Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

BASES PARA UNA TEORIA DE LAS ALGEBRAS NO ASOCIATIVAS NORMADAS

TESIS DOCTORAL

AMIN MOJTAR KAIDI

BASES PARA UNA TEORIA DE LAS ALGEBRAS NO ASOCIATIVAS NORMADAS

Memoria que, para optar al grado de Doctor, presenta D. Amin Mojtar Kaidi.

Esta memoria ha sido realizada en el Departamento de Teoria de Funciones de la Universidad de Granada y ha sido dirigida por el Profesor Doctor D. Angel Rodriguez Palacios.

EL DIRECTOR

Angel Rodriguez

I N T R O D U C C I O N

Las álgebras no asociativas ocupan hoy dia un lugar destacado en el campo de la investigaciòn algébrica y analítica; prueba de ello es la cantidad y calidad de las publicaciones de insignes algebristas que han aparecido en los últimos veinte años (23)[(i)], (39), (41) y (99), y no cesan de aparecer nuevos resultados, hasta tal punto que en las revistas de reseñas de mȃs prestigio hay un apartado especial dedicado a ellas.

Por otra parte, ya en 1.947, A. Albert (2) inauguró su estudio analítico, ocupándose de las álgebras reales con valor absoluto (álgebras dotadas de una norma $|\cdot|$ tal que $|xy| = |x||y|$), que culminaría en 1.960 con el artículo de Urbanick-Wright (114), donde se demuestra que las álgebras reales con valor absoluto y con unidad son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (cuaterniones reales de Hamilton) y $\mathbb{O}$ (octoniones reales de Cayley) (Véase III.4.1 de la presente memoria).

En 1.956 Koecher (50) introduce varios conceptos analíticos en las álgebras reales de Jordan de dimensión finita encontrando, entre otros resultados, la interesante relación $U_{\exp(x)}=\mathrm{Exp}(2L_x)$, fórmula fácilmente generalizable a álgebras de Jordan normadas completas con unidad.

A partir de los años 60 aparecen varios trabajos, entre otros los de Civin-Yood (120), Topping (112)(113) y Stormer (110) (111), que se ocupan de las estructuras de Jordan y de Lie subya-

(i) Los números entre paréntesis indican referencias bibliográficas.

centes a un álgebra de Banach.

En 1.975 Alfen-Shultz-Stormer (7) publican el que, a nuestro juicio es, el más importante trabajo analítico independiente del caso asociativo (excepción hecha de las álgebras con valor absoluto) en el que obtienen resultados definitivos sobre un tipo de álgebras de Jordan reales muy particulares a las que llaman JB-álgebras (álgebras de Jordan normadas completas con unidad que verifican $\|x^2\| = \|x\|^2$, $\|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|$).

También tenemos noticia de que en la Universidad de Madrás (India)hay un equipo (Balachandran, Rema y otros) trabajando sobre álgebras de Jordan normadas, aunque no hemos podido hacernos con todos los resultados obtenidos por el mismo; si bien, por referencias, sabemos que conocen la no vacuidad del espectro, la unicidad de la norma en el caso completo fuertemente semisimple (en realidad, la unicidad de la norma vale en álgebras normadas completas fuertemente semisimples no asociativas cualesquiera; la demostración de este resultado aparecerá próximamente) así como que han elaborado una satisfactoria teoría de las H-álgebras de Jordan.

En 1.976, el prof. Martínez Moreno (55), a propuesta previa y bajo la dirección del prof. Rodríguez Palacios, termina su tesis doctoral "Sobre álgebras de Jordan normadas completas", logrando extender el cálculo funcional holomorfo en una variable a las C-álgebras de Jordan normadas completas con unidad. Utilizando técnicas recientes de rango numérico y aprovechando la caracterización geométrica de Vidav-Palmer de las B^*-álgebras, introduce el concepto de VJ-álgebra ($\mathbb{C}$-álgebras de Jordan normadas completas unitales A tales que $A = H(A) + iH(A)$, siendo $H(A) = \{ a \in A : f(a) \in R , \forall f \in A' : f(e) = 1 = \|f\|$ (e designa el elemento unidad de A)), obteniendo para éstas notables resultados, como son el que la involución "natural" $a + ib \xrightarrow{*} a - ib$ es multiplicativa y que H(A) es una JB-álgebra, entroncando así con el trabajo citado anteriormente de Alfen-Shultz-Stormer.

Al mismo tiempo el prof. Rodríguez Palacios, basándose en que el axioma de Vidav y la teoría del rango numérico no dependen esencialmente de la asociatividad, consigue, entre otras cosas, que una V^*-álgebra (definición IV.3.7) conmutativa es de Jordan y que el bidual de una V^*-álgebra (con el producto de Arens) es una V^*-álgebra satisfaciendo todas las identidades multilineales que satisfaga la previa.

Entre tanto se conseguían estos resultados, y con el objeto de contrastarlos y resolver los muchos problemas que dejaban pendientes, el prof. Rodríguez Palacios me propuso un estudio de la teoría general de las álgebras no asociativas normadas, haciendo especial incapié en las álgebras de Jordan no conmutativas.

Nos ha servido de gran estímulo el saber que matemáticos de la talla de I. Kaplansky hayan intuido el interés que este estudio habría de tener (creyendo por nuestra parte no haber defraudado dicha intuición); en efecto, en palabras de dicho autor (Algebraic and analytic properties of operator algebras. Regional Conference Series in Math. Nº 2. Providence. Amer. Math. Soc., 1.970; ver (121)): "Predigo que, en su momento, habrá una gran avalancha de actividad en torno a las álgebras de Banach no asociativas y, en particular, en torno a las $\mathbb{C}^*$-álgebras no asociativas".

A continuación destacamos los resultados más significativos de esta memoria.

En un intento de hacer el trabajo autosuficiente y útil, hemos dedicado el primer capítulo a la exposición de los conceptos y resultados algébricos básicos necesarios para la comprensión del mismo. Teniendo en cuenta la importancia de la inversibilidad en las álgebras de Banach asociativas con unidad, hacemos destacar que, a nivel no asociativo, existen distintas definiciones no equivalentes (alguna de ellas, como la J-inversibilidad - definición I.2. - requiriendo una ambientación restrictiva, si bien mucho más amplia que la asociatividad) todas ellas reconstruyendo el concepto asociativo en su caso.

Centrándonos en el caso de la J-inversibilidad en álgebras de Jordan no conmutativas, hemos conseguido un importante resultado (Teorema I.4.13) cuya más importante consecuencia es la existencia, para cada elemento del álgebra, de una subálgebra conmutativa, asociativa y plena (que contiene los inversos de todos sus elementos J-inversibles) que lo contiene; este resultado es la base algébrica que nos ha permitido la extensión del cálculo funcional holomorfo en una variable a las álgebras de Jordan no conmutativas complejas normadas completas con unidad.

También queremos resaltar el uso metódico del lenguaje de las derivaciones en la expresión de los axiomas y resultados de las álgebras no asociativas (véase, por ejemplo: I.3.3 , I.4.4 , I.5.9 y el sorprendente teorema IV.4.7 que creemos es original).

En el segundo capítulo estudiamos la inversibilidad en álgebras no asociativas normadas completas con unidad, obteniendo los resultados clásicos sobre el conjunto de los elementos inversibles. Más importante nos parece el estudio que hacemos de la J-inversibilidad y consiguiente teoría espectral por la riqueza de los resultados obtenidos, idénticos al caso asociativo, salvo la limitación algébrica consistente en que el producto de elementos J-inversibles no tiene por qué serlo. El desarrollo de la teoría espectral, a nivel de un sólo elemento, incluido el cálculo funcional holomorfo, se reduce al caso asociativo en vista del teorema de localización asociativo-plena antes citado (teorema I.4.13) con convenientes añadiduras analíticas (lema fundamental II.5.1). Otras cuestiones se reducen al caso Jordan conmutativo si bien, en varias ocasiones, por complitud y no introduciendo dificultad adicional, hemos optado por la prueba directa.

Unicamente nos hemos referido al caso alternativo (de indudable interés por su enorme cercanía al caso asociativo) cuando el resultado era consecuencia sencilla del general para álgebras de Jordan no conmutativas, siempre y cuando que, en el caso alternativo, implicase una especial perfección; ya que un más concienzudo estudio se encontrará en la tesis doctoral en preparación de la profesora Inmaculada Pérez de Guzmán de la que podemos adelantar el teorema de unicidad de la norma análogo al de Johnson.

Consecuencia de algunos resultados contenidos en este segundo capítulo es que toda $\mathbb{C}$-álgebra normada completa con división es isomorfa a $\mathbb{C}$; incluso, en caso Jordan no conmutativo, basta la J-divisiòn (todo elemento distinto de cero es J-inversible) y se puede prescindir de la complitud (teorema III.2.16); con estos teoremas, como datos más significativos, iniciamos el tercer capítulo que se dedica íntegramente al estudio de las álgebras normadas con división.

En contraste con el caso complejo, el problema de la determinación de las álgebras reales normadas con división es mucho más complicado y creemos que está lejos de su solución definitiva; es a este problema al que dedicamos el resto del capítulo.

Hemos determinado completamente las álgebras reales de Jordan normables con J-división, siendo éstas las álgebras asociadas a una forma bilineal simétrica definida negativa (sea X un espacio prehilbertiano real y $\langle \mid \rangle$, su producto escalar; entonces $\mathbb{R}\times X$, con el producto $(t,x)(s,y) = (ts - \langle x|y\rangle , ty + sx)$, es el álgebra de Jordan asociada a la forma $- \langle \mid \rangle$); en una tal álgebra, la norma $|(t,x)| = \sqrt{t^2+\langle x|x\rangle}$ verifica $|(t,x)(s,y)| \leq |(t,x)||(s,y)|$ y $|(1,0)| = 1$ (obsérvese que (1,0) es la unidad), y cualquier otra norma $\|\cdot\|$ para la que $\mathbb{R}\times X$, con el producto antedicho, sea álgebra normada verifica $|\cdot| \leq \|\cdot\|$ (teorema III.3.9, corolario III.3.10 y teorema III.3.12).

Se observará cómo el anterior resultado muestra la existencia de J-cuerpos normables de dimensión finita o infinita arbitraria, apareciendo así la primera gran diferencia con el caso asociativo. Conjeturando que todas las álgebras reales de Jordan no conmutativas normables con división sean de dimensión finita (conjetura más débil que la de Wright quien ha formulado la hipòtesis de que las álgebras reales normables con división son de dimensión finita (17), a posteriori de dimensión 1,2,4,8 (21)), hemos establecido parcialmente la certeza de la conjetura para aquellas que satisfagan el axioma $(x,x,[x,y]) = 0$ (axioma de "alternancia débil", definición III.5.4); más aun, hemos demostrado que las únicas álgebras reales débilmente alternativas normables con división son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Las álgebras débilmente alternativas incluyen muchos de los tipos "interesantes" de álgebras no asociativas, en concreto, las álgebras standard generalizadas de Schafer (100) las que, a su vez, engloban las alternativas y las de Jordan.

En este capítulo se hace también un estudio de los divisores de cero topológicos (resp.: J-divisores de cero topológicos, en álgebras de Jordan no conmutativas). Es evidente que la división implica, bajo hipòtesis de complitud, carencia de divisores de cero topológicos (resp.: la J-división implica carencia de J-divisores de cero topológicos, aun sin complitud). Bajo la hipótesis, aparentemente más débil, de carencia de divisores de cero topológicos (resp.: de J-divisores de cero topológicos, en su caso) subsisten integramente los teoremas citados anteriormente.

El <u>cuarto capítulo</u>, ùltimo de esta memoria, estudia el funcionamiento del axioma de Vidav en las álgebras complejas normadas completas unitales. El lenguaje básico es el de rango numérico $V(a)$ de un elemento <u>a</u> de una tal álgebra A, definido por:
$V(a) = \{ f(a) : f \in A', \ f(e) = 1 = \|f\| \}$; el elemento <u>a</u> se llama hermitiano cuando $V(a) \subseteq R$; el álgebra A se llamará un álgebra de Vidav o V-álgebra si es $A = H(A) + iH(A)$, donde $H(A)$ designa la variedad real de los elementos hermitianos (la suma $H(A) + iH(A)$ resulta ser toplógico-directa). En toda V-álgebra, la aplicación
$a + ib \overset{*}{\longmapsto} a - ib$ es, en consecuencia, una involución lineal que llamamos involución natural.

El célebre teorema de Vidav-Palmer afirma que la involución natural de una V-álgebra asociativa A es"multiplicativa" ($(xy)^* = y^* x^*$) y que $(A, *)$ es una B^*-álgebra.

A nivel no asociativo, los teoremas de Martínez y Rodríguez que citábamos al principio (el último de ellos aparece por primera vez en esta memoria) permiten afirmar:

La involución natural de una V-álgebra conmutativa es multiplicativa si y sólo si ésta es un álgebra de Jordan.

Si bien el propio Martínez muestra que, sin embargo, el axioma de Gelfand-Naimark ($\|a^* a\| = \|a\|^2$) no se verifica ni siquiera en algunas de las V-álgebras de Jordan más perfectas, concretamente, en las álgebras de Jordan subyacentes a las B^*-álgebras asociativas no conmutativas.

En esta memoria se estudia el problema de la multiplicabilidad de la involución en las V-álgebras generales, estableciéndose (teorema IV.4.4):

En una V-álgebra A, equivalen:

(i) $*$ es multiplicativa en A

(ii) A es de Jordan no conmutativa

(iii) A^+ es de Jordan

(iv) $*$ es multiplicativa en A^+ .

Teorema que consideramos definitivo salvo que la involución de toda V-álgebra fuese automáticamente multiplicativa (lo que supone la máxima laguna de la teoría).

En relación con este problema, bajo la hipótesis de que la involución natural sea isométrica, demostramos que entonces es multiplicativa (teorema IV.5.11).

Aprovechando, entre otros, este resultado, demostramos que las álgebras de Gelfand-Naimark o B^*-álgebras no asociativas ($\mathbb{C}$-álgebras normadas completas con involución lineal no necesariamente multiplicativa, con unidad autoadjunta y verificando $\|a^* a\| = \|a\|^2$) son V^*-álgebras (en consecuencia, de Jordan no conmutativas) y que su involución natural coincide con la previa (teorema IV.5.13).

La aportaciòn más espectacular de este apartado es la generalización del teorema de Vidav-Palmer para $\mathbb{C}$-álgebras alternativas normadas completas unitales, de idéntico enunciado que el análogo asociativo (teorema IV.5.14).

Cerramos este último capítulo dotando a los octoniones complejos de estructura de B-álgebra no asociativa.

. . . .

Finalmente, quiero poner de manifiesto mi profunda gratitud al prof. Angel Rodríguez Palacios por sus enseñanzas, ayuda científica y orientación constantes que, vertidas en largas horas de trabajo compartido, han hecho posible la realización de esta memoria.

También quiero expresar mi agradecimiento al prof. D. Ramón Fuentes Miras, Catedrático Director del Dpto. de Teoría de Funciones de la Universidad de Granada, a los restantes miembros de dicho Departamento así como a los componentes del equipo de investigación al que me honro en pertenecer, por su apoyo y estímulo.

Especialmente, agradezco al prof. Francisco Ocaña el haberme comunicado la prueba del teorema II.1.9 y a los profesores Miguel Lahoz y Antonio Fernández por su ayuda en la mecanografía de esta memoria.

Granada, 20 de Junio de 1.977.

I N D I C E

III. ALGEBRAS NORMADAS CON DIVISION Y ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS CON J-DIVISION

IV. V-ALGEBRAS

C A P I T U L O I

INTRODUCCION ALGEBRAICA

Nota: En todo este capítulo, salvo mención expresa de lo contrario, K designará un cuerpo conmutativo de característica 0

1.- CONCEPTOS DE BASE:

1.1 Definición: Sea K un cuerpo, por álgebra sobre K, K-álgebra ó simplemente álgebra, si no hay dudas sobre el cuerpo base K, se entiende un espacio vectorial A sobre K, dotado de una aplicación bilineal de $A \times A$ en A que llamaremos producto de A; a la imagen de (x,y) por esta aplicación la notaremos xy. Es decir:

A es un K-espacio vectorial dotado del producto

$(x,y) \longrightarrow xy$ de $A \times A$ en A tal que:

$$(x + x')y = xy + x'y \qquad x(y + y') = xy + xy'$$

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

Si el producto es conmutativo ó asociativo el álgebra recibirá el mismo calificativo.

Cuando la multiplicación en A admite un elemento neutro(existe $e \in A$: $ex = xe = x$ para todo x de A), necesariamente único, diremos que éste es el elemento unidad del álgebra y que A es un álgebra con unidad.

Al elemento neutro lo designaremos usualmente por e.

Sea A una K-álgebra; dado que en muchas ocasiones tendremos necesidad de referirnos al espacio vectorial subyacente al álgebra A, por abuso de lenguaje diremos simplemente el espacio vectorial ó lineal A. Si A y B son K-álgebras, la expresión "f es aplicación lineal de A en B" hay que entenderla en el sentido de que f es una aplicación lineal del K-espacio vectorial A en el K-espacio lineal B.

1.2 <u>Definición</u>: Sean A y B dos álgebras sobre el mismo cuerpo K una aplicación lineal f de A en B se llamará morfismo de K-álgebras ó simplemente morfismo sii

$$f(xy) = f(x)\, f(y) \qquad \forall\ x,y \in A$$

(i) Si $f:A \longrightarrow B$ y $g:B \longrightarrow C$ son morfismos de K-álgebras, $gf:A \longrightarrow C$ es morfismo. La aplicación identidad de A; I_A ó simplemente I es un morfismo.

(ii) La noción de isomorfismo de K-álgebras es la noción categórica. Es decir $f:A \longrightarrow B$ es un isomorfismo de K-álgebras sii existe un morfismo $g:B \longrightarrow A$ tal que $gf = I_A$ y $fg = I_B$. En este caso g es único y lo notaremos f^{-1}. Anotaremos $f: A \simeq B$ para decir que f es un isomorfismo de A sobre B .

(iii) Es de comprobación elemental que el morfismo $f:A \rightarrow B$ es isomorfismo sii la aplicación f es biyectiva.

(iv) Si A y B son K-álgebras con unidad, y $f:A \longrightarrow B$ es un morfismo tal que $f(e) = e$, diremos que f es un morfismo de álgebras con unidad ó también que f es un morfismo que conserva las unidades.

1.3 Sean A y B K-álgebras, las aplicaciones lineales $f: A \longrightarrow B$ tales que: $f(xy) = f(y)\, f(x) \qquad x,y \in A$

Se llamarán antimorfismos.

1.4 Sea A una K-álgebra y x un elemento de A; por L_x y R_x designaremos respectivamente las aplicaciones:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad y \longrightarrow xy = L_x(y) \\ &\text{(ii)} \quad y \longrightarrow yx = R_x(y) \end{aligned} \qquad y \in A$$

de A en A que evidentemente son lineales, y las llamaremos operadores de multiplicación por x, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

1.5 Sea A una K-álgebra; x,y,z elementos de A, llamaremos asociador de x,y,z (resp. conmutador ó corchete de x,y), al elemento $(xy)z - x(yz)$ (resp. $xy - yx$) de A y lo notaremos $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ (resp. $[x,y] = xy - yx$)

En caso de que tengamos que referirnos en un mismo contexto a la vez a (x,y,z) como terna de A^3 y como asociador, y solamente en éste caso, designaremos al asociador por $[x,y,z]$

Evidentemente la aplicación $(x,y,z) \longrightarrow (xy)z - x(yz) = [x,y,z]$ (resp. $(x,y) \longrightarrow [x,y]$) de A^3 en A (resp. de A^2 en A) es trilineal (resp. bilineal).

1.6 Sea A una K-álgebra; Por A^+, A^-, Rev. (A); A_o ; $A^{(\lambda)}$, $\lambda \in K$ notaremos las álgebras cuyo espacio vectorial es A y sus productos son respectivamente:

(i) $(x,y) \longrightarrow \frac{1}{2}(xy+yx)$ que notaremos $x.y$

(ii) $(x,y) \longrightarrow \frac{1}{2}(xy-yx)$ que notaremos $\frac{1}{2}[x,y]$

(iii) $(x,y) \longrightarrow yx$ que llamaremos reverso del producto de A

(iv) $(x,y) \longrightarrow 0$ que llamaremos producto trivial ó cero

(v) $(x,y) \longrightarrow \lambda xy + (1-\lambda)yx$ y notaremos $x.\lambda y$

Es claro que:

(i)' A^+ es conmutativa y recibe el nombre simetrización de A

(ii)' A^- es anticonmutativa y se llama antisimetrización de A

(iii)' $(A^+)^+ = A^+$, $(A^-)^- = A^-$, $(A^+)^- = (A^-)^+ = A_o$

(iv)' $A^{(\lambda)\,(\mu)} = A^{(\lambda \odot \mu)}$, donde $\lambda \odot \mu = 2\lambda\mu - \lambda - \mu + 1$

$A^{(\lambda)}$ se llama según Mc Crimon (58,P.192) mutación λ de A.

$A^{(\frac{1}{2})} = A^+$, Si $B = A^{(\lambda)}$; $\lambda \neq \frac{1}{2}$ entonces $A = B^{(\mu)}$ donde $\mu = (2\lambda-1)^{-1}$

(vi)' Rev (A) se lee reversa de A; e es unidad de A siilo es de Rev (A). $(\text{Rev } A)^+ = \text{Rev } A^+ = A^+$; Si e es unidad de A entonces e también lo es de $A^{(\lambda)}$.

(vii)' $xx = x.\lambda x$, $\forall x \in A$. Es decir los cuadrados tienen igual significado en A que en $A^{(\lambda)}$, $\forall \lambda \in K$

(viii)' Notaremos $L_x^{(\lambda)}$ el multiplicador por x por la izquierda en $A^{(\lambda)}$. Es claro que $L_x^{(\lambda)} = \lambda L_x + (1-\lambda) R_x$; en particular $L_x^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(L_x + R_x)$ es el multiplicador en A^+ y lo notaremos L_x^+ .

También notaremos por L_x^- el multiplicador izquierdo de x en A^-, es claro que $L_x^- = \frac{1}{2}(L_x - R_x)$ y $L_x = L_x^+ + L_x^-$.

Finalmente por $(x,y,z)^+$ notaremos el asociador de x,y,z en A^+.

1.7 <u>Definición</u>: Sean M y N dos subconjuntos no vacios de un álgebra A; Por MN notaremos:

(i) $MN = \{ xy; \ x \in M \ \text{e} \ y \in N \}$

(ii) Sea B un subespacio vectorial de A, B se llamará subálgebra (resp.ideal por la izquierda, resp.ideal por la derecha, resp.ideal) de A sii $BB \subset B$ (resp. $AB \subset B$, resp. $BA \subset B$ resp. $AB \cup BA \subset B$)

(iii) El conjunto de las subálgebras (resp.ideales por la izquierda, resp.ideales por la derecha, resp.ideales) de A ordenado por la inclusión es un retículo completo.

(iv) Sea X una parte no vacía de A, entonces la intersección de todas las subálgebras (resp.ideales por la izquierda, resp.ideales por la derecha, resp.ideales) de A que contienen X, es evidentemente la mínima subálgebra (resp. ideal por la izquierda, resp.ideal por la derecha, resp.ideal) de A que contiene a X, que llamaremos la subálgebra (resp. el ideal por la izquierda, resp.el ideal por la derecha, resp. el ideal) engendrada por X y la designaremos por $[X]$ (resp. $(X)_i$; resp. $(X)_d$; resp. (X)). Si A es con unidad e , a la subálgebra engendrada por $X \cup \{e\}$ la notaremos por $K[X]$. Cuando X sea finito, como de costumbre, en las notaciones anteriores identificaremos X con sus elementos, así por ejemplo si $X = \{a_1, -, a_n\}$ notaremos $K[a_1, -, a_n]$ en lugar de $K[\{a_1, -, a_n\}]$.

1.8 Definición: Sea A una K-álgebra y $\underline{a}$ un elemento de A. Las potencias por la izquierda (resp.por la derecha) de a se definen inductivamente de la siguiente manera:

$$a^1 = a \;,\quad a^{n+1} = aa^n \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \text{(resp.:} \begin{array}{l} a^{(1} = a \\ a^{(n+1} = a^{(n}a \end{array})$$

Si A posee unidad e, se extiende la definición anterior para $n = 0$ poniendo $a^0 = e$.

De la definición anterior resulta que $a^n = L_a^{n-1}(a)$, $n \geq 1$.

Un elemento u de A, se llamará idempotente (resp. nihilpotente) si $u^2 = u$ (resp. si $u^n = 0$, para algún $n \geq 1$)

1.9 Definición: Una K-álgebra A se dice de potencias asociativas si $a^n a^m = a^{n+m}$, para m,n arbitrarios en $\mathbb{N}$ $(a \in A)$. Esto es equivalente a que la subálgebra engendrada por cada elemento de A sea asociativa.

Proposición: la condición necesaria y suficiente para que un álgebra A sobre K, K de característica 0, sea de potencias asociativas es que:

$$aa^2 = a^2a \qquad a^4 = a^2a^2 \qquad a \in A$$

Demostración: (3. P.554)

* Para K de característica $p \neq 0$ se puede consultar (54) *

1.10 Sea A una K-álgebra. Por $a^{\cdot n}$ notaremos las potencias de a en A^+.

Si A es de potencias asociativas es muy fácil deducir por inducción que $a^{\cdot n} = a^n$ y A^+ es de potencias asociativas.

1.11 Sea A una K-álgebra de potencias asociativas, $K[x]$ el álgebra de polinomios en una indeterminada sobre K, y $x^mK[x]$ la subálgebra de $K[x]$ de los polinomios cuyos términos $\neq 0$ son todos de grado $\geq m$, $m \geq 0$

Entonces para cada $a \in A$, $m \geq 1$ la aplicación:

$E_a : f(x) \longrightarrow f(a)$ de $x^m K[x]$ en A es un morfismo de álgebras. Si A posee unidad el morfismo anterior también se puede definir para $m = 0$, es decir de $K[x]$ en A. La imagen de este morfismo la anotaremos por $K_m[a]$, para $m = 1$, $K_1[a]$ no es más que, $[a]$, la subálgebra de A generada por a, y si A posee unidad $K_o[a] = K[a]$.

1.12 El elemento a de A se dice algebraico si los morfismos anteriores no son inyectivos, Esto es equivalente a que existe $f(x) \in K[x]$ $f(x) \neq 0$ tal que $f(a) = 0$ ó también a que la dimensión del espacio $K_1[a]$ sea finita.

Si todo elemento de A es algebraico se dirá que A es una K-álgebra algébrica.

1.13 Si A es algébrica sobre K y posee unidad, entonces para todo $\underline{a}$ de A, llamaremos polinomio mínimo de a al generador normalizado del núcleo del morfismo $f \longrightarrow f(a)$ de $K[x]$ en A (ideal principal de $K[x]$) y lo notaremos $m_a(x)$.

1.14 Sea $f: A \longrightarrow B$ un morfismo de K-álgebras. Como de costumbre Ker f designará el núcleo de f como aplicación lineal. Es inmediato que Ker f es ideal de A.

1.15 Sea J un ideal de A, Entonces, sobre el espacio lineal A/J, $(x+J)(y+J) = xy + J$ es un producto que dota a A/J de estructura de K-álgebra y este producto es el único que hace que la proyección canónica $P: A \longrightarrow A/J$ sea un morfismo de K-álgebras. Si A posee unidad, A/J también y su unidad es $P(e) = e+J$. A A/J con este producto lo llamaremos álgebra cociente

1.16 Son de comprobación fácil las siguientes proposiciones (Teoremas de isomorfia):

(i) Sean A y B K-álgebras y $f: A \longrightarrow B$ un morfismo, entonces; Ker f es ideal de A, Imf, subálgebra de B y se verifica: $A/\operatorname{Ker} f \approx \operatorname{Im} f$

(ii) Si J_1 y J_2 son ideales de A tal que $J_1 \subset J_2$ entonces: $A/J_1 / J_2/J_1 \approx A/J_2$

(iii) Si J es un ideal de A y B una subálgebra de A entonces $J \cap B$ es un ideal de B y se tiene:

$$J + B/ J \approx B/ J \cap B$$

1.17 (Unitización de una K-álgebra). Sea A una K-álgebra; existe un método universal para sumerjir A en una K-álgebra con unidad A_1 con la propiedad de que todo morfismo f de A en una K-álgebra con unidad B se puede prolongar de una manera única a un morfismo de álgebras con unidad de A_1 en B.

Para ello en el espacio vectorial $K \times A$ se define el producto $(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy)$. Es elemental la comprobación de que $K \times A$ con este producto es una K-álgebra con unidad $e = (1,0)$, que la aplicación $x \rightarrow (0,x)$ (resp. $\alpha \rightarrow (\alpha, 0)$) de A en $K \times A$ (resp.de K en $K \times A$) es monomorfismo; identificando A con su imagen, resulta: $K \times A = Ke \oplus A$. Si f es un morfismo de A en B, B K-álgebra con unidad e; definiendo $\tilde{f}(\alpha e + x) = \alpha e + f(x)$ resulta que $\tilde{f}$ es un morfismo de álgebras con unidad de $Ke \oplus A$ en B y es el único que extiende a f .

Del teorema general sobre la unicidad de los elementos universales se deduce que si A' es otra álgebra con unidad cumpliendo las condiciones del enunciado 1.17 . A' es naturalmente isomorfa á $Ke \oplus A$, en el sentido que existe un isomorfismo $\Theta : A' \approx Ke \oplus A$ tal que $\Theta(a) = a$, para todo $a \in A$ y $\Theta(e) = e$.

Notaremos $Ke \oplus A = A_1$ y la llamaremos unitización A

Es claro que A es un ideal maximal de A_1

1.18 Definición: Sea A una K-álgebra; una base del álgebra A es simplemente una base del espacio vectorial A. Diremos que una parte X de A genera linealmente A, si X es un sistema de generadores del espacio lineal A. La dimensión u orden del álgebra A sobre K, es la dimensión del espacio vectorial A sobre K

Sea $\{u_i \ ; \ i \in I\}$ una base del álgebra A. Entonces para todo par de índices i, j de I se tiene:

(i) $u_i \ u_j = \sum \lambda_{ijk} u_k, \ k \in I$

donde solo un número finito de los λ_{ijk} son distintos de cero. Evidentemente los productos $u_i \ u_j$ $(i, j \in I)$ determinan el producto de A. A los λ_{ijk} se les llama las constantes de estructura de la K-álgebra A respecto de la base $\{u_i, i \in I\}$ y a las relaciones (i) la tabla de multiplicación de A respecto de la base $\{u_i \ , \ i \in I\}$.

Reciprocamente, si A es un K-espacio vectorial y $\{u_i \ , \ i \in I\}$ es una base de A, dada una familia:

$\lambda_{ijk} \in K$; $(i,j,k) \in I^3$ tal que para cada par de elementos $(i,j) \in I^2$, fijos, sólo un número finito de los λ_{ijk}, $k \in I$, son distintos de cero, existe sobre A una estructura de K-álgebra y una sola para la cual las relaciones (i) son válidas [15; A III. 10]

1.20 (Algebra asociativa de multiplicación $\mathcal{M}(A)$). Sea A una K-álgebra.

Por $L(A)$ notaremos el álgebra asociativa de los operadores de A en A y por L_A y R_A los subconjuntos de $L(A)$:

(i) $L_A = \{L_x ; x \in A\}$ $\qquad R_A = \{R_x ; x \in A\}$

Donde L_x y R_x son los operadores de multiplicación por x, definidos en 1.4; L_A y R_A son subespacios vectoriales de $L(A)$.

(ii) A la subálgebra de $L(A)$ engendrado por $L_A \cup R_A$ la llamaremos, siguiendo a Schafer [99], el álgebra asociativa de multiplicación de A y la notaremos $\mathcal{M}(A)$. Es claro que:

$$\mathcal{M}(A) = \{\sum T_1 \cdots T_n ; T_i \in L_A \cup R_A\}$$

Una K-álgebra A se dice simple, cuando $A^2 \neq \{0\}$ y A no posee ideales (es decir, ideales distintos de 0 y A). Dado que un ideal de A es un subespacio invariante por la acción de $\mathcal{M}(A)$ y recíprocamente, entonces se puede afirmar que A es simple sii $\mathcal{M}(A) \neq 0$, y es un conjunto irreducible de aplicaciones lineales de A.

1.21 Definición: Sea A una K-álgebra y $x \in A$, diremos que x es inversible en A sii las ecuaciones en y:

$$xy = z \quad y \quad yx = z$$

tienen solución única en A para todo z de A. Esto es equivalente a que L_x y R_x sean inversibles en $L(A)$.

Al conjunto de los elementos inversibles de A lo notamos por $inv(A)$.

(ii) Un elemento $x \in A$ tal que L_x (resp. R_x) sea inversible en $L(A)$ se llama inversible por la izquierda (resp.por la derecha). Al conjunto de los elementos inversibles por la izquierda (resp. por la derecha) de A lo notaremos inv_i (A) (resp. inv_d (A)).

(iii) A las K-álgebras D $\neq \{0\}$, en las que todo elemento $\neq 0$ es inversible las llamaremos álgebras con división (99) ó cuerpos (55).

Es inmediato que toda álgebra con división es simple. Se sabe que las álgebras asociativas con división poseen necesariamente unidad. El contraejemplo siguiente demuestra que en general este resultado deja de ser cierto.

1.22 En $\mathbb{C}$ definamos el producto $z \times z' = \overline{zz'}$ donde $\overline{z}$ es el conjugado de z y $\overline{z}\,\overline{z}'$ el producto usual en $\mathbb{C}$; con este producto, $\mathbb{C}$ es una R-álgebra con división que evidentemente no posee unidad. Este ejemplo aparece en (5) y es debido a Mc Clay.

1.23 <u>Definición</u>: Un elemento x de A se llama regular por la izquierda (resp. regular por la derecha) si L_x (resp. R_x) es inyectiva. Un elemento regular por ambos lados se llamará simplemente regular. Los elementos de A que no sean regulares se llamarán divisores de cero. Las álgebras A en las que todo elemento $\neq 0$ es regular se llamarán álgebras sin divisores de cero ó de integridad; A es de integridad sii $x \neq 0$ $y \neq 0$, x,y de A implica $xy \neq 0$.

1.24 Sea A una K-álgebra de dimensión finita, entonces A es de división sii A no posee divisores de cero $\neq 0$. La demostración se basa en el hecho elemental de que una aplicación lineal inyectiva de A en A, de dimensión finita, es automáticamente inversible.

1.25 Nos serán de gran utilidad las siguientes identidades válidas en toda K-álgebra A.

(i) $x(y,z,t) + (x,y,z)t = (xy,z,t) - (x,yz,t) + (x,y,zt)$

(ii) $[xy,z] - x[y,z] - [x,z]y = (x,y,z) - (x,z,y) + (z,x,y)$

(iii) $4(x,y,z)^{+} = (x,y,z) - (z,y,x) + (y,x,z) - (z,x,y) +$
$+ (x,z,y) - (y,z,x) + [y, [x,z]]$

Su demostración se obtiene por comprobación directa.

(i) y (ii) aparece en (23.P.24) y (iii) en (41.P.19).

1.25' Sea A una K-álgebra, el núcleo de A se define por:

$N(A) = \{ n \in A: (n,x,y) = (x,y,n) = (x,n,y) = 0,\ x,y \in A \}$

y el centro de A como: $Z(A) = \{ c \in A : c \in N(A) \text{ y } [c,x] = 0 \}$

La identidad 1.25(i) permite probar que N(A) es un subálgebra asociativa de A y Z(A) es subálgebra asociativa y conmutativa de A que contiene Ke si A tiene unidad (99).

1.26 (Algebra de Lie de multiplicación de A, $\mathcal{L}(A)$). Sea A una K-álgebra y $L^{-}(A) = (L(A))^{-}$. Es fácil la comprobación de las siguientes identidades en L(A):

(i) $[f,f] = 0$, $f \in L(A)$

(ii) $[[f,g],h] + [[g,h], f] + [[h,f], g] = 0$ identidad de Jacobi, f,g,h elementos de L(A).

Es decir $L^-(A)$ es una K-álgebra de Lie.

A la subálgebra de $L^-(A)$ engendrada por $L_A \cup R_A$ la llamaremos álgebra de Lie de multiplicación de A y la notaremos por $\mathcal{L}(A)$.

Si hacemos $H = L_A + R_A$ y definimos inductivamente $H_1 := H$, $H_{i+1} := [H_1, H_i]$. Entonces resulta (99.P.19) que:

(iii) $\mathcal{L}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$

$[H_i, H_{i+1}]$ nota la variedad engendrada por $\{[f,g]: f \in H_i; g \in H_{i+1}\}$

1.27 <u>Definición</u>: Sea A una K-álgebra. Una derivación de A es una aplicación lineal $D: A \to A$ tal que:

(i) $D(xy) = x(Dy) + (Dx)y \qquad x,y \in A$

Esta condición es equivalente a cada una de las siguientes:

(ii) $[D, L_x] = L_{Dx}$

(iii) $[D, R_x] = R_{Dx}$ $\qquad x \in A$

Si A tiene unidad e, entonces $De = 0$

Si $x,y \in A$, por inducción se puede demostrar la fórmula de Leibnitz: (39.P.8)

(iv) $D^n(xy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k_x)(D^{n-k}y)$

1.28 Al conjunto de las derivaciones de A lo notaremos por D(A). D(A) es un subespacio lineal de L(A). Si $D_1, D_2 \in D(A)$ es inmediata la comprobación de que $[D_1, D_2] \in D(A)$ (39.P.8). Es decir D(a) es una subálgebra de $L^-(A)$, a D(A) la llamaremos el álgebra de Lie de las derivaciones de A.

1.29 <u>Definición</u>: Una derivación D de A se llamará derivación interior de A,(99), si $D\in\mathcal{L}(A)$. Al conjunto de las derivaciones interiores de A lo notaremos:

$$\mathrm{DInt.}\ (A) = \mathcal{L}(A)\cap D(A)$$

En (99.P.21) se prueba que DInt. (A) es un ideal de D(A).

2.- ALGEBRAS DE JORDAN:

2.1 **Definición**: LLamaremos álgebra de Jordan sobre K, a una K-álgebra A en la que las dos identidades:

(i) C) $xy = yx$ (conmutatividad)

(ii) J) $(x^2y)x = x^2(yx)$ (Identidad de Jordan)

son verdaderas para todo par de elementos x,y de A.

Las identidades anteriores son equivalentes a:

(i)' $[x,y] = 0$ y (ii)' $(x^2,y,x) = 0$ $x,y\in A$

y también a:

(ii)' $L_x = R_x$ y (ii)'' $[L_x, L_{x^2}] = 0$ $x\in A$

2.2 Sea A una K-álgebra de Jordan entonces:

(i) $[L_x, L_y]$ es derivación de A, para todo par x,y de A

(ii) $\mathcal{L}(A) = L_A + [L_A, R_A]$

(iii) Si A tiene unidad, entonces las derivaciones interiores de A son del tipo:

$$D = \sum [L_{x_i}, L_{y_i}] \quad x_i, y_i \in A\ , \quad \sum \text{ Suma finita.}$$

(iv) A es de potencias asociativas, más aún $[L_{x^k}, L_{x^m}] = 0$

La demostración de los resultados anteriores se puede ver en cualquiera de las referencias (23);(41);(55);(99).

2.3 Ejemplos de álgebras de Jordan:

(i) Toda álgebra asociativa y conmutativa es de Jordan

(ii) Sea A K-álgebra asociativa entonces A^+ es de Jordan

(iii) Sea V un K-espacio vectorial dotado de una forma bilineal simétrica $(\,|\,)$.

Si notamos en $K\times V$, $e = (1,0)$ Entonces todo elemento (α,x) de $K\times V$ se expresa de manera única como $\alpha e + x$, es decir $K\times V = Ke \oplus V$. El producto:

$$(\alpha e + x)(\beta e + y) = (\alpha\beta)e + (x|y)e + \alpha y + \beta x$$

Dota a $Ke\oplus V$ de estructura de K-álgebra de Jordan con unidad e, la prueba se facilita mucho si se tiene en cuenta que

$$a^2 = ((x|x) - \alpha^2)e + 2\alpha a, \text{ siendo } a = \alpha e + x$$

Este álgebra se denomina álgebra de Jordan de la forma bilineal simétrica ó de la forma cuadrática q, $q(x) = (x|x)$. La notaremos por $J(V,(\,|\,))$ ó $J(V,q)$.

2.4 <u>Definición</u>: Una K-álgebra de Jordan A se dice especial, si existe una K-álgebra asociativa B, tal que A es isomorfa a una subálgebra de B^+. Si A no es especial se llama excepcional.

2.5 En (41, P.261, T.1) se demuestra que $J(V,q)$ (q forma cuadrática sobre V); es especial. Más aún se demuestra que $J(V,q)$ es isomorfa a una subálgebra de $C^+(V,q)$, siendo $C(V,q)$ el álgebra de Clifford de (V,q).

2.6 También en (41, P.50) se demuestra la existencia de álgebras de Jordan excepcionales.

Los dos teoremas que enunciaremos a continuación y cuya demostración se puede ver en (41, P.41 - 48, T,9 y T.10) son fundamentales para la obtención de identidades en las álgebras de Jordan.

2.7 <u>Teorema de Macdonal's</u>: Toda identidad en tres variables, de grado a lo sumo uno en una de ellas, válida en toda álgebra de Jordan especial, es válida en toda álgebra de Jordan.

<u>Nota</u>: Hagamos notar que este enunciado es una versión ingenua del teorema original pues utilizamos los términos identidad, variable y grado en sentido intuitivo. El enunciado preciso y formalizado se puede ver en la referencia citada anteriormente y en (55).

2.8 <u>Teorema de Shirshov - Cohn:</u> Toda K-álgebra de Jordan (con unidad) generada por dos elementos (y la unidad) es especial.

2.9 Sea A una K-álgebra de Jordan y x un elemento de A pongamos:

$U_x = 2L_x^2 - L_{x^2}$ evidentemente $U_x \in L(A)$.

La aplicación $G_U : A \rightarrow L(A)$ definida por:

$G_U(x) = U_x$ es cuadrática, es decir;

(i) $U_{\alpha x} = \alpha^2 U_x \qquad \alpha \in K, \qquad x \in A$

(ii) $U_{x+y} - U_x - U_y = U_{x,y}$ es bilineal $\quad x,y \in A$

Además se verifican las importantes identidades

(iii) $U_x U_y U_x = U_{U_x(y)}$ $(x,y \in A)$

(iv) $U_x U_{y,z} U_x = U_{U_x(y),U_x(z)}$ $(x,y,z \in A)$

La demostración se puede ver en (41) y (55) y se basa fundamentalmente en 2.7 y 2.8 .

2.10 En las álgebras de Jordan, con unidad Jacobson ha introducido un concepto de **inverso,** distinto del que se ha definido en 1.21, basándose en la observación de que en un álgebra asociativa A, un elemento $x \in A$ es inversible en A y su inverso es $\underline{y}$ sii $x.y = e$, y $x \overset{2}{\cdot} y = x$ en A^+ .

2.11 Definición: Sea A una K-álgebra de Jordan con unidad e, diremos que un elemento x de A es inversible en el sentido de Jacobson, abreviadamente J-inversible, si existe $y \in A$ tal que:

$$xy = e \quad y \quad x^2y = x$$

a $\underline{y}$ lo llamaremos simplemente inverso de x .

2.12 Teorema (Jacobson): Sea A una K-álgebra de Jordan con unidad e, x un elemento de A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) x es J-inversible

(ii) e está en el rango de U_x

(iii) U_x es inversible en L(A)

Cuando éste sea el caso:

(iv) El inverso de x es único y es $y= U_x^{-1}(x)$

(v) Si el inverso de x es y; y es J-inversible y su inverso es x, además

(vi) $U_x U_y = U_y U_x = I$, $L_y = U_x^{-1} L_x$

(vii) Todos los $L_x k$, $L_y n$; conmutan en L(A) y

(viii) K [x,y] es una subálgebra asociativa y por supuesto conmutativa de A.

Al inverso de x lo notaremos por x^{-1}

La demostración ariginal de Jacobson es muy complicada como reconoce él mismo en la nota al pie de la página 53 de (41). Una demostración sencilla basada en la identidad fundamental 2.8 (iii) debida a Mc Crimmon se puede ver en (41,P.52) ó en el original de Mc Crimmon (56) y finalmente en castellano aparece en (55) .

2.13 Corolario: x,y son J-inversibles sii U_x (y) lo es.

Al conjunto de los J-inversibles de A lo notaremos J-inv(A).

Así nos encontramos en álgebras de Jordan con dos conceptos de inversibilidad evidentemente no equivalentes, pues un elemento J-inversible no tiene porque ser inversible como lo prueba el ejemplo siguiente:

2.14 Sea $A= M_2^+$ (K) el álgebra de Jordan subyacente al álgebra de matrices 2×2 sobre K. Sea $x= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; evidentemente x es J-inversible en A pues es inversible en M_2 (K). Veamos que x no es inversible en A:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \rho & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -\rho & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -\lambda\\ \rho & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Es decir $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ es divisor de cero en A de donde x no puede ser inversible.

La implicación en sentido contrario sí es cierta.

2.15 Proposición: Sea A una K-álgebra de Jordan con unidad, x un elemento de A, si x es inversible entonces x es J-inversible y x^{-1} es inversible.

En efecto: sea $y = L_x^{-1}(e)$ evidentemente $xy = e$

Por otra parte $xx = x^2 = x^2(xy) \overset{(J)}{=} x(x^2y)$

Pero L_x es inyectiva, de donde $x^2y = x$, y x es J-inversible.

Por 2.12 (vi) $L_{x^{-1}} = U_x^{-1} \cdot L_x$ (composición de dos aplicaciones inversibles), es evidente que es inversible lo que implica que x^{-1} es inversible.

2.16 Definición: Sea X un subconjunto de A, A K-álgebras de Jordan, diremos que X es fuertemente asociativo sii :

$[L_x , L_y] = 0$ para todo x,y de X; una subálgebra B de A se dirá fuertemente asociativa si el subconjunto B de A lo es.

2.17 Sea A álgebra de Jordan; la subálgebra engendrada por un elemento de A es fuertemente asociativa.

El teorema 2.12 (vii) demuestra que si x es J-inversible entonces $K[x,x^{-1}]$ es fuertemente asociativa.

Definición: Sea A una K-álgebra de Jordan con unidad y B una subálgebra de A, diremos que B es una subálgebra plena de A, si B contiene la unidad de A y siempre que $x \in B$ sea J-inversible en A lo sea también en B; en otras palabras:

B es plena en A sii $e \in B$ y $B \cap \text{J-inv}(A) = \text{J-inv}(B)$

<u>Teorema (Jacobson)</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan con unidad, entonces las subálgebras fuertemente asociativas maximales son plenas.

Este teorema demostrado por el Prof. Jacobson a propuesta del Prof. Martinez aparece en la Tesis Doctoral de éste último (55, P.38 -41). En el apartado 4 de este capítulo daremos una generalización de este resultado.

<u>Definición</u>: Una K-álgebra de Jordan A, en la que todo elemento distinto de cero es J-inversible, la llamaremos álgebra de Jordan con J-división, ó también un J-cuerpo de Jordan.

Un elemento x de A se dirá, J-regular, si U_x es inyectivo; en caso contrario se dirá que es J-divisor de cero.

Esta definición se justifica observando que, en el caso asociativo, por ser $L_a R_a = R_a L_a = 2L_a^{+2} - L_a^{+} \cdot 2$, la regularidad de un elemento a, es equivalente a la J-regularidad de a en A^{+}

Es fácil comprobar las siguientes afirmaciones:

(i) El producto de una familia cualquiera de álgebras de Jordan es álgebra de Jordan.

(ii) El cociente de un álgebra de Jordan por un ideal también lo es.

(iii) La unitización de un álgebra de Jordan es a su vez álgebra de Jordan.

3.- ALGEBRAS FLEXIBLES:

3.1 Definición: Por K-álgebra flexible se entiende un álgebra sobre K en la cual la identidad:

(F) $(xy)x = x(yx)$

es válida para todo par de elementos x,y de A

3.2 La identidad (F) es equivalente a cada una de las siguientes identidades:

(i) $(x,y,x) = 0$ (ii) $[L_x , R_x] = 0$

(iii) $(x,y,z) + (z,y,x) = 0$ (iv) $[L_x , R_y] = [R_x , L_y]$

(v) $L_{xy} + R_x R_y = R_{yx} + L_x L_y$

(i) y (ii) no son más que otra forma de expresar (F).

Si en (iii) se hace $z = x$, y se tiene en cuenta que K es de característica $\neq 2$ resulta (i) y si en (i) se sustituye x por x+z, resulta (iii). El resto es trivial (3) y (23).

La caracterización que damos a continuación de las álgebras flexibles, implícita en (3), (23) y (99), es muy comoda para nuestros propósitos y lo invocaremos en varias ocasiones.

3.3 Proposición: Una K-álgebra A es flexible sii $L_x^- = \frac{1}{2}[x,-]$ es una derivación en A^+.

En efecto; supongamos A flexible, entonces:

$$[L_x^-, L_y^+] = \frac{1}{4}[L_x - R_x, L_y + R_y] = \frac{1}{4}([L_x, L_y] - [R_x, L_y] + [L_x, R_y] -$$

$$- [R_x, R_y]) \overset{(iv)}{=} \frac{1}{4}([L_x, L_y] - [R_x, R_y]) = \frac{1}{4}(L_x L_y - R_x R_y + R_y R_x - L_y L_x) =$$

$$\overset{(v)}{=} \frac{1}{4}(L_{xy} - R_{yx} + R_{xy} - L_{yx}) = \frac{1}{2}(L_{\frac{1}{2}[x,y]} + R_{\frac{1}{2}[x,y]}) = L^+_{L_x^-(y)}$$

Por 1.27 (ii) L_x^- es una derivación en A^+.

Reciprocamente, supongamos que L_x^- es derivación en A^+, para todo x de A; entonces por 1.27 (ii):

$$[L_x^-, L_x^+] = L^+_{\frac{1}{2}[x,x]} = 0 \Longrightarrow [L_x - R_x, L_x + R_x] = 0 = [L_x, R_x] - [R_x, L_x] =$$

$$= 2[L_x, R_x] \Longrightarrow [L_x, R_x] = 0$$

Por lo tanto A es flexible.

3.4 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra flexible, entonces para todo $x \in A$ se tiene:

(i) $R_{x^2} - L_{x^2} = R_x^2 - L_x^2$

(ii) $L_x(L_x + R_x) - L_{x^2} = R_x(L_x + R_x) - R_{x^2}$

(iii) $[R_{x^2}, L_x] = [L_{x^2}, L_x] = [R_{x^2}, R_x] = [L_{x^2}, R_x]$

En efecto, (i) es consecuencia de 3.2 (v) ; (ii) se deduce de (i) y 3.2 (ii); finalmente (iii) se obtiene de (i) y 3.2 (iv).

3.5 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra flexible con unidad e, y x un elemento inversible de A. Entonces se tiene:

$L_x^{-1}(e) = R_x^{-1}(e)$; a este lo notaremos x^{-1} y lo llamaremos inverso de x.

En efecto: Supongamos $L_x^{-1}(e) = y$ y $R_x^{-1}(e) = z$

de donde resulta que $xy = e = zx$. Por la flexibilidad

$(xy)x = x(yx) \Longrightarrow x = x(yx)$ de donde resulta que

$yx = e = zx \Longrightarrow y = z$ en las dos últimas implicaciones se ha utilizado el hecho de que L_x y R_x son inyectivas.

Nota: (i) Existen álgebras con unidad, con elementos inversibles que no verifican 3.5

(ii) Un álgebra de Jordan es trivialmente flexible, hemos probado que un elemento inversible es J-inversible, evidentemente $L_x^{-1}(e) = U_x^{-1}(x)$ de donde resulta que la denominación inverso de x à x^{-1} no supone ninguna confusión. Como el axioma (F) expresa una conmutatividad débil en A parece interesante estudiar los subconjuntos conmutativos de A un álgebra flexible. Otras razones de este estudio se verán más adelante.

3.6 <u>Definición</u>: Sea A una K-álgebra, x un subconjunto de A. Diremos que x es un subconjunto conmutativo de A sii

$$x\, x' = x'x \qquad (x, x' \in X)$$

El conjunto de las partes conmutativas de A, es evidentemente no vacio y ordenado por la conclusión, es inductivo, el lema de Zorn asegura la existencia de subconjuntos conmutativos maximales en A.

3.7 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra flexible. Entonces los subconjuntos conmutativos maximales de A son subálgebras.

En efecto: Sea M un subconjunto conmutativo maximal de A, evidentemente M es una variedad lineal de A.

Sean $x,y \in M$ veamos que $M \cup \{xy\}$ es conmutativo. Por ser M conmutativo, $x.y = xy$; para todo z de M, 3.3 y la conmutatividad de M implican:

$$[z,xy] = x.[z,y] + [z,x].y = 0$$

Es decir $M \cup \{xy\}$ es conmutativo, el caracter maximal de M implica que $xy \in M$

3.8 <u>Corolario</u>: Sea A una K-álgebra flexible, entonces la subálgebra engendrada por un subconjunto conmutativo es conmutativa. En particular toda subálgebra engendrada por un sólo elemento de A es conmutativa.

En efecto: Sea X un subconjunto conmutativo, el lema de Zorn asegura la existencia de un conjunto conmutativo maximal que contiene X. La proposición anterior prueba la 1ª parte del corolario. La segunda se deduce de la 1ª teniendo en cuenta que el subconjunto formado por un sólo elemento es conmutativo.

4.- <u>ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS</u>

4.1 <u>Definición</u>: Llamaremos álgebra de Jordan no conmutativa sobre K una K-álgebra en la que las identidades:

(i) (F) $(xy)x = x(yx)$

(ii) (J) $(xy)x^2 = (yx^2)$

sean válidos para todo par de elementos x,y de A.

Otras expresiones de las identidades anteriores son:

(i)' $(x,y,x) = 0$ (ii)' $(x,y,x^2) = 0$

(i)'' $[L_x, R_x] = 0$ (ii)'' $[R_{x^2}, L_x] = 0$

Nota: (i) el término de álgebra no conmutativa de esta definición hay que entenderlo en el sentido de álgebra no necesariamente conmutativa. Esta terminología un poco contradictoria se debe a razones históricas y nos hemos abstenido de modificarla, por respeto al consenso general existente entre los especialistas (en la materia) en mantenerla.

Utilizaremos las iniciales n.c. como abreviatura de no conmutativa.

4.2 Proposición: Sea A una K-álgebra flexible. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $J : (xy)x^2 = x(yx^2)$ $(x,y \in A)$

(ii) $J_1: (x^2y)x = (x^2y)x$ $(x,y \in A)$

(iii) $J_2: x(x^2y) = x^2(xy)$ $(x,y \in A)$

(iv) $J_3: (yx^2)x = (yx)x^2$ $(x,y \in A)$

(v) A^+ es de Jordan

En efecto: 3.4 (iii) demuestra la equivalencia de (i),(ii),(iii),(iv) y que estas implican (v). Por lo tanto sólo falta ver que (v) implica (i). Pero esto es inmediato teniendo en cuenta 3.4 (iii) y que (v) implica que $\left[L_x2 + R_x2,\ L_x + R_x\right] = 0$

Este resultado se encuentra enunciado en (99, P.141), una demostración del mismo se puede ver en (95) completado con (3). También se puede ver (23, P.136 y 152)

4.3 <u>Proposición</u>: La unitización A_1, de una K-álgebra de Jordan n.c. A es de Jordan n.c.

En efecto: A_1 es evidentemente flexible. Por otra parte si $\alpha e + x \in A_1$ resulta de (J) y (F):

$$((\alpha e + x)^2, \beta e + y, \alpha e + x) = 2\alpha(x,y,x) + (x^2,y,x) = 0$$

4.4 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. entonces $\left[L_x, R_y\right]$ es una derivación en A^+.

En efecto: como $L_x = L_x^+ + L_x^-$; $R_y = L_y^+ - L_y^-$

resulta $\left[L_x,R_y\right] = \left[L_x^+ + L_x^-,\ L_y^+ - L_y^-\right] = \left[L_x^+,L_y^+\right] - \left[L_x^-,L_y^-\right] +$

$+ L^+_{\frac{1}{2}[y,x] + \frac{1}{2}[x,y]} = \left[L_x^+,L_y^+\right] - \left[L_x^-,L_y^-\right]$

El primer sumando del último miembro de las igualdades anteriores es derivación en A^+ por 4.2 (v) y 2.2 (i), y el 2º lo es por ser corchete de dos derivaciones de A^+.

4.5 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. Si notamos:

$$U_x = L_x\left(L_x + R_x\right) - L_x2 = R_x\left(L_x + R_x\right) - R_x2 \text{ y } U_x^+ = 2L_x^{+2} - L_x^+{}_2$$

se tiene:

(i) $U_x = U_x^+$

(ii) $R_{x2y} = R_{xy}\,(L_x + R_x) + L_x2\,R_y - L_x\,R_y\,(L_x + R_x)$

(iii) $L_{yx^2} = L_{yx}(L_x + R_x) + R_{x^2} L_y - R_x L_y(L_x + R_x)$

(i) Es consecuencia de (F) y 3.4 (i).

Sustituyendo en 4.2 (iii) (resp. en 4.2 (iv)) x por $x+\lambda z$, igualando los coeficientes de λ, y tomando como variable z resulta (ii) (resp. (iii)). (23, P.139)

Observación: en caso de que L_x, R_x, L_{x^2}, R_{x^2}, L_y, R_y conmuten dos a dos (ii) y (iii) se expresan:

(ii)' $R_{x^2y} = R_{xy}(L_x + R_x) - U_x R_y$

(iii)' $L_{yx^2} = R_{yx}(L_x + R_x) - U_x L_y$

4.6 Proposición: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. Entonces A es de potencias asociativas. Aún más si $x \in A$ y m es un entero positivo L_{x^m} y R_{x^m} pertenecen a la subálgebra de $L(A)$ engendrada por L_x, R_x, L_{x^2} y R_{x^2}.

En efecto: de la flexibilidad y el corolario 3.8 se deduce que las potencias en A y A^+ coinciden, 4.2 (v) y 2.2 (iv) aseguran la asociatividad de las potencias en A.

La segunda afirmación se obtiene por inducción, para $m = 1,2$ es cierto por hipótesis supongamos L_{x^k}, R_{x^k}, verifican nuestra hipótesis para; $1 < k < m+1$, entonces:

L_x, R_x, L_{x^2}, R_{x^2}, $L_{x^{m-1}}$, $R_{x^{m-1}}$ conmutan haciendo $y = x^{m-1}$ en (ii)' y (iii)' se obtiene:

(i) $R_{x^{m+1}} = R_{x^m}(L_x + R_x) - U_x R_{x^{m-1}}$

(ii) $L_{x^{m+1}} = R_{x^m}(L_x + R_x) - U_x L_{x^{m-1}}$

lo que completa la inducción (23, P.140).

4.7 <u>Definición</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. con unidad e, x un elemento de A. Diremos que x es J-inversible sii existe y en A, tal que:

(i) $xy = yx = e$

(ii) $x^2y = yx^2 = e$ y se denominará inverso de x.

Esta definición es debida a Mc Crimon (56).

El lema siguiente tiene un interés independiente y será utilizado en varias ocasiones. Aparece como ejercicio en(41,P.54).

4.8 <u>Lema</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan con unidad, x un elemento J-inversible de A y D una derivación en A, entonces:

$$D(x^{-1}) = -U_x^{-1}(D(x))$$

<u>En efecto</u>: x J-inversible $\Longrightarrow xx^{-1} = e$ y $xx^{-2} = x^{-1}$

de donde : $(Dx)x^{-1} + x\,Dx^{-1} = 0$ y $Dx^{-1} = x^{-2}Dx - 2x(x^{-1}Dx^{-1})$

teniendo en cuenta que L_x y L_x-1 conmutan resulta:

$$Dx^{-1} = x^{-2}Dx + 2x^{-1}(x\,Dx^{-1}) = x^{-2}\,Dx - 2x^{-1}(x^{-1}\,Dx) =$$

$$= -U_x-1(Dx) \xlongequal{2.12(vi)} -U_x^{-1}(Dx)$$

El teorema siguiente, también de Mc Crimon (56), justifica la definición y la nomenclatura.

4.9 <u>Teorema</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c., entonces un elemento x de A es J-inversible y posee <u>y</u> por inverso sii <u>y</u> es el inverso de x en el álgebra de Jordan A^+.

En este caso el inverso es único, $L_y = U_x^{-1} R_x$, $R_y = U_x^{-1} L_x$

$L_x k; R_x i; L_y j; R_y m$; conmutan y $K[x,y]$ es una subálgebra conmutativa y asociativa.

Al inverso de x lo notaremos como de costumbre por x^{-1}

<u>Demostración</u>: Evidentemente por, 4.7 (i) y (ii) se tiene que x es J-inversible en A^+ e y es su inverso.

<u>Reciprocamente</u>: Supongamos que $x.y = e$ y $x^2.y = x$, entonces se tiene que $y = x^{-1}$ en A^+, dado que L_x^- es derivación en A^+; haciendo en el lema $D = L_x^-$ obtenemos:

$$L_x^-(y) = U_y(L_x^-(x)) = 0 \Longrightarrow xy = yx = e$$

$$L_x^-2(y) = U_y(L_x^-2\ (x)) = 0 \Longrightarrow x^2y = yx^2 = x$$

lo que demuestra la equivalencia de la J-inversibilidad en A y A^+ y la unicidad del inverso.

Ahora supongamos x J-inversible e y su inverso, entonces sabemos que $[L_x^+ , L_y^+] = 0 = 1/4\,[L_x , L_y] + 1/4\,[R_x , R_y] +$

$$+\tfrac{1}{2}[L_x , R_y] \quad \text{(i)}$$

hemos utilizado (F): $[L_x , R_y] = [R_y , L_x]$, pero la misma

$(F) \Longrightarrow L_{xy} + R_x R_y = R_{yx} + L_x L_y$, $xy = yx = e \Longrightarrow$

implica $R_x R_y = L_x L_y$, intercambiando el papel de

x e y se obtiene $R_y R_x = L_y L_x$, restando miembro a

miembro resulta que $[R_x , R_y] = [L_x , L_y]$ de donde sustituyendo en (i) se tiene: $\frac{1}{2}\left[L_x + R_x , L_y\right] = 0$, teniendo en cuenta esto y que $x^2y = x$, en 4.5 (ii) resulta: $R_x = L_x + R_x - U_x R_y \Longrightarrow L_x = U_x R_y \Rightarrow R_y = U_x^{-1} L_x$

De la misma forma se deduce que $R_x = U_x L_y \Rightarrow L_y = U_x^{-1} R_x$

El resto es claro ya que R_y y L_y pertenecen a la subálgebra conmutativa y plena generada por L_x, R_x, L_x2, R_x2, así como L_y2 y R_y2. De donde se deduce el resultado habida cuenta de 4.6.

4.10 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c., x un elemento inversible de A, entonces x es J-inversible y su inverso es inversible.

En efecto: sea $y = L_x^{-1}(e) = R_x^{-1}(e)$ evidentemente y verifica $yx = xy = e \Longrightarrow x^2 = x^2(yx) \overset{J}{=} (x^2y)x$, por ser R_x inversible resulta que $x^2y = x$, de la misma manera $x^2 = (yx)x^2 = (yx^2)x \Longrightarrow yx^2 = x$ Luego $y = x^{-1}$

Del teorema anterior: $R_x-1 = U_x^{-1} L_x$ y $L_x-1 = U_x^{-1} R_x$ son composición de biyecciones $\Longrightarrow$ que son inversibles.

<u>Observación</u>: Como se puede deducir de 2.14, la inversibilidad en A no implica la inversibilidad en A^+.

4.11 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. con unidad, entonces los subconjuntos conmutativos maximales de A, son sub-álgebras plenas.

En efecto: Sea M un subconjunto conmutativo maximal; por 3.7 M es sub-álgebra, sea $x \in M$ tal que x sea J-inversible en A y su universo es x^{-1}, 3.3 y el lema 4.8 nos dán para todo $z \in M$,

$$[z,x^{-1}] = U_x^{-1}[z,x] = U_x^{-1}(0) = 0$$

4.12 Definición: Sea A una K-álgebra flexible; x,y dos elementos de A. Diremos que x,y conmutan fuertemente ó también operacionalmente sii las aplicaciones lineales L_x, R_x, L_y, R_y conmutan dos a dos y $xy = yx$. Estas condiciones son equivalentes á:

$$xy = yx \qquad (x,z,y) = (y,z,x) = 0$$

(i) $(x,y,z) = (y,x,z)$ y $(z,x,y) = (z,y,x)$

Para todo z de A.

Si A posee unidad la condición $xy = yx$ es redundante pues $[L_x, L_y]e = 0 \Longrightarrow xy - yx = 0$.

(ii) Un subconjunto X de A se llamará fuertemente asociativo (f.a.) sii dos elementos cualesquiera x,y de X conmutan fuertemente

(iii) Si B es una sub-álgebra de A tal que el subconjunto B de A es f.a., se dirá que B es una sub-álgebra fuertemente asociativa de A .

4.13 Teorema: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. con unidad e, y sea B una subálgebra f.a. de A, entonces B está contenida en una subálgebra conmutativa asociativa y plena de A.

Demostración: Evidentemente B es un subconjunto conmutativo de A, por 4.11 existe una subálgebra conmutativa y plena M de A que contiene á B. M conmutativa $\Longrightarrow M = M^+$ y M es un álgebra de Jordan. Es claro que si las relaciones 4.12 (i) se verifican para x,y de B y todo z de A se verifican para $z \in M$. Es decir que B es una subálgebra f.a. del álgebra de Jordan M por lo tanto nos encontramos en condiciones de aplicar el teorema de Jacobson 2.18, y en consecuencia existe una subálgebra f.a. y plena C de M tal que $B \subset C$; es claro que C es subálgebra asociativa plena y por supuesto conmutativa de A.

4.14 Corolario: Todo elemento a de una K-álgebra de Jordan n.c. con unidad está contenido en una subálgebra conmutativa, asociativa y plena.

En efecto: por 4.6 $K[a]$ es una subálgebra f.a., el teorema anterior para $B = K[a]$ confirma nuestra tesis.

4.15 A la mínima (en el sentido de la inclusión) subálgebra plena que contiene a, la llamaremos subálgebra plena generada por a; el corolario asegura que ésta es conmutativa y asociativa, la notaremos por K(a).

Comentario: el teorema 4.13 es una generalización débil del teorema de Jacobson 2.18 pues la subálgebra C no tiene porqué ser f.a. en A. Esto plantea el problema de ver si el teorema de Jacobson es válido en álgebras de Jordan n.c., para lo que sería suficiente demostrar que las subálgebras plenas f.a. maximales de A^+ son subálgebras de A.

4.16 Una K-álgebra de Jordan n.c. D, se llamará de J-división cuando todo elemento $\neq 0$, de D sea J-inversible. Evidentemente D es de J-división sii lo es D^+.

5.- ALGEBRAS ALTERNATIVAS:

5.1 <u>Definición</u>: Diremos que una K-álgebra A es alternativa si verifica los siguientes axiomas:

(i) $x^2y = x(xy)$ Alternativa por la izquierda (Al.I.)

(ii) $yx^2 = (yx)x$ Alternativa por la derecha (Al.D.)

Para todo par de elementos x,y de A.

En términos de asociadores y multiplicadores, (i) y (ii) se expresan:

(iii) $(x,x,y) = (y,x,x) = 0$

ó

(iv) $L_x2 = L_x2 \quad R_x2 = R_x2$

5.2 <u>Teorema de Artin</u> :(99);(15);(52);(8),(Tomo II). Sea A una K-álgebra. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) A es alternativa

(ii) La aplicación trilineal $(x,y,z)\longmapsto[x,y,z]=$

$=(xy)z-x(yz)$ de A^3 en A es alternada

(iii) Dos elementos cualesquiera de A engendran una subálgebra asociativa.

Las implicaciones (i)$\Longrightarrow$(ii) , (iii)$\Longrightarrow$(i) son triviales. La implicación restante la obtendremos como corolario de un teorema más general que demostraremos dentro de un momento. 5.10

5.3 La alternancia del asociador es equivalente a:

(i) $(x,y,z)=-(z,y,x)$ flexibilidad de A

(ii) $(x,y,z)=-(y,x,z)$

(iii) $(z,x,y)=-(z,y,x)$

Tomando z como variable resulta:

(i)' $L_{xy}-L_x L_y=R_{yx}-R_x R_y$

(ii)' $L_{xy}-L_x L_y=-L_{yx}+L_y L_x$

(iii)' $R_{xy}-R_y R_x=R_x R_y-R_{yx}$

5.4 Proposición: Toda álgebra alternativa es de Jordan n.c.

En efecto: evidentemente $[L_x , L_{x^2}]=0$; 5.3 (i) y 4.2 completan la prueba.

5.5 Corolario: Sea A álgebra alternativa con unidad, entonces A^+ es de Jordan especial.

En efecto: la proposición anterior y 4.2 prueban que A^+ es de Jordan. La aplicación G_L de A en $L^+(A)$ definida por $G_L(x) = L_x$ es lineal, de 5.3 (ii)' se deduce que:

$L_{xy} + L_{yx} = L_x L_y + L_y L_x$ es decir:

$G_L(x.y) = G_L(x).G_L(y)$ $(x,y \in A)$ lo que implica que: G_L es un morfismo de A^+ en $L^+(A)$ que es además inyectivo por ser A^+ con unidad. Es claro que $G_R(x) = R_x$ de A^+ en $L^+(A)$ es también un monomorfismo de álgebras.

5.6 Proposición: La unitización de un álgebra alternativa es alternativa.

Trivial. Esto implica que en 5.5 la hipótesis de la unidad no es fundamental.

5.7 Proposición: Sea A una K-álgebra alternativa con unidad e, x un elemento de A, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) Existe $y \in A$ tal que $xy = yx = e$

(ii) x es J-inversible

(iii) x es inversible (L_x y R_x inversibles en L(A))

Cuando éste sea el caso $L_y = L_x^{-1}$ y $R_x^{-1} = R_y$

Demostración: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) y (iii) $\Rightarrow$ (i) son evidentes

(ii) $\Rightarrow$ (iii) En A, $U_x = L_x R_x = R_x L_x$ para todo x de A.

Si x es J-inversible por 4.9 $U_x = L_x R_x$ es inversible,

L_x y R_x conmutan luego son inversibles,

Por 2.12 (vi) $U_x^{-1} = U_y$ de donde $L_x^{-1} = L_y$ y $R_x^{-1} = R_y$

Un elemento x de A que verifica las condiciones equivalentes de 5.7 lo llamaremos simplemente inversible y como de costumbre a su inverso lo notaremos por x^{-1}.

5.8 <u>Definición:</u> Sea A una K-álgebra y x un subconjunto de A, diremos que x es un subconjunto asociativo sii:

$$(x,y,z) = 0 \quad \text{cada vez que } x,y,z \text{ sean elementos de } X$$

5.9 <u>Teorema:</u> Sea A una K-álgebra alternativa con unidad, entonces los subconjuntos asociativos maximales de A son subálgebras plenas.

Demostración: Sea M un subconjunto asociativo maximal de A y sean $x,y \in M$, nuestro objetivo es ver que $M \cup \{xy\}$ es asociativo:

Para todos los $x,y,z,t \in M$, por 4.4 se tiene:

$(z, x.y, t) = x. (z,y,t) + (z,x,t).y = 0$ de donde:

(i) $(z, xy, t) = -(z, yx, t) \overset{5.3}{=} (xy,z,t) = -(yx, z, t)$

De la identidad 1.25 (i) válida en toda álgebra resulta:

(ii) $x(y,z,t) + (x,y,z)t = 0 = (xy, z,t) - (x, yz,t) +$
$+ (x,y,zt)$

(iii) $y(x,z,t) + (y,x,z)t = 0 = (yx, z,t) - (y,xz, t) +$
$+ (y,x,zt)$

Sumando (ii) y (iii), teniendo en cuenta (i) y 5.3 se obtiene:

(iv) $(x,yz,t) = -(y,xz,t)$

(v) $(y,xz,t) \overset{5.3}{=} -(t,xz,y) \overset{(iv)}{=} (x,tz,y) \overset{(i)\ y\ 5.3}{=}$
$=(x,y,zt)$

De (iv) y (v) se deduce:

(vi) $(x,yz,t) = -(x,y,zt)$

De la misma manera se ve que $(x,yz,t) = -(xy,z,t)$

Sustituyendo en (ii) resulta:

$$3(xy,z,t) = 0 \qquad (xy,z,t) = 0$$

La alternancia del asociador completa la prueba de que $M \cup \{xy\}$ es asociativo. Del caracter maximal de M resulta que $xy \in M$, como M es trivialmente un subespacio lineal queda probado que M es una subálgebra.

Sea ahora $x \in M$, x inversible en A, consideremos el conjunto $M \cup \{x^{-1}\}$. Para todo y,z elementos de M, por 4.4 y 4.8 resulta:

$$(y,x^{-1},z) = U_x^{-1}\ (y,x,z) = 0$$

La alternancia del asociador implica que $\{y,x^{-1},z\}$ forman un subconjunto asociativo de donde $M \cup \{x^{-1}\}$ es asociativo y las hipótesis sobre M implican que $x^{-1} \in M$.

5.9 <u>Corolario</u>: Toda parte $\neq \emptyset$ asociativa X de una K-álgebra alternativa, está contenida en una subálgebra asociativa y plena.

En efecto: el lema de Zorn asegura la existencia de una parte asociativa maximal de A que contiene X, el teorema anterior completa la prueba.

5.10 Corolario: (Teorema de Artin con inversos): Sea A una K-álgebra alternativa. Dos elementos x,y de A y sus inversos, si estos existen, engendran una subálgebra asociativa.

En efecto: la alternancia del asociador implica que el conjunto $X = \{x,y\}$ es asociativo y el corolario anterior aplicado a $\{x,y\}$ confirma nuestra tesis.

5.11 Corolario: Sea A una K-álgebra alternativa entonces el conjunto inv(A) es un lazo.

(Lazo: es un grupoide L con unidad, en el que las ecuaciones $ax = b$ y $xa = b$ tienen soluciones únicas)

5.12 Proposición: Sea A una K-álgebra alternativa, entonces los subconjuntos conmutativos maximales son subálgebras asociativas y por supuesto plenas.

En efecto: Sea M uno de tales conjuntos; 5.4 y 4.11 implican que M es subálgebra plena. La identidad 1.25 (iii) se reduce en el caso alternativo á:

$$4(x,y,z)^+ = -2(x,y,z) + [y[x,z]] \qquad x,y,z, \in A$$

Si tomamos x,y,z en M, la conmutatividad de la subálgebra M implica: $[y,[x,z]] = 0$ y $(x,y,z)^+ = (x,y,z)$ de donde resulta que: $6(x,y,z) = 0 \Longrightarrow (x,y,z) = 0$. Es decir M es asociativa.

5.13 Corolario: Todo subconjunto conmutativo X de un álgebra alternativa está contenido en una subálgebra asociativa conmutativa y plena.

Observacion : El Teorema 5.8 sin inversos es conocido (27) (108). En (27) y (106) se puede ver una generalización del teorema de Artin que no depende de la característica.

En la bibliografía consultada por nosotros, la parte de las proposiciones 5.8, 5.9 y 5.10 referente a la plenitud, no aparece.

En (27) se puede ver una demostración de 5.12. Existen álgebras alternativas conmutativas no asociadas sobre cuerpos de característica 3.

C A P I T U L O II

ALGEBRAS NORMADAS

En todo este capítulo K designará $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

1.- NOCIONES GENERALES

1.1 <u>Definición</u>: Llamaremos álgebra normada sobre K una K-álgebra A, cuyo espacio vectorial subyacente sea normado, con una norma $\|.\|$, respecto de la cual el producto de A es continuo. Es decir, $(A,\|.\|)$ es un espacio normado y existe $k \in \mathbb{R}$, k mayor que cero tal que:

(i) $\|xy\| \leq k\,\|x\|\,\|y\|$ (x,y pertenecientes a A)

Al ínfimo de los k con esta propiedad lo designaremos por $\|A\|$. Si $\|A\| \leq 1$, diremos que la norma $\|.\|$ es submultiplicativa. Si $\|A\| \geq 1$, es claro que $|x| = \|A\|\,\|x\|$, es una nueva norma sobre A, equivalente a la dada, que además es submultiplicativa.

Cuando el espacio subyacente a A sea normable con una norma que hace el producto $(x,y)\longmapsto xy$ de A continuo, diremos que el álgebra A es normable.

De ahora en adelante, y siempre que no se advierta lo contrario, todas las álgebras normadas que consideraremos serán normadas con una norma sub-multiplicativa, es decir, verificando:

(ii) p.s. $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ (x,y pertenecientes a A).

También diremos en este caso que la norma $\|.\|$ es una norma de álgebra.

Si el espacio vectorial subyacente de A es de Banach, diremos que A es normada completa, reservando el término de álgebra de Banach al caso asociativo.

Utilizaremos los términos de álgebra real, (resp. compleja) en el sentido de $\mathbb{R}$-álgebra (resp. $\mathbb{C}$-álgebra).

1.2 <u>Completación</u>: Sea A una K-álgebra normada. Al álgebra normada completa que se obtiene dotando al espacio de Banach $\hat{A}$, completación del espacio normado A, del producto, prolongación continua, única por otra parte, del producto de A, la llamaremos completación de A y la notaremos por $\hat{A}$. Es claro que A es una subálgebra densa de $\hat{A}$, y si e es unidad de A también lo es de $\hat{A}$. (31,p.302), (11,p.208), (14,p.5).

1.3 La completación de una K-álgebra flexible (resp. Jordan n.c. resp. alternativa, conmutativa, asociativa) es flexible (resp. Jordán, resp. alternativa, conmutativa, asociativa).

En efecto: la demostración es idéntica al caso asociativo, por ejemplo, para demostrar que $\hat{A}$ es de Jordán n.c. si A lo es, basta considerar las aplicaciones

$$u,v:\hat{A}x\hat{A} \longrightarrow \hat{A} \quad u(x,y)=(xy)x-x(yx); \quad v(x,y)=(xy)x^2-x(yx^2)$$

que son continuas y se anulan en AxA, subconjunto denso de $\hat{A}x\hat{A}$, separado. De donde u y v son idénticamente nulas en todo $\hat{A}x\hat{A}$.

1-4 Proposición: (Unitización normada): Sea A una K-ál gebra normada y sea A_1 su unitización definida en I.1.17 Entonces: $\|\alpha e + x\| = |\alpha| + \|x\|$ es una norma de álgebra, evidentemente $\|e\| = 1$; A es un ideal maximal cerrado de A_1. Además A_1 es normada completa con la norma anterior síi lo es A. A_1 con esta norma se denomina la unitización normada de A.

Demostración: (11,p.209).

1.5 Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de K-álgebras normadas. El subconjunto del $\prod A_i$ formado por los elementos $(x_i)_{i\in I}$ tales que $\sup_i \|x_i\| < \infty$ es una subálgebra del álgebra producto, normada con la norma:

$$\| (x_i)_{i\in I} \| = \sup_i \|x_i\|$$

que se nota usualmente por $\sum A_i$. En el caso que $I=\{1,..,n\}$ se tiene que $\sum_1^n A_i = A_1 x \ldots x A_n$

1.6 Sea A una K-álgebra, entonces es fácil comprobar:

(i) Toda subálgebra de A dotada de la norma inducida es un álgebra normada.

(ii) Si M es un ideal cerrado de A, el álgebra A/M dotada de la norma cociente

$$\|x+M\| = \inf\{\|y\| : y \text{ pertenece a } x+M\}$$

es un álgebra normada y p: $A \longrightarrow A/M$ es un morfismo continuo.

(iii) El cierre de una subálgebra (conmutativa ó/y asociativa) es un subálgebra (conmutativa ó/y asociativa). El cierre de un ideal por la izq. (resp. por la dra.,resp. ideal) es un ideal por la izq. (resp. ideal por la dra., resp. ideal).

iv) Las subálgebras conmutativas (ó/y asociativas) maximales de A son cerradas.

v) Si BL(A) nota el álgebra asociativa de los operadores lineales y continuos de A normada con la norma operacional

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

entonces para todo x perteneciente á A, L_x y $R_x \in BL(A)$

vi) A^+, A^- y Rev(A) dotadas de la misma norma que A son álgebras normadas.

Observación: Incluso en el caso asociativo, el que A^+ sea normada no implica la continuidad del producto de A respecto a la norma del álgebra A^+. Como demostró el Profesor Rodríguez Palacios en (84), el resultado más general (que conocemos) en el sentido afirmativo, es el siguiente:

1-7 Teorema: (Rodríguez Palacios (84)): Sea A una K-álgebra alternativa semiprima (A no posee ideales por la izq. no nulos y de cuadrado nulo), entonces si A^+ es normada completa se tiene que el producto de A es continuo respecto de la norma de álgebra de A^+. Es decir, existe una norma de álgebra sobre A equivalente a la original de A^+.

La demostración de este resultado se basa en los siguientes hechos:

(i) El producto $(x,y) \mapsto xy$ es continuo síi lo es en cada una de las variables (11,p.212), esto a su vez se reduce a probar que L_x^- es continua para todo x.

(ii) En virtud del teorema de la gráfica cerrada L_x^- es continua síi $(y_n)\to 0$, $y_n \in A$ y $L_x^-(y_n)\to z$ implica $z=0$

(iii) Para demostrar la 2ª parte de (ii) se define

$$I_x=\{z\in A:\ \exists\,(y_n)\subset A\ ;(y_n)\to 0 \text{ y } (L_x^-(y_n))\to z\}$$

Por ser L_x^- derivación en A^+, se deduce que I_x es un ideal de A^+ de cuadrado nulo en A por ser $(L_x^-)^2$continua (I.1.25iii)y finalmente se utiliza el hecho de que A es semiprima síi lo es A^+,(104).

Cuestión abierta: Sea A un álgebra flexible (ó de Jordán n.c.), J-simple es decir, A^+ es simple. Supóngase que A^+ es normada completa. ¿Es A normable con una norma equivalente a la de A^+?I.3-3 permite demostrar que I_x definido en el teorema anterior es un ideal de A^+. El problema se reduce a probar que $I_x\neq A$.

Naturalmente,estas cuestiones a nivel finito dimensional no suponen ningún problema, puesto que la normabilidad de las álgebras de dimensión finita es automática, debido al resultado elemental de que las aplicaciones bilineales entre espacios vectoriales de dimensión finita son continuas. Aunque A. Albert en (2) se entretiene en probar que toda álgebra real de dimensión finita es normable.

1.8 Sea A una K-álgebra normada con unidad e, si $\|e\|=1$ diremos que A es normada unital.

Sea A una K-álgebra normada con unidad; de $e^2=e$ se deduce que $\|e\|\geq 1$. En el caso asociativo se sabe que si $(A, \|\cdot\|)$ es normada con unidad, $|x| = \|L_x\|$ es una norma en A equivalente a $\|.\|$, respecto de la cual A es un álgebra normada unital y donde $\|L_x\|$ es la norma operacional de L_x en BL(A) definida en 1.6(v). (11,209).

La demostración del resultado anterior es esencialmente asociativa y no se puede trasladar al caso no asociativo. El profesor Ocaña en su Tesis Doctoral en preparación ha logrado extender el resultado anterior al caso general.

1.9 Teorema (Ocaña): Sea $(A, \|.\|)$ una K-álgebra normada con unidad e, entonces existe una norma $|\,.\,|$ equivalente a la dada y tal que $(A, |\,.\,|)$ es normada unital.

Demostración: Sea W la envolvente convexa equilibrada de la unión de la bola unidad con e, entonces W es un subgrupoide multiplicativo absorbente y acotado por $\|e\|$, de A; el funcional do Minkowski de W, P_W responde a la tesis del teorema.

1.10 Proposición: Sea A una K-álgebra normada de potencias asociativas. Entonces para todo $x \in A$, la sucesión $\|x^n\|^{1/n}$ es convergente y su límite es igual al $\inf\limits_{n>0} \|x^n\|^{1/n}$

En efecto; la asociatividad de las potencias nos permite dar el paso

$$\|x^{n+m}\| \leq \|x^n\| \, \|x^m\|$$

El resto se sigue de (20,I.p.15)

1.11 Definición: Sea A un álgebra normada de potencias asociativas y x un elemento de A, al número $\lim \|x^n\|^{1/n} = \inf\limits_{n>0} \|x^n\|^{1/n}$ lo llamaremos el radio espectral de x y lo notaremos por r(x)

1.12 Es claro que:

(i) $r(x) \leq \|x\|$ (ii) $r(x^k) = r(x)^k$ (iii) $r(\alpha x) = |\alpha| r(x)$

Si $x, y \in A$ engendran una subálgebra asociativa y conmutativa. Entonces:

$r(x+y) \leq r(x) + r(y)$ y $r(xy) \leq r(x)r(y)$ (78) y (79).

1.13 Un elemento x de A tal que $r(x)=0$ lo llamaremos casi-nihilpotente.

2.- INVERSIBILIDAD EN ALGEBRAS NORMADAS COMPLETAS CON UNIDAD:

2.1 <u>Lema</u>: Sea A una K-álgebra asociativa normada completa con unidad, entonces:

(i) Si $x \in A$ es tal que $\|e-x\| < 1$, entonces x es inversible y su inverso es $x^{-1} = \sum_0^{\infty} (e-x)^n$

(ii) inv(A) es abierto

(iii) La aplicación $x \mapsto x^{-1}$ de inv(A) sobre Inv(A) es un homeomorfismo diferenciable y su diferencial en x_0 es $-L_{x_0^{-1}} R_{x_0^{-1}}$ Las afirmaciones de este lema son resultados clásicos y elementales en álgebras de Banach (11),(13),(20),(79),(118)

2-2 <u>Teorema</u>: Sea A una K-álgebra normada completa con unidad e; entonces la bola abierta centrada en e y de radio 1 está constituída exclusivamente por elementos inversibles.

En efecto, sea x de A tal que $\|e-x\| < 1$, sea BL(A) el álgebra de Banach de los operadores lineales y acotados de A, es claro que $L_{e-x}=I-L_x$ pertenece a BL(A) y $\|I-L_x\| \leq \|e-x\| < 1$, idéntica afirmación se puede hacer sobre $I-R_x$, de donde por el lema 2.1(i), L_x y R_x son inversibles en BL(A) de donde por definición, (1.21), x es inversible.

2.3 Corolario: Si en las hipótesis del teorema anterior se añade que A es flexible, entonces todo x de A tal que $\|e-x\| < 1$ es inversible y su inverso es $x^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$; $(e-x)^n$ con el significado de la definición 1.8

En efecto: El lema 2.1(i) implica:

$$L_x^{-1}=I+\sum_{1}^{\infty}(I-L_x)^n \quad \text{y} \quad R_x^{-1}=I+\sum_{1}^{\infty}(I-R_x)^n$$

Teniendo en cuenta que por 3.5:

$x^{-1}=L_x^{-1}(e)=R_x^{-1}(e)=e+\sum_{1}^{\infty}(I-L_x)^n e=e+\sum_{1}^{\infty}(I-R_x)^n e$; teniendo en cuenta 3.8 resulta que $x^{-1}=e+\sum_{1}^{\infty}(e-x)^n$

2.4 Corolario: Sea A como en el teorema 2.2, si x pertenece a A y es tal que $\|x\| < 1$, entonces e-x es inversible. Si además, se supone que A es flexible, entonces $(e-x)^{-1}=\sum_{0}^{\infty}x^n$

Evidente teniendo en cuenta que $x=e-(e-x)$

2.5 Corolario: Sea A como en el teorema, sea $\lambda \in K$ tal que $|\lambda|>\|x\|$. Entonces $\lambda e-x$ es inversible y si A es flexible: $(\lambda e-x)^{-1}=\sum \lambda^{-n-1}x^n$

En efecto,

$\lambda\neq 0$, $\lambda e-x=\lambda(e-\lambda^{-1}x)$; $\|\lambda^{-1}x\|=\|x\|/|\lambda|<1$ · por el corolario anterior $e-\lambda^{-1}x$ es inversible, es decir, $L_{e-\lambda^{-1}x}$ y $R_{e-\lambda^{-1}x}$ son inversibles como $\lambda\neq 0$: $\lambda L_{e-\lambda^{-1}x}=L_{\lambda e-x}$ y $\lambda R_{e-\lambda^{-1}x}=R_{\lambda e-x}$ son inversibles, de donde resulta la 1ª afirmación.

Si A es flexible, entonces por 2.4:

$(\lambda e-x)^{-1} = \lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1} = \lambda^{-1}\sum(\lambda^{-1}x)^{n} = \sum \lambda^{-n-1}x^{n}$

2.6 <u>Lema</u>: Sea A una K-álgebra normada, entonces las aplicaciones lineales G_L, G_R: $A \longrightarrow BL(A)$, $G_L(x)=L_x$ y $G_R(x)=R_x$ son continuas. Si A es además unital G_L y G_R son isométricas.

En efecto;

La primera afirmación se deduce de $\|L_x\| \leq \|x\|$ y $\|R_x\| \leq \|x\|$ y la segunda es consecuencia de la afirmación anterior y de:

$\|x\| = \|L_x(e)\| = \|R_x(e)\| \leq \|R_x\| \, \|e\| = \|R_x\| = \|L_x\|$

2.7 <u>Teorema</u>: Sea A una K-álgebra normada completa con unidad, entonces se tiene:

(i) $inv_i(A)$, conjunto de los elementos inversibles por la izq. de A (resp. $inv_d(A)$, resp. $inv(A)$) es abierto.

(ii) La aplicación $G_i(x)=L_x^{-1}(e)$ (resp. $G_d(x)=R_x^{-1}(e)$) de $inv_i(A)$ (resp. de $inv_d(A)$) en A es continua.

En efecto:

(i) por definición $x \in inv_i(A) \Leftrightarrow L_x \in inv(L(A))$. Pero L_x es continua y por lo tanto el teorema de los isomorfismos de Banach asegura que $L_x^{-1} \in BL(A)$, de donde

$x \in inv_i(A) \Leftrightarrow L_x \in inv(BL(A))$, de donde resulta

$inv_i(A) = G_L^{-1}(inv(BL(A))$

Por los lemas 2.1(ii) y 2.6 $G_L^{-1}(inv(BL(A))=inv_i(A)$ es abierto.

Igual razonamiento se aplica a $inv_d(A)$.

Finalmente $inv(A)=inv_i(A) \cap inv_d(A)$ es también abierto.

(ii) La aplicación G_i es composición de G_L :inv (A) en inv(BL(A)), continua por 2.6, de V: inv(BL(A)) en sí mismo, $h \mapsto h^{-1}$, continua por 2.1 (ii) y de E_e:inv(BL(A)) en A, E (h)=H(e), también continua, luego G_i es continua.

Análogo razonamiento para G_d.

2.8 Nota: Si A es flexible, entonces por 3.5 $L_x^{-1}(e)=R_x^{-1}(E)=x^{-1}$ de donde la aplicación $G(x)=x^{-1}$ de inv(A) en A es continua.

2.9 Corolario: Sea A una K-álgebra normada completa, con unidad, flexible, con la propiedad de que el inverso de todo elemento inversible es, a su vez, inversible. (En particular si A es de Jordán n.c., alternativa o de Jordán I.4.10 y I.2.15). Entonces la aplicación $G:x \mapsto x^{-1}$ de inv(A) en inv(A) es un homeomorfismo.

En efecto: G continua e involutiva ya que $(x^{-1})^{-1}=x$

2.10 Corolario: Sea A como en el teorema 2.7, entonces el cierre de todo ideal J(resp. ideal por la izq., resp. ideal por la dra.)propio, es decir, $J \neq A$, es un ideal (resp. ideal por la izq., resp. ideal por la dra.) propio.

En efecto:

Sea J un ideal de A, evidentemente J es propio sii $J \cap \text{inv}(A)=\emptyset \iff J \subset A-\text{inv}(A)$(1), pero 2.7 implica que A-inv(A) es cerrado, de donde $\bar{J} \subset A-\text{inv}(A)$, y por lo tanto $\bar{J}$ es propio.

2.11 Corolario: Sea A como en 2.7, entonces los ideales (resp. ideales por la izq., resp. ideales por la dra.) ma-

(1) $A-\text{inv}(A)=\{x \in A:\ x \notin \text{inv}(A)\}=\text{Sin}(A)$

ximales de A son cerrados.

En efecto:

Sea M un ideal maximal de A, $M\subset\overline{M}$ ideal propio de A implica $M=\overline{M}$. De donde M es cerrado.

2.12 Teorema: Sea A una K-álgebra normada completa con unidad, entonces la aplicación $G_i(x)=L_x^{-1}(e)$ (resp. $G_d(x)=R_x^{-1}(e)$) de $inv_i(A)$ (resp. $inv_d(A)$) en A es diferenciable y su diferencial en $x_0\in inv_i(A)$ (resp. $x_0\in inv_d(A)$) es $-L_{x_0}^{-1}R_{L_{x_0}^{-1}(e)}$ (resp. $-R_{x_0}^{-1}L_{R_{x_0}^{-1}(e)}$).

Demostración: Como se ha visto en la demostración del teorema 2.7(ii) $G_i=E_eV\,G_L$, G_L y E_e son diferenciables porque son restricciones de aplicaciones lineales y su diferencial coincide con ellas mismas en los puntos de su dominio. V es diferenciable por 2.1(iii) y su diferencial en h es:

$V'(h)(f)=h^{-1}fh^{-1}$. Para todo $f\in BL(A)$.

Calculemos la diferencial de G en $x_0\in inv_i(A)$. Sea $y\in A$, $G_i'(x_0)(y)=(E_eV'(L_{x_0})G_L)(y)=-(L_{x_0}^{-1}L_yL_{x_0}^{-1})(e)=-L_{x_0}^{-1}R_{L_{x_0}^{-1}(e)}(y)$ de donde $G_i'(x_0)=-L_{x_0}^{-1}R_{L_{x_0}^{-1}(e)}$.

Para G_d resultaría $G_d'(x_0)=-R_{x_0}^{-1}L_{R_{x_0}^{-1}(e)}$

2.13 Nota: (i) Si A es flexible entonces se tiene que la aplicación $G:x\mapsto x^{-1}$ de inv(A) en A es diferenciable y su diferencial en x es $-L_{x_0}^{-1}R_{x_0^{-1}}=-R_{x_0}^{-1}L_{x_0^{-1}}$. De donde resulta curiosamente la identidad: $L_{x_1}^{-1}R_{x^{-1}}=R_x^{-1}L_{x^{-1}}$ para $x\in inv(A)$.

Identidad fácilmente deducible algebraicamente.

(ii) Obsérvese también que si A es alternativa, entonces $G'(x\ )=-R_{x_0^{-1}}L_{x_0^{-1}}$ exactamente igual que en el caso asociativo.

3.- J-INVERSIBILIDAD

3.1 <u>Proposición</u>: Sea A una K-álgebra de Jordán n.c con unidad y normada. Si $x \in A$ es tal que la serie $\sum_{0}^{\infty} x^n$ es convergente, entonces e-x es J-inversible y se tiene:

$$\text{(i)} \quad (e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Inversamente, si $\|x\| < 1$ y e-x es J-inversible, la serie de término general x^n es convergente, y se verifica la fórmula (i).

En efecto:

Dado k de N, k mayor que cero, notemos:

$$\text{(ii)} \quad S_k = e + x + \ldots + x^k = \sum_{n=0}^{k} x^n \qquad s = \lim_k S_k$$

Entonces se tiene:

$$\text{(iii)} \quad xS_k = S_k x = S_{k+1} - e$$

$$\text{(iv)} \quad x^2 S_k = S_k x^2 = S_{k+2} - (e + x)$$

Pasando al límite resulta

$$\text{(iii)}' \quad xs = sx = s - e$$

$$\text{(iv)}' \quad x^2 s = sx^2 = s - e - x$$

De donde se tiene que:

$$\text{(iii)}'' \quad (e-x)s = s(e-x) = e$$

$$\text{(iv)}'' \quad (e-x)^2 s = s(e-x)^2 = s - 2sx + sx^2 = s - 2sx + s - e - x =$$

$$= 2s(e-x) - e - x = 2e - e - x = e - x$$

Lo que prueba que:

$$(e-x)^{-1} = s = \sum x^n$$

Supongamos ahora que $\|x\| < 1$ y que e-x es J-inversible, con las notaciones anteriores se tiene:

(v) $(e-x)S_k = e-x^{k+1}$

Multiplicando ésta por $(e-x)^{-1}$ y teniendo en cuenta I.4.14:

(vi) $S_k = (e-x)^{-1}(e-x^{k+1})$

De $\|x^{k+1}\| \leq \|x\|^{k+1}$ y $\|x\| < 1$ se deduce que x^{k+1} tiende a cero cuando k crece indefinidamente, y pasando al límite (vi) resulta que:

$$\lim_k S_k = (e-x)^{-1}$$

Por lo que $\sum x^n$ es convergente y:

$$(e-x)^{-1} = \sum x^n$$

3.2 <u>Corolario</u>: Sea A una K-álgebra de Jordán n.c. normada completa con unidad, entonces para todo x de A tal que $r(x) < 1$ se verifica que e-x es J-inversible en A y

$$(e-x)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} x^n$$

En efecto:

Sea t de R tal que $r(x) < t < 1$, entonces por 1.10 y la definición 1.11 se tiene que:

$\|x^n\| < t^n$ para n suficientemente grande, lo que implica la convergencia en norma de la serie $\sum x^n$, la complitud de A asegura su convergencia y la proposición anterior completa la demostración.

3.3 <u>Corolario</u>: Sea A como en el corolario anterior, entonces Para todo x de A, $\|e-x\| < 1$ implica $x \in$ J-inv(A)

En efecto: $r(e-x) \leq \|e-x\| < 1$ y el corolario anterior. También es consecuencia de 2.2 y I.4.10.

3.4 Corolario: Sea A como en 3.2, x de A y $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| > r(x)$, entonces $\lambda e-x$ es J-inversible y

$$(\lambda e-x)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^{n}$$

En efecto:

Las hipótesis y 1.12(iii) implican:

$$r(\lambda^{-1}x) = r(x)/|\lambda| < 1$$

3.3 asegura la J-inversibilidad de $(e-\lambda^{-1}x)$ y que

$$(e-\lambda^{-1}x)^{-1} = \sum \lambda^{-n} x^{n}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x) = (\lambda e-x)^{-1}$

resulta que: $(\lambda e-x)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^{n}$

Nota: Los resultados anteriores no tienen de original más que están enunciados para álgebras de Jordán n.c., puesto que las demostraciones son idénticas al caso asociativo, 3.1 se puede ver en (17,IX.39) y el resto en (14,p.12) y (11,p.213) y, naturalmente en (55) que los enuncia para álgebras de Jordán.

3.5 Lema: Sea A una K-álgebra normda, entonces la aplicación $G_U: A \longrightarrow BL(A)$, $G_U(x)=L_x(L_x+R_x)-L_{x^2}$ es continua.

En efecto:

Sean: $T_1 : A \longrightarrow BL(A)$; $T_1(x)=L_x$

$T_2 : A \longrightarrow BL(A)$; $T_2(x)=L_x R_x$

$T_3 : A \longrightarrow BL(A)$; $T_3(x)=L_{x^2}$

que fácilmente se puede probar su continuidad. Así, por ejemplo, T_2 es continua por ser composición de: $x \mapsto (x,x)$ de A en A^2, $(x,y) \mapsto (L_x, R_y)$ de A^2 en BL(A)xBL(A) y del producto de BL(A), evidentemente continuo.

Finalmente, $G_U = T_1 + T_2 - T_3$ es continua.

3.6 Teorema: Sea A una K-álgebra de Jordán n.c. normada completa con unidad, entonces el conjunto de los elementos J-inversibles de A, J-inv(A), es abierto.

Demostración:

Por I.4.9, $x \in$ J-inv(A) síi U_x pertenece a inv(L(A)) en cuyo caso es $U_x^{-1} = U_{x^{-1}}$

Por otra parte, $U_{x^{-1}}$ y $U_x \in$ BL(A), de donde resulta que en nuestras condiciones:

$$x \in \text{J-inv}(A) \Leftrightarrow U_x \in \text{inv}(BL(A))$$

Es decir, $\text{J-inv}(A) = G_U^{-1}(\text{inv}(BL(A)))$

El lema anterior y 2.1(i) completa la prueba.

3.7 Teorema: Sea A como en el teorema anterior, entonces la aplicación $G : \text{J-inv}(A) \to \text{J-inv}(A)$, $G(x) = x^{-1}$ es un homeomorfismo.

En efecto:

Dado el carácter involutorio de G, $((x^{-1})^{-1} = x)$ es suficiente demostrar su continuidad.

Consideremos las aplicaciones

(i) $T_1 : \text{J-inv}(A) \longrightarrow \text{inv}(BL(A)) xA$, $T_1(x) = (U_x, x)$ y donde inv(BL(A))xA está dotado de la topología producto. Es evidente que T_1 es continua (por serlo G_U y la inyección de J-inv(A) en A

(ii) T_2 : inv(BL(A))xA $\longrightarrow$ inv(BL(A))xA , $T_2(h,x)=(h^{-1},x)$

Es continua por serlo $h \mapsto h^{-1}$, lema 2.1(ii)

(iii) T_3 : inv(BL(A))xA $\longrightarrow$ A $\quad T_3(h,x)=h(x)$

claramente continua, restricción de la aplicación bilineal de BL(A)xA $\longrightarrow$ A, $\overline{T}'(h,x)=h(x)$, $\|h(x)\| \leq \|h\| \, \|x\|$

Finalmente: $(T_3\, T_2\, T_1)(x)=U_x^{-1}(x)=U_{x^{-1}}(x)=x^{-1}=G(x)$ es continua.

3.8 <u>Corolario:</u> Sea A como en 3.6 y sea B una subálgebra plena de A, entonces $\overline{B}$, el cierre de B es una subálgebra plena de A.

En efecto:

Sea x de $\overline{B}$ tal que $x \in$ J-inv(A), sea $(x_n) \subset B$ tal que $(x_n) \to x$ Ahorab bien, por 3.6 J-inv(A) es un entorno de x, de donde para n suficientemente grande x_n pertenecen a J-inv(A) y como B es plena, x_n es J-inversible en B, sea $x_n^{-1} \in B$. Por el teorema anterior, $x_n^{-1} \to x^{-1}$ en A, de donde $x^{-1} \in B$.

<u>Nota:</u> El corolario anterior en el caso asociativo aparece en (20,I.p.18) pero sin la hipótesis de complitud, pero el razonamiento utilizado es el descrito anteriormente, que a nuestro juicio no sería correcto sin la hipótesis de complitud.

3.9 <u>Teorema:</u> Sea A una K-álgebra de Jordán n.c. normada completa con unidad. Entonces la aplicación

G : J-inv(A) $\longrightarrow$ J-inv(A) $\quad G(x)=x^{-1}$ es diferenciable y su diferencial en $x_0 \in$ J-inv(A) es $-U_{x_0^{-1}}$

En efecto:

Por cálculo directo se comprueba que:

$G(x)-G(x_0)+U_{x_0^{-1}}(x-x_0)=U_{x_0^{-1}}(U_{x-x_0}(x^{-1}))$

De donde resulta:

$\|G(x)-G(x_0)+U_{x_0^{-1}}(x-x_0)\|=\|U_{x_0^{-1}}U_{x-x_0}(x^{-1})\| \leq \|U_{x_0^{-1}}\| \|U_{x-x_0}\| \|x^{-1}\|$

$\|U_{x^{-1}}\| \|U_{x-x_0}\| \|x^{-1}\| \leq 9 \|x_0^{-1}\|^2 \|x-x_0\|^2 \|x^{-1}\|$

Por lo tanto:

$\|G(x)-G(x_0)+U_{x_0^{-1}}(x-x_0)\| / \|x-x_0\| \leq 9 \|x_0^{-1}\|^2 \|x^{-1}\| \|x-x_0\|$

Cuando $x \to x_0$ por el teorema anterior, $x^{-1} \to x_0^{-1}$ y la continuidad de la norma implica que $\|x^{-1}\| \to \|x_0^{-1}\|$ yy $\|x-x_0\| \to 0$, de donde resulta que:

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{\|G(x)-G(x_0)+U_{x_0^{-1}}(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$, que por definición implica que $G'(x_0)=-U_{x_0^{-1}}$

3.10 Corolario (Curioso): Sea A como en el teorema anterior y $x_0 \in$ inv(A), entonces:

(i) $L_{x_0^{-1}}=U_{x_0^{-1}}R_{x_0}$ y $R_{x_0^{-1}}=U_{x_0^{-1}}L_{x_0}$

Fórmulas obtenidas de I.4.9 para todo $x \in$ J-inv(A).

En efecto:

En I.4.10 demostramos que inv(A) $\subset$ J-inv(A). Así que la aplicación G coincide en inv(A) con la definida en 2.13, y por lo tanto sus diferenciales coinciden en inv(A), de donde:

$U_{x_0^{-1}}=L_{x_0}^{-1}R_{x_0^{-1}}=R_{x_0}^{-1}L_{x_0^{-1}}$ de donde se concluye (i)

3.11 Sea A como en el teorema 3.9 y $x \in$ J-inv(A), entonces se tiene:

(i) $2U_{x_o^{-1}}(y)=(U_{x_o^{-1}},U_{x_o^{-1}}(y))(x\ )$ para todo y de A

La notación $U_{x,y}$ tiene el significado de I.2-8(ii).

En efecto:

Sea $G=T_3T_2T_1$ la descomposición de G en el teorema 3.7 y calculemos su diferencial por la regla de la cadena:

$G'(x_o)(y)=T_3'(T_2T_1(x_o))T_2'(T_1(x_o))T_1'(x_o)(y)$

(ii) $T_1'(x_o)(y)=(U_{x_o,y},y)$

(iii) $T_2'(U_{x_o},x_o)(U_{x_o,y},y)=(-U_{x_o^{-1}}U_{x_o,y}U_{x_o^{-1}},y)$

(iv) $T_3'(U_{x_o^{-1}},x_o)(-U_{x_o^{-1}}U_{x_o,y}U_{x_o},y)=U_{x_o^{-1}}(y)-(U_{x_o^{-1}}U_{x_o,y}U_{x_o^{-1}})(x_o)$

Para calcular (ii) se ha tenido en cuenta que G_U es cuadrática. En (iii) que $T_2=V\times I_A$, donde V es la aplicación $h\to h^{-1}$ de inv(BL(A)) en sí mismo. Finalmente (iv) es consecuencia de que T_3 es bilineal. Teniendo en cuenta 3.9 y la unicidad de la diferencial

$U_{x_o^{-1}}(y)=(U_{x_o^{-1}}U_{x_o,y}U_{x_o^{-1}})(x\ )-U_{x_o^{-1}}(y)$

y de I.2.9 (iv) resulta (i).

4. ESPECTRO DE UN ELEMENTO DE UNA $\mathbb{C}$-ALGEBRA DE JORDAN N.C.

Salvo que se especifique lo contrario, en todo lo que sigue A designará un álgebra compleja de Jordan n.c. con unidad e.

4.1 <u>Definición</u>: El espectro de un elemento $a\in A$ es el conjunto de los números complejos z: ze-a no sea J-inversible y lo notaremos por Sp(A,a) y cuando no haya lugar a confusión simplemente por Sp(a). Con esta notación:

(i) $Sp(A,a)=\{ z \in C: ze-a \notin J\text{-inv}(A)\}$

4.2 <u>Definición</u>: Sean A y A′ dos K-álgebras de Jordan n.c., una aplicación lineal $\varphi: A \longrightarrow A'$ se llamará un morfismo de Jordan, ó abreviadamente un J-morfismo, síi φ es morfismo de A^+ en A'^+. Si A y A′ poseen unidad y $\varphi(e)=e$, diremos que φ es un J-morfismo que conserva las unidades.

4.3 <u>Proposición</u>: Sean A y A′ dos K-álgebras de Jordan n.c. y con unidad y $\varphi: A \longrightarrow A'$ una aplicación lineal de A en A′ tal que $\varphi(e)=e$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) φ es J-morfismo

(ii) $\varphi(U_a(b))=U_{\varphi(a)}(\varphi(b))$

(iii) $\varphi(a^2)=\varphi(a)^2$

En efecto:

(i) $\Rightarrow$(ii) por I.4.5 : $U_a=U_a^+=2L_a^+-L_{a^2}^+$

Evidentemente (i) implica $\varphi(U_a^+(b))=U_{\varphi(a)}^+(\varphi(b))$

(ii) $\Rightarrow$(iii): $\varphi(a^2)=\varphi(U_a(e))=U_{\varphi(a)}(e)=\varphi(a)^2$

(iii) $\Rightarrow$(i): como $a.b=1/2(ab+ba)=1/4((a+b)^2-(a-b)^2)$

resulta que: $\varphi(a.b)=1/2(\varphi(a)+\varphi(b))^2-1/2(\varphi(a)-\varphi(b))=\varphi(a).\varphi(b)$

4.4 <u>Corolario</u>: Sean A y A′ como en la proposición anterior y $\varphi: A \longrightarrow A'$ un J-morfismo que conserva las unidades, entonces: $\varphi(J\text{-inv}(A)) \subset J\text{-inv}(A')$

En efecto:

Sea $a \in J\text{-inv}(A)$ y a^{-1} su inverso, entonces

$\varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) = \varphi(e) = e$

$\varphi(a^2 \cdot a^{-1}) = \varphi(a^2) \cdot \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^2 \cdot \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})$

Luego $\varphi(a)$ es J-inversible en A'^{+} y, por lo tanto, J-inversible y su inverso es $\varphi(a^{-1})$

4.5 <u>Corolario</u>: Sean A y A′ dos $\mathbb{C}$-álgebras de Jordán n.c. y $\varphi: A \longrightarrow A'$ un J-morfismo que conserva las unidades. Entonces para todo a de A

$$Sp(A', \varphi(a)) \subseteq Sp(A, a)$$

En efecto:

Del corolario anterior $ze-a \in J\text{-inv}(A)$ implica $ze-\varphi(a) \in J\text{-inv}(A')$, de donde $\mathbb{C}\text{-}Sp(A,a) \subseteq \mathbb{C}\text{-}Sp(A', \varphi(a))$ lo que implica $Sp(A', \varphi(a)) \subseteq Sp(A,a)$

4.6 <u>Corolario</u>: Sea B una subálgebra de A^+ que contiene al elemento unidad e, entonces:

(i) $Sp(A,a) \subseteq Sp(B,a)$ para todo $a \in B$

En particular (ii) $Sp(A,a) = Sp(A^+, a)$

Demostración: evidente.

4.7 <u>Corolario</u>: Sea B una subálgebra plena de A, entonces:

(i) $Sp(B,a) = Sp(A,a)$ para todo $a \in B$

En particular, para todo a de A se tiene que

(ii) $Sp(\mathbb{C}(a), a) = Sp(A,a)$

donde $\mathbb{C}(a)$ es el subálgebra plena engendrada por a.

Recordemos que $\mathbb{C}(a)$ es asociativa y conmutativa por I.4.14

Demostración: evidente.

4.8 <u>Notación</u>: Sea $a \in A$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $p(x)=\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_n x^n$ por $p(a)$ representamos la imagen de $p(x)$ por $E_a: \mathbb{C}[x] \longrightarrow A$, es decir:

$$p(a)=\lambda_0 e+\lambda_1 a\ \ldots+\lambda_n a^n= E_a(p(x))$$

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$, por $p(S)$ notamos el subconjunto de $\mathbb{C}$ $p(S)=\{p(z): z \in S\}$ y $p(\emptyset)=\emptyset$

4.9 <u>Proposición</u>: Sea $a \in A$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $p(x)$ no constante, entonces:

(i) $Sp(A,p(a))=\{p(z): z \in Sp(A,a)\} = p(Sp(A,a))$

Si $Sp(A,a)\neq\emptyset$ (i) se verifica para todo $p(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Demostración:

Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $p(x)=\lambda_0+\lambda_1 x+\ldots+\lambda_n x^n$, $\lambda_n\neq 0$ y $n \geq 1$ entonces, para todo $\rho \in \mathbb{C}$, $p(x)-\rho =\lambda_n^{-1}(x-z_1)\ldots.(x-z_n)$ y dado que E_a es morfismo

$$E_a(p(x)-\rho)=p(a)-\rho e=\lambda_n^{-1}(a-z_1 e)\ldots.(a-z_n e)$$

Ahora bien, $p(a)-\rho e \in \mathbb{C}(a)$, asociativa, conmutativa y plena, es J-singular síi algún $a-z_i e$ lo es, es decir:

$$\rho \in Sp(\mathbb{C}(a),p(a)) \Longleftrightarrow \text{existe } z_i \in Sp(\mathbb{C}(a),a) \text{ tal que}$$

$p(z_i)-\rho=0$, es decir:

$$Sp(\mathbb{C}(a),p(a))=\{p(z): z \in Sp(\mathbb{C}(a),a)\}$$

Pero: $Sp(\mathbb{C}(a),p(a))= Sp(A,p(a))$ ya que $p(a) \in \mathbb{C}(a)$ de donde resulta (i).

Por último, si $p(x)=\lambda_0$ constante es claro que se tiene (i) pues en este caso $p(Sp(A,a)) = \lambda_\sigma$, siempre que $Sp(A,a) \neq \emptyset$

4.10 <u>Notación</u>: Sea $\mathbb{C}(x)$ el álgebra de las fracciones racionales en una indeterminada sobre $\mathbb{C}$. Sea D un subconjunto de C y $f \in \mathbb{C}(x)$. Diremos que f es regular en D si existe una representación de f en fracción reducida $f=p/q$, (es decir, $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tales que $m.c.d(p,q)=1$) tal que $q(z) \neq 0$, para todo z de D. Dicho de otra forma, la función racional $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ no posee polos en D. Notaremos

(i) $\mathbb{C}(x,D) = \{f \in \mathbb{C}(x) : f \text{ es regular en } D\}$

Evidentemente $\mathbb{C}(x,D)$ es un subálgebra de $\mathbb{C}(x)$ tal que: $\mathbb{C}[x] \subseteq \mathbb{C}(x,D) \subseteq \mathbb{C}(x)$

Hagamos notar que $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}(x,\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(x,\emptyset)$

4.11 Sea $a \in A$, con las notaciones anteriores, existe un único morfismo de álgebras:

(i) $E'_a : \mathbb{C}(x,Sp(a)) \longrightarrow A$ que extiende $E_a : \mathbb{C}[x] \longrightarrow A$

(ii) La imagen de E'_a es $\mathbb{C}(a)$

En efecto:

Sea $f \in \mathbb{C}(x,Sp(a))$, $f=p/q$ en forma reducida y $q(z) \neq 0$ para todo z de $Sp(a)$, por 4.10, $0 \notin Sp(A,q(a))$, de donde $q(a) \in J\text{-inv}(A)$, pero $q(a) \in \mathbb{C}(a)$ (subálgebra plena) implica que $q(a)^{-1} \in \mathbb{C}(a)$ y $\mathbb{C}(a)$ conmutativa implica que

$$p(a)q(a)^{-1} = q(a)^{-1}p(a)$$

Definamos $E'_a(f) = p(a)q(a)^{-1} = f(a)$.

El resto es fácil teniendo en cuenta la asociatividad y la conmutatividad de $\mathbb{C}(a)$.

4.12 <u>Teorema</u>: Sea $a \in A$, entonces para todo $f \in \mathbb{C}(x,Sp(a))$, f no constante se verifica:

(i) $Sp(A,f(a))= \{ f(z): z \in Sp(A,a)\}$

Si $Sp(A,a)\neq\emptyset$, entonces (i) también se verifica para las constantes.

En efecto:

Sea $f=p/q$, f no constante y $f(a)=p(a)q(a)^{-1} \in \mathbb{C}(a)$, entonces, $\rho\in Sp(A,f(a)) \Leftrightarrow \rho\in Sp(\mathbb{C}(a),f(a)) \Leftrightarrow p(a)q(a)^{-1}-\rho e$ no pertenece a $J\text{-inv}(\mathbb{C}(a)) \Leftrightarrow p(a)-\rho q(a) \notin J\text{-inv}(\mathbb{C}(a)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \in Sp(\mathbb{C}(a),(p-\rho q)a)$.

Si $p-\rho q$ no es constante por 4.10:

$0 \in Sp(\mathbb{C}(a),(p-\rho q)a) \iff$ existe $z \in Sp(A,a)$ tal que $p(z)-\rho q(z)=0 \Leftrightarrow \rho= p(z)/q(z)=f(z)$, $z \in Sp(A,a)$ y se verifica (i).

Si $p-\rho q=\alpha$ constante no nula, puesto que f no es constante, $0\neq (p-\rho q)a=\alpha e$ y $\rho\notin Sp(A,f(a))$

Si f es constante y $Sp(A,a)\neq\emptyset$, es evidente que se verifica (i).

Observación: (i) los análogos asociativos de este apartado se pueden ver en (11),(14) y para el caso Jordán en (55). Las demostraciones son idénticas al caso asociativo. Esto ha sido posible gracias al teorema I.4.13.

(ii) Si D es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, P(D), el álgebra de las funciones polinómicas complejas en D es isomorfa a $\mathbb{C}[x]$ y por lo tanto el teorema 4.9 es válido para P(D).

(iii) Si D es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, tal que $Sp(a)\subset C$, entonces, R(D), el álgebra de las funciones racionales complejas en D sin polos en D se identifica con $\mathbb{C}(x,D)$ contenida en $\mathbb{C}(x,Sp(a))$ y para todo $f \in R(D)$ existe $f(a)$ en el sentido de 4.11, verificándose evidentemente 4.12.

5.- PROPIEDADES ANALITICAS DEL ESPECTRO DE UN ALGEBRA NORMADA DE JORDAN N.C.

5.1 <u>Lema fundamental</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. normada completa con unidad e y sea $a \in A$. Entonces existe una subálgebra C de A, asociativa, conmutativa plena y cerrada tal que $a \in C$

Demostración:

Sea $\mathbb{C}(a)$ la subálgebra plena generada por a que por I.4.14 es asociativa y conmutativa, su cierre $\overline{\mathbb{C}(a)}$ es una subálgebra conmutativa y asociativa por 1.6(iii) y plena por 3.8.

<u>Comentario</u>: el carácter fundamental de este lema radica en que reduce la teoría espectral en álgebras de Jordan n.c. al caso de álgebras conmutativas de Banach.

5.2. <u>Teorema</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada de Jordan n.c. con unidad e y $a \in A$. Entonces existe $z_o \in Sp(a)$ tal que $|z_o| \geq r(a)$.

Demostración:

$$Sp(A,a)=Sp(\overline{\mathbb{C}(a)},a)$$

$\overline{\mathbb{C}(a)}$ súbálgebra conmutativa y asociativa de A, el análogo asociativo completa la demostración. En (14,p.22), (79,p.28) se puede ver una prueba elemental pero un poco larga y complicada.

5.3 <u>Teorema</u>: Sea A un álgebra compleja de Jordan n.c. con unidad e, normada y completa, y sea $a \in A$, entonces:

(i) Sp(A,a) es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$

(ii) El radio del más pequeño círculo del plano complejo centrado en el origen y que contiene al espectro de a, es el radio espectral, es decir

$$r(a)=\text{máx } \{ |z| : z \in Sp(a) \}$$

Demostración: el lema 5.1 y 4.7 reduce el teorema al caso Banach. Por ser la prueba directa simple, la reproducimos, (14,p.23)

$$\forall \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > r(a) \quad , \text{ 3.4 implica } \quad \lambda \notin Sp(A,a)$$

de donde Sp(A,a) es acotado. Teniendo en cuenta 5.3 resulta (ii). Por otra parte, $\mathbb{C}$-Sp(A,a) es la imagen inversa del abierto J-inv(A) por la aplicación continua $z \mapsto ze-a$ de $\mathbb{C}$ en A, luego es abierto y, por lo tanto, Sp(A,a) es cerrado. Finalmente Sp(A,a) acotado y cerrado equivale a su compacidad.

5.4 <u>Definición</u>: Sea X un espacio de Banach complejo y D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una aplicación F de D en X se dice holomorfa ó analítica en D si para toda funcional lineal continua $f \in X'$, donde X′ nota el dual topológico de X, fF de D en $\mathbb{C}$ es analítica en el sentido usual. El teorema de Dunford (35,p.93) asegura la equivalencia de esta definición a que F sea diferenciable (Fréchet) en todo punto de D. También se demuestra que F es analítica en D sii $\forall \lambda \in D$, existe $\Delta(\lambda, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda| < r; r > 0\}$ disco abierto de centro λ y radio r mayor que cero, tal que:

$\forall z \in \Delta(\lambda; r)$; $F(z) = \sum x_n (\lambda - z)^n$; $x_n \in X$ y la serie $\sum x_n (\lambda - z)^n$ es absolutamente sumable en $\Delta(\lambda, r)$ (28, p.200 y p.225)

En (35) y (28) se desarrolla la teoría de funciones de variable compleja con valores en un Banach extendiendo los teoremas clásicos de la teoría ordinaria. Así, por ejemplo, se demuestran los teoremas de Cauchy para funciones holomorfas, la fórmula integral de Cauchy, el teorema de Cauchy-Hadamard, el principio del máximo y sus consecuencias, entre ellas destacamos el teorema de Liouville El principio de prolongación analítica de Weirstrass y el teorema de Vitali con ciertas modificaciones.

5.5 <u>Teorema</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad e, normada completa y sea $a \in A$. Entonces la aplicación $z \mapsto h(a,z) = (ze-a)^{-1}$ de $\mathbb{C}$-Sp(a) en A es holomorfa, nula en el infinito y se tiene:

(i) $$\frac{d^k}{dz^k} h(a,z) = (-1)^k k! \, h(a,z)^{k+1}$$

Demostración: evidentemente h(a,z) se puede considerar función de $\mathbb{C}$-Sp(a) en $\overline{\mathbb{C}(a)}$ de Banach, y el análogo asociativo (14, p.24) completaría la prueba Pero por las mismas razones que en el teorema anterior damos la demostración (55).

La aplicación h(a,z) es la composición de

(i) T: $z \longmapsto ze-a$ de $\mathbb{C}-Sp(a)$ en J-inv(A), diferenciable, y su diferencial en todo punto z de A se puede identificar a e.

(ii) G: $x \longmapsto x^{-1}$ de J-inv(A) en A, diferenciable como se vió en 3.9

De donde $\dfrac{dh(a,z)}{dz} = -U_{(ze-a)^{-1}}(e) = -(ze-a)^{-2}$

Para obtener (i) se razona por inducción.

5.6 Corolario: Sea A un álgebra compleja de Jordan n.c. normada con unidad y sea $a \in A$. Si $A \neq 0$ se tiene que $Sp(a) \neq \emptyset$

Demostración: (20).

Supongamos primero que A es completa. Si $Sp(a)=\emptyset$, por el teorema anterior h(a,z) es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y nula en el infinito, el teorema de Liouville nos asegura su nulidad en todo $\mathbb{C}$, de donde $h(a,0)=a^{-1}=0$, lo que es un absurdo si $A\neq 0$. En el caso general sea $\hat{A}$ la completación de A que por 1.3 es de Jordan n.c. normada completa con unidad, por 4.6 $Sp(\hat{A},a) \subset Sp(A,a)$, de donde si $Sp(A,a)=\emptyset$ entonces $Sp(\hat{A},a)=\emptyset$ y $\hat{A}=0$ lo que implica A=0 y esto va contra la hipótesis.

5.7 <u>Corolario</u>: (Kaplansky (43)) Sea A como en el corolario anterior y sea $a \in A$ tal que $Sp(A,a)=\{0\}$ entonces el conjunto $\{(ze-a)^{-1}: z \in \mathbb{C}-\{0\}\}$ no está acotado.

Demostración: como $\emptyset \neq Sp(\hat{A},a) \subseteq Sp(A,a)= 0$, implica que $Sp(\hat{A},a)=\{0\}$. De donde resulta que la función h(a,z) de

$\mathbb{C}-\{0\}$ en $A\subset\hat{A}$ es holomorfa en todo el plano menos en 0, si $\{(ze-a)^{-1}: z\in\mathbb{C}-\{0\}\}$ es acotado, $\forall f\in A'$ (A' dual topológico de A), $f((ze-a)^{-1})$ sería holomorfa en $\mathbb{C}-\{0\}$, nula en el infinito y acotada en un entorno del origen, por lo que sería prolongable a una función analítica en todo el plano Liouville nos dice que, entonces, ésta ha de ser constante, pero, de su nulidad en el infinito, se deduce que esta constante necesariamente ha de ser cero. De donde $f((e-a)^{-1})$ es igual a cero, pero f es arbitraria en A'; un corolario del teorema de Hahn-Banach asegura que en este caso se tiene $(e-a)^{-1}=0$, lo cual es cierto sólo si $A=\{0\}$, situación que hemos descartado por hipótesis.

5.8 <u>Corolario</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa de Jordan n.c. y con unidad e, sea a un elemento J-inversible de A tal que: $\|a\|=\|a^{-1}\|=1$ Entonces $Sp(a)$ está contenido en la circunferencia unidad $\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}=C(0;1)$.

Demostración:

De $\|a\|=\|a^{-1}\|=1$ resulta que $r(a)\leq 1$ y $r(a^{-1})\leq 1$

Por 5.3(ii), $Sp(a)\cup Sp(a^{-1})\subset\{z: |z|\leq 1\}$ y por 4.12

$Sp(a^{-1})=(Sp(a))^{-1}$ donde $(Sp(a))^{-1}=\{\lambda^{-1}: \lambda\in Sp(a)\}$

luego, $\forall\lambda\in Sp(a)$, $|\lambda|\leq 1$ y $|1/\lambda|\leq 1$, de donde $|\lambda|=1$

5.9 <u>Definición</u>: Sean X e Y dos espacios topológicos y ϕ una función de X en P(Y), conjunto de las partes de Y, la aplicación ϕ se dice semicontinua superiormente sii para todo $x_o\in X$ y todo entorno V de $\phi(x_o)$, existe un entorno U de x_o tal que: $\phi(x)\subset V$ $(x\in U)$.

Proposición: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa de Jordan n.c. con unidad e. Entonces la aplicación $a \mapsto Sp(a)$ de A en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ es semicontinua superiormente.

Demostración: En la demostración de este resultado en el caso Banach (14,p.20), la asociatividad se puede sustituir por Jordan n.c.

5.11 Lema: Sea A una álgebra Jordan n.c. con unidad normada completa, entonces:

$$\forall a,\ a \in A \text{ se tiene que } r(a)=r(L_a^+)$$

En efecto:

En (55,p.74) se demuestra que en una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan normada completa con unidad: $r(a)=r(L_a)$

La demostración se basa en el teorema fundamental II.4.6 establecida en la misma referencia y que asegura que en las condiciones enunciadas anteriormente

$$Sp(BL(A),\ L_a) \subset 1/2(Sp(a)+Sp(a)) \qquad (a \in A)$$

5.12 Lema: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan normada completa con unidad, sean $a_n \in$ J-inv(A) tal que $U_{a_n}U_a=U_aU_{a_n}$ (n=1,..) $(a_n)\to a$ y $\{r(a_n^{-1})\}$ sea acotado. Entonces $a \in$ J-inv(A).

En efecto: por el lema anterior $r(a)=r(L_a^+)$ implica:

$$r(U_a)=r(U_a^+)=r(2L_a^{+2}-L_{a^2}^+) \leq 2r(L_a^+)+r(L_{a^2}^+) \leq 2r(a)^2+r(a^2)=$$
$$=3r(a)^2.$$

De donde, $\{r(U_{a_n^{-1}})\}$ es acotado. Por último, de $U_{a_n}\to U_a$, $U_aU_{a_n}=U_{a_n}U_a$, el teorema asociativo (14,p.19) asegura que $U_a \in$ J-inv(BL(A)) $\Rightarrow a \in$ J-inv(A).

5.13 Proposición: Sea A como en el lema anterior, dado $a \in A$ y ε mayor que cero, existe δ mayor que cero tal que:

$$d(\lambda, Sp(x)) < \varepsilon \qquad (\lambda \in Sp(a))$$

para todo x tal que $U_a U_x = U_x U_a$ y $\|x-a\| < \delta$

Demostración: (14,p.26) donde hay que sustituir la condición xa=ax por $U_a U_x = U_x U_a$ y la proposición 4.6,p.19 de la misma referencia por el lema anterior.

5.14 Observación: todos los resultados sobre el cálculo funcional holomorfo en una variable en álgebras de Banach con unidad, contenidos en (14,p.31-38) son válidos para álgebras de Jordan n.c. con unidad normadas completas, sin más que tener en cuenta que todo se reduce a la subálgebra cerrada y plena de A engendrada por un elemento, que es de Banach conmutativa, 5.1. Reproducimos dos resultados de entre ellos, uno por ser el teorema fundamental y el otro para destacar la abundancia de idempotentes con vistas a una posible teoría de clasificación y estructura de tipos particulares de álgebras de Jordan n.c. normadas completas, ya que éstos juegan un papel fundamental en los teoremas a nivel finito dimensional, así como en la teoría de las JB-álgebras desarrollada en (7).

Notación y definiciones: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. normada completa con unidad, sea $a \in A$, D un entorno abierto de Sp(a), H(D) el álgebra de las funciones holomorfas con valores complejos en D, W un abierto acotado tal que $Sp(a) \subset W \subset D$ y cuya frontera $FrW = \Gamma$ es unión finita de curvas rectificables contenidas en D y orientada de manera que rodee positivamente una sola vez a cada punto de Sp(a). (La existencia de W se demuestra en (14,p.29), W se llamará una envolvente del par (Sp(a),D).

$\forall\ f \in H(D)$ se define (14,p.32)

$$(1)\quad \hat{E}_a(f) = f(a) = 1/2\pi i \int_\Gamma f(z)(ze-a)^{-1} dz, \quad \Gamma = Fr(W)$$

Teorema fundamental: (14,p.33) Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. normada completa con unidad e, sea $a \in A$ y D un entorno abierto de Sp(a). Entonces:

(i) Dada $f \in H(D)$, (1) es independiente de la elección de la envolvente W del par (Sp(a),D)

(ii) La aplicación $\hat{E}_a: f \longmapsto f(a)$ es un morfismo de H(D) en A y es el único que extiende el morfismo E'_a de R(D) en A.

(iii) Dado un entorno compacto K de Sp(a) contenido en D, la aplicación $\hat{E}_a: f \longmapsto f(a)$ es continua respecto a la convergencia uniforme sobre K

(iv) $Sp(f(a)) = \{f(z) : z \in Sp(a)\}$ $\qquad (f \in H(D))$

Proposición: (14, P.36) Sea A como en el teorema anterior, $\underline{a}$ de A y $Sp(a) = \bigcup_1^m K_j$ j=1,2, .,n compactos disjuntos dos a dos y no vacíos. Entonces existen $u_1, \ldots, u_m$ idempotentes no nulos pertenecientes todos a la variedad cerrada engendrada por $\{(ze-a)^{-1} : z \in \mathbb{C}-Sp(a)\}$ tal que:

$$e = u_1 + \ldots . + u_m \qquad u_i u_j = 0 \text{ si } i \neq j$$

Además, si $K_j = \{\lambda_j\}$, entonces $Sp(au_j) = \{\lambda_j\}$ y $au_j - \lambda u_j$ es casi-nihilpotente, esto es, $r(au_j - \lambda_j e_j) = 0$

6.- COMPLEXIFICACION DE UN ALGEBRA REAL

6.1 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra (resp. $\mathbb{C}$-espacio , entonces A se puede considerar de manera natural como álgebra real (resp. espacio real), á A dotada de esta estructura la llamaremos álgebra real subyacente al álgebra compleja A, (resp. espacio real subyacente al espacio complejo A). La expresión súbálgebra real (resp. subespacio real) de A hay que entenderla en el sentido de subálgebra (resp. subespacio) del álgebra real subyacente á A (resp. del espacio real subyacente á A). Evidentemente toda subálgebra (resp. subespacio de A) es una subálgebra real (resp. subespacio real) de A. Sean A y B dos $\mathbb{C}$-álgebras (resp. $\mathbb{C}$-espacios), una aplicación f: A $\longrightarrow$ B se llamará $\mathbb{R}$-morfismo (resp. $\mathbb{R}$-lineal) si f es morfismo (resp. es aplicación lineal) de las álgebras reales subyacentes (resp. espacios reales subyacentes).

6.2 Sea A una $\mathbb{R}$ -álgebra, en el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$, producto tensorial de A y $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$ -espacios, las operaciones:

(i) $\lambda\ (\alpha \otimes a)=(\lambda\alpha)\otimes a \qquad \lambda,\alpha \in \mathbb{C},\ a \in A$

(ii) $(\alpha \otimes a)(\beta \otimes b)=(\alpha\beta)\otimes(ab) \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ a,b \in A$

junto a la adición original en $\mathbb{C}\otimes A$, dotan a este último de estructura de $\mathbb{C}$-álgebra (15,AIII.7). Nótese que (i) y (ii) están definidas sobre los generadores de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} A$, su extensión a todo $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} A$ es evidente y la buena definición de las operaciones se puede probar fácilmente teniendo en cuenta las propiedades del producto tensorial. $\mathbb{C}\otimes A$ ..., dotado de la estructura anterior lo notaremos por $A_{\mathbb{C}}$ y lo llamaremos la complexificación de A.

6.3 <u>Proposición</u>: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra y $A_{\mathbb{C}}$ su complexificación, entonces:

(i) La aplicación $a \mapsto 1\otimes a$ de A en $A_{\mathbb{C}}$ es un $\mathbb{R}$-monomorfismo

(ii) Si B es una $\mathbb{C}$-álgebra y $f: A \longrightarrow B$ en un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, existe un $\mathbb{C}$-morfismo $F: A_{\mathbb{C}} \longrightarrow B$ y uno solo tal que $F(1\otimes a)=f(a)$, para todo $a \in A$.

Demostración: (15,A III.7).

6.4 La proposición anterior se puede expresar diciendo que el monoforfismo $a \mapsto 1\otimes a$ de A en $A_{\mathbb{C}}$, es un elemento universal para el functor: $B \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathbb{R}}(A,B)$, donde $\mathrm{Mor}_{\mathbb{R}}(A,B)$ nota el conjunto de los $\mathbb{R}$-morfismos de A en B, de la categoría de las $\mathbb{C}$-álgebras en la categoría de conjuntos, del teorema de unicidad de los elementos universales se deduce que si A' es una $\mathbb{C}$-álgebra que contiene una subálgebra real isomorfa a A y que verifica (ii), entonces A' es naturalmente isomorfa a $A_{\mathbb{C}}$, lo que justifica la notación $A_{\mathbb{C}}$ y la nomenclatura.

6.5 <u>Proposición</u>: la complexificación de un álgebra real, flexible (resp. Jordan n.c., resp. alternativa, resp. conmutativa, resp. asociativa, resp. con unidad e) es flexible (resp. Jordan n.c., resp. alternativa, resp. asociativa, resp. con unidad $1\otimes e$).

En efecto, es consecuencia inmediata de la bilinealidad del producto tensorial y de que cada una de las identidades que caracterizan a estos tipos de álgebras se puede expresar en forma multilineal. Por ejemplo:

(F) equivale a I.3.2 (iii) y (J) a $(x,y,zw)+(z,y,xw)+$ $+(w,y,xz)=0$ (99)

6.6 Identificando A con su imagen por el $\mathbb{R}$-monomorfismo $a\mapsto 1\otimes a$, $1\otimes a\equiv a$, todo elemento x de $A_{\mathbb{C}}$ se expresa de manera única como a_1+ia_2 para $a_1,a_2\in A$ y $A_{\mathbb{C}}=A\oplus iA$, suma directa de subespacios reales A e iA. La aplicación:

(i) $x\mapsto\bar{x}=a_1-ia_2$ de $A_{\mathbb{C}}$ en $A_{\mathbb{C}}$ es un automorfismo antilineal involutivo de $A_{\mathbb{C}}$. Es decir

(ii) $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$ $\overline{\lambda x}=\bar{\lambda}\bar{x}$, $\overline{xy}=\bar{x}\bar{y}$, $\bar{\bar{x}}=x$

Las operaciones 6.2 (i) y (ii) se expresarían

$(\alpha+\beta i)(a_1+ia_2)=\alpha a_1-\beta a_2+i(\alpha a_2+\beta a_1)$

$(a_1+ia_2)(b_1+ib_2)=a_1b_1-a_2b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)$

6.7 <u>Proposición:</u> Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad y $A_{\mathbb{C}}$ su complexificación, entonces:

(i) $A_{\mathbb{C}}$ es de Jordan n.c. con unidad e

(ii) a es inversible (resp. J-inversible) en A síi a en inversible (resp. Jinversible) en $A_{\mathbb{C}}$

(iii) $a+ib$ es inversible (resp. J-inversible) síi $a-ib$ es inversible (resp. J-inversible).

Demostración:

(i) ya se ha visto en 6.5

(ii) es consecuencia de (iii), sólo falta probar (iii).

El carácter automórfico de $x \mapsto \bar{x}$ demuestra que $a+ib$ es J-inversible síi $a-ib$ lo es.

Ahora bien, $a+ib$ es inversible síi para cada $c+id$ existe un único $x+iy$ (resp. $x'+iy'$) tal que $(a+ib)(x+iy)=c+id$ (resp. $(x'+iy')(a+ib)=c+ide$) evidentemente $x-iy$ (resp. $x'-iy'$ es el único elemento tal que $(a-ib)(x-iy)=c-id$ (resp. $(x'-iy')(a-ib)=c-id$)

6.8 Definición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad Por definición, el espectro de a relativo a A es el conjunto de los complejos dado por

$$Sp(A,a)=Sp(A_{\mathbb{C}},a)$$

Cuando no haya lugar a confusión lo notaremos simplemente por $Sp(a)$.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{C}$ notaremos por $\bar{S}$ el conjunto : $\bar{S}=\{\bar{\lambda} : \lambda \in \mathbb{C}\}$

6.9 Proposición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. y $a \in A$, entonces:

(i) $\overline{Sp(a)}=Sp(a)$

(ii) $0 \notin Sp(a) \Leftrightarrow a \in J\text{-inv}(A)$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\neq 0$. Entonces $\lambda \in Sp(a)$ síi $\lambda\bar{\lambda}e-(\lambda+\bar{\lambda})a+a^2 \notin J\text{-inv}(A)$

(iv) Si $\alpha,\beta \in R$ entonces $\alpha+i\beta \in Sp(a)$ síi $(\alpha e-a)^2+\beta^2 e \notin J\text{-inv}(A)$

Demostración:

(i) de 6.7(iii) se deduce que $\lambda e-a$ es J-inversible síi $\bar{\lambda} e-a$ es J-inversible

(ii) por definición de Sp(a) y 6.7(ii)

(iii) $\lambda e-a$ y $\bar{\lambda}e-a$ pertenecen a la subálgebra plena engendrada por a, $\mathbb{C}(a)$, que es asociativa y conmutativa, de donde $(\lambda e-a)(\bar{\lambda}e-a)=|\lambda|^2 e-(\lambda+\bar{\lambda})a+a^2$ es J-singular síi $\lambda e-a$ ó $\bar{\lambda}e-a$ es J-singular síi λ ó $\bar{\lambda}\in Sp(a)$, por (i) esto equivale a que λ y $\bar{\lambda}\in Sp(a)$

(iv) Por (iii) $\alpha+\beta i \in Sp(a)$ síi $(\alpha^2+\beta^2)e-2\alpha a+a^2=$ $=(\alpha e-a)^2+\beta^2 e \notin$ J-inv(A)

6.10 <u>Teorema</u>: (Complexificación normada): Sea $(A,\|\cdot\|)$ un álgebra normada real, $A_{\mathbb{C}}$ su complexificación, $U=\{a\in A: \|a\|<1\}$, V la envolvente convexo equilibrada en el $\mathbb{C}$-espacio lineal $A_{\mathbb{C}}$ de U y, finalmente, p_V el funcional de Minkowxki de V. Entonces:

(i) $(A_{\mathbb{C}}, p_V)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra normada

(ii) $V=\{x\in A : p_V(x)<1\}$

(iii) $\max\{\|a\|, \|b\|\}\leq p_V(a+ib)\leq 2\max\{\|a\|,\|b\|\}$; (a,b de A)

(iv) $p_V(a)=\|a\|$ $(a\in A)$

(v) $(A_{\mathbb{C}}, p_V)$ es completa siempre que lo sea $(A,\|\cdot\|)$

Demostración: Mutatis mutandis del caso asociativo (14,p.68)

6.11 <u>Corolario</u>: En las hipótesis del teorema anterior se verifica que p_V es la mayor norma sobre $A_{\mathbb{C}}$ tal que su restricción a A coincide con la norma $\|.\|$ original de A (55,p.80).

En efecto: Sea $\|.\|'$ otra norma sobre A tal que

$$\|a\|'=\|a\| \qquad (a\in A)$$

Para demostrar el corolario es suficiente ver que la bola unidad abierta contiene a V contenida en V (bola unidad abierta de p_V por 6.10 (ii))

Sea $x \in V$, entonces $x = \sum t_i a_i$; $t_i \in \mathbb{C}$, $\sum |t_i| \leq 1$ y $a \in V$. Entonces:

$\|x\|' = \|\sum t_i a_i\|' \leq \sum |t_i| \, \|a_i\| < \sum |t_i| \leq 1$ Si al menos algún $t_i \neq 0$

6.12 <u>Definición</u>: llamaremos complexificación normada de un álgebra real $(A, \|.\|)$ al álgebra compleja $A_{\mathbb{C}}$ dotada de la norma del teorema 6.10.

6-13 <u>Teorema</u>: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. normada y con unidad, entonces:

(i) Sp(a) contiene $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| \geq r(a)$

(ii) Si A es además completa, Sp(a) es compacto, y $r(a) = \sup\{|z|, \ z \in Sp(a)\}$

(iii) $Sp(a) \neq \emptyset$ siempre que $A \neq (0)$

Demostración: 5.2; 5.3 y 5.6 aplicadas á $A_{\mathbb{C}}$.

C A P I T U L O III

III.- ALGEBRAS NORMADAS CON DIVISION Y ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS CON J - DIVISION

1.- Teorema de Gel'fand Mazur para álgebras complejas con división normadas completas:

1.1 Definición: Sean A y B dos K-álgebras. Diremos que A y B son isotópicas si existen, tres biyecciones lineales de A sobre B; u,v,w; $A \longrightarrow B$ tal que:

$$w(xy) = u(x)\, v(y) \qquad (x,y \in A)$$

Evidentemente la relación A es isotópica a B, es una relación de equivalencia en la clase de las K-álgebras.

Si $u = v = w$, se obtiene el concepto de isomorfismo.

1.2 Definición: Llamaremos K-álgebra con división única por la izquierda (resp. por la derecha): un álgebra $D \neq 0$, tal que la ecuación $ax = b$ (resp. $xa = b$) tenga solución única en D, para todo $a,b \in D$, con $a \neq 0$. Es claro que la definición anterior es equivalente a que L_a (resp. R_a) sea inversible, para cada $a \in D$, $a \neq 0$. Hagamos notar que la definición I.1.21 se expresa ahora diciendo que D es con división sii D es con división única por la izquierda y por la derecha.

1.3 Lema: Sea A una K-álgebra con división única por la izquierda (resp. por la derecha). Entonces A es isotópica, a una K-álgebra con unidad por la izquierda (existe $e \in D: ex = x$,$(x \in D)$) (resp. por la derecha) que a su vez es con división única por la izquierda (resp. por la derecha).

En efecto: Como $D \neq 0$, existe $a \in D$, $a \neq 0$. Para cada par $x,y \in D$, definamos:

(i) $x \odot y = L_a^{-1}(x)\, L_a^{-1}(y)$ (resp. $x \odot y = R_a^{-1}(x)\, R_a^{-1}(y)$)

El caracter lineal de L_a implica que el producto $x \odot y$ es bilineal y $(D,\odot)$ es una K-álgebra isótopa de D.

Veamos que $e = a^2$ es una unidad por la izquierda (resp. por la derecha) respecto del producto $\odot$:

$$e \odot x = L_a^{-1}(a^2)\, L_a^{-1}(x) = a\, L_a^{-1}(x) = x \quad (\text{resp. } x \odot e =$$
$$= R_a^{-1}(x)\, R_a^{-1}(a^2) = R_a^{-1}(x)a = x)$$

Finalmente si con $L_x^{\odot}$ (resp. $R_x^{\odot}$) notamos el multiplicador por la izquierda por x (resp. por la derecha por x) respecto del producto $\odot$, de (i) resulta:

(ii) $L_x^{\odot} = L_{L_a^{-1}(x)}\, L_a^{-1}$ (resp. $R_x^{\odot} = R_{R_a^{-1}(x)}\, R_a^{-1}$)

que evidentemente es inversible si $x \neq 0$.

Nota: Si D es con división y se define en (i) $x \odot y =$ $= L_a^{-1}(x)\, R_a^{-1}(y)$ resulta que $(D,\odot)$ es con unidad y con división.

1.4 Lema: Sea D una K-álgebra ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) normada completa con división única por la izquierda (resp. por la derecha). Entonces D admite una isótopa con unidad por la izquierda (resp. por la derecha)normada completa con división única por la izquierda (resp. por la derecha).

En efecto: Sea $(D,\circ)$ la isótopa de D construida en el lema anterior correspondiente al elemento $a \in D$.

Es suficiente ver que $\circ$ es continuo respecto de la norma dada en D.

La complitud de D y el teorema de los isomorfismos de Banach aseguran la continuidad de L_a^{-1} (resp. R_a^{-1}). De donde:

$$\|x \circ y\| = \|L_a^{-1}(x)\, L_a^{-1}(y)\| \leq \|L_a^{-1}\|^2 \|x\| \|y\|$$

1.5 <u>Lema</u>: toda $\mathbb{C}$ -álgebra isotópica a $\mathbb{C}$ es isomorfa a $\mathbb{C}$.

En efecto: Sea D una isótopa de $\mathbb{C}$, podemos identificar D a $\mathbb{C}$ como espacio vectoriales, notemos $(\mathbb{C}, \circ)$ la isótopa en cuestión, y séan u,v,w tres biyecciones lineales de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, éstas necesariamente han de ser de la forma:

$u(z) = \alpha z$, $v(z) = \beta z$ y $w(z) = \gamma z$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, distintos de cero).

Luego de: $w(z z') = u(z) \circ v(z')$ resulta que:

$z \circ z' = \frac{\gamma}{\alpha\beta} z z'$; y la aplicación $z \longmapsto \frac{\alpha\beta}{\gamma} z$ de $(\mathbb{C}, \circ)$ sobre $\mathbb{C}$ es un isomorfismo.

1.6 <u>Teorema (Gel'fand-Mazur)</u>: Sea D una $\mathbb{C}$ -álgebra normada completa con división única por la izquierda (resp. por la derecha), entonces D es isomorfa a $\mathbb{C}$.

<u>En efecto</u>: por el lema 1.4, D admite una isótopa, (D , $\odot$) normada completa con unidad por la izquierda e y con división única por el mismo lado. Sea $x \in D$, $x \neq 0$, por II.5.6 $Sp(BL(D), L_x^{\odot}) \neq \emptyset$.

Sea $z \in Sp(L_x^{\odot}) \Rightarrow L_x^{\odot} - zI = L_{x-ze}^{\odot} \notin inv_i(BL(D))$ la complitud de D asegura que $L_{x-ze}^{\odot} \notin inv_i\ (L(D))$ de donde $x-ze \notin inv_i(D,\odot)$; D es con división única por la izquierda, lo que implica que $x = ze$. De donde resulta que el monomorfismo $z \mapsto ze$ de $\mathbb{C}$ en $(D,\odot)$ es un isomorfismo y el lema anterior completa la demostración.

1.7 <u>Corolario</u>: Sea A un álgebra compleja de dimensión finita en la que todo elemento $\neq 0$ es regular por la izquierda (resp. por la derecha), I.1.23. Entonces A es isomorfa a $\mathbb{C}$.

<u>En efecto</u>: por ser A de dimensión finita, es normada completa, II.1.7; por otra parte para todo $x \in A$, $x \neq 0$, x es regular por la izquierda sii L_x es inyectivo; la finitud del rango de A implica la inversibilidad de L_x y por lo tanto A es normada completa con división única por la izquierda y el teorema anterior confirma nuestra tesis.

<u>Nota</u>: (i) los lemas 1.3 y 1.5 son conocidos; un resultado más general se puede ver en (26.Teorema 3D.P.150). Un extenso estudio de isotopía tanto de álgebras, como de estruc-

turas más generales se encuentra en (8,Vol.I Cap.V y Vol.II, Cap. XII).

(ii) En la bibliografía que hemos podido consultar el corolario puramente algébrico 1.7 no aparece. En (52, P.243) se cita un resultado más débil, exigiendo la asociatividad de las potencias, la regularidad por ambos lados y la existencia de la unidad. Su demostración se basa en la finita dimensionalidad y en el hecho de que el polinomio mínimo de un elemento de un álgebra algébrica de integridad, I.1.13, es irreducible. Cabe advertir que dicho corolario 1.7 se puede demostrar por métodos puramente algébricos, inclusive vale si se sustituye $\mathbb{C}$ por un cuerpo algebraicamente cerrado, sin más que tener en cuenta que $L_x^{\odot}$ ha de admitir un valor propio.

Notación: en el resto de este apartado K notará $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1.8 <u>Definición</u>: Sea A una K-álgebra normada y $a \in A$; diremos que <u>a</u> es divisor de cero topológico por la izquierda, abreviadamente d.c.t.i. (resp. por la derecha, (d.)), si existe una sucesión $(x_n) \subset A$, $\|x_n\| = 1$ y tal que: $(ax_n) \longrightarrow 0$ (resp. $(x_n a) \to 0$) y llamaremos <u>a</u> divisor de cero topológico (d.t.c.) si <u>a</u> es d.t.c.i. ó d.c.t.d..

1.9 <u>Lema</u>: Sea X un espacio normado y $T \in BL(X)$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) T es d.c.t.i. en $BL(X)$

(ii) Existe $(x_n) \subset X$: $\|x_n\| = 1$ y $(T(x_n)) \longrightarrow 0$

Demostración: (11. Teorema 57.4.P.241)

1.10 Corolario: Sea A como en la definición 1.8 y $a \in A$ entonces a es d.c.t.i. (resp. d.c.t.d.) sii L_a (resp.R_a) es d.c.t.i. en $BL(A)$.

1.11 Lema: Sea A una K-álgebra de Banach con unidad, entonces si $a \in Fr(inv(A))$; (Fr = Frontera) entonces a es d.c.t.i. y d.c.t.d.

Demostración: (14. Teorema 14.P.13)

1.12 Teorema: Sea A una K-álgebra normada completa $a \in Fr(inv_i(A))$ (resp.$a \in Fr(inv_d(A))$ resp.$a \in Fr(inv(A))$ entonces $\underline{a}$ es d.t.c.i. (resp. d.c.t.d. resp. d.c.t.)

Demostración: $a \in Fr(inv_i(A))$ implica que existe $(a_n) \subset (inv_i(A))$ tal que $\lim\limits_n a_n = a$ y como $inv_i(A)$ es abierto II.2.7 $a \notin inv_i(A)$, lo que implica que $L_a \notin inv(L(A))$ y con más razón $L_a \notin inv(BL(A))$, de la continuidad de la aplicación $a \longmapsto L_a$ resulta que $L_{a_n} \longrightarrow L_a$, en otras palabras $La \in BL(A)$ es no inversible y es límite de elementos inversibles en $BL(A)$, es decir $L_a \in Fr(inv(BL(A))$, el lema anterior y el corolario 1.10 concluyen la prueba. Los demás casos se demuestran análogamente.

Ciencias - 20.22.12 -

DATE D'ENVOI:
DATE DE RETOUR: AVR 21 1989
DATE DE RÉCEPTION: 7 AVR. 1989
DATE DE RENVOI: 24 AVR. 1989
RENOUVELLEMENT
DEMANDE LE
RENOUV. JUSQU'AU

21.55

7835 educi e

pebib um mtl

pebib um mtl

universidad de granada
hospital real calle cuesta del hospicio s/n
18071 granada

le 20 janvier 1989

demande de pret entre bibliotheques
dem no m41098 pour bensebah ali, mathematiques

svp toujours nous mentionner notre mentionner de demande avec
la reponse. merci

X mojtar a. Pal. Uni. | Angel Rodríguez Palacio - | Certificado - |

bases para una teoria de las algebras no asociativas normadas.
these doctorat, granada, secretariado de publicaciones de
la universidad de granada, 1978 - Ejemp. de Secretaría. Diligencia del Trib. ->

obs: pret svp
si le pret n'est pas permis svp faire un devis avant de reproduire

gilles chaput
pret entre biblitheques
universite de montreal
c.p. 6128, succ a
montreal quebec
h3c 3j7

1.13 Teorema: Sea A una K-álgebra normada completa sin divisores de cero topológicos por la izquierda $\neq 0$ y tal que $inv_i(A) \neq \emptyset$ (ésta última condición es automática si A posee unidad por la izquierda) entonces A es con división única por la izquierda.

Demostración: si dim $A = 1$ el teorema es evidente.

Supongamos dim $A \geq 2$, por el teorema anterior $inv_i(A)$ no posee puntos frontera $\neq 0$, por las propiedades elementales de la topologia relativa(31), $inv_i(A)$ es abierto y cerrado en el subespacio $A - \{0\}$, como por hipótesis $inv_i(A) \neq \emptyset$ y $A - \{0\}$ es conexo, concluimos que $inv_i(A) = A - \{0\}$

1.14 Observación: si se sustituye (resp.se elimina) en 1.13 la palabra izquierda por derecha la tesis es igualmente cierta, si en ella se efectua la misma sustitución (resp. eliminación).

1.15 Corolario: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa y sin d.c.t.i. $\neq 0$ (resp. sin d.c.t.d.) y tal que $inv_i(A) \neq 0$ (resp.$inv_d(A) \neq \emptyset$) entonces A es isomorfa a $\mathbb{C}$.

Demostración: por 1.13 A es con división única por la izquierda. El teorema 1.6 concluye la demostración.

1.16 Observación: Si en 1.6 y 1.15 se exige la existencia de unidad por la izquierda (resp. por la derecha) y la asociatividad de las potencias se puede evitar la complitud, puesto que en éste caso $[a]$ la subálgebra asociativa y conmutativa engendrada por $\underline{a}$ es normada y sin divisores de cero topológico, el teorema de Kaplansky (43) asegura que $[\underline{a}]$ es isomorfa á $\mathbb{C}$; $[a]$ es con unidad y ésta coincide con la unidad por la izquierda de A, de donde $a = \lambda e$.

2.- J -DIVISORES TOPOLOGICOS DE CERO:

En todo este apartado K-designará $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. $S(A) = \{x \in A : \|x\| = 1\}$

2.1 Proposición: Sea A una **K** álgebra asociativa normada y $a \in A$, entonces son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:

(i) a es divisor de cero topológico en A

(ii) existe una sucesión $(x_n) \subset S(A)$, tal que: $(a\ x_n\ a) \longrightarrow 0$

En efecto: (i) $\Rightarrow$ (ii) Evidente

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que : $(a\ x_n) \not\rightarrow 0$; esto implica que existe (x_{n_k}) tal que $\|ax_{n_k}\| \geqslant M > 0$

Sea $y_k = (ax_{n_k}) / \|ax_{n_k}\|$ Es claro que $(y_k) \subset S(A)$ e $(y_k\ a) \longrightarrow 0$ de donde a es d.t.c.d. y se tiene (i).

2.2 La proposición anterior se puede expresar tambien de la siguiente manera: a es d.c.t. sii existe $(x_n) \subset S(A)$: $L_a R_a(x_n) = U_a(x_n) \longrightarrow 0$. Donde U_a es el operador definido en I.2.9. Es decir que 2.1(ii) caracteriza los d.c.t. en A en términos de su Jordan subyacente A^+.

Esta observación y las definiciones I.2.11, I.2.19 y I.4.7 nos llevan de forma natural a introducir la siguiente definición:

2.3 Definición: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. normada, diremos que un elemento $a \in A$ es un divisor de cero topológico en el sentido de Jacobson abreviadamente J-d.c.t. sii existe $(x_n) \subset S(A)$ tal que:

(i) $U_a(x_n) \longrightarrow 0$ cuando n crece indefinidamente

Evidentemente por 1.9, la definición anterior es equivalente a:

(ii) a es J-d.c.t. $\Leftrightarrow$ U_a es d.c.t.i. en BL(A)

2.4 Proposición: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. normada, con unidad y $a \in A$, si a es J-d.c.t. en A, entonces a es J-singular, es decir $a \notin$ J-inv(A).

En efecto: Sea $(x_n) \subset S(A)$ tal que $U_a(x_n) \longrightarrow 0$ y supongamos que $a \in$ J-inv(A), por I.4.9 y I.2.12 , $U_a^{-1} = U_{a^{-1}}$, $U_{a^{-1}} \in BL(A)$ implica que :

$\lim\limits_n U_{a^{-1}}(U_a(x_n)) = U_{a^{-1}}(\lim\limits_n U_a(x_n)) = 0 = \lim\limits_n x_n$ lo que es un absurdo ya que $\|x_n\| = 1, \quad n \geq 0$.

2.5 Observación:

(i) Es claro que a nivel finito dimensional a es J-divisor de cero topológico sii a es J-divisor de cero (U_a inyectiva I.2.19), y en el caso general todo J-divisor de cero es J-d.c.t.

(ii) En el caso asociativo y alternativo 2.1 demuestra que los conceptos de J-d.t.c. y d.c.t. coinciden. El contraejemplo I.2.14 demuestra que éstos dejan de serlo en general, pues el elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es divisor de cero en $M_2^+(K)$ y J-inversible, de donde se deduce que no es J-divisor de cero. Si A es de dimensión finita I.4.10 demuestra que todo J-divisor de cero es divisor de cero, habida cuenta de la equivalencia en A de regular (resp. J-regular) e inversible (resp. J-inversible)

2.6 <u>Proposición</u>: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. normada con unidad, $a \in A$, si $\underline{a}$ es J-divisor de cero topológico (i) en la complexificación ó (ii) en la completación de A, entonces $\underline{a}$ es J-d.c.t. en A.

<u>En efecto</u>: (i) Supongamos que a es J-d.c.t. en $A_{\mathbb{C}}$, Sea $(x_n + iy_n) \subset S(A_{\mathbb{C}})$ tal que $U_a(x_n + iy_n) \longrightarrow 0$ de donde se deduce que $U_a(x_n) \longrightarrow 0$ y $U_a(y_n) \longrightarrow 0$.

De $p(x_n + iy_n) = 1$ se deduce que: (x_n) ó (y_n) no converge a cero; un razonamiento análogo al utilizado en 2.1 prueba el resultado.

(ii) Supongamos que a es J-d.c.t. en $\hat{A}$, sea $(x_n) \subset S(\hat{A})$ tal que $U_a(x_n) \longrightarrow 0$, entonces para todo $n \geq 1$, por densidad existe $x'_n \in A$ tal que $\|x_n - x'_n\| \leq 1/n$, de donde resulta que $1 - 1/n \leq \|x'_n\|$ $1 + 1/n$. Por otra parte:

$\|U_a(x'_n - x_n)\| \leq \|U_a\| \; \|x'_n - x_n\| \leq \|U_a\| \; 1/n$ implica que:

$0 = \lim_n U_a(x'_n - x_n) = \lim_n U_a(x'_n)$

Haciendo $y_n = x'_n / \|x'_n\|$; $y_n \in S(A)$ y se tiene:

$\|U_a(y_n)\| \leq \|x'_n\|^{-1} \|U_a(x'_n)\| \leq 2 \|U_a(x'_n)\|$ para $n \geq 2$

de donde resulta que $\lim_n U_a(y_n) = 0$, que es exactamente lo que queriamos probar.

2.7 Teorema: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. normada completa con unidad e y sea $a \in Fr(J\text{-}inv(A))$ entonces a es J-d.c.t. en A.

Demostración: J-inv(A) abierto y $a \in Fr(J\text{-}inv(A))$ implican que $a \notin J\text{-}inv(A)$ y existe $(a_n) \subset J\text{-}inv(A)$ tal que: $\lim_n a_n = a$. Teniendo en cuenta la continuidad de la aplicación $a \mapsto U_a$ y la complitud de A se deduceque $U_a \in Fr(inv(BL(A))$, el lema 1.11 y 2.3 (ii) concluyen la prueba.

2.8 Corolario: Sean A una $\mathbb{C}$-álgebra (resp. $\mathbb{R}$-álgebra) de Jordan n.c. normada completa con unidad e; $a \in A$ y $z \in Fr(Sp(A,a))$ entonces $ze - a$(resp. $|z|^2 e - (z + \bar{z})a + a^2$) es J-d.c.t. en A.

Demostración: Por II.5.3(i) (resp.II.6.13(ii)) $Sp(A,a)$ es cerrado de donde: $Fr(Sp(A,a)) = Sp(A,a) \cap \overline{[\mathbb{C} - Sp(A,a)]}$. Si $z \in Fr(Sp(A,a))$ se tiene $z \in Sp(A,a)$ y existe $(z_n) \subset \mathbb{C} - Sp(A,a)$ tal que $z_n \rightarrow z$ lo que implica que $ze - a \in Fr(J\text{-}inv(A))$ (resp. $ze - a$ $Fr(J\text{-}inv(A_{\mathbb{C}}))$; por el teorema anterior $ze - a$ es J-d.c.t. en A (resp. en $A_{\mathbb{C}}$) y la prueba es completa para el caso complejo.

En el caso real, $ze - a$ y $\bar{z}e - a \in \mathbb{C}[a]$ subálgebra fuertemente asociativa de $A_{\mathbb{C}}$. En (41; P.38. Lema 8) se demuestra que si B es una subálgebra fuertemente asociativa de un álgebra de Jordan A, entonces $U_{ab} = U_a U_b$ $(a,b \in B)$. Por lo cual se tiene $U_{(ze - a)(\bar{z}e - a)} = U_{|z|^2 e - (z + \bar{z})a + a^2} = U_{ze - a} U_{\bar{z}e - a}$. De donde se deduce que fácilmente: $|z|^2 e - (z + \bar{z})e + a^2$ es J-d.c.t. y 2.6 completa definitivamente la demostración.

2.9 Corolario: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa con unidad e, B una subálgebra cerrada de A tal que $e \in B$ y sea $a \in B$. Entonces (i) $Fr(Sp(B,a)) \subset Fr(Sp(A,a))$

En particular si el interior de $Sp(A,a)$ es vacio, se tiene:

(ii) $Sp(B,a) = Sp(A,a)$

En efecto: Sea $z \in Fr(Sp(B,a))$ por 2.7, $ze - a$ es J-d.c.t. en B y con más razón lo es en A de donde, por 2.4, $z \in (Sp(A,a))$ como $Sp(A,a) \subseteq Sp(B,a)$ resulta que $z \in Fr(Sp(A,a))$ y se tiene (i)

El caso particular es trivial.

2.10 Definición: Sea B una K-álgebra de Jordan n.c. normada y con unidad e, una K-álgebra A normada de Jordan n.c. con unidad e, tal que B sea una subálgebra de A, con la misma unidad, y la norma de B sea equivalente a la restriccion de la norma de A, la llamaremos una extensión normada de B. Un elemento J-singular de B se llamará permanentemente J-singular si no es J-inversible en ninguna extensión normada de B.

2.11 Proposición: Sea B una K-álgebra de Jordan n.c. normada con unidad y sea $a \in B$ J-d.c.t. en B, entonces a es permanentemente J-singular.

En efecto: Supongamos a J-inversible en alguna extensión normada A de B y sea $a^{-1} \in A$ su inverso. Sea $x_n \in S(B)$ tal que $U_a(x_n) \longrightarrow 0$, si notamos la norma de A por $|\cdot|$ y tenemos en cuenta que $U_a^{-1} = U_{a^{-1}}$ resulta:

$$|x_n| = |U_{a^{-1}} U_a(x_n)| \leq |U_{a^{-1}}| \; |U_a(x_n)|; \quad (|U_{a^{-1}}| = \sup_{|x|=1} |U_a^{-1}(x)|)$$

Por ser la norma $\|\cdot\|$ de B equivalente a la norma inducida por $|\cdot|$, se tiene que $|U_a(x_n)| \to 0$, de donde $|x_n| \longrightarrow 0$, implicaría $\|x_n\| = 1 \longrightarrow 0$, lo que ès absurdo.

2.12 Corolario: Sea B una K-álgebra de Jordan n.c. normada completa con unidad e. Entonces todo elemento de la Fr(J-inv(B)) es permanentemente J-singular.

En efecto: Es claro por 2.7 y la proposición anterior.

2.13 Corolario: Sea B como en el corolario anterior y A una extensión normada de B, entonces:

(i) $J\text{-inv}(B) \subset J\text{-inv}(A)$

(ii) $Fr(J\text{-inv}(B)) \subset Fr(J\text{-inv}(A))$

En efecto: (i) Evidente

(ii) Por 2.12 $Fr(J\text{-inv}(B)) \subset J\text{-sing.}(A)$ y (i) completa la prueba.

2.14 Lema: (Kaplansky)(43). Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. normada y con unidad; $0 \neq a \in A$ tal que $Sp(A,a) = 0$, entonces a es J-d.c.t. en A.

En efecto: Por 2.6 no se pierde generalidad si suponemos que A es además compleja y completa, y se tiene en cuenta que, por complexificación y completación el espectro, en el caso más desfavorable disminuye.

Con esta premisa, las afirmaciones evidentes $a = e/n \quad a$ y $a - e/n \quad J\text{-inv}(A)$ muestran que a es un punto frontera del conjunto J-inv(A).

El teorema 2.7 completa la prueba.

Nota: En (43) Kaplansky demuestra el lema anterior, naturalmente para el caso asociativo, si bien sin la hipótesis de unidad, lo que supone métodos más complicados.

2.15 Teorema: (Kaplansky 43). Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. normada con unidad y sin J-divisores de cero topológicos $\neq 0$, entonces A es isomorfa á $\mathbb{C}$.

Demostración: Sea $a \in A$, $a \neq 0$, entonces por II.5.6, 2.6 y 2.14, $\emptyset \neq Sp(\hat{A},a) \neq 0$. Sea $0 \neq z \in Fr(Sp(\hat{A},a))$, por 2.8, $ze - a$ es J-d.c.t. en $\hat{A}$, por 2.6 $ze - a$ es J-d.c.t. en A, de donde nuestra hipótesis implica $a = ze$, lo que demuestra que el monomorfismo $z \mapsto ze$ de $\mathbb{C}$ en A es sobre.

2.16 Corolario: (Gel'fand Mazur). Si A es una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad normada y con división en el sentido de Jacobson, entonces A es isomorfa á $\mathbb{C}$.

En efecto: Por 2.4, ningún elemento J-inversible puede ser J-d.c.t. y el teorema anterior completa la prueba.

2.17 Lema: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c., si existe a A tal que U_a es inversible en L(A), entonces A tiene unidad.

En efecto: Sea $e = U_a^{-1}(a^2) \Rightarrow U_a(e) = a^2$

De $U_a^2 = U_{a^2} = U_{U_a(e)} \overset{I.2.8.(iii)}{=\!=} U_a U_e U_a$ se deduce que

$U_e = I$

Por otra parte $e^3 = U_e(e) = e$ y $e^4 = e^2$

Sustituyendo estas expresiones en I.4.6 resulta que:

$L_{e^4} = L_{e^3} (L_e + R_e) - U_e L_{e^2}$

$R_e^4 = R_e^3 (L_e + R_e) - U_e R_e^2$ de donde:

$L_{e^2} = R_{e^2} = L_e(L_e + R_e) - L_e^2 = U_e = I$

2.18 Corolario: Toda $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. finito dimensional y de integridad en el sentido de Jacobson, es isomorfa a $\mathbb{C}$.

En efecto: Sea A de J-integridad y $A \neq 0$, entonces para cada $a \in A$, $a \neq 0$, U_a es inversible, por 2.17, A es con unidad, y 2.15 completa la demostración.

2.19 Comentario: (i) El lema 2.17 aparece en (23), 2.18 se puede probar directamente utilizando el lema 2.17, y la irreducibilidad del polinomio mínimo.

3.- TEOREMA DE ESTRUCTURA DE LAS ALGEBRAS REALES DE JORDAN CON J-DIVISION:

En todo este apartado K designará un cuerpo de característica cero

3.1 Definición: Sea A una K-álgebra con unidad e, diremos que A es cuadrática sobre K sii para cada elemento a de A, e, a y a^2 son linealmente dependientes sobre K. Es claro que esta condición es equivalente a que $\dim_K (K[a]) \leq 2$ $(a \in A)$ ó a que existan $\lambda, \mu \in K$ tal que $a^2 + \lambda a + \mu e = 0$, $a^2 \neq 0$, $(a \in A)$

3.2 Proposición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra normada de Jordan n.c. con unidad y sin J-divisores de cero topológicos $\neq 0$, entonces

A es cuadrática y con J-división.

Demostración: Sea $a \in A$; $a \neq 0$ y $\hat{A}_{\mathbb{C}}$ la complexificación normada de la completación $\hat{A}$ de A, entonces por II.5.6 y 2.14:

$$\emptyset \neq \mathrm{Sp}\ (\hat{A}, a) \neq 0$$

Sea $z \in \mathrm{Fr}\ \mathrm{Sp}(\hat{A}_{\mathbb{C}}, a)$, $z \neq 0$ por el corolario 2.8:

$|z|^2 e - (z + \bar{z})a + a^2$ es J-d.c.t. en $\hat{A}$ como:

$|z|^2 e - (z + z)a + a^2 \in A$, por 2.6(ii), también lo es en A; las hipótesis del teorema implican:

(i) $|z|^2 e - (z + \bar{z})a + a^2 = 0$

Es decir A es cuadrática sobre R.

Si $z = \alpha + i\beta$ entonces sustituyendo en (i) quedaría:

(ii) $(a - \alpha e)^2 + \beta^2 = 0$

Como $|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, se deduce fácilmente que a es J-inversible y su inverso es $a^{-1} = (2\alpha e - a)/(\alpha^2 + \beta^2)$

3.3 Corolario: Toda $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad normada y con J-división es cuadrática.

En efecto: Sea A una tal álgebra, por 2.4 A no tiene J-d.t.c. $\neq 0$.

3.4 Lema algébrico (Dickson): Sea A una K-álgebra cuadrática y

$V = \{x \in A: x^2 \in Ke \text{ y } x \notin Ke - \{0\}\}$ entonces:

(i) V es una variedad lineal de A

(ii) $xy + yx \in Ke \quad (x, y \in V)$

(iii) $A = Ke \oplus V$

En efecto: Veamos primero que todo elemento $a \in A$ se puede expresar de manera única como:

(1) $a = \alpha e + x \quad \alpha \in K$ y $x \in V$

si $a \in Ke$ ó $a^2 = 0$ (i) se verifica trivialmente. En los demás casos, por ser A cuadrática, existen $\lambda, \mu \in K$ tal que:

$$a^2 + \lambda a + \mu e = 0 \Rightarrow \left(a + \frac{\lambda}{2} e\right)^2 = \left(\frac{\lambda^2}{4} - \mu\right) e \in Ke \quad \text{y}$$

$$a = -\frac{\lambda}{2} e + \left(a + \frac{\lambda}{2} e\right)$$

Supongamos $a = \alpha e + x = \beta e + x' \Longrightarrow 2(\beta - \alpha) a =$

$$= (x^2 - x'^2) + (\alpha^2 - \beta^2) e$$

Como $a \notin Ke$, necesariamente $\alpha = \beta$ y $x = x'$

Como V es trivialmente cerrado para la multiplicación por escalares, para probar (i) es suficiente ver que $x + y \in V$ siempre que x,y sean linealmente independientes en V. Por ello supongamos $x, y \in V$ linealmente independientes y que $x + y = \alpha e + v$; $x - y = \beta e + v'$ con $\alpha, \beta \in K$ y $v, v' \in V$

De: $(\alpha e + v)^2 + (\beta e + v')^2 = \alpha^2 e + \beta^2 e + v^2 + v'^2 + 2\alpha v + 2\beta v' =$

$= (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2 \in Ke$ y de la unicidad de la expresión (1) se deduce:

$\alpha v + \beta v' = 0$ De donde:

$$\alpha(x + y) + \beta(x - y) = (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = (\alpha^2 + \beta^2)e$$

La unicidad de la expresión (1) y la independencia de x e y implican $\alpha = \beta = 0$ y $x + y \in V$.

Finalmente de lo que acabamos de ver y:

$$xy + yx = \tfrac{1}{2}((x + y)^2 - (x - y)^2) \text{ resulta (iii)}$$

<u>Notación</u>: En el resto del apartado identificaremos Ke con K, (e = 1); a los elementos de V los llamaremos vectores de A; a α y x que aparecen en la descomposición (1) de a, las llamaremos componentes escalar y vectorial de <u>a</u>, respectivamente.

3.5 Sea A como en el lema, entonces:

(i) Si para cada par $a,b \in A$ notamos por (a,b) la parte escalar de ab, es claro que (,) es una forma bilineal sobre A que, en principio, no tiene por qué ser simetrica, notaremos $(a|b)$ su simetrización

(ii) $(a|b) = \frac{1}{2}((a,b) + (b,a))$

que claramente coincide con la parte escalar de $a.b = \frac{1}{2}(ab + ba))$, si $(a|b) = 0$ diremos que a y b son J-ortogonales. Observese que $V = K^{\perp}$ respecto de (ii)

(iii) Sean $x,y \in V$, a la parte vectorial de xy la notaremos por $x\wedge y$, es inmediato que $(x,y) \longmapsto x\wedge y$ es un producto bilineal anticonmutativo en V y si $(x|y)=(x,y)$:

(iv) $x\wedge y = \frac{1}{2}[x,y]$, $x.y = (x|y)$ y $xy = (x|y) + x\wedge y$

Es decir V es una subálgebra de A^-

(v) Sean $a,b \in A$, $a = \alpha + x$ y $b = \beta + y$, con las notaciones anteriores resulta:

(vi) $ab = (\alpha + x)(\beta + y) = \alpha\beta + (x,y) + \alpha y + \beta x + x\wedge y$

$a.b = (\alpha + x).(\beta + y) = \alpha\beta + (x|y) + \beta x + \alpha y$

(vii) Es decir A^+ es exactamente $J(V,(|))$ definida en I.2.3.(iii)

Estas observaciones permiten enunciar la siguiente caracterización de las álgebras cuadráticas sumamente útil para nuestros objetivos, es debida a Osborn (72;P.203,T.1)

3.6 <u>Lema algébrico (Osborn)</u>: Sea V una K-álgebra anticonmutativa, cuyo producto notaremos por $\wedge$, sea (x,y) una forma bilineal sobre V y sea $A = K \oplus V$($K \oplus V = K\times V$ con las identificaciones obvias). Entonces A con el producto:

$$(\alpha + x) \ (\beta + y) = \alpha\beta + (x,y) + \alpha y + \beta x + x\wedge y \qquad \text{(i)}$$

es un álgebra cuadrática sobre K. Reciprocamente toda álgebra cuadrática sobre K se obtiene de esta manera.

3.7 <u>Definición</u>: Sea A una K-álgebra cuadrática sobre K, diremos que A es con J-división sii A^+ es con J-división.

<u>Observación</u>: La definición anterior tiene sentido puesto que en 3.5(vii) vimos que $A^+ = J(V,(|))$, que es de Jordan por I.2.3(iii).

por otra parte es necesaria tal definición ya que existen álgebras cuadráticas que no son de Jordan n.c. un contraejemplo se verá en el próximo apartado.

3.8 <u>Lema algébrico (Osborn (72))</u>: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra cuadrática sobre $\mathbb{R}$, V su espacio de vectores y $q:V\to\mathbb{R}$, $q(x) = (x|x)$ la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica

$(x|y)$ definida en 3.5(iv), entonces la condición necesaria y suficiente para que A sea con J-división es que q sea definida negativa.

En efecto: Supongamos q definida negativa y sea $0\neq a=\alpha+x\in A$, entonces $(\alpha+x).(\alpha-x)=\alpha^2-x^2=\alpha^2-q(x)>0$ de donde

$$(\alpha+x)^{-1}=(\alpha-x)/(\alpha^2-x^2)$$

Reciprocamente, supongamos que A es con J-división y sea $x\in V$ tal que $q(x)=\alpha\geq 0$. Entonces $(\sqrt{\alpha}+x).(\sqrt{\alpha}-x)=\alpha \quad q(x)=0$ de donde $\sqrt{\alpha}+x$ no puede ser J-inversible y por lo tanto : $\alpha=x=0$, luego q es definida negativa.

3.9 TEOREMA FUNDAMENTAL: Las álgebras reales de Jordan con unidad normadas y sin J-divisores topológicos de cero $\neq 0$ son exactamente las álgebras de Jordan asociadas (por el procedimiento I.2.3(iii)) a las formas cuadráticas definidas negativas.

Demostración: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan con unidad normada y sin J-d.t.c. Entonces por 3.2 es cuadrática con J-división, por 3.5(vii) es asociada de la forma cuadrática $q(x)=(x|x)$, ya que $A^+=A$; finalmente 3.8 asegura que $q(x)$ es definida negativa.

Reciprocamente sea $A=J(V,q)$ $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan asociada a la forma cuadrática $q:V\rightarrow R$ definida negativa. Por I.2.3(iii) y 3.6, A es cuadrática, por 3.8 es con J-división y por lo tanto no puede tener J-d.t.c. cualquiera que sea la norma de álgebra de A. Por lo que solo resta mostrar una norma submultiplicativa sobre A.

Sea $(\mid)$ la forma polar de q, entonces la forma $\langle x \mid y \rangle =$ $= -(x \mid y)$ es bilineal simétrica y definida positiva sobre V, igual ocurre con su extensión canónica á $A = R \oplus V$ por lo tanto: $|x| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{-q(x)}$ y $|\alpha + x| = \sqrt{\alpha^2 + \langle x \mid x \rangle}$ son normas prehilbertianas sobre V y $\mathbb{R} \oplus V$ respectivamente.

Ahora bien: $|(\alpha+x)(\beta+y)|^2 = |\alpha\beta + (x|y) + \beta x + \alpha y|^2 =$

$= \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta(x|y) + (x|y)^2 + \langle \beta x + \alpha y \mid \beta x + \alpha y \rangle =$

$= \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta(x|y) + \langle x|y\rangle^2 + \beta^2|x|^2 + \alpha^2|y|^2 + 2\alpha\beta\langle x|y\rangle =$

$= (\alpha^2 + |x|^2)(\beta^2 + |y|^2) + \langle x|y\rangle^2 - |x|^2|y|^2$

La desigualdad de Schwarz asegura que:

$$|\langle x|y\rangle|^2 \leqslant |x|^2|y|^2$$

De donde resulta que:

$$|(\alpha+x)(\beta+y)|^2 \leqslant (\alpha^2 + |x|^2)(\beta^2 + |y|^2)$$

Que es exáctamente lo que queriamos demostrar.

3.10 <u>Corolario</u>: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan con unidad, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) A es normable con J-división

(ii) A es normable y no tiene J-d.t.c. $\neq 0$

(iii) A es el álgebra de Jordan asociada a una forma cuadrática definida negativa.

En efecto: (i) es equivalente a (ii), se deduce de 3.1 y 3.2, y (ii) es equivalente á (iii) es lo que afirma el teorema anterior.

3.11 Definición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan con unidad verificando las condiciones equivalentes del corolario anterior $\langle x|y\rangle = -(x|y)$ la forma polar de $-q(x)$ definida en 3.9, a la norma de A:

$$|\alpha + x| = \sqrt{\alpha^2 + \langle x|x\rangle}$$

la llamaremos norma natural de A.

3.12 TEOREMA: Sea $(A,\|.\|)$ una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan con unidad normada y con J-división. Entonces la norma natural de A es precisamente el radio espectral. En consecuencia $|a|\leqslant\|a\|$ $(a\in A)$

Demostración: Sea $a\in A$, $\hat{A}_{\mathbb{C}}$ la completación de la complexificación de A, como $A\subset A_{\mathbb{C}}\subset\hat{A}_{\mathbb{C}}$ y por definición $Sp(A,a) = Sp(A_{\mathbb{C}},a)$ resulta que $\emptyset \neq Sp(\hat{A}_{\mathbb{C}},a)\subset Sp(A_{\mathbb{C}},a)$; sea: $\alpha + \beta i\in Sp(A,a)$ por 6.9(i) $\alpha - \beta i\in Sp(A,a)$ por 6.9(iv) y la hipótesis $(a-\alpha)^2 + \beta^2 = 0$. La unicidad de la expresión (1) en 3.4 asegura que $Sp(A,a) = \{\alpha+\beta i, \alpha-\beta i\}$. La fórmula de Gel'fand para el radio espectral, II.5.3(ii), nos da:

$$r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \text{Máx}\{|z| : z\in Sp(A,a)\} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Por otro lado, es claro que $a = \alpha + (a-\alpha)$ es precisamente la descomposición de a en el sentido de 3.4.(iii), de donde:

$$|a| = \sqrt{\alpha^2 - (a-\alpha \mid a-\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 - (a-\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = r(a).$$

Por II.1.13(i) $|a| = r(a) \leq \|a\|$ c.q.d.

3.13 <u>Observación</u>: Hagamos notar que existen álgebras reales de Jordan normadas con J-división de dimensión arbitraria, esto es consecuencia de que para cada cardinal c existe un espacio prehilbertiano cuya base de Hamel tiene por cardinal c. Obsérvese también que este hecho es la 1ª diferencia neta, en este trabajo, entre la teoría de las álgebras normadas asociativas y la teoría general que estamos tratando aquí. Puesto que en el caso asociativo las únicas álgebras reales normadas sin d.c.t (43) son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ (álgebra de los cuaternios reales).

3.14 <u>Definición</u>: (15; AIII.15) Sea A una K-álgebra con unidad e, se dice que el par (A,s) es un álgebra de Cayley si s es un antiautomorfismo involutivo de A tal que:

(i) $a + s(a) \in Ke$ $\quad as(a) \in Ke \qquad (a \in A)$

En (15; AIII.15-16) se puede ver la prueba de los siguientes resultados:

(ii) Las aplicaciones:

$T : A \longrightarrow K$, $a \longmapsto T(a)$, $T(a) \in K : T(a)e = a + s(a)$

$N : A \longrightarrow K$, $a \longmapsto N(a)$, $N(a) \in K : N(a)e = a\,s(a)$

Són, la primera lineal y la segunda cuadrática y se llaman respectivamente la traza y la norma de A.

(iii) A es cuadrática: $a^2 - T(a)a + N(a)e = 0 \quad (a \in A)$

(iv) s es único y se llama conjugación cayleyana de A

(v) $2a.b = T(a)b + T(b)a + T(ab) - T(a)\, T(b)$

(vi) $T(b\, s(a)) = T(a\, s(b)) = N(a+b) - N(a) - N(b) =$

$= T(a)\, T(b) - T(ab)$

(vii) $T(a)^2 - T(a^2) = 2N(a)$

(viii) $(a,b) \longmapsto T(b\, s(a))$ es la forma polar de N.

3.15 Definición: (99; P.24) Sea A una K-álgebra y $(x|y)$ una forma bilineal simétrica sobre A, diremos que $(x|y)$ es una forma traza (trace form) o también una forma bilineal simétrica invariante ó asociativa sii:

$(ab|c) = (a|bc) \qquad (a,b,c \in A)$

3.16 Lema algébrico (Osborn (72)): Sea A una k-álgebra cuadrática $(V,\wedge,(\ ,\ ))$ el álgebra anticonmutativa y su forma bilineal asociadas a A en 3.5(iv). Entonces se tiene:

(i) A es de Cayley sii $(\ ,)$ es simétrica

(ii) A es de Jordan n.c. sii $(x,y) = (y,x) = (x|y)$ y

$(x|x\wedge y) = 0$, esta condición es equivalente á:

$(x\wedge y|z) = (x|y\wedge z)$ es decir sii $(\ ,\ )$ es una forma traza en V.

En efecto: (i) es inmediato.

(ii) Puesto que A^+ es de Jordan, A es Jordan n.c.sii A es flexible.

Pero A es flexible $\Leftrightarrow (x,y,x) = ((x,y) - (y,x))x + 2(x,x\wedge y) = 0$

Por la unicidad de la expresión (1) de 3.4 se deduce que A es flexible sii $(x,y) = (y,x)$ y $(x,x\wedge y) = 0$

Veamos la última equivalencia: La aplicación $x \longmapsto (x/x\wedge y)$ de V en K es cuadrática y su forma bilineal simétrica asociada es la aplicación: $(x,z) \longmapsto \frac{1}{2}((x/z\wedge y) + (z/x\wedge y))$; de donde:

$$(x/x\wedge y) = 0 \Longleftrightarrow (x/z\wedge y) + (z/x\wedge y) = 0$$

lo que equivale por la anticonmutatividad de $\wedge$ a: $(x\wedge y/z) = (x/y\wedge z)$

3.17 **Corolario:** Sea A una K-álgebra cuadrática entonces A es de Jordan n.c. sii A es de Cayley y $(x|y)$ es una forma traza en V.

3.18 **Teorema:** Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra normada de Jordan n.c. con unidad y sin J-d.c.t. Entonces A es de Cayley con J-división y V admite una forma traza continua.

En efecto: Sólo hace falta ver la continuidad de la forma traza, pero esto es evidente puesto que:

$(x|y) = xy - x\wedge y$ es continua

4.- ALGEBRAS REALES NORMADAS CON DIVISION:

El problema de la determinación de las álgebras reales normadas completas con división, en contraste con el caso complejo, es a nuestro juicio arto difícil y, por las noticias que tenemos, está lejos de su solución definitiva. Para poner de manifiesto la naturaleza de estas dificultades y preparar el terreno a una modesta aportación al tema dedicaremos este apartado a exponer los resultados más significativos que aparecen en la bibliografía que hemos podido consultar.

En honor a la verdad tenemos que decir que conocemos por referencias, (23) (41), la existencia de varios artículos que tratan del tema a nivel algébrico, pero desgraciadamente no hemos podido hacernos con ellos.

4.1 Algebras normadas asociativas con división:

(i) Las únicas álgebras reales asociativas, conmutativas normadas y sin d.c.t. son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ (79; P.39; T.1.7.5)

(ii) El álgebra de los cuaterniones reales de Hamilton:

En $\mathbb{R}^4$ notamos $1 = (1,0,0,0)$; $i = (0,1,0,0)$; $j = (0,0,1,0)$ y $k = (0,0,0,1)$. Entonces la tabla de multiplicación siguiente:

(α_1) 1 elemento unidad; $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = -i$; $ki = j = -ik$

define una estructura de álgebra sobre $\mathbb{R}^4$, a ésta se le denomina álgebra de los cuaterniones reales de Hamilton y lo notaremos por $\mathbb{H}(R)$ó simplemente por $\mathbb{H}$.

La demostración de que $\mathbb{H}$ es asociativa y con división es elemental (52; P.225) y fundamentalmente se basa en el hecho de que la aplicación :

$$(\beta_1) \quad x = t_1+t_2i+t_3j+t_4k \longmapsto \bar{x} = t_1-t_2i-t_3j-t_4k; \; t_i \in R$$

es una conjugación cayleyana para H y:

$$(\gamma_1) \quad : \quad N(x) = x\bar{x} = \bar{x}x = \sum t_i^2$$

es su norma, 3.14.(ii), que además verifica:

$$(\gamma_1') : N(xy) = N(x)\, N(y) \quad (x,y \in \mathbb{H})$$

De donde se deduce fácilmente que para cada $x \in H$, $x \neq 0$, implica $N(x) \neq 0$ y $x^{-1} = (1/N(x))\bar{x}$ (δ_1)

Por otra parte $|x| = \sqrt{N(x)}$ es la norma helbertiana en $\mathbb{R}^4$, y verifica $|xy| = |x||y|$, por lo tanto $|\cdot|$ es una norma de álgebra sobre $\mathbb{H}$.

(iii) <u>Teorema de Gel'fand-Mazur-Keplansky</u>: Las únicas álgebras reales asociativas normadas y sin divisores de cero topológicos son R, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$.(43) y (79; P.40)

La prueba de este resultado, se puede hacer por métodos análogos a los utilizados en el apartado anterior, demostrando que toda álgebra asociativa normada sin d.c.t. tiene unidad, es cuadrática y con división. Finalmente se aplica el clásico teorema de Frobenius en la siguiente versión: toda álgebra real algébrica y con división es isomorfa á $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ (118; P.19)

4.2 <u>El álgebra de los octoniones reales de Cayley-(Dickson)</u>: (52; P.227) y (15; AIII.17 y AIII. 176)

Sea $\mathbb{H}$ el álgebra de los cuaternios reales, en el espacio lineal $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ se define el producto:

$$(\alpha_2)\qquad (x,y)\,(x',y') = (xx' - \bar{y}'y,\ y\bar{x}' + y'x)$$

Donde xx' es el producto en $\mathbb{H}$ y $\bar{x}$ la conjugación definida en 4.1.(ii).(β_1). Este producto dota a $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ de estructura de álgebra, que recibe el nombre de álgebra de los Octoniones reales de Cayley y que notaremos $\mathbb{O}(R)$ ó simplemente $\mathbb{O}$.

Es claro que $x \mapsto (x,0)$ de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{O}$ es un monomorfismo de álgebras. Identificando $(x,0)$ con x y haciendo $(0,1) = f$, resulta que cada $(x,y)\in\mathbb{O}$ se expresa de forma única como $x + yf$. En otras palabras $\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}f$ (suma directa lineal). Con las notaciones anteriores es fácil comprobar que:

$$(\beta_2)\ :\ yf = f\bar{y}\ ,\ x(yf) = (yx)f\ ;\ (xf)y = (x\bar{y})f$$

$$(xf)\,(yf) = -\,\bar{y}x$$

con la conjugación $a = x + yf \mapsto \bar{a} = \bar{x} - yf$ es álgebra Cayleyana y su norma Cayleyana es:

$$(\gamma_2)\quad N(a) = a\bar{a} = \bar{a}a = N(x) + N(y)$$

Siendo $N(x)$ y $N(y)$ la norma Cayleyana en $\mathbb{H}$ de x e y.

También se tiene que:

(γ_2') $N(ab)=N(a)\,N(b)$; $(a,b\in \mathbb{O})$

Teniendo en cuenta las identidades anteriores se deduce de una manera inmediata que $\mathbb{O}$ es alternativa con división y para cada $a\in\mathbb{O}; a\neq 0$, $N(a)\neq 0$ y $a^{-1}=(1/N(a))\bar{a}$ (δ_2)

Finalmente es claro que la norma helbertiana de $\mathbb{R}^8$: $|a|=\sqrt{N(a)}$ verifica:

(ε_2) $|ab|=|a|\,|b|$

De donde $|\cdot|$ es una norma de álgebra de $\mathbb{O}$.

Si tomamos como base de $\mathbb{O}$:

(ζ_2) $e_0=1$; $e_1=i$; $e_2=j$; $e_3=k$; $e_4=t$; $e_5=if$;
$e_6=jf$; $e_7=kf$;

De las fórmulas (β_2) se obtiene fácilmente la tabla de multiplicar del álgebra respecto de la base anterior.

(η_2) Resaltemos el hecho de que los 8 elementos de la base (ζ_2) y sus opuestos forman un grupoide multiplicativo y que para $i\neq 0$, $e_i^2=-e_0$

(ii) Teorema generalizado de Frobenius: Las únicas álgebras reales alternativas con división y de dimensión finita son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, y $\mathbb{O}$.

Demostración: (52. P.234)

(iii) Teorema de Albert: Las únicas álgebras alternativas reales algébricas y con división son R, C, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$

Demostración: (4; P.767; T.1) En realidad la prueba de (52. P.234) es válida para demostrar este resultado.

(iv) Teorema de Bruck y Kleinfeld: La única álgebra real con división alternativa no asociativa y central (Su centro(Def. I.1.26) coincide con $\mathbb{R}$) es $\mathbb{O}(R)$

Demostración: (27), (8; Vol II; P.523)

(v) Nota: Hagamos notar que la hipótesis de central en el teorema anterior es fundamental. Para verlo sea $K = \mathbb{R}(x)$ el cuerpo de las fracciones racionales en una indeterminada sobre $\mathbb{R}$;

Siguiendo el mismo procedimiento que antes podemos construir $\mathbb{O}(K)$ el álgebra de Cayley-Dickson sobre K, verificándose igualmente todas las propiedades alli enunciadas, menos evidentemente las que se refieren a la norma helbertiana (ε_2) que en este caso no tiene sentido, como la división en $\mathbb{O}(\mathbb{R})$ se deduce de (γ_2), (γ_2') y del caracter formalmente real de $\mathbb{R}$ es decir $\Sigma\alpha_i^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, y esta propiedad es trivialmente válida en $\mathbb{R}(x)$ por el principio de identidad de los polinomios:

$$(P_1/q_1)^2 + - - - + (P_n/q_n)^2 = 0,\ P_1/q_1 = - - - - = P_n/q_n = 0$$

resulta que $\mathbb{O}(K)$ es con división. Es claro que restringiendo el cuerpo de los escalares a $\mathbb{R} \subset K$, $\mathbb{O}(K)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra alternativa con división de dimensión infinita.

En (8; Vol II; P.525) se hace la siguiente observación: "Es solamente en el caso asociativo cuando podemos encontrar álgebras alternativas con división sobre $\mathbb{R}$ de dimensión infinita". El ejemplo que acabamos de exponer pone de manifiesto la inexactitud de tal observación.

4.3 <u>Algebras con valor absoluto</u>: (2); (4); (117); (114).

(i) <u>Definición</u>: Una norma $\|\cdot\|$ sobre el espacio lineal subyacente a una $\mathbb{R}$-álgebra A se dice que es un valor absoluto para el álgebra sii:

$\|xy\| = \|x\|\|y\|$

Es claro que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ son álgebras con valor absoluto: $|x| = \sqrt{N(x)}$. Sorprendentemente son las únicas con esta propiedad:

(ii) <u>Teorema</u>: (Albert, Wright, Urbanik)

(α_3) Toda R-álgebra con unidad y con valor absoluto es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, ó $\mathbb{O}$

(β_3) Toda álgebra real conmutativa y con valor absoluto es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, o al álgebra de Mc Clay I.1.22 ($\mathbb{C}$, con el producto $z \times z' = \bar{z}\bar{z}'$).

Este teorema aparece en (114) y es la culminación de (2); (4) y (117).

4.4 <u>Existen álgebras de Jordan n.c. y no alternativas con división.</u>

Sea $D = \mathbb{H}$ ó $\mathbb{O}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$

Sea $D^{(\lambda)}$ La mutación λ de D, I.1.5.(v), es decir el espacio D dotado del producto:

$$x \cdot_{\lambda} y = \lambda xy + (1 - \lambda) yx$$

de $(D^{(\lambda)})^{+} = D^{+}$ y $L_x^{(\lambda)} = \lambda L_x + (1 - \lambda) R_x$ se deduce fácilmente que $D^{(\lambda)}$ es de Jordan n.c., I.4.2.(v).

Por otra parte, D es cuadrática con división $\Longrightarrow D^{+}$ es con J-división. En (3;p.590) se demuestra que un álgebra D, de rango finito, flexible, cuadrática y J- simple (D^{+}simple) es con división sii $D^{(\lambda)}$, $\lambda \neq 1/2$ es con división.

4.5 Algebras cuadráticas con división (72): La notación y nomenclatura en lo que sigue es la usada en 3.5 y 3.4

(i) Teorema: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra cuadrática con J-división; y V el álgebra anticonmutativa de los vectores de A 3.5.(iii).

Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(α_5) A no posee divisores de cero

(β_5) A no contiene subálgebras de orden 3

(γ_5) Si $x, y \in V$ son linealmente independientes, también lo son $x, y, x \wedge y$

(δ_5) Si $x, y \in V$; x, y linealmente independientes entonces no puede verificarse ninguna de las relaciones:

$$x \wedge y = x \quad \text{ó} \quad x \wedge y = 0.$$

Demostración: (72; P.204; T.3) La demostración se hace estableciendo las implicaciones $(\alpha_5) \Rightarrow (\delta_5) \Rightarrow (\beta_5) \Rightarrow (\gamma_5) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha_5)$ viendo que la negación de cada afirmación implica la negación de la otra en orden inverso. Por ejemplo si:

$$(\alpha + x)\ (\beta + y) = 0 \Rightarrow \alpha\beta + (x,y) + \alpha y + \beta x + x\wedge y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha y + \beta x + x\wedge y = 0$$ de donde $x, y, x\wedge y$ son linealmente dependientes etc.

(ε_5) Las álgebras anticonmutativas que verifican (γ_5) ó (δ_5) las llamaremos álgebras admisibles para la división.

(ii) Teorema: (72; P.212; T.7) Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra cuadrática con división y con la propiedad de que la subálgebra engendrada por dos elementos cualesquiera de A, que no pertenezcan a la misma subálgebra de orden 2, sea de dimensión 4; y sea B una subálgebra de A engendrada algébricamente por $x_1, --, x_n$ pero no por ningún subconjunto propio de éstos. Entonces el orden de B es 2^n.

Nota: Las álgebras cuadráticas con división y que cumplen la propiedad anterior las llamaremos de Osborn.

La demostración de éste teorema se hace por indución probando 1º que el orden de tales álgebras es por lo menos 2^n. El lema siguiente es la pieza clave en la inducción.

(iii) Lema: Sea B una $\mathbb{R}$-álgebra cuya álgebra de vectores V es admisible para la división. Sea C una subálgebra de orden m con base $u_1, --, u_m$ y sea v cualquier elemento de B, $v \notin C$ Entonces $u_1; u_2; - -; u_m; u_1v, - -, u_mv$ son linealmente independientes, y por lo tanto el orden de B es mayor o igual que 2m.

(iv) Teorema: (72; P.208; T.6) Sea V una $\mathbb{R}$-álgebra anticonmutativa de orden 3 admisible para la división, entonces existe en V una base u, v, w tal que:

(ζ_5) $u \wedge v = w$, $v \wedge w = u$ y $w \wedge u = v + tw$

Donde $t \geq 0$. Dos álgebras anticonmutativas que poseen bases cuya tabla de multiplicación sea dada por (ζ_5) son isomorfas sii la constante t es la misma en ambas tablas. Una álgebra anticonmutativa que posee una base cuya tabla de multiplicación es (ζ_5) es admisible para la división sii $|t| \leq 2$.

Demostración: En su demostración solo se utilizan argumentos elementales sobre espacios vectoriales de dimensión finita aunque es bastante larga y con cálculos complicados.

(v) Una R-álgebra cuadrática con división que no es de Jordan no conmutativa:

En R^3 notamos $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ Entonces la tabla siguiente:

(η_5) $i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$; $i \wedge j = k = -j \wedge i$;

$k \wedge i = -i \wedge k = j$; $j \wedge k = -k\ j = i$

define sobre R^3 una estructura de álgebra anticonmutativa admisible para la división. Nótese que (η_5) representa el producto vectorial ordinario y que $\mathbb{R}^3$ con este producto es el álgebra anticonmutativa asociada a $\mathbb{H}$.

Sean $x,y \in \mathbb{R}^3$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\text{Entonces:} \qquad (x,y) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

es una forma bilineal sobre R^3. El álgebra A asociada a (R^3, $\wedge$, (,)) por el procedimiento 3.4 es cuadrática y con división por 4.5.(iv)y no es flexible por 3.16.(ii)

La tabla de multiplicación de A respecto de la base1, i, j, k es: $ij = (i,j) + i\wedge j = -1 + k = -ji$; $ki = (k,i) + k\wedge i =$ $= k\wedge i = j = -ik$; $jk = j\wedge k = i = -jk$

4.6 <u>Una álgebra real con división que no es cuadrática:</u>(2)

(i) Sea $D = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ en $A = D\times D$ definimos el producto:

$$(x,y)(x',y') = (xx' - \bar{y}'y\gamma \,;\, y'x + y\bar{x}')$$

donde γ es un elemento fijo de D. Si notamos $\omega = (0,1)$ resulta $\omega^2 = -\gamma$ Podemos tomar γ : $\gamma\bar{\gamma} = 1$; $\gamma \neq 1$

(ii) <u>Teorema (Albert)</u>: El álgebra definida anteriormente con $\gamma\bar{\gamma} = 1$ y $\gamma \neq -1$ es con división y es alternativa solo si $\gamma = 1$

Demostración: (2; P.500; T.5)

Tomando $D = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$; $\gamma = -i$

$$A = \{ \lambda + \mu w \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \}$$

una base de A es: 1; i; w; iw

La tabla de multiplicación correspondiente a esta es:

$$w^2 = (iw)^2 = i \qquad i(iw) = -(iw)i = -w$$

$$w(iw) = 1 \qquad (iw)w = -1 \ , \quad wi = -iw \ , \quad i^2 = -1$$

Es claro que esta álgebra no es cuadrática ya que por ejemplo 1, w, w^2, son linealmente independientes; observemos también que w es inversible y "no posee inverso".

Nota : Que sepamos no se conocen ejemplos de álgebras reales normadas con división de dimensión infinita.

Wright (117) conjeturó (1953) que las álgebras reales normadas con división necesariamente tienen que ser finito dimensionales, el resultado siguiente debido a Milnor -Bott en 1958 refuerza a nuestro juicio tal conjetura.

4.7 Teorema de Milnor-Bott: (21) El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ posee un producto bilineal sin divisores de cero $\neq 0$, solamente para n igual á 1,2,4 ó 8.

5.- TEOREMA DE GEL'FAND-MAZUR PARA ALGEBRAS REALES NORMADAS DEBILMENTE ALTERNATIVAS.

5.1 Proposición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad de potencias asociativas normada completa sin divisores de cero topológicos, entonces A es cuadrática con división y J-división.

Demostración: Por el teorema 1.13, A es con división . Sea $a \in A$, entonces $\mathbb{R}[a]$ es asociativa conmutativa normada y sin d.c.t. Por 4.1.(i) $\mathbb{R}[a]$ es isomorfa a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ de donde A es cuadrática y con J-división.

5.2 Corolario: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra normada completa con unidad sin d.c.t. y de Jordan n.c., entonces A es cuadrática con división.

Demostración: I.4.6 asegura la asociatividad de las potencias en A

5.3 Proposición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad normada y con división entonces A es cuadrática.

En efecto: Por I.4.10 A es con J-división y 3.2 completa la prueba.

5.4 Definición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c., diremos que A es débilmente alternativa sii:

(i) $(x, x, [x,y]) = 0$

Para todo par $x,y \in A$

5.5 Proposición: Toda $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan o alternativa es débilmente alternativa.

Demostración: Evidente.

5.6 Definición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra, se dice que A es Standard Generalizada (100),(10); cuando:

(i) A es flexible

(ii) $D_{x,y} = [L_x, L_y] + [L_x, R_y] + [R_x, R_y]$ es una derivación en A, para cada par $x, y \in A$.

(iii) $(x, y, wz) + (w, y, xz) + (z, y, xw) =$

$= [x, (w, z, y)] + (x, w, [y, z]) \qquad (x, y, z, w \in A)$

5.7 Lema: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra standard generalizada, entonces:

(i) A es de Jordan n.c.

(ii) $(x, x, [y, z]) = 0 \quad (x, y \in A)$

En efecto: (i) Resulta de hacer $x = w = z$ en 5.6.(iii) y de la flexibilidad (100; P.390; T.2)

(ii) (100; P.390; Fo.(20))

5.8 Proposición: Toda $\mathbb{R}$-álgebra standard generalizada es débilmente alternativa

En efecto: Inmediato del lema anterior.

5.9 Definición: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c., diremos que A es de Block I_{ca} ó I_{1n} (119) sii verifica:

I_{ca}: $(x, [y, z], w) + (x, w, [y, z]) = 0 \quad (x, y, z, w \in A)$

ó

I_{1n}: $(x, w, [y, z]) = 0 \quad (x, y, z, w \quad A)$

5.10 Proposición: Las $\mathbb{R}$-álgebras de Jordán n.c. que verifican I_{ca} ó I_{ln} son débilmente alternativas.

En efecto: Haciendo $x = w = z$ y en I_{ac} e I_{ln} se obtiene 5.4.(i).

5.11 Notación: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra cuadrática con J-división Cayleyana$(V,\wedge,(\,|\,))$el álgebra anticonmutativa y la forma bilineal simétrica asociadas á A en 3.5, notaremos:

$$V_1 = \{ x \in V : x^2 = -1 \}$$

Es claro que: $V = \{ x \in A : -x^2 \in R_+ \} = \{ x \in A : (e|x) = 0 \}$ donde $R_+ = \{ t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0 \}$; también se verifica que:

$$V = \mathbb{R}V_1.$$

Sea $u \in V$, designaremos por $W(u)$:

$$W(u) = \{ x \in V : xu \in V \} = \{ x \in V : (x|u) = 0 \}$$

5.12 Lema: Con las notaciones anteriores, sean $u_1, --, u_n \in V$ tal que $(u_i \mid u_j) = 0$ para $i \neq j$. Entonces:

$$V = \mathbb{R}u_1 \oplus -- \oplus \mathbb{R}u_n \oplus L \text{ con } L = \bigcap_1^n W(u_i)$$

En efecto:

Es claro que: $V = \mathbb{R}u_1 \oplus W(u_1) = ---- = \mathbb{R}u_n \oplus W(u_n)$ de donde se deduce que para cada $x \in V$

$$x = t_1u_1 + x_1;\ x_1 \in W(u_1);\ x_1 = t_2u_2 + x_2;\ x_2 \in W(u_2)$$

$$--- x_n = t_nu_n + y \quad \text{con} \quad y \in W(u_n)$$

Es decir $x = t_1u_1 + t_2u_2 + \ldots\ldots + t_nu_n + y$

Ahora bien: $(u_i|y) = (u_i|x - t_1u_1 - \ldots\ldots - t_nu_n) =$

$=(u_i|x_{i+1} - t_{i+2} - \ldots\ldots - t_nu_n) = 0$ luego $y \in L$.

Supongamos que $x = t_1u_1 + \ldots + t_nu_n + y = s_1u_1 + \ldots + s_nu_n + y'$

entonces $y - y' = (s_1 - t_1)u_1 + \ldots\ldots + (s_n - t_n)u_n$

como $y - y' \in L$ $(u_i|y - y') = (s_i - t_i)(u_i|u_i) = 0 \Rightarrow s_i = t_i$.

5.13 Teorema (Gel'fand Mazur): Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad, débilmente alternativa, normada y sin divisores de cero topológicos; entonces A es alternativa e isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ó $\mathbb{O}$.

Demostración: Sea $a \in A$, $\mathbb{R}[a]$ es asociativa conmutativa normada y sin divisores de cero topológicos, por 4.1.(i) $R[a]$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, de donde A es cuadrática con J-división y sin divisores de cero. La notación que sigue es la de 5.11.

(i) Si dim A = 1 no hay nada que probar

(ii) Si dim A $\geq$ 2, por 3.4 $A = \mathbb{R} \oplus V$ de donde dim $V \geq 1$

Sea $e_1 \in V_1$, entonces $A = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus W(e_1)$

Si $W(e_1) = 0$, es claro que $A \simeq \mathbb{C}$

(iii) Supongamos $W(e_1) \neq 0$, entonces existe $e_2 \in W(e_1) \cap V_1$

Como $e_1, e_2 \in V$ $e_1e_2 = (e_1|e_2) + e_1 \wedge e_2 \in V$

$(e_1|e_2) = 0 \Rightarrow e_1$ y e_2 son linealmente independientes

4.4.(i) $\Rightarrow e_1, e_2, e_1 \wedge e_2$ también lo son

3.16.(ii) $\Rightarrow (e_1|e_1 \wedge e_2) = (e_2|e_1 \wedge e_2) = 0$

Si notamos $e_1 \wedge e_2 = e_3$ del lema anterior:

(α) $A = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus L$

Veamos que $H' = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ es una subálgebra de A isomorfa a $\mathbb{H}$.

Por ser A débilmente alternativa y teniendo en cuenta que:

$$e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2 = \tfrac{1}{2}[e_1, e_2] \quad 3.5.(iii)$$

Se tiene: $(e_1, e_1, e_1 \wedge e_2) = 0 \Rightarrow - e_1 e_2 - e_1(e_1(e_1 e_2)) = 0$

$\Rightarrow e_1(e_2 + e_1(e_1 e_2)) = 0$, por ser A sin divisores de cero resulta que: $e_1(e_1 e_2) = - e_2 \in H'$

De la misma forma: $e_2(e_2 e_1) = - e_1$

El caracter cuadrático de A, la anticonmutatividad del producto y la flexibilidad prueban que H' es subálgebra.

La tabla de multiplicación de H' relativa a la base 1, e_1, e_2, e_3 es: $e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_1$; $e_1 e_3 = -e_2 = -e_3 e_1$; $e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2$; $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$

De donde $H' \simeq \mathbb{H}$, 4.1.(ii). (α_1) De aquí se deduce fácilmente que para cada $a, b \in A$, $\mathbb{R}[a,b]$ es asociativa. El teorema de Artin I.5.2 asegura que A es alternativa. El teorema de Albert 4.1. (iii) completaría la demostración. Por razones de complitud damos una demostración directa inspirada en (52)

Volvamos al álgebra A, si en (α) $L = 0$, hemos probado que: $A \simeq \mathbb{H}$.

(iv) Supongamos que $L \neq 0$ y sea $v \in L \cap V_1$

Hagamos $e_4 = v$; $e_5 = e_1 \wedge v$; $e_6 = e_2 \wedge v$; $e_7 = e_3 \wedge v$

Es inmediata la comprobación de que $(e_i | e_j) = 0$ si $i \neq j$ y $(e_i | e_i) = -1$

Por el lema: $A = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots\ldots + \mathbb{R}e_7 \oplus L$; $L = W(e_i)$

Vamos a ver que $\mathcal{O}' = \mathbb{R} \oplus \ldots\ldots \oplus \mathbb{R}e_7$ es una subálgebra de A, isomorfa á $\mathcal{O}$. Para ello es suficiente calcular: e_1e_6 ; e_1e_7 ; e_2e_5 ; e_2e_7 ; e_3e_5 ; e_3e_6 ; e_5e_6 ; e_5e_7 ; y e_6e_7 , pues los restantes son fáciles de hallarteniendo en cuenta (ii).

Sean e_i, e_j; e_k distintos dos a dos; $i, j, k = 1, 2, \ldots\ldots, 7$

Evidentemente $(e_i + e_j | e_k) = 0$ y $(e_i + e_j | e_i + e_j) = -2$

De (iii) $e_i + e_j$ y e_k engendran una subálgebra asociativa H, de donde: $(e_i + e_j)((e_i + e_j)e_k) = -2e_k =$

$$= -2e_k + e_i(e_je_k) + e_j(e_ie_k)$$

De donde se deduce: (β) $e_i(e_je_k) = -e_j(e_ie_k)$ lo que implica:

$$e_1e_6 = e_1(e_2v) = -(e_2v)e_1 = (e_2e_1)v = -e_3v = -e_7$$

De la misma manera se ve que: $e_1e_7 = e_6$; $e_2e_5 = e_7$; $e_2e_7 = -e_5$; $e_3e_5 = -e_6$; $e_3e_6 = e_5$; $e_5e_6 = -e_3$; $e_5e_7 = e_2$; $e_6e_7 = -e_1$

Luego $\mathbb{O}'$ es una subálgebra y su tabla de multiplicación respecto de la base 1, $e_1, \ldots, e_7$ coincide con la de $\mathbb{O}$ (52;P.227). Por lo tanto si L = 0; $A \approx \mathbb{O}$

(iv) Finalmente veamos que dimA no puede ser mayor que 8. Supongamos que no fuese así y $A = \mathbb{O}' \oplus L$, $L \neq 0$, entonces existe $w \in L \cap V_1$ y la subálgebra $\mathbb{R}[e_1, e_2, v, w]$ sería engendrada por 4 elementos y por ningún subconjunto propio de e_1, e_2, v, w ya que por (iii) tres cualquiera de ellos engendran una subálgebra de orden 8 y $\mathbb{R}[e_1, e_2, v, w]$ es de dimensión mayor o igual que 16. Como en (iii) demostramos que las subálgebras engendradas por dos vectores linealmente independientes es de orden 4, el teorema 5.2 implica que $\mathbb{R}[e_1, e_2, v, w]$ es de dimensión $2^4 = 16$, como es una subálgebra de un álgebra de integridad también es sin divisores de cero, su finito dimensionalidad implica que es de división, lo que contradice el teorema de Milnor-Bott.4.1.

Una demostración directa se obtiene observando que:

$$((e_2w)(v + e_1w))(v + e_1w) = e_2w\,(v + e_1w)^2$$

implica el absurdo $2e_3v = 0$. (52; P.242) C.Q.D.

5.14 <u>Corolario</u>: Las únicas $\mathbb{R}$-álgebras normadas con unidad de Jordan n.c. débilmente alternativas con división son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, y $\mathbb{O}$.

<u>En efecto</u>: Sea A una de tales álgebras, por 5.3 A es cua-

drática y sin divisores de cero y la misma demostración del teorema anterior confirma nuestra tesis.

5.15 Corolario: Las únicas álgebras alternativas reales normadas con unidad y sin d.c.t. son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

En efecto: 5:5 y 5.13.

5.16 Corolario: Las únicas R-álgebras de Jordan normadas, sin divisores de cero topológicos y con unidad, son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

En efecto: Sea A un álgebra que verifica las hipótesis del enunciado por 5.5 y 5.13 A es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ó $\mathbb{O}$, pero $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ no son conmutativas, luego A es isomorfa a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

5.17 Corolario: Las álgebras reales normadas con división, standard generalizadas, 5.6, ó de Block, 5.9, y con unidad, son alternativas de dimensión finita y salvo isomorfismos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ó $\mathbb{O}$.

Demostración: 5.7 , 5.10 y el teorema 5.13

5.18 Teorema: Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra cuadrática con J-división y sin divisores de cero y verificando la propiedad de Osborn, entonces A es de dimensión 1,2,4, ó 8.

En efecto: Supongamos que $\dim A > 8$, un razonamiento análogo al utilizado en el teorema 5.13 demuestra que A contiene un subálgebra B engendrada por 3 elementos e_1, e_2, v y de dimensión 8, además $A = B \oplus L$, si existiese $w \in L \cap V_1$ entonces $\mathbb{R}[e_1, e_2, v, w]$ sería de dimensión 16, y con división lo que contradeciría el teorema de Bott-Milnor.

5.19 Proposición: Sea A una R-álgebra de Jordan n.c. cuadrática y sin divisores de cero, entonces la condición necesaria y suficiente para que A sea de Osborn es que verifique:

(0) $x\wedge(y\wedge(x\wedge y)) = 0$ para todo par x,y de "vectores" J-ortogonales de A.

En efecto: A cuadrática sin divisores de cero $\Longrightarrow R[a]$ sin divisores de cero $\Longrightarrow$ A es con J-división.

Supongamos que A es de Osborn y sean x e y vectores ortogonales Entonces x,y engendran una subálgebra de V de orden 3 lo que implica $y\wedge(x\wedge y) = tx + ry + s(x\wedge y)$ de donde fácilmente se deduce que $t = (x\wedge y)^2$, $r = s = 0$, y $x\wedge(y\wedge(x\wedge y)) = 0$

Reciprocamente si $x\wedge(y\wedge(x\wedge y)) = 0$, en vista de 4.5.(i) ($\partial_5$), x e $y\wedge(x\wedge y)$ son linealmente dependientes y $y\wedge(x\wedge y) = tx$, de donde A es de Osborn.

5.20 Teorema: Sea A una R-álgebra de Jordan n.c., normada con unidad sin divisores de cero topológicos y verificando:

(0) $x\wedge(y\wedge(x\wedge y)) = 0 \qquad (x,y \in V : (x/y) = 0)$

Entonces A es con división y de dimensión finita 1,2,4,8.

En efecto: A es cuadrática sin divisores de cero y por lo tanto A es con J-división; por verificar (0) es de Osborn, por 5.18 A, es finito dimensional.

5.21 Nota: Las $\mathbb{R}$-álgebras cuadráticas de Jordan n.c. de integridad y de orden 4 son las mutaciones, $H^{(\lambda)}$, de H, para $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

5.22 <u>Cuestión abierta</u>: (i) ¿Verifican las álgebras de Jordan n.c. cuadráticas con división (O)?

(ii) ¿En todo caso son las álgebras de Jordan n.c. normadas y con división finito dimensionales?

C A P I T U L O IV

V - A L G E B R A S

1.- ALGEBRAS CON INVOLUCION

1.1 Definición: Sea X un espacio vectorial complejo, llamaremos involución ó conjugación en X a una aplicación:

$$* : x \mapsto x^* \text{ de } X \text{ en } X \text{ tal que:}$$

$$(x + y)^* = x^* + y^*; \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^* \text{ y } (x^*)^* = x$$

para cada par x,y de X y todo λ de $\mathbb{C}$; diremos que x es el $*$-simétrico ó $*$-adjunto de x.

Sea M un subconjunto de X, por M^* notaremos:

$$M^* = \{ x^* : x \in M \}$$

Si M es tal que $M^* = M$ diremos que M es $*$-simétrico ó $*$-autoadjunto. Si $M = \{x\}$ la condición anterior se reduce a que $x = x^*$ y diremos simplemente que x es $*$-simétrico ó $*$-autoadjunto. Al conjunto de todos los elementos $*$-simétricos de X lo denotaremos por $Sim_*(X)$. Cuando no exista riesgo de confusión se prescindirá en la nomenclatura anterior del prefijo $*$.

Las proposiciones siguientes son consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

1.2 <u>Proposición</u>: Sea X un $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de una involución . Entonces SimX es un subespacio real de X y

$X = \mathrm{SimX} \underset{\mathbb{R}}{\oplus} i\mathrm{SimX} (x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i(1/2i\ (x - x^*))$

1.3 <u>Proposición</u>: Sea V un subespacio real de X, tal que $X = V \underset{\mathbb{R}}{\oplus} iV$, entonces la aplicación $x + iy \mapsto x - iy$ $(x,y \in V)$ es una involución en X, y SimX = V.

1.4 <u>Corolario</u>: Si $*_1$ y $*_2$ son dos involuciones sobre el mismo $\mathbb{C}$-espacio X y $\mathrm{Sim}_1 X \subseteq \mathrm{Sim}_2 X$, entonces $*_1 = *_2$.

1.5 <u>Proposición</u>: Sean X un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con involución $*$, y M un subespacio de X. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) M es autoadjunto

(ii) $x + M \mapsto x^* + M$ es una involución en A/M

Cuando éste sea el caso a la conjugación anterior la llamaremos involución cociente.

1.6 Sean $(X,*_1)$ e $(Y,*_2)$ dos $\mathbb{C}$-espacios con involución, L(X,Y) el espacio de las aplicaciones lineales de X en Y, entonces la aplicación:

$T \mapsto T^*: T^*(x) = (T(x^{*_1}))^{*_2}$; $(T \in L\ (X,Y))$ es una conjugación en L(X,Y), que llamaremos involución canónica asociada a las involuciones de X e Y.

1.7 <u>Proposición</u>: Con las notaciones anteriores, $T \in L(X,Y)$ es simétrico $\Leftrightarrow T(\mathrm{SimX}) \subseteq \mathrm{SimY}$.

En otras palabras T es simétrico sii toma valores simétricos sobre elementos simétricos.

En efecto: $\Rightarrow$) Sea $x \in \mathrm{Sim}X$ y $T \in \mathrm{Sim}(L(X,Y))$, $(T(x))^{*2} =$

$= (T(x^{*1}))^{*2} = T^{*}(x) = T(x)$. $\Leftarrow$) Sea $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in \mathrm{Sim}(X)$

y supongamos $T(\mathrm{Sim}X) \subseteq \mathrm{Sim}Y$

$$T^{*}(x_1 + ix_2) = (T(x_1 - ix_2))^{*2} = (T(x_1) - iT(x_2))^{*2} =$$

$$= (T(x_1))^{*2} + i(T(x_2))^{*2} = T(x_1) + iT(x_2) = T(x_1 + ix_2)$$

1.8 Proposición: Sean $(X, *_1)$ e $(Y, *_2)$ dos espacios complejos normados y con involuciones continuas. Entonces la involución canónica definida antes admite una restricción a $BL(X,Y)$ que además es continua respecto a la norma operacional en $BL(X,Y)$.

1.9 Un caso particular importante de la proposición anterior es cuando $Y = \mathbb{C}$, entonces $BL(X,\mathbb{C})$ no es más que X' el dual topológico de X; en este caso a la involución canónica de X' la llamaremos traspuesta de la involución de X, recalquemos que en este caso se tiene:

$$f^{*}(x) = \overline{f((x^{*})} \quad (f \in X') \text{ y } f \in X' \text{ es autoadjunto} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow f(\mathrm{Sim}(X)) \subseteq \mathbb{R}$.

1.10 Proposición: Sea X un $\mathbb{C}$-espacio de Banach con involución entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) $*$ es continua

(ii) $\mathrm{Sim}(X')$ es total. ($\mathrm{Sim}(x') = \{f \in x' : f(\mathrm{Sim}x) \subset \mathbb{R}\}$)

(iii) $\mathrm{Sim}(X)$ es cerrado

Demostración: (14; P.190)

1.11 Definición: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra, se dice que A es un álgebra con involución ó un álgebra involutiva, sii su espacio subyacente está dotado de una involución $x \mapsto x^*$ que verifica:

$$(xy)^* = y^* x^* \quad (x,y \in A)$$

Nos referimos a ésta propiedad con la frase "propiedad multiplicativa de la involución".

Nota: Como en varias ocasiones nos encontraremos con álgebras cuyo espacio vectorial subyacente está dotado de una involución, no necesariamente multiplicativa, y con el fin de evitar cualquier tipo de confusión, utilizaremos la expresión "involución lineal en A" para destacar éste hecho.

Sea A un álgebra con involución:

(i) Si A tiene unidad e, entonces e es autoadjunto

(ii) Sea $x \in A$, diremos que x es normal si $xx^* = x^*x$, es claro que todo elemento simétrico es normal.

(iii) Si $x,y \in \mathrm{Sim}(A)$ y $xy = yx$ entonces $xy \in \mathrm{Sim}(A)$

(iv) xx^* y $x^*x \in \mathrm{Sim}(A)$ $(x \in A)$

1.12 Sea A un álgebra con involución y A_1 su unitización, entonces la involución de A se puede prolongar a una involución de A_1. De la forma siguiente:

$$(\lambda e + x)^* = \bar{\lambda} e + x^*$$

1.13 <u>Proposición</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra, $*$ una involución lineal en A. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $*$ es multiplicativa en A.

(ii) $*$ es multiplicativa en A^+ y A^-

(iii) $xx^* \in \mathrm{Sim}A \quad (x \in A)$

(iv) $x,y \in \mathrm{Sim}A \Rightarrow (i[x,y]$ y $x^2 \in \mathrm{Sim}A)$

<u>En efecto</u>: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) y (i) $\Rightarrow$ (iii) son evidentes

(iii) $\Rightarrow$ (iv), si $x \in \mathrm{Sim}A$; $xx^* = x^2 \in \mathrm{Sim}A$

Si $x,y \in \mathrm{Sim}A$, $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 - i[x,y] \in \mathrm{Sim}A$, implica que $i[x,y] \in \mathrm{Sim}A$.

(iv) $\Rightarrow$ (i), supongamos primero que $x,y \in \mathrm{Sim}A$ entonces:

(iv) $\Rightarrow x.y = 1/4\ ((x + y)^2 - (x - y)^2) \in \mathrm{Sim}(A)$

$$y,\tfrac{1}{2}[x,y] = \tfrac{1}{2}i(-i[x,y]) \in i\mathrm{Sim}(A)$$

De donde $(xy)^* = (x.y + \tfrac{1}{2}[x,y])^* = x.y + \tfrac{1}{2}i(i[x,y]) =$

$$= x.y + \tfrac{1}{2}[y,x] = yx = y^*x^*$$

Sean ahora $a = x_1 + ix_2$ y $b = y_1 + iy_2$; $x_i, y_i \in \mathrm{Sim}A$

se tiene: $(ab)^* = (x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1))^* =$

$$= y_1x_1 - y_2x_2 - i(y_2x_1 + y_1x_2) = (y_1 - iy_2)(x_1 - ix_2) = b^* a^*$$

1.14 <u>Definición</u>: Sean A y B dos $\mathbb{C}$-álgebras con involución. Llamaremos morfismo de álgebras involutivas un morfismo φ de A en B tal que:

$$\varphi(x^*) = \varphi(x)^* \quad (x \in A)$$

1.15 (i) Un ideal N (resp. B subálgebra) de A tal que $N^* = N$ (resp. $B^* = B$), se denominará ideal autoadjunto (resp. subálgebra autoadjunta) de A.

(ii) Es claro que el núcleo (resp. la imagen) de un morfismo de álgebras con involución, es un ideal (resp. subálgebra) autoadjunto.

(iii) Si N es un ideal autoadjunto de A, entonces A/N con la involución lineal cociente definida en 1.5, es un álgebra involutiva y $p : A \to A/N$ es un morfismo de álgebras con involución.

1.16 <u>Proposición</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra con involución flexible, entonces los subconjuntos autoadjuntos, conmutativos, maximales, son subconjuntos conmutativos maximales y en consecuencia subálgebras.

<u>En efecto</u>: Sea M un subconjunto autoadjunto conmutativo maximal y sea $a = a_1 + ia_2 \in A$ tal que:

$ax = xa \quad (x \in M)$; M autoadjunto $\Rightarrow ax^* = x^* a$

$*$ es multiplicativa $\Rightarrow xa^* = a^* x$ de donde se deduce fácilmente que $a_1 x = xa_1$ y $a_2 x = xa_2$ $(x \in M)$

El caracter maximal de M implica que $a_1, a_2 \in M$ y por la misma razón $a \in M$, luego M es conmutativo maximal.

1.17 <u>Corolario</u>: Sea A como en la proposición anterior, entonces las subálgebras autoadjuntas conmutativas maximales son subálgebras conmutativas maximales.

1.18 <u>Corolario</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad, entonces las subálgebras conmutativas autoadjuntas maximales son plenas.

<u>Demostración</u>: El Corolario anterior y I.4.11

1.19 <u>Proposición</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. con unidad y con involución, entonces:

(i) $(J(inv(A))^{*} = J\text{-}inv(A)$

(ii) $Sp(a^{*}) = \overline{Sp(a)}$ $(a \in A)$

<u>En efecto</u>: Por 1.13.(ii) $*$ es un J-automorfismoantilineal de A, de donde II.4.4 $\Rightarrow$ (i). Finalmente (ii), resulta de que $(\lambda e - a)^{*} = \bar{\lambda} e - a^{*}$, e (i).

Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra con involución de Jordan n.c. con unidad, un elemento $a \in A$ se dice unitario si a es J-inversible y $a^{-1} = a^{*}$.

1.20 <u>Corolario</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra alternativa con involución entonces el conjunto de los elementos unitarios de A es un sublazo de inv(A).

<u>En efecto</u>: Sean $a, b \in A$: $a^{*} = a^{-1}$ y $b^{*} = b^{-1}$. Por I.5.10, a y b están contenidos en una subálgebra asociativa y plena de donde ab es inversible y:

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = b^{*} a^{*} = (ab)^{*}$$

1.21 <u>Corolario</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra flexible normada y con involución, entonces las subálgebras autoadjuntas conmutativas maximales son cerradas.

<u>En efecto</u>: 1.17 y II.1.6.(iv)

1.22 Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada con involución continua, y sea N un ideal auto-adjunto y cerrado de A, entonces la involución cociente en A/N es continua respecto de la norma cociente.

<u>En efecto</u>: Claro

1.23 <u>Lema</u>: Sea A un álgebra compleja de Banach con unidad y con involución, entonces la variedad lineal engendrada por los elementos unitarios de A coincide con A.

<u>Demostración</u>: (14; P.66)

1.24 <u>Proposición</u>: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. normada completa con unidad y con involución continua, entonces:

(i) A está engendrada linealmente por sus elementos unitarios.

(ii) $r(a) = r(a^*)$ $(a \in A)$

<u>En efecto</u>: (i) Sea $h \in Sim(A)$, entonces, $\overline{\mathbb{C}(h)}$, el cierre de la subálgebra plena engendrada por h, es cerrada, auto-adjunta y asociativa. Por el lema anterior existen elementos unitarios $u_1, \ldots, u_n \in \overline{\mathbb{C}(h)}$ tal que:

$h = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, pero evidentemente los u_i son unitarios en A.

(ii) II.5.3.(ii) y 1.19(ii). Para este resultado, la continuidad de la involución es superflua.

2.- RANGO NUMERICO:

Todas las álgebras consideradas en este apartado, salvo mención expresa de lo contrario, serán complejas normadas completas unitales.

2.1 Notación: Sea A un álgebra, por $B_1(A)$ designaremos la bola unidad cerrada del espacio de Banach A y por S(A) la esfera del mismo radio:

$B_1(A) = \{x \in A : \|x\| \leq 1\}$, $S(A) = \{x \in A : \|x\| = 1\}$ y A' notará como de costumbre el dual topológico de A.

2.2 Definición: Sea A un álgebra. Por la expresión D(A,e) ó simplemente D(e), entendemos el siguiente subconjunto de A':

$D(e) = \{f \in A' ; \|f\| = f(e) = 1\}$; y a sus elementos los llamaremos estados normalizados de A.

Observemos que el teorema de Hahn-Banach asegura que $D(e) \neq \emptyset$. Por otra parte, $D(e) = B_1(A') \cap \{f \in A' : f(a) = 1\}$. De donde se deduce que D(e) es un subconjunto convexo y cerrado en la topología $*$-débil, y como $B_1(A')$ es compacto respecto de la misma topología (Teorema de Alaoglu-Banach), podemos enunciar la siguiente:

2.3 Proposición: D(e) es un subconjunto no vacio de A', convexo y compacto respecto de la topología $*$-débil.

2.4 Definición: Llamaremos rango numérico de un elemento a de A, al subconjunto de $\mathbb{C}$.

$$V(a,A) = \{f(a) : f \in D(e)\}$$

si no hay lugar a confusión lo denotaremos simplemente $V(a)$.

2.5 Proposición: (i) $V(a)$ es un subconjunto no vacio, convexo y compacto de $\mathbb{C}$.

(ii) $V(\alpha + \beta a) = \alpha + \beta(V(a))$ y $V(a + b) \subseteq V(a) + V(b)$ $(a,b \in A)$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.

(iii) $|z| \leq \|a\|$ $(z \in V(a))$

Demostración: (14; P.52)

2.6 Proposición: Sean A y B álgebras y φ una aplicación lineal de A en B que conserva las unidades y achica normas, es decir:

$\varphi(e) = e$ y $\|\varphi\| \leq 1$. Entonces:

$V(B, \varphi(a)) \subseteq V(A,a)$ $(a \in A)$

En efecto: (14; P.52)

Sea $z \in V(B, \varphi(a)) \Rightarrow \exists f \in D(B,e)$ tal que $f(\varphi(a)) = z$, pero $f\varphi \in A'$ y $\|f\varphi\| \leq \|f\| \|\varphi\| \leq 1$ y $f\varphi(e) = f(e) = 1 \Rightarrow f\varphi \in D(A,e)$ de donde $z \in V(A,a)$.

2.7 Corolario: Si en 2.6 φ es una isometria, entonces:

$$V(B,\varphi(a)) = V(A,a)$$

La demostración es evidente.

2.8 Corolario: Sea B una subálgebra de A tal que $e \in B$. Entonces:

$$V(B,a) = V(a,A)$$

2.9 Sea N un ideal cerrado de A, entonces para $a + N \in A/N$ se tiene:

$$V(a + N \; ; \; A/N) \subseteq V(a,A)$$

<u>En efecto</u>: $p : A \to A/N$ es lineal continua, $\|p(a)\| \leq \|a\|$ y $p(e) = e + N$ y 2.6 completa la demostración.

El corolario siguiente será nuestro recurso principal para el aprovechamiento de los resultados sobre rango numérico en álgebras de Banach.

2.10 <u>Corolario (Fundamental)</u>: Sea A una álgebra y BL(A) su álgebra de operadores lineales y continuos. Entonces para cada $a \in A$ se tiene:

$$V(a,A) = V(L_a \; ; \; BL(A)) = V(R_a \; ; \; BL(A))$$

<u>Demostración</u>: Las aplicaciones G_L y G_R de A en BL(A) son isométricas II.2.6 y $G_L(e) = G_R(e) = I$ y 2.6 completa la demostración.

2.11 <u>Definición</u>: Sea $a \in A$. El radio numérico de <u>a</u>, es el número real $v(a) = \mathrm{Max}\{|z| : z \in V(a)\}$

2.12 <u>Teorema</u>: Sea A un álgebra. Entonces $v(.)$ es una norma en el espacio lineal subyacente á A, equivalente a la norma inicial. Más aún, se tiene:

$$1/e \, \|a\| \leq v(a) \leq \|a\| \quad (a \in A) \quad (\text{ e nota el número } e \in \mathbb{R})$$

<u>En efecto</u>: La demostración se basa en que el teorema es verdadero si A es de Banach (14; P.56). Así se tiene que

$v(a) = v(L_a)$ es una norma, y

$$(1/e)\|a\|=(1/e)\|L_a\| \leq V(L_a)=V(a) \leq \|a\|$$

2.13 <u>Definición</u>: Sea $u \in S(A)$, diremos que u es un vértice de la bola unidad sii el subconjunto $D(A,u) = \{f \in A' : f(u) = 1 = \|f\|\}$ es total en A', es decir:

si $f(a) = 0 \quad (f \in D(A,u)) \Rightarrow a = 0$

2.14 <u>Corolario</u>: e es un vértice de la bola unidad de A.

<u>En efecto</u>: Si $f(a) = 0 \quad (f \in D(e)) \Rightarrow v(a) = 0$, por el teorema 2.12, $a = 0$

2.15 <u>Definición</u>: Sea a un elemento de A, se dice que a es HERMITIANO sii:

$$V(A,a) \subseteq \mathbb{R}$$

Al conjunto de los elementos hermitianos de A lo designaremos por H(A).

$$H(A) = \{a \in A : V(a) \subseteq \mathbb{R}\}$$

Teniendo en cuenta 2.5.(ii), H(A) es una variedad real de A.

2.16 <u>Proposición</u>: Sea A un álgebra de Jordan n.c., <u>a</u> un elemento de A, entonces $Sp(a) \subseteq V(a)$. En particular $a \in H(A) \Rightarrow Sp(a) \subseteq \mathbb{R}$

<u>Demostración</u>: (55; P.102; T.2.1)

2.17 <u>Definición</u>: Sea A un álgebra y $a \in A$. Por definición $\exp(a) = \exp(L_a)(e) = \Sigma(1/n!)\ L_a^n(e) = \Sigma(1/n!)a^n$, donde a^n notan las potencias por la izquierda de <u>a</u>, definidas en I.1.8.

2.18 Lema: Para cada $a \in A$, se tiene:

$$\max\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in V(A,a)\} = \inf_{\alpha > 0} 1/\alpha \left(\|1 + \alpha a\| - 1\right) =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} 1/\alpha \left(\|1 + \alpha a\| - 1\right)$$

Demostración: (12; P.28; T.4)

2.19 Teorema: Sea $a \in A$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $a \in H(A)$

(ii) $\lim_{\alpha \to 0} (\|1 + i\alpha a\| - 1) = 0$

(iii) $\|\exp(i\alpha a)\| = 1 \quad (\alpha \in R)$

Demostración: (12; P.46; Lema 2). Es claro que a es hermitiano sii Max ReV(A,ia) = MaxV(A, -ia) = 0., 2.18 y 2.19 completan la demostración.

2.20 Lema (Teorema de Sinclair): En un álgebra de Banach A, para cada $a \in H(A)$, se tiene que $r(a) = \|a\|$.

Demostración: (14; P.57; T.17)

2.21 Teorema (Sinclair generalizado): Sea A un álgebra, entonces:

(i) $a \in H(A) \Rightarrow v(a) = \|a\|$

(ii) $H(A)$ es cerrado y $H(A) \oplus iH(A)$ es suma topológica directa.

Demostración: (i) Por 2.10 $v(a) = v(R_a)$ y por el lema anterior $v(a) = v(R_a) = \|R_a\| = \|a\|$

(ii) H es cerrado, puesto que si a_n tiende a $\underline{a}$, y $f \in D(e) \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$ de donde $f(a) \in \mathbb{R}$

La suma es directa algébrica, puesto que si $a + bi = 0$

$f \in D(e)$, $f(a) + if(b) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b) = 0$, y como

$D(e)$, por 2.14, es total $a = b = 0$.

Por otro lado:

$$f(a + ib) = f(a) + if(b) \quad (a,b \in H(A)) \quad (f \in D(e))$$

lo que implica que:

$$|f(a)| \leq |f(a + ib)| \leq \|a + ib\| \text{ ya que } \|f\| = 1.$$

Tomando supremos resulta que $v(a) \leq \|a + ib\|$. Por (i):

$\|a\| = v(a) \leq \|a + ib\| \Rightarrow$ que la proyección $a + ib \mapsto a$ es continua, lo que concluye la demostración.

2.22 Al subespacio real $H(A) + iH(A)$, lo notaremos por $J(A)$. Es inmediata la demostración de que $J(A)$ es una variedad lineal compleja de A, y que además es cerrada dado que es suma topológica de variedades cerradas.

Incluso en el caso asociativo, se sabe que $J(A)$ en general no es subálgebra de A (12; P.58; Ex.1). Ahora bien, es cierto que en este caso $J(A)$ es subálgebra de A^-. La prueba de esto, se basa en el lema siguiente.

2.23 Lema: Sea A un álgebra de Banach unital. Entonces si a, $b \in H(A)$, se verifica que $i[a,b] \in H(A)$. La demostración se puede ver en (14; P.206; Lema 2).

Sorprendentemente, estos resultados se verifican sin ninguna hipótesis de asociatividad.

2.24 Lema Fundamental: Sea $T \in H(BL(A))$, entonces:

(i) $T(e) \in H(A)$

(ii) Si $a \in H(A)$ y $T(e) = 0$, entonces $iT(a) \in H(A)$.

En efecto: La aplicación $T \mapsto T(e)$ de $BL(A)$ en A es lineal, continua, conserva las unidades y contrae las normas. Por 2.5 $V(T(e)) \subseteq V(T)$, de donde si T es hermitiano $T(e) \in H(A)$.

(ii) Sea $a \in H(A)$, por 2.10, $L_a \in H(BL(A))$. El lema 2.23 aplicado a $BL(A)$ nos da $i[T,L_a] \in H(BL(A))$

Por (i) $i[T,L_a](e) = iT(a) \in H(A)$

2.25 Corolario: Sean $a, b \in H(A)$, entonces $i[a,b] \in H(A)$.

En efecto: $a \in H(A) \Rightarrow L_a - R_a \in H(BL(A))$, como $(L_a - R_a)(e)=0$ el lema anterior (ii) implica $i(L_a - R_a)(b) = i[a,b] \in H(A)$.

2.26 Corolario: Sean $a,b,c \in H(A)$, entonces $(a,b,c) \in H(A)$

En efecto: $i[L_a,R_c] \in H(BL(A))$ y $i[L_a,R_c](e) = 0$; $b \in H(A)$ y el lema 2.24 $\Rightarrow -[L_a,R_c](b) = -(a,b,c) \in H(A)$.

2.27 Teorema: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra, $J(A) = H(A) + iH(A)$, entonces:

(i) $J(A)$ es una subálgebra de A^-

(ii) La aplicación $*: a + ib \mapsto a - ib$, de $J(A)$ en si misma, es una involución lineal continua y multiplicativa respecto del producto corchete en $J(A)$.

Demostración: Sean $a + ib$ y $a' + ib' \in J(A)$.

De $[a + ib\ ,\ a' + ib'] = [a,a'] - [b,b'] + i[a,b'] + i[b,a']$, el corolario anterior y el hecho de que J(A) es una variedad compleja de A resulta (i).

(ii) Que $*$ es una involución lineal se deduce de 1.3, su continuidad de 1.10.(iii) y 2.21.(ii).

Finalmente sean $a,b \in H(A)$:

$(i[a,b])^{*} = i[a,b] = -i[a,b]^{*} \quad (a,b \in H(A))$ de donde

$[a,b]^{*} = -[a,b] = [b,a] = [b^{*}, a^{*}]$.

3.- ALGEBRAS DE VIDAV:

A designará como en el apartado anterior una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa unital.

3.1 Definición: Diremos que A es un álgebra de Vidav, abreviadamente V-álgebra sii:

$$A = H(A) + iH(A)$$

Por 2.27 $a + ib \mapsto a - ib$ es una involución lineal continua en A. La llamaremos la involución lineal natural de A. También se vió que $(A^{-}, *)$ es un álgebra involutiva.

Es claro que A es V-álgebra sii lo es A^{+}.

3.2 Ejemplos:

(i) Sea A una B^{*}-álgebra, es decir una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach unital con involución $*$ que verifica el axioma de Gel'fand Naïmarck : $\|xx^*\| = \|x\|^2$

En (14; P.67; 12.20) se demuestra que es equivalente el ser $*$-autoadjunto y hermitiano, de donde $H(A) = Sim_*(A)$ y A es una V-álgebra por 1.2.

(ii) Sea A una B^*-álgebra, entonces toda subálgebra cerrada y autoadjunta de A^+ es una V-álgebra (55)

(iii) Si A es una B^*-álgebra, la mutación $B^{(\lambda)}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ es una V-álgebra puesto que $(B^{(\lambda)})^+ = B^+$

3.3 <u>Proposición</u>: Sea A una V-álgebra, M un ideal cerrado de A. Entonces:

(i) M es autoadjunto

(ii) A/M es una V-álgebra

(iii) La conjugación lineal natural de A/M coincide con la involución lineal cociente.

<u>Demostración</u>:

$P: A \longrightarrow A/M$ es continua, $\|P\| \leqslant 1$, $P(e)=e+M$, de donde, por 2.10

$$x \in H(A) \Rightarrow x + M \in H(A/M)$$

(i) sea $m \in M$ ($m=x_1+ix_2$, $x_1, x_2 \in H(A)$), entonces $o=(x_1+M)+i(x_2+M) \Rightarrow x_1 \in M$, $x_2 \in M \Longrightarrow m^* \in M$.

(ii) Sea $x \in A$ ($x=x_1+ix_2$, $x_1, x_2 \in H(A)$), entonces:

$$x + M = (x_1 + M) + i(x_2 + M)$$

Luego $A/M \subseteq H(A/M) + iH(A/M)$ lo que implica:

$$A/M = H(A/M) + iH(A/M)$$

(iii) Es claro.

3.4 Teorema de (Vidar-Palmer): Sea A una V-álgebra asociativa, entonces la involución lineal natural de A es multiplicativa, y $(A,*)$ es una B^*- álgebra.

Demostración: (14; P.211; T.14)

3.5 Teorema (Juan Martinez): Sea A una V-álgebra de Jordan, entonces A con la involución lineal natural, es un álgebra involutiva. El Prof. Martinez llama a estas álgebras "VJ-álgebras."

Demostración: (55; P.113; T.V.5.3).Para la prueba de este resultado se establecen los lemas siguientes:

1º Si $a \in H(A)$ y $a^2 = b + ic$, $b,c \in H(A)$ Entonces:

(i) $[L_a, L_b] = [L_a, L_c] = 0 = [L_b, L_c]$

2º $a \in H(A)$ y $a^2 = b + ic$, $b,c \in H(A) \Rightarrow a^2 \in H(A)$

Para éste, se utiliza el resultado de (14. P.206), que asegura, que si en un álgebra de Banach unital $a = b + ic$; $b,c \in H(A)$ y $bc = cb$ entonces:

$$V(a) = \text{Co } Sp(a), \text{ (Co } Sp(a) \text{ es la cápsula convexa de } Sp(a)).$$

3.6 Teorema: Sea A una V-álgebra de Jordan n.c. Entonces la involución lineal natural de A es multiplicativa.

En efecto: A^+ es V-álgebra por el teorema anterior $(A^+,*)$ es involutiva, por 2.27 y 1.13 $*$ es multiplicativa en A.

Cuestión abierta: ¿ Es el teorema anterior válido sin la hipótesis Jordan n.c.?

3.7 **Definición**: Llamaremos V^*-álgebra a una V-álgebra A cuya involución lineal natural es multiplicativa.

En términos de ésta definición 3.5, se enuncia diciendo que, toda V-álgebra de jordan n.c. es V^*-álgebra.

3.8 **Proposición**: A es una V^*-álgebra sii lo es A^+.

En efecto: $\Rightarrow$) evidente

$\Leftarrow$) La hipótesis, 2.27 y 1.13 confirman la tesis

3.9 **Lema**: Sea A una V^*-álgebra, conmutativa, $T \in H(BL(A))$ y $T(e) = 0$. Entonces T es una derivación de A.

Enefecto: Sean $a,b \in H(A)$ entonces L_a, $L_b \in H(BL(A))$.

Por 2.23, $[[T, L_a], L_b] \in H(BL(A))$. De donde 2.18.(i) implica:

$$[[T, L_a], L_b](e) = T(ab) - aT(b) - bT(a) \in H(A)$$

Por otro lado: $a,b \in H(A) \Rightarrow ab \in H(A)$; por el mismo 2.18.(i) : : $iT(ab)$; $iT(b)$; $iT(a) \in H(A)$. De donde se obtiene:

$iT(ab)$, $i\,aT(b)$, $ibT(a) \in H(A)$, lo que implica que:

$T(ab) - aT(b) - bT(a) \in H(A) \cap iH(A)$

De donde $T(ab) = aT(b) + bT(a)$ lo que implica que $iT|H(A)$ es una derivación en H(A). El resto es una comprobación mecánica.

3.10 __Corolario__: En una V^*-álgebra conmutativa A, si $T \in J(BL(A))$ y $T(e) = 0$. Entonces T es una derivación de A.

__En efecto__: $T = T_1 + iT_2$; $T_1, T_2 \in H(BL(A))$ y

$T(e) = T_1(e) + iT_2(e) = 0 \Rightarrow T_1(e) = 0 = T_2(e)$

El lema anterior implica que T_1 y T_2 son derivaciones y por lo tanto $T_1 + iT_2$ también lo es.

3.11 __Corolario__: En una V^*-álgebra A; si $T \in J(BL(A))$ y $T(e) = 0$ entonces T es una derivación en A^+.

__En efecto__: Evidente.

3.12 __Corolario__: Sea A una V^*-álgebra, entonces para todo $a, b \in A$ $[L_a, R_b]$ y $L_a - R_a$ son derivaciones en A^+.

__En efecto__: $a, b \in A$ V^*-álgebra $\Rightarrow L_a, R_b \in J(A)$ de donde

$[L_a, R_b]$ y $L_a - R_a \in J(BL(A))$ además $[L_a, R_a]e = (L_a - R_a)e = 0$.

Luego estamos en condiciones de aplicar el corolario anterior.

3.13 __Corolario__: Sea A una V^*-álgebra conmutativa, entonces $[L_a, R_b]$ es una derivación de A, $(a, b \in A)$. Evidente.

3.14 __Teorema__: Sea A una V^*-álgebra conmutativa; e su unidad y $\|\cdot\|$ su norma. Sea x: $A \times A \to A$ un producto bilineal conmutativo, tal que: $e \times a = a$; $\|a \times b\| \leq \|a\| \|b\|$, y $(a \times b)^* = b^* \times a^*$ $(a, b \in A)$

Entonces afirmamos que: $a \times b = ab$ $(a, b \in A)$

__Demostración__: Sea $a \in A$, $L_a^{\times}$ notará el multiplicador por __a__ respecto del producto x.

Es claro que:

$$L_h - L_h^{\times} \in H(BL(A)) \qquad (h \in H(A))$$

Además por hipótesis: $(L_h - L_h^{\times})(e) = he - h{\times}e = 0$

Por 2.24.(ii) se tiene:

$$(\alpha)\ i\,(L_h - L_h^{\times})(k) = i\,(hk - h{\times}k) \in H(A) \qquad (k \in H(A))$$

Como $*$ es multiplicativa respecto de los dos productos (conmutativos) se tiene que:

$$hk, h{\times}k \in H(A) \Rightarrow hk - h{\times}k \in H(A)$$

Teniendo en cuenta (α) resulta:

$$hk = h{\times}k \qquad (h,k \in H(A))$$

El resto es mecánico.

3.15 Corolario: Sea A una V^*-álgebra, entonces toda biyección lineal e isométrica φ: $A \to A$ tal que $\varphi(e) = e$, es un $*$-automorfismo de A^+.

En efecto: Por 2.7 $a \in H(A) \Leftrightarrow \varphi(a) \in H(A)$. Por lo tanto solo falta ver que $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$. Para ello definimos:

$$a{\times}b = \varphi^{-1}(\varphi(a).\varphi(b)) \qquad (a,b \in A)$$

Es claro que éste producto es conmutativo y verifica:

$$e{\times}a = a\ ;\ \|a{\times}b\| \leq \|a\|\,\|b\|\ ;\ (a{\times}b)^* = \left(\varphi^{-1}\left[\varphi(a).\varphi(b)\right]\right)^* =$$

$$= \varphi^{-1}(\varphi(a)^*.\varphi(b)^*) = \varphi^{-1}(\varphi(a^*).\varphi(b^*)) = a^*{\times}\,b^*$$

Luego por el teorema anterior se tiene:

$$a{\times}b = a.b = \varphi^{-1}(\varphi(a).\varphi(b)) \Rightarrow \varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$$

4.- TEOREMA DE RODRIGUEZ PALACIOS:

4.1 Lema (algebraico): Sea A una K-álgebra con unidad, $a \in A$ y D una derivación en A, entonces:

(i) $Da^{n+1} = \sum_{0}^{n} L_a^{n-k} R_{a^k}(Da)$

(ii) $D^2a=0 \Rightarrow D^n(a^n)=n!(Da)^n$

En efecto:

(i) Supongamos $Da^n = \sum_{0}^{n-1} L_a^{n-k-1} R_{a^k}(Da)$

$Da^{n+1}=D(aa^n)=(Da)a^n + aDa^n = L_a(\sum_{0}^{n-1} L_a^{n-k-1} R_{a^k}(Da)) + R_{a^n}(Da) =$

$= \sum_{0}^{n} L_a^{n-k} R_{a^k}(Da)$

(ii) (α): $D^2a=0 \Rightarrow D^na=0 \quad n>1$ evidente

(β): $D^2a=0 \Rightarrow D((Da)^k)=0$ por inducción

$D((Da)^{k+1})=(D^2a)((Da)^k) + (Da)(D(Da)^k)=0$

Finalmente supongamos:

$D^{n-1}(a^{n-1})=(n-1)!(Da)^{n-1}$ de donde $D^n(a^{n-1})=0$

Por otro lado:

$D^n(a^n)=D^n(aa^{n-1})=(D^na)a^{n-1} + \binom{n}{1}(D^{n-1}a)(D(a^{n-1}))+\dots +$

$+n(Da)D^{n-1}(a^{n-1}) + aD^n(a^{n-1})$ donde hemos aplicado la fórmula de Leibnitz, I.1.27(iv)

Por (α), (β) y la hipótesis de inducción resulta:

$$D^n(a^n)=n(Da)(n-1)!(Da)^{n-1}=n!(Da)^n$$

4.2 Lema: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de potencias asociativas, con unidad normada, $a \in A$, y D una derivación continua de A^+, tal que $D^2a=0$ Entonces afirmamos que Da es casi-nihilpotente, es decir, $r(Da)=0$

En efecto: Como A es de potencias asociativas:

$a^{\cdot n+1}=(a^n a + a a^n)/2=a.a^n=a.a^{\cdot n}$

Es decir, A^+ es de potencias asociativas y $a^n=a^{\cdot n}$

Como $D^2 a=0$, por el lema anterior (ii) $D^n(a^{\cdot n})=n!(Da)^{\cdot n}$ de donde resulta:

$\|(Da)^{\cdot n}\| \leq 1/n! \| D^n(a^{\cdot n}) \| \leq 1/n! \| D\|^n \|a\|^n$

$\|(Da)^{\cdot n}\|^{1/n} \leq (n!)^{-n}\|D\| \|a\| \to 0$ (cuando $n\to\infty$)

Por lo tanto: $r(Da)=0$

4.3 <u>Corolario (Kleineke-Shirokov):</u> Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra flexible de potencias asociativas, normada con unidad y sean $a,b\in A$ tales que: $[a, [a,b]] =0$

Entonces $r([a,b])=0$

<u>Demostración:</u> Por I.3.3, $2L_a^- = [a,.]$ es derivación en A^+ evidentemente continua, y $[a, [a,b]] =0$ nos sitúa en las hipótesis del lema anterior.

4.4 <u>Teorema de Rodríguez Palacios: (80)</u> Sea A una V*-álgebra conmutativa, entonces A es un álgebra de Jordan.

<u>Demostración:</u> Por 3.13 se tiene:

(α) $[L_a,L_b]\in D(A)$ $(a,b\in A)$ (D(A): derivaciones de A)

De donde resulta para <u>a</u> fijo:

$[L_a,L_b](a^2)=(b,a^2,a)=2a(b,a,a)$ que implica

$-L_a{}^3 + L_a L_a{}^2=2L_a(L_a^2 -L_a{}^2)$ de donde:

(β) $-L_a{}^3 =2L_a^3 - 3L_a L_a{}^2$

Si en el lema 4.1.(i) hacemos n=3 y hacemos uso de (β) se tiene:

$D(a^4)=4(L_a L_a{}^2)(Da)$

Por otro lado $D(a^2.a^2)=2a^2D(a^2)=4La^2La(Da)$

De donde resulta que:

$D(a^4-a^2a^2)=D(a^2,a,a)=4\ [La,La^2](Da)$

$(\gamma)\ D(a^2,a,a)=4(a^2,Da,a)$

Haciendo en (γ) $D=[La,La^2]$ resulta:

$3D^2(a)=0 \Rightarrow D^2(a)=0$

Teniendo en cuenta I.1.27(ii) se tiene:

$$[D,[D,L_a]]=L_{D(a)}^2=0$$

Y por 4.3 que: $\quad r([D,L_a])=0=r([[L_a,L_{a^2}],L_a])\quad (\delta)$

Si $a\in H(A)$ $\quad a^2\in H(A)$, de donde $L_a, L_{a^2}\in H(BL(A))$

por 2.23(i) $i[L_a,L_{a^2}]$ y $-[L_a,[L_a,L_{a^2}]]\in H(BL(A))$

por 2.20 (Sinclair) $r([L_a,[L_a,L_{a^2}]])=\|[L_a,[L_a,L_{a^2}]]\|$

Y aplicando (δ) se tiene que

$$[L_a,[L_a,L_{a^2}]]=0$$

Aplicando otra vez 4.3 (Kleineke), 2.20 (Sinclair)

$$[L_a,L_{a^2}]=0 \qquad a\in H(A)$$

Es decir, hemos probado que $H(A)$ es un álgebra de Jordán real. El resto es sencillo pues A es la complexificación algebraica de $H(A)$ que por II.6.5 es de Jordan.

Q.C.D

4.5 <u>Teorema</u>: Sea A una V^*-álgebra, entonces A es de Jordan no conmutativa.

En efecto: por 3.12 $2\bar{L}_a=L_a-R_a$ es derivación en A^+, por I.3.3 A es flexible, por el teorema anterior A^+ es de

Jordan, por I.4.2.(v) A es de Jordan n.c.

El teorema siguiente relaciona los resultados de este apartado con los obtenidos en el anterior.

4.6 <u>Teorema</u>: Sea A una V-álgebra, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) A es una V^*-álgebra

(ii) A es de Jordan n.c.

(iii) A^+ es de Jordan

(iv) A^+ es V^*-álgebra.

Demostración:

(i)$\Rightarrow$(ii) por el teorema anterior

(ii)$\Rightarrow$(iii) I.4.2.(v)

(iii)$\Rightarrow$(iv) 3.5

(iv)$\Rightarrow$(i) 2.27(ii) y 1.13(ii)

<u>Observación</u>: A primera vista parece que la condición de V^*-álgebra suministra más identidades que las álgebras de Jordan n.c. puesto que del corolario 3.11 se deduce fácilmente que si: $T\in \mathcal{L}(A)$ ($\mathcal{L}(A)$ el álgebra de Lie de multiplicación de A introducida en I.1.26.(iii)), es tal que $T(e)=0$, entonces $T\in D(A^+)$; lo que automáticamente se traduce en una identidad en A. Afortunadamente el teorema siguiente aclara la situación.

4.7 <u>Teorema</u>: Sea A una K-álgebra flexible con unidad tal que:

(α_1) $[L_a, R_b]\in D(A^+)$ $(a,b\in A)$

Entonces:

(β_1) $(T\in \mathcal{L}(A)$ y $T(e)=0) \Rightarrow T\in D(A^+)$

Demostración: En I.4.4 se vio que en un álgebra flexible:

$[L_a,R_b] = [L^+_a,L^+_b] - [L^-_a,L^-_b]$ de donde se deduce que (α) es equivalente a:

(α_1') $[L^+_a,L^+_b] \in D(A^+)$ $(a,b\in A)$

Sea $D'=D(A^+)\cap \mathcal{L}(A)$ y $L^+A= \{L^+_a: a\in A\}$

veamos que: $\mathcal{L}(A)=D'+L^+_A$ (γ_1)

Es claro que $D'+L^+_A$ es una variedad lineal de $\mathcal{L}(A)$.

Sean $D_1,D_2 \in D'$ y $a,b\in A$; entonces:

$$[D_1+L^+_a; D_2+L^+_b] = [D_1;D_2]+[L^+_a,L^+_b]+[D_1,L^+_a]+[L^+_b,D_2]=$$
$$=[D_1;D_2]+[L^+_a,L^+_b]+L^+_D(a)-D(b)\in D'+L^+_A$$

en el paso anterior hemos tenido en cuenta I.1.27.(iii), I.1.28 y (α_1'). Así hemos probado que $D'+L^+_A$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(A)$.

Como $R_a=L^+_a+L^-_a$; $L_a=L^+-L^-_a$ y A es flexible se tiene que L_a y $R_a\in D'+L^+_A$ y como por definición $\mathcal{L}(A)$ es la mínima subálgebra de $L(A)^-$ que contiene L_A+R_A se deduce (γ_1)

Finalmente sea $T\in\mathcal{L}(A)$ tal que $T(e)=0$.

Por (γ_1) $T=D+L^+_a$, $D\in D(A^+)$

$T(e)=0 \Rightarrow D(e)+a=0 \Rightarrow a=0$ c.q.d.

4.8 Corolario: Sea A una K-álgebra de Jordan n.c. con unidad, entonces para cada $T\in\mathcal{L}(A)$ tal que $T(e)=0$ se tiene que T es una derivación en A^+, (J-derivación).

En efecto: I.4.4 y el teorema anterior.

Nota: Estos dos últimos resultados plantean dos cuestiones interesantes:

1º) Caracterización de los $T\in\mathcal{L}(A)$, $T(e)=0$ y que sean autén ticas derivaciones. Es decir, en el lenguaje de (99), se trata de caracterizar las derivaciones interiores de A. Se sabe (99) que si A es de Jordan entonces sus derivaciones son:

$T = \sum [L_{a_i}, L_{b_i}] \quad (a_i, b_i \in A)$

y si A es alternativa éstas son de la forma:

$D = \sum D_{a_i, b_i} \quad (a_i, b_i \in A)$

y $D_{a,b} = [L_a, L_b] + [R_a, R_b] + [L_a, R_b]$

2º) ¿Son las álgebras del teorema 4.7 de Jordan n.c.? Si no fuese así, que es lo más probable, sería deseable un estudio de las álgebras conmutativas que verifican la condición $[L_a, L_b]$ es derivación. Hagamos notar que Osborn en (73) demuestra que:

$(\alpha) \quad L_{a^3} = 3L_a L_{a^2} - 2L_a^3$

es independiente de la conmutatividad, y el mismo Osborn en un artículo que no hemos podido localizar todavía, estudia las álgebras conmutativas que verifican (α). En 4.4 vimos que (α_1): $[L_a, L_b] \in D(A)$ $(a,b \in A)$ implica (α).

5.- TEOREMA DE VIDAV-PALMER PARA ALGEBRAS ALTERNATIVAS

5.1 **Definición:** Sea X un K-espacio vectorial ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y S un subconjunto convexo de X. Un punto $a \in S$ se llama un punto extremal si: $(a = \alpha x + (1-\alpha)y \quad 0 < \alpha < 1; \quad x,y \in S) \Rightarrow \quad a = x = y$

Es fácil deducir que la condición anterior es equivalente a que $(a = 1/2(x+y), \ x,y \in S) \Rightarrow \quad x = y = a$

5.2 **Lema:** Sea A una C-álgebra de Banach unital, entonces la unidad e, del álgebra es extremal en $B_1(A)$.

Demostración: (12,P.38)

5.3 Proposición: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa unital vas, entonces la unidad, e, de A es extremal en la bola unidad cerrada, $B_1(A)$, de A.

En efecto: Supongamos $e=1/2(a+b)$ $a,b \in B_1(A)$, entonces $L_e = 1/2(L_a + L_b) \Rightarrow I = 1/2(L_a + L_b)$ es claro que $\|L_a\| \leq 1$ y $\|L_b\| \leq 1 \Rightarrow L_a = L_b = I \Rightarrow a = b = e$

5.4 Definición: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa unital, diremos que $a \in A$ es positivo síi: $V(a,A) \subseteq \mathbb{R}_+$

Al conjunto de los elementos positivos de A lo notaremos Pos(A). Es claro que pos(A) $\subseteq$ H(A).

5.5 Proposición: Sea A como en 5.4, entonces:

(i) Pos(A) es un cono real convexo, cerrado de H(A) y $\mathrm{Pos}(A) \cap (-\mathrm{Pos}(A)) = 0$

(ii) La relación $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in \mathrm{Pos}(A)$ es una relación de orden parcial en A compatible con la estructura de espacio de Banach de A (99).

Demostración:

(i) (12;P.49) ó (55)

(ii) Es un resultado clásico (99) ó (11)

5.6 Lema: Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra de Jordan n.c. normada completa unital, entonces:

$$a \in \mathrm{Pos}(A) \Leftrightarrow a \in H(A) \text{ y } Sp(a) \subseteq \mathbb{R}_+$$

En efecto: (55)

5.7 Lema: Sea A una B^*-álgebra y sea $h \in \mathrm{Pos}(A)$, entonces existe un elemento positivo $u \in \overline{\mathbb{C}[h]}$ tal que $u^2=h$. A un elemento tal, lo designaremos por $\sqrt{u}$

Demostración: (14;P.207)

5.9 <u>Teorema</u>: Sea A una V^*-álgebra, X el espacio de Banach de las aplicaciones bilineales continuas y simétricas de A x A en A. Sea $B_1(X)$ la bola unidad cerrada de X. Entonces el producto de A^+, que es de Jordan, es un punto extremal de $B_1(X)$.

<u>Demostración</u>: denotaremos por f_0 el producto de A , es decir, $f_0(x,y)=x.y$

Supongamos $f,g \in B_1(X)$ tales que $f_0=1/2(f+g)$ y sea $a \in A$, unitario: $a^*=a^{-1}$

Entonces resulta que:

$$e=f_0(a,a^*)=1/2(f(a,a^*)+g(a,a^*))$$

pero es claro que $\|f(a,a^*)\| \leq 1$ y $\|g(a,a^*)\| \leq 1$. De donde por 5.3 $f(a,a^*)=g(a,a^*)=f_0(a,a^*)=e$.

Por otra parte,

$a^2=f_0(a,a)=1/2(f(a,a)+g(a,a))$ multiplicando por a^{*2} se tiene

$$e=1/2(a^{*2}f(a,a)+a^{*2}g(a,a))=1/2a^*(a^*f(a,a)+a^*g(a,a))$$

$$a^{*2}f(a,a)=a^*(a^*f(a,a))=a^{*2}g(a,a)=a^*(a^*g(a,a))=e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{a^*}(f(a,a))=U_{a^*}(g(a,a))=e.$$

Teniendo en cuenta que $U_{a^{-1}}=U_a^{-1}$, de lo anterior resulta que $f(a,a)=g(a,a)=U_a(e)=a^2=f_0(a,a)$.

Sea ahora $b \in H(A)$, $\|b\| \leq 1$, entonces $\overline{\mathbb{C}(b^2)}$ es de Banach y autoadjunta, por 2.20 es B^*-álgebra; $e-b^2 \in \overline{\mathbb{C}(b^2)}$ por II.4.9, $Sp(e-b^2)=\{1-z^2 : z \in Sp(b)\} \subset \mathbb{R}_+$

Por el lema anterior existe $\sqrt{e-b^2} \in \overline{C(b^2)}$. Sea $a=b+i\sqrt{e-b^2}$ es claro que a es unitario y $b=1/2(a+a^*)$. Así obtenemos:

$f(b,b)=1/\ (f(a,a)+f(a^*,a^*)+f(a,a^*)+f(a^*,a))=$

$=1/2(a^2+a^{*2}+2e)=b^2=f_0(b,b)$. Como la hipótesis $\|b\|\leq 1$ es inesencial, por simetría se deduce que $f(a,b)=g(a,b)=f_0(a,b)$ $(a,b \in H(A))$ y finalmente:

$f(a_1+ia_2;b_1+ib_2)=f(a_1,a_2)-f(b_1,b_2)+i(f(a_1,b_2)+f(a_2,b_1))=$

$=f_0(a_1+ia_2;b_1+ib_2)$ completa la demostración.

<u>Notación</u>: Sea $f: A \times A \longrightarrow A$ bilineal, notaremos por f^T la reversa de f, es decir, $f^T(a,b)=f(b,a)$

5.10 <u>Corolario</u>: Sea A como en el teorema anterior y sean $f,g: A \times A \to A$ bilineales continuas y tales que $\|f\|\leq 1$ y $\|g\|\leq 1$.

Si $f_0=1/2(f+g)$, entonces $f^T=g$ y (A,f) es una V^*-álgebra con igual norma y unidad que A.

<u>En efecto</u>: f_0 es conmutativa $f_0=1/2(f+g)^T$ luego: $f_0=1/2(1/2(f+f^T)+1/2(g+g^T))$, pero $1/2(f+f^T)$ y $1/2(g+g^T)$ son simètricas y pertenecen a $B_1(X)$, luego $f+f^T=g+g^T=2f_0 \Rightarrow f^T=g$

El resto esconsecuencia de $I=1/2(L_e^f+R_e^f)$ y 5.2.

5.11 <u>Teorema</u>: Si en una V-álgebra A, la involución lineal natural es isométrica, entonces A es V^*-álgebra.

<u>Demostración</u>: Sabemos que $*$ es multiplicativa respecto del producto corchete 2.27:

$[a,b]^*=[b^*,a^*] \Leftrightarrow (ab)^*-(ba)^*=b^*a^*-a^*b^* \Leftrightarrow ab-ba=$

$=(b^*a^*)^*-(a^*b^*)^* \Leftrightarrow ab+(a^*b^*)^*=ba+(b^*a^*)^*$

Definimos entonces: $a \times b=1/2(ab+(a^*b^*)^*)$

Es claro que x es bilineal, conmutativo, con la misma unidad que el producto inicial de A;

$$(a \times b)^* = 1/2((ab)^* + a^* b^*) = a^* \times b^*$$

y $\| a \times b \| \leq 1/2(\|ab\| + \|(a^* b^*)^*\|) = 1/2(\|ab\| + \|a^* b^*\|) \leq \|a\|\|b\|$

de donde (A, x) es una V^*-álgebra conmutativa.

Haciendo $f(a,b)=ab$ y $g(a,b)=(a^* b^*)^*$ y teniendo en cuenta el corolario anterior resulta:

$f(a,b)=g^T(a,b)$ $\quad ab=(b^* a^*)^*$ de donde $(ab)^* = b^* a^*$ c.q.d.

5.12 <u>**Definición:**</u> LLamaremos álgebra de Gelfand-Naimark ó B^*-álgebra no asociativa, abreviadamente G.N-álgebra ó B^*-álgebra n.a. una $\mathbb{C}$-álgebra normada completa con unidad y con involución tal que

$$(G.N.) \quad \| xx^* \| = \|x\|^2 \qquad (x \in A) \qquad e=e^*$$

5.13 <u>Teorema</u>: Sea A una B^*-álgebra n.a., entonces A es una V^*-álgebra cuya involución natural coincide con la original de A.

En efecto: Veamos primero que $*$ es isométrica

$\|xx^*\| = \|x\|^2$ y $\|xx^*\| \leq \|x\| \, \|x^*\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\|$

intercambiando el papel de x y x^* se obtiene $\|x^*\| \leq \|x\|$

de donde $\|x^*\| = \|x\|$ y de $\|e^2\| = \|e\|^2 \Rightarrow \|e\| = 1$

Por otro lado, si $x \in \text{Sim}A$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha > 0$ se tiene:

$\|e + i\alpha x\|^2 = \|(e + i\alpha x)(e - i\alpha x)\| = \|e + \alpha^2 x^2\|$; de donde

$$\lim_{\alpha \to 0^+} 1/\alpha \, \{ \| e + i\alpha x\| - 1 \} = \lim_{\alpha \to 0^+} 1/\alpha \, \{ \| e + \alpha^2 x^2 \|^{1/2} - 1 \} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \alpha \left\{ \frac{\| e + \alpha^2 x^2 \|^{1/2} - 1}{\alpha^2} \right\} = 0$$

de donde por 2.20(ii) $a \in H(A)$, luego $\text{Sim}(A) \subset H(A)$ y 1.4 completa la demostración.

5.14 <u>Teorema</u>: (Vidav-Palmer alternativo) Sea A una $\mathbb{C}$-álgebra alternativa normada completa unital, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) A es una G.N.-álgebra

(ii) A es una V^*-álgebra

(iii) A es una V-álgebra.

<u>Demostración</u>:

(i)$\Rightarrow$(ii) por el teorema anterior.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) evidente

(iii)$\Rightarrow$(i) Sea $a \in A$, por el teorema de Artin I.5.2(iii), $\overline{\mathbb{C}[a,a^*]}$ es una subálgebra asociativa autoadjunta y cerrada, por 2.20 es una B^*-álgebra y por lo tanto $\|aa^*\| = \|a\|^2$ c.q.d

Este teorema nos hizo dudar sobre la existencia de V-álgebras alternativas no asociativas. Dedicaremos el próximo y último apartado de este capítulo a mostrar un ejemplo de una V-álgebra alternativa no asociativa.

6.- UNA V-ALGEBRA ALTERNATIVA NO ASOCIATIVA

6.1 Sea A= $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ el álgebra de los octoniones complejos de Cayley. Su construcción se haría igual que $\mathbb{O}(\mathbb{R})$ III.4.2. Sea $e_0, e_1, \ldots e_7$ su base canónica.

Para cada $a \in \mathbb{O}(\mathbb{C})$, $a = \sum_0^7 z_i e_i$ $z_i \in \mathbb{C}$ definimos:

$$a^* = \bar{z}_0 e_0 - \sum_1^7 \bar{z}_i e_i \qquad (\alpha)$$

Es de comprobación inmediata que $*$ es una involución en $\mathbb{O}(\mathbb{C})$. Obsérvese que $*$ es la composición de $(a \mapsto z_0 e_0 - \sum_1^7 z_i e_i)$ y el automorfismo antilineal ($a \longmapsto \bar{z}_0 e_0 + \sum_1^7 \bar{z}_i e_i$).

Sea U el conjunto de los elementos unitarios de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$

$$U = \{ x \in \mathbb{O}(\mathbb{C}) : \ x^* = x^{-1} \}$$

7.2 <u>Proposición:</u> El conjunto U de los elementos unitarios de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ respecto de la involución (α), es: (i) un sublazo de inv(A), (ii) genera linealmente $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ y (iii) es acotado respecto de cualquier norma sobre $\mathbb{O}(\mathbb{C})$.

En efecto: (i) y (ii) se deducen de 1.20 y 1.24. Veamos (iii). Sea $\|a\| = \left(\sum_{i=0}^7 |z_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_0^7 \bar{z}_i z_i\right)^{1/2}$, la norma hilbertiana de $\mathbb{C}^8$.

Sea $u \in U$ $u = \sum_0^7 z_i e_i$ entonces:

$$u^{-1} = u^* \Rightarrow 1/N(u)(z_0 e_0 - \sum_1^7 z_i e_i) = \bar{z}_0 e_0 - \sum_1^7 \bar{z}_i e_i \quad , \left(N(u) = \sum_0^7 z_i^2\right)$$

de donde se deduce:

$$z_j / \sum_0^7 z_i^2 = \bar{z}_j \Rightarrow (\beta) \ z_j/\bar{z}_j = \sum_0^7 z_i^2 \qquad j=0,\dots,7$$

$$\text{Si} \quad z_j = |z_j| \ e^{i\varphi_j}$$

$(\beta) \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1 = \dots = \varphi_7 = 1/2\,\varphi$; siendo φ tal que:

$\sum z_i^2 = \left|\sum^7 z_i^2\right| e^{i\varphi}$. Es decir, se tiene que:

$\sum z_i^2 = (\sum |z_i|^2) e^{i\varphi}$ de donde:

$\sum |z_i|^2 = \sum z_i \bar{z}_i = |\sum z_i^2| = 1$

Por lo tanto $\|u\| = 1$ $(u \in U)$

7.3 Sea $W = |c_0|\,U$ la envolvente convexo equilibrada de U,

$$W = \{ a \in A: \ a = \sum t_i u_i ; \ u_i \in U; \ \sum |t_i| \leq 1; \ t_i \in \mathbb{C} \}$$

7.4 <u>Proposición:</u> W es un grupoide convexo equilibrado absorvente y acotado de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$.

En efecto: $a, b \in W$ $a = \sum_0^7 t_i u_i$ $b = \sum_0^7 t'_j v_j$, $u_i, v_j \in U$

$\sum |t_i| \leq 1$ $\sum |t'_j| \leq 1$; se tiene:

$ab = (\sum t_i u_i)(\sum t'_j v_j) = \sum_{i,j} t_i t'_j u_i v_j$

Por 7.2 $u_i v_j \in U$, por otra parte:

$\sum_{i,j} |t_i t'_j| = \sum_{i,j} |t_i|\,|t_j| = (\sum |t_i|)(\sum |t_j|) \leq 1$

Luego a, $b \in W$. El resto es obvio.

Sea p_W el funcional de Minkowski de W.

7.5 Teorema: El funcional de Minkowski de la envolvente convexo equilibrada del conjunto de los elementos unitarios de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ es una norma de álgebra en $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ y $\{\mathbb{O}(\mathbb{C}), p_W, *, e_o\}$ es una V-álgebra.

Demostración: Es fácil demostrar que p_W es una norma submultiplicativa y unital (14;P.3; prop. 9). Para demostrar la última parte es suficiente demostrar que todo elemento $*$-simétrico es hermitiano.

Sea $a \in Sim(A)$, entonces la continuidad de $*$ (lineal y A de dimensión finita) implica $(e^{i\alpha a})^* = e^{-i\alpha a}$ $(\alpha \in R)$

Pero $e^{-i\alpha a} = (e^{i\alpha a})^{-1}$ de donde $e^{i\alpha a}$ es unitario. Como $e^{i\alpha a}$ y $e^{-i\alpha a} \in U$ $p_W(e^{i\alpha a}) \leq 1$ y $p_W(e^{-i a}) \leq 1$.

Por otra parte $1 = p_W(e^{i\alpha a}\, e^{-i\alpha a}) \leq p_W(e^{i\alpha a}) p_W(e^{-i\alpha a})) = 1$

$p_W(e^{i\alpha a}) = p_W(e^{-i\alpha a}) = 1$ $(\alpha \in R)$

Por 2.19 (iii) $(a \in H(A)) \Rightarrow Sim(A) \subset H(A)$ por 1.4 $Sim(A) = H(A)$ y A es una V-álgebra.

Cuestión abierta: ¿Es toda G.N.-álgebra, alternativa?

5.13 y 4.5 demuestran que es de Jordan n.c.

B I B L I O G R A F I A

(1) Albert,A.A.; Structure of algebras.
Amer, Math. Soc. Coll. Pub. Vol. XXIV (1939).

(2) Albert, A.A.; Absolute valued algebras.
Ann.of Math.,Vol.48, p.495-501, (1947).

(3) Albert, A.A.; Power- associative rings .
Trans. Amer. Math. Soc., T. 64, p.552-593. (1948).

(4) Albert, A.A.; Absolute-Valued algebraic algebras.
Bull. Amer. Math. Soc., T,55, p.763-768, (1949).

(5) Albert, A.A.; Anote of correction.
Bull. Amer. Math. Cos., V.55, p.1131, (1949).

(6) Albert, A.A.; On simple alternative rings.
Canad. J. Math., V 4, p. 129-135, (1952).

(7) Alfar,E.M.,Schultz and Stormer.; A Gelfand-Neu marck Theorem for Jordan algebras.
Prepint Series Matemask institut, Universitatet i Oslo., Mathematics nº 19 (1975).

(8) Almeida Costa, Antonio.; Cours d'algébre Général.
(Vol. I, II, III),Fundaçao Calouste Gulbenkian (1968)

(9) Ancochea, German.;On semi-automorfisms of division algebras. Ann. of Math., V.48, p. 147-154, (1947).

(10) Asano, Hiroshi.; On a class of non associative al gebra.
Yokohama Math. J., T. 20, p.143-149, (1972).

(11) Berberian, S.K.; Lectures in Functional Analysis and Operator Theory(Graduate Texts in Mathematics).
Springer- Verlag (1973).

(12) Bonsall,F.F., Duncan, J. ; Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.

London Math. Soc. Lecture Note Series, Tomo 2, Cambridge (1971).

(13) Bonsall,F.F., Duncan,J.; Numerical ranges II.

London Math. Soc. Lecture Note Series, Tomo 10, Cambridge (1971).

(14) Bonsall,F.F., Duncan,J.; Complete Normed Algebras.

Springer- Verlag (1973).

(15) N- Bourbaki.; Elements de Mathematique Algébre.

Chap. I- III, Hermann (1970).

(16) N- Bourbaki.; Topologie Générale.

Chap.1-4. Hermann (1971).

(17) N- Bourbaki.; Elements de Mathematique. Topologie Générale. Chap.5-10 .

(18) N- Bourbaki.; Espaces vectorielles topologiques .

Chap. III, IV, V. Hermann (1964).

(19) N- Bourbaki.; Espaces vectoriels topologiques.

Chap. 1 et 2. Hermann (1973).

(20) N- Bourbaki.; Théories Spectrales.

Chap. 1 et 2. Hermann (1967).

(21) Bott,R., and Milnor,J. On the parallelizability of the spheres.

Bull. Amer. Math. Soc. Tomo 64 -. 87-89. (1958).

(22) Brown.R.B. A new type of non associative algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. Tomo 50, p. 947-949. (1963).

(23) Braun,H. und Koecher, M. ; Jordan Algebren. Springer- Verlag (1966).

(24) Brown, B., and Mc Coy ,; Prime ideals of non asso ciative rings.
Trans. Amer. Math. Soc. , Vol 89, p.245-255. (1958).

(25) Brown,R.B.; On generalized Cayley- Dickson algebras. Pacific, J. Math. Vol.20, p.415- 422. (1967).

(26) Bruck, R.H. ; Some results in the theory of linear non associative algebras.
Trans. Amer. Math. Soc. Tomo 56, p.141-199, (1944).

(27) Bruck and Kleinfeld, E.; The structure of alterna tive division rings.
Proc. Amer. Math. Soc., p. 878-890. Tomo2, (1951)..

(28) Dieudonné, J.; Fundamentos de Análisis Moderno. Reverté, (1966).

(29) Dieudonné, J. ; Elements d'analyse 2. Gauthier- Villars, (1968).

(30) Dixmier, J.; Les C^*- algébres et leurs representa tions.
Gauthier- Villars, Paris (1969).

(31) Dugundji .; Topology (6ª edición)
Allyn and Bacon, (1960).

(32) E, Effros and E. Stormer.; Jordan algebras of self-adjoint operators.
Trans. Amer. Math. Soc. Tomo 127, p.313-316, (1967).

(33) Faulkner,J.R. ;The inner derivations of a Jordan algebre.
Bull. Amer. Math. Soc. Tomo 73,p. 208- 210, (1967).

(34) Herstein, I.N.; Topics in ring theory.
The University of Chicago Press, (1969).

(35) Hille,E. Phillips, R.S.; Fuuctional Analysis and semi- groups.
Colloquium publications, Vol 31. Amer. Math.Soc. (1957).

(36) Humm,M.H. and Keinfeld.; On free alternative rings.
J. of Combinatorial Theory, Tomo 2 p. 140-144,(1967).

(37) P. Jordan, J. von Newman, and E. Wigner.; An algebraic generalization of the quantum machanical formalism.
Ann. of Math. Tomo 35, p. 29-64, (1934).

(38) Jacobson, N.; Structure of alternative and Jordan bimodoles.
Osaka Math. J. Tomo 6, p.1-71, (1971).

(39) Jacobson,N. ; Lie Algebras.
Interscience Publishers, (1962).

(40) Jacobson, N. ; Structure of rings (Revised Edition)
Colloquium Publication, n 37. Amer. Math. Soc. (1968)

(41) Jacobson, N. ; Structure and representattions of Jordan algebras.
Amer. Math. Soc, Coll. Publ. Vol XXXIX (1969).

(42) R. Kadison.; Transformations of states in operator theory and dynamics.
Topology. Suppl. 2 p. 177- 198. (1967).

(43) I. Kaplansky.; Normed algebras.
Duke Math. J. Vol 16, p. 399- 418, (1949).

(44) I. Kaplansky. ; Infinite- dimensional quadratic forms admitting composition.
Pro. Amer. Math. Soc., Vol 4, P. 956-960.(1953).

(45) I. Kaplansky.; Fields and rings (second edition).
The University of Chicago Press, (1972).

(46) J.L. Kelley and R.L. Vaught.; The positive con in Banach algebras.
Trans. Amer. Math, Soc. Tomo 74 p.44-55, (1953).

(47) Kleinfeld, E. ; Simple alternative rings.
Ann. of Math. Vol 58 p. 544-547 (1953).

(48) Kleinfeld, E.; Right alternative rings.
Proc. Amer. Math. Soc., Tomo 4, p.939-944, (1953).

(49) Kleinfeld, E.; Primitive rings and semisimplicity.
Amer. J. Math. Vol.77, p. 725-730 (1955).

(50) Koecher von Max. ; Analysis in reellen Jordan Al gebren.
Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math.-Physike, Tomo IIa, p. 67-74 (1958).

(51) Kosier,F. , and Osborn,J.M.; Non associative alge bras satisfying identites of degree three.
Trans. Amer. Math. Soc.,Tomo 110,p.484-492, (1964)

(52) Kurosh,A.G.; General Algebra.
Chelsea Publishing Company, (1963).

(53) Larsen,R.; Functional Analysis.(an introduction).
Marcel Dekker, (1973).

(54) Lendley,J.D. , and Ritchie,R.N.; Conditions for the power associativity of algebras.
Pro. Amer. Math. Soc., Tomo 11, p. 399-405,(1960)

(55) Martinez Moreno, Juan.; Sobre algebras de Jordan normadas completas.
Tesis doctorales de la Universidadade Granada, nº 149, (1977).

(56) Mc Crimmon, K.; Norms and noncommutative Jordan algebras.
Pacific J. Math., Tomo 15 p. 925-956 (1965).

(57) Mc Crimmom, K.; A general theory of Jordan rings.
Proc. N.A.S., Vol 56, p. 1072- 1079. (1966).

(58) Mc Crimmon, K. ; Structure and representations of

non commutative Jordan algebras.
Trans. Amer. Math. Soc., Tomo 121,p. 187-199, (1966)..

(59) Mc Crimmon,K., and Schaefer, R.D.; On a class of non associative Jordan algebras.
Proc. Na . Acad. Sci. U.S.A., Tomo 56 p.1-4, (1966).

(60) Mc Crimmon.; Macdonald's Theorem with universes.
Pacific Journal of Mathematics, Vol21,2 p. 315-325, (1967).

(61) Mc Crimmon,K.; On Herstein's Theorem Relating Jordan and associative algebras.
Journal of Algebra, Tomo 13,p. 382-392, (1969).

(62) Mc Crimmon,K.; Nondegenerate Jordan Rings are von Neumann Regular.
Journal of Algebra, Tomo 11,p.111-115, (1969).

(63) Mc Crimmon,K.; The radical of a Jordan algebra.
Pro. N.A.S., Tomo 62, p. 671-678, (1969)

(64) Mc Crimmon,K.; Homotopies of alternative algebras.
Math. Ann., Tomo 191,p.253- 262, (1971).

(65) Mc Crimmon,K.; A characterization of the radical of a Jordan Algebra.
Journal of Algebra, Tomo 18, p. 103-111, (1971).

(66) Mc Crimmon,K.; Alternative Algebras Sa tisfying Polinomial Identities.

Journal of Algebra,Tomo 24,nº 2 (Feb 73),p.283-292. (1973).

(67) Naby-Sz Edited. Hilbert Space Operator and Operator Algebras.
Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyais, Budapest, (1972).

(68) Naimark , M.A.; Normed Algebras.
Wolters- Noordhoff Publishing, Groninngen,(1972)

(69) J.von Neumann.; On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism.
Mat. Sb. Tomol, p. 415-482, (1936).

(70) Oehmke R.H.; On flexible algebras.
Ann. of Math., Tomo 2,68, p.221-230, (1958).

(71) Oehmke,R.H., and Sadler,R.; The collineation groups of division plans.
Math. Tomo 216 p. 67-87, (1964).

(72) Osborn, J.M.; Quadratic Division algebras.
Trans. Amer. Mathe. Soc.,P. 202-221, (1962).

(73) Osborn, J.M.; Identities of nonassociative algebras.
Cand.J. Math., Tomo 17,p.78-92., (1965).

(74) G.K. Pedersen.; Monotone Closures in Operator algebras.
Amer. J. Math., Tomo 94, p.962-995, (1972).

(75) Paige, L.J.; A note on non commutative Jordan al

gebras.

Portugal Math. Vol.16,p. 115-118, (1957).

(76) Paige, J.L.; Jordan algebras.
M.A.A. Studies in Math., Tomo 2, p. 144-186,(1963).

(77) Renault, G.; Algébre non commutative.
Gauthier- Villars., (1975).

(78) Riesz,F. Nagy,B.S.Z.; Leçons d'Analyse Functionelle.
Gauthier- Villars.

(79) Rickart,C.E.; General Theory of Banach Algebras.
Princeton, (1960).

(80) Rodriguez Palacios.; Contribución a la teoria de las C*- algebras con unidad.
Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1974.

(81) Rodriguez Palacios, A. Derivationes en algebras normadas y conmutatividad.
Cuadernos del Departamento de Est. Mat., Tomo 2, Granada 1975, p.51-68.

(82) Rodriguez Palacios,A.; Algebras de Banach.
Curso de Doctorado 1975- 76. Universidad de Granada.

(83) Rodriguez Palacios, A.; Teorema de estructuras de los Jordan isomorfismos.
Aparecerà en Revista Hispano- Americana.

(84) Rodriguez Palacios, A. ; La continuidad del producto de Jordan,implica la continuidad del prodeucto

en el caso semiprimo.

Por aparecer.

(85) Rodriguez Palacios, A.; Rango numérico en álgebras normadas no asociativas.

Por aparecer.

(86) Ritchie, R.W.; A generalization of non-commutative Jordan algebras.

Proc. Amer. Math. Soc.,Vol. 10, p.926-930.(1959).

(87) Sagle, A.A.; Malcev algebras.

Trans. Amer. Math. Soc., Tomo 101,p.426-458,(1961).

(88) Sagle,A.A.; Simple Malcev algebras over fields of charasteristics 0.

Pacific J. Math.;Vol.12,p. 1057-1078, (1962).

(89) Sagle, A.A.; Simple algebras that generalize the Jordan algebra M_3^8.

Canad. J. Math., Vol18,p. 282-290, (1966).

(90) Sagle, A.A.; On anti- conmutative algebras and homogeneus spaaces.

J. Math. Mech., Vol 16,p. 1381-1393, (1967).

(91) Sakai,Shôichirô.; C^*- algebras y W^*- algebras. (1971).

(92) Schaeffer, H.H.; Topological vector spaces.

The Mac Millan Company, (1966).

(93) Schafer, R.D.; Representations of alternative algebras.

Trans. Amer. Math. Soc., Tomo 72, p. 1-17, (1952)

(94) Schafer, R.D. ; The Casimir operator for alterna tive algebras.
Proc. Amer. Math. Soc., Tomo 73, p.444-451,(1953)

(95) Schafer,R.D,; Non- conmutative Jordan algebras.
Proc. Amer. Math. Soc, p.472-475, Tomo6, (1955).

(96) Schafer, R.D.; On non conmutative Jordan Algebras.
Pro. Amer. Math. Soc. Tomo 9, P. 110-117, (1958).

(97) Schafer, R.D.; On cubic forms permitting a mew ty pe of composition.
J. Math. Mech., Tomo 10, p. 159-174, (1961).

(98) Shaefer,R.D.; On forms of degree n permitting composition.
J. Math. Mech., Tomo12, p. 777-792, (1963).

(99) Schaefer,J.D.; An introduction to nonassocia tive algebras.
Academic Press, (1966).

(100) Schafer,J.D.; Generalized standard algebras.
J. Algabra, Tomo 12, p. 386-417, (1969).

(101) Schwartz, Laurent.; Analyse; Topologie générale et analyse fonctionelle.
Hermann, 1970.

(102) Segal,I.E. Postulates for general quantum mechanics.
Ann.of Math, Tomo 48,p.930-948, (1947).

(103) Sherman, S.; On Segal's postulates for general quantum mechanics.
Ann. of Math., Tomo64,p.593-601, (1956).

(104) Slater, M.; Ideals in semiprime Alternative rings.
J. of Algebra, Tomo 8, p. 6o-76, (1968).

(105) Slater, M. ; alternative rings with D.C.C.,III.
J. of Algebra, Tomo 18, p. 179-200, (1971).

(106) Smily, M.F.; The radical of an alternative algebra.
Ann. of Math. Vol 49, p. 702-709, (1948).

(107) Smily,M.F.; Applications of a radical of Brown and Mc Coy to non associative rings.
Amer. J. Math., Tomo 72,p.93-100, (1950).

(108) Smily,M.F.;Some Questions concerning alternative rings.
Pro. Amer. Math. Soc., Tomo 57,p.36-43, (1951).

(109) Smily, M.F.; Jordan homomorfims and right alter native rings.
Pro. Amer. Math. Soc.,Tomo 8,p.668-671, (1957).

(110) Stormer, E.; Jordan algebras of type I.
Acta Math., Tomo 115,p. 165-184,(1966)

(111) Stormer,E.; Irreducible Jordan algebras of self adjoint operators.
Trans. Amer. Math= Soc., T. 130,p.153-166, (1968).

(112) Topping,D.; Jordan algebras of self adjoint operators.
Mem. Amer. Math. Soc., T. 53, (1965).

(113) Topping,D.; An isomorfism invariant for spin factors.
J. Math. Mech., T. 15, p. 1055-1064, (1966).

(114) Urbanick,K., and Wright, F.B.; Absolute valued algebras.
Proc. Amer. Math. Soc., T. 11, p. 861-866, (1960).

(115) Waelbroeck.; Topological Vectors Spaces and Algebras (Lectures notes in Mathematics, 230), Springer-Verlag, (1971).

(116) Edited, Williamson,J.H.; Algebras in Analysis.
Academic Press, (1975).

(117) Wright, F.B.; Absolute valued algebras.
Proc. Nat. Acad. Sci.,T.39, p.330-332, (1953).

(118) Zelzko,W.; Banach Algebras.
Elsevier, (1973).

BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

(119) Block R.E. ; Non commutative Jordan Algebras with commutators satisfying an alternativity condetion.
Proc.N.A.S. Vol.65,Nº 1, p.10-13, 1970.

(120) Civin P. and Yood B.;Lie and Jordan Structures in Banach algebras;Pacific J.Math.Vol.15,p.775-797,1965.

(121) Nieto J.I.;Gateaux Differentials in Banach Algebras.
Math.Z.139,p.23-34(1974).