2

3

DESCUBRIMIENTO

DEL

GRAN ARCANO MATEMÁTICO

EL

TALISMAN DE LA GEOMETRIA

LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO

Y

RECTIFICACION EXACTA DE SU CIRCUNFERENCIA

por los dos amigos

Don Francisco Vilchez Robles

Y

D. Pedro Bataller Alcála.

GRANADA:

IMPRENTA DE D. JUAN MARIA PUCHOL.

1852.

DESCUBRIMIENTO

DEL

GRAN ARCANO MATEMÁTICO

EL

TALISMAN DE LA GEOMETRIA

LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO

Y

RECTIFICACION EXACTA DE SU CIRCUNFERENCIA

por los dos amigos

Don Francisco Vilchez Robles

Y

D. Pedro Bataller Alcála.

GRANADA:

Imprenta de D. Juan Maria Puchol.

1852.

DESCUBRIMIENTO

DEL

GRAN ARCANO MATEMÁTICO

EL

TALISMAN DE LA GEOMETRIA

LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO

Y

RECTIFICACION EXACTA DE SU CIRCUNFERENCIA

por los dos amigos

Don Francisco Vilchez Robles

Y

D. Pedro Bataller Alcála.

GRANADA:

IMPRENTA DE D. JUAN MARIA PUCHOL.

1852.

1853

PROLOGO.

Si todos los autores de obras científicas se constituyen en el deber de manifestar las causas que les impulsan á darlas publicidad, y los incidentes que han cooperado al objeto; nosotros no estamos esentos en manera alguna de la misma cualidad, aunque la presente no es mas que una materia de las muchas que contiene el catálogo de las ciencias naturales. Ella hace parte de una curiosa viografía, al mismo tiempo que desentraña de un caos, que se creia insondable, muchas verdades de suma utilidad y trascendencia para las mismas ciencias y artes mecánicas.

En efecto, la resolucion del grandioso problema de la **cuadratura del círculo** y exacta rectificacion de su circunferencia es de tanta utilidad y trascendencia, como lo ha sido y es el descubrimiento del nuevo mundo.

No se vaya á creer que esta proposicion merezca la calificacion de hiperbólica ó exagerada; porque nosotros conocemos y sabemos, asi como todos los inteligentes en la materia conocen muy bien, que los que esclusivamente se han dedicado al estudio de las ciencias Matemáticas, al querer hacer aplicacion de sus verdades en la materia que aquí tratamos, se les han encallado sus cálculos, por haber tropezado con unos obstáculos insuperables é inaccesibles al entendimiento humano; y se han visto precisados á contentarse con lo que hasta el presente se ha descubierto por los grandes filósofos antiguos, modernos y aun contemporáneos. Asi es, que si este nuevo descubrimiento se considera bajo del aspecto filosófico; él va á constituir un desarrollo en las ciencias naturales; porque desde luego coopera eficazmente al desenlase de muchas proposiciones que estan sin solucion, y es de suma importancia conocerlas á toda luz de razon: si bajo del aspecto de la Mecánica celeste, la Astronomia va á recibir un nuevo impulso; porque en todos sus cálculos se partirá de un principio cierto y demostrado, y ellos deben dar resultados exactos y no aproximados como hasta aqui se ha practicado erróneamente: si bajo del aspecto de la Mecánica humana, las artes van á adquirir reformas y mejoras de grande consideracion; porque los artistas tienen un tipo ó módulo seguro, constante, verdadero y demostrado á que referirse respecto de la verdadera y exacta relacion que existe entre el diámetro y la circunferencia.

Como la experiencia tiene acreditado que todo lo vence el trabajo, aprovechando esta máxima moral y por efecto de una mutua simpatía, deseosos nosotros de poner en juego serias investigaciones sobre la resolucion del problema que nos ocupa, tuvimos bien presente que cuantas tentativas se han practicado al intento han sido infructuosas, y tanto, que los grandes filósofos Newton y Leibniz, gloria y honor de su patria, digeron, el primero: «que el problema no se podia resolver»; el segundo dijo: «que por el medio que ellos habian escogitado era imposible darle solucion»; de donde se infiere, que este no la negó de una manera absoluta; porque á nuestro entender, existia en su mente el juicio que le daba á conocer, que siendo cierta la idea de que cualquiera figura geométrica se puede trasformar en otra conocida, no debe haber repugnancia en creer que el círculo se pueda trasformar en cuadrado. Esta verdad innegable fué la que nos estimuló á lanzarnos en la resolucion del problema; teniendo presente, que el éxito de una empresa es tanto mas glorioso, cuantos mas obstáculos hay que vencer para conseguirle; al modo que un diestro general adquiere tanta mas reputacion y gloria, cuanta ha sido la estrategia de su ingenio para conseguir los laureles de la victoria.

Una sola diferencia se advierte en esta metáfora, y es, que en nuestras investigaciones, si no se conseguia el obgeto que nos habiamos propuesto, no se perdia mas que el tiempo invertido en él, sin embargo que pudiera acontecer que en el trabajo apareciese alguna idea nueva y util; pero al diestro general que consigue una victoria, si su corazon no está revestido de ferocidad, debe quedarle el sentimiento de haber derramado sangre humana, y acaso el de haber perdido muchos brazos útiles.

Pero toda la gran dificultad que el caso nos ofrecia era la idea de saber que cuantas investigaciones han practicado al objeto en el espacio de siete siglos los grandes talentos, han sido infructuosas; y parecia natural que nosotros debimos retraernos de la idea; mas, afortunadamente no desmayamos, porque nos animó y condujo al trabajo la siguiente refleccion: Si los medios adoptados por los sabios para resolver el problema han sido infructuosos, y por otra parte estamos convencidos de que hay ó existe un cuadrado igual en superficie al círculo; es evidente, que debe haber un medio mas espedito que el que adoptaron nuestros sabios predecesores para obtener la idea de conseguir el objeto. Y en efecto, despues de innumerables, asiduas y no interrumpidas investigaciones, hemos tenido la gloria de ser los únicos que hemos resuelto el problema, que con el mayor placer damos á luz y presentamos á nuestros compatricios.

Tan luego como obtuvimos el objeto que nos propusimos, tratamos de alcanzar el justo premio de nuestro inmenso trabajo, porque todos los autores de obras científicas tienen un derecho esclusivo de hacer especulacion lucrativa de sus conocimientos, para cuyo fin, con fecha ocho de febrero del año pasado de 1851, dirigimos una humilde esposicion al Sr. Ministro de Instruccion, que era entonces el Sr. Fernandez Negrete, dándole aviso de que habiamos hecho el descubrimiento; que ante poniendo el amor de nuestra patria á todo otro respeto humano, nos apresurábamos á anunciarlo; que en su virtud se dignase decir qué premio ofrecia por la propiedad de este trabajo, que original é inedito existia en nuestro poder. S. E. contesto verbalmente á nuestro corresponsal en la corte que le entregó la esposicion: « *Diga V. á esos Señores matemáticos, que si es cierto cuanto dicen, que obtendrán un premio mayor de lo que pueden imaginar; pero que necesito consultar con la Academia de ciencias para decretar.* »

A los dos dias de este incidente, en la Capital de la Monarquía circulaban rumores pocos favorables para nosotros, emitidos por algunos matemáticos, que digeron con la mayor desfachatez: «que era una locura, un delirio, un frenesí, un acaloramiento; creer que hubiésemos hallado la cuadratura del círculo.»

Estos rumores, que llegaron á nuestros oidos, nos obligó á prorrumpir, y ahora reproducimos, en la siguiente contestacion: que es un delirio, una locura, un frenesí, un acaloramiento, ó una opinion emitida tal vez por una innoble emulacion, dar un parecer tan brusco sin haber visto el manuscrito original.

En medio de estos incidentes, que notablemente nos perjudicaban porque en ellos se zaheria directamente nuestra bien sentadada reputacion, ocurrió el de la mudanza de Ministro de Instruccion, entrando á reemplazar al Sr. Negrete, el Sr. D. Fermin Arteta, á quien acudimos con otra segunda esposicion igual á la primera; pero este segundo Sr. Ministro, aunque recibió la esposicion, no se dignó contestarnos sin embargo de reclamarle por infinitas veces.

Viendo que á nuestras solicitudes no se daba curso ni contestacion, lo cual era un signo de negativa absoluta, acudimos con otras dos iguales, una dirigida al Gobierno de la Gran Bretaña y otra al de Paris, con el objeto de ver si en el estrangero hacian mas mérito de nosotros. El gobierno de la Gran Bretaña se dignó contestarnos á los veinte y un dias por medio de su Embajador el Noble Lor Howden en los términos siguientes: «En virtud de la esposicion de W. que con fecha 8 de octubre se sirven dirigir á mi Gobierno, el Sr. Presidente de Ministros me manda la siguiente contestacion»: «*Que aquí no hay premio ni remuneracion alguna de ningun género ni la habrá para la cuadratura del círculo.*» «Lo que tengo el honor de participarles.=Madrid 21 de noviembre de 1851.=Howden.»

Esta inesperada contestacion nos revela de una manera positiva que el noble Lor Presidente se halla poco dispuesto á premiar las producciones científicas, y si solo las artísticas, como se ha visto en la gran coleccion de la Esposicion Universal de Londres. Pero el noble Presidente no tuvo en consideracion que las artes no pueden recibir grandes adelantos ni mejorarse ni perfeccionarse sin el ausilio de las verdades de las ciencias naturales; porque en las bellezas artísticas está marcada la sublime inteligencia y aplicacion de las verdades matemáticas, y que aquellas sin éstas nada pueden ser. Por otra parte, al leer la comunicacion del noble Presidente, venimos en conocimiento de que no podia menos de contestar como lo hizo; porque de admitir nuestras proposiciones, hacia un ultrage directo al Príncipe de las Matemáticas, su digno compatricio el inmortal Newton; pues como este dijo, que era imposible cuadrar el círculo y rectificar la circunferencia, era preciso seguir esta opinion como verdad incontrovertible; pues bastaba que Newton la hubiese emitido para tenerla por infalible. Y bien se conoce á toda luz de razon, que los británicos sostienen á todo trance su espíritu de nacionalidad hasta degenerar en un puro esclusivismo: en esto obran con mucha cordura; y ojala que nosotros tuviéramos las mismas costumbres; pues en este caso valdriamos mas los españoles, y nuestra desgraciada península pudiera competir en adelantos con las potencias mas cultas y civilizadas.

Ahora pues, si se ha creido que Newton dijo verdad, en estos trabajos científicos damos una prueba nada equívoca de que Newton cometió un grande error; porque nosotros hemos cuadrado el círculo y rectificado exactamente la circunferencia, y por consiguiente, nosotros en esta materia hemos alcanzado y sabido mas que el Príncipe de las Matemáticas.

Respecto á la esposicion dirigida al gobierno francés, no hemos tenido contestacion alguna ni la esperamos; cuidado de mas consideracion y que directamente influyen en su futura suerte llaman mas su atencion.

En vista de la frialdad con que han sido tratadas nuestras proposiciones, nos hemos decidido á que nuestro gran trabajo vea la luz pública, tipográficamente; y por lo mismo el caso de que se desengañen los ilusos é incrédulos; y que vean palpablemente que una nueva época de mas inteligencia va á constituir el verdadero desarrollo de las ciencias naturales; y por consiguiente, que está ya dado el primer paso hacia la mejora y perfeccion de las artes y de aquellas.

No se vaya á creer que el desarrollo indicado está pendiente tan solo de la cuadratura del círculo: hay otras materias de suma importancia que necesitan aclararse, resolviendo problemas qué aun no tienen solucion directa: tales son, el problema de la triseccion del ángulo, resuelto por la geometria elemental: y aunque este problema tiene ya solucion directa, cuyo trabajo hecho por uno de nosotros dos corre al principio de la obra de Mecánica de Vallejo impresa en Madrid año de 1844, sin embargo este trabajo está practicado con el ausilio de una curva indeterminada é indefinida cuyas ordenadas y abscisas dan los puntos de ella, estos estan sujetos á la idea del infinito y á los principios dificultosos de las Matemáticas sublimes.

Otra de las materias que aun no estan suficientemente aclaradas y se hallan sin solucion es la resolucion de las ecuaciones de 3.er grado aplicada á la simplificacion de la triseccion del ángulo y á la cuadratura del círculo por medio de las Lúnulas de Hipócrates: de cuyas materias nos vamos á ocupar asiduamente; y ya tenemos la seguridad de algunos datos que nos prometen saldremos garantes del buen resultado, y cuya publicidad será una adicional de la segunda edicion de estos trabajos.

En la misma segunda edicion añadiremos otro modo de cuadrar el círculo espresado en la forma siguiente. «Dado un círculo, rectificar inmediatamente su circunferencia convertida en cuadrado; ó hallar un cuadrado de igual perímetro que el circulo dado: y hallando una media proporcional entre la suma de dos lados de dicho cuadrado y el radio, obtener por este medio el lado de un cuadrado igual de superficie al círculo.»

Y si tenemos la grata satisfaccion de la buena acogida de nuestros lectores, cosa que no dudamos por la gran importancia de la materia, quedarán recompensados los desvelos de Francisco Vilchez Robles y Pedro Bataller Arcála.

Granada 8 de Febrero de 1852.

CUADRATURA DEL CIRCULO

Y

rectificacion exacta de su circunferencia.

1 El grandioso problema de la **cuadratura del círculo** se ha tenido siempre por el mas difícil de resolver, y han reconocido su dificultad todos los geómetras antiguos modernos y contemporáneos. Lo que únicamente se ha sabido, y que se lo debemos á los geómetras griegos Arquímedes y Mecio, es, que el primero halló que la razon que guarda el diámetro con la circunferencia es la de 7:22; el segundo halló la de 113 : 355. Entre estos dos datos, que nosotros con sobrado fundamento los calificamos de congeturas aproximadas á la verdad, se ha elegido el mas sencillo, esto es, la razon de 7: 22; bien sea por mas fácil de manejar que la otra, ó bien porque es el fruto de los desvelos de uno de los mejores matemáticos, que florecieron en el siglo XI, en que se trabajaban con mas calor y empeño las proposiciones de la geometría elemental.

Los que han practicado investigaciones sobre tan importantísima materia en épocas posteriores á Arquímedes y Mecio, fueron los insignes matemáticos Newton y Leibniz; estos se valieron del pensamiento de considerar el perímetro del círculo como polígono infinitángulo; y partiendo de este principio inexacto, que sentaron como verdad matemática, continuaron sus investigaciones, y hallaron por las series, que arroja el cálculo infinitesimal, la misma razon de Arquímedes, la de 7:22. Pero como el resultado de las series es la suma de los elementos de una cantidad, que no se puede hallar cabal, resulta de aquí, que el cálculo infinitesimal aplicado á descubrir la razon del diámetro con la circunferencia, no puede dar un resultado exacto ni seguro. Por otra parte, la proposicion de considerar al círculo como polígono infinitangulo, no está admitida; porque está ya demostrado que por mucho que se acerquen á la circunferencia los lados de un polígono regular inscripto, ninguno de ellos será jamás igual al arco que subtenda, sino que será menor que él en estension lineal; porque toda curva circular es de distinta naturaleza que la recta, y no se puede confundir la una con la otra.

Luego todas las investigaciones que se han practicado para rectificar la circunferencia han sido infructuosas; porque en ellas se ha partido de un principio inadmisible. Y por consiguiente, los resultados deben ser inexactos. Y como quiera que el lado de un polígono regular inscripto en el círculo é infinitángulo es casi igual á la estension lineal del arco que subtende, resulta de aqui que el perímetro de este polígono es menor que la estension lineal de la circunferencia; y por consiguiente, la razon de 7:22; que procede de suponer al círculo como polígono infinitángulo, es menor de la que existe entre el diámetro y la circunferencia; y aun todavia es menor que la de 7:22 la de 113:355 y esta es mucho menor que la verdadera.

Luego el cálculo infinitesimal no puede servir para la cuadratura del círculo; y por lo mismo debe proscribirse totalmente.

En el año de 1749 Mr. Fouré publicó unas memorias sobre la misma materia impresas en París, que dedicó á la Academia de Ciencias de aquella Capital; y al final de sus cálculos halló que la relacion entre el diámetro y la circunferencia es la de 162: 512; esta es ya mayor que la de 7: 22; pero sus tareas no fueron admitidas por la Academia, porque una de las proposiciones que establece es la de considerar al semicírculo transformado en un rectángulo de ciertas dimensiones. Mr. Fouré sin embargo, se acercó mas á la verdad que sus predecesores y aunque concibió la idea, no la pudo desensolver ni analizar bien.

D. Joaquin Cáceres, vecino de Ciudad-Rodrigo, publicó tambien otras memorias sobre el asunto hace algunos años; con el título de *Reduccion del caso irreductibles de Cardano,* impresas en Salamanca año de 1845; y aunque su obgeto es distinto del de la cuadratura, pues está reducido á la resolucion de una ecuacion del 3er grado en la conclusion de sus cálculos, dice, presentando una ecuacion: «*Esta es la ecuacion diferencial que se dió en la cuadratura del círculo; luego debe resolverse del mismo modo*». Pero no sabemos donde está esta cuadratura de que hace mencion, aunque sí tenemos noticias de que fué desechada por los inteligentes, y una prueba de ello es que no circula.

Estas circunstancias y las observaciones procedentes nos dan á conocer que la resolucion del problema de la cuadratura del círculo, no se ha tratado como se debió tratar; porque si el cálculo infinitesimal no conduce al objeto apetecido es evidente que debe existir otro medio mas espedito en la indagacion de la verdad; de donde se infiere que el problema que nos ocupa debe tener solucion geométrica auxiliado del cálculo: y he aquí la causa que nos ha estimulado á lanzarnos en la grandiosa obra de investigar esta resolucion; pero antes de proceder á tan difícil empresa no estará demas, y juzgamos muy oportuno indicar, que nuestro contemporaneo matemático D. José Mariano Vallego halló por sus cálculos sumamente complicados como él dice en su compendio de Matemáticas puras y Mistas (§ 347, 348 y 349) la razon geométrica de 1 : 3, 14159265358979324: esta es mas inferior que la de Mecio en casi veinte y seis diez millonésimas, y por consiguiente mucho menor que la de Arquímedes, y que dista mucho de la exactitud. Por último, en la misma citada obra nos presenta por nota una relacion, que se halla en la biblioteca de *Ratclif* en *Oxfor*, y es igual á la de Vallego hasta los quince primeros guarismos decimales; pues contiene una aproximacion de 155 notas. Estas dos relaciones estan muy distantes de acercarse á su verdadero valor; pues son mucho menores que las de Arquímedes y Mecio; pero la que nosotros vamos á presentar, que es la única, exacta y rigorosamente demostrable, anula todas las anteriores; y por lo mismo, debe ser tambien la única que puede servir para los cálculos y las operaciones geométricas. Y para que nada quede que desear en la materia, vamos á esplicar y demostrar la cuadratura y rectificacion en los párrafos siguientes.

2. Una de las circunstancias que sirven de auxilio para la completa solucion del problema presente, es, que todos los geómetras han presentado el teorema de que *la superficie del círculo es el producto de la mitad del rádio multiplicada por la circunferencia estendida, ó el producto del rádio multiplicado por la semicircunferencia.* Esta es una proposicion ya demostrada y admitida como verdadera é indubitada: y sentado este principio, procedemos á la conclusion de nuestro problema, para lo cual debe tenerse presente el siguiente

TEOREMA.

Un cuadrado igual en superficie á un círculo dado y concéntrico con él, tiene su dimension mayor que el rádio y menor que el diámetro; y por consiguiente, el cuadrado tiene parte dentro y parte fuera del círculo, y este tiene tambien parte dentro del cuadrado y parte fuera de él.

DEMOSTRACION.

Si en un círculo cualquiera T z S x Z r L c T *(fig 1.ª) concebimos inscripto un cuadrado* c z x r *y otro circunscripto* R M N B *de modo que los lados del uno con los del otro esten respectivamente paralelos, en este caso se* verifica que el cuadrado inscripto es menor en superficie que el círculo; porque este le escede en los cuatro segmentos *c* T *z c*, *z* S *x z*, *x* Z *r x*, *r* L *c r*; y el cuadrado circunscripto escede al círculo en los cuatro triángulos mistilineos T M S T, S N Z S, Z B L Z, L R T L. Luego el cuadrado igual en superficie al círculo, ha de ser mayor que el inscripto y menor que el circunscripto. Por consiguiente, el lado de dicho cuadrado debe ser mayor que el rádio y menor que el diámetro, ó mayor que el lado *cz* del cuadrado inscripto y menor que el lado R M del cuadrado circunscripto.

3. Todos los matemáticos, ó cuando menos el mayor número, convienen en que para cuadrar el círculo se debe buscar una media geométrica proporcional entre la circunferencia y la mitad del rádio, ó entre el rádio y la semicircunferencia (§ 2.) Esta regla procede de ser cierta y estar admitida como induvitada la proposicion de que la superficie del círculo es el producto de la mitad del rádio multiplicada por la circunferencia; pues es indudable que una media geométrica proporcional entre los factores de un producto, que espresa una superficie, dá de resultado el lado del cuadrado igual en superficie á la espresada por los dos factores.

Pero como hasta aquí se ha ignorado cual es la verdadera y exacta estencion de la circunferencia, y por otra parte sabemos que hay ó existe un cuadrado igual en superficie ál círculo, aunque no se conoció su dimension; ha estado en duda la cuestion de si debe ser primero rectificar la circunferencia y despues cuadrar el círculo, ó si primero cuadrar el círculo y despues rectificar la circunferencia. Hasta el presente tanto una operacion como otra se ha reputado por imposible de practicar; porque no se ha sabido cuadrar el círculo, ni menos se ha acertado con el modo de rectificar exactamente la circunferencia. Pero nosotros decimos sin riesgo de equivocarnos, que el problema nos ha mostrado con asombro, que hasta cuadrar el círculo no es posible espresar exactamente la relacion que existe entre el diámetro y su circunferencia, teniendo solucion completa una y otra proposicion.

4. Cuadrar un círculo es una operacion, que se ha considerado por muy pesada y de dificil construccion; porque hasta ahora no se ha sabido cual es el cuadrado de igual superficie á un círculo dado. Mas supuesto que ya hemos demostrado (§. 2.) que el lado de este cuadrado ha de ser mayor que el rádio y menor que el diámetro, no habrá repugnancia alguna en suponer hallado el cuadrado, é investigar y descubrir el modo de influir una figura en otra, aunque sean semejantes, siempre que esta influencia pueda cooperar á la idea que nos hemos propuesto. Y si suponemos que el cuadrado igual en superficie al círculo T*z*S*x*Z*r*L*c* sea el *smnv* (fg. 1.ª), se verá claramente que el cuadrado presenta fuera del círculo los cuatro triángulos mistilíneos *amta*, *bnpb*, *qvhq*, *jslj*, y el círculo presenta fuera del cuadrado los cuatro segmentos *l*T*al*, *t*S*bt*, *p*Z*qp*, *h*L*jh*. Esto entendido, continuemos nuestro obgeto, procediendo de la forma siguiente:

Supongamos conocidos el rádio OM de un círculo trazado ya (fg 2.ª), y trazados los dos diámetros IQ, MR perpendiculares el uno al otro. Supongamos tambien trazado el cuadrado A B C D igual en superficie al círculo, y que sus lados esten paralela y respectivamente á los dos diámetros; é igualmente supongamos que tanto el círculo como el cuadrado tienen un centro comun O. En este caso se verificarán forzosamente las siguientes propiedades.

1.ª

Los dos diámetros perpendiculares dividen al círculo y al cuadrado en cuatro partes iguales, y tambien cada cuadrado inferior es igual en superficie al cuadrante.

2.ª

Los cuatro segmentos N M U N, E I O′ E, Y R P Y, T Q G T, *que quedan fuera del cuadrado, son iguales en figura y superficie.*

3.ª

Los cuatro triángulos mistilíneos A E U, B Y O′, C T P, D N G *de las estremidades angulares del cuadrado, que resultan fuera del círculo, son tambien iguales entre sí en figura y superficie.*

4.ª

Cada uno de los triángulos mistilíneos es igual en superficie al segmento inmediato, ó á cualquiera de ellos.

5.ª

Mediante la circunstancia ó propiedad anterior, la circunferencia del círculo corta al semilado del cuadrado en dos partes iguales, esto es, en el punto E *medio de* A y *m*, *en el* O′ *medio de m* y B, *en el* Y *medio de* B y *c* &, *y de aquí deducimos la cuadratura.*

6.ª

De la cuadratura del círculo deducimos la rectificacion de su circunferencia, esto es, la verdadera y exacta relacion guarismal que existe entre el diámetro y la circunferencia, que es la de 5 : 16, y la que debe originar y producir el grandioso desarrollo de las ciencias naturales en las dificultades de aquellas materias que son dependientes de esta relacion.

DEMOSTRACIONES.

1.ª

En virtud de los principios de una rigorosa geometría, es indudable, que los dos diámetros I Q, M R, siendo por construccion perpendiculares el uno al otro dividen al círculo en cuatro partes iguales ó cuadrantes MOIEUM, ROIC′YR, MOQGNM, QORPTQ; y tambien es indudable, que, estando el centro O equidistante de los estremos A, B, C, D, se divide el cuadrado ABCD en los cuatro iguales *aOm* A, *eOm* B, *eOr* C, *rOa* D; porque sus dimensiones estan determinadas por intercesiones de paralelas, formando ángulos rectos cada una con la que le corta. Por consiguiente, si los cuatro cuadrados iguales que se acaban de enunciar componen el total A B C D, y este es igual por su posicion á la superficie del círculo, ó á cuatro cuadrantes; es evidente que un solo cuadrado cualquiera es igual por el mismo supuesto á un solo cuadrante cualquiera. L. Q. D. D.

2.ª

Mediante á que el rádio recto O*m* es perpendicular á la cuerda E O′, el O*e* es perpendicular á la cuerda Y P, el O*r* á la G T y el O*a* á la N U; se infiere que los cuatro segmentos son iguales; porque estan determinados por un mismo é igual rádio del círculo, y por un mismo é igual rádio recto, que es el lado del cuadrado inferior, igual en superficie al cuadrante (desmostracion 1.ª). Luego los cuatro segmentos son iguales enteramente en figura y superficie.

3.ª

Si de cada uno de los lados esteriores iguales de los cuatro cuadrados inferiores, rebajamos ó restamos cada uno de los semisegmentos tambien iguales y correspondientes á cada lado (propiedades 1.ª y 2.ª) las ocho diferencias que resultan, y que espresan los lados que forman los ángulos rectos de los triángulos mistilíneos U A E, O′B Y, P C T, G D N, son iguales. Por consiguiente, estos cuatro triángulos mistilineos son tambien iguales entre sí; porque cada uno se compone de un ángulo recto en los vértices A, B, C, D, y los lados que los forman son tambien iguales como se acaba de demostrar. Luego, tenemos demostrada la tercera propiedad.

4.ª

En virtud á que hemos supuesto que el cuadrado superior A B C D es igual en superficie al círculo M I R Q, analizando una y otra figura, encontramos que el cuadrado se compone del polígono mistilíneo N U E O′ Y P T G N mas los cuatro triángulos mistilíneos U A E, O′B Y, P C T, G D N, que son iguales (demostracion 3.ª); y el círculo se compone del mismo polígono mistilíneo anterior mas los cuatro segmentos N M U N, E I O′E, Y R P Y, T Q G T tambien iguales (demostracion 2.ª) Y como hemos supuesto iguales la superficie del cuadrado y la del círculo, llamando P el polígono mistilíneo anteriormente enunciado, llamando asi mismo *t* uno de los triángulos mistilíneos, *s* uno de los segmentos cualquiera, tendremos que el polígono mistilíneo mas los cuatro triángulos se pueden espresar por el lema $P+4t$; y el mismo polígono mistilíneo mas los cuatro segmentos se pueden asimismo espresar por $P+4s$: y como son iguales estos dos valores, tendremos la siguiente ecuacion $P+4t=P+4s$; y suprimiendo en ella la parte comun P se reduce á esta $4t=4s$, y partiendo ambos miembros por el factor comun 4, se convierte en $t=s$. Por consiguiente, si el cuadrado y el círculo propuestos de la (fig. 2.ª) son iguales en superficie, teniendo uno y otro un centro comun, un triángulo mistilíneo cualquiera de los cuatro en que el cuadrado escede al círculo ó tiene fuera de él ha de equivaler ó ser igual en superficie á un segmento cualquiera de los cuatro en que el círculo escede al cuadrado ó que tiene fuera de él: luego, queda demostrada la 4.ª propiedad.

Corolario. De aquí se deduce tambien, que como las dos diagonales AC, BD dividen el ángulo recto por medio, á causa de estar el centro O equidistante de los estremos vértices A, B, C, D, dividen tambien por medio los triángulos mistilíneos: y como los diámetros dividen las cuerdas por mitad, es evidente, que tambien dividen por mitad cada uno de los segmentos. Luego si un triángulo cualquiera UAEnU es igual al segmento EIO$'m$E, tambien es induda ble, que su mitad ó semetriángulo nAEn es igual al semisegmento EImE.

5.ª

Si desde el punto estremo A del cuadrado superior ABCD tomamos hacia el punto de intercesion E porciones arbitrarias, y por los puntos estremos de ellas consideramos tirados los rádios dirigidos al centro O; si consideramos tambien trazados los círculos correspondientes á los dichos puntos elegidos, se verá indudablemente, que al paso que crece el triángulo mistilíneo UAEnU, decrece ó disminuye el segmento EIO$'m$E, hasta llegar al punto de interceccion E que le llamaremos *el límite*, en el que el triángulo resulta igual al segmento (4.ª demostracion). Asimismo, si desde el punto *m* hacia E tomamos tambien varias distancias arbitrarias, y desde sus estremos consideramos tirados los rádios dirigidos al centro comun O, considerando tambien trazados los círculos correspondientes á dichos estremos de las distancias arbitrarias, se verá clara é indudablemente, que al paso que crece el segmente disminuye el triángulo hasta llegar al punto límite E, en que el segmento es igual en superficie al triángulo. Luego, el límite E es el punto en que terminan las dos circunstancias ó propiedades de crecer el triángulo al paso que disminuye el segmento, y de crecer el segmento al paso que disminuye el triángulo, hasta quedar iguales ambas superficies.

A esta demostracion se puede agregar otra de suma importancia y de no poca fuerza, que se puede considerar como un nuevo comprobante acerca del límite, y es: que, si consebimos el cuadrado MNBR (figura 1.ª) circunscripto al círculo, que es mayor que este en superficie, se va reconcentrando hacia el centro O, ó disminuyendo su valor sin perder la forma cuadrada, llegará indudablemente á resultar un cuadrado *mnvs* igual en superficie al círculo. Por el contrario, si desde el centro comun O vamos trazando varios círculos cuyos rádios vayan siendo cada vez mayores, se llegará á concebir un círculo, cuya superficie sea igual á la del cuadrado *m n v s*. Luego de estas dos poderosas reflexiones se deduce: *que no existe mas que un cuadrado igual en superficie á un círculo dado, asi como tampoco existe mas que un círculo igual en superficie á un cuadrado dado; y que tanto una como otra superficie, suponiéndolas concéntricas, se cortan en un punto comun en cada uno de los lados de los cuadrados inferiores (figura 2.ª), y cuya intercesion ó límite se halla entre el punto estremo del lado del cuadrado superior, y su medio determinado por el diámetro perpendicular á él.*

Ahora bien, si desde el punto m hacia E (fig. 2.ª) y desde A tambien hacia E vamos tomando porciones iguales de un lado y de otro y suponemos trazados los círculos correspondientes á los puntos estremos de las porciones iguales elegidas; en estos casos se verifica que las dos leyes de crecer el triángulo y disminuir el segmento, y la de crecer el segmento y disminuir el triángulo, vienen á concluir en el límite E. Y como hemos supuesto tomadas porciones iguales de un lado y de otro del punto E, es evidente que este punto límite se debe hallar y se halla en medio de A y de m; porque en él es en donde se juntan las medidas iguales tomadas de un lado y de otro de dicho límite E, en que se igualan las dos superficies enunciadas del triángulo y del segmento (propiedad 4.ª). Luego, cuando el círculo y el cuadrado son concéntricos é iguales en superficie, la circunferencia corta á cada lado esterior de los cuatro cuadrados inferiores en un punto equidistante de los estremos de cada cuadrado. Por consiguiente, el límite E es el punto medio de A y de m: y está demostrada la 5.ª propiedad.

Son tan fecundas en ideas las ciencias matemáticas, que á veces presentan circunstancias en que una sola cuestion ya desenvuelta y demostrada nos manifiesta variedad de verdades y propiedades, que todas pueden coincidir á un mismo ebgeto para dar nueva fuerza á las ya demostradas é induvitarlas por otro medio. Efectivamente, para adicionar otro comprobante mas á la demostracion que hemos presentado acerca del punto medio E, vamos á proponer otra mas, y mas adelante sus consecuencias, en la siguiente:

DEMOSTRACION GEOMÉTRICA.

Haciendo centro en el punto m (fig. 2.ª) y con el mismo rádio OM del círculo propuesto, trácese el arco UxpzY y desde el punto U al punto Y en que dicho arco y el U n E I O' y Y cortan los lados opuestos A D, B C del cuadrado ABCD, tírese la recta UY, y tendremos, que los dos segmentos U xpz YU, UEIO'YU son iguales por tener comun la cuerda UY y sus arcos correspondientes trazados con un mismo rádio.

Asimismo, los dos segmentos $xpzx$, EIO'E son tambien iguales por estar sus arcos trazados con un mismo rádio, y ser la cuerda xz del primero igual á la cuerda E O' del segundo, como mitades que son, la una del lado ac, y la otra del lado AB igual con ac, como lados opuestos que son del rectángulo aABc.

Ahora bien: Si de los primeros segmentos iguales superior U E I O'YU é inferior UxpzYU, rebajamos los dos segmentos menores E I O' E, $xpzx$, tambien iguales entre sí, nos resultarán como residuos iguales los dos cuadriláteros ó trapecios mistilineos UxOzYU, U E mO'Y U.

Los dos triángulos mistilíneos Uxa, Yze, son tambien iguales entre sí, por ser rectángulos, el primero en a y el segundo en e; y asimismo los lados rectos Ua, ax del primero iguales á los lados rectos Ye, ez del segundo, como mitades que son, los dos primeros de los los lados aA, aO del cuadrado aOmA, y los dos segundos de los lados Oe, eB del cuadrado OeBm igual con el anterior, y tener ademas dichos triángulos sus arcos Ux, zY trazados con un mismo rádio; y por la misma razon estos triángulos son tambien iguales á cualquiera de los esteriores, tal como A E U, O' B Y &c.

Sentados todos estos preliminares, para abreviar los cálculos, al primero de los dos cuadriláteros ó trapecios mistilíneos anteriormente enunciados, esto es, al inferior UxOzYU le designaremos por p desde ahora en adelante y al segundo UEmO'YU le designaremos asimismo por

p'; designaremos asimismo por t uno de los triángulos mistilíneos cualquiera A E U, y por s uno de los segmentos cualquiera E I O'E: y observando la construccion de la figura y analizándola encontraremos: que el semicírculo M I R M se compone exactamente de los dos cuadriláteros ó trapecios mistilíneos iguales designados, el primero por p y el segundo por p', mas los dos triángulos mistilíneos iguales aUx, eYz designados cada uno de ellos por t, mas el segmento E I O'E designado por s, mas los dos medios segmentos iguales M Ua, R Ye. Pero equivaliendo estos dos medios segmentos á uno solo ó al segmento E I O'E, podremos sustituir la espresion s como equivalente á un segmento, en lugar de los dos medios segmentos; y tendremos, que el semicírculo propuesto al cual le llamaremos desde ahora en adelante C, se compone exactamente de las superficies comprendidas por $p+p'+2t+2s$; y formando ecuacion con ambos valores, tendremos $C=p+p'+2t+2s$. (a).

Ahora; si s es igual en superficie ó equivalente á t, mediante á que p y p' son iguales, del segundo miembro de la ecuacion (a) podemos deducir esta otra $p+2t=p'+2s$ (b): y siendo equivalentes s y t, en lugar de los dos medios segmentos anteriormente enunciados, podremos sustituir un triángulo ó la espresion t; y en este caso el segundo miembro de la ecuacion (b) se convierte en $p'+s+t$, sin que por ello se altere su valor: de modo que dicha ecuacion (b) la podemos representar de esta forma $p+2t=p'+s+t$ (c). Y componiéndose la cantidad designada por C de las dos iguales $p+2t$ y $p'+s+t$, es evidente que cada una de estas dos cantidades es igual á $1/2$ C ó á un cuadrante del círculo M I R Q.

Ahora bien: la cantidad designada por $p+2t$ es exactamente igual al rectángulo ac Y U, cuarta parte del cuadrado total ABCD: y debiendo dicho rectángulo ae Y U (el cual se compone de las dos partes p y $2t$) equivaler á un cuadrante del círculo, es indudable, que la cantidad representada por $p'+2s$ ó su equivalente $p'+s+t$ deberá equivaler á otro cuadrante del mismo círculo, siempre que s sea igual en superficie ó equivalente á t.

Sentado todo lo que antecede, supongamos ahora que quitamos ó separamos del semicírculo MIRM la superficie comprendida por $p+2t$ ó el rectángulo ae YU; y en este caso no nos quedará ya de la superficie de dicho semicírculo mas que la comprendida por $p'+2s$. Esto entendido, sustituyamos ahora en lugar del semisegmento MUa el triángulo mistilíneo An U como equivalente á dicho semisegmento; y en lugar del semisegmento RYe la mitad del triángulo mistilíneo BY O' ó su equivalente triángulo mistilíneo ByY: y equivaliendo los dos triángulos An U, ByY á uno solo, tal como AEU podremos poner la espresion t en lugar de los dos triángulos AnU, By Y; y de este modo la cantidad designada por $p'+2s$ la tendremos convertida en su equivalente $p'+s+t$. Y para demostrar ahora geométricamente que esta última espresion es exactamente igual á un cuadrante del círculo propuesto, practicaremos la construccion siguiente:

Haciendo centro en los puntos estremos A y B del cuadrado ABCD, y con el mismo rádio OM trácense los arcos ux, uz, y tendremos que los dos triángulos mistilíneos uOx, uOz son iguales entresi, é iguales cada uno de ellos á uno cualquiera, tal como aUx por lo ya demostrado respecto á este último con su igual AEU. Los dos triángulos mistilíneos z'Un, $z'uc'$ tambien son iguales por tener iguales los ángulos verticales U$z'n$, $c'z'u$, y ser asimismo el lado Uz' del primero igual al lado $z'u$ del segundo, como mitades que son uno y otro del lado uU; y el lado nz' del primero igual al lado $z'c'$ del segundo, por ser tambien uno y otro mitad del lado nc' y tener ademas sus arcos Un, uc' trazados con un mismo rádio desde los puntos A, O estremos de la diagonal A O del cuadrado inferior aOmA.

Pues bien, al cuadrilátero mistilíneo UEmO′ Y U, el cual le tenemos designado anteriormente por p', quitémosle por una parte el triángulo mistilíneo $z'n$U, y en su defecto sostituyámosle su igual $uc'z'$: quitémosle por otra parte el triángulo mistilíneo yYz'', y sustituyamos su igual $un'z''$; y en este caso, dicho cuadrilátero mistilíneo le tendremos ya representado por el exágono mistilíneo $z''z'n$E O′ y z'' mas los dos triángulos mistilíneos iguales $z'uc'$, $z''un'$.

Ahora bien; á esta suma, que equivale á dicho cuadrilátero mistilíneo designado por p', agreguémosle por una parte la espresion s, ó el segmento E I O′ E; agreguémosle asimismo por otra parte el triángulo mistilíneo uOc', mas el triángulo mistilíneo uOn', equivalentes ambos á uno solo, tal como Oxu designado antes por t; y veremos clara y palpablemente, que dicha suma total, la cual se compone exactamente de las cantidades designadas por $p'+s+t$ (segundo miembro de la ecuacion (c) es exactamente igual al cuadrante On I y O del círculo propuesto; y asimismo, la cantidad designada por $p+2t$ (primer miembro de la ecuacion (c) ó el rectángulo aeY U debe equivaler precisamente á otro cuadrante del mismo círculo; y por lo mismo deducimos que un triángulo mistilíneo cualquiera, tal como A E U es equivalente á un segmento cualquiera, tal como E I O′ E.

En efecto, si suponemos que sea $t > s$, la espresion $p+2t$ sería mayor que $p'+2s$: y aunque] la espresion ó cantidad $p'+s+t$ sea mayor que $p'+2s$, siempre será todavía menor que $p + 2t$: y mediante á que $p' + s + t$ es exactamente igual á un cuadrante del círculo propuesto, cuando supusimos que quitábamos ó separábamos del semicírculo la superficie comprendida por $p + 2t$, en este caso habiamos separado ó quitado de dicho semicírculo mayor cantidad que la comprendida por $p' + s + t$, y por consiguiente mayor que un cuadrante del mismo; y en este caso la espresion $p' + s + t$ no podria equivaler á otro cuadrante, á no ser que la superficie del semicírculo MIRM fuese mayor que la suma de dos cuadrantes suyos; pero esto es un absurdo.

Tampoco se puede suponer que sea $t < s$; porque en este caso resulta que $p + 2t < p' + 2s$: y aunque la espresion $p' + s + t$ sea menor que $p' + 2s$, siempre será todabia $p' + s + t > p + 2t$: y equivaliendo $p' + s + t$ á un cuadrante del círculo propuesto, la espresion representada por $p + 2t$ ó el rectángulo aeYU, deberá precisamente equivaler á otro cuadrante del mismo circulo, á no ser que el semicírculo MIRM sea menor que la suma de dos cuadrantes del mismo círculo; pero esto es imposible ú otro absurdo. Luego, no pudiéndose verificar que dicho semicírculo sea mayor ni menor que la suma de dos cuadrantes del mismo círculo, tiene que verificarse que s sea equivalente á t. Y siendo s equivalente á t, en este caso el cuadrado y el círculo propuestos son iguales en superficie; porque teniendo uno y otro un centro comun, tienen asimismo una superficie comun, que es el polígono mistilíneo designado por P (demostracion 4.ª); y por consiguiente tendremos que $P + 4s$, que compone la superficie del círculo, es igual á $P + 4t$, que compone la superficie del cuadrado.

Escolio. Toda la fuerza de esta demostracion reposa y está apoyada sobre los principios sentados de que la paralela UY divida por medio el rectángulo aeBA; que el punto de reunion de la paralela UY, del lado eB del cuadrado inferior y de la circunferencia, sea el punto medio Y de e y B, asi como U de a y A, y asi como E lo es de A y m &.

Corolario. *Luego, cuando el cuadrado y el círculo están concéntricos y son iguales en superficie, resultan tambien iguales los segmentos con los triángulos esternos, y la circunferencia corta cada uno de los semilados del cuadrado en dos partes iguales.*

Sentado, pues, todo cuanto hasta aqui llevamos emitido y demostrado, procedamos ahora á la operacion de cuadrar el círculo y despues rectificar la circunferencia, exactamente, haciendo uso de la siguiente demostracion.

6.ª

Siendo el punto límite E medio de A y m, si llamamos x el lado Am del cuadrado inferior AmOa igual en superficie al cuadrante IEnUMO, su mitad AE=Em es $\frac{1}{2}x$: si suponemos tambien que sea r el radio conocido OE, tendremos en el triángulo rectángulo EmO, el siguiente lema $(Om)^2=(OE)^2-(Em)^2$; y poniendo los valores literales de estas líneas, tendremos $x^2=r^2-\frac{1}{4}x^2$ (c): de aqui deducimos por la trasposicion del término $-\frac{1}{4}x^2$ al primer miembro, esta $\frac{5}{4}x^2=r^2$ (t): de aqui deduzco multiplicándola por el denominador 4, la siguiente: $5x^2=4r^2$ (g); y de aquí deducimos, partiendo por el denominador 5, esta $x^2=\frac{4}{5}r^2$ (s): este resultado, que es exacto, nos dice: *que un cuadrado igual en superficie á un cuadrante de círculo, está representado por las cuatro quintas partes del cuadrado del rádio.*

Y si estraemos la raiz de la ecuacion (s), considerándola como positiva, porque debe tener un valor real y efectivo independiente de su posicion, se obtiene esta $x=\sqrt{\frac{4}{5}r^2}$ (h):

y como $\frac{4}{5}r^2$ es lo mismo que $\frac{4r^2}{5}=\frac{2r\times 2r}{5}=2r\times\frac{2r}{5}$,
es evidente que $x=\sqrt{2r\times\frac{2r}{5}}$ (v); y poniendo en vez de $2r$ el diámetro, que le llamaremos d, la ecuacion anterior se muda en esta $x=\sqrt{d\times\frac{d}{5}}$ (q). Traducida esta espresion al lenguage vulgar, nos dice: *que una media geométrica proporcional entre el diámetro de un círculo y su quinta parte, da el semilado del cuadrado igual en superficie al círculo.*

5. Ya que como se ha visto y demostrado tenemos descubierta la cuadratura del círculo, debemos ahora rectificar la circunferencia. Pero antes de proceder á tan importantísimo asunto, juzgamos muy oportuño y conveniente para corroborar los resultados de los cálculos precedentes, que construyamos la cuadratura del círculo espresada por la ecuacion anterior (q).

Para esto, supongamos conocido el rádio OM del círculo (figura 3.ª), y vamos á hallar el lado ó semilado del cuadrado igual en superficie al círculo, cuyo radio es OM=OI=OR.

Construccion geométrica. Desde el estremo M del diámetro tiro una recta indefinida MB, que forme un ángulo cualquiera con el diámetro MR, que conviene no sea muy agudo, y tomo en ella cinco partes iguales de arbitraria magnitud $Mp=pr=ry=yg=gs$. Desde el punto s donde concluyen estas cinco partes tiro al estremo R del diámetro la recta sR, y por el punto g anterior al s trazo la gt paralela á la sR: en este caso, la porcion tR del diámetro espresa su quinta parte, asi como proporcionalmente la parte gs espresa la quinta parte de la recta Ms.

Ahora, en el punto de intercecsion t levanto la perpendicular tn, que corta la circunferencia en el punto n; y tirando desde este punto al estremo R la cuerda nR, esta es la media proporcional entre el diámetro MR y su quinta parte tR, esto es, que nR es el semilado del cuadrado igual en superficie al círculo, cuyo diámetro es MR. Y en efecto, tomo sobre el rádio OI, que es perpendicular al diámetro, desde el centro O la parte Om=nR, y tambien desde O sobre el rádio OM la parte Oa=nR, y levanto la perpendicular aA, que la hago igual á la Om=nR; tiro por último desde A hasta m la recta Am, que resulta perpendicular á la Om: en este caso tenemos el cuadrado AmOa igual en superficie al cuadrante IEUMO; y se verá tambien que el punto de intercecsion E del arco y el lado Am es el punto medio de A y de m; y siempre se verifica esto mismo si la operacion se practica con todo rigor geométrico.

Todo esto sentado y entendido, procedamos á descubrir la exacta rectificacion de la circunferencia, para lo cual probaremos de una manera induvitada la 6.ª propiedad en la siguiente demostracion.

6.ª

Llamando y la estension lineal del arco cuadrante IEnUM (figura 2.ª) y r el rádio OM, tendremos que la superficie de todo el cuadrante ó de IEnUMO (3) es $\frac{1}{2}$ OI×IEnUM$=\frac{1}{2}ry$: y como esta superficie es igual á la del cuadrado AmOa (demostracion 1.ª), que está representada por $x^2=\frac{4}{5}r^2$ (s), cuya espresion está deducida de la ecuacion (t); es claro que igualando $\frac{4}{5}r^2$ con $\frac{1}{2}ry$, se obtiene la ecuacion $\frac{4}{5}r^2=\frac{1}{2}ry$ (m): suprimiendo en esta el factor comun r, se reduce á $\frac{4}{5}r=\frac{1}{2}y$ (n); y multiplicando ambos miembros por el denominador 2, y poniendo en 1.º la variable y, resulta $y=\frac{8}{5}r$ (b). Y siendo y el valor de la 4.ª parte de la circunferencia, será y es la circunferencia toda cuatro veces dicho valor, esto es, $4y=\frac{32}{5}r=6r+\frac{2r}{5}$ (j); y poniendo en esta ecuacion en vez de $2r$ el diámetro, que llamaremos d, se muda en $4y=3d+\frac{d}{5}$ (ch). Luego, la estencion lineal de toda la circunferencia es de tres diámetros y la quinta parte del diámetro, cuyo resultado procede de que la razon del diámetro con la circunferencia es la de 5 : 16.

5. De la ecuacion $x^2=\frac{4}{5}r^2$ (s), que es la espresion de la superficie del cuadrado A m O a, cuarta parte del total A B C D, é igual tambien á la superficie del cuadrante I E n U M Q (demostracion 1.ª), deducimos la de todo el círculo, cuadruplicando la primera; de modo que tenemos $4x^2=\frac{16r^2}{5}=2r\times\frac{2r.4}{5}=d\times\frac{4}{5}d$ (D): de donde se infiere, que *la superficie del circulo, es el producto del diámetro multiplicado por las cuatro quintas partes del mismo diámetro* Y como hemos visto, por una consecuencia forzosa, la operacion de la cuadratura ha precedido á la de la rectificacion de la circunferencia, vemos tambien que la espresion de la superficie del cuadrado, parece independiente de la del círculo, porque se espresa en funcion del rádio ó del diámetro; pero no es asi; porque existe una intima y recíproca relacion entre una y otra superficie, aunque corresponden á figuras desemejantes.

(4). En efecto, la espresion $\frac{16r^2}{5}$, que es la de la superficie del cuadrado igual á la del círculo, se puede espresar descomponiéndola, de este modo $\frac{16r^2}{5}=r\times\frac{16r}{5}$; pero como $\frac{16r}{5}$ representa la mitad de la circunferencia ó $\frac{1}{2}\times\frac{32r}{5}$; deducimos de aquí que la superficie del círculo es el producto del rádio multiplicado por la semicircunferencia, ó el producto de medio rádio multiplicado por la circunferencia:

y por consiguiente, el resultado $\frac{16\,r^2}{5}$ nos ofrece un nuevo comprovante de esta verdad; porque no hubiera resultado asi, á no ser cierta la espresion de la superficie del círculo.

(6). Demos ahora á conocer otra demostracion geométrica á las emitidas hasta aqui acerca del límite, y es de la manera siguiente, dividida en dos circunstancias.

1.ª Si concebimos como constante el rádio OM (figura 2.ª); y como variable el lado AB del cuadrado y tomamos un lado A′B′ (figura 4.ª) mayor que el lado AB (figura 2.ª); en este caso se verá prácticamente que los puntos de intercecsion s, t de los arcos iguales sE′I′O′t, $sy'pyt$ (figura 4.ª) quedan dentro del cuadrado; y por consiguiente, la demostracion geométrica (5) ya no tiene lugar en esta figura; porque aun cuando los segmentos resultan iguales, no encontrándose en un mismo punto el lado A′D′ del cuadrado ni la línea st, que divide por medio el semicuadrado A′abB′ ni los arcos que determinan los segmentos superior é inferior; es evidente que no pueden resultar iguales en superficie un triángulo mistilíneo U′A′E′ y un segmento mistilíneo E′I′O′E′, que es la circunstancia esencial para que el cuadrado y el círculo resulten iguales en superficie (demostracion 4.ª y geométrica, corolario).

2.ª Por otra parte, si concebimos asimismo como constante el círculo ó su rádio, y tomamos un lado A″B″ (fig. 5.ª) menor que el lado AB (fig. 2.ª), en este caso se verá practicamente, que los arcos que determinan los segmentos iguales, se cortan en los puntos a, b fuera del cuadrado; y por consiguiente, en este caso tampoco tiene lugar ni cabida la demostracion geométrica; porque no pasando dichos puntos por los de intercecsion de la circunferencia y los lados opuestos A″D″, B″C″ del cuadrado, no pueden concurrir todas las circunstancias que constituyen la igualdad de las superficies, y que son las que dan completa solucion al problema.

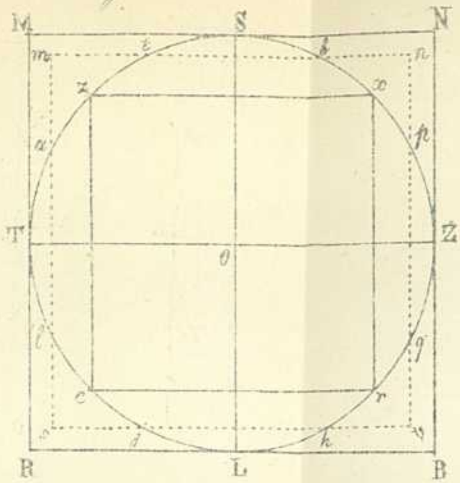
7. Hemos, pues, llenado el obgeto que nos habiamos propuesto. Solo nos resta añadir, que deducimos de consecuencia de todo lo practicado hasta aquí: que no habiendo podido hallar nuestros antecesores matemáticos, ni los contemporáneos, la cuadratura del círculo, ni la rectificacion de su circunferencia hasta que nosotros hemos vencido esta grandísima dificultad; no hay otro medio de resolver el problema mas que el que nosotros hemos presentado en estos trabajos. Que poseemos la gloria de ser los únicos que hemos desentrañado el gran secreto matemático, el talisman de la Geometria. Y por último, que hemos tenido los mas poderosos motivos para decir (1): « que el uso de las series aplicado á la rectificacion de la circunferencia, debe proscribirse enteramente, asi como para el mismo obgeto, el cálculo infinitesimal é integral; pues con ellos no se consigue otra cosa mas que acercarse á la verdad pero nunca llegar á poseerla; porque hay una barrera inaccesible entre ella y los medios que se habian escogitado para hallarla. »

FIN

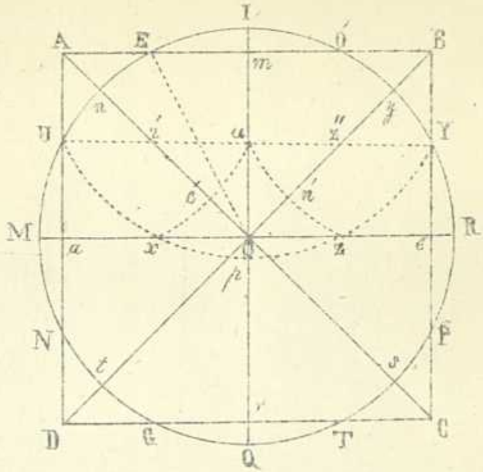
lad de las superficies, y que son las que dan completa so-lucion al problema.

2. Hemos, pues, ttenido el objeto que nos habiamos propuesto. Solo nos resta añadir, que deducimos de cuanto [illegible] todo lo mencionado hasta aquí; que no habiendo podido hallar nuestros antecesores matemáticos, ni los contemporáneos, la cuadratura del círculo, ni la rectificacion de su circunferencia, bien que nosotros hemos vencido esta dificultad, no hay otro medio de resolver el problema más que el que nosotros hemos presentado, [illegible] que presentan la [illegible] que los únicos que hemos [illegible] el sentido matemático, en [illegible], que hemos [illegible] poco [illegible], que el uso de las [illegible] aplicados á la rectificacion de la circunferencia dado [illegible] anteriormente, así como para el [illegible], al cálculo [illegible] integral y para con ellos [illegible] más que acercarse á la verdad pero nunca llegar á poseerla, porque hay una [illegible] entre ella y los [illegible] que se [illegible] [illegible].

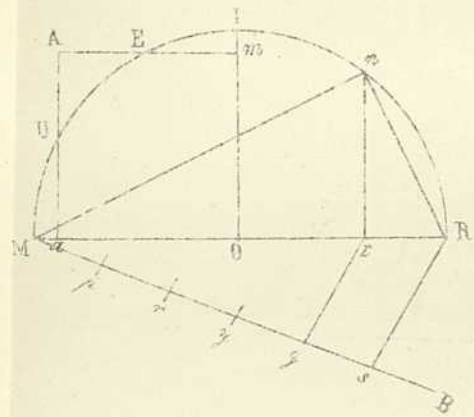
Figura 1ª



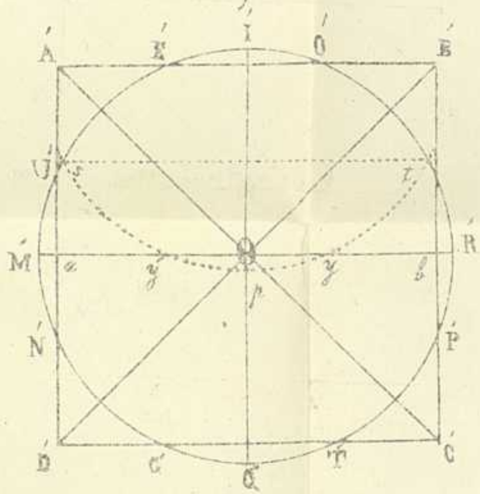
2ª



3ª



4ª



5ª