# METODOS SUBJETIVOS PARA LA COMPARACION DE NUMEROS DIFUSOS

Antonio Gonzalez Muñoz

TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1987

D. Antonio González Muñoz relizó la lectura y defensa de la Tesis Doctoral "Métodos subjetivos para la comparación de números difusos", el dia 12 de Marzo de 1988, obteniendo la calificación de Apto Cum-Laude.

El Tribunal quedó constituido de la forma siguiente:

PRESIDENTE: Dr. D. Enrique Trillas Ruiz,
Catedrático de la Universidad Politécnica de Barcelona.

VOCALES: Dr. D. Luis Maria Laita de la Rica,
Catedrático de la Universidad Politécnica de Madrid.

Dr. D. Claudio Alsina i Català,
Catedrático de la Universidad Politécnica de Barcelona.

Dr. D . Miguel Delgado Calvo-Flores,
Profesor Titular de la Universidad de Granada.

SECRETARIO: Dr. D. José Luis Verdegay Galdeano,
Profesor Titular de la Universidad de Granada.

TESIS DOCTORAL

# METODOS SUBJETIVOS PARA LA COMPARACION DE NUMEROS DIFUSOS

ANTONIO GONZALEZ MUÑOZ



*Memoria que, para optar al grado de Doctor, presenta el licenciado en Ciencias Matemáticas, D. Antonio González Muñoz, Granada, Mayo 1987*

Directora de la tesis
Profa Dra. Dª Maria Amparo Vila Miranda

Mª Amparo Vila

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1987

Quisiera expresar mi profundo agradecimiento a la profesora Dra. Dª Maria Amparo Vila Miranda, por su constante dedicación y estímulo en la dirección de esta memoria. Así como, al Grupo de Trabajo en Razonamiento Aproximado de la Universidad de Granada, sin cuyo apoyo no podría haberla realizado, y en especial al profesor D. Luis Miguel de Campos Ibañez, compañero y consejero a lo largo de todo este trabajo.

También quisiera agradecer al Profesor Dr. C. Alsina, de la Universidad Politécnica de Cataluña, sus valiosas indicaciones sobre la utilización de las técnicas de mayorización.

Por último, quiero agradecer la ayuda prestada por mis conpañeros del Colegio Universitario de Jaén, y a todos aquellos que han contribuido a la realización de esta memoria.

INDICE

INTRODUCCION GENERAL.................................. 2

CAPITULO I

0. INTRODUCCION........................................ 2

1. MODELO DE REPRESENTACION Y CLASIFICACION DE LAS CANTIDADES IMPRECISAS........................ 5

2. ENFOQUE BASADO EN EL PRINCIPIO DE DIFUMINACION........... 8

2.1 CONCEPTO DE CANTIDAD DIFUSA........................ 9

2.2 CONCEPTO DE INTERVALO Y NUMERO DIFUSO............ 10

2.3 ENTEROS DIFUSOS................................... 13

2.4 EL PROBLEMA DE LA NORMALIZACION................. 14

3. ENFOQUE TOPOLOGICO PARA DEFINIR NUMEROS DIFUSOS.......... 17

4. OPERACIONES ENTRE CANTIDADES DIFUSAS.................. 19

4.1 EL PRINCIPIO DE EXTENSION.......................... 19

4.2 OPERACIONES GENERICAS DE CANTIDADES DIFUSAS. RELACION CON LA REPRESENTACION POR $\alpha$-CORTES....... 20

4.3 EXTENSION DE LAS OPERACIONES ENTRE NUMEROS REALES. 22

5. APLICACIONES DE LAS CANTIDADES DIFUSAS Y SU ARITMETICA... 27

6. COMPARACIONES ENTRE CANTIDADES DIFUSAS. PANORAMA ACTUAL.. 29

6.1 RELACIONES CLASICAS................................ 29

6.2 RELACIONES DIFUSAS................................. 33

7. PROCESO DE ORDENACION MEDIANTE UNA FUNCION Y UN CONJUNTO ORDENADO............................................. 38

7.1 ESQUEMA GENERAL.................................... 39

7.2 COMPATIBILIDAD CON LAS OPERACIONES................ 41

7.3 DISTANCIA Y POSITIVIDAD ASOCIADAS A UNA FUNCION

ORDENADORA.................................... 51
7.3.1 DISTANCIA ASOCIADA A UNA FUNCION ORDENADORA.. 52
7.3.2 POSITIVIDAD RESPECTO DEL ORDEN GENERADO POR UNA FUNCION ORDENADORA...................... 53

CAPITULO II

0. INTRODUCCION.......................................... 56
1. METODO DE COMPARACION NIS.............................. 59
1.1 SISTEMAS DE COMPARACION Y FUNCION ORDENADORA...... 59
1.1.1 DISCRETIZACION DEL PROBLEMA CONTINUO......... 59
1.1.2 FORMA DE COMPARACION NIS.................... 60
1.1.3 SISTEMAS DE COMPARACION ASOCIADOS A LA ALTURA 63
1.1.4 METODOS PARA OBTENER SISTEMAS DE COMPARACION. 65
1.2 FUNCION NIS-g....................................... 68
1.2.1 DEFINICION Y PROPIEDADES GENERALES........... 68
1.2.2 FUNCION NIS-g CON ORDEN LEXICOGRAFICO........ 77
1.2.3 FUNCION NIS-g CON ORDEN FUERTE............... 81
1.2.4 FUNCION NIS-g CON MAYORIZACION.............. 83
1.3 CASOS PARTICULARES Y EJEMPLOS DE LA FUNCION NIS-g. 85
1.3.1 FUNCION NIS-EXTREMO.......................... 85
1.3.2 FUNCION NIS-PROMEDIO......................... 90
1.3.3 EJEMPLOS DE COMPARACION BAJO LAS DISTINTAS FUNCIONES NIS.............................. 93
2. INDICE PROMEDIO........................................ 102
2.1 INTEGRACION DEL METODO NIS......................... 102
2.2 ESTUDIO GENERAL DEL INDICE......................... 102
2.2.1 DEFINICION DEL INDICE PROMEDIO............... 102
2.2.2 PROPIEDADES DEL INDICE PROMEDIO.............. 104
2.2.3 FORMA DEL INDICE PROMEDIO SOBRE SISTEMAS FINITOS.................................. 109

2.2.4 EL INDICE PROMEDIO COMO EXTENSION DE ALGUNOS INDICES CONOCIDOS.......................... 111
2.3 ESTUDIOS PARTICULARES DEL INDICE................. 112
2.3.1 SISTEMA [0,1] Y MEDIDA DE STIELTJES.......... 112
2.3.2 SISTEMA FINITO Y DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD GENERAL.................................. 115
2.3.3 EJEMPLOS DE COMPARACION CON EL INDICE PROMEDIO................................ 116
3. EXTENSION DEL INDICE PROMEDIO.......................... 123
3.1 FUNCION COMPARADORA DE GRADO m...................... 123
3.2 CASOS PARTICULARES.................................. 125

**CAPITULO III**

0. INTRODUCCION........................................... 127
1. INFORMACION PROPORCIONADA POR UNA CANTIDAD DIFUSA........ 130
1.1 DEFINICION GENERAL.................................. 130
1.2 INFORMACIONES DEPENDIENTES DE LA ALTURA Y LA IMPRECISION.......................................... 132
2. INFORMACIONES SOBRE NUMEROS DIFUSOS...................... 137
2.1 LA FUNCION $I_0$......................................... 137
2.2 LA FUNCION $I_1$......................................... 142
2.3 LA FUNCION $I_2$......................................... 146
3. TRANSFORMACIONES SOBRE NUMEROS DIFUSOS.................. 153
3.1 PLANTEAMIENTO........................................ 153
3.2 TRANSFORMACIONES QUE CONSERVEN $I_0$................... 155
3.2.1 CASO DE NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES......... 155
3.2.2 CASO DE NUMEROS DIFUSOS CONTINUOS........... 160
3.3 TRANSFORMACIONES QUE CONSERVEN $I_1$................... 170
3.3.1 CASO DE NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES......... 170
3.3.2 CASO DE NUMEROS DIFUSOS CONTINUOS........... 175

COMENTARIOS FINALES........................................ 187

BIBLIOGRAFIA............................................... 191

# INTRODUCCION GENERAL

La utilización de modelos matemáticos para representar situaciones reales, investigar sobre ellas y tratar de mejorarlas ha sido una constante a lo largo de toda la historia de la Ciencia. No obstante, la introducción del ordenador y la complejidad de las situaciones a las que el hombre actual se enfrenta, han hecho que esta metodología de trabajo se haya desarrollado enormemente a lo largo de la segunda mitad de este siglo, y que se haya aplicado a disciplinas que nunca la habían utilizado.

Todo esto hace que los modelos matemáticos a desarrollar se hayan hecho cada vez más complejos, utilizando a su vez datos más sofisticados. Ocurre entonces, que la información necesaria para trabajar con estos modelos no puede expresarse de forma clara o inequívoca. Las razones para ello pueden ser diversas; el origen más habitual se encuentra, de una parte en el propio fenómeno a modelizar y de otra, en la fuente de los datos a medir que puede ser un instrumento sujeto a error, o incluso una información suministrada por una afirmación lingüistica. Es pues necesario desarrollar teorías, técnicas de representación y métodos de tratamiento de la imprecisión y la incertidumbre. La presente memoria se encuadra dentro de este ámbito.

Como hemos indicado en el párrafo anterior, un problema que aparece con gran frecuencia es el de las valoraciones imprecisas. Existen muchas situaciones en las que el valor de ciertas magnitudes no se conoce exactamente, y en la mayoría de los casos esto es debido a que la información acerca de ello proviene de afirmaciones tales como:

- Este proceso tardará al menos dos horas.

- Espero ganar más de un millón.
- El atajo acorta alrededor de tres Km., etc.

Todas ellas reflejan datos numéricos no exactos, y pueden calificarse como cantidades imprecisas.

La modelización de estas cantidades se hace necesaria en disciplinas tales como la Investigación Operativa (Zimmermann [85]), y Análisis de Decisiones (Watson y Weis [6], Buckley [6]), en donde se utilizan valoraciones de este tipo.

La teoría de subconjuntos difusos (Zadeh [79]) proporciona un adecuado marco teórico para la representación de cantidades imprecisas. El modelo que propone esta teoría es el concepto de cantidad o número difuso, cuya definición ha ido evolucionando desde el subconjunto difuso de números reales, a las últimas versiones que lo caracterizan como un subconjunto difuso de $\mathbb{R}$, convexo, con función de pertenencia semicontinua superiormente y con soporte acotado. Esta definición será la utilizada a lo largo de la memoria.

De poca utilidad sería la definición de cantidad difusa en el desarrollo de modelos, sino existen asociados a ella, técnicas necesarias para efectuar operaciones, comparaciones, etc. Las operaciones entre cantidades difusas han sido desarrolladas de forma bastante satisfactoria por Dubois y Prade [24,25], mediante la aplicación del principio de extensión. No ocurre así, en el tema de la comparación de cantidades difusas, en donde, si bien se han realizado numerosos estudios, existen todavía muchos problemas y ejemplos en los cuales la resolución no es lo suficientemente adecuada, a veces incluso contraintuitiva, y en todos los casos demasiado rígida, no permitiendo variaciones dependientes del contexto de elección y del decisor. La importancia de este tema es evidente, ya que incide directamente en todos los problemas de Decisión y Optimización, que involucran cantidades de este tipo.

En esta memoria hemos estudiado el tema de la comparación entre cantidades difusas, desarrollando métodos que mejoran algunos de los existentes, pero sobre todo se ha intentado no olvidar la finalidad última, de utilización de estos conceptos en modelos matemáticos imprecisos, y por ello se han mantenido siempre los objetivos de:

- Compatibilidad: Se han intentado que los métodos desarrollados sean compatibles con las operaciones existentes entre cantidades difusas.
- Flexibilidad y facilidad de implementación: Se ha buscado que los métodos de comparación sean fácilmente implementables en un ordenador, y puedan adaptarse a los requerimientos o planteamientos personales del decisor que los utiliza.

Con objeto de situar la memoria vamos a hacer un breve resumen de los trabajos que sobre el tema se han realizado. Obviamente éste será ampliado en el capítulo I.

Los números difusos y su aritmética fueron introducidos inicialmente por Zadeh [81], con el propósito de analizar y manipular valores numéricos aproximados. Posteriormente encontramos dos modelos en la literatura. El primero ha sido desarrollado entre otros por Dubois y Prade [24,25], Jain [39], Baas y Kwakernaak [2], Nahmias [54], Mizumoto y Tanaka [51], Dijkman et al. [21], Sánchez [63], Czogala y Dwrewniach [15], etc., y se basa en la utilización del principio de difuminación de Goguen, según el cual un número difuso es cualquier subconjunto difuso de $\mathbb{R}$. Esta definición es en algunos casos extraña, y diferentes autores la restringen bajo condiciones de convexidad, normalización, etc., reservando el concepto inicial para la definición de cantidad difusa, y relacionando los números difusos con la extensión de los intervalos compactos de la recta real.

La aritmética sobre este modelo se basa en el principio de extensión de Zadeh, bajo el cual se definen fundamentalmente las cuatro operaciones básicas, y los operadores máx y mín. La aritmética de cantidades difusas es una extensión del análisis de intervalos (Moore [52,53]), y del álgebra de cantidades multivaluadas (Young [78]).

El segundo modelo para definir números difusos, se ha desarrollado buscando la conservación de propiedades topológicas de "los números reales difusos". Extendiendo el intervalo unidad difuso (Hutton [37]), Gantner et al. [31], Rodabaugh [61] y Lowen [4], entre otros, construyen la Recta Real Difusa, sobre la cual, con una topología adecuada logran definir una suma difusa continua, entre números difusos. El número difuso que define este método es un caso particular del definido por el método anterior.

La manipulación aritmética de cantidades numéricas mal conocidas provoca, en algunos casos, la necesidad de compararlas. Por tanto, aparte de combinar aritméticamente números difusos, otro problema que se plantea para su correcta utilización es la comparación, es decir, decidir de entre dos números difusos cual es el mayor o el menor.

Para la comparación entre números difusos existen distintos métodos, algunos de ellos, contraintuitivos (ver ejemplos en Bortolan y Degani [4]), y la mayor parte, tan sólo considera un punto de vista en la comparación. La posibilidad de métodos de comparación subjetivos, que permitan distintas decisiones, por distintos decisores no han sido en general contemplada.

Los primeros índices de comparación definidos consideraban un conjunto difuso de alternativas óptimas, y calculaban el grado en que cada alternativa puede considerarse como tal. Baas y Kwakernaak [2], Baldwin y Guild [3] y Jain [38,40], son ejemplos de este tipo. Otros autores, definen una función ordenadora de una subclase de cantidades difusas al conjunto de números reales $\mathbb{R}$, donde existe un orden natural. Este método ha sido seguido por Yager [73,75], Chang [13] y Adamo [1]. Otros métodos utilizan la comparación de algunos elementos de los $\alpha$-cortes, entre estos tenemos el de Tanaka et al. [65], y el de Ramík y Římánek [60]. Dubois y Prade [26] definen cuatro índices que permiten describir la localización de dos números difusos; más recientemente, Delgado et al. [19], basándose en el concepto de función de comparación, y en el de medidas difusas derivadas de los números difusos comparados, definen dos relaciones difusas de orden estricto, sobre números difusos normalizados.

El propósito de esta memoria es precisamente el de definir modelos de comparación sobre números difusos. Para ello, seguiremos la línea que utiliza funciones ordenadoras sobre subclases de cantidades difusas, a conjuntos ordenados.

En los métodos de comparación definidos consideramos la subjetividad del decisor como un parámetro adicional en el modelo. También se consideran distintos tipos de dominancia entre números difusos, desde una más débil, que decide con más tolerancia, hasta otra más fuerte, que sólo decide en casos de dominancia estricta. Finalmente, asociada a cada relación de orden, consideramos una relación de indiferencia, que en algunos casos constituye una válida relajación del concepto de igualdad entre números difusos.

La memoria se divide en tres capítulos. En el primero se expone la notación, conceptos y propiedades, que utilizaremos en el resto del trabajo. Este capítulo se divide a su vez en dos partes, en la primera estudiamos el modelo de cantidad imprecisa y una clasificación de éstas en dos tipos según sea el origen de la imprecisión: el propio concepto (CD1) o nuestro deficiente conocimiento (CD2). Esta clasificación será utilizada en los métodos de comparación.

Para la definición de cantidad difusa, y más concretamente del concepto más restrictivo de número difuso, existen las dos líneas antes comentadas, y cuyo estudio se desarrolla en esta primera parte. El primer enfoque de definición es más intuitivo y general, y será el que consideraremos en el resto de la memoria. Se discute el problema de la necesidad o no de la exigencia de la normalización en la definición de número difuso, y termina la primera parte con un estudio de las operaciones entre cantidades difusas, definidas vía principio de extensión, y un estudio del panorama actual de las comparaciones entre números difusos.

La segunda parte del capítulo, plantea las bases teóricas a emplear en los métodos de comparación que se estudian posteriormente.

El capítulo II se dedica al desarrollo de métodos particulares para comparar números difusos. Se recogen dos vías o mecanismos de comparación: la forma de comparación NIS y la del índice promedio. Ambas se formulan de forma genérica en los términos mencionados en el último apartado del capítulo anterior.

El método de comparación NIS, discretiza el número difuso a través de un conjunto finito de $\alpha$-cortes, llamado Sistema de Comparación. La función NIS-g representa esta discretización, asignando a cada número difuso un vector de $\mathbb{R}^m$, en donde, cada coordenada es interpretada como una, o varias, medidas de la posición de cada $\alpha$-corte en $\mathbb{R}$. Las distintas ordenaciones de $\mathbb{R}^m$ consideradas (lexicográfico, fuerte y mayorización) generan distintas relaciones de orden (dominancias débil, total y parcial) sobre el conjunto de clases de indiferencia.

El índice promedio se obtiene a partir de la integración de la medida de posición de cada $\alpha$-corte con respecto a una ponderación subjetiva de los niveles del sistema de comparación, ya no necesariamente finito. El resultado final es un valor real, que representa la posición media del número difuso.

En definitiva se trata de hacer uso del orden de $\mathbb{R}^m$ (función NIS-g) o $\mathbb{R}$ (índice promedio), mediante la construcción de funciones ordenadoras, que trasladan el orden de estos conjuntos, al conjunto de números difusos.

Una característica común a ambos métodos es la introducción de la subjetividad del individuo en el proceso de comparación. Esta subjetividad del individuo se pone de manifiesto en ambos casos, mediante la elección del sistema de comparación, y la determinación de las medidas de posición sobre cada $\alpha$-corte.

Las medidas de posición se generan seleccionando distintos valores sobre la forma paramétrica de los $\alpha$-cortes. En el caso de la función NIS-g, se eligen dos valores de parametrización, uno en $\lambda$ y otro en $\mu$; en el índice promedio, sólo se toma uno. En el método NIS, cuando $\lambda$ y $\mu$ coinciden (función NIS-promedio), y en el índice promedio, el único parámetro que define la medida de posición se interpreta como un índice de optimismo-pesimismo. La determinación de regiones de dominancia en función de este parámetro facilita el proceso de comparación entre números difusos.

Para ambos métodos se estudian propiedades generales, y se hace un detallado estudio de diferentes ejemplos, algunos de los cuales aparecen en la literatura como "casos patológicos", para los que la comparación no resulta sencilla. También se recogen aquellos métodos existentes en la literatura que son casos particulares de los aquí propuestos: Adamo [1], Tanaka et al. [65], Tsumura et al. [68], Rámik y Římánek [60] y Yager [75].

El capítulo termina con una formulación que engloba como casos particulares, a los dos métodos estudiados.

En algunas situaciones, el método de comparación NIS necesita que todas las cantidades difusas a comparar tengan la misma altura. En el capítulo III, proponemos un método para transformar la altura de las cantidades difusas del tipo CD2. Este problema, si bien surge de las hipótesis necesarias para que ciertas técnicas de comparación, propuestas en el capítulo II, funcionen bien, tiene una importancia que trasciende a su origen. Puesto que, el reducir dos cantidades difusas a igual altura, surge en casi todos los casos en los que hay que tratarlas conjuntamente.

Para la construcción de transformaciones que modifiquen la altura de cantidades difusas del tipo CD2, y como garantía de la conservación de la información referente a la cantidad imprecisa representada, definiremos un índice que evalue la información que nos proporciona el conocimiento de dicha cantidad y que permanecerá invariante tras la transformación.

La definición de información sobre cantidades difusas se hace de forma axiomática, inspirandose para ello en la teoría generalizada de la información de Kampé de Fèriet [41], y relacionándola con la idea de parecido a un número real. Estudiamos informaciones dependientes exclusivamente de la certidumbre y la imprecisión. Y sobre dos tipos diferentes de funciones de información, definiremos transformaciones, que modificando certidumbre por imprecisión, modifican la altura del número difuso, y mantienen constante la relación certidumbre-imprecisión que define a la información.

Estudiamos dos transformaciones, ya que aunque ambas presentan análogas propiedades generales, la primera funciona mejor en la comparación a distintas alturas, y la segunda ante un cambio de escala. Ambas transformaciones presentan sobre números difusos continuos una forma común, dependiente de la inversa de una función, variando ésta sobre cada información.

La transformaciones sobre números difusos definidas, siempre permiten la normalización, es decir, a partir de representaciones inciertas de una información numérica siempre podemos generar representaciones totalmente ciertas. El trabajar con números difusos normalizados, facilita el proceso de comparación, en particular esto pasa con el método NIS.

La memoria termina con un resumen de los objetivos alcanzados y de los trabajos abiertos para futuras investigaciones.

# CAPITULO I

# 0. INTRODUCCION.

Dedicamos este primer capítulo de la memoria a sentar las bases, notación, conceptos y propiedades, que serán utilizadas a lo largo de la misma. Por ello diferenciamos dos partes fundamentales: la primera, se dedica a recoger un estudio sobre los números difusos y sus propiedades, la segunda expone una metodología general para definir un proceso de comparación. La primera será utilizada en todo el resto del trabajo y la segunda especialmente en el capítulo II, dedicado a la comparación entre números difusos.

Comienza pues la primera parte de este capítulo, tratando el problema de la definición de número difuso. Es un hecho conocido, que conceptos tales como: cantidad imprecisa, cantidad difusa, intervalo difuso, número difuso, etc., no se encuentran totalmente establecidos. Por nuestra parte, empleamos el término cantidad imprecisa para referenciar un valor que no se conoce con precisión o certeza, distinguiendo entre dos tipos básicos de cantidades según sea el origen de su imprecisión. El concepto de cantidad difusa, se relaciona con el modelo matemático que proporciona la teoria de subconjuntos difusos, para modelizar cantidades imprecisas, en este sentido hablaremos también de dos tipos de cantidades difusas.

Para la definición de cantidad difusa, y más concretamente del concepto más restrictivo de número difuso, existen dos líneas diferenciadas. La primera, basada en el principio de difuminación de Goguen, define la cantidad difusa como cualquier subconjunto difuso de $\mathbb{R}$. La segunda línea, introducida por Gantner, Steinlage y Warren, se basa en desarrollos de tipo topológico, bajo los cuales se construye la recta real difusa.

El primer enfoque es más intuitivo y general, y será el que consideraremos a lo largo de este capítulo, y en toda la memoria. A partir de él, se definen los conceptos de intervalo y número difuso, como cantidades difusas que verifican ciertas propiedades, y se aborda el problema de imponer o no, la condición de normalización en las definiciones anteriores.

Sigue a la definición un estudio de las operaciones, entre cantidades difusas, definidas vía principio de extensión. En este apartado se han seguido básicamente los trabajos de Dubois y Prade. También se recogen, condiciones para que los α-cortes de una expresión difusa real-valuada, puedan expresarse en función de los α-cortes de los términos difusos operados. El problema fue planteado, y parcialmente resuelto por Nguyen, y finalmente resuelto por Dubois. Este resultado se utilizará en el capítulo II, para estudiar la relación entre operaciones y relación de orden.

Termina la primera parte de este capítulo con un estudio del panorama actual sobre comparaciones entre cantidades difusas. En este apartado, más que una reseña de técnicas, hemos tratado de presentar las distintas tendencias y formas de comparar, incluyendo a aquellas que constituyen un caso particular de los métodos de comparación desarrollados posteriormente.

La segunda parte del capítulo (apartado 7), plantea las bases teóricas del método a emplear en los métodos de comparación que serán objeto de estudio en el resto del trabajo. En líneas generales, el método consiste en la construcción de una función entre un conjunto a ordenar y un conjunto ordenado, trasladando la relación de orden del codominio, a una relación de orden sobre las clases de equivalencia en el dominio. Estudiamos el proceso de construcción general, y en particular cuando el conjunto ordenado es $\mathbb{R}^m$. Sobre éste, se consideran tres relaciones de orden: lexicográfico, fuerte y de mayorización. Se estudian, sobre todo, las propiedades necesarias para que el orden inducido sea compatible con algún tipo de operación definida sobre el conjunto inicial.

Los desarrollos y resultados de este apartado constituyen la base del capítulo II y son originales en su mayor parte.

# 1. MODELO DE REPRESENTACION Y CLASIFICACION DE LAS CANTIDADES IMPRECISAS.

En muchas circunstancias, sobre todo cuando hay que tomar decisiones, los datos son imprecisos. A pesar de ello, los procesos de cálculo y tratamiento general de las cantidades numéricas, tradicionalmente se han desarrollado para elementos claramente definidos. De ahí, que las cantidades imprecisas, su modelo de representación, aritmética y comparación han tenido un amplio tratamiento entre distintos investigadores en los últimos tiempos. La herramienta natural para modelizar tales cantidades es la teoría de los subconjuntos difusos.

Para la utilización de cantidades imprecisas es fundamental el origen de las mismas; ya que sobre el mismo concepto, el de imprecisión numérica, pueden a su vez diferenciarse dos tipos distintos de cantidades, con un origen de imprecisión basado bien en una natural vaguedad o bien en nuestro deficiente conocimiento. Así, proponemos la siguiente clasificación:

<u>Cantidades imprecisas del tipo I</u>.

Bajo este tipo recogemos las cantidades procedentes de propiedades cuantitativas de naturaleza imprecisa. Es decir, aquellas en las que la vaguedad se encuentra en el concepto mismo que determina la cantidad. Ejemplos de este tipo son: "Edad de un hombre joven", "Estatura alta" , etc. Tienen usualmente naturaleza lingüistica, y su imprecisión proviene de conceptos usuales en la conversación humana tales como "joven", o "alta" que son relativos.

<u>Cantidades imprecisas del tipo II</u>.

Bajo este tipo recogemos la cantidades procedentes de medidas obtenidas con una fiabilidad variable y con márgenes de error. En tales cantidades el origen de la imprecisión no es el concepto, sino por el contrario, nuestro deficiente conocimiento de la medida realizada sobre dicho concepto. Un ejemplo de este tipo podría ser "la cantidad de transaminasa en un paciente", en donde la transaminasa en el paciente es un concepto claro, pero la cantidad que contiene su cuerpo sólo se conoce aproximadamente.

Sobre las cantidades de este tipo, distinguimos dos conceptos fundamentales para su tratamiento: La imprecisión y la incertidumbre. "Si representamos una información bajo la forma de una proposición lógica...", "la imprecisión se refiere al contenido de dicha proposición y la incertidumbre se refiere a su verdad, entendida como su conformidad con una realidad" (Dubois [22]). En estas cantidades, la imprecisión puede provenir de la utilización de máquinas de medición, errores de redondeo, etc.

La clasificación de cantidades imprecisas en dos tipos distintos, es útil particularmente para la comparación de las mismas, que desarrollaremos en los siguientes capítulos.

Dado que las cantidades numéricas precisas se representan, en general, mediante números reales, podríamos dar un modelo de representación de cantidades imprecisas mediante "números difusos reales", y más generalmente cantidades difusas.

El concepto de cantidad difusa es un modelo matemático para la utilización de magnitudes que debido a su propio concepto o a su deficiente conocimiento no pueden ser expresadas como números reales. La idea de que las cantidades difusas pudieran combinarse aritméticamente según las leyes de la teoría de subconjuntos difusos es debida a Zadeh [81].

Tradicionalmente las cantidades imprecisas han sido tratadas como intervalos (en los que se situa el posible valor y el margen de variación del mismo), los libros de Moore [52] y [53] dan un amplio tratamiento al tema. Dubois y Prade en [27], señalan que las cantidades difusas son representaciones más convenientes que los intervalos para la representación de cantidades imprecisas, al recoger mejor todo el conocimiento disponible. La aritmética de cantidades difusas es una extensión del análisis de intervalos y del álgebra de cantidades multievaluadas.

La teoría de conjuntos difusos proporciona un adecuado marco teórico para la representación de cantidades imprecisas. Para dicha representación encontramos dos modelos en la literatura. El primero debido a Zadeh, aplica el principio de difuminación de Goguen y define un "número difuso real", como un subconjunto difuso sobre el universal $\mathbb{R}$. El segundo, introducido por Gantner, Steinlage y Warren, es una representación formal del concepto desde un punto de vista topológico. Analizaremos ambas definiciones, estudiando fundamentalmente la primera, al parecernos más intuitiva y útil como representación de una cantidad imprecisa, y por considerar a la segunda definición como un caso particular de la primera.

## 2. ENFOQUE BASADO EN EL PRINCIPIO DE DIFUMINACION.

Se dice, que los números difusos y su aritmética fueron introducidos por Zadeh [81] con el propósito de analizar y manipular valores numéricos aproximados. La aritmética difusa ha sido estudiada entre otros por Dubois y Prade [24,25], Jain [39], Baas y Kwakernaak [2], Nahmias [54], Mizumoto y Tanaka [51], Dijkman et al. [21], Sánchez [63], Czogala y Drewniach [15], etc.

Las dos herramientas que emplean estos autores para la definición de número difuso y para establecer las operaciones entre ellos son:

1. Principio de difuminación de Goguen, de acuerdo con él, se define el número difuso como un subconjunto difuso de $\mathbb{R}$.
2. Principio de extensión de Zadeh, que permite definir operaciones entre números difusos por extensión de las operaciones entre números reales.

De acuerdo con el principio de Goguen, todo subconjunto difuso de $\mathbb{R}$ puede considerarse como un número difuso. Considerando el subconjunto difuso con función de pertenencia (ver fig.1)

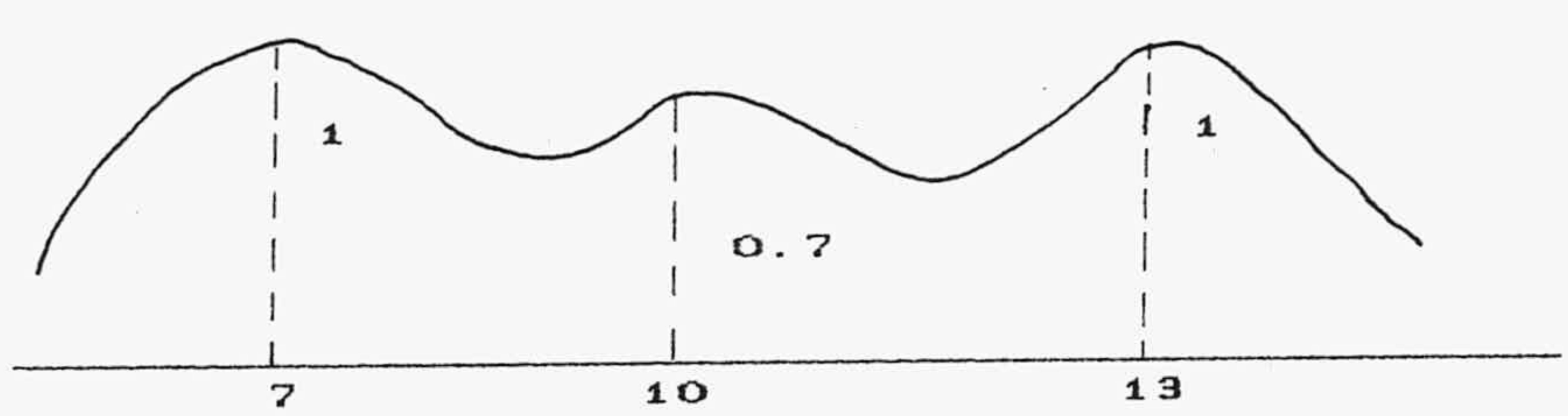



figura 1. Subconjunto difuso sobre $\mathbb{R}$.

que podemos suponer representa la propiedad de "aproximadamente 7, 10 ó 13, siendo 10 el valor menos posible entre ellos".

Intuitivamente, sorprende considerar tal representación como un número difuso. Por esta razón y para facilitar la operabilidad se ha restringido la definición de número difuso por distintos autores.

El estudio más completo y detallado es el realizado por Dubois y Prade en [27], que tomaremos como base para el resto del trabajo. Estos autores, partiendo de la idea dada por el principio de difuminación de Goguen para definir cantidades difusas, extienden posteriormente la idea de intervalo.

## 2.1 <u>CONCEPTO DE CANTIDAD DIFUSA</u>.

A cualquier parte difusa de $\mathbb{R}$, se le dará el nombre genérico de **Cantidad Difusa** (parece más conveniente dicho nombre en subconjuntos difusos de $\mathbb{R}$ como el de la fig.1, que el de número difuso), al conjunto de cantidades difusas se le notará por $\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$. Obviamente el concepto de cantidad difusa proviene de la utilización directa del principio de difuminación de Goguen, aunque también puede verse como una extensión difusa del concepto de cantidad multievaluada [78].

Pueden considerarse dos tipos diferenciados de cantidades difusas según sea el origen de su imprecisión:

a) **Cantidades difusas del tipo 1 (CD1)**, serán aquellas que modelicen cantidades imprecisas del primer tipo. Pueden interpretarse como difuminaciones de $\mathbb{R}$, bajo el cumplimiento de propiedades imprecisas cuantitativas.

b) **Cantidades difusas del tipo 2 (CD2)**, serán aquellas que modelicen cantidades imprecisas del segundo tipo. Pueden interpretarse como difuminaciones de $\mathbb{R}$, bajo la creencia sobre el verdadero valor de una medida obtenida de forma imprecisa, y con fiabilidad variable.

Formalmente una cantidad difusa del tipo 1 y 2 son la misma cosa. La distinción entre ellas proviene de su interpretación; y posteriormente, en el manejo y tratamiento que tendrá cada una de ellas en el problema de la comparación.

Dada una cantidad difusa Q, su función de pertenencia, $\mu_Q$ puede interpretarse como una distribución de posibilidad de los valores que puede tomar la variable difusa X, asociada a la propiedad lingüística que genera Q, o a la creencia sobre el verdadero valor de una medida. La idea de las cantidades difusas es extender formalmente cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Las cantidades difusas que extienden a unos subconjuntos de $\mathbb{R}$ especiales, como son los intervalos, son los intervalos difusos.

## 2.2 CONCEPTO DE INTERVALO Y NUMERO DIFUSO.

Definición 2.1

Un **Intervalo Difuso** M es una cantidad difusa convexa, es decir,

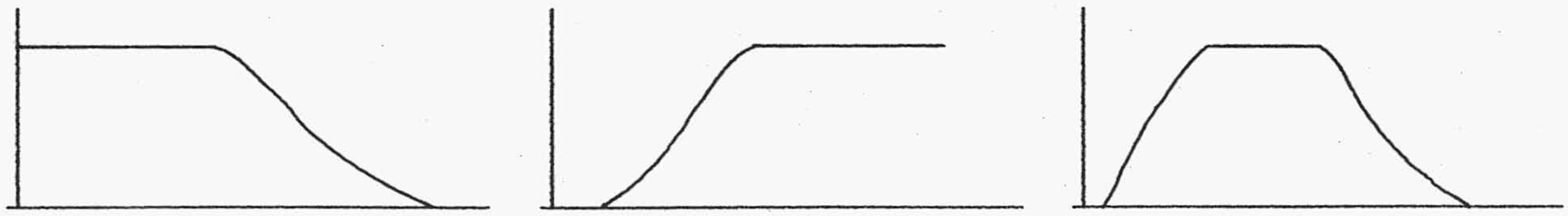
i) $M \in \underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [x,y]$, $\mu_M(t) \geq \min \{\mu_M(x), \mu_M(y)\}$.

Una cantidad difusa es convexa, si y sólo si sus $\alpha$-cortes son conjuntos convexos de $\mathbb{R}$, es decir, son intervalos (acotados o no).

Notaremos por $\mathcal{I}$ al conjunto de intervalos difusos. En la fig.2 se muestran distintos tipos de intervalos difusos, a) es una extensión del intervalo clásico $(-\infty, a]$, b) del intervalo $[a, +\infty)$ y c) de $[a,b]$.

Los intervalos cerrados se generalizan mediante los intervalos difusos con función de pertenencia semicontinua superiormente (s.c.s), es decir, por definición aquellos cuyos $\alpha$-cortes son intervalos cerrados. Notaremos al conjunto de intervalos difusos cerrados por $\mathcal{E}$.



(a) (b) (c)

figura 2. Distintos tipos de intervalos difusos.

Reservamos el nombre de número difuso para la extensión difusa de los subconjuntos compactos de la recta real (es decir, cerrados y acotados).

<u>Definición 2.2</u>

Un **Número Difuso** M es un intervalo difuso cerrado con soporte acotado.

Notaremos por $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ al conjunto de los números difusos; y si consideramos a los números reales como singletons en la forma

$$\forall r\in \mathbb{R} \qquad \mu_r(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x=r \\ 0 \text{ si } x\neq r \end{cases}$$

se verifica que

$$\mathbb{R}\subseteq \underset{\sim}{\mathbb{R}}.$$

De igual modo los intervalos cerrados crisp quedan contenidos en $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, considerandolos como conjuntos difusos con función de pertenencia

$$\mu_{[a,b]}(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\in[a,b] \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad \text{con } a,b\in \mathbb{R}.$$

La forma general de la función de pertenencia de un número difuso M es la siguiente:

$$\mu_M(x)=\begin{cases} r_M(x) & \text{si } x\in[m-a,m) \\ \alpha_M & \text{si } x\in[m,n] \\ s_M(x) & \text{si } x\in(n,n+b] \end{cases}$$

y $\mu_M(x)=0$ en otro caso, en donde $r_M, s_M: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, $r_M$ no decreciente, $s_M$ no creciente, $r_M(m)=\alpha_M=s_M(n)$, $\alpha_M \in (0,1]$ y $a,b,m,n \in \mathbb{R}$.

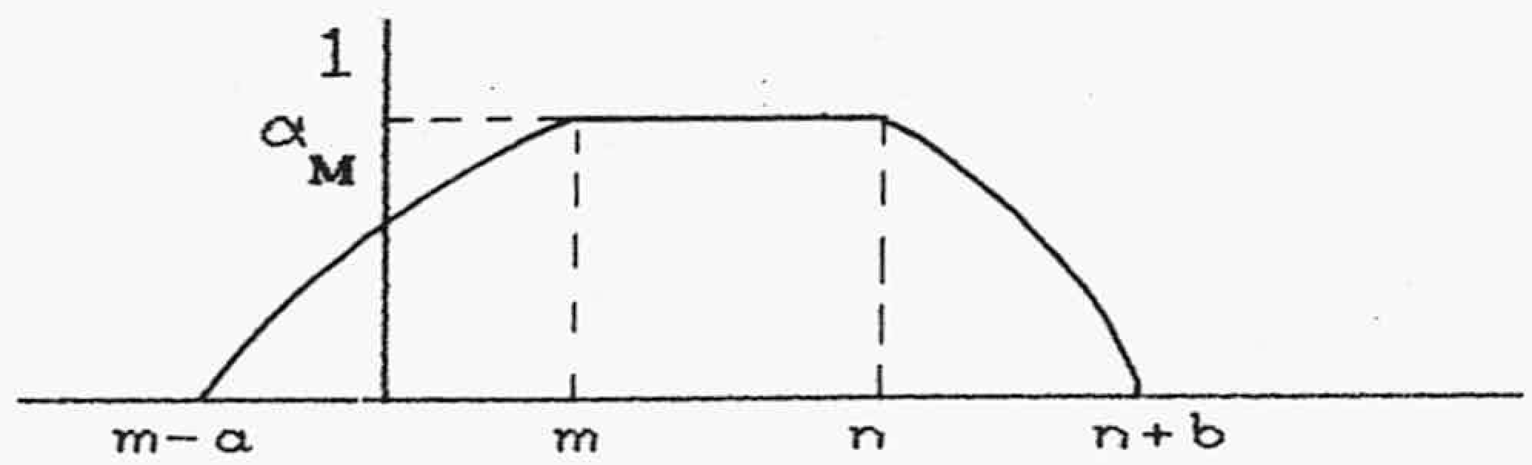



figura 3. Forma general de un número difuso.

Al número $\alpha_M$ se le denomina **altura** del número difuso. Al intervalo [m,n] lo denominamos **intervalo modal**, y a los valores del intervalo, valores modales o **modas** del número difuso M. A los números a y b se les denomina **holguras** a derecha e izquierda, respectivamente. El número difuso de la fig.3 es una representación de "aproximadamente entre m y n".

Realmente la idea de número difuso se obtiene cuando M es **unimodal**, es decir m=n, y representa la idea de "aproximadamente m". Dubois y Prade en [27] definen un número difuso como un número difuso unimodal y normalizado, nosotros hemos preferido no exigir estas condiciones, ya que para muchos tratamientos, como el de la comparación, no es necesario que sea unimodal, la normalización la comentaremos posterioremente.

Un tipo particular de números difusos, que utilizaremos posteriormente, se obtiene cuando consideramos a $r_M$ y $s_M$ funciones lineales. En este caso la función de pertenencia adopta la forma concreta

$$\mu_M(x)=\begin{cases}\alpha_M+(x-m)\alpha_M/a & \text{si } x\in[m-a,m) \\ \alpha_M & \text{si } x\in[m,n] \\ \alpha_M-(x-n)\alpha_M/b & \text{si } x\in(n,n+b]\end{cases}$$

y $\mu_M(x)=0$ en otro caso.

A un número difuso con esta función de pertencia le denominamos **triangular**, y notaremos por $\mathcal{T}$ al conjunto de números difusos triangulares.

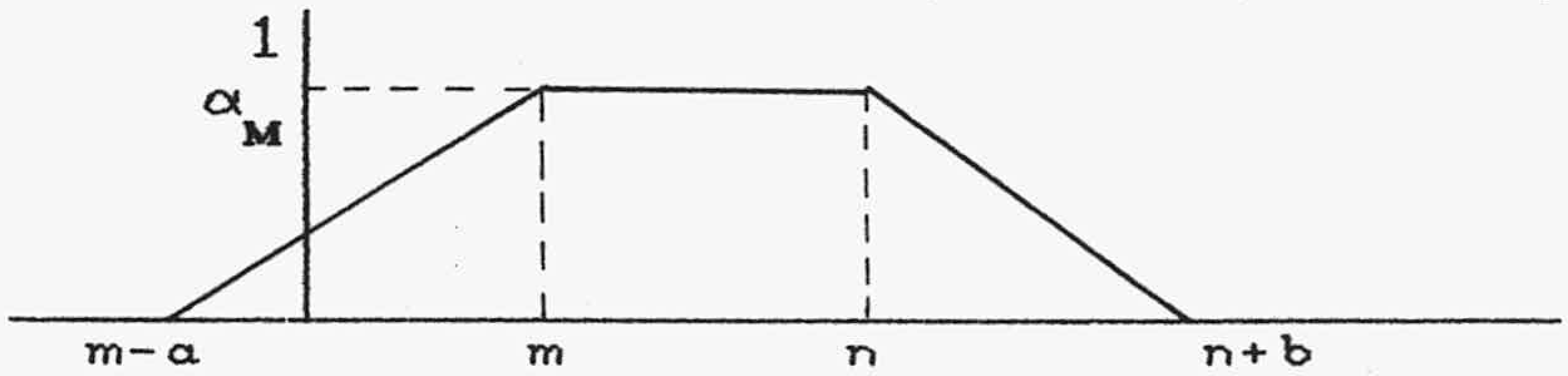



figura 4. Forma genérica de un número difuso triangular.

Notaremos a los elementos de $\mathcal{T}$ en forma abreviada en función de los cinco parámetros que los definen

$$\forall A \in \mathcal{T} \qquad M = \{(m,n,a,b),\ \alpha_M\}.$$

Otro tipo de números e intervalos difusos utilizados en la literatura y de fácil manejo son aquellos que vienen definidos a través de combinaciones simples de las S-funciones de pertenencia definidas por Zadeh (1978). Ejemplos de este tipo de números difusos puede verse en [64].

Una clasificación análoga a la hecha con cantidades difusas, según el origen de la cantidad imprecisa que modelice, puede hacerse con los intervalos y números difusos.

## 2.3. ENTEROS DIFUSOS.

Unas cantidades difusas interesantes, no recogidas bajo la idea de "número difuso real" son los enteros difusos, es decir, aquellas cantidades difusas tales que

$$\text{sop } Q \subseteq \mathbb{Z}$$

en donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros. Los enteros difusos aparecen, por ejemplo, cuando se usa el concepto de cardinal difuso de un conjunto difuso. Para la definición de un "número difuso entero", solamente tenemos que restringir las propiedades exigidas al "número difuso real" al conjunto de los números enteros.

## Definición 2.3

Un número difuso entero N es una cantidad difusa que verifica las tres siguientes condiones:

i) sop $N \subseteq \mathbb{Z}$

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ / $p \leq n \leq q$ $\quad \mu_N(n) \geq \min\{\mu_N(p), \mu_N(q)\}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$

iii) sop $N = \{x \in \mathbb{Z}$ / $\mu_N(x) > 0\}$ es un conjunto finito,

es decir, un número difuso entero es un convexo sobre un conjunto finito de enteros. La fig.5 muestra la forma general de los números enteros difusos.

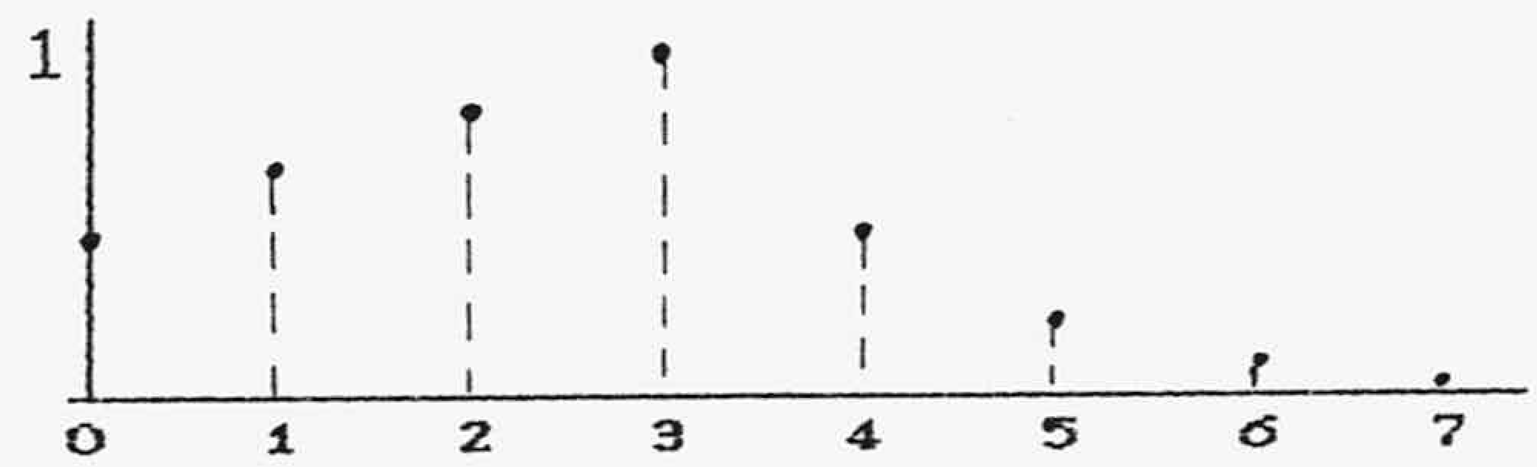



figura 5. Forma general de los enteros difusos.

No exigimos a los números difusos enteros la condición de continuidad superior de su función de pertenencia, ya que siempre se verifica.

## 2.4 EL PROBLEMA DE LA NORMALIZACION.

Dada la cantidad difusa Q, diremos que está **normalizada** si

$$\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \mu_Q(m) = 1.$$

En las definiones anteriores no hemos exigido sobre las cantidades difusas esta condición. Por el contrario, es frecuente que se incluya en las definiones de número difuso que pueden encontrarse en la literatura. Aquí, hemos preferido no incluirla para ampliar la definición de número difuso por un lado y por parecernos poco conveniente en algunos casos bajo la siguiente interpretación:

Cuando trabajamos con cantidades difusas CD1, la normalización supone la existencia de valores reales que verifican totalmente la propiedad imprecisa de base, "una falta de normalización significa que la variable X puede tomar valores fuera del conjunto referencial o no tomar todos los valores" (Dubois y Prade [27]), y por tanto, la no exigencia de esta condición amplia las posibilidades del modelo de cantidad difusa.

De cualquier forma las cantidades CD1 podrán ser usualmente normalizadas, ya que éstas representan propiedades genéricas, tales como, "pequeño", "joven", "alto", etc., y para ellas la propiedad de normalización es admisible, puesto que siempre se podrá fijar al menos un valor numérico como prototipo de tal propiedad. Estas cantidades han sido utilizadas, por ejemplo, como etiquetas en la formulación de reglas aproximadas sobre Sistemas Expertos.

Sobre cantidades difusas del tipo CD2, la normalización supone la existencia de valores reales en los que tenemos la máxima certeza de que representan a la medida en cuestión. La no normalización de una cantidad difusa puede interpretarse como "una falta de confianza en la información" (Dubois y Prade [28]) que la genera, es decir, como la aparición de incertidumbre en la representación de dicha información. En este caso, no es lógico que existan valores con certeza total, y por tanto en esta situación no es aceptable el modelo de cantidad difusa normalizada. De este modo la altura de una cantidad difusa es interpretable como un grado de certidumbre o fiabilidad sobre la medida.

Esta interpretación sólo es posible en cantidades difusas del tipo CD2, ya que en las cantidades del tipo CD1 el concepto de calidad de la representación no parece adecuado.

Al relacionar la altura de una cantidad difusa, del tipo CD2, con la certidumbre de la información que la ha generado, la representación de dicha cantidad admitirá variaciones de la misma medida obtenida a distintas calidades. Esta idea servirá para transformar cantidades del tipo CD2, y con ello poder comparar cantidades difusas de distinta altura. Como veremos posteriormente, dada una transformación sobre este tipo de cantidades difusas, siempre es posible normalizarlas.

## 3. ENFOQUE TOPOLOGICO PARA DEFINIR NUMEROS DIFUSOS.

Otra visión diferente del concepto de número difuso se ha desarrollado buscando la conservación de propiedades topológicas de los "números difusos reales".

Extendiendo el intervalo unidad difuso (introducido por Hutton [37]), Gantner et al. [31], Rodabaugh [61] y Lowen [45] entre otros construyen la Recta Real Difusa, sobre la cual, con una topología difusa adecuada logran definir una suma difusa continua, entre números difusos. Para ello dan la siguiente definición.

<u>Definición 3.1</u> (Gantner et al. [31])

Siendo J el intervalo unidad, la recta real difusa, notada por R(J), es el conjunto de clases de equivalencia (A) tal que:

i) $A:\mathbb{R} \longrightarrow J$ es monótona decreciente, con $\sup\{A(t): t\in \mathbb{R}\}=1$ e $\inf\{A(t) : t\in \mathbb{R}\}=0$.

ii) $A,B\in(A)$ si y sólo si $A(t^{+})=B(t^{+})$ y $A(t^{-})=B(t^{-})$, $\forall t\in \mathbb{R}$.

La representación genérica de un elemento (A) de R(J) es la de un subconjunto difuso $\mathbb{R}$ con función de pertenencia (ver fig.6)

$$A(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<a \\ r(x) & \text{si } x\in[a,b] \\ 0 & \text{si } x>b, \end{cases}$$

donde $a,b\in \mathbb{R}$, $a\leq b$, y $r:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$.

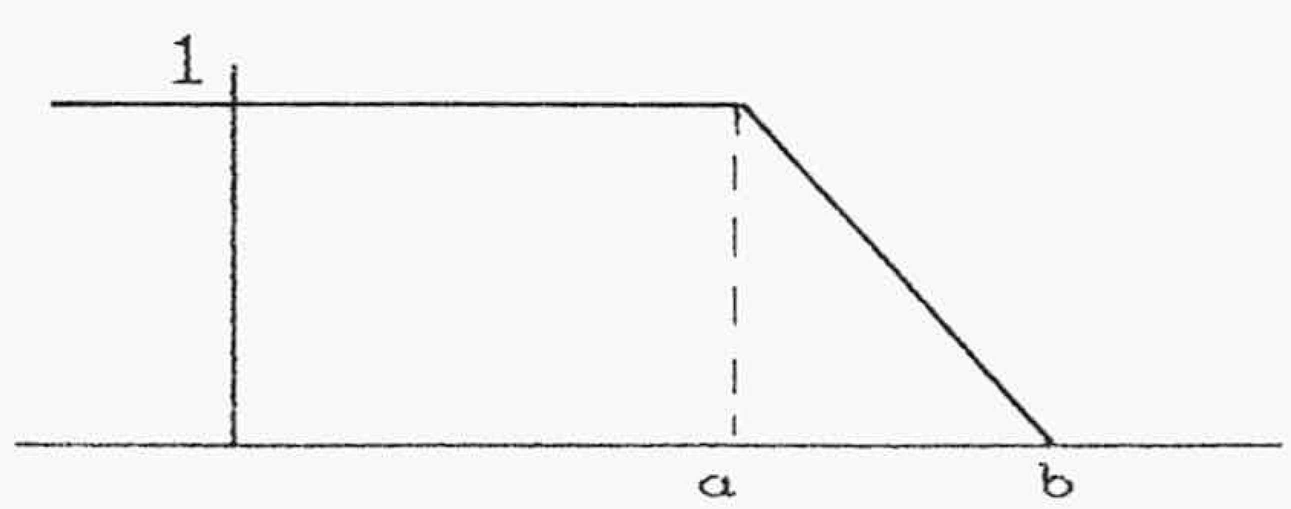



figura 6. Representación gráfica de un elemento de R(J).

Si asociamos a cada $r \in \mathbb{R}$ la clase $(A_r)$ tal que

$$A_r(t)=\begin{cases} 1 \text{ si } t\leq r \\ 0 \text{ si } t>r, \end{cases}$$

es inmediato comprobar que $\mathbb{R}$ está contenido isomórficamente en R(J).

Los elementos de R(J) pueden, obviamente, ser considerados como "números difusos" (números difusos de Hutton los llama Klein en [44]). Sin embargo, como subconjuntos difusos de $\mathbb{R}$ representan la propiedad "ser menor que", con límites indeterminados, y por tanto, no refleja toda la variedad de cantidades imprecisas que pueden encontrarse en problemas reales. Además, puede encuadrarse dentro del modelo dado en el apartado 2, como un caso particular de intervalo difuso.

El origen intuitivo de estas definiciones se basa en el siguiente hecho:

A un número real r podemos asociarle unívocamente uno de los dos siguientes conjuntos, el formado por dicho número real $\{r\}$, o el formado por el intervalo $(-\infty, r]$. La extensión difusa de cada uno de estos conjuntos proporcionará una definición posible de "número difuso real". Así, en el modelo dado en el apartado 2 se extiende el primer conjunto, logrando una definición más intuitiva. En el modelo dado en este apartado se extiende el segundo conjunto, logrando una definición con buenas propiedades topológicas, en las que no entramos aquí. En el resto del trabajo utilizaremos los conceptos dados en el apartado 2.

## 4. OPERACIONES ENTRE CANTIDADES DIFUSAS.

### 4.1 EL PRINCIPIO DE EXTENSION.

El principio de extensión introducido por Zadeh, es una herramienta básica en la teoría de los subconjuntos difusos. Proporciona un método general para extender conceptos matemáticos no difusos, para el tratamiento de cantidades difusas. Como se dijo en el apartado 2, éste nos permite definir operaciones entre cantidades difusas mediante la extensión de las operaciones entre números reales. Básicamente el principio es el siguiente:

Sea X un producto cartesiano de conjuntos universo

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r,$$

y $A_1, \ldots, A_r$ r conjuntos difusos sobre $X_1, \ldots, X_r$, respectivamente. Sea f una función de X en un universo Y, tal que,

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

El principio de extensión permite inducir de los r conjuntos difusos $A_i$ un conjunto difuso B de Y a través de f con la siguiente función de pertenencia

$$\begin{aligned} \mu_B(y) &= \sup_{\substack{x_1 \ldots x_r \\ y = f(x_1, \ldots, x_r)}} \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r) \} \qquad (1) \\ &= 0 \qquad\qquad \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{aligned}$$

en donde $f^{-1}(y)$ es la imagen inversa de y. $\mu_B(y)$ es el mayor de entre los valores de pertenencia $\mu_{A_1 \times \ldots \times A_r}(x_1, \ldots, x_r)$ de las realizaciones de y, usando r-uplas $(x_1, \ldots, x_r)$.

El caso especial r=1 fue estudiado por Zadeh ya en 1965. Cuando f es uno a uno, (1) se puede entonces escribir

$$\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y))$$

cuando $f^{-1}(y)\neq\emptyset$.

El principio de extensión puede generarse directamente a través de la aplicación f a distintas variables no-interactivas, como señalan Nahmias [54] y Dubois y Prade [25], estos últimos en el contexto de las medidas de posibilidad.

Otros tipos de principio de extensión pueden considerarse con el mismo propósito que el anterior. Kaufmann [42] aplica un principio de extensión probabilística (convolución) para definir la suma de cantidades difusas; el trabajo de Mareš [47,48] sigue la misma línea. Jain [39] usa el principio de extensión (1) sustituyendo el supremo por la suma probabilística ($a\hat{+}b=a+b-ab$). Dijkman et al. [21] consideran 9 principios de extensión diferentes, 7 de los cuales se encuentran fuera de nuestro contexto.

Vamos a estudiar ahora las condiciones, para que los $\alpha$-cortes de una expresión difusa real-valuada, puedan expresarse en función de los $\alpha$-cortes de los términos operados. Este resultado permite estudiar, las principales propiedades de las operaciones sobre intervalos difusos. Posteriormente estudiaremos las operaciones usuales.

## 4.2 OPERACIONES GENERICAS DE CANTIDADES DIFUSAS. RELACION CON LA REPRESENTACION POR $\alpha$-CORTES.

En este apartado estudiamos condiciones suficientes para que el $\alpha$-corte de f(M,N), cantidad difusa obtenida de la aplicación del principio de extensión a la función real de variable real f, sobre las cantidades difusas M y N, pueda expresarse en función de los $\alpha$-cortes de M y N. Este resultado es útil en el cálculo práctico de operaciones sobre cantidades difusas.

Sea f una función real de variable real, y sean M y N dos cantidades difusas. Para garantizar la siguiente igualdad

$$[f(M,N)]_\alpha=f(M_\alpha,N_\alpha), \qquad \forall\alpha\in(0,1] \qquad (2)$$

se han dado en la literatura algunas condiciones suficientes.

Proposición 4.1 (Nguyen [56])

Si f es continua, y M y N son cantidades difusas con función de pertenencia semicontinua superiormente y con el cierre del soporte compacto, entonces (2) es cierto.

Por este resultado, podemos afirmar que (2) se verifica sobre números difusos y funciones f continuas, aunque no será cierto, en general, sobre intervalos difusos.

Restringiendo el tipo de función f, Dubois [22] generaliza el resultado de Nguyen sobre la siguiente clase de intervalos difusos

$$F=\{A\in\mathscr{C} \;/\; \forall\alpha\in(0,1]\; A_\alpha\neq \mathbb{R}\}$$

que contiene a aquellos intervalos cerrados difusos con todos sus $\alpha$-cortes acotados superior o inferiormente.

Proposición 4.2 (Dubois,[22])

Sean $M,N\in F$. Sea f una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ continua e isotónica, es decir,

$$\forall u\geq u', \forall v\geq v' \qquad f(u,v)\geq f(u',v')$$

entonces,

$$[f(M,N)]_\alpha=f(M_\alpha,N_\alpha), \qquad \forall\alpha\in(0,1]$$

El resultado de esta proposición también es válido (f en cualquier caso continua) bajo las siguientes hipótesis:

$$M_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha],\; N_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha]$$

- f sólo está definida sobre un producto cartesiano de intervalos cerrados.

- f es antitónica, es decir,

$$u \geq u', \ v \geq v' \Longrightarrow f(u,v) \leq f(u',v')$$

entonces suponiendo a $M_\alpha$ y $N_\alpha$ intervalos compactos

$$[f(M,N)]_\alpha = [f(b_\alpha, d_\alpha), f(a_\alpha, c_\alpha)].$$

- f es "híbrida", es decir,

$$u \geq u', \ v \leq v' \Longrightarrow f(u,v) \geq f(u'.v')$$

entonces suponiendo a $M_\alpha$ y $N_\alpha$ intervalos compactos

$$[f(M,N)]_\alpha = [f(a_\alpha, d_\alpha), f(b_\alpha, c_\alpha)].$$

- f tiene un número finito de argumentos, y es monótona con respecto a cada uno de ellos.

El resultado (2) tiene especial utilidad en el cálculo de cantidades difusas, y es en cierto modo equivalente en cuanto a su utilización, al principio de extensión. Un resultado análogo para $\alpha$-cortes fuertes fue probado por Negoita [55].

## 4.3 EXTENSION DE LAS OPERACIONES ENTRE NUMEROS REALES.

Trataremos ahora la aplicación del principio de extensión, a las operaciones usuales. Para ello seguiremos los resultados del trabajo de Dubois y Prade [27], considerando en primer lugar las funciones de una sola variable, posteriormente las cuatro operaciones básicas y los operadores máx y mín.

Funciones de una variable.

Si f tiene un sólo argumento, y Q es una cantidad difusa, f(Q) tiene una expresión simple cuando f es inyectiva, por aplicación del principio de extensión

$$\forall y \ \mu_{f(Q)}(y) = \mu_Q(f^{-1}(y)).$$

Aplicando esta fórmula a las funciones usuales construimos la tabla 1. En [27] Dubois y Prade definen el concepto de cantidad difusa positiva de la siguiente manera:

$\forall Q \in \underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ Q es **positiva** si y sólo si inf sop(Q) $\geq$ 0.

Análogamente una cantidad difusa Q es **negativa** si

sup sop(Q) $\leq$ 0.

Posteriormente relajaremos el concepto de positividad haciendola depender de la relación de comparación.

| Operación | f(y) | f(Q) | $\mu_{f(Q)}(y)$ |
|---|---|---|---|
| opuesto | $-y$ | $-Q$ | $\mu_Q(-y)$ |
| producto por escalar | $ay$ | $aQ$ | $\mu_Q(y/a)$, $a\neq 0$ |
| inverso | $1/y$ | $1/Q$ | $\mu_Q(1/y)$ |
| potencia | $y^p$ | $Q^p$ | $\mu_Q(y^{1/p})$, $p\neq 0$ |
| exponencial | $e^y$ | $e^Q$ | $\mu_Q(\ln y)$, $y>0$ |
| valor absoluto | $\|y\|$ | $\|Q\|$ | $\|Q\|=(Q\cup -Q)\cap[0,+\infty)$ |

tabla 1.

<u>Las cuatro operaciones básicas</u>.

Cualquier función conmutativa (resp. asociativa) es también conmutativa (resp. asociativa) cuando tiene argumentos difusos.

La **suma** de cantidades difusas viene definida por:

$$\mu_{Q_1 \oplus Q_2}(y) = \sup \{ \min ( \mu_{Q_1}(y-x), \mu_{Q_2}(x)) \ / \ x \in \mathbb{R} \} \qquad (3)$$

El conjunto $\mathscr{C}$ de intervalos difusos cerrados, junto con la operación $\oplus$, forman un semigrupo con elemento identidad 0. $\oplus$ coincide con la suma usual sobre números reales. $-Q$ no es el inverso de Q para la operación $\oplus$, ya que $-Q\oplus Q\neq 0$, y sólo es una cantidad difusa con valor modal 0.

La **diferencia** $Q_1 \ominus Q_2$ de cantidades difusas se define cambiando y-x por y+x en (3). De hecho, $Q_1 \ominus Q_2 = Q_1 \oplus -Q_2$.

El **producto** $Q_1 \odot Q_2$ de cantidades difusas se define de la siguiente forma:

$$\mu_{Q_1 \odot Q_2}(z) = \begin{cases} \sup \{ \min(\mu_{Q_1}(z/y), \mu_{Q_2}(y) \ / \ y \in \mathbb{R}-\{0\} )\} \\ \max ( \mu_{Q_1}(0), \mu_{Q_2}(0)) \text{ si } z=0. \end{cases}$$

El conjunto $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$ de intervalos difusos positivos, junto con la operación $\odot$ es un semigrupo con elemento identidad 1. Sobre números reales, $\odot$ coincide con el producto usual. $1/Q$ no es el inverso de Q para la operación $\odot$, ya que $Q\odot(1/Q)$ es sólo una cantidad difusa con valor modal 1. Se verifican las siguientes igualdades:

$$Q_1 \odot Q_2 = (-Q_1)\odot(-Q_2), \quad (-Q_1)\odot Q_2 = Q_1 \odot (-Q_2) = -(Q_1 \odot Q_2).$$

La distributividad de $\odot$ sobre $\oplus$ no es cierta en general. Sólo se puede garantizar la siguiente inclusión:

$$Q_1 \odot (Q_2 \oplus Q_3) \subseteq (Q_1 \odot Q_2)\oplus(Q_1 \odot Q_3)$$

y se da la igualdad, al menos, en los siguientes casos:

- $Q_1$ es un número real.
- $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ son intervalos difusos cerrados, $Q_2$ y $Q_3$ son ambos positivos o negativos.
- $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ son intervalos difusos cerrados y $Q_2$, $Q_3$ son intervalos simétricos ($Q_2=-Q_3$ ó $Q_3=-Q_2$).

La **división** $Q_1 \ominus Q_2$ de dos cantidades difusas se define mediante:

$$\mu_{Q_1 \ominus Q_2}(z) = \sup \{ \min( \mu_{Q_1}(yz), \mu_{Q_2}(y)) \ / \ y \in \mathbb{R} \}.$$

De hecho $Q_1 \ominus Q_2 = Q_1 \odot (1/Q_2)$. Cuando $Q_1$ y $Q_2$ son ambos positivos o negativos, y $Q_1$ y $Q_2$ son intervalos difusos, entonces también lo es el cociente de ambos.

<u>Las operaciones máximo y mínimo</u>.

Las dos funciones $\max(x,y)$ y $\min(x,y)$ son isotónicas. Cuando M y N son intervalos difusos cerrados la construcción de $\tilde{\max}(M,N)$ y $\tilde{\min}(M,N)$ se realiza aplicando la igualdad (2) sobre sus $\alpha$-cortes

$$\max([a,a'],[b,b'])=[\max(a,b),\max(a',b')]$$

$$\min([a,a'],[b,b'])=[\min(a,b),\min(a',b')]$$

en donde $\tilde{\max}$ y $\tilde{\min}$ son las operaciones extendidas de máx y mín, respectivamente.

Las operaciones $\widetilde{\max}$ y $\widetilde{\min}$ son conmutativas, asociativas, y verifican

$$-\widetilde{\max}(M,N)=\widetilde{\min}\,(-M,-N)$$

Sobre el conjunto $\mathscr{C}$ de intervalos difusos cerrados, $\widetilde{\max}$ y $\widetilde{\min}$ son mutuamente distributivas, idempotentes y satisfacen las siguientes propiedades

i) $\widetilde{\min}(M,N) \oplus \widetilde{\max}(M,N) = M \oplus N$,

ii) $M \oplus \widetilde{\min}(N_1,N_2) = \widetilde{\min}(M\oplus N_1,\ M\oplus N_2)$,

iii) $M \oplus \widetilde{\max}(N_1,N_2) = \widetilde{\max}(M\oplus N_1,\ M\oplus N_2)$,

iv) $\widetilde{\max}(M,N)=M \Leftrightarrow \widetilde{\min}(M,N)=N$.

El principal problema de los operadores $\widetilde{\max}$ y $\widetilde{\min}$, definidos por Dubois y Prade a partir del principio de extensión, es que en general, al aplicarlos sobre cantidades difusas el resultado es una nueva cantidad difusa distinta de las dos iniciales. Para resolver este problema, que no parece deseable en las utilizaciones prácticas de los operadores, González y Vila [36], definen unos operadores $\underset{\sim}{\text{máx}}$ y $\underset{\sim}{\text{mín}}$ asociados a una relación de orden total, que tienen buenas propiedades generales.

<u>Otras consideraciones sobre el principio de extensión</u>.

Hay que hacer notar que en todos los desarrollos anteriores se ha seguido una hipótesis muy común sobre las cantidades difusas a utilizar. Esta hipótesis el la de no interactividad (Nahmias [54] y Dubois y Prade [25]) entre las variables difusas que representan. (o lo que es mismo hemos utlizado el principio de extensión de Zadeh).

Existe un enfoque diferente y algo más general del principio de extensión suponiendo que dos cantidades imprecisas A y B generan sobre $\mathbb{R}^2$ una distribución de posibilidad conjunta $\Pi_{A,B}(x,y)$. Cuando se conoce alguna relación previa entre las variables, esta distribución puede adoptar distintas formas como

$$\Pi_{A,B}(x,y)= T(\mu_A(x),\mu_B(y))$$

$$\Pi_{A,B}(x,y)=T(\mu_R(x,y),\min(\mu_A(x),\mu_B(y)))$$

con T una t-norma triangular y $\mu_R(x,y)$ una función de pertenencia de una relación (difusa o no) sobre las cantidades. En cualquier caso, a partir de la distribución de posibilidad conjunta, el principio de extensión se reformula como

$$\mu_{f(A,B)}(z)= \sup_{\substack{x,y \\ z=f(x,y)}} \Pi_{A,B}(x,y).$$

En el caso de variables no interactivas, es decir, que verifican:

$$\Pi_{A,B}(x,y)= \min(\mu_A(x),\mu_B(y)) \quad \forall x,y\in \mathbb{R}$$

la relación anterior regenera el clásico principio de Zadeh.

El tratamiento de cantidades imprecisas interactivas está bastante menos desarrollado que el de las no interactivas, incluso es considerado tan sólo por algunos autores. Por nuestra parte hemos preferido aceptar la hipótesis de no interactividad, ya que pensamos que el tema de la relación entre cantidades imprecisas se encuentra en fase de desarrollo y debe ser objeto de estudios más profundos, antes de ser utilizados.

## 5. APLICACIONES DE LAS CANTIDADES DIFUSAS Y SU ARITMETICA.

Los principales campos de aplicación de las cantidades difusas ha sido hasta ahora el procesamiento de la información, la investigación operativa, la optimización y el análisis de decisiones. Así, por ejemplo, Yager [76], representa la probabilidad de un suceso difuso, cuando la información disponible tiene la forma de un conjunto difuso aleatorio, como un intervalo difuso sobre el intervalo unidad. En la recolección de datos estadísticos comienzan a desarrollarse trabajos que aplican números difusos, en esta línea están Fustier [30] y Wang [71].

Las cantidades difusas han sido utilizadas para representar la imprecisión de información originada subjetivamente. El uso de números difusos en sistemas de información fue propuesto por Oftedal [57], Umano [69], Buckles y Petry [5]. El valor de certeza de una afirmación difusa con respecto a unos datos descritos imprecisamente, almacenados en una base de datos, puede representarse como una cantidad difusa sobre el intervalo unidad, representando una cantidad difusa de valores de certeza (Zadeh [83]). Los cuantificadores difusos también pueden modelizarse como números difusos (Zadeh [84], Prade [59]), y las operaciones sobre estos permiten cálculos realizados por ordenador, sobre bases de datos.

En la investigación operativa, las cantidades difusas ha sido utilizadas para modelizar redes de transporte donde la longitud del arco es conocida de forma imprecisa. La extensión del algoritmo del camino mínimo, métodos del camino crítico y el problema del árbol generador, se han tratado entre otros por

Dubois y Prade [23], Chanas y Kamburovski [10], y Delgado et al. [17]. El problema de máximo difuso en redes de transporte con capacidades difusas puede encontrarse en Chanas y Kolodziejczyk [12]. Para una revisión de la aplicación de cantidades difusas en problemas de I.O. ver Prade [58] y Chanas [11]. Las cantidades difusas fueron introducidas en programación lineal por Negoita [55], Tanaka y Asai [66], y sobre el mismo tema destacamos los trabajos de Verdegay [70] y Campos [7].

El análisis de decisiones es uno de los campos de aplicación natural de las cantidades difusas. Es frecuente que las opiniones dadas por los decisores en torno al valor de elecciones, o a la ocurrencia de sucesos, son más lingüísticas que numéricas, y generalmente estos términos lingüísticos se refieren a escalas numéricas. Así, existen muchos ejemplos en los que estas opiniones se modelizan mediante cantidades difusas sobre una escala apropiada. Esta idea ha sido usada por Watson et al. [72] en la estructura clásica de la teoría de la utilidad esperada, donde la utilidad y las probabilidades de ocurrencia de cada alternativa son imprecisas.

Existen muchos más ejemplos de aplicaciones de los números difusos y su aritmética, hemos señalado sólo algunos de los trabajos existentes para presentar una visión general. Para más amplias referencias sobre el tema, consultar Dubois y Prade [27].

## 6. COMPARACION ENTRE CANTIDADES DIFUSAS. PANORAMA ACTUAL.

La utilización de cantidades difusas en problemas concretos como los de decisión y optimización, provoca la necesidad de compararlas. Hay muchos trabajos que tratan el problema de decidir de entre dos cantidades difusas cual es la mayor (resp. menor), y podemos encuadrarlos en dos modelos distintos.

A) Aquellos que para la comparación de cantidades difusas utilizan relaciones de orden clásico. Responden al problema de elección absoluta de una cantidad difusa.

B) Aquellos que para la comparación de cantidades difusas utilizan relaciones de orden difuso. En la ordenación responden dando una valor sobre la propiedad "ser mayor que" (resp. "ser menor que").

En muchas aplicaciones es necesario elegir el máximo (resp. mínimo) de entre algunas cantidades difusas como un paso intermedio de un algoritmo más complejo. En casos como éste y siempre que sea necesario elegir claramente una alternativa, serán útiles las comparaciones del tipo A). En algunos problemas de toma deciones en ciencias humanas o sociales es preferible utilizar relaciones del tipo B).

En los apartados siguientes daremos un repaso a los índices de comparación más conocidos, y para ello utilizaremos como base el trabajo de Bortolan y Degani [4].

### 6.1 <u>RELACIONES CLASICAS</u>.

Trataremos el problema de ordenar n subconjuntos difusos sobre el intervalo unidad. La restricción del dominio de definición de los subconjuntos difusos de $\mathbb{R}$ al intervalo [0,1] no supone pérdida de generalidad.

Supongamos entonces n subconjuntos difusos sobre [0,1], convexos y normalizados, $A_i$, $i \in I = \{1,2,\ldots,n\}$.

Un modelo simple para ordenar los n subconjuntos difusos consiste en la definición de una función ordenadora F, definida del conjunto de partes difusas del intervalo unidad, $\underset{\sim}{\mathcal{P}}([0,1])$, al conjunto de números reales $\mathbb{R}$, donde existe un orden natural. Este método ha sido seguido por Yager [73,75], Chang [13] y Adamo [1].

Así

$$F:\underset{\sim}{\mathcal{P}}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es tal que

$$F(A_i)<F(A_j) \text{ implica } A_i<A_j$$
$$F(A_i)=F(A_j) \text{ implica } A_i \simeq A_j$$
$$F(A_i)>F(A_j) \text{ implica } A_i>A_j.$$

Yager [73] ha propuesto algunas funciones ordenadoras, en donde no es necesario suponer las hipótesis de normalidad y convexidad. La más simple de todas es

$$F_1(A_i)=m_i \text{ en donde } m_i \;/\; \mu_{A_i}(m_i)=\sup_{x\in\mathbb{R}} \mu_{A_i}(x)$$

que tiene dos fundamentales dificultades: la primera es que no utiliza toda la información del subconjunto difuso $A_i$, y la segunda es que puede plantear problemas si $A_i$ no fuera convexo.

Posteriormente, Yager define la función

$$F_2(A_i)=\frac{\int_0^1 g(z)\mu_{A_i}(z)dz}{\int_0^1 \mu_{A_i}(z)dz}$$

en donde el peso g(z) es una medida de la importancia del valor z. Suponiendo un peso lineal, es decir

$$g(z)=z$$

entonces $F_2(A_i)$ representa el centro de gravedad del conjunto difuso $A_i$ (fig 7b.)

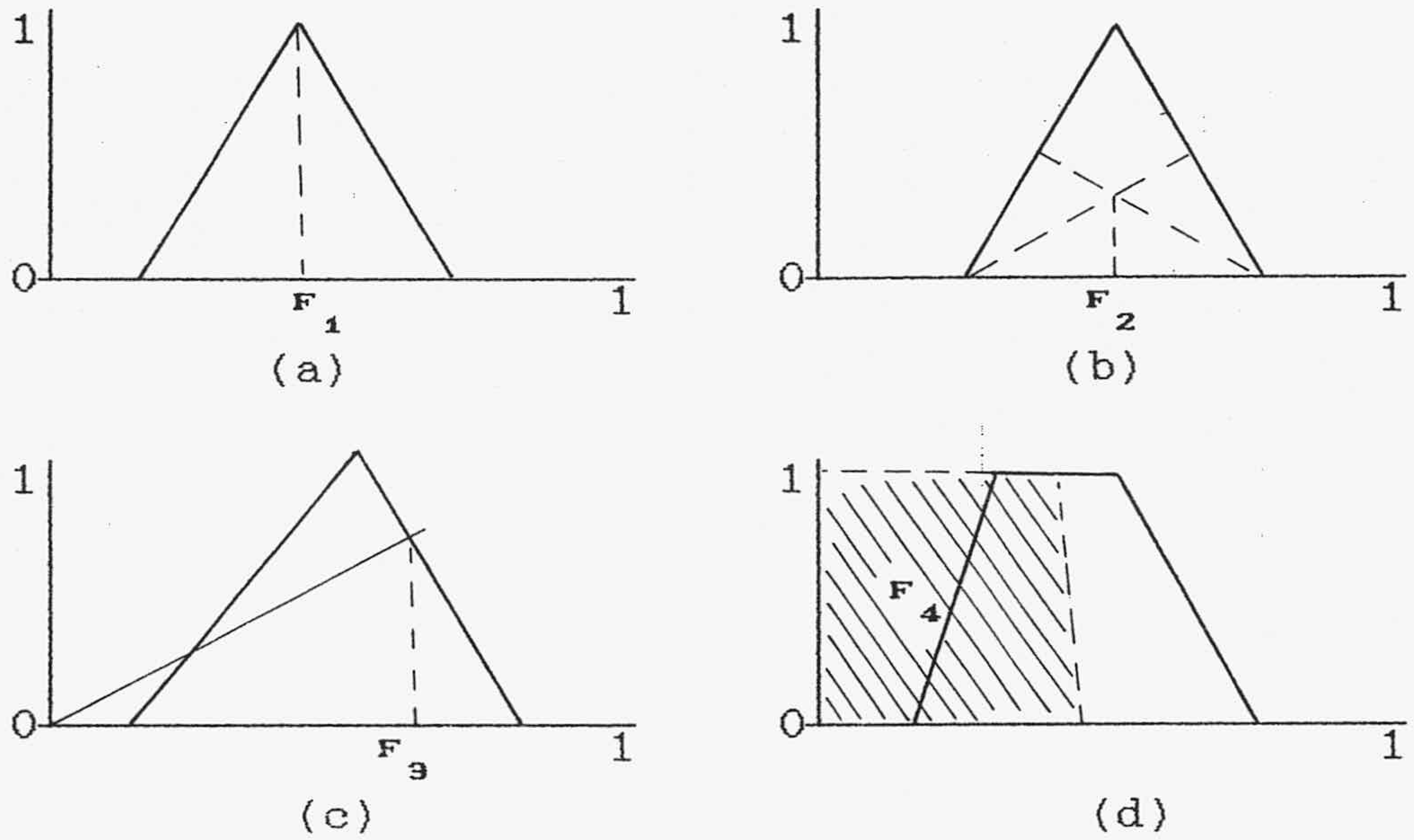



figura 7. Los cuatro índices de Yager.

El tercer índice viene sugerido a través de la teoría de la posibilidad

$$F_3(A_i) = \max_{z \in S_i} \min\ (z, \mu_{A_i}(z))$$

con $S_i$ = sop $A_i$. En este caso $F_3(A_i)$ mide la consistencia de $A_i$ con el conjunto difuso lineal $\tilde{z}$, definido por $\mu_{\tilde{z}}(z)=z$ (fig 7c.).

La cuarta función ordenadora propuesta por Yager en [75] es la siguiente: Si $A_i^\alpha$ es el $\alpha$-corte de $A_i$ y si $M(A_i^\alpha)$ es el valor medio de los elementos de $A_i^\alpha$, entonces

$$F_4(A_i) = \int_0^{\alpha_{máx}} M(A_i^\alpha)d\alpha \qquad \text{donde} \qquad \alpha_{máx} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_{A_i}(x)$$

Yager define el valor medio M(V), para subconjuntos V del intervalo [0,1], de la siguiente forma:

1. Si V es finito, $V=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces $M(V)=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i$.

2. Si V=[a,b] entonces $M(V)=\frac{a+b}{2}$.

3. Si $V=\bigcup_1^n [a_i, b_i]$ con $0 \le a_i \le b_i \le a_{i+1} \le b_{i+1} \le 1$ $\forall i=1\ldots n-1$, entonces

$$M(V)=\frac{\sum_{1}^{n}\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i-a_i)}{\sum_{1}^{n}(b_i-a_i)}.$$

Gráficamente $F_4(A_i)$ puede representarse por el área rayada en la fig.7d.

Chang [13] define el índice

$$F(A_i)=\int_{S_i} z\mu_{A_i}(z)dz$$

que se reduce a

$$F(A_i)=\frac{(n+b-m+a)(m+n+b-a+\alpha_A)}{6}$$

para un conjunto difuso triangular $A_i=\{(m,n,a,b),\ \alpha_A\}$.

Adamo [1] aplica el concepto de $\alpha$-corte para obtener un índice de $\alpha$-preferencia, dado por

$$F_\alpha(A_i)=\max\{z\ /\ \mu_{A_i}(z)\geq\alpha\}$$

para un $\alpha\in(0,1]$. La fig.8 presenta un ejemplo para $\alpha=0.9$.

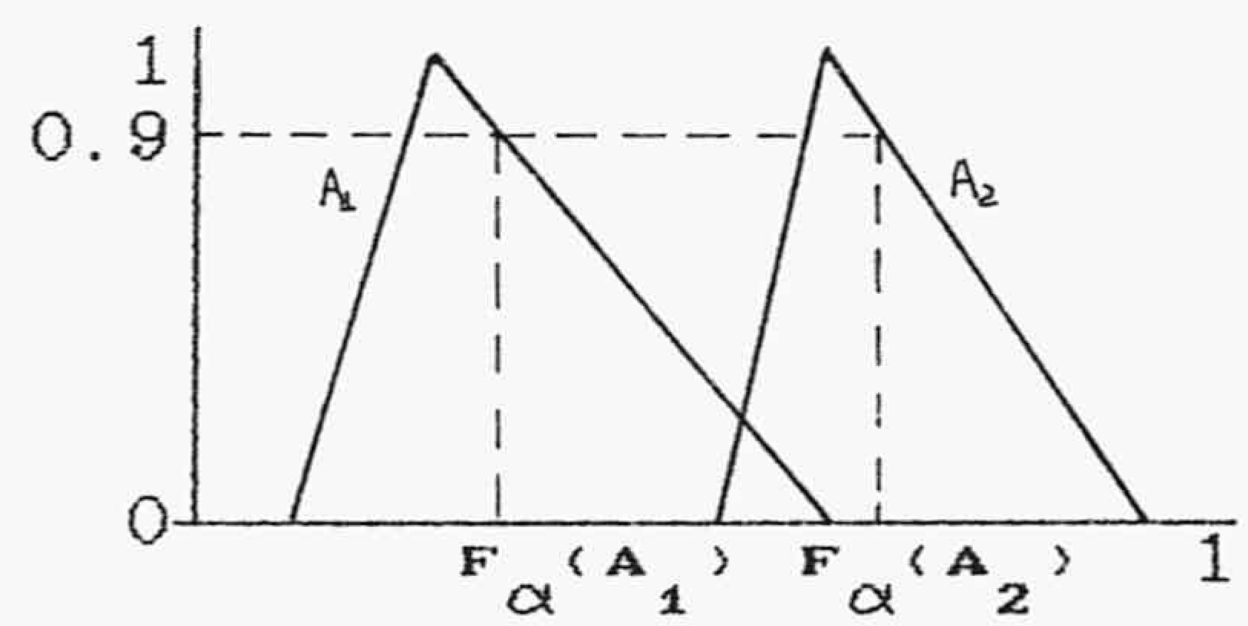



figura 8. Indice de $\alpha$-preferencia de Adamo, con $\alpha=0.9$.

Otros métodos utilizan la comparación de algunos elementos de los $\alpha$-cortes, entre estos tenemos el de Tanaka et al. y el de Ramík y Řimánek.

Tanaka et al. [65] definen, sobre números difusos triangulares y normalizados, la relación "A es mayor que B" mediante

$$A \leq B \Leftrightarrow \widetilde{\max}(A,B)=B$$

y de esta relación, representando los $\alpha$-cortes de A y B por

$$A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha] \text{ y } B_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha]$$

definen la relación de α-preferencia intervalar

$$A \leq^{\alpha} B \Leftrightarrow a_{\alpha}<c_{\alpha} \text{ y } b_{\alpha}<d_{\alpha},$$

en la fig.9 se verifica la relación entre A y B para todo valor α del intervalo $(\alpha_o,1]$. Estos autores interpretan el nivel $\alpha_o$ como un grado de optimismo sobre el decisor.

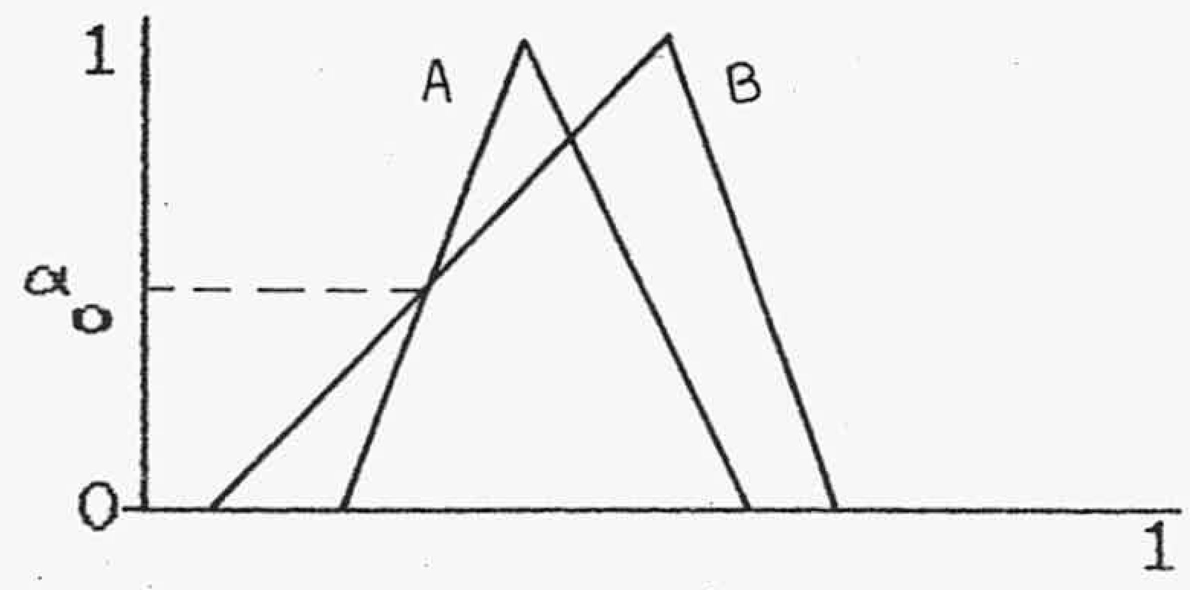



figura 9. Relación de α-preferencia intervalar de Tanaka.

Ramík y Řimánek [60] definen las relaciones

$$A \leq_r B \Leftrightarrow b_{\alpha}\leq d_{\alpha} \quad \forall\alpha\in(0,1]$$

$$A \leq_l B \Leftrightarrow a_{\alpha}\leq c_{\alpha} \quad \forall\alpha\in(0,1]$$

$$A \leq B \Leftrightarrow A \leq_r B \text{ y } A \leq_l B,$$

en donde $a_{\alpha},b_{\alpha},c_{\alpha}$ y $d_{\alpha}$ son los extremos de los α-cortes en A y B respectivamente. La tercera relación de estos autores coincide con la relación "A es mayor que B" de Tanaka et al. comentada anteriormente.

## 6.2 RELACIONES DIFUSAS.

Otros autores consideran una formulación diferente del problema. Tratan de obtener un conjunto difuso de alternativas óptimas

$$\tilde{O} = \{(i,\mu_{\tilde{O}}(i)),\ i\in I\}$$

donde $\mu_{\tilde{O}}(i)$ es el grado con que la alternativa i-ésima puede ser considerada como la mejor.

Entre los autores que han seguido esta línea destacamos los trabajos de Baas y Kwakernaak [2], Baldwin y Guild [3], Jain [38,40] y Chen [14].

Dubois y Prade proponen usar el operador $\widetilde{\max}$ difuso para resolver el problema de la ordenación. El principal problema que se les plantea es que aplicado a n diferentes alternativas, $\widetilde{\max}$ no tiene por qué dar ninguna de ellas, pudiendo obtenerse una nueva, totalmente diferente de los subconjuntos difusos manejados.

Kerre [43] también sugiere evaluar el operador $\widetilde{\max}$, pero siguiendo un método indicado por Yager en [74], utilizando la distancia de Hamming entre todos los subconjuntos difusos y su máximo difuso.

La distancia de Hamming entre dos conjuntos difusos, viene definida en el caso continuo por

$$\mathrm{dist}(A_i, A_j) = \int_0^1 |\mu_{A_i}(z) - \mu_{A_j}(z)|\, dz.$$

El conjunto difuso cuya distancia al $\widetilde{\max}$ sea mínima es el elegido.

Dubois y Prade [26] reconocen que el operador $\widetilde{\max}$ definido por ellos es inadecuado para la comparación y definen cuatro índices que permiten describir la localización de dos números difusos A y B. En concreto, definen:

(1) un grado de posibilidad de dominancia (de A sobre B)

$$\begin{aligned} PD(A) &= \Pi_A([B, +\infty)) = \mathrm{Poss}(A \geq B) \\ &= \sup_u \min\, [\mu_A(u), \sup_{v \leq u} \mu_B(v)] \\ &= \sup_{\substack{u,v \\ u \geq v}} \min\, [\mu_A(u), \mu_B(v)] \end{aligned}$$

que coincide con el índice propuesto por Baas y Kwakernaak, en el caso particular de comparar dos números difusos.

(2) un grado de posibilidad de dominancia estricta.

$$\begin{aligned} PSD(A) &= \Pi_A((B, +\infty]) = \mathrm{Poss}(A > B) \\ &= \sup_u \inf_{\substack{v \\ v \geq u}} \min\, [\mu_A(u),\ 1 - \mu_B(v)] \end{aligned}$$

(3) un grado de necesidad de dominancia.

$$ND(A)=N_A([B,+\infty))=Nec(A\geq B)$$

$$=\inf_{u}\ \sup_{\substack{v\\ v\geq u}}\ \text{máx}\ [1-\mu_A(u),\mu_B(v)]$$

(4) un grado de necesidad de dominancia estricta.

$$NSD(A)=N_A((B,+\infty))=Nec(A>B)$$

$$=1-\sup_{u\leq v}\ \text{mín}\ [\mu_A(u),\mu_A(v)]=1-PD(B)$$

que es el mismo índice que define Watson en [72].

Para extender estos índices en la ordenación de n números difusos $A_1,\ldots,A_n$ Dubois y Prade definen los grados de dominancia de un número difuso $A_i$ sobre todos los demás $A_j$, con $j\neq i$, como el grado de dominancia de $A_i$ sobre $\widetilde{\max_{j\neq i}}\ A_j$. Una segunda alternativa propuesta por los autores para ordenar n conjuntos difusos es la construcción de los siguientes índices binarios

$$PD(i,j)=\Pi_{A_i}([A_j,+\infty)) \qquad PSD(i,j)=\Pi_{A_i}((A_j,+\infty))$$

$$ND(i,j)=N_{A_i}([A_j,+\infty)) \qquad NSD(i,j)=N_{A_i}((A_j,+\infty)).$$

Ninguna de estas relaciones define un orden difuso.

A partir del grado de posibilidad de dominancia de Dubois y Prade, Roubens en [62], define una ordenación de tipo clásico, a partir de la idea de $\alpha$-corte.

Sean A, B dos números difusos normalizados, entonces

$A \overset{\alpha}{>} B$ si y sólo si $Poss(A\geq B)=1$ y $Poss(B\geq A)<\alpha$

$B \overset{\alpha}{>} A$ si y sólo si $Poss(B\geq A)=1$ y $Poss\ (A\geq B)<\alpha$

$A \overset{\alpha}{\cong} B$ en otro caso.

Con $\alpha\in(0,1]$.

Estas relaciones pueden escribirse en la forma

$A \overset{\alpha}{>} B$ si y sólo si $A_\alpha>B_\alpha$

$A \overset{\alpha}{\cong} B$ si y sólo si $A_\alpha\cap B_\alpha\neq\emptyset$

en donde $A_\alpha>B_\alpha$ sii $x>y$ $\forall x\in A_\alpha$, $\forall y\in B_\alpha$.

En [19] Delgado et al. basándose en el concepto de función de comparación que ellos definen y en el de medidas difusas derivadas de los números difusos comparados, definen dos relaciones difusas de orden estricto sobre números difusos normalizados.

(1) Para el caso "≥" definen la relación difusa

$$\beta_T(A,B)=1-\sup_{x\in\mathbb{R}} T(f_B(x),\mu_A(x))$$

en donde T es una norma triangular y $f_B(\cdot)$ es una función de comparación que describe la propiedad lingüística "$y\geq B$" con $y\in\mathbb{R}$.

Si N es un número difuso normalizado con soporte $(c,d)$ e intervalo modal $[a,b]$, la función de comparación $f_N(\cdot)$ vienen definida por las siguientes propiedades:

1) $f_N(x)=0$ si $x\leq c$

2) $f_N(x)=1$ si $x\geq b$

3) $f_N(x)\leq\mu_N(x)$ si $x\in(c,d)$

4) $f_N$ es semicontinua superiormente y no decreciente en $(c,b)$.

(2) Para el caso "≤" definen la relación difusa

$$\delta_T(A,B)=1-\sup_{x\in\mathbb{R}} T(g_A(x),\mu_B(x))$$

en donde T es una norma triangular, y $g_A(\cdot)$ es una función de comparación que describe la propiedad lingüística "$y\leq A$" con $y\in\mathbb{R}$.

Siendo N el número difuso normalizado descrito anteriormente, la función de comparación $g_N(\cdot)$ viene definida por las siguientes propiedades:

5) $g_N(x)=1$ si $x\leq a$

6) $g_N(x)=1$ si $x\geq d$

7) $g_N(x)\leq\mu_N(x)$ si $x\in[a,d]$

8) $g_N$ es semicontinua superiormente y no decreciente en $[a,d]$.

Delgado et al. obtienen en su trabajo funciones de comparación a partir de $\lambda$-medidas (Sugeno,1974). Las relaciones $\beta_T$ y $\delta_T$ son de orden estricto sobre el conjunto de números difusos normalizados.

## 7. PROCESO DE ORDENACION MEDIANTE UNA FUNCION Y UN CONJUNTO ORDENADO.

El propósito de nuestro trabajo es definir comparaciones de tipo clásico entre cantidades difusas. Para ello, utilizaremos un método que en líneas generales consiste en construir una función, que llamaremos ordenadora o de comparación, del conjunto de cantidades difusas, o una subclase suya, a un conjunto ordenado, trasladándose el orden de un conjunto a otro.

Este método clásico, utilizado en otros procesos, como la utilidad en teoría de la decisión, ha sido ya empleado en la ordenación de subconjuntos difusos. En el apartado 6.1 de este capítulo se han visto algunos ejemplos de ello. Así Yager, Chang y Adamo, entre otros, definen índices valuados en el conjunto ordenado $\mathbb{R}$. Estos índices se interpretan como la elección de un valor real en la cantidad difusa (asociado a la altura, soporte y $\alpha$-cortes fundamentalmente), este valor puede considerarse como una medida de la posición sobre $\mathbb{R}$ de dicha cantidad.

Este método ha demostrado tener un buen funcionamiento general, salvo quizás en algunos casos aislados. Bortolan y Degani [4] proponen ejemplos de no discriminación por parte de algunos índices, como el presentado en la fig.10.

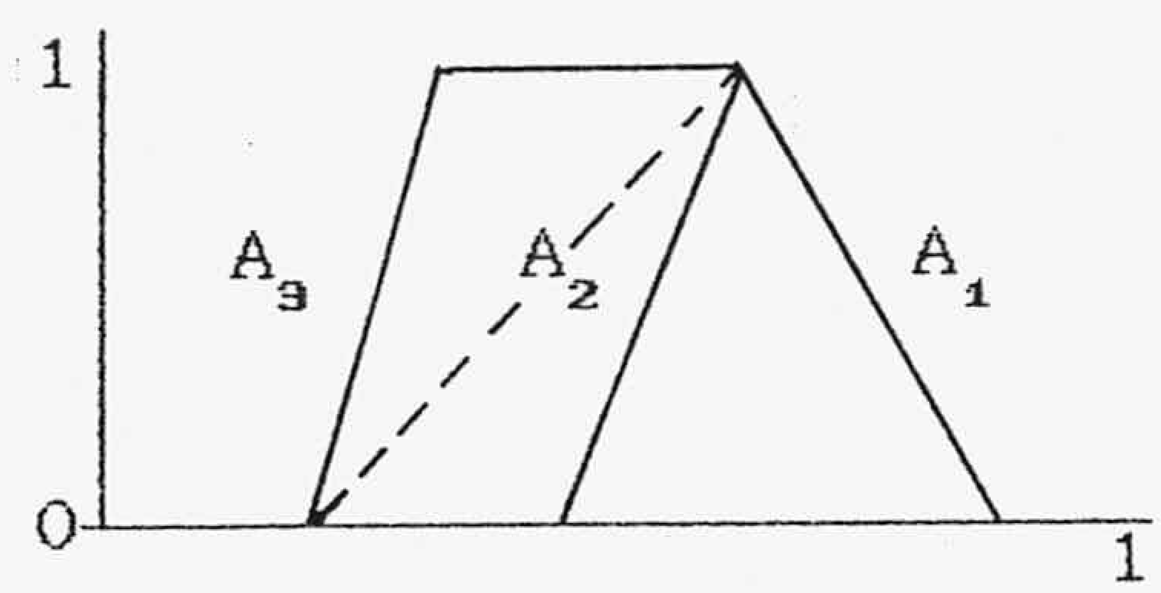



figura 10. Comparación de tres números difusos.

Estos casos pueden explicarse por el hecho de que al concentrar los índices valuados en $\mathbb{R}$, toda la información en un punto, provocan con facilidad casos extraños de indecisión. Así, aun siendo las cantidades difusas ordenables en algún sentido, por la coincidencia del índice en todas ellas, deberiamos afirmar la existencia de algún tipo de igualdad y no discriminación entre las mismas.

Por nuestra parte consideramos funciones ordenadoras valuadas en $\mathbb{R}^m$, con $m \in \mathbb{N}$, que se interpretan como la elección de m medidas de posición del subconjunto difuso. La igualdad entre dos índices de este tipo, hace necesaria la igualdad entre las m medidas de posición; lo que posibilita una igualdad más estricta, evitando casos extraños de indecisión.

En primer lugar se desarrollará un proceso entre conjuntos generales, que se particularizará posteriormente a funciones valuadas a $\mathbb{R}^m$.

## 7.1 ESQUEMA GENERAL.

Sea T un conjunto genérico y $(O,\leq)$ un conjunto ordenado. Supongamos definida una función

$$f: T \longrightarrow O.$$

Si consideramos la relación de equivalencia asociada a f

$$\forall A,B \in T \quad A\ R_f\ B \Leftrightarrow f(A)=f(B)$$

podemos definir la siguiente función sobre el conjunnto cociente:

$$\tilde{f}: T_f \longrightarrow O$$

definida por $\tilde{f}([A])=f(A)$, en donde $T_f=T/R_f$. $\tilde{f}$ está bien definida y es inyectiva. La función $\tilde{f}$ genera la siguiente relación sobre el conjunto de clases $T_f$

$$[A],[B] \in T_f \quad [A]\leq[B] \Leftrightarrow \tilde{f}([A])\leq\tilde{f}([B])$$

que evidentemente es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, por tanto es una relación de orden sobre $T_f$.

Obviamente si $(O,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $(T_f,\leq)$ también está totalmente ordenado.

Sobre T no se ha podido definir directamente una relación de orden. No obstante, podemos afirmar que la relación definida sobre $T_f$ es válida para ordenar elementos de T, cuando los elementos de una clase de $T_f$ sean muy homogéneos entre sí. Es decir, cuando la partición que genera la relación $R_f$, sea en clases de indiferencia frente a un decisor.

La relación $R_f$ de indiferencia se notará por $\simeq_f$ (ó, $\simeq$ siempre que quede claro cual es la función f que la genera)

$$A \simeq_f B \iff A,B \in [A] \iff f(A)=f(B).$$

Veamos la indiferencia generada por una función de comparación conocida.

<u>Ejemplo 1</u>

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de intervalos difusos, Adamo (1980), define la función

$$F_\alpha : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F_\alpha(A)=\sup\{z \;/\; \mu_A(z)\geq\alpha\} \text{ con } \alpha\in(0,1].$$

En este caso, la indiferencia queda expresada por la coincidencia en el extremo superior del $\alpha$-corte.

$$A\simeq B \iff \sup\{z \;/\; \mu_A(z)\geq\alpha\} = \sup\{z \;/\; \mu_B(z)\geq\alpha\}$$

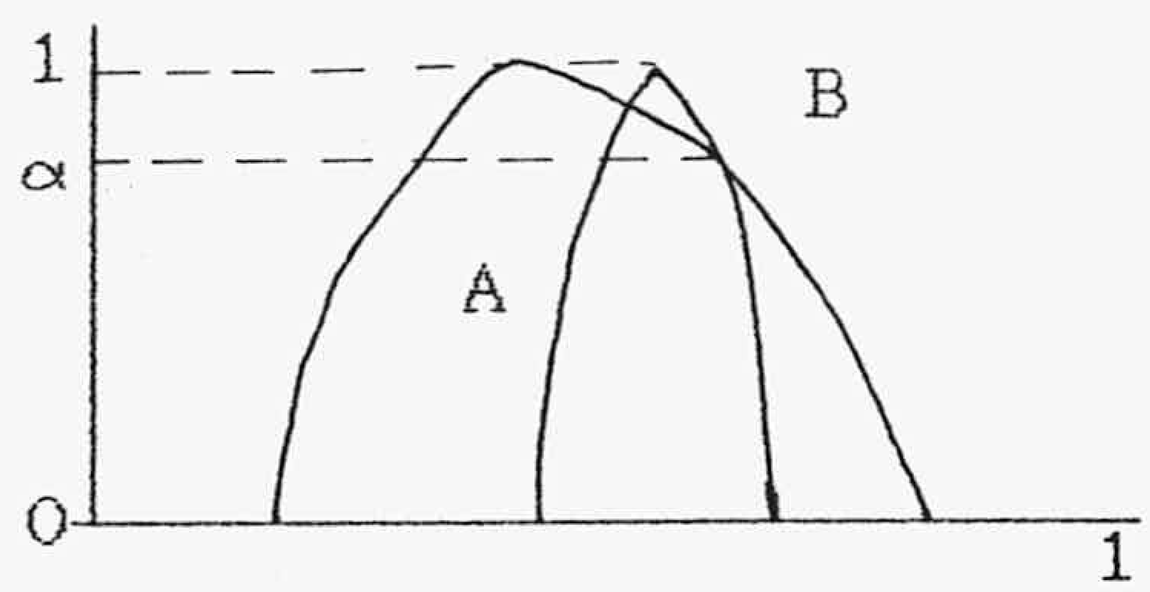



figura 11. A y B son indiferentes bajo el índice de $\alpha$-preferencia de Adamo.

El problema de la indiferencia es equivalente al de falta de discriminación de un índice, y las clases de equivalencia de la relación $R_f$ contienen a los elementos que el índice f es incapaz de discriminar entre sí.

Cuando la función está definida de una clase de subconjuntos difusos con universal $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^m$, se tiene

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$A \longrightarrow (x_1(A), x_2(A), \ldots, x_m(A))$$

con $D \subseteq \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$, y $x_i(A) \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,m$, interpretado como una medida de la posición del conjunto difuso A sobre la recta real.

La relación de indiferencia queda

$$A \simeq B \Leftrightarrow f(A)=f(B) \Leftrightarrow x_i(A)=x_i(B) \ \forall i=1,2,\ldots,m,$$

es decir, la coincidencia de las m medidas de posición, nos hacen afirmar la indiferencia entre A y B.

La función ordenadora

$$\tilde{f} : D_f \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{con } \tilde{f}([A])=(x_1(A), x_2(A), \ldots, x_m(A)) \text{ y } A \in [A],$$

define un orden sobre $D_f$, que dependerá de la relación elegida para ordenar $\mathbb{R}^m$. Obviamente este nos servirá como orden sobre D, cuando la relación $\simeq_f$ sea una indiferencia admisible por un decisor.

## 7.2 COMPATIBILIDAD CON LAS OPERACIONES.

Estudiamos ahora condiciones para que una operación determinada conserve el orden generado por una función. En primer lugar se hará en un contexto general y posteriormente se particularizará a funciones ordenadoras en $\mathbb{R}^m$, sobre el que consideraremos diversas relaciones de orden. Empezamos dando algunas definiones necesarias.

Definición 7.1

Sea $(L,\leq)$ un conjunto ordenado y $\perp$ una operación interna sobre L, diremos que es isotónica con respecto al orden de L si y sólo si

$$\forall a,b,c,d\in L \ / \ a\leq b,\ c\leq d \Longrightarrow a\perp c\leq b\perp d.$$

Supongamos la función $f:T\longrightarrow O$ inyectiva, en donde T es un conjunto cualquiera y $(O,\leq)$ un conjunto ordenado. Supongamos la existencia de operaciones internas, $*$ y $\circ$, respectivamente sobre T y O.

Estudiamos condiciones bajo las cuales si $\circ$ es una operación isotónica sobre $(O,\leq)$, entonces $*$ lo es sobre $(T,\leq)$, en donde $\leq$ es el orden inducido en T mediante f ($T_f\equiv T$, ya que f es inyectiva).

Proposición 7.1

Si $\circ$ es isotónica con respecto al orden de O y f es un homomorfismo para las operaciones $*$ y $\circ$, es decir $f(A*B)=f(A)\circ f(B)$ $\forall A,B\in T$, entonces $*$ es una operación isotónica para el orden de T inducido por f.

Demostración.

Sean $A,B,C,D\in T$, $A\leq B$, $C\leq D \Longrightarrow f(A)\leq f(B)$, $f(C)\leq f(D) \Longrightarrow f(A)\circ f(C)\leq f(B)\circ f(D) \Longrightarrow f(A*C)\leq f(B*D) \Longrightarrow A*C\leq B*D \Longrightarrow *$ es isotónica.□

Vamos ahora a considerar los siguientes conjuntos particulares

$$\begin{cases} T\equiv \mathcal{D}\subseteq \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) \text{ un conjunto de cantidades difusas.} \\ O\equiv \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Sobre $\mathbb{R}^m$, consideramos las siguientes relaciones de orden:

Orden lexicográfico. $\leq_L$

$\forall x,y\in \mathbb{R}^m$, $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$

$$x \leq_L y \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \ / \ x_i = y_i \text{ en } o<i<k,\ x_k<y_k & \text{ó} \\ x_i = y_i \ \forall i=1\dots m. \end{cases}$$

<u>Orden fuerte</u>. $\leq_F$

$\forall x,y\in \mathbb{R}^m$, $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$

$$x \leq_F y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i=1\dots m$$

<u>Orden de mayorización</u>. $\leq_M$

La mayorización surge a partir de los estudios de Hardy, Littlewood y Pòlya (1934,1952) sobre extensión y demostración general de desigualdades. En nuestro contexto, utilizarenmos el concepto de mayorización débil, que tiene dos distintas versiones.

Sea $\forall x\in \mathbb{R}^m$, $x=(x_1,\dots,x_m)$, notaremos por

i) $x_\downarrow=(x_{[1]},\dots,x_{[m]})$ con $x_{[1]}\geq\dots\geq x_{[m]}$ las componentes de x en orden decreciente.

ii) $x_\uparrow=(x_{(1)},\dots,x_{(m)})$ con $x_{(1)}\leq\dots\leq x_{(m)}$ las componentes de x en orden creciente.

Se definen las relaciones:

$$x<_w y \text{ si } \sum_1^k x_{[i]} \leq \sum_1^k y_{[i]} \text{ con } k=1\dots m$$

$$x<^w y \text{ si } \sum_1^k x_{(i)} \geq \sum_1^k y_{(i)} \text{ con } k=1\dots m$$

que son preordenes sobre $\mathbb{R}^m$. Y entre ambas se verifica

$$x<_w y \Leftrightarrow -x<^w -y.$$

Sobre el subconjunto de $\mathbb{R}^m$

$$H_m=\{ x\in \mathbb{R}^m \ / \ x_1\geq x_2\geq\dots\geq x_m\}$$

las relaciones $<_w$ y $<^w$ son órdenes.

Fundamentalmente trabajaremos con $<_w$, ya que como veremos posteriormente, verifica mejores propiedades que $<^w$, en cuanto a la compatibilidad de las operaciones y el orden. A esta relación la notaremos por $\leq_M$ en lo que sigue.

Evidentemente la relación de orden fuerte implica a las relaciones de orden lexicográfico y de mayorización

$$x \leq_F y \Longrightarrow x \leq_L y,\ x \leq_M y.$$

Ninguna de las implicaciones contrarias es cierta, y tampoco existe relación entre el orden lexicográfico y el de mayorización, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.

Consideremos sobre $\mathbb{R}^4$, $x=(0,1,2,5)$, $y=(4,3,1,0)$, con ellos se verifica que

$$x \leq_L y \quad \text{e} \quad y \leq_M x.$$

Sea ahora $\circledast$ la operación extendida sobre $\mathcal{D}$, mediante el principio de extensión,

$$\forall A,B \in \mathcal{D} \qquad \mu_{A \circledast B}(z) = \sup_{x*y=z} \{ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \}$$

de la operación entre números reales $*$. Supondremos en todos los resultados siguientes que dicha operación es interna sobre $\mathcal{D}$.

Definición 7.2

Asociada a la operación $*$, interna sobre $\mathbb{R}$, se define la operación extendida a $\mathbb{R}^m$ de la siguiente forma

$$* : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x,y) \longrightarrow x*y$$

en donde

$$x*y = (x_1 * y_1, \ldots, x_m * y_m)$$

con $x=(x_1,\ldots,x_m)$ e $y=(y_1,\ldots,y_m)$.

Escribimos la operación extendida sobre $\mathbb{R}^m$, del mismo modo que sobre $\mathbb{R}$ para simplificar la notación.

Vamos a probar la compatibilidad de $\circledast$ con respecto a los tres órdenes antes mencionados.

Proposición 7.2

Sea $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ inyectiva, $(\mathbb{R}^m,\leq_L)$ conjunto ordenado mediante el orden lexicográfico, verificando

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)\quad \forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\forall x,y,r,s\in\mathbb{R}\quad x<y,\ r\leq s \Longrightarrow x*r<y*s,\ r*x<s*y.$

Entonces

$$\forall A,B,C,D\in\mathcal{D} \text{ con } A\leq_L B,\ C\leq_L D \Longrightarrow A\circledast C\leq_L B\circledast D.$$

Demostración.

La condición i) nos dice que f es un homomorfismo entre $(\mathcal{D},\circledast)$ y $(\mathbb{R}^m,*)$. Si comprobamos que $*$ es isotónica con respecto al orden de $\mathbb{R}^m$, por la proposición 7.1, $\circledast$ sería isotónica con respecto al orden inducido por f, es decir, quedaría demostrada la proposición. Pues bien, sean

$x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$, $z=(z_1,\ldots,z_m)$ y $r=(r_1,\ldots,r_m)$ verificando

$$x\leq_L y \quad \text{y} \quad z\leq_L r$$

$$x\leq_L y \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k_1 /\ x_i=y_i \text{ en } o<i<k_1,\ x_{k_1}<y_{k_1} \text{ ó} & (4)\\ x_i=y_i\ \forall i=1\ldots m. & (5)\end{cases}$$

$$z\leq_L r \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k_2 /\ z_i=r_i \text{ en } o<i<k_2,\ z_{k_2}<r_{k_2} \text{ ó} & (6)\\ z_i=r_i\ \forall i=1\ldots m. & (7)\end{cases}$$

Distinguimos los siguientes casos:

a) (4) y (6)

- si $k_1<k_2$

$\Longrightarrow z_{k_1}=r_{k_1}$ y $x_{k_1}<y_{k_1} \Longrightarrow x_{k_1}*z_{k_1}<y_{k_1}*r_{k_1}$

como en $0<i<k_1<k_2$, $x_i=y_i$, $z_i=r_i \Longrightarrow x_i*z_i=y_i*r_i$, entonces tomando $k=k_1$, se tiene que $x*z\leq_L y*r$.

- si $k_2<k_1$

$\Longrightarrow z_{k_2}<r_{k_2}$ y $x_{k_2}=y_{k_2} \Longrightarrow x_{k_2}*z_{k_2}<y_{k_2}*r_{k_2}$

como en $0<i<k_2<k_1$, $x_i=y_i$, $z_i=r_i \Longrightarrow x_i*z_i=y_i*r_i$, entonces tomando

$k=k_2$, se tiene que $x*z\leq_L y*r$.

- si $k_1=k_2=k$

$\Longrightarrow z_k<r_k$ y $x_k<y_k \Longrightarrow x_k*z_k<y_k*r_k$

como en $0<i<k$, $x_i=y_i$, $z_i=r_i \Longrightarrow x_i*z_i=y_i*r_i$, entonces tomando $k=k_1=k_2$, se tiene que $x*z\leq_L y*r$.

b) (4) y (7)

$x\leq_L y$ , $z=r \Longrightarrow \exists k_1/0<i<k_1$, $x_i=y_i$, $x_{k_1}<y_{k_1} \Longrightarrow \exists k_1/\ 0<i<k_1$, $x_i*z_i=y_i*r_i$, $x_{k_1}*z_{k_1}<y_{k_1}*r_{k_1} \Longrightarrow x*z\leq_L y*r$.

c) (5) y (6)

$x=y$, $z\leq_L r \Longrightarrow \exists k_2/0<i<k_2$, $z_i=r_i$, $z_{k_2}<r_{k_2} \Longrightarrow \exists k_2/\ 0<i<k_2$, $x_i*z_i=y_i*r_i$, $x_{k_2}*z_{k_2}<y_{k_2}*r_{k_2} \Longrightarrow x*z\leq_L y*r$.

d) (5) y (7)

$x=y$, $z=r \Longrightarrow x_i*z_i=y_i*r_i\ \forall i=1...m \Longrightarrow x*z\leq_L y*r$,

en definitiva $*$ es isotónica respecto a $\leq_L$ y queda demostrada la proposición.□

Proposición 7.3

Sea $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ inyectiva, $(\mathbb{R}^m,\leq_F)$ conjunto ordenado con el orden fuerte, verificando:

i) $f(A\circledast B)=f(A)*f(B)\ \forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\forall x,y,r,s\in\mathbb{R}$, $x\leq y$, $r\leq s \Longrightarrow x*r\leq y*s$.

Entonces:

$$\forall A,B,C,D\in\mathcal{D} \text{ con } A\leq_F B,\ C\leq_F D \Longrightarrow A\circledast C\leq_F B\circledast D.$$

Demostración.

Usando la proposición 7.1 sólo necesitamos demostrar que $*$ es isotónica con respecto a $\leq_F$,

$x\leq_F y$, $z\leq_L r \Longrightarrow x_i\leq y_i$, $z_i\leq r_i\ \forall i=1...m \Longrightarrow x_i*z_i\leq y_i*r_i\ \forall i=1...m \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x*z\leq_F y*r$.□

Para dar un resultado semejante, con la mayorización, al de las proposiciones 7.2 y 7.3, debemos restingir el codominio de las funciones al conjunto

$$H_m=\{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m /\ x_1\geq x_2\geq\dots\geq x_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

ya que como se comentó anteriormente, $<_w$ y $<^w$ son órdenes sobre $H_m$ y sólo preordenes sobre $\mathbb{R}^m$. Para demostrar la proposición con el orden $<_w$, necesitamos el siguiente resultado general de mayorización.

<u>Lema 1</u>.

Sea $\theta:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

i) $\theta$ es no decreciente y convexa en cada argumento, cuando los otros permanecen fijos.

ii) La derivada de $\theta$ respecto del i-ésimo argumento verifica ser no decreciente en $x_j$, para $j\neq i$, $x_i$ fijo, i=1...m.

Entonces

$$x^{(i)}<_w y^{(i)}, \text{ sobre } H_n,\ i=1\dots m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\theta(x_1^{(1)},\dots,x_1^{(m)}),\dots,\theta(x_n^{(1)},\dots,x_n^{(m)})<_w (\theta(y_1^{(1)},\dots,y_1^{(m)}),\dots,\theta(y_n^{(1)},\dots,y_n^{(m)}) \text{ sobre } H_n.$$

<u>Demostración</u>.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [49].

<u>Proposición 7.4</u>

Sea $f:\mathcal{D}\longrightarrow H_m$ inyectiva, $(H_m,<_w)$ conjunto ordenado mediante la mayorización débil. Notamos a la operación $*$ sobre $\mathbb{R}^m$ en la forma $\theta(x,y)=x*y$. Supongamos que:

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)\ \forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\theta(x,y)\in H_m$, si $x,y\in H_m$.

iii) $\theta$ es no decreciente y convexa en cada argumento, cuando el otro permanece fijo.

iv) $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ es no decreciente en y, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ es no decreciente en x.

Entonces

$$\forall A,B,C,D\in\mathcal{D} \text{ con } A\leq_M B,\ C\leq_M D \Longrightarrow A \circledast C\leq_M B \circledast D.$$

Demostración.

Usando la proposición 7.1 sólo necesitamos demostrar que $*$ es isotónica con respecto a $<_w$, que es evidente usando el lema anterior.□

Un resultado análogo a lema 1 se verifica para la relación de orden $<^w$.

Lema 2.

Sea $\theta:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

i) $\theta$ es no decreciente y cóncava en cada argumento, cuando los otros permanecen fijos.

ii) La derivada de $\theta$ respecto del i-ésimo argumento verifica ser no creciente en $x_j$, para $j\neq i$, $x_i$ fijo, $i=1\ldots m$.

Entonces

$$x^{(i)} <^w y^{(i)},\ \text{sobre } H_n,\ i=1\ldots m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\theta(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(m)}),\ldots,\theta(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(m)}) <^w$$

$$(\theta(y_1^{(1)},\ldots,y_1^{(m)}),\ldots,\theta(y_n^{(1)},\ldots,y_n^{(m)})\ \text{sobre } H_n.$$

Demostración.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [49].□

Proposición 7.5

Sea $f:\mathcal{D}\longrightarrow H_m$ inyectiva, $(H_m,<^w)$ conjunto ordenado mediante la mayorización débil. Notamos a la operación $*$ sobre $\mathbb{R}^m$ en la forma $\theta(x,y)=x*y$. Supongamos que:

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)\ \forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\theta(x,y)\in H_m$, si $x,y\in H_m$.

iii) $\theta$ es no decreciente y cóncava en cada argumento, cuando el otro permanece fijo.

iv) $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ es no creciente en y, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$ es no creciente en x.

Entonces

$$\forall A,B,C,D\in\mathcal{D} \text{ con } A\overset{v}{<}B,\ C\overset{v}{<}D \Longrightarrow A \circledast C\overset{v}{<}B \circledast D.$$

Demostración.

evidente, aplicando el lema anterior.□

Proposición 7.6

Sea $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ / $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)$ $\forall A,B\in\mathcal{D}$, definiendo la operación sobre $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}/R_f$ de la siguiente forma

$$[A] \circledast [B]=[A \circledast B]$$

entonces:

i) La operación $\circledast$ sobre $D_f$ está bien definida.

ii) $\tilde{f}([A] \circledast [B])=\tilde{f}([A])*\tilde{f}([B])$.

Demostración.

i) Sean $A,A'\in[A]$, $B,B'\in[B]$, entonces $f(A)=f(A')$, $f(B)=f(B')$, de donde

$f(A)*f(B)=f(A')*f(B') \Longrightarrow f(A \circledast B)=f(A' \circledast B') \Longrightarrow$

$[A \circledast B]=[A' \circledast B']$, y la definición de operación entre clases no depende de los representantes elegidos, de donde la operación está bien definida.

ii) $\tilde{f}([A] \circledast [B])=\tilde{f}([A \circledast B])=f(A \circledast B)=f(A)*f(B)=\tilde{f}([A])*\tilde{f}([B])$.□

Este resultado nos permite suprimir la condición de inyectividad, en las cuatro proposiciones anteriores del siguiente modo.

Corolario 7.1

Sea $f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $(\mathbb{R}^m,\leq_L)$ conjunto ordenado mediante el orden lexicográfico, verificando

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)$ $\forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\forall x,y,r,s\in\mathbb{R}$ $x<y$, $r\leq s \Longrightarrow x*r<y*s$, $r*x<s*y$.

Entonces

$\forall[A],[B],[C],[D]\in\mathcal{D}$ con $[A]\leq_L[B]$, $[C]\leq_L[D] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [A] \circledast [C] \leq_L [B] \circledast [D]$.

Corolario 7.2

Sea $f:\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , $(\mathbb{R}^m, \leq_F)$ conjunto ordenado con el orden fuerte, verificando:

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)$ $\forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\forall x,y,r,s\in \mathbb{R}$, $x\leq y$, $r\leq s \Longrightarrow x*r \leq y*s$.

Entonces:

$\forall [A],[B],[C],[D]\in\mathcal{D}$ con $[A]\leq_F[B]$, $[C]\leq_F[D] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [A] \circledast [C] \leq_F [B] \circledast [D]$.

Corolario 7.3

Sea $f:\mathcal{D} \longrightarrow H_m$ , $(H_m, <_w)$ conjunto ordenado mediante la mayorización débil. Notamos a la operación $*$ sobre $\mathbb{R}^m$ en la forma $\theta(x,y)=x*y$. Supongamos que:

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)$ $\forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\theta(x,y)\in H_m$, si $x,y\in H_m$.

iii) $\theta$ es no decreciente y convexa en cada argumento, cuando el otro permanece fijo.

iv) $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ es no decreciente en y, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ es no decreciente en x.

Entonces

$\forall [A],[B],[C],[D]\in\mathcal{D}$ con $[A]\leq_M[B]$, $[C]\leq_M[D] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [A] \circledast [C] \leq_M [B] \circledast [D]$.

Corolario 7.4

Sea $f:\mathcal{D} \longrightarrow H_m$ , $(H_m, <^w)$ conjunto ordenado mediante la mayorización débil. Notamos a la operación $*$ sobre $\mathbb{R}^m$ en la forma $\theta(x,y)=x*y$. Supongamos que:

i) $f(A \circledast B)=f(A)*f(B)$ $\forall A,B\in\mathcal{D}$

ii) $\theta(x,y)\in H_m$, si $x,y\in H_m$.

iii) $\theta$ es no decreciente y cóncava en cada argumento, cuando el otro permanece fijo.

iv) $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ es no creciente en y, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ es no creciente en x.

Entonces

$\forall[A],[B],[C],[D]\in\mathcal{D}$ con $[A]\overset{v}{<}[B]$, $[C]\overset{v}{<}[D] \longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $[A] \circledast [C]\overset{v}{<}[B] \circledast [D]$.

La demostración de estos corolarios es inmediata usando la proposición 7.6 y las proposiciones 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5 respectivamente. Conviene destacar que en los dos primeros corolarios la condición ii) y en los dos segundos, las condiciones ii), iii) y iv), restringen las operaciones reales posibles, pero esto no afecta a la función f, ni a la clase de conjuntos difusos. Estas condiciones permiten en todos los casos la operación suma, y sólo el corolario 7.4 no permite el producto por positivos.

En cualquier caso, utilizaremos estos corolarios para estudiar la compatibilidad del orden definido sobre $\mathcal{D}$ y las operaciones entre números difusos. Este resultado extiende las reglas usuales que rigen las operaciones con relaciones de orden sobre números reales.

## 7.3 DISTANCIA Y POSITIVIDAD ASOCIADAS A UNA FUNCION ORDENADORA.

En los siguientes apartados definimos dos conceptos asociados a una función ordenadora f, el de distancia y el de positividad.

La idea que seguimos al definir una distancia entre cantidades difusas asociada al orden, es la de cuantificarlo. Es decir, dar un valor que nos informe sobre cuanto es mayor una cantidad que otra.

La positividad de una cantidad difusa es un concepto referido a la posición de la misma con respecto al cero real, mediante el orden generado por la función f, y permite sobre órdenes totales una clasificación disjunta de las cantidades difusas.

Ambas definiciones se hacen sobre clases de equivalencia. La extensión a cantidades difusas es inmediata, considerando que la distancia entre los elementos de una misma clase es cero (es decir, la distancia entre clases, es una pseudodistancia entre cantidades) y por otro lado, que todos los elementos de una misma clase tienen el mismo tipo de positividad.

7.3.1 <u>Distancia asociada a una función ordenadora</u>.

Sea una clase de cantidades difusas $\mathcal{D}\subseteq \underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ y la función asociada a una función ordenadora f

$$\tilde{f}:\mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Consideramos una distancia d sobre $\mathbb{R}^m$.

<u>Definición 7.3</u>

Se define la función

$$d_f:\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$$

mediante

$$d_f([A],[B])=d(f(A),f(B))$$

$\forall[A],[B]\in\mathcal{D}_f$ y con $A\in[A]$, $B\in[B]$.

Evidentemente esta definición no depende del representante elegido sobre cada clase.

<u>Proposición 7.7</u>

La función $d_f$ es una distancia sobre $\mathcal{D}_f$.

<u>Demostración</u>.

Sean $[A],[B]\in\mathcal{D}_f$ y $A\in[A]$, $B\in[B]$,

$d_f([A],[B])=0 \Longleftrightarrow d(f(A),f(B))=0 \Longleftrightarrow f(A)=f(B) \Longleftrightarrow [A]=[B]$.

$d_f([A],[B])=d(f(A),f(B))=d(f(B),f(A))=d_f([B],[A])$.

Sea ahora $[C]\in\mathcal{D}_f, C\in[C]$,

$d_f([A],[C])=d(f(A),f(C))\leq d(f(A),f(B))+d(f(B),f(C))=$

$=d_f([A],[B])+d_f([B],[C])$.

En definitiva $d_f$ es una distancia sobre $\mathcal{D}_f$.□

En muchos casos, no sólo interesa saber si una cantidad difusa es mayor que otra, sino conocer también en cuánto es mayor. Esto queda cuantificado mediante la función distancia.

### 7.3.2 Positividad respecto del orden generado por una función ordenadora.

Consideramos la clase de cantidades difusas $\mathcal{D}\subseteq \underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ tal que el cero real pertenence a la clase. Suponemos definida la función

$$f:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

y la función asociada

$$\tilde{f}:\mathcal{D}_f\longrightarrow\mathbb{R}^m.$$

Definición 7.4

Sea $[A]\in\mathcal{D}_f$, diremos que es f-positiva(z) si y sólo si

$$f(0)\leq_z f(A) \text{ y } f(0)\neq f(A), \text{ con } 0\in\mathbb{R},\ A\in[A],$$

y $\leq_z$ es un orden sobre $\mathbb{R}^m$ (z puede ser, L=lexicográfico, F=fuerte ó M=mayorización).

Análogamente se pueden definir las clases f-negativas(z) (con $f(A)\leq_z f(0)$ y $f(0)\neq f(A)$) y la clase f-nula ($f(A)=f(0)$).

Con la definición dada se verifican trivialmente propiedades tales como que cualquier clases f-positiva(z) es mayor que la clase f-nula, y ésta mayor que cualquier clase f-negativa(z), y por tanto que cualquier clase f-positiva(z) es mayor que cualquier clase f-negativa(z).

Ambos conceptos, el de distancia y positividad, pueden ser desarrollados sobre cualquier función ordenadora; en particular las que definimos en el capítulo siguiente. De cualquier modo, dejamos para futuras investigaciones el desarrollo concreto de ambas definiciones.

# CAPITULO II

## 0 .INTRODUCCION.

Sentadas las bases de nuestro trabajo y el método general a utilizar, este capítulo se dedica al desarrollo de métodos particulares para comparar números difusos.

Se recogen en este capítulo dos vías o mecanismos de comparación: la forma de comparación NIS y la del índice promedio. Ambas se formulan de forma genérica en los términos mencionados en el último apartado del capítulo anterior.

En definitiva se trata de hacer uso del orden de $\mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{R}$, mediante la construcción de una función ordenadora, que traslada $\tilde{\mathbb{R}}$ a alguno de estos dos espacios. La diferencia existente entre las dos vías se encuentra, de una parte en el espacio final: $\mathbb{R}^m$ en el caso del NIS, y $\mathbb{R}$ en el caso del índice promedio; de otra, en la forma de construcción de la función ordenadora, que en el caso del índice promedio implica un proceso de integración, mientras que el caso de la forma de comparación NIS se hace en forma más directa.

No obstante, ambos procedimientos presentan bastantes analogías, de hecho en el último apartado del capítulo se recoge una formulación que las engloba a ambas.

Una característica común a los dos enfoques es la introducción de la subjetividad del individuo en el proceso de comparación. Esta subjetividad se pone de manifiesto en ambos casos, mediante la elección de un conjunto de trabajo de niveles de pertenencia. Este conjunto que denominamos sistema de comparación, es finito para el método NIS y puede ser cualquiera para el índice promedio. La misma función ordenadora también admite un proceso de determinación subjetivo. Esta, en el caso

NIS, puede depender de uno o dos parámetros, que varían en el intervalo unidad. En el caso del índice promedio, la subjetividad conlleva la elección de una función de posición arbitraria que puede ser parametrizada en un sentido similar al del enfoque NIS.

Ambos métodos se tratan de forma detallada. En el caso del enfoque NIS se definen distintos tipos de dominancia entre números difusos, según el orden de $\mathbb{R}^m$ considerado: concretamente lexicográfico, fuerte y de mayorización, que dan origen a las dominancias débil, total y parcial respectivamente. Se estudian estas dominancias separadamente analizando sus propiedades: compatibilidad con las operaciones, órdenes intervalares asociados, etc. Se destacan también dos casos particulares de construcción de la función ordenadora, el caso en que los parámetros de los que depende son el 0 y el 1 (función NIS-extremo) y aquel en que ambos parámetros son iguales (función NIS-promedio). Ambos presentan una mayor riqueza de propiedades, destacando la mejor compatibilidad con las operaciones del caso NIS-extremo; y la interpretación del único parámetro, como un índice de optimismo-pesimismo, en el caso del NIS-promedio. También en este último caso se construyen regiones de dominancia en función del parámetro, y se analizan algunos de sus propiedades.

Para el índice promedio la definición se hace de la forma más general posible, dependiendo de una función de posición genérica que se supone únicamente integrable con respecto a una medida de probabilidad determinada. Posteriormente se particularizará sobre la forma de esta función, estableciendo su dependencia de una parámetro valuado en el intervalo unidad, y con el mismo significado que el del NIS-promedio. Se analizan distintas propiedades de esta forma de comparación, destacando el caso de los números difusos triangulares, para los que resulta particularmente cómoda.

En ambos enfoques se hace un estudio detallado de distintos ejemplos, y entre ellos algunos que aparecen en la literatura como "casos patológicos" para los que la discriminación no resulta sencilla. También, se recogen aquellos métodos existentes en la literatura que son casos particulares de los aquí propuestos: Adamo [1], Tanaka et al. [65] y Rámik y Řimánek [60] en el método NIS, Tsumura et al. [68], Yager [75] y nuevamente Adamo [1], en el caso del índice promedio. El capítulo termina con la formulación general, antes mencionada, que recoge a ambos enfoques.

# 1. METODO DE COMPARACION NIS.

## 1.1 SISTEMAS DE COMPARACION Y FUNCION ORDENADORA.

El problema de la comparación entre cantidades difusas en términos de relaciones clásicas, es un problema de elección que debe implicar al decisor que se "beneficie" del mismo. La subjetividad de la persona debe incluirse en una relación de preferencia, ya que ésta permite, ante un mismo problema elecciones distintas por distintos decisores.

### 1.1.1 Discretización del problema continuo.

El problema fundamental de la comparación entre cantidades difusas desde el punto de vista analítico, radica en el hecho de trabajar con funciones (de pertenencia) que varían en conjuntos continuos, y que obligan a comparar curvas en $\mathbb{R}^2$. Para facilitar la resolución del problema, tengamos en cuenta que una cantidad difusa puede verse como el conjunto $\langle A_\alpha, \alpha \in (0,1] \rangle$, donde $A_\alpha$ representa el $\alpha$-corte de la cantidad difusa A, y si consideramos un conjunto finito $I \subset [0,1]$, entonces $\langle A_\alpha, \alpha \in I \rangle$ es una versión discreta de la cantidad difusa. Utilizaremos esta forma discreta, para desarrollar una comparación entre cantidades difusas.

Obviamente, la discretización dependerá del conjunto $I \subset [0,1]$ considerado. De hecho, si para comparar una cantidad difusa con otra, sólo consideramos ciertos $\alpha$-cortes, esta comparación estará condicionada por un conjunto $Y \subseteq [0,1]$, que denominamos SISTEMA DE COMPARACION, en principio de cualquier tipo. En nuestro caso utilizaremos unos sistemas de comparación finitos que discretizan la cantidad difusa.

Definición 1.1

Denominamos **sistema de comparación NIS** a un sistema de comparación finito

$$Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\} \text{ con } \alpha_i\in[0,1].$$

A cada $\alpha_i$ le denominamos nivel de importancia subjetiva (N.I.S.), nombre que proviene del orden de prioridad e importancia, que posteriormente exigiremos sobre órdenes lexicográficos, que fueron los primeros que utilizamos (González y Vila [34]), y de su obtención subjetiva por parte de un decisor. Hay que hacer notar que al tomar $\alpha_i\in[0,1]$, puede darse el caso $\alpha_j=0$; en este supuesto, tomaremos como 0-corte de una cantidad difusa el cierre de su soporte.

1.1.2 Forma de comparación NIS.

Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ un sistema de comparación NIS, que supondremos fijo en todo el desarrollo posterior. Sobre cada $\alpha_i$-corte de la cantidad difusa A, $A_{\alpha_i}\subseteq \mathbb{R}$, definimos k medidas (usualmente k=1 ó 2) de la posición del conjunto en $\mathbb{R}$

$$m(A_{\alpha_i})\in \mathbb{R}^k$$

que sean representativas de dicho conjunto.

En estas condiciones definimos la función ordenadora (**función NIS-standard**)

$$f:\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

mediante

$$f(A)=(m(A_{\alpha_1}),m(A_{\alpha_2}),\ldots,m(A_{\alpha_n}))\in \mathbb{R}^m \quad / \quad m=nk \text{ y } A\in\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$$

Mediante esta función y utilizando una relación de orden sobre $\mathbb{R}^m$, generaremos una comparación sobre $\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ siguiendo el método dado en el apartado 7 del primer capítulo.

El vector f(A) representa una discretización del número difuso, válida no tan solo para la comparación, sino también para otro tipo de problemas, en los que la forma continua del número difuso hace difícil su resolución. Este proceso no es en absoluto extraño, ya que otros autores lo han empleado con objetivos distintos, por ejemplo, la implantación de cantidades difusas (vía hardware) en un procesador, Yamakawa [77].

Usando el orden fuerte ($\leq_F$) sobre $\mathbb{R}^m$, la comparación es equivalente a dominar todas las medidas de los $\alpha$-cortes, bajo el orden usual de $\mathbb{R}$. Corresponde a una **dominancia total** entre cantidades difusas

$$f(A)\leq_F f(B) \Leftrightarrow \text{"B domina a A"}$$

Con el orden lexicográfico ($\leq_L$), y siguiendo la prioridad que luego se definirá de los niveles de importancia subjetiva, se compara medida a medida, y se resuelve la comparación en la primera que sea distinta. Corresponde a una **dominancia débil** entre cantidades difusas

$$f(A)\leq_L f(B) \Leftrightarrow \text{"B supera a A".}$$

Para aplicar la mayorización ($\leq_M$), debemos en primer lugar restringir el codominio de la función f al subconjunto de $\mathbb{R}^m$, $H_m$, con las componentes en orden decreciente, y definir

$$f':\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\longrightarrow H_m$$

en donde consideramos como aplicado de la cantidad difusa A, a $f(A)_\downarrow$. La mayorización supone una dominancia de la mayor medida de posición y sucesivamente de sumas de medidas en orden decreciente. Corresponde a una **dominancia parcial** entre cantidades difusas

$$f'(A)\leq_M f'(B) \Leftrightarrow \text{"B mayoriza a A".}$$

Obviamente, en casos concretos, buscaremos primero la dominancia total, y en caso de no darse, bastaría según el problema una dominancia parcial o una dominancia débil. Evidentemente la dominancia fuerte implica a las dominancias débil y parcial. Entre estas dos últimas no existe ninguna relación de implicación, como tampoco la existe entre el orden lexicográfico y el de mayorización (ver I.7.2.). No obstante, la dominancia definida a través del orden lexicográfico es "más débil" que la definida a través de la mayorización, ya que aquella se verifica para cualesquiera cantidades difusas, y esta sólo en algunos casos. Es decir, para cualquier par de cantidades difusas, siempre una domina débilmente a la otra, sin embargo, la dominancia parcial no tiene por qué verificarse entre ellas.

Bajo la función NIS-standard, la indiferencia se produce cuando coinciden las nk medidas de posición. Así, seleccionando éstas convenientemente, siempre es posible adecuar la relación $R_f$ a una indiferencia admisible por un decisor, con lo que ordenar $\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ u ordenar el conjunto de clases será equivalente para nuestro propósito.

El método que define la función ordenadora NIS-standard, es particularmente interesante cuando trabajamos con $\alpha$-cortes que son intervalos cerrados (para ello basta que tomemos cantidades difusas de $\mathcal{C}$), ya que la comparación bajo el orden fuerte o lexicográfico se basa en una ordenación previa de los intervalos a través de sus extremos o de los puntos intermedios, como posteriormente veremos.

Para la definición de la función ordenadora se necesita buscar un sistema de comparación NIS. La busqueda de estos sistemas de comparación en casos particulares plantea dos cuestiones que pasamos a abordar:

- La utilización de sistemas válidos para comparar cantidades de distinta altura.

- La construcción propiamente dicha de sistemas de comparación.

### 1.1.3 Sistemas de comparación asociados a la altura.

Cuando comparamos cantidades difusas de distinta altura por medio de sistemas de comparación NIS, puede plantearse el problema de trabajar con $\alpha$-cortes vacios. Para resolver este problema utilizaremos sistemas asociados a la altura de la cantidad difusa, es decir, aquellos en los que todos los $\alpha$-cortes son no vacios para una altura determinada. A los sistemas asociados a cantidades difusas normalizadas les denominamos de **altura máxima**.

La forma de obtener sistemas de comparación sobre cada altura no es único, y nosotros proponemos dos métodos. En ambos casos, se deducirán a partir de sistemas de altura máxima, ya que así basta definir un único sistema para un problema concreto y deducir posteriormente los sistemas necesarios sobre cada altura. Los métodos que proponemos son:

A) Sistemas restringidos.

Dado un sistema de altura máxima $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$, y supuesto que la menor altura de las cantidades difusas a

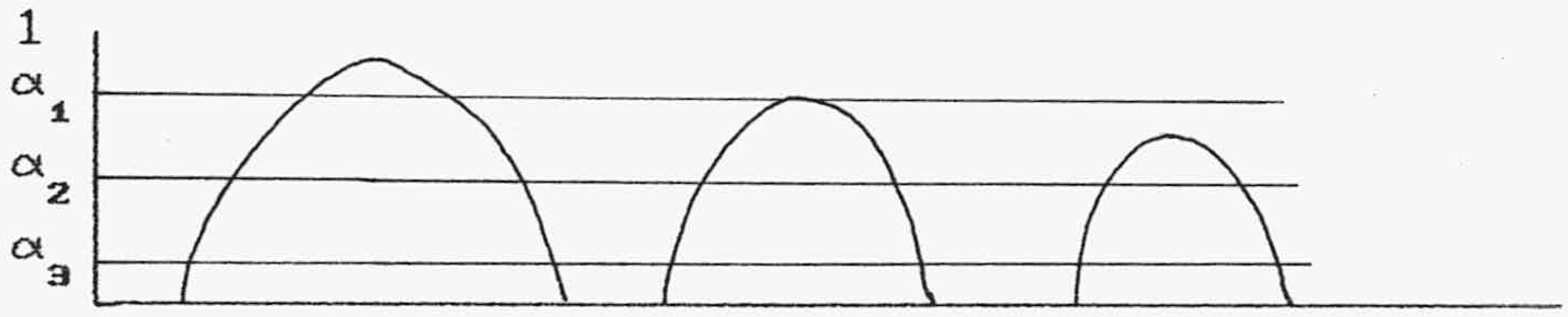



figura 1. $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ es el sistema restringido a la menor altura.

comparar es $\alpha$, asociamos a dicha altura el sistema

$$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}\cap[0,\alpha]$$

si dicho conjunto es no vacio. En caso contrario, Y no es adecuado para la comparación de tales cantidades.

B) Sistemas proporcionales.

Dado un sistema de altura máxima $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$, la transformación proporcional a la altura $\alpha$ del sistema, viene dada por:

$$\{\beta_1,\dots,\beta_n\} \;/\; \beta_i=\alpha\alpha_i\in[0,\alpha]$$

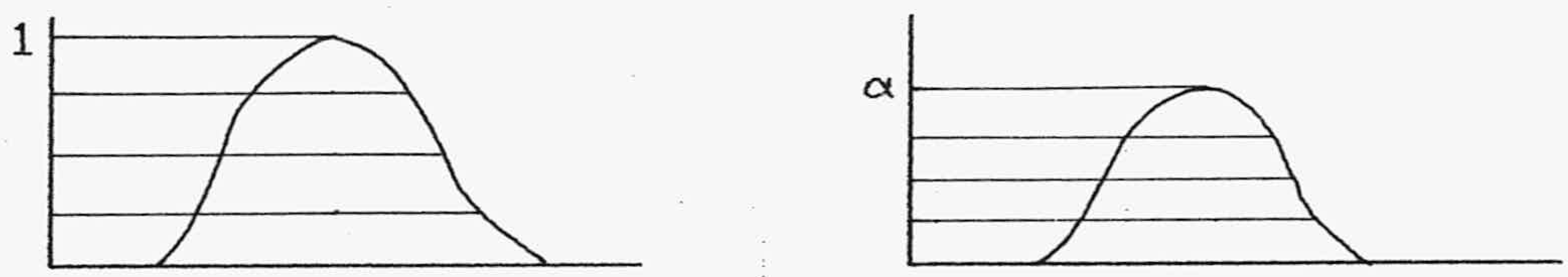



figura 2. Sistema proporcional relativo a la altura $\alpha$.

Los sistemas restringidos son válidos para comparar cualquier tipo de cantidad difusa, y cada una con distinta altura. Son quizás, más adecuados para cantidades CD1, ya que éstas no admiten ningún tipo de transformación en su representación, y hay que trabajar con ellas tal como vienen dadas.

Sobre cantidades CD2, como veremos en el tercer capítulo, se pueden definir transformaciones que modifiquen la altura de la cantidad difusa, e incluso pueda normalizarla. Esto hace que los sistemas proporcionales, que exigen la existencia de una altura común, sean más adecuados para este tipo de cantidades. En el capítulo III, comprobaremos como con un tipo particular de transformaciones, los sistemas proporcionales son los más adecuados sobre CD2, ya que hacen que el resultado de la comparación sea independiente de la altura de transformación.

En el método de comparación NIS, supondremos dado un sistema de comparación adecuado a la altura de las cantidades difusas a comparar. Para ello utilizaremos sobre CD1 sistemas restringidos. Sobre cantidades CD2, si estas tienen la misma altura, utilizaremos sistemas proporcionales, y en caso contrario las normalizaremos, aplicando técnicas que veremos en el capítulo III.

### 1.1.4 Métodos para obtener sistemas de comparación.

Puesto que todos los sistemas de comparación asociados a la altura, que hemos propuesto, suponen la existencia de uno de altura máxima, daremos aquí, métodos para obtener estos sistemas.

Los sistemas de comparación se proponen como una alternativa a la consideración continua de los conjuntos difusos, de este modo, la selección más inmediata de un sistema consiste en una "exploración" del intervalo [0,1]. Es decir, elegir unos niveles que representen suficientemente a dicho intervalo. Por ejemplo, sistemas del tipo

$$Y_n=\{0\}\cup\{1/i \ / \ i=1...n\} \text{ con } n\in \mathbb{N}$$

constituirían buenos sistemas NIS.

En cualquier caso, la obtención de los niveles de comparación dependen del problema concreto y de la subjetividad de un decisor. Proponemos aquí otros posibles métodos:

1. Método individual.

Se supone un individuo que ha de decidir en el problema, éste propone los niveles de comparación y en su caso, la prioridad entre ellos de forma subjetiva. La interpretación de los niveles es:

- Sobre CD1, aceptaciones nítidas de la propiedad que representa la cantidad difusa, es decir, la selección de $\alpha$ altos (próximos a la altura) significa aceptaciones rigurosas de la propiedad, y la selección de $\alpha$ bajos (próximos a cero) significa aceptaciones tolerantes de la propiedad.

- Sobre CD2, los niveles se interpretan como valores de incertidumbre-imprecisión, en el siguiente sentido, la selección de $\alpha$ altos significa escoger conjuntos de nivel con información muy precisa (precisión) pero poco cierta (incertidumbre), y la selección de $\alpha$ bajos significa elegir conjuntos de nivel con información poco precisa (imprecisión) pero muy cierta (certidumbre).

Esta interpretación es evidente considerando como medida de imprecisión la longitud del $\alpha$-corte por un lado; y por otro, medidas de incertidumbre, como la posibilidad y la necesidad, sobre el conjunto de $\alpha$-cortes de números difusos normalizados (considerando la función de pertenencia de estos como una distribución de posibilidad), verificándose

$$Poss(A_\alpha)=1$$

$$Nec(A_\alpha)=1-\alpha \qquad \forall \tilde{A}\in\mathbb{R}$$

de donde los $\alpha$-cortes son conjuntos totalmente posibles (contienen siempre a los valores más posibles), y su necesidad es máxima en el soporte, mínima en la moda y decreciente entre ambos. Para números difusos no normalizados la interpretación es análoga, pero considerando distribuciones de posibilidad no normalizadas.

2. <u>Método encuesta</u>.

Bajo el planteamiento del método individual, a n decisores se les pide a cada uno, un sólo nivel $\alpha$ de comparación. Supongamos que el resultado ha sido

$$n_i \text{ individuos dicen } \alpha_i, \text{ con } i=1\ldots p$$

en donde $\sum_1^p n_i=n$ y $\alpha_i\in[0,1]$. En este caso elegimos el sistema

$$Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}.$$

Si necesitamos un orden de prioridad entre los niveles, asignaremos como nivel más prioritario aquel que más individuos hayan seleccionado, como segundo nivel más prioritario, aquel que más individuos hayan elegido sin considerar el anterior, y así sucesivamente. Es decir, si

$$n_{\sigma(1)} \geq n_{\sigma(2)} \geq \ldots \geq n_{\sigma(p)}$$

para una permutación $\sigma$ del conjunto $\{1,2,\ldots,p\}$, elegimos como sistema con prioridades a

$$\{\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(p)}\}.$$

Este segundo método implica a n decisores, frente al primer método que implica sólo a uno. En ambos métodos, obtenemos sistemas de comparación NIS sobre el intervalo [0,1].

El método de comparación NIS sobre el conjunto de intervalos difusos se reduce en casi todos los casos (excepto la mayorización) a un estudio sobre intervalos reales. Como medidas de posición de cada intervalo tomaremos dos puntos intermedios cualesquiera del mismo (NIS-g), y como casos particulares, los extremos del intervalo (NIS-extremo) o un sólo punto intermedio (NIS-promedio). Estas distintas versiones recogen la subjetividad del decisor y su actitud ante la incertidumbre, ya en la misma selección del sistema de comparación NIS, como también en la elección del tipo de medida sobre cada intervalo. Esta última se sustituirá por la elección de dos parámetros sobre el intervalo [0,1], que en un caso particular, puede interpretarse como la elección de un grado de optimismo-pesimismo por parte del decisor.

## 1.2 FUNCION NIS-g.

### 1.2.1 Definición y propiedades generales.

Sea $\underset{\sim}{A}\in\mathbb{R}$, sea $Y=\{\alpha_i\}_{i\in I}$, con $I=\{1,2,\ldots,n\}$ un sistema de comparación NIS adecuado ($A_{\alpha_i}\neq\emptyset$; $\forall i\in I$). Como A es convexo y $\mu_A$ es s.c.s., entonces $A_{\alpha_i}$ es un intervalo cerrado

$$A_{\alpha_i}=[a_i,b_i],\ \forall i\in I.$$

Para definir la función NIS general o NIS-g seleccionamos dos medidas de posición (k=2) de dicho intervalo, y estas son dos puntos cualesquiera del mismo, seleccionados en la forma paramétrica del intervalo, mediante unos valores $\lambda$ y $\mu$. Estas medidas representan y localizan a $A_{\alpha_i}$ con respecto a $\mathbb{R}$. Así definimos la función ordenadora

$$f_T:\underset{\sim}{\mathbb{R}}\times[0,1]^2\longrightarrow\mathbb{R}^{2n}$$

$\forall \underset{\sim}{A}\in\mathbb{R}$, $\lambda,\mu\in[0,1]$

$$f_T(A,\lambda,\mu)=(\lambda b_1+(1-\lambda)a_1,\mu b_1+(1-\mu)a_1,\ldots,\lambda b_n+(1-\lambda)a_n,\mu b_n+(1-\mu)a_n)$$

o escrita en notación simplificada

$$f_T(A,\lambda,\mu)=(\lambda b_i+(1-\lambda)a_i,\mu b_i+(1-\mu)a_i)_1^n.$$

Fijados los parámetros $\lambda$ y $\mu$, y mediante un orden sobre $\mathbb{R}^{2n}$, la función $f_T$ proporcionará una ordenación del conjunto de clases $\underset{\sim}{\mathbb{R}}_{f_T}$, que notaremos por

$$\underset{\sim}{\mathbb{R}}_\lambda^\mu(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

para considerar el sistema de comparación de trabajo, y los parámetros que definen la función NIS-g.

La indiferencia que genera la partición en clases de equivalencia es:

$$\forall A,B\in\underset{\sim}{\mathbb{R}},\ A_{\alpha_i}=[a_i,b_i],\ B_{\alpha_i}=[c_i,d_i]$$

$$A\simeq_{f_T}B\Longleftrightarrow f_T(A,\lambda,\mu)=f_T(B,\lambda,\mu)$$

$$\Leftrightarrow \lambda b_i+(1-\lambda)a_i=\lambda d_i+(1-\lambda)c_i \quad y \quad \mu b_i+(1-\mu)a_i=\mu d_i+(1-\mu)c_i \quad \forall i\in I$$

es decir, la indiferencia entre dos elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ , es equivalente a la igualdad de los valores de las parametrizaciones en $\lambda$ y $\mu$, respectivamente, en los distintos $\alpha$-cortes correspondientes al sistema de comparación. Veamos ahora, que cuando los parámetros $\lambda$ y $\mu$ son distintos esta relación de indiferencia es equivalente a la coincidencia entre los $\alpha$-cortes del sistema de comparación.

Proposición 1.1

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $\lambda,\mu\in[0,1]$ / $\lambda\neq\mu$, $A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$, $B=[c_\alpha,d_\alpha]$ entonces

$$\left.\begin{array}{l}\lambda b_\alpha+(1-\lambda)a_\alpha=\lambda d_\alpha+(1-\lambda)c_\alpha\\ \mu b_\alpha+(1-\mu)a_\alpha=\mu d_\alpha+(1-\mu)c_\alpha\end{array}\right\} \Leftrightarrow A_\alpha=B_\alpha.$$

Demostración.

Consideramos a

$$\begin{array}{l}\lambda b_\alpha+(1-\lambda)a_\alpha=\lambda d_\alpha+(1-\lambda)c_\alpha\\ \mu b_\alpha+(1-\mu)a_\alpha=\mu d_\alpha+(1-\mu)c_\alpha\end{array}$$

como un sistema con incognitas $d_\alpha$ y $c_\alpha$. El determinante

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1-\lambda\\ \mu & 1-\mu\end{vmatrix}=\lambda-\mu\neq 0$$

por tanto el sistema tiene solución única;

$$d_\alpha = \frac{\begin{vmatrix}\lambda b_\alpha+(1-\lambda)a_\alpha & 1-\lambda\\ \mu b_\alpha+(1-\mu)a_\alpha & 1-\mu\end{vmatrix}}{\lambda-\mu}=b_\alpha$$

$$c_\alpha = \frac{\begin{vmatrix}\lambda & \lambda b_\alpha+(1-\lambda)a_\alpha\\ \mu & \mu b_\alpha+(1-\mu)a_\alpha\end{vmatrix}}{\lambda-\mu}=a_\alpha$$

de donde $A_\alpha=B_\alpha$.□

Aplicando este resultado, la indiferencia entre números difusos queda en la forma

a) Si $\lambda=\mu$, $A \simeq_{f_T} B \iff \lambda b_i+(1-\lambda)a_i=\lambda d_i+(1-\lambda)c_i \quad \forall i\in I$

b) Si $\lambda\neq\mu$, $A \simeq_{f_T} B \iff A_{\alpha_i}=B_{\alpha_i} \quad \forall i\in I$.

Es decir, cuando los dos parámetros coinciden, la indiferencia es equivalente a la coincidencia entre los distintos puntos promedio (en $\lambda=\mu$) de cada uno de los $\alpha$-cortes del sistema de comparación (fig.3a). Y cuando los dos parámetros son distintos, la indiferencia es equivalente a la coincidencia entre un número finito, pero indeterminado en principio, de $\alpha$-cortes de los números difusos (fig 3b).


(a) (b)

figura 3. Indiferencia de números difusos. (a) con $\lambda=\mu=1/2$ y cualquier sistema de comparacion. (b) con $\lambda\neq\mu$ y sistema de comparación $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$.

La igualdad entre conjuntos difusos dada por Zadeh ($\mu_A=\mu_B$) es equivalente a la igualdad entre sus $\alpha$-cortes. Por tanto, la indiferencia generada por la función $f_T$, con $\lambda$ y $\mu$ distintos, es una relajación discreta de la igualdad usual

$$A=B \iff A_\alpha=B_\alpha \quad \forall\alpha\in(0,1]$$

$$\lambda\neq\mu \quad A\simeq_{f_T} B \iff A_{\alpha_i}=B_{\alpha_i} \quad \forall i\in I.$$

Como en principio el sistema de comparación no está fijo, siempre es posible elegir un número de niveles de importancia subjetiva tan grande, como sea necesario, para garantizarnos que la discretización de la igualdad de Zadeh es suficiente, para que un decisor admita la indiferencia entre las cantidades difusas.

En números difusos triangulares, con parámetros diferentes, basta utilizar dos niveles de importancia subjetiva distintos, para garantizarnos que la relación $\simeq_{f_T}$ coincide con la relación de igualdad de Zadeh.

El orden generado por $f_T$ sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}_{\lambda}^{\mu}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, restringido al conjunto de números reales $\mathbb{R}$, considerando cada número real como un singleton de altura máxima, coincide con el orden usual, ya que

$$A\in \mathbb{R}\subset\underset{\sim}{\mathbb{R}} \Longrightarrow A_{\alpha}=A \ \forall\alpha\in(0,1]$$

de donde

$$f_T(A,\lambda,\mu)=(A,A,\ldots,A)\in \mathbb{R}^{2n}.$$

Cualquiera de las ordenaciones consideradas en $\mathbb{R}^{2n}$ sobre ese vector, regenera la ordenación usual en $\mathbb{R}$.

Vamos a analizar ahora algunas propiedades importantes del método NIS, que son independientes de la parametrización y de la ordenación de $\mathbb{R}^m$ consideradas. También veremos algunos casos particulares del método, que coinciden con índices de comparación de otros autores.

Cambio de escala.

Estudiamos ahora el comportamiento en la ordenación de la función NIS-g, ante un cambio de escala de las variables en estudio. Este problema es interesante cuando trabajamos con números difusos que vienen expresados en distinto tipo de unidades de medida, o bien, cuando queremos que todas las variables vengan dadas en un nuevo intervalo de trabajo, como por el ejemplo el intervalo unidad.

Como la función NIS-g viene dada a través de los valores de los $\alpha$-cortes, utilizaremos en la expresión del cambio de escala la relación con la representación por $\alpha$-cortes, dada por Nguyen y que recogemos en el apartado 4.2 del primer capítulo.

El planteamiento es el siguiente:

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, un cambio de escala consiste en pasar de la función de pertenencia $\mu_A$ a la función

$$\mu_{A^e} = \mu_A \circ e$$

con $e(x)=rx+s$ , $r,s \in \mathbb{R}$ y $r>0$. O lo que es lo mismo trabajar con el número difuso

$$A^e = r^{-1} \odot (A \ominus s)$$

como se deduce de la aritmética entre cantidades difusas.

Evidentemente $A^e \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$. Veamos que la comparación utilizando las cantidades difusas iniciales o sus transformados mediante un cambio de escala es exactamente la misma. Para ello necesitamos conocer el extremo superior e inferior de los $\alpha$-cortes de $A^e$.

Si $A_\alpha=[a_\alpha, b_\alpha]$, mediante la relación con la representación por $\alpha$-cortes deducimos que

$$A^e_\alpha = [(a_\alpha - s)\tfrac{1}{r} , (b_\alpha - s)\tfrac{1}{r} ]$$

<u>Lema 1</u>.

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, y sea $A^e \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ / $\mu_{A^e}(x)=\mu_A(e(x))$ con $e(x)=rx+s$, $r,s \in \mathbb{R}$ y $r>0$. Entonces

$$\forall \lambda,\mu \in [0,1] \qquad f_T(A,\lambda,\mu)=rf_T(A^e,\lambda,\mu)+\underline{s}$$

en donde $\underline{s}=(s,s,\dots,s) \in \mathbb{R}^{2n}$.

<u>Demostración</u>.

$f_T(A^e,\lambda,\mu)=(\lambda(b_i-s)\frac{1}{r}+(1-\lambda)(a_i-s)\frac{1}{r} ,\mu(b_i-s)\frac{1}{r}+(1-\mu)(a_i-s)\frac{1}{r} )_1^n=$

$=\frac{1}{r}(\lambda b_i+(1-\lambda)a_i,\mu b_i+(1-\mu)a_i)_1^n - \frac{1}{r}(s,s,\dots,s) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad f_T(A,\lambda,\mu)=rf_T(A^e,\lambda,\mu)+\underline{s}$ , con $A_{\alpha_i}=[a_i,b_i]$.□

<u>Proposición 1.2</u>

Sean $A,B \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $\lambda,\mu \in [0,1]$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ un sistema de comparación NIS. Sean $A^e,B^e \in \mathbb{R}$ los transformados de A,B mediante el cambio de escala $e(x)=rx+s$, con $r,s \in \mathbb{R}$, $r>0$. Entonces bajo el orden lexicográfico, fuerte o de mayorización de $\mathbb{R}^{2n}$, se verifica

i) $f_T(A,\lambda,\mu) \leq f_T(B,\lambda,\mu) \Longleftrightarrow f_T(A^\ominus,\lambda,\mu) \leq f_T(B^\ominus,\lambda,\mu)$

ii) $A \simeq_{f_T} B \Longleftrightarrow A^\ominus \simeq_{f_T} B^\ominus$

es decir, la comparación e indiferencia NIS no dependen de la escala considerada sobre las variables.

Demostración.

Evidente a partir del lema anterior.□

Compatibilidad con las operaciones.

Aplicamos aquí los resultados obtenidos en el apartado 7.2 del primer capítulo, a la función NIS-g.

a) Compatibilidad con la suma.

Sea + la operación suma de números reales, que es continua e isotónica. Sea $\oplus$ la operación extendida sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ mediante el principio de extensión. Aplicando el resultado de Nguyen para $\alpha$-cortes (ver apartado I.4.2) y de Negoita [55] para $\alpha$-cortes fuertes (recordemos que interpretamos el 0-corte como el cierre del 0-corte fuerte), tenemos

$$\forall A,B\in\underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad (A\oplus B)_{\alpha_i} = A_{\alpha_i}\oplus B_{\alpha_i} \qquad (1)$$

La operación $\oplus$ es interna en $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, y de (1) se deduce que

$$f_T(A\oplus B,\lambda,\mu) = f_T(A,\lambda,\mu) + f_T(B,\lambda,\mu)$$

para cualquier sistema de comparación NIS, y para cualesquiera parámetros $\lambda,\mu$ del intervalo unidad.

Como la suma entre números reales, verifica la condición ii) de los corolarios 7.1 y 7.2 del primer capítulo, y gracias a (1) se tiene que bajo el orden lexicográfico o el orden fuerte se da la compatibilidad con la suma.

Para simplificar la notación, escribiremos las clases de equivalencia sin corchetes, entonces

$$\forall A,B,C,D \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \text{ con } A \le B,\ C \le D \Longrightarrow A\oplus C \le B\oplus D.$$

Con la mayorización no podemos deducir en general la condición i) de los corolarios 7.3 y 7.4 del primer capítulo, sobre 2n-uplas ordenadas. Es decir,

$$\exists A,B \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad f_T(A,\lambda,\mu)_{\downarrow} + f_T(B,\lambda,\mu)_{\downarrow} \neq f_T(A\oplus B,\lambda,\mu)_{\downarrow}$$

y por tanto no podemos garantizar la compatibilidad con la suma. No obstante, en un caso particular de la función NIS-g, ésta si se dará como posteriormente veremos.

b) Compatibilidad con el producto por números reales positivos.

Sea r un número real positivo, aplicando el resultado de Nguyen y Negoita, comentado en el apartado a), tenemos

$$\forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad (rA)_{\alpha}=rA_{\alpha} \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

de donde

$$f_T(rA,\lambda,\mu)=rf_T(A,\lambda,\mu)$$

sobre cualquier sistema de comparación NIS, y cualesquiera parámetros $\lambda$ y $\mu$. Además este resultado también es cierto para n-uplas ordenadas, con lo que se verifica que

$$\forall A,B \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad A \le B \Longrightarrow rA \le rB \quad \forall r>0$$

usando para ello el orden lexicográfico, fuerte o de mayorización sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

c) Compatibilidad con el producto por positivos.

Sea $\cdot$ la operación producto sobre $\mathbb{R}^{+}$. La operación producto no es en general isotónica, pero si lo es restringida a números reales estrictamente positivos. Es por esto que necesitaremos también restringir los números difusos a un concepto de positividad. Pero para aplicar los corolarios 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4 del primer capítulo, necesitamos que se verifique en cualquier caso la relación

$$f_T(A\odot B,\lambda,\mu) = f_T(A,\lambda,\mu) \cdot f_T(B,\lambda,\mu)$$

en donde $\odot$ es el producto sobre números difusos, definido mediante el principio de extensión. Ahora bien, esa relación no es cierta en general, y además podemos comprobar que el producto por positivos no es siempre compatible con $f_T$, mediante el siguiente contraejemplo.

<u>Contraejemplo</u>.

Sea $Y=\{\alpha\}$ con $\alpha\in[0,1]$. Sean $A,B,C,D \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ números difusos dados en la fig. 4, y tales que

$$A_\alpha=[1,5],\ B_\alpha=[2,4.1],\ C_\alpha=[2,10],\ y\ D_\alpha=[1,11.1].$$

Consideramos los parámetros $\lambda=\mu=1/2$, y sobre $\mathbb{R}^2$ cualquiera de los órdenes sobre los que venimos trabajando (en este caso funcionan igual).

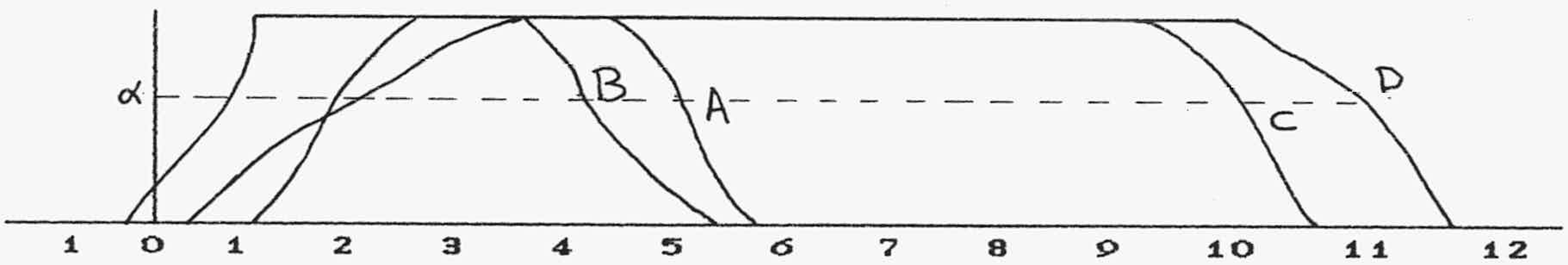



figura 4. Ejemplo de no compatibilidad de $f_T$ con la operacion producto.

$f_T(A,1/2,1/2)=(3,3)$ $\qquad$ $f_T(C,1/2,1/2)=(6,6)$

$f_T(B,1/2,1/2)=(3.05,3.05)$ $\qquad$ $f_T(D,1/2,1/2)=(6.05,6.05)$

de donde $A \le B$ y $C \le D$

$(A\odot C)=[2,50]$ $\qquad$ $(B\odot D)=[2,45.51]$

$f_T(A\odot C,1/2,1/2)=(26,26)$ $\qquad$ $f_T(B\odot D,1/2,1/2)=(23.75,23.75)$

de donde $A\odot C \nleq B\odot D$.

Por tanto, en general, la compatibilidad de $f_T$ con el producto entre números difusos es falsa, aunque posteriormente comprobaremos un caso, con unos parámetros determinados, en donde si es cierta.

Casos particulares.

Estudiamos como la función NIS-g, en algunos casos particulares, corresponde a índices conocidos en la literatura.

1. Consideramos el sistema de comparación formado por un sólo nivel $\langle\alpha\rangle$ con $\alpha\in(0,1]$, y seleccionamos la función NIS

$$f_T(A,1,1)=(b_\alpha,b_\alpha)\in \mathbb{R}^2 \text{ con } A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$$

y sobre $\mathbb{R}^2$ el orden lexicográfico o fuerte (es indiferente en este caso). La comparación es

$$\forall A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad A \leq B \Longleftrightarrow f_T(A,1,1) \leq f_T(B,1,1) \Longleftrightarrow b_\alpha \leq d_\alpha$$

con $B_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha]$, que sólo utiliza el extremo superior de un $\alpha$-corte concreto. Este índice coincide, en cuanto a la comparación, con el dado por Adamo en [1].

2. Consideramos el sistema de comparación $Y=\langle\alpha\rangle$, con $\alpha\in(0,1]$, y sobre $\mathbb{R}^2$ el orden fuerte, entonces la función

$$f_T(A,1,0)=(b_\alpha,a_\alpha)\in \mathbb{R}^2$$

genera la relación de ordenación intervalar de grado $\alpha$, definida por Tanaka et al. en [65], si para ello consideramos desigualdades estrictas.

3. Considerando el sistema de comparación $Y=[0,1]$, y las funciones $f_T(A,1,1)$, $f_T(A,0,0)$ y $f_T(A,1,0)$ con codominio un espacio de funciones, y orden asociado el fuerte, entonces dichas funciones generan las relaciones $\leq_r$, $\leq_l$ y $\leq$ dadas por Rámik y Řimánek en [60], definidas por :

$$\forall A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha] \text{ y } B_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha]$$

$$A \leq_r B \Longleftrightarrow b_\alpha \leq d_\alpha$$

$$A \leq_l B \Longleftrightarrow a_\alpha \leq c_\alpha$$

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \leq_r B \text{ y } A \leq_l B.$$

Rámik y Řimánek prueban también la equivalencia

$$A \leq B \Longleftrightarrow \widetilde{\max}\langle A,B\rangle=B \Longleftrightarrow \widetilde{\min}\langle A,B\rangle=A \qquad (2)$$

en donde $\tilde{\max}$ y $\tilde{\min}$ son las extensiones difusas de los operadores reales máx y mín.

Este resultado prueba lo restrictivo del orden cuando se utiliza como sistema de comparación todo el intervalo [0,1]. Por otro lado, (2) permite definir operadores máx y mín difusos asociados a una relación de orden total, este proceso se desarrolló con $f_T(A,1,0)$ y el orden lexicográfico por González y Vila en [36].

### 1.2.2 Función NIS-g con orden lexicográfico.

Consideramos sobre $\mathbb{R}^{2n}$ el orden lexicográfico, que al ser un orden total, define con la función $f_T$ un orden total sobre el conjunto de clases $\underset{\sim}{\mathbb{R}}{}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, en la forma

$$A \le_L B \Longleftrightarrow f_T(A,\lambda,\mu) \le_L f_T(B,\lambda,\mu)$$

con $A,B \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}{}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Notamos a las clases sin corchetes para simplicar. Suponemos dados los parámetros $\lambda$ y $\mu$, y el sistema de comparación NIS, $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$.

El orden en que se den los níveles del sistema de comparación es fundamental en el proceso de comparación bajo el orden lexicográfico, ya que según sea éste varía el resultado final. Así, sobre la función NIS-g, y el orden lexicográfico, supondremos siempre dado un grado de importancia sobre cada nivel, que se obtendrá junto al sistema de comparación en los distintos métodos comentados en el apartado 1.1.4. Siendo $\alpha_1$ el nivel más prioritario y $\alpha_n$ el menos prioritario. De igual manera, supondremos $\lambda$ el parámetro más prioritario y $\mu$ el menos prioritario.

Estudiamos ahora la forma concreta que adopta el orden, y veremos como está asociada a una ordenación entre intervalos cerrados reales.

Sea $\mathcal{K}$ la clase de intervalos cerrados reales.

<u>Definición 1.2</u>

Sean $T=[t_1,t_2]$ y $S=[s_1,s_2]$ elementos de $\mathcal{K}$, se define la relación $\alpha(\lambda,\mu)$ del siguiente modo

$$T\alpha(\lambda,\mu)S \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda t_2+(1-\lambda)t_1 < \lambda s_2+(1-\lambda)s_1 \\ \text{ó} \\ \lambda t_2+(1-\lambda)t_1=\lambda s_2+(1-\lambda)s_1 \text{ y } \mu t_2+(1-\mu)t_1<\mu s_2+(1-\mu)s_1 \end{cases}$$

y notaremos por $no(T\alpha(\lambda,\mu)S)$ cuando no se verifique la relación entre T y S. Cuando $no(T\alpha(\lambda,\mu)S)$ y no $(S\alpha(\lambda,\mu)T)$ entonces

$$\lambda t_2+(1-\lambda)t_1=\lambda s_2+(1-\lambda)s_1 \text{ y } \mu t_2+(1-\mu)t_1=\mu s_2+(1-\mu)s_1$$

y escribimos

$$T \simeq_{f_T} S$$

considerando la relación de indiferencia restringida a intervalos nítidos. Esta relación devuelve la igualdad entre intervalos cuando $\lambda\neq\mu$, y cuando $\lambda=\mu$ es la coincidencia entre un punto intermedio de ambos intervalos.

El conjunto $\mathcal{K}$ de intervalos cerrados reales "puede visualizarse como el semiplano cerrado de puntos (x,y) del plano euclideo, incluyendo la diagonal y=x", Moore [52]. Los puntos de la diagonal y=x contenidos en el segmento que intersecan las líneas de puntos discontinuos en la fig.5 representan los números reales contenidos en el intervalo [x,y].

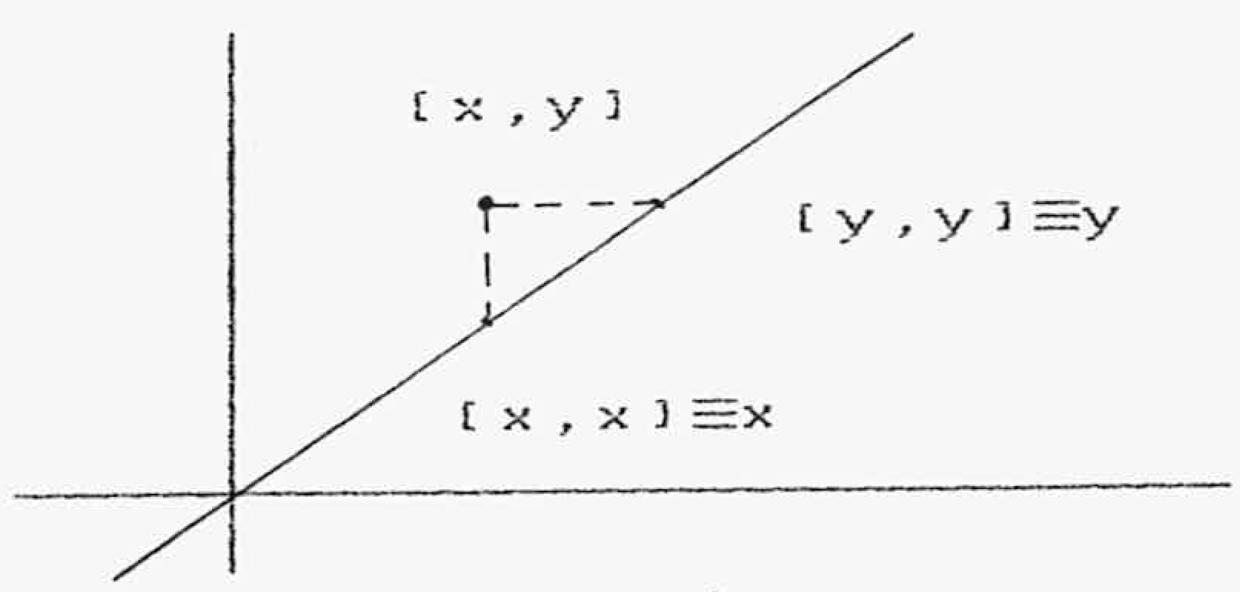



figura 5 Representación del conjunto $\mathcal{K}$.

Dado $T\in\mathcal{K}$, notaremos por

$$\alpha(\lambda,\mu,T)=\{S\in\mathcal{K}/\ T\alpha(\lambda,\mu)S\}$$

al conjunto de intervalos de $\mathcal{K}$ que dominan a T bajo la relación

$\alpha(\lambda,\mu)$. Usando este conjunto y la representación del espacio $\mathcal{K}$ dada por Moore, podremos representar gráficamente la forma de dominancia de una relación sobre $\mathcal{K}$. En la fig.6 representamos esta región de dominancia bajo la relación $\alpha(\lambda,\mu)$, para unos ciertos parámetros $\lambda$ y $\mu$.

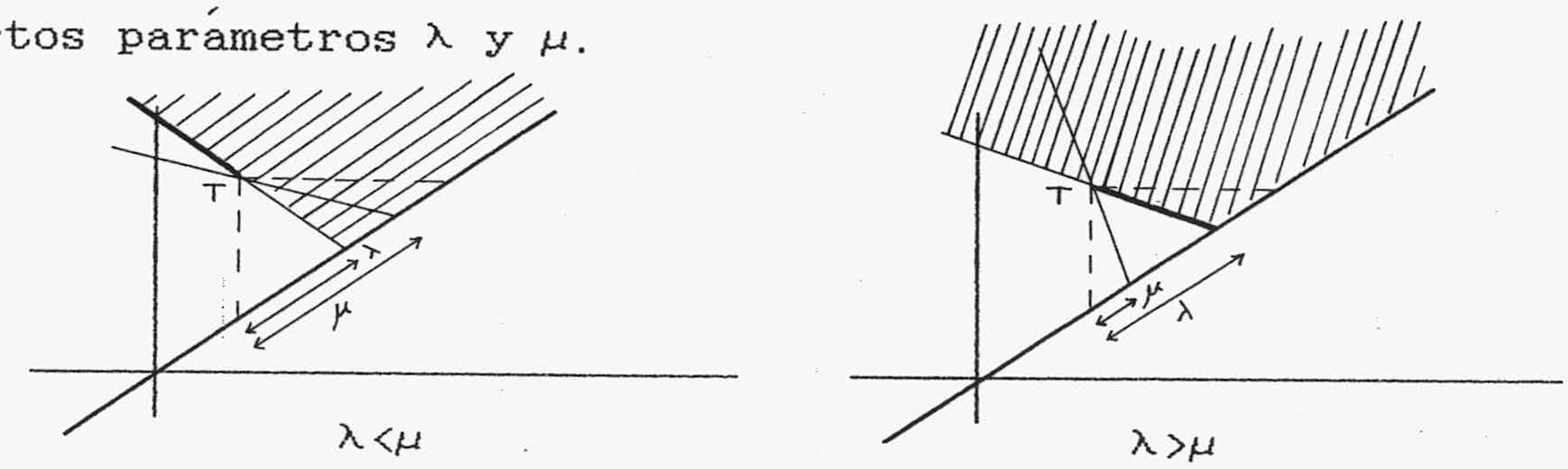



figura 6. La región rayada, junto con la línea en negrita constituyen el conjunto de dominancia de T: $\alpha(\lambda,\mu)$.

Proposición 1.3

$\forall T,S,P\in\mathcal{K}$ se verifica que

i) $no(T\alpha(\lambda,\mu)T)$

ii) si $T\alpha(\lambda,\mu)S \Longrightarrow no(S\alpha(\lambda,\mu)T)$

iii) $T\alpha(\lambda,\mu)S$ y $S\alpha(\lambda,\mu)P \Longrightarrow T\alpha(\lambda,\mu)P$

iv) $no(T\simeq_{f_T} S) \Longrightarrow T\alpha(\lambda,\mu)S$ ó $S\alpha(\lambda,\mu)T$

para cualesquiera $\lambda,\mu\in[0,1]$.

Demostración.

evidente.□

A través de la relación $\alpha(\lambda,\mu)$ podremos caracterizar la relación de orden definida por el orden lexicográfico y la función NIS-g.

Teorema 1.1

Sea $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $I=\{1,2,\ldots,n\}$, entonces

$$A \le_L B \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k\in I /\ A_{\alpha_i} \simeq_{f_T} B_{\alpha_i}\ \ \forall i\in I \text{ con } 0<i<k \text{ y } A_{\alpha_k}\alpha(\lambda,\mu)B_{\alpha_k} \\ \text{ó} \\ A_{\alpha_i} \simeq B_{\alpha_i}\ \ \forall i\in I. \end{cases}$$

Demostración.

Sean $A_{\alpha_i}=[a_i,b_i]$, $B_{\alpha_i}=[c_i,d_i]$, $i\in I$.

$A \leq_L B \Longleftrightarrow f_T(A,\lambda,\mu) \leq_L f_T(B,\lambda,\mu) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \{ \exists k\in I \ / \ \lambda b_i+(1-\lambda)a_i=\lambda d_i+(1-\lambda)c_i, \ \mu b_i+(1-\mu)a_i=\mu d_i+(1-\mu)c_i$ en $0<i<k$ y ó bien $\lambda b_k+(1-\lambda)a_k<\lambda d_k+(1-\lambda)c_k$ ó bien $\lambda b_k+(1-\lambda)a_k=\lambda d_k+(1-\lambda)c_k$ y $\mu b_k+(1-\mu)a_k<\mu d_k+(1-\mu)c_k\}$ ó $\{ \lambda b_i+(1-\lambda)a_i=\lambda d_i+(1-\lambda)c_i, \ \mu b_i+(1-\mu)a_i=\mu d_i+(1-\mu)c_i \ \forall i\in I\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k\in I/ \ A_{\alpha_i} \simeq_{f_T} B_{\alpha_i} \ \forall i\in I \text{ con } 0<i<k \text{ y } A_{\alpha_k}\,\alpha(\lambda,\mu)B_{\alpha_k} \\ \text{ó} \\ A_{\alpha_i}\simeq B_{\alpha_i} \quad \forall i\in I. \end{cases} \qquad \square$$

La comparación NIS-g lexicográfico sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ recorriendo los niveles de importancia subjetiva, según prioridad, compara mediante la relación $\alpha(\lambda,\mu)$ los correspondientes $\alpha$-cortes y decide en el primero que no produzca la relación de indiferencia $\simeq_{f_T}$. O bien, llegado al último nivel y siendo todos los $\alpha$-cortes indiferentes da la igualdad entre las clases. Esta comparación genera una relación de dominancia débil, que denominamos "B supera a A".

El principal problema de esta comparación es que no utiliza toda la información disponible del número difuso, ya que se detiene en el primer $\alpha$-corte que no provoque indiferencia. La ventaja fundamental es que siempre decide, y proporciona la igualdad cuando todos los $\alpha$-cortes del sistema de comparación son iguales ($\lambda\neq\mu$) o lo son los puntos promedios de los mismos ($\lambda=\mu$), lo que garantiza un buen nivel de indiferencia. Para resolver parte de los inconvenientes de esta forma de ordenar, estudiaremos la función NIS-g con orden fuerte, que utiliza toda la información, pero no siempre decide (no proporciona un orden total).

## 1.2.3 Funcion NIS-g con orden fuerte.

Consideramos sobre $\mathbb{R}^{2n}$ el orden fuerte, que no es un orden total, por tanto, dado el sistema de comparación NIS $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ y los parámetros $\lambda,\mu\in[0,1]$, la relación

$$\forall A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}{}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \qquad A \leq_F B \Longleftrightarrow f_T(A,\lambda,\mu) \leq_F f_T(B,\lambda,\mu)$$

no definirá un orden total sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}{}^{\mu}_{\lambda}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Estudiamos la forma del orden y la relación de comparación asociada entre intervalos.

Definición 1.3

Sean $T=[t_1,t_2]$ y $S=[s_1,s_2]$ elementos de $\mathcal{K}$, se define la relación $\beta(\lambda,\mu)$ del siguiente modo

$$T\beta(\lambda,\mu)S \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda t_2+(1-\lambda)t_1 \leq \lambda s_2+(1-\lambda)s_1 \\ y \\ \mu t_2+(1-\mu)t_1 \leq \mu s_2+(1-\mu)s_1 \end{cases}$$

En la fig.7 representamos la región de dominancia bajo la relación $\beta(\lambda,\mu)$, para unos ciertos parámetros $\lambda$ y $\mu$.

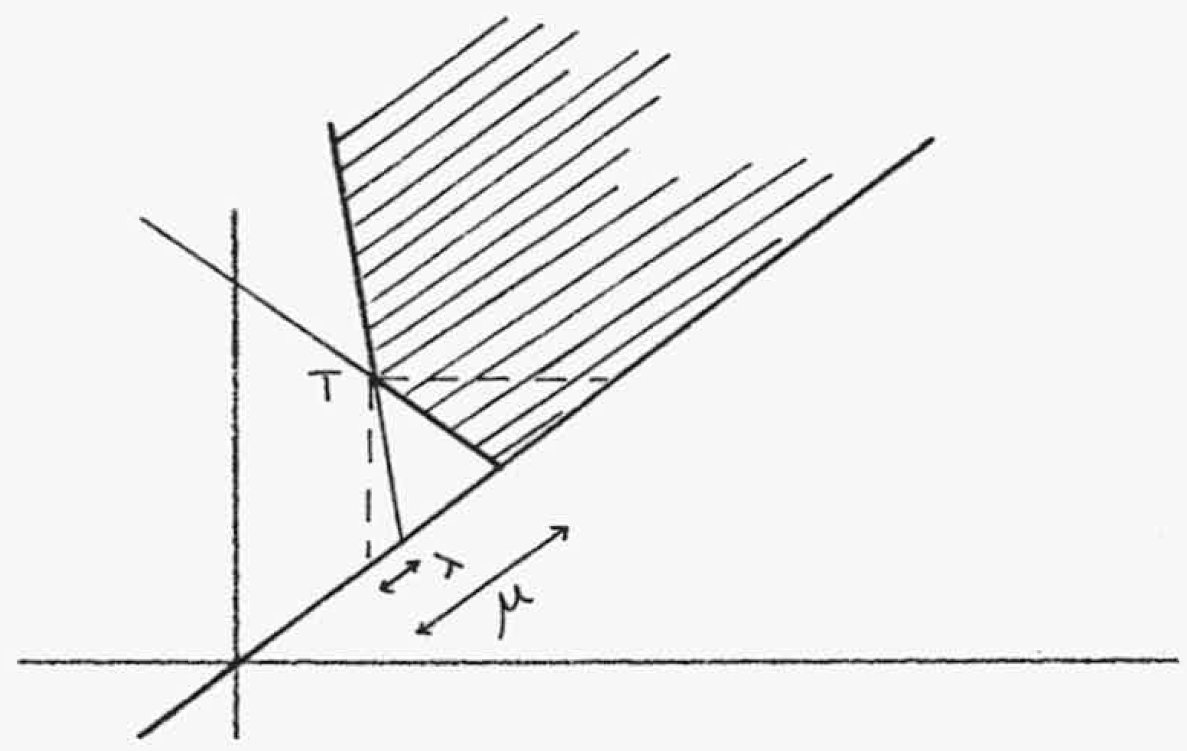



figura 7. La región rayada, junto a las líneas en negrita constituyen el conjunto de dominancia de T: $\beta(\lambda,\mu,T)$.

Proposición 1.4

$\forall T,S,P\in\mathcal{K}$ se verifica que

i) $T\beta(\lambda,\mu)T$

ii) $T\beta(\lambda,\mu)S$ y $S\beta(\lambda,\mu)T \Longrightarrow T \simeq_{f_T} S$

iii) $T\beta(\lambda,\mu)S$ y $S\beta(\lambda,\mu)P \Longrightarrow T\beta(\lambda,\mu)P$

Demostración.

evidente.□

Cuando $\lambda \neq \mu$, esta proposición dice que $\beta(\lambda,\mu)$ es una relación de orden sobre $\mathcal{K}$, ya que en ese caso la relación $\simeq_{f_T}$ es una igualdad entre intervalos, y por tanto ii) es la propiedad antisimétrica.

Con la relación $\beta(\lambda,\mu)$ caracterizamos la relación de orden fuerte de $f_T$ sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}{}_{\lambda}^{\mu}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Teorema 1.2

Sean $A,B \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}{}_{\lambda}^{\mu}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, con $\lambda,\mu \in [0,1]$ y $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ un sistema de comparación NIS, entonces

$$A \leq_F B \Longleftrightarrow A_{\alpha_i}\beta(\lambda,\mu)B_{\alpha_i} \quad \forall i\in I.$$

Demostración.

Sean $A_{\alpha_i}=[a_i,b_i]$, $B_{\alpha_i}=[c_i,d_i]$, $i\in I$.

$A \leq_L B \Longleftrightarrow f_T(A,\lambda,\mu) \leq_L f_T(B,\lambda,\mu) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (\lambda b_i+(1-\lambda)a_i,\ \mu b_i+(1-\mu)a_i)_1^n \leq_F (\lambda d_i+(1-\lambda)c_i,\ \mu d_i+(1-\mu)c_i)_1^n$

$\Longleftrightarrow \lambda b_i+(1-\lambda)a_i \leq \lambda d_i+(1-\lambda)c_i,\ \mu b_i+(1-\mu)a_i \leq \mu d_i+(1-\mu)c_i \quad \forall i\in I$

$\Longleftrightarrow A_{\alpha_i}\beta(\lambda,\mu)B_{\alpha_i} \quad \forall i\in I.$□

La ordenación con la función NIS-g y el orden fuerte, proporciona una dominancia total, que denominamos "B domina a A" y que no necesita de una prioridad entre los α-cortes. La forma de actuar es, aplicar la relación $\beta(\lambda,\mu)$ a cada uno de los α-cortes y decidir en la ordenación cuando todos los α-cortes de un número difuso están dominados, mediante la relación, por los respectivos α-cortes del otro número difuso. Evidentemente, el método recoge toda la información disponible sobre los números difusos y la utiliza, pero al no ser un orden total no decide en todos los casos. De cualquier forma, esta comparación en casos de no discriminación se complementa con la función NIS-g lexicográfico.

### 1.2.4 Función NIS-g con mayorización.

La relación $<_w$ de mayorización débil, que notaremos por $\leq_M$, es una relación de orden sobre el subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$

$$H_{2n}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})\in \mathbb{R}^{2n} \ / \ x_1 \geq \ldots \geq x_{2n}\} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Dado el sistema de comparación NIS $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, consideramos la función $f'_T$, asociada a la función NIS-g, y definida por

$$f'_T:\underset{\sim}{\mathbb{R}}\times[0,1]^2 \longrightarrow H_{2n}$$
$$(A,\lambda,\mu) \longrightarrow f'_T(A,\lambda,\mu)$$

con $f'_T(A,\lambda,\mu)=f_T(A,\lambda,\mu)_{\downarrow}$,

en donde $_{\downarrow}$ indica que le vector $f_T(A,\lambda,\mu)$ se considera con sus coordenadas en orden decreciente.

Las relaciones de indiferencia generadas por las funciones $f_T$ y $f'_T$ no son en general iguales, ya que

$$f_T(A,\lambda,\mu)=f_T(B,\lambda,\mu) \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f'_T(A,\lambda,\mu)=f'_T(B,\lambda,\mu)$$

y por tanto, la indiferencia generada por $f_T$ implica la indiferencia a través de $f'_T$, pero no al revés,

$$A \simeq_{f_T} B \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A \simeq_{f'_T} B.$$

La función $f'_T$ define sobre el conjunto de clases de indiferencia la relación

$$\forall A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}_{f'_T} \quad A \leq_M B \Longleftrightarrow f'_T(A,\lambda,\mu) \leq_M f'_T(B,\lambda,\mu)$$

que es de orden no total, y denominamos "B mayoriza a A".

La compatibilidad de $\leq_M$ con las operaciones ya ha sido tratada en el apartado 1.2.1., y vimos como esta relación es sólo compatible con el producto por un escalar positivo. Posteriormente veremos como la función NIS-extremo con la mayorización es compatible además con la suma en todos los casos, y con el producto de números difusos positivos.

La función NIS-g con la mayorización, a diferencia de lo que pasaba con el orden lexicográfico y el orden fuerte, no genera una relación de comparación entre intervalos. Es por esto que, puede pensarse en utilizar la mayorización sólo en la ordenación de $\alpha$-cortes, de forma similar a las relaciones $\alpha(\lambda,\mu)$ y $\beta(\lambda,\mu)$, y extender luego este proceso mediante otro orden de $\mathbb{R}^m$. Bajo este punto de vista, consideramos sobre el conjunto $\mathcal{K}$ de intervalos cerrados, las relaciones

$$[r_1,r_2]\gamma_1[s_1,s_2] \Longleftrightarrow (r_1,r_2)<^{w}(s_1,s_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} r_1\leq s_1 & y \\ r_1+r_2 \leq s_1+s_2 \end{cases}$$

$$[r_1,r_2]\gamma_2[s_1,s_2] \Longleftrightarrow (r_1,r_2)<_{w}(s_1,s_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} r_2\leq s_2 & y \\ r_1+r_2 \leq s_1+s_2 \end{cases}$$

Fácilmente puede comprobarse que

$$\gamma_1\equiv\beta(0,1/2) \text{ y } \gamma_2\equiv\beta(1,1/2).$$

Si consideramos el sistema $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ y las relaciones

$$A \leq_j B \Longleftrightarrow A_{\alpha_i}\gamma_j\, B_{\alpha_i} \quad \forall i=1...n,\ j=1,2$$

estas coinciden con las generadas a través de las funciones $f_T(\cdot,1,1/2)$ y $f_T(\cdot,1,1/2)$ y el orden fuerte.

De este modo y bajo este planteamiento, la mayorización no proporciona ningún tipo de comparación nuevo. Ahora bien, si consideramos la combinación de las relaciones $\gamma_j$ y el orden lexicográfico, y definimos

$$A \leq_L B \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k\in I/\ A_{\alpha_i}=B_{\alpha_i}\ \forall i\in I \text{ con } 0<i<k \text{ y } A_{\alpha_k}\gamma_j\, B_{\alpha_k} \\ \text{ó} \\ A_{\alpha_i}=B_{\alpha_i} \quad \forall i\in\{1,...,n\} \end{cases} \qquad j=1,2$$

generamos otro tipo de comparaciones sobre números difusos distintos de las estudiadas hasta ahora, que serán consideradas en futuras investigaciones, así como las posibles combinaciones de la relación $\alpha(\lambda,\mu)$ y el orden fuerte, y $\beta(\lambda,\mu)$ y el orden lexicográfico.

## 1.3 CASOS PARTICULARES Y EJEMPLOS DE LA FUNCION NIS-g.

Hay casos particulares de la función NIS-g en los que se verifican mejores propiedades de compatibilidad ($\lambda=1$, $\mu=0$ ó $\lambda=0$, $\mu=1$) o es posible una mejor interpretacción de los parámetros ($\lambda=\mu$), y que estudiamos a continuación.

### 1.3.1 Función NIS-extremo.

Si para definir la función NIS-g, seleccionamos como medidas de posición de cada $\alpha$-corte, el extremo superior e inferior del mismo, es decir,

$$\lambda=1,\ \mu=0 \text{ ó } \lambda=0,\ \mu=1,$$

entonces llamamos a $f_T(\cdot,1,0)$ y a $f_T(\cdot,0,1)$ funciones NIS-extremo.

Sea $\underset{\sim}{A}\in\mathbb{R}$, y el sistema de comparación NIS $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, $A_{\alpha_i}=[a_i,b_i]$, entonces las funciones NIS-extremo adoptan en notación simplificada la forma:

$$f_T(A,1,0)=(b_i,a_i)_1^n \quad f_T(A,0,1)=(a_i,b_i)_1^n.$$

Considerando sobre $\mathbb{R}^{2n}$ el orden lexicográfico, y el sistema de comparación NIS con un orden de prioridad, ambas funciones comparan de forma distinta. Una interpretación de la comparación entre números difusos, como elección que produce un beneficio a un decisor, permite considerar a $f_T(\cdot,1,0)$ como función optimista y a $f_T(\cdot,0,1)$ como función pesimista (suponiendo que el beneficio en la decisión es elegir el mayor número difuso, en caso contrario, es al revés). Esto es así, ya que $f_T(\cdot,0,1)$ sobre cada $\alpha$-corte da prioridad al extremo superior (mayor ganancia posible), y $f_T(\cdot,0,1)$ se la da al extremo inferior (mayor ganancia mínima).

Considerando sobre $\mathbb{R}^{2n}$ el orden fuerte, ambas funciones generan la misma relación de orden sobre el conjunto de clases.

Considerando sobre $\mathbb{R}^{2n}$ la mayorización débil, y sistemas de comparación NIS, $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, tal que

$$\alpha_1\leq\ldots\leq \alpha_n$$

entonces la función adopta la forma

$$f'_T(A,1,0)=f'_T(A,0,1)=(b_1,b_2,\ldots,b_n,a_n,a_{n-1},\ldots,a_1)$$

La relación de indiferencia que genera la función $f'_T$ es, en este caso, exactamente igual que la generada por $f_T$

$$A\simeq_{f'_T} B \iff f'_T(A,1,0)=f'_T(B,1,0) \iff A_{\alpha_i}=B_{\alpha_i} \;\; i=1\ldots n \iff A\simeq_{f_T} B$$

y por tanto, el conjunto de clases que definen es el mismo

$$\underset{\sim}{\mathbb{R}}_{f'_T} = \underset{\sim}{\mathbb{R}}_{f_T} = \underset{\sim}{\mathbb{R}}^1_0(\alpha_1\ldots\alpha_n)= \underset{\sim}{\mathbb{R}}^0_1(\alpha_1\ldots\alpha_n).$$

<u>Extensión de la función NIS-extremo</u>.

La función NIS-extremos está definida sobre el conjunto de números difusos $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, y es posible extenderla al conjunto de intervalos cerrados difusos $\mathscr{E}$ del siguiente modo:

$$f_T(\cdot,1,0):\mathscr{E}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}^{2n} \;\;/\;\; \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\},$$

ampliando el orden real, mediante $-\infty<x<+\infty \;\; \forall x\in \mathbb{R}$.

Veamos ahora, como la función NIS-extremo es compatible, bajo cualquiera de los tres órdenes sobre $\mathbb{R}^{2n}$, con la suma y el producto por positivos.

<u>Compatibilidad con la suma</u>.

Sea + la operación suma de números reales, que es continua e isotónica. Sea $\oplus$ la operación extendida sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ mediante el principio de extensión. Ya vimos en el apartado 1.2.1 como bajo los órdenes lexicográfico y fuerte se daba la compatibilidad con esta operación. Con la mayorización no se pudo garantizar ya que en general la condición i) de los corolarios 7.3 y 7.4, del capítulo I, no se verificaba con la función $f'_T$. Veamos que si se verifica con los parámetros de la función NIS-extremo:

$$\forall A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)\ /\ A_{\alpha_i}=[a_i,b_i],\ B_{\alpha_i}=[c_i,d_i]$$

aplicando el resultado de Nguyen para $\alpha$-cortes y de Negoita para $\alpha$-cortes fuertes, tenemos

$$(A\oplus B)_{\alpha_i}=[a_i+c_i,b_i+d_i].$$

Como el sistema de comparación NIS, se ha tomado en la forma

$$\alpha_1\le\ldots\le\alpha_n$$

entonces

$$b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\ge a_n\ge a_{n-1}\ge\ldots\ge a_1$$

$$d_1\ge d_2\ge\ldots\ge d_n\ge c_n\ge c_{n-1}\ge\ldots\ge c_1$$

de donde

$$b_1+d_1\ge b_2+d_2\ge\ldots\ge b_n+d_n\ge a_n+c_n\ge a_{n-1}+c_{n-1}\ge\ldots\ge a_1+c_1$$

y por tanto

$$f'_T(A\oplus B,1,0)=f'_T(A,1,0)+f'_T(B,1,0).$$

Y como la operación suma verifica las condiciones ii), iii) y iv) del corolario I.7.3, entonces se verifica con la mayorización que

$$\forall A,B,C,D\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)\quad A\le_M B,\ C\le_M D \Longrightarrow A\oplus C\le_M B\oplus D.$$

La operación suma, también verifica las condiciones ii), iii) y iv) del corolario I.7.4, de donde se verifica un resultado análogo si consideramos la relación de orden que se genera con la otra relación de mayorización débil, $<^w$.

<u>Compatibilidad con el producto por positivos</u>.

Sea $\cdot$ la operación producto sobre $\mathbb{R}^+$. La operación producto no es en general isotónica, pero si lo es restringida a números reales positivos. Es por esto que necesitamos también restringir los números difusos a un concepto de positividad.

Definición 1.4

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ diremos que es positivo si y sólo si $A_{\alpha_i}\subset \mathbb{R}^{+}$ $\forall i=1\ldots n$.

Notaremos por $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{+}$ al conjunto de clases de números difusos positivos. Esta definición de positividad está asociada a un sistema de comparación concreto, y sobre todo el intervalo unidad coincide con la definición dada por Dubois y Prade (ver apartado I.4.3). Análogamente definimos el conjunto $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{-}$ de números difusos negativos, mediante la condición $A_{\alpha_i}\subset \mathbb{R}^{-}$, $\forall i=1\ldots n$.

Se verifican trivialmente las siguientes relaciones sobre clases positivas y negativas

$$\forall A,B\in\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{+} \text{ y } \forall C,D\in\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{-}$$

i) $A\oplus B,\ A\odot B,\ C\odot D \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{+}$

ii) $C\oplus D,\ A\odot C,\ B\odot D \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{-}$.

Consideremos nuevamente la función NIS-extremo, ahora sobre el conjunto de números difusos positivos. Como el producto por números positivos es continuo, aplicando el resultado de Nguyen y Negoita, se verifica

$$\forall A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{o}_{1}(\alpha_1\ldots\alpha_n)^{+} \qquad (A\odot B)_{\alpha_i}=[b_i d_i,\ a_i c_i]$$

de donde

$$f_T(A\odot B,1,0)=f_T(A,1,0)\cdot f_T(B,1,0).$$

Como el producto por números reales positivos verifica la condición ii) del corolario I.7.1 y del corolario I.7.2 entonces se verifica la compatibilidad bajo el orden lexicográfico y fuerte, respectivamente. Por otro lado, también se tiene que

$$f'_T(A\odot B,1,0)=f'_T(A,1,0)\cdot f'_T(B,1,0)$$

ya que de

$$b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 > 0$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq c_n \geq c_{n-1} \geq \ldots \geq c_1 > 0$$

se tiene

$$b_1 d_1 \geq \ldots \geq b_n d_n \geq a_n c_n \geq \ldots \geq a_1 c_1 > 0$$

Y como el producto por números reales positivos verifica las condiciones ii), iii) y iv) del corolario I.7.3, entonces se verifica la compatibilidad bajo la mayorización débil $<_w$. Por tanto, se tiene que

$$\forall A,B,C,D \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^{0}_{1}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{+} \quad A \leq B,\ C \leq D \Longrightarrow A \odot C \leq B \odot D$$

bajo el orden lexicográfico ($\leq_L$), fuerte ($\leq_F$) o de mayorización ($\leq_M$).

Con la otra mayorización débil, $<^w$, no se verifica la condición iv) del corolario I.7.4, y por tanto no podemos garantizar la compatibilidad con el producto por números positivos.

En definitiva, y como resumen de todos los estudios de compatibilidad sobre los distintos tipos de funciones NIS-g, presentamos la siguiente tabla en donde se indican las distintas relaciones estudiadas entre las operaciones y órdenes. En ella se pone de manifiesto como la función NIS-extremo, presenta las mejores propiedades de compatibilidad.

| | $\leq_L$ | $\leq_F$ | $\leq_M$ ($<_w$) | $<^w$ |
|---|---|---|---|---|
| suma | si | si | NIS-extremo | NIS-extremo |
| producto real positivo | si | si | si | si |
| producto positivos | NIS-extremo | NIS-extremo | NIS-extremo | no |

tabla 1.

1.3.2 <u>Función NIS-promedio</u>.

Cuando los parámetros $\lambda$ y $\mu$ de la función NIS-g son idénticos ($\lambda=\mu$), entonces llamamos a $f_T(\cdot,\lambda,\lambda)$ función NIS-promedio, y notamos

$$\forall A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \qquad f_T(A,\lambda,\lambda)=f_\lambda(A).$$

En este tipo de función se elige para representar la posición de cada $\alpha$-corte, un único valor promedio. El parámetro $\lambda$, que sirve para determinarlo, es interpretable como un grado de optimismo-pesimismo del decisor. Así, cuando el beneficio de la decisión es elegir la cantidad mayor, un individuo en extremo optimista pensaría que lo fundamental de la posición del intervalo, es el extremo superior del mismo ($\lambda=1$), que refleja la mayor ganancia posible. Por el contrario, un individuo en extremo pesimista, optaría por el extremo inferior ($\lambda=0$), pensando en garantizarse lo más de, entre la menor ganancia posible. Cuando el beneficio en la decisión se obtiene al elegir la cantidad difusa menor, la interpretación es lógicamente la opuesta, $\lambda=0$, extremo optimista y $\lambda=1$ extremo pesimista.

Si suponemos un grado de optimismo-pesimismo del decisor $\mu$ (variando del pesimismo al optimismo, entre 0 y 1), el parámetro $\lambda$, de la función $f_\lambda$, se selecciona en la siguiente forma:

$$\lambda=\begin{cases} \mu \text{ si "lo mejor" es "lo mayor"} \\ 1-\mu \text{ si "lo mejor" es "lo menor".} \end{cases}$$

Así, el parámetro $\lambda$ permite modelizar la actitud del decisor en el problema de comparación. Cuando el decisor no se beneficie de la decisión, su actitud es neutra ante la misma, y el parámetro $\lambda=1/2$ reflejará esta situación.

Cuando el parámetro $\lambda$ no se ha podido fijar a priori, ante un problema, siempre es posible calcular la región

$$R_Z(A,B)=\{\lambda\in[0,1] \;/\; A \le_Z B\}$$

que denominamos **región de dominancia** de B sobre A, según el orden Z, con Z=L,F ó M. Este conjunto sirve de orientación en la ordenación de A y B, ya que de ser $\emptyset$, aceptaríamos que $B \le_Z A$ para cualquier parámetro. Y si $R_Z(A,B)=[0,1]$, entonces $A \le_Z B$, $\forall\lambda\in[0,1]$. De cualquier modo el cálculo de esta región facilita el proceso de ordenación con la función NIS-promedio. Estudiamos ahora el conjunto $R_Z(A,B)$, y pretendemos comprobar que es un intervalo contenido en [0,1], para ello veamos un resultado previo.

<u>Proposición 1.5</u>

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $\lambda,\mu\in[0,1]$. Entonces

$$f_{t\lambda+(1-t)\mu}(A)=tf_\lambda(A)+(1-t)f_\mu(A),\ \forall t\in[0,1].$$

<u>Demostración</u>.

Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$, $A_{\alpha_i}=[a_i,b_i]$, entonces

$$f_{t\lambda+(1-t)\mu}(A)=((t\lambda+(1-t)\mu)b_i + (1-t\lambda-(1-t)\mu)a_i)_1^{2n} =$$
$$=(t(\lambda b_i+(1-\lambda)a_i)+(1-t)(\mu b_i+(1-\mu)a_i)_1^{2n} = tf_\lambda(A)+(1-t)f_\mu(A).\square$$

<u>Proposición 1.6</u>

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, entonces $R_Z(A,B)$ o es $\emptyset$ o es un intervalo contenido en [0,1], con Z=L,F ó M.

<u>Demostración</u>.

Supongamos $R_Z(A,B)\neq\emptyset$, sean $\lambda,\mu\in R_Z(A,B)$. Entonces por definición de $R_Z(A,B)$, se tiene que

$$f_\lambda(A) \le_Z f_\lambda(B) \text{ y } f_\mu(A) \le_Z f_\mu(B)$$

y por tanto

$$tf_\lambda(A)+(1-t)f_\mu(A) \le_Z tf_\lambda(B)+(1-t)f_\mu(B) \text{ con } t\in[0,1]$$

aplicando ahora el resultado de la proposición 1.5,

$$f_{t\lambda+(1-t)\mu}(A) \le_Z f_{t\lambda+(1-t)\mu}(B)$$

con lo que

$t\lambda+(1-t)\mu\in R_{\mathbf{z}}(A,B)$, $R_{\mathbf{z}}(A,B)$ es convexo, y por tanto un intervalo.□

Así, $R_{\mathbf{z}}(A,B)$ es un intervalo, en donde situamos los distintos niveles $\lambda$ en que se acepta $A \leq_{\mathbf{z}} B$, y que puede servir como complemento o ayuda, en el problema de la comparación. El conjunto de parámetros que proporcionan la indiferencia entre los números difusos A y B será

$$I_{\mathbf{z}}(A,B)=R_{\mathbf{z}}(A,B)\cap R_{\mathbf{z}}(B\ A).$$

En general, no es cierta la relación

$$R_{\mathbf{z}}(A,B)\cup R_{\mathbf{z}}(B\ A)=[0,1]$$

sobre cualquier tipo de orden z, pero si lo es cuando $\leq_{\mathbf{z}}$ proporciona una relación de orden total sobre el conjunto $\mathbb{R}^{2n}$. Para estas situaciones obviamente las regiones $R_{\mathbf{z}}(A,B)$ y $R_{\mathbf{z}}(B\ A)$ alcanzarán los extremos del intervalo [0,1]. Esto ocurre con el orden lexicográfico, en el que distinguimos los siguientes casos:

a) $R_{\mathbf{L}}(A,B)=[0,q]$ ó $[0,q)$ y $R_{\mathbf{L}}(B,A)=[p,1]$ ó $(p,1]$

o bien

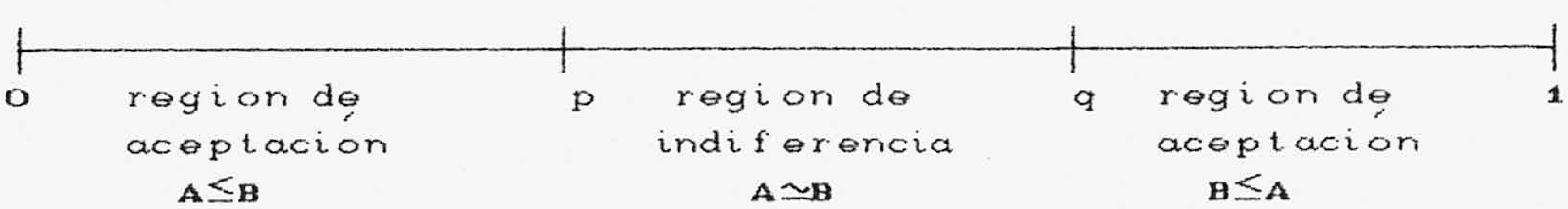
b) $R_{\mathbf{L}}(A,B)=[p,1]$ ó $(p,1]$ y $R_{\mathbf{L}}(B,A)=[0,q]$ ó $[0,q)$

con $q\geq p$, $p,q\in[0,1]$, siendo en ambos casos la región de indiferencia de extremos p y q, niveles de aceptación extrema, ya sea semicerrada, cerrada o abierta.

<u>Ejemplo</u>.

Sean $A,B\in \tilde{\mathbb{R}}$, tales que

$R_{\mathbf{L}}(A,B)=[0,q]$, $R_{\mathbf{L}}(B,A)=[p,1]$ e $I_{\mathbf{L}}(A,B)=[p,q]$ con $p\leq q$, entonces el intervalo [0,1] de valores de optimismo-pesimismo queda en la forma:




Con el orden fuerte y el orden de mayorización débil, no será cierto en general que $R_Z(A,B)$ y $R_Z(B,A)$ recubran al intervalo $[0,1]$, y el conjunto

$$[0,1]-(R_Z(A,B)\cup R_Z(B,A))$$

contiene a los parámetros $\lambda$, en donde los números difusos A y B no son comparables.

### 1.3.3 Ejemplos de comparación bajo las distintas funciones NIS.

Veremos en este apartado, cinco ejemplos de comparación con números difusos triangulares, bajo las distintas funciones NIS, y bajo los tres órdenes sobre $\mathbb{R}^m$. En los dos primeros ejemplos todos los métodos deciden de la misma manera, en el tercero se complementa la acción del orden fuerte, con el lexicográfico y de mayorización. En el cuarto, solo deciden estos dos últimos. Y finalmente en el quinto sólo es válido el lexicográfico. Comparamos números difusos de la misma altura en cada ejemplo, aunque no igual en todos. Tomaremos el sistema de comparación "exploratorio"

$$Y=\langle 0,0.25,0.50,0.75,1\rangle$$

y como sistema con prioridades a

$$Y_P=\langle 0.50,0.75,0.25,1,0\rangle.$$

Sobre alturas inferiores a la unidad, consideraremos un caso (el primero) de sistema restringido, y otro (el cuarto) de sistema proporcional.

Caso 1.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(2,2,1,1),0.50\rangle$$

$$B=\langle(3,3,1,1),0.50\rangle$$

representados en la fig.8a.

Consideremos el sistema restringido de Y a la altura 0.50,

$$Y\cap[0,0.50]=\langle 0,0.25,0.50\rangle,$$

sobre él, vamos a calcular los valores de los $\alpha$-cortes en cada número difuso

$A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$ y $B_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha]$.

| $\alpha$ | $a_\alpha$ | $b_\alpha$ | $c_\alpha$ | $d_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 0.25 | 1.50 | 2.50 | 2.50 | 3.50 |
| 0.50 | 2 | 2 | 3 | 3 |

Tabla 2.

a) Orden fuerte.

i) $\lambda=\mu$

$$A_0\beta(\lambda,\lambda)\ B_0 \Leftrightarrow \forall\lambda\in[0,1]$$

$$A_{0.25}\beta(\lambda,\lambda)\ B_{0.25} \Leftrightarrow \forall\lambda\in[0,1]$$

$$A_{0.50}\beta(\lambda,\lambda)\ B_{0.50} \Leftrightarrow \forall\lambda\in[0,1]$$

en definitiva, $A \le_F B$, $\forall\lambda\in[0,1]$, o de otra forma, $R_F(A,B)=[0,1]$ y $R_F(A,B)=\emptyset$.

ii) $\lambda\neq\mu$, del resultado anterior, se deduce que

$$A \le_F B \quad \forall\lambda,\mu\in[0,1],$$

es decir, que en cualquier caso, B domina a A.

b) Orden lexicográfico.

Como en todo caso B domina a A, entonces también B supera a A, es decir, $A \le_L B\ \forall\lambda,\mu\in[0,1]$.

c) Orden mayorización (con función NIS-extremo y $<_w$).

Como $(3,2.5,2,2,1.5,1) <_w (4,3.5,3,3,2.5,2) \Longrightarrow A \le_M B$ y también se verifica la relación, B mayoriza a A.

En este caso, coinciden todos nuestros métodos, como era de esperar, dada la forma de los números difusos.

<u>Caso 2</u>.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(2,4,1,1),1\rangle$$

$$B=\langle(4,4,3,1),1\rangle$$

$$C=\langle(4,4,1,1),1\rangle$$

representados en la fig.8b.

Sobre el sistema de comparación Y, calculamos los valores de los $\alpha$-cortes en cada número difuso

$$A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha],\ B_\alpha=[c_\alpha,d_\alpha],\ C_\alpha=[e_\alpha,f_\alpha]$$

| $\alpha$ | $a_\alpha$ | $b_\alpha$ | $c_\alpha$ | $d_\alpha$ | $e_\alpha$ | $f_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | 1 | 5 | 3 | 5 |
| 0.25 | 1.25 | 4.75 | 1.75 | 4.75 | 2.25 | 4.75 |
| 0.50 | 1.5 | 4.5 | 2.5 | 4.5 | 3.5 | 4.5 |
| 0.75 | 1.75 | 4.25 | 3.25 | 4.25 | 3.75 | 4.25 |
| 1 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

tabla 3.

a) Orden fuerte.

i) $\lambda=\mu$.

Como $A_\alpha\beta(\lambda,\lambda)B_\alpha$ y $B_\alpha\beta(\lambda,\lambda)C_\alpha$ $\forall\alpha\in Y$ y $\forall\lambda\in[0,1]$, entonces $A \leq_F B$, $B \leq_F C$, y de otra forma, $R_F(A,B)=R_F(B,C)=[0,1]$. Y como $\forall\alpha\in Y$

$$B_\alpha\beta(\lambda,\lambda)A_\alpha \Longleftrightarrow \lambda=1$$

$$C_\alpha\beta(\lambda,\lambda)B_\alpha \Longleftrightarrow \lambda=1$$

se tiene que

$$R_F(B,A)=R_F(C,B)=\{1\}$$

de donde

$$I_F(A,B)=I_F(B,C)=\{1\}.$$

ii) $\lambda\neq\mu$, del rsultado anterior, se deduce que

$$A \leq_F B,\ B \leq_F C\ \forall\lambda,\mu\in[0,1]$$

y por tanto, B domina a A y C domina a B, con lo que, de la transitividad se deduce que C domina a A.

b) Orden lexicográfico.

Por a) se tienen que

$$A \leq_L B,\ B \leq_L C\ \forall\lambda,\mu\in[0,1],$$

con lo que B supera a A, C supera a B, y por lo tanto, C supera a A. La indiferencia entre los tres números difusos se mantiene en $\lambda=1$.

c) Orden de mayorización (con función NIS-extremo y $<_v$).

Como $(5,4.75,4.5,4.25,4,2,1.75,1.5,1.25,1) <_v$

$<_v (5,4.75,4.5,4.25,4,4,3.25,2.5,1.75,1) <_v$

$(5,4.75,4.5,4.25,4,4,3.75,3.5,3.25,3)$

se tiene que

$$A \leq_M B \text{ y } B \leq_M C,$$

de donde, B mayoriza a A y C mayoriza a B, y por tanto C mayoriza a A.

En este caso, todos nuestros métodos vuelven a coincidir, señalando a C como el mayor, A como el menor y B como intermedio. La indiferencia entre ellos se alcanza sólo para $\lambda=1$. Este ejemplo fue tratado en Bortolan y Degani [4], ya que algunos índices conocidos, no discriminan entre estos números difusos.

Caso 3.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(4,4,1,1),1\rangle$$

$$B=\langle(4,4,2,2),1\rangle$$

representados en la fig.8c.

| $\alpha$ | $a_\alpha$ | $b_\alpha$ | $c_\alpha$ | $d_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 5 | 2 | 6 |
| 0.25 | 3.25 | 4.75 | 2.50 | 5.50 |
| 0.50 | 3.50 | 4.50 | 3 | 5 |
| 0.75 | 3.75 | 4.25 | 3.50 | 4.50 |
| 1 | 4 | 4 | 4 | 4 |

tabla 4.

a) Orden fuerte.

i) $\lambda=\mu$ $\quad A_\alpha \beta(\lambda,\lambda) B_\alpha \quad \forall\alpha\in Y \iff \lambda\in[1/2,1]$

$B_\alpha \beta(\lambda,\lambda) A_\alpha \quad \forall\alpha\in Y \iff \lambda\in[0,1/2]$

con lo que $R_F(A,B)=[1/2,1]$, $R_F(B,A)=[0,1/2]$ e $I_F(A,B)=\{1/2\}$.

ii) $\lambda\neq\mu$ $\quad$ si $\lambda,\mu \geq 1/2 \Longrightarrow A \leq_F B$

$$\text{si } \lambda,\mu \le 1/2 \Longrightarrow B \le_F A$$

en otro caso, A y B son no comparables.

En definitiva, en este caso, la dominancia entre A y B depende del parámetro λ ( un segundo parámetro es irrelevante). Y utilizando la interpretación optimista-pesimista, que hicimos de él, en el apartado 1.3.2, se puede afirmar que

- un individuo optimista ($\lambda>1/2$) afirma que B domina a A.
- un individuo pesimista ($\lambda<1/2$) afirma que A domina a B.
- un individuo en una situación normal ($\lambda=1/2$) afirma que A es indiferente a B.

b) Orden lexicográfico.

En los casos de comparabilidad de a) se mantienen el resultado, cuando $\lambda\neq\mu$ y bien $\lambda<1/2$, $\mu>1/2$, o bien, $\lambda>1/2,\mu<1/2$, se tiene un resultado dependiente tan sólo del parámetro λ, considerado como el más prioritario, y

$$\text{si } \lambda<1/2 \Longrightarrow B \le_L A$$

$$\text{si } \lambda>1/2 \Longrightarrow B \le_L A$$

c) Orden de mayorización (con función NIS-extremo y $<_w$).

Como $(5,4.75,4.5,4.25,4,4,3.75,3.5,3.25,3) <_w$

$$(6,5.5,5,4.5,4,4,3.5,3,2.5,2) \Longrightarrow A \le_M B.$$

En este caso los métodos no coinciden, y el estudio más completo se da bajo el orden fuerte que proporciona una aceptable interpretación de la solución al problema de comparación. El orden lexicográfico complementa al orden fuerte. Y la mayorización decide que B es mayor que A, actuando de una forma optimista.

Caso 4.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(2,2,2,1),0.60\rangle$$

$$B=\langle(3,3,4,1),0.60\rangle$$

representados en la fig.8d.

Consideramos el sistema proporcional de Y a la altura 0.60,

$$Y'=\{0, 0.15, 0.30, 0.45, 0.60\}$$

y sobre él , los valores de los $\alpha$-cortes en cada número difuso.

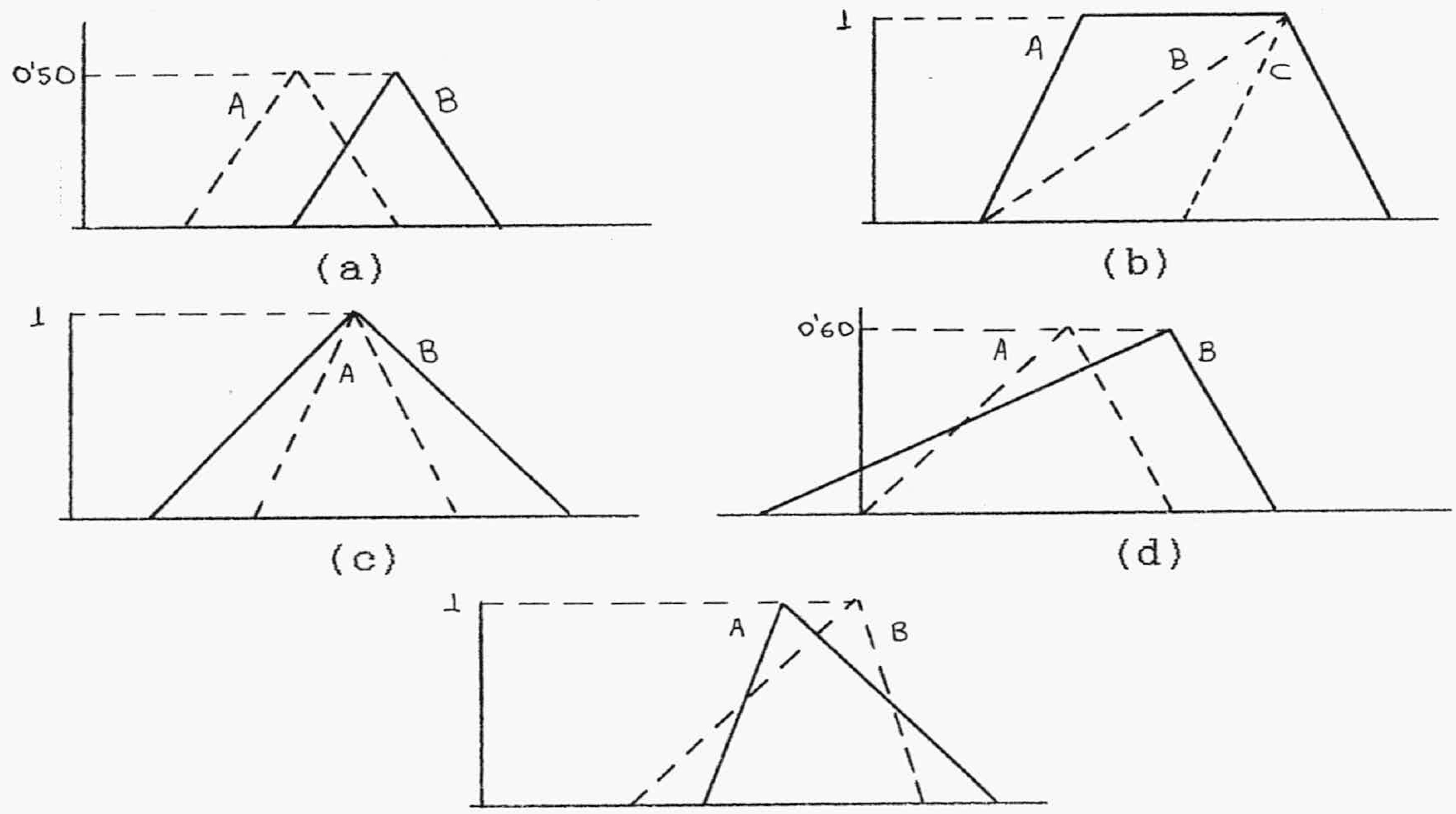



figura 8. Representación gráfica de distintos números difusos triangulares.

| $\alpha$ | $a_\alpha$ | $b_\alpha$ | $c_\alpha$ | $d_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | -1 | 4 |
| 0.15 | 0.50 | 2.75 | 0 | 3.75 |
| 0.30 | 1 | 2.50 | 1 | 3.5 |
| 0.45 | 1.50 | 2.25 | 2 | 3.25 |
| 0.60 | 2 | 2 | 3 | 3 |

tabla 5.

a) Orden fuerte.

i) $\lambda=\mu$ $\quad A_0 \beta(\lambda,\lambda) B_0 \Leftrightarrow \lambda \geq 1/2$

$A_{0.15} \beta(\lambda,\lambda) B_{0.15} \Leftrightarrow \lambda \geq 1/3$

$A_{0.30} \beta(\lambda,\lambda) B_{0.30} \Leftrightarrow \forall\lambda \in [0,1]$

$A_{0.45} \beta(\lambda,\lambda) B_{0.45} \Leftrightarrow \forall\lambda \in [0,1]$

$A_{0.60} \beta(\lambda,\lambda) B_{0.60} \Leftrightarrow \forall\lambda \in [0,1]$

En definitiva $R_F(A,B)=[1/2,1]$, $R_F(B,A)=\emptyset$ y $\forall\lambda\in[0,1/2)$, A y B no comparables.

ii) $\lambda\neq\mu$

$$\text{si } \lambda,\mu\in[1/2,1] \Longrightarrow A \leq_F B$$

en otro caso A y B son no comparables.

La relación de dominancia depende de los parámetros $\lambda$ y $\mu$, y cuando estos pertenecen al intervalo [1/2,1] se da la relación B domina a A, en otro caso A y B son no comparables.

b) Orden lexicográfico.

Sobre el sistema con prioridad $Y'_p=\langle 0.30,0.45,0.15,0.60,0\rangle$, como $A_{0.3}\alpha(\lambda,\mu)\ B_{0.3}$ $\forall\lambda,\mu\in[0,1]$, entonces $A \leq_L B$. Es decir, la relación B supera a A se da en cualquier caso.

c) Orden de mayorización (función NIS-extremo y $<_w$).

Como $(3,2.75,2.5,2.25,2,2,1.5,1,0.5,0)<_w (4,3.75,3.5,3.25,3,3,2,1,0,-1) \Longrightarrow A \leq_M B$, y se da la relación B mayoriza a A.

En este caso la relación de dominancia total sólo se da en algunos casos, en función de los parámetros, pero las otras relaciones más débiles se dan en cualquier caso.

<u>Caso 5</u>.

Consideremos los números difusos triangulares

$$A=\langle(4,4,1,3),1\rangle$$

$$B=\langle(5,5,3,1),1\rangle$$

representados en la fig.8e.

Sobre el sistema de comparación Y, los valores de los $\alpha$-cortes en cada número difuso son:

| $\alpha$ | $a_\alpha$ | $b_\alpha$ | $c_\alpha$ | $d_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 7 | 2 | 6 |
| 0.25 | 3.25 | 6.25 | 2.75 | 5.75 |
| 0.50 | 3.50 | 5.50 | 3.50 | 5.50 |
| 0.75 | 3.75 | 4.75 | 4.25 | 5.25 |
| 1 | 4 | 4 | 5 | 5 |

tabla 6.

a) Orden fuerte.

i) $\lambda=\mu$ $\quad B_0\beta(\lambda,\lambda)A_0$, $B_{0.25}\beta(\lambda,\lambda)A_{0.25}$, $B_{0.5}=A_{0.5}$, $A_{0.75}\beta(\lambda,\lambda)B_{0.75}$, $A_1\beta(\lambda,\lambda)B_1$, $\forall\lambda\in[0,1]$.

ii) $\lambda\neq\mu$, resulta lo mismo.

En cualquier caso A y B son no comparables, $R_F(A,B)=R_F(B,A)=\emptyset$.

b) Orden lexicográfico.

Bajo el sistema de comparación con prioridades

$$Y_p=\langle 0.50,0.75,0.25,1,0\rangle$$

se decide que

$$A \leq_L B \ \forall\lambda,\mu\in[0,1].$$

Con otro orden de prioridades como $\langle 0.50,0.25,0.75,1.0\rangle$ se decide que

$$B \leq_L A \ \forall\lambda,\mu\in[0,1].$$

c) Orden de mayorización ( con función NIS-extremo y $<_w$).

Como $(7,6.25,5.5,4.75,4,4,3.75,3.5,3.25,3)$ y $(6,5.75,5.5,5.25,5,5,4.25,3.5,2.75,2)$ no son comparables bajo $<_w$, entonces A y B no son comparables para la relación de mayorización.

En definitiva, en este último caso, conflictivo sin duda, las relaciones de dominancia total y parcial no deciden, y sólo la relación de dominancia débil, con una prioridad en el sistema de comparación, decide finalmente.

Como se ve en los distintos casos tratados, los diversos métodos de comparación se complementan ante un problema concreto. Y un estudio general, que los utilice a todos, proporciona una aceptable solución final del problema de ordenación entre números difusos, en el que aparecen distintos tipos de herramientas subjetivas, de las que depende el resultado definitivo.

## 2. INDICE PROMEDIO.

### 2.1 INTEGRACION DEL METODO NIS.

Estudiamos en este apartado un índice de comparación valuado en $\mathbb{R}$, que obtenemos integrando la medida de posición de cada $\alpha$-corte con respecto a una ponderación subjetiva de cada nivel de comparación, en el caso de ser estos en número finito, y de cada subconjunto de ellos, caso de ser estos en número infinito. Este índice basa su construcción en la forma de comparación NIS, mediante un proceso de integración de toda la información disponible, y sustitución de la prioridad del sistema de comparación, por una distribución de probabilidad que mide la importancia de los distintos niveles. El índice admite una extensión a $\mathbb{R}^m$, que tiene como caso particular a la función NIS-g, y que veremos en el tercer apartado del capítulo.

### 2.2 ESTUDIO GENERAL DEL INDICE.

#### 2.2.1 Definición del índice promedio.

Sea $Y \in \mathcal{P}([0,1])$ un sistema de comparación general. Sea $\Omega$ la restricción del $\sigma$-campo del Borel al conjunto Y. Supondremos dada una ponderación definida sobre Y, que modelizaremos bajo la forma de una distribución de probabilidad sobre $(Y,\Omega)$

$$P:\Omega \longrightarrow [0,1]$$

que representa la importancia subjetiva de los niveles de comparación. Consideramos que la ponderación está representada por una medida aditiva con objeto de poder utilizar integrales conocidas y simplificar los cálculos.

Dado que el sistema Y es general, puede tomarse desde todo el [0,1], hasta un conjunto finito, pasando por cualquier subconjunto del intervalo unidad. La elección del sistema Y, y de la medida de probabilidad P dependerá del problema concreto que se considere y en cierta forma del decisor.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, y sea $m_A:Y\longrightarrow\mathbb{R}$ una función, integrable con respecto a la medida de probabilidad P, que represente la posición relativa de cada $\alpha$-corte de A en $\mathbb{R}$ (como es usual, si $\alpha=0$, tomaremos como 0-corte el cierre del soporte), y que posteriormente precisaremos.

<u>Definición 2.1</u>

Definimos la función

$$V_P:\underset{\sim}{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbb{R}$$

mediante

$$V_P(A)=\int_Y m_A(\alpha)dP(\alpha) \qquad \forall A\in\underset{\sim}{\mathbb{R}}$$

que denominamos **índice promedio** de A, asociado a la medida de posición $m_A$.

A partir del índice promedio, se define la relación

$\forall A,B\in\underset{\sim}{\mathbb{R}} \qquad A \leq B \Longleftrightarrow V_P(A) \leq V_P(B)$,

que es de orden total sobre el conjunto de clases de indiferencia $\underset{\sim}{\mathbb{R}}_{V_P}$. La indiferencia en este caso es menos intuitiva que la generada por las funciones NIS, ya que es equivalente a la coincidencia de dos valores promedio

$$\forall A,B\in\underset{\sim}{\mathbb{R}} \qquad A\simeq_{V_P} B \Longleftrightarrow V_P(A)=V_P(B).$$

El índice definido es una ponderación de las medidas de posición de cada $\alpha$-corte seleccionado en el sistema de comparación, con respecto a una medida de la importancia subjetiva de cada nivel de comparación. La medida de posición $m_A$ es un elemento fundamentalmente subjetivo, a determinar en principio en cada problema y por cada decisor, de cualquier forma, propondremos una medida concreta que sigue manteniendo el carácter subjetivo. Así, como función de medida de la posición de cada α-corte en $\mathbb{R}$ proponemos la siguiente

$$f_A^\lambda : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_A^\lambda(\alpha)=\lambda b_\alpha+(1-\lambda)a_\alpha$$

en donde $\lambda\in[0,1]$, $A_\alpha=[a_\alpha, b_\alpha]$ y $\alpha\in Y$.

El parámetro λ tiene una interpretación análoga a la dada en el caso de la función NIS-promedio (apartado 1.3.2 de este capítulo), como un índice de optimismo-pesimismo del decisor, parametrizando la elección de un punto de $A_\alpha$ como medida de posición del mismo. Esta medida de posición es la misma que la utilizada para definir la función NIS-promedio.

Cuando un nivel de comparación sea mayor que la altura del número difuso, le asignaremos como medida de posición el cero

$$f_A^\lambda(\alpha)=0 \text{ si } \alpha>\alpha_A$$

que es equivalente a no considerar dicho nivel en el sistema de comparación

$$V_P^\lambda(A)=\int_{Y'} f_A^\lambda(\alpha)dP(\alpha)$$

con $Y'=Y\cap[0,\alpha_A]$.

Cuando $Y\cap[0,\alpha_A]=\emptyset$, el sistema de comparación no es adecuado para el proceso de comparación, ya que el índice promedio no utiliza ninguna información sobre A. A partir de ahora supondremos que $Y\cap[0,\alpha_A]\neq\emptyset$ sobre los números difusos a comparar.

### 2.2.2 <u>Propiedades del índice promedio</u>.

Estudiamos a continuación algunas propiedades del índice promedio $V_P^\lambda(A)$.

<u>Proposición 2.1</u>

Sea $A\in\mathbb{R}$ $\forall\lambda\in[0,1]$, $V_P^\lambda(A)=A$.

Demostración.

$\forall A\in \mathbb{R} \quad f_A^{\lambda}(\alpha)=A,\ \forall\alpha\in Y,\ \forall\lambda\in[0,1] \Longrightarrow V_P^{\lambda}(A)=A.\square$

En virtud de este resultado, el orden definido a través de $V_P^{\lambda}$ generaliza el orden usual en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.2

Sea $A=[a,b]$, con $a,b\in\mathbb{R}$ y $\lambda\in[0,1]$, entonces $V_P^{\lambda}(A)=\lambda b+(1-\lambda)a$.

Demostración.

$$\forall\alpha\in Y\ A_{\alpha}=A \longrightarrow V_P^{\lambda}(A)=\int_Y (\lambda b+(1-\lambda)a)dP(\alpha)=\lambda b+(1-\lambda)a.\square$$

La restricción a conjuntos nítidos (intervalos) proporciona un método de comparación adecuado, que coincide además con la relación $\beta(\lambda,\lambda)$ definida en el apartado 1.2.3 de este capítulo.

Proposición 2.3

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ de alturas respectivas $\alpha_A,\alpha_B$, tales que $\alpha_A\leq\alpha_B$. Sea $\oplus$ la operación extendida de la suma de números reales, entonces

$$\forall\lambda\in[0,1] \qquad V_P^{\lambda}(A\oplus B)=V_P^{\lambda}(A)+V_P^{\lambda}(B)-\int_{Y\cap[\alpha_A,\alpha_B]} f_B^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha).$$

Demostración.

$V_P^{\lambda}(A\oplus B)=\int_{Y\cap[0,\alpha_A]} f_{A\oplus B}^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha)$, ya que la altura de $A\oplus B$ es la menor de A y B.

Como $(A\oplus B)_{\alpha}=A_{\alpha}\oplus B_{\alpha}$, entonces $f_{A\oplus B}^{\lambda}(\alpha)=f_A^{\lambda}(\alpha)+f_B^{\lambda}(\alpha)$, de donde

$$V_P^{\lambda}(A\oplus B)=\int_{Y\cap[0,\alpha_A]} f_A^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha) + \int_{Y\cap[0,\alpha_A]} f_B^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha)=V_P^{\lambda}(A)+V_P^{\lambda}(B)-\int_{Y\cap[\alpha_A,\alpha_B]} f_B^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha).\square$$

Los dos siguientes corolarios son evidentes.

Corolario 1.

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ tales que $\alpha_A\leq\alpha_B$, si $Y\cap[\alpha_A,\alpha_B]=\emptyset$ entonces

$$V_P^{\lambda}(A\oplus B)=V_P^{\lambda}(A)+V_P^{\lambda}(B).$$

Corolario 2.

Sean $A, B, C, D \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que

i) $Y \cap (\min\{\alpha_A, \alpha_C\}, \max\{\alpha_A, \alpha_C\}) = \emptyset$

ii) $Y \cap (\min\{\alpha_B, \alpha_D\}, \max\{\alpha_B, \alpha_D\}) = \emptyset$

iii) $A \leq B$ y $C \leq D$

entonces

$$A \oplus C \leq B \oplus D.$$

Proposición 2.4

Sea $r \in \mathbb{R}$, $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, entonces $V_P^\lambda(rA) = rV_P^\lambda(A)$.

Demostración.

Como $(rA)_\alpha = rA_\alpha \Longrightarrow f^\lambda_{rA}(\alpha) = rf^\lambda_A(\alpha)$, $\alpha_{rA} = \alpha_A$ y por la linealidad del operador integral se obtien el resultado.□

Proposición 2.5

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ normalizado $(\alpha_A = 1)$ y unimodal, tal que la función de pertencia de A es simétrica en torno a la única moda m de A. Entonces

$$V_P^{1/2}(A) = m.$$

Demostración.

Si la función de pertencia de A es simétrica $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall \alpha \in Y$, $A_\alpha = [m - c_\alpha, m + c_\alpha]$,

de donde

$$f_A^{1/2}(\alpha) = m \ \forall \alpha \in Y \Longrightarrow V_P^{1/2}(A) = m.□$$

La comparación de números difusos normalizados y unimodales con función de pertencia simétrica, utilizando el índice $V_P^{1/2}(\cdot)$, es equivalente a la comparación entre los valores modales.

Estudiamos ahora el comportamiento del índice promedio frente a cambios de escala de los números difusos.

Lema 1.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, sea $A^{e}\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tal que, $\mu_{A^e}(x)=\mu_{A}(e(x))$ con $e(x)=rx+s$, $s,r\in \mathbb{R}$ y $r>0$. Si $s_{A}=sP(Y\cap[0,\alpha_{A}])$, entonces

$$V_{P}^{\lambda}(A)=rV_{P}^{\lambda}(A^{e})+s_{A} \qquad \forall\lambda\in[0,1].$$

Demostración.

En 1.2.1 se estudió el cambio de escala para la función NIS-g, obteniendo entonces la forma del $\alpha$-corte de $A^{e}$

$$A_{\alpha}^{e}=[(a_{\alpha}-s)/r,(b_{\alpha}-s)/r]$$

de donde

$$V_{P}^{\lambda}(A)=\int_{Y\cap[0,\alpha_{A}]}f_{A}^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha)=r\int_{Y\cap[0,\alpha_{A}]}f_{A^e}^{\lambda}(\alpha)dP(\alpha) +s_{A}=rV_{P}^{\lambda}(A^{e})+s_{A}$$

ya que tanto A como $A^{e}$ tienen la misma altura.□

Proposición 2.6

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $\alpha_{A}=\alpha_{B}$, y $A^{e},B^{e}\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ los transformados de A y B mediante el cambio de escala $e(x)=rx+s$, $r,s\in \mathbb{R}$ y $r>0$. Entonces, $\forall\lambda\in[0,1]$ se verifica

i) $A \leq B \Leftrightarrow A^{e} \leq B^{e}$

ii) $A \simeq_{V_P} B \Leftrightarrow A^{e} \simeq_{V_P} B^{e}$.

Demostración.

inmediata a partir del lema anterior.□

Por tanto, la ordenación e indiferencia mediante el índice promedio, es invariante frente al cambio de escala, de la misma manera que lo era la función NIS-g.

De forma análoga a lo realizado para la función NIS-promedio (ver apartado 1.3.2), podemos definir **la región de dominancia** de B sobre A según el índice promedio

$$R_{V}(A,B)=\{ \lambda\in[0,1] \ / \ V_{P}^{\lambda}(A) \leq V_{P}^{\lambda}(B)\} \quad \text{con } A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$$

y utilizarla en la ordenación de A y B cuando se desconoce el parámetro $\lambda$.

Proposición 2.7

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, y $\lambda,\mu\in[0,1]$. Entonces

$$V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(A)=tV_P^{\lambda}(A)+(1-t)V_P^{\mu}(A),\quad \forall t\in[0,1].$$

Demostración.

Sea $t\in[0,1]$, consideramos $A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$

$$f_A^{t\lambda+(1-t)\mu}(\alpha)=(t\lambda+(1-t)\mu)b_\alpha+(1-t\lambda-(1-t)\mu)a_\alpha=tf_A^{\lambda}(\alpha)+(1-t)f_A^{\mu}(\alpha),$$

de donde

$$V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(A)=tV_P^{\lambda}(A)+(1-t)V_P^{\mu}(A).\square$$

Proposición 2.8

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, supongamos que $R_V(A,B)\neq\emptyset$, entonces $R_V(A,B)$ es un intervalo contenido en $[0,1]$.

Demostración.

Sean $\lambda,\mu\in R_V(A,B)$ y sea $t\in[0,1]$. Como

$$V_P^{\lambda}(A)\le V_P^{\lambda}(B) \text{ y } V_P^{\mu}(A)\le V_P^{\mu}(B)$$

entonces

$$tV_P^{\lambda}(A)+(1-t)V_P^{\mu}(A)\le tV_P^{\lambda}(B)+(1-t)V_P^{\mu}(B)$$

de donde, por la proposición anterior, se tiene que

$$V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(A)\le V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(B)$$

es decir

$$t\lambda+(1-t)\mu\in R_V(A,B)$$

y por tanto $R_V(A,B)$ es convexo sobre $\mathbb{R}$, o lo que es equivalente un intervalo.$\square$

Así, $R_V(A,B)$ es un intervalo, en donde situamos los distintos valores $\lambda$ en los que se acepta que $A\le B$, y que puede servir como complemento o ayuda, en el problema de comparación. El conjunto de parámetros que proporciona la indiferencia entre los números A y B es

$$I_V(A,B)=R_V(A,B)\cap R_V(B,A).$$

Como $V_P^{\lambda}$ proporciona un orden total sobre el conjunto de clases se verifica que

$$R_V(A,B) \cup R_V(B,A)=[0,1]$$

por tanto, y por razones análogas a las de la función NIS-promedio se tiene que

a) $R_V(A,B)=[0,q]$ ó $[0,q)$ y $R_V(B,A)=[p,1]$ ó $(p,1]$,

o bien

b) $R_V(A,B)=[p,1]$ ó $(p,1]$ y $R_V(B,A)=[0,q]$ ó $[0,q)$,

con $q \geq p$, $p,q \in [0,1]$, siendo en ambos casos la región de indiferencia de extremos p y q, niveles de aceptación extrema, ya sea semicerrada, cerrada o abierta.

2.2.3 <u>Forma del índice promedio sobre sistemas finitos</u>.

Consideremos sistemas de comparación finitos, y veamos la forma del índice promedio en este caso.

Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, $\alpha_i \in [0,1]$, y sobre Y la distribución de probabilidad

$$\begin{aligned} P:Y &\longrightarrow [0,1] \\ \alpha_j &\longrightarrow p(\alpha_j)=p_j \end{aligned}$$

con $\sum_1^n p_j=1$. Entonces

$$V_P^\lambda(A)=\sum_1^n f_A^\lambda(\alpha_i)p_i \qquad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

expresión, en cualquier caso, cómoda de manejar.

La determinación de sistemas de comparación finitos y de las distribuciones de probabilidad puede realizarse siguiendo los métodos del apartado 1.1.4 para obtención de sistemas de comparación NIS. En el método individual la prioridad se sustituye por un grado numérico de la importancia de cada nivel. En el método encuesta se asigna a cada $\alpha_i$ obtenido en el método, la probabilidad

$$p(\alpha_i)=n_i/n \qquad i=1\ldots n$$

en donde $n_i$ es la frecuencia absoluta de $\alpha_i$, y n el número total de encuestados.

Bajo los sistemas de comparación finitos podemos establecer relaciones entre el método NIS y el índice promedio, como lo demuestra la siguiente propiedad.

<u>Proposición 2.9</u>

Consideremos al sistema de comparación finito

$$Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$$

asociado a la altura de los números difusos A y B. Sean $\lambda,\mu\in[0,1]$, entonces

$$f_T(A,\lambda,\mu) \leq_F f_T(B,\lambda,\mu) \Longrightarrow V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(A) \leq V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(B)$$

$\forall t\in[0,1]$ y $\forall$P distribución de probabilidad sobre Y,

<u>Demostración</u>.

Como $f_T(A,\lambda,\mu) \leq_F f_T(B,\lambda,\mu) \Longrightarrow A_\alpha\ \beta(\lambda,\lambda)\ B_\alpha\ \forall\alpha\in Y \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f_A^\lambda(\alpha)\leq f_B^\lambda(\alpha), \text{ y} \\ f_A^\mu(\alpha)\leq f_B^\mu(\alpha) \end{cases} \forall\alpha\in Y \Longrightarrow \begin{cases} V_P^\lambda(A)\leq V_P^\lambda(B) \\ V_P^\mu(A)\leq V_P^\mu(B) \end{cases} \forall P \text{ distribución}$$

sobre Y. De donde

$$V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(A) \leq V_P^{t\lambda+(1-t)\mu}(B) \quad \forall t\in[0,1].\square$$

Por tanto, la relación de dominancia que genera la función $f_T(\cdot,\lambda,\mu)$ y el orden fuerte, implica a la relación de orden generada por el índice promedio sobre cualquier parámetro comprendido entre $\lambda$ y $\mu$. El resultado de la proposición anterior permite establecer una relación de inclusion entre las regiones de dominancia NIS, asociada al orden fuerte, y la del índice promedio.

<u>Proposición 2.10</u>

Sobre un sistema de comparación finito Y común a la altura de los números difusos A y B, se verifica

$$R_F(A,B) \leq R_V(A,B).$$

Demostración.

Sea $\lambda \in R_F(A,B) \Longrightarrow f_F(A,\lambda,\lambda) \leq_F f_F(B,\lambda,\lambda) \Longrightarrow V_P^\lambda(A) \leq V_P^\lambda(B)$ $\forall P$ distribución de probabilidad sobre Y $\longrightarrow \lambda \in R_V(A,B)$.□

### 2.3.4 El índice promedio como extensión de algunos índices conocidos.

En este apartado comprobaremos como el índice promedio sobre ciertas distribuciones de probabilidad sobre el intervalo unidad, coincide con algunos índices de comparación conocidos.

Consideramos el sistema de comparación Y=[0,1], y sobre él las siguientes medidas de probabilidad

i) $P_o(\alpha)=\begin{cases} 1 \text{ si } \alpha=\alpha_o \\ 0 \text{ si } \alpha\neq\alpha_o \end{cases}$ con $\alpha_o \in Y$.

ii) $P_T((a,b]) = b^2-a^2$, con $(a,b]\in\mathcal{P}([0,1])$.

iii) $P_L((a,b]) = b-a$, con $(a,b]\in\mathcal{P}([0,1])$.

La última medida de probabilidad es la medida de Lebesgue restringida al intervalo unidad.

Si ahora consideramos unos parámetros $\lambda$ determinados, el índice promedio adopta la forma:

1. Para $\lambda=1$

$$V^\lambda_{P_o}(A) = \sup\{z \,/\, \mu_A(z) \geq \alpha_o\} \quad \forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \text{ normalizado.}$$

Que coincide con el índice definido por Adamo en [1].

2. Para $\lambda=1/2$

$$V^{1/2}_{P_T}(A)=\int_0^1 (b_\alpha+c_\alpha)\tfrac{1}{2}dP_T(\alpha)=\int_0^1 (b_\alpha+a_\alpha)\alpha d\alpha \quad \forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \text{ normalizado.}$$

Este valor coincide con el índice que Tsumura et al. sugieren en [68].

3. Para $\lambda=1/2$

$$V^{1/2}_{P_L}(A)=\int_{Y\cap[0,\alpha_A]} (b_\alpha+a_\alpha)\tfrac{1}{2}dP_L(\alpha)=\int_0^{\alpha_A} (b_\alpha+a_\alpha)\tfrac{1}{2}d\alpha \quad \forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$$

Que coincide con el índice propuesto por Yager en [75].

El índice promedio constituye una forma de comparar números difusos que, frente a los métodos de comparación NIS, puede resultar menos efectiva desde el punto de vista computacional, ya que implica la integración con respecto de una medida. No obstante, en ciertos casos particulares se simplifican bastante los cálculos. De ello nos ocupamos en el siguiente apartado, así como de reprentar ejemplos de comparacíon con el índice promedio.

## 2.3 ESTUDIOS PARTICULARES DEL INDICE.

Estudiamos en este apartado, la foma concreta del índice promedio sobre elementos del conjunto de los numeros difusos triangulares, $\mathcal{T}$.

Sea $A\in\mathcal{T}$, entonces A queda determinado a través de cinco parámetros

$$A=\{(m_1,m_2,a,b),\ \alpha_A\}.$$

Los extremos inferior y superior de un $\alpha$-corte de A, con $A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$ y $\alpha\leq\alpha_A$, son

$$\begin{cases} a_\alpha=m_1+(\alpha-\alpha_A)a/\alpha_A \\ b_\alpha=m_2+(\alpha_A-\alpha)b/\alpha_A \end{cases}$$

La función de medida de posición $f_A^\lambda$ sobre los elementos de $\mathcal{T}$ vale

$$f_A^\lambda(\alpha)=\begin{cases} m_\lambda+c_\lambda(1-\alpha/\alpha_A) & \text{si } \alpha\in[0,\alpha_A] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

en donde $m_\lambda=\lambda m_1+(1-\lambda)m_2$, $c_\lambda=\lambda b-(1-l)a$ y $A\in\mathcal{T}$.

### 2.3.1 Sistema [0,1] y medida de Stieltjes.

Veamos la forma del índice promedio sobre números difusos triangulares, utilizando el sistema de comparación Y=[0,1], y como distribución de probabilidad, una medida de Stieltjes normalizada

$$S((a,b])=s(b)-s(a)$$

definida por la función

$$s:[0,1]\longrightarrow[0,1]$$

verificando

i) s es monótona creciente.

ii) $s(0)=0$ y $s(1)=1$.

De donde

$$V_S^{\lambda}(A)=\int_0^1 f_A^{\lambda}(\alpha)dS(\alpha)=\int_0^{\alpha_A}[m_\lambda+c_\lambda(1-\alpha/\alpha_A)]dS(\alpha)=$$

$$=m_\lambda s(\alpha_A)+c_\lambda s(\alpha_A)-c_\lambda\frac{1}{\alpha_A}\int_0^{\alpha_A}\alpha dS(\alpha)).$$

Si $s(\alpha_A)=0 \Longrightarrow$ sobre $[0,\alpha_A]$ la medida es nula y el índice promedio es cero. Supongamos por tanto $s(\alpha_A)\neq 0$, entonces

$$V_S^{\lambda}(A)=s(\alpha_A)f_A^{\lambda}(\alpha(S,A))$$

en donde

$$\alpha(S,\alpha_A)=\frac{1}{s(\alpha_A)}\int_0^{\alpha_A}\alpha dS(\alpha) \qquad (3)$$

que denominaremos **Nivel de comparación promedio**, ya que dada una medida, y conocida la altura del número difuso A, la comparación se realiza a través de dicho nivel (ver fig.9)

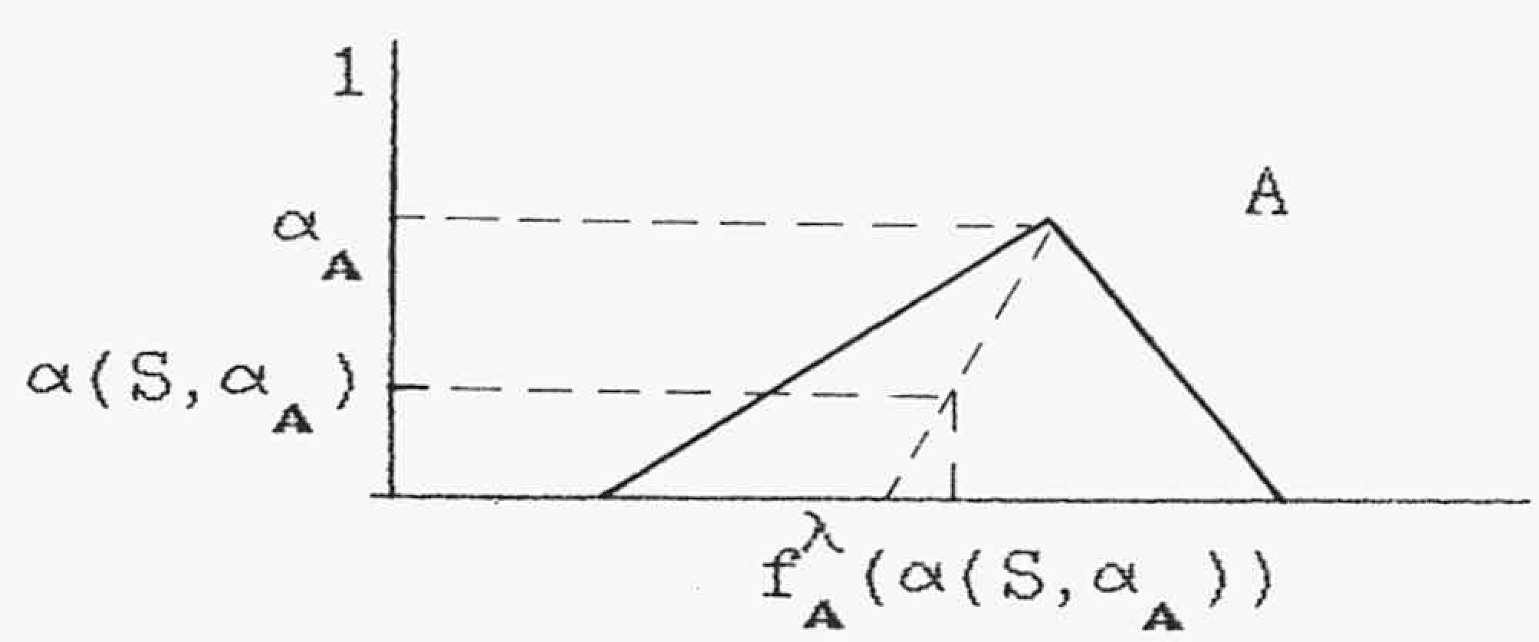



figura 9. Nivel de comparación promedio.

Utilizando la igualdad

$$\int_a^b f(x)dS(x)+\int_a^b s(x)df(x)=f(b)s(b)-f(a)s(a)$$

para funciones f integrables Riemman-Stieltjes en [a,b], podemos obtener otra expresión del nivel de comparación promedio, en concreto

$$\int_{0}^{\alpha_A} \alpha dS(\alpha) = \alpha_A s(\alpha_A) - \int_{0}^{\alpha_A} s(\alpha)d\alpha$$

así considerando

$$k(s,\alpha_A) = \int_{0}^{\alpha_A} s(\alpha)d\alpha$$

tenemos

$$\alpha(S,\alpha_A) = \alpha_A - \frac{1}{s(\alpha_A)} k(s,\alpha_A) \qquad (4)$$

que es una expresión equivalente a (3). La expresión (3) define al nivel de comparación promedio como la media de los niveles bajo la medida S, mientras (4) lo relaciona con la curva s que define la medida. De (3) y (4) se deduce que $\alpha(S,\alpha_A)$ pertenece al intervalo $[0,\alpha_A]$ para cualquier medida considerada.

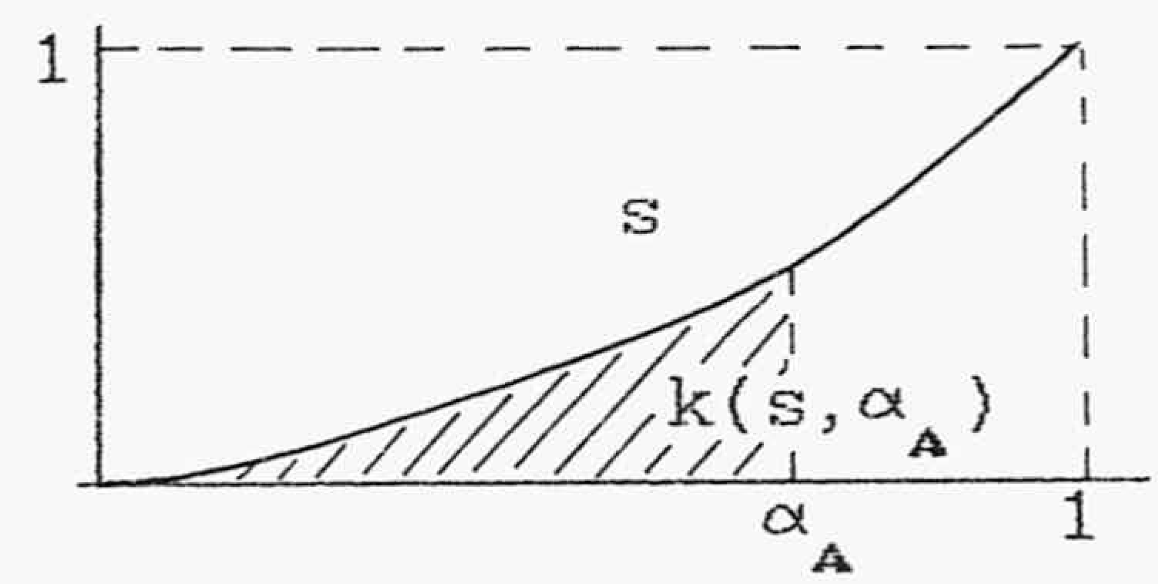



figura 10. El área bajo la función s en $[0,\alpha_A]$, corresponde a $K(s,\alpha_A)$.

Con la medida de Lebesgue (s(x)=x) el nivel de comparación promedio es

$$\alpha(s,\alpha_A) = \alpha_A/2$$

y la introducción de una medida más general modificará la situación de este nivel.

La interpretación que podemos darle al nivel de comparación promedio es que la medida, ponderando la importancia de cada nivel, elige uno de ellos, con el cual y con la medida de posición sobre los $\alpha$-cortes realiza la comparación.

Cuando los números difusos estan normalizados ($\alpha_A$=1), el nivel de comparación promedio es:

$$\alpha(S,1)=\int_0^1 \alpha dS(\alpha)=1-k(s,1)$$

y el índice promedio

$$V_S^\lambda(A)=f_A^\lambda(\alpha(S,1)).$$

Para números difusos normalizados cualquiera dos medidas de Stieltjes que generen el mismo nivel de comparación promedio, proporcionan la misma relación de orden.

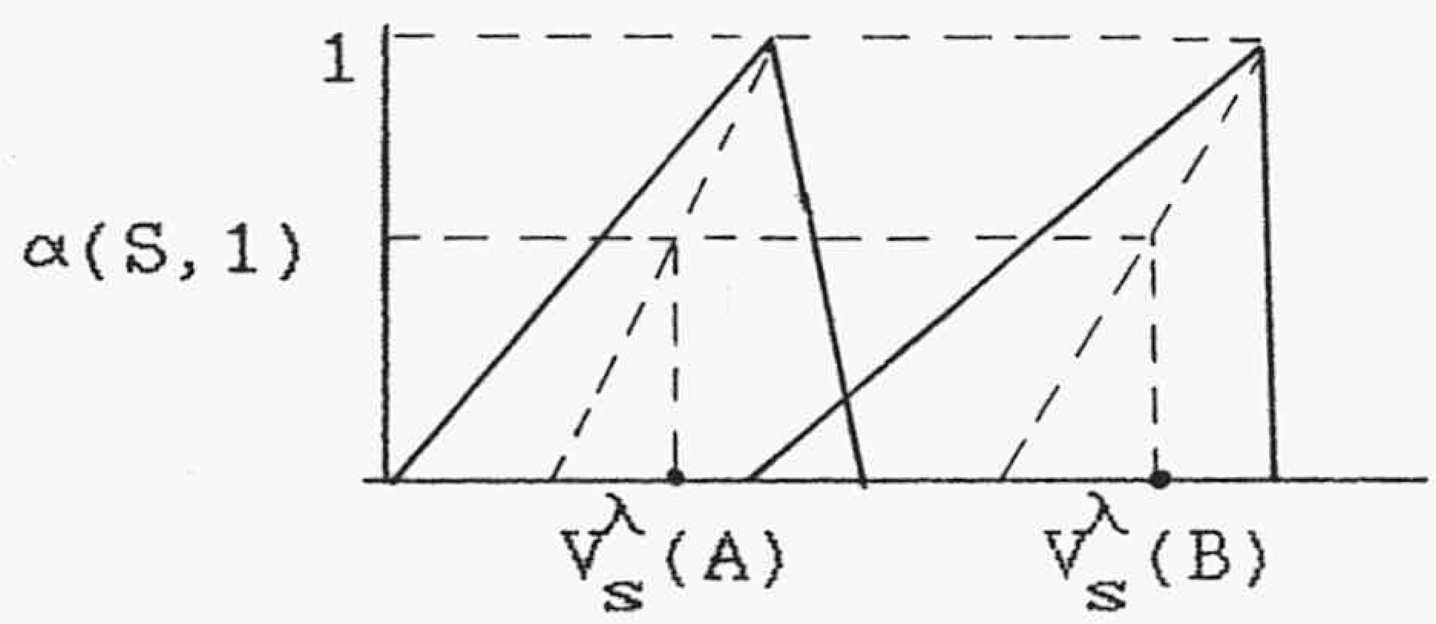



figura 11. Comparación entre números difusos triangulares normalizados, usando medidas de Stieltjes y a través del nivel de comparación promedio.

2.3.2 <u>Sistema finito y distribución de probabilidad general</u>.

Estudiaremos ahora la forma del índice promedio sobre números difusos triangulares, utilizando el sistema de comparación finito, ordenado en forma creciente

$$Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$$

y la distribución de probabilidad general

$$P:Y\longrightarrow[0,1]$$
$$\alpha_i\longrightarrow P(\alpha_i)=p_i$$

El índice promedio queda en la forma

$$V_P^\lambda(A)=\sum_1^{j_A} f_A^\lambda(\alpha_i)p_i$$

siendo $\{\alpha_1,\ldots\alpha_{j_A}\}=Y\cap[0,\alpha_A]$. Y sobre elementos de $\mathcal{T}$

$$V_P^\lambda(A)=p_{j_A} f_A^\lambda\Big(\frac{1}{p_{j_A}}\sum_1^{j_A}\alpha_i p_i\Big)$$

cuando $p_{j_A} \neq 0$, en caso contrario el índice promedio es cero. En este caso el nivel de comparación promedio es

$$\alpha(P,\alpha_A)=\frac{1}{p_{j_A}}\sum_{1}^{j_A}\alpha_i p_i$$

expresión, que como la del índice promedio, es análoga a la obtenida en 2.3.1.

Definiendo

$$k(p,\alpha_A)=\int_0^{\alpha_A} p(\alpha)d\alpha=\sum_{1}^{j_A}(\alpha_{j+1}-\alpha_j)p_j$$

considerando $\alpha_{j_A+1}=\alpha_A$. Puede entonces comprobarse que

$$\alpha(P,\alpha_A)=\alpha_A-\frac{1}{p_{j_A}}k(p,\alpha_A)$$

expresión análoga a la obtenida con el sistema de comparación Y=[0,1]. De la misma forma cuando los números difusos están normalizados ($\alpha_A=1$) se tiene que

$$\alpha(P,1)=\sum_{1}^{n}\alpha_i p_i \qquad \text{y} \qquad V_P^{\lambda}(A)=f_A^{\lambda}(\alpha(P,1)).$$

Para números difusos normalizados, cualquiera dos probabilidades que generen el mismo nivel de comparación promedio, proporcionan la misma relación de orden.

### 2.3.3. Ejemplos de comparación con el índice promedio.

Veremos en este apartado seis ejemplos de comparación con números difusos triangulares, usando para ello el índice promedio sobre dos tipos de sistemas de comparación, uno infinito y otro finito. En concreto consideramos

a) $Y_1=[0,1]$ y medida asociada la de Lebesgue, $P_1\equiv L$.

b) $Y_2=\{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$ y como medida asociada la definida a través de la función de probabilidad siguiente:

$P_2(0)=0.05$, $P_2(0.25)=0.2$, $P_2(0.50)=0.4$, $P_2(0.75)=0.3$, $P_2(1)=0.05$

Los cinco primeros ejemplos se corresponden con los estudiados en el apartado 1.3.3 para las distintas dominancias de la función NIS; y el último, es un ejemplo de comparación de cantidades difusas de distinta altura. En cada caso comentaremos la relación entre los resultados obtenidos en el método NIS y los obtenidos para el índice promedio, en cada uno de los sistemas considerados.

Caso 1.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(2,2,1,1),0.50\rangle$$

$$B=\langle(3,3,1,1),0.50\rangle$$

representados en la fig.8a,

a) $V^{\lambda}_{P_1}(A)=0.75+0.5\lambda$ y $V^{\lambda}_{P_2}=1.25+0.5\lambda$,

con lo que, $A \leq B$ $\forall\lambda\in[0,1]$, o de otra forma, $R_V(A,B)=[0,1]$, $R_V(B,A)=\emptyset$, y considerada la función distancia asociada a una función ordenadora (definida en el apartado 7.3 del primer capítulo) tenemos

$$d_V(A,B)=0.5.$$

b) $V^{\lambda}_{P_2}(A)=1.15+0.3\lambda$ y $V^{\lambda}_{P_2}(B)=1.8+0.3\lambda$,

con lo que se mantiene el resultado obtenido en a), variando levemente la distancia entre ambos números difusos

$$d_V(A,B)=0.65.$$

En este caso el resultado en ambos sistemas es el mismo, y coincide a su vez con el resultado obtenido en 1.3.3 para las distintas funciones NIS.

Caso 2.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(2,4,1,1),1\rangle$$

$$B=\langle(4,4,3,1),1\rangle$$

$$C=\langle(4,4,1,1),1\rangle$$

representados en la fig.8b.

a) $V^{\lambda}_{P_1}(A)=1.5+3\lambda$, $V^{\lambda}_{P_1}(B)=2.5+2\lambda$, $V^{\lambda}_{P_1}(C)=3.5+\lambda$,

de donde

$$R_V(A,B)=[0,1],\ R_V(B,A)=\langle 1\rangle,\ I_V(A,B)=\langle 1\rangle$$

$$R_V(B,C)=[0,1],\ R_V(C,B)=\langle 1\rangle,\ I_V(B,C)=\langle 1\rangle$$

b) $V^{\lambda}_{P_2}(A)=1.525+2.95\lambda$, $V^{\lambda}_{P_2}(B)=2.575+1.9\lambda$, $V^{\lambda}_{P_2}(C)=3.525+0.95\lambda$,

y obtenemos las mismas regiones que el el caso a), y además el mismo resultado que para las funciones NIS.

Caso 3.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(4,4,1,1),1\rangle$$

$$B=\langle(4,4,2,2),1\rangle$$

representados en la fig.8c.

a) $V^{\lambda}_{P_1}(A)=3.5+\lambda$, $V^{\lambda}_{P_1}(B)=3+2\lambda$,

de donde

$$R_V(A,B)=[1/2,1],\ R_V(B,A)=[0,1/2],\ I_V(A,B)=\langle 1/2\rangle.$$

b) $V^{\lambda}_{P_2}(A)=3.525+0.95\lambda$, $V^{\lambda}_{P_2}(B)=3.05+1.9\lambda$,

de donde se obtienen las mismas regiones que en el caso a), por tanto coincide la comparación, y coincide a su vez con la obtenida por el método NIS para los órdenes lexicográfico y fuerte, manteniendose la interpretación dada entonces del resultado.

Caso 4.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(2,2,2,1),0.60\rangle$$

$$B=\langle(3,3,4,1),0.60\rangle$$

representados en la fig.8d.

a) $V_{P_1}^{\lambda}(A)=0.60+0.9\lambda$, $V_{P_1}^{\lambda}(B)=0.60+1.5\lambda$,

con lo que,

$$R_V(A,B)=[0,1],\ R_V(B,A)=\{0\},\ I_V(A,B)=\{0\}.$$

b) $V_{P_2}^{\lambda}(A)=0.83+0.7\lambda$, $V_{P_2}^{\lambda}(B)=1.02+1.2\lambda$,

de donde,

$$R_V(A,B)=[0,1],\ R_V(B,A)=\emptyset,\ I_V(A,B)=\emptyset.$$

En este caso, el resultado difiere en a) y en b), aunque como puede observarse, no demasiado, puesto que el sistema infinito permite la indiferencia en $\lambda=0$, pero en lo demás coincide con el resultado para el sistema finito. El método NIS, aún trabajando con un sistema proporcional distinto al empleado sobre el índice promedio, coincide con b) bajo el orden lexicográfico y de mayorización. Con el fuerte, el resultado también coincide sobre el intervalo [1/2,1], pero para valores del parámetro entre 0 y 1/2, A y B son no comparables.

Caso 5.

Consideremos los números difusos triangulares

$$A=\langle(4,4,1,3),1\rangle$$

$$B=\langle(5,5,3,1),1\rangle$$

representados en la fig.8e.

a) $V_{P_1}^{\lambda}(A)=3.5+2\lambda$, $V_{P_1}^{\lambda}(B)=3.5+2\lambda$,

así

$$R_V(A,B)=R_V(B,A)=I_V(A,B)=[0,1].$$

b) $V_{P_2}^{\lambda}=3.525+1.9\lambda$, $V_{P_2}^{\lambda}(B)=3.575+1.9\lambda$,

por tanto

$$R_V(A,B)=[0,1],\ R_V(B,A)=\emptyset,\ I_V(A,B)=\emptyset,$$

además

$$d_V(A,B)=0.05.$$

El resultado es radicamente distinto en a) y en b). Para el sistema infinito los dos números son indiferentes en cualquier caso, para el sistema finito siempre A es menor que B, aunque los dos números estén muy próximos como indica el valor cercano a cero de la distancia. En el primer caso son indiferentes, en el segundo muy próximos, pero A es menor que B. Para los métodos NIS ambas cantidades son no comparables, salvo para el orden lexicográfico que decide de igual forma que b) (la prioridad utilizada en el orden lexicográfico, se ha mantenido en la ponderación que representa la función de probabilidad $P_2$ ).

Caso 6.

Consideramos los números difusos triangulares

$$A=\langle(3,3,1,2),\ 0.70\rangle$$

$$B=\langle(5,5,1,1),\ 0.50\rangle$$

representados en la fig.12.

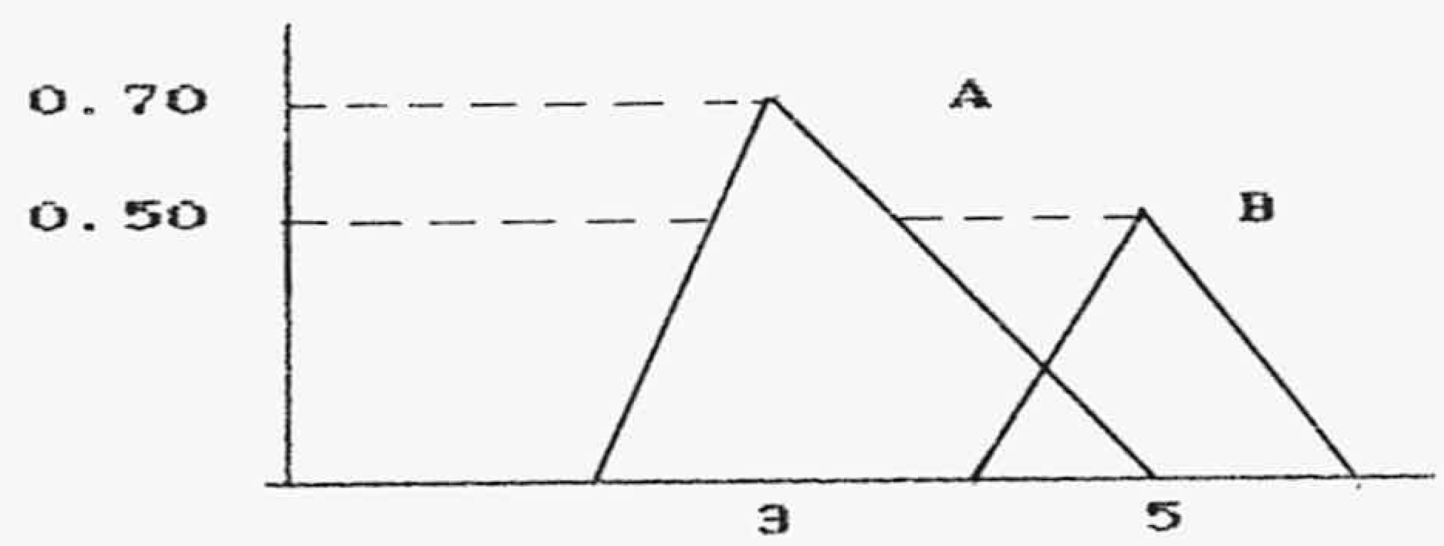



figura 12. Representación de dos números difuso triangulares con distinta altura.

a) $V^{\lambda}_{P_1}(A)=1.75+1.05\lambda$, $V^{\lambda}_{P_1}(B)=2.25+0.50\lambda$,

de donde

$$R_V(A,B)=[0,0.9],\ R_V(B,A)=[0.9,1],\ I_V(A,B)=\langle 0.9\rangle.$$

b) $V^{\lambda}_{P_2}(A)=1.66+0.88\lambda$, $V^{\lambda}_{P_2}(B)=3.1+0.3\lambda$,

de donde

$$R_V(A,B)=[0,1],\ R_V(B,A)=\emptyset,\ I_V(A,B)=\emptyset.$$

El resultado de la comparación es distinto en a) y en b). En el primer caso se admite un nivel de indiferencia y una región para la dominancia de A sobre B; en el segundo para cualquier parámetro se deduce que B es mayor que A. Utilizando en este ejemplo el método de comparación NIS, aplicado sobre el sistema proporcional

$$Y\cap[0,0.50]=\langle 0,0.25,0.50\rangle,\ \min\langle 0.70,0.50\rangle=0.50$$

el resultado es

$$A \leq_F B \text{ y } R_F(A,B)=[0,1]$$

y por tanto, como B domina a A, también

$$A \leq_L B \text{ y } A \leq_M B.$$

De hecho, de la proposición 2.9 se deduce directamente el resultado de b), ya que el sistema considerado es finito y el mismo para A y B. El resultado de a), difiere de los otros métodos de comparación, debido a que los números difusos considerados tienen distinta altura, y ya que la mayor altura de A modifica sobre sistemas continuos el valor final del índice promedio.

La comparación utilizando el índice promedio en dos sistemas de comparación, uno finito y otro infinito, ha demostrado en los casos tratados ser bastante parecida, con algunas diferencias en los ejemplos de mayor complejidad: Así, en ambos sistemas los tres primeros casos no presentan diferencia, coincidiendo el resultado con el obtenido para la función NIS en sus distintas dominancias; tan solo presenta algunas diferencias la dominancia parcial (generada por la mayorización) explicable, por el carácter optimista de la particular función NIS-g considerada.

El caso 4 presenta un resultado análogo en todos los métodos, salvo la indiferencia que genera $\lambda=0$ para el sistema infinito y el índice promedio; y por otro lado la no posible comparación con el orden fuerte sobre la región [0,1/2).

El caso 5, solo admite solución con la función NIS para la dominancia débil, proporcionando la misma solución que el índice promedio sobre el sistema finito, además la distancia entre ambos números difusos es muy pequeña, lo que explica la indiferencia que se provoca en el sistema infinito.

El caso 6 no fue estudiado en el apartadO 1.3.3 ya que la dominancia de B sobre A es evidente según el método NIS, utilizando para ello sistemas restringidos (ya que ambas cantidades tienen distinta altura). El índice promedio proporciona el mismo resultado sobre el sistema finito y levemente diferente en el sistema infinito.

En cualquier caso, se puede observar que cuando se verifica la relación de dominancia fuerte, entonces todas las demás dominancias coinciden prácticamente, y coinciden también, en gran parte, con el orden generado por el índice promedio. Pero, cuando no se verifica la dominancia que produce el orden fuerte, se obtienen distintas versiones de la solución por los distintos métodos, que como se comprueba en los ejemplos se mueven en torno a una solución común.

## 3. EXTENSION DEL INDICE PROMEDIO.

El índice promedio al estar valuado en $\mathbb{R}$, concentra toda la información de la posición del número difuso en un valor, y como ya hemos comentado, esto puede llevar a casos extraños de no discriminación. Ante situaciones de indecisión, es posible que un decisor deseara modificar sus criterios de selección (grado de optimismo-pesimismo y distribución sobre los niveles de importancia), y esto se resuelve mediante una extensión del índice promedio a $\mathbb{R}^m$. Además, esta extensión tiene la propiedad como veremos de generalizar todos los índices estudiados en este capítulo.

### 3.1 FUNCION COMPARADORA DE GRADO m.

Sea $\underset{\sim}{A} \in \mathbb{R}$, y sean $\lambda_i \in [0,1]$, con $i=1...m$, unos niveles de optimismo-pesimismo dados según un orden de prioridad ($\lambda_1$ más prioritario, $\lambda_m$ menos prioritario). Sean $Y_i \in \mathcal{P}([0,1])$, $i=1...m$, unos sistemas de comparación, y $\Omega_i$ la restricción del $\sigma$-campo de Borel al conjunto $Y_i$. Supondremos la existencia de m distribuciones de probabilidad sobre $(Y_i, \Omega_i)$, $i=1...m$

$$P_i : \Omega_i \longrightarrow [0,1]$$

dados también en una prioridad ($P_1$ más prioritario, $P_m$ menos prioritaria).

<u>Definición 3.1</u>

Se define la función comparadora de grado m

$$FC_m : \underset{\sim}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$FC_m(A) = (V_{P_1}^{\lambda_1}(A), \ldots, V_{P_m}^{\lambda_m}(A)) \quad \forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}},$$

en donde $V^{\lambda}_{P_j}j(A)$ es el índice promedio asociado al parámetro $\lambda_j \in [0,1]$ y a la distribución de probabilidad $P_j$. Suponemos que $Y_i \cap [0,\alpha_A] \neq \emptyset$, $\forall i=1...m$, con $\alpha_A$ la altura del número difuso A.

Considerando sobre $\mathbb{R}^m$ el orden lexicográfico, fuerte o de mayorización, la función $FC_m$ definirá una relación de orden sobre las clases de equivalencia.

La selección de los valores $\lambda_i$ y las distribuciones $P_i$ se interpreta, con el orden lexicográfico, como un replanteamiento del problema cuando con los índices promedio, anteriores en preferencia, hemos llegado a la indiferencia. En ese caso, modificamos el grado de optimismo-pesimismo y la ponderación de los niveles de comparación, para intentar salir del estado de indecisión. Si después de utilizar los m índices promedio se mantiene aún la indiferencia, afirmaremos que son indiferentes en relación con la función ordenadora $FC_m$.

Con el orden fuerte, los distintos valores $\lambda_i$ y distribuciones $P_i$ pueden interpretarse como parámetros de distintos individuos que intervienen en la decisión, y el resultados debe satisfacer a todos.

Con la mayorización, la interpretación de los distintos valores $\lambda_i$, y distribuciones $P_i$ no está clara, ya que para su aplicación se necesita de la reordenación previa de las m-uplas de índices promedio.

Podemos, en el caso general, distinguir dos casos especiales:

a) Cuando $\lambda_i=\lambda$, $\forall i=1...m$. El grado de optimismo-pesimismo se mantiene constante en el proceso de decisión y sólo varia la ponderación sobre los niveles.

b) Cuando $P_i=P$, $\forall i=1...m$. Ahora la ponderación se mantiene y varia el grado de optimismo-pesimismo.

Evidentemente con m=1, la función $FC_1$ es un índice promedio. Veamos como en un caso particular, $FC_m$ coincide con la función NIS-g.

## 3.2 CASOS PARTICULARES.

Seleccionamos un sistema de comparación NIS inicial

$$Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$$

con $\alpha_i\in[0,1]$, $n\in \mathbb{N}$. Y los sistemas de comparación parciales $Y_i=[0,1]$, i=1...m. Tomamos m=2n, y consideramos la función $FC_{2n}$ con los siguientes parámetros y distribuciones:

$$\lambda_{2k-1}=\lambda,\ \lambda_{2k}=\mu \text{ con } \lambda,\mu\in[0,1],$$

$$P_{2k-1}(\alpha)=P_{2k}(\alpha)=\begin{cases} 1 \text{ si } \alpha=\alpha_k \\ 0 \text{ si } \alpha\neq\alpha_k \end{cases}$$

con k=1...n.

En este caso, la función de comparación queda

$$FC_{2n}(A)=(\lambda b_i+(1-\lambda)a_i,\ \mu b_i+(1-\mu)a_i)_1^n \qquad \forall A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}},$$

que coincide con la función NIS-g, $f_T(A,\lambda,\mu)$, definida en el apartado 1.2.1.

Así, la función $FC_m$ engloba en una sola expresión todas las funciones de comparación estudiadas: funciones NIS e índice promedio. La relación existente entre ambas queda recogida en la función comparadora de grado m.

# CAPITULO III

## 0. INTRODUCCION.

En el capítulo anterior para la construcción de sistemas proporcionales sobre cantidades difusas de tipo CD2, en los índices de comparación NIS, era necesario que todas las cantidades tuviesen la misma altura. Este requerimiento resulta trivial si, como muchos autores hacen, se trabaja con cantidades difusas normalizadas. No obstante, la hipótesis de igualdad de altura parece conveniente, no sólo en el problema de comparación, pues es equivalente a utilizar cantidades difusas con un mismo nivel de incertidumbre.

Los métodos empleados hasta ahora para conseguirlo, se reducen esencialmente a truncar la cantidad difusa que posee mayor altura, y trabajar con cantidades cuya certidumbre es la más baja de todas las que intervienen en el proceso. Este método, que puede relacionarse con el uso de sistemas restringidos de comparación sobre cantidades CD1, no nos parece conveniente en general, puesto que pierde información al aplicarlo.

Por nuestra parte creemos que, si la hipótesis de igualdad de alturas es necesaria para aplicar ciertas técnicas a cantidades difusas, y estas no tienen la misma, tendrá que existir un proceso de transformación previo; pero éste no puede ser arbritario, si no que debe hacerse de acuerdo con un criterio que mantenga la información que la cantidad difusa proporciona.

Este es el problema que abordamos en este capítulo, y si bien surge de las hipótesis necesarias para que ciertas técnicas de comparación, propuestas en el capítulo II, funcionen bien, la importancia del problema trasciende a su origen. Puesto que, como ya hemos indicado, el reducir dos cantidades difusas a igual altura, surge en casi todos los casos en los que hay que tratarlas conjuntamente.

Los elementos esenciales de una cantidad difusa del tipo CD2, desde el punto de vista de la información que proporciona son dos: incertidumbre (relacionada con la altura) e imprecisión (definida a partir de la longitud de los $\alpha$-cortes). La información se definirá como una relación entre estos elementos, y por tanto, se pueden definir transformaciones que modifiquen la altura, conservando la información, mediante un intercambio de incertidumbre por imprecisión. Esta será la idea fundamental que desarrollaremos en este capítulo; el cual está dividido en dos partes diferenciadas:

La primera estudia la información proporcionada por una cantidad difusa del tipo CD2. Se propone una definición axiomática, que está en parte inspirada en la teoría generalizada de la información dada por Kampé de Fèriet, y que también puede relacionarse con los índices de precisión. Se estudian informaciones dependientes exclusivamente de la certidumbre y la imprecisión, a través de una función que verifica unas propiedades concretas, y las relaciona a ambas. De este tipo, estudiamos tres diferentes funciones de información, $I_0$, $I_1$ e $I_2$. En todos los casos se verifican buenas propiedades de convergencia; y se analiza el caso particular de números difusos triangulares.

La segunda parte tiene el propósito de definir transformaciones sobre cantidades difusas. Dada una cantidad difusa, una transformación sobre ella, generará otra cantidad difusa con igual información y distinta altura. Por tanto, para definir transformaciones exigiremos la conservación de una función de información; es decir, modificaremos la certidumbre y la imprecisión de una cantidad difusa, manteniendo constante la relación certidumbre-imprecisión, que define a la información.

De las tres funciones de información estudiadas en la primera parte, trabajamos con $I_0$ e $I_1$. La función $I_2$ proporciona unas expresiones muy complicadas que no han permitido definir transformaciones que la conserven. Estudiamos dos transformaciones, una con $I_0$ y otra con $I_1$, ambas presentan análogas propiedades generales, pero la primera funciona mejor en la comparación a distinta altura, y la segunda ante un cambio de escala.

Puesto que la definición de transformaciones se deduce a partir de la condición de igualdad de la información, en primer lugar consideraremos números difusos triangulares, cuya función de pertenencia es conocida y cómoda de manejar, y posteriormente a partir de lo obtenido extenderemos el resultado a números difusos continuos. En este caso general, la transformación que conserva $I_0$ y la que conserva $I_1$, presentan una forma común dependiente de la inversa de una función, variando ésta para cada información.

## 1. INFORMACION PROPORCIONADA POR UNA CANTIDAD DIFUSA.

### 1.1 DEFINICION GENERAL.

Para la construcción de transformaciones que modifiquen la altura de cantidades difusas del tipo CD2, y como garantía de la conservación de la información referente a la cantidad imprecisa representada, definiremos un índice que evalue la información que nos proporciona el conocimiento de dicha cantidad y que permanecerá invariante tras la transformación.

Una cantidad difusa del tipo CD2 es una representación difusa sobre el enunciado del valor de una medida no conocida con precisión. La altura sobre tales cantidades, como se señaló en el capítulo I, es interpretable como un grado sobre la certidumbre de la información que representa, y veremos como ésta puede ser modificada mediante transformaciones que cambian incertidumbre por imprecisión, y al revés. La información de la cantidad difusa será un valor que permanezca constante tras la transformación. No haremos referencia, en el resto del capítulo, al tipo de cantidad difusa, puesto que sólo trabajaremos con CD2.

Las medidas de difusividad (Luca y Termini [46], Trillas y Riera [67], entre otros) no son válidas para definir una información sobre cantidades difusas, puesto que ésta se relaciona con la idea de parecido a un número real, y no con la evaluación de hasta que punto un conjunto tiene sus fronteras mal definidas. Un número real posee toda la información sobre el valor de una medida, y una cantidad difusa informará más, cuanto más se parezca a un número real.

A continuación, proponemos una definición axiomática de información, que está en parte inspirada en la teoría generalizada de la información dada por Kampé de Fèriet [41], y que puede relacionarse con los índices de precisión [28].

<u>Definición 1.1</u>

Sea $\mathcal{D}\subseteq \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ / $\mathbb{R}\subseteq\mathcal{D}$, diremos que la aplicación

$$I:\mathcal{D}\longrightarrow[0,1]$$

es una **información** sobre $\mathcal{D}$, si verifica:

i) $I(A)=1 \quad \forall A\in\mathbb{R}$

ii) $\forall A,B\in\mathcal{D},\ A\subseteq B$ / $\alpha_A=\alpha_B \Longrightarrow I(B)\leq I(A)$

con $\alpha_A,\alpha_B\in(0,1]$, respectivamente las alturas de A y B.

La condición i) es obvia, puesto que los números reales son totalmente informativos. De dos cantidades difusas de la misma altura, si una está contenida en la otra (fig.1), es evidente que la que está contenida es más parecida a un número real (es menos imprecisa) y por tanto más informativa.

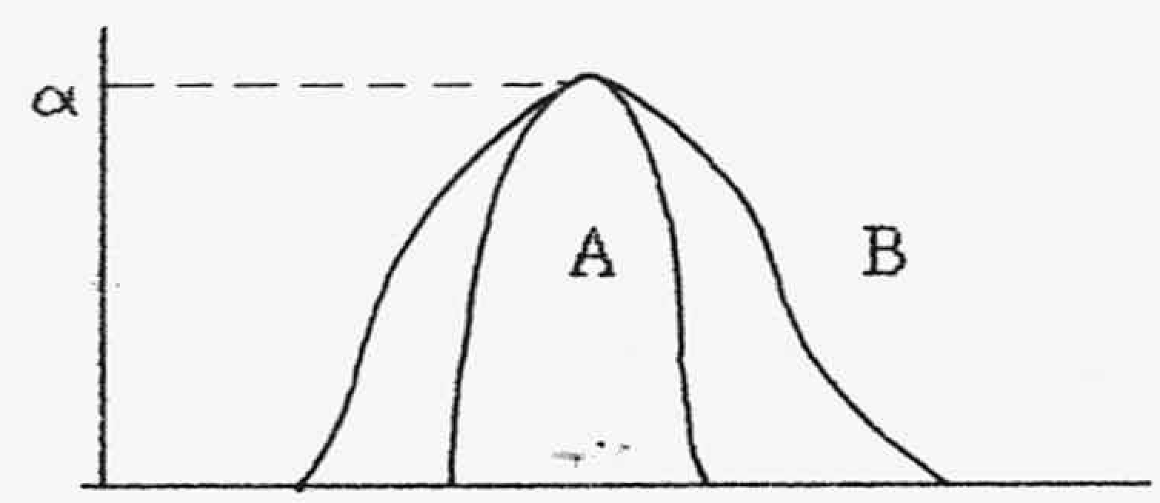
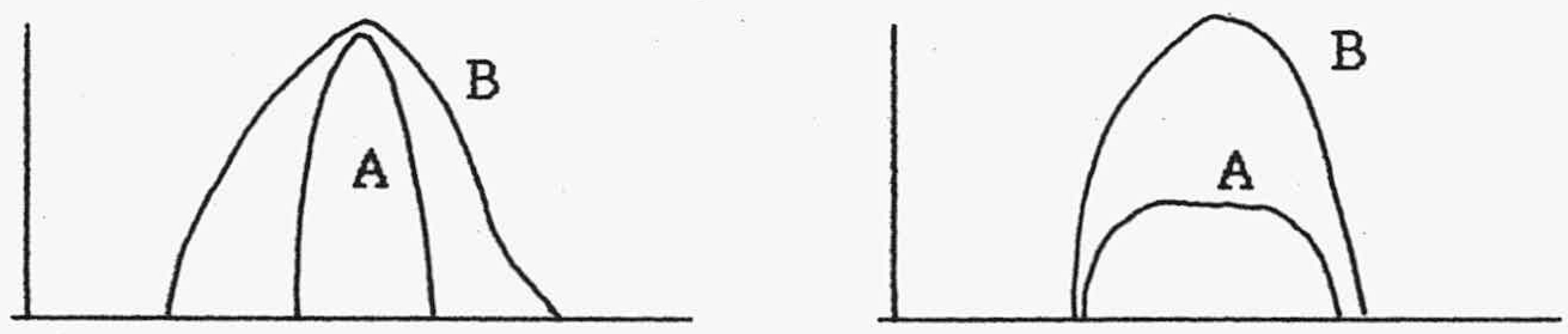



figura 1. A es "más parecido" a un número real que B.

Cuando las cantidades difusas no tienen la misma altura, no podemos afirmar nada sobre cual es más informativa. En la fig.2a, la cantidad difusa A, con casi la misma altura que B, parece más informativa al ser bastante más precisa. En la fig.2b, la cantidad difusa A procede de una información muy incierta, y aun siendo más precisa que B, parece menos informativa.




(a) (b)

figura 2. Ejemplos de cantidades difusas de distinta altura, con una contenida en la otra.

Las informaciones definidas son análogas en su axiomática a los índices de precisión, de hecho con números difusos normalizados ambas definiones coinciden. Esta coincidencia es razonable puesto que cuando no hay incertidumbre (números difusos normalizados) la información es en cierto modo equivalente a la precisión. De este modo, la función de información es una generalización de los índices de precisión, cuando consideramos el factor incertidumbre.

<u>Definición 1.2</u>

Sea $A \in \mathcal{D}$, diremos que es totalmente informativo o de **información máxima** con respecto a la medida de información I, si

$$I(A)=1$$

Evidentemente los números reales son totalmente informativos con respecto a cualquier medida de información I.

## 1.2 <u>INFORMACIONES DEPENDIENTES DE LA ALTURA Y LA IMPRECISION</u>.

La información sobre cantidades difusas depende de distintos factores asociados a la misma, en particular de la imprecisión y la certidumbre relativas a tal cantidad imprecisa. Estudiamos ahora tipos generales de información dependientes tan sólo de estos dos factores anteriores, y restringimos nuestro estudio al conjunto de números difusos $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, ya que en el capítulo II desarrollamos comparaciones fundamentalmente para ellos.

Sobre números difusos una medida de la certidumbre sobre la cantidad imprecisa que representa, como señalamos en el capítulo I, es la altura de tal número. De este modo los números difusos normalizados representan cantidades imprecisas sobre las que tenemos máxima certeza en la calidad de la información, y sobre números difusos no normalizados dicha altura es precisamente una medida de tal calidad. Notaremos a la altura de los números difusos por c(A), con $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, haciendo referencia a su interpretación como calidad o certidumbre de la información representada.

Para definir una imprecisión sobre números difusos, consideraremos una medida de la imprecisión sobre sus $\alpha$-cortes, que son intervalos cerrados, y para los que parece válida la siguiente función:

$$\forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \quad i_A(\alpha) = \begin{cases} b_\alpha - a_\alpha & \text{si } \alpha \leq c(A) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$.

A partir de la función imprecisión sobre $\alpha$-cortes definimos la imprecisión global del número difuso, como una ponderación de las imprecisiones a cada nivel $\alpha$, según una distribución de probabilidad P, relativa a la importancia de cada uno. Cuando $\alpha=0$, consideramos a i(0) la longitud del soporte.

<u>Definición 1.3</u>

Sea $Y \in \mathcal{P}([0,1])$ un conjunto de niveles de $\alpha$-cortes. Consideramos $\Omega$ el $\sigma$-campo de Borel restringido al conjunto Y, y P una función de probabilidad sobre $(Y,\Omega)$. Se define la **imprecisión** de un número difuso como

$$i : \underset{\sim}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}, \quad i(A) = \int_Y i_A(\alpha)\, dP(\alpha).$$

Este valor está bien definido, puesto que sobre números difusos, la función imprecisión sobre $\alpha$-cortes siempre está acotada. Evidentemente cuando consideramos $Y=[0,1]$ y P la medida de Lebesgue sobre el intervalo unidad, entonces la función imprecisión $i(\cdot)$ coincide con el área bajo la función de pertenencia del número difuso.

Obviamente para cualquiera números difusos A y B, tales que $A\subseteq B$ se verifiva que

$$i_A(\alpha)\le i_A(\alpha) \qquad \forall\alpha\in[0,1]$$

y por lo tanto

$$i(A)\le i(B),$$

de donde, $1-i(A)$ es una medida de precisión.

Asociados a la altura (certidumbre) y la imprecisión de un número difuso, definimos el siguiente tipo general de funciones sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$:

1. $I_f(A)=f(c(A),i(A))$

2. $I'_f(A)=\int_{Y\cap[0,c(A)]} f(c(A),i_A(\alpha))dP(\alpha)$

considerando sobre $I_f(\cdot)$ la imprecisión global, y sobre $I'_f(\cdot)$ la imprecisión sobre cada $\alpha$-corte, ponderando posteriormente sobre los niveles del conjunto Y con la distribución de probabilidad P.

El siguiente resultado garantiza que para ciertas funciones f, tanto $I_f$ como $I'_f$ son informaciones sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.

<u>Proposición 1.1</u>

Sea la función $f:(0,1]\times\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [0,1]$ /

i) $f(1,0)=1$

ii) $\forall y,z\in \mathbb{R}_0^+$ / $y\le z \Longrightarrow f(x,z)\le f(x,y)$, $\forall x\in(0,1]$,

entonces $I_f$ e $I'_f$ son informaciones sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.

Demostración.

i) Sea $A\in\mathbb{R} \Longrightarrow c(A)=1,\ i(A)=0 \Longrightarrow I_f(A)=f(1,0)=1.$

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $A\subseteq B$ y $c(A)=c(B) \longrightarrow i(A)\le i(B)$, de donde

$$f(c(B),i(B))=I_f(B)\le f(c(A),i(A))=I_f(A)$$

e $I_f$ es una información sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.

ii) Sea $A\in \mathbb{R} \Longrightarrow c(A)=1,\ i_A(\alpha)=0\ \forall\alpha\in[0,1] \Longrightarrow$

$$I'_f(A)=\int_Y f(1,0)dP(\alpha)=1.$$

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $A\subseteq B$ y $c(A)=c(B) \Longrightarrow i_A(\alpha)\le i_B(\alpha)$, por tanto

$$f(c(A),i_A(\alpha)) \ge f(c(B),i_B(\alpha))$$

de donde

$$I'_f(B)=\int_{Y\cap[0,c(B)]} f(c(B),i_B(\alpha))dP(\alpha) \le \int_{Y\cap[0,c(A)]} f(c(A),i_A(\alpha))dP(\alpha)=I'_f(A),$$

e $I'_f$ es una información sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.□

Esta proposición da una condición necesaria para que $I_f$ e $I'_f$ sean informaciones, pero no es condición suficiente puesto que en general

$$i(A) \le i(B) \not\Rightarrow A\subseteq B.$$

A las funciones $I_f$ e $I'_f$, verificando f las condiciones de la proposición anterior, las denominaremos **f-información y f-información promedio**, respectivamente. De este modo, asociada a una clase de funciones podemos construir algunos tipos particulares de informaciones sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, con la propiedad común de la no dependencia de la posición en $\mathbb{R}$ del número difuso, como demuestra la siguiente proposición.

Proposición 1.2

Sea f una función bajo las condiciones de la proposición 1.1, $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $t\in \mathbb{R}$, entonces

i) $I_f(A)=I_f(A\oplus t)$

ii) $I'_f(A)=I'_f(A\oplus t)$.

Demostración.

$A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, $t\in\mathbb{R}$, $A\oplus t\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ y $\mu_{A\oplus t}(z)=\mu_A(z-t)$ $\forall z\in\mathbb{R}$. Además

$$c(A\oplus t)= \sup_{z\in\mathbb{R}} \mu_{A\oplus t}(z)= \sup_{z\in\mathbb{R}} \mu_A(z-t)= \sup_{z\in\mathbb{R}} \mu_A(z)= c(A)$$

y $(A\oplus t)_\alpha=A_\alpha+t$, de donde

$$i_A(\alpha)=i_{A\oplus t(\alpha)} \text{ e } i(A)=i(A\oplus t),$$

por tanto, el resultado es inmediato.□

## 2. INFORMACIONES SOBRE NUMEROS DIFUSOS.

Definimos ahora tres informaciones asociadas a distintas funciones particulares. En concreto definiremos dos f-informaciones y una f-información promedio. Las f-informaciones permitirán posteriormente la definición de transformaciones que las conserven, en cambio, la f-información promedio presenta una gran complejidad para la definición de transformaciones.

Damos dos tipos de f-informaciones, ya que una de ellas $I_o$ proporciona una transformación que presenta buenas propiedades en la comparación de números difusos a distintas alturas bajo sistemas proporcionales, pero que no es independiente de la unidad de escala de las variables de trabajo. La segunda, $I_1$, por el contrario, define una transformación no dependiente de la escala, pero que no tiene buenas propiedades en la comparación de números difusos a distintas alturas. El uso de una información u otra, dependerá de las necesidades de cada problema concreto, pero en cualquier caso la determinación de una información óptima, y por tanto una transformación, no está resuelto.

Las tres funciones de información que vamos a definir, presentan buenas propiedades generales que estudiaremos en cada apartado.

### 2.1 LA FUNCION $I_o$.

2.1.1 Si consideramos la función

$$f_o : (0,1] \times \mathbb{R}_o^+ \longrightarrow [0,1]$$

$$f_o(x,y) = \frac{x}{y+1}$$

que verifica trivialmente las condiciones de la proposición 1.1, entonces podemos definir la f-información

Definición 2.1

Definimos la función

$$I_o : \underset{\sim}{\mathbb{R}} \longrightarrow [0,1]$$

$$\forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \qquad I_o(A) = \frac{c(A)}{i(A)+1}$$

en donde $c(A)$ es la altura del número difuso A, e $i(A)$ es la imprecisión de A, asociada a un conjunto $Y \in \mathcal{P}([0,1])$ y a una distribución de probabilidad P.

Evidentemente, por la proposición 1.1, $I_o$ es una función de información.

Como la imprecisión de un número difuso es una cantidad positiva o nula, se verifica trivialmente la relación

$$\forall A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \qquad 0 \leq I_o(A) \leq c(A) \leq 1.$$

De este modo, la información $I_o$ siempre está acotada por la altura del número difuso. Por tanto, los números difusos de información máxima respecto de $I_o$ ($I_o(A)=1$) deben tener altura también máxima ($c(A)=1$), de donde la imprecisión debe ser mínima ($i(A)=0$). La imprecisión está relacionada con el sistema $Y \in \mathcal{P}([0,1])$ y con la distribución de probabilidad asociada, así que de $i(A)=0$ y $c(A)=1$ no se deduce en general que A sea un número real.

Ejemplo 1.

Sea $Y=[0,1]$ y P la distribución de probabilidad degenerada en $\alpha=1$, entonces cualquier número difuso normalizado y unimodal tiene información máxima.

Fijando algunos pares (Y,P) para la función imprecisión, vamos a determinar los números difusos de información máxima, previamente necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, y sea $\alpha\leq c(A)$ / $i_A(\alpha)=0 \Longrightarrow \forall\beta\geq\alpha,\ i_A(\beta)=0.$

Demostración.

Sea $\alpha\leq\beta \Longrightarrow A_\beta\subseteq A_\alpha \Longrightarrow i_A(\beta)\leq i_A(\alpha)=0 \Longrightarrow i_A(\beta)=0.\square$

Como $(Y,P)$ vamos a considerar dos casos fundamentales:

1. $Y=[0,1]$ y como medida asociada la de Lebesgue.
2. Y finito y una distribución de probabilidad cualquiera.

Proposición 2.1

Sea $Y=[0,1]$, y como medida asociada la de Lebesgue, entonces

$$I_o(A)=1 \Longleftrightarrow A\in \mathbb{R}.$$

Demostración.

Sólo tenemos que probar la condición necesaria, para ello consideramos $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ / $I_o(A)=1$, entonces

$$c(A)=1 \text{ e } i(A)=0$$

de donde

$$\int_0^1 i_A(\alpha)d\alpha=0$$

y como $i_A(\alpha)\geq 0$, $\forall\alpha\in[0,1]$, entonces $i_A(\alpha)=0$, $\forall\alpha\in[0,1]$ salvo quizás en un conjunto numerable. Como, $\forall\alpha\in[0,1]$, $\exists\beta_\alpha\in(0,1]$ / $\beta_\alpha<\alpha$ e $i_A(\beta_\alpha)=0$, entonces por el lema anterior $i_A(\alpha)=0$. Con lo que A es un singleton de altura máxima, es decir $A\in \mathbb{R}.\square$

En el caso considerado en la proposición los únicos elementos de información máxima son los números reales. Cuando el sistema Y es finito este resultado no es cierto, pero bajo la información disponible, los elementos de información máxima no son muy distintos de los números reales.

Proposición 2.2

Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, sea $\alpha_o=\text{mín}\ \{\alpha_i /\ i=1\ldots n\}$, y sea P una distribución de probabilidad tal que al menos $P(\alpha_o)\neq 0$, entonces

$$I_o(A)=1 \Longrightarrow c(A)=1 \text{ e } i_A(\alpha)=0\ \forall\alpha\geq\alpha_o.$$

Demostración.

Como $I_o(A)=1 \Longrightarrow c(A)=1$ e $i(A)=0$,

$$i(A)=\sum_1^n i_A(\alpha_i)P(\alpha_i)=0 \Longrightarrow i_A(\alpha_o)=0,$$

por tanto, aplicando el lema 1, se tiene el resultado.□

En sistemas discretos como el de la proposición 2.2 los elementos de información máxima no son singletons en general, pero el sistema Y detecta a A como un singleton, sin considerar lo que pasa debajo del menor nivel de comparación, con lo que afectos del sistema Y, A es un singleton.

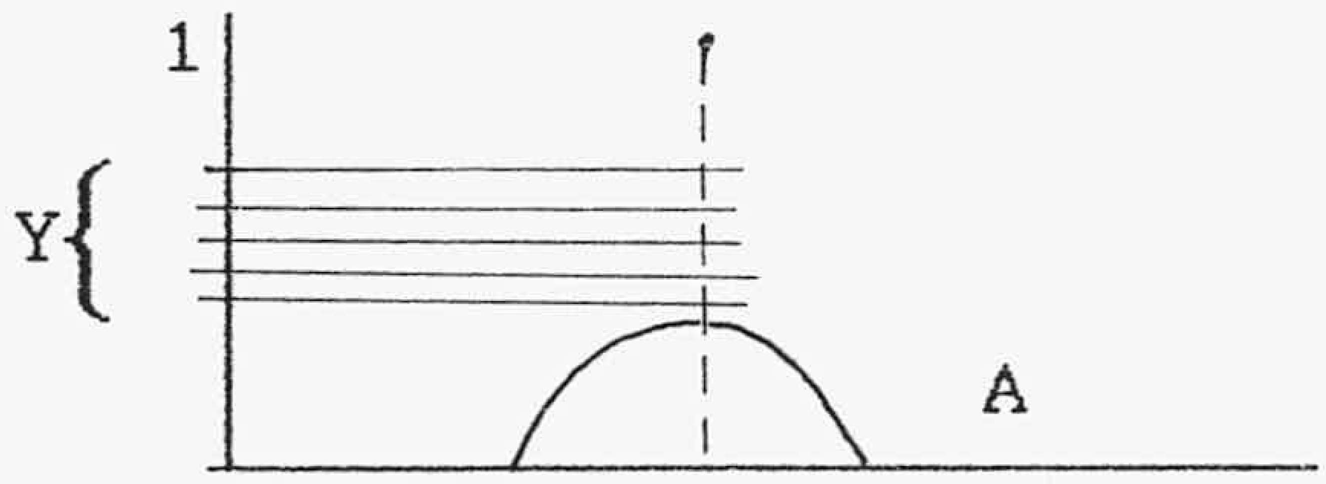



figura 3. Y detecta a A como un singleton.

En definitiva, en los casos frecuentes de elección de (Y,P) los elementos de información máxima con $I_o$, o son números reales, o a efectos prácticos pueden considerarse como tales.

Ejemplo 2.

Considerando números difusos triangulares del tipo

$$A=\{(m_1,m_2,a,b),\alpha_A\}$$

veamos la forma de la función $I_o$.

a) Sea Y=[0,1] y P la medida de Lebesgue, entonces

$$I_o(A)=\frac{\alpha_A}{\alpha_A(i_A(0)+i_A(\alpha_A))1/2\ +1}$$

con $i_A(0)=m_2-m_1+a+b$, $i_A(\alpha_A)=m_2-m_1$.

Para el caso particular

$$A=\langle (3,3,1,2),\ 0.75\rangle$$

$$I_o(A)=\frac{0.75}{1.125+1}=0.35.$$

b) Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ / $\alpha_i\in[0,1]$ $\forall i=1\ldots n$ y P una distribución de probabilidad asociada.

$$Y\cap[0,\alpha_A]=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_A}\}$$

si denominamos

$$p_A=\sum_1^{j_A} P(\alpha_i) \text{ y } \bar{\alpha}_A=\sum_1^{j_A} \alpha_i P(\alpha_i)$$

entonces

$$I_o(A)=\frac{\alpha_A}{i_A(0)[p_A-\bar{\alpha}_A/\alpha_A]+i_A(\alpha_A)\bar{\alpha}_A/\alpha_A+1}$$

Para el caso particular anterior, con

$$Y=\langle 0,0.25,0.50,0.75,1\rangle$$

$$P=\langle 0.1,0.2,0.4,0.2,0.1\rangle$$

$$I_o(A)=\frac{0.75}{1.1+1}=0.36.$$

2.1.2 Estudiamos ahora el comportamiento límite de la función $I_o$ en distintos casos extremos, comprobando su buen funcionamiento en todos ellos.

<u>Proposición 2.3</u>

Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\langle c(A_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_o(A_n)=0.$$

<u>Demostración</u>.

Como $0\le I_o(A_n)\le c(A_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} c(A_n)=0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} I_o(A_n)=0.$ □

<u>Proposición 2.4</u>

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\langle i(A_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_o(A_n)=0.$$

Demostración.

Como $0\leq I_o(A_n)= \dfrac{c(A_n)}{i(A_n)+1} \leq \dfrac{1}{i(A_n)+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{i(A_n)+1}=0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} I_o(A_n)=0.\square$

Proposición 2.5

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{i(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero y $\{c(A_n)\}$ converge a $\alpha\in[0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_o(A_n)=\alpha.$$

Demostrración.

evidente.$\square$

En cualquier caso, un crecimiento de imprecisión o decrecimiento de certidumbre hace disminuir la información.

2.1 LA FUNCION $I_1$.

2.2.1 Si consideramos la función

$$f_1:(0,1]\times\mathbb{R}_o^+\longrightarrow[0,1]$$

$$f_1(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y}$$

verifica trivialmente las condiciones de la proposición 1.1, y permite hacer la siguiente definición

Definición 2.2

Definimos la función

$$I_1:\underset{\sim}{\mathbb{R}}\longrightarrow[0,1]$$

$$\forall A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}} \qquad I_1(A)=\frac{c(A)^2}{c(A)^2+i(A)}$$

en donde c(A) es la altura del número difuso A, e i(A) es la imprecisión de A, asociada a un conjunto $Y\in\mathcal{P}([0,1])$ y a una distribución de probabilidad P. Por la proposición 1.1, $I_1$ es una información sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.

Los números difusos de información máxima respecto de $I_1$ ($\equiv I_1(A)=1$) deben tener exclusivamente imprecisión nula ($\equiv i(A)=0$) sin restricción sobre su altura. De hecho, los singletons de altura menor que uno son totalmente informativos respecto de $I_1$, a diferencia de lo que sucede con la información $I_0$. Esta forma de actuar de $I_1$, impide que este tipo de números difusos sean transformables, como posteriormente veremos, y es adecuado para modelos en los que la incertidumbre del singleton no es modificable mediante un aumento de imprecisión.

Ejemplo 3.

El símbolo de escritura "7" puede escribirse como el número difuso de la fig.4.

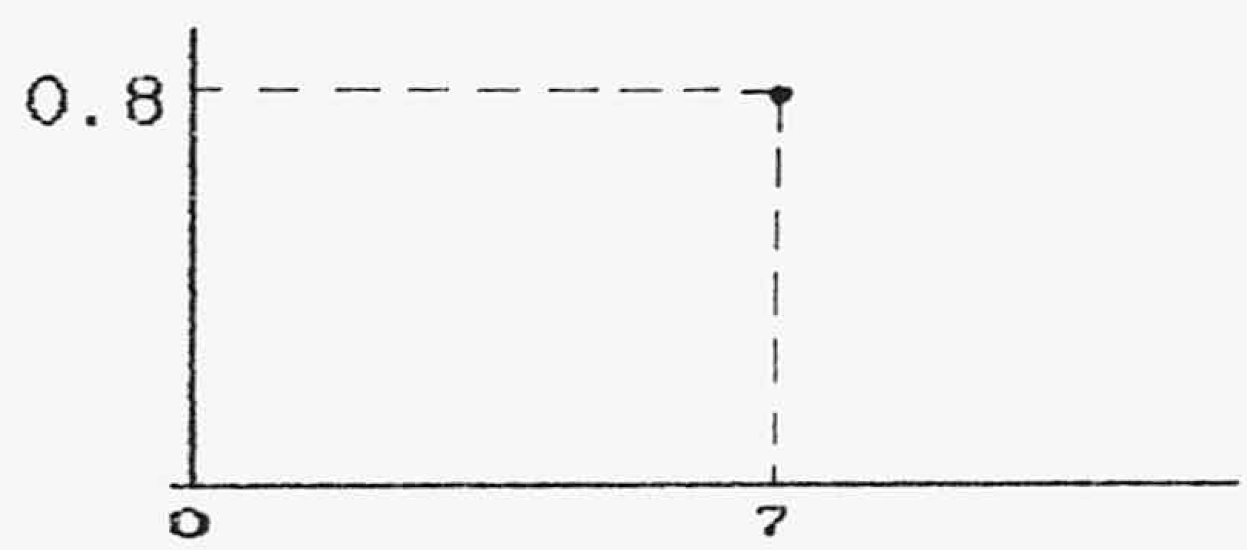



figura 4. Representación de "7".

Y no es admisible que aumentemos nuestra certeza pensando que el símbolo "7" es "aproximadamente 7".

Estudiamos ahora la forma general de los números difusos de información máxima respecto de $I_1$ sobre los dos casos tradicionalmente estudiados.

Proposición 2.6

Sea Y=[0,1] y como medida asociada la de Lebesgue, entonces

$$I_1(A)=1 \Leftrightarrow A \text{ es un singleton.}$$

Demostración.

Sólo tenemos que probar la condición necesaria, ya que la suficiente es evidente. Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ / $I_1(A)=1$, entonces $i(A)=0$, de donde, como en la proposición 2.1

$$i_A(\alpha)=0 \ \forall\alpha\in(0,\alpha_A]$$

y A es un singleton.□

En el caso considerado, los únicos números difusos de información máxima son los singletons. Cuando el sistema de comparación es finito, los números difusos de información máxima son singletons sobre el sistema de comparación.

Proposición 2.7

Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, sea, $\alpha_0=\min\{\alpha_i/ \ i=1\ldots n\}$, y sea P una distribución de probabilidad tal que al menos $P(\alpha_0)\neq0$, entonces

$$I_1(A)=1 \implies i_A(\alpha)=0 \ \forall\alpha\geq\alpha_0.$$

Demostración.

Como $I_1(A)=1 \implies i(A)=0$,

$$i(A)=\sum_{1}^{j_A} i_A(\alpha_i)P(\alpha_i)=0 \implies i_A(\alpha_0)=0,$$

por tanto, aplicando el lema 1, se tiene el resultado.□

En sistemas discretos los elementos de informaciom máxima no son singletons en general, pero si lo son por encima del menor nivel de comparación, ignorando el sistema lo que pasa por debajo. Cuando $0\in Y$, entonces los números difusos de información máxima coinciden con los singletons. En definitiva, los elementos de información máxima con $I_1$, o son singletons o pueden considerarse como tales a efectos prácticos.

Ejemplo 4.

Considerando números difusos triangulares del tipo

$$A=\langle(m_1,m_2,a,b),\ \alpha_A\rangle$$

veamos la forma de la función $I_1$.

a) Sea $Y=[0,1]$ y P la medida de Lebesgue, entonces

$$I_1(A)=\frac{\alpha_A}{\alpha_A+(i_A(0)+i_A(\alpha_A))/2}$$

en donde $i_A(0)$ e $i_A(\alpha_A)$ toman los mismos valores que en el ejemplo 2; para el mismo caso particular considerado allí, $A=\langle(3,3,1,2),0.75\rangle$, se tiene $I_1(A)=0.33$.

b) Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ / $\alpha_i\in[0,1]$ $\forall i=1\ldots n$ y P una distribución de probabilidad asociada. Entonces

$$I_1(A)=\frac{\alpha_A^2}{\alpha_A^2+i_A(0)[p_A-\bar{\alpha}_A/\alpha_A]+i_A(\alpha_A)\bar{\alpha}_A/\alpha_A}$$

con $p_A$ y $\bar{\alpha}_A$ definidos en el ejemplo2.

Para el caso particular anterior con el sistema Y y distribución P del ejemplo 2, se tiene $I_1(A)=0.34$.

2.2.2 Estudiamos ahora el comportamiento límite de la función $I_1$, en distintos casos extremos comprobando su buen funcionamiento en todos ellos.

<u>Proposición 2.8</u>

Sea $\langle A_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\langle c(A_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, y la sucesión $\langle i(A_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número distinto de cero, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_1(A_n)=0.$$

<u>Demostración</u>.

$$I_1(A_n)=\frac{c(A_n)^2}{c(A_n)^2+i(A_n)}=\frac{1}{1+\dfrac{i(A_n)}{c(A_n)^2}}$$

Como la sucesión $\left\{\dfrac{i(A_n)}{c(A_n)^2}\right\}$ diverge a $+\infty$, queda demostrada la proposición.□

Proposición 2.9

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{i(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_1(A_n)=0.$$

Demostración.

Como $0\leq I_1(A)\leq\frac{1}{i(A_n)}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{i(A_n)}=0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} I_1(A_n)=0.\square$

Proposición 2.10

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{i(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero y $\{c(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha\in[0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_1(A_n)=1.$$

Demostración.

evidente.$\square$

En cualquier caso, un crecimiento de imprecisión o decrecimiento de certidumbre hace disminuir la información.

## 2.3 LA FUNCION $I_2$.

2.3.1 Definimos la función de información $I_2$ como una ponderación sobre distintos $\alpha$-cortes del número difuso, de la función de información $I_0$. Para ello restringiremos la información $I_0$ al conjunto $\mathcal{K}$ de intervalos cerrados, considerándolos como números difusos de altura máxima e imprecisión constante sobre cada nivel.

$$I_0(S)=I_1(S)=\frac{1}{s-r+1} \ / \ S=[r,s] \quad r,s\in\mathbb{R}.$$

Los intervalos cerrados, a pesar de ser conjuntos nítidos, no tienen información máxima ya que son representaciones imprecisas de una cantidad.

Definición 2.3

Sea $Y\in\mathcal{P}([0,1])$ y P una distribución de probabilidad asociada. Definimos la función

$$I_2:\underset{\sim}{\mathbb{R}}\longrightarrow[0,1]$$

$$I_2(A)=\int_{Y\cap[0,c(A)]} I_o(A_\alpha)dP(\alpha) \qquad \forall A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}.$$

Evidentemente $I_2(A)$ toma la forma

$$I_2(A)=\int_{Y\cap[0,c(A)]} (1+i_A(\alpha))^{-1}dP(\alpha),$$

lo que permite verla como una f-información promedio.

Proposición 2.11

$I_2$ es una información sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.

Demostración.

Si definimos la función

$$f_2:(0,1]\times\mathbb{R}_o^+\longrightarrow[0,1] \ / \ f_2(x,y)=\frac{1}{1+y}$$

entonces $I_2(A)=I'_{f_2}(A)$, y como $f_2$ verifica las condiciones de la proposición 1.1., entonces $I_2$ es una f-información promedio, y por tanto una información sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.□

Los elementos de información máxima con $I_2$, análogamente al caso de $I_o$ e $I_1$, no son tan sólo los números reales, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.

Tomando $Y=[0,1]$ y P la distribución degenerada en $\alpha\in[0,1]$, entonces cualquier número difuso unimodal de altura $\alpha$ es de información máxima.

Considerando los casos anteriores de elección del par (Y,P) en las otras funciones de información, estudiamos a continuación los elementos de información máxima con $I_2$.

Proposición 2.12

Sea Y=[0,1] y como medida asociada la de Lebesgue, entonces

$$I_2(A)=1 \Leftrightarrow A\in \mathbb{R}.$$

Demostración.

Sólo tenemos que probar la condición necesaria, para ello consideremos $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ / $I_2(A)=1$.

$$I_2(A)=\int_0^{c(A)} \frac{1}{i_A(\alpha)+1}\, d\alpha = 1 = \frac{1}{c(A)}\int_0^{c(A)} d\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_0^{c(A)} \frac{i_A(\alpha)+1-c(A)}{c(A)(i_A(\alpha)+1)}\, d\alpha = 0,$$

como

$$c(A) \leq 1 \leq i_A(\alpha)+1 \Longrightarrow i_A(\alpha)+1-c(A) \geq 0$$

de donde

$$i_A(\alpha)+1-c(A)=0 \ \forall\alpha\in[0,c(A)]$$

salvo quizás en un conjunto numerable. Con lo que

$$c(A)=1 \text{ e } i_A(\alpha)=0 \ \forall\alpha\in[0,1]$$

salvo quizás en un conjunto numerable. Y por consideraciones análogas a las dadas en la proposición 2.1 concluimos que A es un singleton de altura máxima.□

Proposición 2.13

Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, sean $\alpha_0=\min\{\alpha_i/i=1\ldots n\}$, $\alpha^0=\max\{\alpha_i/i=1\ldots n\}$, y sea P una distribución de probabilidad tal que al menos $p(\alpha_0)\neq 0$, entonces

$$I_2(A)=1 \Longrightarrow c(A) \geq \alpha^0 \text{ e } i_A(\alpha)=0 \ \forall\alpha\geq\alpha_0.$$

Demostración.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}$ / $I_2(A)=1$ y sea $Y\cap[0,c(A)]=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j_A}\}$

$$I_2(A)= \sum_1^{j_A} \frac{P(\alpha_i)}{i_A(\alpha_i)+1} = 1 = \sum_1^{j_A} P(\alpha_i)\frac{1}{p_A}$$

llamando $p_A=\sum_1^{j_A} P(\alpha_i)\in(0,1]$,

entonces

$$\sum_{1}^{j_A} P(\alpha_i)\left[\frac{1+i_A(\alpha_i)-p_A}{p_A(i_A(\alpha_i)+1)}\right]=0$$

como

$$p_A \le 1 \le i_A(\alpha_i)+1 \ \forall i=1...n \Longrightarrow 1+i_A(\alpha_i)-p_A \ge 0 \ \forall i=1...n$$

de donde al menos

$$1-i_A(\alpha_o)-p_A=0$$

por tanto

$$p_A=1 \text{ e } i_A(\alpha_o)=0,$$

y por el lema 1

$$\alpha_{j_A}=\alpha^o \Longrightarrow Y\cap[0,c(A)]=Y \Longrightarrow c(A) \ge \alpha^o$$

$$i_A(\alpha)=0 \ \forall\alpha \ge \alpha_o.\square$$

Análogamente a lo sucedido con $I_o$, los elementos de información máxima con $I_2$ en sistemas discretos no tienen por qué ser números reales, pero en los niveles de acción del sistema Y si deben serlo.

Ejemplo 6.

Consideremos números difusos triangulares del tipo

$$A=\langle(m_1,m_2,a,b),\ \alpha_A\rangle$$

y veamos la forma de la función $I_2$ sobre los pares (Y,P) habituales.

a) Sea Y=[0,1] y P la medida de Lebesgue, entonces

$$I_2(A)=\frac{\alpha_A}{i_A(0)-i_A(\alpha_A)}\ln\left[\frac{i_A(0)+1}{i_A(\alpha_A)+1}\right] \quad \text{si } i_A(\alpha)\neq cts \ \forall\alpha\in[0,\alpha_A]$$

$$=\frac{\alpha_A}{i_A(\alpha_A)+1} \quad \text{si } i_A(\alpha)=cts \ \forall\alpha\in[0,\alpha_A].$$

b) Sea $Y=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ / $\alpha_i\in[0,1]$ $\forall i=1...n$ y P una distribución de probabilidad asociada. Entonces

$$I_2(A)=\sum_{1}^{j_A}\frac{P(\alpha_i)}{i_A(0)(1-\alpha_i/\alpha_A)+i_A(\alpha_A)\alpha_i/\alpha_A+1}$$

A diferencia de las funciones $I_o$ e $I_1$, la información $I_2$ es bastante más compleja en el cálculo, y definir transformaciones que la conserven conlleva resolver unas ecuaciones en cada punto. Por ello, no hemos desarrollado para $I_2$ transformaciones sobre números difusos.

2.3.2 Estudiamos ahora el comportamiento límite de la función $I_2$ en distintos casos extremos, considerando en todos los siguientes resultados sistemas finitos o el sistema formado por el intervalo unidad y la medida de Lebesgue.

Proposición 2.14

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{c(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_2(A_n)=0.$$

Demostración.

Consideremos $f_n(\alpha)=\frac{1}{i_A(\alpha)+1}\cdot I_{[0,c(A_n)]}(\alpha)$, con $I_{[0,c(A_n)]}$ la función indicadora del intervalo $[0,c(A_n)]$.

$$I_2(A)=\int_Y f_n(\alpha)dP(\alpha)$$

Como

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\alpha\in Y\ |f_n(\alpha)|\leq 1,\ \lim_{n\to\infty} c(A_n)=0 \text{ y } 0\leq f_n(\alpha)\leq I_{[0,c(A_n)]}(\alpha)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha)=0\ \forall\alpha\in Y,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(\alpha)dP(\alpha)=0,$$

aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para $Y=[0,1]$, y siendo evidente con Y finito.□

Proposición 2.15

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{i_{A_n}(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$, diverge a $+\infty$, $\forall\alpha\in Y$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_2(A_n)=0.$$

Demostración.

Cuando $\{i_{A_n}(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$, $\forall\alpha\in Y$, $\{f_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, con $f_n(\alpha)$ definida en la proposición anterior. Por tanto, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para $Y=[0,1]$ se tiene el resultado, y para Y finito es evidente.□

Proposición 2.16

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{i_{A_n}(\alpha))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero $\forall\alpha\in Y$, y $\{c(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\beta\in[0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_2(A_n)=P(Y\cap[0,\beta]).$$

Demostración.

Con la función $f_n(\alpha)$ definida en la proposición 2.14 y bajo las condiciones de esta proposición se verifica

$$\{f_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow I_{[0,\beta]}(\alpha)$$

y aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene el resultado con $Y=[0,1]$, siendo inmediato con Y discreto.□

Corolario.

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$, tales que la sucesión $\{i_{A_n}(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero $\forall\alpha\in Y=[0,1]$ (con P la medida de Lebesgue sobre el intervalo unidad), y $\{c(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\beta\in[0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} I_2(A_n)=\beta.$$

Demostración.

inmediata.□

El comportamiento límite de la información $I_2$ sobre los sistemas de comparación considerados es semejante al de $I_0$ e $I_1$, salvo en la necesidad de convergencia puntual en la imprecisión, condición más fuerte que la convergencia global. En cualquier caso el funcionamiento es adecuado.

Ejemplo 7.

Consideramos la siguiente sucesión de números difusos triangulares

$$A_n=\{(a,a,1/n,1/n),\alpha_n\} \qquad n\geq 1,\ a\in\mathbb{R},$$

y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=\alpha$ (ver fig.5),

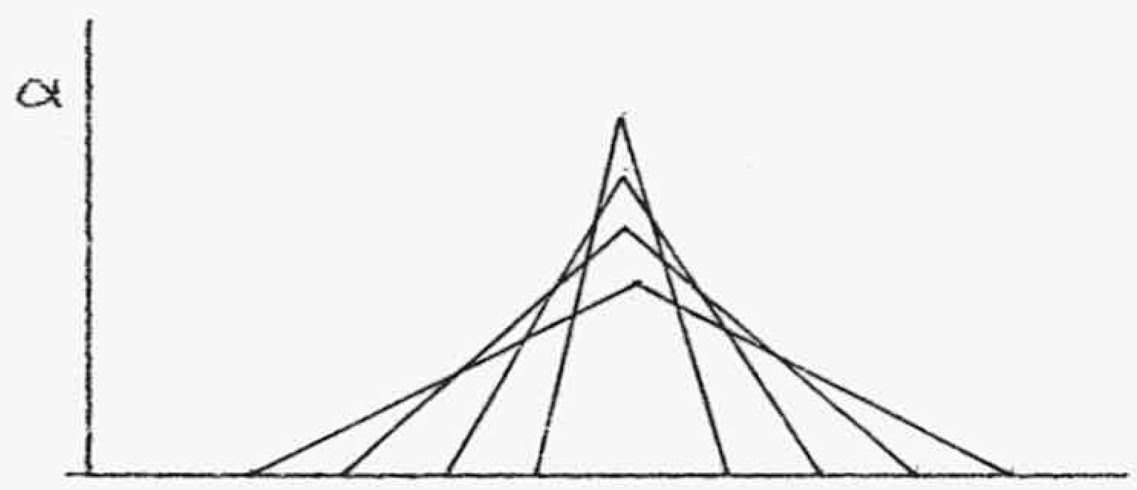



figura 5. Representación de la sucesión $\{A_n\}$.

veamos la forma de $I_0$, $I_1$ e $I_2$ sobre los elementos de esta sucesión.

$$I_0(A_n)=\frac{\alpha_n}{\alpha_n/n+1}$$

$$I_1(A_n)=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\frac{1}{n}}$$

$$I_2(A_n)=\frac{n\alpha_n}{2}\ln\left(\frac{2}{n}+1\right)$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} I_0(A_n)=\lim_{n\to\infty} I_2(A_n)=\alpha \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} I_1(A_n)=1.$$

# 3. TRANSFORMACIONES SOBRE NUMEROS DIFUSOS.

## 3.1 PLANTEAMIENTO.

El propósito al definir transformaciones es básicamente el de poder modificar la altura de una cantidad difusa. En el capítulo anterior para la construcción de sistemas proporcionales sobre cantidades difusas CD2, en los índices de comparación NIS, era necesario que todas las cantidades tuviesen la misma altura. Es por esto, que la definición de tranformaciones que modifiquen la altura, conservando la información básica, es un complemento necesario para la aplicación de los índices de comparación NIS.

De cualquier forma, y no sólo en el problema de comparación, parece conveniente en un procedimiento concreto el utilizar cantidades difusas con un mismo nivel de incertidumbre en su representación, es decir, cantidades difusas de la misma altura, y en particular normalizadas.

Dada una cantidad difusa, una transformación sobre ella, generará otra cantidad difusa con igual información y distinta altura. Por tanto, para definir transformaciones exigiremos la conservación de una función de información; es decir, modificaremos la certidumbre y la imprecisión de una cantidad difusa manteniendo constante la relación certidumbre-imprecisión que define a la información.

De las tres funciones de información estudiadas en el apartado anterior, trabajaremos con $I_0$ e $I_1$. La función $I_2$, como ya comentamos en el ejemplo 6, proporciona unas expresiones muy complicadas que no nos han permitido definir transformaciones bajo la condición de conservación de la información. Con respecto a $I_0$ y a $I_1$, estudiaremos transformaciones sobre cada una de ellas, ya que si bien ambas presentan análogas propiedades generales, la primera funciona mejor en la comparación a distintas alturas y la segunda ante un cambio de escala.

Puesto que la definición de transformación se deducirá a partir de la condición de igualdad de la información, en primer lugar consideraremos números difusos triangulares, cuya función de pertenencia es conocida y cómoda de manejar, y posteriormente a partir de lo obtenido en triangulares extenderemos los resultados a números difusos continuos generales. Posteriormente veremos como esta extensión presenta una forma común para la transformación que conserva a $I_0$ y la que conserva a $I_1$. En todos los casos, para definir la función de imprecisión $i(\cdot)$ consideraremos el sistema $Y=[0,1]$ y como medida asociada la de Lebesgue.

Como paso previo a la definición de transformación, necesitamos primero establecer qué vamos a entender por transformación de una cantidad difusa sobre un subconjunto de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$.

<u>Definición 3.1</u>

Dado $\alpha\in(0,1]$ y la clase de números difusos $\mathcal{D}\subseteq \underset{\sim}{\mathbb{R}}$, diremos que la correspondencia

$$F_\alpha:\mathcal{D}\longrightarrow\underset{\sim}{\mathbb{R}}$$

es una **transformación**, bajo la función de información I sobre $\mathcal{D}$, si verifica que de existir $F_\alpha(A)$:

$$\text{i) } F_\alpha(A)\in\mathcal{D}$$

$$\text{ii) } c(F_\alpha(A))=\alpha$$

$$\text{iii) } I(F_\alpha(A))=I(A) \quad \forall A\in\mathcal{D}.$$

De este modo, para un nivel de altura $\alpha$, el transformado de un número difuso no tiene por qué existir, pero si existe ha de verificar las condiciones anteriores.

Definición 3.2

Dada la transformación $F_\alpha$, diremos que $A\in\mathcal{D}$ es **transformable** para $\alpha\in(0,1]$ si existe $F_\alpha(A)$.

Notaremos por

$$H(A)=\{\alpha\in(0,1] \ / \ \exists F_\alpha(A)\}$$

al conjunto de niveles en donde A es transformable.

Nuestro propósito es definir transformaciones y obtener para cada número difuso H(A).

## 3.2 TRANSFORMACIONES QUE CONSERVAN $I_0$.

### 3.2.1 Caso de números difusos triangulares.

Dado un número difuso triangular A, al que para incluir los singletons consideraremos de holguras mayores o iguales a cero, vamos a buscar condiciones para que otro número difuso triangular de altura $\alpha\in(0,1]$, fijada con antelación, tenga la misma información que A. $\mathcal{T}$ notará al conjunto de números difusos triangulares.

Proposición 3.1

Sean $A,B\in\mathcal{T}$ con alturas respectivas $\alpha_A$ y $\alpha_B$, entonces

$$I_0(A)=I_0(B) \iff i_B(0)+i_B(\alpha_B)=i_A(0)+i_A(\alpha_A)+2\Delta(\alpha_A,\alpha_B)$$

con $\Delta(\alpha_A,\alpha_B)=\dfrac{\alpha_B-\alpha_A}{\alpha_A\alpha_B}$.

Demostración.

evidente.□

Es decir, que la suma de la imprecisión base y modal debe modificarse mediante el valor de $2\Delta(\alpha_A,\alpha_B)$, para que A pueda ser modificado a un número difuso B de altura fijada. Además, si pretendemos subir la altura de A ($\alpha_A > \alpha_B$), entonces $\Delta(\alpha_A, \alpha_B)$ es positivo y la imprecisión suma de la base y modal en B debe aumentar, por el contrario, para bajar altura ($\alpha_B < \alpha_A$), como $\Delta(\alpha_A, \alpha_B)$ es negativo, esta imprecisión debe disminuir. Cuando se conserva la altura, es evidente que debe mantenerse la imprecisión. Así, la relación entre certidumbre e imprecisión permanece del siguiente modo:

- Un aumento de certidumbre significa una aumento de imprecisión.
- Una disminución de imprecisión significa una disminución de certidumbre.

La relación constante que permanece entre ambas es precisamente la información $I_0$.

La proposición 3.1 nos permite definir una transformación en la que supondremos que la imprecisión modal se conserva.

<u>Definición 3.3</u>

Sea $A \in \mathcal{T}$ tal que

$$A = \langle (m_1, m_2, a, b), \alpha_A \rangle$$

Sea $\alpha \in (0,1]$, notaremos $\Delta(\alpha_A, \alpha) = \Delta$, entonces definimos

$$T_\alpha(A) = \langle (m_1, m_2, a+\Delta, b+\Delta), \alpha \rangle$$

para aquellos $\alpha$ en los que tenga sentido.

<u>Proposición 3.2</u>

$T_\alpha$ es una transformación sobre el conjunto de números difusos triangulares $\mathcal{T}$.

<u>Demostración</u>.

Supongamos que existe $T_\alpha(A)$ para $\alpha \in (0,1]$, entonces evidentemente por la definición $T_\alpha(A) \in \mathcal{T}$, y $c(T_\alpha(A)) = \alpha$. Por otro lado

$$i_{T_\alpha(A)}(0) + i_{T_\alpha(A)}(\alpha) = i_A(0) + i_A(\alpha_A) + 2\Delta$$

de donde por la proposición 3.1, $I_o(A)=I_o(T_\alpha(A))$, lo que concluye la demostración.□

Definición 3.4

Dado el número difuso triangular $A=\{(m_1,m_2,a,b),\alpha_A\}$ se define el **límite inferior de tranformación**:

$$l(A)=\max\left\{\frac{\alpha_A}{a\alpha_A+1}, \frac{\alpha_A}{b\alpha_A+1}\right\}.$$

Puede demostrarse de forma inmediata que $l(A)$ es un número del intervalo unidad estrictamente positivo y menor o igual que la altura del número difuso A.

Proposición 3.3

$A\in\mathcal{T}$ es transformable $\Leftrightarrow \alpha \geq l(A)$.

Demostración.

$A\in\mathcal{T}$ es transformable $\Leftrightarrow \exists T_\alpha(A)$,

y evidentemente la existencia de $T_\alpha(A)$ es equivalente a que sus holguras sean positivas o nulas, ya que es la única restricción posible en la construcción del mismo. De donde

$$\left.\begin{array}{l} a+\Delta\geq 0 \\ b+\Delta\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha \geq l(A).\square$$

Por tanto la región de transformación es

$$H(A)=[l(A),1], \quad \text{con } A\in\mathcal{T}.$$

Como el límite inferior de transformación es menor o igual que la altura del número difuso, podemos afirmar que las transformaciones para subir la altura de una cantidad difusa siempre son posibles, por el contrario para bajar altura hay un nivel mínimo a partir del cual éstas no son posibles.

En la fig.6 representamos gráficamente el comportamiento de $T_\alpha(\cdot)$ cuando disminuimos altura, obligando a disminuir imprecisión. En la fig.7 se representa el fenómeno contrario de aumentar altura, aumentando obligatoriamente la imprecisión.

"La imprecisión y la incertidumbre pueden considerarse como dos puntos de vista antagónicos sobre una misma realidad que es la imperfección humana...", y " si se hace más preciso el contenido de una proposición, se tendrá que aumentar su incertidumbre" (Dubois [22]), esto, que es una forma de enunciar el principio de incompatibilidad entre certidumbre y precisión de Zadeh [80], refleja el comportamiento de la transformación

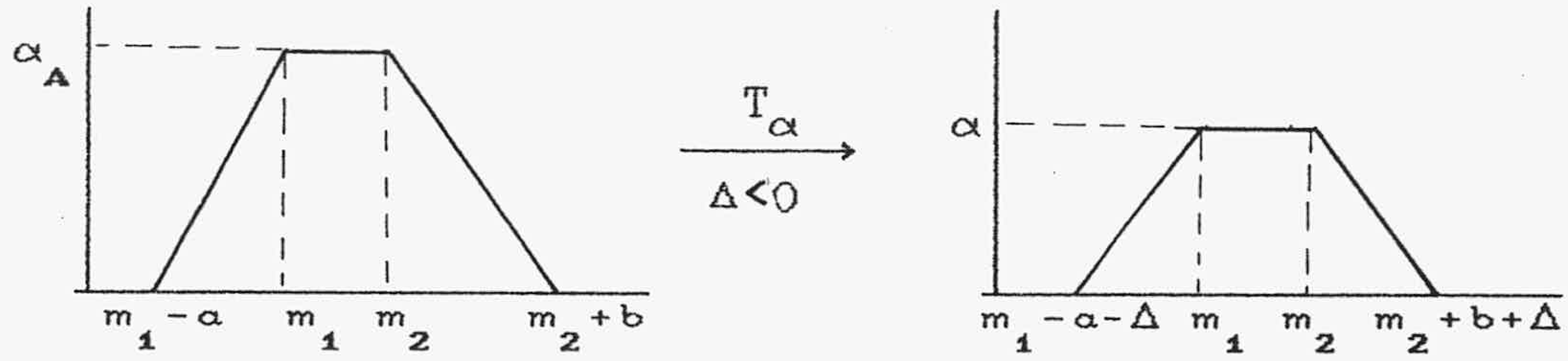



figura 6. Transformación que disminuye imprecisión.

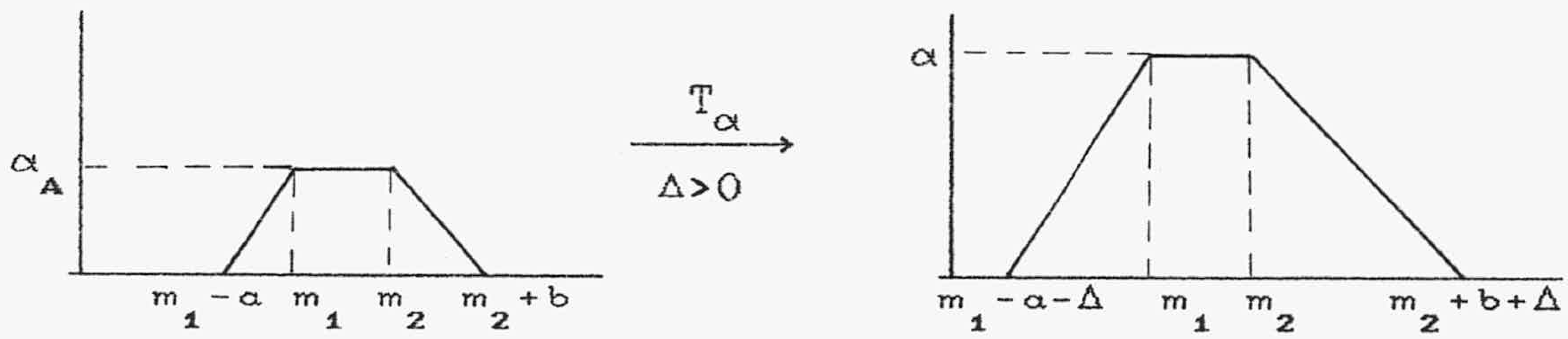



figura 7. Transformación que aumenta altura.

definida. Si consideramos como medida de imprecisión, sobre un número difuso A, a i(A), y como medida de incertidumbre a 1-c(A), el principio se enuncia:

- si decrece i(A) entonces decrece c(A),

o recíprocamente

- si crece c(A) entonces crece i(A).

Por tanto, la transformación se comporta según el principio de Zadeh, modificando incertidumbre e imprecisión.

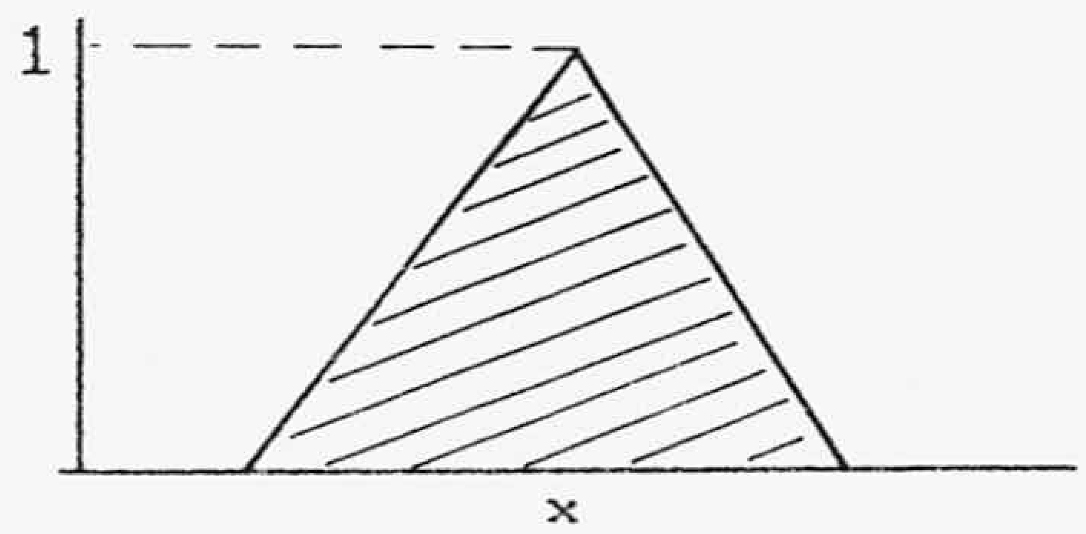
La función de información $I_0$ fija la relación constante entre imprecisión e incertidumbre y queda asociada a la proposición que representamos como una cantidad difusa.

Por otro lado, como la transformaciones que suben altura siempre son posibles (proposición 3.3), en cualquier caso podremos normalizar ($\alpha$=1) las cantidades difusas de trabajo. La normalización representa una pérdida de la incertidumbre, es decir, una seguridad sobre la validez de la representación difusa.

(a)


"creo que está aproximadamente a x km."

(b)




"está aproximadamente a x km."

figura 8. Incertidumbre e imprecisión sobre números difusos.

Proposición 3.4 (Propiedades de $T_\alpha(\cdot)$)

Sea $A \in \mathcal{T}$, entonces se verifica

i) $T_{c(A)}(A)=A$,

ii) $T_\alpha(T_\beta(A))=T_\alpha(A)$,

iii) $T_{c(A)}(T_\alpha(A))=A$, con $\alpha,\beta \in H(A)$.

Demostración.

Sea $A=\langle(m_1,m_2 a,b),\ c(A)\rangle$,

i) $T_{c(A)}(A)=\langle(m_1,m_2,a+0,b+0),\ c(A)\rangle=A$,

ii) $T_\beta(A)=\langle(m_1,m_2,a+\Delta(c(A),\beta),b+\Delta(c(A),\beta)),\ \beta\rangle$

$T_\alpha(T_\beta(A))=\langle(m_1,m_2,a+\Delta(c(A),\beta)+\Delta(\beta,\alpha),b+\Delta(c(A),\beta)+\Delta(\beta,\alpha)),\alpha\rangle$, y como

$$\Delta(c(A),\beta)+\Delta(\beta,\alpha)=\Delta(c(A),\alpha)$$

entonces $T_\alpha(T_\beta(A))=T_\alpha(A)$,

iii) evidente de i) y ii).□

Interpretamos estas propiedades como una coherencia en la transformación, manteniendo ésta una mínima estructura lógica en la combinación de la función de transformación reiteradas veces.

3.2.2 Caso de números difusos continuos.

A partir de las transformaciones definidas sobre el conjunto de números difusos triangulares $\mathcal{T}$, extendemos esta transformación al conjunto de números difusos continuos (es decir, aquellos que tienen función de pertenencia continua) cuyo conjunto notamos por $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$. Como función de información seguimos considerando a $I_0$, y sobre la función imprecisión $i(\cdot)$ el sistema [0,1] y la medida de Lebesgue. Exigiremos a la transformación, de forma semejante al caso triangular, la conservación de los valores modales.

La forma general de los elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ es:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} r_A(x) & \text{si } x\in[m_1-a,m_1) \\ \alpha_A & \text{si } x\in[m_1,m_2] \\ s_A(x) & \text{si } x\in(m_2,m_2+b] \end{cases}$$

y $\mu_A(x)=0$ en otro caso. Con $m_1,m_2\in\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}^+$, $m_1\leq m_2$, $\alpha_A\in(0,1]$; $r_A$ no decreciente, $s_A$ no creciente, ambas valuadas en el intervalo [0,1], con $r_A(m_1)=s_A(m_2)=\alpha_A$ y $r_A(m_1-a)=s_A(m_2+b)=0$. Siendo $\mu_A$ una función continua (ver fig.9).

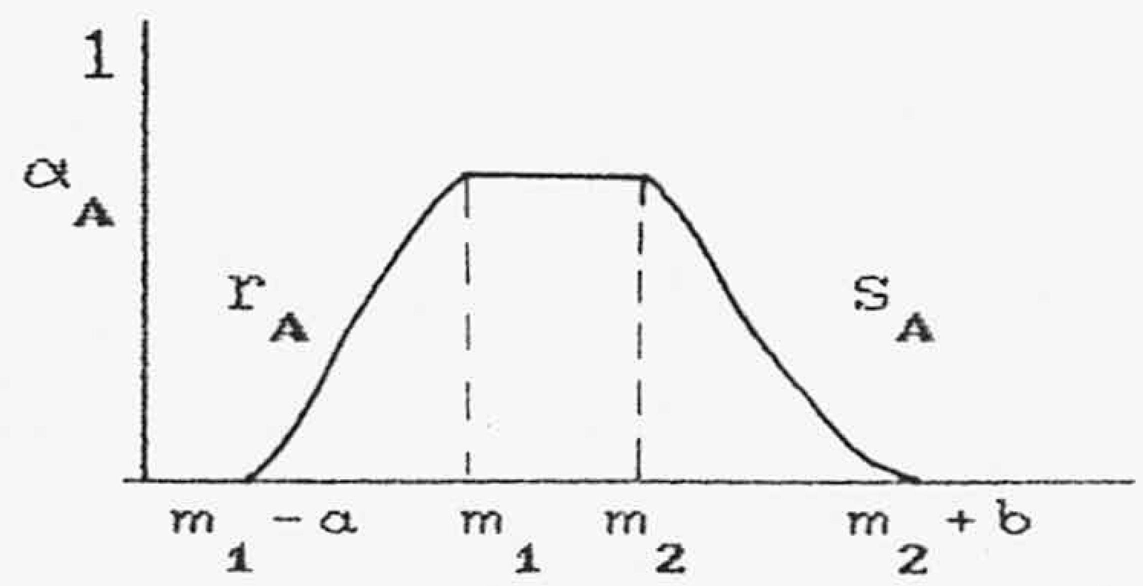



figura 9. Representación general de un elemento de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.

Para definir la transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, definimos en primer lugar una función, que denominamos transformadora, que aunque su forma parezca extraña viene dada a partir de la transformación sobre $\mathcal{T}$. Esta función permitirá conocer los números difusos continuos transformables, y construir así mismo la transformación. En este caso, el proceso será el inverso al dado para números difusos triangulares, ya que en primer lugar se define el conjunto de transformables y sobre él, posteriormente se define la transformación.

Definición 3.5

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, se define la **función transformadora** de A en $\alpha \in (0,1]$ del siguiente modo

$$\varphi_A^\alpha : \overline{\text{sop } A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_A^\alpha(x) = \begin{cases} x-(1-r_A(x)/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha) & \text{en } x\in[m_1-a, m_1) \\ x & \text{en } x\in[m_1, m_2] \\ x+(1-s_A(x)/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha) & \text{en } x\in(m_2, m_2+b]. \end{cases}$$

Estudiamos ahora propiedades de la función transformadora.

Proposición 3.5

La función transformadora de $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ para $\alpha \in (0,1]$, $\varphi_A^\alpha$, es una función continua.

Demostración.

evidente.□

Definiremos la transformación a partir de la inversa de la función transformadora, por tanto definiremos los elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ transformables como aquellos para los que existe dicha inversa.

Definición 3.6

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, definimos el conjunto

$$H^*(A) = \{ \alpha \in (0,1] \;/\; \varphi_A^\alpha \text{ es inyectiva y } \alpha > l(A) \}$$

en donde $l(A)$ es el límite inferior de transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$

$$l(A)=\max\left\{\frac{\alpha_A}{a\alpha_A+1},\ \frac{\alpha_A}{b\alpha_A+1}\right\}.$$

Sobre este conjunto definiremos las trasformaciones, y posteriormente demostraremos que coincide con $H(A)$, es decir, con el conjunto de niveles en donde A es transformable. $H^*(A)$ siempre es no vacio, puesto que al menos $\alpha_A \in H^*(A)$.

<u>Proposición 3.6</u>

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha \in H^*(A) \Longrightarrow \varphi_A^\alpha$ es creciente.

<u>Demostración</u>.

Como $\alpha \in H^*(A) \Longrightarrow \varphi_A^\alpha$ es inyectiva.

Además, $\varphi_A^\alpha$ es continua $\Longrightarrow$ $\varphi_A^\alpha$ es creciente o decreciente. Las condiciones

$$\varphi_A^\alpha(m_1-a) \le \varphi_A^\alpha(m_1) \iff \Delta \ge -a$$
$$\varphi_A^\alpha(m_2) \le \varphi_A^\alpha(m_2+b) \iff \Delta \ge -b$$

son ciertas, puesto que $\alpha > l(A)$, por tanto $\varphi_A^\alpha$ es creciente en algunos puntos, no puede ser decreciente y obligatoriamente es creciente.□

<u>Definición 3.7</u>

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha \in H^*(A)$, se define

$$T_\alpha : \underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \longrightarrow \mathcal{P}(\underset{\sim}{\mathbb{R}})$$

en donde $T_\alpha(A)$ tiene por función de pertenencia a

$$\mu_{T_\alpha(A)}(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha_A}\,\mu_A\left((\varphi_A^\alpha)^{-1}(x)\right) & \text{en } x\in[m_1-a-\Delta, m_2+b+\Delta] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $\Delta=\Delta(\alpha_A,\alpha)$, y $(\varphi_A^\alpha)^{-1}$ la función inversa de la transformadora que existe ya que $\alpha \in H^*(A)$.

Cuando $\alpha=\alpha_A$, queda $\mu_{T_\alpha(A)}(x)=\mu_A(x)$, y $\Delta=0$.

Nota.

Se ha notado a la transformación de la misma forma que la dada en triangulares, ya que como veremos posteriormente, ésta es una extensión de aquella.

Lema 1.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H^*(A) \Longrightarrow T_\alpha(A)\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.

Demostración.

Calculemos el $\beta$-corte de $T_\alpha(A)$

$(T_\alpha(A))_\beta=\{ x\in \mathbb{R} \ / \ \mu_{T_\alpha(A)}(x)\geq\beta\} =\{ x\in \mathbb{R} \ / \ \mu_A((\varphi_A^\alpha)^{-1}(x))\geq \alpha_A\beta/\alpha\}$

Llamamos $\gamma=\alpha_A\beta/\alpha \in[0,\alpha_A]$, con $\beta\in[0,\alpha]$. Así

$$(T_\alpha(A))_\beta=\{ x\in \mathbb{R} \ / \ (\varphi_A^\alpha)^{-1}(x)=y,\quad \mu_A(y)\geq\gamma\} =$$

$=\{ x\in \mathbb{R} \ / \ \varphi_A^\alpha(y)=x,\ \mu_A(y)\geq\gamma \} =\{ \varphi_A^\alpha(y)=x \ / \ \mu_A(y)\geq\gamma\} = \varphi_A^\alpha(A_\gamma)$, en donde $A_\gamma$ es el $\gamma$-corte de A.

i) Como $A_\gamma$ es un intervalo y $\varphi_A^\alpha$ es continua $\Longrightarrow$ $\varphi_A^\alpha(A_\gamma)$ es un intervalo $\Longrightarrow$ $T_\alpha(A)$ tiene sus $\beta$-cortes convexos $\Longrightarrow$ $T_\alpha(A)$ es convexo.

ii) $sop(T_\alpha(A))=\varphi_A^\alpha(sop\ A)= (m_1-a-\Delta, m_2+b+\Delta)$, con lo que $T_\alpha(A)$ es de soporte acotado.

iii) $\varphi_A^\alpha:\overline{sop\ A}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua. Como $\overline{sop\ A}$ es compacto y $\exists(\varphi_A^\alpha)^{-1} \Longrightarrow (\varphi_A^\alpha)^{-1}$es continua en $\varphi_A^\alpha[m_1-a, m_2+b]=[m_1-a-\Delta, m_2+b+\Delta]$.

Como $\mu_{T_\alpha(A)}(x)=h_A\circ\mu_A\circ(\varphi_A^\alpha)^{-1}$, con $h_A(x)=\alpha x/\alpha_A$, y $h_A$, $\mu_A$ y $(\varphi_A^\alpha)^{-1}$ son continuas $\Longrightarrow$ $\mu_{T_\alpha(A)}$ es continua. Por tanto $T_\alpha(A)\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.□

Lema 2.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H^*(A) \Longrightarrow c(T_\alpha(A))=\alpha$.

Demostración.

$\mu_{T_\alpha(A)}(x)=\frac{\alpha}{\alpha_A}\mu_A((\varphi_A^\alpha)^{-1}(x))\leq\frac{\alpha}{\alpha_A} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mu_A((\varphi_A^\alpha)^{-1}(x))\leq \alpha$, de donde

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mu_{T_\alpha(A)}(x)\leq\alpha$$

y como con $x\in[m_1, m_2]$, $\mu_{T_\alpha(A)}(x)=\alpha$, entonces $c(T_\alpha(A))=\alpha$.□

Lema 3.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H^*(A) \Longrightarrow I_0(T_\alpha(A))=I_0(A)$.

Demostración.

Como $(T_\alpha(A))_\beta=\varphi_A^\alpha(A_\gamma)=[\varphi_A^\alpha(a_\gamma),\varphi_A^\alpha(b_\gamma)]$, con $\gamma=\beta\alpha_A/\alpha$ y $A_\gamma=[a_\gamma,b_\gamma]$, tenemos

$$i(T_\alpha(A))=\int_0^\alpha(\varphi_A^\alpha(b_\gamma)-\varphi_A^\alpha(a_\gamma))d\alpha=\int_0^{\alpha_A}(\varphi_A^\alpha(b_\gamma)-\varphi_A^\alpha(a_\gamma))\frac{\alpha}{\alpha_A}d\gamma=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha_A}\int_0^{\alpha_A}(b_\gamma-a_\gamma+2(1-\gamma/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha))d\gamma=\frac{\alpha}{\alpha_A}\,i(A)+2\Delta(\alpha_A,\alpha)\frac{\alpha}{\alpha_A}\int_0^{\alpha_A}(1-\gamma/\alpha_A)d\gamma=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha_A}\,i(A)+\frac{\alpha}{\alpha_A}-1.$$

Por tanto

$$I_0(T_\alpha(A)) = \frac{\alpha}{i(T_\alpha(A))+1} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha_A}(i(A)+1)} = \frac{\alpha_A}{i(A)+1} = I_0(A).\square$$

Proposición 3.7

$T_\alpha$ es una transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.

Demostración.

evidente por los lemas 1,2 y 3.□

Proposición 3.8

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, A es transformable en $\alpha\in(0,1] \Longleftrightarrow \alpha\in H^*(A)$.

Demostración.

A es transformable en $\alpha \Longleftrightarrow \exists T_\alpha(A) \Longleftrightarrow \exists(\varphi_A^\alpha)^{-1}$ y $\Delta>-a,\Delta>-b \Longleftrightarrow$ $\alpha\in H^*(A)$.□

En definitiva el conjunto de niveles en donde un número difuso continua es transformable coincide con $H^*(A)$, o de otra forma

$$H(A)=H^*(A).$$

Proposición 3.9

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \Longrightarrow [c(A),1] \subseteq H^*(A)$.

Demostración.

Sabemos que $c(A) \geq l(A)$. Sea $\alpha \in [c(A),1]$, veamos si $\varphi_A^\alpha$ es inyectiva. $r_A$ es no decreciente en $[m_1-a,m_1)$ y $s_A$ es no creciente en $(m_2,m_2+b]$. Sean $x,y \in [m_1-a,m_1)$ / $x<y \Longrightarrow r_A(x) \leq r_A(y)$, como $\alpha \geq c(A) \Longrightarrow \Delta(c(A),\alpha) \geq 0$, de donde

$$x-(1-r_A(x)/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha) < y-(1-r_A(y)/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha)$$

y $\varphi_A^\alpha(x) < \varphi_A^\alpha(y)$.

Sean $x,y \in (m_2,m_2+b]$ / $x<y \Longrightarrow s_A(y) \leq s_A(x)$, de donde

$$x+(1-s_A(x)/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha) < y+(1-s_A(y)/\alpha_A)\Delta(\alpha_A,\alpha)$$

y $\varphi_A^\alpha(x) < \varphi_A^\alpha(y)$.

Sobre $x,y \in [m_1,m_2]$ es evidente que si $x<y \Longrightarrow \varphi_A^\alpha(x) < \varphi_A^\alpha(y)$, y como $\varphi_A^\alpha$ es una función continua

$$\forall x,y \in [m_1-a,m_2+b],\ x<y \Longrightarrow \varphi_A^\alpha(x) < \varphi_A^\alpha(y)$$

y $\varphi_A^\alpha$ es inyectiva. Por lo tanto $\alpha \in H^*(A)$.□

Las transformaciones sobre números difusos continuos, para subir altura, siempre son posibles. En cambio, para bajar la altura no siempres podemos garantizarlo.

El siguiente resultado comprueba como la transformación definida conserva los valores modales.

Proposición 3.10

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha \in H^*(A)$, entonces $(T_\alpha(A))_\alpha = A_{\alpha_A}$.

Demostración.

Como $(T_\alpha(A))_\beta = \varphi_A^\alpha(A_\gamma)$ con $\gamma = \alpha_A \beta/\alpha$, entonces

$(T_\alpha(A))_\alpha = \varphi_A^\alpha(A_{\alpha_A}) = \varphi_A^\alpha([m_1,m_2]) = [m_1,m_2] = A_{\alpha_A}$.□

Proposición 3.11 (Propiedades de $T_\alpha(\cdot)$)

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, entonces se verifica

i) $T_{c(A)}(A)=A$,

ii) $T_\alpha(T_\beta(A))=T_\alpha(A)$,

iii) $T_{c(A)}(T_\alpha(A))=A$, con $\alpha,\beta\in H(A)$.

Demostración.

i) Como $\varphi_A^\alpha(x)=x \Longrightarrow \mu_{T_{c(A)}(A)}=\mu_A \Longrightarrow T_{c(A)}=A$.

ii) Sea $T_\beta(A)=B$

$$\mu_{T_\alpha(B)}(x)=\frac{\alpha}{\beta}\,\mu_B((\varphi_B^\alpha)^{-1}(x))=$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta}{c(A)}\,\mu_A(((\varphi_A^\beta)^{-1}((\varphi_B^\alpha)^{-1}(x))))=\frac{\alpha}{c(A)}\mu_A((\varphi_B^\alpha\circ\varphi_A^\beta)^{-1}(x)).$$

Veamos quien es $\varphi_B^\alpha\circ\varphi_A^\beta$,

– con $x\in[m_1-a,m_1)$, $\varphi_A^\beta(x)\in[m_1-a-\Delta,m_1)$

$$(\varphi_B^\alpha\circ\varphi_A^\beta)(x)=\varphi_B^\alpha(\varphi_A^\beta(x))=\varphi_A^\beta(x)-\left[\frac{\beta-\mu_B(\varphi_A^\beta(x))}{\beta}\right]\Delta(\beta,\alpha)=$$

$$=x-(1-r_A(x)/c(A))\Delta(c(A),\beta)-(1-r_A(x)/c(A))\Delta(\beta,\alpha)=$$

$$=x-(1-r_A(x)/c(A))\Delta(c(A),\alpha)=\varphi_A^\alpha(x),$$

ya que $\mu_B(\varphi_B^\beta(x))=\mu_{T_\beta(A)}(\varphi_A^\beta(x))=\frac{\beta}{c(A)}\mu_A((\varphi_A^\beta)^{-1}(\varphi_A^\beta(x))=\frac{\beta}{c(A)}\mu_A(x)$.

– sobre $x\in[m_1,m_2]$ y sobre $x\in(m_2,m_2+b]$ se obtiene un resultado análogo

$$\varphi_B^\alpha\circ\varphi_A^\alpha=\varphi_A^\alpha$$

de donde

$$\mu_{T_\alpha(B)}(x)=\frac{\alpha}{c(A)}\,\mu_A((\varphi_A^\alpha)^{-1}(x))=\mu_{T_\alpha(A)}(x)$$

y por tanto

$$T_\alpha(T_\beta(A))=T_\alpha(A).$$

iii) evidente, aplicando i) y ii).□

Estas propiedades son idénticas a las obtenidas sobre números difusos triangulares, y mantienen la coherencia en la transformación.

Nota.

La transformación $T_\alpha(A)$ es una función difusa, Delgado [16], ya que si consideramos

$$\underset{\sim}{A\in \mathbb{R}^*},\ \alpha\in H^*(A) \qquad \begin{array}{l} T_\alpha:\mathbb{R}\times[0,1]\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ (x,\mu_A(x))\longrightarrow\tilde{(}x,\mu_{T_\alpha(A)}(x)) \end{array}$$

entonces $T_\alpha(A)=\bigcup_x T_\alpha(x,\mu_A(x))=\bigcup_x(x,\mu_{T_\alpha(A)}(x))$.

Coincidencia con las transformaciones triangulares.

La notación de la transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ es la misma que la de la transformación sobre $\mathcal{T}$, la causa es que aquella puede considerarse una extensión de ésta. Para comprobar la veracidad de lo dicho, consideremos el conjunto de números difusos triangulares continuos $\mathcal{T}^*$ (es decir, aquellos con holguras estrictamente positivas) y veamos como coinciden sobre él, las restricciones de las transformaciones sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\mathcal{T}$.

Sea $A\in\mathcal{T}^*$, $A=\langle(m_1,m_2,a,b),\ \alpha_A\rangle$,

- considerado como elemento de $\mathcal{T}$

$$A\in\mathcal{T} \text{ es transformable} \Leftrightarrow \alpha > l(A)$$

y $T_\alpha(A)=\langle(m_1,m_2,a+\Delta,b+\Delta),\ \alpha\rangle$ con $\Delta=\Delta(\alpha_A,\alpha)$.

El caso $\alpha=l(A)$ no puede considerarse ya que $T_\alpha(A)\notin\mathcal{T}^*$, al tener al menos una holgura nula (la transformación a $\alpha=l(A)$ es posible sobre $\mathcal{T}$, pero no sobre $\mathcal{T}^*$).

- considerado como elemento de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$

$$\varphi_A^\alpha(x)=\begin{cases} x(1+\Delta/a)-m_1\Delta/a & \text{en } x\in[m_1-a,m_1) \\ x & \text{en } x\in[m_1,m_2] \\ x(1+\Delta/b)-m_2\Delta/b & \text{en } x\in(m_2,m_2+b] \end{cases}$$

puede comprobarse que, $H^*(A)=(l(A),1]$, con lo que

$$A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \text{ es transformable} \Leftrightarrow \alpha > l(A)$$

y además

$$\mu_{T_\alpha(A)}(x)=\begin{cases}\alpha(x-m_1)/(a+\Delta)-\alpha & \text{si } x\in[m_1-a-\Delta,m_1)\\ \alpha & \text{si } x\in[m_1,m_2]\\ \alpha-\alpha(x-m_2)/(b+\Delta) & \text{si } x\in(m_2,m_2+b+\Delta],\end{cases}$$

que es la función de pertenencia del número difuso triangular

$$\langle(m_1,m_2,a+\Delta,b+\Delta),\ \alpha\rangle,$$

con lo que en ambos casos se obtienen iguales valores de transformación posible, e iguales transformados. Así, realmente la transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ es una extensión de la transformación sobre $\mathcal{F}$.

Comparación a distintas alturas e índices NIS.

Trataremos ahora el problema de la dependencia de la altura, en la comparación mediante la función NIS-g, de dos números difusos continuos, en los que es posible la transformación de cualquiera de los dos.

Consideremos el sistema de comparación NIS $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, asociado a la altura de $A\in\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, la función NIS-g tiene la forma

$$f_T(A,\lambda,\mu)=(\lambda b(\alpha_i,A)+(1-\lambda)a(\alpha_i,A),\ \mu b(\alpha_i,A)+(1-\mu)a(\alpha_i,A))_1^n$$

con $A_{\alpha_i}=[a(\alpha_i,A),b(\alpha_i,A)]$ y $\lambda,\mu\in[0,1]$.

Sea $\alpha\in H^*(A)$, determinaremos la forma de la función NIS-g aplicada a $T_\alpha(A)$, sobre el sistema de comparación asociado anterior pero referido a la altura $\alpha$, es decir consideramos el sistema

$$\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}\ /\ \beta_i=\alpha\alpha_i/\alpha_A \quad \text{y } c(A)=\alpha_A.$$

En este caso tenemos

$$(T_\alpha(A))_{\beta_i}=\varphi_A^\alpha(A_{\alpha_i})=[\varphi_A^\alpha(a(\alpha_i,A)),\ \varphi_A^\alpha(b(\alpha_i,A))]=$$

$$=[a(\alpha_i,A)-(1-\beta_i/\alpha)\Delta(\alpha_A,\alpha),\ b(\alpha_i,A)+(1-\beta_i/\alpha)\Delta(\alpha_A,\alpha)].$$

Con lo que

$$f_T(T_\alpha(A),\lambda,\mu)=f_T(A,\lambda,\mu)+((2\lambda-1)(1-\beta_i/\alpha)\Delta,\ (2\mu-1)(1-\beta_i/\alpha)\Delta)_1^n$$

expresada la primera función NIS-g sobre $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ y la segunda sobre $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$, con $\Delta=\Delta(\alpha_A,\alpha)$.

Proposición 3.12

Sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ / $c(A)=c(B)=\alpha_0$, sea $\alpha\in H^*(A)\cap H^*(B)$, y sea $\leq$ el orden lexicográffico, fuerte o de mayorización sobre $\mathbb{R}^{2n}$, entonces

$$\begin{array}{ccc} f_T(A,\lambda,\mu) \leq f_T(B,\lambda,\mu) & \Leftrightarrow & f_T(T_\alpha(A),\lambda,\mu) \leq f_T(T_\alpha(B),\lambda,\mu) \\ \text{en } \underset{\sim}{\mathbb{R}}^\mu_\lambda(\alpha_1,...,\alpha_n) & & \text{en } \underset{\sim}{\mathbb{R}}^\mu_\lambda(\beta_1,...,\beta_n) \;/\; \beta_i=\alpha\alpha_i/\alpha_0 \end{array}$$

Demostración.

evidente usando la expresión de $f_T(T_\alpha(A),\lambda,\mu)$ anterior.□

Proposición 3.13

Sea un sistema de comparación NIS sobre el [0,1], $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$, sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y sean $\alpha,\beta\in H^*(A)\cap H^*(B)$, entonces

$$\begin{array}{ccc} f_T(T_\alpha(A),\lambda,\mu) \leq f_T(T_\alpha(B),\lambda,\mu) & \Leftrightarrow & f_T(T_\beta(A),\lambda,\mu) \leq f_T(T_\beta(B),\lambda,\mu) \\ \text{en } \underset{\sim}{\mathbb{R}}^\mu_\lambda(\alpha_1,...,\alpha_n) \;/\alpha_i=\alpha\gamma_i & & \text{en } \underset{\sim}{\mathbb{R}}^\mu_\lambda(\beta_1,...,\beta_n) \;/\; \beta_i=\beta\gamma_i \end{array}$$

con $\leq$ el orden lexicográfico, fuerte o de mayorización.

Demostración.

Como la altura de $T_\alpha(A)$ y $T_\alpha(B)$ es la misma, aplicando la proposición anterior tenemos

$$f_T(T_\alpha(A),\lambda,\mu) \leq f_T(T_\alpha(B),\lambda,\mu) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_T(T_\beta(T_\alpha(A)),\lambda,\mu) \leq f_T(T_\beta(T_\alpha(B)),\lambda,\mu)$$

y como $T_\beta(T_\alpha(A))=T_\beta(A)$ y $T_\beta(T_\alpha(B))=T_\beta(B)$ se demuestra la proposición.□

Corolario.

Sea un sistema de comparación NIS sobre el intervalo unidad, $\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$, y sean $A,B\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y supongamos $c(A)\in H^*(B)$, $c(B)\in H^*(A)$, entonces

$$\begin{array}{ccc} f_T(A,\lambda,\mu) \leq f_T(T_{c(A)}(B),\lambda,\mu) & \Leftrightarrow & f_T(T_{c(B)}(A),\lambda,\mu) \leq f_T(B,\lambda,\mu) \\ \text{en } \underset{\sim}{\mathbb{R}}^\mu_\lambda(\alpha_1,...,\alpha_n) \;/\alpha_i=c(A)\gamma_i & & \text{en } \underset{\sim}{\mathbb{R}}^\mu_\lambda(\beta_1,...,\beta_n) \;/\; \beta_i=c(B)\gamma_i \end{array}$$

Demostración.

Como $T_{c(A)}(A)=A$ y $T_{c(B)}(B)=B$, es evidente aplicando la proposición anterior.□

Con estos resultados, se tiene que la comparación de números difusos continuos con la función NIS-g es independiente de la altura a la que se haga, siempre que esta sea la misma y se utilicen sistemas proporcionales. Y si dos números difusos admiten transformaciones, cada uno a la altura del otro, el resultado de la comparación es independiente del número que se transforme.

## 3.3 TRANSFORMACIONES QUE CONSERVEN $I_1$.

### 3.3.1 Caso de números difusos triangulares.

De forma análoga a las transformaciones que conservan $I_0$, estudiamos en primer lugar condiciones para que dos números difusos triangulares tengan la misma información $I_1$.

Proposición 3.14

Sean $A,B\in\mathcal{T}$ con alturas respectivas $\alpha_A$ y $\alpha_B$. Entonces

$$I_1(A)=I_1(B) \iff i_B(0)+i_B(\alpha_B)=\frac{\alpha_B}{\alpha_A}(i_A(0)+i_A(\alpha_A))$$

Demostración.

evidente.□

Dos números difusos triangulares tienen la misma información cuando la suma de la imprecisión base y modal, se modifica a través del cociente de las alturas de los números difusos. De la proposición anterior, se tiene además que si pretendemos subir la altura de A ($\alpha_B>\alpha_A$), entonces la imprecisión suma de la base y modal en B debe aumentar. Por el contrario, para bajar la altura ($\alpha_B<\alpha_A$), la imprecisión debe disminuir. Cuando se conserva la altura ($\alpha_A=\alpha_B$), es evidente que debe mantenerse la imprecisión. De este modo, la relación entre certidumbre e imprecisión es análoga a la de la información $I_0$:

- Un aumento de certidumbre significa un aumento de imprecisión.
- Una disminución de imprecisión significa una disminución de certidumbre.

La relación entre certidumbre e imprecisión que ahora permanece constante es la función de información $I_1$.

La proposición 3.14 permite definir una transformación particular, en la que supondremos que la imprecisión modal se conserva.

Definición 3.8

Sea $A\in\mathcal{T}$ tal que $A=\langle(m_1,m_2,a,b),\alpha_A\rangle$. Sea $\alpha\in(0,1]$, definimos

$$\Gamma_\alpha(A)=\langle(m_1,m_2,a',b'),\alpha\rangle$$

en donde

$$\begin{cases} a'=\alpha a/\alpha_A+(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A \\ b'=\alpha b/\alpha_A+(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A \end{cases}$$

y para aquellos $\alpha$ en los que está definición tenga sentido.

Proposición 3.15

$\Gamma_\alpha$ es una transformación sobre el conjunto de números difusos triangulares $\mathcal{T}$.

Demostración.

Supongamos que existe $\Gamma_\alpha(A)$, con $\alpha\in(0,1]$, en ese caso por su propia definición $\Gamma_\alpha(A)\in\mathcal{T}$ y $c(\Gamma_\alpha(A))=\alpha$, además

$$i_{\Gamma_\alpha(A)}(0)+i_{\Gamma_\alpha(A)}(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha_A}(i_A(0)+i_A(\alpha_A))$$

y por la proposición 3.14

$$I_1(A)=I_1(\Gamma_\alpha(A)).\square$$

Definición 3.9

Dado el número difuso triangular $A=\langle(m_1,m_2,a,b),\alpha_A\rangle$, que no sea un singleton, definimos el **límite inferior de transformación**

$$l_1(A)=\frac{(m_2-m_1)\alpha_A}{\min\{a,b\}+m_2-m_1}.$$

Evidentemente $l_1(A)$ es un número del intervalo unidad, menor o igual que la altura del número difuso triangular A. Cuando A sea un singleton, al tener información máxima, nunca podrá ser transformable.

Proposición 3.16

Sea $A\in\mathcal{T}$ no singleton, entonces

A es transformable en $\alpha\in(0,1]$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) si A es unimodal y } \alpha > 0 \\ \text{ii) si A no es unimodal y } \alpha \geq l_1(A). \end{cases}$$

Demostración.

$A\in\mathcal{T}$ es transformable $\Leftrightarrow \exists\Gamma_\alpha(A)$,

y evidentemente la existencia de $\Gamma_\alpha(A)$ es equivalente a que sus holguras sean positivas o nulas, pero no simultáneamente nulas. De donde

$$a'\geq 0 \text{ y } b'\geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq l_1(A) \text{ si A no es unimodal.}$$

$$a'\geq 0 \text{ y } b'\geq 0 \Leftrightarrow \forall\alpha\in(0,1] \text{ si A es unimodal.}\square$$

Por tanto la región de transformación es

$$H(A)=\begin{cases} (0,1] & \text{para A unimodales,} \\ [l_1(A),1] & \text{para A no unimodales.} \end{cases}$$

En cualquier caso, como $\alpha_A\geq l_1(A)$, las transformaciones para subir altura siempre son posibles, no así las de bajar altura en las que puede haber un umbral mínimo a partir del cual no es posible la transformación. Sobre números difusos triangulares unimodales siempre es posible la transformación.

El comportamiento de $\Gamma_\alpha(\cdot)$ cuando disminuimos o aumentamos altura es análoga al comportamiento de $T_\alpha(\cdot)$ en las fig.6 y fig.7, en relación al aumento o disminución de imprecisión. De igual forma, $\Gamma_\alpha(\cdot)$ también es una transformación que actua según el principio de incompatibilidad entre certidumbre y precisión de Zadeh (ver apartado 3.2.1).

Proposición 3.17 (Propiedades de $\Gamma_\alpha(\cdot)$)

Sea $A\in\mathcal{T}$, entonces se verifica

i) $\Gamma_{c(A)}(A)=A$,

ii) $\Gamma_\alpha(\Gamma_\beta(A))=\Gamma_\alpha(A)$,

iii) $\Gamma_{c(A)}(\Gamma_\alpha(A))=A$ , con $\alpha,\beta\in H(A)$.

Demostración.

Sea $A=\langle(m_1,m_2,a,b),c(A)\rangle$,

i) evidente,

ii) $\Gamma_\alpha(A)=\langle(m_1,m_2,a',b'),\beta\rangle$

$$\text{con}\quad\begin{cases} a'=\beta a/\alpha_A+(m_2-m_1)(\beta-\alpha_A)/\alpha_A \\ b'=\beta b/\alpha_A+(m_2-m_1)(\beta-\alpha_A)/\alpha_A \end{cases}$$

$\Gamma_\alpha(\Gamma_\beta(A))=\langle(m_1,m_2,a'',b''),\alpha\rangle$

$$\text{con}\quad\begin{cases} a''=\alpha a'/\beta\ +(m_2-m_1)(\alpha-\beta)/\beta \\ b''=\alpha b'/\beta\ +(m_2-m_1)(\alpha-\beta)/\beta \end{cases}$$

de donde

$$a''=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha_A}\,a+\left[\frac{\beta-\alpha_A}{\alpha_A}\right](m_2-m_1)\right)+\left[\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right](m_2-m_1)=\frac{\alpha}{\alpha_A}a+(m_2-m_1)\left[\frac{\alpha-\alpha_A}{\alpha_A}\right]$$

$$b''=\frac{\alpha}{\alpha_A}b+(m_2-m_1)\left[\frac{\alpha-\alpha_A}{\alpha_A}\right]$$

y por tanto

$$\Gamma_\alpha(\Gamma_\beta(A))=\Gamma_\alpha(A),$$

iii) evidente a partir de i) y ii).□

Estas propiedades mantienen una coherencia análoga a la de $T_\alpha(\cdot)$.

La transformación $T_\alpha(\cdot)$ no tiene un buen funcionamiento con respecto a un cambio de escala de las variables, como puede comprobarse con distintos ejemplos. No es este el caso de $\Gamma_\alpha(\cdot)$ como veremos a continuación, y precisamente, estas buenas propiedades frente al cambio de escala son el origen de la definición de $I_1$ y de la transformación $\Gamma_\alpha(\cdot)$.

<u>Proposición 3.18</u> (Cambio de escala)

Sea $A\in\mathcal{T}$, y sea $A^e\in\mathcal{T}$ el transformado de A ,mediante el cambio de escala $\mu_{A^e}(x)=\mu_A(e(x))$, con $e(x)=rx+s$, $r,s\in\mathbb{R}$ y $r>0$, entonces

$$\Gamma_\alpha(A^e)=\Gamma_\alpha(A)^e.$$

<u>Demostración</u>.

Sea $A=\langle(m_1,m_2,a,b),\alpha_A\rangle$ entonces puede comprobarse que

$$A^e=\left\langle\left(\frac{m_1-s}{r},\frac{m_2-s}{r},\frac{a}{r},\frac{b}{r}\right),\alpha_A\right\rangle.$$

De donde

$$\Gamma_\alpha(A^e)=\left\langle\left[\frac{m_1-s}{r},\frac{m_2-s}{r},a^e,b^e\right],\alpha\right\rangle$$

con

$$\begin{cases} a^e=\alpha a/\alpha_A r+(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A r=a'/r \\ b^e=\alpha b/\alpha_A r+(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A r=b'/r \end{cases}$$

con a',b' de la definición de $\Gamma_\alpha(A)$.

$$\Gamma_\alpha(A)^e=\left\langle\left[\frac{m_1-s}{r},\frac{m_2-s}{r},\frac{a'}{r},\frac{b'}{r}\right],\alpha\right\rangle$$

de donde evidentemente ambas cantidades difusas son la misma.□

En la fig.10 se muestra un ejemplo de la conservación del cambio de escala.

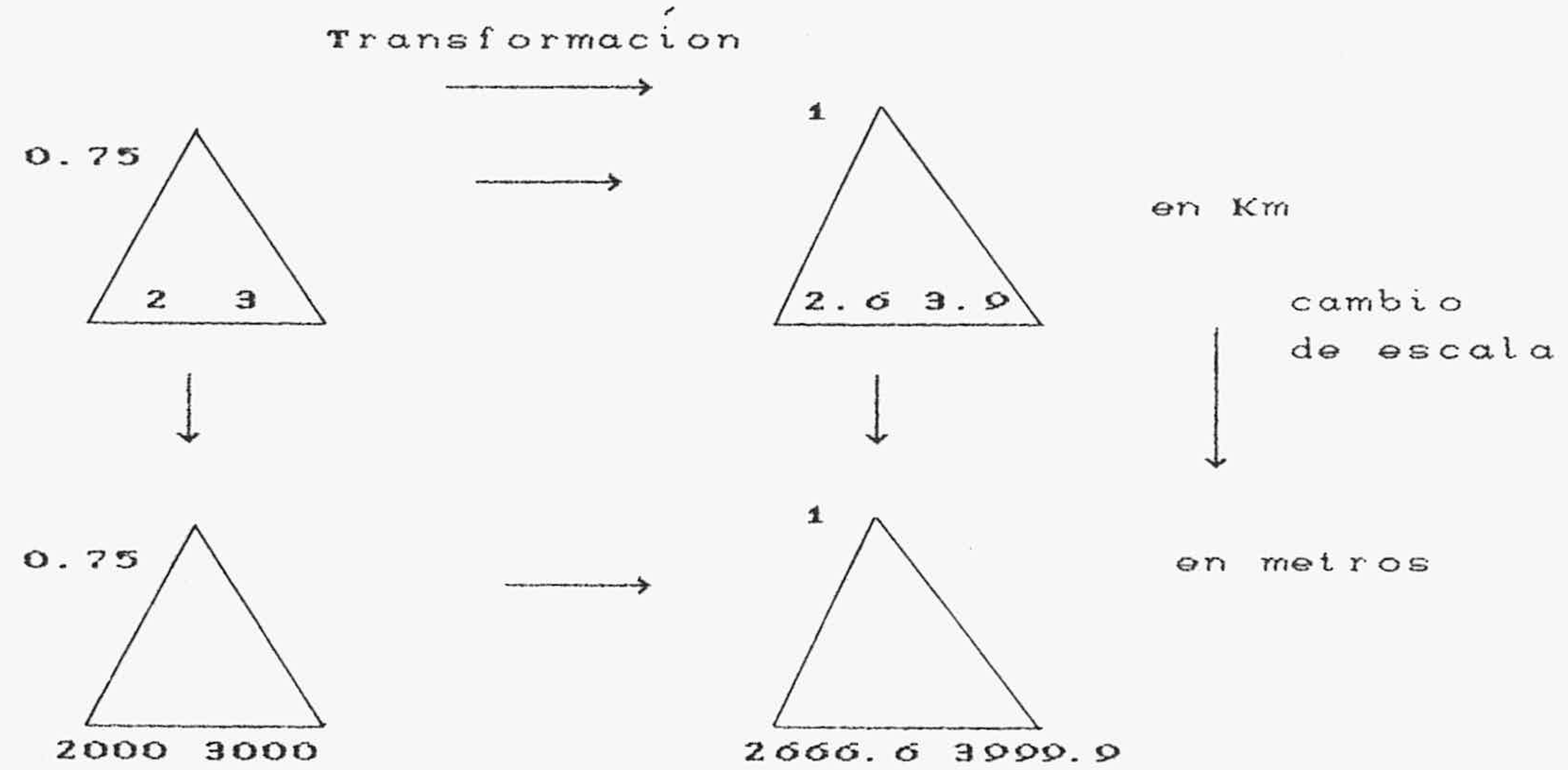



figura 10. Diagrama con cambio de escala y transformación.

Anteriormente hemos visto que los singletons no pueden transformarse, al no poder modificar su imprecisión. Y esto ocurre con cualquier transformación que conserve la escala, ya que si tenemos un singleton A, lo podemos representar por

$$A=\langle(m,m,0,0),\alpha_A\rangle$$

si pudiesemos definir $\Gamma_\alpha(A)=\langle(m\ ,m\ ,a,b),\alpha\rangle$ entonces

$$\Gamma_\alpha(A^e)=\left\langle\left(\frac{m\ -s}{r},\frac{m\ -s}{r},a,b\right),\alpha\right\rangle$$

$$\Gamma_\alpha(A)^e=\left\langle\left(\frac{m\ -s}{r},\frac{m\ -s}{r},\frac{a}{r},\frac{b}{r}\right),\alpha\right\rangle$$

que son distintos en general. Por tanto la conservación de escalas implica la no transformación de los singletons. De cualquier modo, cuando sea necesario transformar uno, simpre se puede considerar

$$A=\langle(m,m,0,0),\alpha_A\rangle \longrightarrow A_\varepsilon=\langle(m-\varepsilon,m+\varepsilon,0,0),\alpha_A\rangle$$

y definir la transformación sobre $A_\varepsilon$, tomandola como transformacción sobre A, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño.

### 3.2.2 Caso de números difusos continuos.

Una vez definidas las transformaciones sobre el conjunto $\mathcal{F}$, y como extensiones de estas definiremos transformaciones sobre el conjunto de números difusos continuos $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$. La transformación se generará a partir de la conservación de la función de información $I_1$, restringida a $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, y como condición adicional mantendremos la conservación de los valores modales. Seguiremos considerando la notación dada en 3.2.2 sobre los números difusos continuos (fig.9), y de forma análoga a lo desarrollado entonces, como paso previo para la definición de la transformación, definiremos una función transformadora.

Definición 3.10

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, se define la **función transformadora** de A en $\alpha \in (0,1]$, del siguiente modo

$$\phi_A^\alpha : \overline{\text{sop } A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi_A^\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x/\alpha_A + [r_A(x)(m_2-m_1)/\alpha_A - m_2](\alpha-\alpha_A)/\alpha_A & \text{si } x \in [m_1-a, m_1) \\ x & \text{si } x \in [m_1, m_2] \\ \alpha x/\alpha_A + [s_A(x)(m_2-m_1)/\alpha_A + m_1](\alpha-\alpha_A)/\alpha_A & \text{si } x \in (m_2, m_2+b]. \end{cases}$$

Estudiamos ahora las propiedades de esta función transformadora.

Proposición 3.19

La función transformadora de $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ en $\alpha \in (0,1]$, $\phi_A^\alpha$, es una función continua.

Demostración.

evidente.□

Como daremos la transformación a partir de la inversa de la función transformadora, definimos los elementos de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ tranformables de entre aquellos en que existe dicha inversa.

Definición 3.11

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, definimos el conjunto

$$H_1^*(A) = \{\alpha \in (0,1] \;/\; \phi_A^\alpha \text{ es inyectiva y } \alpha > l_1(A)\}$$

en donde $l_1(A)$ es el límite inferior de transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$

$$l_1(A) = \frac{(m_2-m_1)\alpha_A}{\min\{a,b\} + m_2 - m_1}.$$

$H_1^*(A)$ es siempre no vacio, ya que por lo menos $\alpha_A \in H^*(A)$.

Definiremos las transformaciones sobre este conjunto, y posteriormente veremos que coincide con $H_1(A)$, es decir, con el conjunto de niveles en donde A es transformable.

Proposición 3.20

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha \in H_1^*(A) \Longrightarrow \phi_A^\alpha$ es creciente.

Demostración.

Como $\alpha\in H_1^*(A) \Longrightarrow \phi_A^\alpha$ es inyectiva.

Como además es continua $\Longrightarrow$ es creciente o decreciente

$$\phi_A^\alpha(m_1-a)<\phi_A^\alpha(m_1) \Longleftrightarrow \alpha > \frac{(m_2-m_1)\alpha_A}{m_2-m_1+a}$$

$$\phi_A^\alpha(m_2)<\phi_A^\alpha(m_1+b) \Longleftrightarrow \alpha > \frac{(m_2-m_1)_A}{m_2-m_1+b}$$

y ambas condiciones se dan ya que $\alpha>l_1(A)$. Por tanto $\phi_A^\alpha$ es creciente en unos puntos particulares, no puede ser decreciente y obligatoriamente es creciente.□

Definición 3.12

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H_1^*(A)$, entonces definimos la función

$$\Gamma_\alpha:\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*\longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$$

$$\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=\begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_A}\mu_A((\phi_A^\alpha)^{-1}(x)) & \text{en } x\in[m_1-a',m_2+b'] \\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

con

$$\begin{cases} a'=\alpha a/\alpha_A+(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A \\ b'=\alpha b/\alpha_A+(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A\end{cases}$$

y $(\phi_A^\alpha)^{-1}$ la inversa de la función transformadora, que existe ya que $\alpha\in H_1^*(A)$. Cuando $\alpha=\alpha_A$, queda $\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=\mu_A(x)$.

Notamos a la transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y sobre $\mathcal{T}$ de la misma forma, ya que posteriormente comprobaremos que una es extensión de la otra.

La definición de $T_\alpha(\cdot)$ y la de $\Gamma_\alpha(\cdot)$, sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, es prácticamente la misma, variando tan solo, la función transformadora. De este modo ambas transformaciones responden a un esquema común de construcción.

Lema 1.

Sea $A \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha \in H_1^*(A) \Longrightarrow \Gamma_\alpha(A)\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.

Demostración.

Calculemos el $\beta$-corte de $\Gamma_\alpha(A)$

$(\Gamma_\alpha(A))_\beta=\{x\in \mathbb{R}\ /\ \mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)\geq\beta\}=\{x\in \mathbb{R}\ /\ \mu_A((\phi_A^\alpha)^{-1}(x))\geq \alpha_A\beta/\alpha\}$

Llamamos $\gamma=\alpha_A\beta/\alpha \in[0,\alpha_A]$, con $\beta\in[0,\alpha]$. Así

$(\Gamma_\alpha(A))_\beta=\{x\in\mathbb{R}\ /\ (\phi_A^\alpha)^{-1}(x)=y,\ \mu_A(y)\geq\gamma\}=\{x\in \mathbb{R}\ /\ \phi_A^\alpha(y)=x,\ \mu_A(y)\geq\gamma\}=$
$=\{\phi_A^\alpha(y)\ /\ \mu_A(y)\geq\gamma\}=\phi_A^\alpha(A_\gamma)$, en donde $A_\gamma$ es el $\gamma$-corte de A.

i) Como $A_\gamma$ es un intervalo y $\phi_A^\alpha$ es continua $\Longrightarrow$ $\phi_A^\alpha(A_\gamma)$ es un intervalo $\Longrightarrow$ $\Gamma_\alpha(A)$ tiene sus $\beta$-cortes convexos $\Longrightarrow$ $\Gamma_\alpha(A)$ es convexo.

ii) $\mathrm{sop}(\Gamma_\alpha(A))=\phi_A^\alpha(\mathrm{sop}\ A)=(m_1-a',m_2+b')$, de donde $\Gamma_\alpha(A)$ es de soporte acotado.

iii) $\phi_A^\alpha:\overline{\mathrm{sop}\ A}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua. Como $\overline{\mathrm{sop}\ A}$ es compacto y $\exists(\phi_A^\alpha)^{-1} \Longrightarrow (\phi_A^\alpha)^{-1}$ es continua en $\phi_A^\alpha[m_1-a,m_2+b]=[m_1-a',m_2+b']$.

Por tanto

$\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=h_A\circ\mu_A\circ(\phi_A^\alpha)^{-1}$, con $h_A(x)=\alpha x/\alpha_A$, y $h_A$, $\mu_A$ y $(\phi_A^\alpha)^{-1}$ continuas $\Longrightarrow$ $\mu_{\Gamma_\alpha(A)}$ es continua.

Con lo que $\Gamma_\alpha(A)\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.□

Lema 2.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H_1^*(A) \Longrightarrow c(\Gamma_\alpha(A))=\alpha$.

Demostración.

$$\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=\frac{\alpha}{\alpha_A}\,\mu_A((\phi_A^\alpha)^{-1}(x))\leq\frac{\alpha}{\alpha_A}\ \sup_{x\in\mathbb{R}}\ \mu_\alpha((\phi_A^\alpha)^{-1}(x))\leq\alpha,$$

de donde

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\ \mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)\leq\alpha$$

y como con $x\in[m_1,m_2]$, $\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=\alpha$, entonces $c(\Gamma_\alpha(A))=\alpha$.□

Lema 3.

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H_1^*(A) \Longrightarrow I_1(\Gamma_\alpha(A))=I_1(A)$.

Demostración.

Como $(\Gamma_\alpha(A))_\beta=\phi_A^\alpha(A_\gamma)=[\phi_A^\alpha(a_\gamma),\phi_A^\alpha(b_\gamma)]$, con $\gamma=\beta\alpha_A/\alpha$ y $A_\gamma=[a_\gamma,b_\gamma]$, tenemos

$$i(\Gamma_\alpha(A))=\int_0^\alpha(\phi_A^\alpha(b_\gamma)-\phi_A^\alpha(a_\gamma))d\beta=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha_A}\int_0^\alpha(b_\gamma-a_\gamma)d\beta-\left[\frac{\alpha-\alpha_A}{\alpha_A}\right]\int_0^\alpha(m_2-m_1)(2\beta/\alpha\ -1)d\beta=\left[\frac{\alpha}{\alpha_A}\right]^2 i(A)\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ I_1(\Gamma_\alpha(A))=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha^2 i(A)/\alpha_A^2}=\frac{\alpha_A^2}{\alpha_A^2+i(A)}=I_1(A).\square$$

Proposición 3.21

$\Gamma_\alpha$ es una tranformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$.

Demostración.

evidente por los lemas 1,2 y 3.□

Proposición 3.22

Sea $A\in\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$

$$A \text{ es transformable en } \alpha\in(0,1]\ \Longleftrightarrow\ \alpha\in H_1^*(A).$$

Demostración.

A es transformable en $\alpha\ \Longleftrightarrow\ \exists\Gamma_\alpha(A)\ \Longleftrightarrow\ \exists(\phi_A^\alpha)^{-1}$ y $a'>0, b'>0\ \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\ \phi_A^\alpha$ es inyectiva y $\alpha>l_1(A)\ \Longleftrightarrow\ \alpha\in H_1^*(A)$.□

En definitiva la proposición afirma que el conjunto de niveles en donde un número difuso es transformable coincide con $H_1^*(A)$, o de otra forma

$$H_1(A)=H_1^*(A).$$

Proposición 3.23

Sea $A\in\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*\ \Longrightarrow\ [c(A),1]\subseteq H_1^*(A)$.

Demostración.

Sabemos que $c(A)\geq l_1(A)$. Sea $\alpha\in[c(A),1]$, veamos que $\phi_A^\alpha$ es inyectiva.

$r_A$ es no decreciente en $[m_1-a, m_1)$ y $s_A$ es no creciente en $(m_2, m_2+b]$.

Sean $x, y\in[m_1-a, m_1)$ / $x<y \Longrightarrow r_A(x)\leq r_A(y)$, de donde

$$\phi_A^{\alpha}(x)<\phi_A^{\alpha}(y).$$

Sean $x, y\in(m_2, m_2+b]$ / $x<y \Longrightarrow s_A(y)\leq s_A(x)$, de donde

$$\phi_A^{\alpha}(x)<\phi_A^{\alpha}(y).$$

En $x, y\in[m_1, m_2]$ es evidente que si $x<y \Longrightarrow \phi_A^{\alpha}(x)<\phi_A^{\alpha}(y)$, y como $\phi_A^{\alpha}$ es continua, tenemos:

$\forall x, y\in[m_1-a, m_2+b]$, $x<y \Longrightarrow \phi_A^{\alpha}(x)<\phi_A^{\alpha}(y)$, y $\phi_A^{\alpha}$ es inyectiva. Por lo tanto $\alpha\in H_1^*(A)$.□

De donde análogamente a $T_\alpha(\cdot)$, las transformaciones sobre números difusos continuos, para subir altura, siempre son posibles. Para bajar altura, en general, no siempre podremos garantizarlo. Si el número difuso A es unimodal, es inmediato comprobar que

$$\forall\alpha>0 \ \phi_A^{\alpha} \text{ es inyectiva y como } l_1(A)=0$$

obtenemos que A es siempre transformable, es decir

$$H_1^*(A)=(0,1]$$

que es una extensión de lo que pasaba sobre números difusos triangulares.

Proposición 3.24

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha\in H_1^*(A)$, entonces $(\Gamma_\alpha(A))_\alpha=A_{\alpha_A}$.

Demostración.

Como $(\Gamma_\alpha(A))_\beta=\phi_A^{\alpha}(A_\gamma)$, con $\gamma=\alpha_A\beta/\alpha$, entonces $(\Gamma_\alpha(A))_\alpha=\phi_A^{\alpha}(A_{\alpha_A})=\phi_A^{\alpha}([m_1, m_2])=[m_1, m_2]=A_{\alpha_A}$.□

Esta proposición nos garantiza el mantenimiento de los valores modales en el transformado de un número difuso continuo.

Proposición 3.25

Sea $A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, entonces se verifica

i) $\Gamma_{c(A)}(A)=A$,

ii) $\Gamma_\alpha(\Gamma_\beta(A))=\Gamma_\alpha(A)$,

iii) $\Gamma_{c(A)}(\Gamma_\alpha(A))=A$ con $\alpha,\beta\in H_1^*(A)$

Demostración.

i) $\phi_A^{c(A)}(x)=x \Longrightarrow \mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=\mu_A(x) \Longrightarrow \Gamma_{c(A)}(A)=A.$

ii) Sea $\Gamma_\beta(A)=B$,

$$\mu_{\Gamma_\alpha(B)}(x)=\frac{\alpha}{\beta}\mu_B((\phi_B^\alpha)^{-1}(x))=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta}{c(A)}\,\mu_A((\phi_A^\beta)^{-1}\circ(\phi_B^\alpha)^{-1}(x))=$$

$$=\frac{\alpha}{c(A)}\,\mu_A((\phi_B^\alpha\circ\phi_A^\beta)^{-1}(x)).$$

Veamos quien es $\phi_B^\alpha\circ\phi_A^\beta$.

- Sobre $x\in[m_1-a,m_1)$ , $\phi_A^\beta\in[m_1-a',m_1)$

$$\mu_B(\phi_A^\beta(x))=\mu_{\Gamma_\beta(A)}(\phi_A^\beta(x))=\frac{\beta}{c(A)}\mu_A((\phi_A^\beta)^{-1}(\phi_A^\beta(x)))=\frac{\beta}{c(A)}\mu_A(x)$$

de donde

$$(\phi_B^\alpha\circ\phi_A^\beta)(x)=\phi_B^\alpha(\phi_A^\beta(x))=\frac{\alpha}{\beta}(\phi_A^\beta(x))+\left[\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right]\left[\mu_B(\phi_A^\beta(x))(m_2-m_1)/\beta\ -m_2\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}(\beta x/c(A)\ +\ \left[\frac{\beta-c(A)}{c(A)}\right]\left[\mu_A(x)(m_2-m_1)/c(A)\ -m_2\right]+$$

$$+\left[\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right]\left[\mu_A(x)(m_2-m_1)/c(A)\ -m_2\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{c(A)}x\ +\ \left[\frac{\alpha-\alpha_A}{\alpha_A}\right]\left[\mu_A(x)(m_2-m_1)/c(A)\ -m_2\right]=\ \phi_A^\alpha(x).$$

- Sobre $x\in[m_1,m_2]$ y sobre $x\in(m_2,m_2+b]$ se obtiene un resultado análogo

$$\phi_B^\alpha\circ\phi_A^\beta=\phi_A^\alpha$$

con lo que

$$\mu_{\Gamma_\alpha(B)}(x)=\frac{\alpha}{c(A)}\mu_A((\phi_A^\alpha)^{-1}(x))=\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)$$

y por lo tanto

$$\Gamma_\alpha(\Gamma_\beta(A))=\Gamma_\alpha(A).$$

iii) evidente, aplicando i) y ii).□

Estudiamos ahora el comportamiento de $\Gamma_\alpha(\cdot)$ frente al cambio de escala, sobre números difusos continuos. Como paso previo al enunciado de la proposición, necesitamos el siguiente lema.

Lema.

Sea $\underset{\sim}{A} \in \mathbb{R}^*$, y sea $\underset{\sim}{A}^e \in \mathbb{R}^*$ el transformado de $A$ mediante el cambio de escala $\mu_{A^e}(x)=\mu_A(e(x))$, con $e(x)=rx+s$,. $r,s \in \mathbb{R}$ y $r>0$, entonces

$$\phi^{\alpha}_{A^e}(x)=(\phi^{\alpha}_{A}(rx+s)-s)/r.$$

Demostración.

Sea $x\in\left[\frac{m_1-a-s}{r}, \frac{m_1-s}{r}\right]$, entonces

$$\phi^{\alpha}_{A^e}(x)=\frac{\alpha}{\alpha_A}x+\left(\frac{\alpha-\alpha_A}{\alpha_A}\right)\left[\frac{\mu_A(rx+s)}{\alpha_A}\,\frac{m_2-m_1}{r}-\left(\frac{m_2-s}{r}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\alpha}{\alpha_A}(rx+s)+\left(\frac{\alpha-\alpha_A}{\alpha_A}\right)\left(\frac{\mu_A(rx+s)}{\alpha_A}(m_2-m_1)-m_2\right)-s\right]=\frac{1}{r}\left[\phi^{\alpha}_{A}(rx+s)-s\right],$$

de forma análoga puede comprobarse el resultado en

$$x\in\left[\frac{m_1-s}{r},\frac{m_2-s}{r}\right] \text{ y } x\in\left[\frac{m_2-s}{r},\frac{m_2+b-s}{r}\right].\square$$

Proposición 3.26 (cambio de escala)

Sea $\underset{\sim}{A} \in \mathbb{R}^*$, y sea $\underset{\sim}{A}^e \in \mathbb{R}^*$ el transformado de $A$ mediante el cambio de escala $\mu_{A^e}(x)=\mu_A(e(x))$, con $e(x)=rx+s$,. $r,s \in \mathbb{R}$ y $r>0$, entonces

$$\Gamma_{\alpha}(A^e)=\Gamma_{\alpha}(A)^e.$$

Demostración.

$$\mu_{\Gamma_\alpha(A^e)}(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha_A}\mu_{A^e}((\phi^{\alpha}_{A^e})^{-1}(x)) & \text{si } x\in[m_1^e-a'_e,\ m_2^e+b'_e]\\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

con

$$m_1^e-a'_e=(m_1-s)/r-\alpha a/\alpha_A r-(m_2-m_1)(\alpha-\alpha_A)/r\alpha_A=(m_1-a'-s)/r$$

$$m_2^e+b'_e=(m_2+b'-s)/r,$$

y a',b' las holguras habituales del transformado $\Gamma_\alpha(A)$.

Como

$$\mu_{A^e}((\phi^{\alpha}_{A^e})^{-1}(x))=\mu_A(r(\phi^{\alpha}_{A^e})^{-1}(x)+s)$$

y por el lema anterior

$$\phi^{\alpha}_{A^e}(x)=(\phi^{\alpha}_{A}(rx+s)-s)/r,$$

y fácilmente puede comprobarse que

$$(\phi^{\alpha}_{A^e})^{-1}(x)=((\phi^{\alpha}_{A})^{-1}(rx+s)-s)/r$$

con lo que

$$\mu_{A^e}((\phi^{\alpha}_{A^e})^{-1}(x))=\mu_{A}((\phi^{\alpha}_{A^e})^{-1}(rx+s))$$

de donde

$$\mu_{\Gamma_\alpha(A^e)}(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha_A}\mu_{A^e}((\phi^{\alpha}_{A})^{-1}(rx+s)) & \text{si } x\in\left[\dfrac{m_1-a'-s}{r},\dfrac{m_2+b'-s}{r}\right] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que coincide con la función de pertenencia de $\mu_{\Gamma_\alpha(A)^e}$, con lo que

$$\Gamma_\alpha(A^e)=\Gamma_\alpha(A)^e.\square$$

Nota.

Análogamente a la transformación $T_\alpha(\cdot)$, $\Gamma_\alpha(\cdot)$ es también una función difusa, Delgado [16], ya que si consideramos

$A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, $\alpha\in H_1^*(A)$ $\qquad \Gamma_\alpha:\mathbb{R}\times[0,1]\longrightarrow \mathcal{P}(\underset{\sim}{\mathbb{R}})$

$$(x,\mu_A(x))\longrightarrow(x,\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x))$$

entonces $\Gamma_\alpha(A)=\underset{x}{\cup}\Gamma_\alpha(x,\mu_A(x))=\underset{x}{\cup}(x,\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x))$.

Coincidencia con las transformaciones triangulares.

Puesto que hemos notado de la misma forma a las transformaciones sobre $\mathcal{T}$ y sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$, veamos que esto es realmente válido, comprobando como ambas coinciden sobre

$$\mathcal{T}^*=\mathcal{T}\cap \underset{\sim}{\mathbb{R}}^*.$$

Sea $A\in\mathcal{T}^*$, $A=\langle(m_1,m_2,a,b),\alpha_A\rangle$

- considerado como elemento de $\mathcal{T}$

$$A\in\mathcal{T} \text{ es transformable} \iff \alpha > l_1(A)$$

y $\Gamma_\alpha(A)=\langle(m_1,m_2,a',b'),\alpha\rangle$ con a',b' definidos anteriormente.

El caso $\alpha=l_1(A)$ no puede considerarse ya que $\Gamma_\alpha(A)\notin\mathcal{T}^*$, al tener al menos una holgura nula.

- considerado como elemento de $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$

$$\phi_A^\alpha(x)=\begin{cases} x(\alpha/\alpha_A+(\alpha-\alpha_A)(m_2-m_1)/a\alpha_A)-((m_2-m_1)m_1/a+m_1)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A \\ x \\ x(\alpha/\alpha_A+(\alpha-\alpha_A)(m_2-m_1)/b\alpha_A)-((m_2-m_1)m_2/b+m_2)(\alpha-\alpha_A)/\alpha_A \end{cases}$$

respectivamente sobre $[m_1-a,m_1)$, $[m_1,m_2]$ y $(m_2,m_2+b]$. Puede comprobarse que, $H_1^*(A)=(l_1(A),1]$, con lo que

$$A\in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^* \text{ es transformable} \Leftrightarrow \alpha > l_1(A)$$

y además

$$\mu_{\Gamma_\alpha(A)}(x)=\begin{cases} \alpha(x-m_1)/a' -\alpha & \text{si } x\in[m_1-a',m_1) \\ \alpha & \text{si } x\in[m_1,m_2] \\ \alpha-\alpha(x-m_2)/b' & \text{si } x\in(m_2,m_2+b'] \end{cases}$$

que es la función de pertenencia del número difuso triangular

$$\langle(m_1,m_2,a',b'),\alpha\rangle,$$

con lo que en ambos casos se obtienen iguales valores de transformación posible, e iguales transformados. Con lo que comprobamos que la transformación sobre $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^*$ es una extensión de la transformación sobre $\mathcal{T}$.

Finalmente, veremos con el siguiente ejemplo, como la transformación $\Gamma_\alpha(\cdot)$ no funciona bien en la comparación a distintos niveles de altura bajo sistemas restringidos o bajo sistemas proporcionales.

Ejemplo 8.

Consideramos el sistema de comparación NIS, formado por un solo nivel

$$Y=\langle 0.2\rangle$$

y los números difusos triangulares (fig.11)

$$A=\langle(4,4,3,2),0.5\rangle$$

$$B=\langle(3,3,1,2),0.5\rangle$$

Consideramos cualquier orden sobre $\mathbb{R}^2$, ya que todos coinciden sobre un solo nivel de comparación, y seleccionamos la

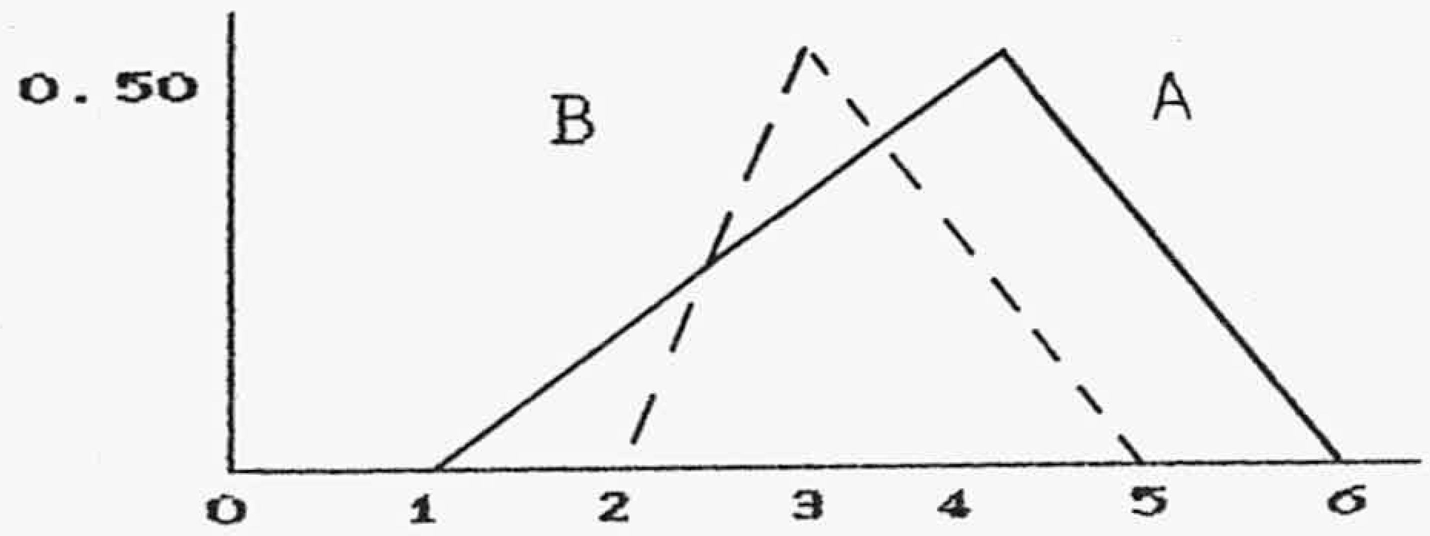


figura 11. Dos números difusos triangulares.

función NIS-promedio

$$f_T(A,\lambda,\lambda)=(\lambda 5.2+(1-\lambda)2.2)_1^2$$

$$f_T(B,\lambda,\lambda)=(\lambda 4.2+(1-\lambda)2.4)_1^2.$$

La región de dominancia de A y B es

$$R_L(A,B)=\{\ \lambda\in[0,1]\ /\ f_T(A,\lambda,\lambda)\ \leq\ f_T(B,\lambda,\lambda)\}=[0,0.1\widehat{6}].$$

Si consideramos los transformados de A y B a la altura 0.75, tenemos

$$\Gamma_{0.75}(A)=\langle(4,4,4.5,3).0.75\rangle=A^T$$

$$\Gamma_{0.75}(B)=\langle(3,3,1.5,3).0.75\rangle=B^T$$

entonces con el mismo sistema de comparación Y=<0.2> se tiene

$$R_L(\Gamma_{0.75}(A),\Gamma_{0.75}(B))=[0,0.\widehat{54}]$$

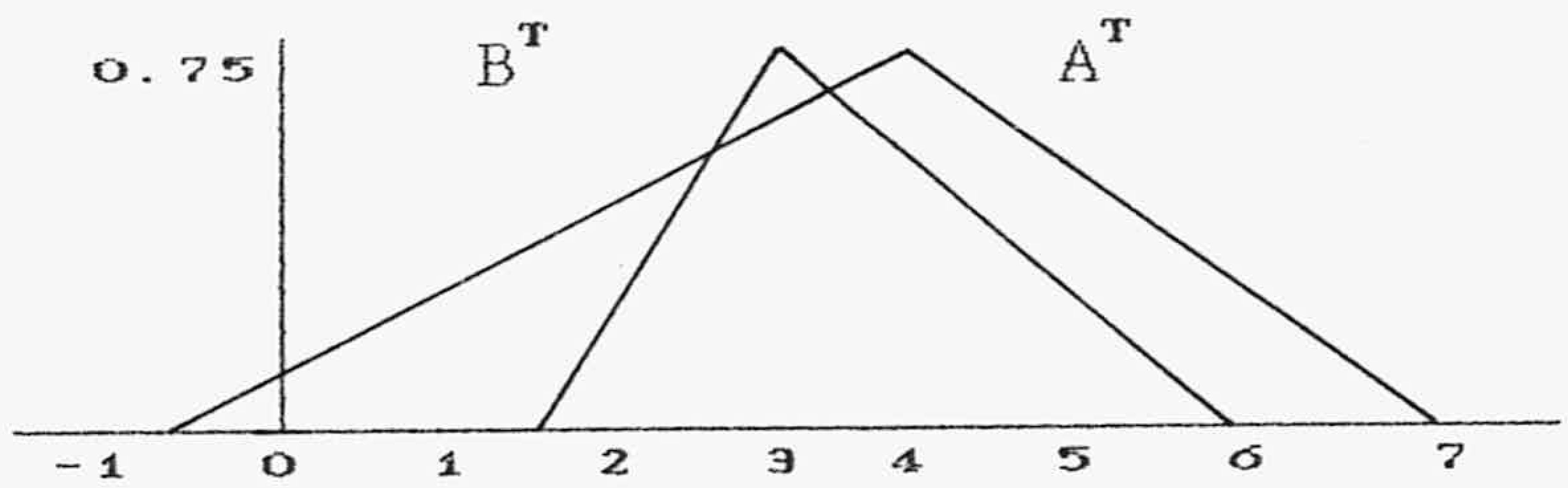


figura 12. Transformados de A y B a la altura 0.75.

y sobre el sistema proporcional a la nueva altura, Y=<0.3>, se tiene

$$R_L(\Gamma_{0.75}(A),\Gamma_{0.75}(B))=[0,0.\widehat{4}]$$

en cualquier caso, hay gran diferencia en la comparación de los números difusos originales y de sus transformados.

Para evitar estos problemas es recomendable utilizar $\Gamma_\alpha(\cdot)$ fundamentalmente para normalizar los distintos números difusos que nos puedan aparecer, cor certidumbre no máxima. De cualquier forma, el problema de encontrar una función de información y una transformación "óptimas" no está resuelto, y constituirá objeto de futuras investigaciones.

## COMENTARIOS FINALES.

Como se ha mostrado a lo largo de la memoria, es posible establecer mecanismos de comparación sobre el modelo de cantidad imprecisa, que:

1. Conducen a relaciones de orden, compatibles con las operaciones aritméticas ya definidas para este tipo de números.
2. Mejoran los procedimientos existentes, permitiendo una flexible clasificación según distintos tipos de dominancia, y una aceptable relación de indiferencia.
3. Son computacionalmente sencillos, de manera que el mecanismo de comparación es fácilmente implementable en un algoritmo de optimización, o una regla de inferencia.

Por otra parte, el posible problema que ciertos métodos pueden plantear, al exigir que los números a comparar tengan la misma altura, se resuelve gracias a los resultados obtenidos en el capítulo III, donde además se abordan temas adicionales como el de la información proporcionada por una cantidad imprecisa.

Creemos pues que los objetivos planteados al comienzo de la memoria se han llevado a buen fin. No obstante, no todos los problemas planteados a lo largo de este trabajo se resuelven en el mismo, quedando una serie de temas abiertos, que pueden encuadrarse dentro de los siguientes epígrafes:

1. <u>El problema de la subjetividad</u>.

A lo largo de la memoria se ha insistido en tratar con métodos subjetivos de comparación, es decir, los mecanismos propuestos no son rígidos, sino que contienen elementos que permiten adecuar los resultados concretos a cada decisor. Estos elementos son:

- Para el método NIS: Los sistemas de comparación, y la medida de posición sobre cada α-corte, representada por la elección de dos parámetrros del intervalo unidad, que se interpretan como un índice de optimismo-pesimismo, en el caso de la función NIS-promedio.
- Para el índice promedio: la distribución P de probabilidad con respecto a la cual se integra sobre un conjunto de niveles también a determinar; y el mismo índice de optimismo-pesimismo del caso anterior.

Estos elementos subjetivos que, a nuestro juicio, constituyen una ventaja de los métodos, plantean dos futuras líneas de trabajo:

A) La primera consiste en la determinación práctica de estos niveles e índices, en el caso concreto de un problema de comparación. Supuesto que estos dependen de cada individuo, esta determinación empírica podría plantearse interactivamente, proponiendole al mismo ejemplos "tipo" y mediante algún mecanismo de inferencia, deducir de su comportamiento, su índice de optimismo-pesimismo, etc.

Naturalmente es posible utilizar las comparaciones con niveles standard, pero un proceso (algoritmo de optimización, sistema de ayuda a la decisión, etc.) que incorpore estas técnicas y desee utilizarlas en toda su potencia, debería implementar como módulo previo un sistema de construcción de estos "parámetros personales".

B) El segundo camino de trabajo pasa por una visión diferente del proceso de comparación entre números difusos. Esta visión es, en cierta forma opuesta a la anterior, ya que en lugar de fijar unos parámetros previos y luego efectuar las decisiones de forma "automática", lo que intenta es proporcionar a un hipotético decisor la máxima información posible sobre el problema.

Esta información se consigue, a partir de los dominios de variación de los parámetros , y estudiando cómo en cada caso concreto, la elección de un parámetro perteneciente a un sector de la región de dominancia, determina que un número difuso sea mayor, menor, indiferente o no comparable, con otro. Esta idea se ha desarrollado en la memoria para el caso de la función NIS-promedio y el índice promedio, considerando tan sólo la variación del valor $\lambda$ de optimismo-pesimismo.

El generar las regiones de dominancia, frente a una determinación a priori de los parámetros, puede tener dos ventajas:

- La visión anticipada de las distintas posibilidades, y
- que el decisor conozca la sensibilidad de los parámetros, es decir, si un leve cambio de estos modifica o no la solución final.

Por todo ello, consideramos de gran interés el estudio de regiones de dominancia más generales, donde intervengan conjuntamente índices de optimismo-pesimismo y sistemas de comparación.

2. <u>Ampliación de conceptos y definiones asociados a cantidades difusas</u>.

Existen conceptos asociados a cantidades difusas que aún no se encuentran totalmente definidos, y que en la memoria no se tratan en toda su amplitud, estos son:

A) Los conceptos de positividad y distancia, en nuestro caso asociados a la función ordenadora.

B) El concepto de indiferencia y su relación con otras definiciones existentes.

C) El estudio de informaciones sobre cantidades difusas, y asociado a ellas, la construcción de transformaciones "óptimas", en un sentido que habrá que establecer.

3. <u>Generalizaciones posibles de la memoria</u>.

Aunque el problema de la comparación se ha tratado de forma general, es posible extender los siguiente temas:

A) Comparaciones específicas para los enteros difusos. Si bien las comparaciones definidas pueden ser también aplicadas a cantidades difusas del conjunto $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}$, es posible que las medidas de posición seleccionadas no sean las más adecuadas para ellas, y se hace necesario un estudio en este sentido.

B) Algunos de los métodos de comparación propuestos pasan por la utilización de una relación de orden sobre $\mathbb{R}^m$. En la memoria hemos considerado tres relaciones posibles. Otras relaciones diferentes generarán otro tipo de relaciones de orden.

C) La definición del índice promedio se realiza a través de un proceso de integración con respecto a una medida de probabilidad. Utilizando conceptos como el de medida difusa y esperanza monótona, podriamos dar una definición más general.

Estos temas, junto con la aplicación de los resultados obtenidos a modelos concretos (como la programación lineal difusa) y a problemas reales, son el actual objetivo de nuestras investigaciones.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Adamo, J.M., Fuzzy decision trees, Fuzzy Sets and Systems 4, pp.207-219 (1980).

[2] Baas, S.M. y Kwakernaak, H., Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets, Automatica 13, pp. 47-58 (1977).

[3] Baldwin, J.F. y Guild, N.C.F., Comparison of fuzzy sets on the same decision space, Fuzzy Sets and Systems 2, pp.213-233 (1979).

[4] Bortolan, G. y Degani, R., A review of some methods for ranking fuzzy subsets, Fuzzy Sets and Systems, 15 pp.1-19 (1985).

[5] Buckles, B.P. y Petry, F.E., Extension of fuzzy data base with fuzzy arithmetic, Proc. IFAC Symp. on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis, Pergamon Press, Oxford, pp.409,(1983).

[6] Buckley, J.J., Ranking alternatives using fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 15, pp.21-31 (1985).

[7] Campos, L., Modelos de la programación lineal difusa para la resolución de juegos matriciales imprecisos, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, (1986).

[8] Campos, L.M. y González. A., Un enfoque subjetivo para la comparación entre números difusos: el índice promedio, Por aparecer en las Actas de la XVI Reunión Nacional de la S.E.I.O. (1986).

[9] Campos L.M. y González, A., A subjective approach for ranking fuzzy numbers, sometido a Fuzzy Sets and Systems.

[10] Chanas S. y Kamburovski J., The use of variables in PERT, Fuzzy Sets and Systems,3,11 (1981).

[11] Chanas, S., Fuzzy Sets in a few classical operational research problems, Approximate Reasoning in Decision Analysis, M.M. Gupta, E. Sanchez, Eds. North-Holland, Amsterdam; 351 (1982).

[12] Chanas, S. y Kolodziejczyk, W., Maximun flow in a network with fuzzy arc capacities, Fuzzy Sets and Systems, 8,1965,(1982)

[13] Chang, W., Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions, Proc. Int. Conf. on Policy Anal. and Inf. Systems, pp.263-272 (1981).

[14] Chen, S.H., Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems 17, pp.113-129 (1985).

[15] Czogala, E.C. y Drewniak, J., Associate monotonic operations in fuzzy sets theory, Fuzzy Sets and Systems, 12, pp.249-270 (1984).

[16] Delgado, M., Una nueva definición de aplicación difusa, Stochastica, vol. IV, n.1 (1980).

[17] Delgado, M. y Verdegay, J.L., Resolución del problema del transporte difuso con funciones de pertenencia triangulares generales, Actas del XIV congreso nacional de Estadística I.O. e Informática, Granada pp.748-758 (1984).

[18] Delgado,M. y Verdegay,J.L., On the concept of fuzzy number, Proceeding of F.I.S.A.L. 84. Public U.I.B. pp.79-90.

[19] Delgado,M., Verdegay,J.L. y Vila, M.A., A procedure for ranking fuzzy numbers using fuzzy relations, por aparecer en Fuzzy Sets and Systems.

[20] Delgado,M., Verdegay,J.L. y Vila,M.A., El problema del árbol generador minimal para grafos difusos, por aparecer en Trabajos de I.O.

[21] Dijkman,J.G., Haeringen,H. y Lange,S.J., Fuzzy numbers, Journal of Math. Analysis and Appl.,92, pp.301-341, (1983).

[22] Dubois, D., Modeles mathematiques de l'imprecis et de l'incertain en vue d'applications aux techiques d'aide a la decision, Tesis Doctoral, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, (1983).

[23] Dubois,D. y Prade H., Algorithmes de plus courts chemin pour traiter des données flous, R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research,vol.12, n.2 Mai (1978).

[24] Dubois,D. y Prade,H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, INC (1980).

[25] Dubois,D. y Prade,H., Additions of interactive fuzzy numbers, IEEE Transactions on automatic control, vol 26,n.4, pp.926-936 (1981).

[26] Dubois,D. y Prade,H., Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Information Sciences, 30, pp.183-224, (1983).

[27] Dubois, D. y Prade,H., Fuzzy numbers. An overview, The Analysis of Fuzzy Information, editado por J.C.Bezdek CRS Press, Boca Ratón Fl.,USA (1985).

[28] Dubois,D. y Prade,H., Théorie des possibilités, Ed.Masson (1985).

[29] Fishburn,P.C., Les mathématiques de la décision, Ed. Montou/Ganthier-Villars (1973).

[30] Fustier,B., Contribution à l'étude d'un caractère statistique flou, Doc. de travail n.38, Institut de Math. Econom., Université de Dijon, France (1983).

[31] Gantner, T.E., Steinlage, R.C. y Warren, R.H., Compactness in fuzzy topological spaces, Math. Anal. Appl. 62, pp.547-562, (1978).

[32] Goetschel,R.,Jr. y Voxman, W., Topological properties of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 10, pp.87-99, (1983)

[33] Goguen, J.A., L-fuzzy sets, J. of Math. Anal. and Appl.,18, pp.145-174, (1967).

[34] González, A., Comparaciones entre números difusos por niveles de importancia subjetiva, Por aparecer en las Actas de la XV Reunión Nacional de la S.E.I.O., (1985).

[35] González, A. y Vila, M.A., Máximo y mínimo en una subclase de números difusos, Cuadernos de Est. Mat., vol.7-8, pp.107-120, (1984).

[36] González, A. y Vila, M.A., A subjective order relation between fuzzy numbers, por aparecer en Busefal.

[37] Hutton,B., Normality in fuzzy topological spaces, J. Math. An. Appl., 50, pp.74-79, (1975).

[38] Jain, R., Decision-making in the presence of fuzzy variables, IEEE trans. Systems Man Cybernet, 6, pp.698-703 (1976).

[39] Jain, R. Tolerance Analysis using fuzzy sets, Internat. J. Systems Sci, 7, pp. 1393-1401 (1976).

[40] Jain, R., A procedure for multiple-aspect decision making using fuzzy sets, Int. J., Systems sci., vol.8, n.1, pp.1-7, (1977).

[41] Kampé de Fèriet, J., La teoria generalisée de l'information et la mesure subjetive de l'information, Lecture Notes in Math.: Théories de l'information, Eds. J.Kampé de Fèriet y C.F.Picard, Springer-Verlag 398, pp.1-28, (1973).

[42] Kaufmann, A., A intruction to the theory of fuzzy subsets, Academic Press, New York (1975).

[43] Kerre, E.E., The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics, Aproximate Reasoning in Decision Analysis, M.M. Gupta y E. Sanchez,Eds, North-Holland, Amsterdam, pp.277-282, (1982).

[44] Klein, A.J., Generalizing the L-fuzzy unit interval, Fuzzy Sets and Systems, 12, pp.271-280, (1984).

[45] Lowen,R.,On R(L)+, Fuzzy Sets and Systems, 10, pp.203-209, (1983).

[46] de Luca, A. y Termini, S., Entropy and energy measures of a fuzzy set, Advances in fuzzy set theory and applications, M.M.Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager, pp.321-338, (1979).

[47] Mareš,M., How to handle fuzzy quantities, Kybernetika (Praga),13,23, (1977).

[48] Mareš,M., On fuzzy quantities with real and integer values, Kybernetika (Praga),13, 41 (1977).

[49] Marshall, A.W. y Olkin, I., Inequalities: Theory of Mayorization and its applications, Academic Press, (1979).

[50] Marshall, A.W. y Olkin, I., Inequalities via majorization. An introduction, General Inequalities 3. 3 rd International

Conf. on General Inequalities. Oberwolfach. Abril 26-Mayo 2. Ed. Beckenbach y Walter, pp.165-187, (1981).

[51] Mizumoto,M. y Tanaka, K., Some properties of fuzzy numbers, Advances in fuzzy set theory and applications. M.M. Gupta, R.K. Ragade y R.R. Yager, eds. (1979).

[52] Moore, R., Interval analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1966).

[53] Moore, R., Methods and applications of interval analysis, SIAM studies on Applied Maths.,Philadelphie (1979).

[54] Nahmias, S., Fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems, 1, pp.97-111, (1978).

[55] Negoita, C.V., Management applications of systems theory, Birkhaüser Verlag, Basel (1978).

[56] Nguyen, H.T., A note on the extension principle for fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl. 64, pp.369-380, (1978).

[57] Oftedal, H., Imprecision of specification of information systems parameters: a study of decision point probabilities, Inform. Syst., 6, 101, (1981).

[58] Prade, H., Operations research with fuzzy data, Fuzzy sets: Theory and Appl. to Policy Anal. and Inform. Systems, P.P. Wang, S.k. Chang, eds., Plenum, New York, 155, (1980).

[59] Prade, H., Lipski's approach to incomplete information data bases restated and generalized in the setting of Zadeh's possibility theory, Inf. Syst., 9, 27 (1984).

[60] Ramík,J. y Římánek,J., Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization, Fuzzy Sets and Systems, 16, pp.123-138 (1985).

[61] Rodabaugh, S.E., Fuzzy addition in the L-fuzzy real line, Fuzzy Sets and Systems, 8, pp.39-52 (1982).

[62] Roubens,M., Comparison of flat fuzzy numbers, Busefal, 24, pp.41-55 (1985).

[63] Sanchez, E., Solution of fuzzy equalities with extended fuzzy operations, Fuzzy Sets and Systems, 12, pp.237-248, (1984).

[64] Sanchez, E., Possibility distributions, fuzzy intervals and possibility measures in a linguistic approach to patter classification in medicine, Knowledge Representation in Medicine and clinical Behavioural Science. Abacus Press, L.Kohout y W. Bandler, eds, (1986).

[65] Tanaka, H., Ichihashi,H. y Asai, K., A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers, Control and Cybernetics, vol. 13, n.3, (1984).

[66] Tanaka, H. y Asai, K., Fuzzy linear programming with fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 13,1, (1984).

[67] Trillas, E. y Riera, T., Entropies in finite fuzzy sets, Inform. Sciences, 15, pp.159-168, (1978).

[68] Tsumura, Y., Terano, T. y Sugeno, M., Fuzzy fault tree anaysis, Summary of papers on general fuzzy problems, report no.7, pp.21-25, (1981).

[69] Umano,M. y Freedom,O., A fuzzy data base systems, Fuzzy information and decision processes, M.M. Gupta, E. Sanchez, eds, North-Hollad, Amsterdam, pp.339, (1982).

[70] Verdegay, J.L., El problema del transporte con parámetros difusos, Revista de la academia de Ciencias de Granada, Vol.II, pp.47-56, (1983).

[71] Wang, P.Z., From the fuzzy statistics to the falling random subsets, Advances in fuzzy sets, possibility theory and appl., P.P. Wang, ed. Plenum Press, N.Y. pp.81, (1983).

[72] Watson S.R., Weiss,J.J. y Donnell,M., Fuzzy decision analysis, IEEE Trans. on Syst. Man and Cybern., 9, 1, (1979).

[73] Yager, R.R., Ranking fuzzy subsets over the unit interval, Proc. 1978. CDC (1978), pp.1435-1437.

[74] Yager, R.R., On choosing between fuzzy subsets, Kybernetes, vol. 9 pp. 151-154, (1980).

[75] Yager, R.R., A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval, Inform. Sci. 24, pp.143-161 (1981).

[76] Yager, R.R., Probabilities from fuzzy observations, Inf. Sci.,32, 1, (1984).

[77] Yamakawa, T., The multi-valued programmable array and its applications. Conferencia pronunciada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, Noviembre 1986.

[78] Young, R.C., The algebra of many-valued quantities, Math.Ann, 104, pp.260-290, (1931).

[79] Zadeh,L.A. Fuzzy sets, Information and Control, 8, pp.338-353, (1965).

[80] Zadeh,L.A., Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trnas. Systems Man and Cybern., 3, pp.28-44, (1973).

[81] Zadeh, L.A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Inf. Sci, 8, 199 (Parte I); 8, 301 (Parte II); 9,43 (Parte III), (1975).

[82] Zadeh,L.A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems,1, pp.3-28, (1978).

[83] Zadeh,L.A., A theory of approximate reasoning, Machine Intelligence (vol.9) J.E. Hayes, D. Michie, L.I. Miknlich, eds., Wiley, N.Y. pp.149, (1979).

[84] Zadeh,L.A., A computational approach to linguistic quantifiers in natural languages, Comp. Math. with Appl., 9, 149, (1983).

[85] Zimmermann, H.J. y Zysno, P., Quantifiying vagueness in decision models, European Journal of Operational Research, 22, pp.148-158, (1985).