Investigación en Educación Matemática

Homenaje a Luis Rico

Encarnación Castro, Enrique Castro, José Luis Lupiáñez,
Juan Francisco Ruiz y Manuel Torralbo (Eds.)

Encarnación Castro
Enrique Castro
José Luis Lupiáñez
Juan Francisco Ruiz
Manuel Torralbo
(Eds.)

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Homenaje a Luis Rico

Granada, 2016

Colección «Didáctica de la Matemática»
Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Este libro debe ser citado como:
Castro, E., Castro, E., Lupiáñez, J. L., Ruiz, J. F. y Torralbo, M. (Eds.) (2016).
Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico. Granada: Comares.

Editorial Comares, S.L.
Polígono Juncaril
C/ Baza, parcela 208
18220 • Albolote (Granada)
Tlf.: 958 465 382
http://www.editorialcomares.com • E-mail: libreriacomares@comares.com
https://www.facebook.com/Comares • https://twitter.com/comareseditor

ISBN: 978-84-9045-389-6 • Depósito legal: Gr. 93/2016

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

ÍNDICE

HISTORIA

PENSAMIENTO NUMÉRICO

PARADOJA DE LA DICOTOMÍA
UNA REVISIÓN DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Dichotomy Paradox. A Review from Mathematics Education

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y José Luis Lupiáñez
Universidad de Granada, España

Resumen

Las paradojas de Zenón han sido objeto de reflexión a lo largo de la historia por multitud de pensadores y, en particular, por muchos matemáticos. En este trabajo indagamos sobre la paradoja de la dicotomía, su historia, el papel que juega en la educación matemática actual y qué papel pueden jugar los modelos numéricos escolares en su interpretación.
Palabras clave: paradojas, dicotomía, Zenón, modelos numéricos

Abstract

Zeno's paradoxes have been the subject of reflection throughout history by many thinkers and, in particular, for many mathematicians. In this paper we reflect on the paradox of the dichotomy, its history, its role in the current mathematics education and what role that numerical models can play in interpreting it.
Keywords: *paradoxes, dichotomy, Zeno, numerical models*

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Lupiáñez, J. L. (2016). Paradoja de la Dicotomía. Una revisión desde la educación matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 253-262). Granada: Comares.

Introducción

> «No hay problemas en los fundamentos de las matemáticas que sean tan viejos y que despierten un interés tan perenne, alcanzando las más recientes conjeturas de la filosofía de las matemáticas, como son los argumentos de Zenón sobre el movimiento» (Cajori, 1915, pte. 1, p. 1).

Con estas palabras, Florian Cajori comienza una serie de 10 artículos dedicados a la historia de los argumentos sobre el movimiento de Zenón de Elea publicados en 1915 en la revista *The American Mathematical Monthly*. En ellos hace un recorrido histórico de más de 2000 años de reacciones, interpretaciones y explicaciones a las conocidas paradojas de Zenón de Elea sobre el movimiento.

En este trabajo ceñimos nuestra atención a la conocida como paradoja de la dicotomía y a la repercusión que ha tenido en los últimos años en la Educación Matemática. Para ello, en primer lugar, presentamos una introducción a la paradoja junto con unas breves notas históricas. Posteriormente, realizamos una revisión bibliográfica detallada de los trabajos recientes publicados sobre dicha paradoja que están relacionados con la educación matemática. Para terminar, hacemos una lectura de la paradoja mediante el uso de modelos matemáticos escolares.

Paradoja de la Dicotomía

No puedes recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Debes recorrer primeramente la mitad del todo, después la mitad de lo que te resta, y así sucesivamente. Por tanto, dado que hay un número infinito de distancias por recorrer, esto no se puede hacer en un tiempo finito.

A lo largo del desarrollo histórico de la matemática se han señalado épocas y personajes que con más o menos reservas, superaron los obstáculos sugeridos por esta paradoja. Una primera fase es la que se denomina negación de los infinitesimales. Demócrito es un referente de los matemáticos griegos que negaron los infinitesimales y adoptaron una perspectiva atomista de la materia y las magnitudes.

Un segundo momento, está protagonizado por Arquímedes. El método de exhausción diseñado para el cálculo de áreas, se basa en la conocida propiedad arquimediana de las magnitudes. Supone una ruptura preliminar con la paradoja de la Dicotomía.

San Agustín y Santo Tomás admiten la existencia del infinito actual al aceptar la existencia de puntos. Sin embargo, los puntos no constituyen la recta, dado que ésta sólo se compone de segmentos por división, pero sostienen que la recta puede ser un punto en movimiento. Bacon critica la existencia de indivisibles diferentes a puntos, porque todos ellos tendrían un tamaño uniforme que convertiría la diagonal de un cuadrado conmensurable respecto del lado.

En los siglos XV y XVI, Galileo percibe la existencia de infinitos del mismo tamaño que contradicen la afirmación euclídea «El todo es mayor que la parte», sin embargo, no profundiza en la existencia de infinitos de diferente tamaño. Bayle, en el siglo XVII, justifica que el tiempo no puede dividirse de manera infinita, pero sí admite la infinita divisibilidad del espacio.

Newton, en el siglo XVIII, es el máximo exponente en el desarrollo del cálculo infinitesimal, no obstante, su definición de límite de razones de infinitesimales, o como él las llamaba, «cantidades evanescentes», fue criticada por Berkeley por falta de precisión en lo que entraña el hecho de que el límite es a lo que se aproxima la razón de las cantidades «en proceso» de anularse, pero no en su justo momento. Newton sostiene además la alcanzabilidad del límite, pero no la posibilidad de rebasarse.

Con posterioridad, las ideas acerca de las cantidades y los indivisibles evolucionaron hasta la formalización de los números en el siglo XIX, en el que se desarrolla una teoría axiomática de los números naturales, enteros, racionales y reales. Por otro lado, la teoría de Cantor sobre los números transfinitos junto con la teoría de la medida de Lebesgue establecen la ruptura definitiva entre magnitud y cardinal.

Lectura dual y argumentos de Aristóteles

La paradoja tiene una lectura dual: *No puedes recorrer una cantidad de longitud dada porque primeramente has de recorrer la mitad, pero antes de este paso has de recorrer la mitad de ese recorrido, y así sucesivamente. Por tanto, dado que hay un número infinito de distancias a recorrer previas, ¿cuándo se inicia el movimiento?*

Se observa que las dos paradojas no pueden ser ciertas al mismo tiempo. Existen dos argumentos sugeridos por Aristóteles que resuelven en cierta medida la primera versión de la paradoja, si bien, incurren en la negación del infinito actual. El primero de ellos sostiene que el espacio y tiempo son divisibles infinitamente pero niega que estén compuestos por puntos (indivisibles), sino que únicamente están compuestos por segmentos. El segundo sostiene que a pesar de que el espacio y tiempo son divisibles infinitamente, si el tiempo fuera infinito, tendría una parte finita T. En dicha parte finita se ha de recorrer una parte de espacio finita S. La propiedad arquimediana permite afirmar que «manteniendo la velocidad constante» existe una reiteración finita de espacios de valor S, que se corresponden con la misma reiteración de tiempos T, tal que se supera cualquier espacio de longitud finita prefijada, luego ha de haber una parte de dicho tiempo en la que se ha recorrido exactamente el espacio prefijado. Sin embargo, este argumento contradice la infinita divisibilidad del tiempo, dado que el tiempo invertido en recorrer la diagonal de un cuadrado de lado S aunque finito es inconmensurable respecto del tiempo T, y posiblemente Aristóteles no admitiría partes inconmensurables con la unidad. Por otro lado, la versión dual de la paradoja no podría ser superada por Aristóteles debido a que no podría ser capaz de justificar la causa del movimiento, que es en definitiva lo que la paradoja dual de Zenón niega.

Revisión de la literatura existente

Con el objetivo de revisar la bibliografía, se realiza un análisis detenido en las bases de datos más conocidas y que proporcionen información de revistas especializadas en Educación matemática. Este tipo de estudios se pueden considerar descriptivos (Colás y Buendía, 1998). El análisis está basado en la búsqueda de términos clave en diferentes campos de búsqueda de las bases de datos para, posteriormente, realizar un análisis de contenido de los textos seleccionados.

Diseño de la búsqueda

La perspectiva conceptual de la búsqueda pretende ofrecer una visión general de las investigaciones sobre la paradoja de la dicotomía en revistas especializadas de educación matemática. La planificación recoge los siguientes aspectos que comienzan con la búsqueda de referencias en bases de datos: Se analizan exhaustivamente bases de datos sobre Ciencias Sociales, Educación y Educación Matemática, tanto nacionales como internacionales.

Seguidamente se determinan la población y muestra. Por acuerdo de los autores se seleccionan las bases de datos internacionales: Scopus, SSCI, ERIC (las tres de carácter general para Ciencias Sociales) y MathEduc (del área específica de Educación Matemática). Como bases de datos nacionales se consideran Dialnet e ISOC, ambas de carácter general.

Utilizando las herramientas de búsqueda de las bases de datos, se introdujeron los términos: Zenón, Zenón de Elea, Paradojas, Dicotomía y su equivalentes en inglés Zeno, Zeno of Elea, Paradoxes y Dichotomy. La búsqueda se realizó en diferentes campos de la herramienta de búsqueda: autor, título, resumen y palabras clave.

Los resultados se recogieron en una hoja de cálculo que contenía información sobre la base de datos en la que se había encontrado, el autor o autores, título, revista, disponibilidad (en línea, en papel o sin disponibilidad) y si eran trabajos específicos de educación matemática. Finalmente, la organización de resultados dio lugar a la selección de algunos de los trabajos.

Resultados de la búsqueda

La Tabla 1 resume el número de trabajos que se obtienen con los parámetros de búsqueda descritos en el epígrafe anterior.

Tabla 1. *Recuentos en la búsqueda de documentos (las palabras se usaron en español e inglés)*

Base de datos	*Zenón*	*Zenón+Paradoja* *Zenón + Dicotomía*	*Zenón+Paradoja+Dicotomía*
ERIC	25	**4**	0
Scopus	985	511	7
SSCI	1679	384	7
MathEduc	38	**18**	5
Dialnet	276	**12 inglés + 15 español**	0
ISOC	87	**2**	0

Algunos de los trabajos recogidos en la Tabla 1 se repiten en varias bases de datos. El total de trabajos que superan el primer filtro de repetición es de 51 (destacados en negrita en la Tabla 1). Estos trabajos se filtran por su contenido, seleccionando aquellos que tienen que ver con aspectos didácticos o de educación matemática. El resultado de este segundo filtro es 6 trabajos: Nuñez (1994), Peled y Hershkovitz (1999), De la Torre y Pérez (2000), Martínez (2001), Hong (2013) y Sprows (2015).

Descripción de los trabajos

De la Torre y Pérez (2000) diseñan una propuesta metodológica para el estudio de las magnitudes espacio y tiempo cuyo rendimiento se espera describir en términos de niveles de Van Hiele. El tránsito entre un nivel y otro se caracteriza mediante la superación de ciertas paradojas de Zenón o de otras paradojas relacionadas con las estructuras de las magnitudes espacio y tiempo.

Hong (2013) dedica una reflexión al tratamiento matemático y filosófico de la paradoja de Aquiles y la Tortuga. Critica en primer lugar que la aplicación inmediata de las propiedades del límite de series no resuelve la estructura que subyace en el razonamiento de Zenón, dado que la resolución de dicho límite no justifica la alcanzabilidad del mismo. Una segunda crítica es la suposición a priori de que la velocidad del atleta es doble de la de la tortuga lo cual permite resolver la paradoja de forma algebraica, en consecuencia, se obtiene el instante y distancia en la que Aquiles alcanza a la tortuga.

Martínez (2001) implementa la paradoja de Aquiles y la tortuga dentro de un contexto de resolución de problemas con estudiantes de secundaria y universidad. Identifica en los estudiantes la aplicación de estrategias algebraicas y analíticas para abordar la resolución de la paradoja.

Nuñez (1994) realiza una investigación acerca de la paradoja de la dicotomía con estudiantes de diferentes rangos de edad (8, 10, 12, 14 años). El alumnado de 8 años manifiesta una concepción finitista motivada por las limitaciones del espacio y la percepción. El alumnado de 10 años es consciente de la infinitud del proceso ideal, pero mantienen una postura finitista en la práctica, afirmando que el recorrido ha de completarse. En relación al alumnado de 12 y 14 años, no encuentra diferencias significativas.

Algunos estudiantes perciben que el resultado del proceso dependerá de la escala del problema (distancias grandes o cortas), manteniendo que en distancias grandes no se alcanzará el final y en distancias cortas sí se alcanzará. Otros estudiantes sostienen que jamás se completará el recorrido dado que siempre quedarán distancias por recorrer.

Peled y Hershkovitz (1999) investigan los modos en que los estudiantes relacionan una expresión decimal infinita con su representación en la recta real, en particular, observa que algunos estudiantes consideran que 0,333333… o $\sqrt{5}$ no pueden ser representados en la recta real, lo cual relaciona con la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga.

Sprows (2015) realiza un tratamiento de las paradojas de Zenón basadas en el sistema de numeración binario, pero encuentra cierta resistencia de los escolares a sustituir el sistema decimal por el binario en sus razonamientos.

Modelos numéricos en la matemática escolar

Desde la educación matemática planteamos la lectura de la paradoja de la dicotomía mediante el uso de modelos numéricos. Estos modelos corresponden con los conjuntos numéricos, pero a su vez están relacionados con la percepción de la realidad y la precisión de los instrumentos de medida. Así, agrupamos los modelos en tres clases:

1. *Modelo discreto*. Da respuesta al fenómeno de las mediciones de magnitudes en la práctica debido a que todo instrumento de medición tiene una precisión limitada, por tanto, genera medidas que tienen una cantidad finita n de cifras decimales. Se denota por D_n para cada n natural al conjunto de los decimales que tienen como máximo n cifras decimales. El conjunto de los números naturales equivale a D_0. Una regla graduada escolar tiene estructura D_3 (tomando como unidad de medida el metro), un cronómetro D_2 (tomando como unidad de medida el segundo). La *recta discreta* está formada segmentos de longitud mínima denominados *indivisibles* y la noción punto no se puede definir.

2. *Modelo denso (numerable)*. Entre los conjuntos numéricos que cumplen la propiedad de densidad, entre cualesquiera dos elementos hay otro elemento, el conjunto de los decimales que tienen una cantidad finita de cifras decimales es el menor de ellos que denotamos por D. Sin embargo, este conjunto no es cerrado para el límite de sucesiones. Una ampliación natural de D es el conjunto de los números racionales, considerando las expresiones decimales periódicas, pero aún así el conjunto de los números racionales no es cerrado para el paso al límite de sucesiones. La *recta racional* es el conjunto de segmentos conmensurables con el segmento unidad. Los segmentos únicamente se pueden descomponer en segmentos mediante división en partes iguales. Según Aristóteles este conjunto carece de elementos indivisibles dado que excluye el paso al límite. De un modo análogo, no se puede admitir la existencia de puntos en el modelo denso numerable. No obstante, en una representación gráfica no podemos percibir la diferencia entre la recta racional y la real.

3. *Modelo continuo*. Es el conjunto numérico que cumple con la condiciones de clausura para el paso al límite aparte de la característica de densidad, dotándolo de idoneidad para la modelización de los fenómenos físicos habituales. La *recta continua*

es la unión de todos los *puntos* que se obtienen como paso al límite de familias de segmentos racionales. Es la única que se puede afirmar de estar compuesta de puntos, en este caso los puntos se pueden considerar como *elementos primitivos*.

Modelizaciones del movimiento

Dotando a las magnitudes espacio y tiempo de alguna de estas tres estructuras definimos el movimiento como toda función que relaciona cada «elemento» de tiempo (instante o duración) con un «elemento» de espacio (posición o espacio recorrido), siendo el reposo la existencia de un intervalo de instantes o duraciones que le corresponde una misma posición. Cada uno de estos modelos provee al movimiento resultante de unas propiedades deducidas de manera lógica y que pueden, o no, contradecir la observación empírica del fenómeno real.

Movimiento discreto-discreto. Si modelamos espacio y tiempo de forma discreta, se puede deducir que existirá un único movimiento sin reposo a velocidad constante 1, dado que en cada indivisible de tiempo únicamente se puede recorrer un indivisible de espacio. De lo contrario, si existiera un indivisible de tiempo T en el que se recorren al menos dos indivisibles de espacio, el tiempo que se invierte en recorrer el primer indivisible de espacio es estrictamente menor que el que invierte en recorrer los dos, por lo tanto, contradice la indivisibilidad de T. La Figura 1 muestra que la relación gráfica entre espacio y tiempo se presenta por «bloques».

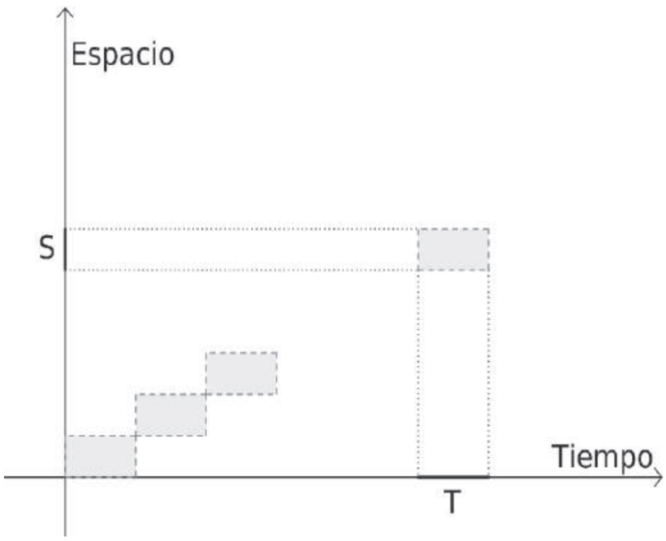

Figura 1. *Gráfica de la relación espacio-tiempo en un modelo discreto-discreto.*

Presentamos como ejemplo de movimiento discreto-discreto el «caballo de Muybridge». Los indivisibles de espacio (fotogramas captados) dependen de la velocidad máxima de obturación de la cámara, mientras que los indivisibles de tiempo (periodo entre fotogramas) dependen de la velocidad de reproducción.

Figura 2. *Serie de Fotografías del «Caballo de Muybridge».*

Para explicar la modelización de movimientos a diferente velocidad, tomemos como ejemplo el movimiento que se genera en la proyecciones cinematográficas del caballo de Muybridge. Supongamos que reproducimos a velocidad normal una cinta cinematográfica con 16 fotogramas. Si la velocidad de proyección es fija, la forma de ralentizar el desarrollo de la película es «replicando» fotogramas, es decir, insertando una cinta cinematográfica con los 16 fotogramas duplicados. En cambio, si se desea duplicar la velocidad del movimiento, la solución es eliminar fotogramas, dejando la cinta en 8 fotogramas. La única limitación de este procedimiento es el umbral de percepción. Si se desean conservar «todas las fases» del movimiento, entonces el único procedimiento viable es la reducción de velocidad.

Imposibilidad de movimiento discreto-denso. Si consideramos un modelo denso en tiempo y un modelo discreto en espacio, para lo cual podemos emplear los fotogramas del «caballo de Muybridge», se observa que no existiría un movimiento sin reposo, aunque habría movimientos de diferente velocidad. También existirían movimientos con nitidez cada vez mejor hasta donde el indivisible de espacio permita, de ahí que existan intervalos de reposo, es decir, la velocidad de obturación puede ser tan grande como queramos pero siempre fija y debido a la naturaleza discreta del espacio ha de haber un fotograma indivisible.

La reflexión acerca de un movimiento con estructura discreta en tiempo y densa en espacio, hace que esta combinación sea inviable, porque al ser el espacio recorrido durante el indivisible de tiempo, divisible, ha de existir una parte de tiempo en el que el móvil ha recorrido una parte propia del espacio.

Imposibilidad de movimiento denso-continuo. Si el tiempo es denso y el espacio es un continuo, entonces a velocidad constante no se puede medir el tiempo en que un móvil recorre la diagonal de un cuadrado de lado unidad, pero sí se puede acotar, y en realidad, el móvil ha de ocupar esa posición porque no se podría detener en ningún «punto racional» anterior. En cambio, si el tiempo es continuo y el espacio es denso, entonces la cámara fotográfica ideal puede tomar «puntos» del movimiento del caballo, lo cual contradice la densidad racional del espacio.

Uso de modelos en los artículos seleccionados y en Aristóteles

De la Torre y Pérez (2000) aunque sostienen una modelización continua del espacio-tiempo describen niveles de Van Hiele que se caracterizan por la persistencia o superación de diferentes modelos, así el nivel 0 se caracteriza como el predominio del modelo discreto-discreto en el razonamiento del escolar. El nivel 1 se caracteriza como el uso del modelo continuo-continuo, con una superación de la discretización pero existe resistencia a admitir la independencia lógica entre longitud y cardinal. El nivel 2 lo caracterizan como la consideración del modelo continuo (naturaleza del segmento matemático) ideal y las limitaciones en la práctica (no se pueden obtener fracciones de materia y tiempo arbitrariamente pequeñas). Finalmente el nivel 3, corresponde a la consideración plena del modelo continuo, aceptando que Aquiles alcanza a la tortuga recorriendo igual cantidad de posiciones durante todo el trayecto en un tiempo dado, sin embargo, no en la misma razón.

Martínez (2001) señala las estrategias algebraicas empleadas por los estudiantes para resolver la paradoja de Aquiles, lo cual establece que el modelo subyacente de espacio y tiempo es el denso/denso, dado que la solución temporal obtenida es racional.

Los resultados de Nuñez (1994) se pueden interpretar en términos de los modelos numéricos antes mencionados. Los estudiantes de 8 años interpretan el espacio con un modelo discreto dado que en la práctica no se pueden obtener las divisiones que plantea Zenón. Por otro lado, los estudiantes de 10 años son conscientes del modelo denso, sin embargo, en la práctica adoptan una perspectiva discreta. Los estudiantes de 12-14 años sostienen sorprendentemente un modelo discreto en pequeñas distancias y un modelo denso en grandes distancias, aunque hay estudiantes en los que persiste el modelo denso durante todo el proceso.

Los resultados de Peled y Hershkovitz (1999) que se relacionan con la representación de los números reales en la recta, destacan que 0,3333… no puede representarse en la recta, lo cual manifiesta una percepción basada en el modelo denso proporcionado por los decimales exactos (que no incluye la división de la unidad en tercios), desligado del modelo denso racional (que sí la incluye). Por el mismo motivo, $\sqrt{5}$ no es representable en la recta, por disponer de una representación decimal infinita no periódica.

CONCLUSIONES

Las paradojas de Zenón han sido eje central en la formalización de los conceptos numéricos a lo largo de la historia. Los problemas referentes a los conjuntos numéricos considerados para explicarla, así como los problemas de formalización de dichos conjuntos han supuesto un obstáculo para obtener explicaciones satisfactorias. Destacamos el trabajo de Cajori (1915) en los que se recoge una revisión exhaustiva de los argumentos utilizados desde Aristóteles.

En la actualidad, y desde una perspectiva de la educación matemática, nos sorprende encontrar pocos trabajos dedicados a la paradoja de la dicotomía. La lista obtenida mediante un procedimiento cienciométrico los reduce a seis.

Para terminar, hemos proporcionado argumentos sobre modelos numéricos que pueden ser utilizados tanto para interpretar los razonamientos de otros autores como para proponer explicaciones escolares a la paradoja de la dicotomía.

Referencias

Cajori, F. (1915). The history of Zeno's arguments on motion: phases in the development of the theory of limits. Parts I-X. *The American Mathematical Monthly*, XXII, Nos. 1–9.

Colás, M. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar.

De la Torre, A., y Pérez, P. (2000). La modelización del espacio y del tiempo. *Divulgaciones Matemáticas, 8*(1), 57–68.

Hong, F. T. (2013). Pattern recognition in creative problem solving: a case study in search of new mathematics for biology. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, *113*(1), 181–215.

Martínez, J. G. R. (2001). Thinking and writing mathematically: «Achilles and the Tortoise» as an algebraic word problem. *Mathematics Teacher, 94*(4), 248–252.

Nuñez, R. (1994). Cognitive development and infinity in the small: paradoxes and consensus. En A. Ram y K. Eiselt (Eds.), *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 670–674). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Peled, I. y Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*(1), 39–46.

Sprows, D. (2015). Sometimes binary is better. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(3), 477–479.