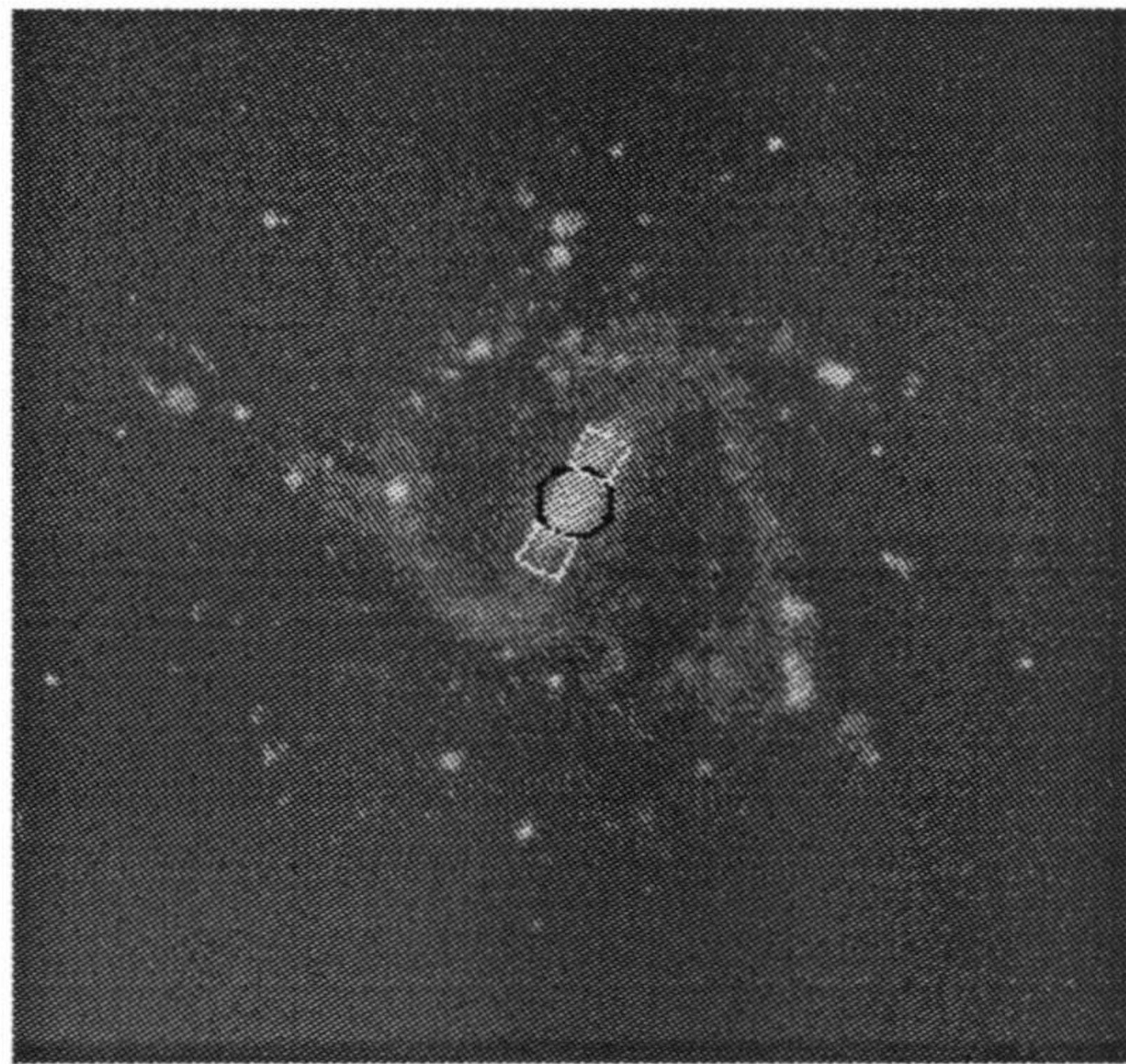
$$\frac{S_1^2(r^*)}{S_2^2(r^*)} = \min \left\{ \frac{S_1^2(r)}{S_2^2(r)} \mid \text{con } r : \exists (x, y) \in C(r) \text{ con } G(x, y) \text{ positivo} \right\} \quad (4.2)$$

y

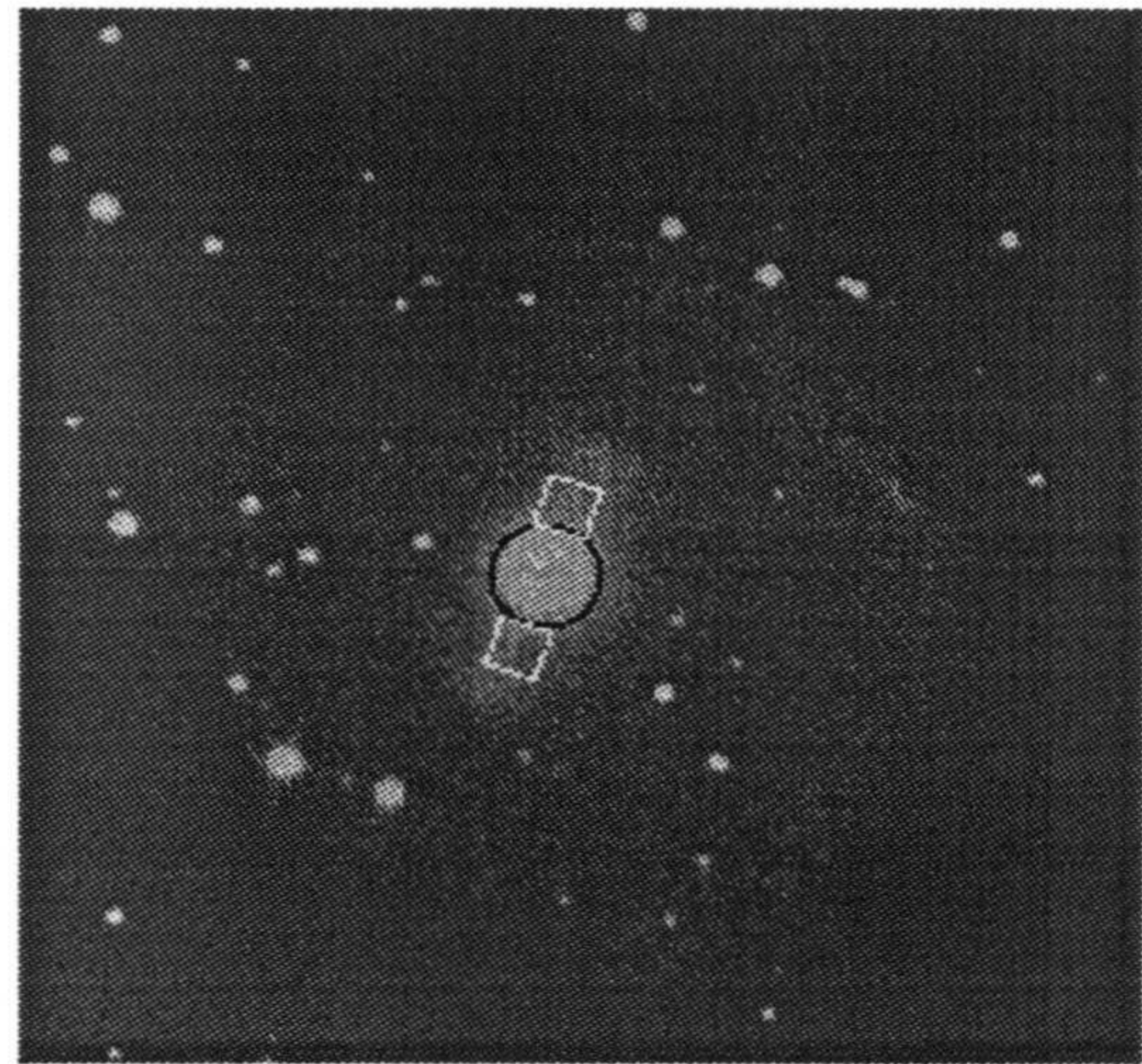
$$b_{r^*}(x^*, y^*) = \min_{(x,y) \in C(r^*)} b_{r^*}(x, y) \quad (4.3)$$

es decir por (4.2) la circunferencia  $C(r^*)$  no está contenida en el núcleo de la galaxia cuando aparece barra en la forma de la galaxia y determina una aproximación a la frontera del núcleo (ya que sobre ella se obtiene el mejor ajuste y el peor ajuste entre un patrón barra y la imagen). Además por (4.3) el mejor ajuste entre un patrón  $B_{(x,y)}$  con  $(x, y)$  en  $C(r^*)$  y la imagen se obtiene para el patrón  $B_{(x^*, y^*)}$  asociado al punto  $(x^*, y^*)$ . En la ecuación (4.2) el mínimo se calcula sobre las razones  $\frac{S_1^2(r)}{S_2^2(r)}$  tales que  $S_1^2(r)$  y  $S_2^2(r)$  están definidas, es decir razones  $\frac{S_1^2(r)}{S_2^2(r)}$  calculadas sobre circunferencias  $C(r)$  en las que aparecen puntos  $(x, y)$  con gradiente positivo.

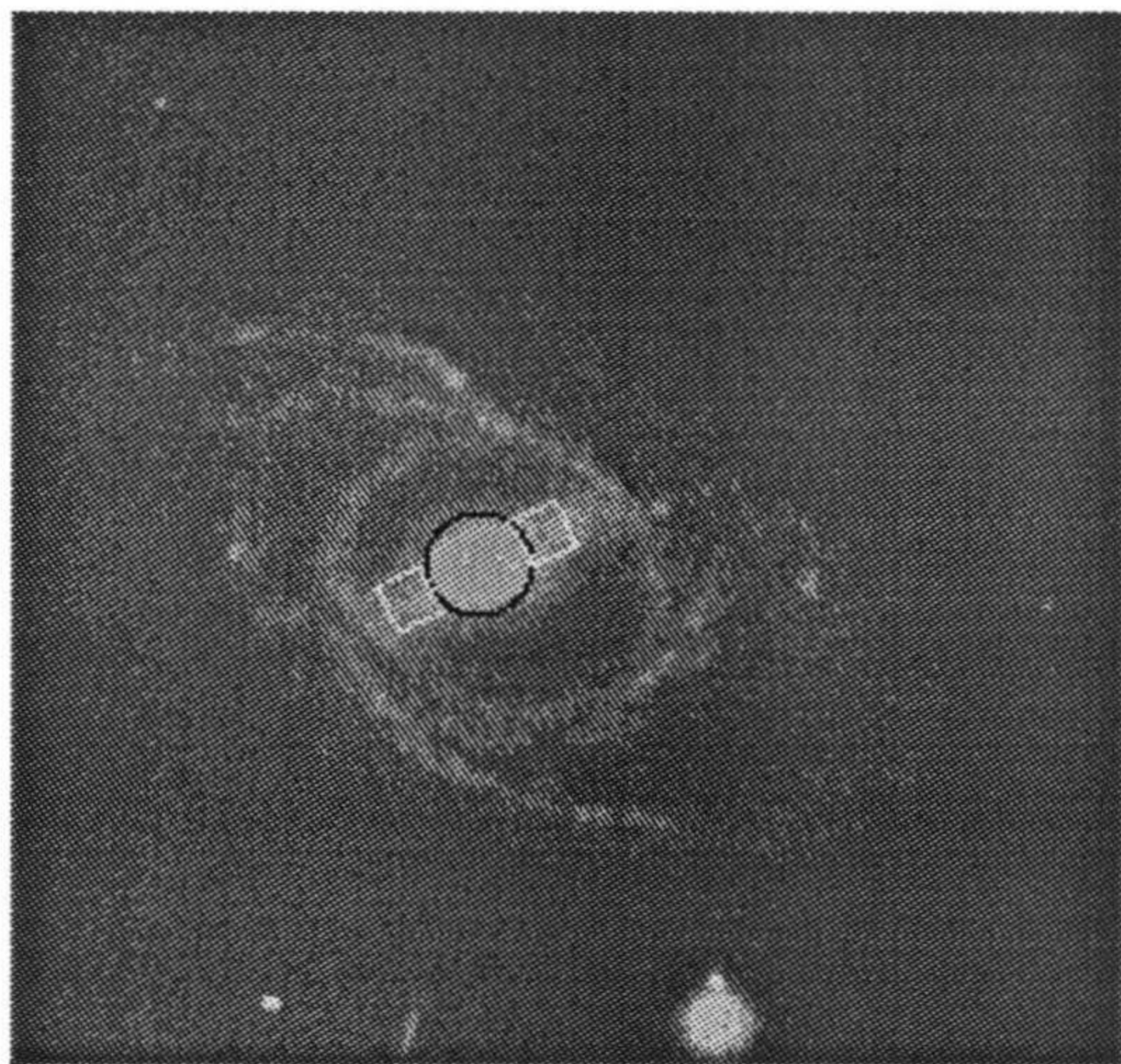
Las figuras 4.3 y 4.4 muestran los ajustes obtenidos sobre varias galaxias barradas.



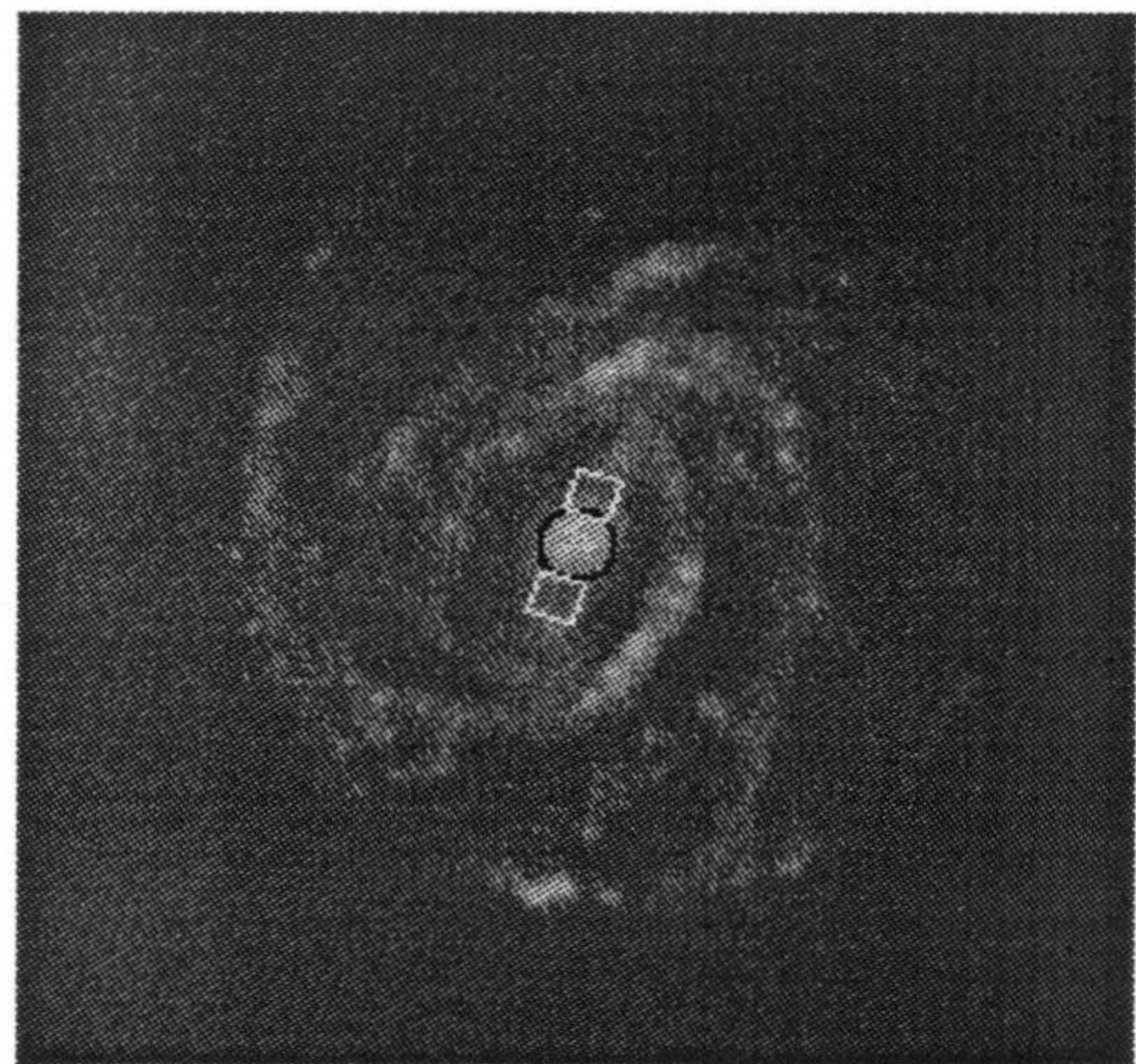
A



B

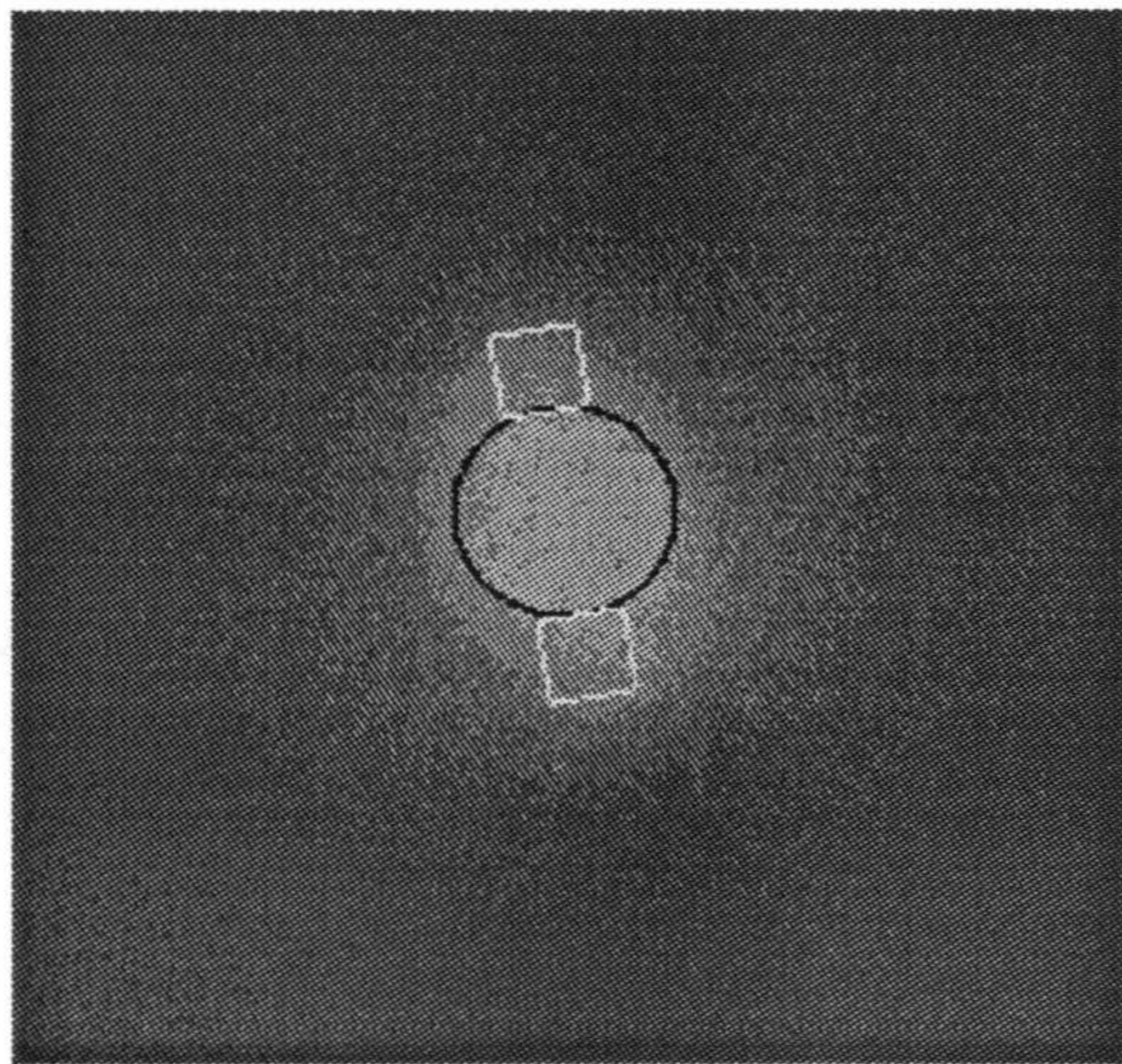


C

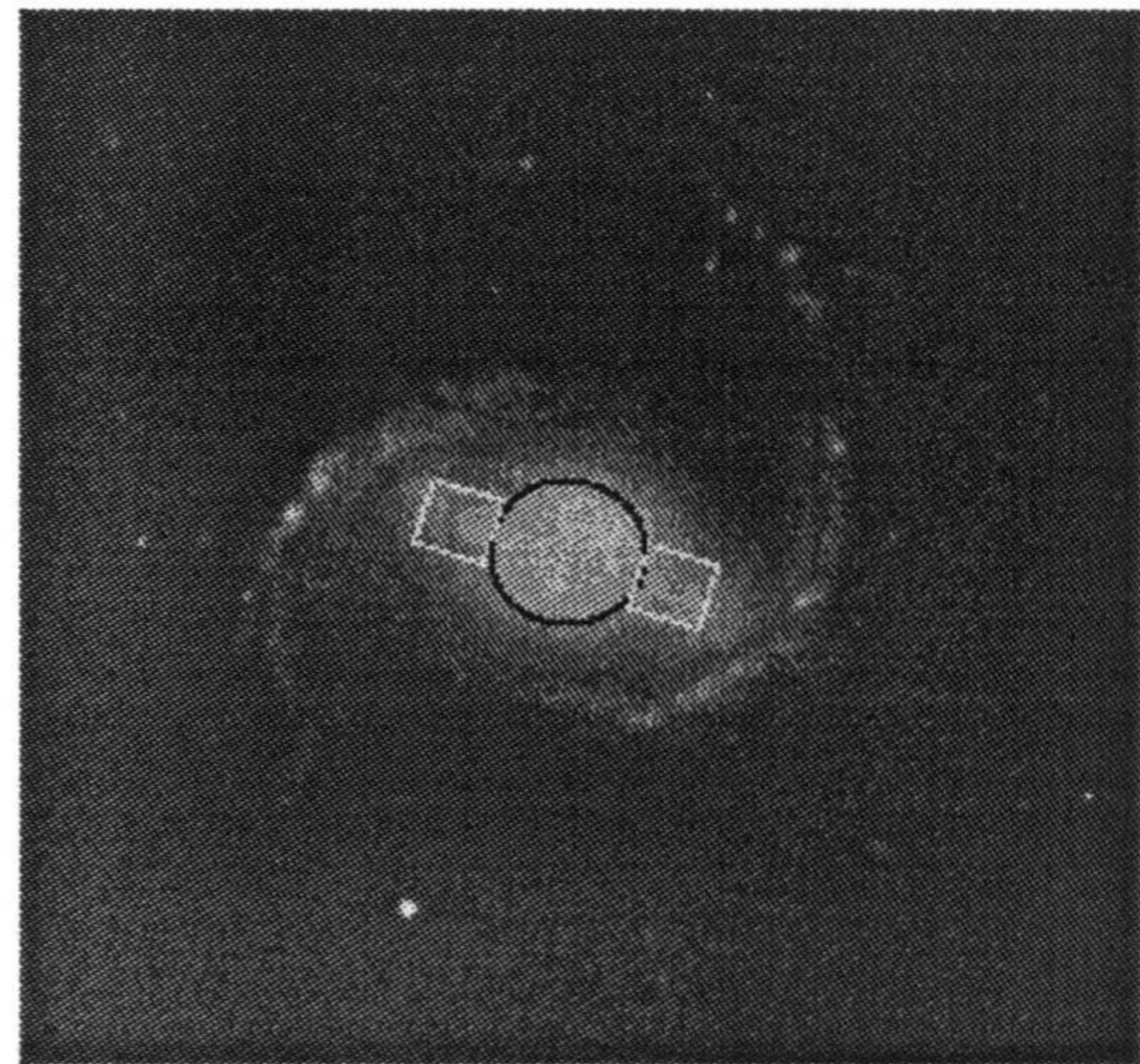


D

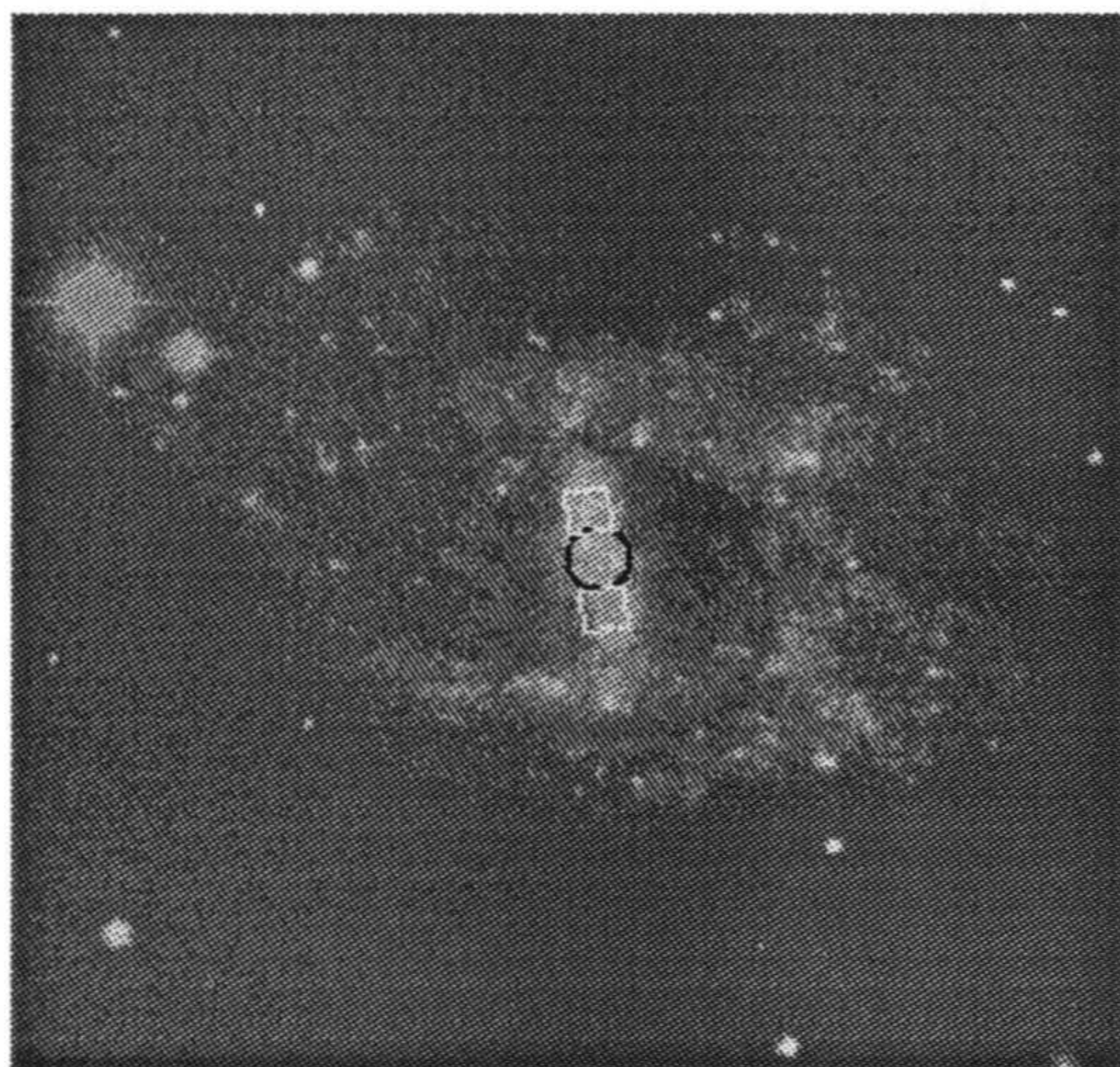
Figura 4.3: (A) barra ajustada sobre NGC-1073. (B) barra ajustada sobre NGC-2217. (C) barra ajustada sobre NGC-2523. (D) barra ajustada sobre NGC-3367.



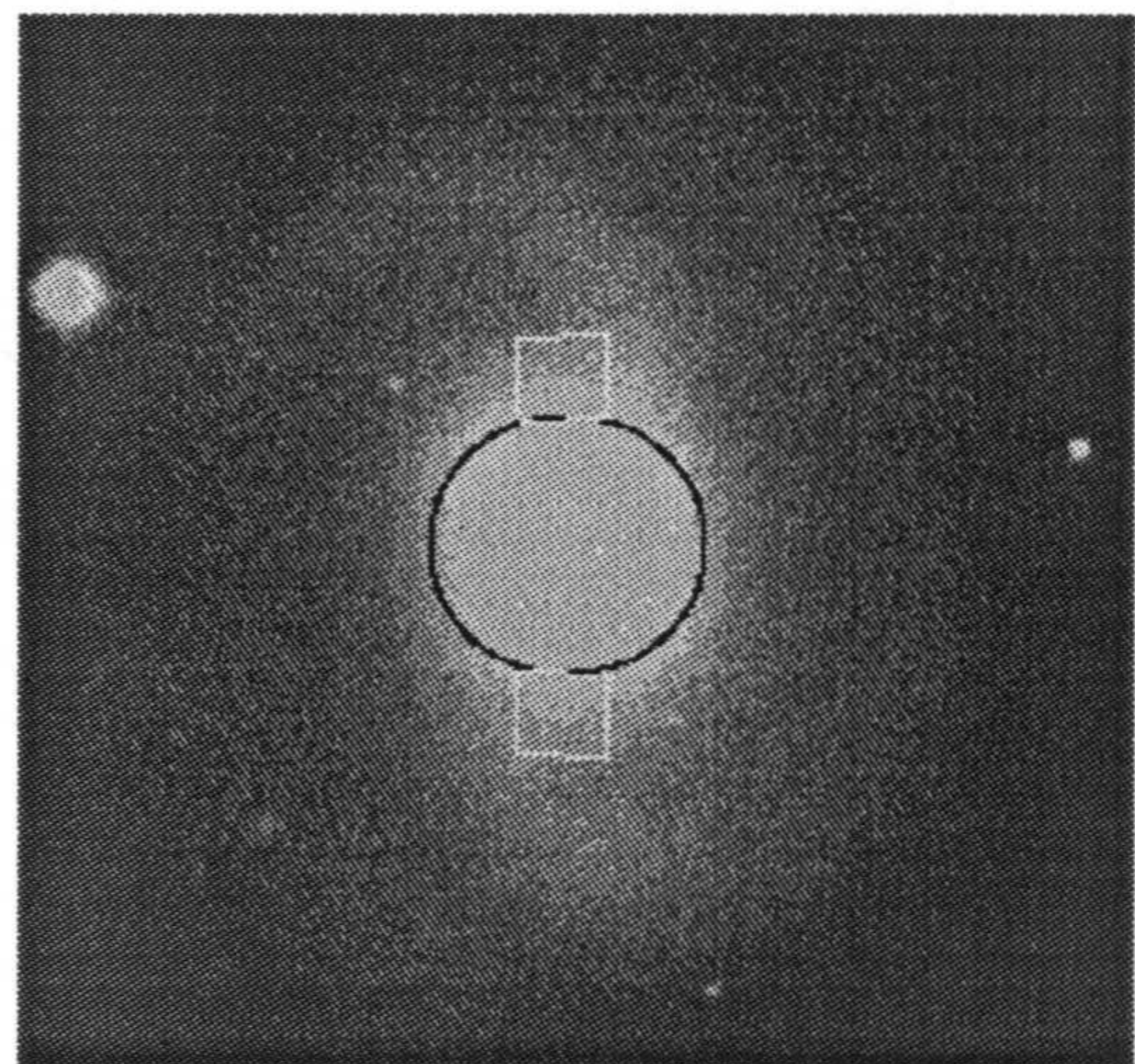
A



B



C



D

Figura 4.4: (A) barra ajustada sobre NGC-4262. (B) barra ajustada sobre NGC-4548. (C) barra ajustada sobre NGC-7741. (D) barra ajustada sobre NGC-7743.

### 4.2.2 Identificación de la presencia o ausencia del rasgo barra en la forma.

En el desarrollo que sigue, se aborda la determinación de la presencia o ausencia de rasgo barra en la forma. Así describimos la metodología empleada en la identificación de barra sobre imágenes que poseen una propiedad de homogeneidad en relación a los niveles de gris presentes. Es decir, los niveles de gris observados sobre las imágenes están en el mismo intervalo, y además en los extremos de este intervalo, el límite inferior se corresponde con el nivel de gris observado en el fondo de la imagen y el límite superior con el nivel de gris presente en el centro de la galaxia. Esta metodología ha sido usada para el tratamiento de la muestra de imágenes que hemos considerado en nuestros experimentos, ya que estas imágenes verifican la propiedad de homogeneidad exigida.

Aunque una muestra de imágenes no-homogéneas (en cuanto a los niveles de gris) se puede homogeneizar mediante la equalización de las imágenes, en el Apéndice A de esta memoria presentamos un procedimiento dirigido a la identificación de barra en la forma sobre imágenes no-homogéneas. Como consecuencia este procedimiento permitiría identificar la barra, sin necesidad de preprocesar las imágenes.

#### Identificación del rasgo sobre imágenes homogéneas.

En esencia, la presencia de barra en la forma de la galaxia se detecta en base a la relación existente entre el mejor ajuste ( $S_1^2(r^*)$ ) y el peor ajuste sobre  $C(r^*)$  ( $S_2^2(r^*)$ ) para el patrón teórico previamente definido, donde  $S_1^2(r^*)$  nota al mejor ajuste obtenido, es decir

$$S_1^2(r^*) = b_{r^*}(x^*, y^*) = \min_{(x,y) \in C(r^*)} b_{r^*}(x, y)$$

y  $S_2^2(r^*)$  nota al peor ajuste obtenido sobre  $C(r^*)$ , es decir

$$S_2^2(r^*) = b_{r^*}(x', y') = \max_{(x,y) \in C(r^*)} b_{r^*}(x, y)$$

con  $b_r(x, y)$  tal y como fue definido en (4.1).

Las características morfológicas del rasgo barra nos permiten afirmar que el nivel de gris es prácticamente constante alrededor de un valor próximo a  $\hat{\mu}_1$  (el nivel de gris observado en el centro de la galaxia).

Este conocimiento a priori se formula en este desarrollo mediante una hipótesis de normalidad sobre el nivel de gris observado en un pixel de la barra. Es decir si  $(i, j) \in S_{(x^*, y^*)} \cup S_{(-x^*, -y^*)}$ , donde  $(x^*, y^*)$  es un punto en  $C(r^*)$  que verifica

$$b_{r^*}(x^*, y^*) = \min_{(x,y) \in C(r^*)} b_{r^*}(x, y)$$

entonces consideramos que el nivel de gris observado en  $(i, j)$ , notado como  $x_{(i,j)}^G$ , se distribuye según una Ley Normal de media conocida ( $\hat{\mu}_1$ ) y varianza desconocida ( $\sigma_1^2$ ),

$$x_{(i,j)}^G \sim N(\hat{\mu}_1, \sigma_1^2).$$

La expresión  $b_{r^*}(x^*, y^*)$  que nota el mínimo valor de la varianza entre patrón e imagen y se define como

$$b_{r^*}(x^*, y^*) = \frac{1}{|S_{(x^*, y^*)}| + |S_{(-x^*, -y^*)}|} \sum_{(i,j) \in S_{(x^*, y^*)} \cup S_{(-x^*, -y^*)}} (x_{(i,j)}^G - \hat{\mu}_1)^2$$

es la varianza muestral observada sobre  $S_{(x^*, y^*)} \cup S_{(-x^*, -y^*)}$  y por tanto un estimador para la varianza poblacional  $\sigma_1^2$ , con distribución asociada Chi-cuadrado, es decir

$$\frac{m_1}{\sigma_1^2} S_1^2(r^*) \sim \chi_{m_1-1}^2$$

donde

$$m_1 = |S_{(x^*, y^*)}| + |S_{(-x^*, -y^*)}|.$$

Además y bajo este esquema, el peor ajuste  $S_2^2(r^*)$  obtenido para el patrón barra sobre  $C(r^*)$

$$S_2^2(r^*) = b_{r^*}(x', y') = \max_{(x,y) \in C(r^*)} b_{r^*}(x, y)$$

se distribuye según una  $\chi^2(\lambda)$  no-centrada. Este resultado se obtiene reexpresando  $S_2^2(r^*)$  como:

$$\begin{aligned} S_2^2(r^*) &= \frac{1}{|S_{(x',y')}| + |S_{(-x',-y')}|} \sum (x_{(i,j)}^G - \hat{\mu}_1)^2 \\ &= \frac{1}{|S_{(x',y')}| + |S_{(-x',-y')}|} \sum \left[ (x_{(i,j)}^G - \hat{\mu}_2) + (\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1) \right]^2 \\ &= \frac{\sigma_2^2}{|S_{(x',y')}| + |S_{(-x',-y')}|} \sum \left[ \left( \frac{x_{(i,j)}^G - \hat{\mu}_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}{\sigma_2} \right) \right]^2 \\ &= \frac{\sigma_2^2}{|S_{(x',y')}| + |S_{(-x',-y')}|} \sum (Z_{(i,j)}^G)^2 \end{aligned}$$

donde las sumatorias recorren los píxeles  $(i, j)$  en  $S_{(x',y')} \cup S_{(-x',-y')}$ , y donde

$$Z_{(i,j)}^G = U_{(i,j)} + \lambda_{(i,j)}$$

con

$$U_{(i,j)} = \frac{x_{(i,j)}^G - \hat{\mu}_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1)$$

en donde  $\hat{\mu}_2$  es un estimador para la media del nivel de gris observado sobre todo pixel en los sectores  $S_{(x',y')}$  y  $S_{(-x',-y')}$  asociados al peor ajuste del patrón barra (por ejemplo la media muestral) y donde  $\sigma_2$  es la desviación asociada a esta clase de píxeles, y

$$\lambda_{(i,j)} = \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}{\sigma_2}.$$

Es decir podemos afirmar que

$$\sum_{(i,j) \in S_{(x',y')} \cup S_{(-x',-y')}} \left[ \left( \frac{x_{(i,j)}^G - \hat{\mu}_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}{\sigma_2} \right) \right]^2 = \sum_{(i,j) \in S_{(x',y')} \cup S_{(-x',-y')}} [U_{(i,j)} + \lambda_{(i,j)}]^2$$

se distribuye según una distribución  $\chi^2(\lambda)$  no-centrada con parámetro de no-centralidad

$$\lambda = \sum \lambda_{(i,j)}^2$$

Luego la distribución asociada a  $S_2^2(r^*)$  es

$$\frac{m_2}{\sigma_2^2} S_2^2(r^*) \sim \chi_{m_2-1}^2(\lambda)$$

donde

$$m_2 = |S_{(x',y')}| + |S_{(-x',-y')}|.$$



Los valores muestrales  $S_1^2(r^*)$  y  $S_2^2(r^*)$  son utilizados para obtener el objetivo inicialmente formulado, y así la ausencia o presencia del rasgo barra se determina usando el estadístico

$$\frac{S_1^2(r^*)}{S_2^2(r^*)}$$

cuya distribución es

$$\begin{aligned} \frac{S_1^2(r^*)}{S_2^2(r^*)} &\sim \frac{\chi_{m_1-1}^2 \sigma_1^2 (m_1-1)^{-1}}{\chi_{m_2-1}^2 (\lambda) \sigma_2^2 (m_2-1)^{-1}} \\ &\sim \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 F_{m_1-1, m_2-1}(0, \lambda) \end{aligned}$$

donde  $F_{m_1-1, m_2-1}(0, \lambda)$  es la F de Snedecor no-centrada con  $m_1 - 1$  y  $m_2 - 1$  grados de libertad. Luego los valores  $l_1, l_2$  definidos como

$$\begin{aligned} l_1 &= \left(\frac{S_1^2(r^*)}{S_2^2(r^*)}\right)^2 F_{m_1-1, m_2-1, 1-\alpha_2}^{-1}(0, \lambda) \\ l_2 &= \left(\frac{S_1^2(r^*)}{S_2^2(r^*)}\right)^2 F_{m_1-1, m_2-1, \alpha_1}^{-1}(0, \lambda) \end{aligned}$$

determinan el intervalo de confianza  $(l_1, l_2)$  con nivel de confianza  $1 - \alpha_1 - \alpha_2$  para la razón  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ .

El intervalo de confianza  $(l_1, l_2)$  al 95% obtenido para galaxias no-barradas es

$$(0.64, 0.81)$$

mientras que el intervalo de confianza calculado para galaxias barradas es

$$(0.41, 0.53)$$

intervalos que no se solapan, y que nos permiten observar una diferencia significativa para el valor  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  sobre galaxias barradas y sobre no-barradas.

Este análisis nos permite concluir que la razón de varianzas muestrales

$$\frac{S_1^2(r^*)}{S_2^2(r^*)}$$

contiene información suficientemente significativa para caracterizar la presencia (o ausencia) de barra en la forma, y su uso permite como consecuencia caracterizar

la galaxia como barrada (si el rasgo está presente) o como no-barrada (en el caso de rasgo ausente).

La muestra de imágenes sobre la que hemos trabajado (27 imágenes de galaxias no-barradas y 15 de galaxias barradas), verifica esta propiedad de homogeneidad (luego los niveles de gris observados se encuentran en el mismo intervalo para las imágenes consideradas). Y en consecuencia ha sido este enfoque el empleado para determinar la presencia o ausencia del rasgo barra en la galaxia.

### 4.2.3 Extracción en su totalidad del rasgo barra.

La presencia del rasgo barra se puede determinar usando el procedimiento descrito, pero si deseamos identificar en su totalidad la barra que aparece en la forma este procedimiento será insuficiente ya que el modelo teórico que se ajusta a la imagen, en general captura tan sólo de forma parcial el rasgo considerado (ver figuras 4.3 y 4.4).

La extracción en su totalidad del rasgo barra ya identificado en la forma (junto a la localización de los demás rasgos significados) permite la construcción de un modelo teórico que representa la morfología de la galaxia.

Con este objetivo, presentamos un procedimiento que parte del patrón teórico inicial (que captura la barra de forma parcial), y procede a la adición secuencial de nuevos sectores rectangulares en extremos opuestos hasta satisfacer una condición de parada (sobre la adición de nuevos sectores). El modelo teórico final que produce se representa según la figura 4.5.

#### Adición de nuevos sectores al patrón inicial.

El conocimiento a priori sobre la barra nos permite afirmar que la longitud de los dos extremos (opuestos) coincide.

En este desarrollo notamos por  $L$  a una variable aleatoria que representa el número de sectores que constituyen los dos extremos opuestos de la barra, y que

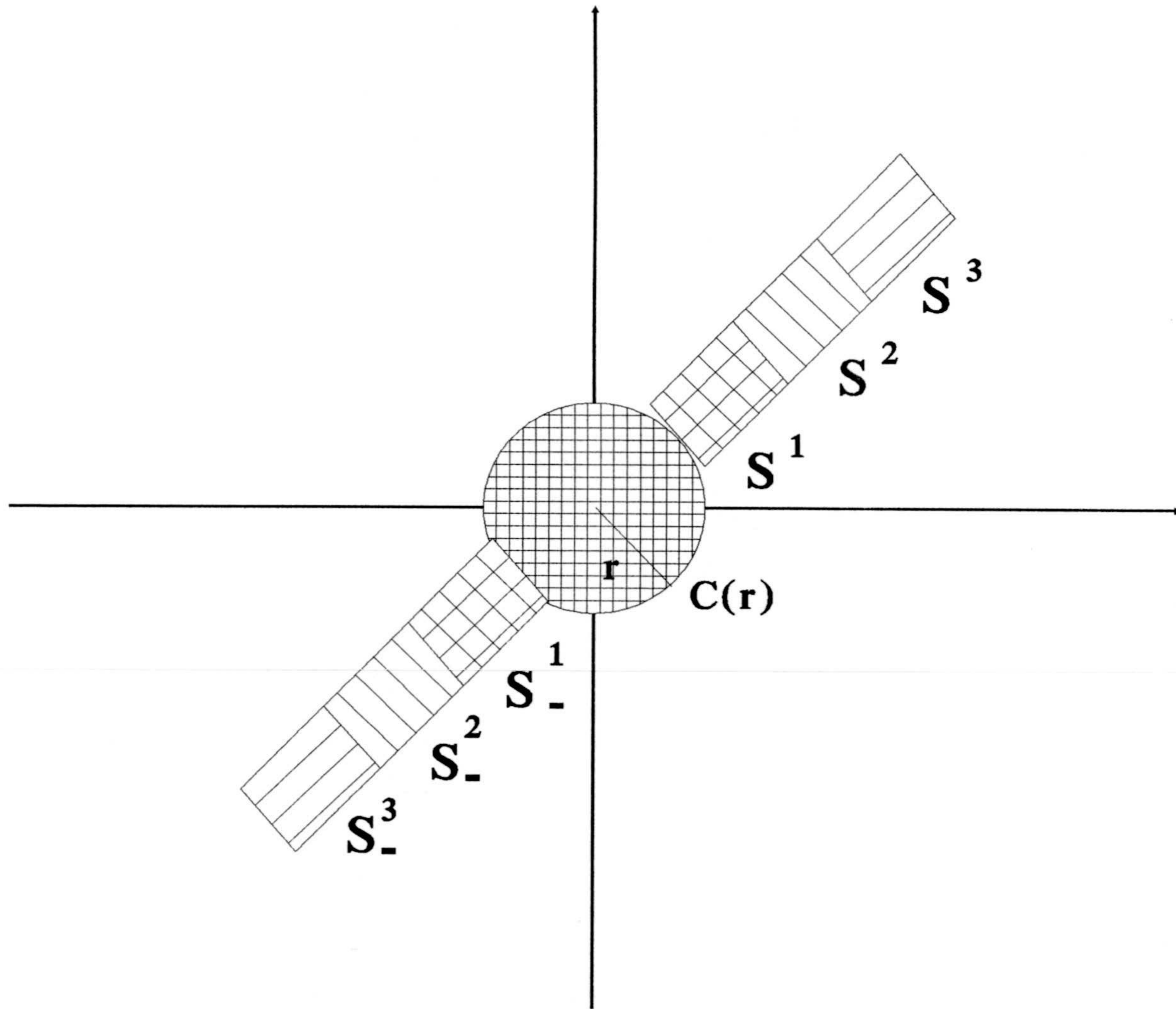
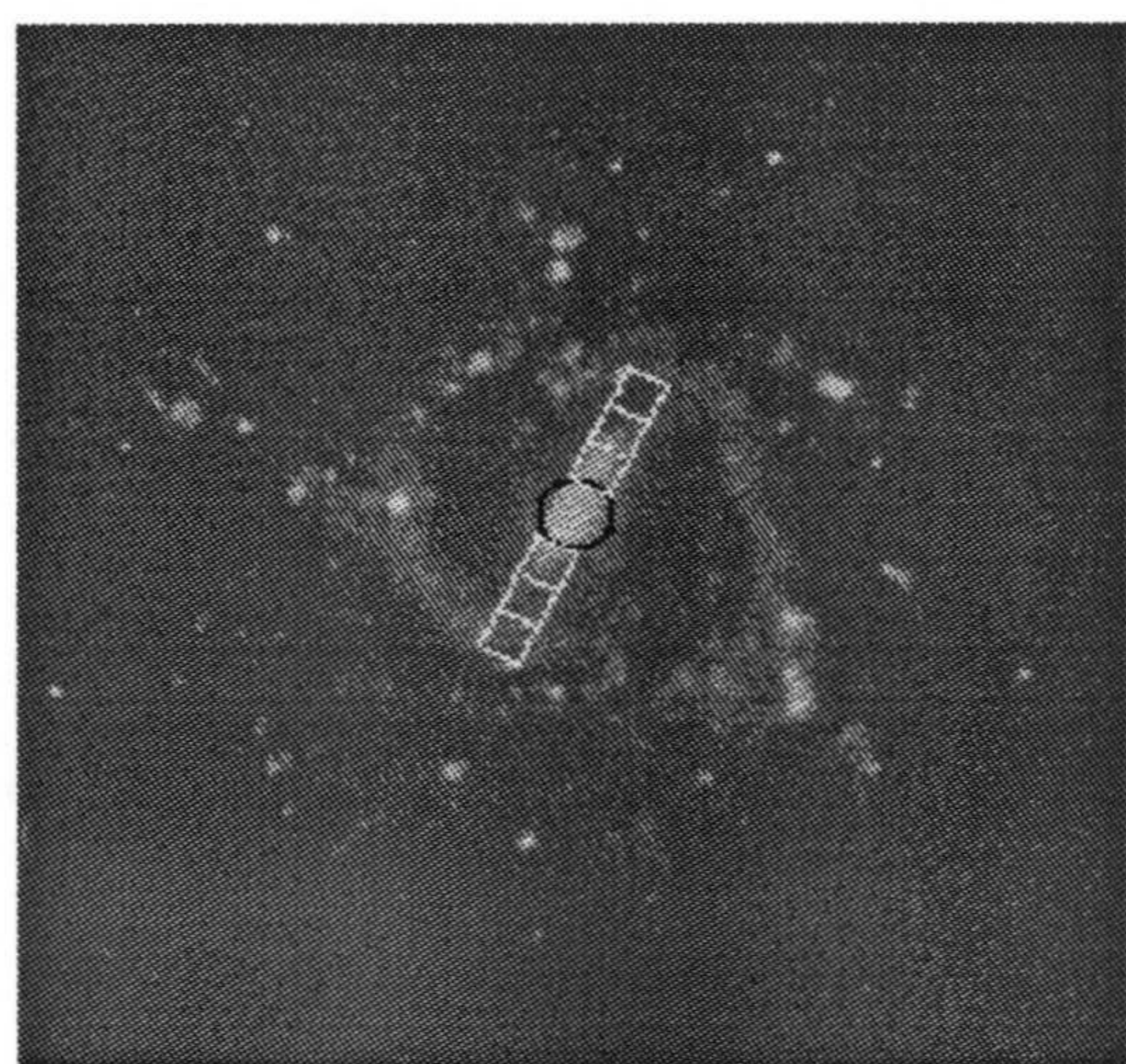
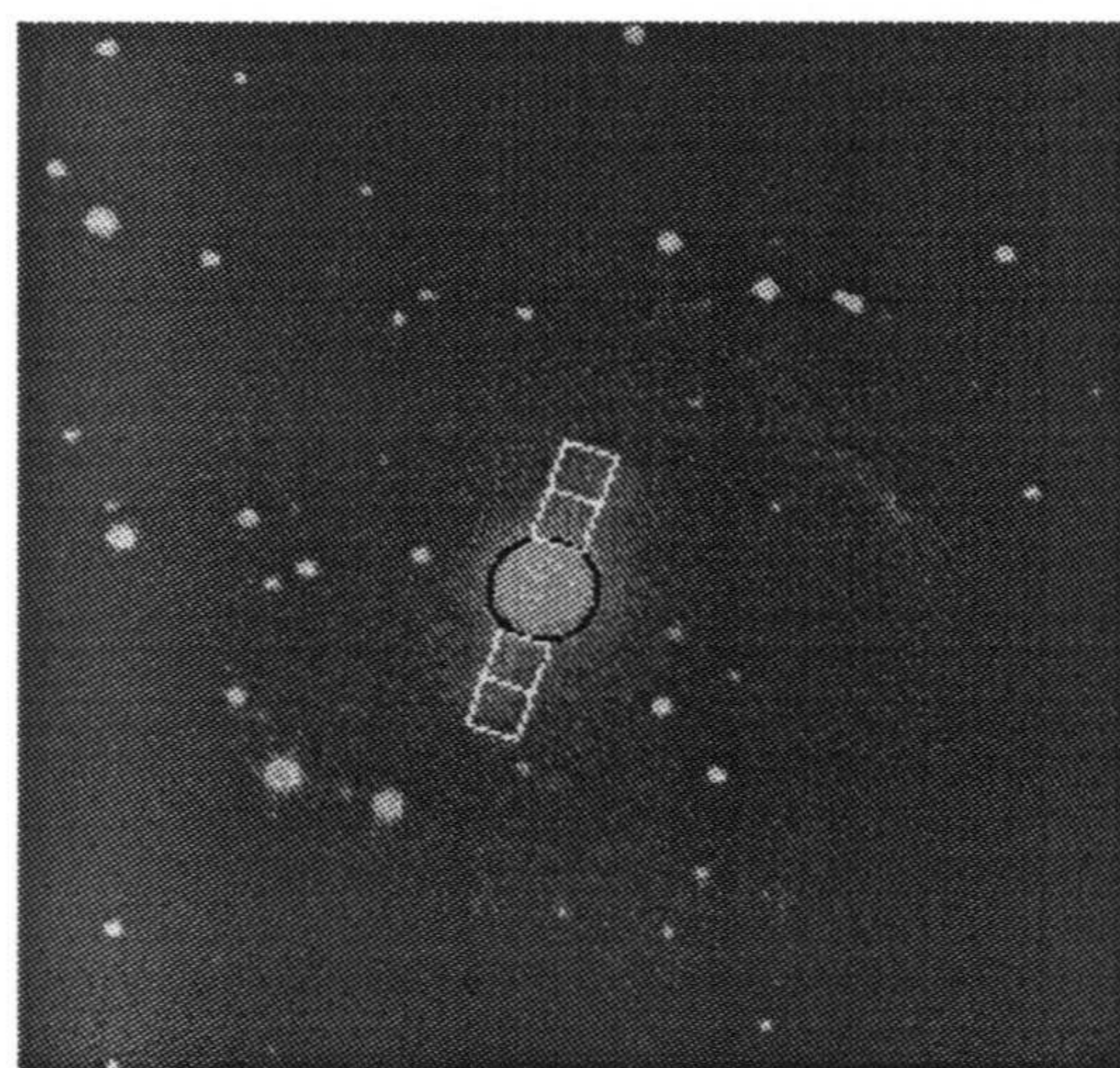


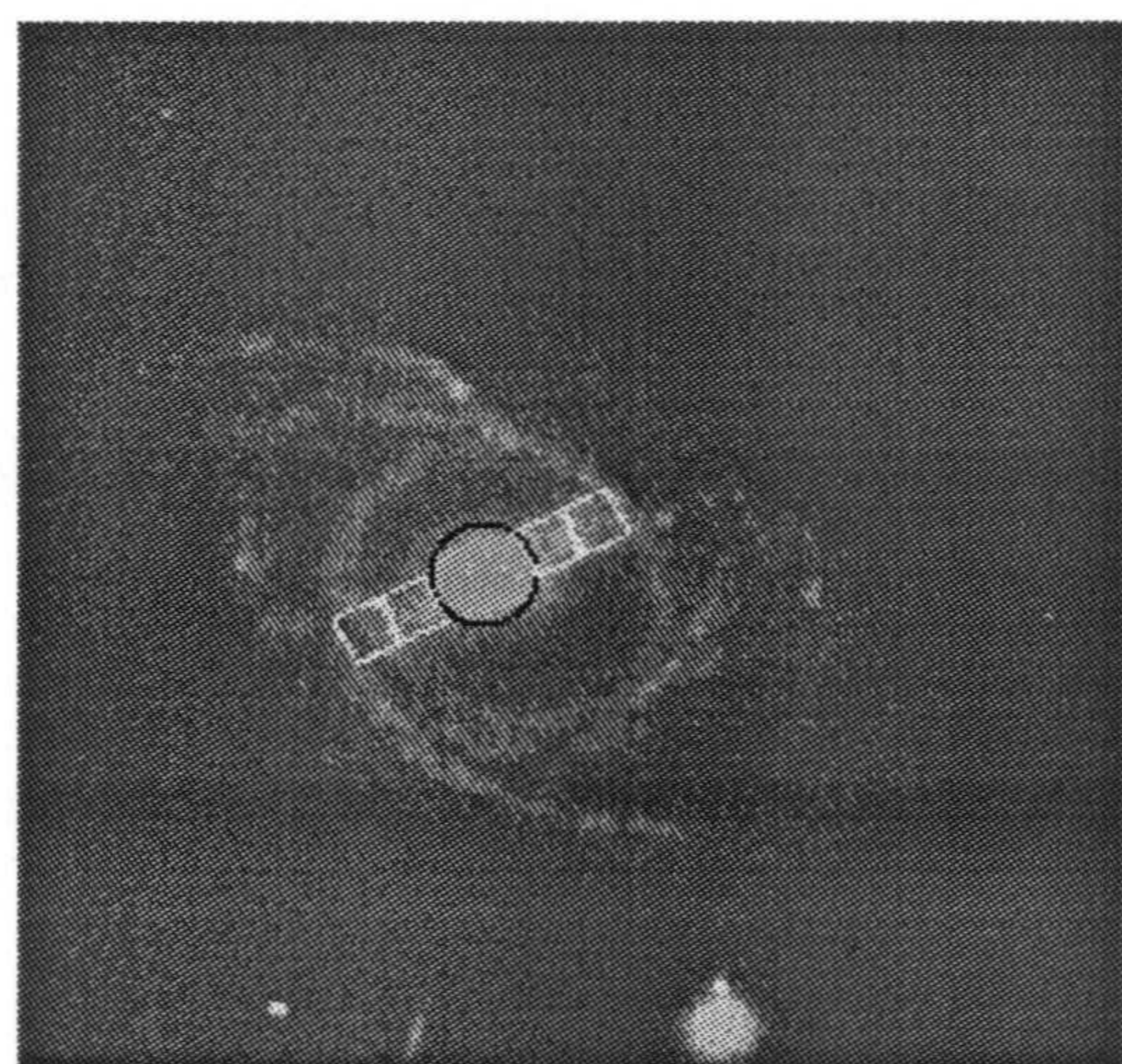
Figura 4.5: Ejemplo de patrón teórico final obtenido mediante la adición de dos nuevos sectores al patrón inicialmente ajustado. En primer lugar se añaden (en extremos opuestos) los sectores  $S^2$  y  $S_1^2$  a los sectores del patrón inicial ( $S^1$  y  $S_1^1$ ). Por último se añaden los sectores  $S^3$  y  $S_1^3$ .



A



B

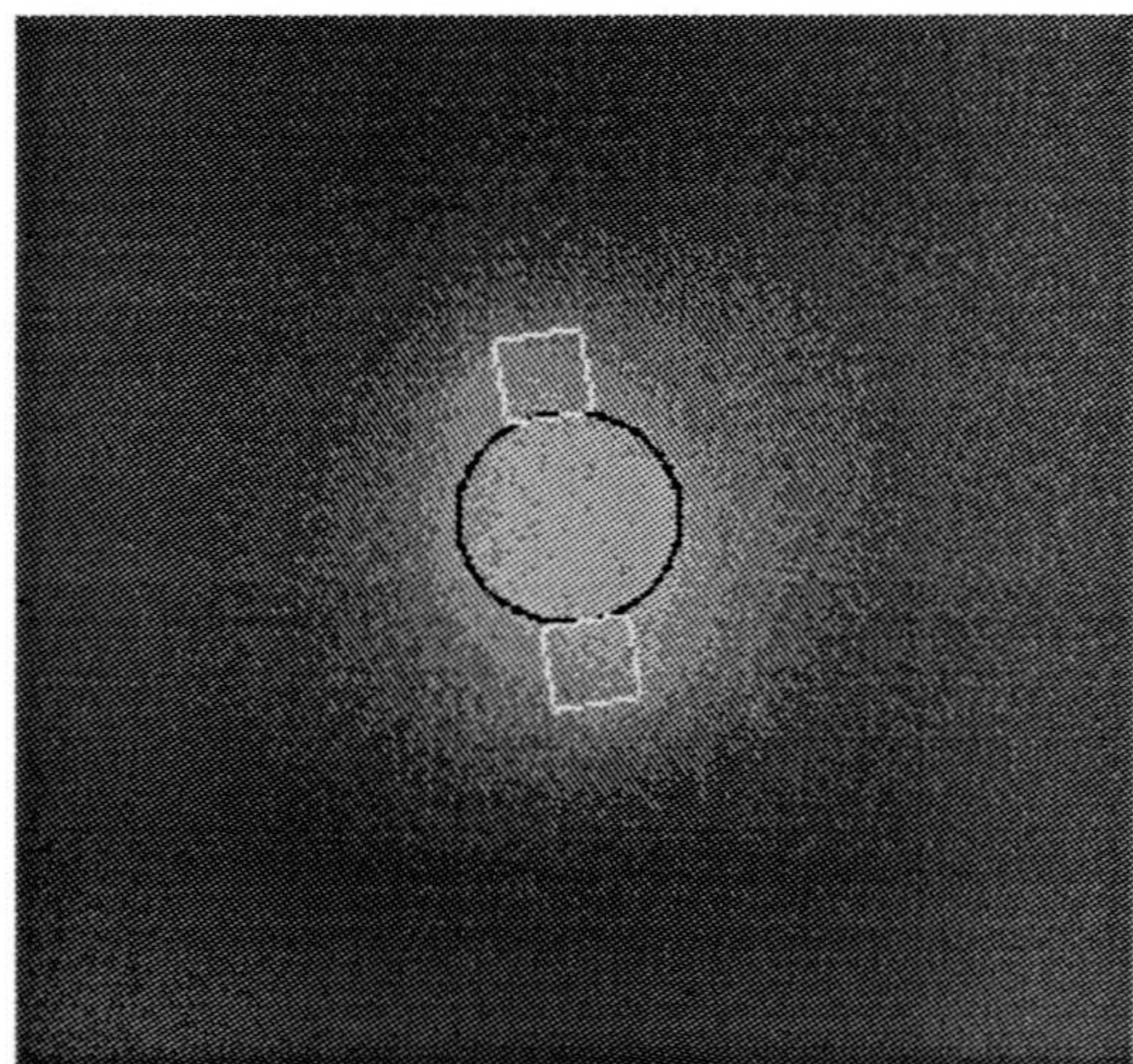
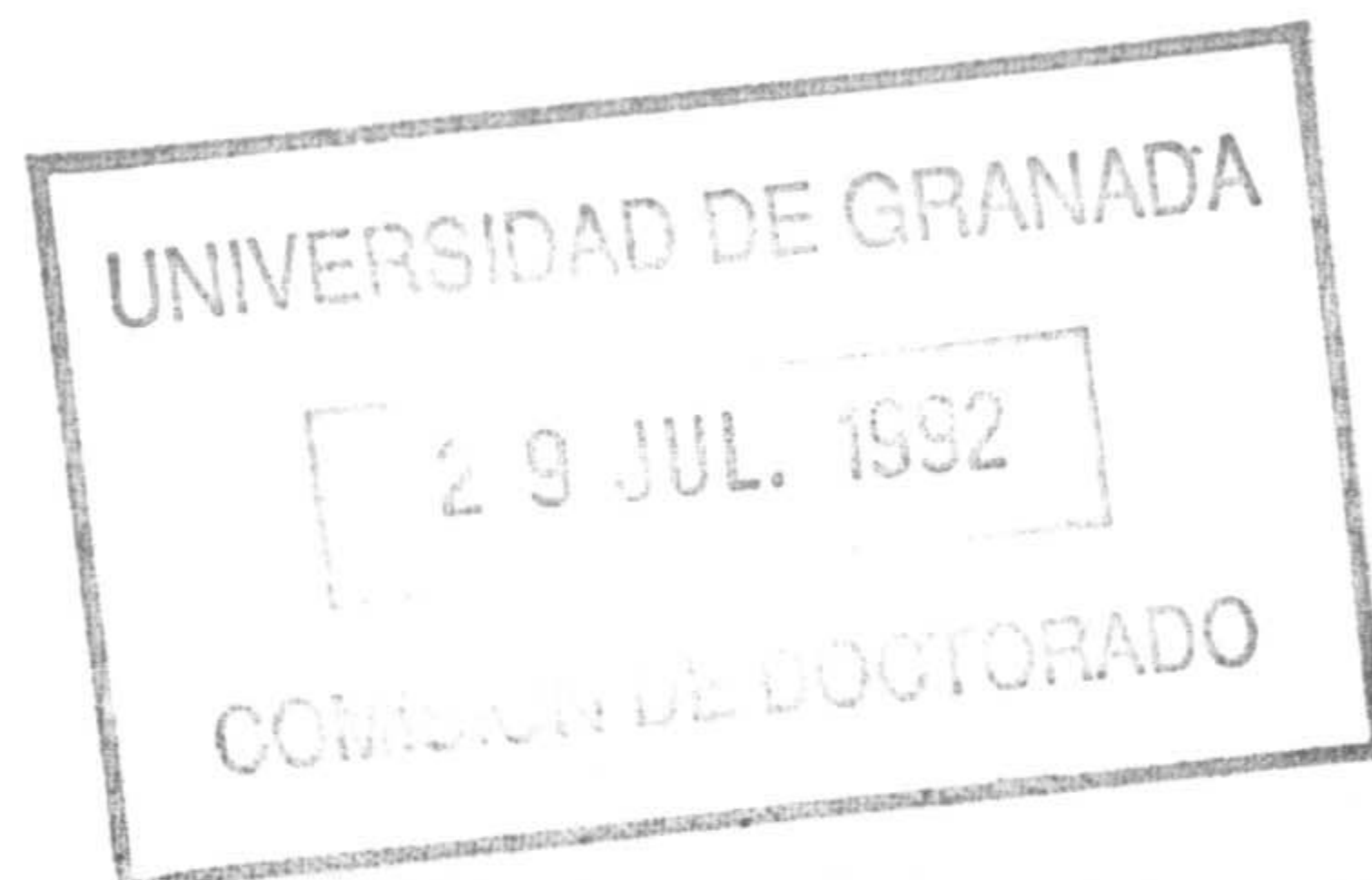


C



D

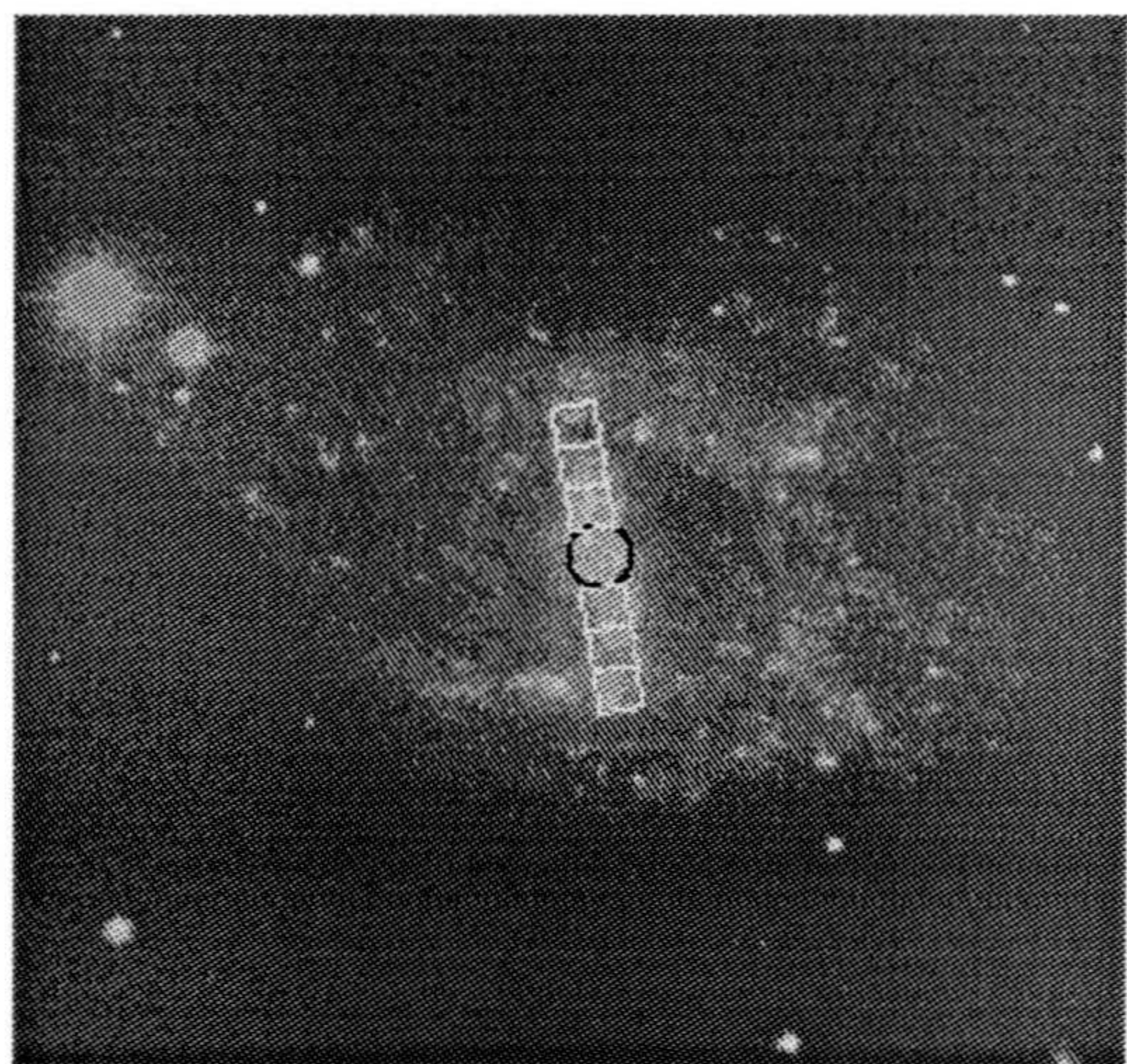
Figura 4.6: (A) barra final ajustada sobre NGC-1073. (B) barra final ajustada sobre NGC-2217. (C) barra final ajustada sobre NGC-2523. (D) barra final ajustada sobre NGC-3367.



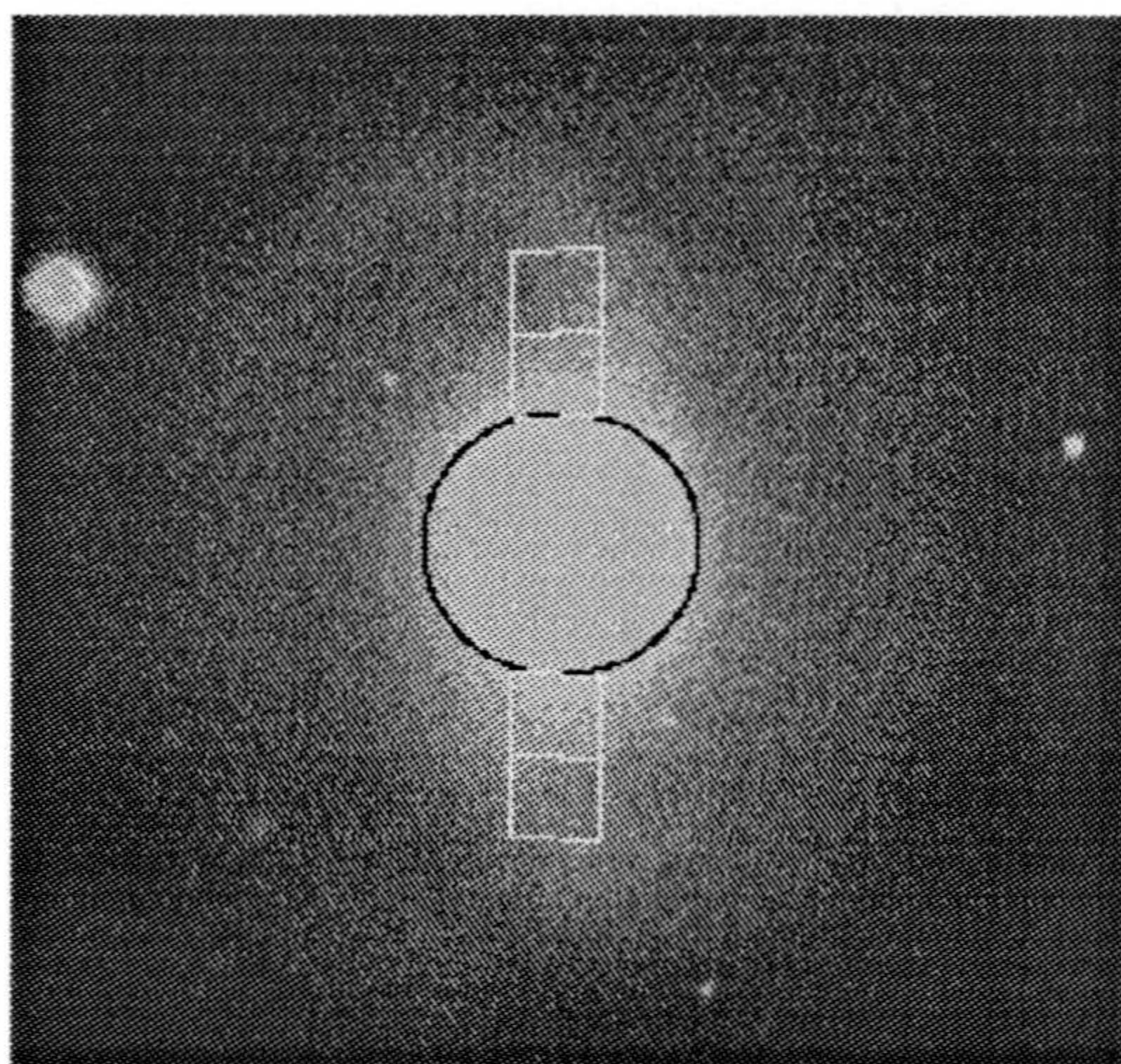
A



B



C



D

Figura 4.7: (A) barra final ajustada sobre NGC-4262. (B) barra final ajustada sobre NGC-4548. (C) barra final ajustada sobre NGC-7741. (D) barra final ajustada sobre NGC-7743.

toma valores positivos (estrictamente mayores que uno).

Podemos reformular el problema aquí considerado (adición de nuevos sectores al patrón barra con objeto de ajustar mejor el rasgo) como la obtención de un procedimiento para el cálculo del valor  $L^*$ , de la variable aleatoria  $L$ , verificando que en un extremo los sectores  $S^1, \dots, S^{L^*}$  y en el extremo opuesto los sectores  $S_-^1, \dots, S_-^{L^*}$  capturan en su totalidad la barra.

Es decir,  $L^*$  es el mayor valor para  $L$  que permite ajustar el rasgo considerado.

Este procedimiento considera como valor inicial  $L = 2$  y de forma secuencial añade sectores al patrón hasta que se verifica la condición de parada descrita a continuación.

#### Condición de parada del procedimiento de adición de nuevos sectores.

Notemos por  $\sigma_0^2$  el valor de la varianza para el mejor ajuste del patrón teórico inicial  $B_{(x^*, y^*)}$ , es decir

$$\sigma_0^2 = b_{r^*}(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in C(r^*)} b_{r^*}(x, y).$$

El valor óptimo para  $L$  es  $L^*$  (luego la barra se ajusta en su totalidad mediante los sectores  $S^1, \dots, S^{L^*}$  y en el extremo opuesto  $S_-^1, \dots, S_-^{L^*}$ ) si se verifica alguna de las siguientes dos condiciones:

(1) Para la varianza muestral  $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{|S^{L^*+1}| + |S_-^{L^*+1}|} \sum_{(i, j) \in S^{L^*+1} \cup S_-^{L^*+1}} (x_{(i, j)}^G - \hat{\mu}_1)^2$$

calculada sobre los sectores  $S^{L^*+1}$  y  $S_-^{L^*+1}$  candidatos a ser añadidos al final de los extremos del patrón, se acepta a un nivel alto de confianza la hipótesis  $H_1$  del contraste

$$H_0 : \hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \hat{\sigma}^2 > \sigma_0^2$$

Es decir los sectores  $S^{L^*+1}$  y  $S_-^{L^*+1}$  no son añadidos al patrón teórico y finaliza la adición de nuevos sectores (luego  $L = L^*$ ), si la varianza observada sobre  $S^{L^*+1}$  y  $S_-^{L^*+1}$  es significativamente mayor que la varianza  $\sigma_0^2$  observada en los sectores  $S^1$  y  $S_-^1$  del patrón teórico ajustado inicialmente a la imagen.

- (2) El conjunto de observaciones  $x_{i,j}^G$ , con  $(i,j) \in S^{L^*+1} \cup S_-^{L^*+1}$ , no proceden de una distribución normal. Para contrastar la normalidad de la distribución empírica, se emplea el estadístico de Kolmogorov-Smirnov  $D$ . Es decir los sectores  $S^{L^*+1}$  y  $S_-^{L^*+1}$  no son añadidos al patrón teórico y finaliza la adición de nuevos sectores (luego  $L = L^*$ ) si el conjunto

$$\{x_{i,j}^G \mid (i,j) \in S^{L^*+1} \cup S_-^{L^*+1}\}$$

no determina un conjunto de valores uniformes.

Las figuras 4.6 y 4.7 muestran el patrón final ajustado sobre algunas de las galaxias barradas consideradas.

### 4.3 Extracción automática del rasgo brazo.

La forma de un brazo espiral particular, en el más estricto sentido, puede ser muy aparente, y reconocer que dos brazos tienen precisamente la misma forma a menudo no es difícil. La construcción de un modelo matemático para la población de brazos espirales, es un problema con solución mas compleja. Y mucho mas difícil resulta la localización y completa identificación de un brazo sobre la forma, incluso si se realiza por inspección visual.

Como consecuencia las dificultades habituales que se plantean en la automatización de un proceso, se incrementan de manera especial cuando se aborda la extracción automática del rasgo brazo.

A continuación analizamos el grado de automatización que se puede alcanzar en este proceso. Así y en primer lugar se justifica el uso de modelos que incorporan

información sobre la geometría global y local del rasgo frente a modelos que describen tan sólo su geometría local.

En segundo lugar describimos el modelo adoptado para el rasgo y las ideas esenciales del procedimiento empleado en su ajuste a la forma.

En tercer lugar se analiza la necesidad de identificaciones iniciales adecuadas que simplifican la extracción final del brazo presente en la forma y la automatización del proceso.

En cuarto lugar se describe un procedimiento orientado a la extracción en su totalidad el brazo presente.

#### **4.3.1 Descripción de rasgos usando un modelo que incorpora tan sólo información relativa a la geometría local.**

El conocimiento a priori sobre un rasgo tiene que ser formulado en términos de un modelo que se pueda usar en la identificación de la forma.

Una cuestión que se plantea es si el uso de modelos contextuales que contienen información tan sólo sobre la interacción de píxeles en un entorno reducido, permite identificar el rasgo en la forma, o si es necesario considerar modelos que incorporan información sobre la geometría (global y local) del rasgo a identificar.

En esta línea el desarrollo que sigue muestra las dificultades que plantea el uso de modelos contextuales (que no incorporan información sobre la geometría de la forma) en la descripción de elipses y espirales.

En primer lugar formulamos el modelo contextual elegido. Así intentamos caracterizar estos dos rasgos como realizaciones de campos aleatorios markovianos con diferentes parámetros de interacción.

En segundo lugar analizamos si estos modelos contienen información suficiente para diferenciar ambos rasgos de manera significativa.



**Elección de un modelo.**

En este desarrollo las imágenes son descritas mediante un retículo de puntos  $N_1 \times N_2$ , finito y rectangular, definido como

$$L = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2\},$$

y se consideran realizaciones de un proceso estocástico bidimensional.

El modelo asociado a cada imagen será un campo aleatorio finito discreto-valorado

$$X = \{X_{(i,j)}\},$$

donde cada variable  $X_{(i,j)}$  toma valores en  $\{0, 1\}$ .

La distribución asociada se especifica en términos de un sistema de entornos de segundo orden  $\eta^2$ , y los cliques son los determinados por este sistema de entornos.

Por conveniencia, en este desarrollo simplificamos la notación de  $x_{(i,j)}$  a  $x_t$ , con  $t = j + N_2(i - 1)$ .

El conjunto de vecinos espaciales de primer orden para  $x_t$  se nota como

$$\{x_{t:r} ; r = +1, -1, +2, -2\}$$

y se muestra gráficamente en la figura 4.8.

El conjunto de vecinos de segundo orden asociado a  $x_t$  se nota por

$$\{x_{t:r} ; r = +3, -3, +4, -4\}$$

y se muestra gráficamente en la figura 4.9.

La distribución conjunta es de la forma

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} \exp^{-U(x)}$$

donde

$$Z = \sum_x \exp^{-U(x)}.$$

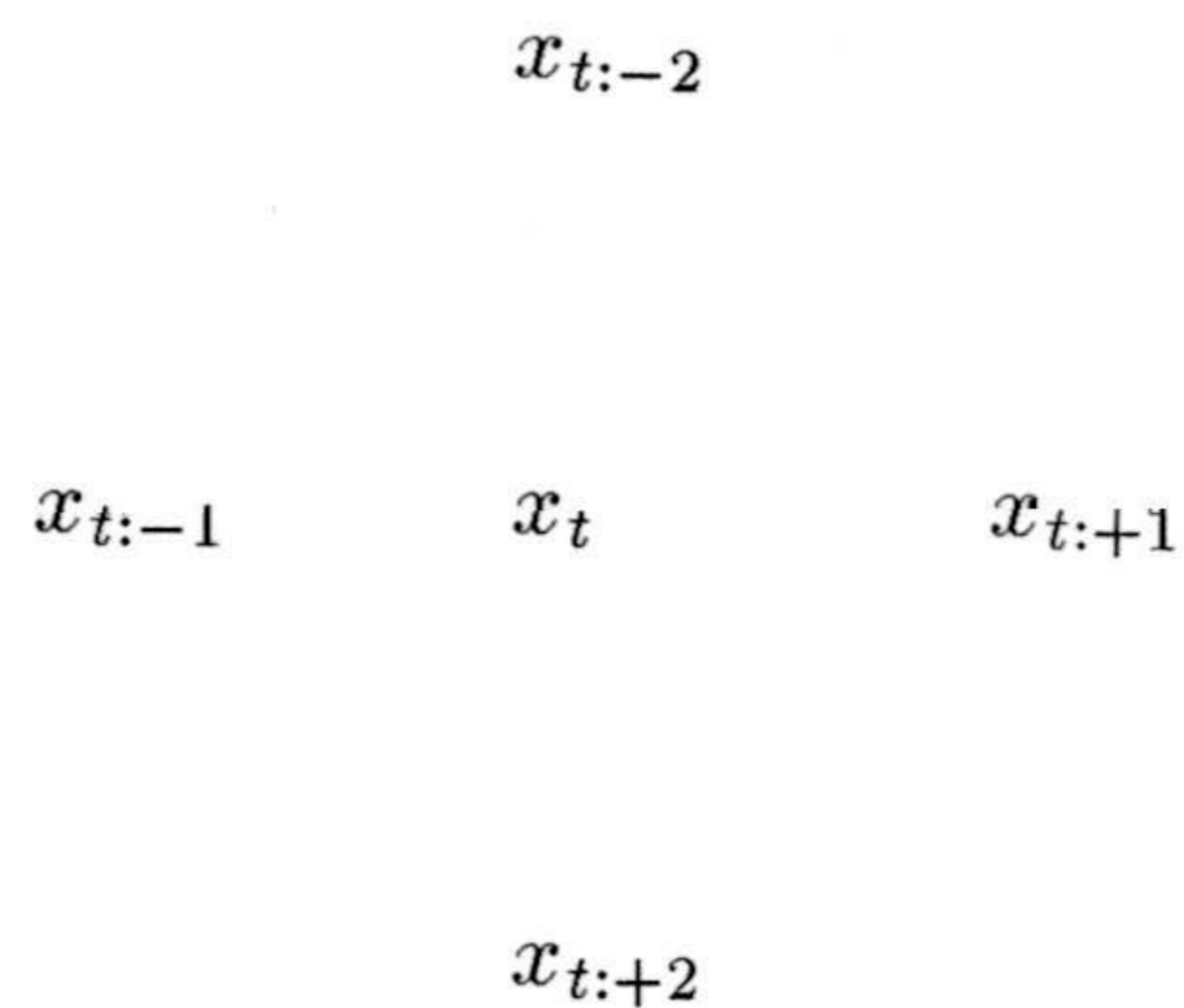


Figura 4.8: Localización de un pixel y sus vecinos de primer orden.

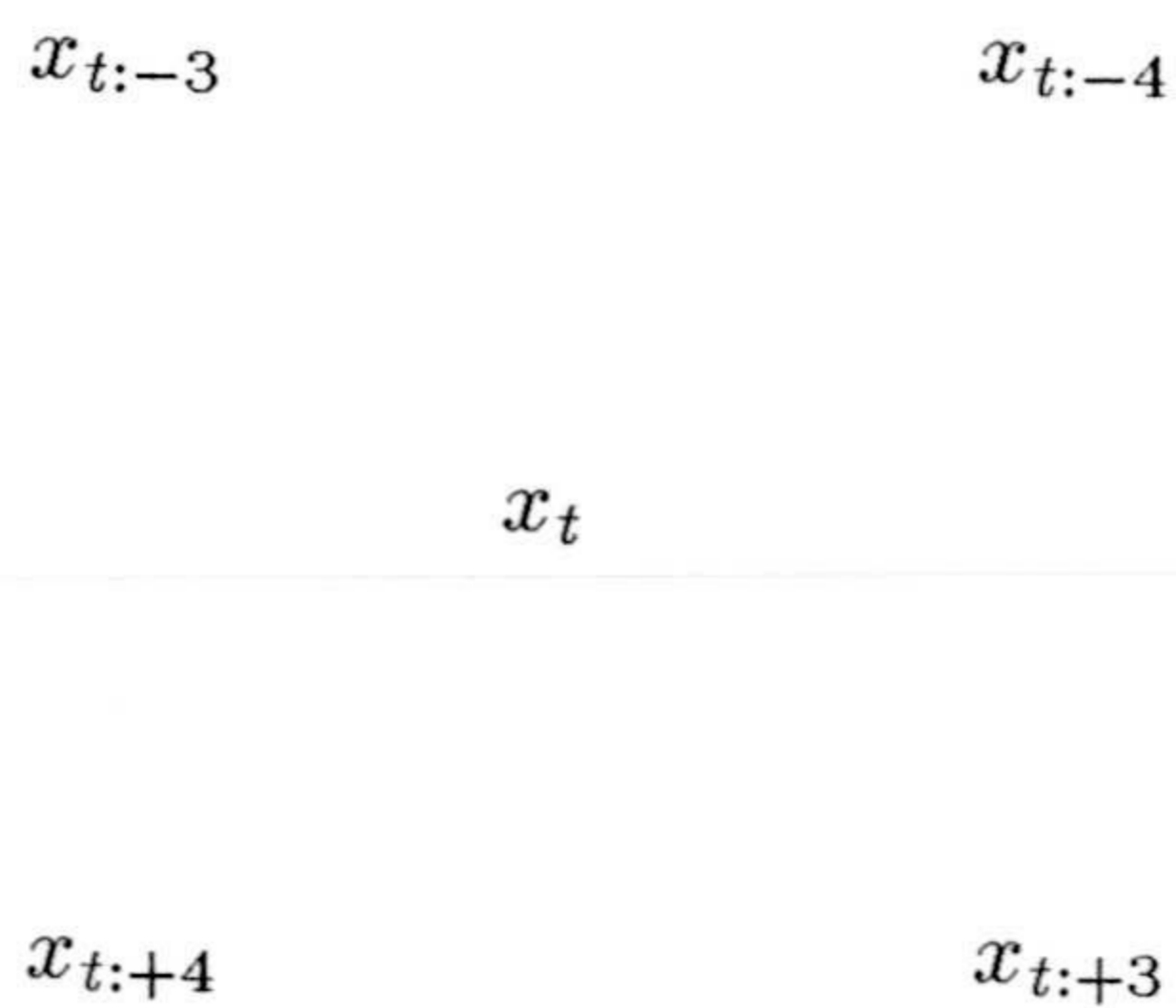


Figura 4.9: Localización de un pixel y sus vecinos de segundo orden.

La función de energía para un modelo de interacción donde solo están implicados cliques de tamaño 2, se puede escribir en la forma dada por Besag [4] como

$$U(x) = \sum_{t=1}^M F(x_t) + \sum_{t=1}^M \sum_{r=1}^K H(x_t, x_{t:+r})$$

donde  $H(a, b) = H(b, a)$ ,  $H(a, a) = 0$  y  $K$  depende del número de vecinos de un pixel. La función  $F$  es la función de potencial asociada a cliques de un solo pixel.  $H$  es la función de potencial para los cliques de tamaño 2. Así por ejemplo  $K$  es 4 para sistemas de entornos de orden 2.

En la descripción de rasgos usamos el modelo de Derin-Elliot [15] donde

$$F(x_t) = \alpha x_t$$

y

$$H(x_t, x_{t+r}) = \beta_r I(x_t, x_{t+r})$$

donde  $I(.,.)$  es una función que se define como

$$I(a, b) = \begin{cases} -1 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases},$$

Los parámetros  $\beta_r$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ , determinan la dependencia espacial en las direcciones horizontal, vertical, diagonal y diagonal-opuesta respectivamente.

#### Estimación de parámetros sobre el contorno de los rasgos.

En este desarrollo consideramos imágenes binarias que contienen una espiral o una elipse.

La espiral se define mediante la ecuación

$$r = \mathbf{a} \exp \mathbf{b}\theta$$

propuesta por Danver [?] para modelar los brazos de galaxias, donde  $\mathbf{a}$  determina la distancia al centro de la galaxia y  $\mathbf{b}$  determina el tamaño del incremento angular.

Las elipses tienen propiedades isotrópicas que no aparecen sobre espirales. Esto nos induce a esperar que los parámetros de segundo orden  $\beta_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , sean diferentes para ambos rasgos, y en un intento de comprobar este hecho procedemos a su estimación.

La información para discriminar espirales y elipses está contenida en el contorno de estos rasgos, luego la estimación de los parámetros  $\beta_r$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ , se puede realizar solamente sobre estos puntos.

<b>b</b>	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
0.12	6.195440	5.022793	2.568366	2.733341
0.13	6.195440	5.022793	2.733341	2.568366
0.15	2.135317	1.923415	1.397863	1.359995
0.17	2.135317	1.923415	1.397863	1.359995
0.19	2.135317	1.923415	1.397863	1.359995
0.20	2.683971	2.302599	1.552279	1.510072
0.25	2.135317	1.923414	1.359995	1.397863

Tabla 4.1: Estimadores obtenidos sobre espirales.

El método de estimación empleado es el método de la pseudo-verosimilitud (ver Besag [8]). Luego los estimadores  $\beta = \{\beta_r; r = 1, 2, 3, 4\}$  son elegidos como los valores de estos parámetros que maximizan la función  $PL$ , definida como

$$PL = \prod_{\text{píxeles}} P[X_{ij} | X_{kl} \text{ con } (k, l) \neq (i, j), \beta] \quad (4.4)$$

La optimización de (4.4) en  $\beta$  se ha realizado usando una rutina de búsqueda cuadrática (ver Press [75]).

Los resultados son mostrados en la tabla 4.1 y en la tabla 4.2.

Los estimadores de los parámetros  $\beta_3$  y  $\beta_4$  toman valores diferentes sobre el contorno de un brazo espiral (tabla 4.1), de donde se deduce que el modelo asociado es no-isotrópico en segundo orden. Mientras la estimación sobre una elipse (tabla 4.2) produce valores iguales para los parámetros en ambas direcciones diagonales, obteniendo que el modelo asociado es isotrópico en segundo orden.

Un análisis de las tablas 4.1 y 4.2, muestra que aunque los rasgos elípticos poseen isotropía que no aparece sobre espirales, la diferencia entre los parámetros no es significativa incluso en una situación ideal como la considerada, con imágenes binarias perfectas. Como conclusión deducimos la necesidad de considerar mo-

e	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
0	3.966667	3.966666	2.083679	2.083679
5	7.596351	6.412594	3.180444	3.180444
11	3.093205	2.404890	1.626428	1.626428
15	3.128371	2.340688	1.596411	1.596411
30	3.216230	1.701586	1.404316	1.404316
50	9.215978	2.288349	2.115880	2.115880
80	6.630832	1.428520	1.405486	1.405486

Tabla 4.2: Estimadores obtenidos sobre elipses (con elipticidad e).

delos que describen de forma más significativa las propiedades de los rasgos, capturando por ejemplo su estructura geométrica global y local.

El hecho de que un modelo contextual que describe una elipse no posea una propiedad claramente diferenciadora con respecto al modelo contextual que describe espirales, indica que tales modelos son incapaces de capturar información significativa sobre la forma de los rasgos.

En esta línea mostramos a continuación como la reconstrucción de imágenes binarias que contienen espirales o elipses, no depende de manera significativa de una modelización a priori mediante modelos contextuales isotrópicos o no-isotrópicos.

### Reconstrucción.

En un contexto bayesiano, modelando la imagen real como un proceso espacial, la reconstrucción de la imagen se puede obtener calculando como estimador el máximo a posteriori (MAP).

Greg [?] demuestra que para una escena binaria el estimador MAP se puede obtener de manera exacta. El problema es reformulado como un problema de

corte mínimo en una red de capacidades y el algoritmo de etiquetado de Ford-Fulkerson se usa para encontrar la solución.

En la figura 4.10 mostramos el número de puntos mal clasificados que se obtienen al reconstruir una imagen de una elipse, suponiendo un modelo a priori isotrópico en segundo orden y un modelo a priori no-isotrópico en segundo orden. Procedemos a degradar la imagen original y a reconstruir la imagen degradada considerando que los parámetros del modelo asociado a la imagen son los obtenidos mediante pseudo-verosimilitud divididos por un coeficiente. Este proceso es repetido, variando el valor del coeficiente cada vez, con el fin de observar hasta que punto reflejan mejor la estructura intrínseca juegos de parámetros cualesquiera únicamente sujetos a mantener el cociente de las estimaciones en primer y segundo orden. No se observa una diferencia significativa entre las reconstrucciones realizadas bajo un modelo isotrópico en segundo orden y las reconstrucciones obtenidas usando un modelo no-isotrópico en segundo orden.

En la figura 4.11 presentamos los resultados obtenidos al reconstruir una imagen que contiene un brazo espiral logarítmico. Al igual que en caso anterior tampoco se aprecian diferencias significativas al emplear modelos distintos.

En las figuras 4.12 y 4.13 mostramos los resultados (en términos del número de píxeles mal clasificados) de la reconstrucción sobre una muestra de imágenes de espirales y otra de elipses. La calidad de la reconstrucción no es sensible de manera significativa a una elección de modelo isotrópico o no-isotrópico.

#### 4.3.2 Modelización y ajuste a la forma.

Nuestro objetivo es la identificación de brazos en una galaxia espiral. En esa línea primero necesitamos extraer una posición inicial  $S$  para el brazo. A partir de ella se intentan otras posiciones mediante la simulación de la distribución  $P(S|Z)$  asociada a la población de los brazos espirales, y que se especifica a continuación.

El mejor ajuste obtenido mediante este proceso determina un buen estimador

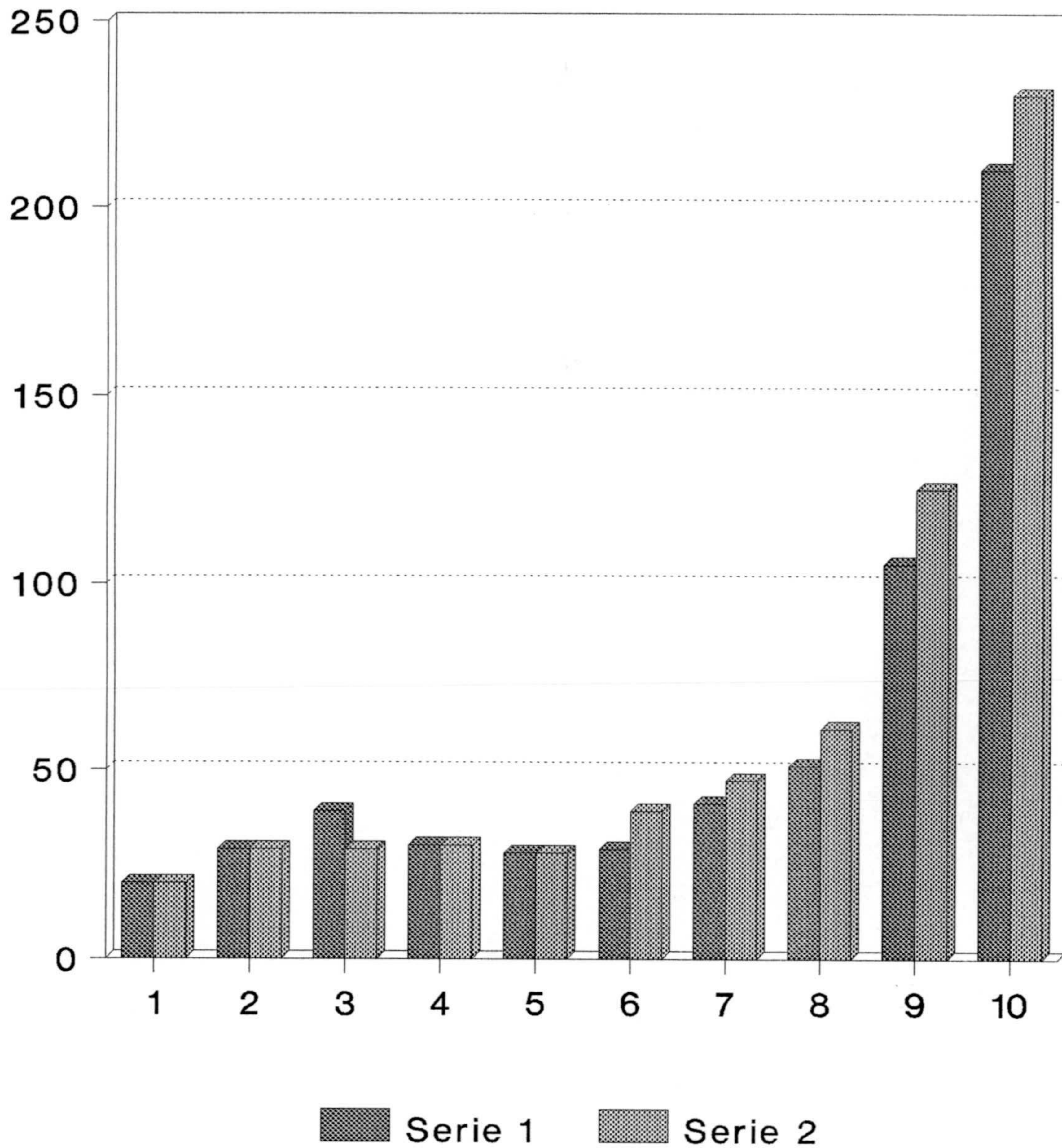


Figura 4.10: Reconstrucción de una elipse degradada por ruido blanco ( $\sigma = 0.2$ ). La serie 1 (serie 2) muestra el número de puntos mal clasificados obtenidos al describir la imagen mediante un modelo isotrópico (respectivamente no-isotrópico) en 2 orden, y cuyos parámetros  $\beta_1 = 3.01, \beta_2 = 2.12, \beta_3 = 2.39, \beta_4 = 2.39$  (respectivamente  $\beta_1 = 2.94, \beta_2 = 2.06, \beta_3 = 1.66, \beta_4 = 1.56$ ) son divididos por el coeficiente mostrado en el eje horizontal.

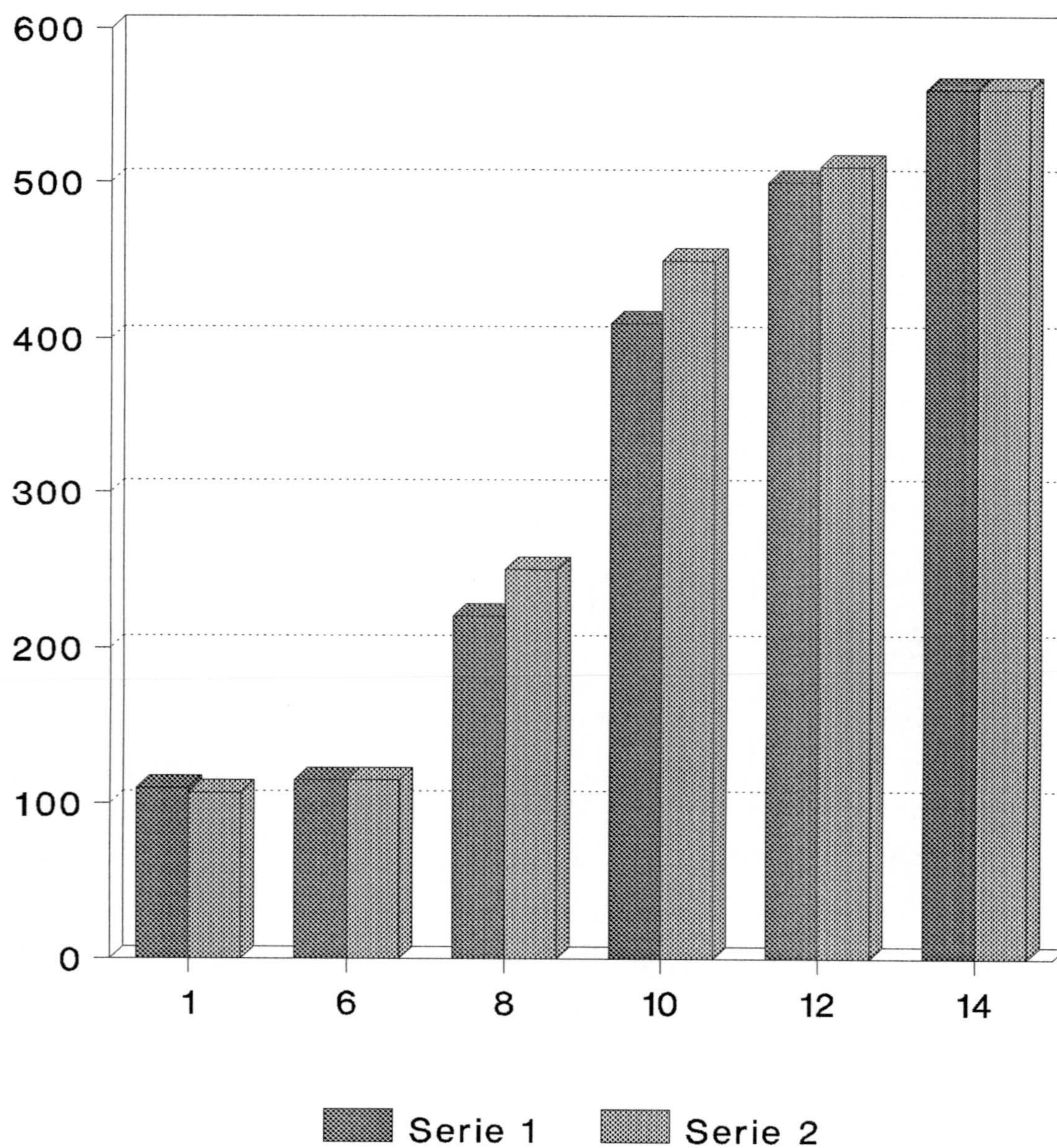


Figura 4.11: Reconstrucción de una espiral degradada por ruido blanco ( $\sigma = 0.2$ ). La serie 1 (serie 2) muestra el número de puntos mal clasificados obtenidos al describir la imagen mediante un modelo no-isotrópico (respectivamente isotrópico) en 2 orden, y cuyos parámetros  $\beta_1 = 2.42, \beta_2 = 2.46, \beta_3 = 1.52, \beta_4 = 1.56$  (respectivamente  $\beta_1 = 1.29, \beta_2 = 1.91, \beta_3 = 1.69, \beta_4 = 1.69$ ) son divididos por el coeficiente mostrado en el eje horizontal.



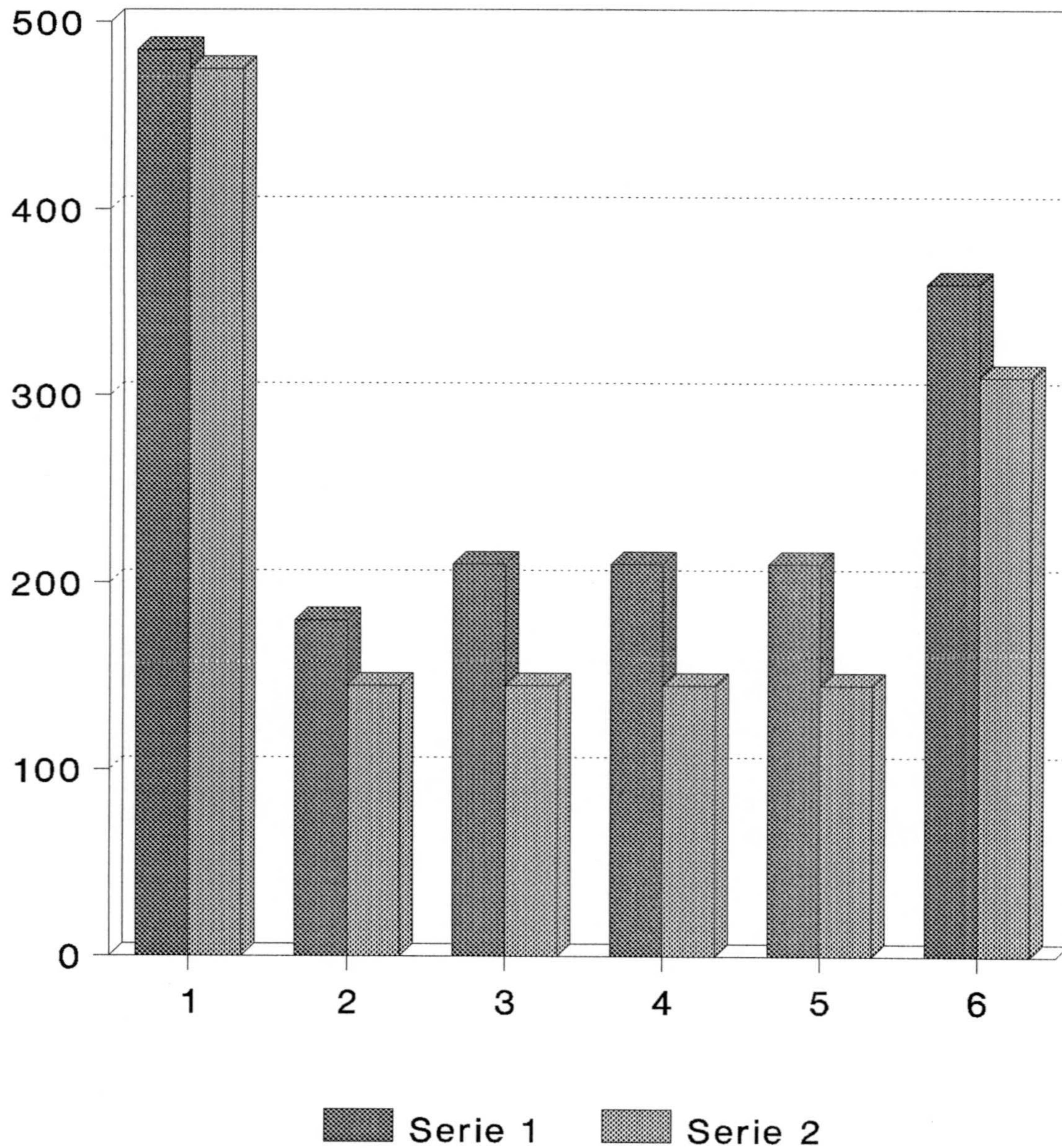


Figura 4.12: La serie 1 (serie 2) muestra el número de píxeles mal clasificados que se obtienen al reconstruir seis imágenes de espirales considerando un modelo a priori para la forma isotrópico (respectivamente no-isotrópico) en 2 orden.

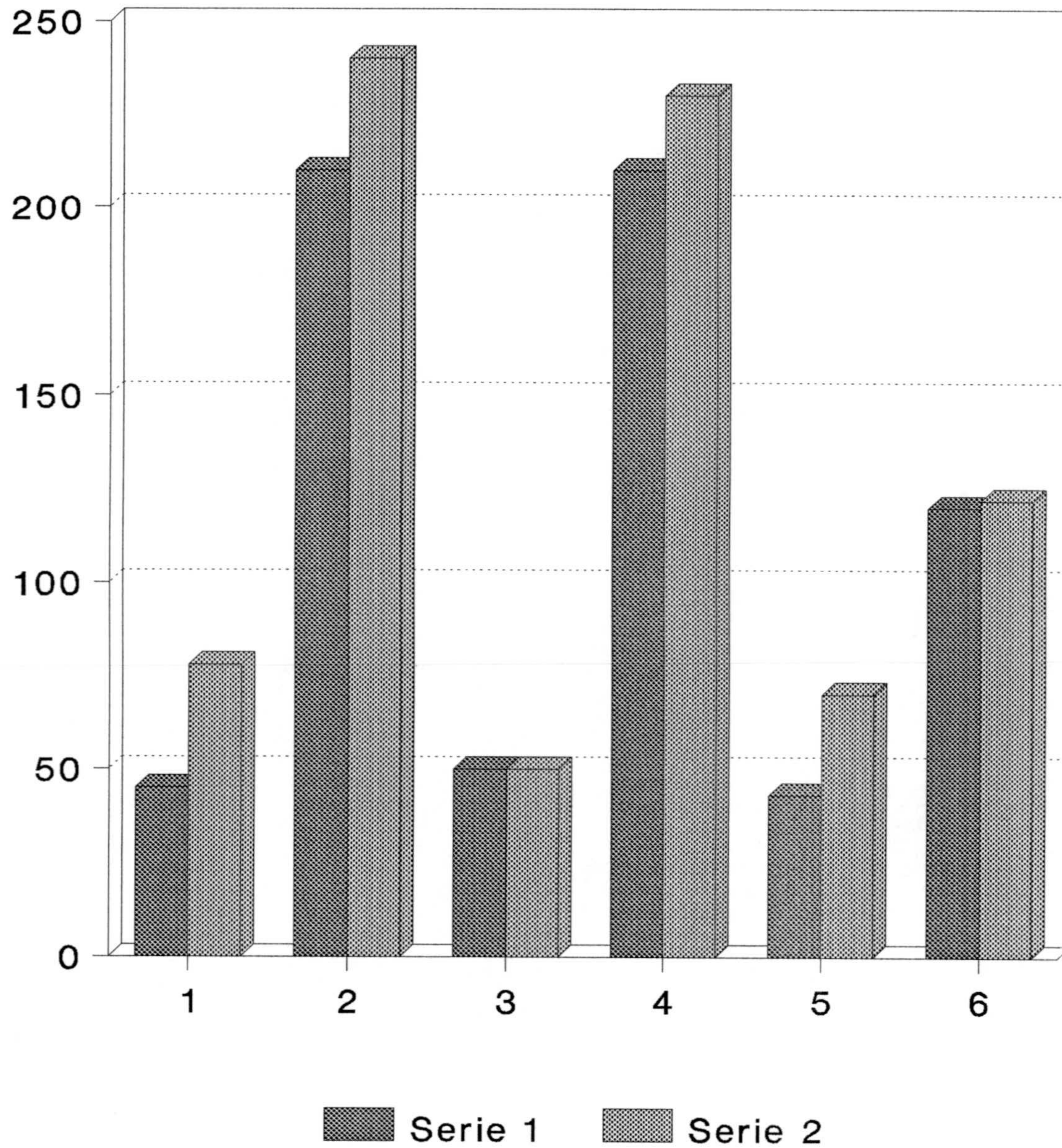


Figura 4.13: La serie 1 (serie 2) muestra el número de píxeles mal clasificados que se obtienen al reconstruir seis imágenes de elipses considerando un modelo a priori para la forma isotrópico (respectivamente no-isotrópico) en 2 orden.

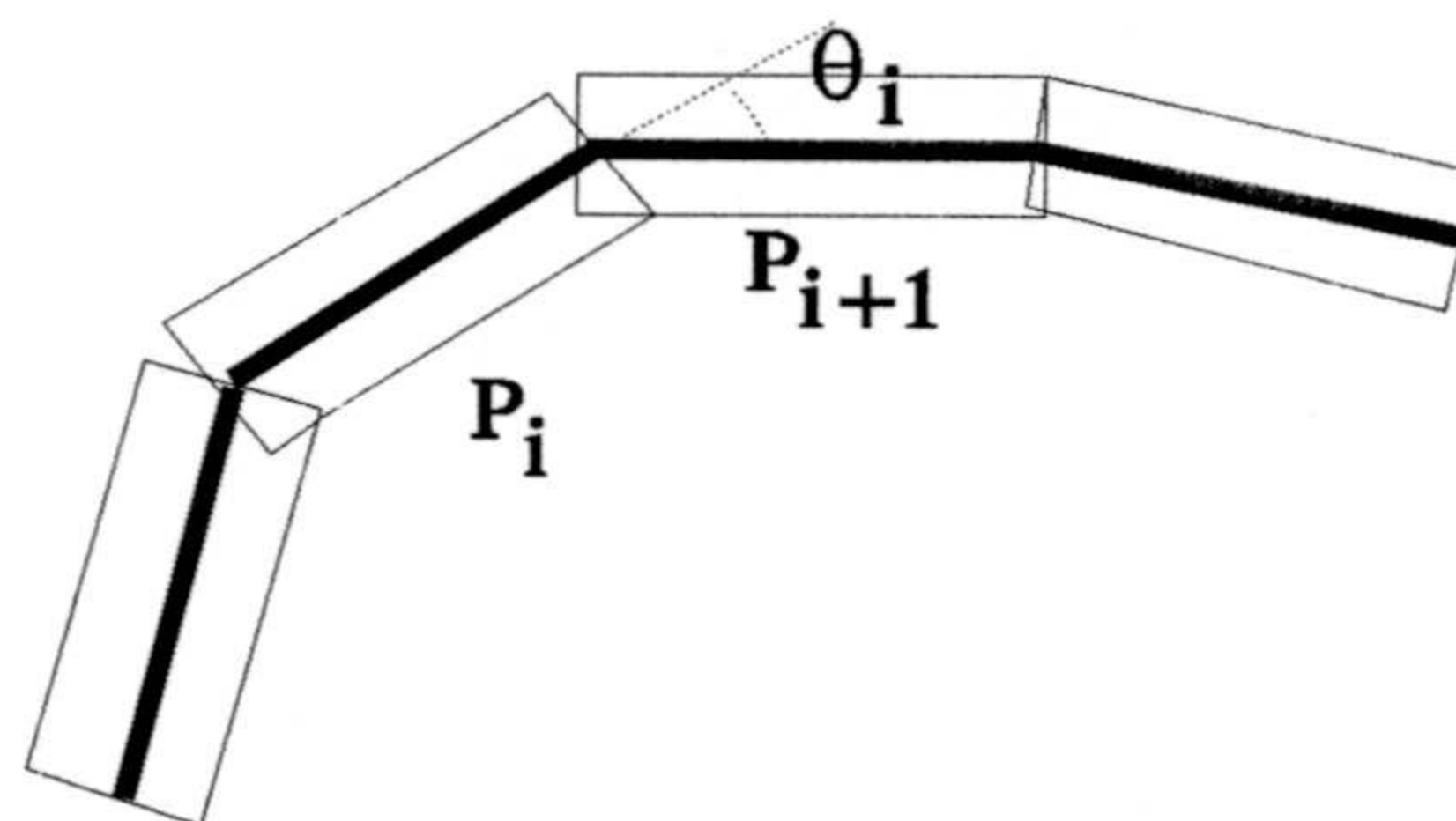
para el brazo en la forma ya que la posición inicial del brazo captura su geometría global, y en general el proceso de simulación permite capturar sus características locales mas significadas.

### Modelo usado en la descripción del rasgo.

En la sección 4.3.1 de esta memoria, la descripción de brazos se realizó mediante el uso de modelos contextuales (campos aleatorios markovianos), pero los resultados obtenidos mostraron la necesidad de considerar una descripción mas geométrica de estos rasgos.

Como consecuencia se ha elegido para modelar brazos espirales un proceso estocástico espacial que determina un ejemplo del modelo global de la forma desarrollado por Grenander [37], y que se describe en el capítulo 2 de la presente memoria.

La siguiente figura muestra gráficamente el modelo de brazo espiral aquí considerado:



En este modelo un brazo espiral se describe como una secuencia finita de sectores con longitud y anchura fijas, unidos formando ángulos que notamos por  $\theta_i$  y donde el sector inicial comienza al final de la barra cuando este rasgo aparece en la forma. Luego este modelo se formula como el vector

$$(n; \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

donde  $n$  nota el número de sectores y  $\theta_i$  nota el ángulo entre los sectores  $i$  y  $i + 1$  (notados como  $P_i$  y  $P_{i+1}$ ).

La variable  $\theta_i$ , con  $i = 2, \dots, n - 1$ , condicionada a  $\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_{n-1}$  tiene asociada una distribución normal  $N(s\theta_{i-1}, k_\theta)$  que depende solamente del valor observado en  $\theta_{i-1}$ .

Este modelo induce un modelo a priori basado en descripciones sobre píxeles, que se obtiene asignando una distribución normal a cada segmento de línea según se describe en Ripley [78].

El número  $n$  de sectores del modelo se elige para capturar una parte significativa de la estructura global del rasgo, aunque no capture en toda su longitud el brazo espiral. Luego el número inicial de sectores debe ser suficiente para reflejar la estructura característica de un brazo, además de admitir deformaciones locales.

#### Ajuste por simulación.

La descripción previa del modelo a priori determina la forma funcional de la distribución  $P(S)$ .

El modelo de degradación en este desarrollo, especificado como la distribución  $P(Z|S)$ , asume ruido blanco con varianza  $k$ .

Luego si  $Y$  nota una imagen ideal, y  $Z$  nota la imagen observada, tendremos que  $Z_{ij}$  es  $Y_{ij}$  más ruido aditivo. Así

$$P(Z|S) \propto \exp \left( -\frac{1}{2k} \sum_{\text{píxeles}} (Z_{ij} - Y_{ij})^2 \right).$$

El ajuste final es obtenido por 'simulación iterativa', según se describe en Ripley [78] [77]. En este proceso son generadas realizaciones para la distribución  $P(S|Z)$  según resumimos a continuación.

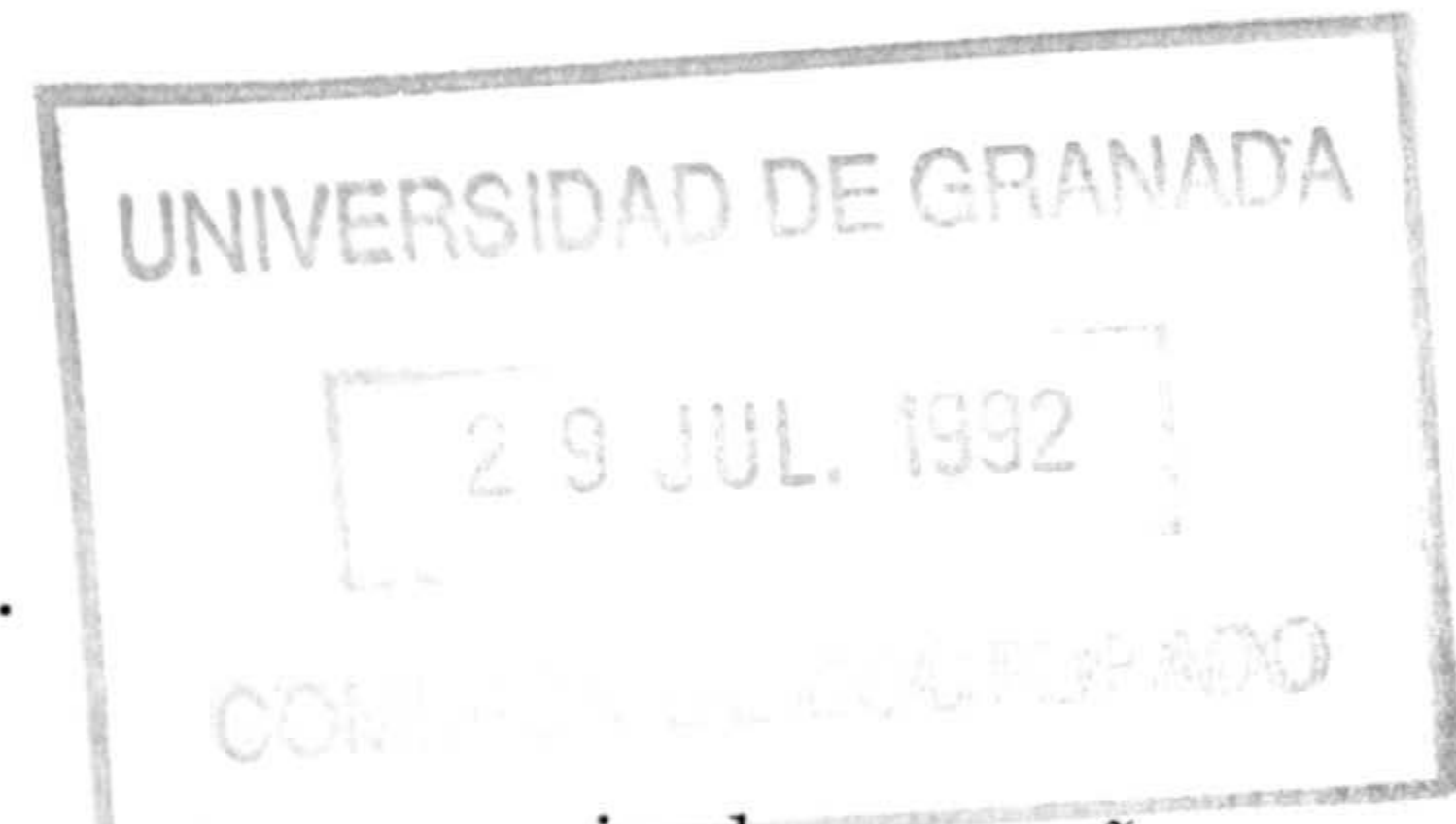
Si consideramos un cambio de  $S$  a  $S'$ , donde un cambio puede corresponder a seleccionar un sector y alterar su orientación (el ángulo  $\theta$  que forma con el sector

anterior), entonces la descripción  $S$  es reemplazada por  $S'$  con probabilidad

$$\min(1, p)$$

donde

$$p = \frac{P(S'|Z)}{P(S|Z)}.$$



La repetición de este proceso permite construir una secuencia de pequeños cambios. Este proceso produce muestras de la distribución  $P(S|Z)$  cuando se incrementa el número de cambios intentados y bajo condiciones adecuadas (simetría en los cambios y posibilidad de alcanzar cualquier realización con una secuencia de pequeños cambios).

### 4.3.3 Solución inicial para el procedimiento de simulación iterativa.

En el proceso de ajuste de un brazo, necesitamos disponer de una posición inicial para el brazo en la imagen, por ejemplo extraída de forma manual. La elección de una posición inicial es crítica en cuanto a la calidad del ajuste final obtenido.

La automatización de la extracción de estos rasgos exige como consecuencia la especificación de procedimientos automáticos para la obtención de soluciones iniciales, capaces de capturar la estructura espiral de los brazos a identificar. Ripley [78] muestra la imposibilidad de usar técnicas de detección de aristas para extraer automáticamente una posición inicial.

En la sección 3.3.3 se ha descrito la caracterización de una galaxia espiral por la identificación de un patrón teórico sobre la curva de curvaturas  $K$ , asociada a un contorno  $C$  que se deforma en la presencia de brazos espirales en la forma. Una de las propiedades analizadas en la sección 3.3.3 es la posibilidad de obtener soluciones iniciales para la posición de los brazos espirales presentes en la forma,

que se especifican mediante la ecuación asociada a la espiral que ajusta el brazo

$$r = \alpha \exp \beta \theta.$$

Esta propiedad nos permite de manera eficiente capturar la estructura espiral de los brazos.

Otra propiedad del procedimiento de caracterización también presentada en la sección 3.3.3 de la presente memoria, es la identificación del signo (positivo o negativo) asociado a la curvatura de los brazos espirales identificados. Luego además de poder capturar la estructura espiral de los brazos, será posible determinar si estos poseen curvatura positiva o negativa.

En este desarrollo una solución inicial, que pretende capturar tan solo la estructura global del brazo, se describe mediante un número finito de sectores con longitud y anchura fijas, que se unen entre si determinando angulos que poseen la siguiente propiedad

$$\theta_i = s\theta_{i-1}, \text{ con } i = 2, \dots, n - 1. \quad (4.5)$$

y donde no consideramos temporalmente las variaciones locales que se pueden presentar.

A partir de las ecuaciones para las soluciones iniciales (obtenidas según se describe en la sección 3.3.3 de la presente memoria)

$$r = \alpha \exp \beta \theta \quad (4.6)$$

se inducen los modelos de vectores aquí considerados y que determinan posiciones iniciales para brazos en la forma.

Con este objetivo se extrae desde la espiral con ecuación 4.6 una muestra de  $n + 1$  puntos

$$(x_0^t, \dots, x_n^t)^t$$

donde

$$d(x_i, x_{i+1}) = r$$

con  $i = 0, \dots, n - 1$ . Es decir  $x_0, \dots, x_n$  determinan una secuencia de puntos sobre la espiral ajustada, donde cada punto de esta secuencia se encuentra a igual distancia del punto anterior y del punto siguiente en la secuencia (cuando existen). En los experimentos realizados se ha fijado el valor de  $n$  a 15, ya que este valor permite capturar la estructura espiral sin incrementar de forma excesiva el coste computacional que implica el tratamiento del brazo (ajuste por simulación iterativa).

La longitud de los sectores del modelo de vector inducido coincide con el valor  $r$ , es decir con la distancia entre dos puntos consecutivos de la muestra.

Si notamos por  $\omega$  el vector

$$\omega = (\omega_1^t, \dots, \omega_n^t)^t$$

donde

$$\omega_i = x_i - x_{i-1}$$

entonces los ángulos que forman entre sí los sectores del vector inducido se definen como

$$\theta_i = \arctan \frac{\omega_i^1}{\omega_i^0} - \arctan \frac{\omega_{i+1}^1}{\omega_{i+1}^0}, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

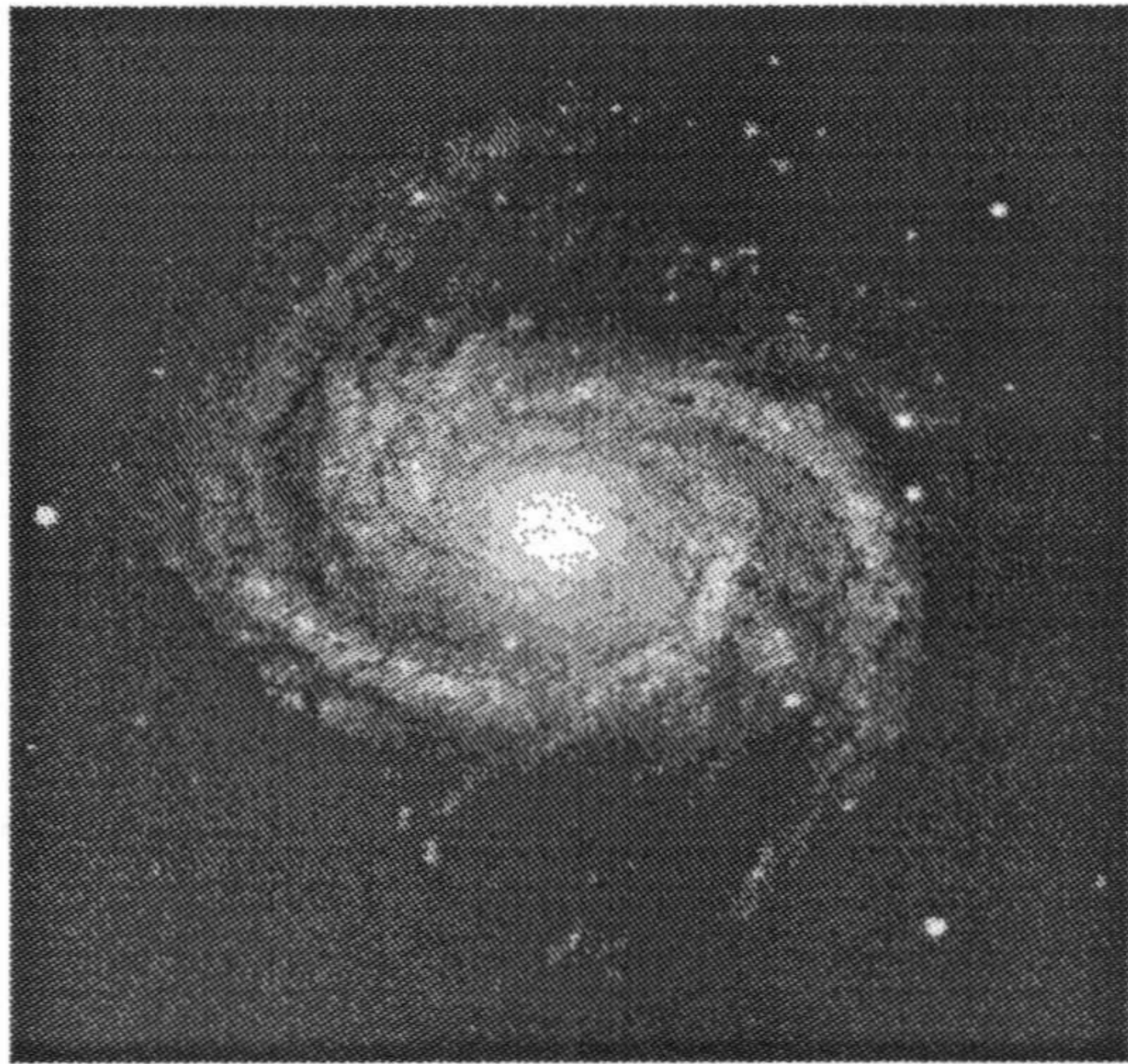
donde  $\omega_i = (\omega_i^0, \omega_i^1)^t$ . Una vez especificados los valores asociados a las variables  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ , el valor del parámetro  $s$  (velocidad de cambio de ángulo entre sectores sucesivos) se obtiene a partir del sistema de ecuaciones 4.5.

El valor de la anchura de los sectores se elige en función del tamaño de la galaxia.

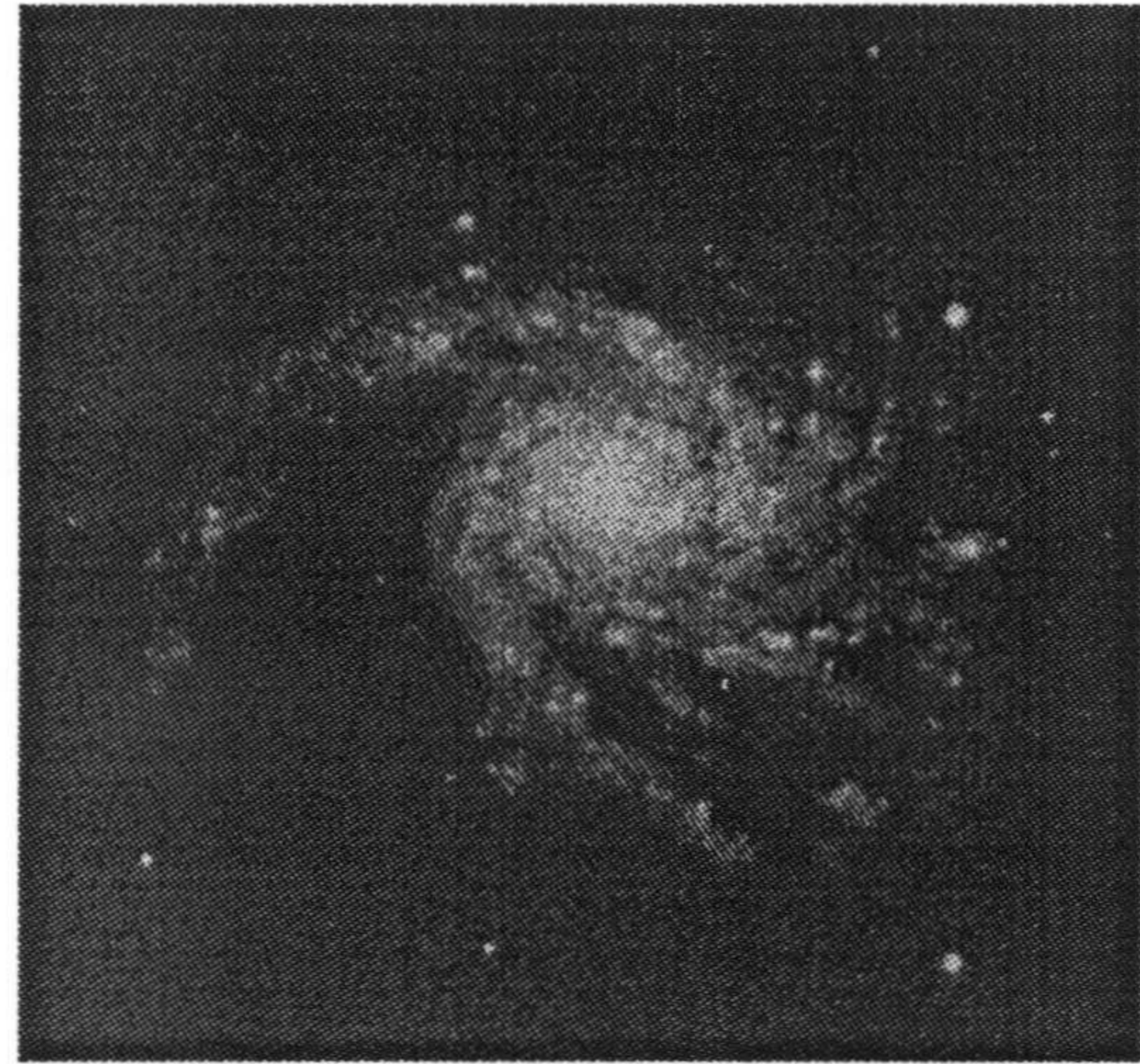
La figura 4.14 muestra soluciones iniciales obtenidas usando este método.

#### 4.3.4 Extracción en su totalidad del rasgo brazo.

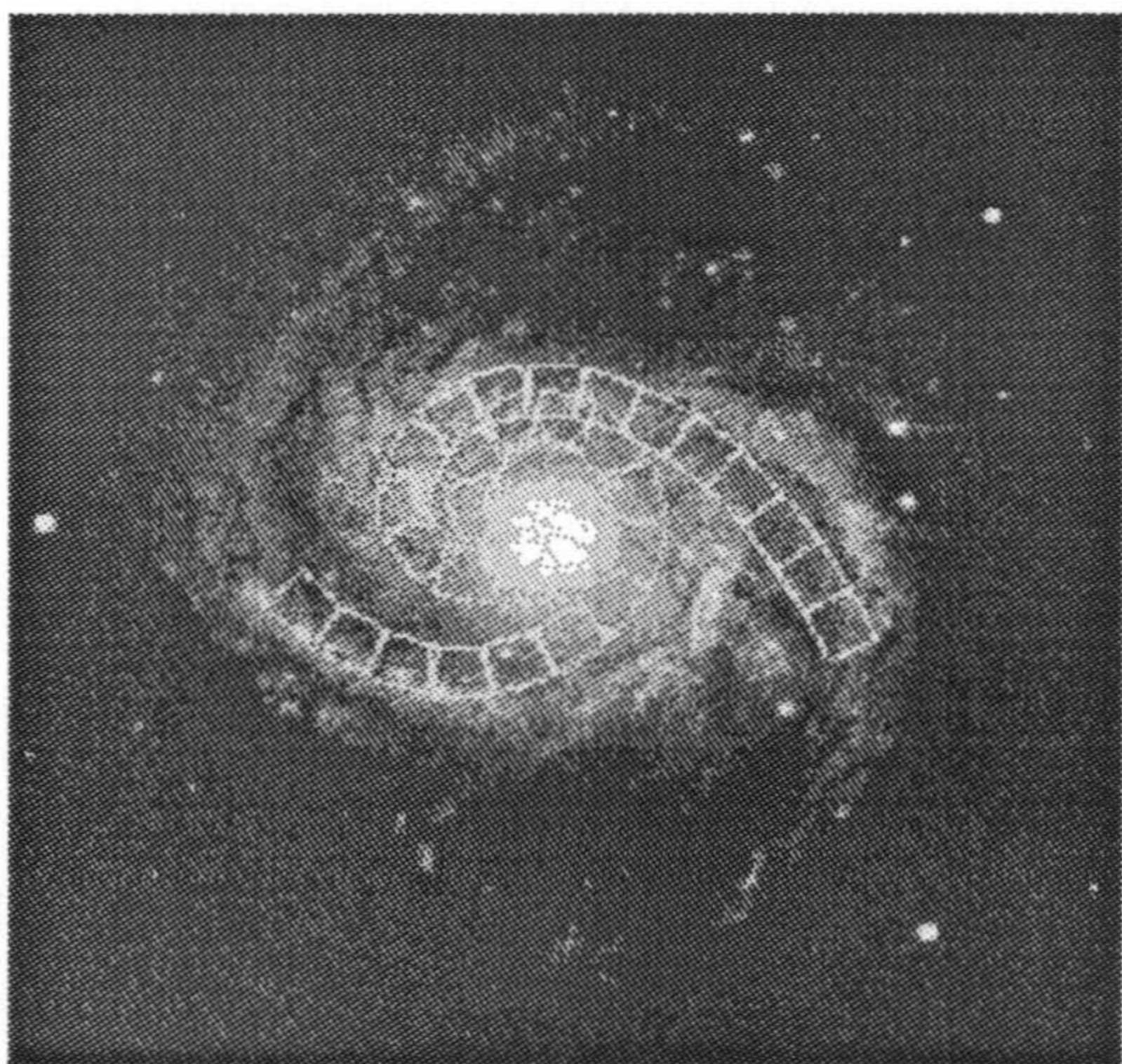
El número  $n$  de sectores que ajustan inicialmente el brazo, se elige de forma que sea posible construir un patrón susceptible de representar la estructura global del rasgo. Y en general aunque este patrón captura una parte significativa del brazo, no lo hace en su totalidad.



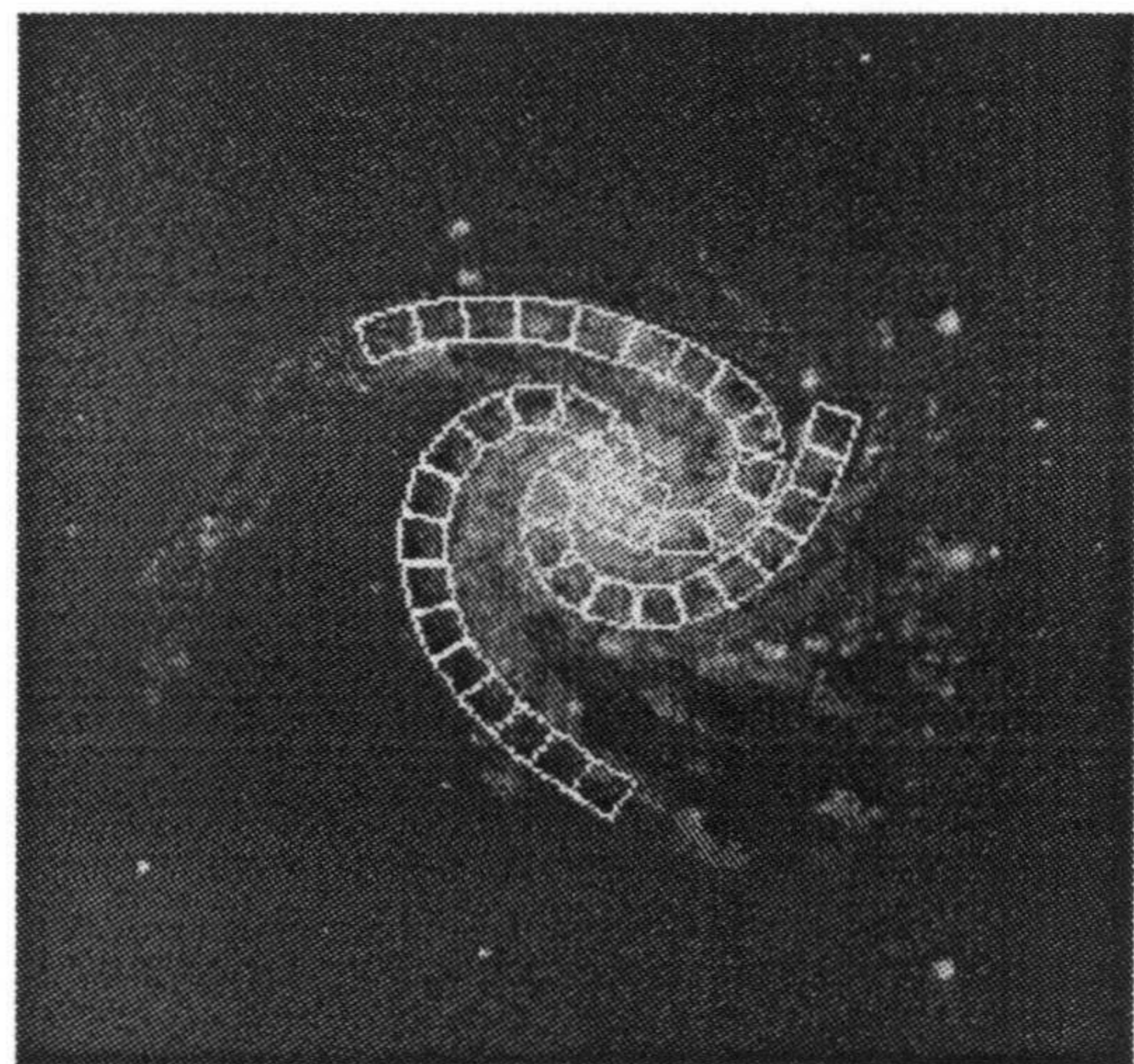
A



B



C



D

Figura 4.14: Soluciones iniciales para el rasgo brazo extraídas de forma automática.



Como consecuencia la extracción en su totalidad del brazo exige la aplicación, sobre el patrón inicialmente ajustado, de un procedimiento de adición de nuevos sectores que mantienen la misma estructura espiral y que se detiene al satisfacer una determinada condición de parada.

En el desarrollo que sigue y en primer lugar describimos el procedimiento de adición de nuevos sectores rectangulares al patrón inicial, y especificamos el criterio estadístico empleado en la detención de este procedimiento.

En segundo lugar mostramos los resultados de la aplicación de esta metodología sobre una muestra de galaxias espirales.

#### **Extracción en su totalidad del rasgo brazo.**

En este desarrollo suponemos que como resultado de la aplicación del procedimiento antes descrito, hemos obtenido un ajuste parcial a un brazo espiral usando un patrón con  $N$  sectores, notados por  $P_1, \dots, P_N$ .

Este patrón se especifica en términos del vector  $(N; \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$  donde  $\theta_i$  determina el ángulo entre los sectores  $P_i$  y  $P_{i+1}$ .

Los sectores del patrón capturan la estructura global del brazo espiral, propiedad que se reformula en términos de la siguiente propiedad sobre los ángulos  $\theta_1, \dots, \theta_{N-1}$  que forman los sectores entre sí:

$$\theta_{i+1} = s^i \theta_1, \quad i = 1, \dots, N - 2 \quad (4.7)$$

donde el parámetro  $s$  controla la velocidad de cambio de los ángulos entre sectores consecutivos. Este parámetro toma valores en el intervalo  $[0,1]$  próximos a 0.8 (cuando  $s = 0$  y  $s = 1$  la ecuación 4.7 determina una línea recta y un círculo respectivamente).

A partir de este patrón inicial, el procedimiento que extrae en su totalidad el brazo procede a añadir nuevos sectores en el extremo del patrón hasta satisfacer la condición de parada que se especifica a continuación.

El procedimiento de adición es un procedimiento iterativo que selecciona en

cada iteración un nuevo sector rectangular, notado por  $P_{N^*+1}$ , candidato a ser añadido al patrón formado por  $N^*$  sectores (donde  $N^* \geq N$ ), notados  $P_1, \dots, P_{N^*}$ .

El sector candidato  $P_{N^*+1}$  tiene la misma longitud y anchura de los sectores  $P_1, \dots, P_{N^*}$ . Además  $P_{N^*+1}$  debe de respetar la geometría global del patrón, propiedad que se formula en términos de la ecuación

$$\theta_{N^*} = s^{N^*-1} \theta_1. \quad (4.8)$$

El valor del ángulo  $\theta_{N^*}$ , que determinan entre sí el último sector del patrón ajustado hasta el momento ( $P_{N^*}$ ) y el candidato a ser añadido ( $P_{N^*+1}$ ), se obtiene entonces desde la ecuación 4.8.

La adicción secuencial al patrón de nuevos sectores se produce mientras que no se satisface la condición de parada que se especifica a continuación.

#### Criterio de parada del proceso de adición de nuevos sectores.

Notemos por  $\sigma_0^2$  el valor de la varianza entre el patrón teórico inicial con  $N$  sectores  $P_1, \dots, P_N$  y la imagen observada, es decir

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{|P_1| + \dots + |P_N|} \sum_{\substack{(i,j) \in P_l \\ l = 1, \dots, N}} (x_{(i,j)}^G - x_{(i,j)}^T)^2$$

donde  $|P_l|$  nota el número de píxeles en el sector  $P_l$ ,  $x_{i,j}^G$  nota el nivel de gris observado sobre la imagen en el pixel  $(i, j)$  y  $x_{i,j}^T$  es el nivel de gris teórico sobre el pixel  $(i, j)$  que se obtiene al asignar una distribución normal cilíndrica a cada sector.

El patrón que ajusta el brazo pasa de estar constituido por los  $N^*$  sectores  $P_1, \dots, P_{N^*}$  a estar constituido por los  $N^* + 1$  sectores  $P_1, \dots, P_{N^*}, P_{N^*+1}$  (luego el nuevo sector rectangular  $P_{N^*+1}$  es añadido al patrón brazo) si para la varianza muestral  $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{|P_{N^*+1}|} \sum_{(i,j) \in P_{N^*+1}} (x_{(i,j)}^G - x_{(i,j)}^T)^2$$

calculada sobre  $P_{N^{*}+1}$ , se acepta con un nivel alto de confianza la hipótesis  $H_0$  del contraste

$$H_0 : \hat{\sigma}^2 \leq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \hat{\sigma}^2 > \sigma_0^2$$

Luego el nuevo sector rectangular  $P_{N^{*}+1}$  no se añade al patrón  $P_1, \dots, P_{N^*}$  y finaliza la adición de nuevos sectores, si la varianza observada sobre  $P_{N^{*}+1}$  es significativamente mayor que la varianza  $\sigma_0^2$  observada sobre los  $N$  sectores del patrón brazo inicialmente ajustado.

La figura 4.15 muestra los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento de alargamiento.

## 4.4 Caracterización final.

La aplicación de alguna de las técnicas presentadas en el capítulo 3 de la presente memoria, permite caracterizar una galaxia como espiral o elíptica.

Este conocimiento sobre la clase general a la que pertenece la galaxia y la automatización del proceso de extracción de rasgos descrita en este capítulo, permite abordar la automatización del proceso de caracterización final de una galaxia.

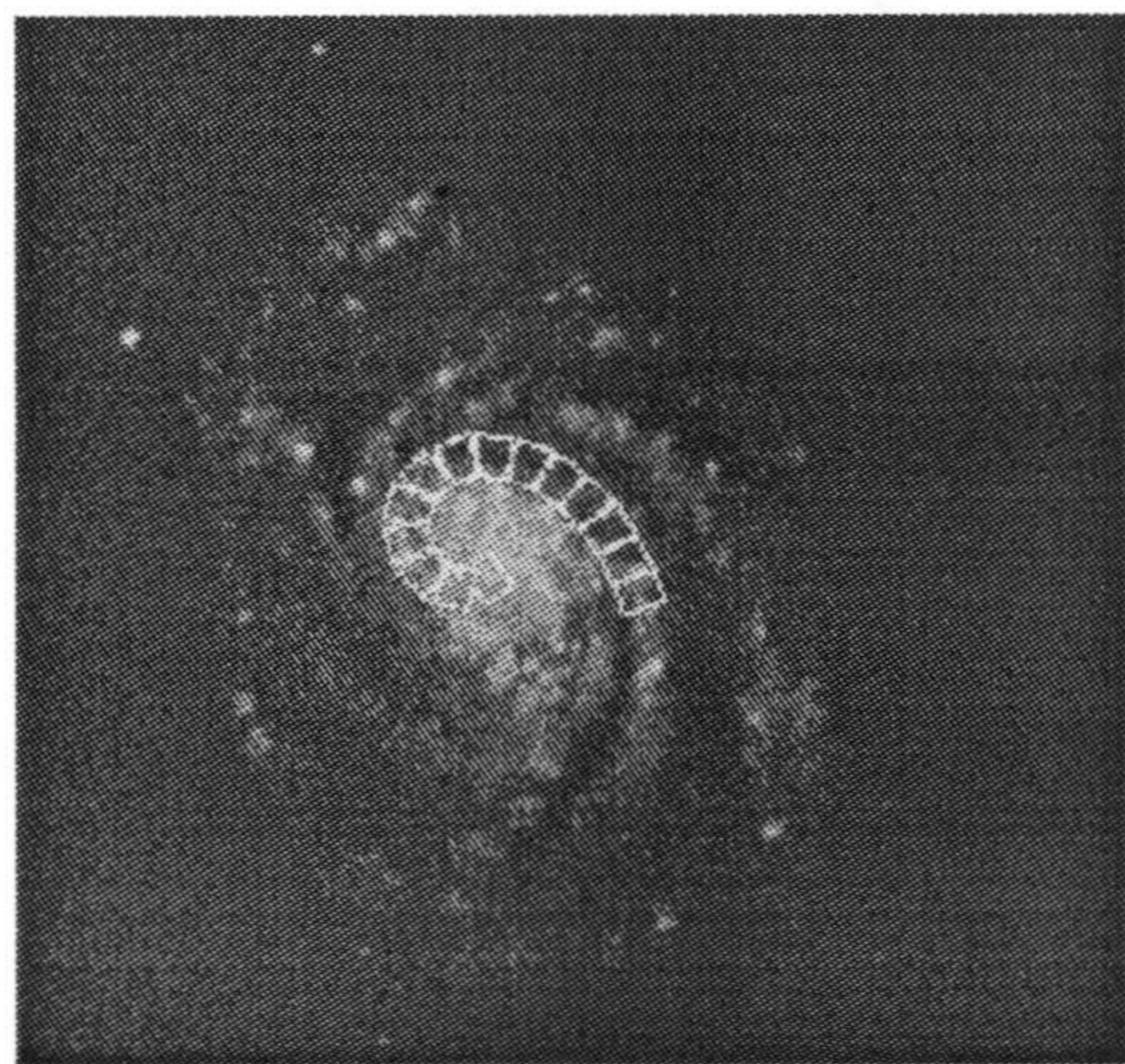
En el desarrollo que sigue analizamos, en primer lugar, hasta que punto es posible automatizar la caracterización final de galaxias elípticas.

En segundo lugar se describe cuanto de automatización se puede alcanzar en la caracterización final de galaxias espirales, usando el conocimiento extraído sobre ellas.

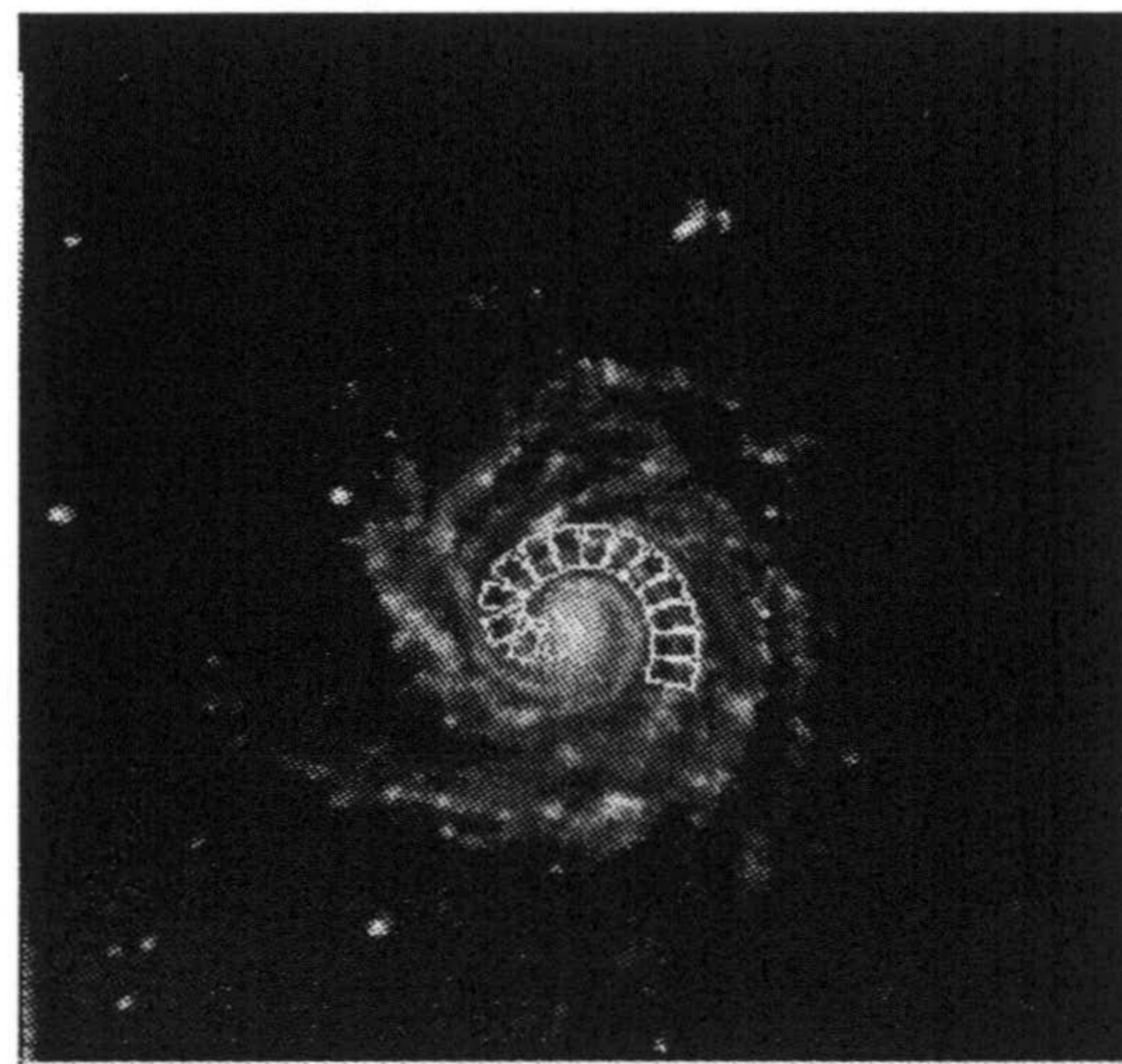
### 4.4.1 Caracterización final de galaxias elípticas.

Una galaxia caracterizada inicialmente como elíptica pertenece a alguna de las subclases

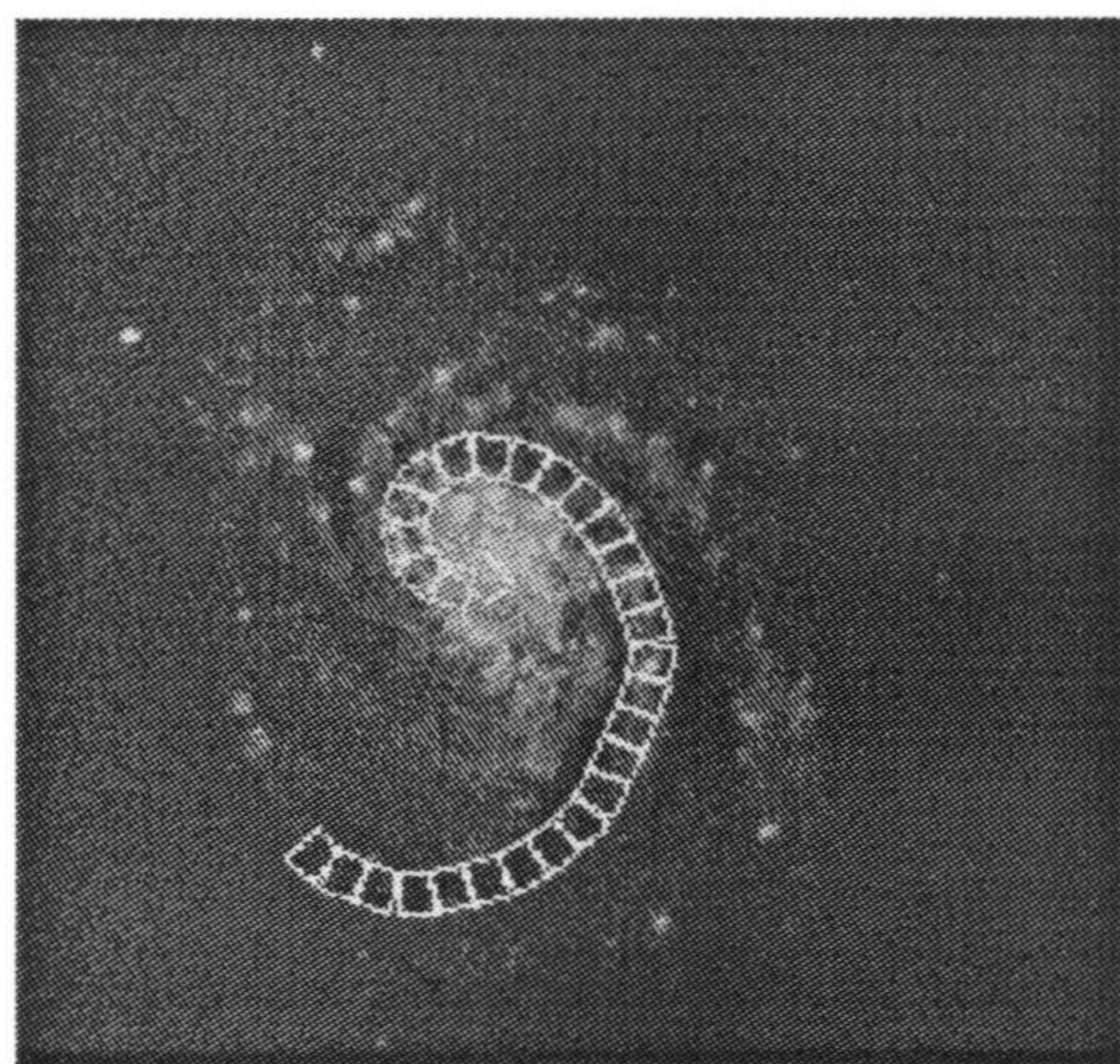
$$E_\eta, \text{ con } \eta = 0, 1, \dots, 7$$



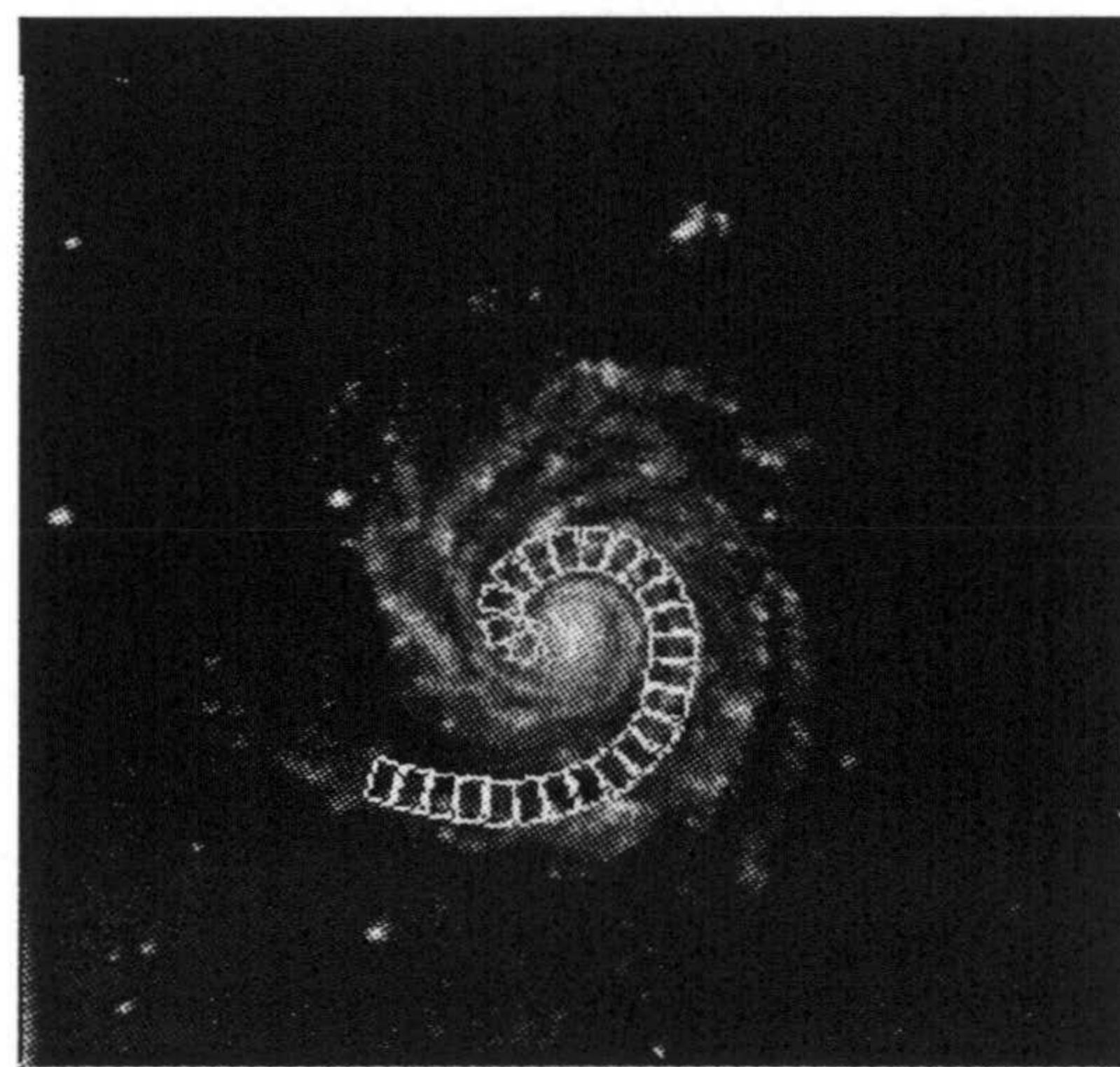
A



B



C



D

Figura 4.15: (A) y (B) muestran el ajuste parcial obtenido para los brazos. (C) y (D) muestran la aplicación del procedimiento de alargamiento sobre (A) y (B).

donde  $\eta$  se determina multiplicando por 10 la elípticidad de la galaxia.

Como consecuencia podemos concluir que la caracterización final de la galaxia elíptica se realiza de acuerdo al grado de elípticidad que presenta la forma. Así una galaxia con forma circular pertenece a la subclase  $E_0$ , mientras que una galaxia elíptica con el grado de elipticidad mayor que es posible observar pertenece a la subclase  $E_7$ .

El modelo de representación de la forma usado para la caracterización final de una galaxia elíptica, ha sido obtenido en el proceso de reducción de información (contenida en la imagen inicial) desarrollado en el capítulo anterior. Este modelo de representación es el contorno  $C$  extraído sobre la imagen segmentada en cuatro clases, y su uso frente a la imagen inicial se justifica por razones de eficiencia computacional. Este modelo es adecuado ya que determina una buena aproximación a la forma de la galaxia, reflejando de una forma robusta la elipticidad presente.

Si la elipticidad de la galaxia se estima como la elipticidad  $e$  de un contorno  $C$  extraído sobre ella, el cálculo del parámetro  $e$  para  $C$  determina la pertenencia de la galaxia a una subclase específica  $E_{\eta^*}$ .

La frontera entre las clases 2 y 3 de la imagen segmentada (el contorno  $C$ ) refleja la forma elíptica de la galaxia y el grado de elipticidad asociado. Pero el contorno  $C$  no determina una elipse ajustable analíticamente, puesto que en general es una curva plana altamente ruidosa (ver figura 3.12), luego el cálculo directo sobre ella del grado de elipticidad  $e$  podría producir valores erróneos.

Una primera solución para este problema, exige un complicado preprocesamiento del contorno  $C$  tendente al alisamiento de  $C$  (la eliminación del ruido) convolucionando para ello  $C$  con un kernel gaussiano adecuado

$$g(t, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}$$

en donde hay que determinar el nivel de alisamiento  $\sigma$  que debe ser usado para eliminar los puntos de inflexión que aparecen en  $C$ , sin llegar a producir un

alisamiento excesivo de la curva.

El excesivo coste que implica esta primera aproximación nos obliga a considerar una solución alternativa que permita conocer con exactitud la elipticidad de la elipse subyacente en  $C$ .

#### Cálculo de la elipticidad asociada a $C$ .

En este desarrollo la elipticidad  $e$  del contorno  $C$  se identifica con la elipticidad asociada a la elipse que mejor aproxima a la curva plana (y posiblemente ruidosa)  $C$ .

La elipse  $E$  que aproxima el contorno  $C$ , notada  $E_{(a^*, b^*, \theta^*)}$ , se obtiene según se describió en la sección 3.3.2 de la presente memoria. La elipse  $E_{(a^*, b^*, \theta^*)}$  tiene de eje mayor  $a^*$ , de eje menor  $b^*$  y el eje mayor forma un ángulo  $\theta^*$  con la horizontal.

La elipticidad  $e$  asociada al contorno  $C$  se define entonces como la elipticidad de su aproximación elíptica, es decir como

$$e = 1 - \frac{b^*}{a^*}$$

donde  $b^*$  y  $a^*$  determinan el eje menor y el eje mayor de la elipse  $E_{(a^*, b^*, \theta^*)}$ .

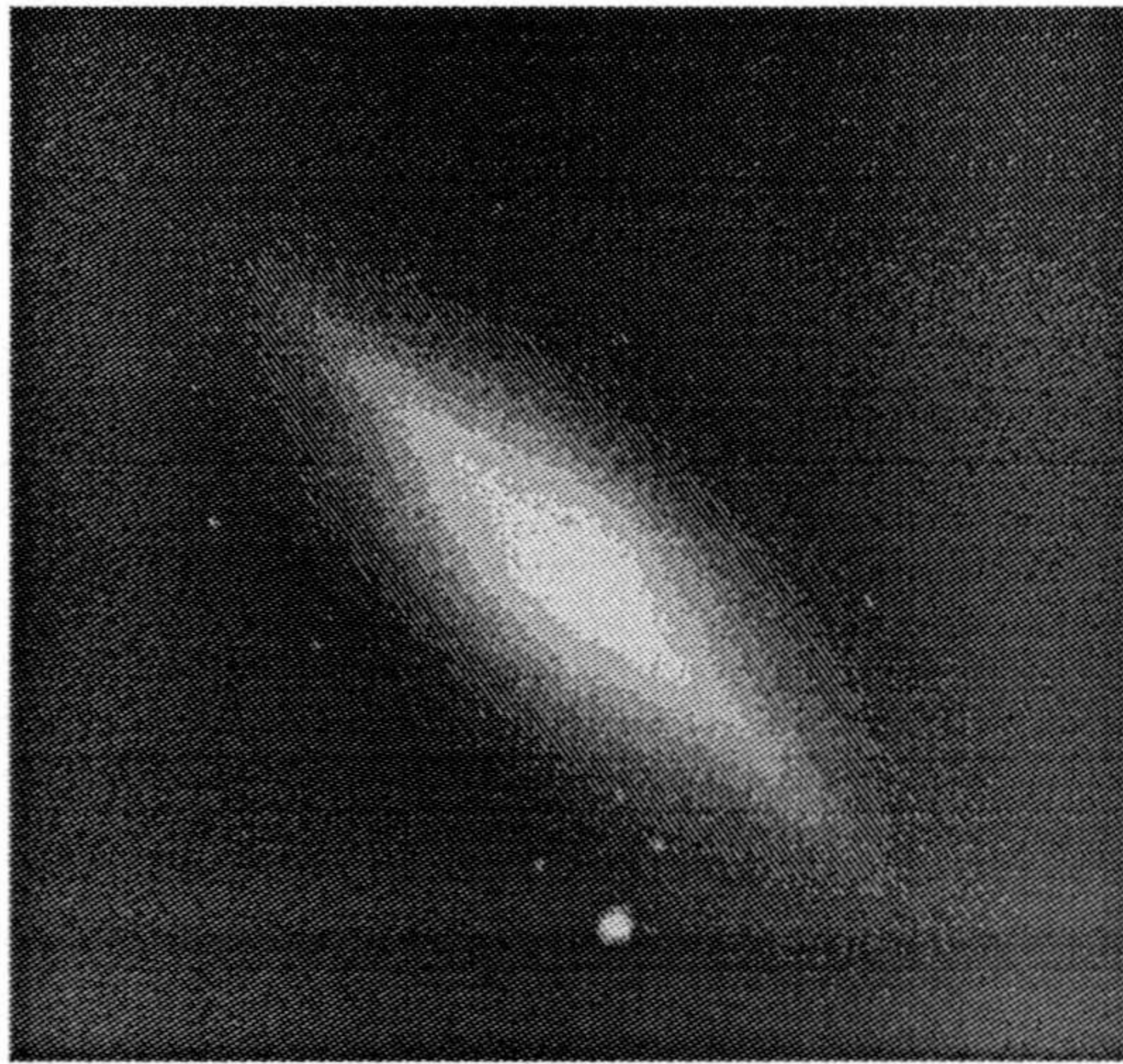
Una vez conocido el valor del parámetro  $e$  asociado a  $C$ , podemos ya caracterizar la galaxia elíptica, sobre cuya imagen ha sido extraída  $C$ , como perteneciente a la subclase de galaxias elípticas  $E_{\eta^*}$ , con  $\eta^* \in \{0, 1, \dots, 7\}$ , si verifica que

$$|10 * e - \eta^*| = \min_{\eta=0, \dots, 7} |10 * e - \eta|$$

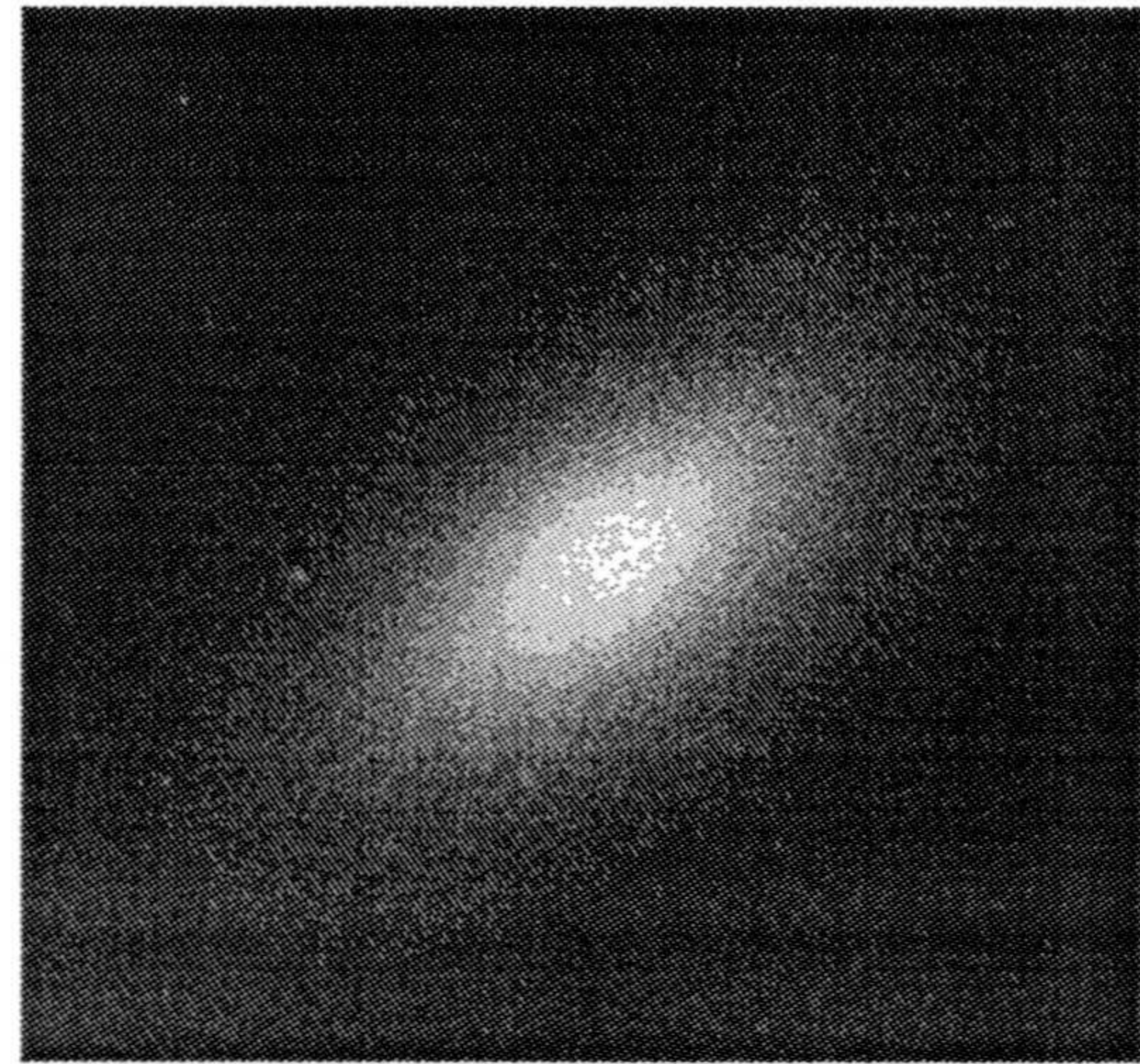
Algunos ejemplos de la caracterización final aquí desarrollada son mostrados en la figura 4.16.

#### 4.4.2 Caracterización final de galaxias espirales.

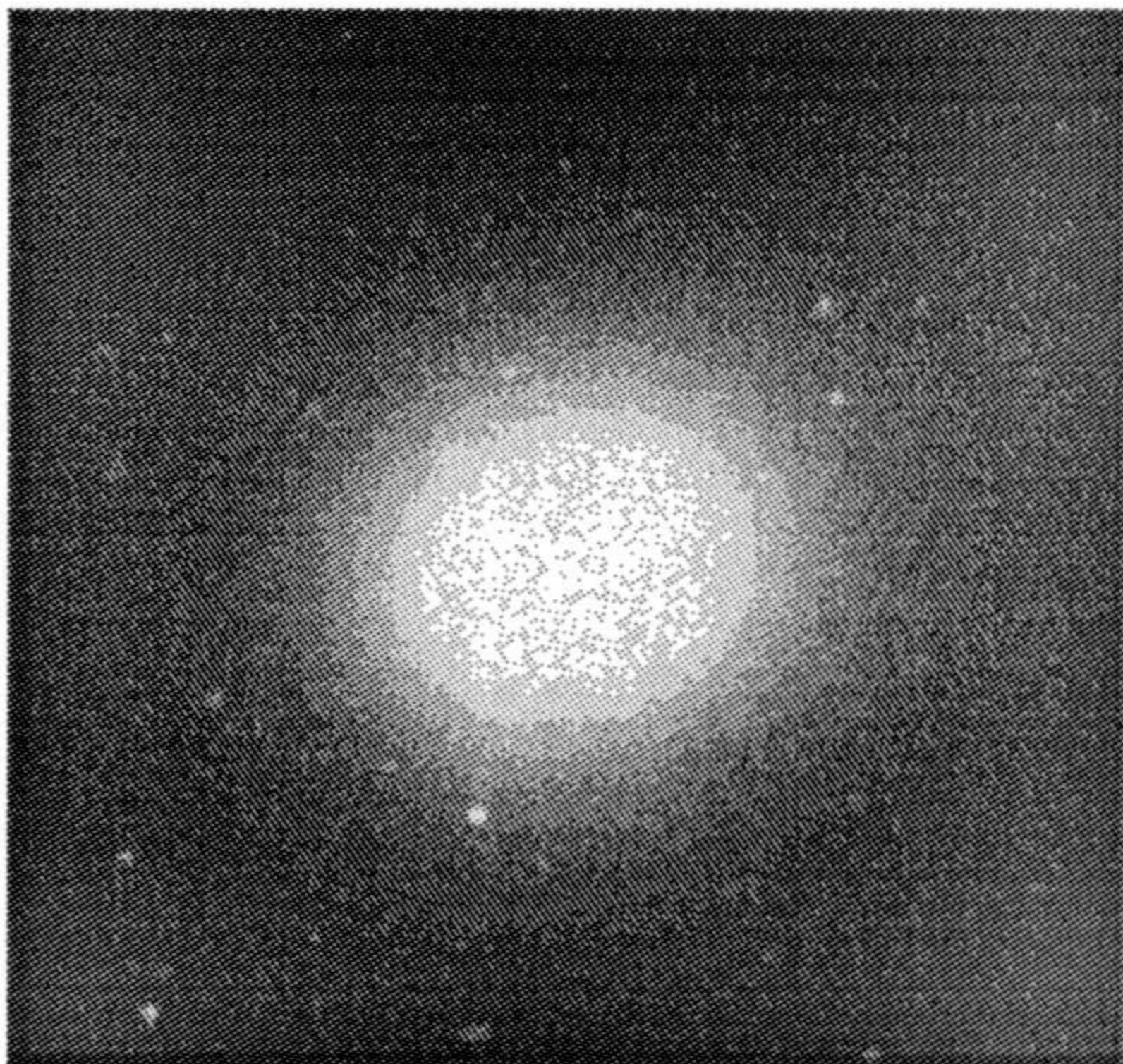
La extracción automática de los rasgos barra y brazo, permite automatizar la obtención de un modelo teórico para la forma de la galaxia.



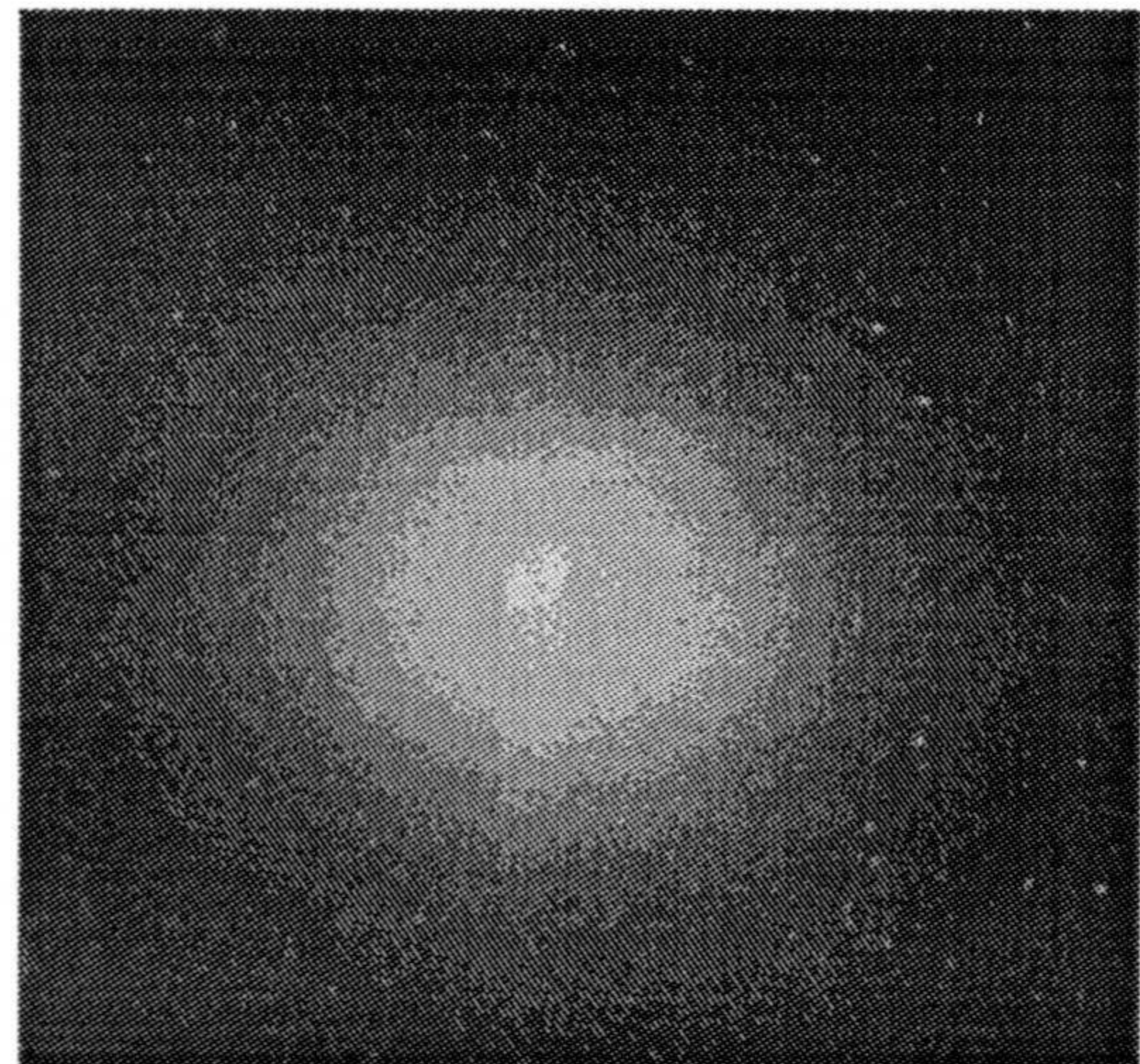
A



B



C



D

Figura 4.16: Resultados del procedimiento de clasificación final: (A) NGC-3115 es clasificada como E7. (B) NGC-3377 es clasificada como E6. (C) NGC-4278 es clasificada como E1. (D) NGC-4486 es clasificada como E0.

Además la identificación automática del rasgo barra (descrita en la sección 4.3) determina automáticamente la pertenencia de la galaxia a la clase de espirales barradas (SB). En otro caso (no se identifica el rasgo barra en la forma) la galaxia espiral se clasifica como no-barrada (S).

La extracción de los brazos espirales (descrita en la sección 4.4) y su posterior análisis permite mejorar la clasificación final de la galaxia.

Así podemos considerar dos situaciones alternativas:

- (1) El modelo de brazo que se ajusta a la galaxia

$$(n; \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

verifica que

$$\theta_i = \theta_{i+1} + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n - 2$$

donde  $\varepsilon$  nota un valor muy próximo a cero. Luego deducimos que la velocidad de cambio de curvatura del brazo ajustado es constante ( $v = cte$ ).

En este caso y de acuerdo al sistema de clasificación descrito en el capítulo 1 de la presente memoria, podemos afirmar que

- (1.1) si la galaxia es barrada (SB), dado que  $v = cte$  tendremos que la galaxia pertenece a la subclase (SBb),
- (1.2) si la galaxia no es barrada (S), puesto que  $v = cte$  la galaxia pertenece a la subclase (Sc).

- (2) El modelo de brazo ajustado

$$(n; \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

verifica que los ángulos formados entre sectores consecutivos no son aproximadamente iguales. Como consecuencia la velocidad de cambio de curvatura sobre el brazo ajustado no es constante ( $v \neq cte$ ). En este segundo caso podemos concluir que



- (2.1) si la galaxia es barrada (SB), dado que  $v \neq cte$  tendremos que pertenece a la subclase (SBc),
- (2.2) si la galaxia no es barrada (S), puesto que  $v \neq cte$  la galaxia pertenece a la subclase (Sa) ó a la subclase (Sb).

## 4.5 Analisis de los resultados obtenidos.

La tabla 4.3 muestra los resultados de la aplicación del sistema automático de clasificación aquí descrito sobre una muestra de galaxias. Además esta tabla nos permite comparar la clase correspondiente a la galaxia de acuerdo al procedimiento automático de clasificación y la clase verdadera a la que pertenece la galaxia. Los hechos mas destacados que surgen de esta comparación son los siguientes:

- (A) Para galaxias elípticas ( $E_0, \dots, E_7$ ), la aplicación del procedimiento de clasificación produce la clase correcta.
- (B) Para galaxias en transición entre elípticas y S0, el procedimiento produce la clase de galaxia elíptica  $E_i$  más próxima a la forma presente.
- (C) Sobre galaxias en transición entre elípticas y espirales (NGC-2855 y NGC-5273), el procedimiento produce la clase más próxima a la forma de la galaxia, y así en los dos ejemplos considerados produce una subclase de galaxias espirales.
- (D) Todos los ejemplos de galaxias claramente espirales que han sido considerados, son clasificados como tales por el procedimiento de clasificación.
- (E) El procedimiento identifica correctamente galaxias espirales barradas (SB) y no-barradas (S). Además detecta la presencia de barra cuando esta aparece sobre galaxias elípticas.

- (F) Para galaxias espirales barradas (SB) y espirales no-barradas (S) el procedimiento produce un alto porcentaje de clasificaciones correctas, aunque se detecta la necesidad de incorporar alguna fuente de información adicional (núcleo de la galaxia y presencia de anillo en la forma) para incrementar la bondad de la clasificación.

NGC	Clase	Tipo	NGC	Clase	Tipo	NGC	Clase	Tipo
157	Sc	Sc	2523	SBb	SBb	5055	Sa/Sb	Sb
175	SB	SBa	2775	Sa/Sb	Sa	5273	E2	E/Sa
185	E1	E1	2855	E3	E/Sa	5364	Sc	Sc
309	Sc	Sc	2903	Sc	Sc	5614	Sa/Sb	Sa
404	E2	E/S0	3115	E7	E7	7217	Sb	Sb
488	Sa/Sb	Sa	3147	Sa/Sb	Sb	7741	SBc	SBc
524	E0	E/S0	3351	SBb	SBb	7743	SBc	SBa
615	Sb	Sb	3810	Sc	Sc			
628	Sc	Sc	4062	Sb	Sb			
718	Sa/Sb	Sa	4262	SBc	SB			
1023	Sc	Sc	4278	E1	E1			
1068	Sa/Sb	Sb	4303	Sc	Sc			
1073	SBc	SBc	4321	Sc	Sc			
1097	SBb	SBb	4457	Sa	Sa			
1201	E3	E/S0	4486	E0	E0			
1232	Sc	Sc	4548	SBb	SBb			
1302	Sa/Sb	Sa	4579	SBb	SBa			
2217	SBb	SBa	4725	SBb	SBb			

Tabla 4.3: La columna CLASE muestra la clase correspondiente a la galaxia de acuerdo al procedimiento automático de clasificación aquí desarrollado. La columna TIPO muestra la verdadera clase a la que pertenece la galaxia.

Capítulo 5

**CONCLUSIONES Y LINEAS  
FUTURAS**

## 5.1 Conclusiones.

En esta tesis doctoral se han presentado procedimientos para la clasificación automática de galaxias. En primer lugar se ha descrito la extracción y uso de un modelo de representación para la clasificación inicial de la galaxia como espiral o elíptica. En segundo lugar se ha analizado hasta que punto es posible automatizar el proceso de extracción de los rasgos más destacados de la forma, que determina la derivación de un sistema de clasificación automático.

Las conclusiones fundamentales son las siguientes:

- (1) Es posible desarrollar un procedimiento robusto de segmentación automática que permite clasificar los píxeles de la imagen en el menor número de clases necesario para identificar la galaxia como elíptica o espiral.
- (2) Las galaxias pueden ser identificadas de manera automática, incluso después de someterlas a transformaciones geométricas usuales (rotaciones, cambios de escala y traslaciones), como pertenecientes a la clase de galaxias espirales o elípticas usando un modelo de representación para la galaxia, simple, manejable y capaz de reflejar el rango de variabilidad que puede presentar la forma. Este modelo de representación se formula en términos de una curva plana y cerrada, que se deforma significativamente si aparecen brazos espirales en la galaxia, y que adopta una forma aproximadamente elíptica sobre galaxias de este tipo. Así es posible caracterizar la galaxia por la compactidad de la región que rodea esta curva, por la bondad de ajuste de una elipse a esta curva plana, y por la identificación de un patrón teórico en la curva de curvaturas asociada a la curva plana y cerrada.
- (3) La descripción de rasgos (brazos espirales) exige una modelización que incorpore información sobre la geometría global y local, ya que un modelo que incorpora tan solo la geometría local es incapaz de capturar información significativa sobre la forma de los rasgos.

- (4) Es posible extraer, de forma automática, los rasgos más destacados de una galaxia, determinando un procedimiento de clasificación automática. Así sobre una galaxia identificada como elíptica mediante alguna de las técnicas comentadas en el punto 2, es posible extraer automáticamente el grado de elípticidad asociado a la forma, determinando la asignación de la galaxia a una subclase de galaxias elípticas ( $E_0, \dots, E_7$ ). En otro caso si la galaxia ha sido clasificada como espiral es posible, en primer lugar, la extracción automática de los brazos espirales presentes. En segundo lugar es posible la identificación automática del rasgo barra (cuando está presente en la forma), determinando si la galaxia es barrada (SB) o no-barrada (S). En tercer lugar y ya dentro de la subclase espiral barrada o espiral no-barrada según corresponda, es posible una asignación final de tipo a la galaxia mediante la extracción automática de la velocidad de cambio de la curvatura sobre los brazos espirales identificados.



## 5.2 Líneas futuras.

La integración de diferentes fuentes de información, produce observaciones consistentes ya que los datos complementarios incrementan la credibilidad de la información, mientras que las contradicciones que se manifiestan entre las distintas fuentes de información y que pueden ser causadas por el ruido, errores durante el procesamiento o interpretaciones erróneas, pueden ser identificadas como tales. Como consecuencia la integración de datos procedentes de fuentes distintas produce resultados que son muy fiables, y representan una fuente de información válida para cualquier sistema de clasificación. Luego una extensión natural del procedimiento de clasificación desarrollado en esta memoria sería la obtención de un sistema de clasificación automática para imágenes multibandas, que sea capaz de integrar, analizar y extraer consecuencias sobre distintas fuentes de información. La derivación de este sistema exige el estudio previo de nuevas modelizaciones para los rasgos, que sean capaces de combinar de forma eficiente las distintas informaciones de las que se dispone, además de la determinación de procedimientos para la extracción automática de los rasgos destacados en la forma sobre las imágenes multibandas.

# Apéndice A

## A.1 Identificación del rasgo barra sobre imágenes no-homogeneas.

El procedimiento para la determinación de la presencia o ausencia del rasgo barra, descrito en la sección 4.3.2 de esta memoria, exige la homogeneidad en relación a los niveles de gris de las imágenes tratadas. En consecuencia su uso está justificado sobre imágenes que verifican esta propiedad y en el caso de considerar imágenes no-homogeneas se justifica el desarrollo de una metodología alternativa que permita determinar la presencia de barra.

En esta linea y a continuación se describe un procedimiento que en esencia identifica el rasgo mediante el uso de la diferencia de los valores medios

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

donde  $\bar{x}_1$  nota la media muestral en los sectores  $S(x^*, y^*)$ ,  $S(-x^*, -y^*)$  donde se alcanza el mejor ajuste y  $\bar{x}_2$  nota la media muestral observada sobre los sectores  $S(x', y')$ ,  $S(-x', -y')$  donde se alcanza el peor ajuste. Cuando la barra aparece en la galaxia, la media  $\bar{x}_1$  es significativamente mayor que la media muestral  $\bar{x}_2$ . Luego si la barra aparece en la forma, la diferencia  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  estará significativamente alejada de 0.



Notemos por  $C_1$  el conjunto definido como

$$C_1 = \{x_{i,j}^G \mid (i,j) \in S(x^*, y^*) \cup S(-x^*, -y^*)\}$$

y notemos  $C_2$  el conjunto

$$C_2 = \{x_{i,j}^G \mid (i,j) \in S(x', y') \cup S(-x', -y')\}.$$

En este desarrollo suponemos que los niveles de gris  $x_{i,j}^G$  en  $C_1$  determinan variables aleatorias que se distribuyen según una ley normal de media  $\mu_1$  y varianza  $\sigma_1^2$ , ambas desconocidas. Es decir

$$x_{i,j}^G \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \text{ si } x_{i,j}^G \in C_1.$$

Los niveles de gris  $x_{i,j}^G \in C_2$  son variables aleatorias que se distribuyen según una ley normal de media  $\mu_2$  y varianza  $\sigma_2^2$ , ambas desconocidas,

$$x_{i,j}^G \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \text{ si } x_{i,j}^G \in C_2.$$

Además  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  son distintas.

La variable aleatoria  $T$  definida como

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

donde  $s_i^2$  nota la varianza muestral en  $C_i$ , con  $i = 1, 2$ , y en donde  $n_i = |C_i|$ , para  $i = 1, 2$ , sigue una distribución t-Student con  $f$  grados de libertad, donde  $f$  se define como

$$f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Este estadístico  $T$  se usa con el objetivo de contrastar hipótesis sobre la diferencia de medias  $\mu_1 - \mu_2$ .

Un contraste de hipótesis del tipo

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$$

permite determinar si hay diferencias significativas entre los niveles observados en el peor ajuste y en el mejor ajuste. Así cuando para la imagen considerada rechazamos la hipótesis nula  $H_0$  tendremos que deducir la ausencia de barra en la forma de la galaxia. En otro caso, si para los valores medios observados aceptamos la hipótesis nula  $H_0$ , aún no podremos garantizar la presencia de barra. En este segundo caso habrá que analizar la uniformidad de los niveles de gris observados sobre el mejor ajuste (píxeles en  $S(x^*, y^*)$  y  $S(-x^*, -y^*)$ ). Si tal uniformidad existe, podremos ya asegurar la presencia de barra en la forma.

En resumen la barra está presente en la forma si bajo el estadístico  $T$  aceptamos a un nivel alto de confianza la hipótesis

$$H_0 : \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$$

y las observaciones  $x_{i,j}^G$  en  $C_1$  realmente proceden de una distribución normal.

Hay varios procedimientos para contrastar si el conjunto de observaciones  $x_{i,j}^G$  en  $C_1$  proceden de una distribución específica (por ejemplo una distribución normal), y uno de ellos es el test de Kolmogorov-Smirnov. Este test usa los estadísticos ordenados  $x_{(t)}$ , con  $t = 1, \dots, n$ , calculados sobre  $C_1$ , y los transforma a su forma estandar  $w_{(t)}$  de acuerdo a la ecuación

$$w_{(t)} = \frac{x_{(t)} - \bar{x}_1}{s_1}$$

donde  $\bar{x}_1$  y  $s_1$  notan la media y desviación muestrales sobre  $C_1$ .

Notemos por  $\phi$  la función de distribución asociada a la ley normal estandar  $N(0, 1)$ . Entonces el procedimiento usado para contrastar la normalidad de la distribución empírica, emplea el estadístico de Kolmogorov-Smirnov  $D$  que se define como:

$$D = \max(D^+, D^-)$$

donde

$$D^+ = \max_{1 \leq t \leq n} \left( \frac{t}{n} - \phi(w_{(t)}) \right)$$

y donde

$$D^- = \max_{1 \leq t \leq n} \left( \phi(w_{(t)}) - \frac{t-1}{n} \right)$$

## A.2 Proceso de creación de la Base de datos.

Los astrónomos actualmente suelen usar en el proceso de digitalización de imágenes astronómicas detectores CCD. A pesar de ello y según comentamos en el capítulo de introducción, el problema de la no-existencia de una muestra de aprendizaje suficientemente amplia de imágenes CCD de galaxias, sobre la cual comprobar la validez de los procedimientos presentados, fue el primer y posiblemente mas difícil obstáculo con el que nos enfrentamos. La solución a este problema, se obtuvo en base a la creación de una base de datos de galaxias discretizadas en el rango de niveles de gris, usando para ello una metodología simple, pero eficiente.

Aunque resulta difícil obtener imágenes CCD de galaxias (en número estadísticamente suficiente), no lo es tanto el encontrar un conjunto de imágenes fotográficas de galaxias ( en las cuales queden reflejados los hechos morfológicos destacados de la forma ) usando el material fotográfico presente en los atlas de galaxias mas representativos.

De acuerdo a este segundo planteamiento, y usando fundamentalmente "The Hubble Atlas of Galaxies" [80], además de "An Atlas of Selected Galaxies" [90] , seleccionamos un conjunto de aproximadamente cien imágenes fotográficas.

El siguiente paso fue la obtención del conjunto de imágenes discretizadas en el rango de los niveles de gris, en base a la digitalización de las imágenes fotográficas. En el proceso de digitalización se usó un scanner con una resolución de 300 DPI ( aproximadamente 12 puntos/mm) y con un formato ASCII para los datos de salida. Las imágenes bi-dimensionales obtenidas son cuadradas, subdivididas en un reticulo regular de  $512 \times 512$  píxeles cuadrados (las imágenes determinan cuadrados de 512 píxeles de longitud), donde cada pixel representará un nivel de

gris en el rango  $\{0, 1, \dots, 255\}$ .

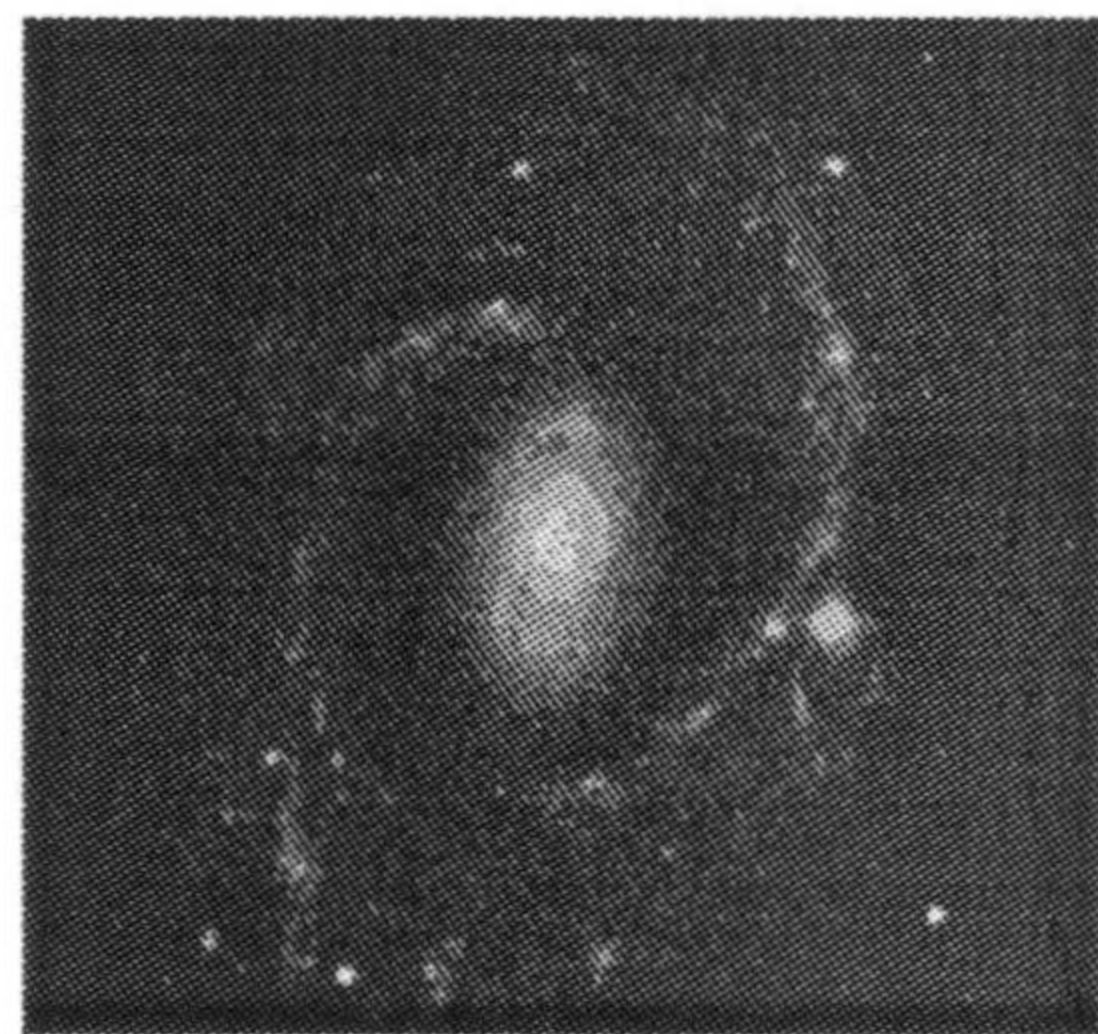
## **A.3 Descripción de la Base de datos.**

### **A.3.1 Índice.**

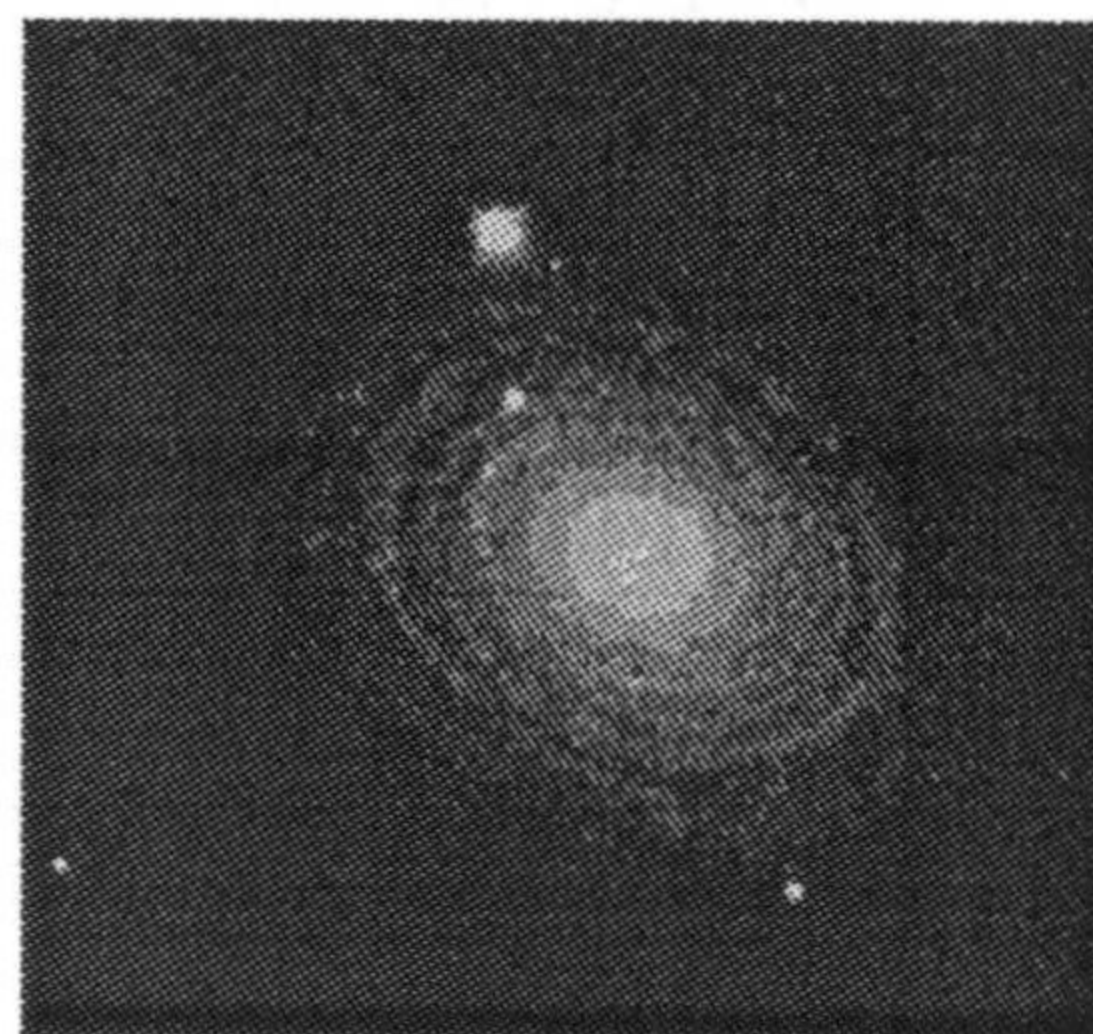
Los índices de galaxias que actualmente se utilizan se basan en el presentado por Dreyer en su catálogo 'A New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars' (1888), y las galaxias se identifican por el número que les corresponde en el índice de este catálogo ( número 'NGC' ). La siguiente tabla muestra el índice de las galaxias que componen la base de datos creada, listadas por su número 'NGC', indicando el tipo de cada galaxia de acuerdo a la clasificación descrita en la figura 1.1.

NGC	Tipo	NGC	Tipo	NGC	Tipo	NGC	Tipo
157	Sc	2366	Irr	4088	SBc/Sc	4684	E/S0
175	SBa	2523	SBb	4111	E/S0	4697	E5
185	E1	2574	Irr	4150	E/S0	4699	Sb
210	Sb	2775	Sa	4214	Irr	4710	E/S0
309	Sc	2811	Sa	4215	E/S0	4725	Sb/SBb
404	E/S0	2855	E/Sa	4237	Sb	4753	E/S0
488	Sb	2903	Sc	4254	Sc	4793	Sc
524	E/S0	2950	SB	4262	SB	4826	Sb
615	Sb	3081	Sa/SBa	4278	E1	4866	Sa
628	Sc	3109	Irr	4303	Sc	5055	Sb
718	Sa	3115	E7	4321	Sc	5273	E/Sa
1023	Sc	3147	Sb	4433	Sb	5364	Sc
1068	Sb	3185	SBa	4449	Irr	5614	Sa
1073	SBc	3245	E/S0	4450	Sb	5962	Sc
1084	Sc	3329	E/S0	4457	Sa	6814	Sb
1097	SBb	3351	SBb	4459	E/S0	7217	Sb
1156	Irr	3367	SBc	4486	E0	7392	Sb
1201	E/S0	3377	E6	4526	E/S0	7457	E/S0
1232	Sc	3556	Sc	4548	SBb	7741	SBc
1302	Sa	3623	Sa	4569	Sb	7743	SBa
1613	Irr	3627	Sb	4579	Sb/SBb		
1637	Sc	3672	Sc	4580	Sb		
1832	Sb	3705	Sb	4636	E0		
1964	Sb	3810	Sc	4643	SBa		
2217	SBa	4062	Sb	4656	Irr		

A.3.2 Imágenes mas representativas.



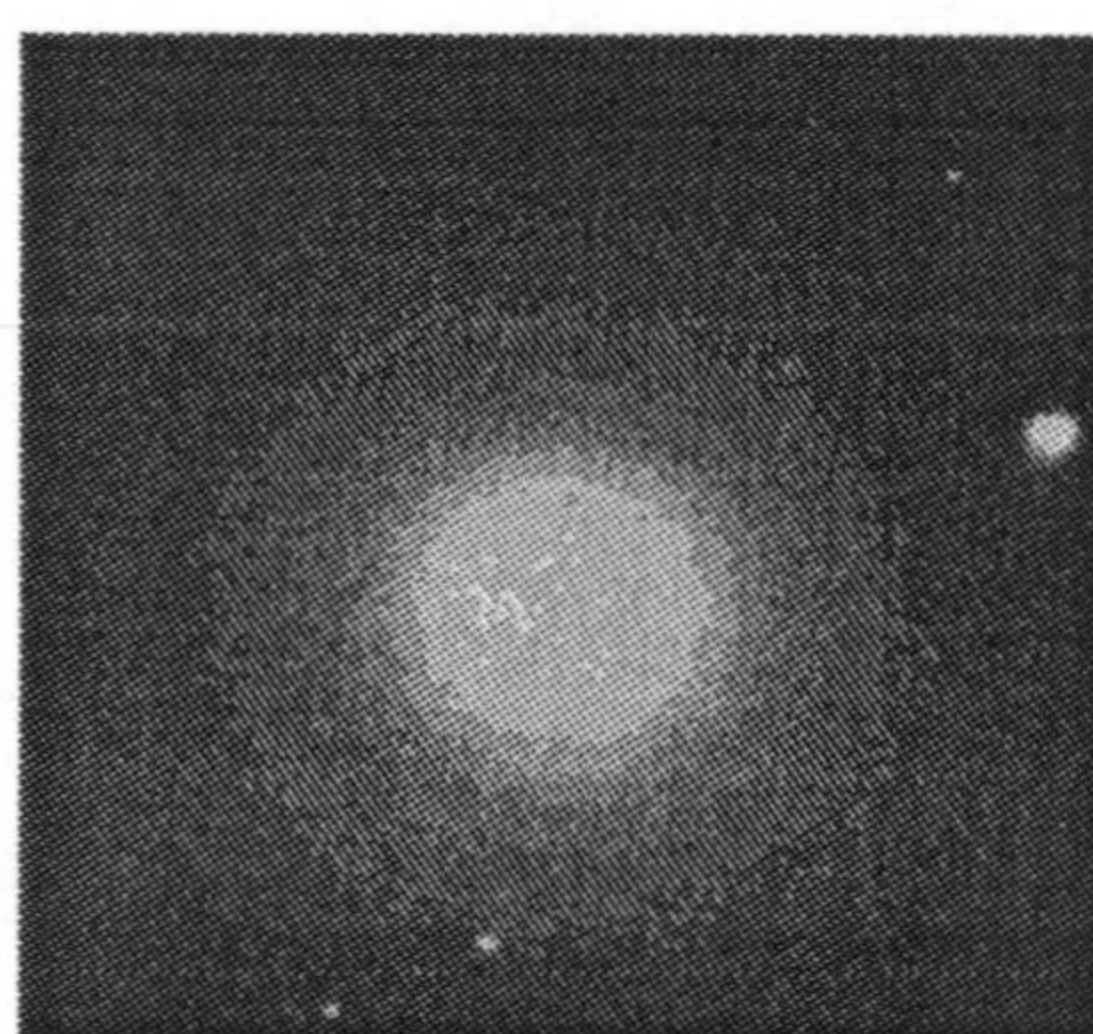
NGC-210



NGC-488



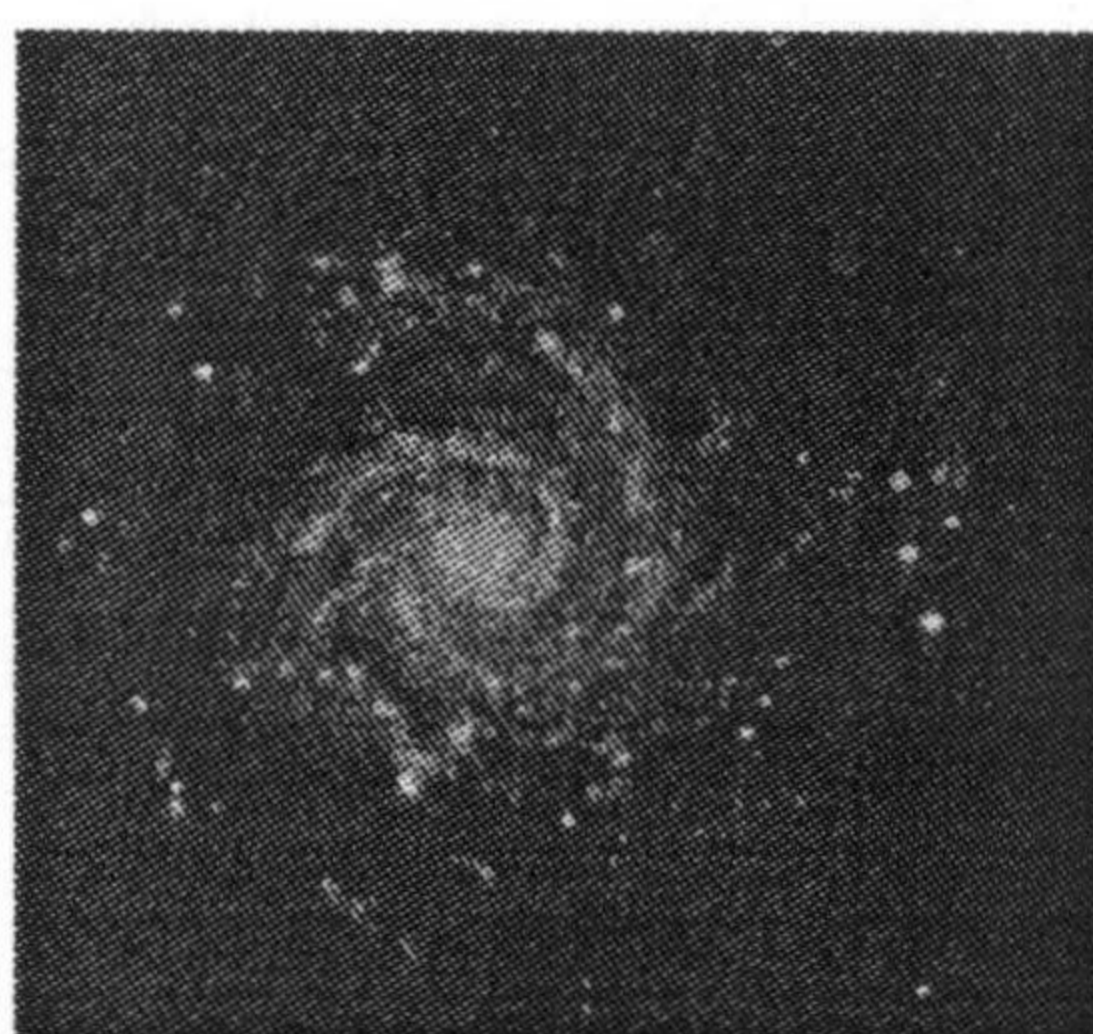
NGC-309



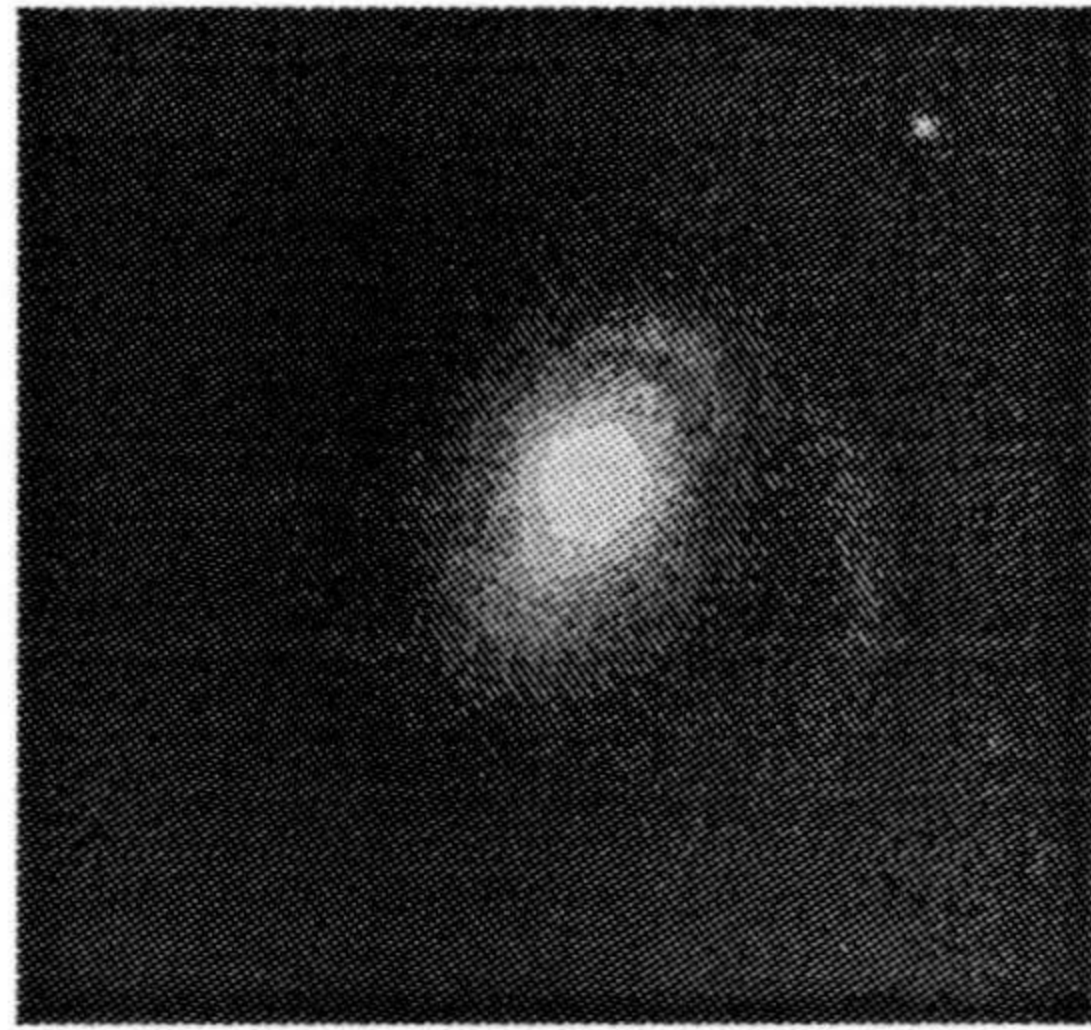
NGC-524



NGC-404



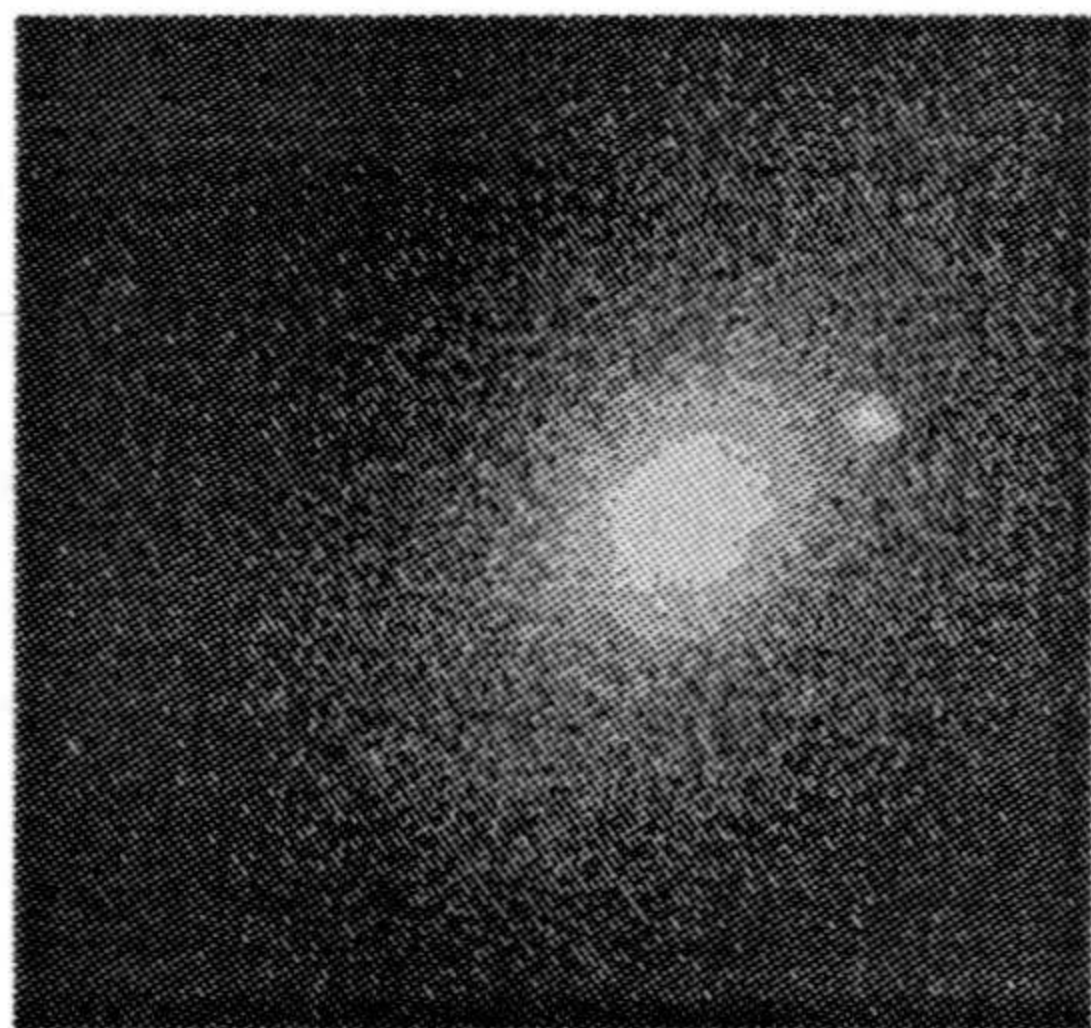
NGC-628



NGC-718



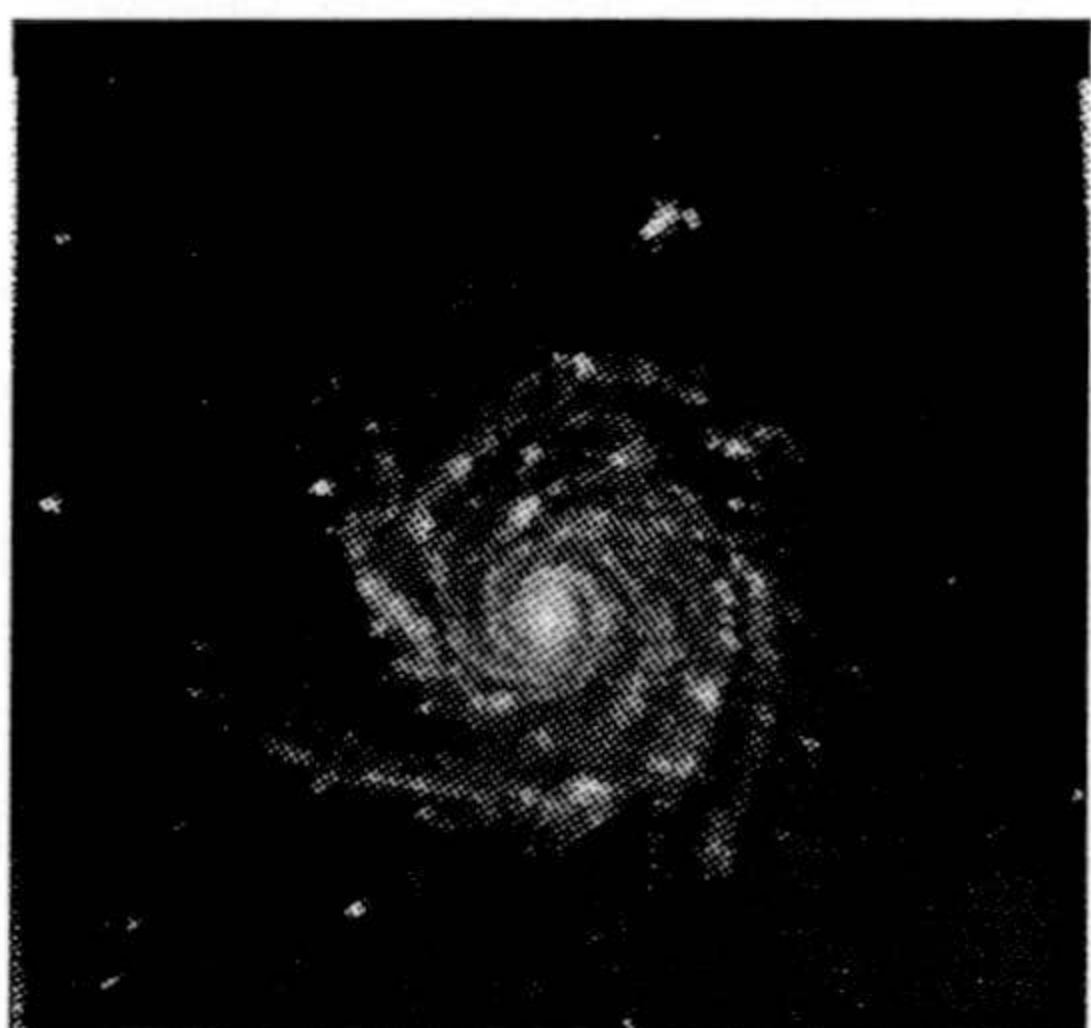
NGC-1832



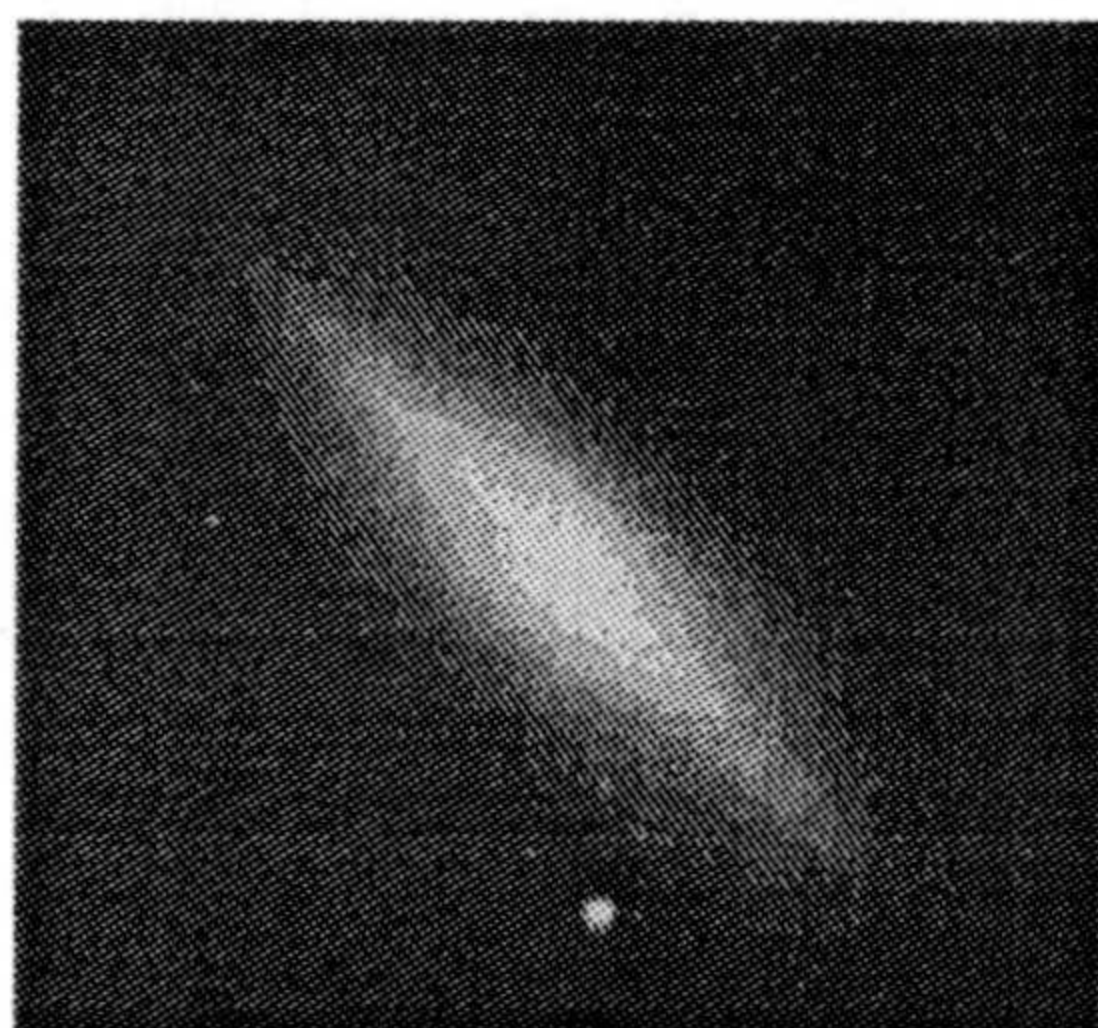
NGC-1201



NGC-2855

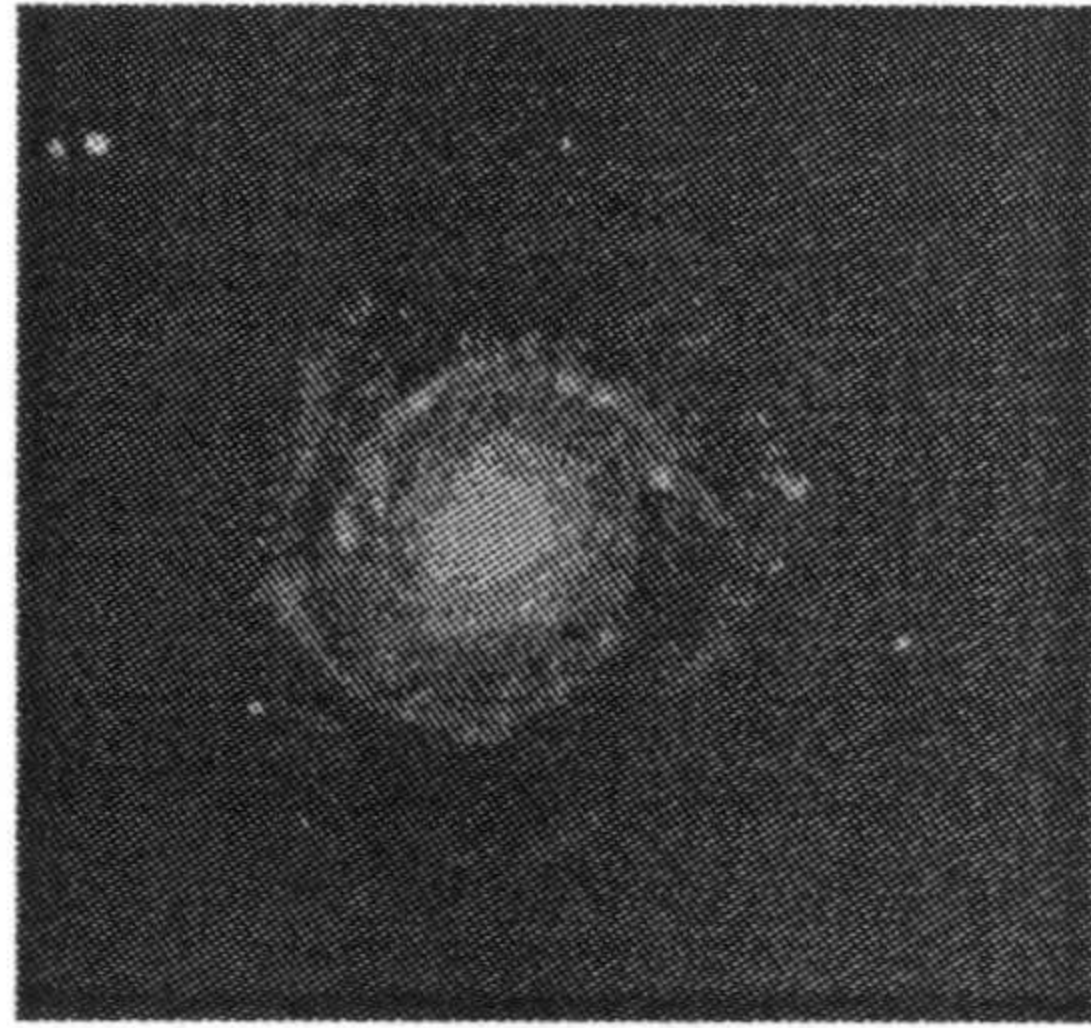


NGC-1232

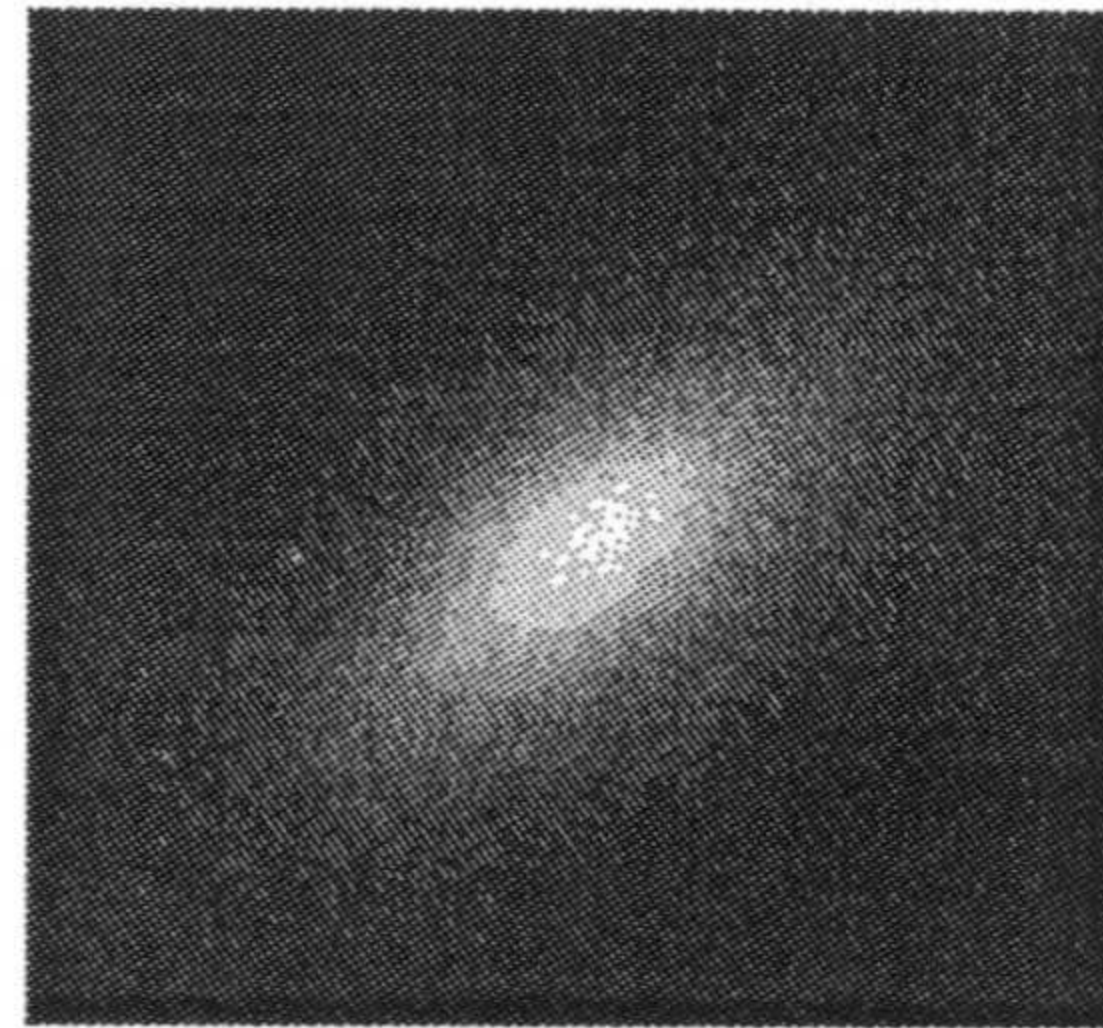


NGC-3115

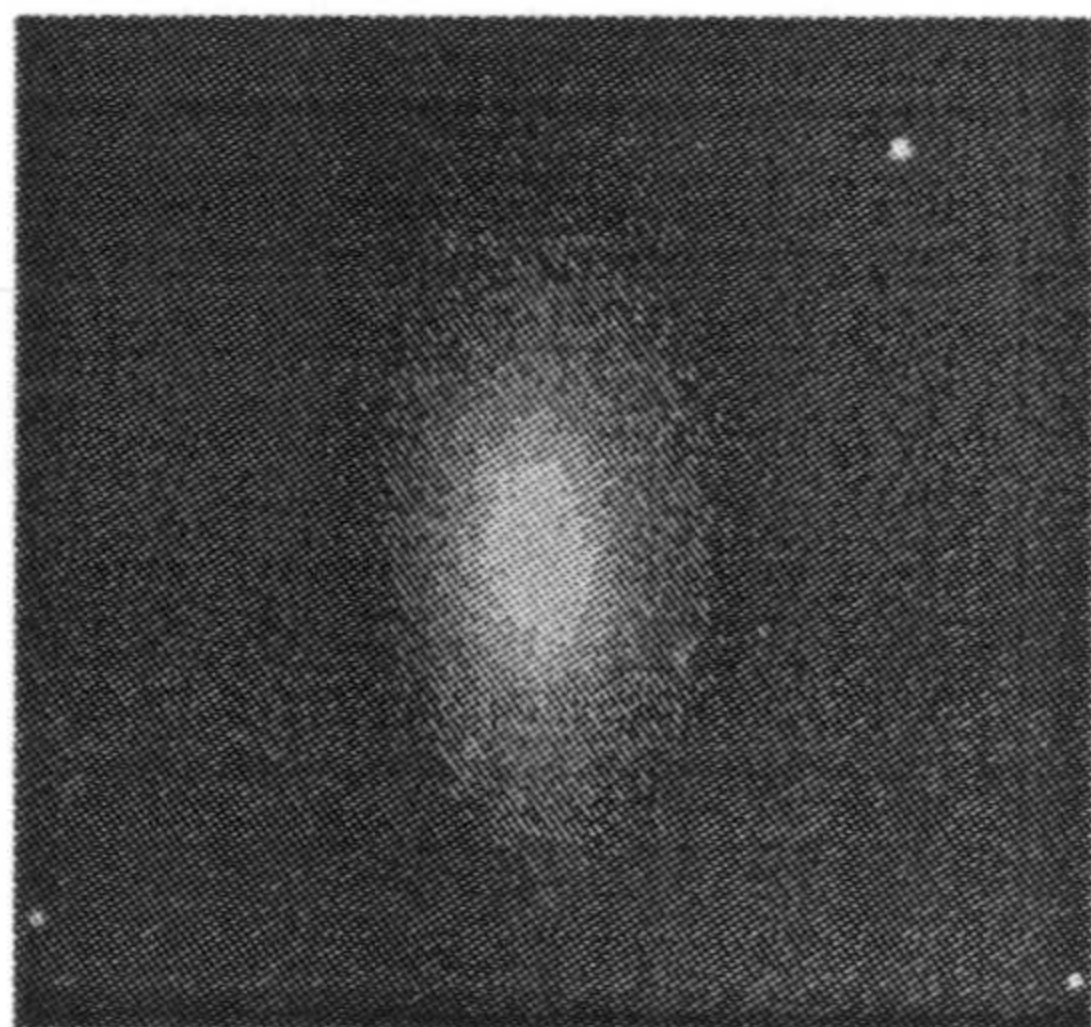




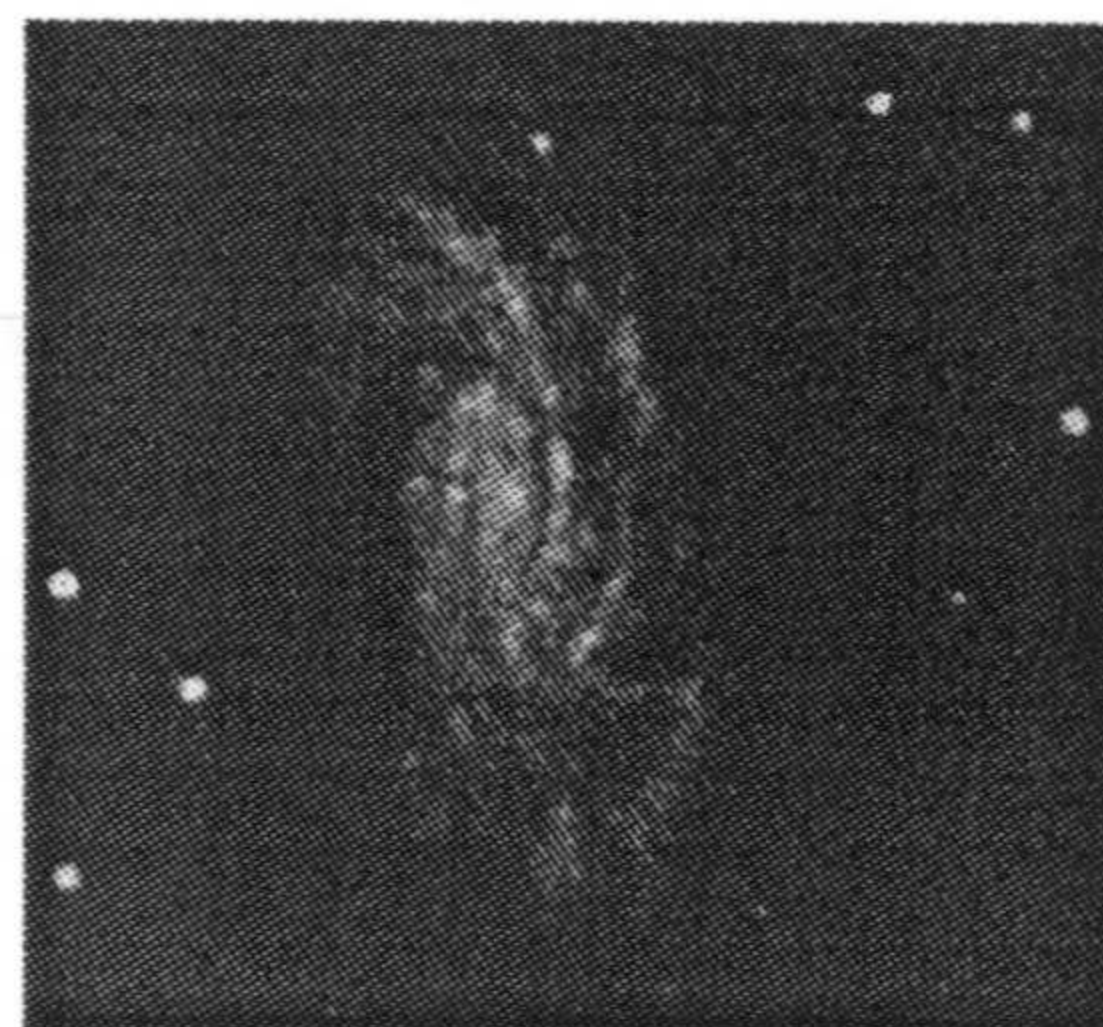
NGC-3147



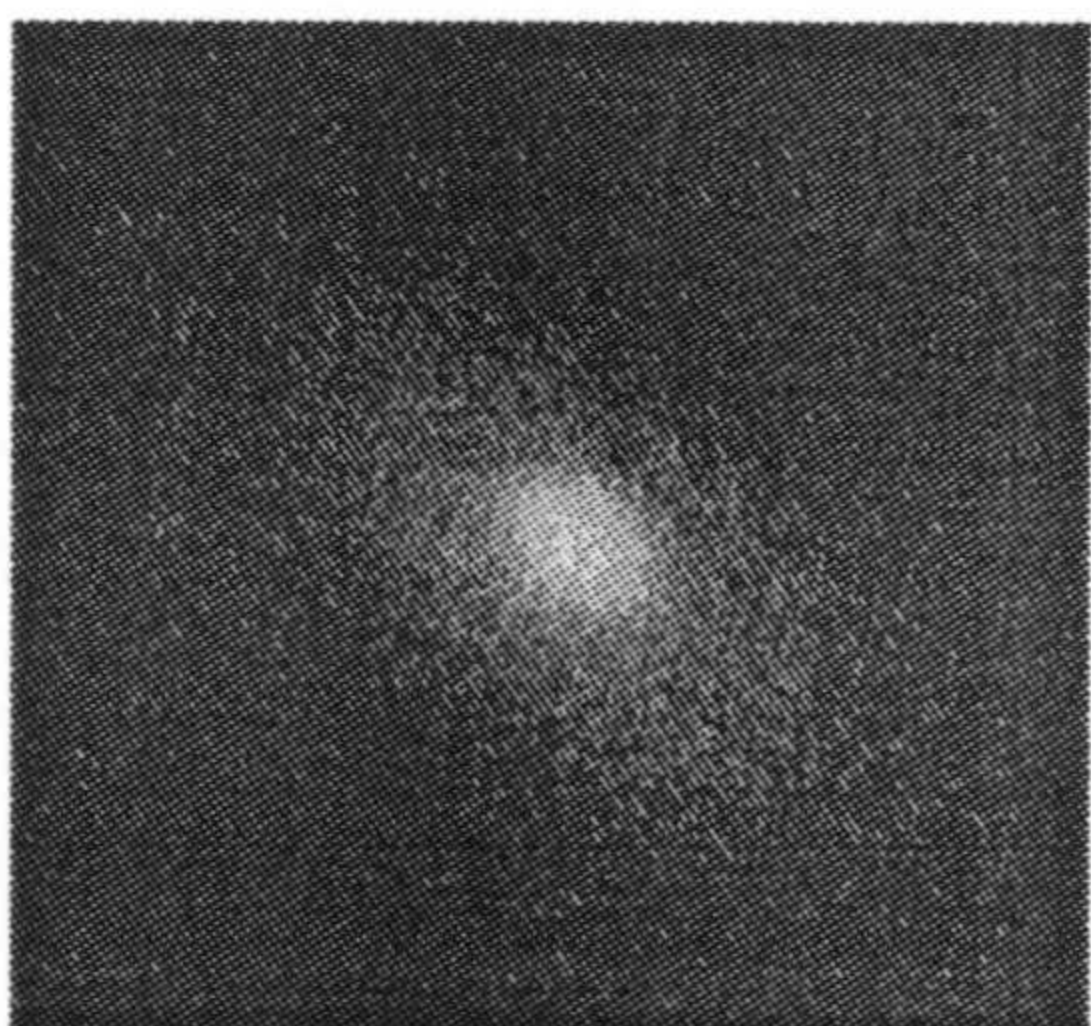
NGC-3377



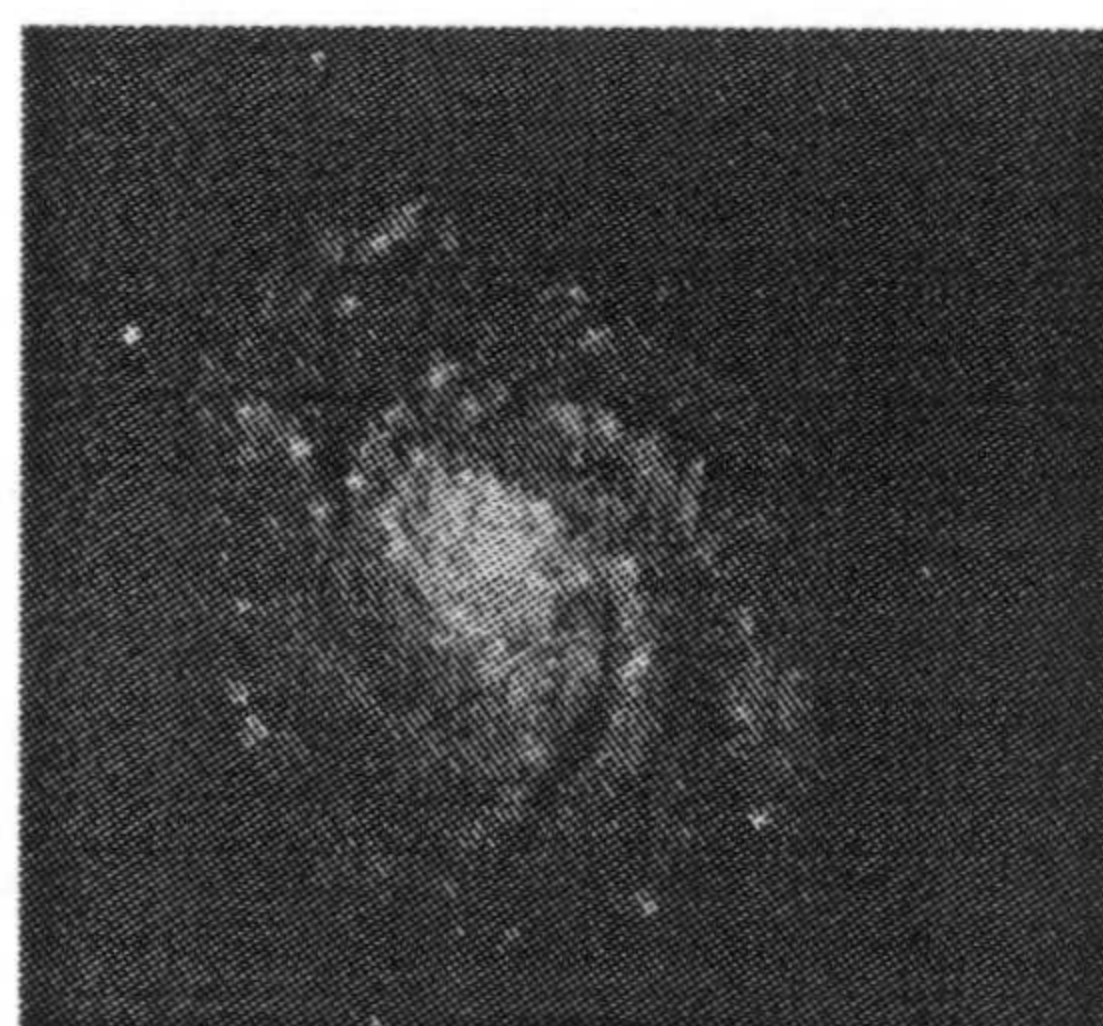
NGC-3245



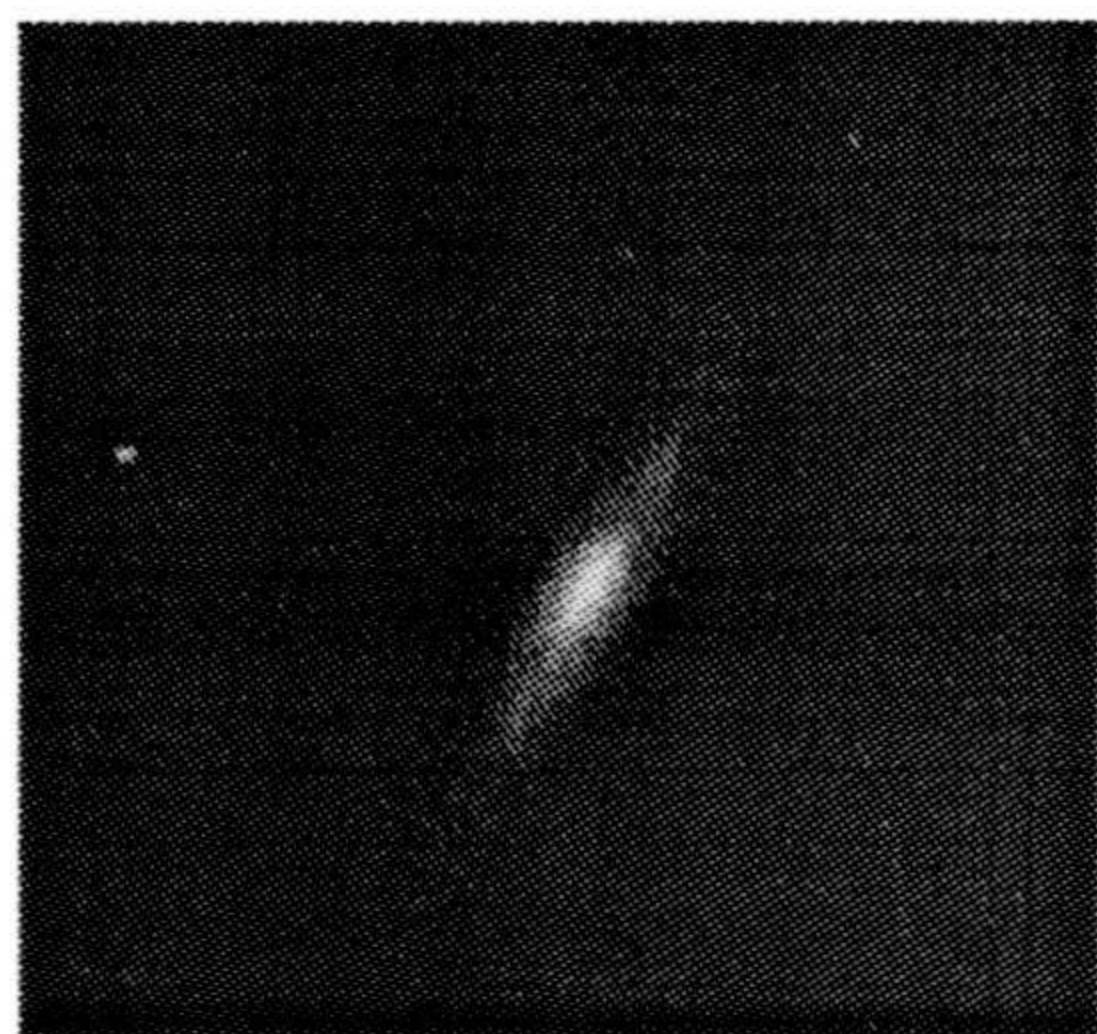
NGC-3672



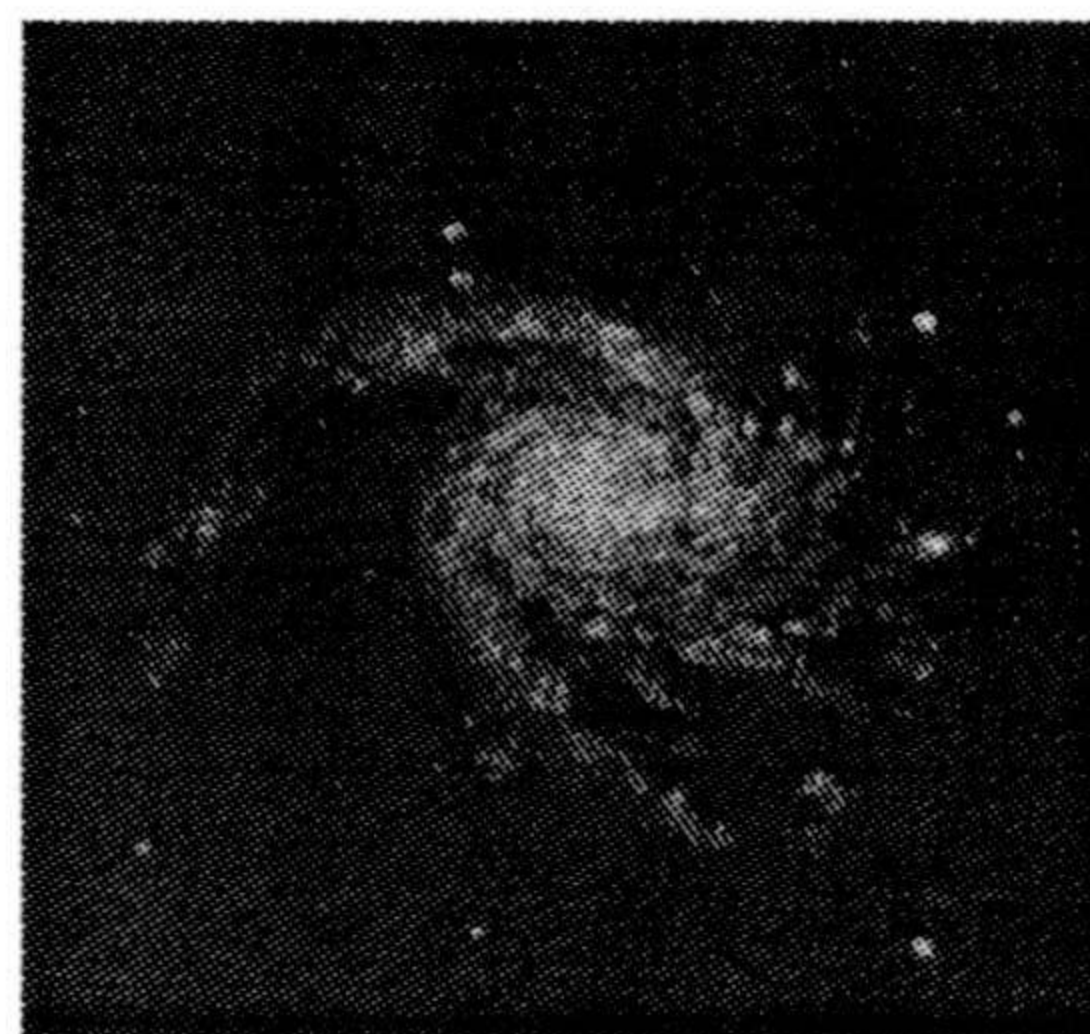
NGC-3329



NGC-3810



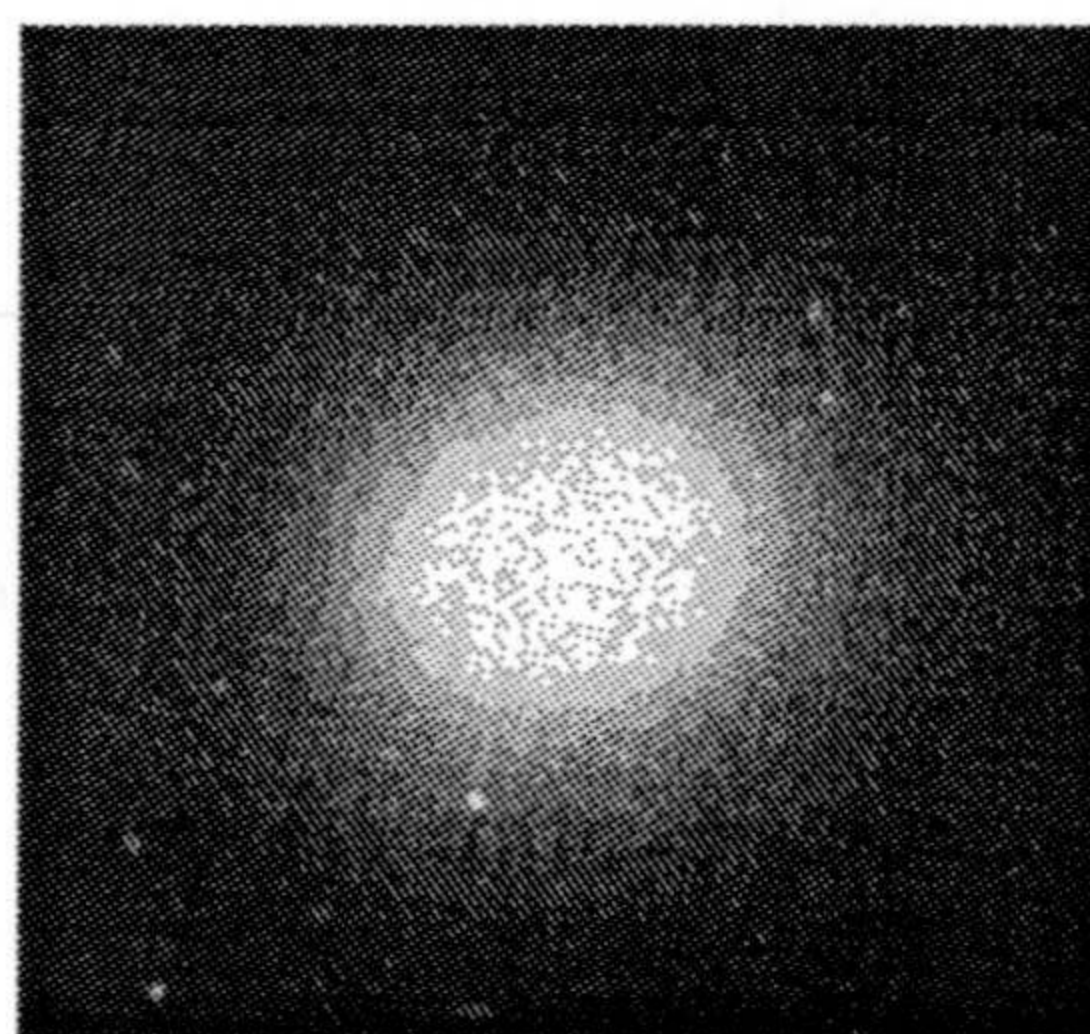
NGC-4111



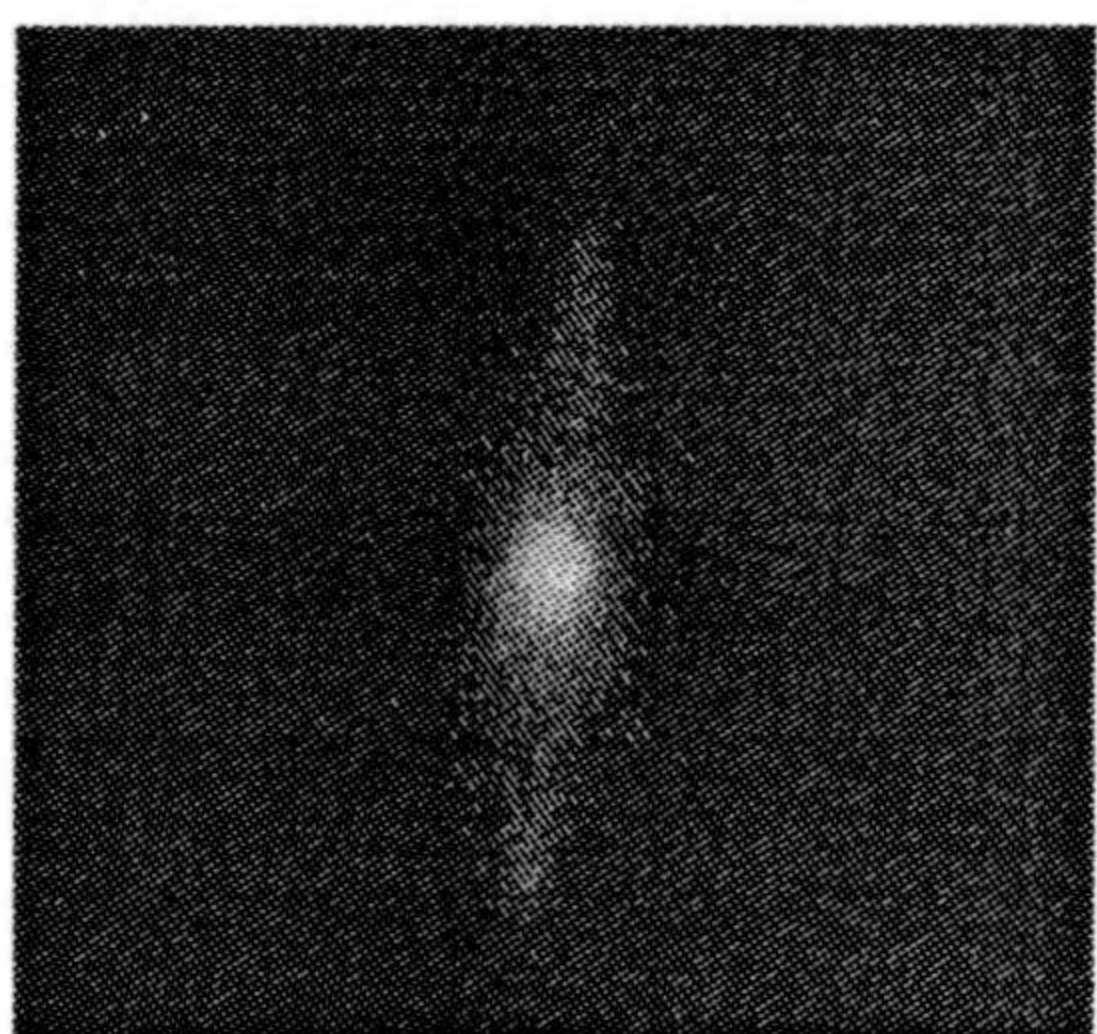
NGC-4254



NGC-4150



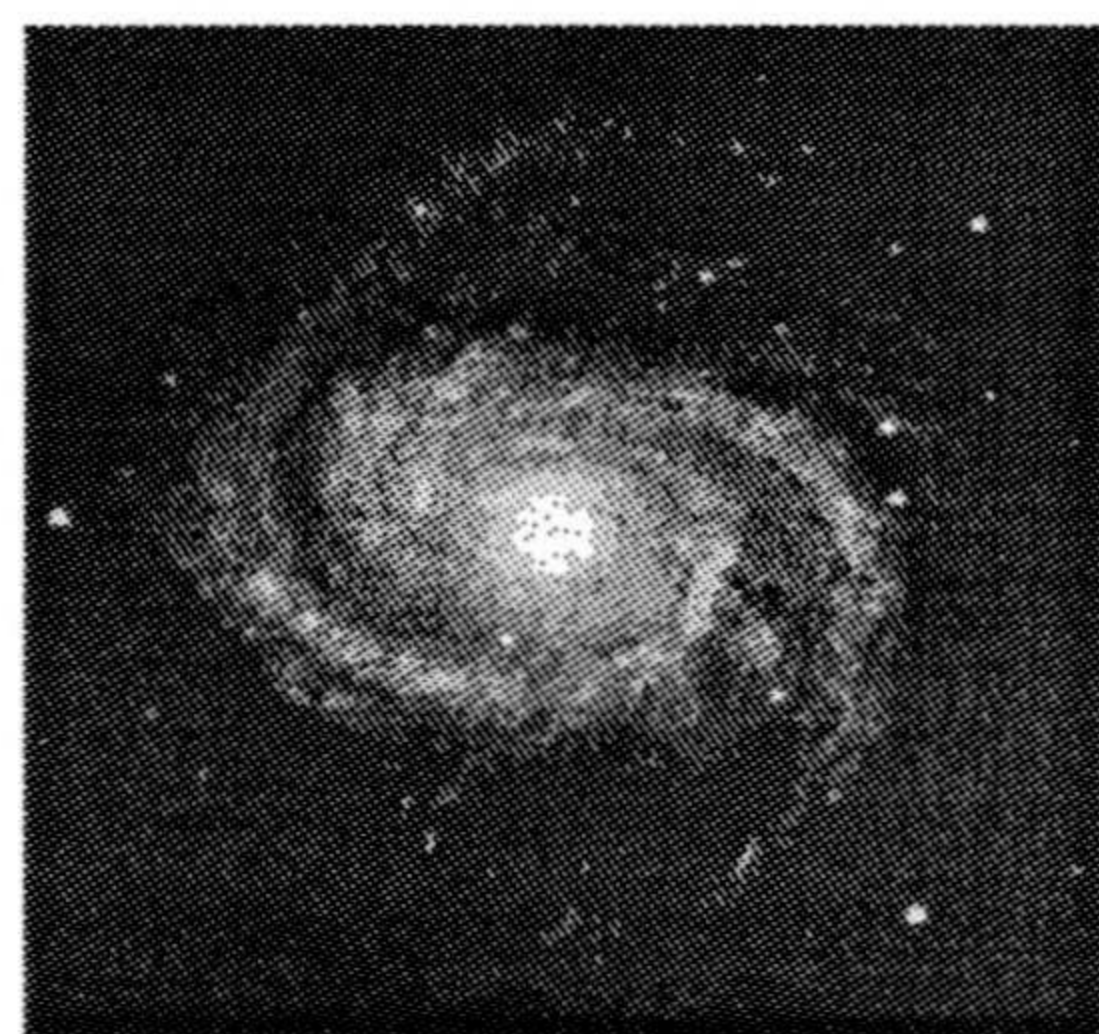
NGC-4278



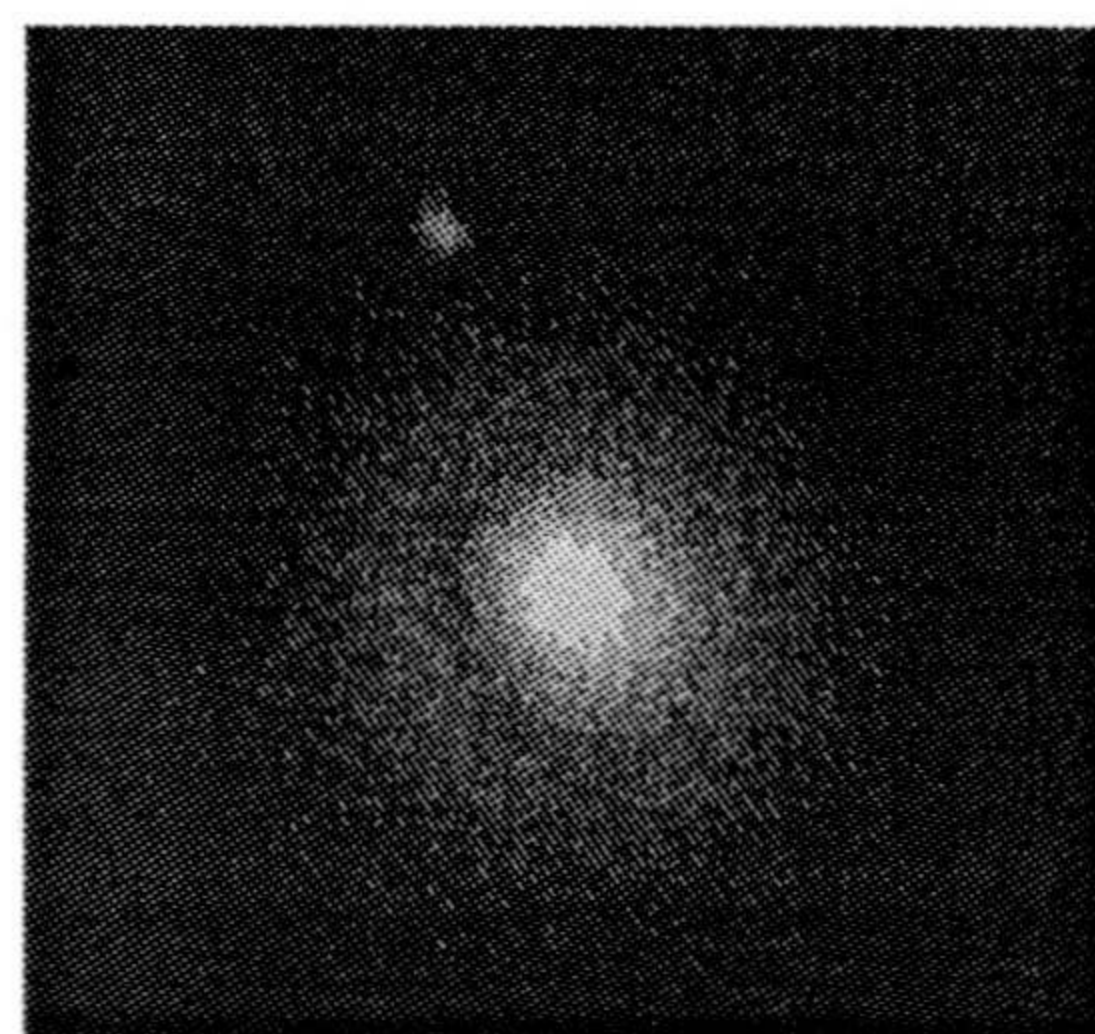
NGC-4215



NGC-4303



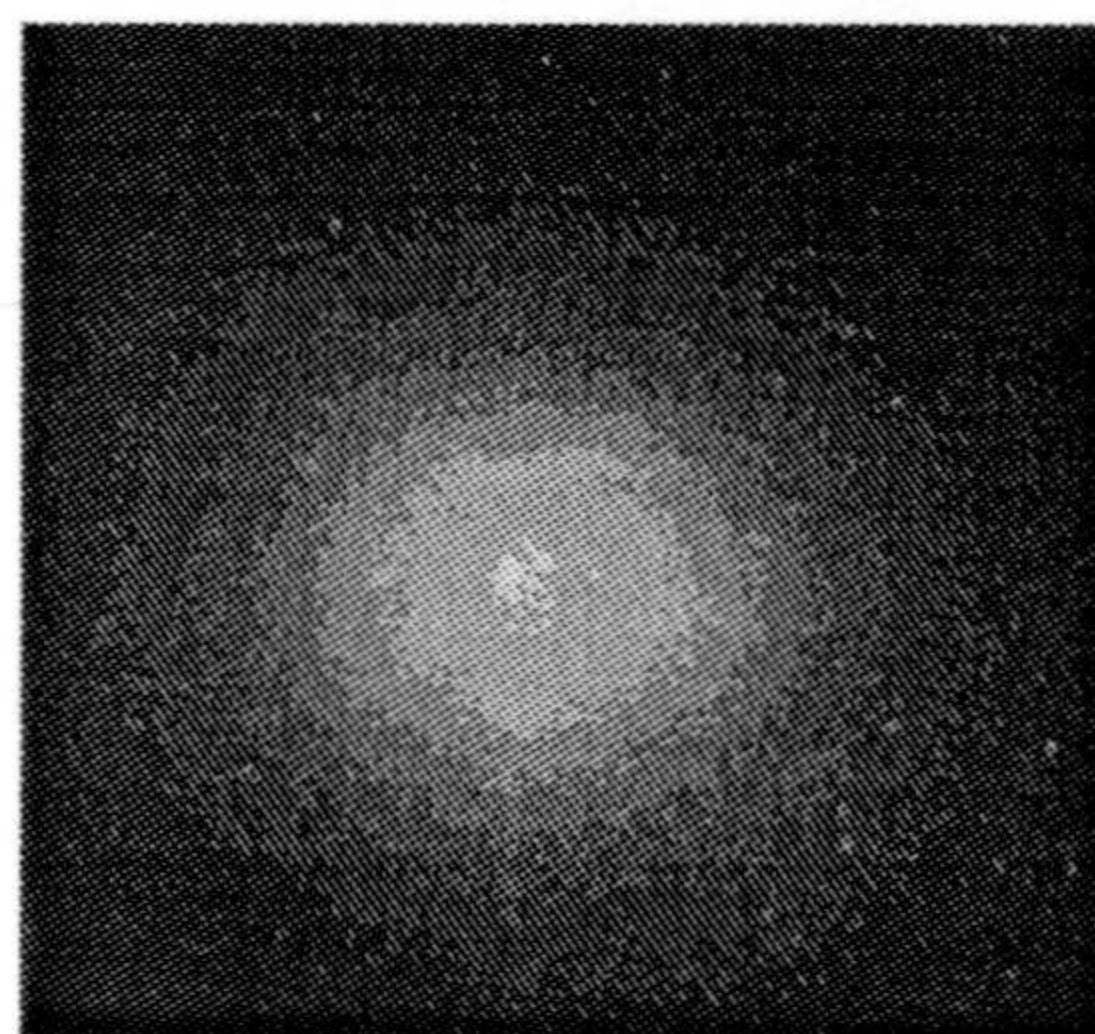
NGC-4321



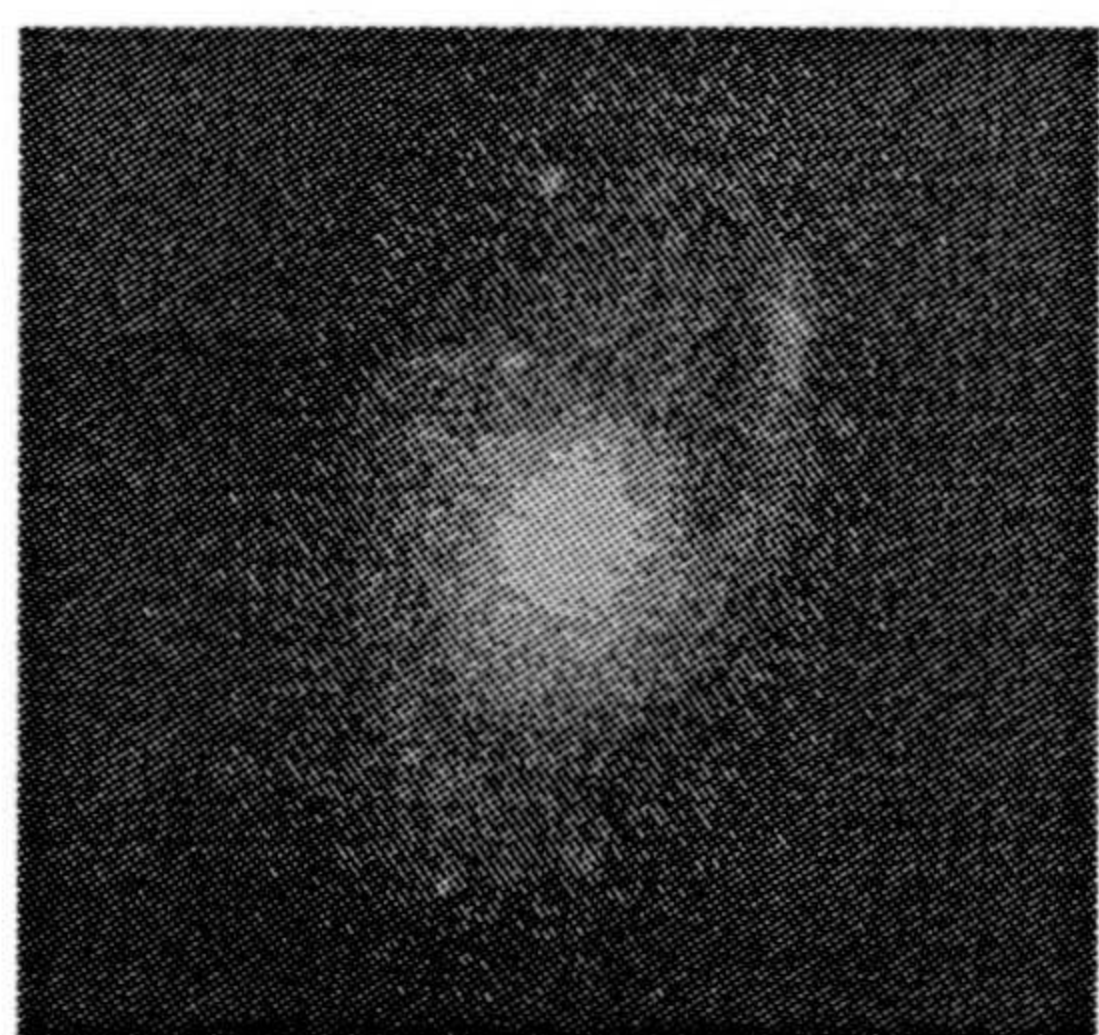
NGC-4459



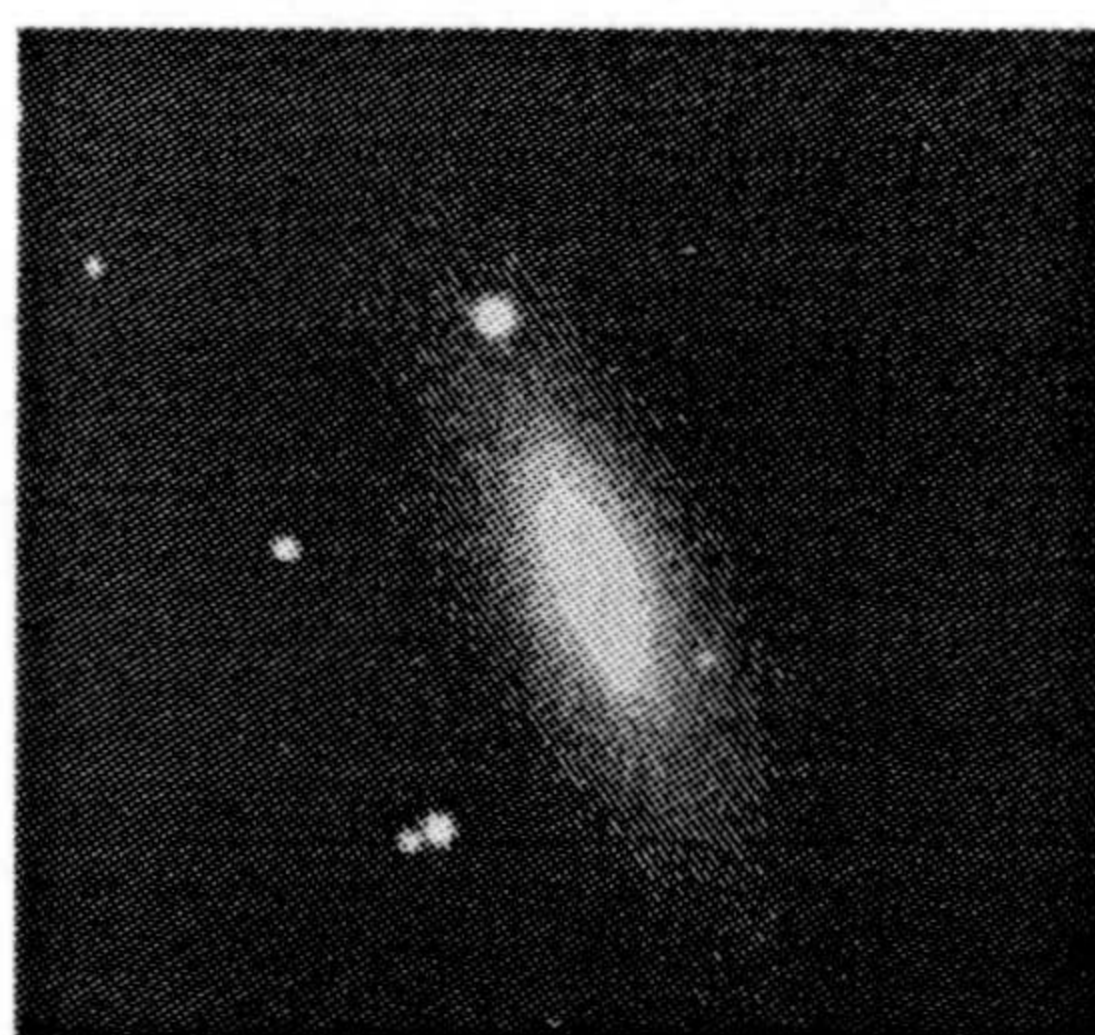
NGC-4450



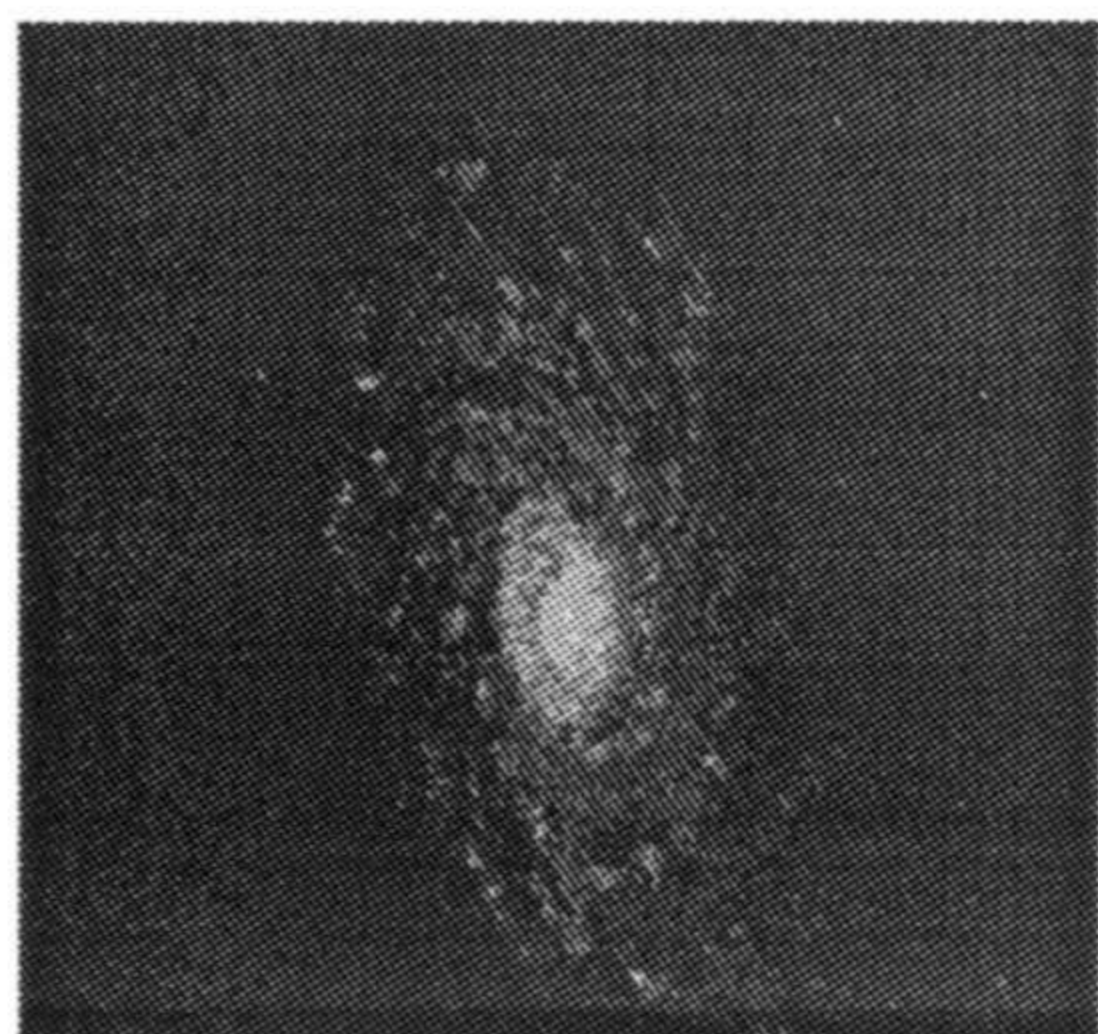
NGC-4486



NGC-4457



NGC-4684



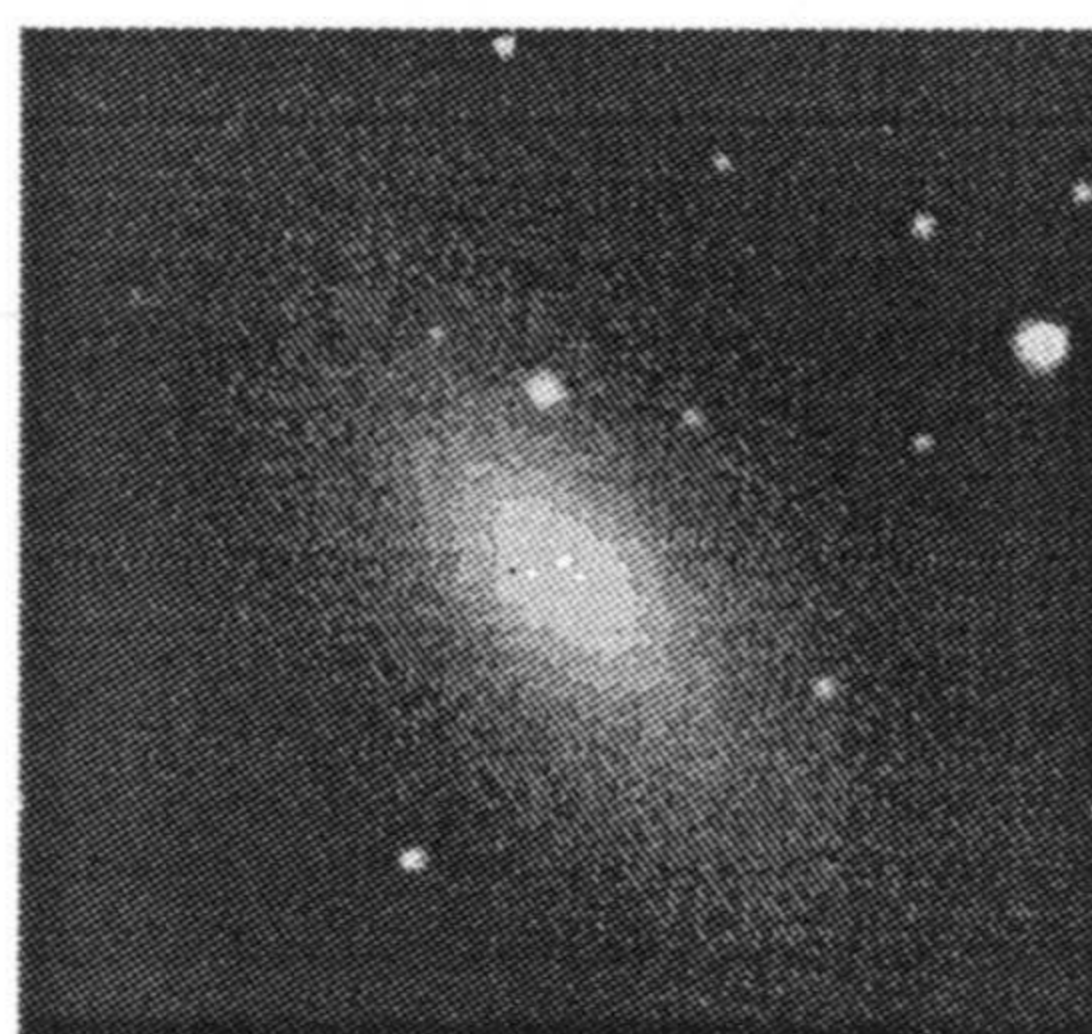
NGC-5055



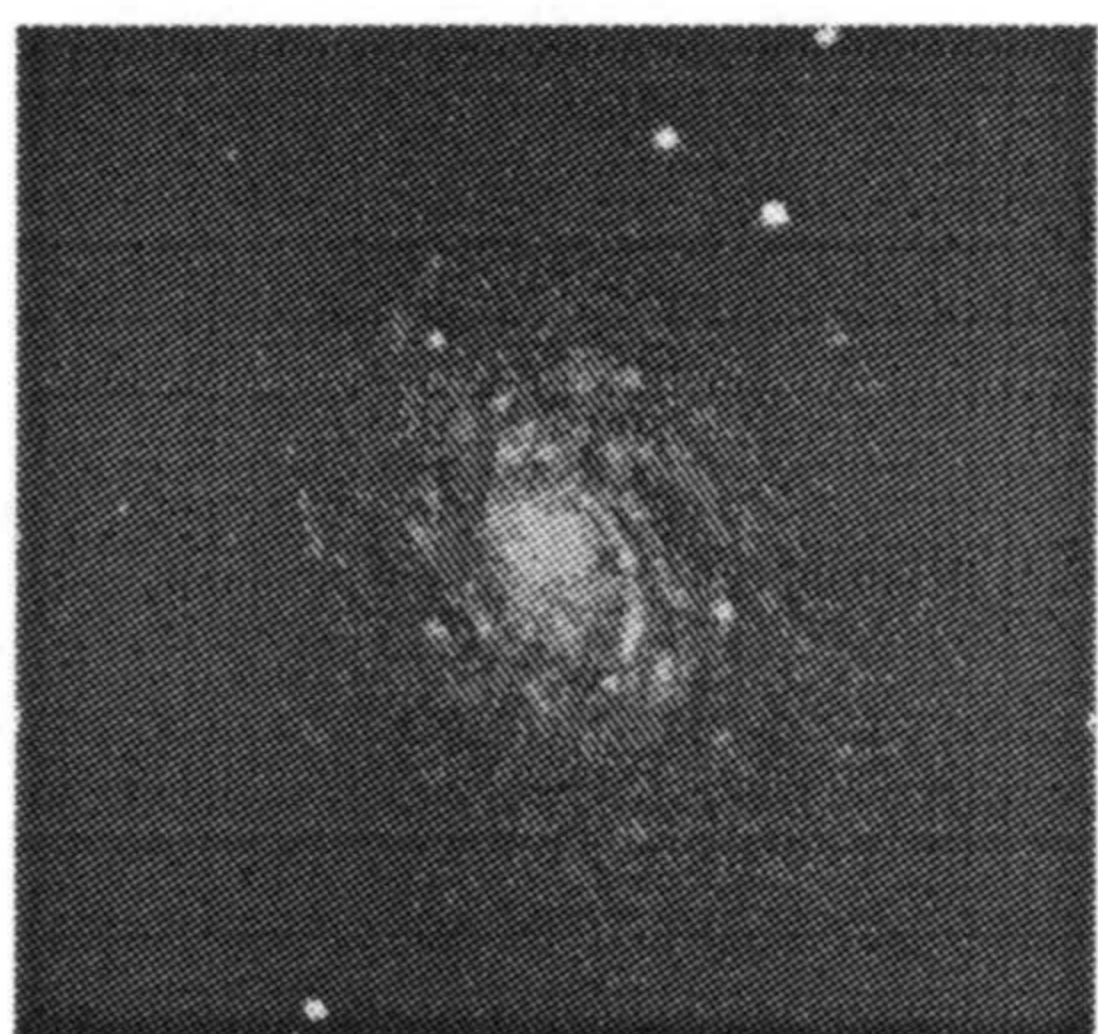
NGC-6814



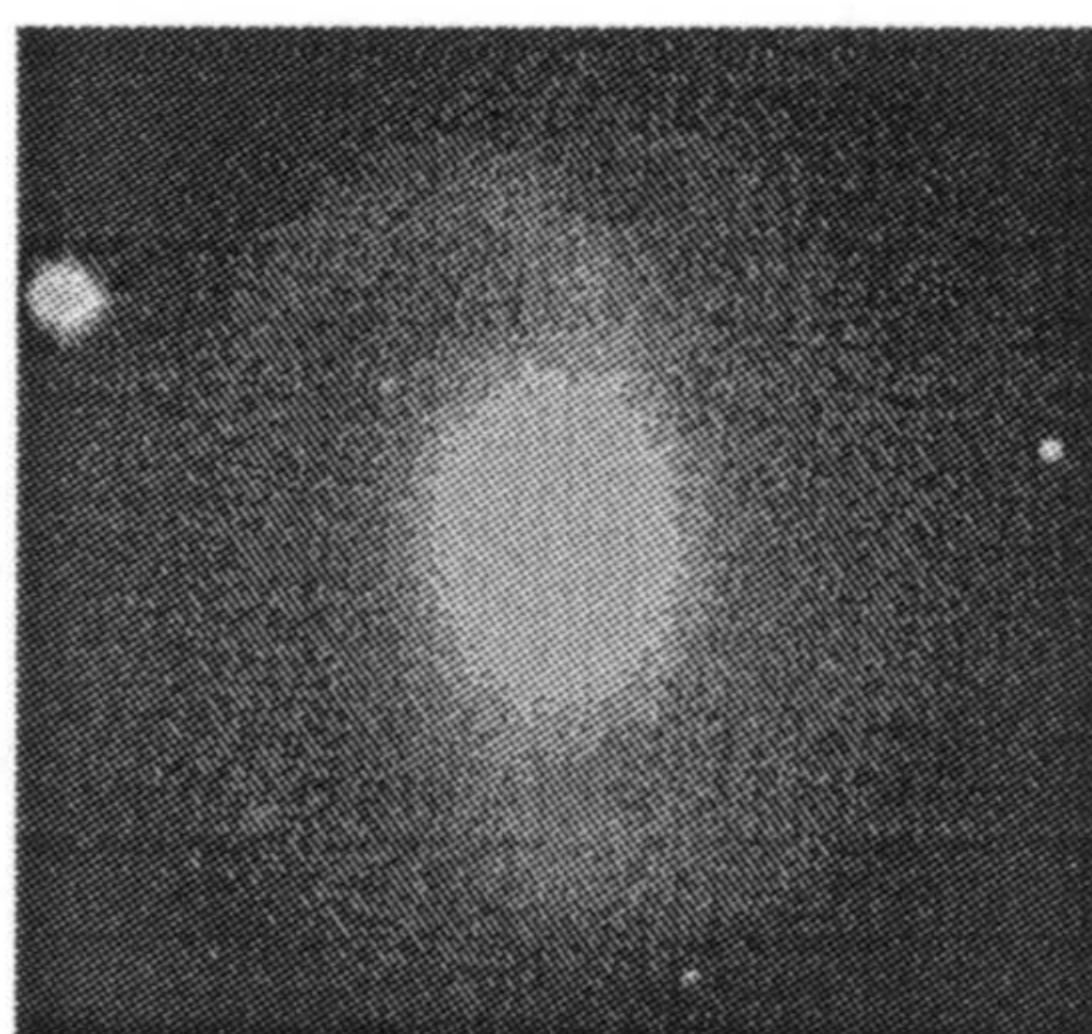
NGC-5364



NGC-7457



NGC-5962



NGC-7743



## Apéndice B

# CLASIFICACIÓN SOBRE IMÁGENES CCD

### B.1 Introducción.

En el campo de la astronomía óptica las imágenes se obtienen directamente mediante el uso de medios fotográficos o mediante detectores electrónicos tales como los mecanismos CCD, y dado que por eficiencia computacional, el proceso de clasificación ha sido desarrollado sobre imágenes discretizadas en el rango de los niveles de gris, se hace necesario abordar el problema de la obtención de transformaciones adecuadas que aplican los valores registrados por la cámara CCD a valores en el rango de niveles de gris.

A continuación procedemos a describir un intento inicial de solución a este problema. Primero se presenta el proceso de captación de imágenes astronómicas mediante un mecanismo CCD, en segundo lugar discutimos el problema de deconvolución de imágenes astronómicas, para finalizar con la formulación de una transformación adecuada, que aplica los valores 'CCD' de una imagen deconvolucionada a una imagen en el rango de niveles de gris.

## B.2 Captación de imágenes CCD.

La energía emitida por una galaxia atraviesa la atmósfera de la tierra, y es interceptada por un sistema de captación que genera un patrón 2-D de intensidades luminosas sobre el 'plano de imagen'. Actualmente, los astrónomos ópticos utilizan en el proceso de digitalización de imágenes, detectores CCD.

Un mecanismo CCD es una matriz  $N \times M$  de elementos fotosensitivos cada uno de los cuales produce una salida proporcional a la cantidad de luz que incide sobre él. En un sistema perfecto (sin discretización, ruido, emborronamiento u otras distorsiones), el patrón de intensidad registrado correspondería a una distribución de intensidad ideal  $h(t)$ . Sin embargo, mientras que el proceso es un fenómeno continuo, los valores registrados que determinan la imagen digitalizada son un conjunto finito de datos  $g(r)$ ,  $r \in R$ , donde  $R$  es un retículo rectangular bidimensional cuyos elementos reciben el nombre de 'píxeles'. La función  $g$  toma valores en un subconjunto del conjunto de los números enteros  $\{z_{min}, \dots, z_{max}\}$  donde  $z_{max} \gg 2^8$ . Generalmente la imagen digital considerada es una matriz  $1024 \times 656$  ( el detector empleado en el proceso de captación posee  $1024 \times 656$  celdas fotosensitivas ) de valores relacionados con la intensidad luminosa en términos de la expresión

$$valor = a + b \times \text{número de fotones recibidos}$$

donde 'b' es conocido, pero el valor de 'a' varía de imagen a imagen. El rango típico es  $z_{min} = 500$  y  $z_{max} = 20.000$ .

El problema de transformar la imagen CCD a otra de niveles de gris, determina por tanto dos problemas distintos, el primero, la deconvolución de la imagen CCD con vistas a obtener imágenes de una mayor calidad para su procesamiento, y el segundo, la transformación de la imagen 'limpia' al rango de los niveles de gris. A continuación se presenta una discusión del primero de estos problemas, y una aproximación inicial a la solución del segundo.

## B.3 Deconvolución.

La transformación de la distribución de intensidades reales  $h(t)$  a la distribución de intensidades observadas  $g(r)$ , expresa la 'degradación' de  $h$  por el emborronamiento debido al movimiento atmosférico y la distorsión debida al ruido físico en el proceso de la detección.

El problema de la reconstrucción de la distribución ideal  $h$  desde los valores registrados  $g$  recibe el nombre 'problema de deconvolución' pudiendo ser abordado desde distintos enfoques. La mayoría de los métodos existentes están basados en el principio de máxima entropía.

La entropía funcional, Gull y Skilling [40], es  $S = -\sum p_i \ln p_i$ , con  $p_i = \alpha S_i$  y  $\sum p_i = 1$ . Los métodos propuestos resuelven el problema en base a minimizar  $-S + \lambda C$  con un multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , o a maximizar la entropía sujeta a la restricción de fidelidad  $C \leq C_{objetivo}$ , en donde la función de restricción  $C$  puede ser, por ejemplo,

$$C = \frac{\|Z - HS\|^2}{2nk_n}$$

correspondiente a ruido gaussiano aditivo de varianza  $k_n$ ,  $H$  matriz de emborronamiento,  $S$  intensidades ideales y  $Z$  intensidades observadas. Skilling y Gull [88], consideran una modificación de este enfoque, según la cual  $C \exp\{S\}$  determina una distribución a priori sobre la clase de distribuciones ideales.

Es bien conocido que en el problema de la deconvolución debe imponerse alguna restricción de alisamiento sobre la clase de distribuciones ideales, para poder obtener una reconstrucción satisfactoria. En este sentido Molina et al [65] proponen y desarrollan un enfoque distinto del problema, para resolver la deconvolución tratando de evitar los inconvenientes que aparecen en la máxima entropía. En esencia, bajo un enfoque bayesiano, proponen un modelo a priori sobre la distribución de la luminosidad ideal. La distribución de intensidad luminosa de



galaxias elípticas es normalmente considerada como

$$\log \frac{I(r)}{I_E} = -3.33 \times \left( \left( \frac{r}{r_E} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)$$

donde  $r$  es la distancia desde el centro de la galaxia,  $I_E$  y  $r_E$  son parámetros que difieren de una galaxia a otra. La distribución de luminosidad del disco puro en una galaxia viene dada por la expresión

$$I(r) = I(0) \exp(-b_0 r).$$

Observando que la luminosidad de las galaxias se expresa normalmente en la escala logarítmica proponen modelar el alisamiento de la distribución luminosa en dicha escala. Supuesta  $S$  la imagen verdadera, consideran para cada pixel  $i$ , la variable  $Y_i = \log(S_i + p)$ , con  $p \approx 100$  en los ejemplos que consideran. Entonces el modelo a priori se formula como

$$P(Y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2k_s} Y'(I - \phi N)Y \right\}$$

donde  $N_{ij} = 1$ , si  $i, j$  son vecinos, y 0 en otro caso. Los parámetros pueden ser interpretados en términos de las siguientes expresiones

$$E[Y_i | Y_j, j \neq i] = \phi \sum_{j \text{ vecino } i} Y_j$$

$$\text{Var}[Y_i | Y_j, j \neq i] = k_s.$$

## B.4 Transformación al rango de niveles de gris.

Resuelto el problema de la deconvolución de la distribución registrada por la cámara CCD, empleando alguna de las técnicas antes consideradas, y supuesto que  $g(r)$  determina la distribución de luminosidad sometida al proceso de la deconvolución, y por lo tanto una distribución 'limpia', el problema que habrá que abordar a continuación es la obtención de la transformación que aplica la

distribución de luminosidad  $g(r)$  deconvolucionada en una distribución de luminosidad  $f(r)$  que toma valores en el rango  $\{0, 1, \dots, 255\}$  de niveles de gris.

Una transformación de los datos  $x_1, \dots, x_n$  es una función  $T$  que reemplaza cada  $x_i$  por un nuevo valor  $T(x_i)$ , obteniendo el conjunto de datos transformados  $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ , con el objetivo de producir un análisis menos complicado, representaciones mas 'informativas' de los datos o simplificaciones efectivas, pero esta definición de transformación resulta demasiado general. La reducción de este conjunto general de transformaciones, a un subconjunto de transformaciones 'válidas', se realiza en base a la exigencia de una serie de propiedades razonables, y así consideraremos que una transformación 'valida'  $T$  deberá verificar las siguientes propiedades:

- (1)  $T$  es una función estrictamente creciente.  $T$  determina entonces una función que respeta el orden de los datos.
- (2)  $T$  debe preservar la información de los cuartiles. Es decir salvo pequeñas diferencias, producidas por la interpolación de los datos, los cuartiles sobre los datos originales se aplican en los cuartiles sobre los datos transformados.
- (3)  $T$  es una función continua.  $T$  transforma entonces valores próximos sobre los datos iniciales, en valores próximos al menos de manera relativa a la nueva escala.
- (4)  $T$  tiene derivadas de todos los órdenes. Esto garantiza que la función  $T$  no tiene aristas agudas y determina una función suave.
- (5)  $T$  posee una forma funcional simple, por lo que su cálculo resultará eficiente desde el punto de vista computacional.

Definimos a continuación la clase de las funciones potencia, que determina una subclase del conjunto de las transformaciones 'válidas'.

**Definición B.1. Transformaciones Potencia.** Las transformaciones potencia tienen la forma

$$T_p(x) = \begin{cases} ax^p + b & \text{si } p \neq 0 \\ c \log x + d & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

donde  $a, b, c, d$  y  $p$  son números reales, tales que  $a > 0$  si  $p > 0$ , y  $a < 0$  si  $p < 0$ .

Las funciones potencia además de satisfacer las condiciones (1)-(5), bajo una elección adecuada de los parámetros, verifican también otras propiedades interesantes, como la posibilidad de ofrecer una adecuada flexibilidad para el trabajo práctico, lo que permite abordar problemas distintos en su contexto. De especial interés para nuestra aplicación, es una propiedad adicional de concavidad. Cualquier transformación potencia, o es concava o es convexa, a través de su dominio de números positivos. Por tanto no hay puntos de inflexión. Como consecuencia aparecen transformaciones potencia que comprimen más la escala para los valores grandes que para los pequeños, y otras que hacen lo contrario.

En nuestro caso, la función de intensidades registradas  $g(r)$ ,  $r \in R$ ,

$$R = \{(i, j) / 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N\}$$

toma valores en el rango  $\{z_{min}, \dots, z_{max}\}$  con  $z_{min} \approx 500$  y  $z_{max} \approx 20.000$ . Sin embargo la información se concentra alrededor de la mediana en un intervalo de amplitud más razonable ( en los ejemplos considerados  $[500, 1500]$  ) apareciendo valores extremos, que no aportan información adicional sobre el objeto galaxia, de forma que la bondad de cualquier transformación que no controle estos valores extremos, quedará sensiblemente afectada.

Así, antes de transformar al rango de niveles de gris, tendremos que aplicar una transformación  $G$ , que controle los valores alejados de la masa de los datos. Esta transformación  $G$  que reexpresa las intensidades, modificando tan solo sustancialmente los valores extremos, deberá verificar

- (i)  $G$  no modifica un determinado valor próximo al centro de los datos ( en

nuestros ejemplos, este valor es la mediana de los datos por su propiedad de robustez )

- (ii)  $G$  es muy próxima a una transformación lineal en un entorno razonable de la mediana

para asegurar que no se produce una modificación de la estructura de los datos significativos (la masa de los datos).

La transformación  $G$  debe por tanto producir una gran comprensión en la escala de los valores extremos, que debe ser mínima en valores próximos al centro de los datos ( expresado en términos del estimador robusto mediana).  $G$  tendrá esa propiedad si es proporcional a la función  $\log(x)$ , por tanto  $G$  será determinada en términos de la función potencia

$$T_0(x) = c \log x + d$$

en donde  $c, d$  serán elegidos para que

$$G(\text{mediana}) = T_0(\text{mediana}) = \text{mediana}.$$

Observese que la función  $G$  así elegida verifica (i),(ii) además de las propiedades de concavidad, y (1)-(5).

En general la especificación de  $G$  pasa por la determinación de los números reales  $c$  y  $d$ , sujeta a la restricción

$$G(m) = m, \text{ con } m = \text{mediana}\{g(r)\}_{r \in R}.$$

Es decir

$$G(m) = c \log(m) + d = m \tag{B.1}$$

con

$$\left( \frac{dG(x)}{dx} \right)_m = c \left( \frac{d \log(x)}{dx} \right)_m = 1 \tag{B.2}$$

Obtenemos por tanto un sistema de ecuaciones, a partir del cual podremos obtener los valores de  $c$  y  $d$ .

Una vez controlados los valores extremos de las intensidades, en términos de una transformación  $G$  como la antes considerada, obteniendo una función de intensidades  $g_G(r) = G(g(r))$ ,  $r \in R$ , procedemos a aplicar  $g_G(r)$  a una función  $f(r)$  en  $\{0, 1, \dots, 255\}$  mediante una transformación  $F$ , es decir  $f(r) = F(g_G(r))$ ,  $r \in R$ , dada por

$$F(z) = 255 \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^\lambda \quad (\text{B.3})$$

y

$$z_0 = \min_{r \in R} g_G(r), z_1 = \max_{r \in R} g_G(r) \text{ y } \lambda > 1.$$

Observar que una transformación lineal estandar del intervalo  $[z_0, z_1]$  al intervalo  $[0, 255]$  sería

$$F'(z) = 255 \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)$$

y nosotros estamos considerando una modificación (B.3), con  $\lambda$  próximo a 1 ( en nuestros ejemplos  $\lambda \approx 1.3$ ), con la idea de comprimir ligeramente la escala de los datos pequeños ( en el intervalo  $[0, 1]$ ).

Por lo tanto dada una función  $g(r)$ ,  $r \in R$ , que expresa las intensidades ya deconvolucionadas, en el rango  $\{z_{min}, \dots, z_{max}\}$  se transforma a una función  $f(r)$ ,  $r \in R$ , en el rango  $\{0, \dots, 255\}$  en términos de

$$f(r) = (F \circ G \circ g)(r)$$

en donde

$$G(x) = c \log x + d$$

y

$$F(z) = 255 \left( \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^\lambda$$

siendo  $c, d$  obtenidos a partir de (B.1) y (B.2).



## Bibliografía

- [1] Balestreri, M, et al, *A proposed pictorial language for describing astronomical objects*, Technical Report, (1980).
- [2] Ballard, D.H., *Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes*, Pattern Recognition, vol. 13, no. 2, pp. 111-122, (1981).
- [3] Besag, J. *Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems*, J. Royal Statist. Soc., Ser. B, **36**, pp. 192-236, (1974).
- [4] Besag, J., *On the estimation and testing of spatial interaction in Gaussian lattice processes*, Biometrika, **62**, pp. 555-562, (1975).
- [5] Besag, J. *On the statistical analysis of dirty pictures, (with discussion)*, J. Royal Statist. Soc., Ser. B, **48**, pp. 259-302, (1986).
- [6] Davis, L. S., *Understanding shape: Angles and sides.*, IEEE Trans. Comput., vol. C-26, **3**, pp. 236-242, (1977).
- [7] Derin, H., Elliot, H., *Modelling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., **9**, pp 39-55, (1987).
- [8] Duda, R.O., Hart, P.E., *Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures*, Commun . ACM, vol. 15, no. 1, pp. 11-15, (1972).

- [9] Fdez-Valdivia, J., Castillo, P., Gómez-Barcina, A., *Use of image analysis for automatic recognition of nematodes. Nematode identification and expert-system technology*, pp. 293-299, (Plenum Publishing Corp., 1989).
- [10] Fdez-Valdivia, J., Pérez de la Blanca, N., *Characterization of shapes in microscopical digital images*, 7th SCIA Procc., pp. 701-708 (1991).
- [11] Freeman, H., *Computer processing of line-drawing images*, Computer Surveys, vol. 6., no. 1, (1974).
- [12] Garcia, J.A., Molina, R., Pérez de la Blanca, N., *Non-supervised characterization of galaxies using different approaches*, Pattern Recognition and A. I., World Scientific Publishing, Vol. 1, pp. 145-154, (1992).
- [13] Geman, S., Geman, D., *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., **6**, pp. 721-741, (1984).
- [14] Gerola, H., Seiden, P.E., *Stochastic star formation and spiral structure of galaxies*, Astrophys. J., **223**, pp. 129-139, (1978).
- [15] Gidas, B., *Nonstationary Markov chains and convergence of the annealing algorithm*, J. Stat. Phys., **39**, pp 73-131, (1985).
- [16] Grenander, U., *Pattern Synthesis. Lectures in Pattern Theory*, Vol. 1, Applied Mathematical Sciences, **18**, (Springer Verlag, 1976).
- [17] Grenander, U., *Tutorial on Pattern Theory*, Technical Report, (Univ. of Brown, 1983).
- [18] Grenander, U., Osborn, B.E., *Parameter estimation in Pattern Theory*, unpublished, Div. Appl. Math., Brown University, (1983).
- [19] Grenander, U., Keenan, D.M., *Towards automated image understanding*, Journal of Applied Probability, **16**, pp 207-221, (1989).

- [20] Grenander, U., Chow, Y., Keenan, D.M., *HANDS: A pattern theoretic study of biological shapes*, (Springer Verlag, 1991).
- [21] Gull, S.F., Skilling, J., *The entropy of an image*, Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems, pp 287-301, Smith y Gandy Eds., 1985).
- [22] Hamabe, M., et al, *Global structure of galaxies* Publ. Astron. Soc. Japan, **31**, 431-450, (1979).
- [23] Hamabe, M., et al, *Global structure analysis* Publ. Astron. Soc. Japan, **34**, 423-434, (1982).
- [24] Hough, P.V.C., *Method and means for recognizing complex patterns*, U.S. Patent 3 069 654, (1962).
- [25] Hubble, E., *Astrophys. J.*, **56**, pp. 162-181, (1922).
- [26] Hubble, E., *Memorandum to the Commission on nebulae of the IAU*, (1923).
- [27] Hubble, E., *Astrophys. J.*, **64**, pp. 321-354, (1926).
- [28] Hubble, E., *The Realm of the Nebulae*, (Yale University Press, 1936).
- [29] Kent, S.M., *CCD surface photometry of field galaxies II. Bulge/disk decompositions*, *Astrophys. J. Supplements*, **59**, pp. 115-159, (1985).
- [30] Kindermann, R., Snell, J.L., *Markov Random Fields and Their Applications*, (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980).
- [31] Kodaria, K., Watanabe, M., Okamura, S., *A statistical study of luminosity profiles of galaxies of galaxies using spheroid disk composite models*, *Astrophys. J. Supplements*, **62**, pp. 703-709, (1987).
- [32] Kormendy, J., *Astrophys. J.*, **217**, pp. 406-430, (1982).

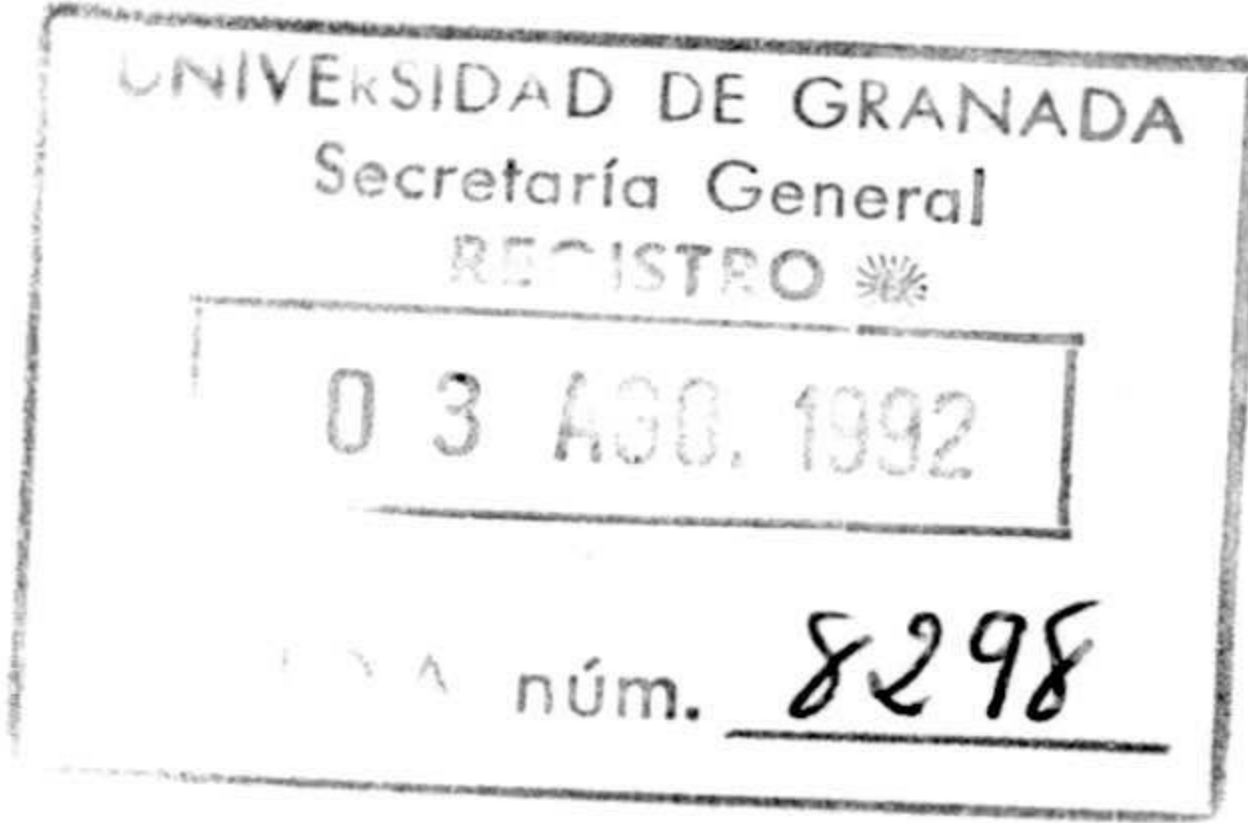


- [33] Knoerr, A., *Globals Models of Natural Boundaries: Theory and Applications*, Report in Pattern Theory 148, Brown University, (1988).
- [34] Kruit , P. C., Searle, L., *Spiral galaxy's structure* *Astron. Astrophys.*, **95**, pp. 105-136, (1981).
- [35] Kruit , P. C., Searle, L., *Global structure of spiral galaxies* *Astron. Astrophys.*, **110**, pp. 79-90, (1982).
- [36] Kurtz, J., Mussio, P., Ossorio, P.G., *A cognitive system for astronomical image interpretation*, *Pattern Recognition Letters*, **11**, pp. 507-515, (1990).
- [37] Lauberts, A., Valentijn, E.A., *The Surface Photometry Catalog of the ESO-Uppsala Galaxies*, European Southern Observatory, Garching bei Munchen.
- [38] Mardia, K.V., Hainsworth, T.J., *A spatial thresholding method for image segmentation*, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 10, no. 6, pp. 919-927, (1988).
- [39] Marroquin, J.L., Mitter, S., Poggio, T., *Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision*, *J. Am. Stat. Assoc.*, 82, pp. 76-89, (1987).
- [40] McKee, J.W., Aggarwal, J.K., *Computer recognition of partial views of curved objects*, *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-26, no. 8, pp. 790-800, (1977).
- [41] Mokhtarian, F., Mackworth, A., *Scaled-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes*, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8, no.1, pp. 34-43, (1986).
- [42] Molina, R., Pérez de la Blanca, N., Ripley, B. D., *On the deconvolution of astronomical images*, *Newsletter of the working group for Modern Astronomical Methodology*, Issue 7, pp. 16-18, (1988).

- [43] Molina, R., Pérez de la Blanca, N., Ripley, B.D., *Statistical restoration of astronomical images*, en Data Analysis in Astronomy III, Plenum Publishing Corp., pp. 75-82, (1989).
- [44] Molina, R., Pérez de la Blanca, N., *Using spatial models as priors in astronomical image analysis*, J. Applied Statistics, **16**, pp. 193-206, (1989).
- [45] Molina, R., del Olmo, A., Perea, J., Ripley, B.D., *Bayesian deconvolution in optical Astronomy*, Astrom. J. 103, pp. 666-675, (1992).
- [46] Molina, R., Ripley, B.D., Molina, A., Moreno, F., Ortiz, J.L., *Bayesian deconvolution with prior knowledge of object location. Applications to ground-based planetary images*, por aparecer en Astrom. J..
- [47] Okamura, S., *Global structure of Virgo Cluster galaxies*, en ESO Workshop on The Virgo Cluster of Galaxies, pp. 201, (Richter y Bingglei Eds., 1985).
- [48] Pavlidis, T., *Poligonal approximations by Newton's method*, IEEE Trans. Comput., vol. C-26, no. 8, pp. 800-807, (1977).
- [49] Pavlidis, T., *Segmentation of pictures and maps through functional approximation*, CGIP, vol. 1, pp. 360-372, (1972).
- [50] Pérez de la Blanca, N., Gómez-Barcina, A., Fdez-Valdivia, J., Castillo, P., *A methodology to classify nematodes from digital images. Part I: Capturing and calibrating images*, (en prensa).
- [51] Pérez de la Blanca, N., Fdez-Valdivia, J., Molina, R., *Synthesis and classification of 2-D shapes from their landmark points*, , Pattern Recognition and A. I., World Scientific Publishing, Vol. 1, pp. 35-48, (1992).
- [52] Pérez de la Blanca, N., Fdez-Valdivia, J., García, J. A., *Characterizing planar outlines*, submitted.
- [53] Press, W. et al, *Numerical recipes in C*, (Cambridge University Press, 1988).

- [54] Ripley, B.D., *Statistics, images and pattern recognition*, Canad. J. Statist., **14**, pp. 83-111, (1986).
- [55] Ripley, B.D., *Statistical Inference for Spatial Processes*, (Cambridge University Press, 1988).
- [56] Ripley, B.D., Sutherland, A.I., *Finding spiral structures in images of galaxies*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A., (1990).
- [57] Sandage, A., *The Hubble Atlas of Galaxies*, (Carnegie Institution of Washington, 1961).
- [58] Sandage, A., *Classification and stellar content of galaxies obtained from direct photography*, Star and Stellar Systems IX, (1975).
- [59] Seiden, P.E., Gerola, H., *Properties of spiral galaxies from stochastic star formation model*, Astrophys. J., **233**, pp. 56-66, (1979).
- [60] Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, (Academic Press, Londres, 1982).
- [61] Simien, F., Vaucouleurs, G., *Systematics of bulge-to-disk ratios*, Astrophysical J., **302**, pp. 504-578, (1986).
- [62] Skilling, J., Gull, S.F., *Bayesian maximum entropy image reconstruction*, Spatial Statistics and Imaging, A. Possolo (Ed), IMS Lecture Notes, 26pp, (1989).
- [63] Takase, B. et al, *An Atlas of Selected Galaxies*, (University of Tokio Press, 1984).
- [64] Teh, Ch.H., Chin R.T., *On the detection of dominant points on digital curves*, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-2, no.8, pp. 859-873, (1989).

- [65] Thonnat, M., *Towards an automated classification of galaxies*, en *Le Monde des Galaxies*, (Springer Verlag, 1988).
- [66] de Vaucouleurs, G., en *Problems of Extra-Galactic Research, IAU Symp.*, No. 15, ( G.C. McVittie Ed., The MacMillan Co., New York), pp. 1, (1962).
- [67] de Vaucouleurs, G., en *The Formation and Dynamics of Galaxies, IAU Symp.*, No. 58, ( Shakeshaft J. R. Ed., D. Reidel Publ. Co., Dordrecht), pp. 335, (1980).
- [68] Vorontsov-Velyaminov, B.A., *Morphological Catalogues of Galaxies*, Vol. 1,2,3,4, (1962-1968).
- [69] Wolf, M., *Public. Astrophys. Inst. König*, **3**, No. 5, (1908).



**Iltmo. Sr. Decano  
Facultad de Ciencias  
GRANADA**

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha 5-8-92  
ENTRADA NUM. 1462

En cumplimiento del artículo 31 de las Normas Regulatoras de los estudios de Tercer Ciclo de esta Universidad, adjunto se remite un ejemplar de la Tesis Doctoral presentada por el Doctorando **D. JOSE ANTONIO GARCIA SORIA**.....  
Titulada **.CLASIFICACION AUTOMATICA DE GALAXIAS**.....  
.....  
y dirigida por el Profesor/es Dr/es **D. RAFAEL MOLINA SORIANO y D. NICOLAS PEREZ DE LA BLANCA**.....  
con objeto de mantenerla depositada desde el día **.29 de julio de 1992**.. hasta el día **.2 de octubre de 1992**..... para que pueda ser examinada por cualquier Doctor que así lo desee.

Granada, **30 de julio de 1992**  
EL PRESIDENTE DE LA COMISION  
DE DOCTORADO,



**David Aguilar Peña**  
Vicerrector de Ordenación Académica