ESTIMACION DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO NORMAL CON FACTORES EXOGENOS

MANUEL MOLINA FERNANDEZ

UNIVERSIDAD DE GRANADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

" ESTIMACION DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL.APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO-NORMAL CON FACTORES EXOGENOS "

Tesis Doctoral

Sección de Matemáticas

30 de Septiembre de 1983

ESTIMACION DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO NORMAL CON FACTORES EXOGENOS.

Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 7 de Abril de 1.984, en la Universidad de Granada, ante el Tribunal formado por:

Presidente: Dr.D. MARIANO GASCA GONZALEZ
(Catedrático de la Universidad de Zaragoza)

Vocales : Dr.D. RAMON GUTIERREZ JAIMEZ
Catedrático de la Universidad de Granada)

: Dr.D. ANTONIO MARTIN ANDRES
(Catedrático de la Universidad de Granada)

: Dr.D. DAVID NUALART REDON
(Prof. de la Universidad de Barcelona)

Secretario: Dr.D. ELIAS MORENO BAS
(Prof. de la Universidad de Granada)

obtuvo la calificación de

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

"ESTIMACION DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION MULTIDIMENSIONAL. APLICACION AL PROCESO LOGARITMICO-NORMAL CON FACTORES EXOGENOS"

Memoria que para optar al grado de Doctor en Ciencias, sección de Matemáticas, presenta el Licenciado Manuel Molina Fernández.

Director de Tesis :

Profesor Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

Vº Bº

UNIVERSIDAD DE GRANADA. FACULTAD DE CIENCIAS.

Quiero expresar mi agradecimiento al Profesor Dr. D. Ramón Gutierrez Jáimez, por la labor de dirección de esta memoria. Agradecimiento que hago extensivo a todos aquellos profesores del Departamento de Estadística e I.O., de la Universidad de Granada, que de un modo u otro han colaborado.

INDICE

INTRODUCCION GENERAL

La teoria de los procesos de difusión, ha sido ampliamente estudiada, tanto desde el punto de vista teórico, como práctico, por una gran cantidad de autores.

El caso unidimensional, está bien desarrollado por : Feller, Itô, Mc Kean, Dynkin, Ghikman, Skorokhod, entre otros. Recientemente , autores como : Liptser, Shiryayev, Arnold, Stroock, Varadhan, han estudiado el caso multidimensional.

En el capítulo I, de esta memoria, bajo el punto de vista de los autores citados, damos un resumen de la teoria de los procesos tipo difusión, (P.T.D.), multidimensionales. Se consideran los P.T.D., como soluciones de una cierta clase de ecuaciones diferenciales estocásticas, (E.D.E.), de la forma :

$$dX_t = A(t,X)dt + B(t,X)dW_t \qquad t \geq 0$$

Donde $A(t,X)$, y $B^2(t,X)$, que son los llamados, coeficientes tendencia y difusión respectivamente, han de verificar determinadas condiciones.

Nos interesamos en especial, por los P.T.D., que son Markovianos. Dichos procesos reciben el nombre de procesos de difusión ordinarios, (P.D.O.).

Los objetivos fundamentales que nos proponemos en esta memoria, son :

1º.- Estimación del coeficiente tendencia de un P.D.O., en distintas situaciones.

2º.- Estudio de las propiedades asintóticas de los estimadores obtenidos.

3º.- Aplicar todos los resultados obtenidos, al proceso logarítmico-normal multidimensional con factores exógenos.

Nos centramos en la estimación del coeficiente tendencia, dado que el de difusión, puede suponerse conocido, (véase resultado de Levy, Doob(1953), pg : 395).

Los objetivos 1º y 2º, son resueltos en el capítulo II, y el 3º en el capítulo III.

La estimación del coeficiente tendencia de un P.D.O., ha sido un problema estudiado en los últimos años, por gran cantidad de autores. Su importancia se debe, a las multiples aplicaciones en distintos campos.

La estimación está basada, en la observación continua del proceso en un intervalo de tiempo $[0,T]$, (donde $T \in (0,\infty)$, es fijo), y han sido varios, los métodos de estimación propuestos.

Holevo, en 1967, consideró este problema, utilizando un algoritmo basado en la idea de aproximación estocástica. Obtuvo el estimador como solución de una cierta ecuación estocástica, probando su consistencia, y bajo determinadas condiciones, su normalidad asintótica.

Linkov, en 1975, y luego en 1977, estudió el caso unidimensional, y encontró condiciones suficientes para la normalidad asintótica de los estimadores Bayes, Bayes generalizados, y para la convergencia de los momentos a los correspondientes de la distribución limite.

Kutoyants, en 1976, y en 1977, discutió propiedades de los estimadores Bayes generalizados, en el caso de P.D.O. unidimensionales.

Musiela and Zmyślony, en 1980, estudiaron problemas de estimación para una clase especifica de procesos de difusión, y encontraron estimadores insesgados.

Asi mismo Prakasa-Rao, en 1979, y 1982, ha abordado este problema, a traves de métodos como el de Bayes, Máxima probabilidad, y el de las δ - familias.

Nosotros, centraremos nuestra atención en el método de la máxima verosimilitud.

Consideraremos familias de E.D.E, dependientes de un vector paramétrico θ, del tipo :

$$dX_t = A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t$$

$$X_0 = H \qquad t \geq 0$$

donde :

$\forall \; t \geq 0 \qquad X_t \in \mathbb{R}^n$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ , un conjunto abierto

$(W_t, \; t \geq 0)$, es un proceso de Wiener

Y supondremos, que se satisfacen las condiciones necesarias, para que las soluciones sean P.D.O.

La función de verosimilitud, vendrá dada como la derivada Radon-Nikodym de las medidas inducidas en el espacio de las funciones continuas, $\mathbb{R}^n$-valuadas, por los procesos solución de la familia, para distintos valores de θ.

Recientemente, ha habido un gran interés en la estimación máximo verosímil del parámetro θ, que determina el coeficiente tendencia de un P.D.O..

Novikov, en 1971, consideró el caso de procesos tipo difusión no markovianos, con coeficiente difusión constante, y coeficiente tendencia dependiendo linealmente de un parámetro unidimensional. Obtuvo resultados sobre el sesgo, error cuadrático medio, y consistencia del estimador máximo verosímil.

Para P.D.O. homogéneos, son de interés los trabajos de : Feigin, Lánska, y Basu.

Dentro de esta misma clase de procesos, y supuesto que el coeficiente tendencia es lineal en los parámetros, Brown and Hewitt(1975), probaron que bajo ciertas condiciones de regularidad, siendo la principal de ellas, la existencia de una función de densidad estacionaria, el estimador máximo verosimil es asintóticamente normal.

El mismo tipo de problemas, y bajo el mismo contexto que el de Brown and Hewitt, pero sin la hipótesis de homogeneidad, fue abordado por Taraskin, quien en 1974, obtuvo el estimador máximo verosímil y dio condiciones para la consistencia y normalidad asintótica, cuando los P.D.O. son multidimensionales. Se apoyó para ello, en un teorema central del limite para integrales estocásticas vector-valuadas. Un resumen de estos trabajos, se puede ver en la sección 2.2. Véase también Basawa and Prakasa-Rao(1980).

La situación anterior, se puede complicar, suponiendo que la trayectoria del proceso, no es observada durante un tiempo fijo, sino que realizamos la observación durante un intervalo $[0,\tau]$, siendo τ, un instante aleatorio.

Esta situación, ha sido estudiada en algunos casos especiales.

Brown and Hewitt(1975), encontraron estimadores insesgados de minima varianza, para un parámetro en el coeficiente tendencia de procesos de difusión de ramificación, observando una trayectoria, hasta que se alcanza una barrera.

Liptser and Shiryayev(1977), consideraron el caso en que la observación termina al alcanzarse una cantidad de información prefijada, en el caso de coeficiente difusión constante, y tendencia dependiendo linealmente de un sólo parámetro. En este caso, probaron que el estimador máximo verosímil es insesgado y se distribuye según una normal.

Finalmente Sorensen(1983), generalizó algunos de estos resultados al caso de que la observación se realiza durante un intervalo de tiempo $[0,\tau]$, donde τ , es cualquier instante aleatorio. Considera el caso unidimensional, con coeficiente tendencia lineal en los parámetros. Obtiene el estimador de máxima verosimilitud, y considerando familias de instantes aleatorios crecientes y con limite ∞, demuestra que dicho estimador es débilmente consistente y asintóticamente normal.

En las secciones 2.3 y 2.4, generalizamos los resultados de Sorensen, al caso de P.D.O. multidimensionales, con coeficiente tendencia dependiendo linealmente de los parámetros. Para ello , adaptamos el teorema central del limite visto por Taraskin al caso en que las integrales estocásticas tienen limite superior aleatorio. Dicho teorema jugará un papel fundamental a la hora de probar la consistencia y normalidad asintótica del estimador máximo verosímil.

En 2.5, generalizamos todo lo visto en secciones anteriores, al caso en que la muestra sea de N trayectorias, observadas de forma independiente y continuamente, sobre el intervalo correspondiente.

En el capítulo III, estudiamos el proceso logarítmico-normal multidimensional con factores exógenos, por su gran aplicación en multiples campos. Un estudio exhaustivo sobre la distribución logarítmico-normal, puede verse en Aitchison and Brown(1969).

Tintner, a lo largo de una serie de trabajos : Tintner(1973), Tintner and Bello(1968), Tintner and Narayanan(1966), Tintner and Sengupta(1972), Tintner and Patel(1966), Tintner and Thomas(1963), se ha interesado de forma especial en dicho proceso, tanto en el caso unidimensional, como en el multidimensional.

En los últimos años, Tintner and Gómez(1979), y Gutierrez-Jaimez(1981), han estudiado dichos procesos, bajo el punto de vista de las E.D.E. de Itô.

Tintner, en sus trabajos, estima los parámetros del proceso, basándose en muestras discretas, y utilizando el método de máxima verosimilitud.

Nosotros, en las secciones 3.4, 3.5, y 3.6, aplicamos los resultados obtenidos en el capítulo II. Comprobamos previamente, que el citado proceso es un P.D.O., y que su coeficiente tendencia depende linealmente de los parámetros.

Por último proponemos en un apéndice, algunas cuestiones abiertas a posibles investigaciones.

CAPITULO I

PROCESOS TIPO DIFUSION.CONTINUIDAD ABSOLUTA DE SUS MEDIDAS INDUCIDAS.

1.1 INTRODUCCION

El objetivo fundamental del capitulo, es definir los procesos de difusión ordinarios (P.D.O.), y estudiar resultados sobre la continuidad absoluta de sus medidas inducidas, considerándolos bajo el marco general de los procesos tipo difusión (P.T.D.).

Previamente, establecemos las definiciones y resultados imprescindibles. Eludimos toda demostración, indicando la bibliografia correspondiente.

En la sección 1.2, damos las definiciones de proceso : medible, progresivamente medible y no-anticipativo, y construimos el espacio medible $(C_T, \mathcal{B}_T)$, siendo C_T el conjunto de funciones continuas sobre $[0,T]$, con valores en $\mathbb{R}^n$. Para más detalles véase Willians(1979).

En 1.3, estudiamos la integral estocástica, respecto de un proceso de Wiener, para una cierta clase de funciones matriz aleatorias, que previamente definimos. Analizamos las distintas etapas para la construcción de dicha integral y damos las principales propiedades. Textos básicos son, Liptser and Shiryayev(1977), Ghikman and Skorokhod(1972).

Por la importancia que tendrán en capitulos posteriores, introducimos en 1.4, un tipo especial de funciones aleatorias, que reciben el nombre de instantes aleatorios. Construimos su σ-algebra asociada y analizamos sus principales propiedades, véase Loeve(1963), Breiman(1968), Stroock and Varadhan(1979).

Los P.T.D., y la continuidad absoluta de sus medidas inducidas, son cuestiones consideradas en las secciones 1.5 y 1.6. En la primera, planteamos las ecuaciones diferenciales estocásticas (E.D.E.), y estudiamos la existencia y unicidad de sus soluciones. En la segunda, damos los principales resultados sobre :

a).- Continuidad absoluta de la medida inducida por un P.T.D., con respecto a la medida inducida por un proceso de Wiener.

b).- Continuidad absoluta de las medidas inducidas por dos P.T.D.

c).- Continuidad absoluta de las medidas inducidas por dos P.T.D., cuando consideramos instantes aleatorios.

Los textos fundamentales para ambas secciones son básicamente, Lintser and Shiryayev I,II(1977), Skorokhod(1965), Basawa and Prakasa-Rao(1980), Stroock and Varadhan(1979).

Finalmente, en 1.7, definimos los P.D.O., como una subclase de los P.T.D., y vemos la forma que adoptan los resultados anteriores, para estos procesos.

1.2 DEFINICIONES PREVIAS

Consideremos :

1.- Un espacio de probabilidad (Ω, F, P), que vamos a suponer completo.

2.- Una familia no decreciente de sub-σ-algebras de F, $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, donde F_t, contiene todos los sucesos P-nulos de F, y $0 < T < \infty$

3.- Un proceso estocástico, $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, sobre (Ω, F, P), con valores en $\mathbb{R}^n$.

DEFINICION 1.2.1

Decimos que el proceso $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, es medible, si la aplicación :

$$[0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t,w) \longmapsto X_t(w)$$

es $\mathcal{B}_{[0,T]} \times F$-medible , siendo $\mathcal{B}_{[0,T]}$, el σ-algebra de Borel sobre el intervalo $[0,T]$

DEFINICION 1.2.2

Decimos que el proceso $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, es progresivamente medible, si :

$\forall \; t \in [0,T]$, la aplicación :

$$[0,t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(s,w) \longrightarrow X_s(w)$$

es $\mathcal{B}_{[0,t]} \times F_t$ - medible

DEFINICION 1.2.3

Decimos que el proceso $X = (X_t , 0 \leq t \leq T)$, es no-anticipativo, con respecto a la familia $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, si :

(i) .- Es medible

(ii).- $\forall \; t \in [0,T] \quad F_t^X \subseteq F_t$

donde :

$$F_t^X = \sigma(X_s , 0 \leq s \leq t)$$

NOTA 1.2.1

Todo proceso progresivamente medible, es no-anticipativo, siendo cierto el recíproco, cuando el proceso es continuo.

DEFINICION 1.2.4

En lo que sigue, denotaremos por C_T, al espacio de las funciones continuas sobre $[0,T]$, con valores en $\mathbb{R}^n$. Sobre dicho espacio vamos a construir un σ-algebra $\mathcal{B}_T$, de la siguiente manera :

$$\forall \; B \in \mathcal{B}^n \quad y \quad \forall \; s \in [0,T]$$

consideramos los conjuntos :

$$A_{B,s} = \left\{ X \in C_T \quad t.q. \quad X(s) \in B \right\}$$

(donde $\mathcal{B}^n$, es el σ-algebra Borel sobre $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{B}_T$ se define, como el σ-algebra generado por los conjuntos $A_{B,s}$

$$\mathcal{B}_T = \sigma(A_{B,s} \; , \; \forall B \in \mathcal{B}^n \; y \; \forall \; s \in [0,T])$$

1.3 INTEGRACION ESTOCASTICA

Sea (Ω, F, P), y la familia no decreciente de sub-σ-algebras de F : $(F_t, 0 \leq t \leq T)$. Vamos a considerar un proceso de Wiener $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, sobre dicho espacio de probabilidad, y tal que, W_t es F_t-medible, y con valores en $\mathbb{R}^m$

En esta sección , construiremos la integral estocástica $\int_0^t G(s,.)dW_s(.)$, para una cierta clase de funciones matriz aleatorias G , de orden nxm .

NOTA 1.3.1

La integral anterior, que por simplicidad, será denotada $I_t(G)$, no puede ser definida como una integral de Lebesgue-Stieltjes ó Riemann-Stieltjes, sin más que tener en cuenta, que el proceso de Wiener, tiene variación no acotada, en cualquier intervalo arbitrariamente pequeño de tiempo.

1.3.1 Definiciones

DEFINICION 1.3.1

Decimos que la función matriz-aleatoria $G(t,w)$, de orden nxm, medible con respecto a (t,w), donde $t \in [0,T]$, $w \in \Omega$

es " no-anticipativa ", con respecto a la familia $(F_t,\ 0 \leq t \leq T)$, si $G(t,.)$ es F_t-medible $\forall\ t \in [0,T]$

DEFINICION 1.3.2

La función matriz-aleatoria $G(t,w)$, no-anticipativa, decimos que es de " clase $P_T^{n,m}$ ", si :

$$P\left(\int_0^T ||G(t,.)||^2 dt < \infty \right) = 1 \tag{1.1}$$

donde $||G|| = (\text{Traza}(GG^*))^{1/2}$, ($*$ significa traspuesta)

DEFINICION 1.3.3

La función matriz-aleatoria $G(t,w)$, no-anticipativa, decimos que es de " clase $E_T^{n,m}$ ", si :

$$E\left(\int_0^T ||G(t,.)||^2 dt \right) < \infty \tag{1.2}$$

NOTA 1.3.2

Es evidente, que $\forall\ T > 0$, cualquier función $G(t,w)$

de clase $E_T^{n,m}$, es también de clase $P_T^{n,m}$. Nuestro estudio, se desarrollará, con funciones de clase $P_T^{n,m}$.

1.3.2 Etapas en la construcción de la integral estocástica.

La integral estocástica :

$$I_t(G) = \int_0^t GdW \quad , \text{ donde } G \text{ es de clase } P_T^{n,m}$$

será construida en dos etapas. En la primera, se hará la construcción para un tipo especial de función matriz-aleatoria denominada : función simple. Y en la segunda, apoyándonos en la integral estocástica para funciones simples, construimos la integral, para cualquier función de clase $P_T^{n,m}$

1ª ETAPA

DEFINICION 1.3.4

Decimos que la función G , de clase $P_T^{n,m}$, es una "función simple", si :

1º .- Existe una subdivisión finita del intervalo $[0,T]$

$$0 = t_o < t_1 < \dots < t_k = T$$

2º .- Existen funciones matriz-aleatorias de orden $n \times m$:

$$g, g_o, \dots, g_{k-1} \qquad \text{t.q.}$$

g es F_o-medible

g_i es F_{t_i}-medible $\qquad i = o,1,\dots,k-1$

de manera que :

$$G(t,.) = g(.).I_{[o]}(t) + \sum_{i=o}^{k-1} g_i(.).I_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \tag{1.3}$$

donde $I_{[o]}(.)$ e $I_{(t_i,t_{i+1}]}(.)$, son las funciones indicadoras del punto cero y del intervalo $(t_i,t_{i+1}]$ respectivamente.

CONSTRUCCION DE $I_t(G)$, PARA G FUNCION SIMPLE

Sea G una función simple, definimos entonces :

$$I_t(G) = \sum_{i=0}^{h} g_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + g_{h+1}(W_t - W_{t_{h+1}}) \tag{1.4}$$

donde $h = \max\limits_{i=0,\ldots,k-1} \left\{ i, \text{ t.q. } t_{i+1} < t \right\}$

NOTA 1.3.3

El proceso $(I_t(G),\ 0 \leq t \leq T)$, es progresivamente medible, y en particular $I_t(G)$ es F_t-medible.

2ª ETAPA

La construcción de $I_t(G)$, para cualquier función de clase $P_T^{n,m}$, se basa en los siguientes lemas :

LEMA 1.3.1

Sea G de clase $P_T^{n,m}$, existe entonces una sucesión de funciones simples $(G_h)_{h \geq 1}$, t.q.

$$\int_0^T \|G(t,.) - G_h(t,.)\|^2 dt \xrightarrow[h \to \infty]{c.s.} 0 \qquad (1.5)$$

donde c.s., significa, convergencia casi segura de variables aleatorias.

LEMA 1.3.2

Sea G de clase $P_T^{n,m}$ y $A \in F_T$. Entonces cualesquiera sean $N > 0$, $C > 0$, se tiene :

$$P\Big(A \cap \big(\sup_{0 \leq t \leq T} \Big\|\int_0^t G(s,.)dW_s(.)\Big\| > C\big) \Big) \leq$$

$$N/C^2 + P\Big(A \cap \int_0^T \|G(s,.)\|^2 ds > N \Big) \qquad (1.6)$$

En particular, si $A = \Omega$, tenemos :

$$P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} \Big\|\int_0^t G(s,.)dW_s(.)\Big\| > C \Big) \leq N/C^2$$

$$+ P\Big(\int_0^T \|G(s,.)\|^2 ds > N\Big) \qquad (1.7)$$

CONSTRUCCION DE $I_t(G)$, PARA CUALQUIER FUNCION G DE CLASE $P_T^{n,m}$

Teniendo en cuenta los lemas 1.3.1 y 1.3.2 , puede probarse que la sucesión $(I_t(G_h))_{h\geq 1}$, converge en probabilidad a una cierta variable aleatoria, única salvo equivalencia, que será la que tomaremos como $I_t(G)$.

NOTA 1.3.4

Se puede probar, que la variable aleatoria $I_t(G)$, asi definida, es independiente de la sucesión $(G_h)_{h\geq 1}$, de funciones simples considerada.

NOTA 1.3.5

La integral estocástica $I_{s,t}(G) = \int_s^t G\,dW$ será por definición :

$$I_{s,t}(G) = \int_0^t G\, I_{(s,t]}\, dW$$

1.3.3 Propiedades de la integral estocástica.

Damos a continuación, las principales propiedades de la integral estocástica $I_t(G)$, donde G es de clase $P_T^{n,m}$:

(i) .- $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ y $\forall\ G_1, G_2$ de clase $P_T^{n,m}$

$$I_t(a.G_1 + b.G_2) = a.I_t(G_1) + b.I_t(G_2) \qquad (1.8)$$

(ii) .- $\forall\ u \in [0,t]$

$$I_t(G) = I_u(G) + I_{u,t}(G) \quad [P] \qquad (1.9)$$

(iii) .- $I_t(G)$ es una función continua en t

(iv) .- Si G es de clase $E_T^{n,m}$, entonces :

$$E(\ I_t(G)\ /\ F_s) = I_s(G) \text{ para } s \leq t \quad [P] \qquad (1.10)$$

es decir $(I_t(G),\ 0 \leq t \leq T)$, es una martingala con respecto a la familia $(F_t,\ 0 \leq t \leq T)$.

(v) .- Si G es de clase $E_T^{n,m}$, entonces :

$$E(I_t(G)) = 0 \qquad (1.11)$$

(vi) .- Si G_1 y G_2 , son de clase $E_T^{n,m}$, se tiene :

$$E\left(I_t(G_1)I_t^*(G_2) \right) = E\left(\int_0^t G_1G_2^* ds \right) \tag{1.12}$$

1.4 INSTANTES ALEATORIOS

Consideremos el espacio de probabilidad (Ω , F, P) , y la familia no decreciente de sub-σ-algebras $(F_t, 0 \leq t)$.

Supongamos que Z, es una variable aleatoria uni-dimensional t.q. $P(0 \leq Z \leq T) = 1$. Sea $W = (W_t , t \geq 0)$, un proceso de Wiener m-dimensional con respecto a la familia $(F_t, 0 \leq t)$, y G una función de clase $P_T^{n,m}$, entonces por : $\int_0^Z G dW$, hemos de entender la variable aleatoria $I_Z(G)$, donde:

$$I_t(G) = \int_0^t G\, dW$$

$I_Z(G)$, satisface determinadas propiedades de las consideradas en 1.3.3, pero no todas. Podemos sin embargo restringirnos a una cierta clase de variables aleatorias , que sí satisfacen todas las propiedades. Dicha clase, será la constituida por los instantes aleatorios.

1.4.1 Definición

Una función $\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$, decimos que es un instante aleatorio, relativo a la familia de sub-σ-algebras $(F_t, t \geq 0)$, si :

$$\forall \ t \geq 0 \qquad \tau^{-1} (\ [0,t] \ ) \in F_t$$

1.4.2 σ-algebra asociada a un instante aleatorio

Sea τ, un instante aleatorio, relativo a la familia $(F_t , 0 \leq t)$. Podemos asociarle un σ-algebra, que denotaremos por F_τ , y que está definida como :

$$F_\tau = \left\{ B \in F_\infty \quad \text{t.q.} \quad B \cap \tau^{-1}([0,t]) \in F_t \quad \forall \ t \geq 0 \right\}$$

donde $F_\infty = \bigcup_t F_t$

(Véase Breiman(1968), Loeve(1963), etc)

1.4.3 Propiedades.

Sea τ , un instante aleatorio y F_{τ} , su σ-algebra asociada. Vamos a considerar por su importancia, las tres propiedades siguientes :

(i) .- τ es F_{τ}-medible

(ii) .- Si τ_1 y τ_2 , son dos instantes aleatorios, tales que $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces :

$$F_{\tau_1} \subseteq F_{\tau_2}$$

(iii).- Sea $X = (X_t \ , \ t \geq 0)$, un proceso de Markov n-dimensional, y sea τ , un instante aleatorio con respecto a la familia de sub-σ-algebras $(F_t^X \ , \ t \geq 0)$, donde :

$$F_t^X = \sigma(X_s \ , \ 0 \leq s \leq t)$$

Entonces :

$$F_{\tau} = F_{\tau}^X = \sigma(X_s \ , \ 0 \leq s \leq \tau)$$

1.5 PROCESOS TIPO DIFUSION

En lo que sigue , trabajaremos, sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P). Sobre dicho espacio, consideraremos un proceso de Wiener $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, n-dimensional, t.q. W_t es F_t-medible, siendo $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, una familia no decreciente de sub-σ-algebras de F.

1.5.1 Proceso de Itô y Proceso tipo difusión

DEFINICION 1.5.1

Un proceso estocástico $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, continuo, no-anticipativo respecto a $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, y con valores en $\mathbb{R}^n$, recibe el nombre de "proceso de Itô", relativo al proceso de Wiener $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, si existen dos procesos :

$$(a(t), \; 0 \leq t \leq T) \qquad y \qquad (b(t), 0 \leq t \leq T)$$

vector-valuado y matriz-valuado respectivamente t.q :

$$P(\int_0^T ||a(t,.)||dt < \infty) = 1 \tag{1.14}$$

$$P\left(\int_0^T \| b(t,.) \|^2 dt < \infty \right) = 1 \tag{1.15}$$

y con probabilidad 1

$$X_t(.) = X_o(.) + \int_0^t a(s,.)ds + \int_0^t b(s,.)dW_s(.) \tag{1.16}$$

NOTA 1.5.1

La integral estocástica que aparece en (1.16), está bien definida, sin más que tener en cuenta (1.15).

Por comodidad, diremos que el proceso $X = (X_t,\ 0 \leq t \leq T)$ tiene la diferencial estocástica :

$$dX_t(.) = a(t,.)dt + b(t,.)dW_t(.) \tag{1.17}$$

DEFINICION 1.5.2

Un proceso de Itô $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, con valores en $\mathbb{R}^n$, recibe el nombre de "proceso tipo difusión", relativo al proceso de Wiener $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, si $a(t,.)$ y $b(t,.)$, son de la forma :

$$a(t,.) = A(t,X(.)) \qquad [P] \tag{1.18}$$

$$b(t,.) = B(t,X(.)) \qquad [P] \tag{1.19}$$

donde $X(.) = (X_t(.), 0 \leq t \leq T)$, y siendo

$$A : [0,T] \times C_T \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

y

$$B : [0,T] \times C_T \longrightarrow M_n \quad \text{(matrices de orden) } n\text{x}n$$

funcionales no-anticipativos, es decir funciones $\mathcal{B}_{[0,T]} \times \mathcal{B}_T$-medibles t.q. $\forall\ t \in [0,T]$:

$A(t,.)$ y $B(t,.)$, son $\mathcal{B}_t$-medibles

"A", recibe el nombre de coeficiente "tendencia", y "BB^*", el de coeficiente "difusión".

1.5.2 Soluciones fuerte y débil de una Ecuación diferencial estocástica.

Sea $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Itô con valores en $\mathbb{R}^n$ y diferencial estocástica :

$$\begin{aligned} dX_t(.) &= a(t,.)dt + b(t,.)dW_t(.) \\ X_o &= H \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Consideremos un nuevo proceso $Y = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$, donde $Y_t = f(t,X_t)$, con valores en $\mathbb{R}^k$. El siguiente teorema debido a Itô, nos proporciona la diferencial estocástica del proceso $Y = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$.

TEOREMA 1.5.1

Supongamos que la función $f(t,x)$, definida sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^k$, es continua y admite las derivadas parciales siguientes :

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = f_t \qquad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i} = f_{x_i} \qquad i = 1,..,n$$

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j} \qquad i,j = 1,..,n$$

todas ellas continuas.

Si el proceso $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, tiene la E.D.E. dada en (1.20), entonces el proceso $Y = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$, donde

$Y_t = f(t,X_t)$, tiene la siguiente diferencial estocástica :

$$dY_t(.) = \Big(f_t(t,X_t) + f_X^*(t,X_t)a(t,.) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{X_iX_j}(t,X_t)(b(t,.)b^*(t,.))_{i,j}\Big)dt$$

$$+ \quad f_X^*(t,X_t)b(t,.)dW_t(.)$$

$$Y_o = f(0,H) \tag{1.21}$$

donde

$$f_X^*(t,X_t) = (f_{X_1}(t,X_t),\ldots,f_{X_n}(t,X_t))$$

(1.21), es conocida bajo el nombre de formula de Itô.

DEFINICION 1.5.3

Decimos que el proceso $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, con valores en $\mathbb{R}^n$, es una "solución fuerte" [P], (ó simplemente una solución), de la E.D.E.

$$dX_t = A(t,X)dt + B(t,X)dW_t$$

$$X_o = H \tag{1.22}$$

Donde H, es F_0-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$, si :

$\forall \; t \in [0,T]$

1º.- X_t es F_t-medible

2º.-

$$P\left(\int_0^T \|A(t,X)\| dt < \infty \right) = 1$$

3º.-

$$P\left(\int_0^T \|B(t,X)\|^2 dt < \infty \right) = 1$$

4º.- Con probabilidad 1

$$X_t = H + \int_0^t A(s,X)ds + \int_0^t B(s,X)dW_s$$

DEFINICION 1.5.4

Decimos que la E.D.E.

$$dX_t = A(t,X)dt + B(t,X)dW_t$$

$$X_0 = H \qquad 0 \leq t \leq T$$

donde H tiene función de distribución $F(x)$, tiene una solución débil, si existe :

a).- Un espacio de probabilidad (Ω, F, P).

b).- Una familia no decreciente de sub-σ-algebras de F $(F_t, 0 \leq t \leq T)$.

c).- Un proceso de Wiener $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, sobre (Ω, F, P), donde W_t, es F_t-medible .

d).- Un proceso continuo $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, sobre (Ω, F, P), donde X_t, es F_t-medible.

De manera, que las condiciones 2ª,3ª, y 4ª, de la definición 1.5.3 , son satisfechas y $P(X_0 \leq x) = F(x)$

NOTA 1.5.2

La diferencia entre los conceptos de solución fuerte y débil, es la siguiente :

Cuando hablamos de solución fuerte, se sobreentiende, que trabajamos sobre un determinado espacio probabilístico (Ω,F,P), que disponemos de una familia de sub-σ-algebras $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, (podemos tomar por ejemplo $F_t = \sigma(H, W_s, 0 \leq s \leq t)$, donde :

$W = (W_t \ , 0 \leq t \leq T)$, es un proceso de Wiener, sobre (Ω, F, P)).

En este caso ocurre que $F_t^X \subseteq F_t$

Sin embargo, cuando hablamos de solución débil, hemos de entender, que se puede construir :

1.- Un espacio de probabilidad (Ω , F, P)

2.- Una familia no decreciente de sub-σ-algebras de F $(F_t, 0 \leq t \leq T)$

3.- Un proceso de Wiener $W = (W_t \ , 0 \leq t \leq T)$, donde W_t es F_t-medible.

4.- Un proceso $X = (X_t \ , 0 \leq t \leq T)$, donde X_t es F_t-medible.

De manera que las condiciones 2ª,3ª,y 4ª, de la definición 1.5.3, son satisfechas [P]

En muchas situaciones, en las que existe solución débil ocurre que $F_t = F_t^X$, y consecuentemente, el proceso de Wiener $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, es t.q. W_t es F_t^X-medible, y se tendrá que $F_t^W \subseteq F_t^X$

En lo que sigue, cuando hablemos de solución de una E.D.E. entenderemos, que se trata de solución en sentido fuerte.

1.5.3 Existencia y unicidad de solución

TEOREMA 1.5.2

Consideremos la E.D.E.

$$dX_t = A(t,X)dt + B(t,X)dW_t$$

$$X_o = H \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (1.23)$$

Si los coeficientes "A", y "B", verifican :

1º .- $\forall \; x,y \in C_T$ y $\forall \; t \in [0,T]$

$$\|A(t,x) - A(t,y)\|^2 + \|B(t,x) - B(t,y)\|^2 \leq$$

$$\leq L_1 \int_o^t \|x_s - y_s\|^2 dK(s) + L_2 \|x_t - y_t\|^2$$

2º .- $\forall \; x \in C_T$ y $\forall \; t \in [0,T]$

$$\|A(t,x)\|^2 + \|B(t,x)\|^2 \leq L_1 \int_o^t (1+ \|x_s\|^2) dK(s) + L_2(1+ \|x_t\|^2)$$

Donde : L_1 y L_2, son constantes, y $K(s)$, es una función no decreciente, continua por la derecha y con valores en $[0,1]$

Entonces : La E.D.E., dada en (1.23), admite una única solución $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, donde X_t es F_t- medible.

1.6 CONTINUIDAD ABSOLUTA DE MEDIDAS INDUCIDAS POR PROCESOS TIPO DIFUSION

1.6.1 Introducción

Consideremos los P.T.D. : $X = (X_t \, , 0 \leq t \leq T)$, e $Y = (Y_t \, , 0 \leq t \leq T)$, ambos $\mathbb{R}^n$-valuados, y con E.D.E., dadas por :

$$
\begin{aligned}
dX_t &= A_1(t,X)dt + B(t,X)dW_t \\
X_0 &= H
\end{aligned}
\qquad (1.24)
$$

$$
\begin{aligned}
dY_t &= A_2(t,Y)dt + B(t,Y)dW_t \\
Y_0 &= H
\end{aligned}
\qquad (1.25)
$$

Supongamos que A_1, A_2, y B, satisfacen las condiciones del teorema 1.5.2. Es conocido entonces, que existe única solución de las E.D.E. : (1.24) y (1.25). Denotaremos por μ_X y μ_Y , las medidas inducidas en $(C_T, \mathcal{B}_T)$, por los procesos solución de (1.24), y (1.25), respectivamente.

$\forall \; A \in \mathcal{B}_T$

$$\mu_X(A) = P(w \in \Omega : \quad X(w) \in A \;)$$

$$\mu_Y(A) = P(w \in \Omega : \quad Y(w) \in A \;)$$

$\forall\ t \in [0,T]$, $\mu_{t,X}$, será la medida restricción de μ_X al σ-algebra $\mathcal{B}_t$.

$\frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(t,Z)$, será la derivada Radon-Nikodym, de la medida $\mu_{t,X}$, con respecto a la medida $\mu_{t,Y}$, siendo $Z \in C_T$ (cuando $t = T$, omitiremos el indice T)

Por $\frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(X)$, $\frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(t,X)$, entenderemos las variables aleatorias F_T^X-medible y F_t^X-medible, respectivamente, obtenidas como resultado de la substitución de la función Z , por la trayectoria $(X_s(.),\ 0 \leq s \leq T)$

Los resultados, que más adelante veremos, se basan principalmente, en el siguiente teorema debido a Girsanov.

TEOREMA 1.6.1

Sea $X = (X_t,\ 0 \leq t \leq T)$, un proceso estocástico, con valores en $\mathbb{R}^n$, construido sobre (Ω, F, P) t.q.

a).- X_t es F_t-medible

b).-

$$P\left(\int_0^T X_t^{*} X_t \, dt < \infty \right) = 1$$

Sea $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$, un proceso de Wiener sobre el espacio (Ω, F, P), con respecto a $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, t.q, W_t es F_t-medible, y $\mathbb{R}^n$-valuada

Definimos :

$$Z_t = 1 + \int_0^t X_s^{*} dW_s \qquad 0 \leq t \leq T$$

Si : $E(Z_T) = 1$

Entonces :

El proceso n-dimensional :

$$\overline{W}_t = W_t - \int_0^t Z_s^{-} X_s ds$$

es un proceso de Wiener, con respecto a $(F_t, 0 \leq t \leq T)$, sobre el espacio $(\Omega, F, \bar{P})$, donde : $d\bar{P}(.) = Z_T(.)dP(.)$

siendo :

$$Z_s^- = \begin{cases} Z_s^{-1} & \text{si} \quad Z_s \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad Z_s = 0 \end{cases}$$

1.6.2 <u>Continuidad absoluta de medidas inducidas por P.T.D., con respecto a la medida inducida por el proceso de Wiener.</u>

Sea $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, un P.T.D., con valores en $\mathbb{R}^n$, y con E.D.E.

$$dX_t = A(t,X)dt + dW_t$$
$$X_o = H \qquad (1.26)$$

TEOREMA 1.6.2

En las condiciones anteriores :

$$P\left(\int_o^T A^*(t,X)A(t,X)dt < \infty\right) = 1 \iff \mu_X << \mu_W$$

TEOREMA 1.6.3

Sea $X = (X_t,\ 0 \leq t \leq T)$, un P.T.D., con valores en $\mathbb{R}^n$, y E.D.E. (1.26), entonces :

$$\left. \begin{array}{l} P\left(\displaystyle\int_0^T A^*(t,X)A(t,X)dt < \infty \right) = 1 \\ \\ P\left(\displaystyle\int_0^T A^*(t,W)A(t,W)dt < \infty \right) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu_X \sim \mu_W$$

Y las derivadas Radon-Nikodym vienen dadas por :

$$\frac{d\mu_X}{d\mu_W}(t,W) = \exp\left(\int_0^t A^*(s,W)dW_s - (1/2)\int_0^t A^*(s,W)A(s,W)ds \right) \tag{1.27}$$

$$\frac{d\mu_W}{d\mu_X}(t,X) = \exp\left(- \int_0^t A^*(s,X)dX_s + (1/2)\int_0^t A^*(s,X)A(s,X)ds \right) \tag{1.28}$$

1.6.3 Continuidad absoluta de medidas inducidas por dos P.T.D.

TEOREMA 1.6.4

Sean los P.T.D. $X = (X_t,\ 0 \leq t \leq T)$, $Y = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$, con valores en $\mathbb{R}^n$ y E.D.E.

$$dX_t = A_1(t,X)dt + B(t,X)dW_t$$

$$X_0 = H$$

$$dY_t = A_2(t,Y)dt + B(t,Y)dW_t$$

$$Y_0 = H$$

donde H es F_0-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$

Supongamos que :

(i).- Los funcionales A_2 y B , satisfacen las condiciones del teorema 1.5.2

(ii).- $\forall \quad t \in [0,T]$, el sistema de ecuaciones algebráicas :

$$B(t,X)\mathfrak{B}(t,X) = (A_1(t,X) - A_2(t,X))$$

tiene con respecto a $\mathfrak{B}(t,X)$, una solución acotada, $[P]$

(iii).- $$P\left(\int_0^T \mathfrak{B}^*(s,X)\mathfrak{B}(s,X)ds < \infty\right) = 1$$

(iv).- $$P\left(\int_0^T \mathfrak{B}^*(s,Y)\mathfrak{B}(s,Y)ds < \infty\right) = 1$$

Entonces :

1º.- $\mu_X \sim \mu_Y$

2º.-
$$\frac{d\mu_Y}{d\mu_X}(t,X) = \exp\Big(-\int_0^t (A_1(s,X) - A_2(s,X))^* B^{-2}(s,X)dX_s$$

$$+ (1/2)\int_0^t (A_1(s,X) - A_2(s,X))^* B^{-2}(s,X)(A_1(s,X) + A_2(s,X))ds\Big) \tag{1.29}$$

$$\frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(t,Y) = \exp\Big(\int_0^t (A_1(s,Y) - A_2(s,Y))^* B^{-2}(s,Y)dY_s$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t (A_1(s,Y) - A_2(s,Y))^* B^{-2}(s,Y)(A_1(s,Y) + A_2(s,Y))ds \Big) \tag{1.30}$$

donde $B^{-1}(s,X)$, supondremos que es la matriz nula, si ocurre que $\det(B(s,X)) = 0$.

1.6.4 Continuidad absoluta de medidas inducidas por dos P.T.D., cuando consideramos instantes aleatorios.

Sean los P.T.D. $X = (X_t,\ 0 \leq t \leq T)$, e $Y = (Y_t,\ 0 \leq t \leq T)$ con valores en $\mathbb{R}^n$, y E.D.E.

$$dX_t = A_1(t,X)dt + B(t,X)dW_t$$

$$X_0 = H$$

$$dY_t = A_2(t,Y)dt + B(t,Y)dW_t$$

$$Y_0 = H$$

Donde H es t.q. $P(\ \|H\| < \infty\ ) = 1$

Sea τ, un instante aleatorio relativo a la familia de sub-σ-algebras $(\ \mathfrak{F}_t\ , T \geq t \geq 0\ )$.

TEOREMA 1.6.5

Supongamos que se cumplen las condiciones siguientes :

(i) .- Los funcionales A_2 y B , satisfacen las condiciones del teorema 1.5.2

(ii) .- $\forall\ t \leq T\wedge\tau$, el sistema de ecuaciones

$$B(t,X)\mathcal{B}(t,X) = (\ A_1(t,X) - A_2(t,X)\ ) \qquad [P]$$

tiene con respecto a $\mathcal{B}(t,X)$, una solución acotada, siendo $T\wedge\tau = \min(\ T,\ \tau)$.

(iii).- $$P\Big(\int_0^{T\wedge\tau} \mathcal{B}^*(s,X)\mathcal{B}(s,X)ds \ < \infty \Big) = 1$$

(iv) .- $$P\Big(\int_0^{T\wedge\tau} \mathcal{B}^*(s,Y)\mathcal{B}(s,Y)ds \ < \infty \Big) = 1$$

Entonces :

1º .- $\mu_{\tau,X} \sim \mu_{\tau,Y}$

donde $\mu_{\tau,X}$ y $\mu_{\tau,Y}$, son las restricciones de μ_X y μ_Y , respectivamente, al σ-algebra $\mathcal{B}_{\tau\wedge T}$.

2º .-

$$\frac{d\mu_{\tau,Y}}{d\mu_{\tau,X}}(X) = \exp\Big(- \int_0^{T\wedge\tau} (A_1(s,X) - A_2(s,X))^* B^{-2}(s,X)dX_s$$

$$+(1/2) \int_0^{T\wedge\tau} (A_1(s,X) - A_2(s,X))^* B^{-2}(s,X)(A_1(s,X)+A_2(s,X))ds\Big)$$

(1.31)

$$\frac{d\mu_{\tau,X}}{d\mu_{\tau,Y}}(Y) = \exp\Big(\int_0^{T\wedge\tau} (A_1(s,Y) - A_2(s,Y))^* B^{-2}(s,Y)\,dY_s$$

$$-(1/2) \int_0^{T\wedge\tau} (A_1(s,Y) - A_2(s,Y))^* B^{-2}(s,Y)(A_1(s,Y) + A_2(s,Y))\,ds\Big) \qquad (1.32)$$

1.7 PROCESOS DE DIFUSION ORDINARIOS.

Sea Q la clase de todos los P.T.D. , construidos sobre (Ω, F, P), y denotemos por Q_M , la subclase de Q, constituida por los procesos de Markov. A los procesos de Q_M , se les denomina procesos de difusión ordinarios, y teniendo en cuenta que son procesos de Markov :

$$A(t,X) = A(t,X_t)$$

$$B(t,X) = B(t,X_t)$$

A continuación, veremos la forma que adoptan los teoremas 1.5.2 y 1.6.4, para los P.D.O. (análogamente se hace con el 1.6.5)

TEOREMA 1.7.1

Consideremos la E.D.E.

$$dX_t = A(t,X_t)dt + B(t,X_t)dW_t$$
$$X_o = H \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (1.33)$$

Supongamos que A y B satisfacen :

$\exists \; K > 0$ t.q. $\forall \; x,y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \; t \in [0,T]$

1º.-

$$\|A(t,x) - A(t,y)\|^2 + \|B(t,x) - B(t,y)\|^2$$

$$\leq K \|x - y\|^2$$

2º.-

$$\|A(t,x)\|^2 + \|B(t,x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2)$$

Entonces : La E.D.E. (1.33), tiene única solución $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$, donde X_t es F_t-medible.

TEOREMA 1.7.2

Consideremos, los P.D.O. $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ e $Y = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$, ambos $\mathbb{R}^n$-valuados, y con E.D.E., dadas por :

$$dX_t = A_1(t,X_t)dt + B(t,X_t)dW_t$$

$$X_0 = H$$

$$dY_t = A_2(t,Y_t)dt + B(t,Y_t)dW_t$$

$$Y_o = H$$

Donde H es F_o-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$

Supongamos que :

(i) .-

A_2 y B , satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1

(ii) .-

$\forall \; t \in [0,T]$, el sistema de ecuaciones algebráicas :

$$B(t,X_t)\mathfrak{B}(t,X_t) = (A_1(t,X_t) - A_2(t,X_t))$$

tiene con respecto a $\mathfrak{B}(t,X_t)$, una única solución acotada , $[P]$

(iii).-

$$P\left(\int_0^T \mathfrak{B}^*(s,X_s)\mathfrak{B}(s,X_s)ds < \infty \right) = 1$$

(iv).-

$$P\left(\int_0^T B^*(s,Y_s)B(s,Y_s)\,ds < \infty \right) = 1$$

Entonces :

1º.- $\mu_X \sim \mu_Y$

2º.-

$$\frac{d\mu_Y}{d\mu_X}(t,X) = \exp\Big(- \int_0^t (A_1(s,X_s) - A_2(s,X_s))^* B^{-2}(s,X_s)\,dX_s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t (A_1(s,X_s) - A_2(s,X_s))^* B^{-2}(s,X_s)(A_1(s,X_s) + A_2(s,X_s))\,ds\Big)$$

(1.34)

$$\frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(t,Y) = \exp\Big(\int_0^t (A_1(s,Y_s) - A_2(s,Y_s))^* B^{-2}(s,Y_s)\,dY_s$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t (A_1(s,Y_s) - A_2(s,Y_s))^* B^{-2}(s,Y_s)(A_1(s,Y_s) + A_2(s,Y_s))\,ds\Big)$$

(1.35)

CAPITULO II

ESTIMACION DEL COEFICIENTE TENDENCIA, DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO.

2.1 INTRODUCCION

Nos planteamos en este capítulo, el problema de la estimación de los parámetros del coeficiente tendencia, de un P.D.O, asi como el estudio, de ciertas propiedades asintóticas, del estimador obtenido. Nos reduciremos, al caso en que el coeficiente tendencia, depende linealmente de los parámetros.

El método de estimación utilizado, será el de máxima verosimilitud, usando como función de verosimilitud, la derivada Radon-Nikodym sobre el espacio de funciones continuas y $\mathbb{R}^n$-valuadas, que fue estudiada en el capítulo anterior.

En la sección 2.2, analizamos el caso en que disponemos de una sola observación del proceso, en un intervalo de tiempo, fijado de antemano. Se obtiene el estimador máximo verosímil del vector paramétrico, y vemos que tiene como principales propiedades asintóticas, la de ser débilmente consistente y asintóticamente normal. Estos resultados, están recogidos básicamente en : Basawa and Prakasa-Rao(1980), Sorensen(1983), Taraskin(1974).

A la vista de los resultados anteriores, nos planteamos entre otras, las dos cuestiones siguientes :

1ª.- La obtención y el estudio de las propiedades asintóticas, del estimador máximo verosimil, en el caso de que se disponga, de una sola observación del proceso, pero supuesto que la observación se realiza, en un intervalo de tiempo, dependiente de un instante aleatorio.

2ª.- La obtención y el estudio de las propiedades asintóticas, del estimador máximo verosimil, cuando se dispone de N observaciones del proceso, tanto en el caso de observación en un intervalo de tiempo fijo, como en el caso de que el intervalo de tiempo, dependa de un instante aleatorio.

La primera de las cuestiones planteadas, la resolvemos en las secciones 2.3 y 2.4. En 2.3, obtenemos el estimador máximo verosímil, utilizando la densidad Radon-Nikodym obtenida en 1.6.4, y empleando la misma tecnica que en la sección anterior. En 2.4, considerando familias de instantes aleatorios crecientes y con limite ∞, investigamos las propiedades asintóticas del estimador anteriormente obtenido. Previamente desarrollamos, un teorema central del limite, para integrales estocásticas con limite superior aleatorio. Basándonos en dicho teorema, demostramos que el estimador máximo verosímil, es débilmente consistente y asintóticamente normal.

La segunda cuestión, es resuelta en 2.5, para ello, obtenemos la función de verosimilitud correspondiente a N observaciones y vemos que responde a la misma forma que en el caso de una sola observación. Utilizamos entonces, un razonamiento similar al de las secciones anteriores, y obtenemos el estimador máximo verosímil, tanto en el caso de que las observaciones, hayan sido realizadas en un intervalo de tiempo fijo, como en el caso de que hayan sido realizadas, en un intervalo de tiempo, que depende de un instante aleatorio. Vemos después que es débilmente consistente y asintóticamente normal.

2.2 ESTIMACION MAXIMO VEROSIMIL DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE, DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS.

2.2.1 Introducción

Consideremos la familia de E.D.E., dependiente del parámetro θ :

$$dX_t = A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t$$

$$X_o = H \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (2.1)$$

donde :

X_t es $\mathbb{R}^n$-valuada $\forall\ t \in [0,T]$

H es F_o-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ , un conjunto abierto.

Consideraremos el caso, en que el coeficiente tendencia $A(t,X_t;\theta)$, depende linealmente, de los parámetros $\theta_1,\ldots,\theta_k$ concretamente, supondremos que :

$$A(t,X_t;\theta) = \pi_o(t,X_t) + \sum_{j=1}^{k} \theta_j\pi_j(t,X_t) \qquad (2.2)$$

Donde $\pi_j(t,X_t)$, $j = 0,1,\ldots,k$, son funciones con valores en $\mathbb{R}^n$, no-anticipativas, y tales que para $j=1,\ldots,k$, son linealmente independientes sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Supongamos, que $\forall\ \theta \in \Theta$, los coeficientes A y $B^{1/2}$, satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1. Sabemos entonces, que $\forall\ \theta \in \Theta$, la E.D.E. dada en (2.1), tiene única solución. Denotaremos por μ_θ , la medida inducida en el espacio $(C_T,\ \mathcal{B}_T)$, por el proceso solución de (2.1), cuando θ, es el parámetro subyacente.

El teorema 1.7.2, queda de la siguiente forma, en nuestro caso

TEOREMA 2.2.1

Consideremos la familia de E.D.E. (2.1), y sea θ_0, un valor arbitrario, pero que consideraremos fijo, del parámetro.

Supongamos que :

(i) .- $\forall\ j = 0,1,\ldots,k$, π_j y $B^{1/2}$, satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1.

(ii).- $\forall\ j = 1,\ldots,k$ y $\forall\ t \in [0,T]$, el sistema de ecuaciones :

$$B^{1/2}(t,X_t)\beta_j(t,X_t) = \pi_j(t,X_t)$$

tiene solución, con respecto a $\beta_j(t,X_t)$ $[\mu_{\theta_o}]$

(iii).- $\forall$ $j = 1,..,k$ y $\forall$ $\theta \in \Theta$

$$\mu_\theta\left(\int_o^T \beta_j^*(t,X_t)\beta_j(t,X_t)dt < \infty\right) = 1$$

Entonces :

1º.- $\forall$ $\theta \in \Theta$ $\mu_\theta \sim \mu_{\theta_o}$

2º.-

$$\frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_o}}(t,X\ ) = \exp\Big(- \int_o^t (A(s,X_s;\theta_o) - A(s,X_s;\theta))^* B^{-1}(s,X_s)dX_s$$

$$+ (1/2) \int_o^t (A(s,X_s;\theta_o)-A(s,X_s;\theta))^* B^{-1}(s,X_s)(A(s,X_s;\theta_o)+A(s,X_s;\theta))ds\Big)$$

(2.3)

Ahora bien, teniendo en cuenta (2.2), tenemos :

$$A(s,X_s;\theta_o) - A(s,X_s;\theta) = \sum_{j=1}^{k} (\theta_j^o - \theta_j)\pi_j(s,X_s)$$

$$A(s,X_s;\theta_o) + A(s,X_s;\theta) = 2.\pi_o(s,X_s) + \sum_{j=1}^{k}(\theta_j^o + \theta)\pi_j(s,X_s)$$

Por consiguiente, (2.3), se podrá escribir :

$$\frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_o}}(t,X) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{k} (\theta_j - \theta_j^o) \int_o^t \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)(dX_s - \pi_o(s,X_s)ds\,)$$

$$-(1/2)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} (\theta_j - \theta_j^o)(\theta_i + \theta_i^o) \int_o^t \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_i(s,X_s)ds\Big)$$

$$= \exp\big((\theta - \theta_o)^* D_t \; -(1/2)(\theta - \theta_o)^* J_t(\theta + \theta_o) \big)$$

Donde :

$$D_t = \Big(\int_o^t \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)(dX_s - \pi_o(s,X_s)ds) \Big)_{k\times 1} \qquad j = 1,\dots,k \tag{2.4}$$

y

$$J_t = \left(\int_0^t \pi_j^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s) \pi_i(s,X_s) ds \right)_{k \times k} \qquad j,i = 1,\ldots,k \tag{2.5}$$

2.2.2 Estimador máximo verosímil

Consideremos la familia de E.D.E. (2.1), y supongamos, que realizamos una observación continua del proceso en el intervalo $[0,T]$, es decir, observamos una trayectoria, sobre dicho intervalo. En lo que sigue, trataremos de inferir, a partir de dicha observación, cual es el verdadero valor del parámetro subyacente.

Para ello, supondremos que se satisfacen las condiciones del teorema 2.2.1, con lo cual, sabemos, que existe la derivada Radon-Nikodym $(d\mu_\theta/d\mu_{\theta_0})(X(.))$, y que viene dada :

$$\frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_0}}(X(.)) = \exp\left((\theta - \theta_0)^* D_T - (1/2)(\theta - \theta_0)^* J_T (\theta + \theta_0) \right)$$

donde D_T y J_T, vienen dados en (2.4) y (2.5) respectivamente, y $X(.) = (X_s(.) \; 0 \leq s \leq T)$, es la trayectoria observada.

Para obtener el estimador de máxima verosimilitud, del vector paramétrico $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)^*$, tomaremos como función de verosimilitud ;

$$L_T(X(.);\theta) = \frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_0}}(X(.)) =$$

$$= \exp((\theta - \theta_0)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^* J_T (\theta + \theta_0))$$

Tomando logaritmos, y derivando después con respecto a θ_j , $j = 1,\ldots,k$, se obtiene :

$$\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_j} = D_{T,j} - \sum_{h=1}^{k} \theta_h J_{T,h,j}$$

$$j = 1,\ldots,k \qquad (2.6)$$

Si al vector $\left(\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_1},\ldots, \frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_k}\right)^*$

lo denotamos por $\frac{\partial \ln(L_T)}{\partial \theta}$, entonces (2.6), se podrá escribir en forma vectorial, de la siguiente forma :

$$\frac{\partial \ln(L_T)}{\partial \theta} = D_T - J_T \theta$$

De donde se deduce, que la ecuación de verosimilitud será :

$$D_T - J_T \theta = 0$$

(2.7)

Teniendo en cuenta (2.6), tenemos que :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_j}\right) = - J_{T,i,j}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

y como la matriz J_T , tal y como está definida, tiene la propiedad de ser definida no negativa, se deduce, que en caso de existir única solución de la ecuación (2.7), es punto de máximo, y viene dada por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T$$

(2.8)

2.2.3 Propiedades asintóticas

En el estudio, de las propiedades asintóticas del estimador $\hat{\theta}_T$, es fundamental el teorema que a continuacion veremos, y cuya demostración puede verse en Basawa and Prakasa-Rao(1980)

Sea $G(s) = (g_{ij}(s))_{n \times m}$, una matriz aleatoria de de clase $E_T^{n,m}$ $\forall$ $T > 0$, (véase definición 1.3.3). Estamos interesados, en estudiar condiciones bajo las cuales, el vector aleatorio :

$$T^{-1/2} \int_0^T G(s) dW_s$$

se distribuye asintóticamente según una normal, cuando $T \nearrow \infty$

Sea :

$$g_i(s) = (g_{i1}(s),\ldots,g_{im}(s))^*$$
$$i = 1,\ldots,n$$

Entonces :

$$\int_0^T G(s) dW_s = (\int_0^T g_1^*(s) dW_s,\ldots, \int_0^T g_n^*(s) dW_s)^*$$

donde en todo lo anterior, $W = (W_t \ , 0 \leq t \leq T)$, es un proceso de Wiener m-dimensional.

TEOREMA 2.2.2

Si la matriz $G(s)$, satisface :

$$T^{-1} \int_0^T g_i^*(s) g_j(s) ds \xrightarrow[T \nearrow \infty]{P} g_{ij}$$

donde $|g_{ij}| < \infty$, y $G = (g_{ij})$

Entonces :

$$T^{-1/2} \int_0^T G(s)\,dW_s \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} N_n(0,G)$$

En las condiciones de 2.2.1 y 2.2.2 , sabemos que la ecuación de verosimilitud, viene dada por :

$$D_T - J_T \theta = 0$$

donde D_T y J_T , vienen dados en (2.4) y (2.5).

Tenemos entonces, el siguiente teorema sobre el comportamiento asintótico, de las soluciones de la citada ecuación de verosimilitud :

TEOREMA 2.2.3

Supongamos que θ , es el verdadero valor del parámetro. Si se verifica :

(i) .- $$\frac{1}{T} \int_0^T \pi_i^*(t,X_t) B^{-1}(t,X_t) \pi_j(t,X_t)\,dt \xrightarrow[T \nearrow \infty]{\mu_\theta} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\ldots,k$$

(ii).- $$\frac{1}{T}\int_0^T E_\theta(\pi_i^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_j(t,X_t))dt \xrightarrow[T\nearrow\infty]{} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\ldots,k$$

donde $|g_{ij}| < \infty$ y $G = (g_{ij})$ es no singular

Entonces :

1º.- $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ T_\varepsilon > 0 \quad$ t.q. $\quad \forall\ T > T_\varepsilon$

la ecuación de verosimilitud (2.7), tiene única solución, con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$ y viene dada por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T \qquad (2.9)$$

2º.- $\hat{\theta}_T$ dada en (2.9), es débilmente consistente para θ

3º.-

$$T^{1/2}\,(\,\hat{\theta}_T - \theta\,) \xrightarrow[T\nearrow\infty]{} N_k(\,0\,,\,G^{-1})$$

donde $G = (\,g_{ij}\,)\quad i,j = 1,\ldots,k$

La demostración del teorema puede verse en Taraskin(1974), se basa fundamentalmente en el teorema 2.2.2

2.3 ESTIMACION MAXIMO VEROSIMIL DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE, DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS, Y LA OBSERVACION SE REALIZA HASTA UN INSTANTE ALEATORIO.

2.3.1 Introducción

Consideremos la familia de E.D.E.

$$\begin{aligned} dX_t &= A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t \\ X_o &= H \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde :

$\forall \; t \geq 0 \quad X_t$ es $\mathbb{R}^n$-valuada.

H es F_o-medible y $P(\|H\| < \infty) = 1$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ un conjunto abierto.

Supongamos que :

$$A(t,X_t;\theta) = \pi_o(t,X_t) + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \pi_j(t,X_t) \tag{2.11}$$

siendo $\pi_j(t,X_t)$, $j= 0,\ldots,k$, funciones $\mathbb{R}^n$-valuadas no-anticipativas, y tales que para $j = 1,\ldots,k$, son linealmente independientes sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Sea τ, un instante aleatorio sobre C, siendo C, el conjunto de funciones continuas sobre $[0, \infty)$, y con valores en $\mathbb{R}^n$.

El teorema 1.6.5, particularizado al caso que estamos considerando, queda :

TEOREMA 2.3.1

Sea θ_o, un valor arbitrario, pero fijo del parámetro, y supongamos que :

(i) .- $\forall\ j = 0,1,\ldots,k$ $\quad \pi_j$ y $B^{1/2}$, satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1

(ii) .- $\forall\ j = 1,\ldots,k$ y $\forall\ t \leq \tau$, el sistema de ecuaciones :

$$B^{1/2}(t,X_t)\mathbb{B}_j(t,X_t) = \pi_j(t,X_t)$$

tiene solución con respecto a $\mathbb{B}_j(t,X_t)$, $[\mu_{\theta_o}]$

(iii).- $\forall\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, $\forall\ j = 1, \ldots, k$

$$\mu_{T,\theta}\left(\int_0^T \mathcal{B}_j^*(t,X_t)\mathcal{B}_j(t,X_t)\,dt < \infty \right) = 1$$

donde $\mu_{T,\theta}$, es la medida restricción de

μ_θ , al σ-algebra $\mathcal{B}_T$

Entonces :

1º .- $\forall\ \theta \in \Theta$ $\mu_{T,\theta} \sim \mu_{T,\theta_0}$

2º .-

$$\frac{d\mu_{T,\theta}}{d\mu_{T,\theta_0}}(X) = \exp\Big(- \int_0^T (A(s,X_s;\theta_0) - A(s,X_s;\theta))^* B^{-1}(s,X_s)\,dX_s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T (A(s,X_s;\theta_0) - A(s,X_s;\theta))^* B^{-1}(s,X_s)(A(s,X_s;\theta_0) + A(s,X_s;\theta))\,ds\Big)$$

$$= \exp\left((\theta - \theta_0)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^* J_T(\theta + \theta_0) \right)$$

(2.12)

Donde :

$$D_{\tau} = \left(\int_{0}^{\tau} \pi_i^{*}(s,X_s) B^{-1}(s,X_s)(dX_s - \pi_o(s,X_s)ds) \right)_{k\times 1}$$

$$i = 1,\dots,k \tag{2.13}$$

$$J_{\tau} = \left(\int_{0}^{\tau} \pi_i^{*}(s,X_s) B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)ds \right)_{k\times k}$$

$$i,j = 1,\dots,k \tag{2.14}$$

La expresión (2.12), se obtiene, sin más que tener en cuenta (2.11).

2.3.2 Estimador máximo verosimil

Consideremos la familia de E.D.E. (2.10). Supuesto que realizamos, una observación continua del proceso, durante un intervalo de tiempo $[0,\tau]$, donde τ, es un instante aleatorio sobre C , trataremos de inferir, a partir de la trayectoria observada $X(.) = (X_t(.),\ 0 \leq t \leq \tau)$, cual es el verdadero valor del parámetro subyacente.

Supongamos que se satisfacen las hipótesis del teorema 2.3.1, sabemos entonces que existe la derivada Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mu_{T,\theta}}{d\mu_{T,\theta_o}}(X(.)) = \exp\left((\theta - \theta_o)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* J_T(\theta + \theta_o) \right)$$

donde D_T y J_T , vienen dados en (2.13) y (2.14) respectivamente.

El método que vamos a utilizar, para estimar el vector paramétrico $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_k)^*$, es el de máxima verosimilitud, para lo cual, vamos a tomar como función de verosimilitud :

$$L_T(X(.); \theta) = \frac{d\mu_{T,\theta}}{d\mu_{T,\theta_o}}(X(.)) =$$

$$= \exp\left((\theta - \theta_o)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* J_T(\theta + \theta_o) \right) \tag{2.15}$$

Tomando logaritmos en (2.15), y derivando después con respecto a θ_j , $j = 1,\dots,k$, obtenemos :

$$\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_j} = D_{T,j} - \sum_{h=1}^{k} \theta_h J_{T,h,j}$$

$$j = 1,\dots,k \tag{2.16}$$

Si al vector $\left(\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_1},\ldots,\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_k}\right)^*$

lo denotamos por $\frac{\partial \ln(L_T)}{\partial \theta}$, entonces (2.16), se podrá escribir en forma vectorial, de la siguiente manera :

$$\frac{\partial \ln(L_T)}{\partial \theta} = D_T - J_T \theta$$

De donde deducimos, que la ecuación de verosimilitud será :

$$D_T - J_T \theta = 0 \tag{2.17}$$

Teniendo en cuenta (2.16), tenemos :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial \ln(L_T(X(.);\theta))}{\partial \theta_j}\right) = -J_{T,i,j}$$

$$i,j = 1,\ldots,k$$

y como la matriz J_T, tal y como está definida, tiene la propiedad de ser definida no negativa, se deduce, que en el caso de que exista única solución de la ecuación (2.17), es punto de máximo, y vendria dada por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T \tag{2.18}$$

2.4 PROPIEDADES ASINTOTICAS DEL ESTIMADOR MAXIMO VEROSIMIL, CUANDO LA OBSERVACION SE REALIZA, HASTA UN INSTANTE ALEATORIO.

Nos proponemos a continuación, estudiar algunas propiedades asintóticas, de la solución ó soluciones de la ecuación (2.17), en caso de que existan. Para ello, previamente, vamos a desarrollar un teorema, que nos será de vital importancia.

2.4.1 <u>Teorema central del limite, para integrales estocásticas, con limite superior aleatorio.</u>

Antes de considerar el teorema citado, enunciaremos un resultado, que intervendrá en su demostración :

TEOREMA 2.4.1

Sea $f(s)$, un vector aleatorio $\mathbb{R}^m$-valuado, de clase $P_T^{m,1}$ $\forall$ $T > 0$. Si ocurre que :

$$\int_0^{\infty} f^{*}(s)f(s)ds = \infty \qquad \text{c.s.}$$

Entonces :

$$T^{-1/2} \int_0^{\tau_T} f^{*}(s)dW_s \xrightarrow[T \nearrow \infty]{} N(0,b^2)$$

donde :

$$\tau_T = \inf \left\{ t : \int_0^t f^{*}(s)f(s)ds = Tb^2 \right\}$$

y $W = (W_s \ , s \geq 0)$, es un proceso de Wiener

m-dimensional.

Demostración .- (véase Basawa and Prakasa-Rao(1980), pg 404)

TEOREMA 2.4.2

Sea $G(s) = (g_{ij}(s))_{(i = 1,\dots,n \ ; \ j = 1,\dots,m)}$, una

matriz aleatoria, de clase $E_{\Pi}^{n,m}$ $\forall \, T > 0$

Consideremos una familia de instantes aleatorios $(\tau_t, t \geq 0)$

t.q.

a).- Es creciente

b).- $\lim\limits_{t \nearrow \infty} \tau_t = \infty$ (2.19)

Si :

$$\frac{1}{t}\int_0^t g_i^*(s)g_j(s)\,ds \xrightarrow[t\nearrow\infty]{P} g_{ij} \qquad \text{t.q.} \qquad |g_{ij}|<\infty$$

$$i,j = 1,\dots,n \qquad (2.20)$$

donde $\quad g_i(s) = (g_{i1}(s),\dots,g_{im}(s))^*$

$$i = 1,\dots,n$$

Entonces :

$$t^{-1/2}\int_0^t G(s)\,dW_s \xrightarrow[t\nearrow\infty]{} N_n(0,G)$$

siendo $\quad G = (g_{ij}) \quad (i,j = 1,\dots,n\ )$

Demostración :

Es inmediato comprobar, que G, es simétrica y definida no negativa, sin más que tener en cuenta como está definida.

Teniendo en cuenta las propiedades de la normal multivariante, para que el teorema sea cierto, basta con probar; que $\quad \forall\ u = (u_1,\dots,u_n)^* \in \mathbb{R}^n \quad$ t.q. $\quad u^*Gu \neq 0 \quad$:

$$t^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} u_i\int_0^t g_i^*(s)\,dW_s \xrightarrow[t\nearrow\infty]{} N(0,u^*Gu)$$

Sea $\quad g_u(s) = \sum_{i=1}^{n} u_i g_i(s)$

entonces por la condición (2.20), tenemos que :

$$t^{-1} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s) g_u(s) ds \xrightarrow[t \uparrow \infty]{P} u^* G u \qquad (2.21)$$

de donde deducimos que :

$$\int_0^{\infty} g_u^*(s) g_u(s) ds = \infty \qquad [P] \qquad (2.22)$$

Definimos :

$$\bar{g}_u(s) = \begin{cases} g_u(s) & \text{si } 0 \leq s \leq \tau_t \\ \mathbf{1} & \text{si } \tau_t \leq s \leq \bar{\tau}_t \end{cases}$$

donde $\bar{\tau}_t = \tau_t \left(1 + \frac{u^* G u}{m} \right)$, y

$\mathbf{1} = (1,\overset{m}{\ldots},1)^*$

Sea :

$$\nu_t = \inf \left\{ h : \int_0^{h} \bar{g}_u^*(s) \bar{g}_u(s) ds = t u^* G u \right\}$$

Teniendo en cuenta (2.22), y aplicando el teorema 2.4.1 , se deduce que :

$$Y_t = t^{-1/2} \int_0^{\nu_t} \bar{g}_u^*(s)\,dW_s \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} N(0, u^* G u) \tag{2.23}$$

Sea :

$$Z_t = t^{-1/2} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s)\,dW_s$$

Entonces cualesquiera sean $\delta > 0$ y $\alpha > 0$

$$P(| Z_t - Y_t | > \delta) = P(| t^{-1/2} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s)\,dW_s - t^{-1/2} \int_0^{\nu_t} \bar{g}_u^*(s)\,dW_s | > \delta) =$$

$$= P(t^{-1/2} | \int_0^{\bar{\tau}_t} (I_{[s \leq \tau_t]} - I_{[s \leq \nu_t]}) \bar{g}_u^*(s)\,dW_s | > \delta) \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\delta^2} + P(\frac{1}{t} \int_0^{\bar{\tau}_t} | I_{[s \leq \tau_t]} - I_{[s \leq \nu_t]} | \bar{g}_u^*(s) \bar{g}_u(s)\,ds \geq \alpha) =$$

(donde esta última desigualdad es consecuencia del Lema 4.7 de Liptser and Shiryayev I (1972) , pg **106**)

$$= \frac{\alpha}{\delta^2} + P\left(\frac{1}{t} \int_0^{\bar{\tau}_t} (I_{[s \leq \tau_t]} - I_{[s \leq \sigma_t]}) \bar{g}_u^*(s) \bar{g}_u(s)\, ds \geq \alpha ,\ \tau_t > \sigma_t \right)$$

$$+ P\left(\frac{1}{t} \int_0^{\bar{\tau}_t} (I_{[s \leq \sigma_t]} - I_{[s \leq \tau_t]}) \bar{g}_u^*(s) \bar{g}_u(s)\, ds \geq \alpha ,\ \sigma_t > \tau_t \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\delta^2} + P\left(\frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s) g_u(s)\, ds - u^* G u \geq \alpha ,\ \tau_t > \sigma_t \right)$$

$$+ P\left(u^* G u - \frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s) g_u(s) \geq \alpha ,\ \sigma_t > \tau_t \right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\delta^2} + P\left(\left| \frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s) g_u(s)\, ds - u^* G u \right| \geq \alpha \right)$$

Ahora bien, por (2.21), se deduce que :

$$P\left(\left| \frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} g_u^*(s) g_u(s)\, ds - u^* G u \right| \geq \alpha \right) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} 0$$

Luego $\quad Z_t - Y_t \xrightarrow[t \uparrow \infty]{P} 0 \quad$, de donde se deduce,

sin más que tener en cuenta (2.23) , que :

$$Z_t \xrightarrow{L} N(0,u^{*}Gu) \qquad (2.24)$$

(donde L , significa convergencia en ley)

Ahora bien (2.24), es precisamente, lo que queriamos demostrar, por consiguiente :

$$t^{-1/2} \int_0^t G(s)dW_s \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} N_n(0,G)$$

2.4.2 Consistencia y normalidad asintótica, del estimador máximo verosimil

Bajo las condiciones de 2.3.1 y 2.3.2 , habiamos obtenido la ecuación de verosimilitud :

$$D_T - J_T\theta = 0 \qquad (2.25)$$

Donde D_{τ} y J_{τ}, vienen dados en (2.13) y (2.14), respectivamente.

A continuación, vamos a ver un teorema, que nos indica, bajo qué condiciones, la solución de la ecuación (2.25), caso de existir, es débilmente consistente y asintóticamente normal. Para ello, trabajaremos con familias de instantes aleatorios, que satisfacen las condiciones dadas en (2.19).

TEOREMA 2.4.3

Supongamos que θ, es el verdadero valor del parámetro, y sea $(\tau_t\ ,\ t \geq 0)$, una familia de instantes aleatorios, que satisfacen las condiciones (2.19).

Si :

(i) .-

$$\frac{1}{t}\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)ds \xrightarrow[t\uparrow\infty]{P_\theta} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

(ii).-

$$\frac{1}{t} E_\theta \left(\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_j(s,X_s)ds\right) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} g_{ij}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

donde $|g_{ij}|<\infty$ y $G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$

es no singular

Entonces :

1º.- $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ t_{\varepsilon} > 0\ ,$ t.q. $\forall\ t > t_{\varepsilon}$

La ecuación de verosimilitud (2.25), tiene una única solución, con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$, y viene dada por :

$$\hat{\theta}_{\tau_t} = J_{\tau_t}^{-1} D_{\tau_t} \tag{2.26}$$

2º.- La solución $\hat{\theta}_{\tau_t}$, dada en (2.26), es débilmente consistente para θ.

3º.-

$$t^{1/2}\left(\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} N_k\left(0,\ G^{-1}\right)$$

Demostración :

1º.- Por la condición (i), sabemos que :

$$\frac{1}{t} J_{\tau_t} \xrightarrow[t \to \infty]{\mu_\theta} G$$, donde G, es no singular.

Por consiguiente :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ t_{1\varepsilon} > 0 \qquad \text{t.q.} \quad \forall\ t > t_{1\varepsilon}$$

$$\mu_\theta \left(\frac{1}{t} J_{T_t} \quad \text{sea no singular} \right) > 1 - \frac{\varepsilon}{3} > 1 - \varepsilon$$

De ahí, que con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$, la ecuación de verosimilitud (2.25), tenga $\forall\ t > t_{1\varepsilon}$ única solución, que vendrá dada por :

$$\hat{\theta}_{T_t} = J^{-1}_{T_t} D_{T_t}$$

2º.-

Hemos de demostrar que :

$$\hat{\theta}_{T_t} \xrightarrow{\mu_\theta} \theta \qquad \text{cuando} \quad t \nearrow \infty$$

sea $t > t_{1\varepsilon}$, entonces :

$$\mu_\theta (\ \| \hat{\theta}_{T_t} - \theta \| > \varepsilon') \leq \mu_\theta (\| J^{-1}_{T_t} D_{T_t} - \theta \| > \varepsilon') + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leq \mu_\theta\left(\left\| \frac{1}{t} D_{r_t} - \frac{1}{t} J_{r_t}\theta \right\| > \varepsilon' \left\| \left(\frac{1}{t} J_{r_t}\right)^{-1} \right\|^{-1} \right) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta :

$$\frac{1}{t} J_{r_t} \xrightarrow[t \nearrow \infty]{\mu_\theta} G \quad , \quad \text{con } G \text{ , no singular}$$

$\exists\ t_{2\varepsilon}$, t.q. $\forall\ t > t_{2\varepsilon}$

$$\mu_\theta\left(\left\| \left(\frac{1}{t} J_{r_t}\right)^{-1} \right\|^{-1} \geq a > 0\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces $\forall\ t > \max(t_{1\varepsilon}\ ,\ t_{2\varepsilon})$, tenemos :

$$\mu_\theta\left(\| \hat{\theta}_{r_t} - \theta \| > \varepsilon' \right) \leq \mu_\theta\left(\left\| \frac{1}{t} D_{r_t} - \frac{1}{t} J_{r_t}\theta \right\| > \varepsilon' a \right)$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{3}$$

Por consiguiente, es suficiente demostrar que :

$$\frac{1}{t} D_{\tau_t} - \frac{1}{t} J_{\tau_t} \theta \xrightarrow[t \nearrow \infty]{\mu_\theta} 0 \qquad (2.27)$$

siendo :

$$\frac{1}{t} D_{\tau_t} = \frac{1}{t} \left(\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s)(dX_s - \pi_o(s,X_s)ds) \right)_{k\times 1}$$

$$i = 1,\dots,k$$

$$\frac{1}{t} J_{\tau_t} = \frac{1}{t} \left(\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s) \pi_j(s,X_s)ds \right)_{k\times k}$$

$$i,j = 1,\dots,k$$

Luego para que (2.27), sea cierto, basta demostrar :

$\forall \ i = 1,\dots,k$

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s)(dX_s - \pi_o(s,X_s)ds) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{k} \theta_j \frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s) \pi_j(s,X_s)ds \right) \xrightarrow[t \nearrow \infty]{\mu_\theta} 0$$

(2.28)

Ahora bien , la expresión entre paréntesis, del lado izquierdo de (2.28), se puede escribir :

$$\frac{1}{t}\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\left(dX_s - \pi_o(s,X_s)ds - \sum_{j=1}^{k} \theta_j \pi_j(s,X_s)ds\right)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)B^{1/2}(s,X_s)dW_s \qquad [\mu_\theta]$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s)B^{-1/2}(s,X_s)dW_s \qquad [\mu_\theta]$$

(2.29)

Teniendo en cuenta (i), sabemos por el teorema 2.4.2 , (donde: $m = n$, $n = k$, $g_i^*(s) = \pi_i^*(s,X_s)B^{-1/2}(s,X_s)$)

que :

$$\left(t^{-1/2} \int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s)B^{-1/2}(s,X_s)dW_s \right)_{i=1,\dots,k} \xrightarrow{L} N_k(0,G)$$

De donde se deduce , (ver Rohatgi(1980), pg 253)), que :

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^{\tau_t} \pi_i^*(s,X_s) B^{-1/2}(s,X_s)\, dW_s \right) \xrightarrow{\mu_\theta} 0$$
$$i = 1,\dots,k$$

Pero la componente i-esima del vector anterior , es precisamente (2.29), luego todo queda demostrado, y $\hat{\theta}_{\tau_t}$, es débilmente consistente para θ

3º.-

Tendremos que hacer uso del siguiente :

LEMA 2.4.1

Supongamos que :

1.- $M_{\tau_t} \xrightarrow{\mu_\theta} M$, donde M es una matriz no aleatoria y no singular.

2.- $\mu_\theta (\; |Z_{it}| > N) \longrightarrow 0$, cuando $N \nearrow \infty$, $i = 1,\dots,n$ uniformemente en t , en el dominio de variación de t

3.- $Z_t \xrightarrow{L} Z$, donde $Z_t=(Z_{1t},\dots,Z_{nt})^*$

Entonces : $M_{\tau_t} Z_t \xrightarrow{L} MZ$

(véase Taraskin(1974) , pg 218)

Para que la 3ª conclusión del teorema, sea cierta, hemos de ver que :

$$t^{1/2}(\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} N_k(0,G^{-1})$$

Ahora bien :

$$t^{1/2}(\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta) = t^{1/2}(J_{\tau_t}^{-1} D_{\tau_t} - \theta) =$$

$$= t^{1/2} J_{\tau_t}^{-1} (D_{\tau_t} - J_{\tau_t}\theta) \tag{2.30}$$

Pero según se vio en 2.3.2 :

$$\frac{\partial \ln(L_{\tau_t})}{\partial \theta} = D_{\tau_t} - J_{\tau_t} \theta$$

luego (2.30), se puede escribir :

$$t^{1/2}\left(\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta \right) = t\, J_{\tau_t}^{-1} \cdot t^{-1/2} \frac{\partial \ln(L_{\tau_t})}{\partial \theta} \tag{2.31}$$

Pero , se puede comprobar que :

1.- Por (i), $t\, J_{\tau_t}^{-1} \xrightarrow{\mu_\theta} G^{-1}$, cuando $t \uparrow \infty$

2.- Aplicando la desigualdad de Tchebychev , y teniendo en cuenta (ii), se tiene :

$$\mu_\theta \left(\left| t^{-1/2} \frac{\partial \ln(L_{\tau_t})}{\partial \theta_i} \right| > N \right) \underset{N \uparrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$i = 1,\ldots,k$$

uniformemente en t.

3.- Por lo visto, en la demostración de la 2ª conclusión del teorema :

$$t^{-1/2} \frac{\partial \ln(L_{\tau_t})}{\partial \theta} = (D_{\tau_t} - J_{\tau_t} \theta) t^{-1/2} =$$

$$= t^{-1/2} \left(\int_0^{\tau_t} \pi_i^{*}(s,X_s) B^{-1/2}(s,X_s) dW_s \right)$$

$$i = 1,\dots,k$$

que se distribuye asintóticamente, según una $N_k(0, G)$, sin más que aplicar el teorema 2.4.2

Entonces, en virtud del lema 2.4.1, (donde $n = k$, $M_{\tau_t} = tJ_{\tau_t}^{-1}$, $Z_t = t^{-1/2} \frac{\partial \ln(L_{\tau_t})}{\partial \theta}$), teniendo en cuenta (2.31), tenemos que :

$$t^{1/2} (\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta) \xrightarrow[t \nearrow \infty]{} N_k(0, G^{-1})$$

con lo que el teorema, queda probado.

2.5 ESTIMACION MAXIMO VEROSIMIL, DEL COEFICIENTE TENDENCIA DE UN PROCESO DE DIFUSION ORDINARIO, CUANDO DICHO COEFICIENTE, DEPENDE LINEALMENTE DE LOS PARAMETROS, Y SE DISPONE DE N OBSERVACIONES.

2.5.1 Introducción

Consideremos, la familia de E.D.E.

$$dX_t = A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t$$

$$X_o = H \qquad t \geq 0$$

donde, al igual que en la sección 2.3

$\forall\ t \geq 0 \quad X_t$ es $\mathbb{R}^n$-valuada

H es F_o-medible y $P(\|H\|<\infty) = 1$

$\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, siendo Θ , un conjunto abierto.

Y suponemos que :

$$A(t,X_t;\theta) = \pi_o(t,X_t) + \sum_{j=1}^{k} \theta_j \pi_j(t,X_t)$$

siendo $\pi_j(t,X_t)$ $j=0,1,\dots,k$, funciones con valores en $\mathbb{R}^n$, no-anticipativas, y para $j = 1,\ldots,k$, linealmente independientes, sobre $[0,T] \times \mathbb{R}^n$

En las secciones anteriores, los estimadores, tanto en el caso de que la observación se realizara en un intervalo fijo de tiempo, como en el caso de que se hiciera en un intervalo que depende de un instante aleatorio, se habian obtenido, tomando como base una muestra de tamaño $N = 1$, que era la trayectoria observada.

Vamos a considerar en esta sección, el caso , en que disponemos de una muestra de tamaño N, es decir, disponemos de N trayectorias observadas, que denotaremos :

$$x^1(.) \ , x^2(.),\ldots,x^N(.)$$

y supondremos, que son independientes, es decir, que la muestra es aleatoria simple.

Supuesta esta situación, estudiaremos los casos, en que la observación de las N trayectorias, es realizada en :

a).- un intervalo de tiempo fijo

b).- un intervalo de tiempo que depende de un instante aleatorio.

2.5.2 Observación en un intervalo de tiempo fijo.

Supongamos, que las N observaciones, han sido realizadas, en el intervalo de tiempo $[0,T]$, donde $0 < T < \infty$ es fijo. Tenemos entonces la muestra :

$$(\quad X^i(.) = (X^i_t(.) , \quad 0 \leq t \leq T) \quad)$$

$$i = 1,\ldots,N$$

Basándonos en dicha muestra, que suponemos aleatoria simple, vamos a obtener el estimador máximo verosimil del vector paramétrico $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)^*$. Para ello, teniendo en cuenta lo estudiado en la sección 2.2, tenemos que la función de verosimilitud asociada será :

$$L^N_T(X^1(.),\ldots,X^N(.); \theta) = \prod_{i=1}^{N} (\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_o}} (X^i(.);\theta)) =$$

$$= \exp (\sum_{i=1}^{N} ((\theta - \theta_o)^* D^i_T \; - \; \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* J^i_T(\theta + \theta_o))) \tag{2.32}$$

donde : $\forall \; i = 1,\ldots,N$

$$D_T^i = \left(\int_o^T \pi_j^*(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)(dX_s^i - \pi_o(s,X_s^i)ds) \right)_{k\times 1}$$

$$j = 1,\dots,k$$

(2.33)

$$J_T^i = \left(\int_o^T \pi_j^*(s,X_s^i)B^{-1}(s,X_s^i)\pi_h(s,X_s^i)ds \right)_{k\times k}$$

$$j,h = 1,\dots,k$$

(2.34)

Si denotamos por :

$$\mathbb{D}_T^N = \sum_{i=1}^{N} D_T^i \qquad y \qquad \mathbb{J}_T^N = \sum_{i=1}^{N} J_T^i$$

entonces (2.32), se podrá escribir :

$$L_T^N(X^1(.),\dots,X^N(.);\ \theta\ ) =$$

$$= \exp\left((\theta - \theta_o)^* \mathbb{D}_T^N - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* \mathbb{J}_T^N(\theta + \theta_o) \right)$$

(2.35)

Tomando logaritmos, y derivando respecto de θ_j , $j=1,\dots,k$

en (2.35), tenemos :

$$\frac{\partial \ln(L_T^N)}{\partial \theta_j} = \mathbb{D}_{T,j}^N - \sum_{h=1}^{k} \theta_h \, \mathbb{J}_{T,h,j}^N$$

$$j = 1,\ldots,k \qquad (2.36)$$

De donde se deduce, que la ecuación de verosimilitud, será :

$$\mathbb{D}_T^N - \mathbb{J}_T^N \theta = 0 \qquad (2.37)$$

Teniendo en cuenta (2.36), se tiene que :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_h} \left(\frac{\partial \ln(L_T^N)}{\partial \theta_j} \right) = - \mathbb{J}_{T,h,j}^N$$

$$h, j = 1,\ldots,k$$

Por consiguiente, dado que $- \mathbb{J}_T^N$, es definida no positiva, por serlo $- J_T^i$, $i = 1,\ldots,N$, en caso de que exista una única solución de la ecuación (2.37), será un punto de máximo, y vendrá dado por :

$$\hat{\theta}_T^N = (\mathbb{J}_T^N)^{-1} \mathbb{D}_T^N \qquad (2.38)$$

El estimador obtenido, en caso de existir, tiene las mismas propiedades asintóticas, que el que se obtiene para N = 1, basta para ello que la matriz $\mathcal{J}_T^N$, verifique las hipótesis del teorema 2.2.3 .

2.5.3 <u>Observación en un intervalo de tiempo, que depende de un instante aleatorio.</u>

Supongamos ahora, que las N observaciones, han sido realizadas en un intervalo $[0,\tau]$, donde τ , es un determinado instante aleatorio. Tendremos entonces la muestra :

$$\left(\quad X^i(.) = (X_t^i(.), \quad 0 \leq t \leq \tau(X^i(.))) \quad \right)$$

$$i = 1,\ldots,N$$

Basándonos en dicha muestra, que suponemos aleatoria simple, obtendremos el estimador máximo verosímil del vector paramétrico $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)^*$. Para ello consideramos, teniendo en cuenta lo visto en la sección 2.3, la función de verosimilitud :

$$L_\tau^N(X^1(.),\ldots,X^N(.); \theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d\mu_{\tau,\theta}}{d\mu_{\tau,\theta_0}}(X^i(.);\theta) =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \left((\theta - \theta_o)^* D_T^i - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* J_T^i(\theta + \theta_o) \right) \right)$$

(2.39)

donde para $i = 1,\ldots,N$

$$D_T^i = \left(\int_o^T \pi_j^*(s,X_s^i) B^{-1}(s,X_s^i)(dX_s^i - \pi_o(s,X_s^i)ds) \right)_{k\times 1}$$

$$j = 1,\ldots,k$$

(2.40)

$$J_T^i = \left(\int_o^T \pi_j^*(s,X_s^i) B^{-1}(s,X_s^i) \pi_h(s,X_s^i)ds \right)_{k\times k}$$

$$j,h = 1,\ldots,k$$

(2.41)

Si denotamos por :

$$\mathbb{D}_T^N = \sum_{i=1}^{N} D_T^i \qquad y \qquad \mathbb{J}_T^N = \sum_{i=1}^{N} J_T^i$$

entonces (2.39), se podrá escribir :

$$L_T^N(X^1(.),\ldots,X^N(.);\, \theta) =$$

$$= \exp\left((\theta - \theta_o)^* \mathbb{D}_T^N - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* \mathbb{J}_T^N(\theta + \theta_o) \right)$$

(2.42)

Tomando logaritmos en (2.42), y derivando respecto a θ_j, $j = 1,\dots,k$, tenemos :

$$\frac{\partial \ln(L_T^N)}{\partial \theta_j} = \mathbb{D}_{T,j}^N - \sum_{h=1}^{k} \theta_h \mathcal{J}_{T,h,j}^N \qquad j = 1,\dots,k \tag{2.43}$$

De donde se deduce, que la ecuación de verosimilitud, será :

$$\mathbb{D}_T^N - \mathcal{J}_T^N \theta = 0 \tag{2.44}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (2.43), se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_h} \left(\frac{\partial \ln(L_T^N)}{\partial \theta_j}\right) = - \mathcal{J}_{T,h,j} \qquad h,j = 1,\dots,k$$

Por consiguiente, dado que $-\mathcal{J}_T^N$, es definida no positiva, por serlo $-J_T^i$, $i = 1,\dots,N$, en caso de existir única solución de la ecuación (2.44), será un punto de máximo, y vendrá dado por :

$$\hat{\theta}^N_\tau = (\mathcal{J}^N_\tau)^{-1} \mathcal{D}^N_\tau \qquad (2.45)$$

Si consideramos familias de instantes aleatorios : $(\tau_t, t \geq 0)$, que están en las condiciones de (2.19), entonces, el estimador obtenido en (2.45), verifica las mismas propiedades asintóticas que en el caso $N = 1$, siempre y cuando la matriz $\mathcal{J}^N_\tau$, satisfaga las hipótesis del teorema 2.4.3

CAPITULO III

ESTIMACION DEL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LOGARITMICO NORMAL MULTI-DIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS.

3.1 INTRODUCCION

Los procesos estocásticos de difusión logarítmico-normales, unidimensionales, fueron estudiados entre otros, por Tintner and Sengupta(1972), y aplicados a diversos problemas de tipo econométrico, debido a las posibilidades que ofrecen para predecir a través de su tendencia exponencial, y a la capacidad que poseen de ser afectados por factores exogenos, que se introducen en la tendencia. Véanse los trabajos de Tintner and Thomas(1963), Tintner and Patel(1966), Tintner(1973 y Tintner and Bello(1968).

Analogamente , se abordaron los procesos de difusión multidimensionales, aplicándose al mismo tipo de problemas económicos, con tendencias exponenciales, véase Tintner and Narayanan(1966).

En los últimos años, Tintner and Gomez(1979), Gutierrez Jaimez(1981), han estudiado dichos procesos bajo el punto de vista de las E.D.E. de Itô.

Tintner, a lo largo de sus trabajos, estima los parámetros basándose en muestras discretas y utilizando el método de máxima verosimilitud. Nosotros estimaremos el coeficiente tendencia del proceso Logarítmico-Normal multidimensional con factores exogenos, utilizando los resultados obtenidos en el capítulo II.

Primeramente, en la sección 3.2 , definimos el proceso Logarítmico-Normal, sin y con factores exógenos, como solución de una E.D.E., en ambos casos, y comprobamos que en las dos situaciones es un P.D.O.

En 3.3, comprobamos que el coeficiente tendencia del proceso Logarítmico-Normal n-dimensional con m factores exógenos, depende linealmente de los parámetros. Asi mismo estudiamos, bajo qué condiciones sobre los factores exógenos, G_1, ..., G_m , los teoremas 2.2.1 y 2.3.1, son ciertos.

Finalmente, en 3.4, 3.5, y 3.6 , aplicamos los correspondientes resultados obtenidos sobre la estimación máximo verosímil, del coeficiente tendencia, en 2.3, 2.4, y 2.5, a nuestro proceso.

3.2 DIFUSION LOGARITMICO - NORMAL MULTIDIMENSIONAL CON FACTORES EXOGENOS.

3.2.1 Proceso Logarítmico-normal n-dimensional.

Consideremos las funciones :

$$\begin{aligned} A \ : \ [0,\infty) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t,x) &\longrightarrow A(t,x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $A_i(t,x) = a_i x_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$

$i = 1,\dots,n$

y

$$\begin{aligned} B \ : \ [0,\infty) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_n \\ (t,x) &\longrightarrow B(t,x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $B_{ij}(t,x) = b_{ij} x_i x_j$, con $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$i,j = 1,\dots,n$

Sea $B = (b_{ij})_{\ i,j = 1,\dots,n}$, y supondremos, que dicha matriz es : simétrica, definida no negativa y no singular.

PROPOSICION 3.2.1

Sea $X = (X_t, \ 0 \leq t < \infty)$, un proceso con trayectorias casi seguramente continuas, y con valores en $(0,\infty)\times\overset{n}{\ldots}\times(0,\infty)$, entonces las funciones "A", y "B", definidas en (3.1), (3.2), respectivamente, satisfacen : $\forall \ T \in [0, \infty)$

(i) .-

$$P\left(\int_0^T \left\| A(t,X_t(.)) \right\| dt < \infty \right) = 1$$

(ii).-

$$P\left(\int_0^T \left\| B^{1/2}(t,X_t(.)) \right\|^2 dt < \infty \right) = 1$$

Demostración :

(i) .-

Para casi todo $w \in \Omega$, se tiene que :

$$\left\| A(t,X_t(w)) \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 X_{it}^2(w) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \ X_{it}(w) \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \bar{x}_i(w) < \infty$$

siendo $\bar{x}_i(w) = \max\limits_{0 \leq t \leq T} X_{it}(w)$, (existe y es finito por ser continuas las trayectorias del proceso)

Por consiguiente :

$$P\left(\int_0^T \left\| A(t,X_t(.)) \right\| dt < \infty \right) = 1 \qquad \text{c.q.d.}$$

(ii).-

Para casi todo $w \in \Omega$, se tiene que :

$$\left\| B^{1/2}(t,X_t(w)) \right\|^2 = \text{Traza}(B^{1/2}(t,X_t(w))(B^{1/2}(t,X_t(w)))^*)$$

$$= \text{Traza}(B(t,X_t(w))) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} X_{it}^2(w) \leq \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \bar{x}_i^2(w) < \infty$$

luego :

$$P\left(\int_0^T \left\| B^{1/2}(t,X_t(.) \right\|^2 dt < \infty \right) = 1 \qquad \text{c.q.d.}$$

NOTA 3.2.1

Teniendo en cuenta la proposición anterior, (1.14), y (1.15), sabemos que el proceso $X = (X_t \ , \ 0 \leq t < \infty)$, considerado en dicha proposición, es un proceso de Itô, con E.D.E., dada por :

$$dX_t = A(t,X_t)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t \qquad t \geq 0 \tag{3.3}$$

Más aún, es un P.D.O., con coeficientes tendencia y difusión "A", y "B", respectivamente.

A continuación veremos, que la E.D.E. (3.3), sólo admite una única solución.

PROPOSICION 3.2.2

Las funciones "A", y "$B^{1/2}$", satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1, (existencia y unicidad).

Demostración :

1º- $\forall\ x,y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\ t \in [0, \infty)$

$$\| A(t,x) - A(t,y) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (x_i - y_i)^2 \leq$$

$$\leq K_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = K_1 \|x - y\|^2$$

$$\text{donde} \quad K_1 = \max \left\{ a_i^2 ,\ i = 1,\dots,n \right\} \tag{3.4}$$

$$\|B^{1/2}(t,x) - B^{1/2}(t,y)\|^2 =$$

$$= \text{Traza} \left[(B^{1/2}(t,x) - B^{1/2}(t,y)) (B^{1/2}(t,x) - B^{1/2}(t,y))^* \right]$$

$$= \text{Traza} \left[B(t,x) - B^{1/2}(t,x)B^{1/2}(t,y) - B^{1/2}(t,y)B^{1/2}(t,x) + B(t,y) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{ii}(x_i - y_i)^2 \leq K_2 \|x - y\|^2 \qquad (3.5)$$

donde : $K_2 = \max \left\{ |b_{ii}| , i = 1,\dots,n \right\}$

Sumando (3.4), y (3.5) , tenemos :

$$\|A(t,x) - A(t,y)\|^2 + \|B^{1/2}(t,x) - B^{1/2}(t,y)\|^2 \leq$$

$$\leq (K_1 + K_2) \|x - y\|^2$$

2º.- $\forall \ x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \ t \in [0,\infty)$

$$\|A(t,x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2 \leq K_1(1 + \|x\|^2) \qquad (3.6)$$

$$\left\| B^{1/2}(t,x) \right\|^2 = \text{Traza} \left[B^{1/2}(t,x) (B^{1/2}(t,x))^* \right]$$

$$= \text{Traza}(B(t,x)) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \, x_i^2 \leq K_2 (1 + \|x\|^2) \tag{3.7}$$

Sumando (3.6) y (3.7), tenemos :

$$\| A(t,x) \|^2 + \| B^{1/2}(t,x) \|^2 \leq (K_1 + K_2)(1 + \|x\|^2)$$

Tomando $k = K_1 + K_2$, se verifican las condiciones del teorema 1.7.1, y por consiguiente la E.D.E., sólo admite una única solución.

DEFINICION 3.2.1

El proceso solución de la E.D.E. (3.3), que según se ha visto existe y es único, recibe el nombre de " Proceso Logarítmico- Normal n-dimensional ". En lo que sigue lo denotaremos como LN(n), y es un P.D.O., con coeficiente tendencia $A(t,x)$, y coeficiente ó matriz difusión $B(t,x)$.

3.2.2 Proceso Logarítmico-normal n-dimensional, con m factores exógenos

En esta subsección, vamos a complicar el proceso estudiado en 3.2.1, introduciendo en el coeficiente tendencia $A(t,x)$, unas determinadas funciones del tiempo, $\mathbb{R}$-valuadas, que reciben el nombre de " factores exógenos ".

Consideremos la función :

$$
\begin{aligned}
A_G : \quad [0,\infty) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(t,x) &\longrightarrow A_G(t,x)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

donde :

$$A_{G,i}(t,x) = \Big(\sum_{j=0}^{m} a_j^i \, G_j(t) \Big) \, x_i$$

$$\text{con} \quad a_j^i \in \mathbb{R} \quad , \quad i = 1,\ldots,n \quad \text{y} \quad G_o(t) = 1 \quad \forall\, t$$

PROPOSICION 3.2.3

Supongamos que las funciones G_1 , $G_2, \ldots,$ G_m , definidas sobre $[0,\infty)$, y con valores en $\mathbb{R}$, son continuas. Entonces la función A_G , dada en (3.8), verifica :

$\forall \ T \in [0,\infty)$

$$P\left(\int_0^T \| A_G(t, X_t(.)) \| \, dt < \infty \right) = 1$$

donde $X = (X_t \ , \ t \geq 0)$, es cualquier proceso con trayectorias casi seguramente continuas, y con valores en :

$$(0,\infty) \times \overset{n}{\ldots} \times (0,\infty)$$

Demostración :

Para casi todo $w \in \Omega$

$$\| A_G(t, X_t(w)) \| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j^i \, G_j(t) \right)^2 X_{it}^2(w) \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=0}^{m} a_j^i \, G_j(t) \right| X_{it}(w) \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_i (m+1) \, X_{it}(w) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_i (m+1) \, \bar{x}_i(w) < \infty$$

siendo $\bar{g}_i = \max \left\{ \max_t \left| a_j^i \, G_j(t) \right| \ , \ j = 0,1,\ldots,m \right\}$

Asi pues :

$$P\left(\int_0^T \| A_G(t, X_t(.)) \| \, dt < \infty \right) = 1 \quad \text{c.q.d.}$$

NOTA 3.2.2

Teniendo en cuenta la proposición anterior, junto con (1.14), y (1.15), sabemos que un proceso $X = (X_t \ , \ t \geq 0)$, de las caracteristicas consideradas en la citada proposición, es un proceso de Itô, con E.D.E., dada por :

$$dX_t = A_G(t,X_t)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t \qquad t \geq 0 \tag{3.9}$$

donde B , es la función considerada en (3.2). Más aún es un P.D.O., con coeficientes tendencia y difusión "A_G" , y "B", respectivamente.

A continuación veremos, que la E.D.E. anterior, sólo admite una única solución.

PROPOSICION 3.2.4

Supongamos que las funciones $G_1,\ldots,G_m$, definidas en el intervalo $[0,\infty)$, y con valores en $\mathbb{R}$, son continuas y acotadas. Entonces las funciones "A_G", y "$B^{1/2}$", satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1, (teorema de existencia y unicidad).

Demostración :

1.- $\forall \; x,y \in \mathbb{R}^n \quad y \quad \forall \; t \in [0,\infty)$

$$\left\| A_G(t,x) - A_G(t,y) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=0}^{m} a_j^i \, G_j(t) \Big)^2 (x_i - y_i)^2 \leq$$

$$\leq \bar{K}_1 \; \| x - y \|^2 \qquad (3.10)$$

donde :

$$\bar{K}_1 = \max \left\{ \text{de los : } \bar{\bar{g}}_i \; , \; i = 1, \ldots, n \right\}$$

$$\text{con} \quad \bar{\bar{g}}_i = \max_t \Big(\sum_{j=0}^{m} G_j(t) \, a_j^i \Big)^2$$

Sumando (3.10) y (3.5) , se tiene que :

$$\left\| A_G(t,x) - A_G(t,y) \right\|^2 + \left\| B^{1/2}(t,x) - B^{1/2}(t,y) \right\|^2 \leq$$

$$\leq \left(\bar{K}_1 + K_2 \right) \| x - y \|^2$$

2.- $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\ t \in [0,\infty)$

$$\| A_G(t,x) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=o}^{m} a_j^i\, G_j(t) \right)^2 x_i^2 \leq$$

$$\leq \bar{K}_1 \left(1 + \| x \|^2 \right) \qquad (3.11)$$

Sumando (3.11), y (3.7), se tiene :

$$\| A_G(t,x) \|^2 + \| B^{1/2}(t,x) \|^2 \leq (\bar{K}_1 + K_2)(1 + \| x \|^2)$$

Asi pues, tomando $k = \bar{K}_1 + K_2$, se verifican las condiciones del teorema 1.7.1, y por lo tanto, la E.D.E., dada en (3.9), sólo admite, una única solución.

DEFINICION 3.2.2

El proceso solución de la E.D.E. (3.9), que según se ha visto, existe y es único, recibe el nombre de : " Proceso Logarítmico Normal n-dimensional, con m factores exogenos, $(G_1,\ldots,G_m)$ ". En lo que sigue será denotado como LN(n,m), y es un P.D.O., con coeficiente tendencia $A_G(t,x)$, y coeficiente difusión $B(t,x)$.

3.3 CONTINUIDAD ABSOLUTA DE LAS MEDIDAS INDUCIDAS POR EL PROCESO LN(n,m). VEROSIMILITUD ASOCIADA.

3.3.1 Introducción.

Consideremos la familia de E.D.E., dependiente del vector paramétrico θ, siguiente :

$$
\begin{aligned}
dX_t &= A(t,X_t;\theta)dt + B^{1/2}(t,X_t)dW_t \\
X_o &= H \qquad\qquad t \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

donde :

$\forall\ t \in [0,\infty)\ ,\ X_t \in (0,\infty)\times\overset{n}{\cdots}\times(0,\infty)$

$\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{n(m+1)})^{*} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n(m+1)}$, siendo

Θ , un abierto.

$$
A(t,X_t;\theta)=\begin{pmatrix}
(\theta_1 + \theta_2\, G_1(t) + \ldots + \theta_{m+1}G_m(t))X_{1t} \\
(\theta_{m+2} + \theta_{m+3}\, G_1(t) + \ldots + \theta_{2(m+1)}G_m(t))X_{2t} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\theta_{(n-1)(m+1)+1} + \theta_{(n-1)(m+1)+2}\, G_1(t) + \ldots + \theta_{n(m+1)}G_m(t))X_{nt}
\end{pmatrix}_{n\times 1}
\tag{3.13}
$$

$$B(t,X_t) = \begin{pmatrix} b_{11}X_{1t}^2 & b_{12}X_{1t}X_{2t} & \cdots\cdots\cdots & b_{1n}X_{1t}X_{nt} \\ b_{21}X_{2t}X_{1t} & b_{22}X_{2t}^2 & \cdots\cdots\cdots & b_{2n}X_{2t}X_{nt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}X_{nt}X_{1t} & b_{n2}X_{nt}X_{2t} & \cdots\cdots\cdots & b_{nn}X_{nt}^2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{3.14}$$

siendo : $G_1(t),\ldots,G_m(t)$, funciones $\mathbb{R}$-valuadas, continuas y acotadas, sobre $[0,\infty)$. Y $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, una matriz simétrica, definida no negativa, y no singular.

En 3.2.2, se comprobó, que los coeficientes "A", y "$B^{1/2}$", dados en (3.13), y (3.14), respectivamente, satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1, (existencia y unicidad), y el proceso solución era el LN(n,m), siendo $G_1,\ldots,G_m$, los factores exógenos.

Estamos interesados, en la estimación del vector paramétrico θ, (pues las b_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, son conocidas), utilizando los resultados obtenidos en el capítulo II. En las secciones 3.4, 3.5, y 3.6, abordaremos este problema, en sus distintas situaciones, respectivamente. Pero previamente, y con objeto de que los resultados antes aludidos, puedan ser empleados, hemos de ver :

1º.- Que el coeficiente tendencia del proceso LN(n,m), dado en (3.13), depende linealmente de los pará-metros.

2º.- Qué condiciones han de verificar los factores exógenos : $G_1,\ldots,G_m$, con objeto de que los resultados sobre continuidad absoluta de medidas inducidas, tanto en el caso de que el intervalo de tiempo sea fijo (teorema 2.2.1), como en el caso de que sea aleatorio (teorema 2.3.1), sean ciertos. Pues los citados teoremas, son los que nos proporcionan, la derivada Radon-Nikodym, que utilizaremos como verosimilitud asociada.

La primera cuestión, la veremos a continuación, mientras que la segunda, será objeto de estudio en las subsecciones 3.3.2 y 3.3.3.

Teniendo en cuenta (3.13), es inmediato comprobar que el coeficiente tendencia $A(t,X_t;\theta)$, del proceso LN(n,m), se puede escribir :

$A(t,X_t;\Theta) =$

$$\Theta_1 \begin{pmatrix} X_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \Theta_2 \begin{pmatrix} G_1(t)X_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \Theta_{m+1} \begin{pmatrix} G_m(t)X_{1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\Theta_{m+2} \begin{pmatrix} 0 \\ X_{2t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \Theta_{m+3} \begin{pmatrix} 0 \\ G_1(t)X_{2t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \Theta_{2(m+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ G_m(t)X_{2t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$\Theta_{(n-1)(m+1)+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X_{nt} \end{pmatrix} + \Theta_{(n-1)(m+1)+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_1(t)X_{nt} \end{pmatrix} + \dots + \Theta_{n(m+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_m(t)X_{nt} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n(m+1)} \Theta_j \, \pi_j(t,X_t) \quad \text{, donde} \quad \forall \; j \in \left\{1,\dots,n(m+1)\right\} \qquad (3.15)$$

$$\pi_j(t,X_t) \quad = \quad (\, \delta_{1i} \;\; \delta_{2i} \; \dots \; \delta_{ni})^{*} \, G_{j-K_j}(t) \; X_{it}$$

siendo :

"i", el único elemento perteneciente a

$\left\{ 1,2,\ldots,n \right\}$, t.q

$$j \in \left\{ (i-1)m+i,\ldots,im+i \right\}$$

$$K_j = (i-1)(m+1)+1$$

Por consiguiente, el coeficiente tendencia del proceso $LN(n,m)$, se puede poner en la forma considerada en (2.2), donde $k = n(m+1)$, y $\pi_o(t,X_t) = 0$. Es inmediato comprobar, que las funciones : π_j , $j = 1,\ldots,n(m+1)$, antes definidas, verifican todas las condiciones, que sobre ellas se requería en el capítulo II.

3.3.2 Continuidad absoluta de medidas inducidas, cuando se considera un intervalo de tiempo fijo.

PROPOSICION 3.3.1

Sea $\theta_o \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n(m+1)}$, un valor fijo, aunque arbitrario, del parámetro. Se verifica entonces : $\forall\ T \in (0,\infty)$, fijo

(1).- π_j y $B^{1/2}$, definidos en (3.15), y (3.14), respectivamente, satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1, $\forall\ j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$

(2).- $\forall \ t \leq T$ y $\forall \ j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$

$$B^{1/2}(t,X_t) \ \mathbb{B}_j(t,X_t) = \pi_j(t,X_t) \qquad (3.16)$$

tiene solución con respecto a $\mathbb{B}_j(t,X_t)$,

y ello $[\mu_{\theta_0}]$

(3).- $\forall \ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n(m+1)}$ y $\forall \ j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$

$$\mu_\theta\left(\int_0^T \mathbb{B}_j^*(t,X_t) \ \mathbb{B}_j(t,X_t)dt < \infty \right) = 1$$

Demostración:

(1).- Es inmediato, sin más que tener en cuenta la proposición 3.2.4

(2).- Basta demostrar que $\det(B(t,X_t)) \neq 0$, ahora bien :

$$\det(B(t,X_t)) = \det(B). \prod_{i=1}^{n} X_{it}^2$$

Pero como $\det(B) \neq 0$, y $\forall \ i \in \left\{ 1,\ldots,n \right\}$

$X_{it} \in (0,\infty)$, resulta que $\det(B(t,X_t)) \neq 0$, de donde se deduce que $\det(B^{1/2}(t,X_t)\,) \neq 0$,

y por consiguiente el sistema (3.16), tiene

solución con respecto a $\mathbb{B}_j(t,X_t)$, cualesquiera sea $j \in \left\{1,\ldots,n(m+1).\right\}$

(3).-

Sea $j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$, $\exists\ i \in \left\{1,\ldots,n\right\}$

t.q. $j \in \left\{(i-1)m+i,\ldots,\ im+i\right\}$

de manera que :

$$\pi_j(t,X_t) = (\delta_{1i}\ \delta_{2i}\ \ldots\ \delta_{ni})^{*} G_{j-K_j} X_{it}$$

con $K_j = (i-1)(m+1)+1$, según se vio en (3.15).

Calculemos :

$$\int_0^T \mathbb{B}_j^{*}(t,X_t).\mathbb{B}_j(t,X_t)dt =$$

$$= \int_0^T \pi_j^{*}(t,X_t)\ B^{-1}(t,X_t)\ \pi_j(t,X_t)dt \tag{3.17}$$

Es fácil comprobar que :

$$B^{-1}(t,X_t) = \frac{1}{\det(B)} \left(\frac{B_{pq}}{X_{pt}\, X_{qt}} \right)_{p,q\, =\, 1,\ldots,n}$$

donde B_{pq} , es el adjunto, con su correspondiente signo, del elemento b_{pq} , en la matriz B , $\forall\ p,q \in \left\{ 1,\ldots,n \right\}$

Sustituyendo $\pi_j(t,X_t)$, y $B^{-1}(t,X_t)$, por sus correspondientes expresiones en (3.17), resulta :

$$\int_o^T (\delta_{1i}, \ldots \delta_{ni}) G_{j-K_j} X_{it} \frac{1}{\det(B)} \left(\frac{B_{pq}}{X_{pt} X_{qt}} \right) \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{ni} \end{pmatrix} G_{j-K_j} X_{it} dt$$

$$p,q = 1,\ldots,n$$

$$= \frac{B_{ii}}{\det(B)} \int_o^T G^2_{j-K_j}(t) dt < \infty$$, sin más que tener en

cuenta, que los factores exógenos son funciones continuas y acotadas. Por consiguiente $\forall\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n(m+1)}$

$$\mu_\theta\left(\int_0^T \mathcal{B}_j^*(t,X_t)\, \mathcal{B}_j(t,X_t)dt < \infty \right) = 1, \quad \forall\, j \in \left\{1,\dots,n(m+1)\right\}$$

Asi pues, teniendo en cuenta el teorema 2.2.1 , tendremos asegurado que :

1º.- $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\mu_\theta \sim \mu_{\theta_o}$$

2º.-

$$\frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_o}}(X) = \exp\left((\theta-\theta_o)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta-\theta_o)^* J_T(\theta+\theta_o) \right)$$

siendo :

$$D_T = \left(\int_0^T \pi_j^*(t,X_t) B^{-1}(t,X_t) dX_t \right)_{\substack{n(m+1)\times 1 \\ j=1,\dots,n(m+1)}} \tag{3.18}$$

$$J_T = \left(\int_0^T \pi_j^*(t,X_t) B^{-1}(t,X_t) \pi_h(t,X_t) dt \right)_{\substack{n(m+1)\times n(m+1) \\ j,h=1,\dots,n(m+1)}} \tag{3.19}$$

A continuación, vamos a calcular las componentes del vector D_T, y de la matriz J_T , respectivamente :

Sea $j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$ arbitrario, entonces teniendo en cuenta la definición de $\pi_j(t,X_t)$, se tendrá :

$$D_{T,j} = \int_o^T (\delta_{1i} \;\ldots\; \delta_{ni}) G_{j-K_j} X_{it} \frac{1}{\det(B)} \left(\frac{B_{pq}}{X_{pt} X_{qt}} \right) dX_t$$

$$= (\det(B))^{-1} \sum_{q=1}^{n} \int_o^T \frac{B_{iq}\, G_{j-K_j}(t)}{X_{qt}} \, dX_{qt}$$

Sean $j,h \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$ arbitrarios, existe entonces un único "i", y un único "f", ambos pertenecientes al conjunto $\left\{ 1,\ldots,n \right\}$, t.q :

$$j \in \left\{ (i-1)m+i \,,\ldots,\, im+i \right\}, \quad h \in \left\{ (f-1)m+f,\ldots,\, fm+f \right\}$$

de manera que :

$$\pi_j(t,X_t) = (\delta_{1i} \;\; \dots \;\; \delta_{ni})^* \, G_{j-K_j}(t) \, X_{it}$$

$$K_j = (i-1)(m+1)+1$$

y

$$\pi_h(t,X_t) = (\delta_{1f} \;\; \dots \;\; \delta_{nf})^* \, G_{h-K_h}(t) \, X_{ft}$$

$$K_h = (f-1)(m+1)+1$$

De todo lo cual se deduce :

$$J_{T,j,h} = \int_0^T (\delta_{1i} \;\; \dots \;\; \delta_{ni}) G_{j-K_j}(t) X_{it} \frac{1}{\det(B)} \left(\frac{B_{pq}}{X_{pt} X_{qt}} \right) \begin{pmatrix} \delta_{1f} \\ \vdots \\ \delta_{nf} \end{pmatrix} G_{h-K_h}(t) X_{ft} dt$$

$$= \left(\det(B) \right)^{-1} \int_0^T B_{if} \, G_{j-K_j}(t) \, G_{h-K_h}(t) dt$$

NOTA 3.3.1

Obsérvese, que para $T \in (0,\infty)$ fijo, la matriz J_T , es no aleatoria.

3.3.3 <u>Continuidad absoluta de medidas inducidas, cuando se considera un intervalo de tiempo que depende de un instante aleatorio.</u>

PROPOSICION 3.3.2

Sea $\theta_o \in \Theta \subseteq R^{n(m+1)}$, un valor fijo, aunque arbitrario, del parámetro, y sea τ , un instante aleatorio sobre C.

Si ocurre que :

$$\int_o^{\infty} G_j^2(t)\,dt < \infty \qquad j = 1,\ldots,m \tag{3.20}$$

Entonces :

(1).- $\forall\ j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$, las funciones π_j , y $B^{1/2}$, dadas en (3.15), y (3.14), respectivamente, satisfacen las condiciones del teorema 1.7.1

(2).- $\forall\ t \leq \tau$ y $\forall\ j \in \left\{ 1,\ldots,n(m+1) \right\}$

el sistema de ecuaciones :

$$B^{1/2}(t,X_t)\ \mathfrak{B}_j(t,X_t) = \pi_j(t,X_t)$$

tiene solución con respecto a $\mathfrak{B}_j(t,X_t)$ $[\mu_{\theta_0}]$

(3).- $\forall\ \theta \in \Theta$ y $\forall\ j \in \{1,\ldots,n(m+1)\}$

$$\mu_{T,\theta}\left(\int_0^T \mathfrak{B}_j^*(t,X_t)\ \mathfrak{B}_j(t,X_t)dt < \infty \right) = 1$$

Demostración :

(1).- Es inmediato teniendo en cuenta la proposición 3.2.4

(2).- Es la misma, que la del apartado (2), de la proposición 3.3.1

(3).- Sea $j \in \{1,\ldots,n(m+1)\}$

a través de un razomamiento análogo al efectuado en la demostración del apartado (3), de la proposición 3.3.1 , se obtiene :

$$\int_0^T \mathbb{B}_j^*(t,X_t)\mathbb{B}_j(t,X_t)dt = \int_0^T \pi_j^*(t,X_t)\, B^{-1}(t,X_t)\, \pi_j(t,X_t)dt$$

$$= \frac{B_{ii}}{\det(B)} \int_0^T G^2_{j-K_j}(t)dt < \infty$$, sin más

que tener en cuenta (3.20).

Por consiguiente $\forall\ \theta \in \Theta$

$$\mu_{T,\theta}\left(\int_0^T \mathbb{B}_j^*(t,X_t)\ \mathbb{B}_j(t,X_t)dt < \infty \right) = 1 \qquad \text{c.q.d.}$$

Por el teorema 2.3.1, sabemos entonces, que :

1º.- $\forall\ \theta \in \Theta \qquad \mu_{T,\theta} \sim \mu_{T,\theta_0}$

2º.-

$$\frac{d\mu_{T,\theta}}{d\mu_{T,\theta_0}}(X) = \exp\left((\theta - \theta_0)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^* J_T(\theta + \theta_0) \right)$$

donde :

$$D_T = \left(\frac{1}{\det(B)} \sum_{q=1}^{n} \int_o^T \frac{B_{iq} \, G_{j-K_j}(t)}{X_{qt}} \, dX_{qt} \right)_{n(m+1)\times 1}$$

$$j = 1,\ldots,n(m+1)$$

(3.21)

$$J_T = \left(\frac{1}{\det(B)} \int_o^T B_{if} \, G_{j-K_j}(t) G_{h-K_h}(t) dt \right)_{n(m+1)\times n(m+1)}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

(3.22)

3.4 ESTIMACION MAXIMO VEROSIMIL DEL COEFICIENTE TENDENCIA, DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO LA OBSERVACION SE REALIZA EN UN INTERVALO DE TIEMPO FIJO.

3.4.1 Estimador máximo verosímil

Teniendo encuenta las subsecciones 2.2.2 y 3.3.2 , vamos a obtener, el estimador máximo verosímil, del vector paramétrico θ, supuesto que disponemos de una trayectoria observada del proceso LN(n,m), en el intervalo $[0,T]$, que será denotada $X(.)=(X_t,\ 0 \leq t \leq T)$

La función de verosimilitud será :

$$L_T(\ X(.);\theta) = \exp(\ (\theta - \theta_0)^* D_T - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^* J_T(\theta + \theta_0)\ ) \tag{3.23}$$

donde D_T y J_T , vienen dados en (3.18) y (3.19), respectivamente.

Tomando logaritmos en (3.23), derivando después con respecto a θ_j , $j = 1,\dots,n(m+1)$, e igualando a cero, obtenemos la ecuación de verosimilitud, en forma vectorial siguiente :

$$D_T - J_T\theta = 0 \tag{3.24}$$

De donde deducimos, que caso de existir, el estimador máximo verosímil, vendrá dado por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T$$

3.4.2 Propiedades asintóticas

Estudiamos aqui, qué condiciones hemos de exigir a los factores exógenos : $G_1,\ldots,G_m$, para que el estimador máximo verosímil, caso de existir, sea débilmente consistente y asintóticamente normal.

PROPOSICION 3.4.1

Si $G_1(t),\ldots,G_m(t)$, son tales que :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T G_i(t)\, G_k(t)\, dt = \bar{m}_{ik} < \infty \qquad i,k = 0,1,\ldots,m \tag{3.25}$$

siendo $M = (\bar{m}_{ik})_{\ i,k = 0,1,\ldots,m}$ no singular

Y $G_0(t) = 1 \quad \forall\, t \in [0,T]$

En esas condiciones, las hipótesis exigidas en el teorema 2.2.3 , son ciertas.

Demostración :

Tenemos que demostrar :

(i).-

$$\frac{1}{T}\int_0^T \pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{\mu_\theta} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

(ii).-

$$\frac{1}{T}\int_0^T E_\theta(\pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t))\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

Donde $G = (g_{jh})_{\ j,h = 1,\ldots,n(m+1)}$, es no singular, y con elementos finitos.

Ahora bien :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \pi_j^*(t,X_t)B^{-1}(t,X_t)\pi_h(t,X_t)\,dt = (\text{véase } (3.19)\ ) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{B_{if}}{T\det(B)} \int_0^T G_{j-K_j}(t)\ G_{h-K_h}(t)\,dt = \frac{B_{if}}{\det(B)}\ \overline{m}_{j-K_j h-K_h}$$

Donde la última igualdad, es consecuencia de (3.25).

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{T} J_{T,j,h}$, es no aleatorio en nuestro caso, si denotamos :

$$g_{jh} = \frac{B_{if}}{\det(B)} \bar{m}_{j-K_j h-K_h} < \infty$$

Entonces para que (i), y (ii), sean ciertos, sólo falta demostrar, que la matriz $G = (g_{jh})_{j,h = 1,\ldots,n(m+1)}$, es no singular. Lo cual es inmediato, sin más que tener en cuenta , que dicha matriz, se puede descomponer en nxn cajas, siendo cada una de ellas de dimensión $(m+1)\times(m+1)$, siendo la caja que ocupa el lugar (i,f) :

$$\frac{B_{if}}{\det(B)} \begin{pmatrix} \bar{m}_{oo} & \cdots & \bar{m}_{om} \\ \bar{m}_{lo} & \cdots & \bar{m}_{lm} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \bar{m}_{mo} & \cdots & \bar{m}_{mm} \end{pmatrix} = \frac{B_{if}}{\det(B)} M$$

De donde se deduce que :

$$\det(G) = (\det(M))^{n}(\det(B^{-1}))^{m+1} \neq 0$$

ya que $\det(M) \neq 0$ y $\det(B^{-1}) \neq 0$

En virtud de la proposición anterior , y teniendo en cuenta el teorema 2.2.3 , sabemos que :

1.- $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ T_\varepsilon > 0$ t.q. $\forall\ T > T_\varepsilon$

La ecuación de verosimilitud (3.24), tiene única solución , con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$, solución que viene dada por :

$$\hat{\theta}_T = J_T^{-1} D_T$$

2.-

Dicha solución es débilmente consistente para θ

3.-

$$T^{1/2}\ (\ \hat{\theta}_T\ -\ \theta\ )\ \xrightarrow[T \to \infty]{}\ N_{n(m+1)}(\ 0,\ G^{-1})$$

(donde en todo lo anterior, suponemos que θ es el verdadero valor del parámetro)

3.5 ESTIMACION MAXIMO VEROSIMIL DEL COEFICIENTE TENDENCIA, DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO LA OBSERVACION SE REALIZA HASTA UN INSTANTE ALEATORIO.

3.5.1 Estimador máximo verosímil.

Teniendo en cuenta las subsecciones 2.3.2, y 3.3.3, vamos a obtener el estimador máximo verosímil, del vector paramétrico θ , supuesto que disponemos de una trayectoria observada del proceso, hasta un cierto instante aleatorio τ_t , perteneciente a una familia de instantes aleatorios $(\tau_s \ , \ s \geq 0)$, que suponemos verifica las condiciones dadas en (2.19).

Sea $X(.) = (X_s \ , \ 0 \leq s \leq \tau_t)$, la trayectoria observada. La función de verosimilitud, será :

$$L_{\tau_t}(X(.); \theta) = \exp((\theta - \theta_o)^* D_{\tau_t} - \frac{1}{2}(\theta - \theta_o)^* J_{\tau_t} (\theta + \theta_o)) \tag{3.26}$$

donde D_{τ_t} , y J_{τ_t} , vienen dados en (3.21), y (3.22), respectivamente.

Tomando logaritmos en (3.26), derivando después con respecto a θ_j , $j = 1,\ldots,n(m+1)$, e igualando a cero, obtenemos la ecuación de verosimilitud, en forma vectorial siguiente :

$$D_{T_t} - J_{T_t}\theta = 0 \qquad (3.27)$$

De donde se deduce, que en caso de existir, el estimador máximo verosímil, vendrá dado por :

$$\hat{\theta}_{T_t} = J_{T_t}^{-1} D_{T_t}$$

3.5.2 Propiedades asintóticas

Al igual que se hizo en el caso de observación no aleatoria, vamos a estudiar ahora , qué condiciones hemos de imponer a los factores exógenos $G_1, \ldots, G_m$, para que el estimador máximo verosímil, caso de existir, sea débilmente consistente y asintóticamente normal.

PROPOSICION 3.5.1

Supongamos, que los factores exógenos : $G_1(t),\ldots,G_m(t)$, son tales que :

(i) .-

$$\frac{1}{t}\int_0^t G_i(s)\, G_k(s)ds \xrightarrow[t\to\infty]{\mu_\theta} \overline{m}_{ik} < \infty$$

$$i,k = 0,1,\ldots,m$$

(ii).-

$$\frac{1}{t} E_\theta\left(\int_0^t G_i(s)\, G_k(s)ds\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \overline{m}_{ik}$$

$$i,k = 0,1,\ldots,m$$

Donde $M = (\overline{m}_{ik})_{i,k = 0,1,\ldots,m}$, es no singular ,

$G_o(s) = 1 \quad \forall \ s \in [0,\infty)$, y θ , es el verdadero valor del parámetro.

Entonces, las condiciones del teorema 2.4.3, son ciertas.

Demostración :

Tenemos que demostrar :

(1).- $$\frac{1}{t}\int_0^t \pi_j^*(s,X_s)B^{-1}(s,X_s)\pi_h(s,X_s)ds \xrightarrow[t\to\infty]{\mu_\theta} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

(2).-

$$\frac{1}{t} E_{\theta}\left(\int_0^t \pi_j^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s) \pi_h(s,X_s)\,ds \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} g_{jh}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

Donde $G = (g_{jh})_{\;j,h = 1,\ldots,n(m+1)}$, es una matriz no singular , cuyos elementos son finitos.

Veámoslo :

(1).-

Es fácil ver, mediante un razonamiento análogo al que se hizo en la proposición 3.4.1, que:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \pi_j^*(s,X_s) B^{-1}(s,X_s) \pi_h(s,X_s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{t} \frac{B_{if}}{\det(B)} \int_0^t G_{j-K_j}(s)\, G_{h-K_h}(s)\, ds \xrightarrow[t \to \infty]{\mu_\theta} \frac{B_{if}}{\det(B)} \bar{m}_{j-K_j h-K_h}$$

$$j,h = 1,\ldots,n(m+1)$$

(sin más que tener en cuenta la hipótesis (i))

(2) .- Analogamente, teniendo en cuenta la hipótesis (ii), se tendrá que :

$$\frac{1}{t} E_{\theta}\left(\int_{0}^{\tau_t} \pi_j^{*}(s,X_s) B^{-1}(s,X_s) \pi_h(s,X_s) ds \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{B_{1f}}{\det(B)} \bar{m}_{j-K_j h-K_h}$$

$$j,h = 1,\dots,n(m+1)$$

Sea $\quad g_{jh} = \dfrac{B_{1f}}{\det(B)} \bar{m}_{j-K_j h-K_h} < \infty$

Entonces la matriz $G = (g_{jh})_{j,h = 1,\dots,n(m+1)}$, es no singular, (véase proposición 3.4.1). Con lo cual queda probada la proposición

En virtud de esta proposición, y teniendo en cuenta el teorema 2.4.3 , sabemos que :

1º.- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $t_{\varepsilon} > 0$, t.q. $\forall$ $t > t_{\varepsilon}$

la ecuación de verosimilitud (3.27), tiene una única solución, con probabilidad mayor que $1-\varepsilon$, y viene dada por:

$$\hat{\theta}_{\tau_t} = J_{\tau_t}^{-1} D_{\tau_t}$$

2º.- Dicha solución, es débilmente consistente para θ.

3º.-

$$t^{1/2} \left(\hat{\theta}_{\tau_t} - \theta \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} N_{n(m+1)}\left(0 , G^{-1} \right)$$

3.6 ESTIMACION MAXIMO VEROSIMIL DEL COEFICIENTE TENDENCIA DEL PROCESO LN(n,m), CUANDO SE DISPONE DE N OBSERVACIONES.

En las secciones 3.4 , y 3.5 , hemos estimado por el procedimiento de máxima verosimilitud, el vector paramétrico θ, que interviene en el coeficiente tendencia del proceso LN(n,m), (véase (3.12)). Hemos considerado los casos, en que la observación del proceso se realiza en un intervalo fijo de tiempo, (sección 3.4), y en un intervalo que depende de un instante aleatorio (sección 3.5). Pero en ambas situaciones la muestra estaba constituida por una trayectoria observada. Consideramos ahora el caso de que la muestra observada esté constituida por N trayectorias. Bajo esta hipótesis y supuesto que las observaciones son independientes, vamos a analizar las dos situaciones antes aludidas.

3.6.1 <u>Observación en un intervalo de tiempo fijo.</u>

Supongamos que las N trayectorias , han sido observadas en el intervalo $[0,T]$, (donde $0 < T < \infty$) , de manera que disponemos de la muestra :

$$\left(X^{i}(.) = (X^{i}_{t} \, , \; 0 \leq t \leq T) \right)$$

$$i = 1,\ldots,N \qquad (3.28)$$

La función de verosimilitud, será :

$$L_T^N(X^1(.),\dots,X^N(.);\ \theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d\mu_\theta}{d\mu_{\theta_o}} (X^i(.);\ \theta) =$$

$$= \exp\left((\theta - \theta_o)^* \mathcal{D}_T^N - \frac{1}{2} (\theta - \theta_o)^* \mathcal{J}_T^N (\theta + \theta_o) \right)$$

(3.29)

donde :

$$\mathcal{D}_T^N = \sum_{i=1}^{N} D_T^i \quad , \qquad \mathcal{J}_T^N = \sum_{i=1}^{N} J_T^i$$

siendo : D_T^i y J_T^i , $i = 1,..,N$, el vector $n(m+1)$ dimensional, y la matriz $n(m+1)xn(m+1)$, dadas en (3.18), y (3.19) respectivamente, (donde se sustituye X_t por X_t^i).

Tomando logaritmos en (3.29), derivando después con respecto a θ_j , $j = 1,\dots,n(m+1)$, e igualando a cero, se obtiene la siguiente ecuación de verosimilitud, en forma vectorial :

$$\mathcal{D}_T^N - \mathcal{J}_T^N \theta = 0$$

(3.30)

De donde deducimos, que el estimador máximo verosímil, en caso de que exista , vendrá dado por :

$$\hat{\theta}_T^N = (J_T^N)^{-1} \mathcal{D}_T^N$$

Dicho estimador, supuesto que los factores exógenos : $G_1,\ldots,G_m$, verifiquen la proposición 3.4.1 , será débilmente consistente y asintóticamente normal.

3.6.2 Observación en un intervalo que depende de un instante aleatorio.

Supongamos que las N trayectorias , han sido observadas en el intervalo $[0,\tau_t]$, donde τ_t , es un instante aleatorio, perteneciente a una familia $(\tau_s \ , \ s \geq 0)$, que satisface las condiciones de (2.19). Disponemos entonces de la muestra:

$$(\ X^i(.) = (X_s^i \ , \ 0 \leq s \leq \tau_t) \ )$$

$$i = 1,\ldots,N$$

Tendremos entonces, la función de verosimilitud siguiente :

$$L^N_{r_t}(X^1(.),\ldots,X^N(.);\theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d\mu_{r_t,\theta}}{d\mu_{r_t,\theta_o}}(X^i(.);\theta) =$$

$$= \exp\left((\theta-\theta_o)^* \mathbb{D}^N_{r_t} - \frac{1}{2}(\theta-\theta_o)^* \mathbb{J}^N_{r_t}(\theta+\theta_o) \right)$$

donde : (3.31)

$$\mathbb{D}^N_{r_t} = \sum_{i=1}^{N} D^i_{r_t} \quad , \quad \mathbb{J}^N_{r_t} = \sum_{i=1}^{N} J^i_{r_t}$$

siendo : $D^i_{r_t}$, y $J^i_{r_t}$, $i = 1,..,N$, el vector $n(m+1)$-dimensional, y la matriz de orden $n(m+1)\times n(m+1)$, dados en (3.21), y (3.22), respectivamente, (donde se sustituye X_t por X^i_t).

Tomando logaritmos en (3.31), derivando luego con respecto a θ_j , $j = 1,\ldots,n(m+1)$, e igualando a cero , se obtiene la ecuación de verosimilitud, en forma vectorial , siguiente :

$$\mathbb{D}^N_{r_t} - \mathbb{J}^N_{r_t}\theta = 0 \qquad (3.32)$$

De donde se deduce , que el estimador máximo verosímil, en caso de que exista, vendrá dado por :

$$\hat{\theta}^{N}_{r_t} = (J^{N}_{r_t})^{-1} \mathcal{D}^{N}_{r_t}$$

Supuesto que los factores exógenos : $G_1, \ldots, G_m$, verifican la proposición 3.5.1 , entonces el estimador máximo verosímil antes calculado, caso de existir, será débilmente consistente, y asintóticamente normal, (cuando $t \longrightarrow \infty$).

APENDICE

A continuación proponemos algunas cuestiones para posibles estudios.

1.- Otros métodos de estimación, para los parámetros que intervienen en el coeficiente tendencia de un P.D.O.

1.1 Método Bayes.

Si el parámetro $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, es aleatorio, y tenemos definida sobre Θ , una función de densidad, podemos obtener los estimadores Bayes para dicho parámetro. Los estimadores Bayes generalizados, resultan de considerar sobre Θ, una función cualquiera, que sea medible y $\mathbb{R}$-valuada.

Este método, en el caso de procesos unidimensionales, fue estudiado por Linkov en 1975, y puede verse un resumen de los resultados obtenidos, en Basawa and Prakasa-Rao(1980). Linkov amplió después estos resultados, al caso en que el coeficiente tendencia dependa de un parámetro multidimensional. Estos mismos resultados, pueden también obtenerse del teorema de Bernstein Von Mises, para procesos de difusión, teorema que puede verse en Prakasa-Rao(1981).

Queda abierto, por lo tanto, el estudio de este método de estimación, para el caso de que los procesos sean multidimensionales.

1.2 Método de Máxima Probabilidad.

En Prakasa-Rao(1982), se estudia la teoria asintótica de estimación de máxima probabilidad, para procesos de difusión unidimensionales. El método consiste en integrar la función de verosimilitud, en un intervalo de tiempo : $(\theta - T^{1/2}, \theta + T^{1/2})$, $\forall \theta \in \Theta$, y para cada T , suficientemente grande, y encontrar el valor del parámetro que maximiza esta función.

Estos estimadores, demuestra Prakasa-Rao, son bajo ciertas condiciones : asintóticamente normales, consistentes, y eficientes.

Una posible generalización de estos resultados se podria obtener, considerando el caso multidimensional.

2.- Considerar que el coeficiente tendencia del P.D.O, no es lineal en los parámetros.

3.- Discretización de los estimadores máximo verosimiles.

Una cuestión abierta, es obtener estimadores, a través de la discretización de los obtenidos en base a trayectorias continuas, y estudiar, qué propiedades tienen, en analogia con los estudios de Le Breton(1975), sobre E.D.E. lineales.

BIBLIOGRAFIA

(1) .- AITCHISON, J., and BROWN, J.A. (1969). " The lognormal distribution." Cambridge. At the university Press.

(2) .- BASAWA, I.V., FEIGIN, P.D., and HEYDE, C.C. (1976). " Asymptotic properties of maximun likelihood estimators for stochastic processes." Journal of Statistic. Ser. A, 38, pt. 3, pg : 259 - 270.

(3) .- BASAWA, I.V., and PRAKASA-RAO, B.L.S. (1980). " Statistical inference for stochastic processes." Academic Press.

(4) .- BERMAN, S.M. (1982). " Sojourns and extremes of a diffusion process on a fixed interval." Adv. Appl. Prob. 14, pg : 811 - 832.

(5) .- BHARUCHA-REID, A.T. (1972). " Random integral equations." Academic Press.

(6) .- BILLINGSLEY, P. (1968). "Convergence of Probability Measures." New - York. Wiley.

(7) .- BREIMAN, L. (1968). " Probability." Addison-Wesley Publishing Company.

(8) .- BROWN, B.M., and HEWITT, J.I. (1975). " Asymptotic likelihood theory for diffusion processes." Journal of applied

Probability, vol. 12, nº 12 , pg : 228 - 238.

(9).- COHEN, J.W. (1982). " The single server queue." North - Holland Publishing company.

(1o).- EFRON, B., and HINKLEY, D.V. (1978). " Assesing the accuracy of the maximun likelihood estimator observed versus expected Fisher information." Biometrika, 65, pg : 457 - 482.

(11).- FERGUSON, T.S. (1967). " Mathematical Statistics." Academic Press.

(12).- FRIEDMAN, A. (1975). " Stochastics differential equations and applications." Academic Press.

(13).- GHIKMAN, I.I., and SKOROKHOD, A.V. (1972). " Stochastics differential equations." Springer Verlag.

(14).- GOMEZ, G.L., and TINTNER, G. (1979). " The application of the Diffusion processes in problems of developmental economic planning." Trabajos de Estadística, vol. 30, nº 2

(15).- GUTIERREZ-JAIMEZ, R. (1981). " Inferencia en los procesos de difusión logarítmico-normales multidimensionales con factores exógenos." Cuadernos de Estadística, nº 6 , pg : 6 - 15.

(16).- HEYDE, C.C. (1978). "On an optimal asymptotic property of the maximun likelihood estimator of a parameter from stochastic process." Stochastic Processes and their Application, 8, pg : 1 - 9 , North- Holland.

(17).- HEYDE, C.C. (1975). "Remarks on efficiency in estimation for branching processes." Biometrika, 62, pg: 49 - 55.

(18).- IKEDA, N. and WATANABE, S. (1973). "The local structure of a class of diffusions and related problems." Lectures notes in mathematics, nº 330, pg : 124 - 169. Springer - Verlag.

(19).- ITO, K. and Mc KEAN, H.P. (1965). "Diffusion Processes and their sample paths." Springer Verlag, Berlin.

(20).- KULINICH, G.L.(1975). " On an estimation of the drift parameter of a stochastic diffusion equation." Theory Probability Applications, vol. 20, nº 2 , pg : 384 - 387.

(21).- KUTOYANTS, Yu. A. (1978). "Estimation of a parameter of a diffusion process." Theory of Probability Applications, vol. 23, nº 3, pg : 641 - 649

(22).- KUTOYANTS, Yu. A. (1977). "Estimation of the trend parameter of a diffusion process in the smooth case." Theory Probability Applications, 22, pg : 399 - 405.

(23).- LAHA, R.G., and ROHATGI, V.K. (1979). " Probability theory." John Wiley.

(24).- LE BRETON, M. (1974). " Estimation des parameters d´une equation estochastique vectorielle lineaire." C.R. Acad. S.C. Paris, T. 279, Serie A, pg : 289 - 292.

(25).- LE BRETON, A. (1976). " On continuous and discrete sampling for parameters estimations in diffusion type processes." Mathematical Programming Study, 5 , pg : 124 - 144. North Holland.

(26).- LIPTSER, R.S., and SHIRYAYEV, A.N. (1977). " Statistics of random processes I and II." Springer Verlag.

(27).- LOEVE. M. (1963). " Probability theory." 4ª edición. Van Nostrand.

(28).- Mc KEAN, P. (1969). " Stochastic integrals." Academic Press.

(29).- PORTENKO, N.I. (1975). " Diffusions processes with unbounded drift coeficient." Theory of Probability and its applications, vol. 20 , nº 1 , pg : 27 - 37

(30).- PRAKASA-RAO, B.L.S. (1981). " Asymptotic theory of estimation in non-linear stochastic differential equations." The Indian

Journal of Statistics, vol. 43, Serie A, Pt. 2 , pg: 170-189.

(31).- PRAKASA-RAO, B.L.S. (1982). " Maximun probability estimation for diffusion processes stochastics and probability." Essays in honour of C.R. Rao, pg : 575 - 590, North Holland.

(32).- PRAKASA-RAO, B.L.S. (1979). " Non- parametric estimation for continuous time Markov processes via delta- families." Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, XXIV , fasc. 3 - 4 , pg : 79 - 97.

(33).- ROHATGI, V.K. (1980). " An introduction to probability theory and mathematical statistics." John Wiley.

(34).- SARMA, Y.R. (1976). " Large sample theory of sequential estimation in stationary Markõv processes." Pub. Inst. Statist. Univer. Paris, 21 , pg : 57 - 70.

(35).- SHIYAYEV, A. N. (1973). " Statistics of diffusion type processes." Lectures notes in mathematics, nº 330, pg : 397 - 411 Springer Verlag.

(36).- SKORKHOD, A.V. (1965). " Studies in the theory of random processes." Addison-Wesley Publishing.

(37).- SORENSEN, M. (1983). " On maximun likelihood estimation in randomly stopped diffusion type processes." International Statistical Review, Vol. 51, nº 1 , pg : 93 - 110.

(38).- STROOCK, D.W., and VARADHAN, S.L.S. (1979). " Multidimensional diffusion processes." Springer-Verlag. New York.

(39).- TARASKIN, A.F. (1974). " On the asymptotic normality of vector valued stochastic integrals and estimates a multidimensional diffusion processes." Theory Prob. Mathem. Statist. 2 , pg : 209-224.

(40).- TINTNER (1973). " Some aspects of stochastic economics." Stochastics, vol. 1, pg : 71 - 86.

(41).- TINTNER and BELLO (1968). " Aplicación de un proceso de difusión logarítmico-normal al crecimiento económico." Trabajos de Estadística, 19, pg : 83 - 97.

(42).- TINTNER and GOMEZ (1979). " The aplication of the Diffussion Processes in problems of developmental Economic planning." Trabajos de Estadística, vol. 30, nº 2.

(43).- TINTNER and NARAYANAN (1966). " A multidimensional stochastic processes for the explanation of economic development." Metrika vol. 11, pg : 85 - 90.

(44).- TINTNER and SENGUPTA (1972). " Stochastic economics, stochastic processes control, and programming." Academic-Press.

(45).- TINTNER and PATEL (1966). " A log-normal diffusion process applied to the development of Indian agriculture with some considerations on economic policy." J. Indian Soc. Agricultural Statist, vol. 18 , pg : 36 - 44.

(46).- TINTNER and THOMAS (1963). " Un modele stochastique de developmeppment economique avec application a l'industrie Anglaise." Rev. Econ. Politique, 73 , pg : 278 - 280.

(47).- WEISS, L. and WOLFOWITZ, J. (1974). " Maximun probability estimator and related topics." Lectures notes in mathematics, nº 424, Springer - Verlag.

(48).- WILLIAMS, D. (1979). " Diffusion Markov processes and martingales, 1." Chichester Wiley.

(49).- WONG, E. (1971). " Stochastic processes in information and dinamical systems." Mc Graw-Hill.