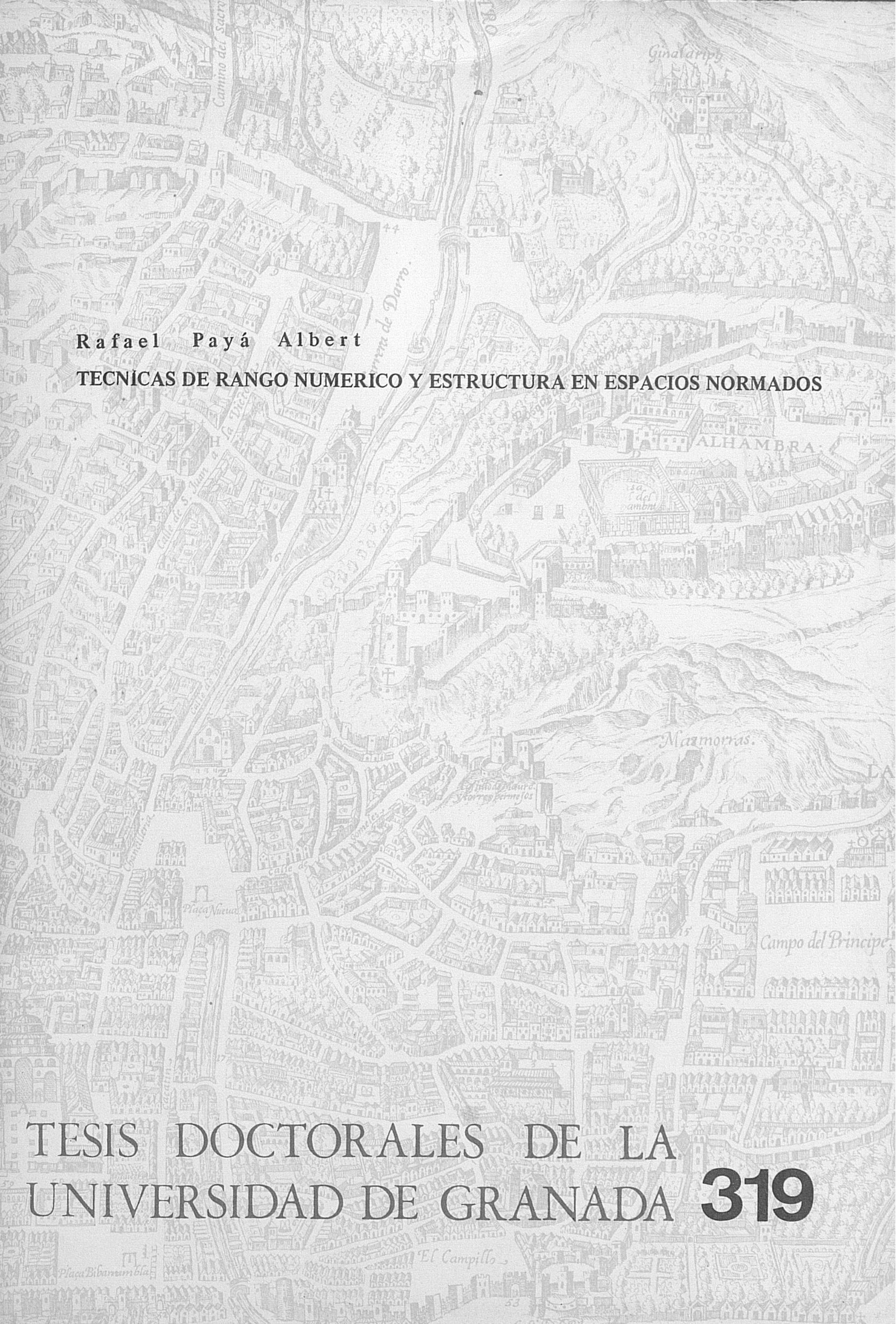

Rafael Payá Albert

TECNICAS DE RANGO NUMERICO Y ESTRUCTURA EN ESPACIOS NORMADOS

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA 319

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

TECNICAS DE RANGO NUMERICO Y ESTRUCTURA EN ESPACIOS NORMADOS

RAFAEL PAYA ALBERT

Tesis doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1980

© Im. Un. Gr. 46.1980. Depósito legal Gr. 112.1981. *Printed in Spain*
Imprenta de la Universidad de Granada. Hospital Real

Tesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. D. Angel Rodríguez Palacios, Adjunto de Análisis Matemático de la Universidad de Granada. Fue leída el día 25 de Junio de 1980, ante el tribunal formado por los Profesores: Gutiérrez Suárez; Valdivia Ureña; Fuentes Miras; Gasca González y Rodríguez Palacios. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

A Matilde

PROLOGO

El capítulo 0 de la presente memoria constituye una exposición resumida de los conceptos y resultados fundamentales que se introducen y estudian en ella, así como de los precedentes en los que se inspira. Se ha redactado con la intención de que sea totalmente independiente del resto de la memoria, por lo que puede omitirse su lectura sin perjuicio alguno para la comprensión de toda la exposición posterior.

Quiero aprovechar este momento para testimoniar por escrito mi más profundo y sincero agradecimiento al Prof. Dr. D. Angel Rodríguez Palacios, quien orienta y dirige desde hace varios años toda mi labor investigadora. Sin su valiosa y desinteresada ayuda, esta memoria no hubiera visto la luz.

Agradezco también a los restantes miembros del Departamento de Teoría de Funciones, en la persona de su Director, el Prof. Dr. D. José Ramón Fuentes Miras, su estímulo y ayuda de todo tipo.

Granada, Junio de 1980

Rafael Payá Albert

P R O L O G O

El capítulo 0 de la presente memoria constituye una exposición resumida de los conceptos y resultados fundamentales que se introducen y estudian en ella, así como de los precedentes en los que se inspira. Se ha redactado con la intención de que sea totalmente independiente del resto de la memoria, por lo que puede omitirse su lectura sin perjuicio alguno para la comprensión de toda la exposición posterior.

Quiero aprovechar este momento para testimoniar por escrito mi más profundo y sincero agradecimiento al Prof. Dr. D. Angel Rodríguez Palacios, quien orienta y dirige desde hace varios años toda mi labor investigadora. Sin su valiosa y desinteresada ayuda esta memoria no hubiera visto la luz.

Agradezco también a los restantes miembros del Departamento de Teoría de Funciones, en la persona de su Director, el Prof. Dr. D. José Ramón Fuentes Miras, su estímulo y ayuda de todo tipo.

Granada, Junio de 1990

Rafael Payá Albert

I N D I C E

C A P I T U L O   C E R O

INTRODUCCION

RESUMEN DE LA MEMORIA

El tema objeto de estudio en la presente memoria puede encuadrarse dentro de una teoría que, con el nombre de "*Estructura en los espacios de Banach*", ha venido desarrollándose en los últimos años.

Los orígenes de esta teoría pueden fijarse en 1960, fecha de publicación de un importante trabajo de Cunningham ([20]) y un hito fundamental en su desarrollo ha sido un trabajo debido a Alfsen y Effros ([3] y [4]), dividido en dos partes y publicado en 1972. Actualmente disponemos de dos monografías obra de Behrends ([9]), y Behrends y otros ([10]), en las que pueden encontrarse en forma sistemática la mayoría de los resultados en este campo, así como algunas de sus más brillantes aplicaciones.

Las siguientes consideraciones pueden servir de motivación inicial para algunos de los conceptos que se introducen en el estudio de la estructura en espacios de Banach :

Sea X un espacio de Banach y supongamos que disponemos de una proyección lineal continua π en X . Existe entonces un homeomorfismo lineal entre X y el espacio producto $\pi(X) \times \mathrm{Ker}(\pi)$ (considerando en este último la topología producto de las inducidas por X en los subespacios $\pi(X)$ y $\mathrm{Ker}(\pi)$). Todo ello se expresa abreviadamente poniendo : $X = \pi(X) \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$, expresión que nos informa de que la estructura algébrico-topológica de X se conoce sin más que conocer la de los subespacios $\pi(X)$ y $\mathrm{Ker}(\pi)$. Desde un punto de vista clásico en el estudio de los espacios normados, la anterior descomposición en suma directa es perfecta. Sin embargo, se halla hoy en gran auge el estudio de aquellas propiedades de los espacios normados que no se conservan en general al cambiar su norma por otra equivalente, propiedades que podemos llamar *geométricas*, de las que se ocupa una prometedora rama del Análisis Funcional conocida como "*Geometría de los espacios normados*" (véase [24] si se desea información sobre el contenido convencional de esta materia). Desde un punto de vista geométrico, la anterior descomposición de X en suma directa de subespacios no es perfecta, a menos que exijamos a la proyección π condiciones que nos aseguren que la norma de X queda determinada por el conocimiento de sus restricciones a $\pi(X)$ y $\mathrm{Ker}(\pi)$.

Antes de dar respuesta general a este problema, examinemos ejemplos ya clásicos de proyecciones con la propiedad deseada:

Sea X un espacio normado, π una proyección lineal en X y $1 \leqslant p \leqslant \infty$ diremos que π es una *L^p-proyección* si verifica :

$$\|x\| = (\|\pi(x)\|^p + \|x-\pi(x)\|^p)^{1/p} \quad (x \in X) \text{ si } 1 \leqslant p < \infty$$

$$\|x\| = \text{Máx } \{\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|\} \quad (x \in X) \text{ si } p = \infty$$

Las L^1-proyecciones, llamadas simplemente *L-proyecciones* fueron introducidas por Cunningham ([20]) al igual que las L^∞-proyecciones ([21]), llamadas posteriormente *M-proyecciones*. Las *L^p-proyecciones* con $1 < p < \infty$ han sido estudiadas sobre todo por Behrends ([5] y [6]). Un subespacio M de X recibe el nombre de *L^p-sumando* (resp. *L-sumando*, *M-sumando*) si es imagen de X por una L^p-proyección (resp. L-proyección, M-proyección).

Lima ([34], ver Teorema 5.6) ha introducido la siguiente debilitación del concepto de L-sumando :

Un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X se dirá que es un *semi-L-sumando* de X si para cada $x \in X$ existe un único $y \in M$ que materializa la distancia de x a M ($\|x-y\| = \text{Mín } \{\|x-m\| \; ; \; m \in M\}$), y además este único y verifica que : $\|x\| = \|y\| + \|x-y\|$.

Volviendo a nuestros planteamientos anteriores, es claro que las L^p-proyecciones sólo son casos particulares de proyecciones con un buen comportamiento geométrico en el sentido ya precisado. Se puede en general considerar una función $F: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ y llamar *F-proyección* en X a una proyección lineal π en X verificando:

$$\|x\| = F\,(\|\pi(x)\|,\ \|x-\pi(x)\|) \qquad (x \in X).$$

R. Evans demuestra ([27] Lema 1.3) que para que exista un espacio de Banach X y una F-proyección no trivial en X es condición necesaria y suficiente que F verifique;

i) $F\,(0,1) = F\,(1,0) = 1$

ii) $(\alpha,\beta) \to F(|\alpha|,|\beta|)$ *es una norma en* $\mathbb{R}^2$

condiciones que se pueden resumir diciendo que F es la restricción al primer cuadrante de una norma absoluta normalizada en $\mathbb{R}^2$ (o simplemente *norma absoluta*), esto es, una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ verificando:

$$|(1,0)| = |(0,1)| = 1 \quad y$$

$$|(\alpha,\beta)| = |(|\alpha|,\ |\beta|)| \ \textit{para todo}\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

El concepto de norma absoluta (en $\mathbb{C}^2$ y en particular en $\mathbb{R}^2$) se introduce en [17] (Sección 21) y se estudian algunas propiedades geométricas de dichas normas.

Nos hemos planteado en esta memoria el estudiar el concepto de F-proyección debido a Evans, pero al mismo tiempo hemos introducido una debilitación que permitiera tratar de manera unificada el concepto de semi-L-sumando de Lima. Dicho concepto se puede definir equivalentemente en la siguiente forma:

Si X es un espacio normado, M es un semi-L-sumando de X si y solo si existe una aplicación $\pi: X \to X$ (¡no necesariamente lineal¡) verificando:

i) $\pi(\lambda x) = \lambda\pi(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$

ii) $\pi(x+\pi(y)) = \pi(x)+\pi(y) \qquad (x,y \in X)$

iii) $\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x-\pi(x)\| \qquad (x \in X)$

y tal que $\pi(X) = M$.

Aparece así un semi-L-sumando como imagen de una aplicación con todas las propiedades de una L-proyección, salvo que la linealidad se ha sustituido por las condiciones *i*) y *ii*)

Consecuentemente, llamamos *semiproyección* en X a una aplicación de X en X verificando *i*) y *ii*) . Una semiproyección π la llamamos *absoluta* si existe una norma absoluta $|\cdot|$ verificando que

$$\|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| \qquad (x \in X)$$

definición que se justifica por el hecho de que el mismo razonamiento de Evans para proyecciones lineales permite probar que, si π es una semiproyección no trivial verificando :

$$\|x\| = F(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|) \qquad (x \in X),$$

F debe ser la restricción al primer cuadrante de una norma absoluta. Hablamos de *semi-* $|\cdot|$*-proyección* cuando queremos enfatizar la norma absoluta $|\cdot|$ asociada a una semiproyección absoluta (norma que, evidentemente, es única). Obsérvese que en vista de las consideraciones anteriores, un semi-L-sumando no es otra cosa que la imagen de X por una *semi-L-proyección*. En general llamamos *semisumando* a la imagen de X por una semiproyección absoluta y el término *semi-* $|\cdot|$ *-sumando* se entiende por sí solo. Finalmente, omitimos el prefijo "*semi*" cuando la semiproyección absoluta en cuestión es lineal, con lo que nuestras *proyecciones absolutas* no son otra cosa que las F-proyecciones de Evans. Se consigue por tanto con nuestra terminología dar una ambientación totalmente general a todos los conceptos presentados como antecedentes, apareciendo por otra parte una amplia gama de semisumandos, de los que solamente los semi-L-sumandos han sido estudiados hasta hoy.

Pasamos a relatar brevemente el contenido de la memoria, cuyos conceptos iniciales acabamos de presentar.

<u>CAPITULO I</u> : Desarrollamos en este capítulo las herramientas básicas con las que hemos atacado los distintos problemas objeto de la memoria, y que pueden resumirse en dos:

Por una parte utilizamos varios resultados de la *Teoría General de Rango Numérico*, teoría que puede concebirse como una visión local de la Geometría de los espacios normados. Sería largo comentar los orígenes y desarrollo de esta teoría, por lo que hemos preferido posponer este comentario para el momento de exponer los resultados que de ella se utilizan, cosa que se hace en las secciones 1, 2 y 3.

La otra herramienta básica utilizada es un completo estudio de las propiedades geométricas de las normas absolutas, al que se dedica el resto del capítulo. En la sección 4 se recopilan sin demostración los resultados sobre normas absolutas obtenidos en [17] (Sección 21), adaptados a $\mathbb{R}^2$. La sección 5 contiene nuestras aportaciones al estudio de estas normas, concebidas en función del uso que de ellas se hace en la memoria. La principal es una clasificación de las normas absolutas mediante el concepto de *tipo y cotipo* de una tal norma. Damos una idea intuitiva de estos conceptos para la mejor comprensión de enunciados posteriores. Una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$ se dice de *tipo 1* si la bola unidad para dicha norma admite más de una tangente en el punto (1,0). Si sólo admite una tangente, la norma se llamará de *tipo 2* en caso de que (1,0) sea punto extremo de la bola unidad, y de *tipo 3* en caso contrario. El *cotipo* se define análogamente para el punto (0,1). A título de ejemplo, las normas clásicas $|\cdot|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ definidas por:

$$\|(x,y)\|_p = (|x|^p+|y|^p)^{1/p} \quad si\ 1 \leqslant p < \infty$$

$$|(x,y)|_\infty = Máx\{|x|,|y|\} \qquad ((x,y)\in \mathbb{R}^2)$$

tienen todas tipo igual al cotipo, que es 1 si $p=1$, 2 si $1<p<\infty$ y 3 si $p=\infty$.

Hemos estudiado la relación existente entre el tipo y cotipo de una norma y sus propiedades de crecimiento estricto en cada una de las variables, así como la relación entre el tipo y cotipo de una norma $|\cdot|$ y los de su norma dual $|\cdot|'$, que es de manera natural una nueva norma absoluta en $\mathbb{R}^2$. Algunas de estas ideas aparecen muy rudimentariamente en el trabajo de Evans ([27]).

Terminamos el capítulo obteniendo una caracterización de las *normas clásicas* $|\cdot|_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ entre las normas absolutas. Todas las normas clásicas verifican las siguientes condiciones:

- *Son asociativas* : $|(|(x,y)|,z)| = |(x,|(y,z)|)|$
$(x,y,z\in \mathbb{R})$

- *Son conmutativas* : $|(x,y)| = |(y,x)| \qquad (x,y\in \mathbb{R})$

Bohnenblust ([12]) demostró que toda norma absoluta $|\cdot|$ asociativa y conmutativa es una norma clásica, esto es $|\cdot| = |\cdot|_p$ para algún p con $1\leqslant p\leqslant\infty$. Hemos perfeccionado este resultado probando (Teorema 6.4) que *toda norma absoluta asociativa es una norma clásica*, mostrando por tanto que la segunda hipótesis de Bohnenblust era superabundante.

A propósito de este resultado cabe comentar una noción introducida por Cohen y Sullivan ([19]) :

Consideran funciones F de la forma :

$$F(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y)) \;,\; x \geqslant 0 \;,\; y \geqslant 0$$

en que f es una función estrictamente creciente de $\mathbb{R}_0^+$ en $\mathbb{R}_0^+$, y para estas funciones, introducen el concepto de F-proyección análogo al de Evans. A partir del citado teorema de Bohnenblust, es fácil probar que si existe un espacio de Banach X y una F-proyección no trivial del tipo anterior en X debe ser $f(x) = x^p$ $(x \geqslant 0)$ para un $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$, con lo que en realidad Cohen y Sullivan sólo manejan L^p-proyecciones e incluso con $p \neq \infty$. La generalidad de su planteamiento sólo es, por tanto, aparente, si bien demuestran resultados que eran entonces desconocidos para L^p-proyecciones.

No queremos concluir el comentario a este capítulo sin advertir que la clasificación de las normas absolutas en $\mathbb{R}^2$ según su tipo y cotipo, ya presentada, y que en principio pudiera parecer artificiosa, no es punto de partida en nuestro trabajo sino, muy al contrario, consecuencia del análisis hecho en la totalidad de esta memoria sobre el comportamiento de los semisumandos y conceptos relacionados, que es muy distinto según, precisamente, el tipo y cotipo de la norma absoluta asociada. En particular, el comportamiento muy distinto de los L-sumandos con respecto a los M-sumandos, de sobra conocido en la literatura, encuentra aquí una explicación satisfactoria. Por esta razón creemos que el hallazgo de la mencionada clasificación constituye uno de los puntos clave de la memoria.

CAPITULO II : Dada una norma absoluta $|\cdot|$, definimos su revertida $|\cdot|^r$ por :

$$|(x,y)|^r = |(y,x)| \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

Como consecuencia de un resultado de Evans, cuya demostración damos por complitud, obtenemos que *el anulador* M^o *de un* $|\cdot|$*-sumando* M *de un espacio normado* X *es un* $(|\cdot|^r)'$*-sumando del espacio dual* X'. El recíproco del resultado anterior se sabe ser falso incluso en el caso $|\cdot| = |\cdot|_\infty$.

Alfsen y Effros ([4]) llaman *M-ideal* a un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X tal que M^o sea un L-sumando de X' , y como decíamos todo M-sumando es un M-ideal pero no recíprocamente. El concepto de M-ideal es probablemente el más fecundo de los introducidos en el estudio de la estructura en espacios de Banach, pues ha encontrado aplicaciones en campos muy lejanos al que le dió origen. Así, el concepto de M-ideal equivale en una C*-álgebra al de ideal bilátero cerrado ([4] y [43]), obteniéndose así una caracterización de los últimos en términos puramente geométricos, sin intervención del producto del álgebra. Nuestro compañero J. Pérez ha conseguido aplicar con éxito el concepto de M-ideal al estudio, hoy en creciente auge de las C*-álgebras de Jordan ([41]). Igualmente los M-ideales han sido útiles para obtener generalizaciones del Teorema de Banach-Stone ([7], [8], [9]), y es un problema hoy muy trabajado la caracterización de los M-ideales en distintas clases de espacios de Banach ([32], [33], [35]).

Lima ([34]) define un *semi-M-ideal* como un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X tal que M^o es un semi-L-sumando de X'.

Generalizamos los conceptos anteriores de la siguiente manera. Para una norma absoluta, $|\cdot|$, llamamos *semi-*$|\cdot|$*-ideal* (resp. $|\cdot|$-*ideal*) en un espacio normado X a todo subespacio cerrado M de X tal que M^o sea un semi-$(|\cdot|^{r})'$-sumando (resp. un $(|\cdot|^{r})'$-sumando) de X'. Existen distintos resultados afirmando en distintos casos que todo $|\cdot|$-ideal es un $|\cdot|$-sumando. Así, Cunningham, Effros y Roy ([22]) demuestran que en un espacio de

Banach X todo L-ideal es un L-sumando. Lima ([34], Teoremas 6.14 y 6.16) mejora este resultado probando que si M es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X tal que M^o es un semi-M-ideal (resp. un M-ideal), entonces M es un semi-L-sumando (resp. un L-sumando). Por último Fakhoury ([29], [30]) demuestra que en un espacio de Banach X todo L^p-ideal es un L^p-sumando para $1<p<\infty$. Todos estos resultados quedan ampliamente generalizados por nuestro Teorema 8.7 que afirma :

Si X es un espacio de Banach y M es un subespacio cerraado de X tal que M^o es un semi-$(|\cdot|^r)'$-ideal de X', teniendo $|\cdot|$ cotipo distinto de 3 entonces M es un semi-$|\cdot|$-sumando de X.

En particular (Corolario 8.8) :

Si $|\cdot|$ tiene cotipo distinto de 3 (como le ocurre a $|\cdot|_p$ para $1\leqslant p<\infty$) todo $|\cdot|$-ideal de un espacio de Banach X es un $|\cdot|$-sumando de X.

Estos resultados tienen además el interés especial de haberse obtenido por técnicas totalmente nuevas, muy distintas de las utilizadas en los precedentes citados, pues nos basamos en el hecho (Proposición 5.5) de que el crecimiento estricto en la primera variable es característico de las normas absolutas de cotipo distinto de 3.

Alfsen y Effros conjeturaban ([4], Problema 2) que todo M-ideal débil* cerrado de un espacio dual es un M-sumando, conjetura resuelta afirmativamente por el resultado ya citado de Lima. Damos una respuesta aún más general a este problema probando que *salvo que* $|\cdot|$ *tenga tipo 1 y cotipo 3, todo* $|\cdot|$*-ideal débil* cerrado de un espacio dual es un* $|\cdot|$*-sumando*. (Corolarios 8.8 y 9.2).

Pasamos entonces a analizar bajo qué condiciones un semi-$|\cdot|$-sumando de un espacio dual debe ser débil*-cerrado. La existencia de M-ideales que no son M-sumandos, obliga a admitir la de L-sumandos en espacios duales que no son débil* cerrados. Demostramos que *si* $|\cdot|$ *tiene cotipo distinto de 1 todo semi-*$|\cdot|$*-sumando en un espacio dual es débil* cerrado* (Teorema 9.5), obteniendo como Corolario (9.6) un resultado de Evans ([27]) que afirma la *débil*-continuidad de las* $|\cdot|$*-proyecciones en un espacio dual, cuando* $|\cdot|$ *tiene tipo y cotipo distintos de 1*.

A partir de la Sección 10 empiezan a jugar un papel esencial en nuestros razonamientos las técnicas de rango numérico expuestas en el Capítulo I.

Se demuestra (Teorema 10.6) que :

Si $|\cdot|$ *tiene tipo 2 o 3, todo semi-*$|\cdot|$*-sumando de un espacio normado X es un* $|\cdot|$*-sumando de X,*

siendo por tanto debilitable la hipótesis de linealidad en la definición de L^p-proyección para $p\neq 1$, hecho este que no parece ser conocido. Ello permite por otra parte mejorar el enunciado del Corolario 8.8 ya comentado, probando que : *si* $|\cdot|$ *tiene cotipo distinto de 3, todo semi-* $|\cdot|$*-ideal de un espacio de Banach es un* $|\cdot|$*-sumando.* (Teorema 10.8).

Es un hecho trivial que toda proyección lineal queda determinada por el conocimiento de su núcleo e imagen. Cunningham ([20]) demostró que dos L-proyecciones con la misma imagen deben coincidir. Ello se traslada fácilmente a M-proyecciones, y Behrends demostró en general que si dos L^p-proyecciones ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) tienen la misma imagen son iguales ([5]). Hemos conseguido demostrar (Teorema 11.1) que :

Dos semiproyecciones absolutas con la misma imagen son iguales.

Se consigue así una generalización de los resultados anteriores en una triple vertiente. Por una parte se pasa de la consideración de normas clásicas a la de normas absolutas arbitrarias, por otra se debilita la hipótesis de linealidad, y por último, lo que quizá es más importante, no se exige en principio que las dos semiproyecciones absolutas correspondan de antemano a la misma norma absoluta, sino que incluso este hecho aparece como tesis.

Se sigue que todo semisumando es imagen de una única semiproyección absoluta, y por tanto, en caso de no trivialidad, tiene asociada una norma absoluta única para la que puede ser semi- $|\cdot|$-sumando. Este hecho se traslada inmediatamente a semiideales, y permite hablar del tipo y cotipo de un semisumando (resp. semiideal) sin más que asignarle los de la norma absoluta asociada a él.

El capítulo se concluye probando (Teorema 11.5) que :

Toda semiproyección absoluta π *en un espacio normado* X *verifica la desigualdad :*

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leqslant \|x-y\| \qquad (x,y\in X)$$

y, en particular, es uniformemente continua, hechos que son triviales en caso lineal, pero que no parecen en absoluto evidentes para semiproyecciones.

CAPITULO III : Recordemos que si X es un espacio normado complejo, un operador $T\in BL(X)$ se llama *hermitiano* si tiene su rango numérico contenido en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado de [17] (Lema 29.2) puede servir de motivación para el núcleo de problemas que se tratan en este capítulo :

Sea X el espacio normado $\mathbb{C}^2$ dotado de una norma absoluta $|\cdot| \neq |\cdot|_2$. Sea $T\in BL(X)$ un operador hermitiano. Entonces la matriz asociada a T en la base canónica es diagonal.

Obsérvese que en el anterior espacio normado X ,$\mathbb{C}\times\{0\}$

y $\{0\}\times\mathbb{C}$ son un $|\cdot|$-sumando y su $|\cdot|^{r}$-sumando complementario. El enunciado anterior nos informa de que ambos sumandos, supuesto que no sean L^2-sumandos, permanecen invariantes por cualquier operador hermitiano.

Mediante el estudio de distintos casos particulares, llegamos a la conjetura de que un enunciado análogo pudiera ser válido a nivel completamente general, a pesar del salto que supone pasar de un ejemplo concreto, bidimensional, a un espacio normado arbitrario. Los resultados no han podido ser más satisfactorios, pues hemos conseguido establecer el siguiente enunciado (Teorema 14.7) :

Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y M un semisumando de X que no sea un L^2-sumando. Sea $T\in BL(X)$ y supongamos que el rango numérico de T tiene interior vacío en $\mathbb{K}$ (en particular puede ser X complejo y T hermitiano). Entonces M es invariante por T.

Es éste sin duda uno de los resultados cumbre de la memoria. Observemos primeramente que el rango numérico deja de ser aquí una herramienta, pues el teorema anterior puede considerarse como un resultado propio de la teoría general de rango numérico, al poner de manifiesto la estrecha relación entre el rango numérico de un operador lineal continuo y la estructura del espacio en el que está definido.

Otro hecho sorprendente es que de conjeturar un resultado para sumandos se haya pasado a establecerlo en general para semisumandos. En realidad las técnicas utilizadas para trabajar el caso lineal y el no lineal son sustancialmente diferentes. Para el primero se utiliza un resultado debido esencialmente a Giles, Gregory y Sims ([31]) que un tanto retocado, se demuestra en la sección 13. Para atacar el caso no lineal aprovechamos el hecho de que un semisumando que no sea sumando es obligadamente de tipo 1 (Teorema 10.6 ya comentado) hecho que permite utilizar los resultados más potentes del capítulo anterior. Se obtiene incluso en este caso una perfección adicional sobre el enunciado que hemos dado, pues se admiten operadores T no necesariamente lineales e incluso se debilita la hipótesis sobre su rango numérico.

El teorema anterior encuentra como se verá una amplia gama de aplicaciones. La primera es resolver el problema de la relación entre la estructura de un espacio normado complejo X y la de su espacio normado real subyacente $X_{\mathbb{R}}$, o problema de la $\mathbb{R}$-determinación de los semisumandos y semiideales. Es evidente que todo semisumando o semiideal de X lo es también de $X_{\mathbb{R}}$. Hirsberg ([33], ver también [9]) había probado que los L-sumandos y M-ideales de $X_{\mathbb{R}}$ lo eran también de X. Damos respuesta definitiva a este problema demostrando (Teoremas 15.7 y 15.10) que :

Los semisumandos (resp. semiideales) de un espacio normado X, con la única excepción de los L^2-sumandos (resp. L^2-ideales) coinciden con los de su espacio normado real subyacente $X_{\mathbb{R}}$.

La excepción de la norma $|\cdot|_2$ se ve ser obligada incluso en el caso trivial $X = \mathbb{C}$.

La otra consecuencia fundamental de la estabilidad de los semisumandos por operadores hermitianos proyecta su influencia sobre todo el resto de la memoria. El hecho de que la imagen y el núcleo de una proyección sean invariantes por un operador es evidentemente equivalente a que proyección y operador conmuten en el álgebra de operadores. No es difícil comprobar que las proyecciones absolutas en un espacio normado complejo son operadores hermitianos, con lo que en vista del teorema fundamental citado, llegamos a la conclusión de que dos proyecciones absolutas (con la excepción de que se trate de dos L^2-proyecciones) en un espacio normado complejo siempre conmutan. Este resultado, que deliberadamente no concretamos, es falsamente brillante, pues como ya había detectado Evans, la conmutación de dos proyecciones absolutas impone severas restricciones a dichas dos proyecciones.

Se sabe (Behrends [5] y [10]) que para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$, dos L^p-proyecciones en un mismo espacio de Banach siempre conmutan. Evans ([27] y [28]) demuestra que recíprocamente, la conmutación de dos proyecciones absolutas no triviales, salvados los casos de igualdad o complementariedad, y bajo condiciones no muy restrictivas, implica el que se trate de dos L^p-proyecciones para un mismo p. Obtenemos al respecto el siguiente enunciado (Teorema 16.7) :

Sean π_1 y π_2 dos proyecciones absolutas, no triviales, distintas y no complementarias ($\pi_1, \pi_2 \neq 0, I$, $\pi_1 \neq \pi_2$ y $\pi_1 \neq I - \pi_2$), en un espacio normado X. Supongamos que : $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1$. Entonces π_1 y π_2 son L^p-proyecciones para un mismo p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si se supone que π_1 y π_2 son semi-proyecciones absolutas y se exige solamente la linealidad de una de ellas, se obtiene igualmente que las normas absolutas asociadas a π_1 y π_2 coinciden ambas con una misma norma clásica $|\cdot|_p$.

Este resultado, aún en el caso lineal, mejora los de Evans en [27], donde exige de antemano que π_1 y π_2 correspondan a una misma norma absoluta que además debe ser conmutativa, y en [28], donde evita estas restricciones, pero impone que la composición $\pi_1 \pi_2$ sea una nueva proyección absoluta.

Clarificada la situación con respecto a la conmutación de las semiproyecciones absolutas volvemos a nuestros razonamientos anteriores : Si por una parte se tiene la conmutación casi segura de dos semiproyecciones absolutas en un espacio complejo, y por otra, esta conmutación está sujeta a severas restricciones, no queda más salida que aceptar que *la propia existencia de dos semiproyecciones absolutas en un mismo espacio normado complejo está ya sujeta a severas restricciones.* Este enunciado, un tanto ambiguo aún, y que enseguida concretaremos, nos introduce en el bloque de resultados que constituye el último capítulo de la memoria. Algunos de ellos se obtienen ya en la sección 17, pero para unificar, los comentamos junto con los del capítulo IV.

CAPITULO IV : Resumimos a continuación en un solo enunciado varios resultados de Behrends ([5], ver también [9], Teoremas 1.13 y 6.2) que son los únicos precedentes de los resultados que se obtienen en este capítulo :

Sea $1\leqslant p<q\leqslant\infty$ y sea X un espacio de Banach que admita un L^p-sumando y un L^q-sumando, ambos no triviales. Entonces se tiene $p=1$, $q=\infty$ y X tiene dimensión dos sobre $\mathbb{R}$. (En particular X no puede ser un espacio complejo).

La laguna que deja el teorema anterior es fácilmente ejemplificable, $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$ admite evidentemente a $\mathbb{R}\times\{0\}$

como M-sumando, pero además $\mathcal{R}(1,1)$ es un L-sumando. Salvada esta laguna, la coexistencia de un L^p-sumando y un L^q-sumando en un mismo espacio normado, para $p \neq q$, es imposible. Por otra parte, como ya se hacía ver anteriormente, si admitimos todas las normas absolutas, incluso la existencia de dos $|\cdot|$-sumandos, salvados los casos triviales, parecía obligar a que fuese $|\cdot| = |\cdot|_p$ para algún p. Ello lleva de manera natural a las siguientes conjeturas :

a) Caso complejo : Sea X un espacio normado complejo, y sean M y N dos sumandos de X , no triviales, distintos y no complementarios (imagen y núcleo de la misma proyección absoluta) .¿ Son obligadamente M y N L^p-sumandos para un mismo p con $1 \leq p \leq \infty$?.

b) Caso real : Sea X un espacio normado real de dimensión mayor que dos. La misma conjetura que en a).

La conjetura a) se ha resuelto afirmativamente, e incluso se ha perfeccionado considerando el caso no lineal, demostrando (Teorema 20.6) lo siguiente :

Sea X un espacio normado complejo, M un semisumando de X y N un sumando de X. Supongamos que M y N son no triviales, distintos y no complementarios. Entonces las normas absolutas asociadas a M y N son iguales a $|\cdot|_p$ para un mismo p $(1 \leq p \leq \infty)$.

El camino de demostración del teorema anterior, en caso lineal tal como aparece enunciado en a) se ha sugerido anteriormente. Para el caso en que se tiene un sumando y un semisumando ha sido preciso obtener previamente algunos resultados de interés en sí mismos, que se recogen en las secciones 18,19 y 20 y que después han resultado útiles al estudiar el caso real. A destacar entre ellos el Teorema 20.2 : *Si X es un espacio normado real o complejo y M,N dos semisumandos no triviales de X en la situación* $M \subset N$, $M \neq N$, *las semiproyecciones absolutas asociadas a M y N conmutan y las normas absolutas asociadas coinciden con* $|\cdot|_p$ *para un mismo p con* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ .En particular se tiene que *dos* L^2*-proyecciones comparables siempre conmutan,* hecho que no parece ser conocido.

Con respecto al caso real hay que decir que no se ha resuelto la conjetura b) a plena generalidad, pero se ha conseguido el siguiente enunciado que abarca una amplia gama de casos : (Teorema 21.11)

Sea X un espacio normado real de dimensión mayor que 2 y sean M y N sumandos de X no triviales, distintos y no complementarios. Supongamos que uno de ellos tiene tipo y cotipo distintos de 2. Entonces M y N son dos L-sumandos o dos M-sumandos.

Acerca del procedimiento seguido para obtener el teorema anterior es interesante destacar el siguiente resultado (Teorema 21.7) :

Sea X un espacio normado real, M un semisumando de tipo 1 y N un sumando de X. Supongamos que ambos son no triviales, distintos y no complementarios. Si M no es un semi-L-sumando o N no es un L-sumando, entonces M es unidimensional.

Obsérvese que en este último teorema se da entrada al caso no lineal. En el ambiente de un espacio normado real hay que tener en cuenta que la consideración de dicho caso enriquece notablemente la situación, pues aparecen numerosos ejemplos de coexistencia de un semi-L-sumando con M-ideales e incluso con M-sumandos en espacios de dimensión mayor que 2 :

Sea K un *"conjunto convexo compacto"* y $A(K)$ *el espacio de las funciones afines y continuas de* K *en* $\mathbb{R}$ *con la norma uniforme.* Lima ([34]) ha probado que el subespacio unidimensional de $A(K)$ formado por las funciones constantes es un semi-L-sumando de $A(K)$. Resultados de Alfsen y Andersen ([2]) y de Perdrizet ([40]) han permitido caracterizar los M-ideales de $A(K)$ como los subespacios formados por las funciones que se anulan en una cara directa cerrada de K, y el M-ideal es un M-sumando cuando dicha cara está complementada por otra cara directa cerrada. Así pues, si K admite una cara directa cerrada, en $A(K)$ existen semi-L-sumandos y M-ideales no triviales y si además dicha cara está complementada por otra cara cerrada existen semi-L-sumandos y M-sumandos no triviales en $A(K)$. La situación anterior puede ejemplificarse en $\mathbb{R}^3$ (caso en que K es un triángulo). Hemos omitido las definiciones de los conceptos anteriores, que pueden encontrarse en las referencias citadas o en la sección 21 de esta memoria, pues sería largo darlas en esta introducción.

Aplicando los citados resultados de [34], [2] y [40], hemos conseguido demostrar (Teorema 21.8) :

Sea X un espacio de Banach real, M un semi-L-sumando de X y N un M-ideal de X, no triviales. Existe un conjunto convexo compacto K y una biyección lineal isométrica ϕ de X sobre $A(K)$ tal que $\phi(M)$ es el subespacio de $A(K)$ formado por las funciones constantes, y $\phi(N)$ consta de las funciones que se anulan en una cara directa cerrada F de K.

Creemos que este teorema constituye un análisis definitivo del teorema de Behrends conocido como Teorema L-M ([9] , Teorema 1.13), abarcando el caso no lineal.

Terminamos aquí esta introducción. El lector habrá observado que los enunciados que aquí se han dado de los resultados más sobresalientes de la memoria, no corresponden literalmente a los que aparecen en el texto de la misma. Estas modificaciones están hechas con la sana intención de que los resultados aparezcan expuestos en la forma más elegante posible, aún a costa de perder generalidad, pues el enunciado que aquí se da es siempre más débil que el que luego se demuestra. Ello ha permitido también reducir al mínimo el número de conceptos que se definen en la introducción, para no alargarla excesivamente.

C A P I T U L O   I

RANGO NUMERICO

NORMAS ABSOLUTAS

1. GENERALIDADES SOBRE LA FUNCION ESTADO

1.1 NOTACION : Durante toda la presente memoria, la letra $\mathbb{K}$ denotará indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. $\mathbb{K}$ se considerará fijo en cada enunciado o demostración, mientras no se advierta lo contrario.

Sea $(X, \|\cdot\|)$, (X si no hay lugar a confusión) un espacio normado (sobre $\mathbb{K}$). Notaremos :

$B(X) = \{ x \in X : \|x\| \leqslant 1 \}$ la bola unidad de X.

$S(X) = \{ x \in X : \|x\| = 1 \}$ la esfera unidad de X.

X' denotará el espacio dual de X y $BL(X)$ el álgebra normada unital de los operadores lineales acotados en X. Por último, si X es complejo, $X_{\mathbb{R}}$ denotará el espacio normado real subyacente a X.

1.2 DEFINICION : Sea X un espacio normado, $x \in X$, $x' \in X'$. Diremos que x' es un *estado* de X relativo a x si se verifica que:

$$\| x' \| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \langle x', x \rangle = \| x \| .$$

Notaremos $\mathcal{D}(X,x)$, ($\mathcal{D}(x)$ si no hay confusión posible) al conjunto de los estados de X relativos a x.

El concepto de estado tiene una interpretación geométrica sencilla. Concretamente, si $\| x \| = 1$, los estados relativos a x son los funcionales de soporte para $B(X)$ en el punto x , en el sentido de que $x' \in \mathcal{D}(X,x)$ si y sólo si se tiene:

$$Re \langle x', x \rangle = 1 \text{ y } Re \langle x', y \rangle \leqslant 1 \text{ para } y \in B(X)$$

como se puede fácilmente comprobar. (Obsérvese que la función "parte real" se utiliza indistintamente en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$,considerándose naturalmente en $\mathbb{R}$ como la identidad, lo que debe ser tenido en cuenta en adelante).

La función $x \to \mathcal{D}(X,x)$, conocida como función de dualidad o "*función estado*", es una importante herramienta en el estudio de la Geometría de los espacios normados (a título de ejemplo, por supuesto no único, puede verse [31]). Enumeramos a continuación algunas de sus más elementales propiedades:

1.3 PROPOSICION : *i) Para cada* $x \in X$ *,* $D(x)$ *es una parte no vacía, convexa y* $\sigma(X',X)$*-compacta de* X'.

ii) $D(0) = B(X')$.

iii) $D(\lambda x) = \frac{|\lambda|}{\lambda} D(x)$ *para* $x \in X$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

DEMOSTRACION : *i)* La no vaciedad de $D(x)$ viene asegurada por el teorema de Hahn-Banach, su convexidad es inmediata. Para la $\sigma(X',X)$-compacidad basta aplicar el teorema de Banach-Alaoglú y la $\sigma(X',X)$-continuidad de la función : $x' \to \langle x',x \rangle$ de X' en $\mathbb{K}$.

ii) y *iii)* Evidente.

1.4 DEFINICION : Dado $x \in S(X)$, diremos que x es un *vértice* de $B(X)$ si $D(X,x)$ separa los puntos de X. Diremos que x es *punto suave* de $B(X)$ si $D(X,x)$ es un subconjunto unitario de X'.

1.5 PROPOSICION : ([16] Nota que sigue al Teorema 4.6) : *Todo vértice de* $B(X)$ *es punto extremo de* $B(X)$. (La afirmación recíproca es falsa, piénsese en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea).

DEMOSTRACION : Sea x vértice de $B(X)$ y $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ con $0<\alpha<1$, $x_1, x_2 \in B(X)$. Para $x' \in D(x)$ se tiene:

$1 = \langle x',x \rangle = \alpha \langle x',x_1 \rangle + (1-\alpha) \langle x',x_2 \rangle$ lo que junto con $|\langle x',x_i \rangle| \leq 1$ $i=1,2$ implica : $\langle x',x_1 \rangle = \langle x',x_2 \rangle = 1$ de donde finalmente $x_1 = x_2 = x$ ya que $D(x)$ separa puntos.

La influencia del cuerpo base en el concepto de estado se recoge en el siguiente enunciado :

1.6 PROPOSICION : ([17] Corolario 15.4) : *Sea* X *un espacio normado complejo y* $x_0 \in S(X)$. *La aplicación* $x' \to Re(x')$ *es una biyección afín de* $D(X,x_0)$ *sobre* $D(X_{\mathbb{R}},x_0)$.

DEMOSTRACION : $y' \to Re(y')$ es una biyección lineal isométrica de $(X')_{\mathbb{R}}$ sobre $(X_{\mathbb{R}})'$. Evidentemente, si $x' \in D(X,x_0)$, es $Re(x') \in D(X_{\mathbb{R}},x_0)$. Sea $Re(x') \in D(X_{\mathbb{R}},x_0)$, entonces :

$$\|x'\| = \|Re(x')\| \leq 1 \quad y \quad \langle x',x_0\rangle = 1+i\alpha .$$ Dado que $1+\alpha^2 = |\langle x',x_0\rangle|^2 \leq \|x'\| \ \|x_0\|^2 \leq 1$ se tiene $\alpha = 0$ y $x' \in D(X,x_0)$.

2. ESPACIOS DE RANGO NUMERICO : CONCEPTOS Y RESULTADOS BASICOS

2.1 DEFINICIONES : El par (X,u) en que X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $u \in S(X)$ recibe el nombre de *espacio de rango numérico*. Por abuso de lenguaje, se hablará del espacio de rango numérico X entendiéndose que el elemento u (llamado *elemento distinguido* del espacio de rango numérico) está inequívocamente fijado. Los espacios de rango numérico (Y,u) en que Y es un subespacio de X en la situación $u \in Y$, se llamarán *subespacios de rango numérico* de (X,u).

Si (X,u) es un espacio de rango numérico el convexo compacto $\mathcal{D}(X,u)$ (la topología es la $\sigma(X',X)$), se llamará *espacio de estados* de dicho espacio de rango numérico, se denotará simplemente por $\mathcal{D}(X)$ y sus elementos se llamarán *estados* de X.

Para cada $x \in X$, el conjunto:

$$V(X,x) = \{\langle x',x\rangle \quad : \quad x' \in \mathcal{D}(X)\}$$

se llamará *rango numérico* del elemento x y, cuando no haya lugar a confusión, se notará $V(x)$.

Si (X,u) es un espacio de rango numérico complejo, $(X_{\mathbb{R}},u)$ será el espacio de rango numérico real subyacente a (X,u).

2.2 NOTA : Salvo escasas excepciones aisladas (ver por ejemplo [18], [13], [14], [37]), los únicos espacios de rango numérico estudiados en profundidad hasta la fecha son los de la forma (A,I) donde A es un álgebra asociativa normada unital e I es la unidad de A. Para un estudio exhaustivo de este tema es insustituible la monografía de Bonsall y Duncan ([16] y [17]). Sólo muy recientemente se ha generalizado este estudio al caso de ser A no asociativa ([14] , [38], [42], [44]).

No es nuestro objetivo aquí hacer un estudio exhaustivo de la teoría abstracta de rango numérico (cabe decir al respec to que el director de la presente memoria, con la colaboración del autor, tiene en preparación una completa monografía sobre el tema), sino solamente introducir aquellas técnicas y resultados que serán de utilidad en el desarrollo de la memoria. Sin embargo, por complitud, incluimos las demostraciones de estos resultados. En algunos casos la demostración conocida para álgebras normadas unitales cuya referencia se da, vale también en el caso general. En otros son necesarios retoques de mayor o menor envergadura.

En la siguiente proposición se resume una primera información sobre las nociones introducidas en la definición 2.1

2.3 PROPOSICION : (Ver [15], Proposición 10.4). *Sea (X,u) un espacio de rango numérico.*

i) Para cada $x\in X$, $V(x)$ es un subconjunto no vacío convexo y compacto de $\mathbb{K}$.

ii) $V(x+y) \subset V(x) + V(y) \qquad (x,y\in X)$

iii) $V(\lambda x) = \lambda V(x) \qquad (x\in X, \lambda\in \mathbb{K})$

iv) $V(x+\lambda u) = V(x)+\lambda \qquad (x\in X, \lambda\in \mathbb{K})$

v) Si X es complejo : $\operatorname{Re} V(X,x) = V(X_{\mathbb{R}},x)$, $(x\in X)$.

DEMOSTRACION : *i)* $V(x)$ es la imagen de $D(X)$ por la función lineal y $\sigma(X',X)$-continua : $x' \to \langle x',x\rangle \quad (x'\in X')$, y $D(X)$ es convexo y $\sigma(X',X)$-compacto (Proposición 1.3). *ii)*, *iii)*, *iv)* son evidentes. *v)* En vista de la proposición 1.6 se tiene:

$$D(X_{\mathbb{R}}) = \{Re(x') : x' \in D(X)\},$$ y el resto es trivial.

2.4 DEFINICION : Si X es un espacio de rango numérico y $x \in X$, definimos :

$$v(x) = Máx\{ |\lambda| : \lambda \in V(x)\}$$

El número $v(x)$ se llama *radio numérico* del elemento x. La función radio numérico, $x \to v(x)$ de X en $\mathbb{R}$ es evidentemente una seminorma en X, que además es continua, pues trivialmente : $v(x) \leqslant \|x\| \quad (x \in X)$.

2.5 DEFINICION : El *índice numérico* de un espacio de rango numérico X, $n(X)$, se define por la expresión :

$$n(X) = Inf\{ v(x) : x \in S(X)\} ,$$

o equivalentemente, $n(X)$ es el mayor de los números reales no negativos m tales que :

$$m \|x\| \leqslant v(x) \qquad (x \in X)$$

2.6 PROPOSICION : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico :*

i) La función radio numérico es una norma en X si y sólo si u es un vértice de $B(X)$.

ii) $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$; $n(X) > 0$ si y sólo si la función radio numérico es una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$.

DEMOSTRACION : *i)* Se deduce directamente de la definición de vértice, pues : $v(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x', x\rangle = 0$ para todo $x' \in D(X,u)$.
ii) Inmediato a partir de la definición de $n(X)$.

3. DISTINTAS DETERMINACIONES DEL RANGO NUMERICO

El objetivo en esta sección es deducir varias expresiones cómodas para la determinación del rango numérico que se utilizarán con profusión. La primera de ellas muestra el rango numérico como una intersección de discos cerrados (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) o intervalos cerrados ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Para $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \geqslant 0$, notaremos :

$$E(\alpha,\beta) = \{ \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda - \alpha| \leqslant \beta \}$$

3.1 TEOREMA : ([17], Lema 15.1) *Sea (X,u) un espacio de rango numérico sobre $\mathbb{K}$. Se verifica :*

$$V(X,x) = \cap \{ E(\lambda, \|x - \lambda u\|) \ ; \ \lambda \in \mathbb{K} \} \qquad (x \in X)$$

DEMOSTRACION : Si $z \in V(X,x)$ se tiene para $\lambda \in \mathbb{K}$ que : $z - \lambda \in V(x - \lambda u)$, (Proposición 2.3, *iv)*), y por tanto : $|z - \lambda| \leqslant v(x - \lambda u) \leqslant \|x - \lambda u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

La inclusión contraria es evidente si x y u son linealmente dependientes. En otro caso, sea $z \in \cap \{ E(\lambda, \|x - \lambda u\|) ; \lambda \in \mathbb{K} \}$

y definamos en el subespacio engendrado por $\{x,u\}$ el funcional lineal : $f_0(\alpha u+\beta x)=\alpha+\beta z \qquad (\alpha,\beta\in K)$ que verifica : $f_0(x) = z$, $f_0(u) = 1$. Se tiene :

$$|f_0(\alpha u+\beta x)| = |\alpha+\beta z| = |\beta|\ \left|z-\frac{-\alpha}{\beta}\right| \leqslant |\beta|\ \left\|x-\frac{-\alpha}{\beta}u\right\| = \|\alpha u+\beta x\|$$

para $\beta\neq 0$ y la desigualdad es evidente si $\beta=0$. Así pues, f_0 es continuo y $\|f_0\|\leqslant 1$. Por el teorema de Hahn-Banach, f_0 se extiende en un $f\in X'$ que verifica : $\|f\|\leqslant 1 \quad f(u)=1 \quad f(x)=z$ luego $z\in V(X,x)$ como queríamos.

En virtud del teorema anterior, el rango numérico de cualquier elemento $x\in X$ se conoce a partir del conocimiento de la norma en el subespacio de X engendrado por $\{x,u\}$. Como consecuencia de esto se obtiene fácilmente :

3.2 COROLARIO : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico y sea Y un subespacio de rango numérico de X. Entonces :*

$V(Y,y) = V(X,y)$ para todo $y\in Y$. En consecuencia: $n(Y)\geqslant n(X)$.

El Teorema 3.1 muestra también la forma de definir aplicaciones entre espacios de rango numérico que conserven el rango numérico :

3.3 DEFINICION : Sean (X,u) e (Y,v) dos espacios de rango numérico sobre $\mathbb{K}$. Un *homomorfismo de rango numérico de X en Y* será por definición una aplicación lineal f de X en Y verificando :

$$\|f(x)\| \leqslant \|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X \qquad y \quad f(u) = v$$

3.4 COROLARIO : *Sean* (X,u) *e* (Y,v) *espacios de rango numérico sobre* $\mathbb{K}$ *y* $f: X \to Y$ *un homomorfismo de rango numérico. Entonces :*

$$V(Y,f(x)) \subset V(X,x) \qquad (x \in X)$$

Si además f *es isométrica la inclusión es una igualdad.*

DEMOSTRACION : Para $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene :

$\|f(x) - \lambda v\| = \|f(x - \lambda u)\| \leqslant \|x - \lambda u\|$ y basta aplicar el Teorema 3.1. Si f es isométrica la desigualdad se convierte en igualdad.

3.5 NOTA : El teorema que vamos a demostrar a continuación, posiblemente uno de los más importantes de la teoría general de rango numérico, nos va a dar una cómoda fórmula para calcular el máximo de la parte real de $V(x)$, para cualquier elemento x de un espacio de rango numérico. Dado que en vista del apartado *iii)* de la Proposición 2.3 una tal fórmula también permitirá conocer $\textit{Máx. Re}\ [zV(x)]$ *para* $z \in \mathbb{K}$, $|z| = 1$, siendo $V(x)$ convexo y compacto, esto equivale al conocimiento de $V(x)$

Por la aplicación que tendrá esta idea en lo sucesivo, la especificamos a continuación. Sea H una parte no vacía convexa y compacta de $\mathbb{K}$; la función: $z \to \textit{Máx Re}\ (zH)$ *de* $S(\mathbb{K})$ en

$\mathbb{R}$ se llama *función de soporte* de H. La función de soporte, ϕ_H, de H determina H mediante la fórmula:

$$H = \bigcap_{z\in S(\mathbb{K})} z^{-1}\,\{w\in\mathbb{K} : Re(w) \leq \phi_H(z)\}$$

y por tanto *si dos convexos compactos no vacíos tienen la misma función de soporte, son iguales.*

Para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ este enunciado es evidente; en el caso complejo, la demostración (fácil) y algunos interesantes complementos pueden verse en ([11], página 70 y sig.)

3.6 TEOREMA : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico, y $x\in X$. Se verifica:*

$$Máx\ Re\ V(x) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha} = Inf\left\{\frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha} : \alpha>0\right\}$$

DEMOSTRACION : En vista de la Proposición 2.3, $v)$ podemos limitarnos a considerar el caso $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Aplicando el Teorema 3.1 tenemos:

$$Máx\ V(x) = Inf\ \{\lambda + \|x-\lambda u\| : \lambda\in\mathbb{R}\}$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, se tiene:

$$\lambda_1 + \|x-\lambda_1 u\| = \lambda_1 + \|(\lambda_2-\lambda_1)u + x - \lambda_2 u\| \leq$$

$$\leq \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 + \|x-\lambda_2 u\| = \lambda_2 + \|x-\lambda_2 u\|$$

Así, la función : $\lambda \to \lambda + \|x - \lambda u\|$ es creciente en $\mathbb{R}$ y por tanto :

$$\text{Máx } V(x) = \text{Inf}\{\lambda + \|x-\lambda u\| : \lambda\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \lim_{\lambda\to-\infty} \{\lambda+\|x-\lambda u\|\}.$$ Haciendo $\lambda = -1/\alpha$ para λ próximo a $-\infty$ se obtiene la tesis del teorema.

El teorema anterior pone de manifiesto que el conocimiento del rango numérico está asegurado cuando se conozca la estructura lineal de X, su elemento distinguido u, y la restricción de la norma a un entorno arbitrariamente pequeño de dicho elemento distinguido.

Es difícil establecer la paternidad del teorema 3.6. En el caso de álgebras normadas unitales es conocido (ver, por ejemplo, [16]) como consecuencia sencilla de un teorema de Lumer ([36]). Una amplia generalización del teorema 3.6 puede verse en [26] (Teorema V.9.5, pag. 447).

Como consecuencia del teorema 3.6. obtenemos a continuación una caracterización de los elementos hermitianos de un espacio de rango numérico complejo, que pasamos a definir.

3.7 DEFINICION : Sea (X,u) un espacio de rango numérico complejo. Un elemento $x\in X$ se llamará *hermitiano* si verifica que: $V(X,x)\subset\mathbb{R}$. Notaremos $H(X)$ el conjunto de los elementos hermitianos de X, que en vista de la Proposición 2.3 (*ii*) y *iii*)) es un subespacio vectorial de $X_{\mathbb{R}}$.

3.8 COROLARIO : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico complejo Para $x \in X$ se tiene :*

$$x \in H(X) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\|u + i\alpha x\| - 1}{\alpha} = 0$$

DEMOSTRACION : Evidentemente $x \in H(X) \Leftrightarrow V(ix) \subset i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \text{Máx Re } V(ix) = \text{Min Re } V(ix) = 0$ y aplicando el Teorema 3.6 junto con el hecho evidente de ser :

$\text{Min Re } V(ix) = - \text{Máx Re } V(-ix)$ tenemos que $x \in H(X)$ si y sólo si:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\| u+i\alpha x\| - 1}{\alpha} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\| u-i\alpha x\| - 1}{\alpha} = 0$$

pero esta doble igualdad equivale claramente a la condición del enunciado.

Terminamos esta sección con una generalización del teorema 3.6. que nos será de gran utilidad. El resultado está sugerido en ([25], VIII.4, Problema 8).

3.9 TEOREMA : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico. Sea $\delta > 0$ y f una función definida en $[0,\delta]$ con valores en X, tal que*

$f(0)=u$ y que sea derivable por la derecha en 0. Entonces la función $\alpha \to \|f(\alpha)\|$ de $[0,\partial]$ en $\mathbb{R}$ es derivable por la derecha en 0 con derivada igual a Máx Re $V(f'(0))$.

DEMOSTRACION : Por ser f derivable por la derecha en cero existe $g:]0,\partial] \to X$, verificando:

$$f(\alpha) = u+\alpha f'(0)+\alpha g(\alpha) \qquad 0<\alpha\leqslant \partial \qquad \lim_{\alpha \to 0^+} g(\alpha)=0. \text{ Entonces:}$$

$$\frac{\|u+\alpha f'(0)\|-1}{\alpha} - \|g(\alpha)\| \leqslant \frac{\|f(\alpha)\|-1}{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|u+\alpha f'(0)\|-1}{\alpha} + \|g(\alpha)\|$$

y aplicando el Teorema 3.6 obtenemos finalmente :

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|f(\alpha)\|-1}{\alpha} = \text{Máx Re } V(f'(0))$$

4. NORMAS ABSOLUTAS

4.1 DEFINICION : Una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ se llama *absoluta* si verifica que:

$$|(x,y)| = |(|x|,|y|)| \quad \textit{para todo} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

o, dicho de manera equivalente, si la bola unidad de $(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ admite las rectas $x=0$ e $y=0$ como ejes de simetría. Una norma absoluta $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ se llamará *normalizada* si verifica que:

$$|(1,0)| = |(0,1)| = 1$$

Por comodidad en el lenguaje siempre que se hable de una *norma absoluta*, se entenderá norma absoluta normalizada en $\mathbb{R}^2$.

4.2 EJEMPLOS : Las normas clásicas en $\mathbb{R}^2$ son todas ellas absolutas. Fijaremos para ellas la siguiente nomenclatura :

Sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$; notaremos $|\cdot|_p$ a la norma en $\mathbb{R}^2$ dada por :

$$|(x,y)|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \quad \textit{si} \ 1 \leqslant p < \infty$$

$$|(x,y)|_\infty = \text{Máx}\,\{|x|, |y|\} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Enumeramos a continuación varios hechos básicos sobre normas absolutas en $\mathbb{R}^2$ que se usarán profusamente en adelante, a veces sin mencionarlo expresamente.

Para evitar continuas referencias a otros trabajos hemos preferido enunciar brevemente estas propiedades, omitiendo las demostraciones, que aparecen claramente expuestas en [17], para $\mathbb{C}^2$; la adaptación a $\mathbb{R}^2$ es inmediata.

4.3 LEMA : ([17], Lemas 21.1 y 21.2). *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$.

i) $|\cdot|_\infty \leqslant |\cdot| \leqslant |\cdot|_1$

ii) Para $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, *si* $|x| \leqslant |u|$, $|y| \leqslant |v|$ *se tiene :*

$|(x,y)| \leqslant |(u,v)|$. *Si además las dos desigualdades de partida son estrictas, se obtiene la desigualdad estricta en la tesis.*

4.4 LEMA : ([17], Lema 21.3 y comentario previo al mismo).
Sea $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$. *Definiendo :*

$$\phi(t) = |(1-t,t)| \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

se obtiene una función convexa y continua ϕ *en* $[0,1]$ *que verifica :*

$$\phi(0) = \phi(1) = 1 \quad y \quad \text{Máx}\,\{1-t,t\} \leqslant \phi(t) \leqslant 1$$

Recíprocamente, si ϕ *es una tal función, definiendo :*

$$|(x,y)| = (|x| + |y|)\, \phi\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right) \quad (x,y) \neq (0,0);\ |(0,0)| = 0$$

se obtiene una norma absoluta, única que verifica :

$$|(1-t,t)| = \phi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

4.5 NOTA : La caracterización de las normas absolutas en términos de funciones convexas, dada por el lema anterior, resulta útil para la definición de nuevos ejemplos de tales normas.

Obsérvese también, que si para $0 \leqslant t \leqslant 1$ notamos :

$x(t) = \dfrac{1}{\phi(t)}(1-t,t) \in \mathbb{R}^2$ obtenemos una parametrización de la parte de $S(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ contenida en el primer cuadrante, siendo ϕ la función convexa asociada biunívocamente a $|\cdot|$ por el lema anterior. Dado que $|\cdot|$ se supone absoluta, el estudio geométrico de $S(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ y en particular de la función estado se reduce a su estudio en los puntos $x(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

4.6 DEFINICION : Sea $|\cdot|$ una norma absoluta. Cada par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ puede ser considerado como funcional lineal continuo en $(\mathbb{R}^2\ |\cdot|)$ mediante la fórmula : $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax+by \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ y como tal tiene norma igual a : $Sup\ \{|ax+by| \ :\ |(x,y)| \leq 1\}$.

Así, si definimos : $|(a,b)|' = Sup\{|ax+by| : |(x,y)| \leq 1\}$, disponemos de una nueva norma en $\mathbb{R}^2$, que evidentemente es absoluta y que llamaremos *norma dual* de la dada. No existe, que sepamos, una relación sencilla de manejar entre las funciones convexas asociadas a $|\cdot|$ y $|\cdot|'$ por el Lema 4.4. Sin embargo, podemos disponer de una cómoda descripción de la función estado en puntos de $S(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$, que exponemos a continuación.

4.7 LEMA : ([17], Lema 21.4). *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta y* ϕ *la función convexa asociada a ella.* ϕ *admitirá derivadas por la izquierda y por la derecha en todo punto* t *de* $]0,1[$ *que notaremos* $\phi'_-(t)$ *y* $\phi'_+(t)$. *Igualmente existirán* $\phi'_+(0)$ *y* $\phi'_-(1)$. *Notemos:*

$$G(t) = [\phi'_-(t), \phi'_+(t)] \quad si\ 0<t<1 \ ; \quad G(0) = [-1-\phi'_+(0), \phi'_+(0)+1]$$

$$y \quad G(1) = [\phi'_-(1) -1, 1-\phi'_-(1)] .$$

Para $x(t) = \dfrac{1}{\phi(t)}(1-t,t)$ *se tiene :*

i) *Si* $0<t<1$: $D(\mathbb{R}^2,x(t))=\{(\phi(t)-t\gamma,\phi(t)+(1-t)\gamma)\ :\gamma\in G(t)\}$

ii) $D(\mathbb{R}^2,x(1))=\{(\gamma,1)\ :\gamma\in G(1)\}$; $D(\mathbb{R}^2,x(0))=\{(1,\gamma):\gamma\in G(0)\}$

Damos a continuación una descripción del rango numérico, radio numérico e índice numérico en el espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2,(1,0))$ cuando en $\mathbb{R}^2$ se considera una norma absoluta $|\cdot|$. Por comodidad, notaremos Y a dicho espacio de rango numérico.

4.8 PROPOSICION : *Sea* ϕ *la función convexa asociada a la norma* $|\cdot|$ *y sea* : $K=1+\phi_+'(0)$. *Entonces* :

i) $V(Y,(x,y))=E(x,K|y|)$ (ver notación previa al Teorema 3.1)

ii) $v(Y,(x,y))=|x|+K|y|$

iii) $n(Y)=K$

DEMOSTRACION : *i)* Aplicando el Lema 4.7 tenemos :

$$V(Y,(0,1))=G(0)=[-1-\phi_+'(0),1+\phi_+'(0)]=K\ E(0,1).$$

de donde, aplicando la Proposición 2.3 :

$$V(Y,(x,y))=V(Y,x(1,0)+y(0,1))=$$
$$=x+y\ K\ E(0,1)=x+E(0,K|y|)=E(x,K|y|).$$

ii) Trivial a partir de *i)*.

iii) Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene, aplicando el Lema 4.3 *i)* y el hecho evidente $K\leqslant 1$:

$$K|(x,y)| \leqslant K(|x|+|y|) \leqslant |x|+K|y| = v(Y,(x,y))$$

de donde $n(Y) \geqslant K$ pero tomando $(x,y)=(0,1)$ se tiene : $|(x,y)|=1$ y $v(Y,(x,y))=K$ luego $n(Y)=K$.

5. TIPO Y COTIPO DE UNA NORMA ABSOLUTA

Sea $|\cdot|$ una norma absoluta. Cualquier punto de $S(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ cae necesariamente en uno y sólo uno de los conceptos introducidos en la Definición 1.4 : es un vértice o un punto suave. Un vértice es necesariamente punto extremo de la bola unidad (Proposición 1.5) pero un punto suave puede ser o no punto extremo. Basándonos en las tres posibilidades anteriores, haremos una clasificación de las normas absolutas atendiendo a su comportamiento en los dos puntos del primer cuadrante comunes a todas ellas :

5.1 DEFINICION : Diremos que una norma absoluta, $|\cdot|$, es de *tipo 1,2 o 3* según que el punto $(1,0)$ sea un vértice, un punto suave que sea a la vez punto extremo o un punto no extremo respectivamente, de $B(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$.

Análogamente se define el *cotipo* de $|\cdot|$ con arreglo a su comportamiento en el punto $(0,1)$.

A partir de $|\cdot|$ podemos definir una nueva norma absoluta, $|\cdot|^{r}$, mediante la expresión :

$$|(x,y)|^r = |(y,x)| \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

$|\cdot|^r$ se llamará norma absoluta *revertida* de $|\cdot|$. Una norma absoluta se llamará *conmutativa* si coincide con su revertida. Evidentemente el cotipo de una norma es igual al tipo de su revertida y viceversa.

5.2 EJEMPLOS : Las normas clásicas $|\cdot|_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ son todas conmutativas, y tienen por tanto tipo igual al cotipo. $|\cdot|_1$ es de tipo 1, para $1<p<\infty$ $|\cdot|_p$ es de tipo 2 y $|\cdot|_\infty$ es de tipo 3.

A partir del Lema 4.7 obtenemos de manera inmediata la siguiente caracterización :

5.3 PROPOSICION : *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta y ϕ la función convexa en $[0,1]$ asociada a ella. Sea:* $x(t) = \dfrac{1}{\phi(t)}\,(1-t,t)$

i) Para $0<t<1$, $x(t)$ es punto suave si y sólo si ϕ es derivable en el punto t.

ii) $|\cdot|$ es de tipo 1 si y sólo si $\phi'_+(0) > -1$, lo que equivale, con la terminología de la Proposición 4.8 a ser $n(Y) > 0$.

iii) $|\cdot|$ es de cotipo 1 si y sólo si $\phi'_-(1) < 1$.

DEMOSTRACION : Evidente a partir del Lema 4.7.

Por lo que a la función estado en el punto (1,0) se refiere, no existe diferencia entre las normas absolutas de tipo 2 y las de tipo 3. Sin embargo, estas últimas tienen especiales propiedades de crecimiento. Empecemos por concretar en qué consisten estas propiedades.

5.4 DEFINICION : Diremos que una norma absoluta, $|\cdot|$, tiene la propiedad de *crecimiento estricto en la primera variable* si verifica que cualesquiera que sean $x,u \in \mathbb{R}$:

$$|x| < |u| \Rightarrow |(x,y)| < |(u,y)| \quad \textit{para todo} \quad y \in \mathbb{R},$$

y análogamente se define la propiedad de *crecimiento estricto en la segunda variable.*

5.5 PROPOSICION : *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

i) $|\cdot|$ *carece de la propiedad de crecimiento estricto en la segunda variable.*

ii) Existe $y \neq 0$ *tal que :* $|(1,y)| = 1$

iii) $|\cdot|$ *es de tipo 3.*

DEMOSTRACION : De *i)* se sigue la existencia de $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tales que : $|y_1| < |y_2|$ y $|(x,y_1)| = |(x,y_2)|$.

No hay inconveniente en suponer :

$$0 \leqslant y_1 < y_2 \ , \ 0 < x \quad \text{y} \quad |(x,y_i)| = 1 \quad (i=1,2).$$

Consideremos el punto de coordenadas :

$$(\lambda,\gamma) = \left(\frac{xy_2}{(y_2-y_1)x+y_1} , \frac{y_1 y_2}{(y_2-y_1)x+y_1} \right) = \frac{y_2}{(y_2-y_1)x+y_1} (x,y_1)$$

$$|(\lambda,\gamma)| = \frac{y_2}{(y_2-y_1)x+y_1} \geqslant 1 \qquad (\text{pues } x \leqslant |(x,y_1)| = 1)$$

Es inmediato que tomando : $\alpha = \dfrac{y_1}{(y_2-y_1)x+y_1}$ se tiene

$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ y $(\lambda,\gamma) = \alpha(x,y_2) + (1-\alpha)(1,0)$ de donde

$|(\lambda,\gamma)| \leqslant 1$ y en suma $\dfrac{y_2}{(y_2-y_1)x+y_1} = |(\lambda,\gamma)| = 1$, lo que

implica : $x = 1$ y se tiene : $|(1,y_2)| = 1$ con $y_2 \neq 0$

Queda así demostrado que $i) \Rightarrow ii)$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Si $|(1,y)| = 1$ con $y \neq 0$, escribiendo :

$(1,0) = 1/2(1,y) + 1/2(1,-y)$ obtenemos el punto $(1,0)$ como combinación convexa propia de puntos de $B(\mathfrak{R}^2, |\cdot|)$ y por tanto $|\cdot|$ es de tipo 3.

$iii) \Rightarrow i)$: Si $|\cdot|$ es de tipo 3, se tendrá :

$(1,0) = \alpha(x_1,y_1) + (1-\alpha)(x_2,y_2)$ con $0 < \alpha < 1$

$$|(x_1,y_1)| = |(x_2,y_2)| = 1 \quad \text{y} \quad (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2).$$

Por el Lema 4.3 se tiene : $|x_i| = |(x_i,0)| \leqslant |(x_i,y_i)| = 1$ $(i = 1,2)$, lo que junto con : $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = 1$ fuerza ser : $x_1 = x_2 = 1$. Entonces $y_1 \neq 0$ y $|(1,0)| = |(1,y_1)| = 1$ lo que impide el crecimiento estricto en la segunda variable.

Pasamos ahora a estudiar la relación entre el tipo y cotipo de una norma absoluta y los correspondientes a su norma dual.

5.6 PROPOSICION : *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta y* $|\cdot|'$ *su norma dual. Se tiene :*

i) $|\cdot|$ *es de tipo 1* $\Leftrightarrow$ $|\cdot|'$ *es de tipo 3*

ii) $|\cdot|$ *es de tipo 3* $\Leftrightarrow$ $|\cdot|'$ *es de tipo 1*

iii) $|\cdot|$ *es de tipo 2* $\Leftrightarrow$ $|\cdot|'$ *es de tipo 2*

iv) Los mismos enunciados i), ii), iii) para el cotipo.

DEMOSTRACION : Observemos primeramente que, dado que trivialmente $|\cdot|$ vuelve a ser la norma dual de $|\cdot|'$, para demostrar *i)* y *ii)* bastará demostrar las implicaciones hacia la derecha.

i) $(1,0)$ es un estado de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ relativo a $(1,0)$. y si $|\cdot|$ es de tipo 1, por ser $(1,0)$ vértice debe existir otro estado distinto, que necesariamente será de la forma $(1,b)$ con $b\neq 0$. De $|(1,b)|' = 1$ con $b\neq 0$ obtenemos que $|\cdot|'$ es de tipo 3, sin más que aplicarle la Proposición 5.5.

Si $|\cdot|$ es de tipo 3, existe $y \neq 0$ tal que : $|(1,y)| = 1$ (Proposición 5.5). Entonces $(1,0)$ y $(1,y)$ son estados de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|')$ relativos a $(1,0)$ y linealmente independientes, luego $|\cdot|'$ es de tipo 1.

iii) Se deduce de *i)* y *ii)* por exclusión.

iv) Basta tener en cuenta la igualdad trivial : $(|\cdot|^r)' = (|\cdot|')^r$ y aplicar *i)*, *ii)* y *iii)* a $|\cdot|^r$.

6. ASOCIATIVIDAD DE UNA NORMA ABSOLUTA

El objetivo de esta sección es obtener una caracterización de las normas clásicas $|\cdot|_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ entre las normas absolutas. La propiedad que las caracteriza es la que a continuación se define.

6.1 DEFINICION : Una norma absoluta, $|\cdot|$ se llamará *asociativa* si verifica : $|(|(x,y)|,z)| = |(x,|(y,z)|)|$ *para* $x,y,z \in \mathbb{R}$

Evidentemente es suficiente la verificación de la igualdad anterior para $x,y,z \geqslant 0$

Pretendemos probar que toda norma absoluta asociativa coincide con $|\cdot|_p$ para algún p en la situación $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Nuestros resultados se basan esencialmente en un trabajo de Bohnenblust ([12]), pero hemos tenido que retocar su demostración, pues de su resultado solamente se deduce que toda norma absoluta asociativa ¡y conmutativa¡ coincide con $|\cdot|_p$ para algún p. Para fijar ideas, empezamos enunciando el resultado que obtiene Bohnenblust y el perfeccionamiento que de él hacemos.

6.2 LEMA : (Bohnenblust, [12], Teorema 4.1). *Sea f una función definida para $x\geq 0$, $y\geq 0$, con valores reales no negativos verificando :*

i) $f(\alpha x,\alpha y) = \alpha f(x,y)$ *para* $\alpha,x,y\geq 0$

ii) $f(x,y) \leq f(x',y')$ *para* $x'\geq x\geq 0,\ y'\geq y\geq 0$

iii) $f(x,y) = f(y,x)$ *para* $x,y\geq 0$

iv) $f(0,1) = 1 \quad (= f(1,0)$ *por iii)*)

v) $f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z)$ *para* $x,y,z\geq 0$

Entonces, existe p *con* $0<p\leq\infty$ *tal que :*

$$f(x,y) = (x^p+y^p)^{1/p} \quad \text{para } x,y\geq 0.$$

(por convenio $(x^{\infty}+y^{\infty})^{1/\infty} = \text{Máx}\,\{x,y\}$ *).*

6.3 LEMA : *Si en el Lema 6.2 se suprime la condición iii) y se reescribe iv) en la forma : iv')* $f(0,1) = f(1,0) = 1$ *, la tesis del Lema sigue siendo cierta.*

DEMOSTRACION : Seguimos la demostración de [12] ; solamente exponemos los pasos en los que se utiliza *iii)* y damos la forma de evitarla.

Supongamos en primer lugar que $f(1,1) = 1$. Entonces, utilizando *ii)* y *iv')* tenemos :

$$1 = f(0,1) \leq f(t,1) \leq f(1,1) = 1 \qquad (0\leq t\leq 1)$$
$$1 = f(1,0) \leq f(1,t) \leq f(1,1) = 1 \qquad (0\leq t\leq 1)$$

Utilizando $i)$ se puede ya demostrar que para : $x,y \geq 0$, $f(x,y) = Máx\{x,y\}$ obteniéndose la tesis del Lema con $p = \infty$.

En otro caso $(f(1,1) > 1)$ hemos de probar que :

$f(x,y) = (x^p + y^p)^{1/p}$ $(x,y \geq 0)$ con $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

Consideremos la sucesión $\{\alpha_n\}$ definida inductivamente por

$$\alpha_1 = 1 , \quad \alpha_n = f(1, \alpha_{n-1}) \qquad para \quad n > 1.$$

En la demostración del Lema 6.2 que aparece en [12], solamente se utiliza la hipótesis $iii)$ para asegurar que :

$$f(\alpha_n, \alpha_m) = f(\alpha_m, \alpha_n) \qquad \text{para} \qquad n,m \geq 1$$

Sin embargo, esta igualdad se puede probar en nuestras hipótesis de la siguiente forma :

Dado que para $x,y \geq 0$ es $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$, (i), f es una ley de composición interna en $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ que por la condición $v)$ le dota de estructura de semigrupo. El subconjunto unitario $\{1\}$ es trivialmente un subconjunto conmutativo de dicho semigrupo (un subconjunto de un semigrupo se llama conmutativo si dos cualesquiera de sus elementos conmutan). Por una aplicación standard del Lema de Zorn, se puede demostrar que todo subconjunto conmutativo de un semigrupo debe estar contenido en un subconjunto conmutativo maximal (el orden es la inclusión), mientras que es elemental comprobar que los subconjuntos conmutativos maximales de un semigrupo son subsemigrupos.

Sea entonces B subconjunto conmutativo maximal de $\mathbb{R}_0^+$ tal que $1 \in B$. Por ser B subsemigrupo se tiene $\alpha_n \in B$ para todo $n \geq 1$ con lo que para $n,m \geq 1$, α_n y α_m conmutan, obteniéndose la igualdad buscada.

Salvado el paso anterior, puede seguirse íntegramente la demostración de [12].

6.4 TEOREMA : *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta asociativa. Entonces :*

$$|\cdot| = |\cdot|_p \quad \textit{para algún} \quad p \quad \textit{con} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

DEMOSTRACION : Sea $f(x,y) = |(x,y)|$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$. Es inmediato comprobar que f verifica las hipótesis del Lema 6.3 (ver Lema 4.3).

Se tiene entonces :

$$|(x,y)| = f(x,y) = (x^p + y^p)^{1/p} \quad (x,y \geq 0) \quad \text{con} \quad 0 < p \leq \infty.$$

El hecho de ser $p \geq 1$ se deduce fácilmente aplicando que $f(1/2,1/2) \leq 1$. Finalmente, tomados $x,y \in \mathbb{R}$ arbitrarios se tiene :

$$|(x,y)| = |(|x|,|y|)| = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

C A P I T U L O   I I

SEMISUMANDOS

SEMIIDEALES

7. SEMIPROYECCIONES ABSOLUTAS. SEMISUMANDOS

Durante toda la presente sección, X será un espacio normado real o complejo, cuya norma se notará por $\|\cdot\|$.

7.1 DEFINICION : Llamaremos *semiproyección en* X a toda aplicación $\pi : X \to X$ verificando :

$$i) \ \pi(x+\pi(y)) = \pi(x)+\pi(y) \qquad (x,y \in X)$$

$$ii) \ \pi(\lambda x) = \lambda \, \pi(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

De la condición *ii)* se obtiene que $\pi(0) = 0$ con lo que haciendo $x = 0$ en *i)* obtenemos que π es idempotente :

$$\pi(\pi(y)) = \pi(y) \qquad (y \in X)$$

Es igualmente evidente que la imagen de X por una semiproyección es un subespacio vectorial de X. Por otra parte, si π es una semiproyección en X, $Ker(\pi) = \{x \in X : \pi(x) = 0\}$ es un cono simétrico de X. Se tiene además: $X = \pi(X) + Ker(\pi), \pi(X) \cap Ker(\pi) = \{0\}$

7.2 EJEMPLOS : a) Toda proyección (lineal) en X es una semiproyección en X. Para que una semiproyección π en X sea una auténtica proyección, es condición necesaria y suficiente que $Ker(\pi)$ sea convexo, como se puede fácilmente comprobar.

b) Recordemos que un subespacio M de X se llama *proximinal* (resp. *de Chebyshev*) si para cada x de X existe al menos un (resp. existe un único) m en M que materializa la distancia de x a M, esto es, tal que : $\| x-m \| = Min\{\| x-y\| : y\in M\}$

Si M es un subespacio de Chebyshev de X y para cada x de X notamos $\pi(x)$ al único punto de M que materializa la distancia de x a M , es elemental comprobar que π es una semiproyección en X.

Nos interesan aquellas semiproyecciones π para las que la norma de cada vector $x\in X$ depende solamente de $\|\pi(x)\|$ y $\|x-\pi(x)\|$, esto es tales que existe una función $F : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tal que :

$$\|x\| = F(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|) \qquad (x\in X)$$

Sea π una semiproyección en estas condiciones, y descartemos los casos triviales $\pi(X)=X$ y $\pi=0$. Sean entonces : $x,y\in S(X)$ con $\pi(x)=x$, $\pi(y)=0$. La función : $(\alpha,\beta)\to \alpha x+\beta y$ es una biyección lineal de $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio bidimensional de X engendrado por $\{x,y\}$, con lo que definiendo :

$|(\alpha,\beta)| = \|\alpha x+\beta y\| = F(|\alpha|,|\beta|)$ se obtiene una norma en $\mathbb{R}^2$ que evidentemente es absoluta. Además, claramente, F es la restricción de dicha norma al primer cuadrante. Se justifica así la siguiente definición.

7.3 DEFINICION : Sea $|\cdot|$ una norma absoluta, y π una semiproyección en X. Diremos que π es una *semi-$|\cdot|$-proyección* si verifica:

$$\|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| \qquad (x \in X)$$

El prefijo "*semi*" se omitirá en el caso de que π sea lineal.

Diremos que π es una semiproyección (resp. proyección) *absoluta*, si existe una norma absoluta $|\cdot|$ para la cual π es una semi-$|\cdot|$-proyección (resp. $|\cdot|$-proyección).

7.4 NOTA IMPORTANTE : Las aplicaciones π_1 y π_0 definidas por :

$$\pi_1(x) = x \qquad \pi_0(x) = 0 \qquad (x\in X)$$

son evidentemente $|\cdot|$-proyecciones para cualquier norma absoluta $|\cdot|$. Interesa descartarlas para evitar trivialidades, por lo que *siempre que se hable de una semiproyección absoluta π, se entenderá que $\pi\neq\pi_1$ y $\pi\neq\pi_0$*, lo que en ocasiones se enfatizará diciendo que π es no trivial.

7.5 DEFINICION : Si π es una semiproyección absoluta en X, teniendo en cuenta la nota anterior, es inmediato que π es semi-$|\cdot|$-proyección para una única norma absoluta $|\cdot|$. Ello permite definir el *tipo y cotipo* de una semiproyección absoluta como el tipo y cotipo de la norma absoluta $|\cdot|$ asociada a ella.

7.6 DEFINICION : Llamaremos *semi-$|\cdot|$-sumando* (resp. *$|\cdot|$-sumando*) de X a la imagen de X por una semi-$|\cdot|$-proyección (resp. $|\cdot|$-proyección). En general, la imagen de X por una semiproyección (resp. proyección) absoluta recibirá el nombre de *semisumando* (resp. *sumando*) de X. (No nos parece necesario introducir aquí el calificativo "absoluto"). Evidentemente si π es una $|\cdot|$-proyección en X, $I-\pi$ es una $|\cdot|^{\pi}$-proyección en X, con lo que : $(I-\pi)(X) = Ker(\pi)$ es un $|\cdot|^{\pi}$-sumando.

7.7 EJEMPLOS : Los casos particulares de $|\cdot|$-sumandos más ampliamente estudiados son aquellos en que $|\cdot|$ es una de las normas clásicas $|\cdot|_p$ $(1\leqslant p\leqslant \infty)$, (ver Ejemplo 4.2). Los $|\cdot|_1$-sumandos se conocen con el nombre de L-sumandos, y su definición se debe a Cunningham ([20]). Otro tanto ocurre con los $|\cdot|_\infty$-sumandos, llamados M-sumandos. Los $|\cdot|_p$-sumandos para $1<p<\infty$ se denominan L^p-sumandos y han sido estudiados principalmente por Behrends ([5]). Quizá merezca la pena hacer constar que para los ejemplos clásicos citados conservaremos la nomenclatura universalmente aceptada en lugar de utilizar la particularización para ellos de la nuestra. Así hablaremos de L-proyecciones y L-sumandos en lugar de $|\cdot|_1$-proyecciones y $|\cdot|_1$-sumandos, etc.

Las $|\cdot|$-proyecciones para una norma absoluta arbitraria $|\cdot|$ han sido estudiadas por Evans ([27]) que las llama F-proyecciones, notando F a la restricción de $|\cdot|$ al primer cuadrante. El razonamiento anterior a la definición 7.3,que se hacía para justificar la utilización de las normas absolutas, se debe a Evans en el caso lineal (para proyecciones).

El concepto de semiproyección absoluta es nuevo. El único posible precedente se comentará enseguida (ver Nota que sigue a la Proposición 7.9).

Dedicamos el resto de esta sección a estudiar las propiedades de aproximación de los semisumandos. El cotipo de la norma absoluta considerada juega, como se verá,un papel esencial.

7.8 PROPOSICION : *Sea π una semiproyección absoluta en X y sea $M = \pi(X)$. Se tiene :*

i) $\|x-\pi(x)\| = \text{Mín}\ \{\|x-m\| : m\in M\}$; en particular M es cerrado y es un subespacio proximinal de X.

ii) Si el cotipo de π es distinto de 3, entonces M es un subespacio de Chebyshev de X.

DEMOSTRACION : Sea $|\cdot|$ la norma absoluta asociada a π.

i) Para $m\in M$ aplicando la definición de semi-$|\cdot|$-proyección se tiene : $\|x-m\| = |(\|\pi(x)-m\|, \|x-\pi(x)\|)| \geq \|x-\pi(x)\|$,

donde se ha aplicado que $\pi(m)=m$ y que $\pi(x-m)=\pi(x)-\pi(m)$. A partir de la desigualdad anterior se obtiene inmediatamente *i)*.

ii) El ser $|\cdot|$ de cotipo distinto de 3 equivale a que posea la propiedad de crecimiento estricto en la primera variable, como se deduce aplicando la Proposición 5.5 a $|\cdot|^{r}$. Según esto, si $m\in M$ es tal que : $\|x-m\| = d(x,M)$, de

$$\|x-m\| = |(\|\pi(x)-m\|, \|x-\pi(x)\|)| = \|x-\pi(x)\|$$

se deduce $\pi(x)=m$ como queríamos.

7.9 PROPOSICION : *Sea M un subespacio de Chebyshev de X, $M\neq\{0\}$, $M\neq X$, y tal que se tenga : $\|x\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)|$ $(x\in X)$, para una norma absoluta $|\cdot|$, donde $\pi(x)$ denota el punto de M que materializa la distancia de x a M. Entonces π es una semi-$|\cdot|$-proyección de cotipo distinto de 3.*

DEMOSTRACION : Todo es sabido (ver Ejemplo 7.2.b) salvo que $|\cdot|$ es de cotipo distinto de 3. Si fuese de cotipo 3 se tendría : $|(\alpha,1)|=1$ para un $\alpha\neq 0$. (Proposición 5.5 aplicada a $|\cdot|^{r}$) y podemos suponer $\alpha>0$. Puesto que $M\neq\{0\}$ y $M\neq X$ podemos conseguir un $x \in X$ verificando : $\|\pi(x)\| = \|x-\pi(x)\| = 1$. Tomando : $m = (1+\alpha)\pi(x)$, puesto que :

$$\|x-m\| = |(\|\pi(x)-m\|, \|x-\pi(x)\|)| = |(\alpha, 1)| = 1 = \|x-\pi(x)\|,$$

por ser M de Chebyshev se tendrá : $m = \pi(x)$ lo que contradice el hecho de ser $\alpha \neq 0$.

NOTA ACLARATORIA : Lima (ver [34], Teorema 5.6) introduce el siguiente concepto :

Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Diremos que M es un *semi-L-sumando* si M es un subespacio de Chebyshev de X y se verifica : $\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x-\pi(x)\|$ $(x \in X)$, en que para cada $x \in X$, $\pi(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M.

Por la Proposición 7.9 todo semi-L-sumando en el sentido de Lima es un semi- $|\cdot|_1$ -sumando. Pero recíprocamente, puesto que $|\cdot|_1$ tiene cotipo 1, aplicando la Proposición 7.8, todo semi- $|\cdot|_1$ -sumando es un semi-L-sumando en el sentido de Lima. Respetando una vez más la nomenclatura ya aceptada, utilizaremos los términos *semi-L-proyección* y *semi-L-sumando* para referirnos a las semi- $|\cdot|_1$ -proyecciones y a los semi- $|\cdot|_1$ -sumandos.

Uniendo las dos proposiciones anteriores obtenemos :

7.10 COROLARIO : *Sea π una semiproyección absoluta en X. $\pi(X)$ es un subespacio de Chebyshev de X si y sólo si π es de cotipo 1 o 2.*

7.11 COROLARIO :*Sea M un subespacio de Chebyshev de X. Entonces M es imagen de, a lo sumo, una semiproyección absoluta.*

DEMOSTRACION : Si π_1 y π_2 son semiproyecciones absolutas en X con $\pi_1(X)=\pi_2(X)=M$, aplicando la Proposición 7.8 *i*), para todo $x\in X$ $\pi_1(x)$ y $\pi_2(x)$ son vectores de M que materializan la distancia a x luego por ser M de Chebyshev, $\pi_1(x)=\pi_2(x)$.

La siguiente particularización del corolario anterior será útil para probar la unicidad de la semiproyección absoluta asociada a un semisumando y por ello se enuncia expresamente :

7.12 COROLARIO : *Sean π_1 y π_2 dos semiproyecciones absolutas en X verificando $\pi_1(X)=\pi_2(X)$. Si una de ellas tiene cotipo distinto de 3 se tiene $\pi_1=\pi_2$.*

DEMOSTRACION : Proposición 7.8 *ii*) y Corolario 7.11.

8. SUMANDOS Y DUALIDAD. SEMIIDEALES

8.1 NOTACION: En toda la presente sección X denotará un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, X' y X'' los espacios dual y bidual de X

respectivamente. Como quiera que no habrá lugar a confusión, $\|\cdot\|$ denotará indistintamente las normas de X, X', X''.

Para un subconjunto no vacío arbitrario M de X notaremos $M^o=\{x'\in X' : \langle x',m\rangle=0$ para todo $m\in M\}$, y por M^{oo} se entenderá lógicamente $(M^o)^o$.

Si S es un operador lineal continuo de X en un espacio normado Y, S^t será el operador traspuesto de S, definido para $y'\in Y'$ mediante la fórmula : $\langle S^t(y'),x\rangle=\langle y',S(x)\rangle$ $(x\in X)$. Igualmente S^{tt} se entenderá como $(S^t)^t$.

Si M es un subespacio cerrado de X, el espacio cociente X/M se considera canónicamente dotado de la norma cociente.

Finalmente j denotará la inyección natural de X en X'', definida para $x\in X$ por : $\langle j(x),x'\rangle=\langle x',x\rangle$ $(x'\in X')$.

Como siempre, $|\cdot|$ será una norma absoluta y $|\cdot|'$ su norma dual.

Empezaremos estudiando el comportamiento de $|\cdot|$-proyecciones y $|\cdot|$-sumandos con respecto a la dualidad. Para las primeras la situación es particularmente diáfana.

8.2 PROPOSICION : (Evans, [27]). *Sea π una proyección (lineal) continua en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

i) π es una $|\cdot|$-proyección en X.

ii) π^t es una $|\cdot|'$-proyección en X'.

DEMOSTRACION : $i) \Rightarrow ii)$: Evidentemente π^t es una proyección en X'. Bastará probar que :

$$\|x'\| = |(\|\pi^t(x')\|, \|x'-\pi^t(x')\|)|' \qquad (x' \in X')$$

a) Sean $x' \in X'$, $x \in X$, y notemos : $x_1 = \pi(x)$, $x_2 = x - \pi(x)$, $x_1' = \pi^t(x')$, $x_2' = x' - \pi^t(x')$. Es evidente que para $i,k=1,2$, $i \neq k$ se tiene : $\langle x_i', x_k \rangle = 0$ de donde :

$$|\langle x', x\rangle| \leqslant |\langle x_1', x_1\rangle| + |\langle x_2', x_2\rangle| \leqslant \|x_1'\| \|x_1\| + \|x_2'\| \|x_2\| =$$

$$= \langle (\|x_1'\|, \|x_2'\|), (\|x_1\|, \|x_2\|)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant |(\|x_1'\|, \|x_2'\|)|' \ |(\|x_1\|, \|x_2\|)| = |(\|x_1'\|, \|x_2'\|)|' \ \|x\| .$$

Así : $\|x'\| \leqslant |(\|x_1'\|, \|x_2'\|)|'$.

b) Para la desigualdad contraria, notemos previamente que debe existir $(a,b) \in S(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ tal que :

$$|(\|x_1'\|, \|x_2'\|)|' = a\|x_1'\| + b\|x_2'\| ,$$

y claramente podemos suponer $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a+b > 0$.

Para $\partial > 0$ arbitrario, sean $x_1, x_2 \in X$ verificando :

$$\|x_i\| \leqslant 1 \quad , \quad \langle x_i', x_i\rangle = |\langle x_i', x_i\rangle| \geqslant \|x_i'\| - \partial/(a+b) \qquad (i=1,\ 2)$$

Se puede suponer que $\pi(x_1) = x_1$ y $\pi(x_2) = 0$, sustituyendo x_1 por $\pi(x_1)$ y x_2 por $x_2 - \pi(x_2)$ si no fuera así, ya que :

$$\|\pi(x_1)\| \leqslant \|x_1\| \quad , \quad \|x_2 - \pi(x_2)\| \leqslant \|x_2\| \quad ,$$

$$\langle x_1', x_1\rangle = \langle x_1', \pi(x_1)\rangle \quad , \quad \langle x_2', x_2\rangle = \langle x_2', x_2 - \pi(x_2)\rangle \ .$$

Sea $x = ax_1 + bx_2$; $\|x\| = |(a\|x_1\|, b\|x_2\|)| \leq |(a,b)| = 1$

de donde : $\|x'\| \geq \langle x', x\rangle = a\langle x_1', x_1\rangle + b\langle x_2', x_2\rangle \geq$

$\geq a\|x_1'\| - a\partial/(a+b) + b\|x_2'\| - b\partial/(a+b) =$

$a\|x_1'\| + b\|x_2'\| - \partial = |(\|x_1'\|, \|x_2'\|)|' - \partial.$

Dada la arbitrariedad de ∂ obtenemos :

$\|x'\| \geq |(\|x_1'\|, \|x_2'\|)|'$ que junto con la desigualdad contraria obtenida en la parte a) nos da la igualdad buscada.

ii) $\Rightarrow$ *i)* : Supuesto que π^t es una $|\cdot|'$-proyección en X', podemos aplicarle la implicación ya probada y teniendo en cuenta que $|\cdot|$ es la norma dual de $|\cdot|'$ obtenemos que π^{tt} es una $|\cdot|$-proyección en X'' . Aplicando la identidad de comprobación trivial : $j\pi = \pi^{tt}j$ y que j es isométrica, obtenemos finalmente:

$\|x\| = \|j(x)\| = |(\|\pi^{tt}(j(x))\|, \|j(x) - \pi^{tt}(j(x))\|)| =$

$= |(\|j(\pi(x))\|, \|j(x-\pi(x))\|)| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)|$,

lo que demuestra *i)*.

8.3 NOTA : Los casos particulares de la Proposición anterior para $|\cdot| = |\cdot|_1$ y $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ se deben a Alfsen y Effros ([4] , Proposición 2.5), y para $|\cdot|_p$ con $1 < p < \infty$, a Behrends ([5],Lema 2.2).

8.4 COROLARIO : *Sea M un subespacio cerrado de X. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente :*

i) M *es un* $|\cdot|$*-sumando de* X.

ii) M^o *es un* $(|\cdot|^r)'$*-sumando de* X'.

iii) M^{oo} *es un* $|\cdot|$*-sumando de* X''.

DEMOSTRACION : Dado que : $(|\cdot|^r)' = (|\cdot|')^r$ y $(|\cdot|')' = |\cdot|$, basta probar que *i)* $\Rightarrow$ *ii)*.

Sea π una $|\cdot|$-proyección en X con $\pi(X) = M$. Por la Proposición 8.2 $(I-\pi)^t$ es una $(|\cdot|^r)'$-proyección en X'. Basta ya tener en cuenta que $(I-\pi)^t(X') = M^o$ para obtener *ii)*.

Deliberadamente hemos omitido hasta ahora la consideración de semi-$|\cdot|$-proyecciones y semi-$|\cdot|$-sumandos. Es obligado admitir que, si bien el enunciado de la Proposición 8.2 carece de sentido para semi-$|\cdot|$-proyecciones, no ocurre lo mismo con el Corolario 8.4 para semi-$|\cdot|$-sumandos. Más adelante (Ejemplo 10.11) se verá que dicho corolario es falso en general para semi-$|\cdot|$-sumandos, en lo que se refiere a la afirmación *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Se plantea entonces la posible veracidad de la afirmación *i)* $\Rightarrow$ *iii)*. La única respuesta afirmativa conocida hasta la fecha es la dada por Lima ([34], Teorema 6.14) para el caso particular de semi-L-sumandos.

Más adelante (Nota 10.9) veremos también cómo la conjetura se resuelve afirmativamente en múltiples casos, precisamente por reducción al caso lineal.

Pasamos ahora a estudiar bajo qué condiciones es cierta la afirmación recíproca al Corolario 8.4, esto es la implicación : *iii)* ⇒ *i)*, o menos ambiciosamente la *ii)* ⇒ *i)*. Se sabe ([4]) la no validez de ésta última para el caso $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ lo que motivó la definición de M-ideal (subespacio cerrado de un espacio normado, cuyo anulador es un L-sumando del espacio dual). El concepto de semiideal que a continuación se introduce, pretende llevar a su máxima generalidad la noción de M-ideal. La pauta para esta generalización la marca el Corolario 8.4.

8.5 DEFINICION : Sea M un subespacio cerrado de X. Diremos que M es un *semi-*$|\cdot|$*-ideal* (resp. $|\cdot|$*-ideal*) de X si M^o es un semi-$(|\cdot|^r)'$-sumando (resp. $(|\cdot|^r)'$-sumando)de X'. Diremos que M es un *semiideal* (resp. *ideal*) si es un semi-$|\cdot|$-ideal (resp. $|\cdot|$ -ideal) para alguna norma absoluta $|\cdot|$.

Los conceptos de M-ideal y semi-M-ideal ([34]), son casos particulares y a la vez los únicos precedentes de la definición anterior. El Corolario 8.4 (*i)* ⇒ *ii)*) se enuncia ahora diciendo simplemente que *todo* $|\cdot|$*-sumando es un* $|\cdot|$*-ideal*, y como ya se ha dicho, pasamos a ocuparnos de la afirmación recíproca. Notemos que dicha afirmación es trivialmente cierta si X es reflexivo, pero buscamos resultados más generales. El próximo teorema implica la veracidad de la afirmación en cuestión en una amplia gama de casos

Necesitamos un resultado elemental sobre dualidad en espacios normados que, aunque conocido, no hemos encontrado convenientemente enunciado para una cómoda referencia, por lo que improvisamos una breve demostración.

8.6 LEMA : *Sea M un subespacio cerrado de X. Existe una biyección lineal isométrica* $f : X''/M^{oo} \to (X/M)''$ *que verifica :*

$$f(j(x)+M^{oo}) = j(x+M) \qquad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

En particular se tiene : $\|x+M\| = \|j(x)+M^{oo}\| \qquad (x\in X)$.

DEMOSTRACION : Es sabido que la ley : $\phi : x''+M^{oo} \to x''/M^{o}$ (x''/M^{o} es la restricción de x'' a M^{o}) define una biyección lineal isométrica de X''/M^{oo} sobre $(M^{o})'$. Por otra parte, sea P la proyección canónica de X sobre X/M. Entonces P^{t} es una biyección lineal isométrica de $(X/M)'$ sobre M^{o}, y por tanto P^{tt} es una biyección lineal isométrica de $(M^{o})'$ sobre $(X/M)''$. Así $f = P^{tt}\phi$ es una biyección lineal isométrica de X''/M^{oo} sobre $(X/M)''$.

Sea $x\in X$; la siguiente serie de igualdades más o menos evidentes muestra que f verifica la afirmación del enunciado :

$$(u' \in (X/M)') : \quad \langle f(j(x)+M^{o o}), u'\rangle = \langle P^{tt}(j(x)/M^{o}),\ u'\rangle =$$
$$= \langle j(x),\ P^{t}(u')\rangle = \langle P^{t}(u'),\ x\rangle =$$
$$= \langle u',\ x+M\rangle = \langle j(x+M),\ u'\rangle .$$

8.7 TEOREMA : *Sea* M *un subespacio completo de* X *y* $|\cdot|$ *una norma absoluta de cotipo distinto de 3. Si* M° *es un semi-*$(|\cdot|^{r})'$*-ideal (resp. un* $(|\cdot|^{r})'$*-ideal) de* X'*, entonces* M *es un semi-*$|\cdot|$*-sumando (resp. un* $|\cdot|$*-sumando) de* X.

DEMOSTRACION : $M^{\circ\circ}$ es por hipótesis un semi-$|\cdot|$-sumando de X''. Sea π una semi-$|\cdot|$-proyección en X'' con $\pi(X'') = M^{\circ\circ}$. ($\pi$ es única en vista del Corolario 7.12, aunque ello no se precisa).

Aplicando la definición de semi-$|\cdot|$-proyección junto con el hecho evidente $j(M) \subset M^{\circ\circ}$ tenemos para $x \in X$ y $m \in M$:

(*) $\|x-m\| = \|j(x)-j(m)\| = |(\|\pi(j(x))-j(m)\|, \|j(x)-\pi(j(x))\|)|$

Por la Proposición 7.8 *i)* y el Lema anterior :

$$\|j(x)-\pi(j(x))\| = \|j(x)+M^{\circ\circ}\| = \|x+M\|$$

Sustituyendo esta expresión en (*) y tomando ínfimos con $m \in M$ (con lo que $j(m)$ recorre $j(M)$), obtenemos :

$$\|x+M\| = |(d(\pi(j(x)), j(M)), \|x+M\|)| \qquad (x \in X)$$

Si $|\cdot|$ es de cotipo distinto de 3 posee la propiedad de crecimiento estricto en la primera variable (Proposición 5.5 aplicada a $|\cdot|^{r}$) con lo que la expresión anterior implica :

$$d(\pi(j(x)), j(M)) = 0$$

Finalmente, $j(M)$ es cerrado (por ser M completo), luego se deberá tener : $\pi(j(x)) \in j(M)$, y esto para todo $x \in X$.

Dada la inyectividad de j , para cada $x \in X$ podemos definir $\bar{\pi}(x) \in M$ mediante la ecuación : $j(\bar{\pi}(x)) = \pi(j(x))$

Es ya rutinario comprobar que $\bar{\pi}$ es una semi-$|\cdot|$-proyección en X cuya imagen es M.

Nótese por último que, elementalmente, la eventual linealidad de π implica la de $\bar{\pi}$.

8.8 COROLARIO : *Sea M un $|\cdot|$-ideal de X. Supongamos que M es completo y que el cotipo de $|\cdot|$ es distinto de 3. Entonces M es un $|\cdot|$-sumando de X.*

DEMOSTRACION : Por hipótesis M^o es un $(|\cdot|^{\pi})'$-sumando de X', y por tanto un $(|\cdot|^{\pi})'$-ideal de X' (Corolario 8.4). Aplicando el Teorema anterior, M es un $|\cdot|$-sumando de X.

No son pocos los precedentes históricos de nuestros dos últimos resultados. Nos parece oportuno aquí el comentarlos brevemente, poniendo de manifiesto que todos ellos pasan a ser casos muy particulares del Corolario 8.8 o del Teorema 8.7.

En [4] Alfsen y Effros utilizan indistintamente los términos "L-ideal" y "L-sumando" para referirse a uno de estos últimos, dejando claro sin embargo (ver comentario anterior a su Proposición 2.5) que dejan abierto el problema de si un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X, tal que M^o sea un M-sumando de X' (un L-ideal en nuestra terminología) debe ser necesariamente un L-sumando. El problema queda claramente planteado en la sección 7 del referido trabajo (Problema 1) y allí mismo se anuncia su resolución afirmativa por Cunningham, Effros y Roy ([22], Teorema 1). Este hecho se obtiene de nuestro Corolario 8.8 tomando $|\cdot| = |\cdot|_1$.

Lima generaliza el resultado anterior probando ([34], Teorema 6.16) que para que un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X sea un L-sumando, basta que M^o sea un M-ideal, lo que de hecho es consecuencia de un resultado también suyo ([34], Teorema 6.14) que afirma lo análogo sustituyendo "L-sumando" por "semi-L-sumando" y "M-ideal" por "semi-M-ideal". Ambos resultados de Lima se obtienen de nuestro Teorema 8.7 tomando otra vez $|\cdot| = |\cdot|_1$.

Finalmente, Fakhoury ([30], Proposición 2.9) prueba que todo L^p-ideal de un espacio de Banach es un L^p-sumando $(1<p<\infty)$ lo que vuelve a ser clara consecuencia de nuestro Corolario 8.8, puesto que para $1<p<\infty$, $|\cdot|_p$ tiene cotipo 2.

Pasamos ahora a discutir la necesidad de las hipótesis del Corolario 8.8 (y por tanto de las del Teorema 8.7).

En el Corolario 8.8 la hipótesis de ser M un $|\cdot|$-ideal puede rebajarse exigiendo solamente que M sea un semi-$|\cdot|$-ideal. como se verá más adelante (Teorema 10.8).

No se puede suprimir la hipótesis de que $|\cdot|$ tenga cotipo distinto de 3, como lo muestra el hecho de que existan M-ideales en espacios de Banach que no son M-sumandos. Dado que $|\cdot|_\infty$ tiene tipo y cotipo iguales a 3, queda abierto el problema de la posible existencia de $|\cdot|$-ideales que no sean $|\cdot|$-sumandos, en el caso de que $|\cdot|$ tenga cotipo 3 pero tipo distinto de 3.

Hay que referirse por último a la hipótesis de complitud de M. Esta hipótesis es esencial como se verá enseguida con un contraejemplo. En los casos clásicos antes comentados se supone siempre que el espacio ambiente, X, es un espacio de Banach, con lo que automáticamente todo semiideal es completo. Hemos preferido mantener como ambiente en todo nuestro trabajo un espacio normado arbitrario X, lo que por regla general no crea problemas, aunque sí en el caso que nos ocupa. De paso se analiza la necesidad de la hipótesis de complitud en muchos resultados ya conocidos.

8.9 EJEMPLO : Aplicando el Teorema de la Proyección Ortogonal se obtiene que todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es un L^2-sumando. Como consecuencia, todo subespacio cerrado de un espacio prehilbertiano es un L^2-ideal.

Sea H un espacio prehilbertiano real. Dado que dos vectores x e y de H son ortogonales si y sólo si se tiene : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, un subespacio cerrado M de H es un L^2-

sumando si y sólo si M verifica el teorema de la proyección ortogonal. Ahora bien, si H no es completo existen subespacios cerrados de H que no verifican el teorema de la proyección ortogonal, y que por tanto son L^2-ideales pero no L^2-sumandos. Un tal subespacio nos da el contraejemplo buscado, pues verifica todas las hipótesis del Corolario 8.8 salvo la de complitud.

9. SEMISUMANDOS EN ESPACIOS DE BANACH DUALES

Los resultados de la sección anterior pueden mejorarse notablemente bajo la hipótesis restrictiva de ser el espacio ambiente, X, un espacio de Banach dual, que se concreta en la próxima definición. Ello lleva por otra parte a la consideración de nuevos problemas de interés.

9.1 DEFINICION : Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Diremos que X es un espacio *dual* si existe un espacio de Banach Y, sobre $\mathbb{K}$, y una biyección lineal isométrica de Y' sobre X.

El tal espacio Y, al que se suele llamar un *predual de* X, no tiene por qué ser único ni siquiera salvo isomorfismos isométricos. Sin embargo, fijado un concreto predual Y, cabe identificar X con Y', lo que permite considerar en X la topología $\sigma(Y',Y)$ o topología débil*.

El Teorema 8.7 bajo nuestras nuevas hipótesis da como consecuencia el siguiente enunciado :

9.2 COROLARIO : *Sea X un espacio dual, y sea M un subespacio débil* cerrado de X. Si M es un $|\cdot|$-ideal de X y $|\cdot|$ es de tipo 2 o 3, entonces M es un $|\cdot|$-sumando de X, imagen de una $|\cdot|$-proyección débil* continua.*

DEMOSTRACION : Sea Y el predual de X bajo consideración, y sea :

$$^{o}M = \{ y \in Y \ : \ \langle m,y\rangle = 0 \quad \textit{para todo} \quad m \in M \}$$

^{o}M es un subespacio cerrado de Y y por tanto completo. Por ser $|\cdot|$ de tipo 2 o 3, $(|\cdot|^{r})'$ es de cotipo 1 o 2 (Proposición 5.6). Dado que por ser M débil* cerrado se tiene $(^{o}M)^{o} = M$, podemos aplicar a ^{o}M el Teorema 8.7 obteniendo que ^{o}M es un $(|\cdot|^{r})'$-sumando de Y. Sea π una $(|\circ|^{r})'$-proyección en Y con imagen ^{o}M. Entonces $(I-\pi)^{t}$ es una $|\cdot|$-proyección en X (Proposición 8.2), cuya imagen es M. La continuidad débil* de $(I-\pi)^{t}$ es evidente.

9.3 PROBLEMA : No conocemos un ejemplo de un $|\cdot|$-ideal débil* cerrado en un espacio dual que no sea un $|\cdot|$-sumando. En vista del Corolario anterior y del 8.8, si tal ejemplo existiera, $|\cdot|$ tendría tipo 1 y cotipo 3.

Ya se comentó el hecho de que en un espacio reflexivo, todo $|\cdot|$-ideal es un $|\cdot|$-sumando. Obsérvese que, curiosamente, al sustituir la hipótesis de reflexividad por la mucho más débil de ser el espacio dual, se obtiene la misma tesis para $|\cdot|$-ideales débil* cerrados con la única posible excepción de que $|\cdot|$ tenga tipo 1 y cotipo 3, situación imposible si $|\cdot|$ es conmutativa, como ocurre con todas las normas clásicas.

Uno de nuestros primeros resultados sobre semisumandos, (Proposición 7.8) afirmaba que todo semisumando de un espacio normado es necesariamente cerrado. Al considerar semisumandos en espacios duales parece natural preguntarse si obligadamente deben ser débil* cerrados. El siguiente ejemplo muestra que la respuesta no puede ser afirmativa a plena generalidad.

9.4 EJEMPLO : Sea X un espacio normado y J un M-ideal de X que no sea un M-sumando. Sea π la L-proyección en X' con imagen J^{o}. No es difícil comprobar que si $Ker(\pi)$ fuese débil* cerrado, J sería un M-sumando. Existen por tanto L-sumandos en espacios duales que no son débil* cerrados.

9.5 TEOREMA : *Sea X un espacio dual y M un semi- $|\cdot|$-sumando de X. Si $|\cdot|$ tiene cotipo 2 o 3, entonces M es débil* cerrado.*

DEMOSTRACION : Mediante una aplicación standard del Teorema de

Krein-Smulyan, (ver [23], Teorema II.5.5), basta probar que : $M \cap B(X) = B(M)$ es débil* cerrado.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe una red $\{x_\lambda\}$ de elementos de $B(M)$convergente en la topología débil* a un $x \notin B(M)$, esto es (como forzosamente $x \in B(X)$) : $x - \pi(x) = y \neq 0$, en que π es una semi- $|\cdot|$-proyección en X con imagen M.

Sea $\alpha > 0$ arbitrario ; la red ; $\{\alpha \|y\| x_\lambda + y\}$ converge a $\alpha \|y\| x + y$ en la topología débil*.

Por definición de semi- $|\cdot|$-proyección se tiene :

$$\left\| \alpha \|y\| x_\lambda + y \right\| = |(\alpha \|y\| \|x_\lambda\|, \|y\|)| \leqslant \|y\| \, |(\alpha, 1)| .$$

con lo que aplicando la semicontinuidad inferior de la norma de X para la topología débil* (equivalentemente que las bolas de X son débil* cerradas) obtenemos :

$$(*) \quad \left\| \alpha \|y\| x + y \right\| \leqslant \|y\| \, |(\alpha, 1)| \qquad (\alpha > 0)$$

Por otra parte, también por definición de semi- $|\cdot|$-proyección : $\left\| \alpha \|y\| x + y \right\| = \left\| \alpha \|y\| \pi(x) + (1 + \alpha \|y\|) \, y \right\| =$

$$= |(\alpha \|y\| \|\pi(x)\|, (1 + \alpha \|y\|) \|y\|)| \geqslant (1 + \alpha \|y\|) \|y\| .$$

Esta desigualdad, junto con (*), puesto que $y \neq 0$ nos da:

$$1 + \alpha \|y\| \leqslant |(\alpha, 1)| = |(1, \alpha)|^{\pi}$$

Restando 1, dividiendo por α y tomando límite con $\alpha \to 0$:

$$\|y\| \leqslant \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{|(1,\alpha)|^r - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{|(1,0) + \alpha(0,1)|^r - 1}{\alpha}$$

Por el Teorema 3.6 el último miembro es $Máx\ V(0,1)$ en el espacio de rango numérico : $Y^r = (\mathbb{R}^2, |\cdot|^r, (1,0))$, que por la Proposición 4.8 es igual al índice numérico de dicho espacio. Se tiene por tanto : $n(Y^r) \geqslant \|y\| > 0$. Por la Proposición 5.3 este hecho equivale a que $|\cdot|^r$ tenga tipo 1 es decir a que $|\cdot|$ tenga cotipo 1, lo que contradice las hipótesis del Teorema.

9.6 COROLARIO : (Evans, [27], Teorema 1.8). *Sea X un espacio dual y π una proyección absoluta en X de tipo y cotipo distintos de 1. Entonces π es débil* continua.*

DEMOSTRACION : Por el Teorema 9.5, $Ker(\pi)$ y $\pi(X)$ son débil* cerrados, y ello se sabe ser equivalente a la continuidad de π para la topología débil* (ver por ejemplo [40], Lema 4.9).

9.7 NOTA : El Corolario anterior implica la continuidad débil* de las L^p-proyecciones en espacios duales, para $1 < p \leqslant \infty$ ([30], Proposición 2.9).

El Corolario 8.8, en el caso de ser el espacio ambiente completo, se podría también haber obtenido del Teorema 9.5 sin más que tener en cuenta que para que un $|\cdot|$-ideal M de X sea un

$|\cdot|$-sumando, es suficiente que el núcleo de la proyección absoluta π sobre M^o sea débil* cerrado en X'.

9.8 EJEMPLO : La hipótesis de ser M un semi- $|\cdot|$-sumando en el Teorema 9.5 no puede sustituirse por la de ser un semi- $|\cdot|$-ideal ni siquiera un $|\cdot|$-ideal. En [35] (Teorema3) se muestra un espacio de Banach X tal que $j(X)$ es un M-ideal de X'', y sin embargo se puede tomar no reflexivo, con lo que $j(X)$ no es débil* cerrado.

10. SEMISUMANDOS Y RANGO NUMERICO

Sea X un espacio normado real o complejo. En esta sección empezamos a aplicar las técnicas de rango numérico para obtener importantes propiedades de los semisumandos de X. El resultado básico en esta línea es el teorema que a continuación enunciamos, que muestra cómo, tomando en X un elemento distinguido perteneciente a un semisumando de X, el conocimiento del rango numérico en dicho semisumando permite conocerlo en todo X.

10.1 TEOREMA : *Sea π una semi- $|\cdot|$-proyección en X y $M=\pi(X)$. Notemos Y al espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0))$. Si se toma $u\in S(M)$, en el espacio de rango numérico (X,u) se tiene :*

$$V(x) = V(\pi(x)) + E(0,\ n(Y)\|x-\pi(x)\|) \qquad (x\in X)$$

DEMOSTRACION : Para $\alpha \geqslant 0$, aplicando la definición de semi-$|\cdot|$-proyección tenemos : $\|u+\alpha x\| = |(\|u+\alpha\pi(x)\| , \alpha\|x-\pi(x)\|)|$.

Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to Y$ definida por :

$$f(\alpha) = (\|u+\alpha\pi(x)\| , \alpha\|x-\pi(x)\|) .$$

Se tiene que $f(0) = (1,0)$ y que f es derivable por la derecha en cero con : $f'(0) = (\text{Máx Re } V(\pi(x)), \|x-\pi(x)\|)$, (Teorema 3.6).

Aplicando nuevamente el Teorema 3.6 y a continuación el 3.9 :

$$\text{Máx Re } V(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\| - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{|f(\alpha)| - 1}{\alpha} =$$

$= \text{Máx Re } V(Y, f'(0))$, y por la Proposición 4.8:

$$V(Y, f'(0)) = E(\text{Máx Re } V(\pi(x)), n(Y)\|x-\pi(x)\|) ,$$

con lo cual obtenemos :

$$\text{Máx Re } V(x) = \text{Máx Re } V(\pi(x)) + n(Y)\|x-\pi(x)\|$$

$$\text{Máx Re } (V(\pi(x)) + E(0, n(Y)\|x-\pi(x)\|)) .$$

Sustituyendo en la expresión anterior x por zx con $z \in \mathbb{K}$, $|z| = 1$, se obtiene que $V(x)$ y $V(\pi(x)) + E(0, n(Y)\|x-\pi(x)\|)$ tienen la misma función de soporte (Ver Nota 3.5) y por tanto son iguales, como queríamos demostrar.

La descripción del rango numérico dada por el teorema anterior lleva consigo la siguiente descripción del radio numérico y del índice numérico :

10.2 COROLARIO : *Con la misma notación e hipótesis del Teorema anterior se tiene :*

$$i)\ V(X,x) = V(X,\pi(x)) + V(X, x-\pi(x)) \quad (x\in X)$$

$$ii)\ v(x) = v(\pi(x)) + n(Y)\|x-\pi(x)\|, \quad (x\in X)$$

$$iii)\ n(X) = \text{Mín}\,\{n(M), n(Y)\} \quad (n(M) = \text{índice numérico de } (M,u)).$$

DEMOSTRACION : Aplicando el Teorema 10.1 a $x-\pi(x)$ en lugar de x se obtiene : $V(x-\pi(x)) = n(Y)\ E(0,\|x-\pi(x)\|)$ expresión que sustituida en la fórmula del Teorema nos da *i)*.

ii) Se tiene :

$$v(x) = \text{Máx}\,\{|\lambda+\gamma| : \lambda\in V(\pi(x)),\ |\gamma|\leqslant n(Y)\|x-\pi(x)\|\}\leqslant$$
$$\leqslant v(\pi(x)) + n(Y)\ \|x-\pi(x)\|.$$

Para la desigualdad contraria, sea $\lambda\in V(\pi(x))$ con $|\lambda| = v(\pi(x))$ y tomemos : $\gamma = \lambda + \frac{\lambda}{|\lambda|}\ n(Y)\|x-\pi(x)\|$ si $\lambda\neq 0$, $\gamma = n(Y)\|x-\pi(x)\|$ si $\lambda = 0$. En cualquier caso $\gamma\in V(x)$, de donde :

$$v(x) \geqslant |\gamma| = v(\pi(x)) + n(Y)\ \|x-\pi(x)\|.$$

iii) La desigualdad $n(X)\leqslant n(M)$ la da el Corolario 3.2 ; tomando $y\in S(X)$ con $\pi(y) = 0$ se obtiene : $n(X)\leqslant v(y) = n(Y)$ (Teorema 10.1). Así : $n(X)\leqslant \text{Mín}\{n(M), n(Y)\}$; por otra parte si $\|x\| = 1$ se tiene aplicando *i)*: $v(x) = v(\pi(x)) + n(Y)\|x-\pi(x)\|\geqslant$

$$\geq n(M)\|\pi(x)\| + n(Y)\,\|x-\pi(x)\| \geq$$

$$\text{Mín}\{n(M),n(Y)\}(\|\pi(x)\| + \|x-\pi(x)\|) \geq \text{Mín}\{n(M),n(Y)\}.$$

10.3 COROLARIO : *Con las mismas hipótesis del Teorema 10.1, supongamos además que π es de tipo 2 o 3. Se tiene :*

i) $V(x) = V(\pi(x)) \quad (x\in X)$

ii) $v(x) = v(\pi(x)) \quad (x\in X) \quad$ *y* $\quad n(X) = 0.$

DEMOSTRACION : Por ser $|\cdot|$ de tipo 2 o 3, aplicando la Proposición 5.3 *ii)* se tiene $n(Y)=0$. Basta entonces particularizar el Teorema 10.1 y el Corolario 10.2 con $n(Y)=0$.

Los resultados anteriores muestran la gran diferencia que existe entre el comportamiento del rango numérico para semiproyecciones absolutas de tipo 1 y para las de tipo 2 o 3. Por así decirlo, la intervención de $x-\pi(x)$ en $V(x)$ es nula si π es de tipo 2 o 3, mientras que es importante si π es de tipo 1. Esta disparidad va a dar lugar a muy distintas propiedades para una y otra clase de semiproyecciones. Una de las más importantes es la linealidad automática de las semiproyecciones de tipo 2 o 3, que se demuestra a continuación. La necesidad de considerar rangos numéricos para distintos elementos distinguidos a un tiempo nos obliga a introducir una terminología apropiada para ello, que haga más cómodos los enunciados.

10.4 DEFINICION : Sea M un cono del espacio normado X , no vacío y no reducido a $\{0\}$. Para $x \in X$ definimos :

$$p_M(x) = Sup \{ |\langle u',x\rangle| \ : u' \in \mathcal{D}(X,u), \ u \in S(M) \}$$

Si para $u \in S(M)$, $x \in X$ notamos $v(u,x)$ al radio numérico de x en el espacio de rango numérico (X,u), se tiene claramente :

$$p_M(x) = Sup \{ v(u,x) : u \in S(M) \} \qquad (x \in X)$$

Así, p_M es una seminorma en X (ver Definición 2.4) que es continua, pues verifica : $p_M(x) \leqslant \|x\|$ y, por último :

$$p_M(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ v(u,x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad u \in S(M).$$

En el caso de que M sea un semisumando de X se tiene la siguiente expresión para p_M :

10.5 LEMA : *Sea π una semi- $|\cdot|$-proyección en X y $M = \pi(X)$. Notemos Y al espacio de rango numérico* $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0))$. *Se tiene :*

$$p_M(x) = \|\pi(x)\| + n(Y) \ \|x - \pi(x)\| \qquad (x \in X).$$

DEMOSTRACION : Aplicando el Corolario 10.2, para $u \in S(M)$ y $x \in X$ obtenemos : $v(u,x) = v(u,\pi(x)) + n(Y) \ \|x - \pi(x)\|$,

de donde, tomando supremo con $u \in S(M)$:

$$p_M(x) = p_M(\pi(x)) + n(Y) \|x - \pi(x)\|,$$

pero trivialmente por ser $\pi(x) \in M$ se tiene : $p_M(\pi(x)) = \|\pi(x)\|$, obteniéndose la expresión buscada.

10.6 TEOREMA : *Sea π una semiproyección absoluta en X de tipo 2 o 3. Entonces π es lineal y por tanto una proyección absoluta en X. Además : $Ker(\pi) = p_M^{-1}(0)$ en que $M = \pi(X)$.*

DEMOSTRACION : Puesto que $p_M^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de X, basta probar la última igualdad.

Sea $|\cdot|$ la norma absoluta asociada a π y, como siempre, sea Y el espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0))$. Por ser $|\cdot|$ de tipo 2 o 3 es $n(Y)=0$ (Proposición 5.3 *ii*)) y aplicando el lema anterior tenemos : $p_M(x) = \|\pi(x)\|$ $(x \in X)$, de donde la igualdad buscada.

El Teorema anterior da lugar inmediatamente al siguiente resultado en términos de semiideales :

10.7 COROLARIO : *Sea M un semi-$|\cdot|$-ideal de X. Si $|\cdot|$ tiene cotipo 1 o 2, entonces M es un $|\cdot|$-ideal de X.*

DEMOSTRACION : Por hipótesis M^o es un semi-$(|\cdot|^r)'$-sumando de X', y $(|\cdot|^r)'$ tiene tipo 2 o 3 (Proposición 5.6), luego por el Teorema anterior M^o es un $(|\cdot|^r)'$-sumando de X' y M un $|\cdot|$-ideal de X.

Las hipótesis del Corolario 8.8 se pueden ahora debilitar, como habíamos anunciado :

10.8 TEOREMA : *Sea M un semi-$|\cdot|$-ideal de X. Supongamos que M es completo y que el cotipo de $|\cdot|$ es distinto de 3. Entonces M es un $|\cdot|$-sumando de X.*

DEMOSTRACION : Por el Corolario anterior M es un $|\cdot|$-ideal de X y basta aplicar el Corolario 8.8.

10.9 NOTA : En la sección 8 se planteaba, a propósito del Corolario 8.4, el problema de si para todo semi-$|\cdot|$-sumando M de X, M^{oo} es un semi-$|\cdot|$-sumando de X''. En vista del Teorema 10.6 la respuesta es afirmativa para normas $|\cdot|$ de tipo 2 o 3, pues entonces M es un $|\cdot|$-sumando y se aplica el propio Corolario 8.4 obteniendo que M^{oo} es un $|\cdot|$-sumando. El problema planteado se concentra entonces en normas $|\cdot|$ de tipo 1 y distintas de $|\cdot|_1$ pues para ésta lo resuelve Lima ([34], Teorema 6.14).

10.10 EJEMPLO : La existencia de semi-L-sumandos que no son L-sumandos pone de manifiesto que, si se suprime la hipótesis de ser π de tipo 2 o 3, el Teorema 10.6 deja de ser cierto. Ya Lima (ver [34], Teorema 5.14) da la pauta para construir ejemplos de este tipo. Mostramos a continuación el más sencillo posible :

Considérese en $\mathbb{R}^3$ la norma :

$$\|(x,y,z)\| = Máx\ \{|x|, |y|, |z|\}, \quad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por :

$$\pi(x,y,z) = 1/2\ (\ Máx\{x,y,z\} + Mín\{x,y,z\})\,(1,1,1)$$

Es fácil comprobar que π es una semi-L-proyección en $\mathbb{R}^3$ con imagen $\mathbb{R}(1,1,1)$ y, evidentemente π no es lineal.

10.11 EJEMPLO : Como se anunció a propósito del Corolario 8.4, la afirmación : M semi-$|\cdot|$-sumando de $X \Rightarrow M^o$ semi-$(|\cdot|^{\pi})'$-sumando de X' , es falsa, cosa que ahora estamos en condiciones de probar.

Sea X un espacio de Banach y M un semi-L-sumando de X que no sea un L-sumando. Si M^o fuese un semi-M-sumando de X', M sería un semi-L-ideal (completo) de X, y por el Teorema 10.8 M sería un L-sumando de X.

El enunciado del Teorema 10.6 muestra que la seminorma p_M permite describir el núcleo de la proyección absoluta π en que $M=\pi(X)$, cuando π es de tipo 2 o 3. Este hecho cobra especial relieve si se observa que p_M queda determinada por M. Parece natural preguntarse qué ocurre con p_M cuando π es de tipo 1. La respuesta la da el siguiente teorema :

10.12 TEOREMA : *Sea π una semiproyección absoluta de tipo 1 en X,* *y sea* $M=\pi(X)$. *Entonces* p_M *es una norma en* X *equivalente a la inicial y* π *es una semi-L-proyección en* X *para la norma* p_M.

DEMOSTRACION : Sea $|\cdot|$ la norma absoluta asociada a π y tomemos una vez más $Y=(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0))$. Aplicando el Lema 10.5 tenemos:

$$p_M(x) = \|\pi(x)\| + n(Y)\ \|x-\pi(x)\| \geqslant n(Y)\ \|x\| \qquad (x\in X)$$

Puesto que ahora $n(Y)>0$ (Proposición 5.3 *ii)*) p_M es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

Por otra parte, $p_M(\pi(x)) = \|\pi(x)\|$ y $p_M(x-\pi(x)) = n(Y)\ \|x-\pi(x)\|$, con lo que el mismo Lema 10.5 nos da : $p_M(x) = p_M(\pi(x)) + p_M(x-\pi(x))$ como queríamos.

El resultado anterior permite reducir el estudio de los semisumandos que no sean sumandos al de los semi-L-sumandos, en lo que se refiere a propiedades que no sean intrínsecamente geométricas, lo que nos será de utilidad más adelante.

11. UNICIDAD DE LA SEMIPROYECCION ABSOLUTA ASOCIADA A UN SEMISUMANDO. CONTINUIDAD DE LAS SEMIPROYECCIONES ABSOLUTAS

Tratamos en esta sección dos problemas diferentes que tienen en común el poner de manifiesto la potencia de las técnicas y resultados de la sección anterior. De hecho el resto de la memoria se basa fundamentalmente en dicha sección. Empezaremos por centrar el primero de los problemas aludidos.

Partamos del hecho elemental de que una proyección en un espacio vectorial queda determinada pcr el conocimiento de su núcleo y su imagen. Ya Cunningham ([20], Lema 2.1) comprueba que una L-proyección queda determinada por el conocimiento sólo de su imagen, o más exactamente, si π_1 y π_2 son L-proyecciones en un mismo espacio de Banach X y $\pi_1(X)=\pi_2(X)$, entonces $\pi_1=\pi_2$. De esta manera se obtiene una correspondencia biunívoca entre L-proyecciones y L-sumandos que permite una gran comodidad en su estudio. Behrends ([5], Lema 2.1) generaliza el anterior resultado de Cunningham probando que si $1\leqslant p\leqslant\infty$ y π_1, π_2 son L^p-proyecciones en un espacio de Banach X con $\pi_1(X)=\pi_2(X)$, entonces se tiene $\pi_1=\pi_2$. Por último, en el trabajo de Lima ([34], ver Teorema 5.6), está implícito que dos semi-L-proyecciones en un mismo espacio de Banach,con imagen común, deben ser iguales.

Nos planteamos aquí una generalización de los resultados anteriores en un doble sentido. Por una parte se amplía la clase de normas consideradas, desde las clásicas $|\cdot|_p$, a la de todas las normas absolutas ; por otra, se admite también la posibilidad de semiproyecciones absolutas para distintas normas absolutas y se pregunta si el tener la misma imagen las fuerza a ser iguales. El problema se puede concretar de la siguiente manera :

Sea X un espacio normado y M un semisumando de X (no trivial: $M \neq \{0\}$, $M \neq X$). ¿ Es única la norma absoluta $|\cdot|$ para la cual M es un semi-$|\cdot|$-sumando ? En caso afirmativo : ¿ Es única la semi-$|\cdot|$-proyección con imagen M ?

Disponemos ya de una respuesta parcial a este problema (Corolario 7.12). A continuación se resuelve el problema afirmativamente a plena generalidad.

11.1 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real o complejo y M un semisumando de X. Existe una única semiproyección absoluta en X con imagen M. Equivalentemente : Si π_1 y π_2 son dos semiproyecciones absolutas en X y $\pi_1(X) = \pi_2(X)$, entonces $\pi_1 = \pi_2$.*

DEMOSTRACION : Sean π_1 y π_2 semiproyecciones absolutas en X con $\pi_1(X) = \pi_2(X) = M$.

Supongamos primeramente que una de ellas (digamos π_1) es de tipo 1. Entonces p_M es una norma (Teorema 10.12) y si π_2 fuese de tipo distinto de 1 sería : $Ker(\pi_2) = p_M^{-1}(0) = \{0\}$ (Teorema 10.6) lo cual es absurdo (ver Nota 7.4). Supuesto entonces que ambas son de tipo 1, ambas son semi-L-proyecciones para la norma p_M, con lo que aplicando el Corolario 7.12 al espacio normado (X, p_M) se obtiene $\pi_1 = \pi_2$.

Queda considerar el caso en que tanto π_1 como π_2 son de tipo 2 o 3. Entonces en vista del Teorema 10.6 se tiene que ambas son lineales y $Ker(\pi_1) = Ker(\pi_2) = p_M^{-1}(0)$, luego $\pi_1 = \pi_2$.

11.2 COROLARIO : *Sea X un espacio normado y $|\cdot|$, $|\cdot|^*$ dos normas absolutas. Supongamos que M es un semi-$|\cdot|$-ideal y un semi-$|\cdot|^*$-ideal de X. Entonces* $|\cdot| = |\cdot|^*$.

DEMOSTRACION : Basta aplicar el Teorema anterior a M^o.

11.3 DEFINICION : Sea X un espacio normado y M un semisumando (resp. un semiideal) de X. En vista de los dos resultados anteriores, (ver también Definición 7.5), existe una única norma absoluta, $|\cdot|$, para la cual M puede ser semi-$|\cdot|$-sumando (resp. semi-$|\cdot|$-ideal), y diremos que $|\cdot|$ es "la" norma absoluta asociada a M. Por *tipo y cotipo* de M se entenderá el tipo y cotipo de la norma absoluta asociada a M.

Sea ahora M un semisumando de X y π la única semiproyección absoluta en X con imagen M. Llamaremos *complemento de* M, y notaremos M' al cono : $M' = \{x \in X : \pi(x) = 0\}$ nomenclatura que viene justificada por el hecho de ser : $M + M' = X$, $M \cap M' = \{0\}$.

Si π es lineal sabemos que $M'=Ker(\pi)$ es un subespacio de X y es sumando para la norma revertida de la asociada a M. Diremos que M y N son *sumandos complementarios* cuando sean imagen y núcleo de una misma proyección absoluta. En vista del Teorema 11.1, dos sumandos complementarios se determinan mutuamente, por lo que dado un sumando, se puede hablar sin ambiguedad de "su" sumando complementario.

Pasamos a considerar el segundo objetivo de la presente sección. Si π es una semiproyección absoluta en un espacio normado X, es evidente que : $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \quad (x\in X)$. Si π es lineal, la afirmación anterior equivale a decir que π es lipschitziana de razón 1. No es sin embargo evidente que toda semiproyección absoluta tenga que disminuir distancias, cosa que se demuestra a continuación. Empezamos por considerar semi-L-proyecciones.

11.4 LEMA : *Toda semi-L-proyección π en un espacio normado X es una aplicación lipschitziana de razón 1, esto es, verifica:*

$$\|\pi(x)-\pi(y)\| \leqslant \|x-y\| \qquad (x,y\in X).$$

DEMOSTRACION : Sean $x,y\in X$ arbitrarios. Por definición de semi-L-proyección se tiene :

$$\|x-\pi(y)\| = \|\pi(x)-\pi(y)\| + \|x-\pi(x)\|$$

y sumando esta igualdad miembro a miembro con la que se obtiene cambiando los papeles de x e y :

$$2\|\pi(x)-\pi(y)\| = \|x-\pi(y)\| - \|y-\pi(y)\| +$$
$$+ \|y-\pi(x)\| - \|x-\pi(x)\| \leqslant 2\|x-y\| .$$

11.5 TEOREMA : *Toda semiproyección absoluta π en un espacio normado X verifica :*

$$\|\pi(x)-\pi(y)\| \leqslant \|x-y\| \qquad (x,y\in X).$$

DEMOSTRACION : Siendo evidente la tesis si π es lineal, supongamos que π es no lineal y por tanto de tipo 1 (Teorema 10.6).

Sea $M = \pi(X)$, entonces π es una semi-L-proyección para la norma p_M (Teorema 10.12). Se tiene entonces para $x,y\in X$:

$$\|\pi(x)-\pi(y)\| = p_M(\pi(x)-\pi(y)) \leqslant p_M(x-y) \leqslant \|x-y\| .$$

La primera igualdad se sigue de ser $\pi(x)-\pi(y)\in M$ y del hecho evidente de que p_M y $\|\cdot\|$ coinciden en M, a continuación se ha aplicado el Lema 11.4 y la última desigualdad es evidente.

C A P I T U L O I I I

SEMISUMANDOS Y OPERADORES DE RANGO NUMERICO SIN INTERIOR

12. ESTABILIDAD DE LOS SEMISUMANDOS DE TIPO I POR OPERADORES DE RANGO NUMERICO SIN INTERIOR

12.1 DEFINICION : Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y sea : $T : X \to X$ un operador, no necesariamente lineal, no necesariamente acotado. Se define el *rango numérico espacial* de T como el subconjunto $W(T)$ de $\mathbb{K}$ dado por :

$$W(T) = \{\langle x', T(x)\rangle \ : x \in S(X) \ , \ x' \in D(X,x)\}.$$

12.2 NOTA : Creemos necesario comentar brevemente el origen de la anterior definición. El concepto de rango numérico se introdujo por primera vez para operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert. Si H es un tal espacio y $T \in BL(H)$ se define el rango numérico de T por la fórmula : $W(T) = \{(T(x)/x) \ : x \in S(H)\}$

Posteriormente este concepto fue generalizado para operadores $T \in BL(X)$ en que X es un espacio normado cualquiera, mediante la misma expresión de la Definición 12.1. Si se desea un estudio sistemático del concepto de rango numérico espacial de un operador lineal continuo en un espacio normado, se puede encontrar en la monografía de Bonsall y Duncan ([16] y [17]). Digamos también que el concepto de rango numérico de un elemento a de un álgebra de Banach unital A procede del anterior, pues de hecho se tiene : $V(A,a) = W(L_a)$ en que $L_a \in BL(A)$ se define por : $L_a(x) = ax \quad (x \in A)$.

12.3 LEMA : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico y T un operador en X. Se tiene : $V(X,T(u)) \subset W(T)$.*

DEMOSTRACION : Trivial a partir de la Definición 12.1.

12.4 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real o complejo y M un semisumando de tipo 1 de X. Entonces M permanece invariante por cualquier operador homogéneo en X cuyo rango numérico espacial tenga interior vacío en $\mathbb{K}$.*

DEMOSTRACION : Sea T un operador en las condiciones del enunciado. En vista de la homogeneidad de T, basta probar que :

$$T(S(M)) \subset M$$

Sea $u \in S(M)$, aplicando el Lema anterior al espacio de rango numérico (X,u) tenemos $V(T(u)) \subset W(T)$ y por tanto $V(T(u))$ tiene interior vacío. Aplicando ahora el Teorema 10.1 se tiene :

$$V(T(u)) = V(\pi T(u)) + E(0, n(Y)\|T(u) - \pi(T(u))\|)$$

en que π es la semi-$|\cdot|$-proyección asociada a M e Y denota el espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0))$. Por tener $V(T(u))$ interior vacío deducimos : $n(Y)\, \|T(u) - \pi(T(u))\| = 0$, pero $n(Y) > 0$ ya que $|\cdot|$ es de tipo 1 (Proposición 5.3), luego $T(u) \in M$ como queríamos.

Acerca del teorema anterior, vamos a comentar otra noción usual para el "rango numérico" de un operador, supuesto ahora homogéneo y acotado.

12.5 DEFINICION : Sea X un espacio normado. Notaremos $Hom(X)$ al espacio vectorial de los operadores homogéneos en X acotados sobre $B(X)$, al que dotaremos canónicamente de la norma :

$$\|T\| = Sup\, \{\|T(x)\| \ : \ x \in B(X)\} \qquad (T \in Hom(X))$$

El par $(Hom(X), I)$, en que I denota el operador identidad en X, es un espacio de rango numérico, y para $T \in Hom(X)$, notaremos $V(T)$ al rango numérico de T en dicho espacio.

Observemos que $BL(X)$ es un subespacio de rango numérico de $Hom(X)$, con lo que, para $T \in BL(X)$, $V(T)$ coincide con el rango numérico de T en el álgebra normada unital $BL(X)$, al que se suele llamar rango numérico de álgebra del operador T.

12.6 LEMA : ([16], pág. 80). *Para* $T \in Hom(X)$ *es* : $W(T) \subset V(T)$.

DEMOSTRACION : Sea $\lambda \in W(T)$; $\lambda = \langle x', T(x) \rangle$ con $x \in S(X)$ y $x' \in D(X,x)$. Es fácil comprobar que el funcional : $S \to \langle x', S(x) \rangle$ es un estado de $Hom(X)$ que aplica T en λ , de donde $\lambda \in V(T)$.

12.7 COROLARIO : *Sea X un espacio normado real o complejo y M un semisumando de tipo 1 de X. Si $T \in Hom(X)$ es tal que $V(T)$ tiene interior vacío, entonces $T(M) \subset M$.*

DEMOSTRACION : Por el Lema anterior $W(T)$ tiene interior vacío, y basta aplicar el Teorema 12.4.

12.8 NOTA : Para completar la relación entre $W(T)$ y $V(T)$, se sabe ([16], Teorema 9.4) que si $T \in BL(X)$ entonces : $V(T) = \overline{co}\, W(T)$ ($\overline{co}$: envolvente convexo-cerrada), y que si T es continuo, $W(T)$ es conexo ([16], Corolario 11.5).

Así, si X es real y $T \in BL(X)$, $W(T)$ es un intervalo y se tendrá $V(T) = \overline{W(T)}$ con lo que $V(T)$ tiene interior vacío si y sólo si $W(T)$ tiene interior vacío, resultando ser equivalentes los enunciados de 12.4 y 12.7. Sin embargo, en el caso complejo, con la misma hipótesis de ser $T \in BL(X)$ no se sabe ser cierta la equivalencia anterior (ver [17], página 34), con lo que en principio el considerar el rango numérico espacial como se hace en 12.4 es más general.

Terminamos esta sección calculando $V(T)$ y $W(T)$ para el caso en que T es una semiproyección absoluta π en X. Prácticamente toda la información se recoge en la siguiente proposición que describe la norma en el subespacio bidimensional de $Hom(X)$ engendrado por $\{I, \pi\}$.

12.9 PROPOSICION : *Sea X un espacio normado y π una semiproyección absoluta en X. Para $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ arbitrarios, se tiene :*

$$\|\alpha I+\beta\pi\| = \text{Máx }\{|\alpha+\beta|,|\alpha|\}$$

DEMOSTRACION : Sea $|\cdot|$ la norma absoluta asociada a π. Para $x\in B(X)$ se tiene :

$$\|(\alpha I+\beta\pi)(x)\| = \|\alpha x+\beta\pi(x)\| = |(|\alpha+\beta|\,\|\pi(x)\|\ ,\ |\alpha|\ \|x-\pi(x)\|)| \leqslant$$
$$\text{Máx}\{|\alpha+\beta|,|\alpha|\}\,|(\|\pi(x)\|,\|x-\pi(x)\|)| \leqslant \text{Máx}\{|\alpha+\beta|,|\alpha|\}$$

Por otra parte, sean $y,z\in S(X)$ con $\pi(y)=y$, $\pi(z)=0$:

$$\|\alpha I+\beta\pi\| \geqslant \text{Máx }\{\|\alpha y+\beta\pi(y)\|\ ,\|\alpha z+\beta\pi(z)\|\} = \text{Máx}\{|\alpha+\beta|\ ,|\alpha|\}$$

12.10 COROLARIO : *Sea X un espacio normado complejo y sea π una semiproyección absoluta en X. Entonces : $\pi\in H(Hom(X))$* (ver Definición 3.7)

DEMOSTRACION : En virtud de la proposición anterior, para $\lambda\in\mathbb{R}$ se tiene : $\|I+i\lambda\pi\| = (1+\lambda^2)^{1/2}$ con lo que :

$\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \dfrac{\|I + i\lambda\pi\| - 1}{\lambda} = 0$, y basta aplicar el Corolario 3.8

12.11 NOTA : A partir del Corolario 12.10, en el caso de ser π lineal y X complejo, se puede reencontrar la tesis de la Proposición 12.9, pues en tal caso, aplicando un importante Teorema de Sinclair ([17], Corolario 26.6), $\alpha I + \beta\pi$ tiene norma igual a su radio espectral, pero, fácilmente, el espectro de $\alpha I + \beta\pi$ consta de los puntos α y $\alpha + \beta$. La Proposición 12.9 cobra así el interés de afirmar para semiproyecciones absolutas la misma tesis que se obtiene del Teorema de Sinclair para proyecciones hermitianas arbitrarias.

12.12 TEOREMA : *Sea X un espacio normado y π una semiproyección absoluta en X. Se tiene :* $W(\pi) = V(\pi) = [0,1]$.

DEMOSTRACION : Empecemos probando la segunda igualdad. Si X es complejo se tiene : $V(\pi) = \mathrm{Re}\, V(\pi)$ (Corolario 12.10), luego en cualquier caso basta probar : $\mathrm{Máx}\, \mathrm{Re}\, V(\pi) = 1$, $\mathrm{Mín}\, \mathrm{Re}\, V(\pi) = 0$. Para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño se tiene : $\|I + \lambda\pi\| = 1 + \lambda$ y $\|I - \lambda\pi\| = 1$ (Proposición 12.9), con lo que las igualdades buscadas se obtienen fácilmente aplicando el Teorema 3.6.

Sean $y, z \in S(X)$ con $\pi(y) = y$, $\pi(z) = 0$, y sean $y' \in D(X,y)$, $z' \in D(X,z)$; se tiene : $1 = \langle y', \pi(y)\rangle \in W(\pi)$, $0 = \langle z', \pi(z)\rangle \in W(\pi)$. Aplicando que π es continua (Teorema 11.5), $W(\pi)$ es conexo ([16], Corolario 11.5) con lo que $[0,1] \subset W(\pi)$ de donde aplicando el Lema 12.6 y la primera parte de la demostración : $[0,1] = W(\pi)$.

13. PROYECCIONES ABSOLUTAS Y RANGO NUMERICO

Sea X un espacio normado y π una proyección absoluta en X. Mostramos en esta sección que el conocimiento de la función estado (ver comentario que sigue a la Definición 1.2) en X se reduce a su conocimiento en $\pi(X)$ y $Ker(\pi)$, y en esta determinación intervienen los estados de $\mathbb{R}^2$ para la norma absoluta asociada a π, que se describieron en el Lema 4.7. Este resultado (Teorema 13.1) aparece enunciado equivalentemente en [31] (Ejemplo 3.1), para el caso real, sin demostración. Damos aquí una demostración válida a la vez para los casos real y complejo, con la interesante particularidad de que en el caso complejo no es preciso manejar estados de $\mathbb{C}^2$, sino, igualmente, los de $\mathbb{R}^2$ con la norma absoluta considerada.

13.1 TEOREMA ; *Sea X un espacio normado, $u \in S(X)$ y π una $|\cdot|$-proyección en X. Sean $a = \|\pi(u)\|$ y $b = \|u - \pi(u)\|$. Para $x' \in X'$ se tiene que $x' \in D(X,u)$ si y sólo si existen $x_1' \in D(X,\pi(u))$, $x_2' \in D(X,u-\pi(u))$ y $(\alpha,\beta) \in D(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (a,b))$, tales que :*

$$\langle x', x\rangle = \alpha\langle x_1', \pi(x)\rangle + \beta\langle x_2', x - \pi(x)\rangle \qquad (x \in X)$$

DEMOSTRACION : Supongamos que x' verifica la condición del enunciado ; entonces, para todo $x \in X$:

$$|\langle x', x\rangle| \leqslant |\alpha| \, \|\pi(x)\| + |\beta| \, \|x - \pi(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant |(|\alpha|, |\beta|)|' \; |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| = \|x\| ,$$

y por otra parte :

$$\langle x', u\rangle = \alpha \langle x_1', \pi(u)\rangle + \beta \langle x_2', u - \pi(u)\rangle = \alpha a + \beta b = 1 ,$$

luego : $x' \in \mathcal{D}(X, u)$.

A la inversa, sea $x' \in \mathcal{D}(X,u)$. Notemos : $\alpha = \|\pi^t(x')\|$, $\beta = \|x' - \pi^t(x')\|$. Puesto que π^t es una $|\cdot|'$-proyección (Proposición 8.2), es : $|(\alpha,\beta)|' = \|x'\| = 1$. Por otra parte :

$$1 = Re\,\langle x', u\rangle = Re\,\langle x', \pi(u)\rangle + Re\,\langle x', u - \pi(u)\rangle =$$
$$= Re\,\langle \pi^t(x'), \pi(u)\rangle + Re\,\langle x' - \pi^t(x'), u - \pi(u)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant |\langle \pi^t(x'), \pi(u)\rangle| + |\langle x' - \pi^t(x'), u - \pi(u)\rangle| \leqslant$$

$\leqslant \alpha a + \beta b \leqslant |(\alpha,\beta)|' \; |(a,b)| = 1$, y todas las desigualdades se convierten en igualdad. Se tiene así : $\alpha a + \beta b = 1$ y por tanto $(\alpha,\beta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (a,b))$. Además, de :

$$Re\,\langle \pi^t(x'), \pi(u)\rangle = |\langle \pi^t(x'), \pi(u)\rangle| = \|\pi^t(x')\| \; \|\pi(u)\|$$

se obtiene : $\langle \pi^t(x'), \pi(u)\rangle = \|\pi^t(x')\| \; \|\pi(u)\|$ (*)

y análogamente : $\langle x' - \pi^t(x'), u - \pi(u)\rangle = \|x' - \pi^t(x')\| \; \|u - \pi(u)\|$ (*)

Definamos : $x_1' = \dfrac{\pi^t(x')}{\|\pi^t(x')\|}$ si $\pi^t(x') \neq 0$ y

$x_1' \in D(X,\pi(u))$ arbitrario si $\pi^t(x') = 0$. Igualmente, si

$x' - \pi^t(x') \neq 0$ sea $x_2' = x' - \pi^t(x')/\|x' - \pi^t(x')\|$,

y en otro caso sea $x_2' \in D(X, u-\pi(u))$ arbitrario. Las expresiones (*) nos dicen que en cualquier caso : $x_1' \in D(X,\pi(u))$ y $x_2' \in D(X,u-\pi(u))$. Finalmente, para $x \in X$ se tiene :

$$\langle x', x\rangle = \langle x', \pi(x)\rangle + \langle x', x-\pi(x)\rangle = \langle \pi^t(x'), \pi(x)\rangle +$$
$$+ \langle x' - \pi^t(x'), x-\pi(x)\rangle = \alpha \langle x_1', \pi(x)\rangle + \beta \langle x_2', x-\pi(x)\rangle \ .$$

(Obsérvese que la última igualdad es siempre válida, pues si $\pi^t(x') = 0$ o $x' - \pi^t(x') = 0$, se tiene $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ respectivamente).

La anterior descripción de la función estado lleva de manera natural a una descripción del rango numérico en el espacio (X,u). Como quiera que $\pi(u)$ y $u-\pi(u)$ no tienen por qué tener norma 1, es conveniente introducir la siguiente nomenclatura :

13.2 NOTACION : Sea X un espacio normado y sean $x,u \in X$ arbitrarios. Notaremos : $V^u(x) = \{\langle u', x\rangle \ : \ u' \in D(X,u)\}$.

Obsérvese que si $\|u\| = 1$, $V^u(x)$ es el rango numérico de x en el espacio de rango numérico (X,u), si $u \neq 0$ tiene norma arbitraria, ocurre lo mismo con respecto al espacio de rango numérico $(X, u/\|u\|)$, mientras que $V^0(x) = E(0, \|x\|)$ (ver Proposición 1.3).

13.3 COROLARIO : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico y π una $|\cdot|$-proyección en X. Sean $a=\|\pi(u)\|$, $b=\|u-\pi(u)\|$, $x\in X$. Entonces :*

$$V(X,x) = \{\alpha\lambda+\beta\gamma \quad : (\alpha,\beta)\in D(\mathbb{R}^2,|\cdot|,(a,b)), \\ \lambda\in V^{\pi(u)}(\pi(x)) \;,\; \gamma\in V^{u-\pi(u)}(x-\pi(x))\}.$$

DEMOSTRACION : Aplicación directa del Teorema 13.1

La expresión para $V(x)$ dada por el Corolario anterior puede formularse de forma que aparezcan solamente rangos numéricos en los distintos espacios que intervienen. Si X es complejo, en $V^{\pi(u)}(\pi(x))$ y $V^{u-\pi(u)}(x-\pi(x))$ pueden aparecer números complejos, por lo que empezamos dotando a $\mathbb{C}^2$ de estructura de espacio de rango numérico de manera natural.

Si $|\cdot|$ es una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$, la función : $(z_1,z_2) \to |(|z_1|,|z_2|)|$ define una norma en $\mathbb{C}^2$ como se puede fácilmente comprobar, norma que seguiremos notando $|\cdot|$. El rango numérico en $\mathbb{C}^2$ para esta norma y un elemento distinguido de coordenadas reales no negativas se describe como caso particular del Corolario anterior :

13.4 COROLARIO : *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta, $a\geq 0$, $b\geq 0$ y $|(a,b)|=1$. En el espacio de rango numérico $(\mathbb{C}^2,|\cdot|,(a,b))$ se tiene :*

i) Si $a>0$, $b>0$:

$$V((z_1, z_2)) = \{\alpha z_1 + \beta z_2 : (\alpha,\beta) \in D(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (a,b))\}$$

ii) En otro caso, si, por ejemplo, $a=1$, $b=0$:

$$V((z_1, z_2)) = \{z_1 + \beta\lambda : (1,\beta) \in D(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0)) \ , \ |\lambda| \leqslant |z_2|\}$$

DEMOSTRACION : Teniendo en cuenta que $(z_1, z_2) \to (z_1, 0)$ es claramente una $|\cdot|$-proyección en $\mathbb{C}^2$ y aplicando el Corolario 13.3, obtenemos : $V((z_1, z_2)) = \{\alpha\lambda + \beta\gamma : (\alpha,\beta) \in D(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (a,b)) \ ,$

$$\lambda \in V^{(a,0)}(z_1, 0) \ , \ \gamma \in V^{(0,b)}(0, z_2)\}$$

y el resto es rutinario a partir de la Proposición 1.3.

Enunciamos a continuación la expresión buscada para el Corolario 13.3, cuya demostración, en el caso real es evidente y en el caso complejo fácil consecuencia de los Corolarios 13.3 y 13.4.

13.5 COROLARIO : *Sea* (X,u) *un espacio de rango numérico real o complejo y* π *una* $|\cdot|$*-proyección en* X. *Notemos* Y *al espacio de rango numérico* $(\mathbb{K}^2, |\cdot|, (\|\pi(u)\|, \|u-\pi(u)\|))$. *Para* $x \in X$ *se tiene :*

$$V(x) = \cup\ \{V(Y, (\lambda,\gamma)) \ : \ \lambda \in V^{\pi(u)}(\pi(x)), \ \gamma \in V^{u-\pi(u)}(x-\pi(x)\}.$$

Pasamos a obtener algunas expresiones más sencillas del Corolario anterior, en casos particulares interesantes.

13.6 COROLARIO : *Sea (X,u) un espacio de rango numérico y π una $|\cdot|$-proyección en X. Supongamos que se verifica una cualquiera de las tres condiciones siguientes :*

i) $\pi(u) = u$ *ii)* $\pi(u) = 0$

iii) $(\|\pi(u)\|, \|u-\pi(u)\|)$ *es punto suave de* $B(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$.

Se tiene entonces : $V(x) = V(\pi(x)) + V(x-\pi(x))$, $(x \in X)$.

DEMOSTRACION : Si se supone *i)* o *ii)* la fórmula se obtiene aplicando el Corolario 10.2 *i)* a π o $I-\pi$ respectivamente.

Supongamos *iii)* y sea (α,β) el único estado de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ relativo a $(\|\pi(u)\|, \|u-\pi(u)\|)$. Por el Corolario 13.3 :

(*) $$V(x) = \alpha V^{\pi(u)}(\pi(x)) + \beta V^{u-\pi(u)}(x-\pi(x)) \qquad (x \in X)$$

de donde en particular :

$$V(\pi(x)) = \alpha V^{\pi(u)}(\pi(x)) \quad ; \quad V(x-\pi(x)) = \beta V^{u-\pi(u)}(x-\pi(x)),$$

y sustituyendo en (*) estas dos igualdades se tiene la tesis.

14. SEMISUMANDOS EN GENERAL Y OPERADORES DE RANGO NUMERICO SIN INTERIOR

Estamos ya en condiciones de obtener un resultado análogo al Teorema 12.4, que cubrirá los casos no cubiertos por él. Trabajamos previamente en el caso real y enseguida se trasladan los resultados al caso complejo. Empezamos con tres lemas previos.

14.1 LEMA : *Sea X un espacio normado, $T\in BL(X)$ y π una proyección absoluta en X. Se tiene :*

$$V(\pi T\pi + (I-\pi)T(I-\pi)) \subset V(T).$$

DEMOSTRACION : Sea $|\cdot|$ la norma absoluta asociada a π. Para $T\in BL(X)$ y $x\in X$ se tiene : $\|\pi T\pi(x) + (I-\pi)T(I-\pi)(x)\| =$

$$= |(\|\pi T\pi(x)\|, \|(I-\pi)T(I-\pi)(x)\|)| \leqslant$$

$$\leqslant |(\|T\|\ \|\pi(x)\|, \|T\|\ \|x-\pi(x)\|)| = \|T\|\ \|x\|.$$

Así la aplicación : $T\to \pi T\pi + (I-\pi)T(I-\pi)$ de $BL(X)$ en sí mismo es un homomorfismo de rango numérico (claramente aplica I en sí mismo), y basta aplicar el Corolario 3.4.

14.2 LEMA : *Sea X un espacio normado real y π una proyección absoluta en X. Sea $T\in BL(X)$ con $V(T)=\{0\}$. Sea $u\in S(X)$, $a=\|\pi(u)\|$, $b=\|u-\pi(u)\|$ e Y el espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (a,b))$. Para cualesquiera $\lambda\in V^{\pi(u)}(\pi T(u-\pi(u)))$, $\gamma\in V^{u-\pi(u)}((I-\pi)T\pi(u))$ se tiene : $V(Y,(\lambda,\gamma)) = \{0\}$.*

DEMOSTRACION : Por el Lema anterior : $V(\pi T\pi + (I-\pi)T(I-\pi)) = \{0\}$, lo que restado de $V(T)=\{0\}$ nos da : $V(\pi T(I-\pi) + (I-\pi)T\pi) = \{0\}$. Aplicando los Lemas 12.3 y 12.6 se tiene entonces :

$$V^{u}(\pi T(u-\pi(u)) + (I-\pi)T\pi(u)) = \{0\}$$

Aplicando el Corolario 13.5 tenemos :

$$\{0\} = \cup \{V(Y,(\lambda,\gamma)) : \lambda \in V^{\pi(u)}(\pi T(u-\pi(u))),\ \gamma \in V^{u-\pi(u)}((I-\pi)T\pi(u))\},$$

de donde se obtiene la tesis del Lema.

14.3 LEMA : *Sea* $|\cdot|$ *una norma absoluta y supongamos que existe una constante real* K *tal que para todo* $(a,b) \in S(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ *con* $a>0$, $b>0$, *y para todo* $(\alpha,\beta) \in D(\mathbb{R}^2,(a,b))$ *se tenga :*

$$\frac{\beta}{b} = K\frac{\alpha}{a}.$$ *Entonces* $|\cdot|$ *es la norma euclídea.*

DEMOSTRACION : Empecemos viendo que debe ser $K>0$. Sean : $(a,b) \in S(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ con $a>0$, $b>0$ y $(\alpha,\beta) \in D(\mathbb{R}^2,(a,b))$. Se tiene:

$$1 = \alpha a + \beta b \leq |\alpha| a + |\beta| b \leq |(|\alpha|,|\beta|)|' \ |(a,b)| = 1$$

de donde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Si fuese $\alpha = 0$, la hipótesis del lema nos daría : $\alpha=\beta=0$ lo que es absurdo, luego $\alpha>0$ y $K = \frac{\alpha a}{\beta b} \geq 0$. Además, $K=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow a=1$ para todo (a,b) en nuestras hipótesis, lo cual es absurdo, luego $K>0$. Con ello, el sistema:

$$\beta/b = K\alpha/a \quad ; \quad \alpha a + \beta b = 1$$

tiene solución única en α,β dada por :

$$(*) \qquad \alpha = \frac{a}{a^2+Kb^2} \quad ; \quad \beta = \frac{Kb}{a^2+Kb^2}$$

de modo que todo $(a,b)\in S(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ con $a>0, b>0$ es punto suave. Sea ϕ la función convexa asociada a $|\cdot|$ por el Lema 4.4. Aplicando la Proposición 5.3 ϕ es derivable en $]0,1[$ pero además, tomando para $t\in]0,1[$ $a=\frac{1-t}{\phi(t)}$, $b=\frac{t}{\phi(t)}$ y comparando las expresiones de α dadas por (*) y por el Lema 4.7, obtenemos tras sencillas manipulaciones :

$$\phi(t)-t\,\phi'(t) = \frac{(1-t)\ \phi(t)}{(1-t)^2+K^2t^2} \qquad (t\in]0,1[)$$

Resuelta la ecuación diferencial anterior con las condiciones : $\phi(0)=\phi(1)=1$ se obtiene finalmente :

$$\phi(t) = ((1-t)^2+t^2)^{1/2}$$ como queríamos demostrar.

14.4 PROPOSICION : *Sea X un espacio normado real y M un sumando de X que no sea un L^2-sumando. Entonces M permanece invariante por cualquier operador* $T\in BL(X)$ *con* $V(T)=\{0\}$.

DEMOSTRACION : Sea π la $|\cdot|$-proyección asociada a M. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $T(M)\not\subset M$, esto es, que $(I-\pi)T\pi\neq 0$.

Sea $y\in X$, $y\neq 0$ con $(I-\pi)T\pi(y)\neq 0$; sean $y_1=\pi(y)\neq 0$ e $y_2=(I-\pi)T\pi(y)=(I-\pi)T(y_1)$. Claramente : $\pi(y_1)=y_1$, $\pi(y_2)=0$. Sean : $y_1'\in D(X,y_1)$, $y_2'\in D(X,y_2)$. Tomemos $(a,b)\in S(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ arbitrario con $a>0$, $b>0$. Pongamos : $x_1=ay_1/\|y_1\|$,

$x_2 = by_2/\|y_2\|$, $u=x_1+x_2$. Claramente : $\pi(u)=x_1$, $u-\pi(u)=x_2$, $\|\pi(u)\| = a$, $\|u-\pi(u)\|=b$, $y_1' \in D(\pi(u))$, $y_2' \in D(u-\pi(u))$. Se tiene:

$$\langle y_2', (I-\pi)T\pi(u)\rangle = \langle y_2', (I-\pi)T(x_1)\rangle = \frac{a}{\|y_1\|}\langle y_2', (I-\pi)T(y_1)\rangle = \frac{a\|y_2\|}{\|y_1\|}$$

de donde : $\dfrac{a\|y_2\|}{\|y_1\|} \in V^{u-\pi(u)}((I-\pi)T\pi(u))$

Por otra parte : $\langle y_1', \pi T(u-\pi(u))\rangle = \langle y_1', \pi T(x_2)\rangle =$

$$= \frac{b}{\|y_2\|}\langle y_1', \pi T(y_2)\rangle = \frac{\gamma b}{\|y_2\|} \qquad (\text{con } \gamma = \langle y_1', \pi T(y_2)\rangle)$$

obteniéndose : $\dfrac{\gamma b}{\|y_2\|} \in V^{\pi(u)}(\pi T(u-\pi(u)))$.

Todo está preparado para aplicar el Lema 14.2, en virtud del cual, para todo $(\alpha,\beta) \in D(\mathbb{R}^2, (a,b))$ se verifica que :

$$\frac{\alpha\gamma b}{\|y_2\|} + \frac{\beta a\|y_2\|}{\|y_1\|} = 0$$

esto es : $\dfrac{\beta}{b} = K\dfrac{\alpha}{a}$ con $K = -\gamma\dfrac{\|y_1\|}{\|y_2\|^2}$

constante que no depende de a,b,α,β luego por el Lema 14.3 , $|\cdot|$ es la norma euclídea. Ello está en contradicción con la hipótesis de no ser M un L^2-sumando, lo que demuestra la Proposición.

14.5 NOTAS : *i*) La excepción de los L^2-sumandos en la Proposición anterior es obligada. En $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea, el operador : $T(x,y)=(-y,x)$ verifica $V(T)=\{0\}$. $\mathbb{R}\times\{0\}$ es un L^2-sumando de $\mathbb{R}^2$ no invariante por T.

ii) La demostración de la Proposición anterior es perfectamente válida en el caso complejo. Si se enuncia solamente para el caso real es porque para X complejo y $T \in BL(X)$, se tiene :

$$V(T) = \{0\} \Rightarrow T = 0$$

como consecuencia de un importante Teorema de Bohnenblust y Karlin ([13]). Así el enunciado literal de la Proposición para el caso complejo carece de contenido. Lo que procede en consecuencia es tomar X complejo y ponerse en condiciones de aplicar la Proposición al espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$, como se hace a continuación.

14.6 COROLARIO : *Sea X un espacio normado complejo y M un sumando de X que no sea un L^2-sumando. Entonces M permanece invariante por todo operador $T \in H(BL(X))$.*

DEMOSTRACION : Trivialmente M es un sumando del espacio normado real $X_{\mathbb{R}}$, y para la misma norma absoluta. Al ser $T \in H(BL(X))$ se tiene:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{\|I + i\alpha T\| - 1}{\alpha} = 0$$

(Corolario 3.8), lo que a su vez equivale a ser $V(BL(X_{\mathbb{R}}), iT) = \{0\}$ (Teorema 3.6). Aplicando el Teorema 14.4 tenemos $iT(M) \subset M$, esto es : $T(M) \subset M$.

Merece ya la pena resumir en un solo enunciado los resultados obtenidos sobre la estabilidad de los semisumandos por operadores de rango numérico pequeño, como se anunciaba al principio del capítulo. Damos un enunciado cómodo, que sea válido en un ambiente lo más general posible, aún a costa de perder fuerza en algún caso particular :

14.7 TEOREMA : *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y M un semisumando de X que no sea un L^2-sumando. Sea $T \in BL(X)$ y supongamos que el interior de $V(T)$ en $\mathbb{K}$ es vacío. Entonces M es invariante por T.*

DEMOSTRACION : Si M es de tipo 1 se aplica el Corolario 12.7.

En otro caso, M es sumando (Teorema 10.6). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es $V(T) = \{\lambda\}$ y $V(T - \lambda I) = \{0\}$ con lo que basta aplicar la Proposición 14.4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V(T)$ es un segmento. Se pueden entonces elegir convenientemente $\phi \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ de manera que se tenga : $e^{i\phi}(T + \lambda I) \in H(BL(X))$. Se aplica entonces el Corolario anterior.

Dualizamos a continuación los resultados anteriores para obtener la estabilidad de los semiideales por la misma clase de operadores que se considera. Basta para ello utilizar el siguiente resultado elemental :

14.8 LEMA : *Sea X un espacio normado, $T \in BL(X)$ y M un subespacio cerrado de X. Se tiene :*

i) $V(BL(X'), T^t) = V(BL(X), T)$

ii) $T^t(M^\circ) \subset M^\circ \Leftrightarrow T(M) \subset M$.

(Consúltese la notación de 8.1 si fuera preciso).

DEMOSTRACION : *i)* La aplicación $T \to T^t$ de $BL(X)$ en $BL(X')$ es un homomorfismo de rango numérico isométrico, con lo que basta aplicar el Corolario 3.4.

ii) Elemental.

14.9 TEOREMA : *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y M un semiideal de X que no sea un L^2-ideal. Sea $T \in BL(X)$ y supongamos que $V(T)$ tiene interior vacío en $\mathbb{K}$. Entonces M es invariante por T.*

DEMOSTRACION : Lema 14.8 y Teorema 14.7.

Destacamos para posterior referencia un sencillo corolario del Teorema 14.7 con el que concluimos esta sección.

14.10 COROLARIO : *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, π una proyección absoluta en X que no sea una L^2-proyección y $T \in BL(X)$ tal que $V(T)$ tiene interior vacío en $\mathbb{K}$. Entonces $\pi T = T\pi$.*

DEMOSTRACION : Aplicando el Teorema 14.7 se tiene :

$$T(\pi(X)) \subset \pi(X) \quad ; \quad T(Ker(\pi)) \subset Ker(\pi) \ ,$$

lo que equivale claramente a la conmutación de T con π.

15. SEMISUMANDOS Y SEMIIDEALES EN ESPACIOS NORMADOS COMPLEJOS. $\mathbb{R}$-DETERMINACION.

Con objeto de centrar el problema que tratamos en esta sección, es conveniente comentar los distintos precedentes que existen en la bibliografía, referentes todos ellos a los casos clásicos.

En el trabajo de Alfsen y Effros ([3] y [4]) los conceptos de L-sumando, M-sumando y M-ideal se estudian solamente en el caso real, y se sugiere ambiguamente ([4],Sección 7, Problema 9) la posibilidad de extender los resultados al caso complejo. El primer avance en esta línea lo da Hirsberg, demostrando ([33], Teorema 1.2 y Corolario 1.3) que los L-sumandos y los M-ideales del espacio real subyacente a un espacio de Banach complejo, X, son subespacios de X. Ello justifica el definir, como hace Hirsberg, los L-sumandos y los M-ideales de X como los L-sumandos y M-ideales de $X_{\mathbb{R}}$. Por otra parte, como se concreta en [1], ello es equivalente a definirlos mediante los mismos requerimientos formales que si el espacio fuese real, opción que se ha tomado en esta memoria desde el principio.

Esta misma opción se elige también en [9], y, consecuentemente, se enuncia como Teorema que X y $X_{\mathbb{R}}$ tienen los mismos L-sumandos y M-sumandos ([9], Teorema 1.12) y los mismos M-ideales, ([9], Proposición 2.3).

Demostramos en esta sección que la misma afirmación es válida para $|\cdot|$-sumandos arbitrarios con la única excepción de los L^2-sumandos, para los cuales es falsa como se muestra con un contra-ejemplo. Tratamos también el caso no lineal obteniendo que las semi-$|\cdot|$-proyecciones y los semi-$|\cdot|$-sumandos de $X_{\mathbb{R}}$ lo son también de X. Por último, dualizamos estos resultados obteniendo que la misma afirmación es válida para semiideales que no sean L^2-ideales. con ello se da una solución definitiva al problema de la relación entre la estructura de un espacio normado complejo y la de su espacio real subyacente. Se pone así de manifiesto la potencia de las técnicas desarrolladas en la sección anterior, pues, como se verá, los resultados que aquí se obtienen son consecuencias más o menos directas de dichas técnicas.

15.1 EJEMPLO : Sea $X = \mathbb{C}$. La función : $\pi(z) = \mathrm{Re}\, z$ es una L^2-proyección en $X_{\mathbb{R}}$ pero no lo es en X.

Este ejemplo evidente pone de manifiesto la necesidad de excluir la norma euclídea $|\cdot|_2$ en todos los razonamientos que siguen.

NOTACION : Durante toda esta sección, X será un espacio normado complejo y $X_{\mathbb{R}}$ denotará como siempre el espacio normado real subyacente a X.

15.2 LEMA : *Sea* $\phi(x) = ix \quad (x\in X)$. *Se tiene :*

$$V(BL(X_{\mathbb{R}}), \phi) = \{0\}.$$

DEMOSTRACION : Claramente, para $\alpha \in \mathbb{R}$ es : $\|I+\alpha\phi\| = (1+\alpha^2)^{1/2}$

de donde : $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha\neq 0}} \dfrac{\|I+\alpha\phi\|-1}{\alpha} = 0$ y basta aplicar el Teorema 3.6.

15.3 PROPOSICION : *Sea M un semisumando (resp. un semiideal) de $X_{\mathbb{R}}$ que no sea un L^2-sumando (resp. un L^2-ideal). Entonces M es un subespacio vectorial (complejo) de X.*

DEMOSTRACION : Basta probar que : $iM \subset M$, pero ello es consecuencia del Lema anterior y de los Teoremas 14.7 y 14.9 (aplicados a $X_{\mathbb{R}}$).

15.4 PROPOSICION : *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta distinta de la norma euclídea. Las $|\cdot|$-proyecciones y los $|\cdot|$-sumandos de X coinciden con los de $X_{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACION : Si π es una $|\cdot|$-proyección en $X_{\mathbb{R}}$, se tiene, en vista del Lema 15.2 y del Corolario 14.10 que : $\pi(ix) = i\pi(x) \quad (x\in X)$. El resto es evidente.

El razonamiento anterior no es válido para una semiproyección no lineal π, pues el Corolario 14.10 no es aplicable. Empecemos resolviendo el problema para semi-L-proyecciones.

15.5 LEMA : *Sea π una semi-L-proyección en $X_{\mathbb{R}}$. Entonces π es una semi-L-proyección en X.*

DEMOSTRACION : Sea $M = \pi(X)$; M es un subespacio de X (Proposición 15.3), y por la Proposición 7.8, M es un subespacio de Chebyshev de $X_{\mathbb{R}}$, luego M es un subespacio de Chebyshev de X y se aplica la Proposición 7.9.

15.6 LEMA : *Sea M un subconjunto no vacío de X, no reducido al cero y tal que :* $\lambda \in \mathbb{C},\quad x \in M \quad \Rightarrow \lambda x \in M$

La definición 10.4 permite asociar a M dos seminormas, p_M y $p_M^{\mathbb{R}}$, según se considere $M \subset X$ o $M \subset X_{\mathbb{R}}$ respectivamente. Pues bien, ambas seminormas coinciden.

DEMOSTRACION : Por la Proposición 1.6 podemos escribir :

$$p_M^{\mathbb{R}}(x) = Sup\ \{|Re\ \langle u',x\rangle| \ :\ u \in S(M),\ u' \in D(X,u)\}$$

El resto es un sencillo ejercicio.

El Lema anterior permitirá hablar sin ambiguedad de p_M cuando M sea un subespacio (complejo) de X.

15.7 TEOREMA : *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta distinta de la norma euclídea. Las semi-$|\cdot|$-proyecciones y los semi-$|\cdot|$-sumandos de X coinciden con los de $X_{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACION : Sea π una semi-$|\cdot|$-proyección en $X_{\mathbb{R}}$. Si π es lineal, se aplica la Proposición 15.4 obteniéndose que π es una $|\cdot|$-proyección de X. En otro caso, π es de tipo 1 (Teorema 10.6). Sea $M=\pi(X)$. Por la Proposición 15.3, M es un subespacio complejo de X, y por el Lema 15.6 : $p_M=p_M^{\mathbb{R}}$. Aplicando ahora el Teorema 10.12, π es una semi-L-proyección en $X_{\mathbb{R}}$ para la norma p_M. Por el Lema 15.5, π es una semi-L-proyección en X para p_M. En particular $\pi(\lambda x)=\lambda\pi(x)$ $(\lambda\in\mathbb{C}, x\in X)$. Así, π es una semi-$|\cdot|$-proyección en X. El resto es rutinario.

La única dificultad para extender los resultados anteriores a ideales y semiideales consiste en que si M es un subconjunto de X, M^o tiene distinto sentido según se considere $M\subset X$ o $M\subset X_{\mathbb{R}}$. Esta dificultad se salva mediante los dos lemas siguientes, de demostración inmediata.

15.8 LEMA : *Consideremos la biyección lineal isométrica ϕ de $(X')_{\mathbb{R}}$ sobre $(X_{\mathbb{R}})'$ dada por : $\phi(x')=\mathrm{Re}\,(x')$ $(x'\in X')$. Sea M un subespacio complejo de X ; si notamos M^o y $M^o_{\mathbb{R}}$ los anuladores de M contenidos en $(X')_{\mathbb{R}}$ y $(X_{\mathbb{R}})'$ respectivamente, entonces : $\phi(M^o)=M^o_{\mathbb{R}}$.*

15.9 LEMA : *Sean Y_1 e Y_2 dos espacios normados sobre el mismo cuerpo K , y sea ϕ una biyección lineal isométrica de Y_1 sobre Y_2.*

$M \subset Y_1$ es un semi-$|\cdot|$-sumando de Y_1 si y sólo si $\phi(M)$ es un semi-$|\cdot|$-sumando de Y_2. (La norma absoluta $|\cdot|$ es aquí arbitraria).

15.10 TEOREMA : *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta distinta de la norma euclídea. Los semi-$|\cdot|$-ideales de X coinciden con los de $X_{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACION : Tanto si M es semi-$|\cdot|$-ideal de X como si lo es de $X_{\mathbb{R}}$, M es un subespacio complejo de X (Proposición 15.3), con lo que se puede aplicar a M el Lema 15.8. La tesis del Teorema se obtiene entonces mediante la siguiente serie de equivalencias :

M semi-$|\cdot|$-ideal de X $\Leftrightarrow$ (Por definición)

M^o semi-$(|\cdot|^{r})'$-sumando de X' $\Leftrightarrow$ (Teorema 15.7)

M^o semi-$(|\cdot|^{r})'$-sumando de $(X')_{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ (Lemas 15.8 y 15.9)

$M^o_{\mathbb{R}}$ semi-$(|\cdot|^{r})'$-sumando de $(X_{\mathbb{R}})'$ $\Leftrightarrow$ (Por definición)

M semi-$|\cdot|$-ideal de $X_{\mathbb{R}}$.

16. CONDICIONES NECESARIAS PARA LA CONMUTACION DE DOS SEMIPROYECCIONES ABSOLUTAS.

El objetivo de esta sección consiste en poner en evidencia las grandes restricciones existentes para la conmutación de dos semiproyecciones absolutas. Estas restricciones han sido ya detectadas por Evans ([27] y [28]) para el caso lineal. Los resultados que aquí se obtienen, particularizados incluso al caso lineal, mejoran a los de Evans.

En los casos clásicos, la conmutación ha sido ampliamente estudiada. Concretamente, Cunningham ([20], Lema 2.2) demostró que dos L-proyecciones en un mismo espacio de Banach siempre conmutan. Este resultado se extiende fácilmente a M-proyecciones ([4]), y Behrends ([5]) demuestra que dos L^p-proyecciones para $p \neq 2$ siempre conmutan, siendo falsa tal afirmación para $p=2$, para lo cual basta tener en cuenta que las proyecciones ortogonales de los espacios de Hilbert son siempre L^2-proyecciones. Digamos por último que la conmutación de dos semi-L-proyecciones, que se demostrará más adelante (ver Teorema 18.4), se conoce en ([34]) aunque no se enuncie expresamente.

Probamos a continuación que dos proyecciones absolutas, descartados los casos triviales de igualdad o complementariedad, sólo pueden conmutar si se hayan incluidas en alguno de los casos anteriores.

NOTACION : En lo que sigue, X será un espacio normado real o complejo, M y N dos semisumandos no triviales de X cuyas semiproyecciones absolutas asociadas serán respectivamente π_M y π_N. M' y

N' serán los complementos de M y N respectivamente (Definición 11.3) y $|\cdot|_M$, $|\cdot|_N$ serán las normas absolutas asociadas a M y N.

16.1 LEMA : *Si* $M\cap N\neq\{0\}$ *y* $M'\cap N'\neq\{0\}$, *se tiene* : $|\cdot|_M=|\cdot|_N$.

DEMOSTRACION : Sean $x\in S(M\cap N)$, $y\in S(M'\cap N')$. Para $\alpha,\beta\geqslant 0$, es :

$$\|\alpha x+\beta y\|=|(\|\pi_M(\alpha x+\beta y)\|,\|(I-\pi_M)(\alpha x+\beta y)\|)|_M=$$

$$=|(\|\alpha x\|,\|\beta y\|)|_M=|(\alpha,\beta)|_M$$

y análogamente, cambiando M por N :

$\|\alpha x+\beta y\|=|(\alpha,\beta)|_N$, lo que demuestra el Lema.

16.2 LEMA : *Si* $M\cap N'\neq\{0\}$ *y* $M'\cap N\neq\{0\}$, *se tiene* : $|\cdot|_M=|\cdot|_N^r$

DEMOSTRACION : Se toman $x\in S(M\cap N')$, $y\in S(M'\cap N)$ y se tiene fácilmente : $|(\alpha,\beta)|_M=\|\alpha x+\beta y\|=|(\beta,\alpha)|_N$ para $\alpha,\beta\geqslant 0$.

16.3 TEOREMA : *Si* $M\cap N\neq\{0\}$, $M\cap N'\neq\{0\}$, $M'\cap N\neq\{0\}$ *entonces existe un* p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ *tal que* M *y* N *son semi-*L^p*-sumandos.*

DEMOSTRACION : En virtud del Lema anterior es : $|\cdot|_M=|\cdot|_N^r$

Aplicando el Teorema 6.4, y teniendo en cuenta que las normas clásicas, $|\cdot|_p$, son todas conmutativas, bastará probar que $|\cdot|_M$ es asociativa (ver Definición 6.1).

Sean : $x \in S(M \cap N')$, $y \in S(M \cap N)$, $z \in S(M' \cap N)$, y $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$.

Por definición de semi- $|\cdot|_M$-proyección se tiene :

$$\|\alpha x + \beta y + \gamma z\| = |(\|\alpha x + \beta y\|, \gamma)|_M =$$
$$= |(|(\beta,\alpha)|_N, \gamma)|_M = |(|(\alpha,\beta)|_M, \gamma)|_M$$

y, análogamente :

$$\|\alpha x + \beta y + \gamma z\| = |(\|\beta y + \gamma z\|, \alpha)|_N$$
$$= |(\alpha, \|\beta y + \gamma z\|)|_M = |(\alpha, |(\beta,\gamma)|_M)|_M$$

lo que demuestra el Teorema.

16.4 DEFINICION : Si $M \subset N$ escribiremos : $\pi_M \leqslant \pi_N$. La relación $\leqslant$ es un orden en el conjunto de las semiproyecciones absolutas en X, orden que, en general, no va a ser total. Diremos que π_M y π_N son *comparables* si $\pi_M \leqslant \pi_N$ o bien $\pi_N \leqslant \pi_M$. Por $\pi_M < \pi_N$ se entenderá lógicamente : $\pi_M \leqslant \pi_N$ y $\pi_M \neq \pi_N$.

16.5 LEMA : *Supongamos que* $M \cap N' = \{0\}$ *o bien* $M' \cap N = \{0\}$. *Si* π_M *conmuta con* π_N, *entonces* π_M *y* π_N *son comparables.*

DEMOSTRACION : Sea por ejemplo $M \cap N' = \{0\}$. Para todo $m \in M$ se tiene : $m - \pi_N(m) \in N'$ y $\pi_N(m) = \pi_N \pi_M(m) = \pi_M \pi_N(m) \in M \cap N$ luego $m - \pi_N(m) \in M \cap N' = \{0\}$ y $m = \pi_N(m) \in N$ de donde $M \subset N$.

16.6 LEMA : *Sea* $\pi_N < \pi_M$ *y* $\pi_N \pi_M = \pi_M \pi_N$. *(Esta segunda con-*

dición es automática a partir de la primera, ver Teorema 20.2 y Nota 20.3). Entonces M y N son semi-L^p-sumandos para un mismo p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

DEMOSTRACION : Se tiene evidentemente : $\pi_M \pi_N = \pi_N \pi_M = \pi_N$

Así, si $x \in M'$ es : $\pi_N(x) = \pi_N \pi_M(x) = 0$ luego $M' \subset N'$. Puesto que $M \cap N = N \neq \{0\}$ y $M' \cap N' = M' \neq \{0\}$, aplicando el Lema 16.1 se obtiene : $|\cdot|_M = |\cdot|_N = |\cdot|$ y basta probar que $|\cdot|$ es asociativa (Teorema 6.4).

Si fuese $M \cap N' = \{0\}$ se tendría para $m \in M$ que : $m - \pi_N(m) = m - \pi_M \pi_N(m) \in M \cap N' = \{0\}$ de donde $M \subset N$ contra la hipótesis $\pi_N < \pi_M$. Sean entonces : $x \in S(N)$, $y \in S(M \cap N')$, $z \in S(M')$ y $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$. Se tiene : $\pi_N(\beta y + \gamma z) = \pi_N \pi_M(\beta y + \gamma z) = \pi_N(\beta y) = 0$, de donde :

$$\|\alpha x + \beta y + \gamma z\| = |(\alpha, \|\beta y + \gamma z\|)|_N =$$

$$= |(\alpha, |(\beta, \gamma)|_M)|_N = |(\alpha, |(\beta, \gamma)|)|$$

y, por otra parte : $\|\alpha x + \beta y + \gamma z\| = |(\|\alpha x + \beta y\|, \gamma)|_M =$

$= |(|(\alpha,\beta)|_N, \gamma)|_M = |(|(\alpha,\beta)|, \gamma)|$ como queríamos demostrar.

16.7 TEOREMA : *Supongamos que $\pi_N \neq \pi_M$ y que $\pi_N \pi_M = \pi_M \pi_N$. Entonces :*

i) $|\cdot|_N = |\circ|_M^r$.

ii) *Si* $M \cap N \neq \{0\}$, *M y N son semi-*L^p*-sumandos para un mismo* p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

iii) *Si* $\pi_N + \pi_M \neq I$ *y al menos una de ellas es lineal, se tiene la misma tesis de ii).*

DEMOSTRACION : Si π_M y π_N son comparables, la tesis del Teorema es toda ella consecuencia del Lema anterior. En caso contrario, aplicando el Lema 16.5 se tiene : $M \cap N' \neq \{0\}$ y $M' \cap N \neq \{0\}$.

i) Se aplica el Lema 16.2

ii) Se aplica el Teorema 16.3

iii) Supongamos por ejemplo que π_N es lineal ; entonces π_M e $I - \pi_N$ están en las hipótesis de *ii)*. (La condición $\pi_M + \pi_N \neq I$ permite asegurar que $\pi_M \neq I - \pi_N$ para poder aplicar *ii)*).

16.8 NOTA : El apartado *iii)* del Teorema anterior nos da en particular el resultado que anunciábamos al principio de esta sección. La conmutación de dos proyecciones absolutas sólo es posible, salvo trivialidad, en los casos clásicos ya conocidos. Este resultado permite obtener como corolarios los resultados de Evans ([27], Teorema 2.1 y [28]) que afirman lo mismo en condiciones algo más restrictivas.

Además, teniendo en cuenta el Teorema completo, la única posibilidad de conmutación de dos semiproyecciones absolutas, que no responda a los casos clásicos conocidos (de dos semi-L^p-proyecciones para el mismo p), o al caso evidente de igualdad o complementariedad de las mismas, queda descrita en la siguiente Proposición. No disponiendo de un ejemplo que responda a esta posibilidad, pudiera ocurrir que las hipótesis de la Proposición no se presentaran nunca.

16.9 PROPOSICION : *Supongamos que* $\pi_N \pi_M = \pi_M \pi_N$, $\pi_N \neq \pi_M$ *y* $\pi_N + \pi_M \neq I$. *Si no se cumple que* $|\cdot|_M = |\cdot|_N = |\cdot|_p$ *para algún* p *con* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *se tiene :*

i) π_M *y* π_N *son no lineales.*

ii) $|\cdot|_M = |\cdot|_N^r$, *y* $|\cdot|_M$, $|\cdot|_N$ *tienen tipo y cotipo iguales a 1.*

iii) $M \subsetneq N'$, $N \subset M'$

DEMOSTRACION : *i)* Teorema 16.7,*iii)*.

ii) Teorema 16.7,*i)* junto con el apartado *i)* de esta proposición y el Teorema 10.6.

iii) Por el Teorema 16.7,*ii)* se tiene $M \cap N = \{0\}$, pero, aplicando la conmutación : $\pi_N(M) \subset M \cap N$ y $\pi_M(N) \subset M \cap N$, luego $\pi_M(N) = \pi_N(M) = \{0\}$, como se quería.

17. TEOREMAS OBSTRUCTIVOS. CASO COMPLEJO LINEAL.

Si se analizan los resultados de la sección 14 conjuntamente con los de la 16, se observa que aparecen afirmaciones que, en cierto modo, pudieran parecer contradictorias. Concretamente, el Corolario 14.10 junto con el Teorema 12.12 nos dicen que en un espacio normado complejo, dos proyecciones absolutas, que no sean a la vez L^2-proyecciones, siempre conmutan. Por otra parte, la idea general que se saca de la sección 16 es que tal conmutación está sujeta a muy severas restricciones. Naturalmente, la única salida es que la misma existencia de dos proyecciones absolutas en un espacio normado complejo está sujeta a muy severas restricciones.

Las anteriores consideraciones nos introducen de lleno en el núcleo de problemas que nos ocupará de aquí al final de la memoria. La pregunta general que se trata de contestar es : ¿ Hasta qué punto es posible la coexistencia en un mismo espacio normado de dos semiproyecciones absolutas ? Naturalmente, hay que suponer, para evitar trivialidades, que se trata de dos semiproyecciones absolutas distintas y que no se trata de dos proyecciones absolutas complementarias. Por otra parte, la abundancia de L^p-proyecciones en distintas clases de espacios es de sobra conocida en la literatura ([20], [21], [10]). La pregunta anterior debe concretarse entonces de la siguiente manera : ¿ Es posible que en un espacio normado existan dos semiproyecciones absolutas distintas, no complementarias y que no lleven asociada una misma norma clásica ?. Adelantemos que la respuesta a esta pregunta va a ser casi siempre negativa, por lo que bautizamos con el nombre de "Teoremas obstructivos" a los distintos resultados que se van a ir obteniendo como respuesta. Nos ocupamos en esta sección del caso en que se responde de manera negativa a la pregunta a plena generalidad, el caso complejo, lineal (dos proyecciones absolutas). Del caso complejo no lineal y del caso real, tratará el Capítulo IV.

17.1 TEOREMA : *Sea X un espacio normado complejo y sean M y N sumandos de X, con proyecciones absolutas asociadas* π_M *y* π_N *respectivamente. Si uno de ellos no es un L^2-sumando, se tiene :*

$$\pi_M \, \pi_N = \pi_N \, \pi_M$$

DEMOSTRACION : Supongamos por ejemplo que M no es un L^2-sumando. Por el Teorema 12.12 se tiene $\pi_N \in H(BL(X))$ y basta aplicar el Corolario 14.10 con $T = \pi_N$ y $\pi = \pi_M$.

17.2 NOTA : El Teorema anterior engloba (en el caso complejo) todos los resultados sobre conmutación de proyecciones absolutas conocidos hasta la fecha, pues de él se deduce la conmutación de dos L^p-proyecciones cualesquiera en un espacio complejo para $1 \leqslant p \leqslant \infty, p \neq 2$.

17.3 TEOREMA : *Sea X un espacio normado complejo. Sean M y N dos sumandos de X distintos y no complementarios. Entonces M y N son L^p-sumandos para un mismo p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

DEMOSTRACION : Si M y N son L^2-sumandos no hay nada que demostrar. En otro caso las proyecciones absolutas asociadas a M y N conmutan, (Teorema anterior), con lo que basta aplicar el Teorema 16.7.

Destaquemos que el Teorema anterior obstruye incluso la posibilidad de existencia de dos proyecciones absolutas para la misma norma, salvo casos triviales, si no se trata de una norma clásica :

17.4 COROLARIO : *Sea X un espacio normado complejo. Sea M un $|\cdot|$-sumando de X y M' su $|\cdot|^r$-sumando complementario. Si $|\cdot| \neq |\cdot|_p$ para todo p, entonces M y M' son los únicos sumandos de X.*

DEMOSTRACION : Evidente a partir del Teorema anterior.

17.5 TEOREMA : *Sea X un espacio normado complejo. Sean M y N dos ideales distintos de X. Se verifica obligadamente una de las siguientes afirmaciones :*

a) M es un sumando y N su sumando complementario.

b) M y N son L^p-ideales para un mismo p.

DEMOSTRACION : Sean $|\cdot|_M$ y $|\cdot|_N$ las normas absolutas asociadas a M y N respectivamente. Por hipótesis M^o es un $(|\cdot|_M^{\pi})'$-sumando y N^o un $(|\cdot|_N^{\pi})'$-sumando de X'. Si fuese $M^o = N^o$ sería $M = N$.

Si M^o y N^o son L^p-sumandos de X', entonces M y N son L^q-ideales de X (en que q está definido por $1/p + 1/q = 1$ con los convenios usuales) y por tanto se cumple $b)$.

En otro caso, en vista del Teorema 17.3, M^o y N^o son imagen y núcleo de una misma proyección absoluta en X'. Dicha proyección es débil* continua por tener imagen y núcleo débil*cerrados, esto es, es de la forma π^t en que π es una proyección lineal continua en X. Por la Proposición 8.2, π es una proyección absoluta en X. De $\pi^t(X') = M^o$ y $Ker(\pi^t) = N^o$ se deduce fácilmente que : $N = \pi(X)$ y $M = Ker\ (\pi)$, luego se cumple $a)$.

17.6 NOTA : Los resultados de esta sección permiten obtener, como casos particulares, todos los teoremas de tipo obstructivo conocidos hasta la fecha para el caso complejo. En efecto :

Si X es un espacio normado complejo, aplicando el Teorema 17.3 obtenemos :

" X no puede admitir a la vez un L^p-sumando y un $L^{p'}$-sumando, no triviales con $p \neq p'$." ([5], Teoremas 3.2, 3.3 y 4.2 ; ver también [9], Teoremas 1.12 y 6.2).

La versión compleja de la Proposición 2.4 de [9] queda también englobada por nuestro Teorema 17.5.

C A P I T U L O I V

TEOREMAS OBSTRUCTIVOS

18. CARACTER HEREDITARIO DE LOS SEMISUMANDOS. CONMUTACION DE LAS SEMI-L-PROYECCIONES.

18.1 DEFINICION : Sea X un espacio normado real o complejo y M un subespacio de X. Diremos que M es *hereditario* si verifica que:

$$\left.\begin{array}{c} x\in X\ ,\ y\in M \\ \|y\| = \|x\| + \|y-x\| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x\in M$$

El concepto de subespacio (en general, cono) hereditario se introduce en [3] donde se demuestra que los L-sumandos son subespacios hereditarios. En [34] se demuestra que también lo son los semi-L-sumandos. Generalizamos dichos resultados mostrando que el carácter hereditario es característico de los semisumandos de tipo 1 y 2.

18.2 PROPOSICION : *Sea X un espacio normado real o complejo y sea*

M un semisumando de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes : *i) M es de tipo 1 o 2.*

ii) M es un subespacio hereditario de X.

DEMOSTRACION : *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sean $y \in M$, $x \in X$ con $\|y\| = \|x\| + \|y-x\|$ y sea π la semi-$|\cdot|$-proyección asociada a M. Se tiene :

$$\|y\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| + |(\|y-\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)| \geqslant$$

$$\geqslant \|\pi(x)\| + \|y-\pi(x)\| \geqslant \|y\| \quad , \qquad \text{de donde :}$$

$$\|\pi(x)\| = |(\|\pi(x)\|, \|x-\pi(x)\|)|$$

Por hipótesis, $|\cdot|$ tiene tipo 1 o 2 y por tanto tiene la propiedad de crecimiento estricto en la segunda variable (Proposición 5.5), de donde $\|x-\pi(x)\| = 0$ y $x \in M$ como queríamos.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Si $|\cdot|$ fuese de tipo 3, aplicando la Proposición 5.5 existiría $\alpha > 0$ con $|(1,\alpha)| = 1$. Sean $y \in S(M)$, $z \in S(X)$ con $\pi(z) = 0$ y sea $x = 1/2(y + \alpha z)$. Se tiene :

$\|x\| = 1/2 \ |(1,\alpha)| = 1/2$ y $\|y-x\| = 1/2\|(y-\alpha z)\| = 1/2|(1,\alpha)| = 1/2$.

Por ser M hereditario $x \in M$ de donde $z \in M$, lo cual es absurdo.

18.3 COROLARIO : *Sea M un semisumando de X de tipo 1 o 2 y sea π una semi-L-proyección en X. Se tiene : $\pi(M) \subset M$.*

DEMOSTRACION : Para $x \in M$ se tiene : $\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x-\pi(x)\|$ y por ser M hereditario, $\pi(x) \in M$.

Pasamos ahora a demostrar la conmutación de las semi-L-proyecciones, esencialmente conocida en [34].

18.4 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real o complejo y sean M_1, M_2 dos semi-L-sumandos de X con semi-L-proyecciones asociadas π_1 y π_2. Entonces $M_1 \cap M_2$ es un semi-L-sumando de X cuya semi-L-proyección asociada es : $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$*

DEMOSTRACION : Sean $x \in X$ y $m \in M_1 \cap M_2$. Por el Corolario 18.3, $\pi_2\pi_1(x) \in M_1$ de donde :

$$\|x-\pi_2\pi_1(x)\| = \|\pi_1(x)-\pi_2\pi_1(x)\| + \|x-\pi_1(x)\|$$

Así : $\|x-m\| = \|\pi_1(x)-m\| + \|x-\pi_1(x)\| =$

$$= \|\pi_2\pi_1(x)-m\| + \|\pi_1(x)-\pi_2\pi_1(x)\| + \|x-\pi_1(x)\| =$$

$$= \|\pi_2\pi_1(x)-m\| + \|x-\pi_2\pi_1(x)\|.$$

De la expresión anterior se deduce fácilmente que $M_1 \cap M_2$ es un subespacio de Chebyshev de X cuya aplicación que materializa distancias es $\pi_2\pi_1$. Si cambiamos los papeles de M_1 y M_2 obtenemos : $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$. Por último, tomando en la misma expresión $m=0$ tenemos : $\|x\| = \|\pi_2\pi_1(x)\| + \|x-\pi_2\pi_1(x)\| \quad (x \in X)$, con lo que aplicando la Proposición 7.9, $\pi_2\pi_1$ es una semi-L-proyección.

19. PROPIEDADES DE INTERSECCION DE LOS SEMISUMANDOS

Analizamos en esta sección la incidencia de la hipótesis de que dos semisumandos de un espacio normado tengan intersección no nula. Como se verá, esta hipótesis impone serias restricciones a las normas absolutas asociadas a dichos semisumandos, de forma que la situación más usual para dos semisumandos es que tengan intersección cero. Este hecho se utilizará más adelante para obtener fuertes teoremas de tipo obstructivo.

19.1 NOTACION : Durante toda la presente sección, M y N serán dos semisumandos *distintos* de un espacio normado real o complejo X, con semiproyecciones absolutas asociadas π_M y π_N respectivamente. Por Y_M notaremos al espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_M, (1,0))$ y análogamente se define Y_N. Cuando quiera que $M \cap N \neq \{0\}$, notaremos simplemente por p a la seminorma $p_{M\cap N}$ de la Definición 10.4.

19.2 LEMA : *Sea* $M \cap N \neq \{0\}$. *Se tiene :*

i) $p(X) = \|x\|$ *para* $x \in M \cap N$.

ii) $$p(x) = p(\pi_M(x)) + n(Y_M)\ \|x - \pi_M(x)\| = p(\pi_M(x)) + p(x - \pi_M(x)) \qquad (x \in X)$$

Análogo enunciado cambiando π_M , Y_M *por* π_N , Y_N .

DEMOSTRACION : *i)* Evidente.

ii) Sea $u \in S(M \cap N)$; aplicando el Corolario 10.2, en el espacio de rango numérico (X,u) se tiene :

$$v(x) = v(\pi_M(x)) + n(Y_M) \; \|x - \pi_M(x)\| \qquad (x \in X)$$

Al tomar supremo moviendo u en $S(M \cap N)$ se obtiene la primera igualdad. En particular, cambiando x por $x - \pi_M(x)$ se tiene : $p(x - \pi_M(x)) = n(Y_M) \; \|x - \pi_M(x)\|$ de donde la segunda igualdad.

19.3 LEMA : *Sean M y N de tipo 1 y $M \cap N \neq \{0\}$. Entonces M y N son semi-L-sumandos.*

DEMOSTRACION : Aplicando la Proposición 5.3 se tiene : $n(Y_M) > 0$ y $n(Y_N) > 0$. Si $p(x) = 0$, aplicando el Lema anterior tenemos: $x = \pi_M(x) = \pi_N(x) \in M \cap N$ y por la parte *i)* del mismo Lema $x = 0$ luego p es una norma. Nuevamente aplicando el Lema, M y N son semi-L-sumandos para la norma p, con lo que aplicando el Teorema 18.4 : $\pi_M \pi_N = \pi_N \pi_M$. El Teorema 16.7 *ii)* nos dice que M y N son semi-L^p-sumandos para un mismo p, pero debe ser p = 1 si queremos que M y N tengan tipo 1.

19.4 COROLARIO : *Sean P y Q dos semiideales distintos de X, de cotipo 3. Si $P+Q$ no es denso en X, entonces P y Q son semi-M-ideales.*

DEMOSTRACION : P^o y Q^o son semisumandos distintos de X', de tipo 1 (Proposición 5.6). Además al ser $P+Q$ no denso en X se tiene $P^o \cap Q^o \neq \{0\}$ con lo que basta aplicar el Lema 19.3.

Las hipótesis del Lema 19.3 se van a ir debilitando paso a paso en lo que sigue. Cada uno de los resultados que se van obteniendo precisa del anterior, y de ahí que se enuncien escalonadamente, confluyendo al final de la sección en un Teorema de máxima generalidad que los engloba a todos.

19.5 LEMA : *Sea M de tipo 1 y N de tipo 2 o 3. Si $M \cap N \neq \{0\}$, entonces $N' \subset M$. (N' denota como siempre el complemento de N).*

DEMOSTRACION : Se tiene $n(Y_M) > 0$ y $n(Y_N) = 0$ (Proposición 5.3), con lo que aplicando el Lema 19.2 tenemos para $x \in N'$:
$p(x) = n(Y_N)\ \|x\| = 0$ y por otra parte :
$0 = p(x) = p(\pi_M(x)) + n(Y_M)\ \|x - \pi_M(x)\|$ de donde $x = \pi_M(x) \in M$.

19.6 LEMA : *Sea M de tipo 1 y $M \cap N \neq \{0\}$. Entonces M y N son semi-L-sumandos.*

DEMOSTRACION : Si N es de tipo 1, se aplica el Lema 19.3. En otro caso llegaremos a una contradicción. En efecto, N es un sumando (Teorema 10.6) y por tanto N' es un sumando que por el Lema 19.5 está contenido en M; en particular $M \cap N' \neq \{0\}$. Si N' fuese de tipo distinto de 1, aplicando otra vez el Lema 19.5 se tendría $N \subset M$ y $M = X$, absurdo. Luego N' es de tipo 1. Aplicando el Lema 19.3 a M y N' , obtenemos que N' es un L-sumando, y por tanto también lo es N, lo cual es una contradicción.

19.7 COROLARIO : *Sean P y Q dos semiideales distintos de X. Si P es de cotipo 3 y $P+Q$ no es denso en X, entonces P y Q son dos semi-M-ideales.*

DEMOSTRACION : Análoga a la del Corolario 19.4 utilizando el Lema 19.6 en lugar del 19.3.

19.8 LEMA : *Supongamos que tanto M como N son de tipo distinto de 1 y que $M \cap N \neq \{0\}$. Entonces $M' + N'$ no es denso en X.*

DEMOSTRACION : Se tiene ahora $n(Y_M) = n(Y_N) = 0$ (Proposición 5.3). Aplicando el Lema 19.2, la seminorma p se anula en M' y en N', luego se anula en su suma y, por continuidad,en el cierre de su suma. Al ser $M \cap N \neq \{0\}$ la seminorma p no puede ser idénticamente nula, lo que demuestra el Lema.

19.9 LEMA : *Sea M de tipo 3 y $M \cap N \neq \{0\}$. Entonces M y N son dos M-sumandos.*

DEMOSTRACION : Si N fuese de tipo 1, aplicando el Lema 19.6 , M y N serían semi-L-sumandos contra la hipótesis de ser M de tipo 3. Se tiene por tanto que M y N son sumandos (Teorema 10.6), luego M' y N' son sumandos de X, en particular ideales (Corolario 8.4). Dado que M' es de cotipo 3 y que por el Lema 19.8 $M'+N'$ no es denso en X, estamos en condiciones de aplicar el Corolario 19.7 obteniendo que M' y N' son M-ideales. Con ello la norma absoluta asociada a M' y N' no puede ser otra que $|\cdot|_\infty$ (Corolario 11.2). Resulta por tanto que M', N' son M-sumandos, luego también lo son M y N.

Todos los resultados de la sección pueden ahora englobarse de la siguiente manera :

19.10 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real o complejo. Sean M y N dos semisumandos distintos de X y supongamos que $M \cap N \neq \{0\}$. Se verifica entonces una de las siguientes afirmaciones :*

i) M y N son semi-L-sumandos.

ii) M y N son M-sumandos.

iii) M y N son de tipo 2.

DEMOSTRACION : Si uno de ellos es de tipo 1 se aplica el Lema 19.6 obteniéndose *i)*. Si uno de ellos es de tipo 3 se aplica el Lema 19.9 obteniéndose *ii)*. En otro caso se verifica *iii)*.

19.11 COROLARIO : *Sean P y Q dos semiideales distintos de X y supongamos que $P+Q$ no es denso en X. Se verifica una de las siguientes afirmaciones :*

i) P y Q son semi-M-ideales.

ii) P y Q son L-ideales.

iii) P y Q son de cotipo 2.

DEMOSTRACION : Basta aplicar el Teorema anterior tomando : $M = P^{o}$ y $N = Q^{o}$. El ser $P \neq Q$ implica que $M \neq N$ mientras de la condición de suma no densa permite asegurar que $M \cap N \neq \{0\}$.

19.12 PROBLEMA : Sería deseable sustituir la afirmación *iii)* del Teorema 19.10 por la de ser M y N L^p-sumandos para un mismo p. con ello se obtendría que la intersección de dos semisumandos distintos siempre es cero salvo que se trate de dos semi-L^p-sumandos para un mismo p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

20. SEMIPROYECCIONES ABSOLUTAS COMPARABLES. TEOREMAS OBSTRUCTIVOS : CASO COMPLEJO GENERAL.

Las propiedades de intersección de los semisumandos, obtenidas en la sección anterior, permiten perfeccionar los teoremas obstructivos para el caso complejo de la sección 17, englobando el caso no lineal, y a ello dedicamos esta sección. Estudiamos previamente la comparabilidad de dos semiproyecciones absolutas distintas, obteniendo que ésta sólo es posible si se trata de dos semi-L^p-proyecciones para un mismo p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

20.1 PROPOSICION : *Sean M y N dos semisumandos arbitrarios de un espacio normado real o complejo X y sean* π_M *y* π_N *las semiproyecciones absolutas asociadas a M y N respectivamente. Si* $\pi_M \pi_N = 0$, *se tiene también :* $\pi_N \pi_M = 0$.

DEMOSTRACION : Supongamos por reducción al absurdo que : $\pi_N \pi_M \neq 0$ y sea entonces $m \in M$ con $\pi_N(m) \neq 0$. Notemos como siempre $|\cdot|_M$ y $|\cdot|_N$ las normas absolutas asociadas a M y N . Se tiene :

$$\|m\| = |(\|\pi_N(m)\|, \|m-\pi_N(m)\|)|_N \geqslant$$
$$\geqslant \|m-\pi_N(m)\| = |(\|m\|, \|\pi_N(m)\|)|_M \geqslant \|m\| ,$$

donde se ha aplicado que : $\pi_M \pi_N(m) = 0$. Obtenemos así :

$$\|m-\pi_N(m)\| = |(\|\pi_N(m)\|, \|m-\pi_N(m)\|)|_N \quad \text{y} \quad \|m\| = |(\|m\|, \|\pi_N(m)\|)|_M \quad .$$

Por la primera igualdad $(\|\pi_N(m)\| \neq 0)$, $|\cdot|_N$ no posee crecimiento estricto en la primera variable y por tanto tiene cotipo 3 (Proposición 5.5 aplicada a $|\cdot|^r$). Análogamente, de la segunda igualdad obtenemos que π_M es de tipo 3 y por tanto es lineal (Teorema 10.6), con lo que $I-\pi_M$ es una proyección absoluta de de cotipo 3 . Sea como siempre $M' = (I-\pi_M)(X)$.

Por ser $\pi_M \pi_N = 0$ tenemos $N \subset M'$ y en particular : $M' \cap N \neq \{0\}$. Si tenemos en cuenta que las semi-L-proyecciones conmutan al igual que las M-proyecciones, al aplicar el Teorema 19.10 a M' y N no queda más salida que ser ambos de tipo 2, y en particular π_N también es lineal (Teorema 10.6). Se tiene así que M' y N son sumandos de tipo 2 y cotipo 3, luego por el Corolario 8.4 ideales de tipo 2 y cotipo 3. Dado que la suma de ambos no es densa ($M'+N = M'$), estamos en condiciones de aplicar el Corolario 19.4, obteniendo que ambos son M-ideales, lo cual es absurdo, pues ambos eran de tipo 2.

20.2 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real o complejo y M y N dos semisumandos de X en la situación $M \subset N$, $M \neq N$. Se tiene :*

i) Las semiproyecciones absolutas asociadas a M y N conmutan.

ii) M y N son semi-L^p-sumandos para un mismo p con $1 \leq p \leq \infty$.

DEMOSTRACION : En vista del Lema 16.6, basta probar *i)*.

Por ser $M \cap N = M \neq \{0\}$ podemos aplicar el Teorema 19.10 obteniendo una de las siguientes posibilidades :

a) M y N son semi-L-sumandos y se aplica el Teorema 18.4.

b) M y N son M-sumandos y aplicamos el hecho conocido de que las M-proyecciones conmutan.

c) M y N son de tipo 2, con lo que π_M y π_N son lineales y en particular $I-\pi_N$ es una proyección absoluta.

De $M \subset N$ tenemos $\pi_N \pi_M = \pi_M$ esto es , $(I-\pi_N)\pi_M = 0$ y aplicando la Proposición anterior : $\pi_M(I-\pi_N) = 0$ de donde : $\pi_M = \pi_M \pi_N$ como queríamos.

20.3 NOTA : Obsérvese que el Teorema anterior afirma la misma tesis del Lema 16.6 pero sin la hipótesis de conmutación que se obtiene también como tesis. Nótese también que de camino se ha demostrado la conmutación de dos L^2-proyecciones comparables, hecho que no parece ser conocido.

20.4 COROLARIO : *Sean P y Q dos semiideales en un espacio normado real o complejo, X, en la situación : $P \subset Q$, $P \neq Q$. Entonces P y Q son semi-L^p-ideales para un mismo p con $1 \leq p \leq \infty$.*

DEMOSTRACION : $M = Q^o$ y $N = P^o$ están en condiciones de serles aplicado el Teorema 20.2.

Pasamos ya a obtener nuevos teoremas obstructivos en el caso complejo, pero abarcando ya el caso no lineal. Estudiamos previamente la posible coexistencia de un semisumando con un sumando :

20.5 PROPOSICION : *Sea X un espacio normado complejo, M un semi-sumando de X que no sea un sumando y N un sumando de X. Entonces M es un semi-L-sumando y N es un L-sumando.*

DEMOSTRACION : M es de tipo 1 (Teorema 10.6), con lo que si $M \cap N \neq \{0\}$ basta aplicar el Teorema 19.10. Sea entonces $M \cap N = \{0\}$ y sean π_M, π_N las semiproyecciones absolutas asociadas a M y N respectivamente. Por el Teorema 12.12 $\pi_N \in H(BL(X))$ y por el Teorema 14.7 se tiene : $\pi_N(M) \subset M$. Así, $\pi_N(M) \subset M \cap N = \{0\}$, y aplicando el Teorema 20.2 a M y a $Ker(\pi_N)$ se tiene que M y N son semi-L^p-sumandos para un mismo p. Dado que M es de tipo 1 se deberá tener $p = 1$, lo que demuestra la Proposición.

20.6 TEOREMA : *Sea X un espacio normado complejo y M y N dos semi-sumandos de X, distintos y no complementarios. Si al menos uno de ellos es un sumando, entonces M y N son semi-L^p-sumandos para un mismo p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

DEMOSTRACION : Supongamos por ejemplo que N es un sumando. Si M no es sumando se aplica la Proposición anterior. En otro caso estamos en condiciones de aplicar el Teorema 17.3.

En vista del Teorema anterior, la única posibilidad de coexistencia de dos semisumandos en un espacio normado complejo, que no responda a los casos clásicos (dos semi-L^p-sumandos para un mismo p), o a los casos triviales de igualdad o complementariedad, se describe en la siguiente Proposición, enteramente análoga a la Proposición 16.9, por lo que pudiera ocurrir igualmente que sus hipótesis no se presenten nunca. La única diferencia con la citada Proposición estriba en que se suprime la hipótesis de conmutación mientras se exige que el espacio X sea complejo.

20.7 PROPOSICION : *Sea X un espacio normado complejo. Sean M y N dos semisumandos de X con semiproyecciones absolutas asociadas π_M y π_N, y normas absolutas asociadas $|\cdot|_M$ y $|\cdot|_N$, respectivamente. Supongamos que M y N son distintos y no complementarios. Si no se verifica que $|\cdot|_M = |\cdot|_N = |\cdot|_p$ para algún p con $1 \leq p \leq \infty$, se tiene :*

i) π_M y π_N son no lineales.

ii) $M \subset Ker(\pi_N)$ y $N \subset Ker(\pi_M)$.

iii) $|\cdot|_N = |\cdot|_M^r$ y $|\cdot|_M$, $|\cdot|_N$ tienen tipo y cotipo 1.

DEMOSTRACION : *i)* Se deduce del Teorema 20.6.

ii) Aplicando el Teorema 12.12 : $W(\pi_M) = W(\pi_N) = [0,1]$. de donde, puesto que M y N son de tipo 1, aplicando el Teorema 12.4 obtenemos : $\pi_N(M) \subset M \cap N$ y $\pi_M(N) \subset M \cap N$. Si fuese $M \cap N \neq \{0\}$, por el Teorema 19.10 M y N serían semi-L-sumandos contra la hipótesis luego : $\pi_N(M) = \pi_M(N) = \{0\}$ como queríamos.

iii) Por ser $M \cap N' = M \neq \{0\}$ y $M' \cap N = N \neq \{0\}$, el Lema 16.2 nos da $|\cdot|_M = |\cdot|_N^r$ y el resto es ya evidente.

Damos aquí por terminado el estudio de Teoremas obstructivos en lo que a espacios complejos se refiere. A excepción de la laguna descrita en la Proposición anterior, la solución dada es completamente definitiva. Nótese una vez más que para sumandos la respuesta dada es definitiva, pues las posibilidades que deja abiertas el Teorema 17.3 son fácilmente ejemplificables. Cuando se admite el caso no lineal como se hace en esta sección aparecen mayores dificultades.

Es obligado comentar que incluso la existencia en un espacio normado complejo de un semisumando que no sea sumando es dudosa. Se observará que en toda la memoria no aparece un tal ejemplo, y ello se debe simplemente a que no se conoce. Concretamente, parece viable la siguiente conjetura :

20.8 PROBLEMA : ¿ Es todo semisumando en un espacio normado complejo automáticamente un sumando ? En vista del Teorema 10.12, la pregunta anterior se contestaría afirmativamente con sólo probar que todo semi-L-sumando en un espacio normado complejo fuese un auténtico L-sumando. Hemos consultado esta cuestión con el Prof.

A. Lima, autor como se recordará, del concepto de semi-L-sumando, que nos comunicó que el problema anterior está abierto y que él mismo está vivamente interesado en su solución.

En vista de los comentarios anteriores puede parecer que el estudio de semiproyecciones no lineales en el caso complejo es un tanto peligroso, dado que las hipótesis de dicho estudio pueden ser vacías. No obstante, en tanto el problema anterior permanezca abierto, está justificado tal estudio, entre otras razones porque éste podría ser el camino para conseguir una respuesta al problema.

21. TEOREMAS OBSTRUCTIVOS : CASO REAL

Como punto de partida para el estudio que se realiza en esta sección es obligado citar el siguiente Teorema, debido a E. Behrends :

21.1 TEOREMA : ([9], Teorema 1.13). *Sea X un espacio de Banach.*

i) Si X es complejo, X no puede admitir a la vez un L-sumando y un M-sumando.

ii) Si X es real y no es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$, se tiene la misma tesis de i).

Como ya se comentó oportunamente, la parte *i)* del Teorema anterior queda ampliamente englobada por nuestros resultados de las secciones 17 y 20. Nos centramos ahora sobre la afirmación *ii)*.

Salta a la vista en primer lugar que la laguna que deja el Teorema es obligada, en $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$, $\mathbb{R} \times 0$ es un M-sumando y $\mathbb{R}(1,1)$ es un L-sumando. Puesto que vamos en busca de extender y generalizar el Teorema anterior, conviene poner de manifiesto que la situación excepcional recién descrita no es más que un ejemplo de una situación más general que describimos a continuación :

21.2 EJEMPLO : Sean $|\cdot|$ y $|\cdot|^*$ dos normas absolutas, y supongamos que existe una biyección lineal f de $\mathbb{R}^2$ sobre sí mismo que aplica $S(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ sobre $S(\mathbb{R}^2, |\cdot|^*)$. Sea X el espacio normado $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$. Claramente $\mathbb{R}(1,0)$ es un $|\cdot|$-sumando de X. Por otra parte, aplicando el Lema 15.9 es fácil comprobar que $\mathbb{R}f^{-1}(1,0)$ es un $|\cdot|^*$-sumando de X. Las hipótesis hechas sobre $|\cdot|$ y $|\cdot|^*$ se presentan en numerosos casos particulares (ver [27], Definición 1.11).

El ejemplo anterior avisa de que, al estudiar teoremas obstructivos para el caso real, el objetivo no debe ser demostrar que la coexistencia de dos semisumandos (salvados los casos triviales y los clásicos) es imposible, sino, más bien, que tal coexistencia sólo es posible en dimensión 2, como ocurre en el Teorema 21.1.

La siguiente definición tiene por objeto aislar la propiedad de los semisumandos de tipo 1 que va a jugar un papel esencial en los próximos razonamientos.

21.3 DEFINICION : Sea X un espacio normado, para $x,y \in X$, $y \neq 0$, diremos que x es *completamente ortogonal* a y, y escribiremos : $x \perp y$ si y sólo si se tiene : $v(y/\|y\|, x) = 0$, en que el primer miembro denota el radio numérico de x en el espacio de rango numérico $(X, y/\|y\|)$.

Diremos que un subespacio M de X , $M \neq \{0\}$, *posee la propiedad* $\perp$ si todo vector de X que sea completamente ortogonal a un vector de M pertenece a M:

$$\{ x \in X \ , \ y \in M \ , \ y \neq 0 \ , \ x \perp y \} \Rightarrow x \in M \ .$$

El siguiente enunciado describe el comportamiento de los semisumandos con respecto a la relación de completa ortogonalidad y caracteriza los subespacios con la propiedad $\perp$ que nos interesan.

21.4 : PROPOSICION : *Sea X un espacio normado, $u \in S(X)$ y M un semisumando de X con semiproyección absoluta asociada π. Se tiene :*

i) $\mathbb{K}u$ tiene la propiedad $\perp$ si y sólo si u es un vértice de $B(X)$.

ii) Si M es de tipo 2 o 3 :

$Ker(\pi) = \{x \in X : x \perp y \ \ para\ todo\ y \in S(M)\}$.

iii) M tiene la propiedad $\perp$ si y sólo si es de tipo 1.

DEMOSTRACION : *i)* Sea u vértice y $x \perp \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Por la Proposición 1.3, $x \perp u$, esto es $v(u,x) = 0$ y por ser u vértice $x = 0 \in \mathbb{K}u$. A la inversa, si $\mathbb{K}u$ tiene la propiedad $\perp$ y $v(u,x) = 0$, se tendrá $x = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, pero $\lambda u \perp u$ fuerza claramente $\lambda = 0$, luego $x = 0$ y u es vértice de $B(X)$.

ii) Basta aplicar el Teorema 10.6 teniendo en cuenta que, evidentemente, $p_M(x) = 0 \Leftrightarrow x \perp u$ para todo $u \in S(M)$.

iii) Notando Y al espacio de rango numérico $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, (1,0))$ y aplicando el Corolario 10.2 se tiene para $u \in S(M)$:

$$v(u,x) = v(u,\pi(x)) + n(Y)\ \|x - \pi(x)\| \qquad (x \in X)$$

Además, $n(Y) > 0$ si y sólo si M es de tipo 1 (Proposición 5.3). Sea M de tipo 1, $x \in X$, $y \in M$, $y \neq 0$ con $x \perp y$. Tomando $u = y/\|y\|$ es $v(u,x) = 0$ luego $n(Y)\ \|x - \pi(x)\| = 0$ y $x = \pi(x) \in M$, con lo que M tiene la propiedad $\perp$. A la inversa, si M tiene la propiedad $\perp$ y fuese de tipo 2 o 3, se tendría por *ii)*: $Ker(\pi) \subset M$, absurdo.

El siguiente Lema es, probablemente, conocido. A falta de una referencia apropiada, improvisamos su demostración.

21.5 LEMA : *Sea X un espacio normado real bidimensional. El conjunto de los vértices de $B(X)$ es numerable.*

DEMOSTRACION : Sean $x_0, y_0 \in S(X)$, linealmente independientes. Todo vector $x \in S(X)$ salvo y_0 se expresa de manera única en la forma : $x = \dfrac{x_0 + \lambda y_0}{\|x_0 + \lambda y_0\|}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea x vértice de $B(X)$; considerando el espacio de rango numérico (X, x) , todo vector $y \in X$ tal que $V(y)$ sea unitario es un múltiplo escalar de x . En particular tomando $x \neq y_0$, $V(y_0)$ no es unitario, esto es : $\mathit{Mín}\ V(y_0) < \mathit{Máx}\ V(y_0)$, o bien, aplicando el Teorema 3.6 :

$$\lim_{\alpha \to 0^-} \frac{\|x + \alpha y_0\| - 1}{\alpha} < \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|x + \alpha y_0\| - 1}{\alpha}$$

Haciendo la sustitución : $x = \dfrac{x_0 + \lambda y_0}{\|x_0 + \lambda y_0\|}$ y $t = \lambda + \alpha\|x_0 + \lambda y_0\|$ obtenemos :

$$\lim_{t \to \lambda^-} \frac{\|x_0 + t y_0\| - \|x_0 + \lambda y_0\|}{t - \lambda} < \lim_{t \to \lambda^+} \frac{\|x_0 + t y_0\| - \|x_0 + \lambda y_0\|}{t - \lambda}$$

de donde la función : $f(t) = \|x_0 + t y_0\| \quad (t \in \mathbb{R})$ no es derivable en λ. Dado que evidentemente f es convexa, la ley : $x \to \lambda$ aplica inyectivamente el conjunto de vértices de $B(X)$, salvo, eventualmente, el vértice y_0 , en el conjunto de puntos de no derivabilidad de una función convexa, que, como se sabe, es, a lo sumo, numerable.

El siguiente resultado es básico para el desarrollo posterior :

21.6 LEMA : *Sea X un espacio normado real, M un subespacio no nulo de X que posea la propiedad $\perp$ y π una proyección absoluta en X. Supongamos que $M\cap\pi(X) = \{0\}$ y que $M\cap Ker(\pi) = \{0\}$. Entonces $M = \mathbb{R}u$ en que u es un vértice de $B(X)$.*

DEMOSTRACION : Sea $u\in M$; si $\pi(u)=0$ se tiene : $u\in M\cap Ker(\pi) = \{0\}$, luego la restricción de π a M es inyectiva. Sea $u\in S(M)$; vamos a probar que $x=\pi(u)/\|\pi(u)\|$ es vértice de $B(\pi(X))$. Ello equivale evidentemente a probar que :

$$y\perp x \quad con \quad y\in\pi(X) \Rightarrow y=0$$

Pues bien, $u-\pi(u)\neq 0$ pues $M\cap\pi(X) = \{0\}$, con lo que, teniendo en cuenta que $y-\pi(y) = 0$, de $y\perp x$ obtenemos : $\pi(y)\perp\pi(u)$, $y-\pi(y)\perp u-\pi(u)$. Para aplicar el Corolario 13.3, tengamos en cuenta que con la notación del mismo se tiene : $V^{\pi(u)}(\pi(y)) = \{0\}$ y $V^{u-\pi(u)}(y-\pi(y)) = \{0\}$, luego por dicho Corolario es $V^{u}(y)=\{0\}$ o sea $y\perp u$. Por la propiedad $\perp$: $y\in M\cap\pi(X) = \{0\}$ como queríamos.

Supongamos por reducción al absurdo que M no es unidimensional y sea M_0 subespacio bidimensional de M. La aplicación : $u\to\pi(u)/\|\pi(u)\|$ es entonces una biyección de $S(M_0)$ sobre $S(\pi(M_0))$. Por la primera parte de la demostración todo punto de $S(\pi(M_0))$ es vértice de $B(\pi(X))$ y en particular de $B(\pi(M_0))$. Como $\pi(M_0)$ es bidimensional, aplicando el Lema anterior obtenemos que $S(\pi(M_0))$ es numerable, lo cual es absurdo. Obtenemos por tanto que M es unidimensional, con lo que basta aplicar la Proposición 21.4,*i)* para concluir la demostración.

La fuerza del Lema anterior se pone de manifiesto en el siguiente resultado, que muestra que la coexistencia de un semisumando de tipo 1 con un sumando, salvados los casos triviales y los clásicos, fuerza al primero a ser unidimensional.

21.7 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real, M un semisumando de tipo 1 de X y π una proyección absoluta en X. Supongamos que $M \neq \pi(X)$, $M \neq Ker(\pi)$ y que M y π no son simultáneamente un semi-L-sumando y una L-proyección. Entonces $M = \mathbb{R}u$ en que u es un vértice de $B(X)$.*

DEMOSTRACION : Por la Proposición 21.4,*ii)* M tiene la propiedad $\perp$. Si fuese $M \cap \pi(X) \neq \{0\}$ o $M \cap Ker(\pi) \neq \{0\}$, aplicando el Teorema 19.10 con $N = \pi(X)$ o $N = Ker(\pi)$, M sería un semi-L-sumando y π una L-proyección, contra la hipótesis. Basta entonces aplicar el Lema 21.6.

El Teorema anterior permite hacer un análisis completo del Teorema 21.1, manteniendo por ahora las normas $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_\infty$

pero cambiando "L-sumando" por "semi-L-sumando" y "M-sumando" por "M-ideal". La segunda debilitación la hace ya Behrends ([9], Proposición 2.4), pero la primera obliga a considerar una amplia gama de ejemplos de coexistencia de un semi-L-sumando con un M-ideal, e incluso con un M-sumando :

En el ejemplo 10.10 se mostró que en $\mathbb{R}^3$ con la norma del máximo existe un semi-L-sumando , $\mathbb{R}(1,1,1)$, pero es evidente que $\mathbb{R}(1,0,0)$ es un M-sumando. Este ejemplo es caso particular de la siguiente situación :

Sea K un subconjunto convexo y compacto, no vacío, de un espacio localmente convexo de Hausdorff, (lo que en adelante se abreviará diciendo que K es un *conjunto convexo compacto*). Consideremos el espacio $A(K)$ de las funciones reales afines y continuas en K, espacio de Banach para la norma uniforme.

Resultados de Alfsen y Andersen ([2]) y de Perdrizet ([40]) han permitido caracterizar los M-ideales de $A(K)$ como los subespacios de la forma : $\{f \in A(K) : f(F) = \{0\}\}$ en que F es una cara directa cerrada de K (ver [1]). Una cara F de K se llama *directa* si existe otra cara F' verificando que : $K = co\,(F \cup F')$, (co denota envolvente convexa), y que :

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_1' = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2'$ con $x_1, x_2 \in F$, $x_1', x_2' \in F'$ y $0 < \lambda < 1$ implica : $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$. (El término "cara directa" es traducción literal del francés : "face directe" utilizado en [40], que a su vez corresponde al inglés "split face" que aparece en [2]).

Por otra parte, Lima ([34], Corolario 7.4) ha demostrado que $\mathbb{R}u$ en que u es la función constantemente igual a 1 en K, es un semi-L-sumando de $A(K)$. Resulta por tanto que si el convexo compacto K en cuestión admite una cara directa cerrada, en $A(K)$ existen un semi-L-sumando y un M-ideal. El ejemplo 10.10 es caso particular de la situación anterior, concretamente, el caso en que K es un triángulo.

Nuestro próximo Teorema demuestra que la situación anterior es la única posible de coexistencia de un semi-L-sumando y un M-ideal, lo que constituye un análisis no lineal definitivo del Teorema 21.1, manteniendo las normas absolutas que en él aparecen.

21.8 TEOREMA : *Sea X un espacio de Banach real, M un semi-L-sumando de X y N un M-ideal de X. Existe un conjunto convexo compacto K, una cara directa cerrada F de K y una biyección lineal isométrica f de X sobre $A(K)$, tal que $f(M) = \mathbb{R}u$ en que u es la función constantemente igual a 1 en K, y $f(N) = \{g \in A(K) : g(F) = \{0\}\}$.*

DEMOSTRACION : Sea X'' el bidual de X ; N^{oo} es un M-sumando de X'', y por un Teorema de Lima ([34], Teorema 6.14 , este resultado se comentó a propósito del Corolario 8.4), M^{oo} es un semi-L-sumando de X''. Aplicando el Teorema 21.7 a M^{oo} y a la proyección absoluta asociada a N^{oo}, obtenemos que M^{oo}, y por tanto M, es unidimensional. Aplicando la Proposición 21.4 tenemos $M = \mathbb{R}x_0$ en que x_0 es un vértice de $B(X)$, y por la Proposición 1.5, x_0 es punto extremo de $B(X)$.

Estamos ahora en condiciones de aplicar el Corolario 7.4 de [34] en su afirmación *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* obteniendo la existencia de un conjunto convexo compacto K y una biyección lineal isométrica f de X sobre $A(K)$ que verifica : $f(x_0) = u$ y por tanto : $f(M) = \mathbb{R}u$.

Para concluir la demostración, en vista de la caracterización de los M-ideales de $A(K)$, basta probar que $f(N)$ es un M-ideal de $A(K)$, lo que es una consecuencia muy particular del siguiente Lema, que destacamos por tener interés en sí mismo.

21.9 LEMA : *Sean X e Y dos espacios normados sobre el mismo cuerpo y sea f una biyección lineal isométrica de X sobre Y. Un subespacio M de X es un semi-$|\cdot|$-ideal de X si y sólo si $f(M)$ es un semi-$|\cdot|$-ideal de Y. ($|\cdot|$ es una norma absoluta arbitraria).*

DEMOSTRACION : M es cerrado en X si y sólo si $f(M)$ es cerrado en Y. Por otra parte, f^t es una biyección lineal isométrica de Y' sobre X', con lo que teniendo en cuenta la igualdad :

$f^t(f(M)^\circ) = M^\circ$, de comprobación elemental, la tesis del Lema se obtiene aplicando el Lema 15.9.

El siguiente resultado se obtiene por dualización del Teorema 21.7 :

21.10 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real, M un semiideal de cotipo 3 de X y N un ideal de X. Supongamos que M y N son distintos y no son sumandos complementarios. Supondremos también que M y N no son simultáneamente un semi-M-ideal y un M-ideal. Entonces M es un hiperplano de X.*

DEMOSTRACION : M° es un semisumando de tipo 1 de X' (Proposición 5.6) y N° un sumando de X'. Sea π la proyección absoluta en X' asociada a N°. Si fuese $M^\circ = \pi(X') = N^\circ$ se tendría $M = N$. Si fuese : $M^\circ = Ker(\pi)$, por ser M° y N° débil* cerrados, π sería débil* continua y por tanto sería la traspuesta de una proyección absoluta en X cuyo núcleo sería N y cuya imagen sería M contra la hipótesis. Dado que no puede ocurrir simultáneamente que M° sea un semi-L-sumando y π una L-proyección, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 21.7, obteniendo que M° es unidimensional y por tanto que M es un hiperplano.

En el último Teorema de la memoria agrupamos todos nuestros resultados de tipo obstructivo para el caso real :

21.11 TEOREMA : *Sea X un espacio normado real, M y N sumandos de X. Supondremos que :*

i) M y N son distintos y no complementarios.

ii) M y N no son dos L-sumandos ni dos M-sumandos.

iii) M (por ejemplo) no es de tipo 2 ni de cotipo 2.

Bajo las anteriores hipótesis se tiene :

X es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}^2$ con cualquiera de las normas absolutas asociadas a M o a N.

Por otra parte, si se supone que M y N son solamente ideales de X, bajo las mismas hipótesis i) y iii) y cambiando ii) por :

ii') M y N no son dos M-ideales ni dos L-ideales.

Entonces M y N son sumandos de X y se tiene por tanto la misma tesis de la primera parte del Teorema.

DEMOSTRACION : PARTE 1 : Notaremos como siempre π_M y π_N las proyecciones absolutas y $|\cdot|_M$, $|\cdot|_N$ las normas absolutas asociadas a M y N , respectivamente.

Notemos previamente que basta probar que M y su sumando complementario, M', son unidimensionales, pues entonces X es bidimensional y tomando $x \in S(M)$, $y \in S(M')$, la aplicación : $(\alpha,\beta) \to \alpha x + \beta y$ es una biyección lineal isométrica de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_M)$ sobre X, y análogamente se razona con $|\cdot|_N$.

En vista de la hipótesis *iii)* caben las siguientes posibilidades :

a) M es de tipo y cotipo 1 : Por la hipótesis *i)* se tiene : $M \neq \pi_N(X)$ y $M \neq Ker(\pi_N)$; por *ii)* M y π_N no son simultáneamente un L-sumando y una L-proyección. Podemos por tanto aplicar el Teorema 21.7, con lo que M es unidimensional. Basta ahora tener en cuenta que M' está en las mismas condiciones que M.

b) M es de tipo 1 y cotipo 3 : Al igual que en el caso anterior se obtiene que M es unidimensional. Por otra parte M es un ideal de cotipo 3 (Corolario 8.4) y no es un M-ideal. Teniendo en cuenta la hipótesis *i)* el Teorema 21.10 nos da que M es un hiperplano, esto es, M' es unidimensional.

c) M es de tipo 3 y cotipo 1 : La pareja (M',N) verifica las mismas hipótesis que la (M,N) , pero M' tiene tipo 1 y cotipo 3, con lo que este caso se reduce al anterior.

d) M es de tipo y cotipo 3 : M y N no pueden ser M-ideales, pues al ser sumandos, serían M-sumandos (Corolario 11.2) en contra de *ii)*. Puesto que por *i)* M y N no son iguales, ni sumandos complementarios, se puede aplicar el Teorema 21.10 obteniendo que M es un hiperplano, luego M' es unidimensional. Se aplica ahora que M' está en las mismas condiciones que M para obtener que también M es unidimensional.

PARTE 2 : Suponemos ahora que M y N son solamente ideales. M^o y N^o son sumandos de X'; veamos que verifican las hipótesis de la primera parte del Teorema :

i) $M^o = N^o$ implicaría $M = N$. Si M^o y N^o fuesen sumandos complementarios, por un razonamiento varias veces repetido (ver Demostración del Teorema 21.10), M y N también lo serían.

ii) La afirmación *ii')* hecha para M y N equivale por definición de ideal a que M^o y N^o verifiquen *ii)*.

iii) Por la Proposición 5.6 y la definición de ideal, M^o es de tipo o cotipo 2 si y sólo si M es de cotipo o tipo 2.

Así pues, aplicando a X', M^o, N^o, la primera parte del Teorema, X' es bidimensional y por tanto también lo es X. La distinción entre sumandos e ideales en un espacio reflexivo carece de sentido.

21.12 NOTAS FINALES : *i)* Hagamos constar que la mayoría de los teoremas obstructivos conocidos pasan a ser caso particular del anterior. Tal ocurre con el Teorema 21.1 de Behrends, con el que iniciábamos esta sección, Teorema que de hecho era ya evidente a partir de cualquiera de los Teoremas 21.7 y 21.10. Por otra parte, dado que, como se puede fácilmente comprobar, ninguna biyección lineal de $\mathbb{R}^2$ puede transformar la esfera unidad para la norma

$|\cdot|_1$ ni la esfera unidad para la norma $|\cdot|_\infty$ en la esfera unidad para la norma $|\cdot|_p$ con $1<p<\infty$, nuestro teorema implica la imposibilidad de coexistencia en un espacio normado de un L-sumando o un M-sumando con un L^p-sumando para $1<p<\infty$, como afirman los Teoremas 3.2 y 3.3 de [5].

ii) En otro orden de ideas, a nadie debe escapar que las hipótesis *i)* y *ii)* de nuestro teorema son obligadas, con el fin de descartar casos triviales o situaciones fácilmente ejemplificables. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la hipótesis *iii)* .

Sería por tanto deseable suprimir ésta última, cambiando consecuentemente *ii)* por la suposición de que M y N no sean L^p-sumandos para un mismo p con $1\leqslant p\leqslant\infty$.

La viabilidad de esta conjetura viene avalada por otro Teorema de E. Behrends, afirmando que, para $1<p,q<\infty$, $p\neq q$, no pueden existir en un mismo espacio de Banach un L^p-sumando y un L^q-sumando, ([5], Teorema 4.2).

B I B L I O G R A F I A

[1] E. M. ALFSEN : *M-Structure and intersection properties of balls in Banach spaces*. Israel J. Math. 13 (1972), 235-245.

[2] E. M. ALFSEN and T. B. ANDERSEN : *Split faces of compact convex sets*. Proc. London Math. Soc. 21 (1970), 415-442.

[3] E. M. ALFSEN and E.G. EFFROS : *Structure in real Banach spaces I*. Ann. Math. 96 (1972), 98-128.

[4] E. M. ALFSEN and E.G. EFFROS : *Structure in real Banach spaces II*. Ann. Math. 96 (1972), 129-173.

[5] E. BEHRENDS : *L^p-Struktur in Banachräumen*. Studia Math. LV (1976), 71-85.

[6] E. BEHRENDS : *L^p-Struktur in Banachräumen II*. Studia Math. LXII (1978), 47-63.

[7] E. BEHRENDS : *An application of M-structure to theorems of the Banach-Stone type*. En : Functional Analysis. Surveys and recent results, pp. 29-49. North Holland (1977).

[8] E. BEHRENDS : *On the Banach-Stone Theorem*. Math. Ann. 233 (1978), 261-272.

[9] E. BEHRENDS : *M-Structure and the Banach-Stone theorem*. Lecture Notes in Mathematics, 736. Springer-Verlag (1979).

[10] E. BEHRENDS et al. : *L^p-Structure in real Banach spaces*. Lecture Notes in Mathematics, 613. Springer-Verlag (1977).

[11] R. P. BOAS : *Entire Functions*. Academic Press (1954).

[12] F. BOHNENBLUST : *An axiomatic characterization of L^p-spaces*. Duke Math. J. 6 (1940), 627-640.

[13] H. F. BOHNENBLUST and S. KARLIN : *Geometrical Properties of the unit sphere of Banach algebras*. Ann. Math. 62 (1955), 217-229.

[14] F. F. BONSALL : *Jordan algebras spanned by hermitian elements of a Banach algebra*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 81 (1977), 3-13.

[15] F. F. BONSALL and J. DUNCAN : *Complete Normed Algebras*. Ergebnisse der Mathematik, Band 80. Springer-Verlag (1973).

[16] F. F. BONSALL and J. DUNCAN : *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*. London Mathematical Society. Lecture Note Series, 2 (1971).

[17] F. F. BONSALL and J. DUNCAN : *Numerical ranges II*. London Mathematical Society. Lecture Note Series, 10 (1973).

[18] C. K. CHUI, P. W. SMITH, R. R. SMITH and J. D. WARD : *L-Ideals and numerical range preservation.* Illinois J. Math. 21 (1977), 365-373.

[19] H. B. COHEN and F. E. SULLIVAN : *Projecting onto cycles in smooth, reflexive Banach spaces.* Pac. J. Math. 34 (1970), 355-364.

[20] F. CUNNINGHAM Jr. : *L-Structure in L-spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 274-299.

[21] F. CUNNINGHAM Jr. : *M-Structure in Banach spaces.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), 613-629.

[22] F. CUNNINGHAM Jr., E. G. EFFROS and N. M. ROY : *M-Structure in dual Banach spaces.* Israel J. Math. 14 (1973), 304-308.

[23] M. M. DAY : *Normed linear spaces.* Ergebnisse der Mathematik, Band 21. Springer-Verlag (1973).

[24] J. DIESTEL : *Geometry of Banach spaces : Selected topics.* Lecture Notes in Mathematics, 485. Springer-Verlag (1975).

[25] J. DIEUDONNE : *Fundamentos de Análisis moderno.* Editorial Reverté (1966).

[26] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ : *Linear Operators. Part I.* Interscience (1958).

[27] R. EVANS : *Projektionen mit normbedingungen in reellen Banachräumen*. Dissertation, Freie Universität Berlin (1974).

[28] R. EVANS : *Boolean algebras of projections*. Periodica Math. Hungarica 9 (1978), 293-295.

[29] H. FAKHOURY : *Projections de meilleure approximation continues dans certains espaces de Banach*. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie A, 276 (1973), 45-48.

[30] H. FAKHOURY : *Existence d'une projection continue de meilleure approximation dans certains espaces de Banach*. J. Math. Pures et Appl. 53 (1974), 1-16.

[31] J. R. GILES, D. A. GREGORY and B. SIMS : *Geometrical implications of upper semi-continuity of the duality mapping of a Banach space*. Pac. J. Math. 79 (1978), 99-108.

[32] J. HENNEFELD : *A decomposition for B(X)* and unique Hahn-Banach extensions*. Pac. J. Math. 46 (1973), 197-199.

[33] B. HIRSBERG : *M-Ideals in complex function spaces and algebras*. Israel J. Math. 12 (1972), 133-146.

[34] A. LIMA : *Intersection properties of balls and subspaces of Banach spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1977), 1-62.

[35] A. LIMA : *M-Ideals of compact operators in classical Banach spaces*. Math. Scand. 44 (1979), 207-217.

[36] G. LUMER : *Semi-inner product spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 29-43.

[37] G. LUMER and R. S. PHILLIPS : *Dissipative operators in a Banach space*. Pac. J. Math. 11 (1961), 679-698.

[38] J. MARTINEZ MORENO : *JV-algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), 47-50.

[39] T. W. PALMER : *Characterizations of C*-algebras II*. Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 577-588.

[40] F. PERDRIZET : *Espaces de Banach ordonnés et ideaux*. J. Math. Pures et Appl. 49 (1970), 61-98.

[41] J. PEREZ GONZALEZ : *C*-álgebras asociativas y C*-álgebras de Jordan. Un tratamiento unificado*. Por aparecer.

[42] A. RODRIGUEZ PALACIOS : *A Vidav-Palmer theorem for Jordan C*-algebras and related topics*. Aparecerá en J. London Math. Soc.

[43] R. R. SMITH and J. D. WARD : *M-Ideal structure in Banach algebras*. J. Func. Anal. 27 (1978), 337-349.

[44] M. A. YOUNGSON : *A Vidav-Palmer theorem for Banach Jordan algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 84 (1978), 263-272.

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

FACULTAD DE CIENCIAS