Luis Rico, María C. Cañadas, Antonio Marín y M. Teresa Sánchez (Eds.)

Investigaciones en Didáctica de la Matemática

Homenaje a Moisés Coriat

Luis Rico
María C. Cañadas
Antonio Marín
María Teresa Sánchez
(Eds.)

INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Homenaje a Moisés Coriat

Bracho López, Rafael
Cañadas Santiago, María C.
Carrillo Yáñez, José
Castro Martínez, Encarnación
Castro Martínez, Enrique
Castro Rodríguez, Elena
Claros Mellado, F. Javier
Coriat Benarroch, Moisés
Del Río Cabeza, Aurora
Fernández Cano, Antonio
Fernández García, Francisco
Fernández Plaza, José A.
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Romero, Jesús
Genaro Belmonte, Emilio
Gómez Guzmán, Pedro
González Marí, José L.
Guerrero Hidalgo, Salvador
Gutiérrez Pérez, José
Lupiáñez Gómez, José L.
Marín del Moral, Antonio
Moreno Verdejo, Antonio
Ortega del Rincón, Tomás
Porres Tomé, Mario
Ramírez Uclés, Rafael
Rico Romero, Luis
Romero Albaladejo, Isabel
Ruiz López, Francisco
Sánchez Compaña, María Teresa
Sancho Gil, Juana María
Scaglia, Sara
Simó Gil, Nuria
Torralbo Rodríguez, Manuel

Granada, 2016

Colección «Didáctica de la Matemática»
Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Marín, A., Sánchez, M. T. (Eds.) (2016).
Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Moisés Coriat. Granada: Comares.

Editorial Comares, S.L.
Polígono Juncaril
C/ Baza, parcela 208
18220 • Albolote (Granada)
Tlf.: 958 465 382
http://www.editorialcomares.com • E-mail: libreriacomares@comares.com
https://www.facebook.com/Comares • https://twitter.com/comareseditor

ISBN: 978-84-9045-436-7 • Depósito legal: Gr. 979/2016

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

ÍNDICE

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ESTRATEGIAS DE IDENTIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN TAREAS DE CÁLCULO DE LÍMITES

Strategies related to the identification of graphs in limit calculation tasks

José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo se describen los argumentos utilizados por estudiantes de 1.º de Bachillerato para identificar la representación gráfica asociada al cálculo de límites que involucran identidades notables e indeterminaciones del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$. La fundamentación teórica se basa en la ruptura entre las habilidades algebraicas y analíticas en el pensamiento matemático avanzado manifestada en un estudio previo, el modelo de significado y su concreción para el concepto de límite finito de una función un punto y la noción de coherencia de un argumento. Los resultados más relevantes muestran que los estudiantes en general son capaces de emplear ricos argumentos, tanto infinitesimales, asintóticos, como generales para discriminar la gráfica de una función, los cuales se caracterizan además mediante tres niveles de coherencia.

Palabras clave: representaciones, coherencia argumentativa, gráficas, indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$.

ABSTRACT

In this work we describe the arguments employed by students in First year of Non-Compulsory Education to identify the graph associated to limit calculation involving notable equations and indeterminate form $\frac{\to 0}{\to 0}$. The theoretical background is based on the break between algebraic and analytic skills in Advanced Mathematical Thinking which is supported in a previous study; the model of meaning and the its concretion for the concept of finite limit of a function at a point; the notion of coherence of an argument. The more relevant results show that students are able in general to employ rich arguments, both infinitesimal, asymptotic and general ones, in order to discriminate the graph of a function. Such arguments are characterized by three levels of coherence.

Keywords: *representations, argumentative coherence, graphs, indeterminate form* $\frac{\to 0}{\to 0}$

Introducción

Investigaciones acerca de la didáctica del análisis muestran que las diferencias entre las habilidades algebraicas y las propias del análisis suponen una ruptura y una dificultad a la que los estudiantes se enfrentan (Artigue, 1995).

En una primera fase (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013), partiendo de tareas de cálculo de límites en las que aparecen fracciones algebraicas, se realizó un estudio previo consistente en observar qué estrategias siguen los alumnos, los errores en los que incurren al realizar el cálculo de límites, vía el tratamiento algebraico de la indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ presente en las mismas.

Este trabajo establece la continuidad del anterior en el que se pretende describir las argumentaciones de los escolares para seleccionar la gráfica de una lista de candidatas que representa la función, de la cual han calculado previamente el límite. Es importante notar que el mero cálculo del límite no será condición suficiente para seleccionar la gráfica, sino que han de apoyarse en otras características de la función y de las gráficas candidatas para elaborar la argumentación, que podrá incluir tanto elementos algebraicos como analíticos (Ortega y Pecharromán, 2014).

No solo interesa valorar la adecuación de la gráfica elegida, sino la consistencia interna de la argumentación empleada para apoyar la decisión, con independencia de la adecuación de la gráfica elegida por los escolares a la función objeto, que pretendemos describir en términos de coherencia.

Marco teórico

Incluimos en primer lugar un breve resumen de las estrategias que emplean los estudiantes para tratar las expresiones algebraicas y calcular los límites que extraemos de Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013). En relación con las estrategias algebraicas se constata que los estudiantes aplican exitosamente las igualdades notables para simplificar las fracciones algebraicas lo cual está relacionado con un uso adecuado del sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006; Vega-Castro, Molina y Castro, 2011, 2012). Por otro lado, los estudiantes aplican también la regla de Ruffini o la fórmula de resolución completa de la ecuación cuadrática, sin reflexionar sobre un tratamiento más eficiente de expresiones pre-factorizadas, tanto es así, que el procedimiento rutinario de Ruffini no conduce necesariamente a la interpretación adecuada de los coeficientes obtenidos. Por otro lado, en relación con las estrategias analíticas, se perciben errores tales como la aplicación errónea de la regla de L'Hôpital y el uso de inferencias inadecuadas del límite en un punto finito como si se calculara el límite en infinito.

En segundo lugar, nos apoyamos en Rico (2012, pp. 52-53) que considera que el significado de un concepto matemático viene definido por tres componentes. Cada componente se concretará para el concepto de límite finito de una función en un punto:

— La *estructura conceptual.* En el concepto de límite finito de una función en un punto se integran la estructura algebraica (operaciones con límites y tratamiento de indeterminaciones) y la estructura topológico-métrica (distancia entre aproximaciones del punto y de las imágenes respecto del límite)

— Los *sistemas de representación.* Dicho concepto viene expresado mediante diferentes sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Para este trabajo adquiere especial importancia la relación entre el tratamiento gráfico y simbólico del concepto de límite.

— Los *sentidos o modos de uso.* Sánchez-Compaña (2012) y Fernández-Plaza (2015) realizan un estudio acerca de los fenómenos que organiza el concepto de límite finito de una función en un punto. El primero, describe dos fenómenos a partir de la definición formal. El segundo, considera estos dos sentidos y los amplía a los que organizan las concepciones de los escolares acerca del concepto, a saber, dinámico, estático y de restricción. En este trabajo adquiere especial importancia indagar si los estudiantes consideran el *sentido estático o valor de la función* erróneamente considerando que calcular el límite es equivalente a evaluar la expresión en el punto.

En tercer lugar, definimos un constructo denominado *coherencia* mediante el cual queremos describir una determinada argumentación, considerada como una secuencia de propiedades enlazadas mediante los conectores lógicos usuales. Definimos tres tipos de coherencia para el trabajo que se presenta:

— *Coherencia plena o simplemente coherente*, si las propiedades identificadas por el estudiante discriminan unívocamente la gráfica respecto del resto.

— *Coherencia de 2º nivel,* si las propiedades identificadas por el estudiante reducen el campo de elección a dos opciones. En tal caso la discriminación adecuada entre ambas es implícita o debida al azar.

— *Incoherencia*, si las propiedades identificadas por el estudiante reducen el campo de posibilidades a más de dos opciones. En este caso, la identificación de la gráfica correcta podría ser debida al azar.

MÉTODO

El presente trabajo es de tipo exploratorio. La recogida de datos se realizó durante el mes de abril de 2013 en un Instituto de Enseñanza Secundaria, de un municipio de la provincia de Jaén. En total 27 sujetos que cursaban 1º de Bachillerato de diferentes modalidades fueron escogidos intencionalmente por la disponibilidad para participar en el estudio y por el nivel educativo que cursaban.

Se elaboró una prueba escrita de cuatro tareas con enunciados semejantes. En cada una de ellas aparece el cálculo de un límite en un punto de una función fracción algebraica. La estructura de todos estos límites corresponde a $L=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^n P_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}$

donde *n, m* son naturales mayores que 1 y P_1 y Q_1 son dos funciones polinómicas sin ceros en el punto $x = a$. El límite está determinado por los valores de *n* y *m*, es decir por los valores del exponente del binomio $x - a$. Los estudiantes habían recibido ya la instrucción ordinaria, limitando la intervención del profesor y de los investigadores a la aclaración de dudas. En Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013) se recogen los resultados y discusiones derivadas del desempeño de los estudiantes frente al cálculo de tales límites. La tabla 1 recoge los límites específicos organizados según la complejidad teórica y empírica establecida por la referida investigación.

Tabla 1. *Tareas de cálculo de límites ordenadas según su complejidad teórica y empírica*

	Tarea	*Límite*	*Exponentes*
3	$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(7x-2)(x+2)}{x^2-4}$	$L = 12$	$n - m = 0$
1	$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x^2-4x+4}$	$L = \pm\infty$	$n - m < 0$ impar
2	$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3-10x^2}{(x-2)(x^2+1)}$	$L = 4$	$n - m = 0$
4	$\lim_{x\to 2} \frac{(3x^2-12)}{(x-2)^3(2x^2+1)}$	$L = +\infty$	$n - m < 0$ par

Además de calcular el valor de esos límites, se les pidió que seleccionaran la gráfica más adecuada para cada función entre una propuesta de 6 gráficas alternativas (Figura 1). Los resultados del desempeño de los estudiantes frente a esta tarea es objeto específico del presente trabajo.

Las 6 gráficas se eligieron con el criterio de que compartieran un rasgo común, pero existieran elementos diferenciadores que presento a continuación.

— Las gráficas A y D son candidatas a representar las funciones 1 y 4 en un entorno de $x = 2$, salvo la discriminación de los límites laterales que hace de A la elección adecuada para la función 1 y D para la función 4.

— Las gráficas B y F son candidatas a representar la función 2 en un entorno de $x = 2$, sin embargo, B es la adecuada porque está definida en $x = -2$ y F no lo está.

— Finalmente, las gráficas C y E son candidatas a representar la función 3 en un entorno de $x = 2$, sin embargo, la gráfica C es la adecuada porque está indefinida en $x = -2$.

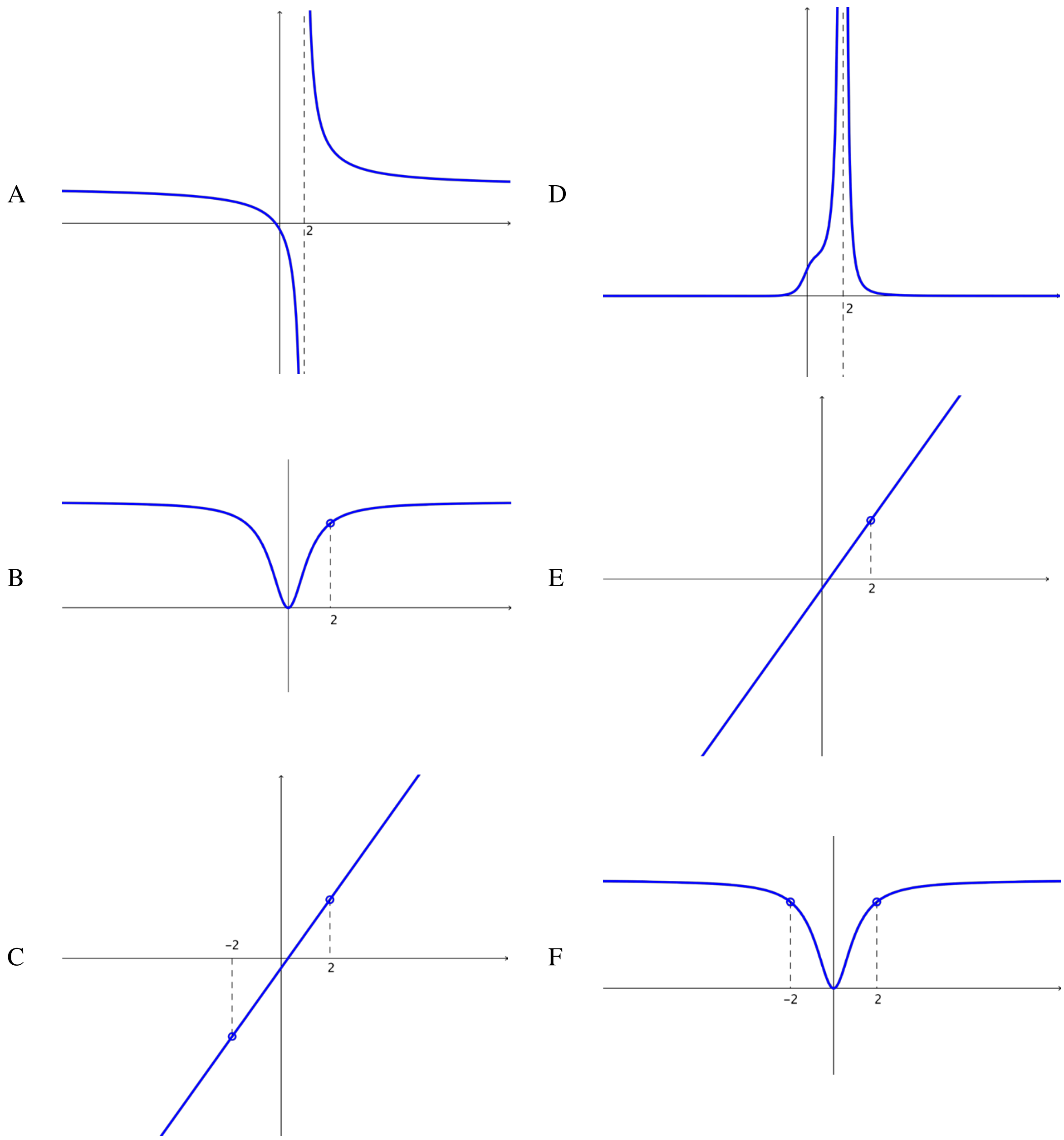

Figura 1. *Gráficas alternativas propuestas para su discusión*

Resultados y discusión

Codificación de los datos

Los argumentos empleados por los estudiantes para discriminar la gráfica que representa cada expresión funcional responden a combinaciones de los siguientes elementos argumentativos básicos:

Criterios infinitesimales y asintóticos

— Valor del límite finito en $x = 2$, si procede, en $x = -2$
— Valor del límite infinito en $x = 2$ (Asíntota vertical). Dentro de este elemento argumentativo algunos estudiantes discriminan los límites laterales
— Límite en infinito (Cálculo de asíntotas horizontales)

Criterios generales

— Cálculo del dominio de definición funcional
— Identificación de familia de funciones a partir de la expresión funcional simplificada
— Evaluación de la función en otros puntos del dominio
— Discriminación entre dos gráficas, resuelta mediante comparación del signo evaluando en dos puntos opuestos, o de los dominios de definición

La siguiente tabla 2 muestra la clasificación de las respuestas de los 27 estudiantes a las 4 tareas correspondientes discriminando la adecuación de la gráfica elegida, por un lado, y la coherencia de la argumentación asociada, por otro. La coherencia se clasifica en tres niveles, *coherencia*, *coherencia de 2º Nivel* e *incoherencia*. El total de elementos clasificados son 4×27=108 respuestas.

Se observa, en general, que cerca de la mitad de producciones están asociadas a gráficas correctas, de las cuales, 24 se han argumentado de forma coherente, pero una parte relevante presenta una coherencia de 2º nivel (14 de 45), siendo únicamente 7 las argumentaciones incoherentes que podrían relacionarse por elección al azar o por criterio implícito de la gráfica correcta.

Tabla 2. *Distribución general de las respuestas de los estudiantes a las 4 tareas*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	24	14	7	45
Gráfica incorrecta	6	10	15	31
NS/NC				32
Total	30	24	22	N=108

En relación con la cantidad de elecciones de gráficas incorrectas (31 de 108), la mitad de argumentos son incoherentes. De igual forma, similar proporción hay de argumentos coherentes de 2.º Nivel al dejar la elección en dos alternativas, por tanto, el error incurrido en elegir la gráfica incorrecta puede atribuirse a criterios argumentativos no explicitados o elección arbitraria. Sin embargo, es relevante la presencia de un número reducido de argumentaciones coherentes que conducen a la elección de la gráfica incorrecta, más por errores en el cálculo del límite asociado o su dominio, que por la estructura lógica adoptada.

A continuación particularizamos el análisis al desempeño de los 27 escolares con cada tarea específica 1, 2, 3 y 4.

Análisis específico de la tarea 1

La tabla 3 muestra el desempeño de los participantes frente a la tarea 1, cuya gráfica asociada es la A.

Tabla 3. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 1*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	10	6	3	19
Gráfica incorrecta	2	0	4	6
NS/NC				2
Total	12	6	7	N=27

Se observa que un 70% de las elecciones son adecuadas, de las cuales poco más de la mitad de las argumentaciones asociadas son coherentes. Los argumentos presentan similar estructura (Discriminación de los límites laterales infinitos con cálculo previo del dominio, e incluso establecimiento previo de las alternativas A y D, cuyas funciones simplificadas en un entorno de $x = 2$ presentan el mismo tipo de indeterminación $\frac{\to K}{\to 0}$ antes de decantarse por la adecuada). Por otro lado, los argumentos de 2º Nivel simplemente no llegan a discriminar entre A y D, enfatizando únicamente la existencia de asíntota vertical, pero no hay evidencia explícita de discriminación de los límites laterales. Finalmente, la presencia mínima de argumentos incoherentes parten de un límite finito en $x = 2$ calculado erróneamente, lo cual es incompatible con las características de las gráficas A y D escogidas. Otros calculan únicamente el dominio, lo cual deja demasiado amplio el campo de elección, por lo que tal argumento es incoherente.

En relación con asignaciones de gráficas erróneas, el número de respuestas que presentan coherencia argumentativa se basan en errores en cuanto a la discriminación de los límites laterales, pero la inferencia lógica resultante es coherente.

Análisis específico de la tarea 2

La tabla 4 resume el desempeño de los participantes frente a la tarea 2, cuya gráfica asociada es la B.

Tabla 4. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 2*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	4	3	4	11
Gráfica incorrecta	3	1	8	12
NS/NC				4
Total	7	4	12	N=27

Se observa que cerca de la mitad de las elecciones gráficas son adecuadas, de las cuales únicamente 4 se sostienen en argumentaciones coherentes que presentan una misma estructura salvo pequeños matices (cálculo del dominio, reconocimiento de la familia funcional [no afín] y valor del límite finito en $x = 2$). Las argumentaciones coherentes de 2º Nivel restringen la elección, bien a las gráficas B y F (Porque identifican la simetría de ambas gráficas), o a las gráficas B y E (porque $x = -2$ pertenece al dominio) que no resuelven.

En relación con las asignaciones de gráficas incorrectas, destacamos que más de la mitad presentan argumentaciones incoherentes, que sostienen únicamente la condición de límite finito en $x = 2$ ({B, C, E, F}) o seleccionan D como la que tiene límite finito en $x = 2$, pero con asíntota vertical en dicho punto. También es relevante notar que hay estudiantes que sostienen que ninguna de las gráficas es válida con una argumentación basada en que el límite finito en $x = 2$ ha de ser alcanzable («Ninguna de las gráficas está definida en $x = 2$» es un ejemplo de afirmación relacionada).

Análisis específico de la tarea 3

La tabla 5 resume el desempeño de los participantes frente a la tarea 3.

Para la tarea 3, cuya gráfica asociada es la C, casi la mitad de las respuestas están asociadas a elecciones incorrectas de la gráfica. La mayor parte están ligadas a argumentos coherentes de 2º Nivel. Algunos alumnos, que utilizan este tipo de argumentos, identifican la familia funcional y restringen la elección a dos alternativas (C o E), pero no la resuelven satisfactoriamente. Otra variedad de argumentos del mismo tipo se basan en el cálculo del dominio y del límite finito en $x = 2$, y en consecuencia, restringen la elección a F o C.

Tabla 5. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 3*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	5	1	0	6
Gráfica incorrecta	2	6	3	11
NS/NC				10
Total	7	7	3	N=27

En relación con los argumentos asociados a la elección de la gráfica correcta, C, la mayor parte son coherentes y siguen la estructura: Determinación del dominio, valor del límite finito en $x = 2$ e identificación de la familia funcional (afín). Únicamente hay un argumento de 2.º Nivel, que restringe la elección a las gráficas C y E mediante el cálculo del límite en infinito, pero no hay evidencias explícitas de resolución de la disyuntiva.

Análisis específico de la tarea 4

La Tabla 6 resume el desempeño de los participantes frente a la tarea 4, cuya gráfica asociada es la D. Se observa que un tercio de las respuestas están asociadas a elecciones correctas de las gráficas. La mitad de ellas corresponde respectivamente a argumentos coherentes y coherentes de 2º Nivel. Los argumentos coherentes que sostienen la elección de D presentan una componente lógica común, discriminación de los límites laterales en $x = 2$ que, por sí misma, marca la diferencia entre las gráficas A y D, si bien, algunos argumentos previamente hacen un cálculo del dominio de definición lo cual es accesorio.

Tabla 6. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 4*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	4	4	1	9
Gráfica incorrecta	0	1	1	2
NS/NC				16
Total	4	5	2	N=27

Por otro lado, los argumentos coherentes de 2º Nivel únicamente afirman la existencia de una asíntota vertical en $x = 2$, que restringen, pero no resuelven, la elección entre las gráficas A y D.

En relación con las elecciones erróneas de gráficas, existen dos casos: el primero sostiene con un argumento incoherente que la gráfica D es la única que en $x = 0$ la función no se anula, posiblemente debido a un efecto visual de las gráficas A, C y E que aparentemente muestran un valor nulo en $x = 0$; el segundo muestra un argumento de 2º nivel que se basa en la existencia una asíntota vertical, pero no discrimina adecuadamente los límites laterales decantándose por la gráfica A.

Conclusiones

Se concluye que hay una ruptura patente entre el pensamiento algebraico y el analítico dado que algunos estudiantes, a pesar de calcular el límite adecuadamente, son incapaces de aislar la gráfica que representa globalmente la función, para lo cual se requieren procedimientos algebraicos (evaluación y cálculo del dominio); algunas de las dificultades subyacentes pueden coincidir con las señaladas por Ortega y Pecharromán (2014). Por otro lado, algunas argumentaciones son coherentes, incurriendo en error en el cálculo del límite o del dominio funcional, es decir, el error no afecta al esquema lógico-argumentativo empleado.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). México, DF: Grupo Editorial Iberoamericano.

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. En J. Novotná, H. Maraová, M. Krátká y N. Stehlíkova (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Praga, República Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12*(2), 209-221.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 127-134). Granada, España: Editorial Comares.

Sánchez-Compaña, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real, España: SEIEM.

— (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime, 15*(2), 233-258.