UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Tesis Doctoral

RESOLUCIÓN DE TAREAS QUE INVOLUCRAN PATRONES CUALITATIVOS Y CUANTITATIVOS POR ESTUDIANTES DE 6-7 AÑOS

Realizada por
D. Rodolfo Morales Merino

Dirigida por la doctora
Dª. María C. Cañadas

Granada, 2018

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Rodolfo Alexi Morales Merino
ISBN: 978-84-1306-027-9
URI: http://hdl.handle.net/10481/54074

Esta memoria de investigación pretende dar respuesta al requisito de elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctor dentro del programa de doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. En particular, esta tesis se enmarca en la línea Educación Matemática, en el grupo de “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”.

Este trabajo ha sido realizado en el marco de dos proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-4163-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y en el seno del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación. Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”. Por último, este trabajo se ha realizado gracias a una beca otorgada por el Ministerio de Educación de Chile por medio de Becas-Chile y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) cuya referencia es PFCHA 72150072.

A mi esposa Guiselle mi compañera incondicional. Por escribir siempre un capítulo más en el libro de mis días.

A mi hija Alison, el regalo más tierno que Dios me ha dado. Por robarme sonrisas y llenarme de ternura en momentos difíciles.

A mi abuela Luz Elena, que a mi regreso no te podré ver, aunque estarás por siempre en mi corazón.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por cuidarme siempre y por guiar cada uno de mis pasos.

A la Dra. María C. Cañadas. Por haber querido ser la directora de esta tesis doctoral. Por su paciencia, disposición, apoyo constante y compromiso incondicional para el logro de esta tesis doctoral. María, gracias por compartir tus conocimientos los cuales me han ayudado a dar un paso más en mi vida profesional y por haber contribuido profesionalmente a mi formación como investigador.

A los académicos Encarnación Castro, Bárbara Brizuela, Pedro Gómez y Alfredo Bautista por contribuir con su experiencia, conocimiento y rigurosidad al logro de esta tesis doctoral.

A cada uno de los profesores integrantes del proyecto "Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico" (PENFU), por aprender de ellos.

A los estudiantes sujetos de investigación, por toda la disposición y motivación entregada.

A mis compañeros de máster y doctorado Diana y Eder, por compartir sus conocimientos cuando requerí de ellos.

A Karen, por haber encontrado una buena amiga.

A mis compañeros chilenos (Carmen, Karen, Leticia, Juan, Eder y Danilo) por los gratos momentos de reunión.

A Becas-Chile por darme la oportunidad de crecer personal y profesionalmente al estudiar este doctorado.

A los profesores Marcial Valenzuela y Juan Mansilla por contribuir con su sabiduría, motivación y apoyos constantes en mis logros profesionales.

A la Sra. Lorena Tapia por los consejos profesionales que me han ayudado para bien en mi vida profesional.

A mis amigos de siempre.

En especial a mis padres, hermanas y familia, por animarme siempre a continuar por este camino. Por sus apoyos y refuerzos constantes que me han hecho sentirlos siempre cerca.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN

En esta Tesis Doctoral nos centramos en patrones cualitativos y cuantitativos en los primeros cursos de Educación Primaria. Los patrones cualitativos son aquellos donde los elementos del núcleo donde se observa la regularidad del patrón atienden a atributos cualitativos como color, forma, tamaño, textura, entre otros. Los patrones cuantitativos son aquellos elementos donde se observa la regularidad del patrón atiende a números o cantidades. La introducción de ambos tipos de patrones se hace en edades tempranas, siguiendo la normativa curricular y las sugerencias desde el ámbito investigador. Por un lado, el trabajo con patrones permite a los estudiantes predecir acontecimientos y hablar de las relaciones y las conexiones entre conceptos matemáticos. Por otro lado, favorece el desarrollo del pensamiento algebraico.

Desde una perspectiva investigadora, el trabajo con patrones cualitativos se ha centrado en Educación Infantil, siendo escasos los estudios en Educación Primaria. La investigación en patrones cuantitativos, en un contexto funcional del *early algebra*, se ha desarrollado en las últimas décadas, abarcando diferentes cursos en Educación Primaria. Sin embargo, en los primeros cursos (primero y segundo curso) de este nivel educativo, la investigación se encuentra en un estado incipiente, requiriendo profundización. Lo expuesto anteriormente justifica el interés de esta investigación.

El objetivo general de esta investigación es describir cómo estudiantes de 6-7 años resuelven tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos. Partimos de la teoría constructivista del aprendizaje. Desde esta teoría consideramos al estudiante constructor de conocimiento y al docente como un sujeto que interviene en el estudiante orientándolo a que construya el conocimiento. Nos centrarnos en describir los tipos de patrones que identifican estos estudiantes cuando abordan tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos, y su generalización. Además, indagamos sobre las estrategias que utilizan y las respuestas apropiadas e inapropiadas que manifiestan estudiantes de estas edades, junto con las intervenciones de una entrevistadora ante respuestas inapropiadas de los estudiantes.

Planteamos a los estudiantes diferentes tipos de tareas de patrones cualitativos y cuantitativos, estos últimos en un contexto funcional del *early algebra*. Recogimos la información por medio de un experimento de enseñanza constituido por varias sesiones de trabajo y entrevistas semiestructuras. El equipo de investigación estuvo constituido por tres

miembros del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo: el autor de esta Tesis Doctoral, la directora de la misma y un profesor del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. El equipo de investigación estuvo a cargo de guiar el experimento de enseñanza y las entrevistas, que grabamos en videocámaras y posteriormente trascribimos y analizamos.

Entre los resultados, destacamos que estudiantes de 6-7 años abordaron tareas de patrones cualitativos y cuantitativos identificando patrones variados y empleando estrategias diversas. Ante tareas de patrones cualitativos (lógicos), los estudiantes identificaron patrones lógicos y patrones reiterativos considerando distinto número de elementos en el núcleo. Con base en estos dos tipos de patrones, los estudiantes generaron dos tipos de seriaciones: reiterativas y no reiterativas.

Ante tareas de generalización de patrones cuantitativos en un contexto funcional del *early algebra*, los estudiantes identificaron relaciones funcionales de covariación y correspondencia y generalizaron esta última relación funcional. Además, emplearon estrategias diversas como las de conteo y operatoria. El resultado anterior, pone de manifestó las maneras distintas en que estudiante de 6-7 años abordan una tarea de relación funcional, lo que puede ser útil para estudios futuros y la práctica docente.

Los estudiantes manifestaron siete tipos diferentes de respuestas inapropiadas, donde las más recurrentes fueron: agregar la cantidad de la variable independiente a la última cantidad conocida de la variable dependiente; respuesta sin sentido, y sumar cinco a la última cantidad conocida de la variable dependiente. Además, observamos seis tipos de intervenciones diferentes de la entrevistadora ante una respuesta inapropiada del estudiante, donde las más recurrentes fueron: hacer preguntas para recordar a los estudiantes los elementos del problema: (a) cantidad constante o (b) relación entre los domingos y la cantidad de dinero, recurrir a casos consecutivos o no consecutivos específicos previos o nuevos, y recurrir a la representación concreta o simbólica. Los tipos de respuestas inapropiadas de los estudiantes y los tipos de intervenciones de la entrevistadora hallados en este estudio, suponen una contribución importante a la investigación en *early algebra*. Por un lado, porque la investigación generalmente se ha centrado en lo que hacen estudiantes de primeros cursos educativos relegando los errores y dificultades a un segundo plano. Por otro lado, la investigación es escasa en cuanto a la intervención del docente o entrevistador ante una respuesta inadecuada de un estudiante en una tarea de relaciones funcionales.

Por último, evidenciamos que las intervenciones de la entrevistadora favorecieron que los estudiantes respondieran apropiadamente, identificaran relaciones funcionales y alcanzaran la generalización. Lo anterior evidencia que en una tarea de generalización de relaciones funcionales la intervención es fundamental para conseguir resultados favorables en los estudiantes.

PRESENTACIÓN

La presente investigación corresponde a una tesis doctoral realizada por el estudiante del Doctorado en Ciencias de la Educación Rodolfo Morales Merino. Esta investigación se realizó dentro de la línea de investigación de "Educación Matemática" en el grupo de "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada y bajo la dirección de la doctora María C. Cañadas Santiago, Profesora Titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de dicha universidad. Se enmarca dentro de dos proyectos de investigación I+D+I del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España que se centran en el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria (EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P).

Partimos desde teoría constructivista del aprendizaje. Así, consideramos al estudiante como un sujeto que construye el conocimiento en un proceso activo e interno en el que interacciona la asimilación de la información y sus propias capacidades innatas y nociones ya adquiridas. Desde esta teoría, consideramos al docente como un sujeto activo que interviene en el estudiante orientándolo a que construya el conocimiento de los estudiantes (Rajadell y Medina, 2015).

En esta investigación nos centramos en cómo estudiantes de 6-7 años abordan tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos, y la generalización que logran. Además, abordamos los errores y dificultades que manifiestan estos estudiantes y las intervenciones docentes cuando los estudiantes dan respuestas erradas.

Estructuramos esta memoria en siete capítulos. En el capítulo primero justificamos la investigación de acuerdo a cuatro aspectos: curricular, personal, profesional e investigadora. Finalmente mostramos la estructura de este documento en torno a los tres estudios que constituyen la investigación desarrollada.

Presentamos el marco teórico en el capítulo segundo, en el que describimos los principales referentes teóricos que sustentan esta investigación: la noción de patrón y tipos de patrones, centrándonos en la distinción cualitativos versus cuantitativos, así como la noción de generalización. Además, describimos la propuesta curricular *early algebra* y aquellos elementos que se desprenden de ella y que empleamos en esta investigación. Por último describimos las nociones de errores, dificultades e intervención.

Presentamos los principales antecedentes de investigación en el capítulo tercero. Detallamos en este capítulo antecedentes sobre las nociones descritas en el marco teórico.

Introducimos los objetivos de investigación en el capítulo cuarto. Detallamos el objetivo general y los seis objetivos específicos que abordamos para la consecución del objetivo general.

Recogemos el método en el capítulo quinto. Mostramos en este capítulo la metodología seguida para dar respuesta a los objetivos de investigación. Presentamos dos marcos metodológicos diferentes, uno para el estudio 1 y el segundo para los estudios 2 y 3. Para cada metodología, describimos el tipo de investigación, los sujetos, los instrumentos de recogida de información, la forma en que recogimos los datos y cómo analizamos los datos.

Presentamos en el capítulo sexto los resultados correspondientes a los tres estudios realizados. El primero tal cual fue publicado en la revista correspondiente, mientras que el segundo y tercero tal y como fueron remitidos como manuscrito a las revistas.

Finalmente, presentamos las conclusiones en el capítulo séptimo. Describimos cómo dimos respuestas a los objetivos de investigación que nos planteamos y a los objetivos del proyecto de investigación que enmarca nuestro estudio. Además, describimos otros logros donde destacamos las contribuciones a la investigación y la docencia, las aportaciones relacionadas con esta tesis doctoral, así como las limitaciones y las líneas abiertas para futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos los principales aspectos que justifican nuestra investigación desde los aspectos curricular, personal, profesional e investigadora. Finalmente describimos la estructura de esta memoria con base en los tres estudios que constituyen la investigación.

JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

Hoy en día diversos países incorporan en sus currículos los patrones a partir de los primeros cursos, como forma de promover el pensamiento algebraico. Algunos de estos países son Australia, Canadá, Chile, China, Corea, España, Estados Unidos, Japón y Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013; Ministerio de Educación de Chile, 2012). Seleccionamos, para mostrar lo que proponen relativo a la enseñanza del álgebra, en especial a los patrones, los currículos de Estados Unidos, Chile y España. El primer país lo seleccionamos por ser un referente a nivel internacional. El segundo lo seleccionamos por ser el país de procedencia del autor de esta tesis y además es quién financia la estadía del autor en España para la realización de esta investigación. El tercer país porque la investigación que da lugar a esta tesis doctoral la realizamos en el contexto español y porque este trabajo se desarrolló en el ámbito de dos proyectos de investigación de este país.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) es un referente a nivel internacional y es pionero en la introducción de elementos algebraicos en edades escolares tempranas. El NCTM otorga un valor primordial a la introducción del álgebra desde los primeros cursos educativos, dado que el álgebra “es importante en la vida adulta, tanto para el trabajo como para la educación postsecundaria. Todos los estudiantes deberían aprender álgebra” (p. 39). Según este documento, los estudiantes no solo deben saber manipular símbolos sino que también deben “comprender los conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones” (p. 39). Los patrones se proponen como contenido primordial para la introducción del álgebra, porque son una de las primeras experiencias que los estudiantes pueden tener con el álgebra, llegando a describir verbalmente regularidades y la generalización de relaciones matemáticas. El NCTM indica que, a partir de Educación

Infantil, los estudiantes pueden: (a) descubrir patrones en configuraciones de objetos, figuras y números y (b) usar los patrones para predecir cuál es el próximo elemento en una secuencia. Algunos ejemplos de actividades que este documento propone son: reconocer, describir y ampliar patrones relativos a sonidos y formas geométricas sencillas, y describir patrones como 2, 4, 6, 8…, de modo que el estudiante fije la atención en cómo se obtiene un término a partir del anterior, por ejemplo sumando 2. Otras actividades destacables son que el estudiante complete tablas de funciones por medio de la identificación de patrones donde el foco son las relaciones funcionales.

El currículo chileno Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2012) se destaca por la introducción temprana de elementos algebraicos y sugiere que en el trabajo con el álgebra los estudiantes deben buscar "relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, lo que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra" (p. 91). Además, este currículo otorga mención especial al trabajo con patrones a partir de los primeros cursos de Educación Primaria porque permite a los estudiantes construir una base sólida en patrones lo que "facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico" (p. 91). Morales y Cañadas (2016) destacan que en este currículo se propone el trabajo con patrones a partir de primero de Educación Primaria. Algunas de las actividades que propone son aquellas en que los estudiantes reconozcan, describan, creen y continúen patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos, entre otros) y reconocer describir, crear y continuar patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes. A partir de tercero de Educación Primaria se proponen actividades orientadas a la identificación de patrones involucrados en funciones por medio de la cumplimentación de tablas de funciones.

En el currículo español observamos que a partir de Educación Infantil se proponen actividades relativas a patrones dado que se menciona que los estudiantes manipulen funcionalmente objetos identificando atributos (forma, color, tamaño, peso entre otros) y cualidades y establezcan relaciones de agrupamientos, clasificaciones, orden y cuantificación (Ministerio de Educación y Ciencia de España, 2006). En cuanto a la Educación Primaria a partir del primer curso se sugiere que los estudiantes identifiquen regularidades y se aproximen a las propiedades de la suma y la resta. También se propone que los estudiantes deben buscar regularidades en figuras y cuerpos geométricos a partir de la manipulación de objetos (Ministerio de Educación y Ciencia de España, 2007). En cuanto al trabajo con patrones en un contexto funcional del álgebra escolar este currículo propone que al finalizar la Educación Primaria los estudiantes deben ser capaces de “describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387).

Como observamos en la descripción anterior, a nivel curricular, los patrones son un contenido importante en el currículo de Educación Primaria. En la mayoría de los casos, se destaca su interés para la introducción de la enseñanza del álgebra a partir de los primeros cursos de Educación Primaria. Además, se presentan actividades con las cuales se introduce el trabajo con patrones. Esto hace que la presente investigación pueda tener implicaciones para la docencia en Educación Primaria.

JUSTIFICACIÓN PERSONAL Y PROFESIONAL

A partir del año 2003 comencé mi formación como maestro de Educación General Básica (6 a 13 años) con especialización en matemáticas debido a la vocación que siempre sentí por la enseñanza de esta disciplina. Durante esta formación sentí gran inquietud por profundizar sobre temas relativos a los patrones y las regularidades dado que, por lo general, los contenidos matemáticos que trabajábamos en ese entonces en las aulas se establecían ciertos patrones y regularidades. Esta situación me motivo a continuar profundizando sobre los patrones.

Posteriormente en el año 2007 comencé mi carrera como maestro. A partir de ese entonces observé que el currículo contenía tareas de patrones para estudiantes desde muy temprana edad. Además, observé que los estudiantes podían resolverlas de modo que continuaban series cualitativas o numéricas. Sin embargo, las respuestas de estos estudiantes eran variadas y en algunos casos no eran lo que se esperaba de la tarea propuesta, aunque los estudiantes seguían sus propios razonamientos sobre los patrones propuestos. Esta situación fue nueva y me situó en otra vereda. Ya no era solo profundizar sobre el contenido de patrones, sino que era más bien profundizar en cómo los estudiantes abordaban una tarea que involucraba el trabajo con patrones. Así, sentí curiosidad sobre cómo los estudiantes piensan y qué habilidades ponen en juego cuando resuelven tareas de patrones. Algunas preguntas que me surgieron fueron ¿de qué manera un estudiantes pone de manifiesto pensamiento algebraico o pensamiento matemático cuando resuelve tareas de patrones? ¿Cuáles son los descriptores que permiten evidenciar si un estudiante manifiesta pensamiento algebraico o pensamiento matemático, en una tarea algebraica? Estas cuestiones fueron clave para iniciar mis estudios en investigación de Didáctica de la Matemática en el contenido de patrones.

En el año 2012 ingresé a estudiar el Master en Didáctica de la Matemática en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, financiado por una Beca ganada por Becas-Chile y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Gobierno de Chile. Gracias a los contenidos de algunas asignaturas, particularmente de Pensamiento Numérico y Algebraico I y las ayudas de las profesoras María C. Cañadas y Encarnación Castro concreté un tema de estudio de acuerdo a mis intereses: los tipos de patrones que identifican estudiantes de primeras edades escolares en tareas de patrones cualitativos. Sobre este tema realicé mi Trabajo Fin de Máster (Morales, 2013).

El Trabajo Fin de Máster aumentó mi inquietud por profundizar cómo abordan los estudiantes tareas de patrones, tema sobre el que he realizado mi Tesis Doctoral. Por tanto, esta Tesis Doctoral es una continuación de mi Trabajo Fin de Máster. En la tesis abordamos cómo los estudiantes de las primeras edades trabajan los patrones cualitativos y cuantitativos hasta llegar a la generalización. En particular, en el ámbito de los patrones cuantitativos nos centramos en el contexto funcional del *early algebra*.

JUSTIFICACIÓN INVESTIGADORA

Diversos estudios ponen de manifiesto que la mayoría de las dificultades que evidencian los estudiantes de Educación Secundaria con el álgebra radican en el paso abrupto entre la aritmética que se trabaja en Educación Primaria y el álgebra que se trabaja en Educación Secundaria (Lins y Kaput, 2004; Molina, 2009). Otra causas de estas dificultades radica en que a la aritmética que se enseña en la Educación Primaria no se le da el tratamiento que sería necesario para introducir elementos algebraicos (Kaput, 2000; Molina, 2009; Warren y Cooper, 2008).

La introducción temprana de elementos algebraicos a partir de los primeros cursos educativos ayudaría a superar las dificultades que presentan los estudiantes en niveles educativos superior (Kaput, 1998). Uno de estos elementos algebraicos son los patrones. Los patrones suelen ser cualitativos y cuantitativos y ambos se consideran fundamentales para construir nociones algebraicas en los estudiantes a partir de los primeros cursos educativos (Castro-Rodriguez, 2014; NCTM, 2000; Owen, 1995; Threlfell, 1999). Sin embargo, hasta hace unas décadas, a nivel investigador, han recibido poca atención (Blanton, Kaput, 2011; Threlfell, 1999; Waters, 2004).

La investigación en patrones cualitativos a nivel internacional son pocos y por lo general se centran en estudiantes de Educación Infantil. Entre estos estudios se destacan los de Papic, Mulligan y Mitchelmore, (2011); Rodrigues y Serra, (2015) y Threlfall (1999) quienes indagan sobre las estrategias que ponen de manifiesto estudiantes de Educación Infantil cuando se les proponen tareas de patrones cualitativos. Estos investigadores dan cuenta de que estudiantes de este curso educativo identifican la unidad de repetición, transfieren el patrón y extienden deliberadamente el patrón identificado. A nivel nacional los trabajos de Morales y Cañadas (2015) y Morales, Cañadas y Castro (2017), son unos de los pocos que se han hecho en patrones cualitativos en estudiantes de 6-7 años y dan cuenta que estudiantes de estas edades continúan seriaciones por medio de la identificación y continuación de patrones variados.

La propuesta curricular *early algebra*, que surge del trabajo de Kaput y colaboradores (p. ej., Kaput, 1998; 2000), busca introducir elementos algebraicos a partir de los primeros niveles educativos. La comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones es uno de los enfoque de la propuesta *early algebra* (Kaput, 2000; NCTM, 2000) y se conoce como enfoque o aproximación funcional al álgebra escolar. En este enfoque nos centramos en este trabajo en lo relativo a patrones cuantitativos. Se considera que esta aproximación al álgebra escolar posee un gran potencial para introducir y promover elementos algebraicos a partir de los primeros niveles educativos.

La investigación en patrones cuantitativos en un contexto funcional del álgebra escolar, se encuentran en un estado incipiente a nivel internacional como nacional (Cañadas y Molina, 2016). A nivel internacional se destacan los estudios de Blanton y Kaput (2004); Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens (2015); Cañadas, Brizuela y Blanton (2016) y Warren y Cooper, (2005), que dan cuenta que estudiantes entre 6-7 años son capaces de identificar patrones entre cantidades que covarían como las relaciones de correspondencia y la covariación y emplean estrategias recursivas. A nivel nacional la investigación en patrones cuantitativos se ha venido realizado desde hace algunos años, siendo el estudio de Castro (1995) un referente a nivel nacional. Desde el enfoque funcional del *early algebra*, se destacan los trabajos de Cañadas y Fuentes (2015); Cañadas y Morales (2016) y Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (2016) quienes dan cuenta de que estudiantes de 6-7 años son capaces de identificar patrones entre cantidades que covarían de modo que son capaces de identificar relaciones funcionales (correspondencia y covariación). Además, emplean estrategias como el conteo sobre dibujos, cuentan el total de los objetos o cuentan sobre el mayor sumando (variable independiente) y realizan estrategias de operatoria variadas. En estas investigaciones observamos que los estudiantes generalizan verbalmente los patrones identificados. Los trabajos anteriormente citados son pioneros en España.

A pesar de los resultados de las investigaciones en tareas de patrones llevadas a cabo a nivel contexto internacional y nacional, observamos que se requiere de más investigaciones en estudiantes de entre 6-7 años. Por un lado, se requiere aportar más información sobre posibles descriptores que clarifiquen la forma en que los estudiantes de estas edades abordan tareas que involucran patrones, que se distinga los tipos de patrones que los estudiantes identifican y ampliar el campo de las estrategias que emplean. Además se hace necesario evidenciar si estudiantes de 6-7 años alcanzan la generalización y de qué manera la hacen.

La investigación en tareas de patrones con estudiantes de primeros cursos educativos se ha enfocado en lo que hacen los estudiantes y relega los errores y las dificultades que evidencian los estudiantes. Lo anterior sugiere que sea necesario indagar en esta temática, dado que en los últimos años los errores y las dificultades han recibido una connotación destacada en la construcción de conocimiento (Kapur, 2008). Así como los errores y las dificultades de los estudiantes, las intervenciones del docente también son un tema poco explorado siendo que en algunas de las investigaciones se observan pero sin ser el núcleo de interés de las mismas.

En nuestra investigación abordamos los aspectos mencionados en los párrafos anteriores. Buscamos complementar los resultados de investigación existentes a nivel internacional y nacional. Además, buscamos proporcionar información útil para la práctica docente sobre la enseñanza del álgebra en la Educación Primaria y la formación de profesores de este nivel educativo.

ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN: TRES ESTUDIOS

Esta tesis se pretendió realizar como compilación de artículos. A principios de septiembre de 2018 está publicado el primero, aceptado para publicación el segundo y en revisión el tercero. Dado que uno de ellos no está aceptado, nos referiremos a estos tres trabajos como estudios a partir de aquí. Los tres estudios tratan sobre el trabajo que realizan los estudiantes de 6-7 años en tareas de patrones cualitativos y cuantitativos; los describimos a continuación.

Estudio 1

Este estudio ha sido publicado y constituye el artículo 1. Su referencia es la siguiente.

- Morales, R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, *11*(4), 233-252. (Artículo 1)

La revista PNA ha sido incluida en Scopus en 2017, pendiente de publicación de los índices SNIP y SJR. Cuenta con el sello de calidad de la FECYT. Además está indexada en las siguientes bases de datos: Aalborg University Database, Academic Journal Database, Anvur, Academic Search Complete, Academic Search Elite, Academic Search Premier, Academic Search Ultimate, EZ3, Fuente Académica, Fuente Académica Plus, Fuente Académica Premier, Biblioteca Electrónica de Ciencia y Tecnología, British Library, Catálogo BNE, CIRC (clasificación B), Copac, Dialnet, Digibug, Dialnet, DRJI, EBSCO, Emerging Sources Citation Index, ERA, ERIC, ERIH plus, Funes, Gale, Genamics, Sello de calidad de la FECYT, Global Impact Factor, Heal, Hispana, Infobase Index, IRESIE, Kilgore Wild Library, Latindex, Masader, MathEduc Database, MIAR, Observatorio de Revistas Científicas de Ciencias Sociales, Psicodoc, REBIUN, REDIB, Redined, Red CSIC, Road, Standnford Libraries, Sucupira, Suncat, Sudos, TIB, Ulrich, University of Macau, VQR, World Cat, ZDB. Esta revista cuenta con otros índices de calidad tales como: Indicadores de calidad: MIAR: 9.5, Incluída en Latindex-directorio y Latindex-catálogo, criterios cumplidos: 31. También está incluida en RESH (impacto 0.026; criterios CNEAI cumplidos: 16; criterios ANECA cumplidos: 18) Indexada en DICE (categoría ANEP: B; categoría

CARHUS: B; valoración de la difusión internacional: 9; internacionalidad de las contribuciones 44.44).

En el estudio 1 indagamos sobre patrones que identifican dos estudiantes de 6-7 años en tareas de patrones cualitativos. El marco teórico de este estudio gira en torno a la noción de patrón y sus elementos. Particularmente nos centramos en patrones lógicos y seriaciones. Una seriación atiende a una organización de elementos que sigue un determinado patrón. En los antecedentes destacamos la poca investigación realizada en estudiantes de 6-7 años sobre patrones lógicos y que los existentes se centran mayormente en Educación Infantil.

Recogimos la información por medio de entrevistas semiestructuradas individuales a dos estudiantes, a las que propusimos 10 tareas de patrones lógicos.

Entre los resultados, destacamos los aportes teóricos sobre diferentes patrones que las estudiantes identificaron y utilizaron para continuar seriaciones cualitativas en tareas de patrones lógicos. Los patrones que identificaron las estudiantes atienden a patrones de repetición (reiterativos) y patrones lógicos, considerando diferente número de elementos en el núcleo del patrón. Por medio de la identificación y continuación de patrones las estudiantes generaron dos tipos de seriaciones: (a) reiterativas, y (b) no reiterativas.

Estudio 2

Este estudio se encuentra en prensa y constituye el artículo 2. Su referencia es la siguiente.

- Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (en prensa). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*. (Artículo 2)

La revista Enseñanza de las Ciencias está incluida en la WOS con un factor de impacto actual de JCR 0.549 en el año 2016 y se sitúa en el Q4 (195/235) en Education & Educational Research. Además está incluida en Scopus, con índice H 10. En el 2017 está en el Q2 (593/979) en el área de Educación. Tiene Cite Score 0,52, SNIP 0,87 y SJR 0,521. Esta revista cuenta con el sello de calidad de la FECYT. También se encuentra indexadas en las siguientes bases de datos: CARHUS +, CIRC, DIALNET plus, DICE, ERIH PLUS, Google Schoolar, IRESIE, Latindex (Catálogo), MathEduc, MIAR, REBIUN. Otros índices de calidad que caracterizan a esta revistas son: Clasificación CIRC – grupo B, Índice MIAR – ICDS 9, Categoría CARHUS grupo A, 31 Criterios Latindex cumplidos (catálogo), 14 Criterios CNEAI cumplidos según RESH, 17 Criterios ANECA cumplidos según RESH y en Google académico índice H5 14 y mediana h5 26.

El estudio 2 constituye el artículo 2 y es una continuación del artículo 1. Partiendo de los resultados del artículo 1, realizamos ciertos cambios para continuar la investigación. Los principales cambios fueron el tipo de patrón foco de nuestro trabajo y la metodología. En este estudio indagamos sobre la identificación de patrones cuantitativos (relaciones funcionales), las estrategias que usan y la generalización que hacen estudiantes de 6 años, en tareas que involucran relaciones funcionales lineales. Además, profundizamos sobre las relaciones existentes entre relaciones funcionales que identifican los estudiantes y las estrategias que emplean. Para llevar a cabo este estudio realizamos un experimento de enseñanza en un curso de primero de Educación Primaria de 30 estudiantes.

El marco teórico de este estudio gira en torno al constructo pensamiento funcional como un tipo de pensamiento algebraico. Sobre el pensamiento funcional se desprenden dos tipos de relaciones funcionales que se establecen entre cantidades que covarían y que ponen de manifiesto este tipo de pensamiento cuando los estudiantes las identifican. Estas relaciones funcionales son: correspondencia y covariación. Las relaciones funcionales por sus características son consideradas como patrones cuantitativos. Además, ahondamos sobre las estrategias que emplean los estudiantes cuando identifican estas relaciones funcionales, destacando la generalización. En los antecedentes de este estudio, seleccionamos aquellos que aluden a la identificación de relaciones funcionales de estudiantes de primeras edades educativas, así como las estrategias que emplean en una tarea de relaciones funcionales y la generalización que hacen.

Recogimos los datos por medio de la implementación de un experimento de enseñanza donde realizamos 5 sesiones de trabajo de 90 minutos. Para complementar la recogida de datos llevamos a cabo entrevistas semiestructuradas a un grupo de cuatro estudiantes.

Los principales aportes teóricos que aporta este estudio es que pone de manifiesto que estudiantes de 6 años son capaces de identificar relaciones funcionales de correspondencia, y covariación. Además, damos cuenta de que hay estrategias como las de operatoria y conteo que se vinculan con ambas relaciones funcionales. Por último, se evidencia que la generalización se ha vinculado solo a la relación funcional de correspondencia identificada por el estudiante.

Estudio 3

Este estudio se encuentra en proceso de revisión y constituye el manuscrito 3. Su referencia es la siguiente.

- Cañadas, M. C., Morales. y Bautista, A. (en revisión). Second graders' functional thinking in a generalization task: appropriate and inappropiate responses and interventions. *International Journal of Science and Mathematics Education.* (Manuscrito 3)

Esta revista está incluida en la WOS, con factor de impacto actual (2016) 1.474, situándose en el Q2 (70/235) del ranking de Education and Educational Research-SSCI. Además, está incluida en SCOPUS, con índice H 27 y en el Q1 (65/327 en 2017) en el área de Educación. Tiene CiteScore 1.1, SNIP 1.072 y SJR 0.737 en el área de Education. También se encuentra indexada en: Academic OneFile, CNKI, Current Abstracts, Current Contents / Social & Behavioral Sciences, EBSCO Education Research Complete, EBSCO Education Source, EBSCO OmniFile Full Text (H.W. Wilson), EBSCO TOC Premier, Educational Research Abstracts Online (ERA), ERIC System Database, Google Scholar, OCLC, ProQuest Materials Science & Engineering Database, ProQuest SciTech Premium Collection, ProQuest Technology Collection, Studies on Women & Gender Abstracts, Summon by ProQuest, Wilson Education Abstracts. Esta revista cuenta con otros índices de calidad tales como: MIAR: 10.7 CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas): Grupo A en Ciencias Sociales Evaluada, Carush Plus+ 2014: Grupo B. Además está indexada en Google Scholar (H5-index 24, H5-median 37).

Este estudio es una continuación del estudio 2. En el estudio 3 indagamos sobre las respuestas adecuadas e inadecuadas de ocho estudiantes de 6-7 años (seleccionados de entre aquellos que participaron en nuestro estudio 2) antes y después de la intervención de la entrevistadora. Las respuestas adecuadas las distinguimos entre aquellas en que los estudiantes identificaron o no una relación funcional, mientras identificamos y categorizamos diferentes respuestas inadecuadas. Además, consideramos si los estudiantes generalizan la relación funcional identificada o no. También abordamos la intervención que realiza la entrevistadora posterior a una respuesta inadecuada por parte del estudiante.

El marco teórico de este estudio, al igual que en el estudio 2, gira en torno al pensamiento funcional y las relaciones funcionales e incluimos la noción de generalización, intervención docente y errores y dificultades en Educación Matemática. En este estudio consideramos aquellos antecedentes relativos a la identificación de relaciones funcionales y la generalización de estudiantes de primeros niveles educativos. Además, incluimos estudios relativos a las intervenciones docentes y a los errores y dificultades de estudiantes en tareas de relaciones funcionales.

Para este estudio recogimos los datos por medio de entrevistas semiestructuradas individuales a cada uno de los ocho estudiantes que seleccionamos dentro del grupo con el que trabajamos en el estudio 2.

Los principales aportes teóricos de este estudio es que confirman los resultados obtenidos en el estudio 2. Esto quiere decir que estudiantes de entre 6-7 años son capaces de identificar relaciones funcionales de correspondencia y covariación, y generalizan la relación de correspondencia identificada. Además, muestra una primera aproximación a las intervenciones de la entrevistadora para orientar a los estudiantes a la identificación de una relación funcional cuando estos manifiestan una respuesta inapropiada. Se da conocer un sistema de categorías el cual permitió analizar y categorizar las intervenciones docentes en las que se distinguieron diferentes tipos de intervenciones. Por último, se da conocer una aproximación a los errores y dificultades que manifestaron los estudiantes a modo de respuestas inapropiadas, donde también se generó un sistema de categorías que ayudó a analizar estas respuestas, distinguiendo en ellas diferentes tipos.

Como observamos en las descripciones los dos artículos y el tercer manuscrito han sido enviados a revistas que cumplen con los requisitos impuestos por la Escuela Internacional de Posgrado.

Esquema de los tres estudios

Mostramos en la figura 1.1 un esquema con los elementos principales de los tres estudios, unos compartidos y otros no.

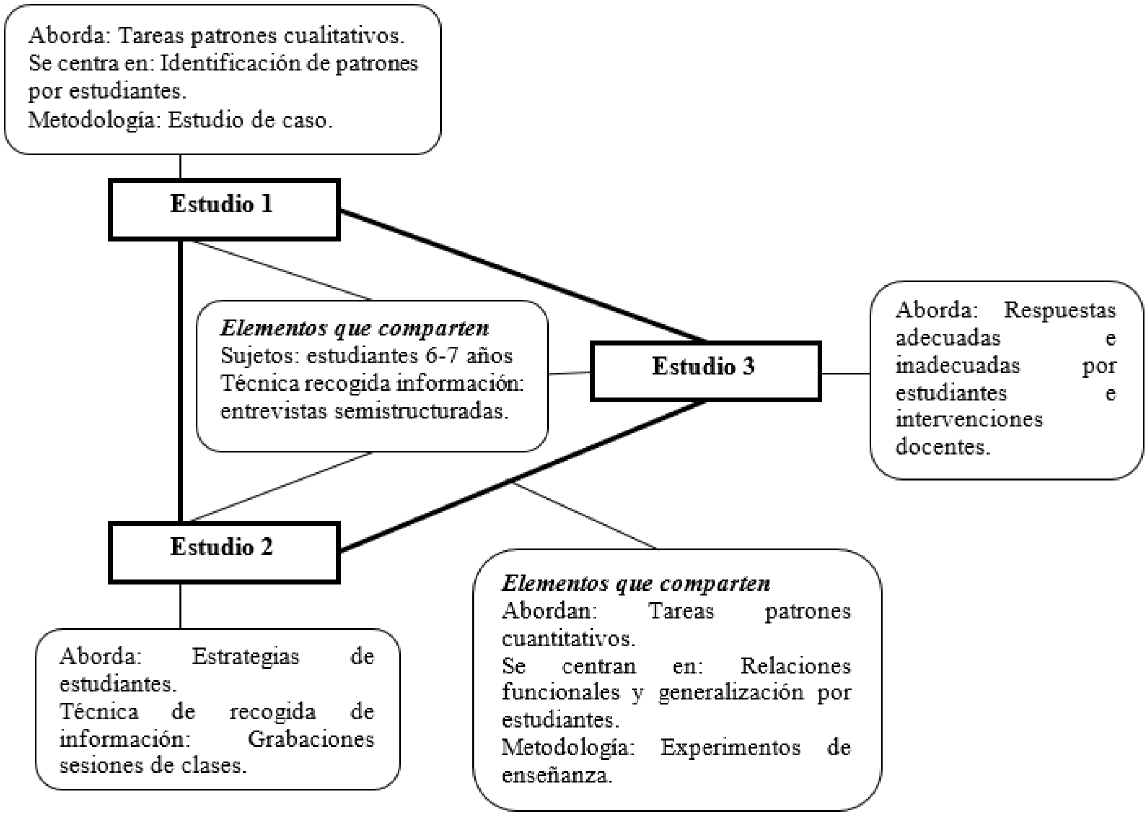


Figura 1.1. Elementos de los tres estudios

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos las principales concepciones teorías de nuestra investigación, las cuales sustentan los tres estudios realizados. En primer lugar mostramos nociones sobre la idea de patrón, destacando los elementos esenciales que se relacionan con nuestro trabajo: tipos de patrones, generalización, la propuesta *early algebra*, el pensamiento algebraico y el pensamiento funcional. Además, describimos la noción de función y función lineal, contenido protagonista del pensamiento funcional. Finalmente mostramos nociones sobre errores y dificultades, e intervenciones docentes.

NOCIÓN DE PATRÓN

Los patrones matemáticos son una estructura que permite modelizar las reiteraciones que se observan en el entorno (Cañadas y Castro, 2007). Diversos autores (p. ej., Castro 1995; Steen, 1988; Zazkis y Liljedahl; 2002) se refieren a ellos como la ciencia, esencia y corazón de las matemáticas y otros sugieren que son un paso clave para la adquisición de conocimiento matemático (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Analizar y observar patrones se consideran actividades propias de las matemáticas (Castro, 1995). Por medio de los patrones se pueden construir competencias matemáticas formales producto de las estructuras y subestructuras que poseen (Fox, 2005).

Un patrón se entiende como "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57). El termino patrón viene de la palabra inglesa *pattern* y se refiere como aquella situación repetida con regularidad. El patrón se genera por medio de un núcleo, que en algunos casos se repite se forma constante y en otros crece regularmente (Castro, 1995). Hay diferentes términos que se asocian a la noción de patrón, como: secuencia, serie, orden, predecible, regularidad o estructura (Liljedahl, 2004). Un patrón describe cualquier regularidad predecible que implica relaciones lógicas, numéricas o espaciales (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Las relaciones constituyen la estructura del patrón, el cual se rige por una regla que recoge esas relaciones. Un friso puede ser construido por una iteración de una figura, la estructura de una secuencia de números se puede expresar en una fórmula expresada simbólicamente y la estructura de una figura geométrica se muestra por sus diversas propiedades (Mulligan y Mitchelmore, 2012). Un ejemplo de patrón lo constituyen los números triangulares en su representación puntual (ver figura 2.1).

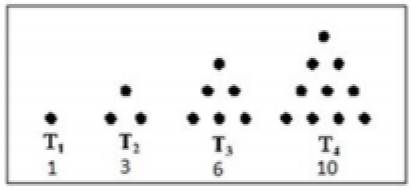


Figura 2.1. Números triangulares

Identificar un patrón consiste en ver aquello que es común, lo que se repite regularmente en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse (Castro, Cañadas y Molina, 2010). La importancia del trabajo con patrones radica en que admite varias acciones como descubrir, reproducir, crear, determinar la regla de formación y describirla, encontrar su estructura, representar la estructura simbólicamente y generalizar el patrón. Castro (1995) destaca que en el contexto de la Educación Matemática los patrones son importantes por dos motivos: (a) los patrones y las regularidades abundan en el mundo en que vivimos y (b) en las matemáticas los patrones se encuentran de manera frecuente, es por esto que la habilidad para reconocer patrones matemáticos ayuda a la comprensión intuitiva de expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios posteriores de matemáticas. Además, esta autora argumenta que los patrones en sí pueden ser una estrategia útil para resolver problemas en aquellos casos en que las cuestiones pueden ser resueltas: (a) examinando casos particulares, (b) organizando los datos sistemáticamente, determinando un patrón y (c) utilizando el patrón construido para obtener las respuestas. Los patrones son una parte integral del desarrollo de las estructuras numéricas (base diez) y aritméticas (aditiva y multiplicativa), de las unidades de medida, del razonamiento proporcional y de la exploración de datos ya que permiten desarrollar estrategia de pensamiento necesarias para la comprensión de dichas operaciones (Fox, 2005; Zaskis y Liljedahl 2002). La introducción de patrones en el aula puede llegar a ser una actividad gratificante y favorece considerablemente el aprendizaje de las matemáticas y el rendimiento académico en estudiantes a partir de los primeros cursos educativos (Castro-Rodríguez y Castro 2016; Papic, 2007; Threlfall, 1999). Para conseguir tales propósitos se aconseja comenzar con la exploración de aquellos patrones cuyos atributos de los elementos del núcleo atiende a cualidades sensoriales (Alsina, 2006), como por ejemplo, color, forma, tamaño o textura, cuyos patrones se denominan cualitativos, para luego continuar con aquellos patrones cuyos atributos de los objetos del núcleos aluden a atributos cuantitativo que se denominan patrones cuantitativos (MINEDUC, 2012; NCTM, 2000).

Los patrones son un contenido rico para la construcción de estructuras lógicas matemáticas como las seriaciones. Las seriaciones se suelen trabajar en Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria y son la antesala para trabajos más complejos en patrones (NCTM, 2000). Una seriación consiste en "ordenar colecciones de objetos manteniendo constante unos atributos de los objetos a excepción de otros (uno o varios) que sirven de comparación" (Castro, Del Olmo y Castro, 2002, p. 44). En la figura 2.3 se observa una seriación cualitativa la cual fue construida por medio de la repetición constante del núcleo (cuadrado verde y círculo rojo) del patrón.

TIPOS DE PATRONES

En Didáctica de la Matemática, se suelen clasificar los patrones de acuerdo a su estructura y a los atributos que se utilizan para generar el patrón (Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Owen, 1995). A continuación mostramos una clasificación de patrones que por lo general se utilizan en Didáctica de la Matemática. Los tipos de patrones que presentamos no son excluyentes, esto quiere decir que un patrón puede ser de distinto tipo, por ejemplo puede ser cualitativo como también cuantitativo.

Patrones cualitativos

Los patrones cualitativos son aquellos donde las características de los atributos de los objetos del núcleo del patrón atienden a cualidades sensoriales como el color, forma, textura olor, tamaño, entre otros (Alsina, 2006). Un ejemplo de un patrón cualitativo es de la figura 2.2. En este patrón los atributos de los elementos del núcleo del patrón (círculo verde y cuadrado rojo) atienden a formas geométricas y color.

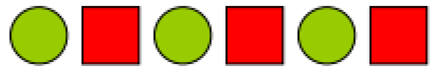


Figura 2.2. Patrón cualitativo de dos elemento en el núcleo

Patrones cuantitativos

Los patrones cuantitativos son aquellos donde las características de los elementos del núcleo del patrón atienden a cantidades y números (Alsina, 2011). Un ejemplo de patrón cuantitativo es la siguiente secuencia numérica: 1, 3, 5, 7, 9…

Patrones de repetición

Los patrones de repetición o reiterativos son aquellos que tienen una secuencia de elementos que se repiten constantemente (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Estos patrones tienen un significado de ciclo y permiten introducir elementos del pensamiento matemático que no están directamente disponibles para los alumnos, como la comunicación de la regla que contiene este tipo de patrón (Owen, 1995).

La secuencia de elementos que se repite en un patrón de repetición recibe el nombre de unidad de repetición o núcleo. El número de elementos del núcleo puede ser cualquier número natural. Un ejemplo de este tipo de patrones es ABABAB,… donde el núcleo está conformado por dos elementos (AB) diferentes entre sí (Rittle-Johnson, Fyfe, McLean y McEldoon, 2013). En la figura 2.3 se muestran otros ejemplos de patrones de repetición (Owen, 1995).

Figura 2.3. Patrones de repetición o reiterativos (adaptado de Owen, 1995)

Threlfall (1999) y Zazkis y Liljedahl (2002) destacan que los patrones reiterativos pueden tener distintos grados de complejidad. Esta complejidad depende de la extensión (número de elementos) del núcleo o también de la variación de los atributos entre elementos del núcleo. Por ejemplo, la secuencia cuya estructura responde a ABCABCABC…, su generación puede entenderse como un patrón reiterativo con un núcleo de longitud tres (ABC). La secuencia cuya estructura es del tipo ABcABcABc generada por un patrón de repetición, es más complejo que el anterior, dado que si bien ambos tienen longitud tres, entre sus elementos hay una variación de un atributo (AB son letras mayúsculas pero la c es minúscula en el segundo caso). Castro-Rodríguez y Castro (2016) distinguen tres aspectos con los cuales se define la complejidad de los patrones reiterativos. Estos aspectos tienen que ver con las variables que intervienen en cada uno de los patrones. Estos criterios son:

- Naturaleza de los atributos: complejidad definida de acuerdo a cambios de atributos menos familiares para los alumnos, en los objetos del núcleo del patrón.
- Número de atributos que cambian: complejidad definida de acuerdo a los cambios de atributos entre los elementos del núcleo. Por ejemplo el patrón de repetición de la figura 2.2, construido con bloques lógicos, el atributo que cambia entre los elementos del núcleo es color y forma y se mantiene constante el tamaño y el grosor. Si se añade un cambio en algún atributo de un elemento del núcleo (por ejemplo al cambiar el cuadrado rojo grande por un cuadrado rojo pequeño) se añade dificultad al patrón.
- Número de elementos en el núcleo: complejidad asociada al aumento o disminución del número de elementos del núcleo del patrón. Por ejemplo, si añadimos un elemento más (triángulo azul, grande y grueso) al núcleo del patrón de la figura 2.2 de modo que el nuevo núcleo quedara: círculo verde, grande y grueso, cuadrado rojo, grande y grueso, y triángulo azul, grande y grueso, este nuevo patrón sería más complejo que el patrón de la figura 2.2 dado que aumenta el número de elementos del núcleo.

Los patrones de repetición pueden ser también considerados como patrones cualitativos o cuantitativos. Por ejemplo el patrón de la figura 2.2 es un patrón cualitativo dado que los atributos de los elementos del núcleo atienden a atributos cualitativos (forma-color). Mientras que un patrón de repetición como el siguiente 123123123… puede ser un patrón cuantitativo dado que los atributos de los elementos del núcleo atienden a atributos cuantitativos (números).

Patrones lógicos

Los patrones lógicos son aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y/o diferencia de atributos entre objetos (Ontario Ministry of Education, 2007). El núcleo de estos patrones puede estar compuesto de un solo elemento. Un elemento debe tener, al menos, una diferencia de atributo de aquel elemento que le sucede. Este tipo de patrón también puede ser un patrón cualitativo por las características cualitativas de los elementos del núcleo, tal como se observa en la figura 2.4. En este patrón cada figura geométrica se diferencia de la anterior en un atributo (forma).

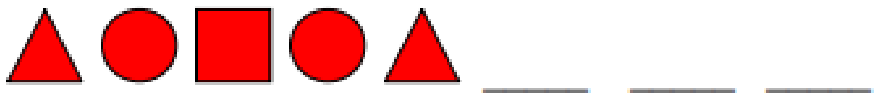


Figura 2.4. Patrón lógico

Patrones de desarrollo

Los patrones de desarrollo son aquellos que aumentan o disminuyen de forma sistemática produciendo expansión o reducción del núcleo (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Existen de dos tipos, de crecimiento y de decrecimiento o disminución. En los primeros existe un aumento de los elementos al seguir la secuencia. El patrón de crecimiento más simple empieza con un elemento en el primer término y se incrementa con un único elemento del mismo tipo en cada término subsiguiente. El patrón de decrecimiento es aquel donde hay una reducción o disminución de los elementos de la secuencia.

Estos patrones también pueden ser cualitativos o cuantitativos dependiendo de los atributos de los elementos del núcleo. Por ejemplo en la figura 2.5 se muestran dos ejemplos de patrones de desarrollo los cuales son cualitativos dado que los elementos atienden a atributos cualitativos (círculos negros). Sin embargo un patrón de desarrollo como: 1, 2, 3, 4…, es considerado como un patrón cuantitativo dado que sus atributos atiende a números.

Patrón de crecimiento	Patrón de decrecimiento
• •• ••• •••• ...	••••••• •••••• ••••• ••• ...

Figura 2.5. Ejemplos de patrones de desarrollo

Patrones visuales o espaciales

Los patrones visuales o espaciales son aquellos en que la regularidad se percibe a través de la vista. Por lo general este tipo de patrón suele ser también cualitativo dado que se encuentran en el ámbito de la geometría (Thornton, 2001). La representación puntual de los números triangulares se considera un patrón visual (ver figura 2.1).

Patrones numéricos

Los patrones numéricos son aquellos patrones construidos sobre el número y donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante. Estos tipos de Por ejemplo, 1, 12, 123,… constituye un patrón numérico (Liljedahl, 2004). Por lo general estos tipos de patrones atienden a patrones cuantitativos dado que los atributos de los elementos del núcleo son números.

Patrones recurrentes (recursivos)

Los patrones recurrentes o recursivos es una relación que se define con base en los valores de un mismo conjunto de valores (Johsonbaugh, 2005). Desde una sucesión de datos la relación de recurrencia expresa cada término de esa sucesión en función de sus antecesores (Castro, 1995). Un ejemplo de patrón recurrente es la secuencia: 1, 2, 4, 8, 16..., donde el término siguiente de la secuencia se obtiene de acuerdo a las relaciones de los términos anteriores. En este caso una forma de encontrar el siguiente término es multiplicando por dos el término anterior. El patrón recurrente puede también puede ser cualitativo, como el ejemplo mostrado en la figura 2.1, o cuantitativo como el ejemplo mostrado anteriormente.

En un contexto funcional del *early algebra* que implica trabajar con tareas que relaciona dos o más variables, el patrón recurrente es aquel que se centra en los valores de una de las variables. Se centra en averiguar un valor de la función con base en el valor anterior o anteriores de una variable. Para Blanton y Kaput (2005) el patrón recurrente es elemental dentro de las relaciones funcionales y describe una variación entre las cantidades de una secuencia de valores dejando implícita las cantidades de la otra secuencia. Implica cómo obtener una cantidad en una secuencia a partir del número o números previos. En ocasiones, este tipo de relación obstaculiza la generalización porque es necesario saber un valor anterior de la variable para dar una respuesta satisfactoria. En la figura 2.6 mostramos una representación tabular de una función lineal en la que se aprecia el patrón recurrente. Esta tabla fue cumplimentada sumando uno al valor previo de la variable dependiente.

Edad de Álvaro	Edad de Carmen
1	6
2	7
3	8
4	9

+ 1
+ 1
+ 1

Figura 2.6. Patrón recursivo

Relaciones funcionales

Desde un contexto funcional del álgebra escolar las relaciones funcionales son aquellos patrones que se establecen entre las cantidades que covarían en una relación funcional. Estos tipos de patrones atiende a patrones cuantitativos porque son números los que intervienen en las cantidades variables (un ejemplo es la figura 2.7). Estas relaciones funcionales pueden ser de dos subtipos: (a) correspondencia y (b) covariación (Smith, 2008). Detallamos cada una de estas relaciones funcionales a continuación.

La correspondencia es la relación funcional que asocia cada valor de la variable independiente con un único valor de la variable dependiente (Clapham, 1998). Esta relación se establece entre los pares correspondientes de las cantidades de ambas variables (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). Identificar una correspondencia es hallar aquella regla que permita determinar, por ejemplo, una única cantidad de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (Blanton, et al., 2011). En la presentación tabular de la figura 2.7 mostramos un ejemplo de relación correspondencia, dado que el valor de la variable dependiente se obtiene sumando cinco al valor de la variable independiente.

Edad de Álvaro	Edad de Carmen
1	6
2	7
3	8
4	9

$\xrightarrow{+5}$

Figura 2.7. Relación de correspondencia

La covariación se refiere a cómo el cambio de una variable afecta a la otra variable. Gómez (2016) la define como aquel “cambio simultaneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas" (p. 170). Identificar una relación de covariación implica centrarse en los cambios de las cantidades de las variables independiente y dependiente. Es observar e identificar cómo dos cantidades de ambas variables, dentro de una relación funcional, varían de forma simultánea y coordinada (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2005). La covariación implica, por tanto, la correspondencia. En la representación tabular de la figura 2.8 mostramos una relación de covariación dado que el valor de la variable dependiente se obtiene por medio de la variación de los valores de la variable independiente.

	Edad de Álvaro	Edad de Carmen	
	1	6	
+1	2	7	+1
+1	3	8	+1
+1	4	9	+1

Figura 2.8. Relación de covariación

Los patrones aquí presentados son útiles para desarrollar en los estudiantes habilidades cognitivas abstractas y es precursor de la capacidad matemática de generalizar (Threlfall, 1999; Warren, Miller y Cooper, 2012). Cañadas y Castro (2007) sugieren que los patrones son un paso clave para alcanzar la generalización (Cañadas y Castro, 2007). De esta manera el trabajo con patrones está fuertemente ligada a la generalización. A continuación revisamos la noción de generalización.

GENERALIZACIÓN

La generalización es clave para la generación de conocimiento matemático (Cañadas, Castro y Molina, 2010), y genera placer y eficacia en el trabajo de los estudiantes (Mason, 1996). Además, se concibe como un iniciador para el aprendizaje del álgebra escolar (Amit y Neria, 2008), y como forma de apoyar el aprendizaje temprano del álgebra (Strachota, 2016). La investigación evidencia que alumnos desde muy tempranas edades son capaces de generalizar conceptos matemáticos (p. ej., Carraher, Martinez y Schliemann, 2008).

La generalización es el núcleo central del álgebra (Mason, 1996). Es un elemento fundamental para la actividad matemática y para el pensamiento algebraico (Blanton et al., 2018; Cooper y Warren 2011; Kaput 2008; Mason 1996). Las ideas anteriores han llevado a que la generalización haya tenido una mayor atención en el aprendizaje de las matemáticas en general, y del álgebra en particular, sobre todo en los primeros niveles educativos. Esto es evidenciado en diferentes programas curriculares a nivel nacional como internacional (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014; NCTM, 2000).

En patrones cualitativos la generalización, por lo general, se han trabajado con patrones de repetición o reiterativos. En este contexto, se dice que el reconocimiento de la unidad de repetición tiene una implicación importante para la generalización (Rodrigues y Serra, 2015; Threlfall, 1999). Es la conciencia de la estructura del patrón lo que permite generalizar un patrón de repetición. Para Papic, Mulligan y Mitchelmore (2011) la generalización en estos tipos de patrones es cuando el estudiante determina la unidad de repetición (lo que se repite cíclicamente) y su estructura.

Por otro lado, en los patrones cuantitativos, por lo general, se han trabajado con patrones de desarrollo y relaciones funcionales. Dentro de este contexto la generalización ha tomado diversas connotaciones. Aquí distinguimos algunas de ellas. Kaput (2000) define generalizar como

> extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p. 6)

Kruteskii (1976) menciona que la generalización es el proceso de alejarse de la situación concreta, o el proceso de abstracción de lo que es similar y relevante en la estructura de objetos, relaciones u operaciones. Además distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

Pólya (1945) considera la generalización como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos donde se detecta y se sistematiza una regularidad. En esta misma línea Cañadas y Castro (2007) señalan que una vía para alcanzar la generalización es el trabajo y organización de diferentes de casos particulares. Mason (1996) considera que también es posible llegar a la generalización, por medio de un solo ejemplo o caso particular con unas características determinadas, que se conoce como ejemplo genérico.

Para Cañadas y Castro (2007) la generalización es cuando un alumno relaciona el patrón identificado con una regla general y no solo para algunos casos. Lo anterior quiere decir que la generalización es extender el razonamiento más allá de los casos particulares considerados (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Se puede hablar de generalización cuando se intuye cierto esquema subyacente, aunque todavía no se puede expresar explícitamente para el caso general (Mason, Burton y Stacey, 1988), o cuando se identifica una estructura o relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011).

Hay autores que distinguen diferentes tipos de generalización. Por ejemplo Radford (2010) distingue dos tipos: generalización aritmética y generalización algebraica. La primera se refiere cuando un alumno identifica lo común en un conjunto de elementos; sin poder usar esta información para proporcionar una expresión de cualquier término de la secuencia. Y la segunda se refiere cuando un alumno es capaz de captar una característica común observada en algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que esta coincidencia se aplica a todos los términos de S y de poder usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S. Stacey (1989) también distingue entre generalización cercana, como una descripción de un patrón que permite determinar los término próximos en una secuencia, y una generalización lejana, como aquella construcción de una regla general. Otros autores como Pinto y Cañadas (2017b) distinguen dos tipos de generalización como la espontánea y la inducida las cuales están sujeta al caso por el que se le pregunta al estudiante. La primera de ellas se refiere aquella generalización que hace el estudiante a través de un caso particular cualquiera, mientras que la segunda es aquella generalización que hace el estudiante través de un caso general.

EARLY ALGEBRA

Los patrones y la generalización son elementos clave para la introducción del álgebra escolar desde los primeros niveles educativos (Blanton, et al., 2011; Kaput, 2000). La propuesta curricular *early algebra* recoge esta idea. A continuación, presentamos algunas ideas centrales de esta propuesta curricular en donde se destaca el trabajo con patrones y generalización.

El *early algebra* es una propuesta curricular que nace en Estados Unidos a fines de la década de los 90. Esta propuesta busca introducir elementos algebraicos a partir de los primeros cursos dado que considera que estudiantes de primeros cursos educativos son capaces de desarrollar tareas que involucran nociones algebraicas (Kaput, 1998). La propuesta curricular *early algebra* propone un cambio en la forma de abordar contenidos matemáticos, y de buscar maneras en que los estudiantes puedan pensar y actuar sobre los objetos, las estructuras y las situaciones matemáticas (Molina, 2006). La identificación de patrones y el establecimiento de relaciones y propiedades matemáticas, dentro de un ambiente de aula que invite a explorar, modelizar, predecir, discutir, generalizar y argumentar sobre las relaciones matemáticas forman parte de los objetivos de esta propuesta curricular (Blanton y Kaput, 2005). Para tales propósitos se recomienda transformar sutilmente la matemática existente en el currículo para otorgarle un carácter exclusivamente algebraico (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). Por ejemplo, las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) se pueden ver como funciones (Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Blanton, 2014; Carraher et al., 2006) donde los estudiantes pueden identificar patrones que se establecen entre las cantidades que covarían.

Kaput (2000) propone la “algebraización” del currículo de matemática, facilitando así el aprendizaje del álgebra por medio de la comprensión de la Matemática escolar. Se cree que “algebraizando” las matemáticas elementales fomentaría en los estudiantes un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad para comunicar esa generalidad (Lins y Kaput, 2004). Lins y Kaput (2004) sugieren que para llevar a cabo tal algebraización existen dos formas de cómo proceder: (a) construir sobre lo que ya es algebraico en el pensamiento de los niños pequeños, particularmente con respecto a su razonamiento numérico o aritmético, y (b) los cambios en el pensamiento de los estudiantes se promueven de mejor manera cuando se les ofrece herramientas como anotaciones y diagramas, que les permiten operar a un nivel más alto de generalidad. En esta línea Carraher et al. (2006) argumentan que el *early algebra* puede ser guiado de acuerdo a tres aspectos: (a) la generalización, corazón del pensamiento algebraico, (b) las operaciones aritméticas, que se pueden ver como funciones, y (c) el simbolismo algebraico.

Para el *early algebra* el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos es fundamental, dado que tendría un potencial exclusivo para enriquecer la aritmética (Molina, 2009).

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El pensamiento algebraico es un constructo difícil de definir (Cañadas, Dooley, Hodgen y Oldenburg, 2012). Pero diferentes autores usan distintas aproximación a este constructo las cuales permite entender de qué se trata y cuáles son sus componentes para el desarrollo en el aula. El pensamiento algebraico se puede entender como un proceso en el cual los alumnos construyen relaciones matemáticas generales expresando esas relaciones en forma cada vez más sofisticadas y que evolucionan con el pasar del tiempo (Soares, Blanton y Kaput, 2005). Blanton y Kaput (2004) lo definen como un hábito de la mente que impregna todas las matemáticas y que involucra la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas.

Radford (2011) argumenta que el pensamiento algebraico es aquel pensamiento que no es sobre el uso o no uso de notaciones, sino de razonamientos específicos. Se trata de pensar en cantidades indeterminadas que se conciben de manera analítica y de tener en cuenta las cantidades indeterminadas (por ejemplo incógnitas o variables) como si fueran conocidas y sobre las cuales realizar cálculos como se hace con los números conocidos. Mason (1996) considera que las habilidades como: detectar la igualdad y la diferencia, hacer distinciones, repetir y ordenar, clasificar y etiquetar, son la base del pensamiento algebraico y la raíz de lo que se entiende por álgebra. Algunos elementos como las relaciones matemáticas, los patrones y las estructuras aritméticas son considerados como el corazón del pensamiento algebraico (Kieran, Pang, Schifter y Fong Ng, 2016).

De acuerdo a Kaput (2008) el pensamiento algebraico involucra dos aspectos centrales: (a) hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales y (b) actuar sobre símbolos dentro de un sistema simbólico organizado a través de una sintaxis establecida, donde los sistemas de símbolos convencionales disponibles para su uso en grados elementales se interpretan ampliamente para incluir notación (variable), gráficos y líneas numéricas, tablas y formas de lenguaje natural.

Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Murphy-Gardiner et al (2018) sugieren que la generalización, representación, justificación y razonamiento sobre estructuras y relaciones matemáticas son una ruta con gran potencial para el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes a partir de los primeros niveles educativos.

Autores como Kaput (2008) y Schliemann, Carraher y Brizuela, (2007) señalan que, aunque los tiempos para el desarrollo del pensamiento algebraico son prolongados, su introducción a partir de los primeros curso escolares resultaría beneficioso ya que permitirá a los estudiantes comprender de mejor manera nociones algebraicas para futuros aprendizajes. Al introducir el pensamiento algebraico desde los primeros cursos escolares los estudiantes tendrían la oportunidad de centrarse en situaciones cuantitativas, las relaciones entre las cantidades, el cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, la demostración y la predicción, y podrían emplear representaciones que no necesariamente es el simbolismo algebraico (Kieran, 2004). De esta manera se dice que promover el pensamiento algebraico desde los primeros cursos educativos trae muchos beneficios en los estudiantes porque ayuda a promover un conocimiento conceptual de las matemáticas (Kaput, 1998). Además, el pensamiento algebraico permite que los estudiantes comprendan las matemáticas escolares más allá de los enfoques procedimentales y manipulativos que predominan en la actualidad (Cañadas, et al, 2012).

Se suelen considerar diferentes enfoques en la introducción del álgebra a partir de los primeros cursos educativos, como forma de promover el pensamiento algebraico. Uno de ellos es el enfoque funcional del *early algebra*. Este enfoque busca promover el pensamiento funcional por medio del trabajo con el concepto de función, los patrones y las relaciones entre cantidades que covarían (Cañadas y Molina, 2016). En el siguiente apartado describimos el pensamiento funcional por ser un constructo en el cual nos centramos en esta investigación.

PENSAMIENTO FUNCIONAL

El pensamiento funcional es un componente del pensamiento algebraico (Cañadas y Molina, 2016). Se considera una vía de investigación en *early algebra* (Doorman y Drijvers, 2010) y uno de los aspectos clave del álgebra escolar (Smith, 2008). Es una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas (Rico, 2006).

Blanton et al (2011) argumentan que el pensamiento funcional implica “generalizar las relaciones entre cantidades covariables, expresar esas relaciones en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y razonar con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función” (p. 13). El pensamiento funcional se define como aquel pensamiento que se centra en las relaciones entre dos (o más) cantidades covariables, y que va desde las relaciones entre valores concretos de la función hasta la generalización de la relación funcional (Smith, 2008). Para Rico (2006) el pensamiento funcional es aquella forma de pensar en términos de y acerca de las relaciones. Cañadas y Molina (2016) se refieren a este pensamiento como un componente del pensamiento algebraico que se basa en la construcción, descripción representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen. El pensamiento funcional permite desarrollar elementos clave tales como: “las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas” (Cañadas y Molina, 2016, p. 212). Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman (2015) se refieren al pensamiento funcional como aquel que implica generalizar las relaciones funcionales, representar y justificar estas relaciones a través del lenguaje natural, tablas, gráficos, entre otras; y razonar con fluidez ante estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento de la función.

El pensamiento funcional se inicia en el momento en que el individuo presta atención a dos o más cantidades covariables e identifica una relación entre esas cantidades (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). Smith (2008) menciona que el énfasis en la construcción del pensamiento funcional es sobre la base de la relación entre las variables, pero debe extenderse más allá de la sola designación de una correspondencia. De esta manera, se promueve en los estudiantes la identificación de patrones, la generalización de las relaciones entre cantidades variables y la construcción de sistemas de representación apropiados para representar esa generalización (Cañadas y Molina, 2016, Smith, 2008). Estos sistemas de representación pueden ser: verbal, pictórico, tabular, gráfico, simbólico o algebraico.

NOCIÓN DE FUNCIÓN

El pensamiento funcional implica trabajar la noción de función. La función como contenido matemático se suele introducir al inicio de la Educación Secundaria en la mayoría de los países. Sin embargo, autores como Blanton y Kaput (2011) sugieren que la función debe ser tratada en un sentido longitudinal y con toda su riqueza a partir de los primeros cursos educativos. Las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) pueden ser vistas como funciones. Por ejemplo, la multiplicación por tres puede entenderse como subconjunto de la función entera *3n* (Carraher y Schliemann, 2014). De lo anterior surge la importancia de que la función pueda ser trabajada a partir de los primeros cursos educativos.

Definiciones y elementos

La noción de función ha tenido diferentes connotaciones con el paso del tiempo. Una primera definición de esta noción se remonta al siglo XVIII, otorgada por diferentes filósofos y matemáticos de la época como Leibniz, Bernoulli y Euler. Leibniz definió función en los siguientes términos.

> Llamo función a toda porción de una recta que parte de un punto de la curva y termina en algún otro lugar. Tales son la abscisa y ordenada del punto, las porciones de la tangente y la normal que terminan en uno de los ejes, la subtangente o la subnormal. (Sánchez y Valdés, 2007, p. 113)

Posteriormente, Bernoulli definió función como "una magnitud variable a una cantidad, que se compone de cualquier forma de esta magnitud variable y de constantes" (Sánchez y Valdés, 2007, p. 113).

Euler, discípulo de Bernoulli, antes de definir una función, definió sus elementos asociados, tales como constante y cantidad variable de la siguiente manera:

> Una constante es una cantidad definida que toma siempre el mismo valor. Una cantidad variable es una cantidad indeterminada y comprende todos los números en ella misma, positivos y negativos, enteros y fraccionarios, racionales, trascendentes, irracionales, sin excluir al cero ni los números complejos. (Lacasta y Pascual, 1998, p. 32)

Para Euler, los conceptos de cantidad, cantidad constante (cantidad específica que toma siempre un mismo valor), variable (como cantidad indeterminada) y los conjuntos numéricos, serían clave para definir el concepto de función. Este autor define una función de una cantidad variable como “una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes” (Azcárate y Deulofeu, 1990, p. 50). Euler con su definición reemplaza la idea de “cantidad” de Bernoulli por “expresión analítica”. Además, introdujo la notación *f(x)* para designar una función.

En la actualidad existen significados comunes a la idea de función de Euler, como por ejemplo, la idea de función de Freudenthal (1993) quien define una función como un tipo especial de dependencia entre las variables que se distinguen como dependiente e independiente o, como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable (Fiol y Fortuny, 1990). De lo anterior se destacan elementos tales como variable, variable dependiente e independiente, variación y dependencia. La idea de variable expresa una cantidad que puede tener diferentes valores en un conjunto numérico específico; estos conjuntos dependen de la naturaleza del contexto del problema, por ejemplo, si los conjuntos incluyen números racionales o enteros. Las funciones pueden tomar más de dos variables (Cañadas et al., 2016).

Existen otras definiciones que toman como base la teoría de conjuntos. Entre estas se encuentran las definiciones de Dirichlet en el siglo XIX y del grupo Bourbaki (Azcárate y Deulofeu, 1990; Doorman y Drijvers, 2010; Lacasta y Pascual, 1998) y definen la función como sigue

> Sean E y F dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo $x \in E$, existe un único $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada.
>
> Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in E$ el elemento $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada; determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan las mismas funciones. (p. 52)

Es habitual encontrar definiciones relativas a esta última definición, destacándose los siguientes elementos: dominio, imagen, recorrido, rango y algunos convenios como *y=f(x),* la letra *x* para representar la variable independiente y la letra *y* para representar la variable dependiente. Con base en estos elementos encontramos definiciones como “una función es una regla que relaciona dos conjuntos tales que para cada elemento del primer conjunto hay un único elemento en el segundo conjunto con el cual está relacionado" (Bolt y Hobbs, 2001, p. 74). Los autores anteriores denominan al conjunto de entrada dominio, mientras que el conjunto de salida o resultado es el rango. Confrey y Smith (1991) adoptan la idea de función como una descripción de una relación entre dos cantidades, una identificada como el dominio y otra como rango, de manera que cada elemento del dominio está asociado con un único elemento del rango.

García (1992) expresa que

> una variable "*y*" es función de otra "*x*", cuando entre ambas se puede establecer una correspondencia de manera que a cada valor de "*x*" le corresponde uno, y solamente uno de "*y*". Se representa mediante la fórmula $y=f(x)$. (p. 78)

Como vemos en las definiciones anteriores la noción de correspondencia está asociada a la función, por lo que es común encontrar definiciones de función sobre la base de esta noción como se observa en la de García (1992). Este autor asocia la correspondencia unívoca como función y se refiere a ella como aquella que a cada elemento del conjunto original se le asocia una imagen o ninguna. Además, asocia la correspondencia con la idea de aplicación cuando cumple las siguientes propiedades: todos y cada uno de los elementos del conjunto inicial tienen una sola imagen; la imagen de cada original está formado por un solo elemento; cuando en una correspondencia el conjunto inicial y original le corresponde una sola imagen, la correspondencia es aplicación.

Representaciones

Thomas (2015) menciona que una función se puede representar en un diagrama de flechas, donde cada flecha se asocia un elemento del dominio D con un único elemento en el conjunto Y como mostramos en la figura 2.9.

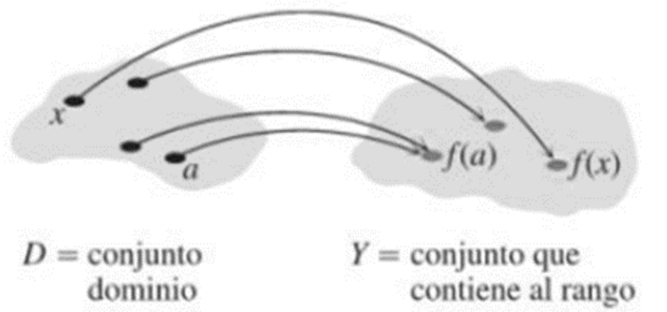


Figura 2.9. Diagrama de flechas de una función (Thomas, 2015, p. 2)

Como observamos en la figura 2.9, las flechas indican que *f(a)* está asociada con *a*, *f(x)* está asociada con *x* y así sucesivamente. Además, observamos que una función puede tener el mismo valor en dos elementos de entrada diferentes en el dominio, como ocurre con *f(a)*, pero a cada elemento de entrada *x* se le asigna un solo valor de salida *f(x).*

Hay quienes también asocian las funciones con una máquina que produce cambios (Bolt y Hobbs, 1998; Thomas, 2015). Esta idea es utilizada en diferentes estudios con la intención de elaborar actividades para recoger y analizar información relativa al pensamiento funcional en estudiantes y maestros de primeros niveles educativos (Warren y Cooper, 2005; Wilkie, 2014). Esta idea refiere como aquella función *f* que produce un valor de salida *f(x)* en su rango siempre que le demos el valor de entrada *x* de su dominio. En la figura 2.10 visualizamos la idea de máquina de una función (Thomas, 2015).

Figura *2.10*. Idea de máquina de una función (Thomas, 2015 p. 2)

Generalmente las funciones se pueden representar en diferentes sistemas de representación tales como: verbal, tabular, gráfico, simbólico. El sistema de representación verbal alude a la expresión por medio del lenguaje verbal o escrito de la relación entre variables. El sistema de representación tabular de una función permite organizar en pares los valores de las variables independiente y dependiente tal como se observa en la figura 2.11.

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

Figura 2.11. Sistema de representación tabular de la función $f(x) = x^2$

A partir de la representación tabular de la función es posible obtener su representación gráfica. El sistema de representación gráfico es aquella colección de puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $y = f(x)$. La colección de puntos correspondientes a la gráfica de una función es siempre que toda recta vertical cruce a la gráfica cuando mucho en un punto. Por lo general, el sistema de representación gráfico muestra con mayor claridad la relación entre dos variables, que una ecuación o una tabla (Sullivan, 2006). En la figura 2.15 se muestra un sistema de representación gráfico de una función lineal.

El sistema de representación simbólico se vale de símbolos y signos que son propios de la matemática y representan con exactitud una relación entre variables (Azcárate y Deulofeu, 1990). Por ejemplo, la expresión: $f(x) = 2x + b$ representa simbólicamente una función lineal.

Tipos de funciones

De acuerdo a Euler las funciones se pueden clasificar en algebraicas (operaciones algebraicas) y funciones trascendentes (operaciones trascendentes) (Lacasta y Pascual, 1998). Las primeras son aquellas donde cuya variable y se obtiene combinando un número finito de veces la variable x (independiente) y constantes reales por medio de operaciones algebraicas como la suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces. Las segundas son aquellas cuya variable y (dependiente) contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. A partir de estos dos tipos de funciones se obtienen otros tipos de funciones y entre las más comunes están aquellas que mostramos en la figura 2.12.

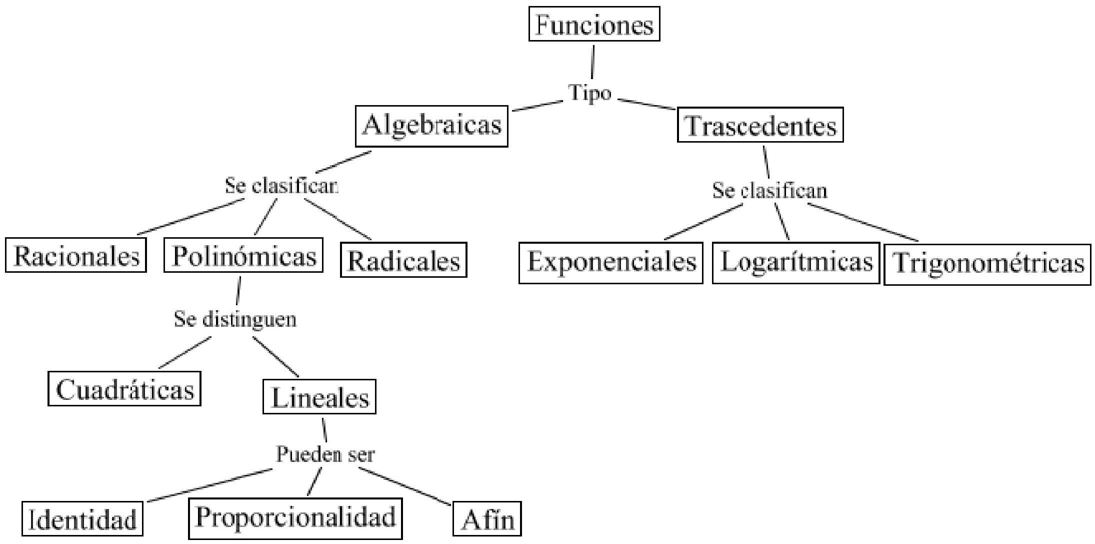


Figura 2.12. Clasificación tipos de funciones (adaptado de Fuentes, 2014)

A continuación describimos los tipos de funciones[1] que mostramos en la figura 2.12. Comenzamos describiendo los tipos diferentes de funciones algebraicas y continuamos describiendo los tipos diferentes de funciones trascedentes.

Tipos de funciones algebraicas

- Funciones racionales: son un cociente o una razón tal como $f(x)=p(x)/q(x)$, donde p y q son polinomios. Un polinomio es una expresión algebraica constituida por una o más variables, donde se utiliza solo operaciones tales como la adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos. El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales x para lo que $q(x) \neq 0$ (Thomas, 2015).
- Funciones polinómicas: son aquellas que tiene por expresión un polinomio. En general, una función polinómica $y=f(x)$ tiene la forma siguiente: $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. De la expresión anterior se debe dar que n es un entero no negativo y los coeficientes a_i, $i =$ o, $1\ldots, n$ son números reales. El dominio de cualquier función polinómica f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$ (Zill y Wright, 2011).

A partir de la función polinómica se suelen distinguir dos tipos de funciones: cuadráticas y lineales. Las primeras son aquellas funciones cuyo sistema de presentación simbólica es

[1] Describimos brevemente los tipos de funciones que aquí presentamos, excepto la función lineal la que profundizamos en el apartado siguiente por ser contenido protagonista de esta investigación. Para mayor detalle en los tipos de funciones que aquí presentamos ver Sullivan (2006); Thomas (2015) y Zill y Wright (2011).

$f(x)=ax^2+bx+c$, donde $a \neq 0$, b y c son constantes (Zill y Wright, 2011). El dominio de una función cuadrática es el conjunto de todos los números reales. Estas funciones están definidas por un polinomio de segundo grado en una variable (Sullivan, 2006). El sistema de representación gráfico de una función cuadrática es una parábola como se observa en la figura 2.13.

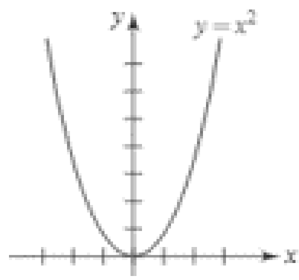


Figura 2.13. Gráfica de una función cuadrática $f(x)= x^2$

Las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado y son aquellas funciones del tipo $f(x) = ax+b$, con a y b números reales fijos, a es la pendiente y b es la ordenada al origen. El sistema de representación gráfico de una función línea es una línea recta como se observa en la figura 2.15.

Las funciones lineales se subdividen en función de identidad, función afín y función de proporcionalidad. La función de identidad es aquella cuya representación simbólica es $f(x)=x$. El dominio de esta función que corresponde al conjunto de todos los números reales, es el mismo que su rango. El sistema de representación gráfico de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene un ángulo de inclinación de 45°. Esta recta consiste en que todos los puntos para los que la coordenada x es igual a la coordenada y (Sullivan, 2006). La función afín es aquella cuya representación simbólica es $f(x)=ax+b$, a es la pendiente de la recta y b es la ordenada en el origen. La recta corta al eje de ordenadas en el punto (0, n). El sistema de representación gráfico de una función afín es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas. Por último la función de proporcionalidad es aquella cuya representación simbólica es $f(x)=ax$ donde a es la constante de proporcionalidad. Estas funciones se caracterizan porque el sistema de representación gráfico es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

- Funciones radicales: son aquellas donde la variable independiente se encuentra afectada por una raíz. Un ejemplo de sistema de representación simbólica de estas funciones es $f(x) = \sqrt{x}$.

Tipo de funciones transcedentes

- Funciones exponenciales: estas funciones tienen como representación simbólica $f(x) = a^x$, donde la base $a > 0$ es una constante positiva y $a \neq 1$. Estas funciones tienen dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$, de modo que una función exponencial nunca tiene el valor cero en su rango (Thomas, 2015).
- Funciones logarítmicas: son aquellas cuya representación simbólica es $f(x) = \log_a x$, tal que $a > 0, a \neq 1$. El dominio de una función logarítmica $y = \log_a x$ es el conjunto de números reales positivos $(0, \infty)$ (Zill y Wright, 2011).
- Funciones trigonométricas: son aquellas funciones que se derivan de las razones trigonométricas de un ángulo. Existen seis tipos de funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante.

En nuestro trabajo nos centramos en las funciones polinómicas lineales de dos variables, en que los valores de una variable, llamada variable dependiente, dependen de los valores de otra llamada variable independiente. En este trabajo nos centramos en las funciones lineales del tipo $f(x) = mx+b$, con *x, m y b* perteneciente a los números naturales, que definimos a continuación.

FUNCIÓN LINEAL COMO CONTENIDO MATEMÁTICO ESCOLAR

Las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado que modelizan situaciones que involucran un cambio constante (Ruiz, 2014). A través del simbolismo algebraico, se pueden representar como $f(x)=mx+b$, con m y b números reales. A la x se le denomina variable independiente y a la y ($f[x]$) variable dependiente. Las variables representan cantidades de distintos conjuntos numéricos. El conjunto de valores que toma la variable independiente se le denomina dominio, mientras que al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente se le conoce como co-dominio, recorrido, rango o imagen. En su representación gráfica, la letra m es la pendiente de la recta y determina el grado de inclinación de la misma. La m un valor constante e independiente del valor de x. La letra b recibe el nombre de término independiente de la función y es la intersección de la recta con el eje *y*. Las funciones lineales aumentan o disminuyen de forma constante de acuerdo al valor de su pendiente. En los estudios 2 y 3 consideramos la función $y=mx+b$, con m, x y b números naturales, debido a los cocimientos conocimientos previos de los estudiantes sujetos de nuestra investigación.

Las funciones lineales se pueden representar en diferentes sistemas de representación como: verbal, pictórico, tabular, gráfico y simbólico (Azcárate y Deulofeu, 1990; Brizuela et al., 2015; Cañadas y Molina, 2016). La utilización de estos diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas ayuda a los estudiantes a entender el comportamiento de la función y ayuda a evidenciar pensamiento funcional en los estudiantes (Blanton et al., 2011; Cañadas et al., 2016, Cañadas y Molina, 2016). A partir de los primeros niveles educativos, se promueve el uso de los sistemas de representación verbal y pictórico en la resolución de problemas (NCTM, 2000; Radford, 2011). También se aboga por la necesidad de involucrar en la enseñanza de todos los sistemas de representación de la función lineal para una mayor comprensión del concepto de función (p. ej., Blanton, 2008; Cañadas et al., 2016).

La representación verbal comúnmente hace mención al lenguaje natural que puede ser oral o escrito (Cañadas y Figueiras, 2011). Los alumnos dan sentido y expresan las relaciones entre las cantidades variables mediante este sistema de representación (Blanton, 2008). Un ejemplo de representación verbal de la función lineal $f(x)=x+5$ es cuando un estudiante responde “la edad de Carmen es la edad de Álvaro más cinco” en una tarea que relaciona las edades de dos niños donde Carmen tiene cinco años más que Álvaro. Las representaciones pictóricas aluden a dibujos que permiten expresar relaciones (Cañadas y Figueiras, 2011). Estas representaciones juegan un rol primordial en los primeros niveles educativos por ser representaciones propias y originales de los estudiantes (Blanton, 2008). En la figura 2.14 observamos un ejemplo de representación pictórica de una función lineal $f(x)=x+3$, que fue realizado por un estudiante en una tarea que relaciona cantidades de caramelos de un niño y una niña, donde la niña tiene tres caramelos más que el niño.

Figura 2.14. Representación pictórica función lineal (Carraher y Schliemann, 2007, p. 693)

Nota. John Candy's=caramelos de John; six candy's=tiene seis caramelos; Mary's Candys=caramelos de Mary; six=seis; three=tres; nine candy's=tiene nueve caramelos

El sistema de representación tabular permite presentar los valores de las variables en filas y columnas de la tabla de forma que los valores de cada fila se corresponde con una pareja de valores (x, $f(x)$) (Cañadas y Gómez, 2012). Las tablas son una herramienta útil para la exploración e identificación de relaciones entre las cantidades y pueden crear un ambiente rico para construir y explorar la covariación (Confrey y Smith, 1991). Un ejemplo del sistema de representación tabular de la función lineal $f(x)=x+5$ lo hemos presentado en la figura 2.8, donde se relacionan edades de una niña y un niño, siendo la edad de la niña cinco años mayor que el niño.

El sistema de representación gráfico ofrece un sentido visual con el que se consigue información acerca de una función. Los gráficos permiten poner en juego habilidades como la lectura e interpretación de una función lineal (Azcárate y Deulofeu, 1990). El trabajo con este sistema de representación sirve como antecedente para la educación secundaria, donde los estudiantes deben aprender a leer e interpretar críticamente la información contenida en una gráfica (Azcárate y Deulofeu, 1990; Blanton, 2008). Un ejemplo de representación gráfico de una relación funcional $f(x)=x+5$, es la figura 2.15 donde x representa la edad de un niño (Álvaro) e y representa la edad de una niña (Carmen).

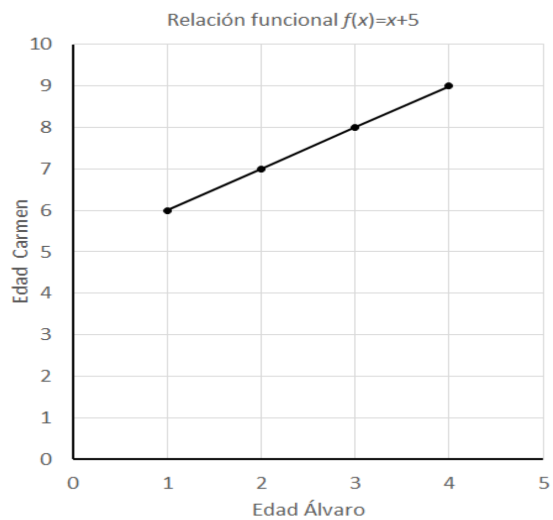


Figura 2.15. Representación gráfica de $f(x)=x+5$

El sistema de representación simbólico es de carácter alfanumérico cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas y procedimientos (Rico, 2009). Involucra símbolos y signos propios de las matemáticas que permiten expresar con exactitud y precisión las cantidades de las variables y las propias variables en una función lineal. Este sistema de representación requiere de un sofisticado pensamiento matemático que ayude a expresar la función lineal (Azcárate y Deulofeu, 1990; Blanton, 2008). Por lo general este sistema de representación se suele introducir a partir de la Educación Secundaria. Sin embargo hay evidencia de que estudiantes de primero de Educación Primaria son capaces de expresar una función lineal empleando este sistema de representación (Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey, 2015). Ejemplos de representaciones simbólicas de una función lineal son: $f(x)=x+m$ o $y=x+m$.

El trabajo con tareas matemáticas, en especial con tareas de patrones cualitativos y cuantitativos (relaciones funcionales) de parte de los estudiantes, no está exento de errores y dificultades. En el siguiente apartado nos referimos a estas nociones por ser parte importante de nuestra investigación.

ERRORES Y DIFICULTADES

Socas (2007) manifiesta que las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas es un tema de investigación en Educación Matemática sobre el que es necesario indagar, dado que permite profundizar sobre el conocimiento de los estudiantes y cómo abordar la enseñanza de los contenidos matemáticos. Los errores y las dificultades de los alumnos están presentes en la construcción del conocimiento y normalmente no pueden ni deben evitarse (Palarea, 1998). Esta idea se ve reforzada por la noción de *productive failure* (Kapur, 2008), dado que los errores y las dificultades permiten a los alumnos continuar aprendiendo y mejorar sus conocimientos.

Una dificultad de aprendizaje se entiende como aquella "circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos" (González y Gómez, 2013, p. 25). Estos autores destacan la importancia de identificar y conocer aquellos factores desencadenantes de las dificultades de los alumnos porque permite: (a) saber cómo ayudarlos a superar esas dificultades y (b) identificar aquellas rutas de aprendizaje donde no tendrán éxito porque aún no han desarrollado las capacidades necesarias.

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas tienen diferentes fuentes. Castro (1995) menciona que gran parte de las dificultades que manifiestan los estudiantes están generadas por una deficiencia en la representación intuitiva o por la distorsión producida por una incorrecta interpretación intuitiva. Socas (1997) sostiene que los factores que originan las dificultades se organizan en cinco categorías:

- *Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*. Estas dificultades se relacionan con: (a) la naturaleza de los conceptos matemáticos (teórica, formal y práctica); (b) las formas de representar esos conceptos y las relaciones que se establecen entre esas representaciones y (c) la complejidad del lenguaje que se usa en matemática.
- *Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático*. Estas dificultades se deben a la naturaleza lógica de las matemáticas. Por ejemplo las explicaciones, argumentos, demostraciones, la resolución de problemas y la modelización generan muchas de las dificultades de los estudiantes.
- *Asociadas a los procesos de enseñanza*. Estas dificultades se relacionan con una determinada organización curricular, a la forma en que están realizados los agrupamientos en clase (homogéneo o heterogéneo), a determinados estilos de enseñanza, etc.

- *Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*. Estas dificultades están relacionadas con las distintas teorías del aprendizaje que especifican estadios de desarrollo intelectual de los estudiantes y que indican qué tipos de razonamiento y de tareas pueden resolver los alumnos en cada estadio.
- *Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas*. Estas dificultades están relacionadas con la consideración social de las matemáticas lleva, en ocasiones, a que los estudiantes desarrollen sentimientos de ansiedad o infravaloración personal.

Este autor señala que los dos primeros factores se relacionan con la propia disciplina, con la complejidad de los objetos de las Matemáticas y con aquellos procesos de pensamiento matemático. El tercer factor está relacionado con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas. El cuarto factor está asociado a los procesos cognitivos de los alumnos. Y el quinto factor está asociado con actitudes tanto afectivas como emocionales de los alumnos hacia las Matemáticas.

Cuando se habla de las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes es necesario referirse a la noción de error, dado que ambas nociones están directamente relacionadas. El error es aquella manifestación visible de las dificultades. El error se entiende como esquema cognitivo inadecuado para una determinada situación, que no sea consecuencia de un despiste (Matz, 1980; Socas, 1997). El error es un dato objetivo que se encuentran en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y constituyen un elemento estable de dichos proceso (Rico, 1995).

El error se evidencia en los trabajos de los alumnos cuando resuelven tareas concretas demandadas por el profesor (González y Gómez, 2013). Los errores se pueden describir como aquel resultado de un procedimiento sistemático que presenta alguna imperfección y que el alumno lo emplea normalmente y con confianza (Lupiáñez y Rico, 2015). Rico (1995) señala que los errores tienen las siguientes características.

- Son sorprendentes porque se han mantenidos ocultos y emergen en determinados momentos.
- Son extremadamente persistentes al cambio ya que para corregirlos se necesita una reorganización del conocimiento.

- Pueden ser sistemáticos o por azar. Los primeros se pueden tomar como síntomas de un método o comprensión equivocada que el estudiante utiliza como correcto. Los segundos reflejan falta de cuidado, estos tienen poca importancia.
- Ignoran el significado. Las respuestas erróneas del alumno no se cuestionan. El alumno no considera el significado de los símbolos y conceptos con los que trabaja.

Por su parte Santagata (2005) clasifica los errores según su naturaleza y distingue entre los debidos a (a) conexiones erróneas entre conceptos matemáticos, (b) ejecución de procedimientos, (c) dibujar, (d) realizar cálculos aritméticos, (e) distracciones, (f) desconocimiento de propiedades o definiciones y (g) los diferentes a los anteriores.

La intervención docente juega un rol importante para orientar a los estudiantes cuando estos manifiestan errores y dificultades en el trabajo con tareas matemáticas. Dado lo anterior, en el siguiente apartado nos referimos a la intervención docente por ser un foco importante en nuestra investigación.

INTERVENCIONES DOCENTES

En esta investigación partimos de la teoría constructivista del aprendizaje. Esta teoría surge de las aportaciones de diferentes autores e investigadores que se centraron en la génesis del aprendizaje de los estudiantes. Entre sus representantes están Piaget, Vygotsky y Ausubel. Esta teoría ha tenido repercusión importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos escolares en los últimos años. Desde esta teoría a los estudiantes se les considera sujetos constructores de conocimiento. Esta construcción se realiza por medio de un proceso activo e interno donde interacciona la asimilación de la información externa y las propias capacidades innatas y nociones ya adquiridas (Rajadell y Medina, 2015). Además, esta construcción de conocimiento de parte de los estudiantes se realiza por medio de actividades que desarrollan para atribuir significados a los contenidos escolares que se les presentan (Mauri, 2007). Sin embargo, esta construcción no sería posible sin la intervención del docente, nada aseguraría que el estudiante por si solo construyera conocimiento (Solé y Coll, 2007). Sin intervención es altamente improbable que los estudiantes lleguen a aprender y a aprender de manera significativa los contenidos escolares (Onrubia, 2007). Es por esto que, bajo esta teoría del aprendizaje, la intervención del docente juega un rol clave en la construcción de conocimiento del estudiante. El docente es actor que participa activamente en el proceso de construcción de conocimiento el cual debe tener como centro no la materia, sino los estudiante que actúan sobre el contenido que aprenderán (Mauri, 2007). Torrego (2008) sugiere que el docente debe tener una labor de mediador en el aprendizaje de los estudiantes en lugar de transmitirles los contenidos y calificar sus rendimientos. Debe actuar como un investigador que diagnostica permanentemente la situación y elabora estrategias de intervención adaptadas al contexto. La intervención docente se puede considerar como ayuda, asistencia o acción que realiza el docente para conducir al alumno hacia el aprendizaje. Fernández (2010) sugiere que la intervención docente se puede realizar de diferentes formas: en forma de explicación, discusión o debates entre grupos. Otras formas de intervención hacen alusión a hacer preguntas, pedir opiniones a los estudiantes y proporcionar retroalimentación (Ellis, 2007).

Desde la mirada constructivista del aprendizaje la intervención docente se considera un andamio cuya misión es facilitar la comprensión y el aprendizaje de los alumnos (Fernández, 2010). Wood, Bruner y Ross (1976) consideran un andamio como el

> proceso que permite a un niño o novato resolver un problema, llevar a cabo una tarea o alcanzar un objetivo que estaría más allá de sus esfuerzos sin ayuda. Este andamiaje consiste esencialmente en que el adulto controla aquellos elementos de la tarea que están inicialmente más allá de la capacidad del alumno, lo que le permite concentrarse y completar solo aquellos elementos que están dentro de su rango de competencia (p. 91).

La investigación sugiere de manera consistente que el andamiaje del docente es una manera muy efectiva de favorecer en los estudiantes la adquisición del razonamiento, las destrezas metacognitivas y la resolución de problemas (Ellis, 2007).

Con respecto a lo eficaz que puede resultar una intervención, Onrubia (2007) sugiere que ésta debe conectar con los esquemas de conocimiento de los estudiantes de manera que pueda movilizarlos y activarlos como forma de reestructurarlos. En concreto, este autor sugiere que la intervención es eficaz cuando se conjugan dos grandes aspectos: (a) cuando se tiene en cuenta los esquemas de conocimiento de los estudiantes con respecto al contenido de aprendizaje, considerando también como punto de inicio los sentidos y significado que los estudiantes dispongan de ese contenido y (b) cuando provoca desafíos y retos con el fin de cuestionar esos sentidos y significados, forzando así su modificación por parte del estudiante y asegurando que esa modificación se produzca en la ruta deseada.

CAPÍTULO 3. ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos los principales antecedentes de esta investigación. Consideramos antecedentes de acuerdo a las temáticas de los tres estudios realizados. Inicialmente mostramos antecedentes que se utilizaron para el estudio 1 y que se corresponden a la identificación de patrones de estudiantes de Educación Infantil y Educación Primaria en tareas con patrones cualitativos. Posteriormente consideramos antecedentes relativos a la identificación de patrones, y la generalización que hacen, por estudiantes de Educación Infantil y Primaria en tareas de generalización de relaciones funcionales. Los temas anteriores se corresponden con los estudios 2 y 3. Seguidamente mostramos antecedentes relativos a las estrategias que emplean estudiantes de Educación Primaria en tareas de patrones cuantitativos y que se corresponde con el estudio 2. Finalmente mostramos antecedentes relativos a errores y dificultades de estudiantes de Educación Primaria en tareas de patrones cuantitativos e intervenciones docentes, ambos temas se corresponden con el estudio 3.

En la figura 3.1 mostramos las temáticas que abordan cada uno de los tres estudios y su relación con los temas de los antecedentes. Observamos que los tres estudios comparten antecedentes relativos a la identificación de patrones y generalización de estudiantes de Educación Infantil y Primaria.

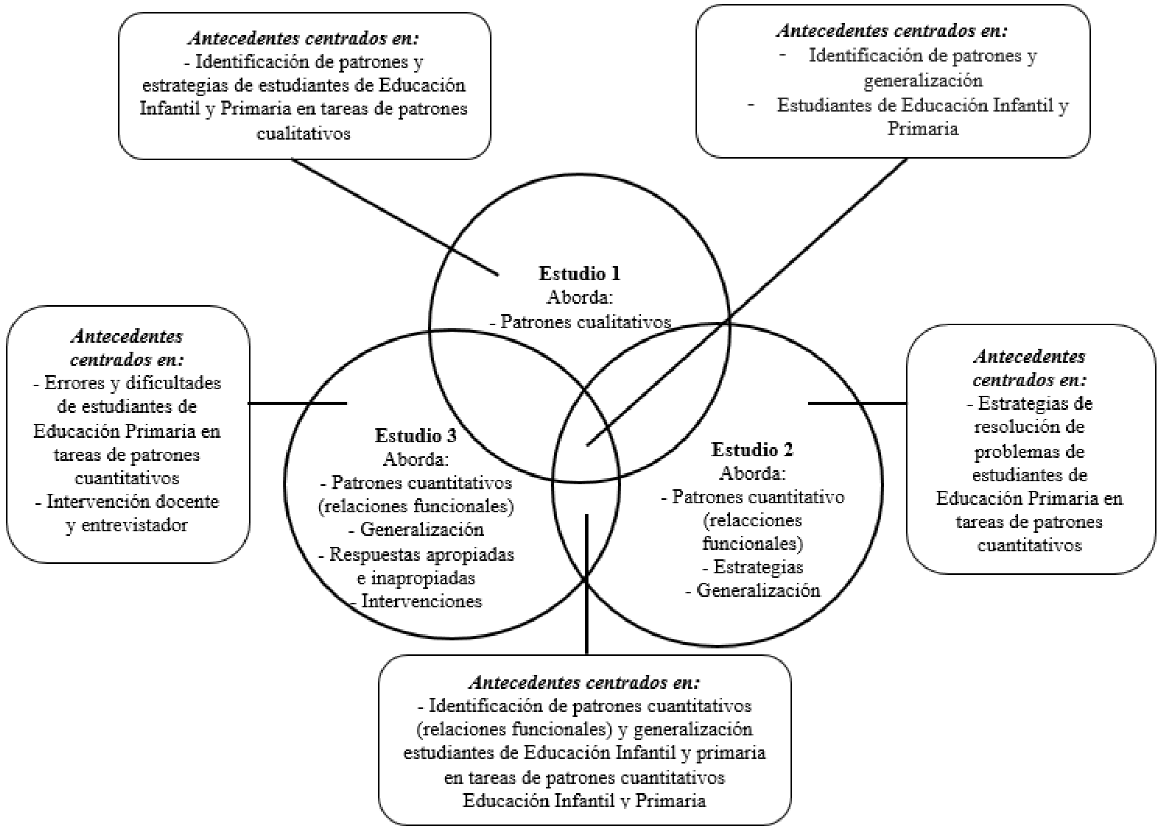


Figura 3.1. Temática de los tres estudios y antecedentes en que se centran

Describimos los antecedentes, excepto los antecedentes relativos a las intervenciones docentes, de acuerdo a las edades de los sujetos de investigación ascendentemente. Consideramos este criterio como forma de mostrar lo que hay al respecto en estudiantes de distintas edades pertenecientes a Educación Primaria. Consideramos el nivel de Educación Primaria por ser el nivel educativo en donde se enmarca nuestra investigación. Sin embargo, en algunos casos incluimos antecedentes de Educación Infantil por ser un nivel próximo a las edades (6-7 años) de los sujetos de nuestra investigación.

IDENTIFICACIÓN DE PATRONES EN TAREAS DE PATRONES CUALITATIVOS

El estudio de Piaget e Inhelder (1976) es pionero y una contribución importante para la investigación en patrones cualitativos y cuantitativos. Los autores se centraron más en aspectos lógicos-matemáticos tales como indagar en la génesis de las estructuras lógicas de clasificación y seriación, que en aspectos cuantitativos o algebraicos. Llegaron a la conclusión de que los niños de entre 7-8 años de edad son capaces de seriar elementos cuyos atributos responden a longitudes.

En los últimos años la investigación en patrones cualitativos ha recibido poca atención y por lo general se ha centrado en estudiantes de Educación Infantil, siendo escasos los estudios en Educación Primaria. Esto se puede deber a que es en Educación Infantil donde generalmente se trabaja con este tipo de patrones (p. ej., Ministerio de Educación de Chile, 2005; Ministerio de Educación y Ciencia de España, 2006; NCTM; 2000).

En el trabajo de Rustigian (citado por Threlfall, 1999) encontramos que estudiantes de entre 3 a 5 años son capaces de emplear estrategias diferentes al extender patrones reiterativos tales como: (a) colocar nuevos elementos de forma aleatoria; (b) repetir el último elemento de la seriación (perseverancia); (c) usar los elementos dados, pero en cualquier otro orden; (d) realzar un tramo simétrico reproduciendo inversamente la secuencia dada; y (e) continuar reproduciendo el patrón deliberadamente. En esta misma línea en el trabajo de Papic et al (2011) observamos que estudiantes australianos de edades de 3 años 6 meses a 5 años manifestaron diferentes estrategias para abordar una tarea que implicaba continuar patrones cualitativos. Estas estrategias, de menor y mayor sofisticación, fueron: (a) disposición aleatoria de los objetos; (b) comparación directa, al copiar un patrón se hace una correspondencia de uno a uno; (c) alternancia, centrándose en dos objetos sucesivos independientemente de la unidad de repetición; (d) unidad básica de repetición, identificación de la unidad de repetición, independientemente del número, tipo y complejidad de elementos y atributos, utilizándola para extender el patrón; y (e) unidad de repetición avanzada, se puede transferir el mismo patrón en diferentes representaciones o materiales. Este trabajo evidenció fuerte relación entre la capacidad de los niños para los patrones y su desarrollo de habilidades prealgebraicas y de razonamiento. Rodrigues y Serra (2015) mostraron que estudiantes portugueses, de edades similares al estudio anterior, fueron capaces de (a) dominar el concepto de patrones como aquel núcleo se repite de manera constante, (b) identificar la unidad de repetición, y (c) crear y analizar diversos patrones de repetición. Lo anterior fue cuando los estudiantes abordaron tareas de patrones reiterativos donde tenían que pintar una oruga siguiendo un determinado patrón y construir patrones e identificar el núcleo del patrón con apoyo de material concreto (ver figura 3.2).

Figura 3.2. Materiales usados en las tareas (Rodrigues y Serra, 2015, pp. 125, 131)

El estudio de Da Ponte y Velez (2011) es uno de los pocos existentes en patrones cualitativos en estudiantes de Educación Primaria. Estos autores propusieron a dos estudiantes (7-8 años) portugueses una tarea de patrones cualitativos donde tenían que identificar el núcleo, completar la seriación y determinar elementos de posiciones concretas, por ejemplo el término de la vigésima posición. Los dos estudiantes fueron capaces de identificar el núcleo del patrón de modo que nombraron el número de elementos (los primeros tres o seis elementos de la figura 3.3) y continuaron sin dificultad la seriación. Uno de ellos identificó un patrón pictórico pero no numérico dado que dibujó en una hoja toda la secuencia y en voz alta llegó a la vigésima posición, nombrando la figura que corresponde a esa posición. Este estudiante solo respondió a términos cercanos. Mientras que el otro estudiante identificó el patrón que permite hallar el elemento de acuerdo a su posición, y generalizó tal patrón.

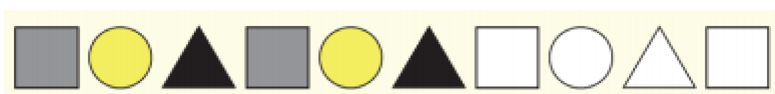


Figura 3.3. Patrones de repetición empleados en la tarea (Da Ponte y Velez, 2011, p. 56)

Como observamos en los antecedentes en Educación Infantil y Educación primaria no muestran una base importante de conocimiento respecto a lo que hacen estudiantes de estos niveles educativos en tareas de patrones cualitativos. Esto nos lleva a realizar nuestro primer estudio.

PATRONES EN TAREAS DE RELACIONES FUNCIONALES

En este apartamos mostramos antecedentes comunes a los estudios 2 y 3, y que fueron empleados para realizar dichos estudios. Describimos antecedentes centrados en la identificación de relaciones funciones (patrones cuantitativos) y a la generalización de la relación funcional.

Identificación de relaciones funcionales

Las relaciones funcionales han sido objeto de estudio por diversos investigadores que han dado luces de cómo estas relaciones han permitido evidenciar la identificación de patrones por parte de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que involucran funciones lineales, tanto en Educación Infantil como en Educación Primaria. Castro, Cañadas y Molina (2017) investigaron sobre la identificación de relaciones funcionales en 12 estudiantes de Educación Infantil (5-6 años). Las investigadoras les propusieron tareas que involucran las siguientes funciones lineales: $f(x)=x$, $f(x)=2x$, y $f(x)= x+1$, en un contexto de experimento de enseñanza. Estos estudiantes identificaron un patrón recursivo en la variable dependiente e identificaron relaciones funcionales de correspondencia y covariación. Incluso hubo estudiantes que generalizaron verbalmente la función identidad ($f[x]=x$). Otro estudio con estudiantes de edades similares al estudio anterior es el de Warren, Miller y Cooper (2013) cuyo objetivo fue indagar sobre la comprensión que tienen seis estudiantes sobre relaciones funcionales. Estos investigadores analizaron gestos (movimientos de brazos, ojos y manos) y cómo estos favorecieron los procesos de generalización de los estudiantes. Los resultados mostraron que gestos y articulaciones corporales de los estudiantes fueron útiles para dar cuenta de que ellos se involucraron en las tareas. Además, evidenciaron que los estudiantes identificaron y comunicaron la regla general de la función inmersa en las tareas propuestas. El material concreto (figuras geométricas) empleado en este estudio ayudó a los estudiantes a identificar los valores de entrada (variable independiente) y relacionarlos con los valores de salida e identificar (variable dependiente) y la regla general de la función utilizada en la tarea.

Entre las investigaciones con estudiantes de Educación Primaria está el de Cañadas y Morales (2016). Estos investigadores mostraron una descripción de las relaciones funcionales que identificaron 30 estudiantes españoles en un problema contextualizado cuya función involucrada fue $f(x)=x+5$. Los estudiantes identificaron relaciones funcionales de covariación y correspondencia, siendo esta última la más frecuente. Ningún estudiante identificó la relación de recurrencia, situación que los autores atribuyen principalmente a la forma en que se les planteó el problema, dado que no se les preguntó por casos particulares consecutivos. Cañadas et al. (2016) también se centraron en estudiantes de primeras edades de Educación Primaria (6-7 años). Estos estudiantes abordaron una tarea que involucra a la función $f(x)=2x$ por medio de dos enfoques. Un enfoque fue el basado en una relación recursiva (contar de dos en dos) y otro el basado en una relación funcional de correspondencia (duplicación). Los estudiantes emplearon ambos enfoques cuando los números por los que se les preguntó eran pequeños (1 al 20), sin embargo cuando los números eran grandes emplearon la relación de correspondencia.

Con estudiantes de tercero de Educación Primaria (8-9 años), Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) describieron cómo estos estudiantes identificaron relaciones de covariación y correspondencia cuando resolvieron en un problema que involucraba la función $f(x) = 2x+6$. La relación de correspondencia fue la más frecuente en el trabajo de los estudiantes.

Stephens et al (2012) trabajaron con estudiantes de 8-10 años (tercero, cuarto y quinto de Educación Primaria). Les plantearon una tarea de cumplimentación de tablas de funciones en un contexto de experimento de enseñanza. Estos estudiantes pasaron desde la relación de recurrencia, posteriormente la covariación hasta llegar a la correspondencia a medida que avanzó el experimento de enseñanza, Esto evidenció la capacidad de estos estudiantes de identificar relaciones funcionales.

Warren y colaboradores indagaron cómo estudiantes australianos de entre 9-10 años responden a tareas de relaciones funcionales. Warren y Cooper (2006) encontraron que estudiantes de estas edades son capaces de identificar el patrón de recurrencia y relaciones funcionales de correspondencia y covariación. Por su parte, Warren, Cooper y Lamb (2006) en un experimento de enseñanza encontraron que la mayoría de los estudiantes de una muestra de 45 fueron capaces de centrarse en una relación funcional. En concreto, se observó que tras el experimento de enseñanza hubo un aumento significativo en el número de estudiantes que identificaron un patrón que permite calcular el valor de la variable dependiente dado el valor de la variable independiente y calcular el valor de la variable independiente dado el valor de la variable dependiente (46% a 58%), y calcular correctamente los valores de ambas variables (50% a 90%). Warren y colaboradores abogan por un currículo que incluya actividades de patrones en donde se relacionen cantidades con la finalidad de extender el pensamiento recursivo, que entorpece la generalización, hacia un pensamiento centrado en las relaciones entre cantidades.

Earnest (2014) también trabajó con estudiantes de 9-10 años. Les planteó una tarea de patrones de crecimiento cuya función implicada fue $f(x)=4x+1$ a cuatro estudiantes estadounidenses. Los resultados mostraron que dos estudiantes de los cuatro emplearon una relación de correspondencia para encontrar la cantidad de puntos (variable dependiente) para diez y para cien minutos, con ayuda de la representación pictórica del patrón involucrado en la tarea. Estos estudiantes sumaron cuatro veces la cantidad de la variable independiente (diez y cien) y a continuación sumaron uno. Además generalizaron esta relación funcional.

Investigaciones con estudiantes de edades mayores a las mostradas anteriormente es el estudio de Lannin, Barker y Townsend (2006). Estos investigadores mostraron que 4 estudiantes estadounidenses de sexto de Educación Primara (10-11 años) en tareas de relaciones funcionales lineales identificaron patrones recursivos y la relación funcional de correspondencia. Además, los estudiantes hicieron conexiones entre ambos patrones identificados, de modo que a partir del patrón recursivo identificaron la relación de correspondencia.

Generalización de la relación funcional

La generalización de la relación funcional en un contexto funcional del *early algebra* por parte de estudiantes de primeros cursos educativos ha sido motivo de interés por diversos investigadores en los últimos años. Blanton et al (2016) realizaron un estudio con estudiantes estadounidenses de 6 años, a quienes les propusieron tareas que involucraban funciones lineales del tipo $f(x)=mx$ y $f(x)= x+b$ para identificar niveles de sofisticación de la generalización de una relación funcional. Los autores identificaron los siguientes ocho niveles.

- Nivel 1. Preestructural: los estudiantes describen una regularidad o patrón en aspectos no matemáticos. Por ejemplo, describen una uniformidad física de los símbolos.
- Nivel 2. Recursivo particular: los estudiantes conceptualizan un patrón recursivo como una secuencia de casos particulares a través de conteos, por ejemplo, de uno en uno, de dos en dos, entre otros, pero no generalizan tal patrón.
- Nivel 3. Recursivo general: los estudiantes conceptualizan un patrón recursivo como regla generalizada sin hacer referencia a casos particulares. Por ejemplo, cuando al estudiante se le pregunta cómo lo hace, éste responde "agrega dos cada vez".

- Nivel 4. Funcional particular: los estudiantes conceptualizan una relación funcional particular entre valores correspondientes. Generan pares de valores correspondientes con base en una relación funcional pero solo en casos particulares.
- Nivel 5. Funcional primitivo general: los estudiantes conceptualizan una relación general entre dos valores a través de un conjunto de casos particulares. Sin embargo, es primitivo porque no logra articular en palabras o notación simbólica la transformación matemática entre las cantidades generalizadas. Por ejemplo, no expresan de la siguiente manera: "el número de perros es el mismo que el número de nariz" o D = N, donde D representa el número de perros y N representa el número de narices.
- Nivel 6. Emergente funcional general: los estudiantes en este nivel muestran atributos clave de una relación funcional generalizada, pero la representación de la relación es incompleta. Los estudiantes establecen una generalización entre cantidades covariables pero no la relación matemática de las cantidades o viceversa, o a veces representan una relación sólo como una expresión dejando la variable dependiente no especificada. Los estudiantes caracterizan una transformación matemática entre dos cantidades que se comparan. Los estudiantes pueden decir "siempre aumenta en uno", pero no especifican las cantidades "la altura de la persona sin el sombrero y la altura de la persona con el sombrero".
- Nivel 7. Función general condensada: los estudiantes ya han conceptualizado una relación generalizada entre dos cantidades covariables. Señalan explícitamente y con precisión la relación y la transformación matemática presente entre las cantidades de la relación funcional. Además, los estudiantes representan la relación entre cantidades a través de palabras y la notación simbólica y piensan la relación como una unidad completa.
- Nivel 8. Función como objeto**:** los estudiantes perciben la generalidad de la relación. Conceptualizan esta relación estructuralmente, como un objeto en sí mismo en el que se podrían realizar nuevos procesos, ya que comprenden que pueden transformar su regla original.

Moss y McNab (2011) revelaron que estudiantes estadounidenses de 6-7 años generalizaron una relación funcional del tipo $f(x)=mx+b$ en una tarea de patrones geométricos. Estos estudiantes respondieron adecuadamente a casos particulares pequeños y grandes, e identificaron la relación de correspondencia, la cual generalizaron. Además extrapolaron la generalización a otros problemas con contextos diferentes (problemas verbales). Finalmente, los estudiantes construyeron un patrón geométrico adecuado por medio de una regla general dada.

Una investigación con estudiantes de edades mayores a los citados anteriormente y que trata sobre generalización de relaciones funcionales es el de Pinto y Cañadas (2017a). Ellos trabajaron con 24 estudiantes de quinto de Educación Primaria (10-11 años) españoles, a quienes plantearon una tarea donde la función involucrada en el problema era $f(x)=2x+6$. La mayoría de estos estudiantes generalizaron la relación funcional de correspondencia empleando las representaciones verbal y simbólica. Además, algunos de estos estudiantes generalizaron de manera espontánea, es decir generalizaron ante a una pregunta que abordaba casos particulares. Estos mismos investigadores (Pinto y Cañadas, 2017b) compararon la generalización de las estructuras que identifican estudiantes de, tercero de Educación Primara (8-9 años) y quinto de Educación Primaria (10-11 años) en un problema cuya función fue $f(x)=2x+6$. Este estudió dio cuenta que solo un estudiante de 24 de tercero generalizó la relación de correspondencia. Por otro lado, 17 estudiantes de 24 de quinto fueron los que generalizaron la relación funcional implicada en el problema de la tarea. Los autores atribuyeron esta diferencia a que los estudiantes de quinto poseen mayores herramientas para establecer generalizaciones debido a sus experiencias matemáticas.

Amit y Neria (2008) indagaron cómo estudiantes de 11-13 resuelven problemas de funciones lineales y no lineales. Los resultados mostraron que cuando el caso particular por el que se preguntó en el problema era pequeño, los estudiantes emplearon patrones recursivos. A partir de este patrón, los que extendieron una secuencia, consideran la cantidad anterior de dicha secuencia. En cambio, cuando los casos particulares por los que se preguntó en el problema eran grandes o cuando las preguntas que se plantearon aludieron a la generalización, emplearon estrategias funcionales (correspondencia) que se basaron en el reconocimiento de las variables y constantes, su conexión y la dependencia entre ellas. Los estudiantes generalizaron de manera verbal y por medio del simbolismo algebraico.

ESTRATEGIAS EN TAREAS DE RELACIONES FUNCIONALES

Diferentes investigaciones en el ámbito del pensamiento funcional se han centrado en las estrategias y las representaciones que emplean los estudiantes en una tarea de relaciones funcionales. Blanton y Kaput (2004) indagaron cómo estudiantes estadounidenses desde Educación Infantil (4-5 años) hasta quinto de Educación Primaria (10 años) abordaron una tarea que involucraba la función $f(x)=3x$. Los resultados evidenciaron que los estudiantes de Educación Infantil identificaron la relación de covariación mediante estrategias de conteo y aditivas con las cuales determinaron la cantidad de ojos y colas cuando se les preguntó por una determinada cantidad de perros. Los estudiantes de primero y segundo de Educación Primaria (6-7 años) utilizaron un patrón basado en estrategias multiplicativas (doblando o triplicado el valor de la variable independiente para hallar el valor de la variable dependiente). Por su parte, los estudiantes de tercero a quinto (8-11 años) necesitaron menos casos particulares para predecir una relación funcional entre las variables. Además, estos estudiantes establecieron un patrón multiplicativo mediante palabras y símbolos (simbolización abstracta usando letras como variables) para predecir cantidades, incluso generalizaron la relación funcional de correspondencia identificada.

Cañadas y Fuentes (2015) indagaron en las estrategias de estudiantes españoles de primero de Educación Primaria (6 años) en una tarea cuya función fue del tipo $f(x)=mx$. Los estudiantes utilizaron diferentes tipos de estrategias para determinar el valor de la variable dependiente, tales como: (a) conteo sobre dibujos que representan los valores involucrados en el problema planteado, (b) respuestas directas (presentan un número como resultado pero no hay información sobre su procedencia) y (c) creación de grupos de un número determinado de elementos (por ejemplo, para la función $f(x)=5x$, los estudiantes respondieron a preguntas sobre casos particulares haciendo grupos de cinco). Las autoras de este estudio consideraron que esta última estrategia constituye un avance en el razonamiento de los estudiantes, que va más allá de la operatoria con los números involucrados evidenciando la multiplicación como suma repetida y que ha surgido de forma espontánea. Con estudiantes de las mismas edades del estudio anterior, Brizuela et al (2015) indagaron cómo una estudiante estadounidense de primero de Educación Primaria (6 años) interpretó el simbolismo algebraico para expresar una relación funcional. La estudiante inicialmente consideró la letra cómo representación de cantidades conocidas, fijas y con variación finita y posteriormente como incógnita, como variable e indeterminada.

Merino, Cañadas y Molina (2013) indagaron sobre las estrategias y representaciones que utilizaron 20 estudiantes españoles de quinto de Educación Primaria (10-11 años) en una tarea de generalización de una relación funcional. Cuando los valores de la variable independiente por los cuales se les preguntó a los estudiantes eran pequeños, emplearon estrategias como el conteo sobre dibujos y la respuesta directa (no explicaban sus respuestas). Sin embargo, conforme el valor de la variable aumentó, los estudiantes recurrieron a estrategias más sofisticadas como la operatoria y la identificación de patrones (adecuados o no). En cuanto a las representaciones, estos estudiantes emplearon representaciones verbales, pictóricas y numéricas para justificar y explicar sus respuestas. Cuando los estudiantes utilizaron representaciones pictóricas, tuvieron un mayor acierto para encontrar las respuestas correctas a las cuestiones planteadas en la tarea. Tanışlı (2011) con estudiantes turcos de las mismas edades del estudio anterior observó que en tareas de tablas que involucraban a funciones del tipo: $f(x) = 2x – \mathrm{a}$; $f(x) = 3x – a$; $f(x)\ y = 2x + a$; y $f(x)=3x + a$, los estudiantes evidenciaron diferentes relaciones funcionales. Inicialmente, los estudiantes emplearon una relación de recurrencia. Posteriormente, a medida que los estudiantes continuaron trabajando en la tabla, evidenciaron covariación y correspondencia, llegando a generalizar. Este estudio destaca que estos estudiantes también emplearon estrategias multiplicativas y aditivas, y recurrieron a representaciones como verbal y simbólicas (símbolos matemáticos familiares cómo números y símbolos [+; -; *x*]). Los estudiantes tuvieron más dificultades cuando cumplimentaron las tablas de funciones del tipo $f(x)=2x –$ a y f(x)= $x – a$, que cuando lo hicieron con funciones del tipo $f(x)= 2x + a$ y $f(x) = 3x + a$.

ERRORES Y DIFICULTADES EN RELACIONES FUNCIONALES

En el contexto algebraico, los estudios sobre errores se han desarrollado por lo general en Educación Secundaria (p. ej., Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro, 2017; Ruano, Socas y Palarea, 2008). Esto no es de extrañar dado que en este nivel educativo es donde comúnmente se incluyen los contenidos de álgebra a nivel curricular. Como hemos visto en los antecedentes mostrados anteriormente el grueso de la investigación en patrones cualitativos y cuantitativos se ha centrado en mostrar lo que los estudiantes son capaces de hacer, cuya razón principal fue acabar con aquellas concepciones previas basadas en la escasa capacidad de estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en involucrarse con tareas algebraica. Sin embargo, esto no significa que los estudiantes de estos niveles no tengan dificultades ni incurran en errores. Los errores y las dificultades de los estudiantes están presentes en la construcción del conocimiento y normalmente no pueden ni deben evitarse (Palarea, 1998), dado que permiten a los estudiantes continuar aprendiendo y mejorar sus conocimientos (Kapur, 2008). A continuación detallamos algunos estudios sobre errores y dificultades que manifiestan estudiantes de Educación Primaria cuando realizan tareas con patrones. Usamos como criterio para organizar los estudios las edades de los estudiantes.

Warren y colaboradores indagaron sobre cómo estudiantes australianos de entre 9-10 años, abordan tareas que implican relaciones funcionales. Estos autores encontraron que estudiantes de estas edades son capaces de centrarse en una relación funcional, sin embargo, sus trabajos no están exentos de dificultades. Por ejemplo, Warren (2005) encontró que estos estudiantes presentaron dificultades para: (a) describir con precisión el patrón visual, (b) manifestar de manera escrita de la generalización, (c) responder a casos particulares no consecutivos y (d) encontrar la cantidad de la variable independiente dada la cantidad de la variable dependiente. Por su parte, Warren, Cooper y Lamb (2006) mostraron que 45 estudiantes, en una tareas de relaciones funcionales lineales aditivas y multiplicativas representadas en máquinas de funciones, tuvieron dificultades para: (a) realizar cálculos, (b) abstraer la generalización de ecuaciones construidas en casos particulares y expresarlas de modo general (por ejemplo, entrada + 7 = salida) y (c) transferir fácilmente números conocidos a situaciones de números más grandes en una tarea donde se debía buscar el número de entrada (variable independiente) dado el número de salida (variable dependiente) (relación funcional inversa). Esto quiere decir que los estudiantes podían restar fácilmente números pequeños con la constante de la función en una relación funcional inversa (por ejemplo, 12-3), sin embargo cuando los números eran más grandes no lo hacían (por ejemplo, 52-3).

Earnest (2014) con estudiantes estadounidenses de entre 9-10 encontró que ellos emplearon estrategias erróneas para hallar la variable dependiente en una tarea que implicaba la función $f(x)=4x+1$. Por ejemplo, cuando a la cantidad de la variable independiente por la cual se preguntaba era el doble de la cantidad de la variable independiente anterior (p. ej., x=5 e y=10), un alumno empleó la duplicación, mientras que otro estudiante empleó múltiplos de cuatro realizando el proceso desde el primer término.

Con estudiantes de 11-12 años y con la misma función implicada en la tarea es el estudio de Hidalgo y Cañadas (2017) identificaron que estudiantes españoles de estas edades manifestaron diferentes tipos de errores tales como: (a) errores de conteo, (b) errores de cálculo, (c) respuestas sobre casos particulares diferentes de aquellos por los que se les está preguntando, (d) resultados numéricos erróneos, (e) errores de procedimiento y (f) casos donde los estudiantes no avanzan. Los más frecuentes fueron de conteo y de procedimientos relativos a la utilización de un patrón incorrecto.

INTERVENCIONES DOCENTES

Organizamos este apartado mostrando antecedentes relativos a intervenciones docentes en un contexto de aula e intervenciones del entrevistador en un contexto de entrevistas.

La investigación sobre intervenciones docentes en el aula abarcan dos aspectos principalmente: (a) tipos de intervenciones y (b) eficacia de las intervenciones. Con respecto al tipo de intervenciones encontramos el trabajo de Dominik y Bernd (2005) quienes mostraron diferentes tipos de intervenciones que los docentes emplean en una clase de matemáticas, tales como: afectivas, metacognitivas, relacionadas con el contenido, relacionadas con la organización y relacionadas con la observación o diagnóstico. Anghileri (2006) mostró tipos y niveles de intervenciones en el aula. Esta investigadora distinguió tres niveles de intervenciones que el docente puede realizar en la clase. El primer nivel, el más básico, lo componen aquellas intervenciones vinculadas con las disposiciones y materiales medioambientales (murales, manipulativos, acertijos, herramientas apropiadas), la organización del aula de clases y la retroalimentación emotiva. Los niveles 2 y 3 se centran en las interacciones entre docente y estudiantes. El nivel 2 se compone por aquellas explicaciones y justificaciones que realiza el docente, algunas de las actividades que caracterizan este nivel son simplificar problemas, proponer contextos significativos y negociar significados. En el nivel 3 se incluyen actividades donde el docente crea oportunidades para desarrollar en los estudiantes el pensamiento conceptual y el establecimiento de conexiones entre conceptos, por ejemplo, conexiones entre sistemas de representación.

Con respecto a la eficacia de las intervenciones en el aula, Dekker y Elshout-Mohr (2004) sugirió que hay intervenciones más efectivas que otras para aumentar el nivel matemático de los estudiantes. Por ejemplo, las intervenciones centradas en el proceso, compuestas por actividades reguladoras que instan a interacciones como preguntar por lo que está haciendo al estudiante, proponerle que explique cómo está haciendo el trabajo, proponer al estudiante evaluar la tarea o proponer justificaciones, son más efectivas que aquellas intervenciones centradas en el producto donde se insta al razonamiento matemático y el producto. Warren (2005) identificó cuatro intervenciones de un docente que resultaron eficaces para guiar a estudiantes de quinto de primaria (9-10 años) hacia la generalización en una tarea de patrones cuantitativos. Estas intervenciones son relativas a: (a) utilizar material concreto, (b) mostrar explícitamente la relación entre las cantidades variables, (c) formular preguntas explicitas para relacionar las cantidades de las variables y (d) utilizar gradual de las cantidades (de pequeños a grandes) de una de las variables.

Con respecto a las intervenciones del entrevistador en un contexto de entrevistas, Hidalgo y Cañadas (2017) trabajaron con estudiantes de sexto de Educación Primaria (11-12 años) en una tarea que involucra relaciones funcionales. Estas investigadores mostraron diferentes tipos de intervenciones del entrevistador: (a) volver al caso particular inicial, (b) volver al caso particular anterior, (c) volver a un caso particular, (d) volver sobre el mismo caso particular, (e) verbalizar el argumento o la reflexión del estudiante, (f) repetir la pregunta, (g) reformular la pregunta, (h) calmar y (i) repetir respuesta y (j) pedir argumento. Las más frecuentes fueron verbalizar el argumento o reflexión del estudiante, y repetir la pregunta y reformular la pregunta. Ureña, Molina y Ramírez (2017), se centraron en los estímulos que realiza una entrevistadora en estudiantes de cuarto de Educación Primaria (8-9 años) cuando resuelven tareas de relaciones funcionales. Estos investigadores indicaron que los estímulos son determinantes en la obtención de respuestas del estudiante, la consolidación de ideas y construcciones asociadas al reconocimiento de la relación funcional y generalización de la misma.

CAPÍTULO 4. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Con base en nuestro marco teórico y antecedentes de investigación formulamos el siguiente objetivo general:

Describir cómo estudiantes de 6-7 años resuelven tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos.

Para la consecución de este objetivo general, nos proponemos seis objetivos específicos los cuales son:

O1. Indagar sobre los tipos de patrones que generan dos alumnas de 6-7 años en la continuación de seriaciones. O2. Describir los tipos de relaciones funcionales que identifican estudiantes de 6 años en una tarea que involucra relaciones funcionales lineales. O3. Describir las estrategias que emplean estudiantes de 6 años en una tarea que involucra relaciones funcionales lineales. O.4 Establecer vínculos entre las relaciones funcionales que identifican estudiantes de 6 años en una tarea que involucra relaciones funcionales lineales y las estrategias que emplean. O5. Describir las respuestas apropiadas e inapropiadas de estudiantes de 6-7 años antes de cualquier intervención del entrevistador. O6. Describir las respuestas apropiadas e inapropiadas de estudiantes de 6-7 años después de la intervención del entrevistador.

En la figura 4.1 mostramos los objetivos específicos que abordamos en cada uno de los tres estudios.

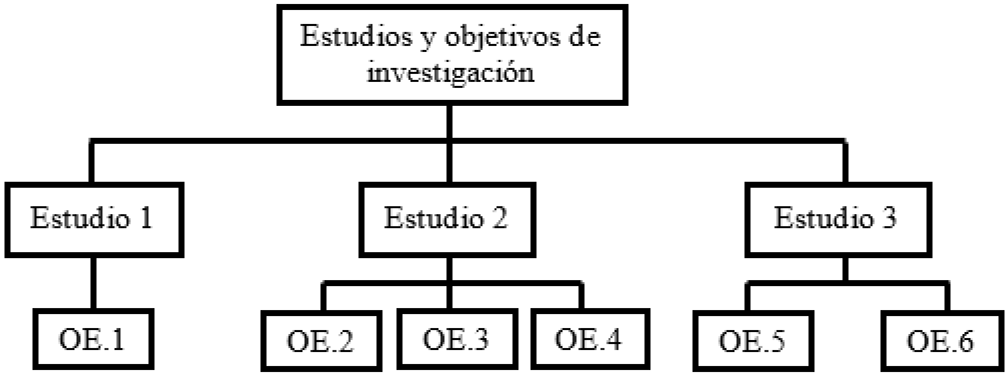


Figura 4.1. Objetivos específicos que abordamos en cada estudio

CAPÍTULO 5. MÉTODO

En este capítulo describimos el método empleado para cada uno de los tres estudios. Inicialmente describimos el contexto de investigación de los tres estudios. A continuación, describimos el tipo de investigación que llevamos a cabo para cada uno de los tres estudios. Posteriormente describimos el método del estudio 1 y el método de los estudios 2 y 3 conjuntamente.

CONTEXTOS DE INVESTIGACIÓN DE LOS TRES ESTUDIOS

Los datos considerados para realizar los tres estudios que presentamos en esta memoria de tesis doctoral provienen de dos contextos de investigación diferentes. Los datos para el estudio 1 provienen de una investigación que se llevó a cabo en el curso académico 2012-2013. En este contexto de investigación indagamos sobre la identificación de patrones cualitativos (patrones lógicos) de dos estudiantes de entre 6-7 años de edad a través de un estudio de casos y entrevistas semiestructuradas. Los datos para los estudios 2 y 3 provienen de una investigación más amplia que se realizó en los cursos académicos 2014-2015 y 2015-2016. En este contexto de investigación indagamos, sobre el pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria en España por medio de un experimento de enseñanza y entrevistas semiestructuradas. Para los estudios 2 y 3, nos centramos en los datos provenientes del experimento de enseñanza realizado en primero de Educación Primaria. En concreto, nos centramos en las relaciones funcionales (patrones cuantitativos) que identifican los estudiantes, estrategias que emplean y la generalización que hacen, los errores y dificultades que manifiestan y las intervenciones de la entrevistadora.

A continuación describimos el tipo de investigación que llevamos a cabo para los tres estudios en general.

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación combina lo cuantitativo y lo cualitativo, dado que realizamos un proceso activo, sistemático y riguroso de investigación dirigida y tomamos decisiones sobre lo que investigamos en el momento en que nos situamos en el campo de estudio (Pérez, 2016). Por su parte, nos acercamos al campo de estudio con problemas, reflexiones y supuestos en lugar de acércanos al campo con hipótesis establecidas las cuales hay que confirmar o rechazar (Pérez, 2016). Además, esta investigación se caracteriza por ser exploratoria. De acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2007) los estudios exploratorios se caracterizan por

> examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes […] cuando la revisión de la literatura reveló que solo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas o ampliar las existentes (p. 59).

En esta investigación indagamos en un tema poco explorado dado que como hemos visto en los antecedentes existen escasos estudios sobre la identificación de patrones de estudiantes de 6-7 años en tareas de patrones cualitativos y cuantitativos, así como los errores y dificultades que manifiestan los estudiantes cuando trabajan con tareas de este tipo. Por su parte, esta investigación es de carácter descriptivo. Los estudios descriptivos buscan "especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (Hernández, Fernández y Baptista, 2007, p. 60). En este estudio describimos las actuaciones de los estudiantes de 6-7 años cuando trabajan con tareas de patrones cualitativos y cuantitativos, y las intervenciones de la entrevistadora cuando los estudiantes manifiestan errores y dificultades.

MÉTODO ESTUDIO 1

En la figura 5.1 mostramos los principales elementos del método que conforman el estudio 1. A continuación describimos cada uno de ellos.

Figura 5.1. Elementos método estudio 1

Tipo de investigación

El estudio 1 se trata de un estudio de casos. Los estudios de casos se definen como una "descripción intensiva, holística y un análisis de una entidad singular, un fenómeno o una entidad social. Son particularistas, descriptivos y heurísticos y se basan en el razonamiento inductivo al manejar múltiples fuentes de datos" (Pérez, 2016, p. 85). Además, son una de las modalidades de investigación educativa que se ha incorporado con éxito en diversas disciplinas, una de ellas Ciencias de la Educación. El estudio de casos considera al individuo como universo de investigación y observación (Pérez, 2016). En el estudio 1 consideramos a dos estudiantes de 6-7 años para indagar en el trabajo que realizaron en tareas de patrones lógicos, de tal forma que buscamos comprender en profundidad lo que hacen, sin intención generalizar los resultados a otros casos (Stake, 1999).

Estudio piloto

Previo al estudio 1, realizamos un estudio piloto con una estudiante de 7 años. Esta estudiante cursaba segundo de primaria en un colegio concertado de Granada (España). La estudiante, tras haber cursado Educación Infantil, había trabajado previamente con seriaciones cualitativas. La finalidad de este estudio fue tener una primera aproximación a los tipos de tareas de patrones cualitativos que podían resolver estudiantes de estas edades y elaborar una primera aproximación a las categorías que permitieran abordar nuestros objetivos de investigación para el estudio 1. Aplicamos una entrevista semiestructurada mientras la estudiante trabajaba en unas tareas que involucraban patrones lógico de un elemento en el núcleo (ver tabla 5.1) y seriaciones reiterativas de dos y tres elementos en el núcleo como mostramos en la figura 5.2.

Figura 5.2. Patrones cualitativos de repetición de dos y tres elementos en el núcleo

Concluimos que las tareas de seriaciones de dos y tres elementos en el núcleo no aportaron información relevante para nuestros objetivos de investigación porque la estudiante las realizaba de forma inmediata y sin dificultades. En cambio, las tareas de seriaciones con un elemento en el núcleo permitieron obtener mayor información para nuestros objetivos de investigación pretendidos. Decidimos considerar solo tareas de seriaciones de un elemento en el núcleo para el estudio definitivo.

Sujetos participantes

Los sujetos participantes del estudio 1 son dos estudiantes de 6 y 7 años. Una estudiante cursaba primero de Educación primaria de un centro público de la ciudad de Granada (España), mientras que la otra estudiante cursaba segundo de Educación Primaria de un colegio concertado de dicha ciudad. La selección de los sujetos de investigación fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad de las estudiantes previa autorización de los padres. Ambas tenían un rendimiento académico medio en sus respectivas clases y pertenecían a familias de clase media. Además, contaban con nociones previas sobre patrones reiterativos y habían trabajado con el material manipulativo de los bloques lógicos de Dienes tanto en sus respectivos colegios como en sus hogares.

Equipo de investigación

El equipo de investigación lo compusieron el autor de esta Tesis Doctoral, su directora y profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. El equipo de investigación diseñó las entrevistas con base en los antecedentes de nuestra investigación. El autor de la tesis y su directora estuvieron presentes durante el desarrollo de las entrevistas. El autor de esta tesis aplicó la entrevista mientras que la directora de esta tesis colaboró en la recogida de información, principalmente con la grabación de las sesiones, la toma de fotografías y la formulación de algunas preguntas puntuales. El autor de esta tesis transcribió la grabación de la sesión para su posterior análisis.

Entrevista semiestructurada y recogida de información

El estudio de casos se llevó a cabo mediante entrevista semiestructura que realizamos a cada una de las estudiantes. En estas entrevistas aplicamos las 10 tareas de patrones lógicos a cada estudiante. Para las entrevistas diseñamos un guión que constaba de dos partes. En la primera parte, las preguntas fueron construidas de acuerdo a la noción de operador inverso[2] (Alsina, 2006) y estaban orientadas a que las estudiantes compararan los atributos de los elementos. La segunda parte, las preguntas estaban orientadas a que las estudiantes explicaran la continuación de la seriación realizada, además de permitir evidenciar patrones identificados por las estudiantes. En la figura 5.3 mostramos ejemplos de preguntas del guión de entrevistas.

[2] Un operador inverso es cuando se desconoce la situación de cambio, dado un elemento con una situación inicial y un elemento con una situación final, o dada solamente la situación inicial buscar la situación de cambio y final.

Ejemplos de preguntas. Primera parte

¿Qué sucede de una pieza a la otra?

- Entonces ¿En qué se asemejan y en qué se diferencian?
- ¿De acuerdo a lo que tú me has dicho qué otra pieza pondrías para continuar la seriación?
- ¿Cómo continuarías la seriación?

Ejemplos de preguntas. Segunda parte

La segunda parte de la entrevista tuvo que ver con preguntas cuando ya la alumna continuó con la seriación. Las preguntas se presentan a continuación.

- ¿Por qué continuaste con esa pieza?
- ¿Por qué ordenaste las piezas de esa forma?
- ¿Consideraste esas características que se mantienen fijas y aquellas que cambian entre las piezas?

Figura 5.3. Guión de entrevistas

Las entrevistas tuvieron una duración de 90 minutos aproximadamente. En la aplicación de las entrevistas, el entrevistador (autor de este trabajo) comenzó con algunas preguntas personales para habituar a las estudiantes. Posteriormente, el entrevistador presentó las diferentes piezas de los bloques lógicos de Dienes (ver figura 5.4) y realizó preguntas para que las estudiantes identificaran los atributos de los elementos. Utilizamos cinco juegos de este material, con la finalidad de que hubiera una cantidad suficiente de elementos para que las estudiantes continuaran las seriaciones solicitadas. A continuación el entrevistador colocó los dos primeros elementos de la seriación e hizo preguntas relativas a la primera parte del guión de la entrevistas, y le propuso que continuaran seriación. Las estudiantes podían elegir elementos entre un montón de elementos de los bloque lógicos de Dienes. Además, el entrevistador colocó y ofreció tiras de papel para que las estudiantes separaran los elementos que conformaban el núcleo y para que continuaran las seriación tal como observamos en la figura 5.4. Finalmente el entrevistador realizó preguntas orientadas a que las estudiantes justificaran su respuesta. El procedimiento anterior se empleó para cada una de las 10 tareas propuestas a cada una de las estudiantes.

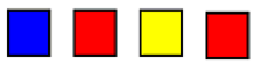
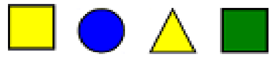
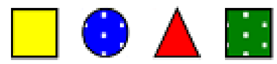
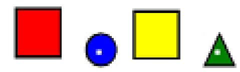
Figura 5.4. Material y tiras de papel para separar núcleos y continuar seriación

La recogida de la información se llevó a cabo en el Seminario del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada durante el año escolar 2012-2013, en dos días diferentes.

Tareas

Para el estudio de casos diseñamos tareas de patrones cualitativos lógicos que planteamos a cada una de las dos estudiantes. Estas tareas las construimos de acuerdo a tres variables de tarea que surgen de las características de los patrones que hemos descritos en el marco teórico. Las variables de tarea consideradas fueron: (a) número de elementos en el núcleo, (b) atributos y (c) variación de atributos entre los elementos de núcleos diferentes. Consideramos patrones de un elemento en el núcleo de los patrones. Además, organizamos las tareas de acuerdo a niveles de dificultad, es decir cuanto mayor es el número de atributos que varían entre los núcleos, mayor es su complejidad (Threlfall, 1999; Zazquis y Liljedahl, 2002). En la tabla 5.1 mostramos distintos patrones lógicos de un elemento en el núcleo y cuatro niveles de complejidad de estos, que construimos considerando que las estudiantes podrían continuar la seriación. Estos patrones los diseñamos con los atributos de una de las variantes del material manipulativo de los bloques lógicos de Dienes, cuyos atributos son: color, forma, tamaño y textura.

Tabla 5.1. *Patrones lógicos de un elemento en el núcleo y niveles de complejidad*

Tareas patrones lógicos y nivel de complejidad			
Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
			
Variación entre núcleo: atributo color. Atributos fijos entre núcleos: forma, tamaño y textura.	Variación entre núcleos: atributos forma y color. Atributos fijos núcleos: tamaño y textura.	Variación entre núcleos: atributos color, forma y textura. Atributo fijo entre núcleos: tamaño.	Variación entre núcleos: atributo color, forma, tamaño y textura. Atributos fijos núcleo: no tiene.

En cada columna de la tabla 5.1 observamos diferentes ejemplos de tareas de patrones lógicos de acuerdo a diferentes niveles de complejidad que consideramos para las tareas del estudio 1. La tarea del nivel de complejidad 1 entre los núcleos (elementos o piezas) hay una variación de un atributo y otros tres fijos. En el ejemplo de la tabla 5.1 observamos que los núcleos del patrón varían en color, mientras que los atributos de textura, forma y tamaño son fijos. En el nivel de complejidad 2 los núcleos varían en dos atributos y otros dos fijos. En el ejemplo de la tabla 5.1 observamos que los núcleos varían en forma y color, mientras que los atributos tamaño y la textura son fijos. En el nivel de complejidad 3 los núcleos varían en tres atributos y el otro es fijo. En el ejemplo de la tabla 5.1 observamos que los núcleos varían en tres atributos color, forma y textura, mientras que el tamaño es fijo. Por último, en el nivel de complejidad 4 los núcleos varían en cuatro atributos y ninguno es fijo. En el ejemplo de la tabla 5.1 observamos que los núcleos varían en cuatro atributos color, forma, tamaño y textura.

Para las tareas definitivas a las dos estudiantes consideramos los patrones lógicos de un elemento en el núcleo de los niveles de complejidad 2 y 3 de la tabla 5.1. Elegimos estos patrones dado que las del nivel 1 fueron fáciles para las estudiantes, ellas continuación las seriaciones de acuerdo al patrón de la variación de un atributo y tres atributos fijos entre los elementos del patrón sin dificultad mientras que las del nivel 4 las consideramos complejas para las estudiantes.

A continuación presentamos las tareas que le propusimos a cada una de las estudiantes correspondientes a patrones lógicos del nivel 2 y 3.

Las tareas de patrones lógicos de nivel de complejidad 2 son aquellas que varían dos atributos entre sus elementos.

Tarea 1

Variación de atributos entre elementos de núcleos: forma, color

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: tamaño, textura

Tarea 2

Variación de atributos entre elementos de núcleos: forma, tamaño

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: color, textura

Tarea 3

Variación de atributos entre elementos de núcleos: color, tamaño

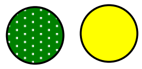
Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: forma, textura

Tarea 4

Variación de atributos entre elementos de núcleos: textura, tamaño

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: forma, color

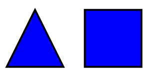
Tarea 5

 _____ _____ _____ _____ _____

Variación de atributos entre elementos de núcleos: textura, color

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: forma, tamaño

Tarea 6

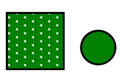
 _____ _____ _____ _____ _____

Variación de atributos entre elementos de núcleos: textura, forma

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: color, tamaño.

Las tareas de patrones lógicos de nivel de complejidad 3 son aquellas que varían tres atributos entre sus elementos.

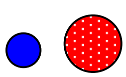
Tarea 7

 _____ _____ _____ _____ _____

Variación de atributos entre elementos de núcleos: textura, tamaño, forma

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: color

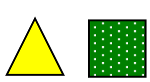
Tarea 8

 _____ _____ _____ _____ _____

Variación de atributos entre elementos de núcleos: textura, tamaño, color

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: forma

Tarea 9

 _____ _____ _____ _____ _____

Variación de atributos entre elementos de núcleos: textura, forma, color

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: tamaño

Tarea 10

Variación de atributos entre elementos de núcleos: color, tamaño, forma

Atributos fijos entre elementos de núcleos diferentes: textura

Análisis de datos y categorías de análisis

Construimos las categorías para el análisis de datos con base en el marco teórico, la entrevista piloto, las entrevistas a las dos estudiantes y las variables de tareas consideradas. En la tabla 5.2 detallamos cada una de las categorías que utilizamos en esta investigación, junto con una descripción de las mismas. La categoría tipos de seriación se compone de dos subcategorías y tienen que ver los tipos de seriaciones construidas por las estudiantes, las cuales son reiterativas y no reiterativas. Las categorías número de elementos del núcleo y atributos que cambia y que mantiene entre elementos del núcleo del patrón forman parte de las variables de tarea descritas en las tareas consideradas en este estudio.

Tabla 5.2. *Categorías de análisis*

Categoría	Subcategoría	Descripción
Tipo de seriación	Reiterativa	Se refieren cuando las estudiantes repiten los dos, tres o más elementos iniciales de la seriación manteniendo sus atributos fijos.
	No reiterativa	Se refieren cuando las estudiantes continúan la seriación por medio del patrón lógico (identificación de semejanzas y diferencias existentes entre los elementos iniciales de la seriación).
Número de elementos que presenta el núcleo del patrón		Cuando las estudiantes identifican y consideran un número determinado de elementos en el núcleo del patrón y la continúan la seriación considerando tal núcleo.

Tabla 5.2. *Categorías de análisis*

Categoría	Subcategoría	Descripción
Atributos que cambia o mantiene entre los elementos del núcleo del patrón.		Número y tipo (color, forma, tamaño y textura) de atributos que las estudiantes cambian o mantienen de los elementos del núcleo del patrón al continuar la seriación.

MÉTODO ESTUDIOS 2 Y 3

En la figura 5.5 mostramos los principales elementos del método que conforman los estudios 2 y 3. A continuación describimos cada uno de ellos.

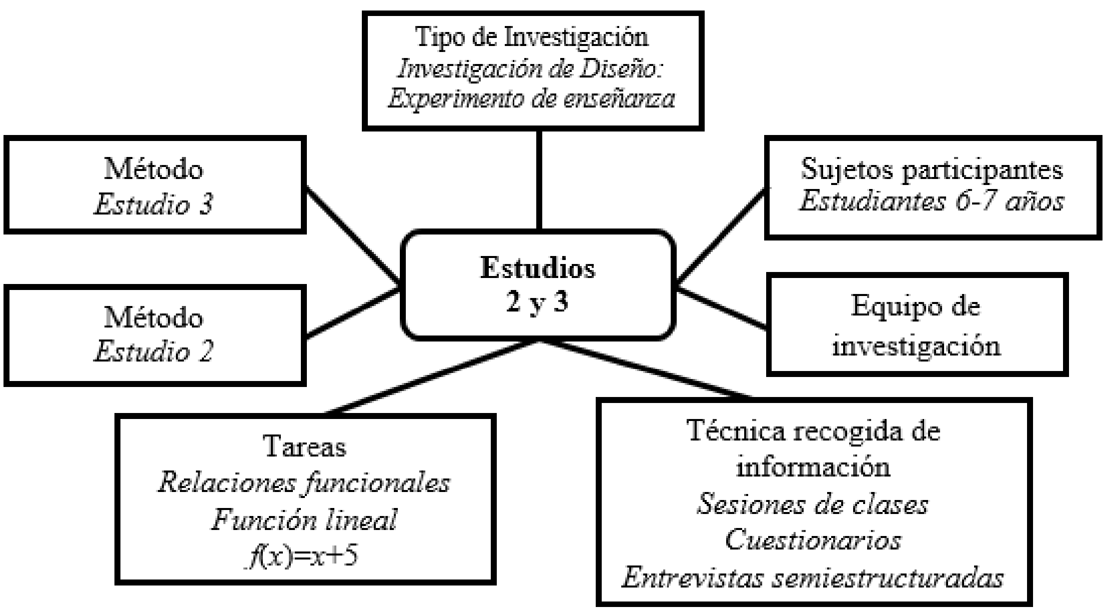


Figura 5.5. Elementos método estudios 2 y 3

Tipo de investigación

Los estudios 2 y 3 se enmarcan dentro de un proyecto de investigación más amplio que exploró el pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria en España. Para indagar en dicho pensamiento se llevó a cabo una investigación de diseño. La investigación de diseño busca comprender y mejorar la realidad escolar por medio de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis de un diseño instruccional determinado (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). De acuerdo a Confrey (2006) la investigación de diseño pretende documentar

> recursos y conocimiento previo que ponen en juego los estudiantes en las tareas, cómo interaccionan los estudiantes y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción; todo ello mediante el estudio del trabajo de los estudiantes, grabaciones de vídeos y evaluaciones de la clase. (p. 135-136)

Dentro de la investigación de diseño, utilizamos un experimento de enseñanza. Esta metodología se basa en secuencias de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). Se efectúan para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Los experimentos siguen tres fases, las cuales se siguieron en esta investigación. Estas fases son: (a) preparación del experimento que incluye la planificación del trabajo en el aula; (b) experimentación referida a la implementación de la planificación realizadas, análisis de lo ocurrido y refinamiento de la planificación si fuese necesario con la finalidad promover el aprendizaje y (c) ejecución del análisis retrospectivo de los datos (Cobb y Gravameijer, 2008; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Realizamos el experimento de enseñanza en primero Educación Primaria de 30 estudiantes en un centro escolar privado de Granada (España) del año escolar 2014-2015. Consideramos este centro por disponibilidad y porque los profesores estaban interesados en participar en el proyecto. Realizamos cinco sesiones de 90 minutos en cada sesión. Aplicamos tareas con diferentes tipos de relaciones funcionales en cada uno de ellos, en contextos cercanos a los estudiantes. Además, empleamos materiales concretos para la manipulación y visualización de los estudiantes. En la tabla 5.3 detallamos las características centrales del experimento de enseñanza realizado en primero de primaria.

Tabla 5.3. *Descripción sesiones experimento de enseñanza primero Educación Primaria*

Número sesión	Relación funcional y contexto	Enunciado del problema	Descripción general
Sesión 1	$f(x)=x$ Perros y collares. Material concreto que representan a perros y collares.	Una cuidadora de animales le debe poner collares a todos los perros, de modo que a cada perro le corresponde un collar.	Los estudiantes respondieron de manera verbal y escrita (cuestionario) a cuestiones sobre casos particulares y caso general de un problema que relaciona número de collares y número de perros.
Sesión 2 y 3	$f(x)=x+5$ Perros y platos. Material concreto que representan a perros y platos de agua y comida.	Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perro debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros que tengan sed puedan ir y beber agua.	Los estudiantes respondieron de forma verbal y escrita (cuestionario) a cuestiones de casos particulares, de un problema que relaciona la cantidad de platos totales (5 platos de agua a compartir por todos y un plato de comida para cada uno) y número de perros. Trabajaron la organización de casos particulares en la representación tabular.
Sesión 4 y 5	$f(x)=x+5$ Edades de dos niños.	Dos niños, Álvaro y Carmen, se llevan cinco años, siendo Carmen cinco años mayor que Álvaro.	Los estudiantes respondieron verbalmente cuestiones de casos particulares y completaron tabla de funciones en un problema que relaciona el número de años de Carmen y el número de años de

Tabla 5.3. *Descripción sesiones experimento de enseñanza primero Educación Primaria*

Número sesión	Relación funcional y contexto	Enunciado del problema	Descripción general
			Álvaro, con Carmen cinco años mayor que Álvaro. También trabajaron el caso general.

Como observamos en la tabla 5.3 la primera sesión empleamos la función $f(x)=x$ y en las sesiones posteriores la función $f(x)=x+5$. Consideramos tres contextos diferentes en las tareas (problemas): (a) relación entre cantidad de collares y cantidad de perros; (b) relación entre cantidad de platos (comida y agua) y cantidad de perros, y (c) diferencia de edades entre dos hermanos. Además, aplicamos en todas las sesiones cuestionarios donde los estudiantes respondieron de manera individual a cuestiones relacionadas con la función implicada en la tarea de la sesión. En el curso siguiente a la realización del experimento de enseñanza, realizamos entrevistas a un grupo de estudiantes seleccionados de acuerdo a los siguientes criterios: (a) capacidad para verbalizar sus respuestas, (b) rendimiento académico, de modo que elegimos estudiantes de rendimientos bajos, medios y altos, y (c) aquellos estudiantes que no habían respondido a algunas de las cuestiones planteadas en las sesiones.

A continuación describimos los sujetos de investigación, la implementación del experimento de enseñanza y las entrevistas, la forma en que recogimos los datos destacando los procedimientos e instrumentos, los diseños de los cuestionarios para las sesiones y las entrevistas realizadas. Finalmente mostramos cómo analizamos los datos.

Sujetos participantes

Los sujetos de investigación para el estudio 2 fueron los 30 estudiantes de primero de Educación Primaria que en el curso académico 2014-2015 cursaban primero de Educación Primaria. Estos estudiantes contaban con conocimientos previos antes de la recolección de datos, tales como: nombrar y contar hasta cien de uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco, y de diez en diez; y sumar y restar números de una y dos cifras (incluidas llevadas). Además, estaban familiarizados con el cálculo mental, las puestas en común y la justificación de respuestas. Sin embargo, no tenían experiencia previa con situaciones que implicaran relaciones funcionales aditivas.

El estudio 3 se realizó el curso académico posterior a la implementación del experimento de enseñanza (2015-2016), cuyos sujetos de investigación fueron ocho estudiantes de esos treinta que cursaban primero de Primaria. Estos estudiantes ya contaban con conocimientos previos sobre relaciones funcionales por el trabajo realizado en el experimento de enseñanza realizado el año previo.

Equipo de investigación

El equipo de investigación lo compusieron el autor de esta Tesis Doctoral, su directora y profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (integrantes del proyecto de investigación que enmarca esta investigación). El equipo de investigación diseñó las sesiones de clase con base en los antecedentes de nuestra investigación. La directora de esta tesis implementó las sesiones de clase tomando el rol de profesora-investigadora. Otra investigadora de apoyo a la primera ayudó a resolver dudas a los estudiantes. El autor de esta tesis se encargó de las videocámaras y de registrar información útil para la investigación.

Para las entrevistas posteriores a la implementación del experimento de enseñanza, la directora de esta tesis doctoral que encargo de efectuarlas, mientras que el autor de esta tesis se encargó de grabar la información en videocámaras.

Implementación: sesiones 2 y 3 del experimento de enseñanza

En nuestra investigación nos centramos en las sesiones 2 y 3 del experimento de enseñanza (ver tabla 5.3), porque fue la primera vez que estos estudiantes se enfrentaban a un problema que implicaba una relación funcional con una cantidad constante $f(x)=x+5$.

La profesora-investigadora introdujo la situación sobre la que los estudiantes iban a trabajar y realizó preguntas para recordar lo que se había trabajado en la sesión previa. Además, para que los estudiantes comprendieran la tarea propuesta, la profesora-investigadora les mostró material concreto el que se pegó en la ventana (ver figura 5.6). Los cinco platos de la parte superior representan los platos de agua (constante de la función) y los platos que están junto a los perros son los platos de comida.

Figura 5.6. Material utilizado en sesiones 2 y 3

En la segunda parte, los estudiantes respondieron y debatieron con la docente-investigadora a partir diferentes preguntas que le planteó sobre casos particulares. En la tercera parte, los estudiantes trabajaron sobre un cuestionario individual escrito. El cuestionario de la sesión dos tenía preguntas de casos particulares de diferente tipo en donde los estudiantes debían encontrar tanto el valor de la variable dependiente (relación directa). Además, este cuestionario contenía letras que representaban la variable independiente y dependiente. En el cuestionario de la sesión tres, los estudiantes debían cumplimentar una tabla de funciones con los valores de la variable dependiente e independiente en casos particulares de diferente tipo. Los tres investigadores que ingresamos al aula resolvimos dudas sobre la realización del trabajo y ayudamos a los estudiantes cuando ellos no supieron cómo escribir algo que estaban pensando. No proporcionamos *feedback.* En la cuarta parte de la sesión, organizamos una puesta en común sobre el trabajo realizado por los estudiantes en los cuestionarios de trabajo. Además, en la sesión 3 la docente-investigadora introdujo una tabla de funciones en la pizarra, la cual completó de acuerdo a lo que los estudiantes iban respondiendo en la puesta en común. En la figura 5.7 mostramos una representación tabular que la docente-investigadora representó en la pizarra durante la sesión 3 con la información que los estudiantes proporcionaron durante la puesta en común.

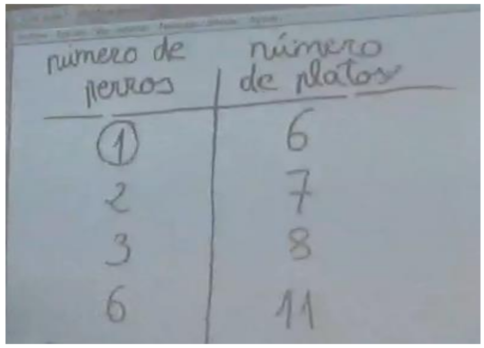


Figura 5.7. Tabla de funciones sesión 3

Recogida de información

Recogimos la información por medio de tres técnicas de recogida de datos: filmaciones en video cámaras de las sesiones de clases, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas. A continuación, detallamos cómo recogimos la información con estas técnicas.

Sesiones de clases: experimento de enseñanza

En cada una de las dos sesiones en las que centramos nuestra investigación, una vez que presentamos el enunciado de forma verbal al gran grupo, la profesora-investigadora propuso diferentes preguntas, formuladas siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Estas preguntas iban sobre casos particulares menores a preguntas de casos de particulares mayores, hasta que finalmente se les preguntó por la generalización de la relación funcional. En la tabla 5.4, mostramos las características de los tipos de preguntas planteadas y algunos ejemplos de las mismas. Para cada tipo de preguntas presentamos diferentes ejemplos de preguntas.

Tabla 5.4. *Tipo de preguntas y ejemplos*

Tipos de preguntas	Ejemplos de preguntas
Casos particulares	Si hay cinco perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay ocho perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay quince perros ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay cien perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
Recordatorio	¿Quién me puede decir qué se trabajó en la sesión anterior?

Tabla 5.4. *Tipo de preguntas y ejemplos*

Tipos de preguntas	Ejemplos de preguntas
Generalización*	¿Cómo encuentras la cantidad de platos totales para una cierta cantidad de perros

Nota. * = Planteada en entrevistas.

Para las preguntas de casos de particulares menores y mayores consideramos que los números fueran familiares para los estudiantes, de modo que el cálculo fuese fácil para los estudiantes y no una dificultad añadida. Por ejemplo, algunas de las preguntas que planteamos los números fueron terminados en cinco porque los alumnos estaban habituados a contar de cinco en cinco.

Para las sesiones contamos con dos videocámaras en el aula. Una videocámara se centró en grabar la generalidad del aula y se ubicó en la parte de atrás del aula. La otra videocámara se enfocó en las respuestas de estudiantes particulares durante la puesta en común en el trabajo individual. Tuvimos la precaución de que cuando un estudiante repetía la respuesta de otro, le proponíamos que explicara tal respuesta, para así detectar si la respuesta se basaba en su propio razonamiento o no.

Cuestionarios

Diseñamos un cuestionario para cada una de las sesiones 2 y 3 (ver anexo A y B). Estos cuestionarios incluyen una tarea cuyas variables son cantidad de perros (variable independiente) con cantidad de platos (aguas y comida) (variable dependiente). El cuestionario de la sesión 2 (ver anexo A) estuvo conformado por 13 cuestiones de enunciados verbales relativos a casos particulares. En los primeros cinco enunciados del cuestionario esperamos que los estudiantes respondieran a casos particulares menores (1, 2, 5, 10 y 30) por medio de una representación simbólica (números) al respectivo enunciado. Los tres siguientes esperamos que los estudiantes respondieran a casos particulares mayores (cien, mil, mil millones). Una vez respondidos los casos anteriormente mencionados propusimos otros dos donde consideramos la variable dependiente con una letra y pedimos al estudiante determinar la variable dependiente empleando dicha letra. Los últimos tres enunciados trataron sobre encontrar una expresión matemática que satisfaga el enunciado propuesto. En todos los enunciados, se les pidió a los estudiantes que respondieran empleando representaciones simbólicas (números y, números y letras).

En el cuestionario de la sesión 3 (ver anexo B) los estudiantes debían cumplimentar una tabla de funciones. Este cuestionario constó de dos partes. En la primera parte del cuestionario propusimos una tabla de funciones donde los estudiantes debieron encontrar el valor de la variable dependiente (relación directa). Para esto propusimos dos casos particulares próximos a los trabajados (10-30) y otros dos mayores (50-100). Consideramos que los casos particulares menores y mayores fueran terminados en cero con el objetivo de que a los estudiantes les resultase más fácil hacer los cálculos. Además, consideramos que los casos particulares no fueran consecutivos para evitar la identificación del patrón recursivo por parte de los estudiantes porque nuestros antecedentes evidencian que la recurrencia dificulta la generalización. Adicionalmente, al finalizar la tabla de funciones incluimos la letra con la finalidad de que los estudiantes pudieran responder con una expresión que incluyeran las letras propuestas.

En la segunda parte del cuestionario propusimos una tabla de funciones donde los estudiantes debían trabajar la función inversa. Para esto propusimos tres casos particulares cercanos (6-15-17) y otros dos mayores (50-100). Evitamos los casos particulares que sospechamos pudieran suponer dificultades para los estudiantes (por ejemplo restar cinco, restas con llevadas o restas con números mayores). Al igual que en la primera parte del cuestionario, consideramos que los casos particulares no fueran consecutivos. Además incluimos la letra para explorar si los estudiantes eran capaces de escribir una expresión matemática que incluyera las letras propuestas.

Los datos escritos de los cuestionarios contribuyeron a la puesta en común. Los investigadores presentes en el aula revisaron las respuestas escritas mientras los estudiantes trabajaban, justo antes de la puesta en común. Esto permitió tener información del trabajo individual de los estudiantes y, con base en esta información, guiar la puesta en común.

Entrevistas semiestructuradas

Al finalizar las cinco sesiones del experimento de enseñanza, realizamos entrevistas semiestructuradas en dos ocasiones. La primera ocasión fue el mismo curso académico (2014-2015) en que aplicamos el experimento de enseñanza y la segunda ocasión fue al curso académico siguiente (2015-2016). El objetivo de estas entrevistas fue profundizar en la información relativa a los objetivos de la investigación general en la que esta tesis se enmarca, llevada a cabo en primero de Educación Primaria.

En la primera entrevista, trabajamos con cuatro estudiantes (6 años) quienes fueron seleccionados con la colaboración de la tutora del grupo. Seleccionamos a tres de ellos por tener rendimientos académicos diferentes en matemáticas (alto-medio-bajo) y por su buena disposición a participar en la investigación. Seleccionamos al cuarto estudiante porque no respondió a algunos de los ítems planteados durante la puesta en común y nos interesaba complementar su información. Cada entrevista duró unos 25 minutos. Formulamos preguntas a cada alumno con base en sus respuestas en los cuestionarios de todas las sesiones desarrolladas. Para efectos de esta tesis nos centramos en la parte de la entrevista donde preguntamos a los estudiantes cuestiones relativas a las sesiones 2 y 3. Estas entrevistas fueron grabadas en videocámaras y posteriormente transcritas para su posterior análisis. La directora de esta tesis realizó las entrevistas, mientras que el autor de esta tesis grabó las entrevistas en videocámaras.

En la segunda entrevista, trabajamos de manera individual con ocho estudiantes (6-7 años) de los treinta de los 30 que conformaban la clase donde desarrollamos el experimento de enseñanza. Seleccionamos a estos estudiantes de manera que tuvieran diferentes rendimientos académicos (bajo-medio-alto). Para esto consideramos las calificaciones de los estudiantes y la capacidad cognitiva reconocidas por la tutora. Además, consideramos que los estudiantes elegidos tuvieran una actitud participativa. Con base en lo anterior establecimos tres grupos con los cuales trabajamos en las entrevistas. El primer grupo estaba conformado por tres estudiantes de rendimiento alto, el segundo grupo estaba conformado por otros tres estudiantes de rendimiento medio, y un tercer grupo estaba conformado por dos estudiantes con rendimiento bajo. A estos estudiantes les planteamos una tarea que involucraba la misma relación funcional $f(x)=x+5$ que en las sesiones 2 y 3, pero en un contexto diferente: ahorro de monedas de un euro. El enunciado de la tarea para esta entrevista fue el siguiente:

Una abuela inicialmente le regala a su nieto una hucha y cinco euros. Luego cada domingo que pasa, le regala un euro.

Para realizar las entrevistas planteamos el enunciado junto con material concreto: una hucha y monedas (ver figura 5.8). Proporcionamos el material concreto a los estudiantes para que lo utilizaran en sus respuestas. Además los estudiantes tenían a disposición papel y lápiz para que lo utilizaran en caso que de que así fuese.

Figura 5.8. Material utilizado en las entrevistas

Una vez que a los estudiantes se les presentó el enunciado de la tarea, la entrevistadora (directora de esta tesis) aplicó el protocolo de entrevistas que estaba conformado por diferentes preguntas que fueron diseñadas siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). En la tabla 5.5 mostramos ejemplos de preguntas que conformaba el protocolo de entrevistas.

Tabla 5.5. *Tipos y ejemplos de preguntas iniciales en el protocolo de la entrevistadora*

Tipo de pregunta	Ejemplo
Casos particulares consecutivos	Si la abuela le da un euro a su nieto, ¿cuántos euros tiene ahorrados el nieto? Si la abuela le da a su nieto dos euros, ¿cuántos euros tiene ahorrados el nieto? Si la abuela le da a su nieto tres euros, ¿cuántos euros tiene ahorrados el nieto?
Casos particulares no consecutivos	Si la abuela le da a su nieto cinco euros, ¿cuántos euros tiene ahorrados el nieto? Si la abuela le da a su nieto quince euros, ¿cuántos euros tiene ahorrados el nieto?

Tabla 5.5. *Tipos y ejemplos de preguntas iniciales en el protocolo de la entrevistadora*

Tipo de pregunta	Ejemplo
Caso general	Si la abuela le da a su nieto cien euros, ¿cuántos euros tiene ahorrados el nieto ¿Cómo calculas siempre los euros que tiene ahorrados el nieto? ¿Cómo lo haces siempre?

Cuando el estudiante no respondía o respondía de forma inapropiada a la pregunta planteada, la entrevistadora intervenía para tratar de orientar al estudiante para que manifestara una respuesta apropiada.

Cada entrevista tuvo una duración aproximada de 20 minutos y se realizó en el horario y espacio del centro escolar y fueron grabadas con videocámara. La directora de esta tesis fue la encargada de realizar las entrevistas, mientras que el autor de esta tesis fue el encargado de grabar las entrevistas en videocámara.

Análisis de datos y categorías de análisis

Para el análisis de los datos de las sesiones 2 y 3 realizamos diferentes procedimientos. En primer lugar transcribimos las sesiones y las entrevistas. En segundo lugar, consideramos como unidad de análisis las respuestas verbales de los estudiantes. Estas respuestas fueron manifestadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el debate de las sesiones (parte dos de la sesión) 2 y 3, a las preguntas planteadas en la puesta en común (respuestas a cuestionarios, parte cuatro de la sesión), y a las preguntas planteadas en las entrevistas. En tercer lugar, categorizamos el tipo de relación funcional (covariación o correspondencia) y la estrategia empleada por los estudiantes en las respuestas verbales. Además, comparamos las respuestas a las diferentes preguntas planteadas en el debate, puesta en común y en la entrevista de los cuatro estudiantes entrevistados de manera individual. Adicionalmente, comparamos las respuestas de estos estudiantes en ambos instrumentos (sesiones y entrevistas) de recogida de información. Finalmente, vinculamos las relaciones funcionales identificadas y las estrategias empleadas por los estudiantes. Consideramos que un alumno puede identificar una relación funcional empleando una o varias estrategias.

Consideramos que hay evidencia de relación funcional cuando se observan en las respuestas de los estudiantes las relaciones de correspondencia o covariación descritas en el marco teórico. Incluimos la categoría de "no evidencia relación funcional" para aquellas respuestas de estudiantes en las que es posible evidenciar un empleo de estrategia sin identificación de relación funcional. Las categorías estrategias de conteo, operatoria y generaliza surgen de investigaciones previas como las de Blanton y Kaput (2004); Cañadas et al (2016) y Merino et al (2013). Las subcategorías de estas últimas categorías surgieron del análisis preliminar de los datos de las sesiones 2 y 3 y, para denominarlas, asumimos terminología de Cañadas y Molina (2016b). Por tanto, estas subcategorías son específicas al problema planteado en las sesiones en las que se centra este artículo. En la tabla 5.6 mostramos las categorías y subcategorías para el análisis de datos de las sesiones 2 y 3.

Tabla 5.6. *Categorías análisis de datos*

Dimensión	Categoría	Subcategoría	Descripción
Relación funcional	Sin evidencia de relación funcional		No identifica relación funcional
	Correspondencia		Agrega la cantidad constante de la función a la cantidad de la variable independiente
	Covariación		Agrega la cantidad de variación de la variable independiente a la cantidad de la variable dependiente
Estrategias	Respuesta directa (E.1)		Solo presenta el resultado, sin dar explicación alguna
	Estrategia conteo (E.2)	Conteo total (E.2.1)	Cuenta todos los objetos
		Contar desde el mayor sumando (E.2.2)	Cuenta a partir del sumando mayor

Tabla 5.6. *Categorías análisis de datos*

Dimensión	Categoría	Subcategoría	Descripción
	Estrategia operatoria (E.3)	Hechos numéricos recordados (E.3.1)	Realiza sumas cuyos resultados conocen
		Descomposición de números (E.3.2)	Descompone uno de los números (sumandos) para realizar la suma
		Modificación de los datos iniciales y compensación (E.3.3)	Modifica algunos números al tener en cuenta esa modificación para compensar finalmente
	Estrategia generaliza (E.4)		Expresa la regla general

Realizamos diferentes procedimientos para analizar los datos correspondientes a las entrevistas realizadas a los ocho estudiantes. En primer lugar, tras recoger la información, transcribimos las entrevistas. Categorizamos el texto de las transcripciones de las entrevistas atendiendo a las respuestas de los estudiantes y a las intervenciones de la entrevistadora. Distinguimos entre respuestas adecuadas e inadecuadas de los estudiantes. Las respuestas adecuadas las subcategorizamos en: (a) identificación de relación funcional de correspondencia, (b) identificación de relación funcional de covariación, (c) generalización de la relación funcional, (d) sin evidencia de identificación de relación funcional. Por su parte, las subcategorías relativas a las respuestas inadecuadas y a las intervenciones de la entrevistadora surgieron a partir de un proceso inductivo (bottom-up approach) y las mostramos en el apartado de resultados correspondientes al tercer estudio. A continuación mostramos las categorías y subcategorías empleadas para el análisis de datos junto con una descripción de ellas.

- Adecuadas

  - Sin identificación de relación funcional: Cuando en la respuesta del estudiante no se evidencia una identificación de una relación funcional. Por ejemplo el estudiante responde: “diez” sin dar mayor explicación de la respuesta cuando se le pregunta cuánto dinero tendrá ahorrado el niño cuando la abuela le da 5 euros.

- Correspondencia: Cuando en la respuesta del estudiante se evidencia una relación funcional de correspondencia. Por ejemplo el estudiante responde: “son 15 euros, porque 10 euros más los cinco euros que la abuela le da inicialmente” cuando se le pregunta cuánto dinero tendrá ahorrado el niño cuando la abuela le da 10 euros.

- Covariación: Cuando en la respuesta del estudiante se evidencia una relación funcional de covariación. Por ejemplo el estudiante responde: “son 20 euros, porque antes había 15, y como aumento en cinco euros (10 a 15 variable independiente) le sumo cinco a 15 y me da 20” cuando se le pregunta cuánto dinero tendrá ahorrado el niño cuando la abuela le da 15 euros.

- Generalización: Cuando en la respuesta del estudiante se evidencia la regla general de la relación funcional.

- Inadecuadas: Cuando el estudiante responde inadecuadamente.

- Intervenciones: Son aquellas acciones que el entrevistador realiza cuando el estudiante manifiesta una respuesta inadecuada

Registramos la presencia o ausencia de cada categoría y subcategoría cuando se evidenciaba en las respuestas de los alumnos, antes y después de la intervención de la entrevistadora en al menos una ocasión, tal como mostramos en las tablas 6.10 y 6.11 del apartado de resultado del estudio 3. De forma análoga lo hicimos para las intervenciones de la entrevistadora. Realizamos un análisis de datos mixto que combina un análisis de frecuencias básico con un análisis cualitativo posterior.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

En este capítulo mostramos como resultados los tres estudios que hemos realizado y que forman parte de los resultados de esta tesis doctoral. Los dos primeros son artículos, como ya describimos anteriormente y el tercero está en revisión.

ESTUDIO 1: GENERACIÓN Y CONTINUACIÓN DE PATRONES POR DOS ALUMNAS DE 6-7 AÑOS EN TAREAS DE SERIACIONES

Resumen

Presentamos un estudio de casos a través de entrevistas semiestructuradas para describir la generación de patrones y la continuación de seriaciones cualitativas que realizan dos alumnas de 6-7 años. Describimos el trabajo realizado por las alumnas en diez tareas de patrones lógicos construidas de acuerdo a tres criterios: (a) atributos, (b) número de elementos en el núcleo y (c) variación de atributos entre elementos. Los resultados evidencian que las alumnas generan diferentes tipos de patrones y continúan diferentes tipos de seriaciones (reiterativas y no reiterativas), con distinto número de elementos en el núcleo.

Terminos clave: educación primaria, patrones, pensamiento lógico matemático, seriaciones.

Abstract

We presente a case study using semi-structured interviews to describe pattern creation and continuation of qualitative series realized by two 6-7 year-old students. We describe these students’ responses to ten tasks which involve logical patterns design following three criteria: (a) attributes, (b) number of elements in the serie kernel, and (c) variation of attributes between elements. Results evidence that the students create different kinds of patterns and continuate different kinds of series (reiterative and no reiterative), with different number of elements in the kernel.

Keywords: elementary education, logico-mathematical thinking, patterns, sequences.

INTRODUCCIÓN

Desde hace algunos años, la importancia de los patrones en matemáticas ha sido tal que ha habido un cambio significativo en lo que la comunidad científica entiende por saber y hacer matemáticas. Los patrones matemáticos se consideran la estructura que permite modelizar las reiteraciones que se observan en el entorno (Cañadas y Castro, 2007), y la esencia y corazón de las matemáticas (Castro, 1995; Steen 1988; Zazkis y Liljedahl, 2002). Esta consideración ha calado en algunas comunidades de Educación Matemática durante las últimas décadas, tanto para tomarlos como objetos de enseñanza (p. ej., Ontario Ministry of Education, 2007), como para investigar sobre las aportaciones que el trabajo con patrones produce en el aprendizaje matemático de los estudiantes (p. ej., Mulligan y Mitchelmore, 2013). En los documentos curriculares también se han introducido los patrones como contenido. El *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) propone la inclusión de las actividades de exploración que hacen uso de diversos materiales, el fomento de la capacidad de seguir pautas y hacer frente a diferentes propiedades de las relaciones algebraicas. En el currículo español, los patrones tienen un carácter fundamental en Educación Primaria debido a que se propone que los alumnos deben ser capaces de describir, analizar y encontrar patrones en contextos numéricos, geométricos y funcionales al finalizar este nivel educativo (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

A pesar de que la literatura destaca y justifica la relevancia del trabajo con patrones y de que se hayan incluido en el currículo, la investigación sobre estas nociones, en general es escasa y la existente se centra, normalmente, en Educación Infantil. Esta investigación es muy escasa en Educación Primaria, especialmente en lo relativo a patrones lógicos, particularmente en España. Lo anterior nos anima a indagar sobre la capacidad que tienen estudiantes de los primeros cursos de primaria para trabajar con patrones. Entendemos nuestro trabajo como un estudio exploratorio que pretende contribuir al conocimiento sobre el trabajo con patrones lógicos que realizan estudiantes de primeros cursos de educación primaria.

MARCO CONCEPTUAL

Patrones

Un acercamiento a la idea de patrón incluye términos como secuencia, serie, orden, predecible, regularidad o estructura, entre otras. Todas ellas son relevantes y permiten acotar la esencia de la noción de patrón (Liljedahl, 2004). Un patrón "es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57). Para las matemáticas básicas, un patrón se puede describir como cualquier regularidad predecible que, por lo general, implica relaciones lógicas, numéricas o espaciales (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Dichas relaciones constituyen la estructura del patrón, el cual se rige por una regla que recoge esas relaciones. Un friso puede ser construido por una iteración de una figura; la estructura de una secuencia de números se puede expresar en una fórmula expresada simbólicamente; y la estructura de una figura geométrica se muestra por sus diversas propiedades (Mulligan y Mitchelmore, 2012). Un ejemplo de patrón lo constituyen los números triangulares en su representación puntual (ver figura 6.1).

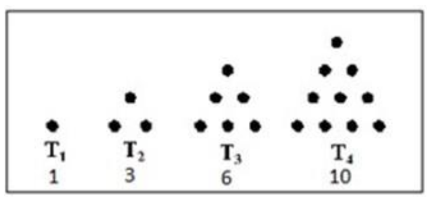


Figura 6.1. Números triangulares

La noción de patrón va unida a situaciones matemáticas diferentes, habiendo distintos tipos de patrones. La literatura recoge diferentes tipos de patrones que se pueden trabajar en educación infantil y primeros cursos.

- Patrones visuales o espaciales, en los que la regularidad se percibe a través de la vista. Generalmente, se encuentran en el ámbito de la geometría (Thornton, 2001). La representación puntual de los números triangulares se considera un patrón visual.
- Patrones lineales o de repetición son aquellos en los que una unidad se repite cíclicamente. A la unidad que se repite se le llama unidad de repetición o núcleo. Un

ejemplo de este tipo de patrones es ABABAB,… donde el núcleo es AB (Rittle-Johnson, Fyfe, McLean y McEldoon, 2013).

- Patrones numéricos, es cualquier patrón construido sobre el número y donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante. Por ejemplo, 1, 12, 123,… constituye un patrón numérico (Liljedahl, 2004).
- Patrones lógicos llamamos a aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y diferencia de atributos entre objetos (Ontario Ministry of Education, 2007). En la figura 6.2 recogemos un ejemplo de este tipo de patrones, donde cada figura geométrica se diferencia de la anterior en dos atributos (forma y color) y se mantiene el tamaño.

Figura 6.2. Ejemplo de patrón lógico

Los tipos de patrones presentados no son excluyentes, es decir, un patrón puede ser de varios tipos a la vez. Por ejemplo, un patrón puede ser visual y de repetición. Por lo general, podemos considerar que en todo tipo de patrones matemáticos interviene el razonamiento lógico y que la estructura es lo que determina el patrón. Se dicen isomorfos los patrones de la misma estructura. Por ejemplo, los dos patrones de la figura 6.3 son isomorfos porque están constituidos por tres elementos diferentes y el patrón es análogo.

Figura 6.3. Ejemplo de patrones isomorfos

El trabajo con patrones admite varias acciones como descubrir, reproducir, crear, determinar la regla de formación y describirla, encontrar su estructura o representar la estructura simbólicamente. En el caso de los patrones lineales, que dan lugar a una seriación, también se pueden buscar elementos de dicha seriación, bien continuando una parte inicial ya existente o intercalando elementos ausentes. Además, la seriación puede ser construida usando objetos reales, objetos físicos que los estudiantes pueden tomar con sus manos (Lee y Freiman, 2006) o bien dibujados sobre un soporte plano como pantalla de computadora o papel.

Seriaciones

Unido al trabajo con patrones están las seriaciones, componente fundamental del pensamiento lógico matemático (Piaget, 1968). "Seriar consiste en ordenar colecciones de objetos manteniendo constante unos atributos de los objetos a excepción de otros (uno o varios) que sirven de comparación" (Castro, Del Olmo y Castro, 2002, p. 44). El pensamiento lógico matemático tiene asociadas diferentes capacidades como: identificar, reconocer, comparar, definir; relacionar y operar con las cualidades sensoriales de los objetos (Alsina, 2006; Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Según Piaget (1977), una estructura lógico matemática es una forma de organizar elementos considerando sus atributos. Entre las estructuras lógicas básicas que señalan Piaget e Inhelder (1976) están las seriaciones.

Las seriaciones se pueden formar de acuerdo a los atributos que tienen los elementos a seriar. Por lo general, una seriación es una organización de elementos que atiende a un patrón, a una regularidad. El elemento de repetición o núcleo de una seriación está constituido por el conjunto de menor número de elementos donde se observa el patrón que permite generar la seriación (Castro, 1995). Se pueden distinguir diferentes tipos de seriaciones de acuerdo a los tipos de atributos que se consideran para organizar los objetos que las componen. Así, se distingue entre seriaciones cualitativas y cuantitativas. Las primeras consideran atributos cualitativos como: color, tamaño o forma de los objetos. Las segundas consideran atributos cuantitativos de los objetos como: longitud, peso o volumen. Atendiendo al patrón que las genera, Fernández (2008) diferencia tres tipos de seriaciones que describimos a continuación.

- Seriaciones reiterativas: son aquellas donde existe un núcleo. En la figura 6.4 presentamos un ejemplo donde el núcleo está conformado por un cuadrado verde y un círculo azul, que se repite constantemente. Se mantienen otras características como el tamaño. Los elementos del núcleo se diferencian en color y forma.

Figura 6.4. Ejemplo de seriación reiterativa

- Seriaciones constantes: en las que cada pieza, objeto o elemento, es igual que el anterior y que su sucesor.
- Seriaciones no reiterativas: en las que hay un número fijo de diferencias entre elementos consecutivos. Puede haber una sola diferencia (en forma, en color, en tamaño, entre otras) o más (usualmente, dos o tres diferencias). La figura 6.2 muestra una seriación no reiterativa.

El núcleo del patrón que genera la serie puede permanecer constante en cuanto a cantidad de elementos y atributos que varían o se mantienen; o puede ser variable. Lo primero se da en seriaciones reiterativas y un ejemplo está en la figura 3. En el caso de que el núcleo sea variable, se habla de patrones de desarrollo y el patrón puede ser creciente o decreciente. En un patrón de crecimiento hay un aumento de los elementos al seguir la secuencia, en los de reducción hay una disminución. El patrón 1, 121, 12321, 1234321,… es de crecimiento. Un patrón de crecimiento puede a su vez ser de disminución (o decrecimiento), cambiando el origen y el sentido de lectura de la seriación.

En ocasiones, los criterios para distinguir el tipo de patrón que genera una seriación hacen referencia a los atributos que se utilizan para generar el núcleo del patrón (Owen, 1995). Por ejemplo la secuencia cuya estructura responde a ABCABCABC…, puede entenderse generada por un patrón reiterativo con un núcleo de longitud tres (ABC) y la secuencia cuya estructura sea del tipo ABcABcABc generada por un patrón de repetición, pero más complejo que el anterior, ya que contiene un núcleo de longitud tres y, además, entre sus elementos hay un cambio de atributo. Se pone así en evidencia que manteniendo constantes unos atributos y variando otros, se añade complejidad a un patrón reiterativo (Threlfall, 1999; Zazquis y Liljedahl, 2002).

Para realizar una seriación se debe entender cómo un elemento se refiere a los elementos que son anteriores y posteriores, aspecto fundamental en la competencia del trabajo con patrones de repetición, o bien identificar el núcleo (Papic, 2015) y continuar la secuencia de acuerdo con él. Según Mulligan y Mitchelmore (2009), en la actividad intervienen una componente cognitiva (reconocimiento de la estructura) y otra meta-cognitiva (la tendencia a buscar, analizar y realizar patrones).

Antecedentes

Numerosos investigadores enfatizan la importancia de los patrones en la enseñanza de las matemáticas (p. ej., Fox, 2005; Lüken, 2012; Mason, 1999) y dan diferentes razones para ello. Algunas de estas razones detallan que el trabajo con patrones es una habilidad que influye en el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en los primeros niveles (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Esta actividad, que incluye la capacidad de identificar y describir los atributos de los objetos y los vínculos de similitudes y diferencias entre ellos, contribuye especialmente al desarrollo de la facultad de comparación, base de las operaciones lógicas de secuenciación y clasificación. La capacidad de los estudiantes para trabajar con patrones tiene un efecto positivo en el rendimiento en matemáticas de dichos estudiantes (Papic, 2007). Al trabajo con patrones también se le atribuyen otras potencialidades como ser parte integral del desarrollo de las estructura numéricas (base diez) y aritméticas (aditiva y multiplicativa), de las unidades de medida, del razonamiento proporcional y de la exploración de datos ya que permiten desarrollar estrategia de pensamiento necesarias para la comprensión de dichas operaciones (Zaskis y Liljedahl 2002). El trabajo con patrones mejora las habilidades cognitivas abstractas de los sujetos ya que es un precursor de la capacidad matemática de generalizar (Threlfall, 1999; Warren, Miller y Cooper, 2012). La conexión del trabajo con patrones y la iniciación al álgebra escolar es admitida tanto por los investigadores que trabajan sobre patrones como por los que se centran en el early algebra, argumentando que estos forman una parte importante del proceso de generalización y de la representación simbólica, elementos integrantes del álgebra (p. ej., Blanton y Kaput, 2011; Rodrigues y Serra, 2015; Threlfall, 1999). La exploración de patrones lineales conlleva encontrar una relación entre los elementos del patrón y su posición en la serie que genera. Dicha relación se puede utilizar como generalización para encontrar elementos en otras posiciones de la secuencia (Barbosa y Vale, 2015). Mediante experiencias de explorar y discutir patrones, los estudiantes pueden establecer conjeturas y generalizaciones sobre las relaciones matemáticas (Fox, 2005; Papic, 2007). Detectar patrones ayuda a la resolución de problemas, es un paso primordial para el razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007; Pólya, 1945) y contiene la semilla de la demostración (Mason, 1999).

Las estrategias de los estudiantes en su trabajo con patrones se han abordado en diferentes niveles educativos (Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; Rodrigues y Serra, 2015;

Threlfall, 1999; Warren, Miller y Cooper, 2012). Threlfall (1999) identifica diferentes estrategias de niños de 3-5 años al extender una seriación siguiendo un patrón: (a) colocar nuevos elementos de forma aleatoria; (b) repetir el último elemento de la seriación (perseverancia); (c) usar los elementos dados, pero en cualquier otro orden; (d) realzar un tramo simétrico reproduciendo inversamente la secuencia dada; y (e) continuar reproduciendo el patrón deliberadamente. Papic et al (2011) identificaron cinco estrategias que usan niños de entre 3-5 años cuando trabajan con patrones de repetición. Estas estrategias, ordenadas de menos a mayor sofisticación, son: (a) disposición aleatoria de los objetos); (b) comparación directa, al copiar un patrón se hace una correspondencia de uno a uno; (c) alternancia, centrándose en dos objetos sucesivos independientemente de la unidad de repetición; (d) unidad básica de repetición, identificación de la unidad de repetición, independientemente del número, tipo y complejidad de elementos y atributos, utilizándola para extender el patrón); y (e) unidad de repetición avanzada, se puede transferir el mismo patrón en diferentes representaciones o materiales.

OBJETIVOS

La revisión de la literatura nos lleva a plantearnos las siguientes preguntas de investigación.

¿Qué tipo de seriaciones generan dos alumnas de 6-7 años?

¿Cuántos atributos consideran en dichas seriaciones?

¿Qué estrategias emplean estas alumnas al continuar las seriaciones?

¿Dependen las estrategias de los atributos considerados?

Estas preguntas nos llevan a plantear el siguiente objetivo general de investigación: indagar sobre los tipos de patrones que generan dos alumnas de 6-7 años en la continuación de seriaciones.

MÉTODO

Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2007). De acuerdo a los antecedentes revisados, abordamos un problema de investigación del cual se han hecho pocos estudios. Se trata de un estudio de caso porque llevaremos a cabo la indagación a través del análisis del trabajo de dos alumnas de 6-7 años. Este tipo de estudios tienen por finalidad conocer en profundidad el trabajo que realizan los sujetos (Stake, 1999).

Sujetos

Los participantes son dos alumnas (A1 y A2), de 6 y 7 años, que cursaban primero y segundo curso de educación primaria, respectivamente, en Granada (España). La selección de estas alumnas fue intencional, con previa autorización de los padres. Presentan las siguientes características: ambas tenían un rendimiento medio en sus estudios; pertenecen a familias de clase media; una asiste a un centro público de la zona centro de la ciudad, la otra a un colegio concertado de la zona norte; las dos, tras haber cursado educación infantil, tenían algunos conocimientos previos sobre seriaciones y habían manipulado los bloques lógicos de Dienes (Dienes y Golding, 1971). Pueden considerarse estas alumnas prototípicas del sistema educativo español, lo cual no indica que tengamos intención de generalizar los resultados del estudio.

Materiales

Partimos del material manipulativo conocido como bloques lógicos de Dienes (Dienes y Golding, 1971). Tomamos una variante de este material con la que las alumnas estaban familiarizadas. Una unidad de los bloques lógicos considerados consta de 48 piezas sólidas. Cada pieza se define por cuatro atributos: color, forma, tamaño y textura. Cada atributo presenta las variables siguientes.

- Color: azul, rojo, verde y amarillo.
- Forma: cuadrado, círculo y triángulo.
- Tamaño: grande y pequeño.
- Textura: liso y rugoso.

Dado que con una unidad de bloques lógicos no es posible construir seriaciones reiterativas (no existen dos piezas con los cuatro atributos iguales), consideramos varias unidades. Cada pieza se diferencia de los demás en uno, dos, tres o cuatro atributos. Este material permite ser manejado sensorialmente por un individuo para fomentar su pensamiento matemático (Swan y Marshall, 2010).

Tareas

Diseñamos las tareas considerando tres variables de tarea, que se desprenden del marco conceptual, relacionadas con las seriaciones cualitativas y la noción de patrón. Estas variables son: (a) atributos de los objetos (color, forma, tamaño y textura), (b) número de elementos en el núcleo, y (c) variación de atributos entre elementos diferentes. De acuerdo con estas variables de tarea, organizamos los tipos de seriaciones por orden hipotético de dificultad, según Threlfall (1999) y Zazquis y Liljedahl (2002). En concreto, diseñamos diez tareas de seriaciones que se corresponden con patrones lógicos. En las primeras seis tareas varían dos atributos y dos se mantienen fijos entre dos elementos consecutivos. En las cuatro siguientes, de mayor complejidad, varían tres atributos y uno se mantiene fijo. Presentamos a las alumnas los dos elementos iniciales de la seriación, y les proponemos continuar poniendo aquellos elementos que consideren van a continuación de los dos presentados. La figura 6.5 muestra los dos elementos iniciales de una de las tareas de seriaciones propuestas. Estos elementos responden a una seriación donde el patrón que la genera corresponde a una variación de dos atributos —color (verde a amarillo) y forma—, y se mantienen otros dos —tamaño y textura— entre los dos elementos consecutivos.

Figura 6.5. Elementos iniciales en una tarea de seriación

Después de una primera propuesta para continuar la seriación y el razonamiento correspondiente de la alumna, les preguntamos sobre las diferencias y semejanzas entre los objetos presentados, haciendo hincapié en la acción que han de realizar, se trata de continuar la serie poniendo piezas de acuerdo con un criterio que incluya a las piezas ya colocadas.

Entrevistas

Las alumnas realizaron las tareas durante una entrevista semiestructurada individual, con una duración de 90 minutos, fuera de su horario escolar. El primer autor de este trabajo realizó la entrevista y la segunda autora llevó a cabo la recogida de datos con video cámara, grabadora audio, tomó fotos y anotaciones.

Utilizamos un protocolo de entrevista con posibles preguntas, compuesto de dos partes:

(a) preguntas que invitaban a las alumnas a continuar seriaciones diferentes a las reiterativas (p. ej., ¿qué sucede de un elemento (pieza) a otro?; ¿en qué son iguales y en qué se diferencian?; de acuerdo a lo que tú me has dicho, ¿qué otro elemento pondrías a continuación?) y (b) preguntas que les incitaban a explicar las seriaciones construidas (p. ej., ¿por qué continuaste con ese elemento?, ¿por qué ordenaste los elementos de esa forma?).

Categorías de análisis

Las categorías que empleamos para el análisis de los datos surgen del marco conceptual del estudio y son las siguientes.

- Tipo de seriación: reiterativa versus no reiterativa.
- Número de elementos que presenta el núcleo del patrón.
- Atributos que cambian o se mantienen entre los elementos del núcleo del patrón que genera la seriación: número y tipo (color, forma, tamaño y textura).

RESULTADOS

Mostramos resultados generales de las seriaciones continuadas por las alumnas A1 y A2 en las diez tareas propuestas. Posteriormente mostramos algunos ejemplos de los patrones generados para continuar seriaciones y diálogos mantenidos durante las entrevistas. Los ejemplos y diálogos han sido seleccionados por considerarlos más representativos y que informan mejor acerca del objetivo de investigación.

Resultados Generales A1

A1 continuó seriaciones reiterativas y no reiterativas en las tareas propuestas, atendiendo a diferente número de elementos en el núcleo del patrón (uno, dos y cinco). Resumimos estos resultados en la tabla 6.1.

Tabla 6.1. *Tipos de seriaciones continuadas por A1*

Tareas										
N° elementos núcleo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Seriaciones reiterativas									
2	X	X	X	X	X		X	X	X	X
5	X									
	Seriaciones no reiterativas									
1	X	X				X	X			

En la tabla 6.1 se observa que A1 continuó seriaciones reiterativas de dos elementos en el núcleo en 9 de 10 tareas. En la tarea 1 continuó seriaciones de dos y cinco elementos en el núcleo. Estas seriaciones las realizó espontáneamente, sin intervención del entrevistador.

Continuó seriaciones no reiterativas de un elemento en el núcleo en cuatro de las tareas (1, 2, 6 y 7), realizándolas con intervención del entrevistador.

En la tarea 6 continuó con una seriación no reiterativa y en las tareas 1, 2 y 7, continuó con seriaciones reiterativas y no reiterativas.

Hay una tendencia de A1 a la continuación de seriaciones reiterativas de dos elementos en el núcleo en casi todas las tareas. Solo en la tarea 6 continuó una seriación no reiterativa. Para estas seriaciones, A1 generó un patrón de repetición, repitiendo en ocasiones los dos elementos iniciales de la tarea (1, 2) y en otras tareas (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10) repitiendo tres atributos —color, tamaño y textura— de estos elementos.

Ejemplo de patrones y entrevista A1

Mostramos ejemplos del trabajo de A1 en las tareas 1 y 2 porque dan evidencia de diferentes tipos de seriaciones y patrones.

En la figura 6 mostramos tres instantes del trabajo de A1 en la tarea 1. En esta tarea los dos elementos iniciales variaban los atributos —forma (cuadrado-círculo), color (verde-amarillo) — y se mantenían fijos —tamaño (grande) y textura (liso) —. A1 inicialmente logró identificar los atributos que variaban y se mantenían fijos en estos dos elementos iniciales.

Cuando se le propuso continuar la seriación, generó un patrón de repetición con los dos elementos iniciales como núcleo. De esta manera continuó una seriación reiterativa de dos elementos en el núcleo (imagen izquierda, figura 6.6).

Figura 6.6. Seriaciones reiterativas y no reiterativas en tarea 1

El entrevistador, al observar que A1 había continuado una seriación reiterativa, la orientó a través de preguntas relativas a las diferencias e igualdades de atributos de los dos elementos iniciales, para que generara un patrón lógico. A través de esa orientación, A1 continuó la seriación no reiterativa de acuerdo al patrón lógico (imagen central, figura 6.6), los elementos se diferencian entre sí en los atributos —color y forma— y se mantienen iguales —tamaño y textura (liso)—. Comprobamos lo anterior en el siguiente fragmento de entrevista. En él se muestra la orientación del entrevistador y el patrón generado por A1 para continuar la seriación. A1 enfatizó en el cambio de atributos —forma y color— y aquel que se mantiene igual —tamaño—.

1. E: Mira, siempre tienes que fijarte de aquí a aquí (indica con el dedo el segundo y tercer elemento, imagen izquierda, figura 6.6) ¿En qué cambia?

2. A1: En forma y color.

3. E: Entonces, ¿qué otro elemento me puede servir ahí (indicando al tercer elemento, imagen izquierda, figura 6.6)?, ¿solamente el verde?

4. A1: No, la roja.

5. E: ¿Esa? (le muestra un cuadrado rojo grande liso) ¿Por qué la roja?

6. A1: Porque tiene el mismo tamaño y solo cambia el color.

7. E: ¿Solo cambia el color? ¿Y qué más cambia?

8. A1: Los vértices.

A continuación, el entrevistador pidió a A1 que continuara la seriación por sí misma. Al igual que al inicio de la tarea, generó otro patrón de repetición, esta vez considerando un núcleo compuesto por los cinco elementos que formaban la seriación (los cinco elementos de la imagen central, figura 6.6), continuando una seriación reiterativa de cinco elementos en el núcleo (imagen derecha, figura 6.6). El siguiente fragmento muestra que A1 se refiere a serie a la seriación reiterativa que continuó, además se observa que identificó el núcleo del patrón generado (línea 12).

9. E: ¿Por qué hiciste eso?

10. A: Porque parece una serie.

11. E: ¿Cuáles son las figuras que parecen una serie?

12. A: Cuadrado, círculo, cuadrado, círculo, triángulo.

La figura 6.7 muestra dos instantes del trabajo de A1 en la tarea 2. En esta tarea los dos elementos iniciales variaban los atributos —forma (cuadrado-círculo) y tamaño (grande-pequeño) — y se mantenían fijos —color (azul) y textura (liso) —. A1 inicialmente logró identificar los atributos que variaban y se mantenían fijos en estos dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación, generó un patrón de repetición considerando los dos elementos iniciales como núcleo. A1 repitió los dos elementos iniciales, manteniendo iguales sus atributos (imagen izquierda, figura 6.7). Cuando se le preguntó sobre su propuesta A1, tenía claro que debía continuar la seriación de acuerdo al patrón de repetir los dos elementos iniciales con sus mismos atributos al igual que en la tarea anterior, porque lo había trabajo en el colegio ya que cuando el entrevistador le pregunta si es como la que hace en el colegio, A1 responde "es que no sé hacer otra más".

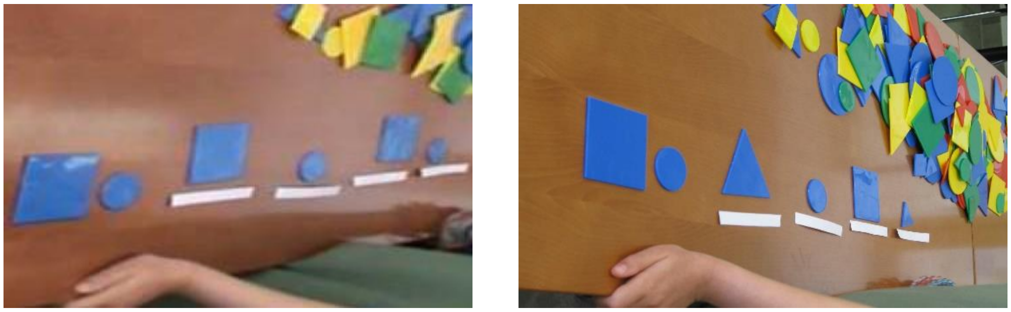


Figura 6.7. Seriaciones reiterativa de dos elementos en el núcleo en tarea 2

Posteriormente, el entrevistador le pidió fijarse en las diferencias e igualdad de atributos que observara entre los elementos, para que generara un patrón lógico y así continuar una seriación no reiterativa. Ante esta intervención A1 logró generar un patrón lógico continuando una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo, cambiando la —forma y tamaño— y manteniendo iguales —color (azul), textura (liso)— entre elementos consecutivos (imagen derecha, figura 7). Aunque esta seriación se podría considerar como reiterativa de dos elementos en el núcleo en la que se reitera el tamaño, el color y la textura y solo cambia la forma cada dos elementos, en la justificación de su propuesta durante la entrevista, evidenciamos el patrón lógico generado. A1 aludió al cambio de atributos —tamaño y forma— y aquel que se mantiene igual —color— entre elementos. El siguiente fragmento de entrevista detalla la intervención del entrevistador y el patrón lógico de un elemento en el núcleo empleado por A1 para continuar la seriación no reiterativa.

13. E: Fíjate… ¿Qué cambia aquí? (Señalando los dos primeros elementos de la imagen izquierda, figura 6.7).

14. A1: La figura.

15. E: Entonces, ¿puedes poner otra figura que no sea el cuadrado grande azul?

16. A1: Sí.

17. E: A ver pon otra (la alumna ubica los elementos que se ven en la imagen derecha, figura 7)… ¿Por qué hiciste eso?

18. A1: Son azules y cambian de forma.

19. E: ¿Y qué más cambia?

20. A1: Los vértices.

21. E: Pero son lo mismo que la forma. ¿Cambia el tamaño?

22. A1: Sí.

Resultados Generales A2

A2 continuó seriaciones reiterativas y no reiterativas en las tareas propuestas, atendiendo a diferente número de elementos en el núcleo (uno, dos y cuatro). Resumimos estos resultados en la tabla 6.2.

Tabla 6.2. *Tipos de seriaciones continuadas por A2*

Tareas										
N° elementos núcleo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Seriaciones reiterativas									
2				X		X	X	X	X	X
4				X						
	Seriaciones no reiterativas									
1	X	X	X		X			X		

En la tabla 6.2 se observa que A2 continuó seriaciones reiterativas en más de la mitad de las tareas (4, 6, 7, 8, 9, 10). En estas tareas, consideró núcleos de dos elementos. En la tarea 4 tuvo en cuenta un núcleo de dos y cuatro elementos. Estas seriaciones las realizó espontáneamente, sin intervención del entrevistador.

Por otro lado, continuó seriaciones no reiterativas en la mitad de las tareas propuestas (tareas 1, 2, 3, 5 y 8), en todas ellas de un elemento en el núcleo. Por lo general, estas seriaciones las continuó espontáneamente, requiriendo poca orientación del entrevistador. A2 continuó una seriación reiterativa y otra no reiterativa en la tarea 8.

En las seriaciones reiterativas, A2 generó un patrón de repetición, repitiendo los dos elementos iniciales (tareas 4, 6 y 8), o los tres atributos de estos elementos (tareas 7, 9 y 10).

Ejemplos de patrones y entrevista A2

Mostramos ejemplos del trabajo de A2 en las tareas 4 y 8 porque dan evidencia de diferentes tipos de seriaciones y patrones.

La figura 6.8 muestra dos formas de continuar seriaciones reiterativas de A2 en la tarea 4, de dos y cuatro elementos en el núcleo. En esta tarea los dos elementos iniciales variaban los atributos —tamaño (grande-pequeño) y textura (liso-rugoso)— y se mantenían fijos —color (amarillo) y forma—. A2 identificó los atributos que variaban y los que se mantenían entre los dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación, inicialmente generó un patrón de repetición con los dos elementos iniciales como núcleo, manteniendo tres atributos —color, tamaño y textura— y cambiando—forma— (imagen izquierda, figura 6.8). Posteriormente, el entrevistador le solicitó que continuara la seriación para indagar sobre el patrón empleado. A2 continuó la seriación generando un nuevo patrón reiterativo, de modo que repitió los cuatro elementos, que conformaban la seriación hasta ese momento, manteniendo iguales sus atributos (imagen derecha, figura 6.8). El siguiente fragmento confirma lo anterior, dando cuenta además, del núcleo que identifica A2.

(El entrevistador pregunta a A2 luego de que continuara la seriación reiterativa, con el fin de que confirmara el patrón generado)

23. E: ¿Por qué continuaste de esa forma?

24. A2: Es como una serie (Señalando a los cuadrados y a los círculos de la imagen derecha, figura 6.8).

25. E: ¿Cuál es esa serie?

26. A2: Cuadrado, círculo, cuadrado, círculo (Señalando por cada término —cuadrado o círculo— a dos elementos de la seriación, imagen derecha, figura 6.8).

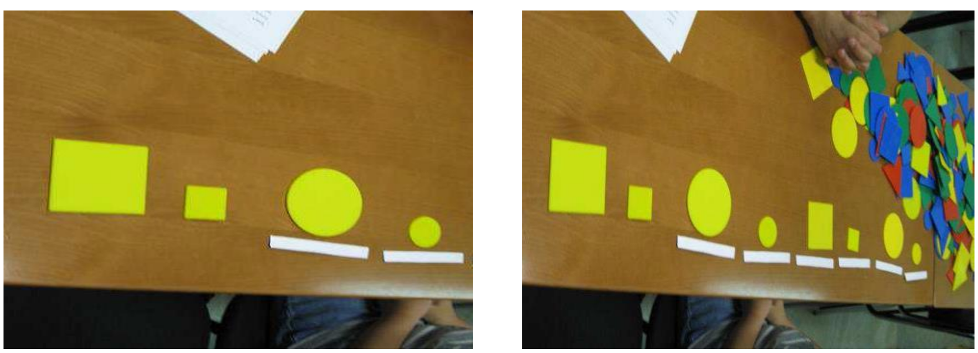


Figura 6.8. Seriaciones reiterativas en tarea 4

La figura 6.9 muestra dos momentos del trabajo de la alumna A2 en la tarea 8. En esta tarea, los dos elementos iniciales variaban los atributos —color, tamaño y textura (liso a rugoso) — y se mantenía igual forma—. A2 logró identificar los atributos que variaban y se mantenían fijos en estos dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación en esta tarea A2 inicialmente generó un patrón de repetición considerando como núcleo los dos elementos iniciales manteniendo los atributos —color, tamaño y textura— y manteniendo —forma— (imagen izquierda, figura 6.9). De esta manera A2 continuó una seriación reiterativa de dos elementos en el núcleo.

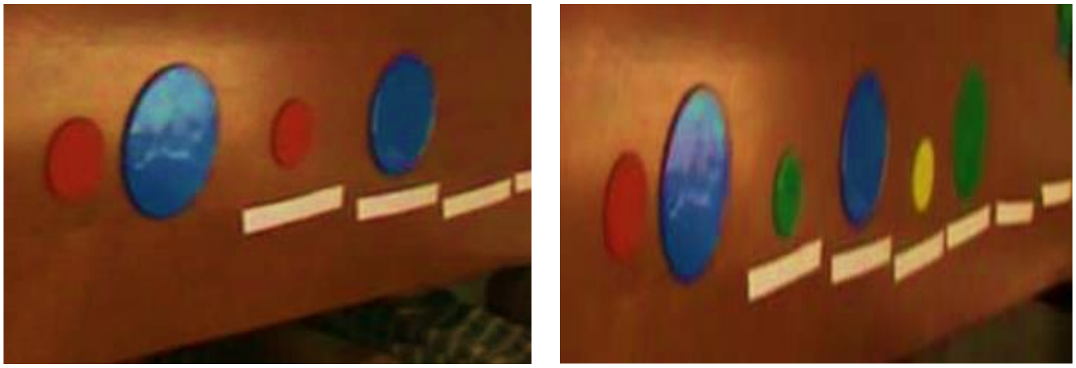


Figura 6.9. Seriaciones reiterativa (imagen izquierda) y no reiterativa (imagen derecha) en tarea 8

Luego, el entrevistador, para llevar a A2 a generar un patrón lógico y continuarlo, y así seguir una seriación no reiterativa, cambió algunos elementos de la seriación que la alumna había ubicado inicialmente y, a través de preguntas, A2 logró generar este patrón, continuando una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo (imagen derecha, figura 6.9). El siguiente fragmento de entrevista evidencia que A2 da cuenta del patrón lógico generado para continuar esta seriación orientada por el entrevistador. A2 enfatizó en el cambio de atributos —color y textura— existente entre los elementos.

27. E: Si hacemos esto (cambia el tercer elemento, un círculo rojo pequeño rugoso [imagen izquierda, figura 6.9], por un círculo verde pequeño rugoso) ¿está bien?

28. A2: Sí.

29. E: ¿Por qué?

30. A2: Porque cambia de color.

31. E: Y si hacemos esto (cambia el elemento el tercer elemento [imagen derecha, figura 6.9] por un círculo verde pequeño liso) ¿Lo podemos hacer?

32. A2: No, porque no es rugoso.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hemos presentado diversos tipos de patrones que generan dos alumnas de 6 y 7 años de edad con bloques lógicos. Los patrones generados aluden a patrones de repetición y patrones lógicos, permitiendo la continuación de seriaciones reiterativas y no reiterativas, respectivamente. Las diversas acciones y capacidades asociadas al pensamiento lógico matemático como: manipulación de elementos, identificación, descripción y diferenciación de atributos entre elementos, ayudaron a generar patrones y extender tales seriaciones por parte de las alumnas. Ambas alumnas lograron identificar los atributos que variaban y aquellos iguales en los objetos.

Generalmente, ambas alumnas manifestaron haber encontrado un patrón y lo explicaban de forma adecuada. A estas edades ya existe una predisposición para la búsqueda de justificaciones verbales respecto a las aserciones realizadas por los estudiantes (Piaget, 1977). Por tanto, el lenguaje verbal no supuso un obstáculo para comunicar y justificar los patrones y seriaciones continuadas.

Evidenciamos que A1 tendió a generar patrones de repetición, continuando seriaciones reiterativas. Consideraba los dos elementos iniciales de la seriación como núcleo, repitiéndolos y manteniendo iguales sus atributos, o al menos tres de ellos (color, tamaño y textura).

Destacamos que A1 logró continuar seriaciones no reiterativas pero con orientación del entrevistador. Con preguntas relativas a las diferencias e igualdad de atributos de los dos primeros elementos iniciales de la seriación, pudo generar y continuar un patrón lógico y seguir una seriaciones no reiterativa.

En A2 no hubo una tendencia en generar algún tipo de patrón ya sea de repetición o lógico. A2 al igual que A1 para continuar seriaciones reiterativas consideró los dos elementos iniciales como núcleo, manteniendo en ocasiones sus mismos atributos y en otras ocasiones mantuvo tres atributos (tamaño, forma y textura). En las primeras tareas (1, 2, 3 y 5) logró generar un patrón lógico y continuar seriaciones no reiterativas de un elemento en el núcleo sin ayuda del entrevistador, sin embargo, a medida que avanzaba el número de tareas requirió ayuda del entrevistador (tarea 8) porque en algunas generó un patrón de repetición, continuando seriaciones reiterativas. Suponemos que esto se debió al aumento en la variación de atributos ya que a partir de la tarea 7 en adelante fueron tres los atributos que variaban entre los elementos, tornándose más complejo para que A2 se centrara en un patrón lógico y continuar una seriación no reiterativa (Threlfall, 1999; Zazquis y Liljedahl, 2002). A partir de este estudio sería importante profundizar y determinar los niveles de complejidad de las tareas y los factores de los que depende, considerando una mayor cantidad de sujetos con que trabajamos.

Consideramos llamativo el hecho de que ambas alumnas entiendan que serie es aquella repetición de un grupo de elementos manteniendo sus mismos atributos. Este hecho se debe al trabajo sobre patrones realizado en niveles escolares previos. Creemos que esto influyó en que las alumnas se centraran en el patrón de repetición, sobre el patrón lógico, para continuar seriaciones. Por tanto, es importante que desde los primeros niveles educativos se fomente el trabajo con patrones lógicos para la continuación o construcción de seriaciones no reiterativas, como forma de que no relacionen la idea de patrón únicamente con el patrón de repetición.

Ambas alumnas emplearon estrategias similares cuando continuaron un patrón reiterativo. Ambas fueron capaces de identificar el núcleo (Papic et al., 2011) como se observa en la línea 12 (A1) y 26 (A2), y reprodujeron deliberadamente el patrón (Threlfall, 1999) como se observa en la imagen izquierda y derecha de la figura 6.6 (A1) e imagen derecha de la figura 6.8 (A2). Estas estrategias son las más sofisticadas encontradas por los autores citados anteriormente, en niños de entre 3 y 5 años, por tanto, era de esperar que estas alumnas manifestaran este tipo de estrategias.

No hay duda de que la capacidad de pensar lógicamente es una piedra angular de la matemática. De ahí la importancia de trabajar con patrones. No obstante es necesario poner atención a este trabajo, dado que los escolares pueden tener éxito en la generación o continua repetición de patrones utilizando un enfoque procedimental o recursivo, a manera de una secuencia rítmica, sin pensar en la estructura del patrón, necesaria como paso hacia la generalización y el álgebra (Zazkis y Liljedahl, 2002). Es importante que el trabajo con patrones se haga hincapié en el núcleo del mismo, la estructura que presenta, la codificación de los patrones que no depende del material utilizado en el sentido de que podrían transferir el mismo patrón a diferentes modos o materiales, la evolución en el nivel de complejidad de los patrones, todas ellas son variables a considerar en el trabajo con patrones y seriaciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del plan nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y con el apoyo de una beca CONICYT PFCHA 72150072, otorgada por el gobierno de Chile.

Referencias

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona, España: Octaedro.

Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Heidelberg Springer.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 69-81.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada, España: Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Castro-Rodriguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 87-107). Madrid, España: Pirámide.

Castro, E., del Olmo, M. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada, España: Universidad de Granada.

Dienes Z. y Golding, E. (1971). *Lógica y juegos lógicos.* Barcelona, España: Teide.

Fernández, J. (2008). *Desarrollo del pensamiento lógico matemático*. Madrid, España: Grupo Mayéutica-Educación.

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 313-320). Melbourne, Australia: PME.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación*. México, DF: Editorial Mcgraw-Hill.

Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through. Pattern exploration. *Mathematics teaching in the middle school, 11*(9), 428-433.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(3), 24-42.

Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA*, *7*(1), 41-50.

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232-246.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, 19349-19420.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2012). Developing pedagogical strategies to promote structural thinking in early mathematics. En J. Dindyal, L. Pien Cheng y S. Fong Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 529-536). Adelaide, Australia: MERGA.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp, 29-45). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Ontario Ministry of Education (2007). *A guide to effective instruction in mathematics. Kindergarten to grade 3. Patterning and algebra*. Ontario, Canadá: Autor.

Owen, A. (1995). In search of the unknouwn: A review of primary algebra. En J. Anghileri (Ed*.), Children's mathematical thinking in the primary years* (pp. 124-148). Londres, Reino Unido: Cassell.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom, 12*(3), 8.

Papic, M. (2015). An early mathematical patterning assessment: Identifying young Australian indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534.

Papic, M., Mulligan, T. y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the developing of preescholers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268.

Piaget, J. (1968). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonne, A. Lichnerowicz, G. Choquet y C. Gattegno, *La enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-28). Madrid, España: Aguilar.

Piaget, J. (1977). *Seis estudio de psicología*. Barcelona, España: Seix Barral.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones*. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396.

Rodrigues, M. y Serra, P. (2015). Generalizing repeating patterns: A study with children aged four. En I. Sahn, S. A. Kiray y S. Alan (Eds), *Proceeding of book International*

Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST) (pp. 120-134), Antalya, Turkey.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*(29), 611-616.

Swan, P. y Marshall, L. (2010). Manipulative materials. *APMC, 15*(2), 13-19.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Londres, Reino Unido: Cassell.

Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. En A. Rogerson (Ed.), *New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251-256). Palm Cove, Australia: ALMA.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2012) Repeating patterns: strategies to assist young students to generalise the mathematical structure. *Australasian Journal of Early Childhood, 37*(3), 111-120.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

ESTUDIO 2: RELACIONES FUNCIONALES Y ESTRATEGIAS DE ALUMNOS DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN CONTEXTO FUNCIONAL

Resumen

Desde un enfoque funcional del álgebra escolar, en este trabajo indagamos sobre el pensamiento funcional de alumnos de primero de Educación Primaria (6 años) en el contexto español. Particularmente, nos centramos en las relaciones funcionales y las estrategias que emplean estos alumnos en la resolución de problemas que involucran funciones. Analizamos parte de la información recogida en un experimento de enseñanza con un grupo de 30 alumnos y entrevistas individuales a cuatro de estos alumnos. Encontramos que la relación funcional más frecuentemente identificada es la correspondencia. Algunos alumnos también identifican la relación de covariación. Además, se evidencia un vínculo entre ambas relaciones funcionales y las estrategias de operatoria y/o conteo.

Palabras clave: Early algebra, Educación primaria, Estrategias, Pensamiento algebraico, Pensamiento funcional.

Abstract

From a functional approach of school algebra, in this work we deepen in first graders' (6 years old) functional thinking within the Spanish context. Particularly, we focus on the functional relationships and the strategies that the students use when solving problems, which involve linear functions. We analyse part of the data collected in a design experiment with a group of 30 students and individual interviews to four of those students. We find that the most frequent functional relationship was the correspondence one. Some students also identified the covariation relationship. Moreover, there is evidence of the relation between both functional relationships and the operational and counting strategies.

Keywords: Algebraic thinking, Early algebra, Elementary education, Functional thinking, Strategies.

INTRODUCCIÓN

El enfoque funcional, como una de las aproximaciones del early algebra, ha cobrado especial relevancia a nivel internacional en la última década. Este enfoque busca promover contenidos clave del pensamiento algebraico como el concepto de función, las relaciones entre cantidades y la variación conjunta entre cantidades (Rico, 2006; Smith, 2008). Además, se relaciona con capacidades relativas a la identificación de patrones, representación, establecimiento de relaciones y procesos de generalización (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016).

Diferentes razones justifican el interés por el pensamiento funcional desde los primeros cursos de Educación Primaria. En primer lugar, ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en Educación Secundaria (Doorman y Drijvers, 2011) y contribuye a la construcción de una base sólida de aprendizaje para un trabajo más sofisticado en el álgebra en niveles educativos superiores (Common Core State Standards Initiative, 2010). En segundo lugar, fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). En tercer lugar, puede ser empleado como herramienta útil en la resolución de problemas (Warren y Cooper, 2005). En cuarto lugar, es una meta disciplinar en la enseñanza de las matemáticas (Rico, 2006).

Las bondades atribuidas al pensamiento funcional han hecho que diferentes países incluyan elementos de este tipo de pensamiento en sus documentos curriculares para Educación Primaria. Australia, Canadá, China, Chile, Corea, Estados Unidos, Japón y Portugal son algunos de ellos (Merino, Cañadas y Molina, 2013; Ministerio de Educacion de Chile, 2012). Este trabajo es parte de una investigación más amplia desarrollada en España, donde esta inclusión es reciente. El currículo español recoge que, al finalizar la Educación Primaria, los alumnos deben ser capaces de "describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387).

En la actualidad, en las aulas y en los libros de texto, estas ideas quedan relegadas al trabajo con patrones y los contextos funcionales no han calado entre el profesorado de Educación Primaria. En el contexto español, el pensamiento funcional se puede considerar un tema pendiente desde la perspectiva docente y, desde el punto de vista investigador, es innovador y relevante (Cañadas y Molina, 2016a).

En este artículo, indagamos sobre (a) las relaciones funcionales que alumnos de 6 años son capaces de identificar, cuando abordan un problema que puede hacer emerger el pensamiento funcional; (b) las estrategias que ellos emplean; y (c) los vínculos entre esas relaciones funcionales y esas estrategias.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Pensamiento funcional y relaciones funcionales en Educación Primaria

La función es el foco de contenido matemático del pensamiento funcional. Una función es una relación entre dos variables de modo que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente (Larson y Hostetler, 2008). Dado que trabajamos con alumnos de 6 años y siguiendo los antecedentes (p. ej., Cañadas et al., 2016), utilizamos la función lineal de dos variables cuyo dominio son los números naturales.

En las funciones lineales, se pueden establecer tres tipos de relaciones que involucran valores de las variables: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación (Blanton, 2008; Smith, 2008). Con estas relaciones es posible describir la actuación de los individuos cuando abordan una situación que implica el pensamiento funcional. La recurrencia es la relación que se define con base en los valores de un mismo conjunto de valores (Johsonbaugh, 2005). Esta relación es la más elemental y describe una variación entre las cantidades de una secuencia de valores e implica obtener una cantidad en una secuencia a partir del número o números previos. Un ejemplo de este tipo de relación se aprecia en un problema en el que una niña (Carmen) tiene cinco años más que otro (Álvaro) (función $f(x) = x + 5$). Al proponer al alumno completar una tabla de funciones donde debe encontrar la edad de Carmen, la completa observando hacia abajo los valores de la variable dependiente (edad de Carmen), en este caso sumando uno a la cantidad anterior, como se observa en la figura 6.10. Además, cuando se le pregunta cómo obtuvo la edad de Carmen, el alumno responde "sumando de uno en uno".

Edad de Álvaro	Edad de Carmen	
1	6	+ 1
2	7	+ 1
3	8	+ 1
4	9	

Figura 6.10. Patrón recursivo

La correspondencia es una regla que asocia a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente (Clapham, 1998). Identificar la correspondencia implica hallar la regla que permite determinar un valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (Blanton et al., 2011). Un ejemplo lo observamos en el mismo problema presentado anteriormente cuando al preguntar por los años de Carmen cuando Álvaro tenga 30, un niño de seis años dice "si tiene treinta, Carmen tendría más […] cinco […] como tiene treinta, tiene treinta y cinco".

La covariación se centra en la variación de forma simultánea y coordinada de ambas variables (Blanton et al., 2011). Identificar la covariación implica centrarse en cómo los cambios en valores de la variable independiente influyen en los cambios de los valores de la variable dependiente. Un ejemplo lo observamos si, en el mismo problema anterior, se pregunta por los años que tendrá Carmen cuando Álvaro tenga 29 años y un alumno de seis años dice: "Serían treinta y cuatro […] Porque… uno más que veintiocho entonces también uno más que treinta y tres". Este alumno responde de acuerdo con la variación de la variable independiente (anteriormente había resuelto el problema siendo 28 los años de Carmen y ahora pasamos a 29) y esa variación (1 año) se la suma a la última cantidad de la variable dependiente (33), resultando 33+1=34.

Smith (2008) destaca la implicación que tiene el trabajo con las relaciones funcionales para avanzar en la construcción de ideas clave sobre la noción de función. Dado que la correspondencia y la covariación implican valores de ambas variables, consideramos que son las relaciones funciones clave y nos centramos en ellas dos.

Diversos investigadores han indagado en las relaciones funcionales de covariación y correspondencia que identifican alumnos de Educación Primaria (p. ej., Stephens, Isler, Marum, Blanton, Knuth y Gardiner, 2012) para dar evidencia de pensamiento funcional en estos alumnos. Sin embargo, la investigación con alumnos de primero de Educación Primaria es escasa por lo que se hace necesario profundizar en ella.

Stephens et al (2012) mostraron que alumnos de tercero, cuarto y quinto de Primaria (8-10 años, respectivamente) fueron capaces de transitar desde la recurrencia y covariación hasta la correspondencia, a medida que avanzan las sesiones de un experimento de enseñanza. Tanışlı (2011) también encontró que alumnos de quinto de Primaria (9-10 años) transitaron de una relación de recurrencia a una relación de covariación y correspondencia. Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) establecieron que la relación funcional identificada con mayor frecuencia por alumnos de 9 años es la correspondencia. Warren y Cooper (2006) encontraron que alumnos de 9-10 años de edad identificaron la recurrencia y correspondencia en una tarea de pensamiento funcional, y alcanzaron la generalización. En alumnos de primero de Educación Primaria (5-6 años), Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (2016) hallaron indicios de que alumnos de este curso educativo fueron capaces de establecer relaciones funcionales tales como la correspondencia y la covariación. Según la literatura consultada, no hemos encontrado estudios previos diferentes de estos últimos que aborden las relaciones funcionales con alumnos de primero de Educación Primaria. Abordamos esta cuestión en este estudio.

Estrategias que emplean alumnos de Primaria en tareas de relaciones funcionales

Rico (1997) considera las estrategias como las formas de actuación de los alumnos sobre tareas matemáticas. Las estrategias son secuencias de procedimientos que se realizan sobre conceptos y relaciones.

Diferentes autores (p. ej., Amit y Neria, 2008; Merino et al., 2013) destacan la necesidad de indagar sobre las estrategias que emplean los alumnos en la resolución de problemas en el contexto funcional. Moss y Beatty (2006) concluyeron que una de las dificultades que manifiestan los alumnos para resolver problemas en el contexto funcional es dar con una estrategia adecuada, ratificando el interés de profundizar sobre estrategias en el contexto investigador.

Diversos trabajos abordan las estrategias en contextos funcionales con alumnos de Primaria. Blanton y Kaput (2004) encontraron que alumnos de primero de Educación Primaria (5-6 años) emplearon estrategias aditivas, como el conteo de tres en tres, y estrategias multiplicativas, como el doble y el triple, en una tarea que implica funciones lineales de los tipos $f(x)=2x$ y $f(x)=3x$. Cañadas y Fuentes (2015) plantearon varios problemas a alumnos de 6 años que implican funciones del tipo $f(x)=mx$. Los resultados evidenciaron estrategias de conteo sobre dibujos dados en el problema, respuestas directas (solo dan el resultado, sin ninguna aclaración adicional) y creación de grupos de un número determinado de elementos. Por ejemplo, para la función $f(x)=5x$, hay alumnos que hicieron grupos de cinco para hallar el resultado. Las autoras suponen que esta estrategia es un avance de los alumnos porque evidencia su percepción de la multiplicación como suma repetida y ha surgido de forma espontánea.

Otros estudios han indagado en la relación entre las estrategias que emplean los alumnos y el tipo de número involucrado en la pregunta que se les plantea. Amit y Neria (2008) trabajaron con alumnos de 11-13 años en la resolución de problemas de generalización de funciones lineales y no lineales. Esos alumnos, cuando los números son pequeños, emplearon estrategias recursivas con las que extendieron la secuencia de cantidades por medio de la cantidad anterior. En cambio, cuando los números son grandes o las preguntas que se plantearon aludieron a la generalización, ellos emplearon estrategias funcionales que se basan en el reconocimiento de las variables y constantes, su conexión y la dependencia entre ellas. Además, los alumnos fueron capaces de generalizar de manera verbal y por medio del simbolismo algebraico. Merino et al (2013) mostraron que alumnos de 9-10 años, en una tarea de generalización que involucraba la función $f(x)=2x+6$, emplearon estrategias de conteo sobre dibujos y respuestas directas cuando los números en las preguntas que se les plantearon son pequeños. En cambio, cuando los números son mayores, recurrieron a estrategias de operatoria y al uso de patrones (no siempre adecuados). Cañadas et al (2016) evidenciaron que alumnos de segundo de primaria (6-7 años) establecieron una relación funcional en un problema que involucra la función $f(x)=2x$. Los alumnos emplearon dos enfoques: uno basado en una estrategia recursiva (contar de dos en dos) y otro basado en estrategias funcionales (duplicación). Se destaca que, cuando los números son pequeños (1 al 20), los niños emplearon ambos enfoques. En cambio, cuando los números son grandes, emplearon el enfoque funcional. Los autores de los estudios mencionados destacan el interés de indagar en la relación entre las estrategias y el caso (particular o general) por el que se pregunta.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En el contexto de un problema que involucra una función lineal de estructura aditiva que fue resuelto por alumnos de primero de Primaria, en este estudio buscamos:

- describir los tipos de relaciones funcionales que identifican,

- describir las estrategias que emplean y

- establecer vínculos entre esas relaciones funcionales y esas estrategias.

MÉTODO

Participantes

Trabajamos con los 30 alumnos de primero de Primaria (6 años) de un centro escolar de Granada (España). La selección del centro escolar fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro y de los docentes. Antes de la recolección de datos, los alumnos sabían nombrar y contar hasta cien de uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco, y de diez en diez; y sumar y restar números de una y dos cifras (incluidas llevadas). Adicionalmente, ellos estaban familiarizados con el cálculo mental, las puestas en común y la justificación de respuestas. Ellos no tenían experiencia previa con situaciones que implicaran relaciones funcionales aditivas. En cambio, sí habían trabajado la función identidad en una sesión previa del experimento de enseñanza.

Experimento de enseñanza y entrevistas

Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Tres investigadores entraron al aula: (a) la profesora-investigadora que implementó las sesiones (segundo autor), (b) la investigadora de apoyo a la primera para resolver dudas a los alumnos y (c) el investigador encargado de las grabaciones en video y del registro de notas (primer autor). El experimento de enseñanza estuvo conformado por cinco sesiones de noventa minutos cada una. Presentamos una descripción general de estas sesiones en la tabla 6.3.

Tabla 6.3. *Sesiones experimento de enseñanza*

Sesión	Problema: contexto y función	Descripción de cada sesión
1	Perros y collares $y = x$	Los alumnos respondieron de manera verbal y escrita (cuestionario) a cuestiones sobre casos particulares y caso general de un problema que relaciona número de collares y número de perros.
2 y 3	Perros y platos $y = x + 5$	Los alumnos respondieron de forma verbal y escrita (cuestionario) a cuestiones de casos particulares, de un problema que relaciona la cantidad de platos totales (5 platos de agua a compartir por todos y un plato de comida para cada uno) y número de perros. Trabajaron la organización de casos particulares en la representación tabular.
4 y 5	Edades de dos personas $y = x + 5$	Los alumnos respondieron verbalmente cuestiones de casos particulares y completaron tabla de funciones en un problema que relaciona el número de años de Carmen y el número de

Tabla 6.3. *Sesiones experimento de enseñanza*

Sesión	Problema: contexto y función	Descripción de cada sesión
		años de Álvaro, con Carmen cinco años mayor que Álvaro. También trabajaron el caso general.

Cada una de las sesiones constó de cuatro partes. En la primera parte, la profesora-investigadora introdujo la situación sobre la que los alumnos iban a trabajar. En la segunda parte, los alumnos respondieron y debatieron con la profesora-investigadora sobre diferentes ítems planteados por esta última sobre casos particulares (ver tabla 6.4) del problema. En la tercera parte, los alumnos trabajaron de forma individual por escrito en una ficha de trabajo sobre algunos ítems relacionados con la parte anterior de la sesión y otros diferentes, que incluían la generalización de la relación. Los miembros del equipo de investigación resolvimos dudas sobre la realización del trabajo y ayudamos a los alumnos cuando ellos no supieron cómo escribir algo que estaban pensando. En la cuarta parte, organizamos una puesta en común sobre el trabajo realizado por los alumnos en los cuestionarios.

Como complemento al experimento de enseñanza, realizamos cuatro entrevistas a cuatro alumnos al finalizar las cinco sesiones del experimento. La intención de las entrevistas fue profundizar en la información relativa a los objetivos de investigación. Seleccionamos a los cuatro alumnos con la colaboración de la tutora del grupo. Tres de los alumnos fueron seleccionados por el modo en que podían verbalizar sus respuestas durante las sesiones y de modo que tuvieran diferentes rendimientos académicos (entendidos como resultados de la evaluación continua de la tutora) en matemáticas (alto-medio-bajo). Seleccionamos al cuarto alumno porque no respondió a algunos de los ítems planteados durante la puesta en común y nos interesaba complementar la información. Cada entrevista duró unos 25 minutos. Formulamos preguntas a cada alumno con base en sus respuestas en los cuestionarios. Les preguntamos sobre sus respuestas dadas a los mismos problemas trabajados durante las sesiones previas.

Recogida de datos: instrumentos y procedimiento

Nos centramos en las sesiones 2 y 3, en las que los alumnos abordaron por primera vez un problema que implica una función lineal aditiva y=x+5. El problema se enmarcó en una situación de perritos y platos de comida y agua: dada una cantidad de perros, se debe encontrar una cantidad de platos necesarios para esos perros. El enunciado del problema fue el siguiente.

> *Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perro debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros puedan beber*.

Tras presentar verbalmente el enunciado del problema al gran grupo, propusimos diversos tipos de ítems que siguen el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Partimos de casos particulares cercanos y, pasando por otros lejanos, pretendíamos llegar a la generalización. En la tabla 6.4, mostramos las características de los ítems y algunos ejemplos de preguntas planteadas para cada tipo de ítem, tanto en la puesta en común, en cuestionarios y entrevistas. Cada ítem involucra diferentes tipos de preguntas. Por ejemplo, en los ítems sobre casos particulares, para que el cálculo no fuese una dificultad añadida, planteamos preguntas con números familiares para ellos y/o terminados en cinco, porque los alumnos estaban habituados a contar de cinco en cinco.

Tabla 6.4. *Tipo de ítems y ejemplos*

Tipos de ítems	Ejemplos de preguntas
Casos particulares	Si hay cinco perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay ocho perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay quince perros ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay cien perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
Recordatorio	¿Quién me puede decir qué se trabajó en la sesión anterior?
Generalización*	¿Cómo encuentras la cantidad de platos totales para una cierta cantidad de perros

Tabla 6.4. *Tipo de ítems y ejemplos*

Tipos de ítems	Ejemplos de preguntas

Nota. * = Planteada en entrevistas.

Para una mejor comprensión del problema por parte de los alumnos, utilizamos material manipulativo que pegamos en una ventana de la clase (ver figura 6.11). Los cinco platos de la parte superior representan los platos de agua (constante de la función) y los platos que están junto a los perros son los platos de comida.

Figura 6.11. Material utilizado en sesiones 2 y 3

Los datos escritos de los cuestionarios contribuyeron a la puesta en común posterior. Los investigadores presentes en el aula revisaron las respuestas escritas mientras los alumnos trabajaban, justo antes de la puesta en común. Esto permitió tener información del trabajo individual de los alumnos y, con base en esta información, guiar la puesta en común.

Para las dos partes de la sesión que se desarrollaron en gran grupo (puesta en común) teníamos dos cámaras en el aula. Una cámara se centró en grabar la generalidad del aula y la otra se focalizaba en algunos alumnos particulares en caso de que hubiera solapamientos con otros al hablar. Los alumnos estaban acostumbrados a intervenir en debates, por lo que no fueron frecuentes los solapamientos. En los casos en los que un compañero repetía la respuesta de otro, les pedíamos explicaciones, para detectar si la respuesta se basaba en su propio razonamiento.

En las entrevistas nos centramos en la parte en que preguntamos a los alumnos por el problema que estamos considerando (sesiones 2 y 3) de la puesta en común. Las entrevistas al igual que las sesiones del experimento de enseñanza las grabamos en videocámaras.

Análisis de datos

En primer lugar, transcribimos las sesiones y las entrevistas. En segundo lugar, consideramos como unidad de análisis las respuestas verbales de los alumnos a los distintos ítems planteados (ver algunos ejemplos en la tabla 6.4). En tercer lugar, categorizamos el tipo de relación funcional (covariación o correspondencia) y la estrategia empleada por los alumnos en las respuestas a los diferentes ítems planteados, tanto en la puesta en común como en la entrevista. Además, comparamos las respuestas a los diferentes ítems planteados en la puesta en común y en la entrevista de los cuatro alumnos entrevistados de manera individual. Adicionalmente, comparamos las respuestas de estos alumnos en ambos instrumentos de recogida de información. Finalmente, vinculamos las relaciones funcionales identificadas y las estrategias empleadas por los alumnos. Consideramos que un alumno puede identificar una relación funcional empleando una o varias estrategias. En la tabla 6.5 mostramos las categorías y subcategorías empleadas para el análisis de datos.

Tabla 6.5. *Categorías análisis de datos*

Categoría	Subcategoría	Descripción
	Relación funcional	
Sin evidencia de relación funcional		No identifica relación funcional
Correspondencia		Agrega la cantidad constante de la función a la cantidad de la variable independiente
Covariación		Agrega la cantidad de variación de la variable independiente a la cantidad de la variable dependiente
	Estrategias	
Respuesta directa (E.1)		Solo presenta el resultado, sin dar explicación alguna
Estrategia conteo (E.2)	Conteo total (E.2.1)	Cuenta todos los objetos

Tabla 6.5. *Categorías análisis de datos*

Categoría	Subcategoría	Descripción
	Contar desde el mayor sumando (E.2.2)	Cuenta a partir del sumando mayor
Estrategia operatoria (E.3)	Hechos numéricos recordados (E.3.1)	Realiza sumas cuyos resultados conocen
	Descomposición de números (E.3.2)	Descompone uno de los números (sumandos) para realizar la suma
	Modificación de los datos iniciales y compensación (E.3.3)	Modifica algunos números al tener en cuenta esa modificación para compensar finalmente
Estrategia generaliza (E.4)		Expresa la regla general

Consideramos que hay evidencia de relación funcional cuando se observan en las respuestas de los alumnos las relaciones de correspondencia o covariación descritas en el marco conceptual. Incluimos la categoría de “no evidencia relación funcional” para aquellas respuestas de alumnos en las que es posible evidenciar un empleo de estrategia sin identificación de relación funcional. Las categorías estrategias de conteo, operatoria y generaliza surgen de investigaciones previas como las de Blanton y Kaput (2004), Cañadas et al (2016) y Merino et al (2013). Las subcategorías de estas últimas categorías surgieron del análisis de los datos de las sesiones 2 y 3 y, para denominarlas, asumimos terminología de Cañadas y Molina (2016b). Por tanto, estas subcategorías son específicas al problema planteado en las sesiones en las que se centra este artículo.

RESULTADOS

En este apartado presentamos resultados de la puesta en común y entrevistas. Primero mostramos resultados de la puesta en común, distinguiendo las respuestas que evidencian una relación funcional (correspondencia y/o covariación) de los que no. También identificamos las estrategias. A continuación, comparamos las respuestas de la puesta en común con las de las entrevistas de cada uno de los cuatro alumnos entrevistados de acuerdo con las relaciones funcionales identificadas y estrategias empleadas y las respuestas dadas en ambos momentos entre sí. Finalmente, establecemos el vínculo entre la relación funcional y la estrategia.

Resultados de la puesta en común

En la tabla 6.6, recogemos los alumnos que evidencian o no relaciones funcionales y las estrategias empleadas en la puesta en común. Cada alumno fue designado con la letra S con un número que va del 1 al 30, para distinguir a cada uno de ellos de manera confidencial. En los fragmentos de sesión denotamos por I a los investigadores participantes en la recogida de datos, usando de 1 a 3 para cada uno de ellos.

Tabla 6.6. *Relaciones funcionales identificadas y estrategias empleadas por alumnos*

	Estrategias						
		E.2		E.3			
Relación funcional	E.1	E.2.1	E.2.2	E.3.1	E.3.2	E.3.3	E.4
Sin evidencia relación funcional	S23-S15	S4-S6	S1	S12-S27			
Correspondencia			S28	S5-S9-S12-S13- S14-S15-S16-S17-S18-S20- S24-S26-S28-S29-S30	S5	S9	S19
Covariación			S25				
Correspondencia y covariación				S7-S19-S21			

Tabla 6.6. *Relaciones funcionales identificadas y estrategias empleadas por alumnos*

	Estrategias							
		E.2		E.3				
Relación funcional	E.1	E.2.1	E.2.2	E.3.1	E.3.2	E.3.3	E.4

Nota. E.1 = Respuesta directa; E.2 = Conteo; E.2.1 = Conteo total; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.3.3 = Modificación de los datos iniciales y compensando; E.4 = Generaliza.

Hubo alumnos que, en sus respuestas, no mostraron evidencia de ninguna relación funcional; otros que identificaron una relación de correspondencia; otro que hizo lo propio con una relación de covariación; y otros que identificaron tanto relación de correspondencia como de covariación. A continuación, describimos los alumnos que en sus respuestas no se evidenció una relación funcional, solamente el empleo de alguna estrategia.

Alumnos que no evidencian relación funcional

En la tabla 6.6, observamos que, durante la puesta en común, siete alumnos emplearon estrategias sin identificación de relación funcional. Las estrategias empleadas por estos alumnos fueron la respuesta directa (E.1), el conteo total (E.2.1), el conteo desde el mayor sumando (E.2.2) y la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1).

Dos de los siete alumnos anteriores emplearon la estrategia respuesta directa (E.1). Estos alumnos respondieron al ítem planteado refiriéndose a un número concreto, sin dar explicación de dónde surgió dicho número. Por tanto, no fue posible establecer si, por medio de esta estrategia, los alumnos identificaban una relación funcional. Un ejemplo de estrategia respuesta directa (E.1) es la respuesta de S15 que responde “Diez” cuando se le pregunta por la cantidad de platos totales para cinco perros.

Otros dos alumnos emplearon la estrategia conteo total (E.2.1). Estos alumnos se remitieron a responder contando de uno en uno los objetos (material concreto: platos de agua y comida) propuestos por la maestra-investigadora. Un alumno empleó la estrategia E.2.2. Este alumno inicialmente consideró una cantidad mayor y, a partir de esa cantidad, contó otra cantidad de uno en uno, llegando así a una respuesta adecuada al ítem. Por último, observamos que dos alumnos emplearon la estrategia E.3.1. Estos alumnos respondieron de forma inmediata al ítem planteado sumando las cantidades de la variable independiente y la cantidad fija, pero sin dar evidencia de una relación funcional, tal como mostramos en el siguiente fragmento que corresponde a la respuesta del alumno S27 durante la puesta en común:

1. I1: S27 […] quédate solo con uno… ¿con un perro cuántos platos necesitamos?
2. S27: Uno.
3. I1: ¿Uno de…?
4. S27: Uno de comida.
5. I1: ¿Y los de agua? ¿Cuántos tenemos de agua?
6. S27: Cinco.
7. I1: Entonces, en total, ¿cuántos platos son?
8. S27: Seis.

Inicialmente, S27 no da la respuesta a los platos necesarios para un perro, solo establece la relación un perro - un plato de comida. A continuación, con la orientación de la profesora-investigadora considera los cinco platos de agua, y suma ambas cantidades, obteniendo seis.

Alumnos que identifican la relación de correspondencia

En la tabla 6.6 observamos que la relación de correspondencia fue la más identificada por los alumnos. Hubo 19 alumnos que la evidenciaron durante la puesta en común. Estos alumnos identificaron la cantidad constante de la función (cinco platos de agua) y la sumaron a la cantidad de la variable independiente (cantidad de platos de comida), que también identificaron, y llegaron de esta manera a la cantidad de la variable dependiente (cantidad de platos totales).

Los 19 alumnos que identificaron la correspondencia emplearon diferentes estrategias. Un alumno empleó la estrategia contar desde el mayor sumando (E.2.2); 15 alumnos emplearon la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1); un alumno utilizó la descomposición de números (E.3.2); otro alumno empleó la estrategia modificación de los datos iniciales y compensando (E.3.3); y solo un alumno generalizó la relación funcional de correspondencia (E.4).

A continuación, mostramos la respuesta de S19, donde se aprecia la identificación de la relación de correspondencia con el empleo de la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Esta fue la estrategia más empleada por los alumnos.

9. I1: […] si tenemos un perro ¿cuántos platos necesitamos? Tenéis que pensarlo. […]

10. S19: Seis.

11. I1: Seis, ¿por qué?

12. S19: Porque cinco de agua y uno de comida.

Observamos en la respuesta de S19 el empleo de la estrategia E.3.1, dado que conoce la suma de 1 más 5 y menciona el resultado inmediatamente. En otra de las respuestas de este alumno, evidenciamos la estrategia generaliza asociada a la relación de correspondencia, siendo la única en que se evidenció esta estrategia durante la puesta en común. En el siguiente fragmento mostramos la generalización verbal de S19.

13. I1: Bien. ¿Os acordáis de la actividad del otro día? ¿Alguien me lo puede recordar por favor? […]

14. S19: […] tenemos quince platos de comida, pero los de comida uno para cada uno, de agua son siempre cinco, hay que irle sumando cinco.

A continuación mostramos la respuesta de S5, que es el único alumno cuya actuación evidencia la relación funcional de correspondencia y la estrategia de descomposición de número (E.3.2).

15. I1: […] Hay ocho perros y ¿platos?... ¿Cuántos necesitamos para ocho perros?

16. S5: Que si hay cinco platos de agua y ocho platos de comida, a los ocho le quito cinco y esos cinco se los sumo a los platos de agua y quedan diez y tres más diez son trece.

Observamos en la respuesta de S5, que este alumno, para hallar la cantidad total de platos, sumó cinco a la cantidad de perros (ocho), Por tanto, encontró el valor variable de la variable dependiente sumando cinco a la variable independiente. Además observamos que la estrategia de operatoria empleada consistió en la descomposición de número (E.3.2). S5 Inicialmente descompuso el sumando ocho (platos de comida) en dos valores: cinco y tres. Posteriormente consideró el cinco de la descomposición del ocho, para sumarlo con los cinco platos de agua, obteniendo diez. Finalmente, a los diez, le suma tres (cantidad restante de la disposición del ocho), obteniendo así 13 como respuesta final.

Alumnos que identifican la relación de covariación

En la tabla 6.6 observamos que S25 fue el único alumno que identificó la relación de covariación (y no la correspondencia). Este alumno respondió 13 cuando se le preguntó por la cantidad total de platos para ocho perros. En la figura 6.12, mostramos un esquema de la respuesta de este alumno, en la que organizamos las variables involucradas en la tarea en una representación tabular.

Cantidad de perros aumenta en tres

Cantidad perros	Cantidad platos totales
5	10
8	13

S25 suma tres a 10 y obtiene 13

Figura 6.12. Representación respuesta de S25

Observamos en la figura 6.12, que cuando la cantidad de perros aumentó en tres (de cinco a ocho), S25 determinó esa cantidad de variación que a continuación sumó a la cantidad anterior de la variable dependiente (10 platos totales), obteniendo así 13 como cantidad total de platos totales para ocho perros. S25 determinó la variación de los valores de la variable independiente para establecer uno de los valores de la variable dependiente. Además, empleó la estrategia contar desde el mayor sumando (E.2.2), dado que contó tres de uno en uno a partir de diez para obtener 13 como respuesta.

Alumnos que identifican las relaciones de correspondencia y covariación

En la tabla 6.6 observamos que tres alumnos identificaron los dos tipos de relaciones funcionales. Estos alumnos emplearon la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1) a la vez que identificaron las dos relaciones, en dos preguntas diferentes del ítem casos particulares. A continuación, mostramos el caso de S7, quien identificó una relación de correspondencia empleando la estrategia E.3.1. Destacamos este ejemplo porque involucra un número elevado (mil millones). S7 entiende que a los mil millones de platos de comida se le debe sumar cinco, que son los platos de agua, por tanto de esta manera identifica una correspondencia. Empleó la estrategia E.3.1 dado que señala inmediatamente la cantidad total de la suma: mil millones más cinco.

17. I1: […] S7 nos quiere contar algo, ¿tú cómo los has hecho S7?

18. S7: Yo sumando […] hasta llegar a los mil millones.

19. I1: ¿Y eso que son?

20. S7: Platos de comida y le pongo cinco pues, mil millones cinco.

21. I1: Ah, ¿al final le sumas cinco porque son los de agua?

(S7 asiente)

Estudio de casos

En la tabla 6.7 recogemos el resumen de resultados de los cuatro alumnos que entrevistamos, con base en su trabajo en la puesta en común y en la entrevista.

Tabla 6.7. *Respuestas alumnos en puesta en común y entrevistas*

	Estrategias			
	E.2	E.3		E.4
Contexto	E.2.2	E.3.1	E.3.2	
	Sin evidencia relación funcional			
Puesta en común				
Entrevista		S22		
	Correspondencia			
Puesta en común		S18-S19-S29		S19
Entrevista	S18-S22	S18-S19-S22-S29	S29	S18-S19-S29

Nota. E.2 = Conteo; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.4 = Generaliza.

En general, en la tabla 6.7 observamos que tanto en la puesta en común como en las entrevistas los alumnos identificaron la relación de correspondencia. Tres alumnos (S18, S19 y S29), en la puesta en común y en las entrevistas, identificaron la relación de correspondencia empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Esto hace que los consideremos consistentes en sus respuestas. Además S19 generalizó la relación funcional de correspondencia tanto en la puesta en común como en la entrevista.

En la tabla 6.7 observamos que fueron más los alumnos que durante la entrevista evidenciaron una relación funcional de correspondencia que en la puesta en común (cuatro y tres alumnos, respectivamente). Así mismo, observamos que durante la entrevista hubo alumnos que identificaron la relación de correspondencia empleando estrategias variadas y diferentes a las empleadas en la puesta en común (E.3.1): S18 en la entrevista empleó las estrategias contar desde el mayor sumando (E.2.2) y generaliza (E.4); S29 empleó las estrategias descomposición de números (E.3.2) y generaliza (E.4). Un caso extraordinario fue S22, quien durante la puesta en común no respondió, pero sí lo hizo en la entrevista donde identificó la relación de correspondencia empleando dos estrategias diferentes E.2.2 y E.3.1.

En lo relativo a la generalización, en la entrevista hubo más alumnos que generalizaron la relación de correspondencia que en la puesta en común. En la puesta en común S19 generalizó la relación de correspondencia, mientras que las entrevistas S18, S29 y el propio S19 generalizó esta relación funcional.

En particular, en la puesta en común, S18 identificó la correspondencia empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Posteriormente, en la entrevista, este alumno también identificó la relación de correspondencia pero empleó diferentes estrategias: contar desde el mayor sumando (E.2.2), hechos numéricos recordados (E.3.1) y generaliza (E.4). S18 generalizó la relación de correspondencia.

El alumno S19 identificó la relación de correspondencia en la puesta en común empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1) y generaliza (E.4). En la entrevista este alumno también identificó la relación de correspondencia y usó las mismas estrategias. Este es el único alumno que generalizó la relación de correspondencia, tanto en la puesta en común como en la entrevista.

El alumno S22 no respondió a ningún ítem en la puesta en común. Inicialmente en la entrevista no identificó una relación funcional; solo aplicó la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Sin embargo, a medida que avanzó la entrevista, S22 identificó la correspondencia empleando la estrategia E.3.1. Además, evidenció esta misma relación funcional utilizando una estrategia diferente: contar desde el mayor sumando (E.2.2). Finalmente, cuando se le propuso generalizar la relación funcional, no lo logró.

El alumno S29 en la puesta en común identificó una relación de correspondencia empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Posteriormente, en la entrevista percibimos que identificó la misma relación funcional empleando las estrategias: hechos numéricos recordados (E.3.1), descomposición de números (E.3.2) y generaliza (E.4). Destacamos que este alumno generalizó la relación de correspondencia identificada. En el siguiente fragmento evidenciamos la identificación de la relación de correspondencia, la estrategia E.3.1 y la generalización.

22. I1: Si tenemos veinte perros ¿cuántos platos necesitamos?

23. S29: Veinticinco platos.

24. I1: ¿Si tenemos treinta perros?

25. S29: Treinta y cinco platos.

26. I1: ¡Que rápido lo estás haciendo! […] ¿Qué has hecho siempre?

27. S29: Si tienes treinta […] siempre debe haber cinco platos, treinta, treinta y cinco, veinte, veinticinco.

28. I1: ¿Si tienes cincuenta?

29. S29: Cincuenta y cinco.

Adicionalmente a lo mostrado en el fragmento anterior, cuando preguntamos a S29 por el caso general, respondió "siempre debe haber cinco platos más", lo que evidencia la generalización de la relación de correspondencia.

Vínculos entre relación funcional y estrategias

A partir de las tablas 6.6 y 6.7, presentamos la tabla 6.8 que víncula las relaciones funcionales y las estrategias empleadas por los alumos. Incluimos en la tabla 6 aquellas estrategias que emplearon los alumnos cuando identificaron ambas relaciones funcionales por separado en ítems diferentes. En ningún caso hubo alumnos que identificaran ambas relaciones en un mismo ítem.

Tabla 6.8. *Vínculos entre relación funcional y estrategias empleadas*

Relación funcional identificada	Estrategias						
		E.2		E.3			
	E.1	E.2.1	E.2.2	E.3.1	E.3.2	E.3.3	E.4
Correspondencia			X	X	X	X	X

Tabla 6.8. *Vínculos entre relación funcional y estrategias empleadas*

Relación funcional identificada	Estrategias						
		E.2		E.3			
	E.1	E.2.1	E.2.2	E.3.1	E.3.2	E.3.3	E.4
Covariación			X	X			

Nota. E.1 = Respuesta directa; E.2 = Conteo; E.2.1 = Conteo total; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.3.3 = Modificación de los datos iniciales y compensando E.4 = Generaliza.

En la tabla 6.8, observamos que la relación funcional de correspondencia estuvo vinculada a diferentes estrategias tales como: contar desde el mayor sumando (E.2.2); hechos numéricos recordados (E.3.1), descomposición de números (E.3.2), modificación de los datos iniciales y compensando (E.3.3), y generaliza (E.4). Sin embargo, de todas estas estrategias empleadas por los alumnos, observamos que hubo un vínculo considerable entre la relación de correspondencia y la estrategia de operatoria hechos numéricos recordados (E.3.1), dado que fueron más los alumnos que identificaron esta relación funcional empleando este tipo de estrategia (ver tablas 4 y 5). Cuando los alumnos emplearon la estrategia (E.3.1), observamos que fueron capaces de sumar inmediatamente la cantidad constante de la función y la cantidad correspondiente a la variable independiente para hallar la cantidad de la variable dependiente solicitada. A su vez la estrategia generaliza (E.4) solo se vinculó con la relación de correspodencia, dado que los alumnos que generalizaron lo hicieron con esta relación funcional (ver tabla 6.6 y 6.7). Por tanto, los alumnos que emplearon la estrategia (E.4) les resultó más accesible generar la regla general de la relación correspondencia.

Por su parte, la relación de covariación estuvo vinculada a dos estrategias: contar desde el mayor sumando (E.2.2) y hechos numéricos recordados (E.3.1). Sin embargo, encontramos un cierto vínculo de esta relación funcional con la estrategia (E.3.1), dado que los alumnos que identificaron esta relación funcional fueron más los que emplearon este tipo de estrategias (ver tabla 6.6). Los alumnos que emplearon la estrategia E.3.1 calcularon la variación entre las cantidades de la variable independiente que luego sumaron a la última cantidad de la variable dependiente y así dar respuesta a la pregunta planteada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Evidencia de relaciones funcionales en alumnos de primero de primaria

Los resultados presentados en este trabajo confirman que, desde muy tempranas edades, hay alumnos que son capaces de involucrarse con tareas que promueven el pensamiento pensamiento funcional. Esto complementa resultados obtenidos en otros estudios en pensamiento funcional con alumnos de primero de Primaria (p. ej., Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, et. al., 2016; Cañadas y Fuentes, 2015; Morales et al., 2016), particularmente en el contexto español, en el que la investigación en pensamiento funcional se encuentra en un estado incipiente (Cañadas y Molina, 2016a).

Los alumnos que manifestaron pensamiento funcional lograron dar respuesta a las preguntas planteadas por medio de la relación de correspondencia, que fue la más empleada y, en ocasiones, mediante la relación de covariación. Destacamos el hecho de que tres alumnos identificaron las relaciones de correspondencia y covariación, lo cual indica que la covariación es abordable para algunos estudiantes. El resultado anterior, es similar a los que presentan Morales et al (2016) en el que los autores analizan los resultados de las sesiones 4 y 5 de esta investigación (ver tabla 6.6), donde los mismos alumnos trabajaron un problema en otro contexto pero con la misma relación funcional involucrada. Destacamos que no hubo estudiantes que utilizaran la recurrencia, tal como sí hacen alumnos de cursos diferentes en otros estudios (p. ej., Stephens et al., 2012; Tanışlı, 2011). La manera en que se propuso el problema en este estudio podría incidir en que los alumnos se centraran en la identificación de la relación de correspondencia y covariación en lugar de la recurrencia. En este sentido, tratamos de evitar los casos consecutivos una vez comprendieron el contexto del problema y no solo se los presentamos de forma creciente.

Aunque no es el foco de este artículo, también identificamos respuestas inadecuadas en los alumnos en el comienzo del trabajo con casos particulares. Una de ellas fue no considerar la cantidad constante involucrada en la función, teniendo en cuenta que había tantos platos como perros (y=x). Esta respuesta se dio en el trabajo con casos particulares y pudo deberse a que en la sesión previa habían trabajado con la función identidad. Otra respuesta inadecuada fue considerar la constante de la función como cantidad variable. Hubo alumnos que interpretaron que a más cantidad de perros, más platos de comida y más platos de agua. Por ejemplo, S19 respondió que para cien perros necesitaba: “Cien de comida y cien de agua” y asociaron el problema trabajado en este estudio, con dicha relación funcional. Consideramos que el análisis de las respuestas inadecuadas de los alumnos puede dar información relevante que contribuya a la investigación sobre pensamiento funcional, principalmente para profundizar sobre el conocimiento de los alumnos.

Estrategias empleadas por los alumnos

Con respecto a las estrategias, observamos que por lo general los alumnos emplearon estrategias de operatoria y no tanto estrategias de conteo, independientemente del tamaño de los casos particulares involucrados en las preguntas planteadas. Una explicación a lo anterior puede ser que los alumnos ya tenían conocimientos previos para operar con cantidades en las que el número de los sumandos es de más de una cifra. Es destacable que cuando los números de las preguntas planteadas eran grandes y terminados en cero (por ejemplo, 100 perros), los alumnos respondieron adecuadamente a la suma: cantidad de perros (variable independiente) más cinco (constante de la función), a pesar de que ellos no estaban familiarizados con estos tipos de números. Por tanto, los números grandes de las preguntas no fue un impedimento para que los alumnos pudieran operar con ellos. Este hecho se puedo deber a que planteamos los ítems de manera verbal y supieron cómo nombrar a los números resultados de las operaciones que realizaban. Por ejemplo, cuando tenían que sumar un número grande terminado en cero, recurrían a la yuxtaposición de palabras, tal como se manifestó en el ejemplo del alumno S17 (líneas 17 a la 21).

Uno de los alumnos (S19) generalizó (E.4) en una pregunta en la que no se le preguntaba explícitamente por el caso general. Es un caso extraordinario que además coincide con que este alumno es de los considerados de rendimiento alto. La actuación de los alumnos con capacidades superiores a la media es un aspecto sobre el que habría que profundizar pero ya hay autores que apuntan a que la generalización en este tipo de problemas puede ser un indicador que contribuya a identificar a alumnos con talento matemático (Ramírez y Cañadas, 2018).

Comparación entre el trabajo de los cuatro alumnos en puesta en común y entrevista

Destacamos que tres de los cuatro alumnos lograron mantener en la entrevista la relación de correspondencia identificada en la puesta en común junto con la estrategia empleada (hechos numéricos recordados). Además estos mismos tres alumnos durante la entrevista identificaron esta misma relación funcional empleando más de una estrategia. Lo anterior muestra que un alumno puede identificar una relación de correspondencia empleando más de una estrategia.

En la puesta en común, un alumno (S19) identificó la correspondencia y generalizó esta relación, mientras que en la entrevista tres de los cuatro alumnos, incluido el alumno S19, generalizaron verbalmente la relación de correspondencia. Estos alumnos describieron a modo general la regla que permite encontrar la cantidad de platos totales, dada una cantidad de perros, tal como mostramos en el siguiente fragmento de entrevista de S19.

30. I1: […] ¿Cómo lo haces S19? Cuando yo te digo el número de perros, ¿cómo calculas el número de platos siempre?

31. S19: Como hay un número siempre hay que sumarle a ese número que es el número de platos otros cinco.

El hecho de que tres de cuatro alumnos generalizaran en la entrevista se puede deber al planteamiento de una mayor cantidad de ítems a cada alumno, los cuales estaban orientados a que los alumnos generalizaran, dado que los números de los ítems involucrados iban de menor a mayor en la mayoría de los ítems. Otra explicación puede ser que como los alumnos ya habían trabajado durante cinco sesiones con problemas relativos al pensamiento funcional, fueron generando un aprendizaje sobre los tipos de relaciones funcionales, por lo que se les hizo más fácil llegar a la generalización. Adicionalmente, pudieron interferir las intervenciones de la entrevistadora en las entrevistas o del profesor-investigador en el caso de las sesiones del experimento de enseñanza. Destacamos al alumno S22 quien, considerado de rendimiento bajo, identificó una relación funcional durante la entrevista. Las conjeturas anteriores deberían ser exploradas en mayor profundidad en investigaciones futuras. Conocer las respuestas inadecuadas de los estudiantes, así como la intervención posterior del docente, profesor-investigador o entrevistador, y cómo esta puede dar lugar a diferentes respuestas por parte de los estudiantes es una línea de investigación abierta que permitiría enriquecer la investigación sobre pensamiento funcional en los primeros cursos.

Vínculos entre relación funcional y estrategias

Los alumnos cuando identificaron una relación de correspondencia hicieron uso de diferentes estrategias. Estas estrategias incluyeron conteo, operatoria y generalización. Por tanto, la relación de correspondencia se vinculó a las estrategias anteriormente mencionadas. Con respecto a las estrategias de conteo y operatoria empleadas por los alumnos, los alumnos las efectuaron de la siguiente manera: identificaron inicialmente la cantidad constante de la función (platos de agua) que luego sumaron (operando o contando) a la cantidad de la variable independiente llegando así a la cantidad de la variable dependiente. Un aspecto a destacar en el contexto de este estudio, es que la relación de correspondencia es más accesible a ser generalizada por los alumnos que la relación de covariación.

Los alumnos que identificaron la relación de covariación generalmente emplearon estrategias de conteo: contar desde el mayor sumando (E.2.2) y la estrategia de operatoria: hechos numéricos recordados (E.3.1). Por tanto, este tipo de relación funcional se vincula a estos dos tipos de estrategias. Los alumnos que emplearon las estrategias E.2.2 y E.3.1 calcularon inicialmente la variación entre las cantidades de la variable independiente y luego sumaron (operando o contando) esta variación a la última cantidad de la variable dependiente.

Somos conscientes de que hay que ser muy cautelosos al hablar de vínculos por el tipo de investigación desarrollada, en cuyos intereses no está generalizar los resultados pero sí dejamos constancia del interés por indagar en esta relación entre relación funcional y estrategias.

Implicaciones para la enseñanza de las relaciones funcionales en primero de Primaria

De acuerdo con los resultados obtenidos en este artículo y considerando las exigencias curriculares que hoy en día buscan promover el álgebra a partir de los primeros niveles educativos, la tarea aquí propuesta podría ser útil para la práctica docente como forma de promover el pensamiento algebraicos en alumnos de seis años de edad. Se podría considerar el problema, los ítems y la forma en que éstos se propusieron, dado que los alumnos identificaron relaciones funcionales poniendo en evidencia pensamiento funcional. Esta propuesta también es apoyada por autores como Warren y Cooper (2005), quienes proponen problemas en que los alumnos se centren en cómo una cantidad varía en relación a la otra, en lugar de aquellos problemas que promueven la recurrencia que limitan la identificación de relaciones funcionales y su generalización.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España y fondos FEDER; y gracias a una beca CONICYT PFCHA 72150072 otorgada por el gobierno de Chile.

REFERENCIAS

Amit, M. y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cañadas, M., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Cañadas, M. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016a). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016b). Pensamiento numérico. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 173-194). Madrid, España: Pirámide.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Washingon, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Revisado en: http://www.corestandards.org/Math/

Clapham, C. (1998). *Diccionario de matemáticas*. Madrid, España: Complutense.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas* (6a ed.). México, DF: Pearson Educación.

Larson, R. y Hostetler, R. (2008). *Precálculo* (7a ed.). México, DF: Reverté Ediciones.

Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (Vol. 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Autor.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. E*nseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Morales, R. Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*, (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441-465.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, Juan A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.

Ramírez, R. y Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79*, 23-30.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). España, Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E. y Gardiner, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. En L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds.), *34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kalamazoo, MI.*

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

ESTUDIO 3: SECOND GRADERS' FUNCTIONAL THINKING IN A GENERALIZATION TASK: APPROPRIATE AND INAPPROPIATE RESPONSES AND INTERVENTIONS

Abstract

Early algebra research has focused primarily on showing what students can do, in an attempt to refute preconceptions around young students' presumed inability to generalize. Scant attention has been paid to the mistakes and difficulties they make, despite the educational significance of such factors. This exploratory study analyses eight second graders' (7 year-olds') responses, both appropriate and inappropriate, in individual interviews in which they engaged in a contextualized task involving the function $f(x)=x+5$. This article describes students' pre-intervention responses, the interviewer's interventions in face of inappropriate answers, and the post-intervention responses. Based on the findings, a typology of pre- and post-intervention, appropriate and inappropriate responses to generalization tasks is proposed. This typology contributes to the understanding of young students' functional thinking.

Keywords: elementary education, functional thinking, functional relationships, generalization, mistakes, teachers' interventions.

In recent years, functional thinking has been a core topic in early algebra research. Functional thinking is regarded as the key to introducing algebraic elements from the earliest grades (e.g., Kaput, 2008). Moreover, functional thinking in the early grades favors the construction of a sound basis for working with algebra in later grades (Common Core State Standards Initiative, 2010). Functional thinking is based on the mathematical notion of function to further students' algebraic reasoning, especially in the earliest grades. This type of thinking focuses on the possible relationships between two (or more) variables, to ultimately generalize those relationships (Smith, 2008).

Functional thinking is deemed an essential means for developing algebraic reasoning. Some of the key factors of algebraic reasoning include patterns, the relationships between two or more variables (functional relationships), the generalization and representation of such relationships, as well as fluent justification of and reasoning about the generalized representations that aim to predict the behavior of a given function (Brizuela & Blanton, 2014). This study focuses on functional relationships and generalization.

Research in this area has yielded promising findings in connection with elementary school students' ability to undertake tasks that involve functional thinking (e.g., Blanton & Kaput, 2004; Cañadas, Blanton & Brizuela, 2016). Such abilities usually exceed initial expectations, attesting to students' ability to identify functional relationships, generalize and even use algebraic symbolism. Nonetheless, certain factors affecting early elementary school pupils' performance in functional thinking tasks have yet to be explored (Cañadas & Molina, 2016). For example, very few studies have focused on their inappropriate responses, the difficulties they encounter or their teachers' or interviewers' interventions. Although teachers' interventions are key for pupils to learn mathematics, this topic has been scantly researched with the field of mathematical content knowledge (Dekker & Elshout-Mohr, 2004) or functional thinking (Warren, 2005). While the validity, richness and objectivity of semi-structured interviews is undisputed (Ginsburg, 1997), the interviewer's role and interventions can obviously affect students' responses. In light of the foregoing, such interventions were borne in mind in this study when analyzing students' functional thinking.

The primary aim of this study was to explore the types of student responses, appropriate or otherwise, and the interviewer's interventions in an early algebra generalization task. To that end, the article begins with a description of the types of appropriate and inappropriate answers observed in second-graders performing a generalization task in a functional context. That is followed by a description of the interviewer's interventions and pupils' (appropriate and inappropriate) responses after the interviewer's interventions.

CONCEPTUAL FRAMEWORK AND BACKGROUND

Functional thinking: functional relationships and generalization

Functional thinking implies thinking in terms of relationships between amounts (the functional relationships) and representing, justifying and generalizing relationships (Cañadas & Molina, 2016). It begins when the individual identifies a relationship between two or more covariate amounts (Confrey & Smith, 1991). Smith (2008) proposed three types of relationships between covariate amounts that can further and reveal pupils' functional thinking: recurrence, covariation and correspondence.

Recurrence is the variation between the amounts of one variable, while the other variable remains implicit (Blanton & Kaput, 2005). Recurrence is identified by finding one value of a variable based on its previous values. Recurrence requires a lower degree of understanding of the functional relationship than the other types of functional relationships, for it focuses only on a sequence of values for one of the variables involved (Warren & Cooper, 2005). Based on this idea, we understand that such relationship does not relate the values of both variables; hence we do not consider this relationship to be functional in nature.

Correspondence is the rule established between pairs of values for the two variables (Confrey & Smith, 1991; Smith, 2008). Identifying a correspondence relationship requires to determine, for example, a single value for the independent variable for a given value of the independent variable (Blanton, Levi, Crites & Dougherty, 2011). In one typical example, pupils are required to find the total number of bowls needed for a given number of dogs, in a way that each dog has a plate of food and there are five water bowls to be shared by all the dogs (function $y=x+5$). When asked how many bowls are needed for one dog, in finding the value of the dependent variable, if a student replies "six, five for the water and one for the food, make six", the student would have identified a correspondence relationship by adding five (constant in the function, five water bowls) to the independent variable (number of dogs). Where a single instance is involved, the foregoing could be regarded as a mere arithmetic operation, but when pupils repeat the reasoning for other specific cases or to generalize, they are deemed to express correspondence.

Covariation consists of "the simultaneous change in two variables that occurs due to the existence of a relationship between them" (Gomez, 2016, p. 170). Correspondence is implicit in covariation. Identifying covariation entails focusing on the change in the values of the dependent and independent variables, and then detecting the simultaneous and coordinated variation in those amounts (Blanton, et al., 2011; Blanton & Kaput, 2005). An example of a pupil's identification of covariation in the problem posed in the preceding paragraph is depicted in Figure 6.13. This pupil replied that 13 bowls would be needed for eight dogs, adding three to 10 because the number of dogs had increased by three (from five to eight). As in the case of correspondence, a pattern would need to be observed in students' successive responses to determine that they had actually grasped the covariation relationship.

Number of dogs increases by three

Number dogs	Total number bowls
5	10
8	13

S25 adds three to 10 to get 13

Figure 6.13. Covariation

As noted earlier, generalization is essential to functional thinking (Blanton & Kaput, 2011). According to Kaput (1999), generalization is the activity that raises and communicates reasoning to a level where the focus is not on a particular instance, but on patterns and relationships between specific instances. Generalization is assumed to begin when pupils intuitively see a certain general underlying scheme, although they are not yet able to express it clearly (Mason, Burton & Stacey, 1988). In a functional context, generalization entails determining the functional relationship in general. Regarding the question "How do you find the total number of bowls?", pupils generalize correspondence when they reply "you always have to add five to the number of dogs". In that example, generalization is expressed verbally. There could be other forms of response such as algebraic symbolism, tables and graphs (Blanton, et al., 2011) or even gesticulating or body language (Radford, 2010).

Several studies have focused on elementary school students' expression of functional relationships and generalization in early algebra contexts. Morales, Cañadas, Brizuela and Gómez (in press) observed that first-graders (5- to 6-year-olds) identified correspondence and covariation and some pupils generalized correspondence. Cañadas et al (2016) reported that second-graders (6- to 7-year-olds) used two approaches to perform a functional thinking task involving the function $y=2x$, one recursive (counting two-by-two) and the other based on correspondence (duplication). These pupils used one approach or the other depending on the kind of specific instances posed: recurrence and correspondence for numbers from 1 to 20 and correspondence for higher numbers. Stephens et al (2012) observed progress in third, fourth and fifth grade pupils (7- to 10-year-olds) in identifying functional relationships, beginning with recurrence and moving on to covariation and correspondence in subsequent teaching experiments. Tanışlı (2011) reported similar behavior in fifth-graders (9- to 10-year-olds) who, using tables, first identified recurrence and then correspondence. Warren and Cooper (2006) found that pupils in that same grade could identify and generalize correspondence. Pinto and Cañadas (2017a) observed that fifth-graders can generalized correspondence both spontaneously (when asked about specific instances) and when explicitly asked to do so. In a separate study in which third- and fifth-graders were exposed to generalization tasks for the first time, Pinto and Cañadas (2017b) noted that a substantially greater number of the latter than the former were able to generalize.

Mistakes and difficulties

Despite students' progress in generalization tasks, mistakes and difficulties have also been observed, in particular in the context of classroom algebra.

Mistakes involve associating a cognitive scheme with a given situation inappropriately, not being consequence of knowledge or distractions (Matz, 1980; Socas, 1997). As difficulties constitute one of the main sources of mistakes, many studies address mistakes and difficulties jointly. Socas (2007) contended that difficulties and mistakes in mathematics learning are a mathematics education research topic that merits greater depth of analysis to secure a clearer understanding of students' knowledge and how to teach mathematical content.

Most research on mistakes and difficulties in algebra has been conducted at the secondary school level (e.g., Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas, & Castro, 2017; Ruano, Socas, & Palarea, 2008), among others because that is when algebra is usually introduced in the curriculum. In the context of early algebra, studies have focused on showing what students can do, in an attempt to refute presumptions around elementary school pupils' (6- to 12-year-olds) scant ability to generalize. That does not mean, however, that pupils in those grades do not encounter difficulties or make mistakes. Students' mistakes and difficulties are present in knowledge building and should not normally be avoided (Palarea, 1998). That idea is reinforced by the notion of productive failure (Kapur, 2008), for mistakes and difficulties enable students to continue to learn and grow their knowledge.

A number of authors have drawn distinctions between types of mistakes. Socas (1997, p. 144) proposed three types of mistakes depending on the source: (a) those originating in an obstacle; (b) those originating in the lack of meaning; and (c) those originating in affective and emotional attitudes. Santagata (2005) classified mistakes by their nature, distinguishing among those attributable to erroneous connections between mathematical concepts, or procedures, drawing, arithmetic, distraction, a lack of knowledge about properties or definitions or other factors.

Research on elementary school pupils' mistakes in a functional context is still scant. Warren (2005) observed that 9- and 10-year-olds found it difficult to (a) precisely describe a visual pattern; (b) express generalization in writing; (c) solve specific, non-consecutive problems; and (d) find the amount of the independent variable when they knew the amount of the dependent variable. Hidalgo and Cañadas (2017) described sixth-graders' (11- and 12-year-olds) solutions to a generalization problem, identifying: (a) counting mistakes; (b) calculation mistakes; (c) answers to specific problems other than those posed; (d) erroneous numerical results; (e) procedural errors; and (f) cases in which students made no progress. Counting and procedural mistakes (use of the wrong pattern) were the two types most frequently found.

Educational interventions

Educational interventions can be regarded as assistance provided or actions performed by the educator to guide pupils in the learning process. Fernández (2010) proposed explanations, discussion or inter-group debates as ways in which the teacher can intervene. In socio-constructivist approaches to learning, educational interventions are considered a scaffold designed to facilitate pupils' understanding and learning (Fernández, 2010). A scaffold is a

> process that enables a child or novice to solve a problem, carry out a task or achieve a goal which would be beyond his unassisted efforts. This scaffolding consists essentially of the adult controlling those elements of the task that are initially beyond the learner's capacity, thus permitting him to concentrate upon and complete only those elements that are within his range of competence (Wood, Bruner, & Ross, 1976, p. 91).

Research on educational interventions has focused primarily on two topicss: (a) types of intervention (Anghileri, 2006; Dominik & Bernd, 2005); and (b) effectiveness of interventions. In an early algebra classroom context, Hidalgo and Cañadas (2017) identified different types of teacher-interviewer interventions: (a) return to the first specific instance; (b) return to the preceding specific instance; (c) return to a specific instance; (d) return to the same specific instance; (e) verbalize the student's argument or reflection; (f) repeat the question; (g) reformulate the question; (h) calm (the pupil) down; (i) repeat the answer; and (j) ask pupils to make explicit their reasoning. The most frequent were "verbalize the student's argument or reflection", "repeat the question" and "reformulate the question".

Dekker and Elshout-Mohr (2004) suggested that some types of intervention are more effective than others in raising pupils' mathematical skills. Process help, including regulating activities that induce interaction such as asking pupils what they are doing or how they are doing it, commenting on what they are doing or rejecting their justifications are more effective than product help, which focuses on the final result of students' mathematical reasoning. In a classroom algebra context, Warren (2005) identified four effective educational interventions to help 9- and 10-year-old pupils generalize. Those four interventions included: (a) using specific materials; (b) explicitly illustrating the relationship between variable amounts; (c) posing explicit questions to relate the variables and their amounts; and (d) gradually raising the value of one of the variables. Ureña, Molina and Ramírez (2017) reported that interviewers' stimuli were instrumental in obtaining fourth-graders' (9- and 10-year-olds) replies and that such coaching could contribute to the consolidation of their ideas and constructs associated with the recognition of a functional relationship in a generalization task.

SPECIFIC RESEARCH OBJECTIVES

This study aimed to describe second-graders' (7-year-olds') responses when undertaking a generalization task in a classroom algebra context. The specific objectives addressed to fulfil that general aim were:

- to describe pupils' appropriate and inappropriate responses prior to any intervention by the interviewer, and
- to describe pupils' appropriate and inappropriate answers after the interviewer's intervention.

METHOD

Type of research

This exploratory and descriptive study (Hernández, Fernández & Baptista, 2007) is one of the few to analyze students' answers in the realm of functional thinking before and after the teacher-interviewer's intervention.

Research context

This study is part of a broader project on functional thinking in elementary school students in Spain. In a teaching experiment designed and implemented during academic year 2014-2015, five 90-minute sessions were conducted with a group of first-graders (5- to 6-year-olds) enrolled in a school in the city of Granada (Spain). The school was chosen intentionally on the grounds of its willingness to participate in the project. The sessions involved three generalization tasks based on two linear functions: $y=x$ and $y=x+5$. The findings showed that the pupils identified correspondence and covariation relationships and some could generalize the former (see Morales, Cañadas, Brizuela & Gómez, in press). As most of the tasks were performed by pupils in groups, the researchers decided to supplement the information collected by conducting semi-structured interviews with some of the pupils the following year.

Participants

In academic year 2015-2016, eight second-graders (7-year-olds) were chosen from among the pupils participating in the preceding year's study.

The profiles of the eight students chosen for this study were deliberately diverse. Three groups of students were established based on the information collected the preceding year and students' academic performance in first grade (categorized as high, medium or low). Academic performance was defined on the grounds of their grades and cognitive abilities, as judged by their regular classroom teacher. The pupils proposed for each of the three groups all exhibited a participatory attitude. The participants ultimately included three high performers (S1, S2 and S3), three medium performers (S4, S5 and S6) and two low performers (S7 and S8). From now on, each pupil will be referred to with its identifier (using the letter S, followed by a number from 1 to 8).

Data collection: task proposed and semi-structured interview

A generalization task designed for an early algebra context was posed during an individual semi-structured interview. The task, which involved the functional relationship $f(x)=x+5$, was worded as follows.

A grandmother gives her grandson a money chest with €5. After that, every Sunday, she gives him another euro.

The props used to explain this situation consisted in a money chest and coins (see Figure 6.14), which the pupils were allowed to manipulate. They were likewise furnished with paper and pencil to use if they wished.

Figure 6.14. Props used in the interviews

After explaining the situation, the interviewer posed a series of questions based on the inductive reasoning model proposed by Cañadas and Castro (2007), in which generalization follows on work with specific numbers. The interviewer's protocol included different types of questions about the problem, examples of which are listed in Table 6.9.

Table 6.9. *Types and examples of initial questions in the interviewer's protocol*

Type of question	Example
Consecutive and specific	If the grandmother gives her grandson €1, how much money will he have in the chest?
	If the grandmother gives her grandson €2, how much money will he have in the chest?
	If the grandmother gives her grandson €3, how much money will he have in the chest?
Non-consecutive and specific	If the grandmother gives her grandson €5, how much money will he have in the chest?
	If the grandmother gives her grandson €15, how much money will he have in the chest?

Table 6.9. *Types and examples of initial questions in the interviewer's protocol*

Type of question	Example
General	If the grandmother gives her grandson €100, how much money will he have in the chest? How could you always figure out much money the grandson has? How did you always figure it out?

When pupils replied inappropriately or failed to reply, the interviewer intervened to try to guide them. In her interventions, the interviewer adhered to the types of intervention discussed in the section on educational interventions in a conceptual framework.

Each interview lasted around 20 minutes and was conducted on the school premises, during regular school hours. The interviews were video-recorded. The first author of this article was the interviewer and the second recorded the interview and took fieldnotes relevant to the study.

Data analysis

Interviews were transcribed and transcripts were coded based on students' types of responses and the interviewer's types of interventions. The analytical categories used were drawn from the study's theoretical framework and a preliminary analysis of the data. The first distinction made was between appropriate and inappropriate responses. Consistent with the theoretical framework, the appropriate response sub-categories included identification of the functional relationship or otherwise, the type of functional relationship (correspondence or covariation) observed and generalization. The inappropriate response and interviewer intervention sub-categories were defined using a bottom-up approach, as described in the results section below. The presence or absence of each category or sub-category in students' responses was recorded before and after the interviewer intervened at least once. The interviewer's interventions were coded analogously.

The mixed data analysis presented below combines descriptive statistics (frequency counts), followed by qualitative analysis which are illustrated with examples.

RESULTS

Student's initial (pre-intervention) answers are discussed in terms of the type of response and presence or otherwise of generalization. That is followed by a description of the interviewer's interventions (when she identified students' initial answers as inappropriate) and pupils' post-intervention replies.

Pupils' pre-intervention responses

Appropriate pre-intervention responses were grouped into: (a) appropriate response, no functional relationship identified (AR1); (b) appropriate response, correspondence relationship identified (AR2); and (c) appropriate response, covariation relationship identified (AR3).

Six types of inappropriate pre-intervention responses were identified: (a) adding the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable (IR1); (b) meaningless response (IR2); (c) adding 5 to the last known amount of the dependent variable (IR3); (d) failing to consider the constant in the function (IR4); (e) arithmetic mistake (IR5); and (f) no reply (IR6).

Table 6.10 lists students' pre-intervention responses by type.

Table 6.10. *Typology of pupils' pre-intervention responses*

	Type of response										
	Appropriate				Inappropriate						
Pupil	AR1	AR2	AR3	Total	IR1	IR2	IR3	IR4	IR5	IR6	Total
S1	X	X*	X	3	X						1
S2	X	X*		2	X			X			2
S3	X			1	X		X				2
S4	X		X	2	X						1
S5	X	X*		2	X						1
S6	X			1	X				X		2
S7				0	X	X	X				3
S8	X			1	X	X				X	3
Total	7	3	2	12	8	2	2	1	1	1	15

Note: AR1= appropriate response, no functional relationship identified; AR2= appropriate response, correspondence relationship identified; AR3= appropriate response, covariation relationship identified; IR1= adding the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable; IR2= meaningless response; IR3= adding 5 to the last known amount of the dependent variable; IR4= failing to consider the constant in the function; IR5= arithmetic mistake; and IR6= no reply. *= The pupil generalized the functional relationship

All the pupils except S7 replied appropriately at least once, and all replied inappropriately at least once.

The most frequent type of appropriate response was AR1 (appropriate, no functional relationship identified), which was observed in seven of the eight students. Those students found the right number of euros but showed no sign of seeing the relationship between the number of euros and the number of Sundays. Three students (S1, S2 and S5) replied appropriately and identified a correspondence relationship (AR2). S1, for instance, when asked how many euros would be in the chest after one million Sundays replied: "one million […] he only had 5 euros, plus one million, one million and five". These three pupils also generalized the correspondence relationship.

Two students (S1 and S4) replied appropriately and identified the covariation relationship (AR3). S1, for instance, identified both the correspondence and covariation relationships in his appropriate answers. In the following extract, S1 described the covariation relationship using a specific number, 100, when asked about 200 Sundays.

> Interviewer (I): […] Two hundred Sundays? […]
>
> S1: Well, two hundred and five euros.
>
> I: Explain that again.
>
> S1: Two hundred and five euros because from one hundred to two hundred is one hundred, one hundred and five plus one hundred makes two hundred and five.

Table 6.10 shows that all students made a IR1 mistake type, adding the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable. S6, for instance, after answering a number of specific questions appropriately, when asked how much money the grandson would have after five Sundays replied appropriately: €10. The conversation transcribed below is an example of inappropriate IR1 response.

> I: And after eight Sundays?
>
> S6: 18
>
> I: Why? How did you figure that? […]
>
> S6: Well […] since after five Sundays I have 10 euros, after eight Sundays, well 10 plus 8, 18.

All the other types of inappropriate responses were observed for only one or two students. Two students (S7 and S8) replied meaninglessly (IR2) and two (S3 and S7) added 5 to the last known amount of the dependent variable (IR3).

Inappropriate response IR2 was recorded for S8 only. When asked by the interviewer for the amount of euros after one Sunday, this pupil replied "ten". The pupil not only answered inappropriately, but failed to justify that meaningless reply. S3, in turn, exemplified an inappropriate response in the following extract. After being asked how much money would be in the chest after 15 Sundays and answering 20, the conversation proceeded as follows.

> I: […] then 20 Sundays go by: how much money do you have after those 20?
>
> S3: Twenty-five euros.
>
> I: How do you know that, S3?

S3: I had twenty (pointing to the value of the dependent variable) and here I had five more (pointing to the five euros on the table) and I added twenty to the five, that makes twenty-five.

As that extract shows, to find the amount for 20 Sundays, S3 added 5 to the last known value of the dependent variable (20), which came to 25. Although the result was correct, the procedure and hence the answer were inappropriate.

Three types of inappropriate responses were observed in one student each: failing to consider the constant in the function (IR4, S2); arithmetic mistake (IR5, S6); and no reply (IR6, S8). When the interviewer asked S2 how much money they would have after 15 Sundays, the answer was: "fifteen euros […] if I had thirteen (last known value of the dependent variable) and two more Sundays go by, it would be fifteen". This pupil equated the amount of the independent variable by adding 2 to the last known value of the dependent variable (13 plus 2, because the independent variable was 15), construing the problem as the identity function instead of using the constant value of the function (IR4). One of S6's inappropriate responses was classified as IR5. After the interviewer asked the student how much money they would have after 77 Sundays, the answer was 82. The conversation that followed is transcribed below.

I: And if I tell you that for instance one hundred and twenty Sundays go by, how would you figure out how much money you've saved up? (writing down the figure and showing it to the pupil).

S6: One hundred and eleven.

I: One hundred and eleven: how did you figure that?

S6: The difference was thirty-nine, so I added thirty-nine to eighty-two and I got one hundred and eleven.

That extract showed that S6 used the changing values of the variables, but the arithmetic was wrong. First he miscalculated the difference between 120 Sundays (value of the independent variable in the question) and 77 Sundays (preceding value of the independent variable) as 39. He then added 39 to 82 (last known amount of the dependent variable) again miscalculating to find 111.

Pupils' post-intervention replies

As explained in the methodology section, the interviewer intervened when she identified inappropriate responses. Her interventions, along with the students' post-intervention responses, are described below.

Interviewer's interventions

The six types of interventions identified were: (a) asking questions to remind students of problem elements (constant amount or relationship between Sundays and amount of money, I1); (b) resorting to previous or new specific consecutive or non-consecutive values (I2); (c) resorting to (concrete or symbolic) representation (I3); (d) resorting to the correspondence relationship (I4); (e) removing symbolic representations (written records) (I5); and (f) replacing a specific number with a smaller number (I6). Table 6.11 lists these interventions and the pupils with whom these were used.

Table 6.11. *Interviewer's interventions*

	Intervention						
Pupil	I1	I2	I3	I4	I5	I6	Total
S1		X	X				2
S2	X	X	X		X		4
S3	X	X	X				3
S4	X	X	X	X			4
S5	X	X	X				3
S6	X	X	X				3
S7	X	X	X			X	4
S8	X	X	X				3
Total	7	8	8	1	1	1	26

Note: I1= asking questions to remind students of problem elements: (a) constant amount or (b) relationship between Sundays and amount of money; I2= resorting to previous or new specific consecutive or non-consecutive values; I3= resorting to concrete or symbolic representation; I4= resorting to the correspondence relationship; I5= removing symbolic representations (written records); and I6= replacing a specific number with a smaller number.

The first three types of intervention were used with all or nearly all students. The interviewer resorted to previous or new specific consecutive or non-consecutive values (I2) and to concrete or symbolic representations (I3) with all pupils. She reminded all pupils except S1 of the elements of the problem (I1). She used all three types of intervention with S4. When she asked S4 how much money would be saved after 40 Sundays, the reply was inappropriate. The following extract illustrates the types of intervention.

> I: Think it over, S4. How much did she give you at first?
>
> S4: Five.
>
> I: Five, that means at the start we always have five, right?
>
> S4: Yes.

In the above extract, the interviewer intervened by asking S4 a question about the constant amount (€5) in the function (I1), helping the pupil to remember that amount. Later (see extract below), she intervened by asking S4 about specific previous values (I2).

> I: You had five and you added one, right? (S4 nods assent). OK, this seven (I points to a 7 on the sheet of paper), where did it come from?
>
> S4: Well five plus two.
>
> I: OK (writing down the pupil's answer). And this eight? (pointing to an 8 on the sheet of paper).
>
> S4: From five plus three.
>
> I: Ah (recording the pupil's reply). And nine?
>
> S4: Five plus four.
>
> I: And ten? (while pointing to 10 written on the sheet of paper).
>
> S4: Five plus five.
>
> I: And eleven? (while pointing to 11 written on the sheet of paper).
>
> S4: Five plus six.
>
> I: And twelve? (while pointing to 12 written on the sheet of paper).
>
> S4: Five plus seven.

The interviewer also wrote down the specific instances to which the pupil had replied appropriately and, in parentheses, symbolically recorded (I3) the operation that S4 had acknowledged performing (see Figure 6.15) (I4.)

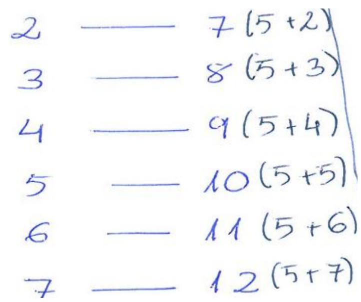


Figure 6.15. Examples of I3 and I4

The following extract illustrates intervention I4.

> I: Do you see something that we're always doing? (pointing to Figure 6.15)
>
> S4: Yes.
>
> I: What?
>
> S4: Counting five by five […].
>
> I: What is it that's always the same, S4?
>
> S4: The five.
>
> I: The five. Why is it always the same?
>
> S4: Because of the day she gave me five.
>
> I: […] Let's think about forty again.
>
> S4: At first five […], well, forty, makes forty five.

The extract shows that S4 replied appropriately when asked for the amount saved after 40 Sundays (specific instance to which the pupil initially gave an inappropriate answer). This pupil identified a correspondence relationship.

Intervention types I4, I5 and I6 were used with one pupil each.

Pupils' post-intervention responses

Three types of appropriate post-intervention responses were identified: (a) appropriate response, no functional relationship identified (AR1); (b) appropriate response, correspondence relationship identified (AR2); and (c) appropriate response, covariation relationship identified (AR3).

Four types of inappropriate post-intervention responses were identified: (a) adding the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable (IR1); (b) meaningless reply (IR2); (c) no reply (IR6); and (d) equating the number of euros to the number of Sundays and adding the two amounts (IR7). The extract below illustrates the fourth type of inappropriate response, which had not been detected prior to the interviewer's intervention.

I: If twenty Sundays go by […], then how much do you have altogether?

S8: Forty.

I: Yeah? Why?

S8: Because twenty plus twenty makes forty.

I: And why do you add twenty plus twenty?

S8: Because we have twenty coins and twenty Sundays makes forty.

Students' post-intervention responses are given in Table 6.12 by type (appropriate or inappropriate).

Table 6.12. *Typology of pupils' post-intervention responses*

	Type of responses								
	Appropriate				Inappropriate				
Pupil	AR1	AR2	AR3	Total	IR1	IR2	IR6	IR7	Total
S1		X		1					
S2	X	X		2	X				1
S3	X	X*		2	X	X			2
S4	X	X		2	X	X			2
S5			X	1					0
S6	X	X*	X	3	X	X	X		3
S7	X		X	2	X	X		X	3
S8	X	X*		2				X	1
Total	6	6	3	15	5	4	1	2	12

Note: AR1= appropriate response, no functional relationship identified; AR2= appropriate response, correspondence relationship identified; AR3= appropriate response, covariation relationship identified; IR1= adding the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable; IR2= meaningless reply; IR6= no reply; and IR7= equating the number of euros to the number of Sundays and adding the two amounts. *= The pupil generalized the functional relationship

As Table 6.12 shows, all the pupils replied appropriately at least once, and six replied inappropriately at least once.

The two most frequently observed appropriate responses were AR1, in which no functional relationship was identified (six pupils) and AR2, in which correspondence was identified. Three pupils identified the covariation relationship (AR3).

Table 6.12 shows that five students, S2, S3, S4, S6 and S7, summed the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable, making the type IR1 mistake. Four pupils (S3, S4, S6 and S7) replied meaninglessly (IR2) and two (S7 and S8) equated the number of euros to the number of Sundays and summed the two amounts. One pupil (S6) failed to reply.

DISCUSSION

The types of pre- and post-intervention responses recorded for pupils are compared in the following discussion.

Comparison of appropriate pre- and post-intervention responses

Table 6.13 lists the pupils who replied appropriately both before and after the interviewer's intervention.

Table 6.13. *Comparison of appropriate pre- and post-intervention responses*

	Pre-intervention responses				Post-intervention responses			
Pupil	AR1	AR2	AR3	Total	AR1	AR2	AR3	Total
S1	X	X*	X	3		X		1
S2	X	X*		2	X	X		2
S3	X			1	X	X*		2
S4	X		X	2	X	X		2
S5	X	X*		2			X	1
S6	X			1	X	X*	X	3
S7				0	X		X	2
S8	X			1	X	X*		2
Total	7	3	2	12	6	6	3	15

Note: AR1 = appropriate response, no functional relationship identified; AR2 = appropriate response, correspondence relationship identified; AR3 = appropriate response, covariation relationship identified. * = Generalization

The three types of appropriate responses identified were observed before and after the interviewer's intervention. That the number of appropriate post-intervention responses was greater than or equal to the number of appropriate pre-intervention answers attested to consistency in the students' replies. The data in Table 6.13 must be interpreted bearing in mind that the interviewer only intervened when the pupils responded inappropriately.

AR1 (appropriate response, no functional relationship identified) was the type of reply most frequently observed both before (seven pupils) and after (six pupils) intervention. It was followed by the replies in which the correspondence relationship was identified (nine students). The least frequent type of appropriate response was AR3, in which the covariation relationship was identified, with a total of five pupils before and after intervention.

More appropriate responses (15) were observed after the interviewer's intervention than before (12). More specifically, five pupils (S2, S3, S4, S6, and S8) provided appropriate answers without identifying the functional relationship (AR1); two (S1 and S2) responded appropriately and identified the correspondence relationship (AR2); one (S2) replied appropriately both identifying (AR2) and not identifying (AR1) the correspondence relationship. Both before and after the interviewer's intervention, the pupils who generalized did so in terms of the correspondence relationship.

Table 6.13 shows that in their appropriate replies, more pupils identified the functional relationship after than before intervention. Three pupils identified correspondence before and six after intervention, and two pupils identified covariation before and three after. All three types of appropriate responses were recorded for some students after intervention, a circumstance not observed in the pre-intervention findings. More specifically: when replying appropriately, pupil S7 identified no functional relationship or the covariation relationship; four pupils (S3, S4, S6 and S8) responded appropriately and identified the correspondence relationship, while three of them (S3, S6 and S8) generalized that relationship. Three other pupils (S5, S6 and S7) answered appropriately and identified the covariation relationship.

Comparison of inappropriate pre- and post-intervention responses

Table 6.14 lists the pupils who replied inappropriately before and after the interviewer's intervention.

Table 6.14. *Comparison of inappropriate pre- and post-intervention responses*

	Inappropriate pre-intervention responses							Inappropriate post-intervention responses				
Pupil	IR1	IR2	IR3	IR4	IR5	IR6	Total	IR1	IR2	IR6	IR7	Total
S1	X						1					0
S2	X			X			2	X				1
S3	X		X				2	X	X			2
S4	X						1	X	X			2
S5	X						1					0
S6	X				X		2	X	X	X		3
S7	X	X	X				3	X	X		X	3
S8	X	X				X	3				X	1
Total	8	2	2	1	1	1	15	5	4	1	2	12

Note. IR1 = adding the amount of the independent variable to the last known amount of the dependent variable; IR2 = meaningless reply; IR3 = adding 5 to the last known amount of the dependent variable; IR4 = failing to consider the constant in the function; IR5 = arithmetic mistake; IR6 = no reply; and IR7 = equating the number of euros to the number of Sundays and summing the two amounts.

As the data in Table 6.14 show, more (six) types of inappropriate replies were identified prior to the interviewer's intervention than after (four). IR1, IR2 and IR6 were observed both before and after. In both situations, IR1 was the response most and IR6 the least frequently observed. IR3, IR4 and IR5 were identified only before intervention. IR7 was observed only after the interviewer intervened.

More specifically, before and after the interviewer's intervention, five pupils (S2, S3, S4, S6 and S7) added the amount of the independent variable to the last known value of the dependent variable (IR1), and one of them (S7) answered meaninglessly. Response type IR1 was observed in fewer (five) pupils after intervention than before (all eight). Response type IR2 was recorded for four pupils (S3, S4, S6 and S7) after intervention but for just two (S7 and S8) before.

CONCLUSIONS

This study presents a typology of pre- and post-intervention responses observed in second-graders engaging in a generalization task in a classroom algebra context. Appropriate responses identifying at least one correspondence or covariation relationship were recorded for all eight pupils. In other words, all the pupils in the sample, although just second-graders, were able to solve tasks involving algebraic notions in terms of functional relationships. That finding is in line with earlier researchers' suggestions (e.g., Blanton & Kaput, 2004; Brizuela & Blanton, 2014; Cañadas, et al., 2016; Morales et al., in press; Stephens et al., 2012; Warren, 2005).

Correspondence was recognized in a larger number of appropriate pre- and post-intervention responses than covariation, an indication that these pupils could identify the former more readily than the latter. That is consistent with findings reported by authors such as Morales et al (in press) and Pinto, Cañadas, Moreno and Castro (2016). Two pupils (S1 and S5) replied appropriately and identified correspondence and covariation in different instances, supporting the idea that a pupil can engage in a functional thinking task and identify both relationships, as reported by Morales et al (in press). Most of the pupils generalized, drawing from the correspondence relationship. That finding is also in line with results reported by Pinto and Cañadas (2017a) for 10- and 11-year olds. The present findings consequently suggest that it is easier for pupils in different elementary grades to generalize the correspondence than the covariation relationship in tasks involving functions of the type $f(x)=x+m$.

The variation in the typology of inappropriate responses affords insight into early elementary grade pupils' mathematical thinking. All these pupils added the amount of the independent variable to the last known value of the dependent variable (IR1) at least once during the interview. That normally occurred when they were confronted with non-consecutive specific values, even when they had replied appropriately to prior specific questions. The inference is that performing a specific non-consecutive task may entail difficulties for second-graders, a difficulty also observed by Warren (2005) with fifth-graders (9- to 10-year olds). Another possible explanation is that, given their familiarity with situations that call for adding two values, these pupils may have interpreted the amounts as specific instances to be summed rather than as variable quantities, as different meaning assigned to letters in algebra context.

The typology of pupils' appropriate and inappropriate responses afforded a basis for an in-depth exploration of how second-graders broach a generalization problem in a functional relationship context. The findings showed that, prior to the interviewer's intervention, all the high and medium and one of the low performers (S8) replied appropriately without identifying correspondence, but only high (S1 and S2) and medium (S4 and S5) performers replied appropriately and identified the functional relationship. Three (all but S4) also generalized the correspondence relationship. The foregoing might suggest that for high and medium performers, unlike for low performers (S7 and S8), identifying the functional relationship and generalizing correspondence is not particularly difficult. Neither of the low performers identified the functional relationship or generalized prior to intervention and both exhibited more types of inappropriate replies than their classmates.

The interviewer was observed to vary her intervention types, which were found to elicit appropriate responses from all three levels of performers, helping them to identify correspondence and covariation as well as to generalize. In particular, as shown in Table 6.13, one high performer (S3), one medium performer (S6) and one low performer (S8), while responding appropriately prior to intervention, failed to identify the functional relationship, which they did identify after the interviewer intervened. S6, a medium performer, not only responded appropriately but identified both correspondence and covariation. These pupils also generalized the correspondence relationship. That suggests that irrespective of academic performance, after intervention a pupil may be able to identify functional relationships and generalize correspondence.

Although the study did not aim to conduct a performance-based analysis, a certain relationship appears to emerge between response types and pupil performance (high-medium-low) as determined during selection. For instance: (a) the sole pupil who failed to reply to a question was a low performer; (b) the widest variety of initially inappropriate responses was observed among low performers; and (c) the sole pupil who identified covariation prior to intervention was a high performer. These findings seem to indicate that high and low performers conform to a certain profile depending on their responses in this type of tasks. That would not apply to medium performers, however, whose replies sometimes concurred with those of high and at others with those of low performers.

By way of conclusion, this exploratory study shows that early elementary school pupils can identify certain correspondence and covariation relationships when confronted with a generalization task in a functional context. Nonetheless, pupils tend to make a number of mistakes and encounter difficulties when performing generalization tasks in algebraic contexts, in spite of the assistance provided by the interviewer.

The limitations to this study and areas for future research include the need to work with larger samples and in different socio-cultural contexts. Such research would determine whether the reply typologies observed here can be generalized. In this study, the same person interviewed all the pupils. Future studies involving different interviewers could focus on analyzing both the effects of the interviewer and the type of assistance provided. Given the range of interviewer interventions observed and their possible effect on pupils, the foregoing would open a promising line of research. The extent to which pupils with different skill levels benefit from the same type of educational assistance is yet another area of study worthy of pursuit.

As mistakes and difficulties are inherent in and necessary to learning (Kapur, 2008), a full understanding of these factors is imperative if pupils are to be helped to build from them.

Given that the role played by the interviewer in this study largely mirrors mathematics teachers' classroom endeavors, the present findings may furnish insight into the types of intervention that would be of greatest benefit to students. They might also provide grounds for reflection on pre- and in-service teacher training in the area of children's algebraic reasoning.

Acknowledgements

This study was funded by Spain's Ministry of the Economy and Competitiveness under National R&D Plan projects EDU2013-41632-P and EDU2016-75771-P, as well as by CONICYT PFCHA grant 72150072.

REFERENCES

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen & A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International*

Group of the Psicology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin, Germany: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B., & Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria [The development of elementary students' algebraic thinking]. *Revista de Psicología (UNLP), 14*, 37-57.

Cañadas, M., Brizuela, B., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Cañadas, M., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades [An approach to the conceptual framework and background of functional thinking in early years]. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, Spain: Comares.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics.* Washingon, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Reviewed in: http://www.corestandards.org/Math/

Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, VI: PME.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational studies in mathematics*, *56*(1), 39-65.

Dominik, K., & Bernd, K. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM*, *37*(3), 240-245.

Fernández, M. (2010). Enseñanza a partir de la indagación y el descubrimiento [Teaching through investigation and discovery]. In C. Moral (Coord.), *Didáctica: teoría y práctica de la enseñanza* (pp. 243-270). Madrid, Spain: Pirámide.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón [About didactical analysis of proportion]. In E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 165-174). Granada, Spain: Comares.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación* [Foundations of researh methodology]. México, DF: Mcgraw-Hill.

Hidalgo, D. & Cañadas, M. C. (2017). Proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: respuestas inadecuadas e intervenciones de la entrevistadora. [Sixth graders' generalization process: inappropiate responses and interviewer's interventions] *Paper presented at Group of Numerical and Algebraic Thinking in the XXI simposio de investigación en Educación Matemática de la SEIEM*. Zaragoza, Spain.

Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction, 26*, 379-424.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: LEA.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. [Thinking mathematically] Barcelona, Spain: Labor.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* [Royal Decree 126/2014, of February the 28th, which stablishes the basic curriculum for Elementary Education] (Vol. 52, pp. 19349-19420). Madrid, Spain: Autor.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C., & Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137–1156.

Morales, R. Cañadas, M. C., Brizuela, B. & Gómez, P. (en prensa). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. [Functional relationships and strategies of first graders in a functional context] *Enseñanza de las Ciencias*.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. [Adquisition of algebraic language and errors identification in algebra in 12-14 year-old students] Documento no publicado. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, Spain.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017a). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo [Structures and generalisation in third and fifth year of primary school: A comparative study]. In J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.*)*, *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, Spain: SEIEM

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2017b). Generalization in fifth graders within a functional approach. In B. Kaur, W. Kin Ho, T. Lam Toh, & B. Heng Choy (Eds.), *Proccedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapore: PME.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Ruano, R. M., Socas, M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. [Secondary students' error analysis and classification in formal substitution, generalization and modelling process in algebra] *PNA, 2*(2), 61-74.

Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 491-508.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. [Difficulties, obstacles and errors in the learning of mathematics at Secondary education]. In Rico, L. (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, Spain: Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. [Difficulties and errors in the learning of mathematics. Analysis from a lógico-semiotic approach] En M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, Spain: SEIEM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York, NY: Routledge.

Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. In L. R. Van Zoest, J. J. Lo, & J. L. Kratky (Eds.), *34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kalamazoo, MI*.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Ureña, J., Molina, M., & Ramírez, R. (2017). Manifestación de generalización en estudiantes de Primaria e influencia de estímulos durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional. [Evidence of generalization in Elementary students and influence of stimuli when solving a task that involve a functional relationship] *Paper presented at Group of Numerical and Algebraic Thinking in the XXI simposio de investigación en Educación Matemática de la SEIEM*. Zaragoza, Spain.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: Program Committee.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*, 89-100.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

En este capítulo mostramos las conclusiones obtenidas con la elaboración de esta tesis doctoral. Para las conclusiones consideramos cuatro aspectos: (a) logro de objetivos de investigación, (b) logro de objetivos del proyecto de investigación, (c) otros logros, y (d) limitaciones de la investigación y líneas de continuidad.

LOGRO DE OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de esta investigación fue "describir cómo abordan tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años". Para la consecución de este objetivo general nos propusimos seis objetivos específicos, los que a continuación mencionamos y describimos cómo respondimos a cada uno de ellos en los tres estudios realizados en esta tesis doctoral. En la figura 7.1 mostramos los objetivos logrados en cada estudio.

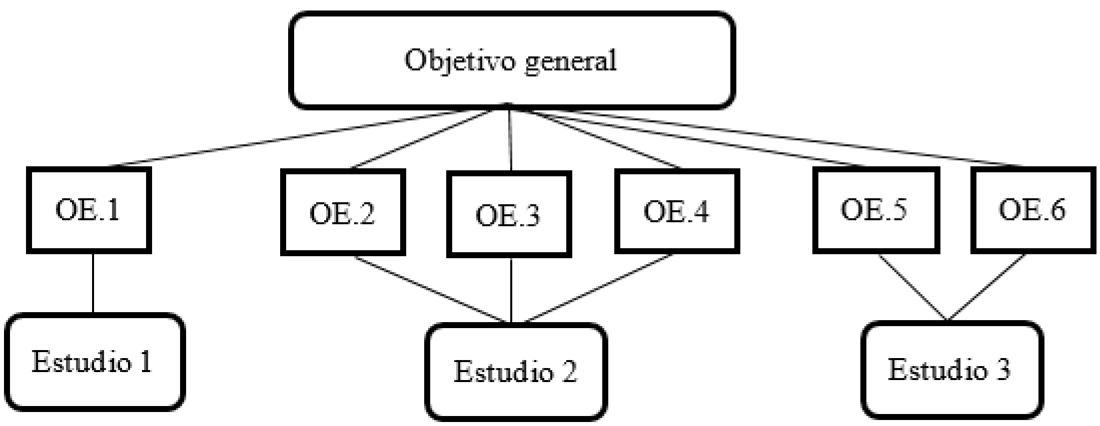


Figura 7.1. Objetivos específicos logrados en cada estudio

Nota. OE. N°= Número de objetivo específico

Objetivo específico 1

El primer objetivo específico (OE.1) de investigación es: "indagar sobre los tipos de patrones que generan dos estudiantes de 6-7 años en la continuación de seriaciones" y lo abordamos en el estudio 1. Respondemos a este objetivo de acuerdo a un nivel teórico y a un nivel empírico. A nivel teórico elaboramos diferentes tareas de patrones cualitativos (lógicos) que estudiantes de 6-7 años podían abordar. Para las tareas consideramos criterios diferentes que surgieron del marco teórico (Capítulo 2) y que se desprendieron de las características de los patrones cualitativos. Los tres criterios empleados fueron: (a) atributos, (b) número de elementos en el núcleo y (c) variación de atributos entre elementos. Además, incluimos en la elaboración de las tareas niveles de complejidad diferentes los cuales tuvieron que ver con la variación de atributos entre los elementos del núcleo de los patrones donde a mayor variación de atributos entre los elementos del núcleo mayor complejidad en los patrones cualitativos (Threlfall, 1999; Zazquis Liljedahl, 2002). Mostramos las tareas que diseñamos en la tabla 5.1, en Capítulo 5

A nivel empírico dimos respuesta a este objetivo describiendo las respuestas de las dos estudiantes cuando abordaron las tareas de patrones cualitativos propuestas. En las respuestas de las estudiantes distinguimos diferentes tipos de patrones cualitativos: reiterativos y lógicos, que identificaron y utilizaron para continuar seriaciones. Con base en estos dos tipos de patrones las estudiantes generaron dos tipos de seriaciones: reiterativas y no reiterativas, respectivamente.

Además describimos la forma en que las estudiantes continuaban la seriaciones de acuerdo al patrón identificado. Por ejemplo, cuando las estudiantes continuaban un patrón reiterativo repetían constantemente los dos, o más, elementos iniciales, manteniendo fijo los atributos de esos objetos, mientras que cuando continuaban un patrón lógico lo hacían manteniendo fijo unos atributos y variando otros de acuerdo a la tarea propuesta.

Objetivo específico 2

El objetivo específico 2 (OE.2) es “describir los tipos de relaciones funcionales que identifican estudiantes de 6 años de edad en una tarea que involucra relaciones funcionales lineales”. Este objetivo específico lo abordamos en el estudio 2. Con base en el marco teórico relativo a patrones cuantitativos obtuvimos unas categorías que ayudaron a describir el trabajo de los estudiantes sujetos de investigación del estudio 2. Estas categorías atendieron a la identificación o no de una relación funcional, distinguiéndola entre relación funcional de correspondencia y relación funcional de covariación. En el estudio 2 dimos cuenta que estudiantes de 6 años identificaron relaciones de funcionales de correspondencia y covariación, y en algunos casos ambas relaciones funcionales (ver tabla 6.6, Capítulo 6).

Además, dimos cuenta que la relación funcional más identificada por los estudiantes fue la correspondencia, mientras que la relación de covariación fue la menos identificada. Esto último indica que la relación de correspondencia es más fácil de ser identificada por estudiantes de 6 años. Además, describimos cómo los estudiantes manifestaron una relación funcional. Por ejemplo, los estudiantes que identificaron la correspondencia lo hicieron sumando el valor constante de la función con el valor de la variable independiente otorgada al estudiante por medio de un caso particular, mientras que la relación de covariación los estudiantes observaron el cambio existente entre los valores de la variable independiente estableciendo así una diferencia la cual sumaron al último valor de la variable dependiente. Destacamos que al dar respuesta a este objetivo específico mostramos evidencia útil para futuros estudios y para la práctica docente relativa a cómo un estudiante de 6 años aborda una tarea de relación funcional.

Objetivo específico 3

El objetivo específico 3 (OE.3) es "describir las estrategias que emplean estudiantes de 6 años de edad en una tarea que involucra relaciones funcionales lineales". Este objetivo específico lo abordamos en el estudio 2. Para abordar las estrategias de los estudiantes inicialmente consideramos los antecedentes de investigación, relativos a las estrategias de estudiantes en tareas de relaciones funcionales y los trabajos de Cañadas y Molina (2016) sobre estrategias en problemas aritméticos. A partir de estas construimos unas categorías que nos ayudó a analizar las respuestas de los estudiantes. De esta manera, distinguimos diferentes tipos de estrategias que los estudiantes pusieron de manifiesto, tales como: respuesta directa; conteo en la que distinguimos conteo total y contar desde el mayor sumando; operatoria en la que distinguimos hechos numéricos recordados, descomposición de números y modificación de los datos iniciales y compensando; y generaliza (ver la tabla 6.6, Capítulo 6). Las estrategias manifestadas por los estudiantes que hemos descrito en esta investigación dan cuenta de la diversidad de forma en que los estudiantes pueden abordar una tareas de relaciones funcionales lineales de la forma $f(x)=x+5$.

Objetivo específico 4

El objetivo específico 4 (OE.4) es "establecer vínculos entre las relaciones funcionales que identifican estudiantes de 6 años en una tarea de involucra relaciones funcionales lineales y las estrategias que emplean". Este objetivo lo abordamos en el estudio 2. Este objetivo lo respondemos al vincular la relación funcional identificada por el estudiante y la estrategia empleada en cuando identificaba una relación funcional (ver tabla 6.8, Capítulo 6). Pusimos de manifiesto que las estrategias contar desde el mayor sumando (conteo), las estrategias de operatoria (todas las encontradas en este estudio) y la estrategia generaliza tuvieron vinculación con la relación funcional de correspondencia, mientras que la estrategia contar desde el mayor sumando y las estrategias de operatoria hechos numéricos recordados tuvieron vinculación con la relación funcional de covariación. De esta manera decimos que, en un contexto de tareas de funciones líneas tales como $f(x)=x+5$, hay estrategias de conteo y operatoria que se vinculan a relaciones funcional de correspondencia y covariación. Los indicadores para establecer dicha vinculación quedan de manifiesto en las descripciones del trabajo de los estudiantes en este estudio (ver resultados estudio 2, Capítulo 6). Además, pusimos de manifiesto que la generalización solo se vinculó a la relación funcional de correspondencia, lo que indica que esta relación funcional es más accesible a ser generalizada por los estudiantes.

Objetivo específico 5

El objetivo específico 5 (OE.5) es "describir las respuestas apropiadas e inapropiadas de estudiantes antes de cualquier intervención del entrevistador". Este objetivo específico lo abordamos en el estudio 3. Respondemos a este objetivo específico distinguiendo las respuestas de los estudiantes a las cuestiones planteadas entre respuestas apropiadas e inapropiadas, antes de que tuvieran una intervención de parte de la entrevistadora (ver tabla 6.10). Entre las respuestas adecuadas distinguimos tres tipos: (a) sin identificación de una relación funcional, (b) identificación de relación funcional de correspondencia, e (c) identificación de relación funcional de covariación. Por su parte, las respuestas inapropiadas las distinguimos en diferentes tipos con ayuda de un sistema de categorías que construimos a partir de los propios datos y quedan de manifiesto en la tabla 6.10 y 6.12, del Capítulo 6.

Objetivo específico 6

El objetivo específico 6 (OE.6) es"describir las respuestas apropiadas e inapropiadas de los alumnos después de la intervención del entrevistador". Este objetivo específico lo abordamos en el estudio 3. Antes de explicar cómo logramos responder a este objetivo, describimos la intervención de la profesora-investigadora (entrevistadora) cuando el estudiante manifestó una respuesta inapropiada. Observamos en el estudio 3 que la profesora-investigadora intervino de diferentes modos. Para categorizar estas intervenciones empleamos un sistema de categorías que construimos a partir de los propios datos de la investigación. Así, obtuvimos seis tipos de intervenciones que efectuó la entrevistadora (ver tabla 6.11, Capítulo 6). Estas intervenciones destacaron en el modo en que cada una de ellas favoreció para que los estudiantes manifestaran respuestas apropiadas. Después de la intervención de la entrevistadora los estudiantes manifestaron tres tipos de respuestas apropiadas al igual que antes de la intervención de la profesora-investigadora. Además, pusimos de manifiesto que con la intervención de la entrevistadora fueron más los estudiantes que manifestaron respuestas apropiadas con identificación de relación funcional de correspondencia y covariación (ver tabla 6.12, Capítulo 6). Lo anterior indica que en una tarea de relaciones funcionales la intervención es fundamental para conseguir resultados favorables en los estudiantes. En cuanto a las respuestas inapropiadas manifestadas por los estudiantes, observamos que a pesar de la intervención de la entrevistadora continuaban manifestando este tipo de respuestas. En total distinguimos cuatro tipos de respuestas inapropiadas (ver tabla 6.13, Capítulo 6). De estos cuatro tipos de respuestas, tres de estos, los estudiantes ya los habían manifestado sin intervención de la entrevistadora, mientras que distinguimos un nuevo tipo de respuesta inapropiada con intervención de la entrevistadora.

LOGRO DE OBJETIVOS DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

A continuamos describimos cómo respondemos con esta investigación a los objetivos del proyecto de investigación donde se enmarca este estudio. Abordamos con este estudio tres objetivos específicos de cuatro que contempló el proyecto de investigación.

Uno objetivo específico de los cuatro del proyecto de investigación fue “diseñar tareas que permitan poner de manifiesto y promover el desarrollo del pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria” (Cañadas y Molina, 2013, p. 13). Las tareas propuestas en los estudios 2 y 3 relativas a la cuidadora de animales, y la tarea de la hucha fueron pertinentes y adecuadas para estudiantes de edades entre 6-7 años. Con estas tareas motivamos e instamos a que los estudiantes se centraran en cómo una cantidad se relaciona con otra. De este modo, los estudiantes que fueron capaces de establecer relaciones existentes entre ambas variables de las tareas tales como la correspondencia y la covariación, dejando así en evidencia pensamiento funcional. Este objetivo de investigación lo abordamos en el estudio 2 y 3.

Observamos que el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) utilizado en la construcción de las preguntas de las tareas favoreció que los estudiantes llegasen a la generalización de la relación funcional. Los estudiantes respondieron inicialmente casos particulares diversos hasta llegar a la generalización.

Es destacable que la función $f(x)=x+5$ implicada en las tareas no supuso una dificultad para estudiantes de estas edades. Ellos se involucraron con esta función aunque no identificaran la relación funcional inmediatamente. El material concreto empleado en la tarea fue útil para la introducción del tema, además motivó y permitió que los estudiantes operaran con ellos y favoreció para que los estudiantes se centraran en los valores de ambas variables implicadas en la tarea.

Un segundo objetivo del proyecto de investigación fue “diseñar e implementar un experimento de enseñanza en un curso de educación primaria dirigido a recabar información que permita caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes y su evolución a lo largo del trabajo en el aula” (Cañadas y Molina, 2013, p. 13). Mostramos en este trabajo un experimento de enseñanza en primero de Educación Primaria que contempló cinco sesiones de trabajo. Por medio de este experimento de enseñanza recabamos información útil sobre cómo los estudiantes de entre 6-7 años abordaron tareas que implicaron relaciones funcionales. Ponemos de manifiesto que en todas las sesiones estos estudiantes manifestaron estrategias diversas y relaciones funcionales, y generalizaron la relación funcional implicada en las tareas propuestas. Lo anterior quedó en evidencia en el estudio 2 de esta investigación donde analizamos los datos de las sesiones 2 y 3 del experimento de enseñanza. Además, en Morales et al (2016) se pueden encontrar resultados provenientes de las sesiones 4 y 5 del experimento de enseñanza que muestran las relaciones funciones identificadas, y las estrategias empleadas, por los estudiantes.

El tercer objetivo del proyecto que abordamos parcialmente con esta investigación fue “describir las estrategias que emplean los estudiantes de educación primaria cuando abordan tareas que pretenden poner de manifiesto y promover su pensamiento funcional (Cañadas y

Molina, 2013, p. 13). Ayudamos a conseguir este objetivo de modo que mostramos a partir de la información de las sesiones de clases del experimento de enseñanza las estrategias que manifestaron los estudiantes cuando abordaron tareas de relaciones funcionales (ver estudio 2). Identificamos que los estudiantes de edades de 6-7 años son capaces de emplear estrategias diferentes cuando se les propone una tarea de relación funcional como $f(x)=x+5$. En este trabajo encontramos que los estudiantes abordan estrategias relativas a: conteo, operatoria y generalización. Además, vinculamos las estrategias con las relaciones funcionales identificadas por los estudiantes. Encontramos que las relaciones funcionales de correspondencia y covariación se relacionaron con estrategias de conteo (contar desde el mayor sumando) y con estrategias de operatorias (hechos numéricos recordados, descomposición de números y modificación de los datos iniciales y compensando). Por último, observamos en el estudio 2 que la estrategias generaliza solo estuvo vinculada a la relación de correspondencia lo que indica que a relación de correspondencia es más factible a ser generalizada por estudiantes de estas edades.

OTROS LOGROS

A continuación mostramos las contribuciones a la investigación, las aportaciones relacionadas con esta tesis doctoral y las implicaciones a la docencia, que tiene la información obtenida en esta tesis doctoral relativa a cómo estudiantes de 6-7 años de edad abordan tareas de patrones cualitativos y cuantitativos.

Contribuciones a la investigación

La investigación que aquí presentamos, complementa nuestros antecedentes. En cuanto a los antecedentes con patrones cualitativos obtuvimos resultados que confirman lo que han encontrado autores como Rustigian (citado por Threlfall, 1999) sobre la capacidad para reproducir patrones reiterativos. Por su parte, en esta investigación abarcamos tareas de patrones cualitativos lógicos los cuales no encontramos en nuestros antecedentes y las existentes hicieron mención a patrones reiterativos. Lo anterior, hace que las tareas de la investigación que aquí se presentó sean novedosas para la investigación en patrones cualitativos.

Por su parte, con respecto a los patrones cuantitativos, dimos cuenta que estudiantes de primeras edades educativas (6-7 años) son capaces de involucrarse en tareas algebraicas de patrones de este tipo. Lo anterior confirma lo que investigadores como Blanton y Kaput (2004) y Cañadas et al (2016) han encontrado en estudiantes de estas edades sobre las capaces para identificar relaciones funcionales en tareas de patrones cuantitativos. Además, nuestros resultados son similares a los hallados en estudiantes de edades mayores a las que consideramos en esta investigación (p. ej., Pinto, Cañadas, Moreno y Castro, 2016; Stephens et al., 2012; Warren y Cooper, 2006) lo que muestra la factibilidad de incorporar elementos algebraicos a partir de los primeros cursos.

Esta investigación aporta evidencia empírica sobre cómo estudiantes de 6-7 años abordan tareas de patrones cualitativos y cuantitativos. De esta manera, obtuvimos distintos tipos de patrones que estudiantes de 6-7 años identifican, y diferentes estrategias que emplean. Lo anterior hace que esta investigación sea novedosa por la escasez de estudios centrados en esta temática en estudiantes de 6-7 años. Hemos puesto en evidencia que los estudiantes pueden abordar una tarea de patrones cualitativos y cuantitativos de maneras diferentes. Por ejemplo, en las tareas de patrones lógicos las dos estudiantes abordaron este tipo de tareas de dos maneras distintas. Una manera alude a la identificación de patrones reiterativos en los que consideraron distinto número de elementos en el núcleo y otra alude a la identificación de patrones lógicos. Con base en los dos patrones anteriores las estudiantes generaron seriaciones reiterativas y no reiterativas, respectivamente. En cuanto a las tareas de patrones cuantitativos los estudiantes las abordaron identificando, o no, relaciones funcionales de correspondencia y covariación. Además emplearon distintas estrategias como: conteo, operatoria y generaliza.

Esta investigación da cuenta que los estudiantes de 6-7 años generalizan la relación de correspondencia, coincidiendo con investigaciones previas como las de Blanton et al (2016) y Moss y McNab (2011) y en investigaciones previas con estudiantes de edades mayores (10-11 años) como la Pinto y Cañadas (2017a). El hecho anterior puede implicar que la relación funcional de correspondencia sea más accesible a ser generalizada por estudiantes de Educación Primaria.

Por su parte, aunque no fue nuestro objetivo de investigación, observamos en las respuestas de los estudiantes a las tareas de patrones cuantitativos, niveles de sofisticación de la generalización de la relación funcional de Blanton et al (2015). Por ejemplo, hubieron respuestas que se corresponden con el nivel más elemental *pre-estructual* como es el caso de A27, quien no estableció una relación funcional entre las cantidades covariables (ver líneas 1 a 8, estudio 2, capítulo 6). También hubieron respuestas (p. ej., la de A19) que se corresponden con niveles más sofisticados como *funcional general emergente*. Este alumno mostró elementos característicos de una generalización entre cantidades covariables, pero su representación de la relación fue incompleta, y le faltó mencionar la variable dependiente en la representación de su generalización (ver líneas 13 y 14, estudio 2, capítulo 6). En general, la gran mayoría de las respuestas de los estudiantes estuvieron en el nivel *función particular*, en el que solo se evidencian relaciones entre cantidades covariables para casos particulares. En ese nivel, los estudiantes fueron capaces de dar el valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente, pero sin llegar a generalizar la relación. Un ejemplo representativo de este nivel es la respuesta de A5, dado que, cuando se le preguntó por la cantidad de platos totales para seis perros, respondió: “once… porque hay seis perros y cinco, hay seis cacharros para la comida y cinco para el agua y sumándolos todos dan once”.

El reconocimiento de respuestas inapropiadas en el trabajo de los estudiantes cuando abordan tareas de patrones es un aporte a la línea investigación en *early algebra*, dado que generalmente la investigación en esta línea se ha centrado en las capacidades de los estudiantes relegando los errores y las dificultades que estos pueden manifestar. Las respuestas inapropiadas de parte de estudiantes de Educación Primaria suponen una línea de investigación interesante para futuras investigaciones considerando la importancia que estas tienen para la construcción de conocimiento (Kapur, 2008). Es importante destacar que los tipos de respuestas inapropiadas que identificamos en esta investigación pueden servir como un marco para futuras investigaciones que se centren en errores y dificultades en estudiantes cuando abordan tareas de patrones.

Otro aporte a la investigación que hacemos con la información de esta investigación son las intervenciones docentes. Las intervenciones docentes no es un tema que se haya investigado a cabalidad en *early algebra*, así lo dejan de manifiesto nuestros antecedentes en los que solo se destacan los trabajos de Warren (2005) y Hidalgo y Cañadas (2017). Lo anterior, indica que con este estudio aportamos información relevante a un tema poco explorado y que puede llegar a ser de interés para futuras investigaciones a partir de ahora. Respecto a lo anterior, con esta investigación aportamos un sistema de categorías que surgió de los propios datos y que permitieron analizar las intervenciones. Este sistema de categorías podría ser útil para el análisis de las intervenciones docentes tanto en una situación de clases o en un contexto de entrevistas como se hizo en esta investigación.

Aportaciones relacionadas con esta Tesis Doctoral

En este apartado mostramos los artículos realizados, las contribuciones a congreso realizadas y los seminarios impartidos, durante el periodo de realización de la tesis doctoral. Mostramos las contribuciones por año ascendentemente para reflejar el desarrollo del doctorando durante los cuatro años de formación.

Artículos de impacto realizados

Morales, R., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA, 11*(4), 233-252.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (en prensa). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*.

Cañadas, M. C., Morales, R. y Bautista, A. (en revisión). Second graders' functional thinking in a generalization task: types of responses, mistakes and interventions. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Contribuciones en actas de congresos

Morales R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Construcción de seriaciones en Educación Primaria: Un estudio de caso. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 401-411). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Morales, R. (2016). Functional relationships identified by first graders. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131-138). Szeged, Hungría: PME.

Morales, R. Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de

resolución de problemas que involucran funciones lineales. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX,* (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.

Morales, R. y Cañadas, M. C. (2016). Evidencia de elementos asociados al pensamiento funcional en currículo chileno de Educación Básica. En T. Ramiro-Sanchez y M. Ramiro (Coord), *Avances en Ciencias de la Educación y el Desarrollo, 2016* (pp. 119-126). Granada, España: Asociación Española de Psicología Conductual (AEPC).

Ramírez, R., Morales, R., Cañadas, M. C. y Del Rio, A. (en prensa). Cómo enseñar en primaria a "pensar con funciones". Taller presentado en *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM*. Madrid, España.

Cañadas, M. C., Molina, M., Moreno, A., Del Rio, Aurora., Morales, R. y Ramírez, R. (en prensa). Trabajo con funciones en educación primaria: una propuesta educativa y una línea de investigación. Comunicación presentada en *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM*. Madrid, España

Presentaciones a congresos

Morales R. y Cañadas, M. C. (2015, Septiembre). Pensamiento funcional en estudiantes de educación infantil y primero de educación primaria. Trabajo presentado en el Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico en el *XIX simposio de investigación en Educación Matemática de la SEIEM*. Alicante, España.

Morales, R. y Cañadas, M. C. (2017, Septiembre). Acciones que ayudan a alumnos de segundo de Educación Primaria cuando incurren en errores en una tarea de pensamiento funcional. Trabajo presentado en el Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico en el *XXI simposio de investigación en Educación Matemática de la SEIEM*. Zaragoza, España.

Seminarios impartidos

Morales, R. (2017, Noviembre). *Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales*. Seminario de investigación impartido en el

Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Documento no publicado.

Implicaciones para la docencia

En cuanto a los aportes a la docencia esta investigación brinda unas tareas interesantes que podrían ser aplicables a la enseñanza del álgebra en los cursos de primero y segundo de Educación Primaria. Como hemos visto en esta investigación, las tareas aquí propuestas promovieron pensamiento algebraico en estudiantes de 6-7 años, dado que los estudiantes identificaron distintos tipos de patrones y generalizaron relaciones funcionales elementos clave de este tipo de pensamiento. Por su parte, esta investigación muestra un repertorio de indicadores con los cuales el docente podría distinguir y evaluar las respuestas de sus estudiantes. El docente podría distinguir qué tipo de patrón ha identificado el estudiante y cuándo ha generalizado tal patrón, evidenciando así pensamiento algebraico en sus estudiantes.

Las respuestas inapropiadas que aquí se presentaron podrían ser un antecedente a tener en cuenta por el docente a la hora de planificar la enseñanza del contenido de patrones. Lo anterior permitiría al docente prever los posibles errores y dificultades que el estudiante podría manifestar y así generar posibles intervenciones que ayude a remediar tal error o dificultad. Las intervención docentes aquí mostradas podrían ser un recurso útil para que el docente ayude a remediar los errores y dificultades del estudiantes.

Por último, la información de esta investigación puede ser útil para el diseño de un proyecto de innovación curricular. El currículo español propone la introducción de nociones algebraicas en la enseñanza, sin embargo, poco se dice sobre la manera de hacerlo. Además, existen pocas orientaciones pedagógicas en cuanto a tareas, materiales y actividades para la enseñanza de contenidos algebraicos. Por tanto, esta investigación podría ser una base teórica y práctica interesante sobre la cual extraer tareas, materiales y actividades para promover el álgebra en los estudiantes de primeros cursos escolares.

LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN Y LÍNEAS DE CONTINUIDAD

Somos conscientes de que la investigación que realizamos presenta algunas limitaciones. En primer lugar, la muestra que hemos considerado: 2 estudiantes para el estudio 1, 30 estudiantes para el estudio 2 y 8 estudiantes para el estudio 3, y la forma en que la seleccionamos (intencional dada su disponibilidad), hace que los resultados no sean generalizables. Sin embargo, nos permitió profundizar en las respuestas y plantear una sólida base teórica importante para estudios futuros. En segundo lugar, el instrumento de recogida de datos relativos a los cuestionarios empleados en la sesiones 2 y 3 del experimento de enseñanza aportó escasa información sobre cómo los estudiantes abordaron las actividades propuestas. Los estudiantes respondieron a los cuestionarios con una cantidad concreta sin manifestar procedimientos y explicaciones. Lo anterior indica que los cuestionarios fueron una limitante para indagar en la resolución de las tareas por parte del estudiante. Además, los cuestionarios aportaron escasa información para responder a algunos objetivos de investigación., particularmente teniendo en cuenta la edad de los estudiantes y su capacidad para expresar sus razonamientos. Para estudios futuros se debe tener en cuenta la situación anterior. En tercer lugar en los estudios 2 y 3 indagamos en las respuestas verbales de los estudiantes, aunque esto parezca lógico dado que los estudiantes de estas edades se les hace más fácil explicar verbalmente sus respuestas que por escrito, es necesario indagar en otras representaciones de parte de ellos. Indagar en otros tipos de representaciones por parte de los estudiantes cuando abordan una tarea de patrones, podría abrir un abanico de posibilidades para indagar sobre las distintas formas de cómo los estudiantes abordan dicha tarea.

A continuación planteamos algunas posibles líneas de continuidad de esta investigación. Algunas de ellas están siendo abordadas en el marco del proyecto de investigación en el que se encuadra esta investigación; otras quedan pendientes para el futuro.

- Ampliar la muestra de este estudio como una manera de obtener una cantidad suficiente de datos para obtener conclusiones que fundamenten y complementen esta investigación.

- Variar el tipo de muestra con la que trabajamos. Por ejemplo, el experimento de enseñanza que aquí se realizó para los estudios 2 y 3 fue en un contexto socio-cultural medio-alto. Se podría implementar el mismo experimento en un contexto socio-cultural más bajo para contrastar resultados obtenidos.

- Indagar sobre la temática de esta investigación pero incorporando en los problemas contextos diferentes a los aquí planteados. Lo anterior ayudaría a comparar resultados obtenidos según diferentes contextos y generar un repertorio de tareas que puedan ser utilizados en futuras investigaciones y en la enseñanza, para promover el aprendizaje del álgebra desde los primeros niveles educativos.
- Realizamos la recogida de datos de los estudios 1 y 2 a través de entrevistas individuales semiestructuras. Se podría indagar sobre los mismos objetivos pero a través de otro tipo de entrevistas como las entrevistas por parejas o grupales o mediante puestas en común en gran grupo.
- En el estudio 3 presentamos una tipología de respuestas inapropiadas de los estudiantes e intervenciones de la profesora-entrevistadora. Esto se podría seguir investigando con otros estudiantes y con tareas similares a las que aquí se propusieron como manera de ahondar y complementar la tipología de respuestas inapropiadas e intervenciones.
- En el estudio 3, aunque no fue el objetivo del trabajo, consideramos estudiantes con distintos niveles de rendimiento (bajo-medio-alto). Sería interesante, refinar los criterios de selección y profundizar sobre cómo estudiantes de diferente rendimiento académico abordan tareas como las propuestas, describiendo la forma en que las abordan, las dificultades que presentan y las intervenciones que necesitan.
- Realizar un estudio longitudinal para describir cómo estudiantes evolucionan en la comprensión de nociones algebraicas cuando van trabajando con tareas de patrones.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona, España: Octaedro.

Alsina, A. (2011). *Educación Matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona, España: Horsori.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52.

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid, España: Síntesis.

Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*, 57-70.

Bolt B. y Hobbs, D. (2001). *Léxico de matemáticas*. Madrid, España: Akal.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). *A learning trajectory in 6-year-olds´s thinking about generalizing functional relationship. Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-559.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Murphy, A., et al. (2018) Implementing a Framework for Early Algebra. In: Kieran C. (eds) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Heidelberg Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP), 14*, 37-57.

Brizuela, B., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation. *Estudios de Psicología*, *36*(1), 138-165

Cañadas, M., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 69-81.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. & Oldenburg, R. (2012). CERME7 Working group 3: Algebraic thinking. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 189-190.

Cañadas, M. y Gómez, P. (2012). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD*. Documento no publicado.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). *Memoria del proyecto de investigación I+D+i "Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico", con referencia EDU2013-41632-P*. Documento no publicado. Universidad de Granada. Granada, España.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016a). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016b). Pensamiento numérico. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 173-194). Madrid, España: Pirámide.

Cañadas, M. C. y Morales, R. (2016). Functional relationships identified by first graders. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 131-138). Szeged, Hungría: PME.

Carraher, D.W., Martinez, M. y Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM The International Journal on Mathematics Education 40*(1), 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. En F. Lester (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education*. Greenwich, CT: Information Age Publishing, pp. 669-705.

Carraher, D. y Schliemann A. D. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, (pp. 193–196). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada, España: Comares.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del XVI Simposio de la SEIEM*, (pp. 75-94). Baeza, Jaén: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Castro-Rodriguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 87-107). Madrid, España: Pirámide.

Castro, E., del Olmo, M. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada, España: Universidad de Granada.

Cobb P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics.* Washingon, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Revisado en: http://www.corestandards.org/Math/

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En Sawyer, R.K. (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. En R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, VI: PME.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Heidelberg, Germany: Springer

Clapham, C. (1998). *Diccionario de matemáticas*. Madrid, España: Complutense.

Da Ponte, J. y Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. *Boletim Gepem, 59*, 53-68.

Dekker, R. y Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational studies in mathematics*, *56*(1), 39-65.

Dienes Z. y Golding, E. (1971). *Lógica y juegos lógicos.* Barcelona, España: Teide.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Dominik, K. y Bernd, K. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM*, *37*(3), 240-245.

Earnest, D. (2014). Exploring Functions in Elementary School: Leveraging the Representational Context. En K. Karp y A. Roth (Eds.), *Annual perspectives in mathematics education 2014: using research to improve instruction* (pp. 171-179). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Ellis, J. (2007). *Aprendizaje humano*. Madrid, España: Pearson Educación.

English, L. D. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-171.

Fernández, J. (2008). *Desarrollo del pensamiento lógico matemático*. Madrid, España: Grupo Mayéutica-Educación.

Fernández, M. (2010). Enseñanza a partir de la indagación y el descubrimiento. En C. Moral (Coord.), *Didáctica: teoría y práctica de la enseñanza* (pp. 243-270). Madrid, España: Pirámide.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid, España: Síntesis

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 313-320). Melbourne, Australia: PME.

Fuentes. S. (2014). *Pensamiento funcional en primero de educación primaria. Un estudio exploratorio*. Trabajo fin de Master. Universidad de Granada, España.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

García, P. (1992). *Diccionario de términos matemáticos*. Valladolid, España: La Calesa.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 165-174). Granada, España: Comares.

Gómez, P. y González (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD2*. Documento no publicado.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación*. México, DF: Editorial Mcgraw-Hill.

Hidalgo, D. y Cañadas, M. C. (2017). Proceso de generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: respuestas inadecuadas e intervenciones de la entrevistadora. Trabajo presentado en el Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico en el *XXI simposio de investigación en Educación Matemática de la SEIEM*. Zaragoza, España.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas* (6a ed.). México, DF: Pearson Educación.

Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction, 26*, 379-424.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: LEA.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lacasta, E. y Pascual, J. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid, España: Síntesis

Lannin, J. K., Barker, D. D. y Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 299-317.

Larson, R. y Hostetler, R. (2008). *Precálculo* (7a ed.). México, DF: Reverté Ediciones.

Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through. Pattern exploration. *Mathematics teaching in the middle school*, *11*(9), 428-433.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra*. The 12th ICMI Study (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 41-50.

Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid, España: Pirámide

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1–19.

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232-246.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer Netherlands.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Labor.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Mauri, T. (2007). ¿Qué hace que el alumno y la alumna aprendan los contenidos escolares? La naturaleza activa y constructiva del conocimiento. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Orubia, I. Solé, A. Zabala, *El constructivismo en el aula* (pp. 65-100). Barcelona, España: Graó.

Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia de España (2006). *Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación infantil* (Vol. Nº 4, pp. 474-482). Madrid, España: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia de España (2007). *Orden ECI 2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria* (Vol. Nº 173, pp. 31487-31566). Madrid, España: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (Vol. 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Autor.

Ministry of Education (2005). The Ontario Curriculum Grades 1-8: Mathematics. Ontario, Canadá: Autor.

Ministry of Education (2007). *A guide to effective instruction in mathematics. Kindergarten to grade 3. Patterning and algebra*. Ontario, Canadá: Autor.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137–1156.

Morales, R. (2013). *Pensamiento lógico matemático en alumnos de 6-7 años en tareas de seriaciones*. Trabajo fin de Master. Universidad de Granada, España.

Morales, R. y Cañadas, M. C. (2016). Evidencia de elementos asociados al pensamiento funcional en currículo chileno de Educación Básica. En T. Ramiro-Sanchez y M. Ramiro (Coord), *Avances en Ciencias de la Educación y el Desarrollo, 2016* (pp. 119-126). Granada, España: Asociación Española de Psicología Conductual (AEPC).

Morales, R. Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*, (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.

Morales, R. Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (en prensa). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*.

Morales R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Construcción de seriaciones en Educación Primaria: Un estudio de caso. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 401-411). Alicante, España: SEIEM.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441-465.

Moss, J. y McNab, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. En *Early Algebraization* (pp. 277-301). Springer Berlin Heidelberg.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2012). Developing pedagogical strategies to promote structural thinking in early mathematics. En J. Dindyal, L. Pien Cheng y S. Fong Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 529-536). Adelaide, Australia: MERGA.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp, 29-45). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Onrubia, J. (2007). Enseñar: Crear zonas de desarrollo próximo e intervenir en ellas. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Orubia, I. Solé, A. Zabala, *El constructivismo en el aula* (pp. 101-124). Barcelona, España: Graó.

Owen, A. (1995). In search of the unknouwn: A review of primary algebra. En J. Anghileri (Ed*.), Children's mathematical thinking in the primary years* (pp. 124-148). Londres, Reino Unido: Cassell.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Documento no publicado. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, Spain.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom, 12*(3), 8.

Papic, M. (2015). An early mathematical patterning assessment: Identifying young Australian indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534.

Papic, M., Mulligan, T. y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the developing of preescholers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268.

Pérez, G. (2016). *Investigación cualitativa: Retos e interrogantes*. Madrid, España: La Muralla.

Piaget, J. (1968). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonne, A. Lichnerowicz, G. Choquet y C. Gattegno, *La enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-28). Madrid, España: Aguilar.

Piaget, J. (1977). *Seis estudio de psicología*. Barcelona, España: Seix Barral.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones*. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017a). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.*), Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, Spain: SEIEM

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017b). Generalization in fifth graders within a functional approach. In B. Kaur, W. Kin Ho, T. Lam Toh, y B. Heng Choy (Eds.), *Proccedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapore: PME.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, Juan A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Rajadell, N. y Medina, A. (2015). Teoría de la enseñanza y del proceso formativo. En A. Medina y M. C. Domínguez (Eds). *Didáctica general: Formación básica para los profesionales de la educación*. Madrid, España: Universitas.

Ramírez, R. y Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79*, 23-30.

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Ruiz, B. J. (2014). *Matemáticas 4. Precálculo: funciones y aplicaciones*. Bachillerato General (2a. ed.). DF, México: Larousse - Grupo Editorial Patria.

Rico, Luis (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, J., L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes*. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). España, Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376-396.

Rodrigues, M. y Serra, P. (2015). Generalizing repeating patterns: A study with children aged four. En I. Sahn, S. A. Kiray y S. Alan (Eds), *Proceeding of book International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST)* (pp. 120-134), Antalya, Turkey.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2007). *Las funciones un paseo por su historia*. Madrid, España: Nivola.

Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 491-508.

Soares, J., Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Thinking Algebraically across the Elementary School Curriculum. *Teaching Children Mathematics, 2*(5), 228-235

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, Spain: Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, Spain: SEIEM.

Solé, I. y Coll, C. (2007). Los profesores y la concepción constructivista. La naturaleza activa y constructiva del conocimiento. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Orubia, I. Solé, A. Zabala, *El constructivismo en el aula* (pp. 7-23). Barcelona, España: Graó.

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Pearson Educación.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children's ideas to classroom practice*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. En L. Coulange y J. P. Drouhard (Eds.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives. Special Issue of Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 109-124.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. Educational Studies in Mathematics, 20(2), 147-164.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*(29), 611-616.

Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E. y Gardiner, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. En L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds.), *34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kalamazoo, MI*.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing Generalization. *Open Mathematical Education Notes. 6*, 41-55.

Swan, P. y Marshall, L. (2010). Manipulative materials. *APMC, 15*(2), 13-19.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh, (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education,* pp. 267-306. Mahwah: NJ: LAE.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206-223.

Torrego, J. (2008). El profesor como gestor del aula. En A. de la Herrán y J. Paredes (Coord.), *Didáctica General: La práctica de la enseñanza en Educación Infantil, Primaria y Secundaria* (pp. 197-213). Madrid, España: McGraw-Hill.Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Londres, Reino Unido: Cassell.

Thomas, G. (2015). *Cálculo una variable*. DF, México: Pearson.

Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. En A. Rogerson (Ed.), *New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251-256). Palm Cove, Australia: ALMA.

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2017). Manifestación de generalización en estudiantes de Primaria e influencia de estímulos durante la resolución de una tarea que involucra una relación funcional. *Trabajo presentado en el Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico en el XXI simposio de investigación en Educación Matemática de la SEIEM*. Zaragoza, Spain.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: Program Committee.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162.

Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185**.**

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2012). Repeating patterns: strategies to assist young students to generalise the mathematical structure. *Australasian Journal of Early Childhood, 37*(3), 111-120.

Warren, E., Cooper, T. J. y Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior 25*, 208-223.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. En I. Putt, R. Faragher, y M. Mclean (Eds.), Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville* (Vol. 2, pp. 565-572). Sydney, Australia: MERGA.

Wilkie, K. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(5), 397-428.

Wood, D., Bruner, J. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*, 89-100.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas.* D. F, Mexio: McGraw-Hill.

ANEXOS

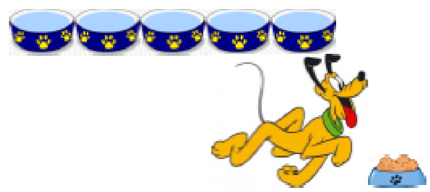
ANEXO A: ANVERSO FICHA SESIÓN 2

Nombre: ____

Fecha:_________________

Tarea 2. Perros y platos

PARA CADA FRASE, ESCRIBE LA RESPUESTA CORRECTA SOBRE EL LA RAYA HORIZONTAL



1. EN LA CUIDADORA HAY UN PERRO. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

2. EN LA CUIDADORA HAY DOS PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

3. EN LA CUIDADORA HAY CINCO PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

4. EN LA CUIDADORA HAY DIEZ PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

5. EN LA CUIDADORA HAY TREINTA PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

ANEXO B: REVERSO FICHA SESIÓN 2

6. EN LA CUIDADORA HAY CIEN PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

7. EN LA CUIDADORA HAY MIL PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

8. EN LA CUIDADORA HAY MIL MILLONES DE PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

9. EN LA CUIDADORA HAY Z PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

10. EN LA CUIDADORA HAY N PERROS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS

11. DE REPENTE LLEGAN TRES PERROS MÁS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS MÁS

12. DE REPENTE LLEGAN SEIS PERROS MÁS. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS MÁS

13. UN DÍA LLEGAN EL DOBLE DE PERROS DE LOS QUE HABÍA. NECESITAMOS COMPRAR ______________ PLATOS MÁS

ANEXO C: ANVERSO FICHA SESIÓN 3

Nombre:____

Fecha:__________________

Tarea 2. Perros y platos
COMPLETA LOS HUECOS DE LA TABLA

NÚMERO DE PERROS	NÚMERO DE PLATOS
2	7
5	10
10	
30	
50	
100	
Z	
N	
N+N	

ANEXO D: REVERSO FICHA SESIÓN 3

NÚMERO DE PERROS	NÚMERO DE PLATOS
	6
	15
	17
	50
	100
	P
	X

ANEXO E: TRANSCRIPCIÓN SESIONES 2 Y 3

https://www.dropbox.com/s/dkasqx6lkm3o67m/Transcripci%C3%B3n%20sesi%C3%B3n%20N%C2%B02%20y%20N%C2%B03.pdf?dl=0

ANEXO F: TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTAS

https://www.dropbox.com/s/1y0t2xmroxprap1/Transcripci%C3%B3n%20Entrevistas_Ok.pdf?dl=0