

Prov. t. 14/2 T  
14  
106

ESTRUCTURAS DE MODELOS DE QUILLEN PARA CATEGORIAS QUE  
MODELAN ALGEBRAICAMENTE TIPOS DE HOMOTOPIA DE ESPACIOS.

Por  
Julia García Cabello.



Memoria realizada en el Departamento de Algebra de la Facultad de Ciencias (Universidad de Granada), bajo la dirección del Profesor Dr. Antonio Rodríguez Garzón, Titular de Algebra de esta Universidad, para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Sección Matemáticas) por la Universidad de Granada.

V<sup>o</sup> B<sup>o</sup>

El Director

A handwritten signature in black ink, appearing to be "Antonio Rodríguez Garzón", written over a horizontal line.

Aspirante al grado de Doctor

A handwritten signature in black ink, appearing to be "Julia García Cabello", written over a horizontal line.



Quiero expresar mi agradecimiento al Director de esta Memoria, Antonio Rodríguez Garzón, por la orientación y enseñanzas recibidas para la realización de este trabajo, sin las cuales esta Memoria no se habría llevado a cabo.

Asímismo, quiero agradecerle el continuo ánimo que me ha dado.

También a mi familia, por su apoyo moral, y en especial a Santiago Carbó Valverde y Rosa Irene García Cabello, que estuvieron ahí cuando las cosas se presentaron difíciles.

Por último, quisiera hacer extensivo mi agradecimiento a todo el Departamento de Álgebra, por las facilidades y ayudas prestadas en todo momento.





## INDICE

Introducción.....	1
<b>CAP.1: Preliminares.</b>	
1.1. Axiomáticas para una categoría de modelos cerrada. Ejemplos.....	12
1.2. Construcciones en una categoría de modelos. Teoría de homotopía.....	44
<b>CAP.2: Estructuras de modelos de Quillen inducidas por situaciones de adjunción.</b>	
2.1. Categorías de modelos en situaciones de adjunción.....	54
2.2. Levantando estructuras de modelos desde $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .....	70
<b>CAP.3: Categorías de modelos algebraicos de n-tipos como categorías de modelos cerradas.</b>	
3.1. La categoría $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ como una categoría de modelos cerrada.....	96
3.2. $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ como categoría de modelos cerrada.....	112
3.3. Estructuras de modelos en otras categorías de n-tipos.....	125
<b>CAP.4: Estructuras de modelos para n-tipos de grupos simpliciales.</b>	
4.1. Truncando la estructura de modelos de $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .....	132
4.2. La n-estructura en $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .....	173
4.3. Comparación de estructuras. Equivalencia de teorías de homotopía.....	208
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	222





## INTRODUCCION

La posibilidad de hacer teoría de homotopía en categorías distintas de las de espacios topológicos, estaba ya latente en los años 50 entre los distintos investigadores y escuelas ocupados en la Topología Algebraica y su nueva visión categórica, pero fue sin duda la publicación en 1967 por D. Quillen de su "Homotopical Algebra" , [48], el hecho decisivo que puso definitivamente en movimiento el desarrollo de la teoría de homotopía abstracta.

El objetivo inicial de estudiar y hacer calculable la cohomología de álgebras conmutativas condujo a Quillen a la consideración de la categoría de álgebras conmutativas simpliciales (esto es, a la de objetos simpliciales en la categoría de álgebras conmutativas) en donde observó que se podía realizar una teoría de homotopía análoga a la clásica teoría de espacios que estudia la Topología Algebraica. Esta observación, directamente sugerida por la ya entonces conocida equivalencia (mostrada por Kan, [37]) entre la teoría de homotopía de grupos simpliciales y la de espacios punteados conexos por arcos consolidó la tarea de afrontar la definición y estudio de una teoría de homotopía, desde un punto de vista abstracto, que cubriera las diferentes teorías de homotopía conocidas (la topológica y la simplicial) y que permitiera por tanto, en un ambiente categórico abstracto, realizar y obtener análogas construcciones y resultados a los conocidos topológicos simpliciales.

Este contexto abstracto, denominado por Quillen "categoría de



modelos (para una teoría de homotopía)" proporcionaría entonces el establecimiento uniforme de una teoría de homotopía en aquellas categorías verificando la axiomática exigida, axiomática que en definitiva viene a dar una medida para saber, si en un contexto dado, puede ser desarrollada una teoría de homotopía útil en el sentido de fijar las bases sobre las que poder construir estructuras adicionales (suspensiones, lazos, sucesiones (co)-fibración,...) que son construcciones inherentes a la clásica teoría de homotopía.

En este mismo sentido de desarrollar teorías de homotopía abstractas, diferentes propuestas, posteriores a la de Quillen, han sido aportadas por Brown, [5], Anderson, [1], Heller, [31], y muy recientemente por Baues, [2], quien, teniendo en cuenta que la axiomática para una categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen es autodual, debilita tal axiomática quedándose con las propiedades esenciales de una de las dos caras duales (fibraciones ó cofibraciones) para desarrollar su teoría y cubrir lógicamente una mayor gama de ejemplos. Hemos de citar que, en todo caso, hoy día sigue siendo la teoría desarrollada por Quillen la mas útil y reconocida para producir los efectos deseados en un amplio número de situaciones, esto es para proporcionar en ellas una teoría general de homotopía.

Esta problemática de hacer teoría de homotopía en contextos distintos de los topológicos enlaza de forma natural con el objetivo que la Topología Algebraica persigue de encontrar modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios, pues una vez encontrados dichos modelos, la posibilidad de hacer "teoría de homotopía" en ellos puede tener repercusiones que van desde el planteamiento de una adecuada teoría de (co)-homología, hasta el hecho de utilizar, para el estudio de objetos geométricos, lenguajes y herramientas que aparecen más simples cuando son mirados desde esta óptica abstracta.



La obtención de modelos algebraicos para categorías de tipos de homotopía de espacios responde, como es reconocido por diversos autores en sus introducciones a los artículos referidos a estos problemas, a un programa general propuesto en 1950 por Whitehead, [53], cuando escribe "*The ultimate object of Algebraic Homotopy is to construct a purely algebraic theory which is equivalent to Homotopy theory in the same way that Analytic is equivalent to pure Projective Geometry*".

Esta problemática de modelar algebraicamente las categorías de espacios por su tipo de homotopía, que sigue siendo un problema de vigente actualidad, encuentra sus precedentes más clásicos en los resultados de Eilenberg-MacLane, [25], en los que la categoría de homotopía de CW-complejos con un único grupo de homotopía no nulo en dimensión  $n$ , es modelada algebraicamente por la categoría de "homotopía" de grupos (abelianos si  $n \geq 2$ ) y también en los resultados de Whitehead-MacLane, [40], [54], en los que la categoría de módulos cruzados se muestra adecuada para modelar algebraicamente la categoría de homotopía de CW-complejos conexos con grupos de homotopía triviales en dimensiones mayores ó iguales a tres, es decir, la categoría de 2-tipos (ó 3-tipos en su terminología original).

La categoría de 2-módulos cruzados en el sentido de Conduché, [18], generaliza estos resultados de Whitehead y MacLane puesto que se muestra como una apropiada "categoría algebraica" para modelar la categoría de 3-tipos, (véase [18], [13]), y en [16], Carrasco y Cegarra extienden estos resultados parciales dando modelos algebraicos para todas las categorías de  $n$ -tipos conexos,  $n \geq 1$ . La categoría considerada para tal fin,  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$ , consiste de ciertos complejos de grupos no abelianos, llamados por ellos " $n$ -hipercomplejos cruzados de grupos", que es justamente, para  $n=1$ , la categoría  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$  de módulos cruzados (2-tipos) y, para  $n=2$ , la categoría  $2\text{-XM}(\mathbf{Gp})$  de 2-módulos cruzados de



grupos (3-tipos), y que es, por otro lado, equivalente (vía una versión no abeliana dada en [16] del clásico teorema de Dold-Puppe, [21]) a la subcategoría plena de la categoría de grupos simpliciales formada por aquellos grupos simpliciales con complejo de Moore trivial en dimensiones superiores a  $n$ , denotada  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ , al ser justamente la categoría de  $n$ -hipergrupoides de grupos en el sentido de Duskin-Glenn, [30], [15]; vía esta equivalencia, dicha categoría,  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ , proporciona también modelos algebraicos para la categoría de  $(n+1)$ -tipos.

La teoría desarrollada en [16] por Carrasco y Cegarra estaba esencialmente basada en la ya citada clásica teoría de Kan, [37], mostrando la categoría de grupos simpliciales,  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , como una categoría de modelos algebraicos para todos los tipos conexos. Esta categoría  $\text{Simp}(\text{Gp})$  proporciona un contexto no topológico en donde "hacer teoría de homotopía" y de hecho constituye un ejemplo notable de lo que es una categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen, [48], lo que supone tener en ella análogos de la mayoría de construcciones y resultados propios de la teoría de homotopía de espacios como suspensiones y lazos de objetos, sucesiones (co)-fibración, etc. Más allá entonces de tener una equivalencia, vía la categoría  $\text{RedSS}$  de conjuntos simpliciales reducidos, entre la categoría de homotopía de grupos simpliciales y la de espacios punteados conexos por arcos, puede hablarse de una equivalencia, en el sentido de Quillen, [48], entre las respectivas teorías de homotopía (véase Capítulo 1, Definición 1.2.2.1.).

La equivalencia entre las categorías (teorías) de homotopía de las categorías de grupos simpliciales y la de conjuntos simpliciales reducidos es inducida por una bien conocida situación de adjunción  $G \dashv \bar{W}$ , [41], estando además la estructura de modelos en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  (véase Capítulo 1, Ejemplo IV) completamente determinada por la de



**RedSS**, [49], y el funtor  $\bar{W}$ . Este hecho junto a su correspondiente versión en el caso no conexo (véase Capítulo 1, Ejemplo V) y junto al procedimiento seguido en [52] para dotar a la categoría **Cat** de categorías pequeñas de una estructura de modelos (véase Capítulo 2, Ejemplo I), basado en la estructura de modelos de **SS**, [48], y una conveniente situación de adjunción entre **SS** y **Cat**, constituyen el marco de referencia (sección 2.1.) sobre el que se sitúa el método general (sección 2.2.) para obtener, (Capítulo 3), estructuras de modelos de Quillen, inducidas por la de **Simp(Gp)** vía una conveniente situación de adjunción, en categorías de modelos algebraicos de n-tipos conexos, en la que la clase de las equivalencias débiles sea precisamente la formada por aquellos morfismos que son invertidos al hacer la localización que determina dicha categoría como una categoría de modelos algebraicos de n-tipos.

El hecho de que **n-Hypgd(Gp)** sea una subcategoría reflexiva de **Simp(Gp)** permite dotar entonces a dicha subcategoría, según el método aludido, de una estructura de modelos cerrada que es consecuentemente trasladada, vía la equivalencia, a la categoría **n-HXC(Gp)** de n-hipercomplejos cruzados de grupos y en particular, a las categorías **XM(Gp)** de módulos cruzados de grupos y **2-XM(Gp)**, de 2-módulos cruzados de grupos.

En la línea de encontrar modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios, hay que destacar que en 1983, Loday, [39], generaliza también los resultados de MacLane-Whitehead ofreciendo otra categoría de modelos algebraicos de (n+1)-tipos, llamados inicialmente "n-cat-grupos" y renombrados posteriormente de forma más apropiada como  $\text{Cat}^n$ -grupos (véase [11]) y cuya ventaja fundamental sobre otros modelos es que satisfacen un teorema generalizado de Van Kampen que permite



ciertos cálculos, (véase [11],[12]). Los métodos usados por Loday para probar que la categoría de  $\text{Cat}^n$ -grupos,  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$ , proporciona ciertamente modelos algebraicos de  $(n+1)$ -tipos conexos, completados por Steiner en [50], han encontrado recientemente versiones clarificadoras en [14] y [46]. La demostración del teorema de Loday dada en [14] utiliza versiones  $n$ -dimensionales de los funtores nervio y grupoide fundamental para conectar de forma funtorial la categoría  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  con la categoría  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  de  $n$ -grupos simpliciales que a su vez lo está, vía generalizaciones de los funtores "Total Dec" de Illusie, [34], y  $\bar{W}$  de Eilenberg-MacLane, [41] con la categoría  $\text{Simp}(\text{Gp})$  de grupos simpliciales.

Las situaciones de adjunción conectando estos funtores sugieren entonces la posibilidad de utilizar el método general expuesto en 2.2 para dotar estas categorías,  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  y  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$ , de una estructura de modelos cerrada de Quillen, lo que es plenamente conseguido sólo en el primer caso (véase 3.2.) quedando por tanto abierta la respuesta definitiva a si con la estructura propuesta (véase 3.3),  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  es ciertamente una categoría de modelos cerrada de Quillen.

El análisis de lo expuesto hasta aquí pone de manifiesto la pretensión de que las categorías de modelos algebraicos de tipos de espacios, que son categorías de homotopía en el sentido de ser localizaciones respecto determinadas clases de morfismos, lo sean también en el sentido de ser categorías de homotopía asociadas a una teoría de homotopía.

En cualquiera de los casos, para categorías  $\underline{C}$  de  $(n+1)$ -tipos de espacios (ó equivalentemente de  $n$ -tipos de grupos simpliciales) se tiene una equivalencia de categorías entre  $\text{Ho}(\underline{C})$  y la subcategoría plena de  $\text{Ho}(\text{Simp}(\text{Gp}))$  formada por los grupos simpliciales  $n$ -coconexos



(i.e., con grupos de homotopía triviales en dimensiones  $\geq n+1$ ). Si  $n \rightarrow \infty$ , esta equivalencia de categorías se convierte en una equivalencia de teorías (véase Teorema 3.2.3.) y en el Capítulo 4 se pretende entonces generalizar esta situación mostrando que, con la definición natural de  $n$ -equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , la correspondiente localización que muestra a  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  como una categoría de modelos algebraicos de  $n$ -tipos de grupos simpliciales, es la categoría de homotopía asociada a una estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (la " $n$ -estructura") y por tanto a su correspondiente teoría de homotopía, teniéndose consecuentemente (véase Teorema 4.3.3.) una equivalencia al nivel de teorías de homotopía entre la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , asociada a dicha  $n$ -estructura, y las de  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ ,  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$  (y eventualmente  $\mathbf{Cat}^n(\mathbf{Gp})$ ) asociadas a sus estructuras de modelos (Teorema 3.1.2.), (Teorema 3.1.3.), (Sección 3.3.).

Los resultados reseñados de forma breve en este prólogo aparecen contenidos en los cuatro capítulos de que consta la presente memoria; a continuación hacemos una exposición más detallada de cada uno de ellos.

El Capítulo 1 es un capítulo de preliminares en el que se ha intentado fijar la notación y ordenar el material que se utiliza a lo largo de la memoria, en orden a que ésta tenga el mayor grado de autosuficiencia posible. En la primera de las dos secciones de que consta, se ofrecen las distintas versiones, que aparecen en la literatura, de la axiomática de categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen y se da explícitamente la demostración de su equivalencia, hecho que permite utilizar cualquiera de ellas en función de la conveniencia del caso. Los ejemplos más relevantes para el desarrollo de esta memoria, de categorías soportando una estructura de modelos de Quillen, son también analizados en esta primera sección 1.1., dando definiciones y caracterizaciones de las clases de morfismos



que componen en cada caso las clases de las (co)-fibraciones y las equivalencias débiles. En la sección 1.2. se da a continuación una recopilación de las construcciones adicionales que pueden hacerse en una categoría de modelos cerrada, que mimetizan las típicas construcciones de la clásica teoría de homotopía de espacios (cilindro, arco, suspensión,...), y que conducen a la consideración (en los términos concebidos por Quillen) de la "teoría de homotopía" asociada a una categoría de modelos. Al final de la sección, el criterio ofrecido por Quillen ([48]), para la equivalencia entre teorías de homotopía asociadas a categorías con distintas estructuras de modelos, es explícitamente recogido por su importancia para esta memoria, en el Teorema 1.2.2.2.

El Capítulo 2, "Estructuras de modelos de Quillen inducidas por situaciones de adjunción", pretende, como su nombre indica, dar un método general por el cual dotar a una categoría  $\underline{C}$  de una estructura de Quillen utilizando para ello tal estructura en otra categoría conectada con  $\underline{C}$  por una conveniente situación de adjunción. En función de nuestros intereses posteriores de que  $\underline{C}$  sea una categoría de modelos algebraicos de tipos de homotopía de espacios, utilizamos la categoría de grupos simpliciales  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y su estructura de Quillen para tal fin, dando en el Teorema 2.2.5. condiciones suficientes sobre la adjunción, conectando a  $\underline{C}$  con  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , para verificar que, con la estructura inducida (ó levantada) de la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $\underline{C}$  es ciertamente una categoría de modelos cerrada y consecuentemente admite la posibilidad de "hacer" teoría de homotopía en ella. Este planteamiento general es abordado en la sección 2.2. y está sugerido por el análisis que se hace en 2.1. en diversos ejemplos concretos en los que la estructura de modelos conocida en ellos puede ser dada, de forma alternativa, utilizando la estructura en otra categoría y la situación de adjunción conectando a ambas. Así, por ejemplo (véase Proposición



2.1.III.1.), la estructura de modelos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  puede ser definida únicamente en términos del funtor  $\bar{W}$  y de la estructura de modelos en la categoría  $\mathbf{RedSS}$  de conjuntos simpliciales reducidos. La constatación de estos hechos junto a la propuesta directa, (véase Ejemplo I) dada por Thomason, [52], (y sugerida por Kan), para dotar a la categoría  $\mathbf{Cat}$  de categorías pequeñas de una estructura de modelos de Quillen, constituye por tanto la base argumental del proceso teórico que se realiza en 2.2.

Como ya comentamos anteriormente, la búsqueda de modelos algebraicos para la teoría de homotopía de espacios es una problemática, que enlaza de forma natural con la posibilidad de hacer teoría de homotopía en ellos. Esta posibilidad se hace realidad en aquellas categorías que modelan algebraicamente determinados tipos de homotopía de espacios y a las que es aplicable el método general expuesto en 2.2. para dotarlas de una estructura de modelos de Quillen. El Capítulo 3 está justamente dedicado a la comprobación de que tal método es útil en casos concretos de interesantes categorías que modelan tipos de homotopía de espacios. Así, en la sección 3.1., la categoría  $\mathbf{n-HXC}(\mathbf{Gp})$  de  $n$ -hipercomplejos cruzados de grupos es equipada con una estructura de modelos cerrada de Quillen. Esta categoría, que proporciona modelos algebraicos para  $(n+1)$ -tipos de espacios conexos, ([16]), generaliza las distintas categorías ofrecidas a tal fin en dimensiones bajas (módulos cruzados y 2-módulos cruzados), siendo su estructura de modelos heredada, vía la equivalencia de categorías existente entre ellas, de la que la categoría  $\mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  (que es una variedad de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ) adquiere (véase Teorema 3.1.2.) por aplicación directa del método expuesto en 2.2. En los casos anteriormente citados de dimensiones bajas, se dan entonces explícitamente las clases de morfismos que determinan la estructura.

La muy reciente demostración del teorema de Loday dada en ([14])



utiliza, como anteriormente quedó reflejado, conexiones funtoriales entre la categoría de  $\text{Cat}^n$ -grupos y la de grupos simpliciales vía la categoría  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  de  $n$ -grupos simpliciales. Esta categoría  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ , proporciona también modelos algebraicos para todos los tipos de espacios conexos, [14], y es dotada, en la sección 3.2., de una estructura de modelos cerrada propia (véase Teorema 3.2.4.) siguiendo el método expuesto en 2.2., aunque oportunamente modificado para poder ser aplicado (véase Lema 3.2.2.). De hecho, como es probado al final de la sección, la situación de adjunción  $\mathbb{T} \dashv \bar{W}$  conectando las categorías  $\text{Simp}(\text{Gp})$  y  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  y según la cual es definida la estructura en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ , determina una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía (véase Teorema 3.2.5.).

Las situaciones de adjunción comentadas, que conectan a las categorías  $\text{Simp}(\text{Gp})$ ,  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  y  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$ , conducen ahora de forma natural a la propuesta que se hace en 3.3. para dotar de una estructura de modelos de Quillen a esta interesante categoría de los  $\text{Cat}^n$ -grupos, categoría que Loday originalmente ofreció como modeladora de los  $(n+1)$ -tipos de espacios conexos y que también generaliza los clásicos resultados de MacLane y Whitehead para los 2-tipos. La sección 3.3. está dedicada a hacer un breve análisis de cómo podría ser modificado el método general dado en 2.2. para verificar la axiomática de categoría de modelos cerrada con esa estructura propuesta en  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$ , lo que en definitiva queda sólo expuesto al nivel de conjetura.

El último capítulo de la memoria tiene como primer objetivo, mostrar que la estructura de modelos de Quillen en la categoría  $\text{Simp}(\text{Gp})$  puede ser generalizada en el sentido de que en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  pueden darse convenientes nociones, para cada  $n \geq 1$ , de  $n$ -fibración,  $n$ -cofibración y  $n$ -equivalencia débil que proporcionan en cada caso una estructura de modelos cerrada en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  (que conoceremos como la " $n$ -estructura") y



que recupera la conocida estructura cuando  $n \longrightarrow \infty$ . Para tal fin dedicamos la sección 4.1. a mostrar diversas versiones truncadas de resultados conocidos sobre fibraciones (triviales) de grupos simpliciales que conducen a convenientes definiciones y caracterizaciones de nuevas clases de morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , que constituyen las clases de las  $n$ -(co)fibraciones (triviales). Una vez verificada la axiomática para que estas clases distinguidas de morfismos determinen una estructura de modelos cerrada en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , lo que hacemos en la sección 4.2., nos ocupamos (véase Teorema 4.3.1.) de la comparación, para cualquier  $n$ , entre la  $n$ -estructura y la estructura clásica en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , lo que es realizado vía la situación de adjunción entre los funtores  $(n+1)$ -esqueleto y  $(n+1)$ -coesqueleto. Finalmente, en la sección 4.3., demostramos la equivalencia al nivel de teorías de homotopía entre la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  asociada a la  $n$ -estructura y la de  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  (ó la de  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$ ), asociada a la estructura de modelos definida en dicha categoría, en el Teorema 4.3.3.



## 1.1. AXIOMÁTICAS PARA UNA CATEGORÍA DE MODELOS CERRADA. EJEMPLOS.

Ofrecemos en este primer apartado las diferentes versiones, y su equivalencia, de la axiomática que dota a una categoría de una estructura de modelos en el sentido de Quillen. Ejemplos de tal estructura, relevantes para la memoria, son asimismo explícitamente analizados.

**Definición 1.1.1.** ([48], Cap.I, §1)

Una categoría de modelos para una teoría de homotopía, o más brevemente, una categoría de modelos, es una categoría  $\underline{C}$  en la que existen tres clases distinguidas de morfismos llamados fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, satisfaciendo los siguientes axiomas:

**M0.**  $\underline{C}$  es cerrada bajo límites y colímites finitos.

**M1.** Para todo diagrama conmutativo de la forma

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde  $i$  es cofibración,  $p$  es fibración y al menos uno de los dos morfismos es equivalencia débil, existe levantamiento, esto es, un morfismo  $B \longrightarrow X$  haciendo conmutativos los dos triángulos correspondientes.

**M2.** Todo morfismo  $f$  en  $\underline{C}$  puede factorizarse como  $f=pi$ , con  $i$  cofibración y equivalencia débil, y  $p$  fibración, y  $f=qj$ , con  $j$  cofibración y  $q$  fibración y equivalencia débil.



**M3.i)** Las fibraciones son estables bajo composición y para todo diagrama pullback de la forma

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & C \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & A \end{array}$$

con  $f$  una fibración y  $j$  cualquier morfismo en  $\underline{C}$ ,  $f'$  es entonces fibración. Además, todo isomorfismo es fibración.

ii) Las cofibraciones son estables bajo composición y para todo diagrama pushout de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \longrightarrow & Q \end{array}$$

con  $f$  una cofibración é  $i$  cualquier morfismo en  $\underline{C}$ ,  $f'$  es entonces cofibración. Además, todo isomorfismo es cofibración.

**M4.i)** Para todo diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & C \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & A \end{array}$$

con  $f$  fibración y equivalencia débil,  $f'$  es equivalencia débil.

ii) Para todo diagrama pushout



$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & C \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 B & \longrightarrow & Q
 \end{array}$$

con  $f$  cofibración y equivalencia débil,  $f'$  es equivalencia débil.

**M5.** Para todo par de morfismos en  $\underline{C}$ ,  $f$  y  $g$ , tales que exista su composición  $fg$ , si dos de los tres morfismos  $\{f, g, fg\}$  son equivalencias débiles, también lo es el tercero.

A lo largo de toda la memoria usaremos la nomenclatura usual siguiente: Se dice que un morfismo es una **fibración trivial** si es fibración y equivalencia débil y, de igual forma, diremos que un morfismo es una **cofibración trivial** si es una cofibración y una equivalencia débil.

Asímismo, diremos que un morfismo en  $\underline{C}$ ,  $i:A \longrightarrow B$ , tiene la **propiedad de levantamiento por la izquierda** (más brevemente LLP) con respecto a una familia de morfismos  $\mathcal{P} \subseteq \text{Mor}(\underline{C})$  si existe levantamiento para cualquier diagrama conmutativo (\*), donde  $p \in \mathcal{P}$ . Análogamente, se dice que un morfismo  $p:X \longrightarrow Y$  tiene la **propiedad de levantamiento por la derecha** (RLP) con respecto a una familia de morfismos  $\mathcal{U} \subseteq \text{Mor}(\underline{C})$  si existe levantamiento en cualquier diagrama conmutativo (\*), donde  $i \in \mathcal{U}$ .

Finalmente, recordemos que un objeto  $X$  de una categoría de modelos  $\underline{C}$ , se dice que es **fibrante** si el único morfismo que existe  $X \longrightarrow e$  es una fibración, donde  $e$  denota el objeto final de  $\underline{C}$ . Análogamente, un objeto  $X$  de una categoría de modelos  $\underline{C}$  se dice ser **cofibrante**, si el único morfismo que existe  $\emptyset \longrightarrow X$  es una cofibración, donde  $\emptyset$  denota el objeto inicial de la categoría.



A partir del concepto de categoría de modelos se tiene la noción de categoría de modelos cerrada, según la siguiente definición:

**Definición 1.1.2.**

Una categoría de modelos  $\underline{C}$  se dice ser **cerrada** si satisface el siguiente axioma:

**M6.** Cualesquiera dos de las tres clases distinguidas de morfismos en  $\underline{C}$ , fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, determinan la tercera por las siguientes reglas:

a) Un morfismo es fibración si y solamente si tiene la RLP con respecto a la clase de las cofibraciones triviales.

b) Un morfismo es cofibración si y solamente si tiene la LLP con respecto a la clase de las fibraciones triviales.

c) Un morfismo  $f$  es equivalencia débil si y solamente si  $f=uv$ , donde  $v$  tiene la LLP con respecto a la clase de las fibraciones, y  $u$  tiene la RLP con respecto a la clase de las cofibraciones.

En definitiva, una categoría  $\underline{C}$  es una categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen si sus tres clases distinguidas de morfismos -fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles- satisfacen los axiomas **M0.** hasta **M6.**

**Proposición 1.1.3.**

Si  $\underline{C}$  es una categoría de modelos cerrada, se verifica:

i) Un morfismo  $f:X \longrightarrow Y$  es cofibración trivial si y solamente si  $f$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones.

ii) Un morfismo  $f:X \longrightarrow Y$  es fibración trivial si y solamente si  $f$  tiene la RLP con respecto a las cofibraciones.



**Demostración.**

Veamos la demostración para el caso i), teniéndose análogamente la correspondiente para ii).

Supongamos en primer lugar que un morfismo  $f$  es cofibración trivial; es claro entonces, por el axioma **M1.**, que  $f$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones.

Recíprocamente, supongamos que  $f$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones; en particular  $f$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales, y en consecuencia, por **M6.b)**,  $f$  es cofibración. Por otra parte, existe una factorización para  $f$  de la forma  $f = \text{Id}_Y \circ f$ , es decir,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ f & & \text{Id}_Y \\ & Y & \end{array}$$

para la que  $f$  tiene por hipótesis la LLP con respecto a las fibraciones y el morfismo identidad  $\text{Id}_Y$  claramente tiene la RLP con respecto a las cofibraciones. Por **M6.c)** se tiene, pues, que  $f$  es equivalencia débil y, por tanto,  $f$  es cofibración trivial. ■

En [48] ya se hace notar que el axioma **M6.** implica los axiomas **M1.**, **M3.** y **M4.**. En la siguiente Proposición damos una demostración de este hecho:

**Proposición 1.1.4.** ([48], Cap.I, §5, Observación 1.)

Una categoría de modelos cerrada  $\underline{C}$  puede definirse únicamente a partir de los axiomas **M0.**, **M2.**, **M5.** y **M6.**.



**Demostración.**

Demostremos que el axioma **M6.** implica los axiomas **M1.**, **M3.** y **M4.**

Que **M6.** implica **M1.** es claro por **M6.a)** y **b)**.

Veamos que **M6.** implica **M3.** para el caso de las fibraciones, haciéndose análogamente para cofibraciones.

Supongamos en primer lugar que  $f: X \longrightarrow Y$  y  $g: Y \longrightarrow Z$  son fibraciones en  $\underline{C}$  y demostremos, por **M6.a)**, que lo es el morfismo composición  $gf$ . Para ello, consideremos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & X \\
 i \downarrow & \nearrow ? & \downarrow gf \\
 B & \xrightarrow{b} & Z
 \end{array}$$

donde  $i$  es cofibración trivial; en particular  $i$  es equivalencia débil y, por **M6.c)**, existe pues una factorización  $i=uv$ , donde  $v$  tiene la LLP con respecto a la clase de las fibraciones, y  $u$  tiene la RLP con respecto a la clase de las cofibraciones.

Construídos a partir del dado, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{fa} & Y \\
 v \downarrow & \nearrow D_1 & \downarrow g \\
 A' & \xrightarrow{bu} & Z
 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{v} & A' \\
 i \downarrow & \nearrow D_2 & \downarrow u \\
 B & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B
 \end{array}$$



para los que existe levantamiento, en el primer caso dado que, por hipótesis, el morfismo  $v:A \longrightarrow A'$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones, y para el diagrama (2), por tener el morfismo  $u:A' \longrightarrow B$  la RLP con respecto a las cofibraciones.

Nótese que, por las propiedades que verifican  $D_1$  y  $D_2$  como levantamientos para (1) y (2), el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & X \\
 i \downarrow & \nearrow D & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & D_1 D_2 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Efectivamente, } D_1 D_2 i &= D_1 (D_2 i) = & (2) \\
 &= D_1 v = & (1) \\
 &= fa,
 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, por M6.a) puesto que  $f$  es fibración é  $i$  es cofibración trivial, existe un levantamiento  $D:B \longrightarrow X$  que, como tal, verifica

$$\begin{aligned}
 \text{i) } fD &= D_1 D_2 & \text{y} \\
 \text{ii) } Di &= a.
 \end{aligned}$$

El morfismo  $D:B \longrightarrow X$  es pues el levantamiento buscado para el diagrama dado originalmente, puesto que por ii) se tiene la conmutatividad del triángulo superior y, por otra parte, de i) se deduce que

$$gfD = gD_1 D_2 = (gD_1) D_2 = (bu) D_2 = b(uD_2) = b \text{Id}_B = b,$$

lo que prueba en definitiva que las fibraciones son estables bajo composición. Un argumento similar, basado en M6.b), demuestra la correspondiente propiedad para cofibraciones.



En lo referido a la estabilidad de (co)fibraciones bajo diagramas pullback (pushout), ésta es consecuencia de la propiedad universal de este tipo de diagramas en cada caso. Veámoslo para fibraciones y diagramas pullback, teniéndose una demostración análoga para cofibraciones y diagramas pushout.

Supongamos un diagrama pullback de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 P & \longrightarrow & X \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 Y & \longrightarrow & Z \\
 & & g
 \end{array}$$

con  $f: X \longrightarrow Z$  una fibración y probemos que  $f'$  lo es, por **M6.a**), demostrando que existe levantamiento en cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & P \\
 i \downarrow & & \downarrow f' \\
 B & \longrightarrow & Y \\
 & & b
 \end{array}$$

con  $i: A \longrightarrow B$  cofibración trivial. Nótese entonces que el levantamiento para el diagrama dado está definido por la propiedad universal del pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & D \\
 & & & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{\quad} & & & \\
 & \searrow D' & & & \\
 & & P & \longrightarrow & X \\
 & & f' \downarrow & & \downarrow f \\
 & & Y & \longrightarrow & Z \\
 & & & & g
 \end{array}$$



como el morfismo inducido por el morfismo dado  $b:B \longrightarrow Y$  y el levantamiento  $D:B \longrightarrow X$  para el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{a} & P & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

en el que la existencia del levantamiento  $D$  está asegurada por ser  $f$  fibración é  $i$  cofibración trivial (**M6.a**)).

Por último, sea  $f:X \longrightarrow Y$  un isomorfismo en  $\underline{C}$ , esto es, existe el morfismo inverso  $f^{-1}:Y \longrightarrow X$ . Es claro entonces que  $f$  es fibración, dado que el levantamiento para cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & X \\
 i \downarrow & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{b} & Y
 \end{array}$$

donde  $i:A \longrightarrow B$  es cofibración trivial, está definido como la composición  $f^{-1}b$ . Análogamente se tiene que todo isomorfismo es cofibración.

Finalmente probemos que se tiene **M4**. en lo referido a las cofibraciones, teniéndose de forma análoga la demostración para fibraciones.

Consideremos un diagrama pushout de la forma

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & B' \\
 i \downarrow & & \downarrow i' \\
 B & \xrightarrow{a'} & Q
 \end{array}$$



con  $i:A \longrightarrow B$  una cofibración trivial, y probaremos que  $i':B' \longrightarrow Q$  es entonces equivalencia débil.

En primer lugar, por el axioma **M3**. (nótese que previamente se ha demostrado que **M6**. implica **M3**.), se tiene que  $i'$  es una cofibración, y en consecuencia  $i'$  será, además, equivalencia débil si y solamente si tiene la LLP con respecto a las fibraciones, por **M6.d**) (ver Proposición 1.1.3.).

Consideremos un diagrama conmutativo de la forma

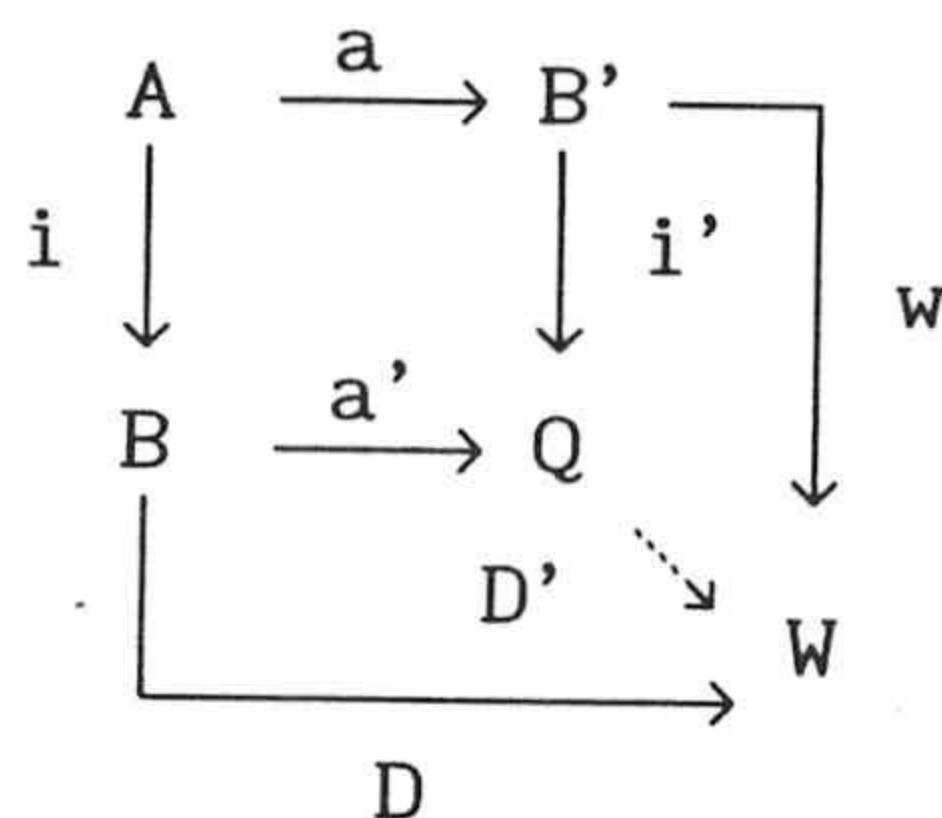
$$(*) \quad \begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{w} & W \\ i' \downarrow & & \downarrow g \\ Q & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & z & \end{array}$$

en el que  $g:W \longrightarrow Z$  es fibración. Dicho diagrama puede ampliarse, vía el pushout dado, al siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{a} & B' & \xrightarrow{w} & W \\ i \downarrow & & i' \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\quad} & Q & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & a' & & z & \end{array}$$

para el que existe levantamiento  $D:B \longrightarrow W$ , dado que  $i$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones por ser una cofibración trivial (Proposición 1.1.3.). El levantamiento para el diagrama dado,  $(*)$ ,  $D':Q \longrightarrow W$ , está entonces definido por la propiedad universal de  $(P)$ , como el morfismo inducido por el levantamiento  $D$ , de la forma siguiente:





donde la mencionada propiedad universal puede aplicarse puesto que  $D \circ i = w \circ a$ , por ser D levantamiento. Por las propiedades de conmutación del morfismo  $D'$ , se tiene

$$D' \circ i' = w, \quad \text{y, por otra parte,}$$

$$g \circ D' = z, \quad \text{por unicidad de un morfismo obtenido por}$$

$$\text{una propiedad universal.}$$

En definitiva, el morfismo  $i'$  es una cofibración trivial, lo que prueba **M4.** ■

La definición dada de categoría de modelos cerrada según los axiomas **M0.**, **M2.**, **M5.** y **M6.**, encuentra una nueva formulación equivalente en [49], en donde se propone como axiomática la siguiente: ([49], Parte II, §1.)

**Definición 1.1.5.**

Una categoría  $\underline{C}$  es categoría de modelos cerrada si sus tres clases distinguidas de morfismos -fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles- satisfacen los siguientes axiomas:

**CM1.**  $\underline{C}$  es cerrada bajo límites y colímites finitos.



**CM2.** Para todo par de morfismos en  $\underline{C}$ ,  $f$  y  $g$ , tales que exista su composición  $fg$ , si dos de los tres morfismos  $\{f, g, fg\}$  son equivalencias débiles, también lo es el tercero.

**CM3.** Las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles son cerradas bajo retracts, donde un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  es un retracto de un morfismo  $g: W \longrightarrow Z$  si existe un diagrama del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{r} \end{array} & W \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \xleftarrow{s} \end{array} & Z
 \end{array}$$

verificándose que  $fr=sg$ ,  $gi=jf$ ,  $ri=Id_X$  y  $sj=Id_Y$ .



**CM4. Axioma de levantamiento.** Para todo diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & X \\
 i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

donde  $i$  es cofibración,  $p$  es fibración y al menos uno de los dos morfismos es, además, equivalencia débil, existe levantamiento.

**CM5. Axioma de factorización.** Todo morfismo  $f$  en  $\underline{C}$  puede factorizarse como  $f=pi$ , con  $i$  cofibración trivial y  $p$  fibración, y  $f=qj$ , con  $j$  cofibración y  $q$  fibración trivial.



Mencionemos finalmente que existe un concepto ligeramente más restrictivo que el de categoría de modelos cerrada, a saber, el conocido como categoría de modelos cerrada **propia**, según la siguiente Definición: (ver [2]), [3], [52])

**Definición 1.1.6.**

Sea  $\underline{C}$  una categoría de modelos cerrada. Se dice que  $\underline{C}$  es **propia** si se satisface la siguiente propiedad adicional:

**CMP1.** i) Para todo diagrama pullback de la forma

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f'} & C \\ \downarrow & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

donde  $j$  es fibración y  $f$  es equivalencia débil, se tiene que  $f'$  es equivalencia débil.

**CMP2.** ii) Para todo diagrama pushout de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ i \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f'} & Q \end{array}$$

donde  $i$  es cofibración y  $f$  es equivalencia débil, se tiene que  $f'$  es equivalencia débil.

Haremos referencia oportunamente a aquellas categorías de modelos cerradas que satisfagan esta propiedad adicional.

Recordaremos a continuación en detalle, algunos ejemplos de categoría de modelos cerrada que son de especial relevancia para esta memoria, destacando en cada caso los morfismos que conforman las clases distinguidas de fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, así como, en algunos casos, ciertas caracterizaciones de ellos que serán de utilidad posteriormente.

### Ejemplo I. Espacios Topológicos.

Denotamos por **Top** la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas entre ellos. Esta categoría es categoría de modelos cerrada (ver [48], (Cap.II, §3., Teorema 1) con las siguientes definiciones:

Un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  en **Top** es una fibración si  $f$  es una fibración de Serre, es decir, si para todo diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 D^n & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow G & \downarrow f \\
 D^n \times I & \longrightarrow & Y
 \end{array}
 \quad , n \in \mathbb{N},$$

existe un morfismo  $G: D^n \times I \longrightarrow X$  haciendo conmutativos los dos triángulos correspondientes, donde  $I$  denota el intervalo unidad  $[0,1]$  y  $D^n$  es el disco  $n$ -dimensional.

Un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  en **Top** es una equivalencia débil si es una equivalencia homotópica débil, esto es, si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía,  $\bar{f}_q: \Pi_q(X, x) \xrightarrow{\cong} \Pi_q(Y, f(x))$ ,  $q \geq 0$ , para todo  $x \in X$ .



Por último, se dice que un morfismo en **Top** es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Con esta estructura, notemos en primer lugar que todos los objetos son fibrantes, y la clase de objetos cofibrantes incluye a los CW-complejos. Destaquemos que **Top** es categoría de modelos cerrada **propia** con esta estructura (ver [2], [48]).

De igual forma, si denotamos por **Top**<sub>\*</sub> a la categoría de espacios topológicos punteados, esto es, la categoría cuyos objetos son  $(X, x_0)$ , con  $X$  un espacio topológico para el que se destaca un punto base  $x_0$ , y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas que preservan dicho punto, se tiene que **Top**<sub>\*</sub> es categoría de modelos cerrada (ver [49]).

### Ejemplo II. Conjuntos simpliciales.

Sea  $\Delta$  la categoría cuyos objetos son los conjuntos  $[n]=\{0,1,\dots,n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y cuyos morfismos son las aplicaciones conjuntistas monótonas no decrecientes, es decir,  $f:[n] \longrightarrow [m]$  tales que  $f(i) \leq f(j)$  si  $i \leq j$ .

Denotaremos por **SS** a la categoría  $\mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$  de funtores contravariantes  $\Delta \longrightarrow \mathbf{Sets}$ , y transformaciones naturales entre ellos, esto es, a la categoría de conjuntos simpliciales.

Adoptaremos la visión equivalente, (véase [20], [41], [44]), de conjunto simplicial  $K$ , como una sucesión de conjuntos  $\{K_n\}_{n \geq 0}$  junto con morfismos **cara**,  $d_i: K_n \longrightarrow K_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y **degeneración**,  $s_j: K_{n-1} \longrightarrow K_n$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , sujetos estos a las siguientes reglas, conocidas como **identidades simpliciales**:

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad \text{para } i < j$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{para } i < j \\ \text{identidad} & \text{para } i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{para } i > j+1 \end{cases}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad \text{para } i \leq j.$$

Así, un conjunto simplicial  $K$ . suele representarse de la forma siguiente:

$$K_\bullet: \dots \rightrightarrows K_{n+1} \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_{n+1}} \end{matrix} K_n \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_n} \end{matrix} K_{n-1} \dots K_2 \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_2} \end{matrix} K_1 \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{matrix} K_0$$

$\begin{matrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} s_0 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{matrix}$ 
 $\dots$ 
 $\begin{matrix} s_0 \\ s_1 \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} s_0 \end{matrix}$

para el que los elementos de  $K_n$ ,  $n \geq 1$ , se llaman **n-simplices**, denominándose **vértices** a los elementos de  $K_0$ . Recordemos asimismo que un n-símplice se dice que es **degenerado** si es de la forma  $s_i x$ , con  $x \in K_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , siendo **no degenerados** todos los simplices restantes.

Con esta última visión, un morfismo de conjuntos simpliciales  $f_\bullet: K_\bullet \longrightarrow L_\bullet$  es una sucesión de aplicaciones,  $\{f_n: K_n \longrightarrow L_n\}_{n \geq 0}$ , de modo que



$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad \text{para } 0 \leq i \leq n \quad \text{y}$$

$$s_j f_n = f_{n+1} s_j, \quad \text{para } 0 \leq j \leq n.$$

Un conjunto simplicial  $K_.$  se dice que satisface la llamada **condición de extensión**, ó que es "de Kan", si para toda colección de  $n+1$   $n$ -símplices  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$  de  $K_.$  compatibles entre sí, esto es,  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  para  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , existe un  $(n+1)$ -símplice de  $K_.$ ,  $z \in K_{n+1}$ , tal que  $d_i z = x_i$ ,  $i \neq k$ ,  $n \geq 0$ .

Si  $K_.$  es un conjunto simplicial de Kan y  $e \in K_0$  es un vértice cualquiera, denotaremos igualmente por  $e$  el conjunto simplicial generado por este vértice. Considerando  $\bar{K}_n = \{x \in K_n \text{ tales que } d_i x = e, 0 \leq i \leq n\}$ ,  $n \geq 0$ , se define entonces el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $K_.$  como sigue:

$$\Pi_n(K_.) = \frac{\bar{K}_n}{\sim}$$

con  $\sim$  la relación de homotopía (ver [41], I, §3, Definición 3.1.), y donde  $\Pi_0(K_., e) \cong \Pi_0(K_.)$  es el conjunto de componentes conexas de  $K_.$

Si  $K_.$  es un conjunto simplicial cualquiera y  $k_0$  es un vértice de  $K_.$ , se define entonces el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $K_.$  de la forma siguiente: (ver [41], (III, §16, Definición 16.7)

$$\Pi_n(K_., k_0) = \Pi_n(\text{Sing}|K_., \text{Sing}|k_0|).$$

donde  $\text{Sing:Top} \longrightarrow \text{SS}$  es el funtor *Compleja Singular Total* y  $|\cdot|:\text{SS} \longrightarrow \text{Top}$  es el funtor *Realización Geométrica* (ver [41], III).

Recordamos a continuación ciertos conjuntos simpliciales destacados, que serán de utilidad en capítulos posteriores.

Recordemos en primer lugar que el **n-símplice standard**  $\Delta[n]$  es el conjunto simplicial definido de la siguiente forma: (ver [20], ejemplo 1.4)

$$\Delta[n]_q = \{(v_0, v_1, \dots, v_q) \text{ tal que } 0 \leq v_0 \leq \dots \leq v_q \leq n, v_i \in \mathbb{Z}\}, \text{ para } q > 0$$

$$\Delta[n]_0 = \{0, 1, \dots, n\},$$

donde los morfismos cara y degeneración están definidos como

$$d_i(v_0, v_1, \dots, v_q) = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_q), \quad 0 \leq i \leq q, \quad \text{y}$$

$$s_j(v_0, v_1, \dots, v_q) = (v_0, \dots, v_{j-1}, v_j, v_j, v_{j+1}, \dots, v_q), \quad 0 \leq j \leq q.$$

Es importante señalar que  $\Delta[n]_n$  tiene únicamente un n-símplice no degenerado, notado por  $i_n = (0, 1, \dots, n)$ . En relación con él, se tiene una propiedad que pone de manifiesto la importancia de los conjuntos simpliciales  $\Delta[n]$ , enunciada en la siguiente Proposición:

**Proposición 1.1.II.1.** ([20], Proposición 1.5.)

Para todo conjunto simplicial  $K$ , y todo  $x \in K_n$ , existe un único morfismo  $f_x: \Delta[n] \longrightarrow K$ , tal que  $(f_x)_n(i_n) = x$ . El morfismo  $f_x$  recibe el nombre de **morfismo representante de x**.



Subconjuntos simpliciales de  $\Delta[n]$  de especial relevancia, son los siguientes:

i)  $\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ , que denotará el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por  $\{d_i(i_n) \text{ para } i \geq 0\}$ . ([41], I, §5, Definición 5.4.). Nótese que  $\Delta[0] = \emptyset$  es el objeto inicial de  $\mathbf{SS}$ .

ii)  $\Delta[n, k]$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $n > 0$ , que denota el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por  $\{d_i(i_n) \text{ para } i \geq 0, i \neq k\}$ . ([20], §1)

Recordemos asimismo que la  $n$ -esfera simplicial  $S^n$  es el conjunto simplicial definido como el siguiente cociente simplicial,

$$S^n = \frac{\Delta[n]}{\Delta[n]}$$

(ver [20], ejemplo 1.4), para la que hay que reseñar que tiene únicamente dos símlices no degenerados, un vértice y un  $n$ -símplice  $\sigma_n$ , que es la imagen de  $i_n$  por la proyección, por lo que en ocasiones se denota como  $\bar{i}_n$ .

La noción de morfismo representante de un  $n$ -símplice de un conjunto simplicial  $K_*$ , es igualmente válida para la  $n$ -esfera  $S^n$  bajo ciertas condiciones, como se enuncia en la siguiente Proposición:

**Proposición 1.1.II.2.** ([20], Proposición 1.5.)

Siendo  $f_x$  el morfismo representante de  $x \in K_n$  para  $K_* \in \mathbf{SS}$  según la Proposición 1.1.II.1., si  $d_i x = e$  para  $i = 0, \dots, n$ , entonces  $f_x$  pasa al cociente

$$\tilde{f}_x: S^n \longrightarrow K.$$

verificando  $\tilde{f}_x(\sigma_n) = x$ .

Recordamos a continuación las definiciones de fibración, cofibración y equivalencia débil por las cuales  $\mathbf{SS}$  es categoría de modelos cerrada, así como ciertas caracterizaciones de interés para ellas.

**Definición 1.1.II.3.** [41], I, §7, Definición 7.1.)

Un morfismo  $p.: E. \longrightarrow B.$  en  $\mathbf{SS}$  es una fibración si es una fibración de Kan, esto es, si para toda colección de  $s+1$   $s$ -símplices  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{s+1} \in E_s$  compatibles entre sí, esto es,  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  para  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , y todo  $(s+1)$ -símplice  $y \in B_{s+1}$  tal que  $d_i y = p_s(x_i)$ ,  $i \neq k$ , existe un  $(s+1)$ -símplice de  $E.$ ,  $z \in E_{s+1}$ , tal que  $d_i z = x_i$ ,  $i \neq k$ , y  $p_{s+1}(z) = y$ , para  $s \geq 0$ .

Si  $\Lambda_k^s(E.)$  denota el siguiente conjunto,

$$\Lambda_k^s(E.) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{s+1}) \text{ con } x_i \in E_s \text{ tal que } \begin{array}{l} d_i x_j = d_{j-1} x_i \\ i < j, \\ i, j \neq k \end{array} \right\},$$

la definición anterior es equivalente a que el morfismo canónico

$$E_s \longrightarrow B_s \times_{\Lambda_k^s(B.)} \Lambda_k^s(E.)$$

sea sobreyectivo para  $0 \leq k \leq s$ ,  $s \geq 0$ .

Asímismo, en [20], §2, Definición 2.5.) se adopta como definición de fibración de Kan la siguiente caracterización:



**Proposición 1.1.II.4.** ([48], Cap.II, §2, Proposición 2)

Para  $p.:E. \longrightarrow B.$  un morfismo de conjuntos simpliciales, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $p.$  es fibración de Kan.
- ii)  $p.$  tiene la RLP con respecto a la siguiente familia de inclusiones en  $\mathbf{SS}$ :

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s], \text{ para } 0 \leq k \leq s, s > 0.$$

Las restantes definiciones de morfismos distinguidos en  $\mathbf{SS}$  son:

**Definición 1.1.II.5.** ([48], Cap.II, §2, Proposición 1)

Un morfismo  $f.:X. \longrightarrow Y.$  en  $\mathbf{SS}$  es una fibración trivial si verifica cualquiera de las dos siguientes afirmaciones equivalentes:

- i)  $f.$  tiene la RLP con respecto a la siguiente familia de inclusiones en  $\mathbf{SS}$ :

$$\Delta[s] \hookrightarrow \Delta[s], \text{ para todo } s \geq 0.$$

- ii)  $f.$  tiene la RLP con respecto a cualquier morfismo de conjuntos simpliciales que sea inyectivo en cada dimensión.

**Definición 1.1.II.6.**

Un morfismo es una cofibración en  $\mathbf{SS}$  si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Nótese que, en virtud de la anterior Definición, *a posteriori* las cofibraciones en  $\mathbf{SS}$  serán los morfismos inyectivos en cada dimensión.

Un morfismo en  $\mathbf{SS}$  es cofibración trivial si tiene la LLP con respecto a las fibraciones.

Finalmente, se tiene

**Definición 1.1.II.7.** ([48], Cap.II, §3, Proposición 4,iii))

Un morfismo  $f$ , en  $\mathbf{SS}$  es una equivalencia débil si verifica cualquiera de las dos siguientes afirmaciones equivalentes:

i)  $f$  puede factorizarse como  $f = p \circ i$ , con  $p$  una fibración trivial e  $i$  una cofibración trivial.

ii)  $|f|$  es una equivalencia homotópica.

En definitiva, con las definiciones dadas de fibración, cofibración y equivalencia débil, la categoría  $\mathbf{SS}$  es categoría de modelos cerrada, como se demuestra en [48], (Cap.II, §3, Teorema 3), para la cual todos los objetos son cofibrantes, y los objetos fibrantes son aquellos conjuntos simpliciales que son de Kan. Esta categoría con la mencionada estructura de modelos es, además, **propia** (ver [2], [52], [48]).

La categoría de conjuntos simpliciales punteados, esto es, conjuntos simpliciales con un vértice destacado, que notaremos por  $\mathbf{SS}_*$ , es categoría de modelos cerrada con las mismas definiciones de fibración, cofibración y equivalencia débil propuestas para  $\mathbf{SS}$  ([49], Parte II, §2).

### **Ejemplo III. Conjuntos simpliciales reducidos.**

Recordemos que un conjunto simplicial  $K$  se dice ser reducido si tiene un único vértice, es decir, si  $K_0$  tiene un único elemento.

Notaremos entonces por  $\mathbf{RedSS}$  a la categoría cuyos objetos son los conjuntos simpliciales reducidos y cuyos morfismos son los morfismos



simpliciales entre ellos. En **RedSS**, se consideran diversas definiciones y caracterizaciones de fibración, cofibración y equivalencia débil, entre las cuales destacamos, por su interés para capítulos posteriores, las siguientes:

**Definición 1.1.III.1.**

Un morfismo  $f.$  en **RedSS** es un equivalencia débil si es equivalencia débil como morfismo de **SS** (ver Definición 1.1.II.7.).

Un morfismo en **RedSS** es una cofibración si es inyectivo en cada dimensión.

Un morfismo  $f.:X. \longrightarrow Y.$  en **RedSS** es una fibración si  $f.$  tiene la RLP con respecto a las cofibraciones triviales.

Se tiene, además, una caracterización de las fibraciones  $f.:X. \longrightarrow Y.$  en **RedSS**, cuando  $Y.$  es de Kan, que será de utilidad posteriormente, enunciada en la siguiente Proposición:

**Proposición 1.1.III.2.** ([49], Parte II, §2, Proposición 2.12.)

Un morfismo  $f.:X. \longrightarrow Y.$  en **RedSS**, con  $Y.$  un conjunto simplicial reducido de Kan, es una fibración si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

i)  $f.$  tiene la RLP con respecto a la familia de morfismos simpliciales

$$\Delta[s,k] \longrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 1.$$

ii) El morfismo canónico

$$\phi.:X. \longrightarrow Y. \times_{K(\Pi_1(Y.),1)} K(\Pi_1(X.),1)$$

es una fibración de Kan, donde  $K(\Pi_1(\cdot), 1)$  denota el complejo de Eilenberg-MacLane de tipo  $(\Pi_1(\cdot), 1)$  (ver [41], V).

Con estas definiciones, la categoría **RedSS** es categoría de modelos cerrada, ([49], Parte II, §2, Teorema 2.2.) para la que es importante reseñar que, con esta estructura de modelos, **no es propia** (ver [49], Parte II, §2., Observación 2.9.).

**Ejemplo IV. Grupos simpliciales,  $\text{Simp}(\text{Gp})$ .**

Denotamos por **Simp(Gp)** la categoría de grupos simpliciales, esto es, la categoría de funtores  $\text{Gp}^{\Delta^{op}}$ . Un grupo simplicial  $G$ , puede definirse equivalentemente como una sucesión de grupos  $\{G_n\}_{n \geq 0}$ , junto con morfismos cara  $d_i: G_n \rightarrow G_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y degeneración,  $s_i: G_{n-1} \rightarrow G_n$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , verificando las identidades simpliciales.

Un grupo simplicial se representa pues de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & s_0 & & s_0 & & s_0 & & s_0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & s_n & & s_{n-1} & & \dots & & s_0 & & s_0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\
 & & d_0 & & d_0 & & d_0 & & d_0 & & d_0 \\
 G_\bullet: \dots & \rightrightarrows & G_{n+1} & \rightrightarrows & G_n & \rightrightarrows & G_{n-1} & \dots & G_2 & \rightrightarrows & G_1 & \rightrightarrows & G_0 \\
 & & d_{n+1} & & d_n & & & & d_2 & & d_1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Recordamos en este punto algunos conceptos ligados al de grupo simplicial. Siendo  $G_{tr}$  un  $(n-1)$ -grupo simplicial truncado,



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & s_0 & & & & \\
 & & \vdots & & s_0 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & s_{n-2} & & & & s_0 & & s_0 \\
 & & & & & & \dots & & \\
 & & & & & & & & s_1 & & \\
 & & & & & & & & d_0 & & \\
 G_{tr} : G_{n-1} & \xrightleftharpoons[d_{n-1}]{d_0} & G_{n-2} & \xrightleftharpoons[d_n]{d_0} & G_{n-3} & \dots & G_2 & \xrightleftharpoons[d_2]{d_0} & G_1 & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & G_0,
 \end{array}$$

se define el enésimo **núcleo simplicial** de  $G_{tr}$ , que notaremos por  $\Delta^n(G_{tr})$ , como el siguiente subgrupo de  $(G_{n-1})^{n+1}$ :

$$\Delta^n(G_{tr}) = \{(x_0, \dots, x_n) \in (G_{n-1})^{n+1} \text{ tal que } d_i x_j = d_{j-1} x_i, i < j\}.$$

Si  $d_i : \Delta^n(G_{tr}) \longrightarrow G_{n-1}$  denota la restricción de cada una de las proyecciones canónicas, existen entonces morfismos -únicos-  $s_j : G_{n-1} \longrightarrow \Delta^n(G_{tr})$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , tales que

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & s_0 & & s_0 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & s_{n-1} & & s_{n-2} & & \dots & & s_0 & & s_0 \\
 & & & & & & & & & & s_1 & & \\
 \Delta^n(G_{tr}) & \xrightleftharpoons[d_n]{d_0} & G_{n-1} & \xrightleftharpoons[d_{n-1}]{d_0} & \dots & G_2 & \xrightleftharpoons[d_2]{d_0} & G_1 & \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} & G_0
 \end{array}$$

es un n-grupo simplicial truncado.

Iterando esta construcción del núcleo simplicial, se tiene el funtor  $(n-1)$ -coesqueleto,  $\text{cosk}^{n-1}$ , de la categoría de grupos simpliciales

(n-1)-truncados a la categoría **Simp(Gp)**. Dicho funtor es adjunto a derecha al funtor (n-1)-truncación, usualmente denotado por  $\text{tr}^{n-1}$ , que trunca cualquier grupo simplicial en dimensión n-1.

En lo sucesivo, notaremos  $\text{Cosk}^{n-1} = \text{cosk}^{n-1} \text{tr}^{n-1}$  y  $\Delta^n(G_\bullet) = \Delta^n(\text{tr}^{n-1}G_\bullet)$ .

Por otra parte, para un grupo simplicial (n-1)-truncado,  $G_{\bullet, \text{tr}}$ , su enésimo **conúcleo simplicial**,  $\nabla_n(G_{\bullet, \text{tr}})$ , se define como el cociente del coproducto  $\coprod_n G_n$  (es decir, producto libre en **Simp(Gp)**) bajo la congruencia generada por los elementos  $(s_i s_j x, s_{j+1} s_i x)$ ,  $x \in G_{n-1}$ ,  $0 \leq i < j \leq n-1$ , donde  $s_j: G_n \longrightarrow \coprod_n G_n$  denotan las inclusiones canónicas y  $s_j: G_n \longrightarrow \nabla_n(G_{\bullet, \text{tr}})$  son los morfismos inducidos por ellas.

El (n-1)-esqueleto de un (n-1)-grupo simplicial truncado  $G_{\bullet, \text{tr}}$ ,  $\text{sk}^{n-1}(G_{\bullet, \text{tr}})$ , está definido entonces mediante la iteración sucesiva de la construcción del conúcleo simplicial.

Si escribimos  $\text{Sk}^{n-1} = \text{sk}^{n-1} \text{tr}^{n-1}: \text{Simp(Gp)} \longrightarrow \text{Simp(Gp)}$ , se tiene la siguiente situación de adjunción:

$$\text{Simp(Gp)} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Sk}^{n-1}} \\ \xrightarrow{\text{Cosk}^{n-1}} \end{array} \text{Simp(Gp)}$$

Señalemos que la misma adjunción existe para la categoría de conjuntos simpliciales,

$$\text{SS} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Sk}^{n-1}} \\ \xrightarrow{\text{Cosk}^{n-1}} \end{array} \text{SS},$$



permitiendo entonces identificar, para todo conjunto simplicial  $X$ , morfismos simpliciales  $\Delta[s] = Sk^{n-1} \Delta[s] \longrightarrow X$  con morfismos simpliciales  $\Delta[s] \longrightarrow Cosk^{n-1}(X)$  y, en consecuencia, por la Proposición 1.1.II.1. (morfismo representante de un símplice), con elementos de  $\Delta^n(X)$ .

Dado  $G$ , un grupo simplicial, se define el **complejo de Moore** asociado a  $G$ ,  $N(G)$ , (ver [41], IV, §17, Proposición 17.3.), como el siguiente complejo de cadenas de grupos:

$$N_0(G) = G_0 \quad \text{y}$$

$$N_q(G) = \bigcap_{i=0}^{q-1} \text{Ker} (d_i : G_q \longrightarrow G_{q-1}), \text{ para } q \geq 1,$$

siendo  $d : N_q(G) \longrightarrow N_{q-1}(G)$  el morfismo inducido por  $d_q$ . Se tiene entonces un complejo de cadenas asociado al grupo simplicial  $G$ ,

$$\dots \longrightarrow N_q(G) \xrightarrow{d_q} N_{q-1}(G) \longrightarrow \dots \longrightarrow N_1(G) \xrightarrow{d_1} N_0(G) = G_0.$$

Dado un grupo simplicial  $G$ , se definen sus **grupos de homotopía**, (ver [41], IV, §17, Proposición 17.4.), como la correspondiente homología del complejo de Moore asociado, esto es,

$$\Pi_q(G) = \frac{\text{Ker}(d_q : N_q(G) \longrightarrow N_{q-1}(G))}{\text{Im}(d_{q+1} : N_{q+1}(G) \longrightarrow N_q(G))} \quad , \text{ para } q \geq 1,$$

con  $\Pi_0(G)$  el conjunto de componentes conexas.

Las definiciones de fibración, cofibración y equivalencia débil por las cuales  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es categoría de modelos cerrada, son las siguientes:

**Definición 1.1.IV.1.**

Un morfismo de grupos simpliciales es una fibración si es fibración de Kan.

Un morfismo de grupos simpliciales es una equivalencia débil si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.

Un morfismo de grupos simpliciales es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Las caracterizaciones de fibración dadas en  $\mathbf{SS}$  son pues igualmente válidas para  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , con la caracterización adicional que proporciona el funtor grupo libre,  $F:\mathbf{SS} \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Enunciamos en la siguiente Proposición todas estas caracterizaciones, junto con otras dadas en [48], (Cap.II, §3, Proposición 1).

**Proposición 1.1.IV.2.**

Para un morfismo de grupos simpliciales  $p.:E. \longrightarrow B.$ , son equivalentes:

i)p. es fibración de Kan.

ii)p. tiene la RLP con respecto a la siguiente familia de inclusiones en  $\mathbf{SS}$ :

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s], \quad \text{para } 0 \leq k \leq s, s > 0.$$

iii)p. tiene la RLP con respecto a la siguiente familia de morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ :

$$F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s], \quad \text{para } 0 \leq k \leq s, s > 0.$$

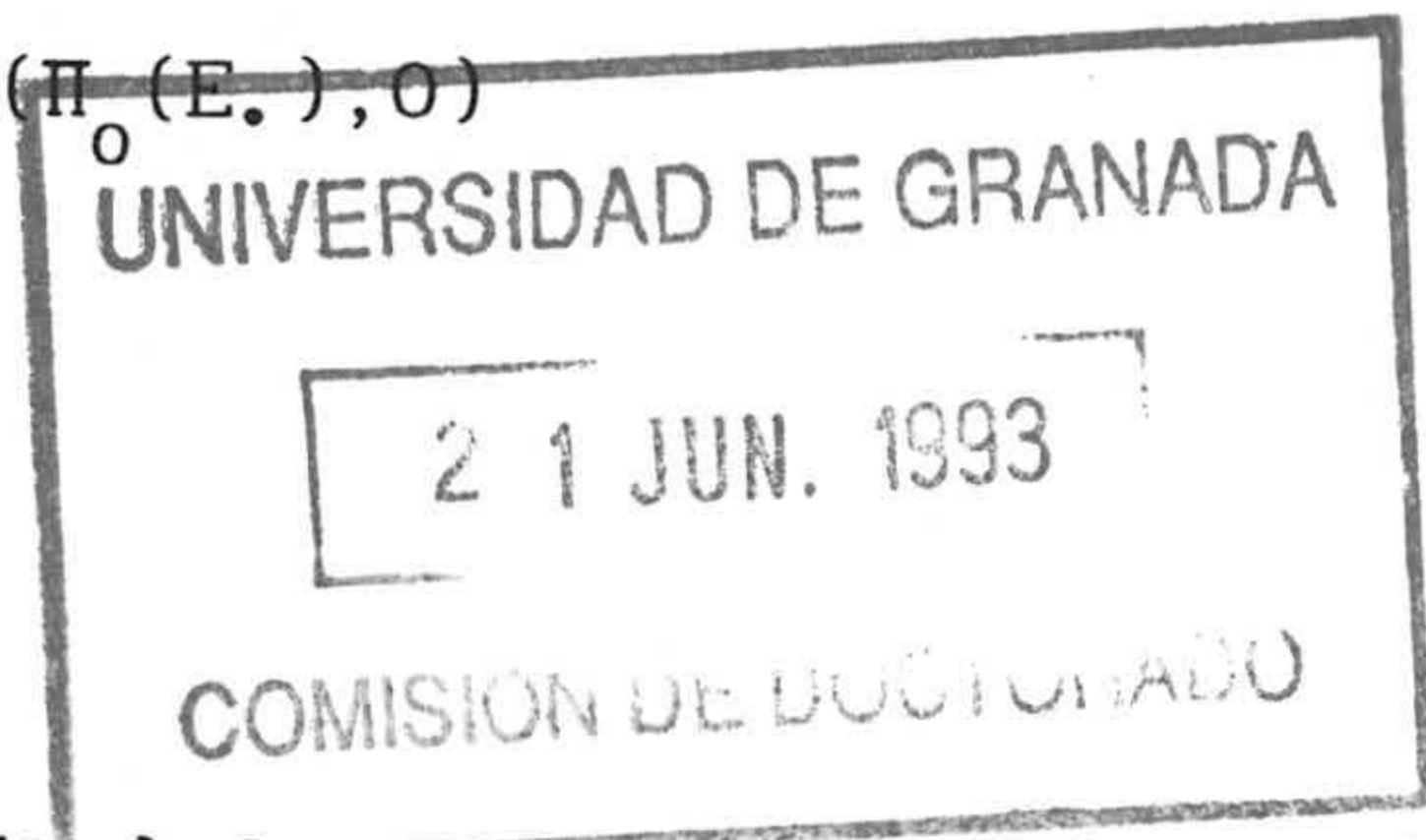


iv) El morfismo inducido en los correspondientes complejos de Moore,  $N_q(p.): N_q(E.) \longrightarrow N_q(B.)$ , es sobreyectivo para  $q > 0$ .

v) El morfismo canónico

$$E. \longrightarrow B. \times \begin{matrix} K(\Pi_0(E.), 0) \\ K(\Pi_0(B.), 0) \end{matrix}$$

es sobreyectivo en cada dimensión.



De igual forma, son aplicables en  $\mathbf{Simp}(Gp)$  las caracterizaciones de fibración trivial dadas en  $\mathbf{SS}$ , ([48], Cap. II, §3, Proposición 2), que enunciamos en la siguiente Proposición, junto con la caracterización adicional que proporciona el funtor grupo libre.

**Proposición 1.1.IV.3.**

Para un morfismo de grupos simpliciales  $p.: E. \longrightarrow B.$ , son equivalentes:

i)  $p.$  es fibración trivial en  $\mathbf{Simp}(Gp)$ .

ii)  $p.$  tiene la RLP con respecto a la siguiente familia de inclusiones en  $\mathbf{SS}$ :

$$\dot{\Delta}[s] \hookrightarrow \Delta[s], \quad s \geq 0.$$

iii)  $p.$  tiene la RLP con respecto a la siguiente familia de morfismos en  $\mathbf{Simp}(Gp)$ :

$$F\dot{\Delta}[s] \hookrightarrow F\Delta[s], \quad s \geq 0.$$

iv)  $p.$  es sobreyectivo y  $\Pi_q(\ker p.) = 0$ , para  $q \geq 0$ .

Con las definiciones dadas se demuestra en [48], (Cap.II, §3, Teorema 2) que **Simp(Gp)** es una categoría de modelos cerrada, para la que todos los objetos son fibrantes, y la clase de objetos cofibrantes está formada por aquellos grupos simpliciales que son retractsos de grupos simpliciales libres.

Igualmente se demuestra en [49], (Parte II, §3, Proposición 3.2.), que con esta estructura de modelos, **Simp(Gp)** es categoría de modelos cerrada **propia**.

#### Ejemplo V. Grupoides simpliciales.

Recordemos que un grupoide es una categoría pequeña en la que todos los morfismos son invertibles. Un grupoide simplicial es, entonces, una sucesión de grupoides  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  junto con operadores cara,  $d_i: X_n \longrightarrow X_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y degeneración,  $s_j: X_{n-1} \longrightarrow X_n$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , satisfaciendo las identidades simpliciales, de modo que la clase de objetos permanece constante en cada dimensión, esto es,

$$0 = \text{Obj}(X_n) = \text{Obj}(X_{n+1}), \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Notaremos por **Gd** a la categoría de grupoides simpliciales y morfismos simpliciales entre ellos.

En **Gd** se consideran las siguientes definiciones:

#### Definición 1.1.V.1.

Un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  es una fibración si

i) Para cada objeto  $A \in \text{Obj}(X)$  y morfismo  $b: fA \longrightarrow B$  en  $Y$  existe un morfismo  $a: A \longrightarrow A'$  tal que  $f(a)=b$ .



ii) Para cada objeto  $A \in \text{Obj}(X)$ , el morfismo inducido por  $f$

$$\text{Hom}_X(A, A) \longrightarrow \text{Hom}_Y(fA, fA)$$

es una fibración de grupos simpliciales, es decir, una fibración de Kan.

Un morfismo de grupoides simpliciales  $f: X \longrightarrow Y$  es una equivalencia débil si

i)  $f$  induce una correspondencia biyectiva entre las componentes de  $X$  y las de  $Y$  (Dos objetos  $A, A' \in \text{Obj}(X)$  se dice que están en la misma componente si existe un morfismo en  $X$  entre ellos,  $A \longrightarrow A'$ ).

ii) Para cada objeto  $A \in \text{Obj}(X)$ , el morfismo inducido por  $f$

$$\text{Hom}_X(A, A) \longrightarrow \text{Hom}_Y(fA, fA)$$

es una equivalencia débil de grupos simpliciales, es decir, induce isomorfismos en los grupos de homotopía.

Por último se tiene

Un morfismo de grupoides simpliciales es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Con estas definiciones se demuestra en [22], (Teorema 2.5.), que  $\mathbf{Gd}$  es categoría de modelos cerrada para la que todos los objetos son fibrantes, y son cofibrantes aquellos grupoides simpliciales que son retractsos de grupoides simpliciales libres, en el sentido de Dwyer y Kan ([22], Definición 2.3.).

Destaquemos finalmente que el estudio, en otras diversas e importantes categorías, de estructuras de modelos en el sentido de Quillen , ha sido realizado por diversos autores (véase [9], [19], [23], [28], [32], [42], [49], [52]...).



## 1.2. CONSTRUCCIONES EN UNA CATEGORÍA DE MODELOS. TEORÍA DE HOMOTOPÍA.

Como ya precisamos anteriormente, el término "categoría de modelos" es una simplificación del de "categoría de modelos para una teoría de homotopía". El objetivo de esta sección será pues, recordar brevemente las construcciones adicionales más comunes que pueden llevarse a cabo en una categoría de modelos, construcciones éstas que, junto con la categoría de homotopía, conformarán la noción de teoría de homotopía asociada a una categoría de modelos.

En lo sucesivo,  $\underline{C}$  denota una categoría de modelos, no necesariamente cerrada.

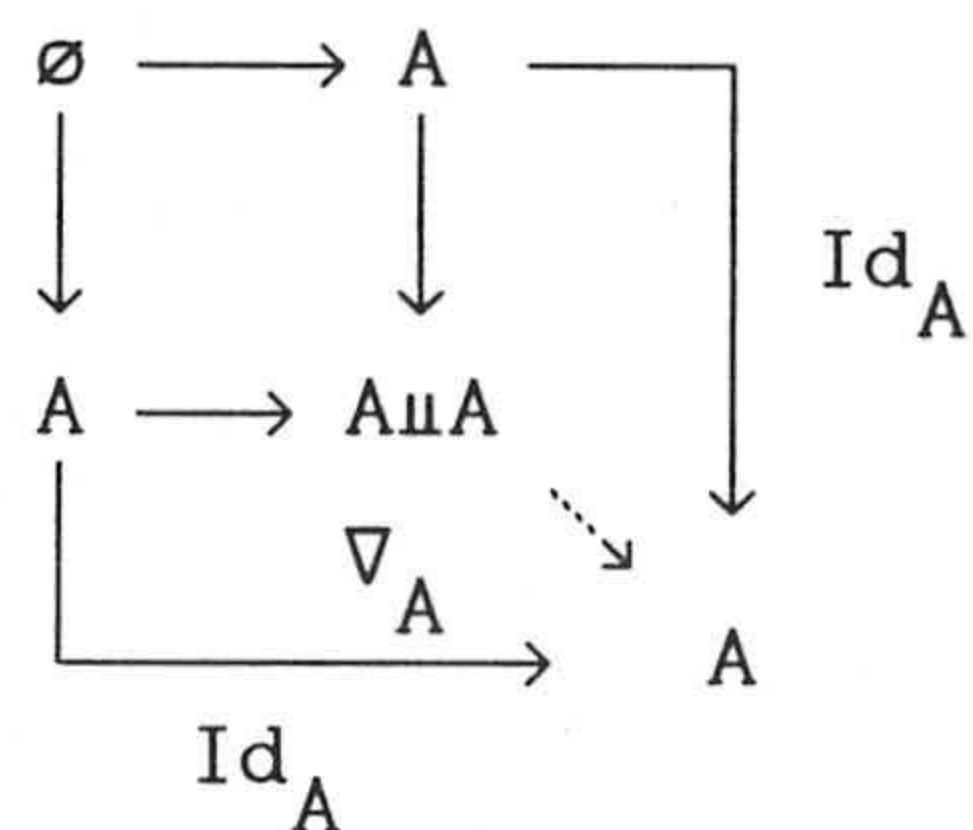
### 1.2.1. Construcciones en una categoría de modelos.

**Objeto cilindro y objeto arco.** ([48], Cap. I, Definición 4)

Dado un objeto cualquiera  $A$  de  $\underline{C}$ , un objeto cilindro asociado a  $A$  consta de un objeto  $A \times I$  junto con morfismos

$$A \amalg A \xrightarrow{i_1 + i_2} A \times I \xrightarrow{p} A$$

tal que  $i_1 + i_2$  es una cofibración,  $p$  es una equivalencia débil y  $p(i_1 + i_2) = \nabla_A$ , donde  $\nabla_A$  es el morfismo codiagonal obtenido del siguiente diagrama pushout:



en el que  $\emptyset$  denota el objeto inicial de la categoría  $\underline{C}$ . El morfismo  $i_1+i_2$  se obtiene por la propiedad universal del anterior diagrama pushout para morfismos dados  $i_1, i_2: A \longrightarrow A \times I$ , por lo que en ocasiones, un objeto cilindro asociado a un objeto  $A$  se nota por

$$\begin{array}{ccc}
 & i_1 & \\
 A & \xrightarrow{\quad} & A \times I \xrightarrow{p} A \\
 & i_2 & 
 \end{array}$$

con  $i_1+i_2$  una cofibración,  $p$  una equivalencia débil y  $p(i_1+i_2)=\nabla_A$ .

Observemos que el objeto cilindro asociado a un objeto  $A$  siempre existe en una categoría de modelos  $\underline{C}$ , factorizando el morfismo codiagonal  $\nabla_A: A \amalg A \longrightarrow A$ , por **M2.**, en cofibración y fibración trivial.

Dualmente, un objeto arco para  $B \in \text{Obj}(\underline{C})$  consta de un objeto  $B^I$  junto con morfismos

$$B \xrightarrow{s} B^I \xrightarrow{(d_1, d_2)} B \times B$$

donde  $(d_1, d_2)$  es fibración,  $s$  es equivalencia débil y  $(d_1, d_2)s = \Delta_B$ , siendo  $\Delta_B$  el morfismo diagonal en  $B$ .



Por el mismo razonamiento hecho para el objeto cilindro, el objeto arco asociado a un objeto B en una categoría de modelos  $\underline{C}$  siempre existe, factorizando en este caso el morfismo diagonal en cofibración trivial y fibración, vía **M2**..

### La categoría de homotopía.

**Definición 1.2.1.1.** ([48], Cap.I, §1, Definición 6)

Se define la categoría de homotopía de  $\underline{C}$ , notada por  $Ho(\underline{C})$ , como la localización de  $\underline{C}$  con respecto a la clase de las equivalencias débiles (ver [29], Cap.I).

La categoría  $Ho(\underline{C})$  no admite, en general, un cálculo de fracciones por la derecha (ó izquierda) (véase [29]), pero es, como reflejaremos a continuación, una mezcla de ambos cálculos.

Sea  $\Pi_{cf} \underline{C}$  la categoría cuyos objetos son los objetos de  $\underline{C}$  que son simultáneamente fibrantes y cofibrantes, con  $Hom_{\Pi_{cf} \underline{C}}(A,B)=[A,B]$ , donde  $[A,B]$  denota el conjunto de clases de equivalencia de  $Hom_{\underline{C}}(A,B)$  bajo la relación "ser homotópico a" (ver [48], Cap.I, Definición 3). La composición en  $\Pi_{cf} \underline{C}$  es la inducida por la de  $\underline{C}$ .

Se tiene entonces una descripción explícita de  $Ho(\underline{C})$ , así como algunas propiedades en relación con ella.

**Teorema 1.2.1.2.** ([49], Parte II, §1, Teorema 1.3.)

Para toda categoría de modelos  $\underline{C}$  se tiene:

i) La categoría  $Ho(\underline{C})$  existe.

ii) El funtor canónico  $\gamma: \underline{C} \longrightarrow Ho(\underline{C})$  induce una equivalencia de categorías

$$\bar{\gamma}: \Pi_{cf} \underline{C} \xrightarrow{\cong} Ho(\underline{C})$$

iii) Si A es cofibrante y B fibrante, entonces

$$\gamma: [A, B] \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Ho}(\underline{C})}(\gamma(A), \gamma(B))$$

iv)  $\gamma(f)$  es un isomorfismo en  $\text{Ho}(\underline{C})$  si y solamente si  $f$  es equivalencia débil.

**Funtores lazo y suspensión.** ([48], Cap. I, §2)

Para las construcciones siguientes, supondremos que  $\underline{C}$  es **punteada**, es decir, con **objeto cero**, que denotaremos por  $*$ .

Si  $\Pi_1(A, B)$  es el conjunto de clases de equivalencia de homotopías del morfismo  $X \longrightarrow * \longrightarrow Y$  en él mismo bajo la relación definida en [48], (Cap. I, §2, Definición 1), se tienen entonces endofuntores de  $\text{Ho}(\underline{C})$ , (los funtores suspensión y lazo), de acuerdo con el siguiente

**Teorema 1.2.1.3.** ([48], Cap. I, §2, Teorema 2)

Sea  $\underline{C}$  una categoría de modelos punteada. Entonces

i) Existe un funtor  $[\_, \_]_1: (\text{Ho}(\underline{C}))^{\text{op}} \times \text{Ho}(\underline{C}) \longrightarrow \mathbf{Gp}$ , determinado salvo isomorfismo por  $[A, B]_1 = \Pi_1(A, B)$ , para A un objeto cofibrante y B un objeto fibrante.

ii) Existen dos endofuntores de  $\text{Ho}(\underline{C})$ , suspensión y lazo,  $\Sigma$  y  $\Omega$  respectivamente, e isomorfismos canónicos

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\underline{C})}(\Sigma A, B) \cong [A, B]_1 \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\underline{C})}(A, \Omega B).$$

**Observación 1.2.1.4.**

Nótese en primer lugar que, por el Teorema 1.2.1.3.ii), los funtores suspensión y lazo  $\Sigma, \Omega: \text{Ho}(\underline{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\underline{C})$  son adjuntos, siendo este último el adjunto a derecha, así como únicos salvo isomorfismo canónico.



Por otra parte, para todo objeto  $X$  de  $\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})$ ,  $\Omega^n X$ ,  $n \geq 1$ , es un **objeto grupo**, esto es, se tiene un funtor contravariante  $\text{Hom}_{\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})}(\_, \Omega^n X) : \text{Ho}(\underline{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbf{Gp}$ , y  $\Sigma^n X$  es un **objeto cogrupo**, esto es, se tiene un funtor  $\text{Hom}_{\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})}(\Sigma^n X, \_) : \text{Ho}(\underline{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathbf{Gp}$ .

Un ejemplo de categoría de modelos en el que los funtores suspensión y lazo están explícitamente definidos -y de una forma simple- es el de la categoría  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}|A)$ , categoría de los complejos de cadenas de objetos de  $(\mathbf{Ab}|A)$ , donde  $(\mathbf{Ab}|A)$  es la categoría coma de la categoría de grupos abelianos,  $\mathbf{Ab}$  (ver [48], Cap.II, §5).

### Sucesiones fibración y cofibración.

Supondremos, al igual que anteriormente, que  $\underline{\mathcal{C}}$  es una categoría de modelos punteada, siendo  $*$  el objeto cero.

**Definición 1.2.1.5.** ([48], Cap.I, §3. Definición 1)

Una sucesión fibración en  $\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})$  es un diagrama en  $\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})$  de la forma

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \quad , \quad X \times_{\Omega Z} \longrightarrow X,$$

el cual es isomorfo a un diagrama en  $\underline{\mathcal{C}}$  de la forma

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad , \quad F \times_{\Omega B} \xrightarrow{m} F,$$

para el que

$p: E \longrightarrow B$  es una fibración entre objetos fibrantes,

$i: F \longrightarrow E$  es la inclusión de  $F$  en  $E$ , donde  $F$  es la **fibra** de  $p$ , definida por el siguiente diagrama pullback:

$$\begin{array}{ccc}
 F = * \times_B E & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 * & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

(Nótese entonces que  $F$  es un objeto fibrante, por **M3.**, puesto que  $p$  es una fibración).

$m: F \times \Omega B \longrightarrow F$  es una acción por la derecha del objeto grupo  $\Omega B$  sobre  $F$  en  $\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})$ .

Asociada a una sucesión fibración existe una sucesión exacta larga, en el siguiente sentido:

**Proposición 1.2.1.6.** ([48], Cap.I, §3. Proposición 4)

Para toda sucesión fibración en  $\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})$ ,

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B, \quad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F,$$

existe un morfismo  $\theta: \Omega B \longrightarrow F$ , tal que, para todo objeto  $A$  de  $\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})$ , existe una sucesión larga

$$\begin{aligned} & \dots \longrightarrow [A, \Omega^{q+1}B] \xrightarrow{(\Omega^q \theta)_*} [A, \Omega^q F] \xrightarrow{(\Omega^q i)_*} [A, \Omega^q E] \xrightarrow{(\Omega^q p)_*} \dots \\ \dots \longrightarrow & [A, \Omega E] \xrightarrow{(\Omega i)_*} [A, \Omega B] \xrightarrow{\theta_*} [A, F] \xrightarrow{i_*} [A, E] \xrightarrow{p_*} [A, E], \end{aligned}$$

donde  $[\_, \_]$  denota en este caso  $\text{Hom}_{\text{Ho}(\underline{\mathcal{C}})}(\_, \_)$ , que es exacta en el siguiente sentido:

- i)  $p_*^{-1}(\{0\}) = \text{Im } i_*$ .
- ii)  $i_* \theta_* = 0$  y  $i_* \alpha_1 = i_* \alpha_2$  si y solamente si  $\alpha_2 = \alpha_1 \lambda$ , para algún  $\lambda \in [A, \Omega B]$ .
- iii)  $\theta_* (\Omega i)_* = 0$  y  $\theta_* \lambda_1 = \theta_* \lambda_2$  si y solamente si  $\lambda_2 = (\Omega p)_* \mu \lambda_1$ , para algún  $\mu \in [A, \Omega E]$ .
- iv) La sucesión de morfismos de grupos

$$[A, \Omega E] \xrightarrow{(\Omega p)_*} [A, \Omega B] \xrightarrow{\theta_*} [A, F] \xrightarrow{i_*} [A, E] \xrightarrow{p_*} [A, E]$$

es exacta en el sentido usual.



En consecuencia, una sucesión fibración puede notarse por

$$\Omega B \xrightarrow{\theta} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad , \quad F \times \Omega B \xrightarrow{m} F.$$

Dualmente se define sucesión cofibración, usando para ello el funtor suspensión, de modo que una sucesión cofibración es un diagrama en  $\text{Ho}(\underline{C})$  del tipo

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C, \quad C \xrightarrow{n} C \amalg \Sigma A,$$

donde  $u$  es una cofibración entre objetos cofibrantes,  $v: X \longrightarrow C = X \amalg_A *$  es la cofibra de  $u$  (obtenida del correspondiente diagrama pushout tal y como se indica), y  $n$  es una acción por la derecha del objeto cogrupo  $\Sigma A$  sobre  $C$ .

Asímismo se tiene que, para toda sucesión cofibración

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C, \quad C \xrightarrow{n} C \amalg \Sigma A,$$

existe un morfismo  $C \xrightarrow{\delta} \Sigma A$  y la correspondiente sucesión exacta larga asociada, (ver ([48], Cap.I, §3. Proposición 4'), lo que permite notar las sucesiones cofibración como

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} C \xrightarrow{\delta} \Sigma A, \quad C \xrightarrow{n} C \amalg \Sigma A.$$

### 1.2.2. Teoría de homotopía.

Nos ocupamos a continuación de recordar la noción de teoría de homotopía asociada a una categoría de modelos, así como de un criterio que permita decidir cuándo categorías con distintas estructuras de modelos originan teorías de homotopía equivalentes.

**Definición 1.2.2.1.** ([48], Cap.I, §4)

Dada un categoría de modelos  $\underline{C}$ , la teoría de homotopía asociada a  $\underline{C}$  consta de la categoría de homotopía,  $Ho(\underline{C})$ , junto con las estructuras adicionales de los funtores suspensión y lazo, la familia de sucesiones fibración y cofibración y las correspondientes sucesiones exactas largas asociadas.

El siguiente Teorema ofrece un criterio que asegura teorías de homotopía equivalentes para categorías con diferentes estructuras de modelos, relacionadas mediante un conveniente par de funtores adjuntos.

**Teorema 1.2.2.2.** ([48], Cap.I, §4, Teorema 3)

i) Sean  $\underline{C}$  y  $\underline{C}'$  dos categorías de modelos relacionadas por una adjunción

$$(1) \quad \underline{C}' \begin{array}{c} \xleftarrow{L} \\ \xrightarrow{R} \end{array} \underline{C}$$

en la que  $R$  es el adjunto a derecha. Supongamos que  $L$  preserva cofibraciones, y que lleva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes de  $\underline{C}$  en equivalencias débiles de  $\underline{C}'$ . Supongamos también que  $R$  preserva fibraciones, y que lleva equivalencias débiles entre objetos fibrantes de  $\underline{C}'$  en equivalencias débiles de  $\underline{C}$ .

Entonces los funtores  $L$  y  $R$  inducen sendos funtores  $\underline{L}$  y  $\underline{R}$  en las correspondientes categorías de homotopía, teniéndose una adjunción

$$(2) \quad Ho(\underline{C}') \begin{array}{c} \xleftarrow{\underline{L}} \\ \xrightarrow{\underline{R}} \end{array} Ho(\underline{C})$$

Supongamos, adicionalmente, que un morfismo  $LX \longrightarrow Y$  es equivalencia débil si y solamente si  $X \longrightarrow RY$  es equivalencia débil,



para cualesquiera  $X \in \text{Obj}(\underline{C})$  cofibrante, e  $Y \in \text{Obj}(\underline{C}')$  fibrante. Entonces la unidad y la counidad de la adjunción (2) son isomorfismos, y por tanto, se tiene una equivalencia de categorías,  $\text{Ho}(\underline{C}) \cong \text{Ho}(\underline{C}')$ .

ii) Si además las categorías  $\underline{C}$  y  $\underline{C}'$  son punteadas, la anterior equivalencia de categorías de homotopía es compatible con los funtores suspensión y lazo, y con las sucesiones fibración y cofibración, teniéndose en consecuencia, una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía.

Ejemplos de categorías de modelos proporcionando, según este criterio, teorías de homotopía equivalentes son, por una parte, las categorías de espacios topológicos con punto base,  $\text{Top}_*$ , y conjuntos simpliciales punteados,  $\text{SS}_*$  (ligadas por las versiones basadas de los funtores *Realización Geométrica*,  $|\cdot|_*$ , y *Complejo Singular Total*,  $\text{Sing}_*$ , (véase [41], [44])) y también las categorías  $\text{Simp}(\text{Gp})$  de grupos simpliciales y  $\text{RedSS}$  de conjuntos simpliciales reducidos con sus estructuras de modelos (ver Capítulo 1), ligadas por el par de funtores adjuntos *Grupo Lazo*,  $G: \text{RedSS} \longrightarrow \text{Simp}(\text{Gp})$ , y *Complejo Clasificador*,  $\bar{W}: \text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{RedSS}$  (ver [41]).

Abundaremos en ambos ejemplos en 2.1.



## CAPITULO 2. ESTRUCTURAS DE MODELOS DE QUILLEN INDUCIDAS POR SITUACIONES DE ADJUNCION.

El objetivo principal de este Capítulo es dar un método general para dotar a una categoría  $\underline{C}$ , conectada con la categoría de grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , por una "conveniente" situación de adjunción, de una estructura de modelos cerrada en el sentido de Quillen ([48]) que sea la inducida (ó la "levantada" en nuestra terminología, según la Definición 2.1.I.1.) de la que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  soporta (ver Capítulo 1, Ejemplo IV).

Estructuras de modelos de Quillen para categorías de modelos algebraicos de n-tipos conexos de espacios, serán entonces analizadas en el siguiente capítulo -según este tratamiento general- examinando si se satisfacen las condiciones exigidas sobre la adjunción para la verificación de la axiomática (Teorema 2.2.5.).

El planteamiento general aludido, que abordamos en 2.2., es sugerido previamente en 2.1., poniendo de manifiesto con diversos ejemplos, que estructuras de modelos en categorías bien conocidas, (véase Capítulo 1), y conectadas por situaciones de adjunción, son estructuras "bien ajustadas" a estas situaciones, en el sentido que posteriormente se da.

Es reseñable que el planteamiento general de 2.2. para levantar la estructura a  $\underline{C}$  de la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , puede ser generalizado sin dificultad si se sustituye  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  por otra categoría de modelos cerrada en la que, tanto fibraciones como fibraciones triviales, estén caracterizadas en términos de propiedades de levantamiento respecto a morfismos entre objetos pequeños (véase por ejemplo [22] para la categoría de grupoides simpliciales).



## 2.1. CATEGORIAS DE MODELOS EN SITUACIONES DE ADJUNCION.

En el Capítulo 1 hemos recordado el criterio ofrecido por Quillen para asegurar cuándo diferentes modelos proporcionan la misma teoría de homotopía. En este punto pretendemos poner de manifiesto con diversos ejemplos que, más allá de tenerse tal equivalencia, las estructuras están completamente determinadas por la situación de adjunción.

Este hecho es sugerido fundamentalmente por el primero de los ejemplos que a continuación se desarrollan, (ver [52]), en el que la estructura de modelos en  $\mathbf{Cat}$  es definida directamente utilizando una conveniente situación de adjunción con la categoría de conjuntos simpliciales,  $\mathbf{SS}$ , que induce una equivalencia al nivel de las respectivas categorías de homotopía.

### Ejemplo I: $\mathbf{Cat}$ y conjuntos simpliciales.

Denotaremos por  $\mathbf{Cat}$  la categoría de todas las categorías pequeñas y sea  $\mathbf{SS}$  la categoría de conjuntos simpliciales con su habitual estructura de modelos de Quillen, definida en el Capítulo 1 (Ejemplo II).

Ambas categorías están relacionadas mediante una situación de adjunción,

$$\mathbf{Cat} \begin{array}{c} \xleftarrow{c} \\ \xrightarrow{N} \end{array} \mathbf{SS},$$

establecida por el funtor nervio,  $N$ , y su adjunto a izquierda,  $c$ , (ver [52]). Esta adjunción permite dar una noción de equivalencia débil en

**Cat** ( $f$  en **Cat** es equivalencia débil si  $Nf$  lo es en **SS**), que no induce una equivalencia entre las respectivas teorías de homotopía (la unidad no es una equivalencia débil).

Considerando sin embargo el par de endofuntores  $Sd^2$  y  $Ex^2$  sobre **SS**, (ver [38], §3,7), se tiene una nueva adjunción,

$$(*) \quad \text{Cat} \begin{array}{c} \xleftarrow{cSd^2} \\ \xrightarrow{Ex^2N} \end{array} \text{SS}$$

que determina en **Cat** la misma clase de equivalencias débiles ( $f$  en **Cat** es equivalencia débil si  $Nf$  lo es en **SS** si y solamente si  $Ex^2Nf$  es equivalencia débil en **SS** -[52], Proposición 2.4.) y que satisface que, tanto la unidad como la counidad, son equivalencias débiles, y, consecuentemente, induce una equivalencia al nivel de sus categorías de homotopía.

Esta última situación de adjunción es entonces utilizada para considerar la siguiente estructura de modelos en **Cat** (levantada de la de **SS**):

**Definición 2.1.I.1.**

Un morfismo  $f$  en **Cat** es una fibración si  $Ex^2N(f)$  es una fibración en **SS**.

Un morfismo  $f$  en **Cat** es una equivalencia débil si  $Ex^2N(f)$  es equivalencia débil en **SS**.

Finalmente, un morfismo  $i$  en **Cat** es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Con estas definiciones se prueba en [52] (Teorema 4.9.), que **Cat** es una categoría de modelos cerrada, **cuya estructura está naturalmente**



ajustada a la adjunción en el sentido de que fibraciones y equivalencias débiles en **Cat** (y en consecuencia las cofibraciones, vía la LLP con respecto a las fibraciones triviales) pueden describirse en términos de la estructura de Quillen que soporta **SS**, y el funtor adjunto a derecha en (\*).

**Ejemplo II: Conjuntos Simpliciales y Espacios Topológicos.**

Consideremos las categorías **SS** de conjuntos simpliciales y **Top** de espacios topológicos, con sus estructuras de modelos de Quillen descritas en el Capítulo 1.

Como es conocido, estas dos categorías están conectadas por la siguiente adjunción,

$$\text{Top} \begin{array}{c} \xleftarrow{|\cdot|} \\ \xrightarrow{\text{Sing}} \end{array} \text{SS}$$

establecida por los funtores *Realización Geométrica*  $|\cdot|$  y *Complejo Singular Total*,  $\text{Sing}$ , siendo éste el funtor adjunto a derecha.

Los siguientes resultados permiten poner de manifiesto que la estructura de **Top** está naturalmente ajustada a esta situación de adjunción, esto es, fibraciones y equivalencias débiles (y en consecuencia, cofibraciones) pueden ser definidas exclusivamente en términos del funtor  $\text{Sing}$  y la estructura de modelos de **SS**.

**Proposición 2.1.II.1.** ([41], Cap.III, § 16)

i) Un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  en **Top** es una fibración de Serre si y solamente si  $\text{Sing}(f)$  es una fibración de Kan.

ii) Para todo espacio topológico  $X$  se tiene

$$\Pi_n(|\text{Sing}(X)|, |\text{Sing}(x_0)|) \cong \Pi_n(X, x_0), \text{ para todo } n, x_0 \in X. \quad \blacksquare$$

Recordemos que una equivalencia homotópica débil es un morfismo en **Top** que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía. Es bien conocido entonces que una equivalencia homotópica es una equivalencia homotópica débil; el recíproco es, sin embargo, falso en general, aunque sí se tiene.

**Proposición 2.1.II.2.** ([55], Cap.IV, § 3, Teorema 3.5)

Sean  $X$  e  $Y$  CW-complejos y  $f: X \longrightarrow Y$  una equivalencia homotópica débil. Entonces  $f$  es una equivalencia homotópica. ■

Podemos ahora probar el siguiente:

**Teorema 2.1.II.3.**

i) Un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  en **Top** es una fibración si y solamente si  $\text{Sing}(f)$  es una fibración en **SS**.

ii) Un morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  en **Top** es una equivalencia débil si y solamente si  $\text{Sing}(f)$  es una equivalencia débil en **SS**.

**Demostración.**

Nótese que i) está probado vía la Proposición 2.1.II.1.i).

Para demostrar ii), supongamos entonces que  $f: X \longrightarrow Y$  es una equivalencia débil en **Top**, esto es, por definición,  $f$  induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía,

$$\bar{f}_q : \Pi_q(X, x) \xrightarrow{\cong} \Pi_q(Y, f(x)), \text{ para } q \geq 0, x \in X.$$

Por la Proposición 2.1.II.1.ii), esto es equivalente a

$$\Pi_q(|\text{Sing}(X)|, |\text{Sing}(x)|) \cong \Pi_q(|\text{Sing}(Y)|, |\text{Sing}(f(x))|), \text{ para } q \geq 0, x \in X,$$

es decir, la aplicación  $|\text{Sing}(f)|$  es una equivalencia homotópica débil en **Top**. Puesto que la realización geométrica de un conjunto simplicial



es siempre un CW-complejo (ver [41], Cap.III, § 14, Teorema 14.1) la Proposición 2.1.II.2. permite afirmar que  $|\text{Sing}(f)|$  es una equivalencia homotópica en **Top**, es decir, por definición,  $\text{Sing}(f)$  es una equivalencia débil en **SS**.

Recíprocamente, supongamos que  $\text{Sing}(f):\text{Sing}(X) \longrightarrow \text{Sing}(Y)$  es una equivalencia débil en **SS**, esto es, por definición,  $|\text{Sing}(f)|$  es una equivalencia homotópica en **Top**; en particular,  $|\text{Sing}(f)|$  es una equivalencia homotópica débil, es decir,

$$\Pi_q(|\text{Sing}(X)|, |\text{Sing}(x)|) \cong \Pi_q(|\text{Sing}(Y)|, |\text{Sing}(f(x))|), \text{ para } q \geq 0, x \in X,$$

lo que conduce finalmente, vía la Proposición 2.1.II.1.ii), a que  $f:X \longrightarrow Y$  sea una equivalencia débil de **Top**. ■

### Ejemplo III. Grupos Simpliciales y Conjuntos Simpliciales Reducidos.

Consideremos las categorías de grupos simpliciales, **Simp(Gp)**, y conjuntos simpliciales reducidos, **RedSS**, ambas con sus estructuras de modelos de Quillen, recordadas en el Capítulo 1 (Ejemplos III y IV).

Estas dos categorías están relacionadas mediante la siguiente adjunción:

$$\text{Simp(Gp)} \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{\bar{W}} \\ \end{array} \text{RedSS}$$

con  $G:\text{RedSS} \longrightarrow \text{Simp(Gp)}$  el funtor *Grupo Lazo* y  $\bar{W}:\text{Simp(Gp)} \longrightarrow \text{RedSS}$  el funtor *Complejo Clasificador*.

Describimos ahora en detalle ambos funtores, sobre los cuales ya hicimos notar en el Capítulo 1, 1.2., que proporcionaban una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía de **Simp(Gp)** y **RedSS**, (ver [41]).

Funtor G. Para todo  $K \in \text{RedSS}$ ,  $GK$  es el grupo simplicial definido en cada dimensión como sigue:  $G_n K$  es el grupo libre generado por los  $n+1$  símplexes de  $K$  módulo las relaciones  $\overline{s_0 y} = \text{Id}_{\overline{d_1 \dots d_n y}}$  para cada  $y \in K_n$ , donde  $\overline{y}$  denota su clase bajo dicha relación.

Los operadores cara y degeneración son

$$\begin{aligned} d_0(\overline{x}) &= (\overline{d_1 x}) \cdot (\overline{d_0 x})^{-1}. \\ d_i(\overline{x}) &= \overline{d_{i+1} x} \quad \text{si } i > 0. \\ s_i(\overline{x}) &= \overline{s_{i+1} x} \quad \text{si } i \geq 0. \end{aligned}$$

Funtor  $\overline{W}$ . Para todo  $H \in \text{Simp(Gp)}$ ,  $\overline{W}_0(H)$  tiene un único elemento  $*$  y  $\overline{W}_n(H) = H_{n-1} \times H_{n-2} \times \dots \times H_0$  si  $n > 0$ .

Sea  $(h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_0)$  un  $n$ -símplex de  $\overline{W}(H)$ . Los operadores cara y degeneración se definen como sigue:

$$\begin{aligned} s_0^* &= e_0 \\ d_i(h_0) &= * \quad , \quad \text{para } i=0,1. \end{aligned}$$

Para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} d_0(h_n, \dots, h_0) &= (h_{n-1}, \dots, h_0) \\ d_{i+1}(h_n, \dots, h_0) &= (d_i h_n, \dots, d_1 h_{n-i+1}, h_{n-i-1} \cdot d_0 h_{n-i}, h_{n-i-2}, \dots, h_0) \\ 0 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0(h_{n-1}, \dots, h_0) &= (e_n, h_{n-1}, \dots, h_0) \\ s_{i+1}(h_{n-1}, \dots, h_0) &= (s_i h_{n-1}, \dots, s_0 h_{n-i}, e_{n-i}, h_{n-i-1}, \dots, h_0), \quad 0 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

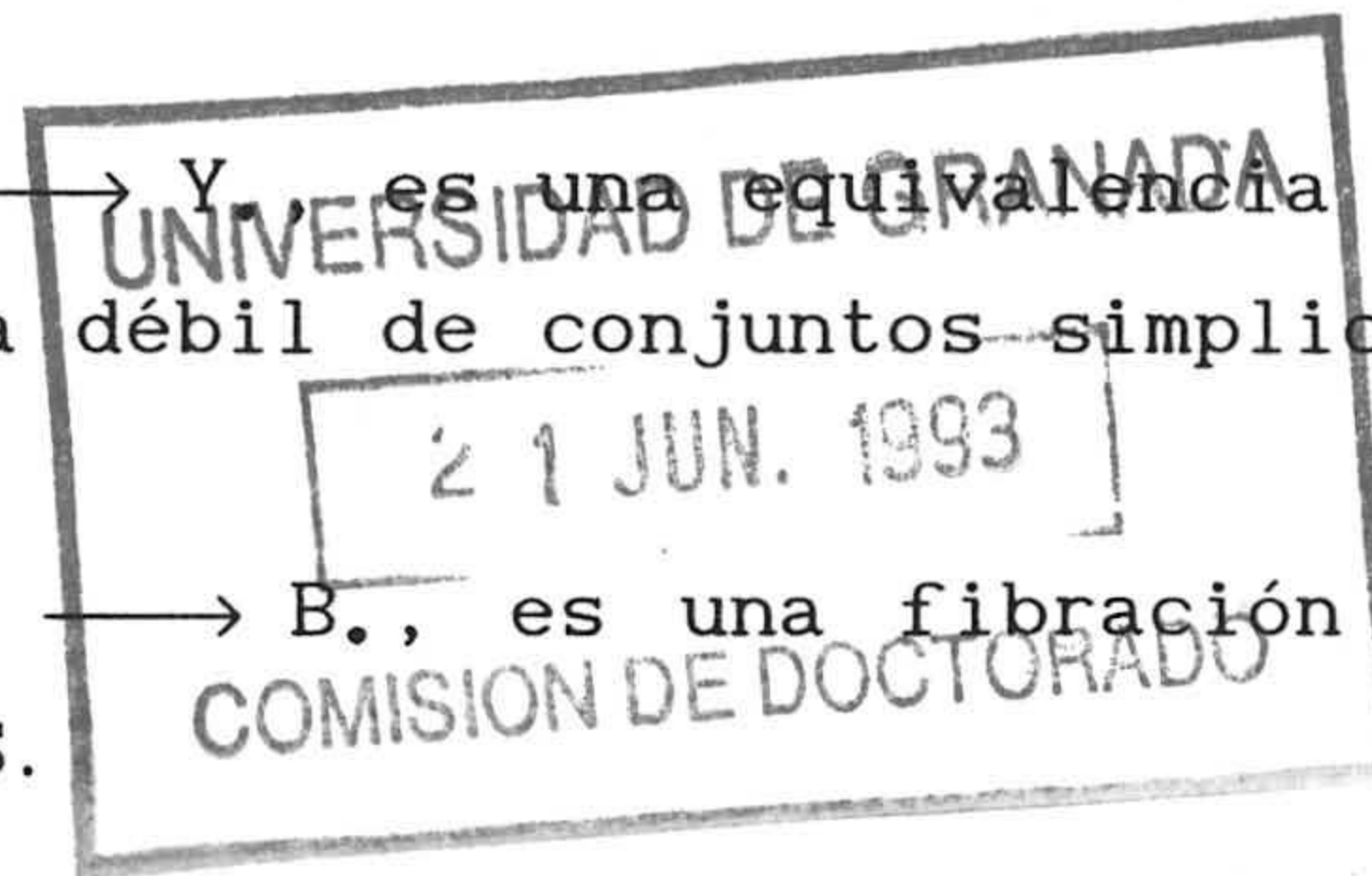


Como en ejemplos anteriores, observaremos entonces que la estructura de modelos de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  puede ser definida únicamente en términos del funtor  $\bar{W}$  y de la estructura de modelos de  $\mathbf{RedSS}$ , según se enuncia en la siguiente Proposición.

**Proposición 2.1.III.1.**

i) Un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $f.: X. \rightarrow Y.$  es una equivalencia débil si y solamente si  $\bar{W}f.$  es equivalencia débil de conjuntos simpliciales reducidos.

ii) Un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $p.: E. \rightarrow B.$ , es una fibration si y solamente si  $\bar{W}p.$  es fibration en  $\mathbf{RedSS}$ .



**Demostración.**

El hecho de que  $\bar{W}$  preserve fibraciones y equivalencias débiles fue demostrado por Quillen en [49], (§II, Cap.3), donde también se demuestra que el funtor  $G: \mathbf{RedSS} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  preserva equivalencias débiles, así como que la unidad y la counidad de la adjunción,  $\text{Id} \xrightarrow{\eta} \bar{W}G$  y  $G\bar{W} \xrightarrow{\epsilon} \text{Id}$ , son equivalencias débiles.

Demostramos entonces i) y ii) en lo relativo a la reflexión de equivalencias débiles y fibraciones.

En primer lugar, si  $\bar{W}f.: \bar{W}X. \rightarrow \bar{W}Y.$  es una equivalencia débil en  $\mathbf{RedSS}$ , puesto que  $G$  las preserva,  $G\bar{W}f.: G\bar{W}X. \rightarrow G\bar{W}Y.$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.

Considerando entonces el siguiente diagrama conmutativo (naturalidad de la counidad),

$$\begin{array}{ccc}
 G\bar{W}X. & \xrightarrow{G\bar{W}f.} & G\bar{W}Y. \\
 \epsilon_X \downarrow & & \downarrow \epsilon_Y \\
 X. & \xrightarrow{f.} & Y.
 \end{array}$$

se tiene, por el axioma CM2, que  $f.:X. \longrightarrow Y.$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.

Para probar que el funtor  $\bar{W}$  refleja fibraciones, sea  $p.:E. \longrightarrow B.$  cualquier morfismo de grupos simpliciales tal que  $\bar{W}p.: \bar{W}E. \longrightarrow \bar{W}B.$  es una fibración de conjuntos simpliciales reducidos. Esto es equivalente a que el morfismo canónico

$$\Phi.: \bar{W}E. \longrightarrow \bar{W}B. \times \begin{matrix} K(\Pi_1 \bar{W}E., 1) \\ K(\Pi_1 \bar{W}B., 1) \end{matrix}$$

definido en cada dimensión como

$$\Phi_{n+1}(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = (p_n x_n, p_{n-1} x_{n-1}, \dots, p_0 x_0; \overline{d_0 d_1 \dots d_{n-1} x_n}, \dots, \overline{d_0 x_1}, \overline{x_0})$$

sea una fibración de Kan (ver Capítulo 1, sección 1, Proposición 1.1.III.2.).

Puesto que para todo grupo simplicial  $G.$  se tiene que  $\Pi_1 \bar{W}G. \cong \Pi_0 G.$ , (ver [16]), es claro que  $K(\Pi_1 \bar{W}E., 1) \cong K(\Pi_0 E., 1)$  y  $K(\Pi_1 \bar{W}B., 1) \cong K(\Pi_0 B., 1)$ , y por tanto, el morfismo  $\Phi.$  puede representarse en cada dimensión como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & E_2 \times E_1 \times E_0 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & E_1 \times E_0 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & E_0 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & * \\ & \downarrow \Phi_3 & & \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \text{Id} \\ \dots & (B_2 \times B_1 \times B_0) \times (\Pi_0 E.)^3 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (B_1 \times B_0) \times (\Pi_0 E.)^2 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & B_0 \times \Pi_0 E. & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & * \\ & (\Pi_0 B.)^3 & & (\Pi_0 B.)^2 & & \Pi_0 B. & & \end{array}$$



Demostraremos entonces que el morfismo  $p.:E. \longrightarrow B.$  es una
 fibración de grupos simpliciales (esto es, una fibración de Kan)
 probando que el morfismo inducido en los correspondientes complejos de
 Moore,  $N_n p.:N_n E. \longrightarrow N_n B.,$  es sobreyectivo para  $n>0$  (Capítulo 1,
 Proposición 1.1.IV.2.). Tomemos para ello  $y \in N_n B., n>0,$  es decir,  $y \in B_n$ 
 con  $d_i y = e$  para  $i=0, \dots, n-1,$  con el que se construye el siguiente
  $(n+1)$ -símplice de  $\bar{W}B. \times K(\Pi_0 E., 1):$

$$K(\Pi_0 B., 1)$$

$$(y, e, \dots, e; \bar{e}, \dots, \bar{e}) \in (B_n \times \dots \times B_0) \times (\Pi_0 E.)^{n+1}.$$

$$(\Pi_0 B.)^{n+1}$$

donde  $\bar{e}$  denota la clase del elemento neutro  $e$  de  $E.$  (ó de  $B.$  según el
 contexto) en  $\Pi_0 E.$  (ó en  $\Pi_0 B.$ ).

Consideramos este elemento así como la siguiente colección de  $(n+1)$ 
 símplices compatibles de  $\bar{W}_n(E.) = E_{n-1} \times \dots \times E_0,$   $a_0, a_1, \dots, a_n,$  definidos
 por

$$a_i = (e, \dots, e) \in E_{n-1} \times \dots \times E_0, \text{ para } i=0, \dots, n.$$

Es claro, pues, según la definición de los morfismos cara dada
 anteriormente, que  $d_i(y, e, \dots, e; \bar{e}, \dots, \bar{e}) = \Phi_{n+1}(a_i),$  para  $j=0, \dots, n,$ 
 $i \neq n+1.$  Por ser entonces el morfismo  $\Phi.$  una fibración de Kan, existe
  $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) \in E_n \times E_{n-1} \times \dots \times E_0$  verificando las siguientes
 condiciones:

$$i) \begin{cases} d_0(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = (e, e, \dots, e) & y \\ d_{i+1}(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = (e, e, \dots, e), & \text{para } i=0, \dots, n-1, i \neq n, \end{cases}$$

$$ii) \Phi_{n+1}(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = (y, e, \dots, e; \bar{e}, \dots, \bar{e}).$$

De ii), por definición del morfismo  $\Phi_*$ , se tiene en particular que  $p_n(x_n) = y$ . En cuanto a i), se deduce, por definición de los morfismos  $d_i$ , en primer lugar para  $i=0$ ,

$$d_0(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = (x_{n-1}, \dots, x_0) = (e, e, \dots, e)$$

que  $x_i = e$  para  $i=0, \dots, n-1$ , y, en general,

$$d_{i+1}(x_n, e, \dots, e) = (d_i x_n, e, \dots, e) = (e, e, \dots, e), \quad \text{para } i=0, \dots, n-1, \\ i \neq n,$$

que  $d_i x_n = e$  para  $i=0, \dots, n-1$ . En definitiva, se ha probado la existencia de  $x_n \in N_n E$ . verificando que  $p_n(x_n) = y$ , lo que demuestra que el morfismo  $N_n p$  es sobreyectivo,  $n > 0$  y, por tanto  $p_*: E \rightarrow B$  es fibración de grupos simpliciales. ■

#### Ejemplo IV. Grupoides Simpliciales y Conjuntos Simpliciales.

Sea  $Gd$  la categoría de grupoides simpliciales con la estructura de modelos descrita en el Capítulo 1. Esta categoría está relacionada con la categoría de conjuntos simpliciales  $SS$ , igualmente equipada con su habitual estructura de modelos, vía la siguiente adjunción: ([41], [24]).

$$Gd \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{\bar{W}} \end{array} SS$$

Esta adjunción se establece mediante adecuadas generalizaciones de los funtores lazo y complejo clasificador del ejemplo anterior. Mantendremos para estos funtores generalizados, por simplicidad, la



misma notación usada anteriormente, siendo entonces  $G:SS \longrightarrow Gd$  el funtor *Grupo Lazo generalizado* y  $\bar{W}:Gd \longrightarrow SS$  el funtor *Compleja Clasificador generalizado*, funtores que pueden describirse como sigue:

Para  $K_0 \in SS$ ,  $GK_0$  es el grupoide simplicial que tiene como clase de objetos constante  $Obj(GK_0) = \{ \bar{x} \text{ tal que } x \in K_0 \}$ ; en cada dimensión  $G(K_0)_n$  es el grupoide con un único generador

$$\bar{x}: \overline{d_1 d_2 \dots d_{n+1} x} \longrightarrow \overline{d_0 d_2 \dots d_{n+1} x} \text{ para cada } x \in K_{n+1}$$

y la relación  $\overline{s_0 y} = Id_{\overline{d_1 \dots d_n y}}$  para cada  $y \in K_n$ .

Los operadores cara y degeneración se definen como sigue:

$$\begin{aligned} d_0(\bar{x}) &= (\overline{d_1 x}) \cdot (\overline{d_0 x})^{-1}. \\ d_i(\bar{x}) &= \overline{d_{i+1} x} \quad \text{si } i > 0. \\ s_i(\bar{x}) &= \overline{s_{i+1} x} \quad \text{si } i \geq 0. \end{aligned}$$

Para todo grupoide simplicial  $X \in Gd$ ,  $\bar{W}X$  es el siguiente conjunto simplicial:

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 X &= Obj(X_n). \\ \bar{W}_n X &= \{(g_{n-1}, \dots, g_0) \text{ tal que } g_i \in Mor(X_i), \text{ y } s(g_i) = t(g_{i+1})\}, \end{aligned}$$

para  $n > 0$ , donde  $s$  denota el morfismo dominio y  $t$  el morfismo codominio. Los operadores cara y degeneración se definen en este caso como

$$\begin{aligned} d_0(g_{n-1}, \dots, g_0) &= (g_{n-2}, \dots, g_0) \\ d_n(g_{n-1}, \dots, g_0) &= (d_{n-1} g_{n-1}, \dots, d_1 g_1). \\ d_i(g_{n-1}, \dots, g_0) &= (d_{i-1} g_{n-1}, \dots, d_0 g_{n-i} \cdot g_{n-i-1}, \dots, g_0) \text{ si } 0 < i < n. \\ s_0(g_{n-1}, \dots, g_0) &= (Id, g_{n-1}, \dots, g_0). \\ s_i(g_{n-1}, \dots, g_0) &= (s_{i-1} g_{n-1}, \dots, s_0 g_{n-i}, Id, g_{n-i-1}, \dots, g_0), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Mostraremos a continuación que la estructura de modelos de la categoría  $\mathbf{Gd}$  está completamente determinada por la correspondiente estructura de  $\mathbf{SS}$  y el funtor adjunto a derecha,  $\bar{W}$ , según se enuncia en la siguiente Proposición.

**Proposición 2.1.IV.1.**

i) Un morfismo en  $\mathbf{Gd}$ ,  $f.: X. \longrightarrow Y.$ , es una equivalencia débil si y solamente si  $\bar{W}f.$  es equivalencia débil de conjuntos simpliciales.

ii) Un morfismo en  $\mathbf{Gd}$ ,  $p.: E. \longrightarrow B.$ , es una fibración si y solamente si  $\bar{W}p.$  es fibración en  $\mathbf{SS}$ .

**Demostración.**

Que  $\bar{W}$  preserva fibraciones y equivalencias débiles fue probado por Dwyer y Kan en [22] en donde se demuestra igualmente que  $G$  preserva equivalencias débiles así como que un morfismo de conjuntos simpliciales  $K. \longrightarrow \bar{W}X$  es equivalencia débil si y solamente si el correspondiente morfismo en  $\mathbf{Gd}$  vía la adjunción,  $GK. \longrightarrow X$ , es equivalencia débil, para cada  $K. \in \mathbf{SS}$ ,  $X \in \mathbf{Gd}$ .

Este último hecho determina, en particular, que la counidad de la anterior adjunción sea una equivalencia débil, es decir, si notamos por  $\varphi: \text{Hom}_{\mathbf{SS}}(G., \_) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Gpd}}(\_, \bar{W}.)$  la biyección definida por la anterior adjunción, la counidad  $\varepsilon_X: G\bar{W}X \longrightarrow X$  será equivalencia débil de  $\mathbf{Gd}$  si y solamente si lo es su morfismo adjunto  $\varphi(\varepsilon_X): \bar{W}X \longrightarrow \bar{W}X$ .

Usando entonces la definición de la counidad, (ver [24]),

$$(\varepsilon_X)_n(\overline{g_n, \dots, g_0}) = g_n, \quad n \geq 0,$$

su morfismo adjunto, definido de forma general en dimensión  $n+1$  como

$$\varphi(\varepsilon_X)_{n+1}(g_n, \dots, g_0) =$$



$$= \left( (\varepsilon_X)_n \overline{(g_n, \dots, g_0)}, (\varepsilon_X)_{n-1} \overline{d_0(g_n, \dots, g_0)}, \dots, (\varepsilon_X)_0 \overline{d_0^n(g_n, \dots, g_0)} \right)$$

resulta ser la identidad, por definición del morfismo cara  $d_0$ , esto es,

$$\varphi(\varepsilon_X)_{n+1}(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0) = (g_n, g_{n-1}, \dots, g_0).$$

En definitiva se tiene que la counidad  $\varepsilon_X: G\bar{W}X \longrightarrow X$  es equivalencia débil de **Gd**.

Probemos pues que si un morfismo  $\bar{W}f: \bar{W}X \longrightarrow \bar{W}Y$  es equivalencia débil en **SS**, entonces lo es el morfismo  $f: X \longrightarrow Y$  en **Gd**.

Considerando para ello cualquier equivalencia débil de conjuntos simpliciales de la forma  $\bar{W}f: \bar{W}X \longrightarrow \bar{W}Y$ , puesto que el funtor  $G$  las preserva,  $G\bar{W}f: G\bar{W}X \longrightarrow G\bar{W}Y$  es de nuevo equivalencia débil en **Gd**. El siguiente diagrama (naturalidad de la counidad):

$$\begin{array}{ccc} G\bar{W}X & \xrightarrow{G\bar{W}f} & G\bar{W}Y \\ \varepsilon_X \downarrow & & \downarrow \varepsilon_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

prueba entonces, por **CM2**, que el morfismo  $f$  es una equivalencia débil de grupoides simpliciales ya que la counidad de la adjunción, como acabamos de demostrar, lo es. En consecuencia, el funtor  $\bar{W}$  refleja equivalencias débiles.

A continuación probaremos que el funtor  $\bar{W}$  refleja fibraciones. Para ello, sea  $\bar{W}p: \bar{W}E \longrightarrow \bar{W}B$  una fibración de **SS**, donde dicho morfismo puede describirse gráficamente como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \text{Mor}E_2 \times \text{Mor}E_1 \times \text{Mor}E_0 & \rightrightarrows & \text{Mor}E_1 \times \text{Mor}E_0 & \rightrightarrows & \text{Mor}E_0 & \xrightarrow[t]{s} \text{Obj}(E) \\
& \bar{W}_3 p \downarrow & & \bar{W}_2 p \downarrow & & \bar{W}_1 p \downarrow & & p \downarrow \\
\dots & \text{Mor}B_2 \times \text{Mor}B_1 \times \text{Mor}B_0 & \rightrightarrows & \text{Mor}B_1 \times \text{Mor}B_0 & \rightrightarrows & \text{Mor}B_0 & \xrightarrow[t]{s} \text{Obj}(B)
\end{array}$$

con la adecuada aclaración de la notación, es decir, recordando, según se expresa explícitamente en la definición, que un  $n$ -símplice de  $\bar{W}E$  (análogamente  $\bar{W}B$ ) no sólo es un elemento de  $\text{Mor}E_{n-1} \times \dots \times \text{Mor}E_0$ ,  $(g_{n-1}, \dots, g_0)$ , sino que además debe verificar la relación  $s(g_i) = t(g_{i+1})$ .

Es evidente, pues, por ser  $\bar{W}p$  una fibración de Kan y  $\bar{W}_0 p = p$ , que se verifica la primera condición para que  $p: E \longrightarrow B$  sea una fibración de grupoides simpliciales. Veamos que también se verifica la segunda: para  $A$  cualquier objeto del grupoide simplicial  $E$  demostraremos que el morfismo inducido por  $p$ ,

$$\text{Hom}_E(A, A) \longrightarrow \text{Hom}_B(pA, pA),$$

es una fibración de grupos simpliciales, probando equivalentemente que el inducido en los correspondientes complejos de Moore

$$N_n[\text{Hom}_E(A, A)] \longrightarrow N_n[\text{Hom}_B(pA, pA)]$$

es sobreyectivo, para  $n > 0$  (Capítulo 1, Proposición 1.1.IV.2.).

Sea, pues,  $y \in N_n[\text{Hom}_B(pA, pA)]$ , es decir,  $y \in \text{Mor}(B_n)$  tal que  $s(y) = t(y) = pA$  y  $d_i y = \text{Id}_{pA}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ . Construimos entonces el siguiente  $(n+1)$ -símplice de  $\bar{W}B$ ,  $(y, \text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}^{(n)})$ , y aplicaremos la condición de fibración de Kan para  $\bar{W}p$  a dicho elemento y a la siguiente colección de  $(n+1)$   $n$ -símplices compatibles de  $\bar{W}E$ ,



$$\begin{pmatrix} \text{Id}_A & \dots & \text{Id}_A \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Id}_A & \dots & \text{Id}_A \end{pmatrix}_{(n+1) \times n}$$

toda vez que comprobemos que se verifica

$$d_i(y, \text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}) = \bar{W}_n p(\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A) \text{ para } i=0, \dots, n, i \neq n+1.$$

En efecto, según la definición de los morfismos cara para  $\bar{W}$ , se tiene

$$d_0(y, \text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}) = (\text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}) = \bar{W}_n p(\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A),$$

$$\begin{aligned} d_i(y, \text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}) &= (d_{i-1}y, \dots, d_0 \text{Id}_{pA} \cdot \text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}) = \\ &= \bar{W}_n p(\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A) \end{aligned}$$

ya que, puesto que  $y \in N_n[\text{Hom}_B(pA, pA)]$ , se verifica que  $d_i y = \text{Id}_{pA}$  para  $i=0, \dots, n-1$ .

Por definición de fibración de Kan, existe entonces  $(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0) \in \bar{W}_{n+1} E$  verificando las siguientes condiciones:

$$i) \begin{cases} d_0(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0) = (\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A) \\ d_i(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0) = (\text{Id}_A, \dots, \text{Id}_A), \quad 1 \leq i \leq n, i \neq n+1, \quad y \end{cases}$$

$$ii) \bar{W}_{n+1}(p)(g_n, g_{n-1}, \dots, g_0) = (y, \text{Id}_{pA}, \dots, \text{Id}_{pA}).$$

En particular, de la segunda condición,  $p_n(g_n) = y$ . De la primera, de la definición de  $d_0$ , se tiene que  $g_i = \text{Id}_A$ , para  $i=0, \dots, n-1$ , y de la correspondiente definición de  $d_i$  para  $1 \leq i \leq n, i \neq n+1$ ,

$$d_i(g_n, Id_A, \dots, Id_A) = (d_{i-1}g_n, Id_A, \dots, Id_A) = (Id_A, \dots, Id_A)$$

se tiene que  $d_j g_n = Id_A$  para  $j=0, \dots, n-1$ .

Queda entonces por comprobar que  $g_n \in Mor(E_n)$  es en realidad un elemento de  $Hom_E(A, A)$ . Efectivamente, teniendo en cuenta que  $(g_n, Id_A, \dots, Id_A) \in \bar{W}_{n+1} E$ , se tiene que  $t(g_n) = s(Id_A) = A$ . En cuanto al dominio, considerando la obligada regla de conmutación en el grupoide simplicial  $E$

$$\begin{array}{ccc} \dots E_n & \xrightleftharpoons[d_n]{d_0} & E_{n-1} \dots \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \dots Obj(E) & \xrightarrow{Id} & Obj(E) \dots \end{array}$$

se tiene que  $Ids(g_n) = s(g_n) = s(d_0(g_n)) = s(Id_A) = A$ , puesto que se ha demostrado que  $d_j g_n = Id_A$  para  $j=0, \dots, n-1$ , y en particular, para  $j=0$ . En definitiva, existe  $g_n \in N_n[Hom_E(A, A)]$  tal que  $p_n(g_n) = y$ , y por tanto que el morfismo

$$N_n[Hom_E(A, A)] \longrightarrow N_n[Hom_B(pA, pA)]$$

es sobreyectivo, para  $n > 0$ , lo que concluye la demostración. ■



## 2.2. LEVANTANDO ESTRUCTURAS DE MODELOS DESDE $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Abordamos en esta sección el problema general, anunciado anteriormente, de obtener una estructura de modelos de Quillen en una categoría  $\underline{\mathcal{C}}$ , conectada con  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  por una situación de adjunción, que sea la "levantada" de la  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  en el sentido de estar determinada por ella y por la adjunción en sí.

En todo el desarrollo que se expondrá a continuación,  $\underline{\mathcal{C}}$  denotará una categoría cerrada bajo límites y colímites finitos, relacionada con  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  mediante una adjunción:

$$(A) \quad \underline{\mathcal{C}} \begin{array}{c} \xleftarrow{L} \\ \xrightarrow{R} \end{array} \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

donde  $L$  es el funtor adjunto a izquierda al funtor  $R$ . Para esta adjunción,

$$\varphi: \text{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(\text{LG.}, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(\text{G.}, \text{RX})$$

denotará la biyección correspondiente.

Proponemos entonces para  $\underline{\mathcal{C}}$  las siguientes clases de morfismos distinguidos:

### Definición 2.2.1.

Un morfismo  $f$  en  $\underline{\mathcal{C}}$  es una fibración si  $Rf$  es una fibración de grupos simpliciales, esto es, una fibración de Kan.

Un morfismo  $f$  en  $\underline{\mathcal{C}}$  es una equivalencia débil si  $Rf$  es equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , esto es, si  $Rf$  induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.

Finalmente, un morfismo  $f$  en  $\underline{C}$  es una cofibración si tiene la propiedad de levantamiento por la izquierda (LLP) con respecto a las fibraciones triviales.

A partir de ellas, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.2.**

Para todo morfismo en  $\underline{C}$ ,  $f$ , se verifica:

- i) El funtor  $L: \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \longrightarrow \underline{C}$  preserva cofibraciones.
- ii)  $f$  es una fibración en  $\underline{C}$  si y solamente si  $f$  tiene la RLP con respecto a la familia de morfismos

$$L\Delta[s, k] \longrightarrow L\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0.$$

- iii)  $f$  es una fibración trivial si y solamente si  $f$  tiene la RLP con respecto a la familia de morfismos

$$L\Delta[s] \longrightarrow L\Delta[s], \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

- iv) Si  $A \longrightarrow B$  es una cofibración en  $\underline{C}$  y  $A \longrightarrow C$  es cualquier morfismo en  $\underline{C}$ , entonces el morfismo inducido en el pushout  $C \longrightarrow B \amalg_A C$  es una cofibración.

- v) Si  $C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \dots$  es una sucesión de cofibraciones en  $\underline{C}$ , el morfismo canónico  $C_0 \longrightarrow C_\infty = \varinjlim C_n$  es una cofibración.

**Demostración.**

- i) Siendo  $i.: G. \longrightarrow H.$  cualquier cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $Li.$  es cofibración en  $\underline{C}$  si tiene la LLP con respecto a cualquier fibración trivial  $p: E \longrightarrow B$  de  $\underline{C}$ . Por definición,  $Rp$  es de nuevo fibración trivial en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y por tanto i) es consecuencia de la correspondencia biyectiva, inducida por la adjunción (A) entre diagramas en  $\underline{C}$  del tipo



$$\begin{array}{ccc}
 & \text{LG.} & \longrightarrow & \text{E} \\
 \text{Li.} & \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{p} \\
 & \text{LH.} & \longrightarrow & \text{B}
 \end{array}$$

y diagramas en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{G.} & \longrightarrow & \text{RE} \\
 \text{i.} & \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{Rp} \\
 & \text{H.} & \longrightarrow & \text{RB}
 \end{array}$$

Las afirmaciones ii) y iii) se obtienen directamente de las Proposiciones 1.1.IV.2. y 1.1.IV.3. (ver Capítulo 1) y de la mencionada correspondencia biyectiva entre diagramas de  $\underline{\mathbf{C}}$  y de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  inducida por la adjunción (A). Veámoslo para las fibraciones:

$f: X \longrightarrow Y$  es fibración en  $\underline{\mathbf{C}}$  si y solamente si  $Rf: RX \longrightarrow RY$  es fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  si y solamente si (Proposición 1.1.IV.2.)  $Rf$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$ , es decir, existe levantamiento  $D$  en cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 F\Delta[s,k] & \longrightarrow & RX \\
 \downarrow & \nearrow D & \downarrow \text{Rf} \\
 F\Delta[s] & \longrightarrow & RY \quad , \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,
 \end{array}$$

lo cual es equivalente, vía la biyección  $\varphi$  de la adjunción (A), a la existencia de levantamiento para diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 \text{L}\Delta[s,k] & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \varphi^{-1} & \nearrow (D)^\# & \downarrow f \\
 \text{L}\Delta[s] & \longrightarrow & Y
 \end{array}
 , \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,$$

lo que equivale a que  $f$  tenga la propiedad de levantamiento por la derecha (RLP) con respecto a  $\text{L}\Delta[s,k] \longrightarrow \text{L}\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$ .

Un argumento análogo, usando la caracterización dada en la Proposición 1.1.IV.3. para fibraciones triviales en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , demuestra finalmente iii).

iv) El morfismo inducido en el pushout,  $C \longrightarrow B \amalg_A C$ , es una cofibración si tiene la LLP con respecto a cualquier fibración trivial  $p: E \longrightarrow B$  en  $\underline{\mathcal{C}}$ . Consideremos, pues, cualquier diagrama conmutativo de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 B \amalg_A C & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

para el que buscamos un levantamiento  $d: B \amalg_A C \longrightarrow E$ . Este diagrama puede completarse mediante el diagrama pushout dado originalmente, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & B \amalg_A C & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

donde  $A \longrightarrow B$  es cofibración por hipótesis.



Por definición de cofibración, existe un levantamiento,  $d': B \longrightarrow E$ ; dicho morfismo, junto con el dado originalmente  $C \longrightarrow E$ , proporciona, por la propiedad universal del pushout, el levantamiento  $d: B \amalg_A C \longrightarrow E$  que demuestra que  $C \longrightarrow B \amalg_A C$  es una cofibración.

v) Un argumento completamente análogo al dado en iv), basado en este caso en la propiedad universal de los límites directos, demuestra entonces v). ■

Recordemos en este punto que una familia de objetos  $\{A_i\}$  en una categoría  $\underline{C}$  se dice que es **secuencialmente pequeña** si

$$\text{Hom}_{\underline{C}}(A_n, \lim_{\longrightarrow m} B) \cong \lim_{\longrightarrow} \text{Hom}_{\underline{C}}(A_n, B_m)$$

para todo sistema directo  $\{B_m\}$ .

Se tiene entonces el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.3.**

Si el funtor  $R: \underline{C} \longrightarrow \text{Simp}(\text{Gp})$  preserva límites directos, se tiene:

i) Las familias de objetos de  $\underline{C}$   $\{L\Delta[s, k]\}_{0 \leq k \leq s, s > 0}$  y  $\{L\Delta[s]\}_{s \geq 0}$  son secuencialmente pequeñas.

ii) Para cualquier sucesión de equivalencias débiles en  $\underline{C}$ ,  $C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \dots$ , el morfismo canónico  $C_0 \longrightarrow C_\infty = \lim_{\longrightarrow n} C_n$  es una equivalencia débil.

**Demostración.**

i) Es bien conocido que las familias de grupos simpliciales  $F\Delta[s, k]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$ , y  $F\Delta[s]$ ,  $s \geq 0$ , son secuencialmente pequeñas (ver [48]).

Usando entonces la adjunción y el hecho de que R preserva límites directos, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\underline{C}}(\text{LF}\Delta[s,k], \varinjlim B_m) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(\text{F}\Delta[s,k], \varinjlim B_m) \cong \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(\text{F}\Delta[s,k], \varinjlim RB_m) \cong \varinjlim \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(\text{F}\Delta[s,k], RB_m) \cong \\ &\cong \varinjlim \text{Hom}_{\underline{C}}(\text{LF}\Delta[s,k], B_m). \end{aligned}$$

Con el mismo argumento, sustituyendo  $\text{F}\Delta[s,k]$  por  $\text{LF}\Delta[s]$ , se prueba que la familia  $\{\text{LF}\Delta[s]\}_{s \geq 0}$ , es secuencialmente pequeña.

ii) Por hipótesis, R preserva límites directos, es decir,  $\text{RC}_\infty \cong \varinjlim \text{RC}_i$ . Por otra parte, es conocido que en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  los grupos de homotopía de un límite directo son el límite directo de los grupos de homotopía (ver [52]).

Suponiendo pues que cada morfismo en  $\underline{C}$ ,  $C_i \longrightarrow C_{i+1}$  es equivalencia débil, se tiene por definición que cada  $\text{RC}_i \longrightarrow \text{RC}_{i+1}$  es equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , esto es, el correspondiente morfismo inducido en los grupos de homotopía,  $\Pi_k(\text{RC}_i) \longrightarrow \Pi_k(\text{RC}_{i+1})$ , es isomorfismo,  $k \geq 0$ .

Por la propiedad universal del límite directo de esta familia de isomorfismos,

$$(\varinjlim \Pi_k(\text{RC}_i), s_k^i: \Pi_k(\text{RC}_i) \longrightarrow \varinjlim \Pi_k(\text{RC}_i))$$

aplicada al par  $(\Pi_k(\text{RC}_0), t_k^i: \Pi_k(\text{RC}_i) \longrightarrow \Pi_k(\text{RC}_0))$ , donde cada morfismo  $t_k^i: \Pi_k(\text{RC}_i) \longrightarrow \Pi_k(\text{RC}_0)$  se define como la siguiente composición,

$$t_k^i: \Pi_k(\text{RC}_i) \longrightarrow \Pi_k(\text{RC}_{i-1}) \longrightarrow \Pi_k(\text{RC}_{i-2}) \longrightarrow \dots \Pi_k(\text{RC}_0),$$



de morfismos inversos de los isomorfismos  $\Pi_k(RC_i) \longrightarrow \Pi_k(RC_{i+1})$ ,  $k \geq 0$ , se tiene que  $\Pi_k(RC_0) \longrightarrow \Pi_k(RC_\infty)$  es isomorfismo para  $k \geq 0$ .

El morfismo  $C_0 \longrightarrow C_\infty$  es, pues, una equivalencia débil en  $\underline{C}$ . ■

Enunciamos en la siguiente Proposición condiciones que aseguran un buen comportamiento de la adjunción (A) con respecto al uso de diagramas pushouts en  $\underline{C}$ .

**Proposición 2.2.4.**

Si el funtor  $L: \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \longrightarrow \underline{C}$  preserva equivalencias débiles y la counidad de la adjunción (A),  $\varepsilon_C: LRC \longrightarrow C$  es un isomorfismo para todo objeto  $C$  de  $\underline{C}$ , entonces, dado cualquier diagrama pushout en  $\underline{C}$

$$\begin{array}{ccc} LG. & \xrightarrow{h} & B \\ Lf. \downarrow & & \downarrow g \\ LH. & \longrightarrow & Q \end{array}$$

si  $f.$  es una cofibración trivial en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $g$  es una cofibración trivial en  $\underline{C}$ .

**Demostración.**

Nótese en primer lugar que, por la Proposición 2.2.2., i) y iv),  $g$  es una cofibración en  $\underline{C}$ . La demostración de este resultado se reduce, pues, a probar que  $g$  es equivalencia débil.

Para ello, consideremos el siguiente diagrama pushout en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ :

$$\begin{array}{ccc} G. & \xrightarrow{\varphi(h)} & RB \\ f. \downarrow & & \downarrow \\ H. & \longrightarrow & P. \end{array} ,$$

en el que se observa que, por ser  $f$ . una cofibración trivial, por el axioma M4 de una categoría de modelos cerrada (ver Capítulo 1, Definición 1.1.1.), el morfismo  $RB \longrightarrow P$ . es una equivalencia débil y en consecuencia lo es  $LRB \longrightarrow LP$ ., ya que el funtor  $L$  las preserva.

Consideremos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{LG.} \xrightarrow{L\varphi(h)} \text{LRB} \xrightarrow{\varepsilon_B} \text{B} & & \\
 \text{Lf.} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{g} \\
 & & \text{LH.} \longrightarrow \text{LP.} \longrightarrow \text{Q} & & 
 \end{array}$$

en el cual, el cuadrado de la izquierda es un diagrama pushout por ser el funtor  $L$  adjunto a izquierda. Es claro entonces que, por ser  $\varepsilon_B$  un isomorfismo, se tiene  $LP. \cong Q$  y en consecuencia,  $g$  es equivalencia débil de  $C$ . ■

La Proposición anterior permite entonces probar el que será el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.2.5.**

Para la adjunción general (A), supongamos que el funtor  $L$  preserva equivalencias débiles,  $R$  preserva límites directos y la counidad de la adjunción,  $\varepsilon_C$ , es un isomorfismo, para todo objeto  $C$  de  $\underline{C}$ . Entonces la categoría  $\underline{C}$  es una categoría de modelos cerrada con las definiciones propuestas en 2.2.1.

**Demostración.**

El axioma **CM1** se verifica por hipótesis, y **CM2** es consecuencia de la definición de equivalencia débil y del hecho de que dicho axioma se verifica en **Simp(Gp)** por ser una categoría de modelos cerrada.



En efecto, si  $f$  y  $g$  son dos morfismos en  $\underline{C}$  para los que existe su composición,  $gf$ , supongamos que dos de los tres morfismos  $\{f, g, gf\}$  son equivalencias débiles en  $\underline{C}$ , lo que equivale, por definición, a que dos de los tres morfismos  $\{Rf, Rg, R(gf)=RfRg\}$  sean equivalencias débiles en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  donde lo es, por tanto, el tercero.

Se tiene pues, de nuevo por definición, que el axioma **CM2** se verifica en  $\underline{C}$ .

En cuanto al axioma **CM3**, supongamos que un morfismo  $f$  en  $\underline{C}$  es retracto de una fibración  $g$  (respectivamente equivalencia débil) en  $\underline{C}$ , esto es, existe un diagrama del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{r} \end{array} & W \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \xleftarrow{s} \end{array} & Z
 \end{array}$$

para el que se verifica  $fr=sg$ ,  $gi=jf$ ,  $ri=Id_X$  y  $sj=Id_Y$ .

$Rf$  es entonces retracto de la fibración  $Rg$  (resp. equivalencia débil) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y por tanto  $Rf$  es fibración (resp. equivalencia débil). Por definición,  $f$  es pues fibración (resp. equivalencia débil) en  $\underline{C}$ .

En lo referido a las cofibraciones, supongamos, para dos morfismos  $f$  y  $g$  en  $\underline{C}$  que  $f$  es retracto de  $g$ , donde  $g$  es cofibración. Para demostrar que  $f$  es cofibración, por definición, veamos que tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Considérese para ello cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{a} & E \\
 f \downarrow & & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{b} & B
 \end{array}$$

con  $p$  cualquier fibración trivial en  $\underline{C}$ , a partir del cual construimos el siguiente, también conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{ar} & E \\
 g \downarrow & \nearrow D & \downarrow p \\
 Z & \xrightarrow{bs} & B
 \end{array}$$

Para este último, existe, por ser  $g$  cofibración, un levantamiento  $D:Z \longrightarrow E$  tal que  $pD=bs$  y  $Dg=ar$ . El correspondiente levantamiento para el diagrama original está entonces dado por la composición  $Dj:Y \longrightarrow E$  ya que

$$\begin{aligned}
 pDj &= (pD)j = (bs)j = b(sj) = bId_Y = b, \quad y \\
 Djf &= D(jf) = D(gi) = (Dg)i = (ar)i = a(ri) = aId_X = a.
 \end{aligned}$$

Demostramos a continuación los axiomas de factorización, **CM5**, y levantamiento, **CM4**, en este orden:

**CM5.** (Axioma de factorización)

Comencemos probando la factorización de cualquier morfismo  $f:X \longrightarrow Y$  de  $\underline{C}$  en cofibración trivial y fibración. Para ello, considérense todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(1) \quad \begin{array}{ccc}
 L\Delta[s,k] & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \lambda & \downarrow f \\
 L\Delta[s] & \longrightarrow & Y
 \end{array} \quad \text{para } 0 \leq k \leq s \text{ y } s > 0,$$



que conformarán el conjunto de índices sobre el que se indizan todos los coproductos que aparecen a continuación, indicándose en cualquier caso cuándo cambia dicho conjunto de índices.

Demostraremos en primer lugar que los siguientes morfismos,

$$\coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] \longrightarrow \coprod_{\lambda} F\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,$$

inducidos por los morfismos de grupos simpliciales

$$F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,$$

en los correspondientes coproductos, son cofibraciones triviales en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Nótese que, por el axioma de levantamiento, **CM4**, en una categoría de modelos cerrada, en este caso  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , un morfismo es cofibración trivial si y solamente si tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones. Consideremos pues cualquier diagrama conmutativo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ \coprod_{\lambda} F\Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B., \quad \text{para } 0 \leq k \leq s \text{ y } s > 0, \end{array}$$

donde  $p.$  es cualquier fibración.

Ampliando este diagrama vía las inyecciones canónicas a los correspondientes coproductos, se tiene de nuevo un diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc}
 F\Delta[s,k] & \longrightarrow & \coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] & \xrightarrow{a.} & E. \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p. \\
 F\Delta[s] & \longrightarrow & \coprod_{\lambda} F\Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B.
 \end{array}$$

para el que existe levantamiento,  $D.:F\Delta[s] \longrightarrow E.$ , por ser los morfismos  $F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s]$  cofibraciones triviales (ver Capítulo 1, Proposición 1.1.IV.2). Este morfismo simplicial induce, por la propiedad universal del coproducto, el correspondiente levantamiento  $d.: \coprod_{\lambda} F\Delta[s] \longrightarrow E.$  que demuestra que el morfismo

$$\coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] \longrightarrow \coprod_{\lambda} F\Delta[s]$$

es cofibración trivial de grupos simpliciales.

Una vez probado esto, construimos el siguiente diagrama pushout en  $\underline{C}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 L(\coprod_{\lambda} F\Delta[s,k]) = \coprod_{\lambda} LF\Delta[s,k] & \xrightarrow{h} & X & & \\
 \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow f \\
 L(\coprod_{\lambda} F\Delta[s]) = \coprod_{\lambda} LF\Delta[s] & \xrightarrow{\alpha_0} & X_0 & \xrightarrow{p_0} & Y \\
 & & \downarrow t & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

para el cual es claro que el morfismo  $i_0: X \longrightarrow X_0$  es una cofibración trivial en  $\underline{C}$ , por aplicación de la Proposición 2.2.4. ya que, como se ha probado anteriormente, los morfismos  $\coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] \longrightarrow \coprod_{\lambda} F\Delta[s]$  son cofibraciones triviales de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y el funtor  $L$ , en calidad de adjunto a izquierda, preserva coproductos.



Además, por la propiedad universal del pushout, demostraremos que dicho morfismo tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones de  $\underline{C}$ .

Para ello, consideramos el siguiente diagrama conmutativo en  $\underline{C}$ :

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{\lambda} L\Delta[s,k] & \longrightarrow & X & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow p \\ \coprod_{\lambda} L\Delta[s] & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & B \end{array}$$

construido a partir de cualquier diagrama conmutativo dado

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X_0 & \longrightarrow & B \end{array}$$

con  $p:E \longrightarrow B$  una fibration. El levantamiento para este diagrama está definido como el morfismo inducido, por la propiedad universal del pushout, por el levantamiento que existe para el diagrama anterior, cuya existencia está justificada considerando equivalentemente la existencia de levantamiento en el diagrama adjunto en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] & \longrightarrow & RE \\ \downarrow & & \downarrow R_p \\ \coprod_{\lambda} F\Delta[s] & \longrightarrow & RB \end{array}$$

en el que  $R_p$  es fibration de Kan y los morfismos  $\coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] \longrightarrow \coprod_{\lambda} F\Delta[s]$  cofibraciones triviales.

Se tiene pues que el morfismo de  $\underline{C} \ i_0: X \longrightarrow X_0$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones.

Por otra parte, inducido por los morfismos  $i_0$  y  $\alpha_0$ , existe un único morfismo  $p_0: X_0 \longrightarrow Y$  verificando  $p_0 i_0 = f$  y  $p_0 \alpha_0 = t$ , donde  $t$  es el morfismo inducido en el coproducto por el morfismo dado  $L\Delta[s] \longrightarrow Y$  al igual que el morfismo  $h: \coprod_{\lambda} L\Delta[s, k] \longrightarrow X$  es el correspondiente inducido por el morfismo dado  $L\Delta[s, k] \longrightarrow X$ , en ambos casos en los diagramas (1).

Aplicamos toda esta construcción para el nuevo morfismo obtenido  $p_0: X_0 \longrightarrow Y$ , es decir, se consideran todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} L\Delta[s, k] & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & \lambda_0 & \downarrow p_0 \\ L\Delta[s] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad , \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,$$

como conjunto de índices para los coproductos que se consideran en el siguiente diagrama pushout:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda} L\Delta[s, k] & \xrightarrow{h_0} & X_0 \\ \lambda_0 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ \coprod_{\lambda} L\Delta[s] & \xrightarrow{\alpha_1} & X_1 \\ \lambda_0 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ & & Y \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{p_0} \\ \xrightarrow{t_0} \end{array}$$

del cual se obtiene un nuevo objeto  $X_1$  y un nuevo morfismo  $p_1: X_1 \longrightarrow Y$  por la propiedad universal del diagrama pushout.



De este modo se obtiene una nueva factorización del morfismo dado originalmente  $f = p_0 i_0 = (p_1 i_1) i_0$ , donde el morfismo  $i_1: X_0 \longrightarrow X_1$  es, por la Proposición 2.2.4., una cofibración trivial en  $\underline{C}$  por el mismo razonamiento usado para probar que lo es  $i_0: X \longrightarrow X_0$ . Análogamente, el morfismo  $i_1$  tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones.

Iteramos esta construcción un número contable de veces, es decir, habiendo obtenido el objeto  $X_m$  de  $\underline{C}$  y considerando todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(m) \quad \begin{array}{ccc} \text{LFA}[s,k] & \longrightarrow & X_m \\ \downarrow & \lambda_m & \downarrow p_m \\ \text{LFA}[s] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{para } 0 \leq k \leq s \text{ y } s > 0,$$

el objeto  $X_{m+1}$ , así como los morfismos  $i_{m+1}: X_m \longrightarrow X_{m+1}$  y  $p_{m+1}: X_{m+1} \longrightarrow Y$ , están definidos por el siguiente diagrama pushout:

$$\begin{array}{ccccc} \coprod \text{LFA}[s,k] & \xrightarrow{h_m} & X_m & & \\ \lambda_m \downarrow & & \downarrow i_{m+1} & & \downarrow p_m \\ \coprod \text{LFA}[s] & \xrightarrow{\alpha_{m+1}} & X_{m+1} & & \\ \lambda_m \downarrow & & \downarrow p_{m+1} & & \\ & & & & Y \\ & \xrightarrow{t_m} & & & \end{array}$$

De esta forma, se obtiene una sucesión de objetos en  $\underline{C}$ ,  $\{X_m\}$ , con  $X = X_{-1}$ , y de morfismos  $\{p_m: X_m \longrightarrow Y\}$ , con  $f = p_{-1}$ , teniéndose en consecuencia un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 & \xrightarrow{i_2} & \dots \longrightarrow X_m \xrightarrow{i_{m+1}} \dots \\
 \downarrow & & p_0 & & p_1 & & p_m \\
 Y & & & & & & 
 \end{array}$$

en el que  $p_m i_m = i_{m-1}$  y cada morfismo  $i_m$  es una cofibración trivial que tiene, adicionalmente, la LLP con respecto a las fibraciones, tal y como se ha demostrado anteriormente.

Sea entonces  $X_\infty = \varinjlim X_m$  é  $i: X \longrightarrow X_\infty$  el morfismo canónico. Dicho morfismo es una cofibración trivial por las Proposiciones 2.2.2.v) y 2.2.3.ii).

Por otra parte, el morfismo  $i: X \longrightarrow X_\infty$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones de  $\underline{C}$  como consecuencia, vía la propiedad universal de los límites directos, de que cada uno de los morfismos  $i_m: X_{m-1} \longrightarrow X_m$  la tiene.

Consideremos entonces el límite directo de la familia de objetos  $X_m$  en  $\underline{C}$ ,  $(X_\infty = \varinjlim X_m, r_m: X_m \longrightarrow X_\infty)$  y el par  $(Y, p_m: X_m \longrightarrow Y)$  para el que se tiene que  $p_m i_m = i_{m-1}$ . Por la propiedad universal del límite directo, existe pues un morfismo  $p: X_\infty \longrightarrow Y$  verificando que  $pr_m = p_m$ . Este hecho determina que se tenga la factorización del morfismo dado inicialmente  $f$  como  $f=pi$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 X & \longrightarrow & Y \\
 & i & p \\
 & X_\infty & 
 \end{array}$$

como demostramos a continuación:



$$\begin{aligned}
p_i &= p(r_{m,m} i_{m-1} \dots i_0) = \\
&= (pr_m) i_{m-1} \dots i_0 = \\
&= (p_{m,m} i_{m-1} \dots i_0) = \\
&= (p_{m-1,m-1} i_{m-1} \dots i_0) = \dots = \\
&= p_0 i_0 = \\
&= f.
\end{aligned}$$

Puesto que se ha probado que  $i$  es una cofibración trivial, sólo resta probar que el morfismo  $p: X_\infty \longrightarrow Y$  es una fibración. Para ello, de acuerdo con la Proposición 2.2.2.ii), demostraremos que  $p$  tiene la RLP con respecto a la familia de morfismos  $L\Delta[s,k] \longrightarrow L\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$ .

Tomemos para ello cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
L\Delta[s,k] & \xrightarrow{a} & X_\infty \\
\downarrow & & \downarrow p \\
L\Delta[s] & \xrightarrow{b} & Y
\end{array}$$

en el cual, puesto que los objetos  $L\Delta[s,k]$  son secuencialmente pequeños por la Proposición 2.2.3.i), el morfismo  $a: L\Delta[s,k] \longrightarrow X_\infty$  factoriza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
L\Delta[s,k] & \xrightarrow{a} & X_\infty \\
\searrow \gamma & & \nearrow r_m \\
& & X_m
\end{array}$$

El levantamiento buscado para el diagrama dado inicialmente, está entonces definido por la composición

$$L\Delta[s] \longrightarrow \coprod_{\lambda_m} L\Delta[s] \xrightarrow{\alpha_{m+1}} X_{m+1} \xrightarrow{\Gamma_{m+1}} X_\infty$$

tal y como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{L}\Delta[s, k] & \xrightarrow{a} & X_{\infty} \\
 \downarrow & \begin{array}{c} \gamma \\ \Downarrow \text{L}\Delta[s, k] \rightarrow X_{m+1} \\ \lambda_m \downarrow \\ \Downarrow \text{L}\Delta[s] \\ \lambda_m \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow r_{m+1} \\ \alpha_{m+1} \\ \downarrow p \end{array} \\
 \text{L}\Delta[s] & \xrightarrow[\text{b}]{\lambda_m \quad t_m} & Y
 \end{array}$$

Para demostrar que la composición propuesta es levantamiento para el diagrama dado, nótese que cada uno de los subdiagramas que componen el diagrama total son conmutativos por cómo han sido obtenidos. Este es también el caso de los subdiagramas

$$(S_1) \quad \begin{array}{ccc}
 & \Downarrow \text{L}\Delta[s] & \\
 \text{L}\Delta[s] & \xrightarrow[\text{b}]{t_m} & Y
 \end{array}$$

y

$$(S_2) \quad \begin{array}{ccc}
 \text{L}\Delta[s, k] & \xrightarrow{\gamma} & X_{m+1} \\
 & & \begin{array}{c} i_{m+1} \quad h_m \\ \Downarrow \text{L}\Delta[s, k] \end{array}
 \end{array}$$

cuya conmutatividad está determinada por el hecho de ser conmutativo el diagrama construido a partir del morfismo  $\gamma$  obtenido anteriormente, que recordamos, es el siguiente:



$$\begin{array}{ccc}
 \text{L}\Delta[s, k] & \xrightarrow{\gamma} & X_m \\
 \downarrow & & \downarrow p_m \\
 \text{L}\Delta[s] & \xrightarrow{b} & Y
 \end{array}$$

Este último es uno de los diagramas sobre los que se indizan los coproductos para obtener el objeto  $X_{m+1}$ , y por tanto, dado que los morfismos  $h_m$  y  $t_m$  se definieron, a partir de la propiedad universal del coproducto, como los inducidos por morfismos dados en un cierto conjunto de diagramas conmutativos  $-(m)-$  al cual pertenecen  $h_m$  y  $t_m$ , se tiene que  $(S_1)$  y  $(S_2)$  son conmutativos.

En definitiva, el morfismo  $p$  es una fibración de  $\underline{C}$ , con lo queda demostrada la primera parte del axioma de factorización **CM5**.

En lo referido a la factorización de cualquier morfismo  $g: Z \longrightarrow W$  de  $\underline{C}$  en cofibración y de fibración trivial, utilizamos el mismo proceso empleado en la anterior factorización, partiendo en este caso de todos los diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 \text{L}\Delta[s] & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & \mu & \downarrow g \\
 \text{L}\Delta[s] & \longrightarrow & W \quad , \quad s \geq 0.
 \end{array}$$

Así, por misma construcción basada en diagramas pushout, se tiene una familia de objetos de  $\underline{C}$ ,  $\{Z_m\}$  con  $Z_{-1} = Z$ , y morfismos, según se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z & \xrightarrow{j_0} & Z_0 & \xrightarrow{j_1} & Z_1 & \xrightarrow{j_2} & \dots \longrightarrow Z_{m-1} \xrightarrow{j_m} \dots \\
 \downarrow & & \downarrow q_0 & & \downarrow q_1 & & \downarrow q_{m-1} \\
 & & W & & & & 
 \end{array}$$

Sea entonces  $Z_\infty = \varinjlim Z_m$  é  $j: Z \longrightarrow Z_\infty$  el morfismo canónico. Por la propiedad universal de los límites directos aplicada al par  $(W, q_m: Z_m \longrightarrow W)$ , existe un morfismo  $q: Z_\infty \longrightarrow W$  que proporciona la factorización del morfismo dado,  $g=qj$ , para la que demostraremos que el morfismo  $j: Z \longrightarrow Z_\infty$  es cofibración y  $q: Z_\infty \longrightarrow W$  una fibración trivial.

Probemos en primer lugar que el morfismo  $j: Z \longrightarrow Z_\infty$  es una cofibración, para lo cual, nótese que los morfismos  $F\Delta[s] \longrightarrow F\Delta[s]$ ,  $s \geq 0$ , son cofibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver Capítulo 1, Proposición 1.1.IV.3.). Por tanto, también son cofibraciones los morfismos inducidos en los coproductos  $\coprod_{\mu} F\Delta[s] \longrightarrow \coprod_{\mu} F\Delta[s]$ ,  $s \geq 0$ , dado que tienen la LLP con respecto a las fibraciones triviales, como pone de manifiesto el hecho de que el levantamiento para cualquier diagrama conmutativo dado, con  $p$ . cualquier fibración trivial,

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\mu} F\Delta[s] & \longrightarrow & E. \\
 \mu \downarrow & \nearrow & \downarrow p. \\
 \coprod_{\mu} F\Delta[s] & \longrightarrow & B.
 \end{array}$$

está definido como el inducido por la propiedad universal del coproducto por el correspondiente levantamiento para



$$\begin{array}{ccccc}
\dot{F}\Delta[s] & \longrightarrow & \dot{\coprod}F\Delta[s] & \longrightarrow & E. \\
\downarrow & & \mu \downarrow & & \downarrow p. \\
F\Delta[s] & \longrightarrow & \coprod F\Delta[s] & \longrightarrow & B. \\
& & \mu & & 
\end{array}$$

Por la Proposición 2.2.2.i) y iv), se tiene entonces que todos los morfismos  $j_m: Z_{m-1} \longrightarrow Z_m$  son cofibraciones. Finalmente, la Proposición 2.2.2.v) demuestra que el morfismo  $j: Z \longrightarrow Z_\infty$ , es a su vez una cofibración.

Queda pues probar que el morfismo  $q: Z_\infty \longrightarrow W$  es una fibración trivial. De acuerdo con la Proposición 2.2.2.iii), veamos que  $q$  tiene la RLP con respecto a la familia de morfismos  $L\dot{F}\Delta[s] \longrightarrow L\dot{F}\Delta[s]$ ,  $s \geq 0$ .

Consideremos para ello cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
L\dot{F}\Delta[n] & \xrightarrow{a'} & Z_\infty \\
\downarrow & & \downarrow q \\
L\dot{F}\Delta[n] & \xrightarrow{b'} & W
\end{array}$$

teniéndose una factorización del morfismo dado  $a'$

$$\begin{array}{ccc}
L\dot{F}\Delta[s] & \xrightarrow{a'} & Z_\infty \\
\searrow \gamma & & \nearrow r_m \\
& & Z_m
\end{array}$$

puesto que los objetos  $L\dot{F}\Delta[s]$  son secuencialmente pequeños, por la Proposición 2.2.3.i).

El levantamiento para este diagrama es entonces la composición  $L\Delta[s] \xrightarrow{\mu_m} \coprod L\Delta[s] \xrightarrow{\alpha'_{m+1}} Z_{m+1} \xrightarrow{S_{m+1}} Z_\infty$ , según se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 L\Delta[s] & \xrightarrow{a'} & Z_\infty \\
 \downarrow & \begin{array}{c} \gamma \\ \vdots \\ \downarrow \\ \mu_m \end{array} & \downarrow q \\
 \coprod L\Delta[s] & \xrightarrow{S_{m+1}} & Z_{m+1} \\
 \downarrow \mu_m & & \downarrow \\
 \coprod L\Delta[s] & \xrightarrow{\alpha'_{m+1} \quad t'_m} & \\
 \downarrow \mu_m & & \downarrow \\
 L\Delta[s] & \xrightarrow{b'} & W
 \end{array}$$

dado que por un argumento completamente análogo al usado en la primera parte de este axioma de factorización, se tiene que todos y cada uno de los subdiagramas que conforman este diagrama total son conmutativos. El morfismo  $q: Z_\infty \rightarrow W$  es, pues, una fibración trivial.

**CM4.** (axioma de levantamiento)

Con la definición propuesta de cofibración en  $\underline{C}$ , es claro que existe levantamiento en cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \longrightarrow & E' \\
 k' \downarrow & & \downarrow q' \\
 C' & \longrightarrow & B'
 \end{array}$$

cuando  $k'$  sea cofibración y  $q'$  sea fibración trivial. La única parte no trivial de este axioma consiste pues, en probar la existencia de levantamiento en diagramas conmutativos de la forma



$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & E \\
 k \downarrow & & \downarrow q \\
 C & \xrightarrow{b} & B
 \end{array}$$

donde  $k$  es cofibración trivial y  $q$  fibración.

Para ello, factorizamos el morfismo  $k:A \longrightarrow C$  según la primera parte de **CM5**, es decir,  $k=pi$ , con  $i:A \longrightarrow A_\infty$  cofibración trivial que tiene, adicionalmente, la LLP con respecto a todas las fibraciones, y  $p:A_\infty \longrightarrow C$  fibración.

Nótese en primer lugar que, por el axioma **CM2**,  $p$  es también una equivalencia débil, y en definitiva, fibración trivial. Por definición de cofibración en  $\underline{C}$ , puesto que  $k$  es cofibración trivial, existe entonces levantamiento para el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & A_\infty \\
 k \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\
 C & \xrightarrow{\text{Id}_C} & C
 \end{array}$$

Por otra parte, a partir del diagrama dado originalmente, se construye el siguiente, claramente conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & E \\
 i \downarrow & \nearrow G & \downarrow q \\
 A_\infty & \xrightarrow{bp} & B
 \end{array}$$

para el que existe levantamiento,  $G:A_\infty \longrightarrow E$ , dado que, por la construcción empleada en la primera parte del axioma de factorización, el morfismo  $i$  tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones, como se hizo notar anteriormente.

En consecuencia, el levantamiento buscado para el diagrama original está dado por la composición

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{s} & A_\infty & \xrightarrow{G} & E \\
 & & \lrcorner & & \uparrow \\
 & & & & G'
 \end{array}$$

por las propiedades de conmutación que verifican los levantamientos  $s$  y  $G$ :

$$G'k = (Gs)k = G(sk) = Gi = a.$$

$$qG' = q(Gs) = (qG)s = (bp)s = b(ps) = bId_C = b.$$

Esto concluye la demostración del Teorema. ■

El Teorema 2.2.5. permite entonces caracterizar las cofibraciones en  $\underline{C}$  como sigue:

**Proposición 2.2.6.**

Sea  $f:A \longrightarrow B$  un morfismo en  $\underline{C}$ . Entonces,  $f$  es una cofibración si y solamente si  $f$  es retracts del morfismo  $j:A \longrightarrow A_\infty$  obtenido de la factorización  $f=qj$  en cofibración y fibración trivial, según CM5.

**Demostración.**

Supongamos que  $f$  es una cofibración y factoricémoslo según la segunda parte de CM5, como  $f=qj$  con  $j$  cofibración y  $q$  fibración trivial. Se tiene entonces un diagrama conmutativo



$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{j} & A_\infty \\
 f \downarrow & \nearrow s & \downarrow q \\
 B & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B
 \end{array}$$

para el que existe levantamiento  $s: B \longrightarrow A_\infty$ , por definición de cofibración. Este morfismo  $s$  permite construir el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A \\
 f \downarrow & & \downarrow j \\
 B & \xrightleftharpoons[q]{s} & A_\infty
 \end{array}$$

que demuestra que  $f$  es un retracto de  $j$ , ya que  $sf=j$  y  $qs=\text{Id}_B$ , por las propiedades de conmutación del levantamiento  $s$ .

Recíprocamente, si un morfismo  $f: A \longrightarrow B$  es retracto de  $j: A \longrightarrow A_\infty$ , obtenido éste de la factorización de  $f$  según la segunda parte de **CM5**, entonces  $f$  es un retracto de una cofibración y por **CM3**,  $f$  es a su vez una cofibración. ■

De forma inmediata se tiene, entonces, la siguiente caracterización de los objetos cofibrantes en  $\underline{\mathcal{C}}$ :

**Corolario 2.2.7.**

Dado un objeto de  $\underline{\mathcal{C}}$ ,  $X \in \text{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$ ,  $X$  es cofibrante si y solamente si  $X$  es un retracto de los objetos  $\Phi_\infty$  obtenidos de la factorización del morfismo  $\Phi \longrightarrow X$  según la segunda parte de **CM5**, donde  $\Phi$  denota el objeto inicial de  $\underline{\mathcal{C}}$ . ■

### CAPITULO 3. CATEGORIAS DE MODELOS ALGEBRAICOS DE $n$ -TIPOS COMO CATEGORIAS DE MODELOS CERRADAS DE QUILLEN.

Como ya hicimos notar en la introducción general de esta memoria, la búsqueda de modelos algebraicos para la teoría de homotopía de espacios ha sido, y lo sigue siendo, un problema objeto de análisis y estudio por parte de diversos investigadores, [14], [46], ....

Desde las primeras aportaciones en este sentido dadas por Eilenberg y Mac Lane, ([25], grupos como modelos algebraicos de CW-complejos con un único grupo de homotopía no nulo), y Mac Lane y Whitethead ([40], módulos cruzados como modelos algebraicos de 2-tipos), diferentes esfuerzos en la línea de generalizar éstos, han sido realizados, proporcionando diversas categorías que pretenden la determinación del tipo de homotopía de un espacio por medio de invariantes algebraicos ([16], [26]).

En este Capítulo pretendemos inicialmente utilizar el hecho de que, en esta determinación, clases interesantes de tipos de homotopía corresponden a clases definibles ecuacionalmente (esto es, a variedades) de la categoría de grupos simpliciales, y aplicamos entonces el método general expuesto en 2.2., para inducir en dichas variedades una estructura de modelos de Quillen a partir de la que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  soporta.

El mismo método es posteriormente usado para dotar de una estructura de modelos de Quillen a la categoría de  $n$ -grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ , que es una categoría que proporciona también modelos algebraicos para todos los tipos, [14]. Utilizando entonces esta estructura en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  y el hecho de que otras categorías interesantes de modelos algebraicos de  $(n+1)$ -tipos ([14], [30]), sean variedades de



$\text{Simp}^n(\text{Gp})$ , conjeturamos en el último apartado que el método de 2.2. es válido para dotar a tales categorías de una estructura de modelos de Quillen.

### 3.1. LA CATEGORIA $n\text{-HXC}(\text{Gp})$ DE $n\text{-HIPERCOMPLEJOS CRUZADOS DE GRUPOS COMO UNA CATEGORIA DE MODELOS CERRADA.$

Partiendo del Teorema clásico de Dold, Kan y Puppe -el funtor complejo de Moore determina una equivalencia de categorías entre  $\text{Simp}(\underline{A})$  de objetos simpliciales en una categoría abeliana  $\underline{A}$ , y  $\text{Ch}^+(\underline{A})$ , de complejos de cadenas positivos en  $\underline{A}$ - Carrasco y Cegarra dieron en [16] una versión no abeliana del mismo, estableciendo la existencia de una equivalencia de categorías, vía el funtor complejo de Moore (que notamos por  $N$ ), entre  $\text{Simp}(\text{Gp})$  y la categoría que ellos denominaron  $\text{HXC}(\text{Gp})$ ,

$$(*) \quad \text{Simp}(\text{Gp}) \xrightarrow[\cong]{N} \text{HXC}(\text{Gp})$$

La categoría  $\text{HXC}(\text{Gp})$  tiene por objetos los hipercomplejos cruzados de grupos, que consisten básicamente, en complejos de grupos no abelianos dotados de un conjunto adicional de datos (fundamentalmente acciones) con el fin de recabar información suficiente para poder reconstruir el grupo simplicial, partiendo de su complejo de Moore asociado.

En [16] Carrasco y Cegarra demuestran asimismo que la categoría de homotopía de CW-complejos conexos es equivalente a la categoría de fracciones en el sentido de Gabriel y Zisman, ([29]),  $\text{HXC}(\Sigma^{-1})$ , para una cierta subclase  $\Sigma$  de morfismos de hipercomplejos cruzados de





Como hemos mencionado anteriormente, esto es equivalente a que  $G_*$  sea un  $n$ -hipergrupoide de grupos en el sentido de Duskin y Glenn.

$n$ -Hypgd(Gp) denotará entonces la subcategoría plena de  $\text{Simp}(\text{Gp})$  cuyos objetos son los  $n$ -hipergrupoides de grupos. Esta es una subcategoría reflexiva de  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , en la que el funtor reflector  $\mathbb{P}: \text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ , adjunto a izquierda al funtor inclusión  $J: n\text{-Hypgd}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}(\text{Gp})$ , puede describirse explícitamente como sigue, para cualquier grupo simplicial  $G_*$ :

$$\mathbb{P}(G_*) = \text{cosk}^{n+1} \left( \frac{G_{n+1}}{H_{n+1}} \rightrightarrows \frac{G_n}{d_{n+1}(N_{n+1} G_*)} \rightrightarrows G_{n-1} \rightrightarrows \dots \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0 \right)$$

donde  $H_{n+1}$  es el subgrupo normal de  $G_{n+1}$  formado por  $x \in G_{n+1}$  tales que  $d_i x \in d_{n+1}(N_{n+1} G_*)$ , para  $0 \leq i \leq n+1$  (Contrástese con la construcción del  $n$ -hipergrupoide fundamental dada en [30]).

Considerando entonces la situación de adjunción

$$n\text{-Hypgd}(\text{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbb{P}} \\ \xrightarrow{J} \end{array} \text{Simp}(\text{Gp}),$$

proponemos la siguiente estructura de modelos para  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ :

### Definición 3.1.1.

Un morfismo de  $n$ -hipergrupoides de grupos,  $f.: X. \longrightarrow Y.$ , es una fibración si  $J(f.)$  es una fibración en  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , es decir, una fibración de Kan.

Un morfismo  $f.: X. \longrightarrow Y.$  en  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$  es una equivalencia débil si  $J(f.)$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales, esto es,  $J(f.)$  induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.



(Destaquemos que, puesto que el complejo de Moore de un  $n$ -hipergrupoide de grupos es trivial en dimensiones mayores que  $n$ , y los grupos de homotopía de un grupo simplicial son justamente los grupos de homología del complejo de Moore asociado, es claro que un morfismo  $f.:X. \longrightarrow Y.$  en  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$  es equivalencia débil, por definición, si  $J(f.)$  induce isomorfismos en los grupos de homotopía  $\Pi_i(X.) \cong \Pi_i(Y.)$  para  $0 \leq i \leq n$ , puesto que los restantes son triviales).

Finalmente, un morfismo  $f.$  en  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$  es una cofibración si  $f.$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.2.**

La categoría  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ ,  $n \geq 0$ , es una categoría de modelos cerrada con las definiciones propuestas anteriormente.



**Demostración.**

En orden a aplicar directamente el Teorema 2.2.5. veamos en primer lugar que, por construcción, el funtor  $\mathbb{P}:\text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$  preserva equivalencias débiles.

Sea  $f.:G. \longrightarrow H.$  una equivalencia débil de grupos simpliciales, es decir,  $\Pi_i(G.) \cong \Pi_i(H.)$  para todo  $i \geq 0$ . El morfismo  $\mathbb{P}f.:PG. \longrightarrow PH.$  será entonces equivalencia débil en  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ , por definición, si  $J\mathbb{P}f.:JPG. \longrightarrow JPH.$  induce isomorfismos en los grupos de homotopía hasta dimensión  $n$ .

Para ello, recordemos que  $PG.$  está definido como el siguiente  $n$ -hipergrupoide de grupos, según la definición del funtor  $\text{cosk}^{n+1}$  (ver Capítulo 1, Ejemplo IV):

$$\mathbb{P}(G.) : \dots \rightrightarrows \Delta^{n+2} \rightrightarrows \begin{array}{c} G_{n+1} \\ \hline H_{n+1} \end{array} \rightrightarrows \begin{array}{c} G_n \\ \hline d_{n+1} (N_{n+1} G.) \end{array} \rightrightarrows G_{n-1} \rightrightarrows \dots \rightrightarrows G_1 \rightrightarrows G_0$$



de donde es claro que, puesto que  $G_.$  y  $\mathbb{P}(G_.)$  coinciden hasta dimensión  $n-1$  (análogamente con  $H_.$  y  $\mathbb{P}(H_.)$ ), se tiene  $N_q(G_.)=N_q(\mathbb{P}(G_.))$  para  $0 \leq q \leq n-1$ . En consecuencia,  $\Pi_q(G_.)=\Pi_q(\mathbb{P}(G_.))$  si  $0 \leq q \leq n-2$ . Se tiene pues que  $\mathbb{P}(f_.)$  induce isomorfismos en los grupos de homotopía hasta dimensión  $n-2$ .

Probemos a continuación que  $\mathbb{P}(f_.)$  induce isomorfismos en los grupos de homotopía en dimensión  $n-1$  y  $n$ , para lo cual consideramos el complejo de Moore asociado a  $\mathbb{P}G_.$  en orden a calcular su homología:

$$\dots \longrightarrow 0 = N_{n+1}(\mathbb{P}G_.) \xrightarrow{0 \equiv d_{n+1}^{\mathbb{P}}} N_n(\mathbb{P}G_.) \xrightarrow{d_n^{\mathbb{P}}} N_{n-1}(G_.) \xrightarrow{d_{n-1}} N_{n-2}(G_.) \xrightarrow{d_{n-2}} \dots$$

donde  $d_n^{\mathbb{P}}$ , el morfismo cara asociado al complejo de Moore de  $\mathbb{P}G_.$ , está definido de forma natural por

$$d_n^{\mathbb{P}}(x + d_{n+1}(N_{n+1}G_.) ) = d_n(x), \text{ para todo } x \in G_n.$$

Se observa en primer lugar que

$$N_n(\mathbb{P}G_.) = \frac{N_n(G_.)}{d_{n+1}(N_{n+1}G_.)}.$$

dado que, por definición del morfismo cara  $d_n^{\mathbb{P}}$  asociado a  $N_q(\mathbb{P}(G_.)$ ),

$$N_n(\mathbb{P}G_.) = \{ x + d_{n+1}(N_{n+1}G_.) \in \frac{G_n}{d_{n+1}(N_{n+1}G_.)} \text{ tal que } d_i x = e, i=0, \dots, n-1 \}.$$

Este hecho conduce pues a que  $d_n^{\mathbb{P}}(N_n \mathbb{P}G_*) \cong d_n(N_n G_*)$ .

Dado que el morfismo cara  $d_{n-1}$  es el mismo para  $G_*$  y  $\mathbb{P}(G_*)$ , se tiene en definitiva que

$$\frac{\text{Kerd}_{n-1}}{d_n(N_n \mathbb{P}G_*)} \cong \frac{\text{Kerd}_{n-1}}{d_n(N_n G_*)},$$

es decir,  $\Pi_{n-1}(\mathbb{P}G_*) \cong \Pi_{n-1}(G_*)$ .

En lo referido a los grupos de homotopía en dimensión  $n$ , nótese que, dado que el morfismo cara asociado a  $\mathbb{P}(G_*)$  en dimensión  $n+1$  es trivial, es claro que  $d_{n+1}^{\mathbb{P}}(N_{n+1} \mathbb{P}G_*) = 0$ . En cuanto al  $\text{Kerd}_n^{\mathbb{P}}$ , por definición éste es

$$\text{Kerd}_n^{\mathbb{P}} = \{x + d_{n+1}(N_{n+1} G_*) \in \frac{G_n}{d_{n+1}(N_{n+1} G_*)} / d_n x = e\} \cong \frac{\text{Kerd}_n}{d_{n+1}(N_{n+1} G_*)}$$

y por tanto,

$$\Pi_n(\mathbb{P}G_*) = \frac{\text{Kerd}_n^{\mathbb{P}}}{0} \cong \frac{\text{Kerd}_n}{d_{n+1}(N_{n+1} G_*)} = \Pi_n(G_*)$$

En definitiva, el funtor  $\mathbb{P}$  preserva equivalencias débiles.

Por otra parte, el funtor inclusión  $J: n\text{-Hypgd}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}(\text{Gp})$  claramente preserva límites directos así como la counidad de la adjunción,  $\varepsilon_X: \mathbb{P}JX \longrightarrow X$  para todo  $X \in n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ , es la identidad dado que por construcción se verifica  $\mathbb{P}J = \text{Id}$ .



Por aplicación directa del Teorema 2.2.5. se tiene entonces que, con las definiciones dadas de fibración, cofibración y equivalencia débil,  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  es categoría de modelos cerrada. ■

Puesto que las categorías  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  y  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$  son equivalentes, tal y como se mencionó al comienzo, es inmediato entonces el siguiente resultado:

**Teorema 3.1.3.**

La categoría de  $n$ -hipercomplejos cruzados de grupos,  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$ ,  $n \geq 0$ , es una categoría de modelos cerrada en el sentido de Quillen. ■

Según se demuestra en [16], las categorías de grupos,  $\mathbf{Gp}$ , módulos cruzados de grupos,  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$ , y 2-módulos cruzados de grupos en el sentido de Conduché,  $2\text{-XM}(\mathbf{Gp})$ , resultan ser casos particulares de la categoría  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$  para  $n=0,1$  y  $2$ , respectivamente.

Son por tanto, consecuencia inmediata del Teorema 3.1.3., los Corolarios que a continuación se dan -referidos a  $\mathbf{Gp}$ ,  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$  y  $2\text{-XM}(\mathbf{Gp})$ - en los que describiremos con más detalle las estructuras de modelos que soportan estas categorías.

Previamente, recordemos que cualquier categoría, cerrada bajo límites y colímites finitos, es categoría de modelos cerrada de Quillen donde todos los morfismos son fibraciones y cofibraciones, y definiendo las equivalencias débiles como los isomorfismos. Esta estructura de modelos es conocida como estructura trivial.



**Corolario 3.1.4.**

La categoría de grupos,  $\mathbf{Gp}$ , es categoría de modelos cerrada de Quillen como caso particular de la que soporta  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$ , coincidiendo dicha estructura con la estructura de modelos trivial.

**Demostración.**

Es inmediato que  $\mathbf{Gp}$  es categoría de modelos de Quillen a consecuencia de serlo  $n\text{-HXC}(\mathbf{Gp})$ ,  $n \geq 0$ , dado que se tiene una equivalencia de categorías

$$0\text{-HXC}(\mathbf{Gp}) \cong 0\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$$

junto con el hecho de que la categoría  $0\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  es equivalente a  $\mathbf{Gp}$ , vía la equivalencia de categorías establecida por la siguiente adjunción:

$$\mathbf{Gp} \begin{array}{c} \xleftarrow{\Pi_0} \\ \xrightarrow{\mathcal{E}} \end{array} 0\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$$

en la que  $\Pi_0$  es el funtor "grupo de componentes conexas" asociado a un 0-hipergrupoide, y  $\mathcal{E}$  denota el funtor "grupo simplicial constante" cuyos morfismos cara y degeneración son, en todos los casos, identidades.

Por otra parte, según hemos mencionado, existe una estructura de modelos trivial para  $\mathbf{Gp}$ , en la que todos los morfismos son fibraciones y cofibraciones y las equivalencias débiles son los isomorfismos de grupos. Comprobemos entonces, que la estructura de modelos que hereda  $\mathbf{Gp}$  de la que soporta  $0\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  es justamente la estructura trivial.

Sea  $f:G \longrightarrow H$  cualquier morfismo de grupos considerado como fibración. Debido a que todos los morfismos cara de  $\mathcal{E}G$  y  $\mathcal{E}H$  son identidades, la condición de fibración de Kan se hace trivial en todas



las dimensiones, por lo que para cualquier morfismo de grupos  $f:G \longrightarrow H$  se verifica que  $\mathcal{C}f:\mathcal{C}G \longrightarrow \mathcal{C}H$  es una fibración de Kan y viceversa.

En lo referido a las equivalencias débiles de grupos, nótese que  $\mathcal{C}f$  es una equivalencia débil de 0-hipergrupoides únicamente si  $\Pi_0(\mathcal{C}f)$  es un isomorfismo, ya que en dimensiones superiores los grupos de homotopía son triviales por tratarse de 0-hipergrupoides.

Debido de nuevo a que todos los morfismos cara son identidades, es claro que cada componente conexa está formada tan sólo por un único elemento, es decir,  $\Pi_0(\mathcal{C}G) \cong G$  para todo grupo  $G$  y, en consecuencia  $\Pi_0(\mathcal{C}f) = f$ . Se deduce, pues, que ambas definiciones de equivalencia débil en  $\mathbf{Gp}$  son la misma.

Puesto que las definiciones de fibración y equivalencia débil coinciden, igualmente ocurre con el concepto de cofibración, puesto que éstas se definen como los morfismos que tienen la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

En definitiva se tiene pues que la estructura de modelos que  $\mathbf{Gp}$  soporta como categoría equivalente a  $\mathbf{0-HXC(Gp)}$ , es la estructura trivial. ■

Nos ocupamos ahora de la categoría de módulos cruzados de grupos,  $\mathbf{XM(Gp)}$ , que pasamos a recordar brevemente.

La categoría  $\mathbf{XM(Gp)}$  tiene por objetos los módulos cruzados de grupos, es decir, los sistemas de la forma  $\Phi = (H \xrightarrow{\rho} G, \Psi:G \longrightarrow \text{Aut}(H))$ , donde  $H$  y  $G$  son grupos y  $\rho$  y  $\Psi$  homomorfismos de grupos, satisfaciendo:

$$i) \rho({}^g h) = g + \rho(h) - g, \quad g \in G, \quad h \in H.$$

$$ii) \rho^{(h)} h' = h + h' - h, \quad h, h' \in H, \quad \text{donde } {}^g h \text{ denota } \Psi(g)(h).$$

Un morfismo de módulos cruzados de grupos,  $\Gamma=(j, \gamma):\Phi \longrightarrow \Phi'$ , es un cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \Phi:H & \xrightarrow{\rho} & G \\ \downarrow j & & \downarrow \gamma \\ \Phi':H' & \xrightarrow{\rho'} & G' \end{array}$$

verificando  $j(g \cdot h) = \gamma(g) j(h)$ , para todo  $g \in G$  y  $h \in H$ .

Se tiene entonces el resultado anunciado en relación con la categoría  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$ .

**Corolario 3.1.5.**

La categoría  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$  es categoría de modelos cerrada donde las fibraciones son los morfismos  $\Gamma=(j, \gamma):\Phi \longrightarrow \Phi'$  tales que  $j$  es sobreyectivo.

**Demostración.**

Para recuperar la noción de fibración en el contexto de  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$ , recordemos las siguientes equivalencias de categorías:

$$\mathbf{XM}(\mathbf{Gp}) \xrightarrow[\mathbf{G}]{\cong} \mathbf{GPD}(\mathbf{Gp}) \xrightarrow[\mathbf{N}]{\cong} \mathbf{1-Hyppgd}(\mathbf{Gp})$$

donde  $\mathbf{GPD}(\mathbf{Gp})$  es la categoría de grupoides en grupos y  $\mathbf{N}$  denota el funtor nervio usual. El funtor  $\mathbf{G}$  se define explícitamente como sigue: (ver [18])

$$\mathbf{G}(\Phi) = H \times G \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} G \begin{array}{c} s_0 \\ \end{array}, \text{ para todo } \Phi = (H \xrightarrow{\rho} G, \Psi: G \longrightarrow \text{Aut}(H)), \text{ donde}$$



$$\begin{aligned}
d_0(h,g) &= g \\
d_1(h,g) &= \rho(h) + g \\
s_0(g) &= (0, g) \quad , \quad y
\end{aligned}$$

$G(\Gamma) = (f_1, \gamma)$ , para todo morfismo  $\Gamma = (j, \gamma)$ , donde  $f_1(h, g) = (j(h), \gamma(g))$  con la siguiente operación, que denotamos por  $m$ :

$$m((h, g), (h', \rho(h) + g)) = (h' + h, g)$$

Atendiendo entonces a la definición de fibración en la categoría  $1\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ , se tiene que un morfismo  $\Gamma = (j, \gamma): \Phi \longrightarrow \Phi'$ , es decir, un cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
\Phi: H & \xrightarrow{\rho} & G \\
\downarrow j & & \downarrow \gamma \\
\Phi': H' & \xrightarrow{\rho'} & G'
\end{array} \quad ,$$

es una fibración en  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$  si  $N(G(\Gamma))$  es una fibración de Kan, lo cual es equivalente, por la Proposición 1.1.IV.2. (ver Capítulo 1, Ejemplo IV), a que el morfismo inducido en el correspondiente complejo de Moore,  $N_q(N(G(\Gamma)))$  sea sobreyectivo para  $q > 0$ .

Teniendo en cuenta entonces que  $N_q(N(G(\Gamma))) = 0$  si  $q > 1$  por ser  $N(G(\Gamma))$  un morfismo de 1-hipergrupoides, se deduce que  $\Gamma = (j, \gamma): \Phi \longrightarrow \Phi'$  es fibración en  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$  si y solamente si  $N_1(N(G(\Gamma)))$  es sobreyectivo.

Por definición,

$$\begin{aligned}
N_1(N(G(\Phi))) &= \{(h, g) \in H \times G \text{ tales que } d_0(h, g) = *\} \\
&= \{(h, g) \in H \times G \text{ tales que } g = *\} \\
&\cong H,
\end{aligned}$$

y análogamente con  $N_1(N(G(\Phi')))$ , de donde es claro que  $N_1(N(G(\Gamma)))$  es el morfismo  $j:H \longrightarrow H'$ . Se tiene pues que un morfismo  $\Gamma=(j, \gamma):\Phi \longrightarrow \Phi'$  en  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$  es fibración si y solamente si  $j:H \longrightarrow H'$  es sobreyectivo. ■

En orden a completar la descripción de los morfismos destacados en  $\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$ , recordamos que las equivalencias débiles ya han sido descritas (ver [8]) como aquellos morfismos de módulos cruzados  $\Gamma=(j, \gamma):\Phi \longrightarrow \Phi'$  que inducen isomorfismos en los dos únicos grupos de homotopía no triviales,  $\Pi_0$  y  $\Pi_1$ , donde  $\Pi_0(\Phi:H \xrightarrow{\rho} G)=\text{Coker}\rho$  y  $\Pi_1(\Phi:H \xrightarrow{\rho} G)=\text{ker}\rho$ .

En cuanto a la categoría  $2\text{-}\mathbf{XM}(\mathbf{Gp})$ , [18], es aquella cuyos objetos son los dos-módulos cruzados en el sentido de Conduché, es decir, los sistemas de la forma  $\Upsilon=(L \xrightarrow{\delta_2} M \xrightarrow{\delta_1} N, \{, \}:M \times M \longrightarrow L)$  de complejos de cadenas de N-grupos, donde N actúa sobre sí mismo por conjugación, y  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son morfismos de N-grupos, junto con una aplicación  $\{, \}:M \times M \longrightarrow L$ , verificándose las siguientes relaciones:

$$\text{i)} \delta_2 \{x, y\} = \delta_2^x y + x - y - x,$$

$$\text{ii)} \{x+y, z\} = \delta_2^x \{y, z\} + \{x, y+z-x\},$$

$$\text{iii)} \{x, y+z\} = \{x, y\} + \{\delta_2 \{x, z\}, x+y-x\} + \{x, z\},$$

$$\text{iv)} \{\delta_2 u, \delta_2 v\} = v + u - v - u,$$

$$\text{v)} \{x, \delta_2 u\} + \{\delta_2 u, x\} = \delta_2^x u - u,$$

$$\text{vi)} {}^w \{x, y\} = \{^w x, ^w y\}, \text{ para todo } u, v \in L, x, y, z \in M \text{ y } w \in N.$$

Un morfismo de dos-módulos cruzados  $\Gamma=(f, g, h):\Upsilon \longrightarrow \Upsilon'$  es, entonces, un diagrama conmutativo de la forma



$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma:L & \xrightarrow{\delta_2} & M & \xrightarrow{\delta_1} & N \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
\Gamma':L' & \xrightarrow{\delta'_2} & M' & \xrightarrow{\delta'_1} & N'
\end{array}$$

donde los homomorfismos de grupos  $f$ ,  $g$  y  $h$  son compatibles con las aplicaciones  $\{, \}:M \times M \longrightarrow L$  y  $\{, \}':M' \times M' \longrightarrow L'$ , es decir,  $f(\{m_0, m_1\}) = \{g(m_0), g(m_1)\}'$  para cualesquiera  $m_0$  y  $m_1 \in M$ , y compatibles a su vez con el carácter de  $N$  y  $N'$ -grupos, es decir,  $f({}^n l) = {}^{h(n)} f(l)$  y  $g({}^n m) = {}^{h(n)} g(m)$ , para  $l \in L$ ,  $m \in M$  y  $n \in N$ .

El correspondiente resultado en relación con esta categoría es el siguiente.

**Corolario 3.1.6.**

La categoría de 2-módulos cruzados en el sentido de Conduché,  $2\text{-XM}(\text{Gp})$ , es una categoría de modelos cerrada donde las fibraciones son aquellos morfismos  $\Gamma = (f, g, h): (L \rightarrow M \rightarrow N) \longrightarrow (L' \rightarrow M' \rightarrow N')$  tales que  $f$  y  $g$  son sobreyectivos.

**Demostración.**

Recuperamos el concepto de fibración de 2-módulos cruzados mediante la siguiente equivalencia de categorías, (ver [17]),

$$2\text{-XM}(\text{Gp}) \xrightarrow{T} 2\text{-Hypgd}(\text{Gp})$$

donde el funtor  $T$  se define explícitamente como sigue:

Para todo 2-módulo cruzado  $\Upsilon=(L \xrightarrow{\delta_2} M \xrightarrow{\delta_1} N, \{, \}: M \times M \longrightarrow L)$ , que notaremos por simplicidad por  $\Upsilon=(L \rightarrow M \rightarrow N)$ ,  $T(L \rightarrow M \rightarrow N)$  es el siguiente 2-hipergrupoide:

$$\dots \Delta^m \rightrightarrows \Delta^{m-1} \dots \rightrightarrows \Delta^3 \equiv ((L \times M) \times M) \times N \rightrightarrows M \times N \rightrightarrows N$$

donde  $\Delta$  denota, como es usual, el núcleo simplicial correspondiente a cada dimensión (ver Capítulo 1, Ejemplo IV), y con la definición natural en morfismos.

Para su uso posterior, recordemos que los morfismos cara y degeneración en dimensiones bajas son los siguientes:

$$M \times N \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} N \quad , \quad \begin{array}{c} s_0 \\ \text{definidos por } d_0(m, n) = n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_1(m, n) = \delta_1(m) + n \\ s_0(n) = (0, n). \end{array}$$

$$((L \times M) \times M) \times N \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} M \times N \quad \begin{array}{c} s_1 \\ s_0 \\ \text{definidos por } d_0(1, m, m', n) = (m', n) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_1(1, m, m', n) = (m + m', n) \\ d_2(1, m, m', n) = (\delta_2 1 + m, \delta_1 m' + n) \\ s_0(m, n) = (0, 0, m, n) \\ s_1(0, m, 0, n). \end{array}$$



Entonces un morfismo de 2-módulos cruzados  $\Gamma=(f,g,h):Y \longrightarrow Y'$  esto es, un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccc} Y:L & \xrightarrow{\delta_2} & M & \xrightarrow{\delta_1} & N \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ Y':L' & \xrightarrow{\delta'_2} & M' & \xrightarrow{\delta'_1} & N' \end{array} ,$$

es una fibración si  $T(f,g,h)$  es una fibración de Kan, es decir, si y solamente si  $N_q(T(f,g,h))$  es sobreyectivo para  $q>0$ . Puesto que  $T(L \rightarrow M \rightarrow N)$  y  $T(L' \rightarrow M' \rightarrow N')$  son ambos 2-hipergrupoides, sus complejos de Moore son triviales en dimensiones mayores que 2, lo que reduce las condiciones de sobreyectividad únicamente a dimensiones 1 y 2.

En dimensión 1, el complejo de Moore asociado al 2-hipergrupoide  $T(L \rightarrow M \rightarrow N)$  se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} N_1(T(f,g,h)) &= \{ (m,n) \in M \times N \text{ tales que } d_0(m,n) = * \} \\ &= \{ (m,n) \in M \times N \text{ tales que } n = * \} \\ &\cong M. \end{aligned}$$

Por tanto, la sobreyectividad del complejo de Moore asociado a  $T(f,g,h)$  en dimensión 1 se traduce en  $g:M \longrightarrow M'$  sobreyectivo.

Análogamente, estudiando el complejo de Moore en dimensión 2 asociado al 2-hipergrupoide  $T(L \rightarrow M \rightarrow N)$ , se tiene que éste es

$$\begin{aligned} N_2(T(f,g,h)) &= \{ (l,m,m',n) \in ((L \times M) \times M) \times N \text{ tales que} \\ & \quad d_0(l,m,m',n) = (0,0) \text{ y} \\ & \quad d_1(l,m,m',n) = (0,0) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ (l, m, m', n) \in ((L \rtimes M) \rtimes M) \rtimes N \text{ tales que} \\
&\qquad\qquad\qquad (m', n) = (0, 0) \text{ y} \\
&\qquad\qquad\qquad (m + m', n) = (0, 0) \} \\
&= \{ (l, m, m', n) \in ((L \rtimes M) \rtimes M) \rtimes N \text{ tales que } m = m' = n = 0 \} \\
&\cong L,
\end{aligned}$$

y en consecuencia la sobreyectividad de  $N_2(T(f, g, h))$  equivale a  $f: L \longrightarrow L'$  sobreyectivo.

En definitiva, un morfismo de 2-módulos cruzados  $(f, g, h): (L \rightarrow M \rightarrow N) \longrightarrow (L' \rightarrow M' \rightarrow N')$  es una fibración si y solamente si  $f: L \longrightarrow L'$  y  $g: M \longrightarrow M'$  son sobreyectivos. ■



### 3.2. $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ COMO CATEGORIA DE MODELOS CERRADA.

Denotaremos por  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  a la categoría de  $n$ -grupos simpliciales, es decir, la categoría de funtores  $\text{Gp}^{\Delta^{\text{op}} \times \dots \times \Delta^{\text{op}}}$  cuyos objetos pueden describirse como aquellos objetos simpliciales que tienen  $n$  estructuras de grupo simplicial independientes, una para cada dirección.

Para nuestro objetivo de aplicar los resultados obtenidos en el Capítulo 2, consideramos la siguiente adjunción,

$$\text{Simp}^n(\text{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbb{T}} \\ \xrightarrow{\bar{\mathbb{W}}} \end{array} \text{Simp}(\text{Gp})$$

donde  $\mathbb{T}: \text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}^n(\text{Gp})$  es una extensión del funtor "Total Dec" de Illusie, [34], y  $\bar{\mathbb{W}}: \text{Simp}^n(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}(\text{Gp})$ , adjunto a derecha de  $\mathbb{T}$ , es el funtor de Artin-Mazur, una generalización del clásico funtor de Eilenberg-Mac Lane,  $\bar{\mathbb{W}}: \text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{SS}$ , [20], [39].

Recordemos brevemente que los funtores  $\mathbb{T}$  y  $\bar{\mathbb{W}}$  se definen como sigue para  $n=2$ , obteniéndose su generalización a cualesquiera dimensiones  $n \geq 3$  vía los isomorfismos  $\gamma_{n,n-1}$  como resultado de destacar dos direcciones (ver [34]):

$$\text{Simp}^n(\text{Gp}) \stackrel{\gamma_{n,n-1}}{\cong} \text{Simp}^2(\text{Simp}^{n-2}(\text{Gp}))$$

En primer lugar,  $\bar{W}: \text{Simp}^2(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}(\text{Gp})$  se define, para todo grupo bisimplicial  $G_{..}$ , como el siguiente producto fibrado:

$$\bar{W}(G_{..})_n = G_{0,n} \times_{\substack{d_0^2 \\ d_1^2}} G_{1,n-1} \times_{\substack{d_0^1 \\ d_2^2}} G_{1,0}$$

donde el superíndice denota dirección ( $d_j^1$  es operador cara horizontal y  $d_j^2$  es operador cara vertical). Los operadores cara y degeneración del grupo simplicial  $\bar{W}(G_{..})_n$  son los siguientes:

$$d_j(a_p)_{0 \leq p \leq n} = \begin{cases} d_j^2(a_{p+1}) & , \text{ si } j \leq p \\ d_{j-p}^1(a_p) & , \text{ si } j > p \end{cases}$$

$$s_j(a_p)_{0 \leq p \leq n} = \begin{cases} s_j^2(a_{p-1}) & , \text{ si } j < p \\ s_{n-p}^1(a_p) & , \text{ si } j \geq p. \end{cases}$$

En cuanto al funtor  $T: \text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}^2(\text{Gp})$ , para todo grupo simplicial  $G_{..}$ ,  $T(G_{..})_{r,s} = G_{r+s+1}$  y los operadores cara y degeneración en dirección horizontal

$$d_i^1: T(G_{..})_{r,s} \longrightarrow T(G_{..})_{r,s-1} \text{ son } d_i^1 = d_{r+i+1} \text{ y } s_j^1 = s_{r+j+1},$$

y en dirección vertical

$$d_i^2: T(G_{..})_{r,s} \longrightarrow T(G_{..})_{r-1,s} \text{ son } d_i^2 = d_i \text{ y } s_j^2 = s_j.$$



Proponemos entonces las siguientes definiciones de fibración, cofibración y equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ .

**Definición 3.2.1.**

Un morfismo  $f$  en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  es una fibración si  $\bar{W}(f)$  es una fibración de grupos simpliciales, es decir, una fibración de Kan.

Un morfismo  $f$  en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  es una equivalencia débil si  $\bar{W}(f)$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.

Por último, un morfismo  $f$  en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  es una cofibración si  $f$  tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

En orden a aplicar el Teorema 2.2.5., comprobamos cada una de sus hipótesis.

La unidad de la anterior adjunción,  $G. \longrightarrow \bar{W}TG.$ , es una equivalencia débil de grupos simpliciales, [13], y por tanto es claro que el funtor  $T$  preserva equivalencias débiles. En efecto, si  $f.:X. \longrightarrow Y.$  una equivalencia débil de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es claro que  $Tf.$  lo es en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  puesto que  $\bar{W}Tf.$  es equivalencia débil de grupos simpliciales -por el axioma CM2- según el siguiente diagrama conmutativo: (naturalidad de la unidad)

$$\begin{array}{ccc}
 X. & \xrightarrow{f.} & Y. \\
 \eta_X. \downarrow & & \downarrow \eta_Y. \\
 \bar{W}TX. & \xrightarrow{\quad} & \bar{W}TY. \\
 & \bar{W}Tf. &
 \end{array}$$

Asímismo, del hecho de que en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y por tanto en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ , límites directos conmuten con límites finitos, y teniendo en cuenta que la construcción del funtor  $\bar{W}$  está dada mediante límites finitos, es claro que este funtor preserva límites directos.

En cambio, la counidad de la adjunción no es un isomorfismo y por tanto el Teorema 2.2.5. no puede aplicarse directamente en este caso. Nótese que, sin embargo, la hipótesis sobre la counidad se utiliza en la demostración de dicho Teorema justamente en el uso de la Proposición que le precede (Proposición 2.2.4.).

Reemplazando entonces este último resultado por uno conveniente al caso, el Teorema sigue siendo válido. Tal resultado es el siguiente.

**Lema 3.2.2.**

Para todo diagrama pushout en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}F\Delta[s,k] & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{T}F\Delta[s] & \longrightarrow & P \end{array} , \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0$$

el morfismo  $f$  es una cofibración trivial.

**Demostración.**

Es claro que el morfismo  $f$  es una cofibración ya que los morfismos  $F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$ , son cofibraciones triviales en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . En efecto, puesto que  $\mathbb{T}$  es adjunto a izquierda y además preserva equivalencias débiles -dado que la unidad de la adjunción es equivalencia débil para todo grupo simplicial, (ver [13])- se tiene que  $\mathbb{T}F\Delta[s,k] \longrightarrow \mathbb{T}F\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$ , son cofibraciones triviales de  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  y, en consecuencia, el morfismo  $f$  obtenido en un pushout es cofibración, por la Proposición 2.2.2.iv).

Probemos entonces que  $f$  es una equivalencia débil, esto es, por definición, que  $\bar{W}f$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.



Para ello, consideramos el funtor diagonal, ([4]),

$$\mathbb{D}: \mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp}) \longrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}),$$

funtor que es "débilmente equivalente" al funtor  $\bar{W}$  en el sentido de que existe una transformación natural  $\psi: \bar{W} \longrightarrow \mathbb{D}$  de modo que  $\psi_X: \bar{W}X \longrightarrow \mathbb{D}X$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales, para todo  $X \in \mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ , (ver [13]).

Aplicando el funtor  $\mathbb{D}$  al diagrama pushout original, se obtiene de nuevo un diagrama pushout en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\text{TF}\Delta[s,k] & \longrightarrow & \mathbb{D}X \\ \downarrow & & \downarrow \mathbb{D}f \\ \mathbb{D}\text{TF}\Delta[s] & \longrightarrow & \mathbb{D}P \end{array}, \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,$$

dato que  $\mathbb{D}$  es a su vez adjunto a izquierda al funtor  $\delta_*: \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \longrightarrow \mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  (ver [42]) y por tanto,  $\mathbb{D}$  preserva diagramas pushout.

En este último diagrama se tiene, entonces, por definición, que los morfismos  $\mathbb{D}\text{TF}\Delta[s,k] \longrightarrow \mathbb{D}\text{TF}\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $s > 0$  son equivalencias débiles. Nótese que, además, dichos morfismos son cofibraciones por ser morfismos libres en el sentido de Quillen (ver [48]).

En definitiva,  $\mathbb{D}f$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales por el axioma **M4** y, por tanto,  $f$  lo es de  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ . ■

Se tiene entonces el siguiente resultado como consecuencia del Teorema 2.2.5.:

**Teorema 3.2.3.**

La categoría  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  de n-grupos simpliciales, es una categoría de modelos cerrada con las definiciones propuestas en 3.2.1. para la que todo n-grupo simplicial es fibrante.

**Demostración.**

Puesto que previamente se ha demostrado que las definiciones dadas en 3.2.1. conducen a una estructura de modelos en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  como aplicación del Teorema 2.2.5., sólo resta probar que, con esta estructura, todo n-grupo simplicial es fibrante.

En efecto, un n-grupo simplicial X es fibrante, por definición, si  $X \longrightarrow e$  es fibración, donde e denota el n-grupo simplicial con un único elemento, objeto inicial y final en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ .

Por definición, esto es equivalente a que  $\bar{W}X \longrightarrow \bar{W}^*$  sea fibración de grupos simpliciales, equivalente a su vez a que  $\bar{W}X$  sea un grupo simplicial fibrante puesto que es claro que  $\bar{W}^*$  es el grupo simplicial con un único elemento (ver definición del funtor  $\bar{W}$ ).

Nótese entonces que esto se verifica trivialmente al ser fibrantes todos los grupos simpliciales. ■

Es obligado mencionar en este punto que la categoría de conjuntos bisimpliciales,  $\text{SS}^{\Delta^{\text{op}}}$ , tiene una estructura de modelos cerrada en el sentido de Quillen (como se demuestra en [42]) donde el método utilizado para definir las correspondientes nociones de fibración, cofibración y equivalencia débil en  $\text{SS}^{\Delta^{\text{op}}}$  está basado en el uso de la siguiente adjunción

$$\text{SS}^{\Delta^{\text{op}}} \begin{array}{c} \xleftarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\mathbb{D}} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \text{SS} ,$$



con  $\mathbb{D}$  el funtor diagonal y  $\delta_!$  su adjunto a izquierda. Para la demostración de los axiomas de categoría de modelos cerrada en  $\mathbb{S}\mathbb{S}^{\Delta^{op}}$  es un hecho determinante (como lo ha sido para el caso de  $\mathbb{S}\text{imp}^n(\mathbb{G}\text{p})$ ) la existencia de un funtor adjunto a derecha del funtor diagonal, notado por  $\delta_*$ , hecho que asegura que el funtor  $\mathbb{D}$ , en su calidad de adjunto a izquierda a  $\delta_*$ , preserve colímites (coproductos, pushouts...).

Este dato adicional que se presenta en el caso de la categoría  $\mathbb{S}\text{imp}^n(\mathbb{G}\text{p})$ , de la existencia de un funtor débilmente equivalente al funtor adjunto a derecha  $\bar{W}$  (el funtor diagonal  $\mathbb{D}$ , según se ha mencionado, que a su vez es adjunto a izquierda) permite demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.4.**

La categoría  $\mathbb{S}\text{imp}^n(\mathbb{G}\text{p})$  de n-grupos simpliciales es una categoría de modelos cerrada **propia**, con la estructura propuesta anteriormente.

**Demostración.**

Para demostrar el carácter de propia de la categoría de modelos  $\mathbb{S}\text{imp}^n(\mathbb{G}\text{p})$  (ver Capítulo 1, Definición 1.1.6.), probemos las siguientes propiedades:

**CMP1.** Consideremos en  $\mathbb{S}\text{imp}^n(\mathbb{G}\text{p})$  cualquier diagrama pullback de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 C & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

en el que  $p$  es fibración y  $g$  equivalencia débil. Es claro entonces que  $f$  es también equivalencia débil dado que, aplicando el funtor  $\bar{W}$  al diagrama pullback dado, se obtiene un nuevo pullback en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  por ser  $\bar{W}$  adjunto a derecha -y por tanto, preserva diagramas pullback. En este último,

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{W}S & \xrightarrow{\bar{W}f} & \bar{W}X \\
 \downarrow & & \downarrow \bar{W}p \\
 \bar{W}C & \xrightarrow{\bar{W}g} & \bar{W}Y
 \end{array}$$

se tiene que, por definición,  $\bar{W}p$  es fibración y  $\bar{W}g$  es equivalencia débil y, en consecuencia, puesto que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es propia,  $\bar{W}f$  es equivalencia débil de grupos simpliciales, esto es,  $f$  lo es en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ .

**CMP2.** Consideremos ahora cualquier diagrama pushout en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & C \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{g} & S
 \end{array}$$

donde  $i$  es cofibración y  $f$  equivalencia débil. Probaremos entonces que  $g$  es equivalencia débil demostrando que lo es  $Dg$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , lo cual es equivalente a que lo sea  $\bar{W}g$ , por el carácter de "débilmente equivalentes" de los funtores  $D$  y  $\bar{W}$ .



Veamos en primer lugar que el funtor diagonal  $\mathbb{D}$  preserva todas las cofibraciones de  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ , para lo cual nótese que en el transcurso de la demostración de 3.2.2. se ha probado que  $\mathbb{D}$  preserva las cofibraciones de la forma

$$\text{TF}\Delta[s,k] \longrightarrow \text{TF}\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0,$$

El mismo argumento prueba entonces que  $\mathbb{D}$  preserva las cofibraciones del tipo

$$\text{TF}\Delta[s] \longrightarrow \text{TF}\Delta[s], \quad s \geq 0.$$

Sea entonces  $i: X \longrightarrow Y$  cualquier cofibración de  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ . Por la Proposición 2.2.6. (Capítulo 2), esto es equivalente a que  $i: X \longrightarrow Y$  sea un retracto de la cofibración  $j: X \longrightarrow X_\infty$  obtenida en la factorización de  $i$  en cofibración  $-j: X \longrightarrow X_\infty$  y fibración trivial  $-q: X_\infty \longrightarrow Y$  según el axioma CM5, es decir, existe un diagrama del tipo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ Y & \xrightleftharpoons[q]{s} & X_\infty \end{array}$$

con  $si=j$ ,  $qj=i$  y  $qs=\text{Id}_Y$ .

Es claro entonces que  $\mathbb{D}i$  es retracto de  $\mathbb{D}j$ , lo que asegura, por el axioma CM3, que  $\mathbb{D}i$  será cofibración cuando  $\mathbb{D}j$  lo sea. El problema se reduce pues, a probar que  $\mathbb{D}j: \mathbb{D}X \longrightarrow \mathbb{D}X_\infty$  es cofibración de grupos simpliciales.

Para ello, recordemos que  $\mathbb{D}$  es adjunto a izquierda y por tanto preserva colímites. Así el morfismo  $\mathbb{D}j$  es el siguiente:

$$\mathbb{D}j:DX \longrightarrow DX_{\infty} = \mathbb{D}(\text{colim} X_m) = \text{colim}(\mathbb{D}X_m)$$

Por otra parte, según la Proposición 2.2.2.v), el morfismo  $\mathbb{D}j:DX \longrightarrow \text{colim}(\mathbb{D}X_m)$  es cofibración cuando lo sean cada uno de los morfismos  $\mathbb{D}X_{m-1} \longrightarrow \mathbb{D}X_m$ , obtenidos éstos de los siguientes diagramas pushout:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(\coprod_{\lambda_{m-1}} \text{DTF}\Delta[s]) & \longrightarrow & \mathbb{D}X_{m-1} \\ \downarrow \lambda_{m-1} & & \downarrow \\ \mathbb{D}(\coprod_{\lambda_{m-1}} \text{DTF}\Delta[s]) & \longrightarrow & \mathbb{D}X_m \end{array}$$

(nótese que estos diagramas provienen de los correspondientes pushouts en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  para la factorización del morfismo  $i:X \longrightarrow Y$ , y siguen siendo pushouts en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  puesto que  $\mathbb{D}$  es adjunto a izquierda).

Partiendo del hecho de que  $\text{DTF}\Delta[s] \longrightarrow \text{DTF}\Delta[s]$ ,  $s \geq 0$  son cofibraciones en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  y que lo son por tanto los morfismos

$$\mathbb{D}(\coprod_{\lambda_{m-1}} \text{DTF}\Delta[s]) = \coprod_{\lambda_{m-1}} (\mathbb{D}\text{DTF}\Delta[s]) \longrightarrow \mathbb{D}(\coprod_{\lambda_{m-1}} \text{DTF}\Delta[s]) = \coprod_{\lambda_{m-1}} (\mathbb{D}\text{DTF}\Delta[s]), \quad s \geq 0,$$

por la Proposición 2.2.2.iv) se tiene que los morfismos  $\mathbb{D}X_{m-1} \longrightarrow \mathbb{D}X_m$  son cofibraciones, y por consiguiente,  $\mathbb{D}i:DX \longrightarrow \mathbb{D}Y$  es cofibración, esto es,  $\mathbb{D}$  preserva todas las cofibraciones de  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ .



Considerando entonces el diagrama pushout original, se obtiene el siguiente, aplicando al primero el functor  $\mathbb{D}$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{D}f & \\
 \mathbb{D}X & \longrightarrow & \mathbb{D}C \\
 \mathbb{D}i \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{D}Y & \longrightarrow & \mathbb{D}S \\
 & \mathbb{D}g &
 \end{array}$$

donde  $\mathbb{D}f$  es una equivalencia débil, por definición, y  $\mathbb{D}i$  es cofibración puesto que el functor  $\mathbb{D}$  las preserva. Por ser  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  una categoría de modelos propia,  $\mathbb{D}g$  es equivalencia débil, esto es, por definición,  $g$  lo es en  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ . ■

Según se ha mencionado en el Capítulo 1, existe la posibilidad de que categorías de modelos cerradas con diferentes estructuras originen, sin embargo, teorías de homotopía equivalentes. Veremos a continuación que éste es el caso de las categorías de grupos simpliciales  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y de  $n$ -grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$ , en ambos casos categorías que proporcionan modelos para todos los tipos de espacios conexos.

Probaremos que existe tal equivalencia por aplicación del criterio dado por Quillen a tal efecto (ver Capítulo 1, Teorema 1.2.2.2.), usando para ello la adjunción mediante la cual  $\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp})$  adquiere una estructura de modelos de la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , esto es,

$$\mathbf{Simp}^n(\mathbf{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbb{T}} \\ \xrightarrow{\mathbb{W}} \end{array} \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

para la que notaremos por  $\varphi: \text{Hom}_{\text{Simp}^n(\text{Gp})}(\mathbb{T}\text{G.}, X) \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gp})}(\text{G.}, \bar{W}X)$  a la correspondiente biyección.

El resultado mencionado es el siguiente:

**Teorema 3.2.5.**

Las teorías de homotopía de  $\text{Simp}(\text{Gp})$  y  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  son equivalentes, considerando  $\text{Simp}(\text{Gp})$  con la estructura de modelos dada por Quillen y  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  con la estructura de modelos dada en el Teorema 3.2.3.

**Demostración.**

Para asegurar en primer lugar que las correspondientes categorías de homotopía,  $\text{Ho}(\text{Simp}(\text{Gp}))$  y  $\text{Ho}(\text{Simp}^n(\text{Gp}))$ , son equivalentes, comprobemos cada una de las hipótesis del Teorema 1.2.2.2.i).

En primer lugar, el funtor adjunto a izquierda  $\mathbb{T}$  preserva cofibraciones por la Proposición 2.2.2.i). Asimismo,  $\mathbb{T}$  preserva equivalencias débiles, dado que la unidad de la adjunción,  $\eta_{G.}: G. \longrightarrow \bar{W}\text{G.}$ , es una equivalencia débil de grupos simpliciales para todo  $G. \in \text{Simp}(\text{Gp})$ .

En particular se tiene pues, la hipótesis requerida de que el funtor adjunto a izquierda lleve equivalencias débiles entre grupos simpliciales cofibrantes en equivalencias débiles de  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ .

Por otra parte, el funtor adjunto a derecha  $\bar{W}$  preserva fibraciones y equivalencias débiles, por definición de fibración y equivalencia débil en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$ . Se tiene pues que  $\bar{W}$  lleva equivalencias débiles entre n-grupos simpliciales fibrantes en equivalencias débiles de  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , ya que todo n-grupo simplicial, con la estructura de modelos dada a  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  en el Teorema 3.2.3., es fibrante.

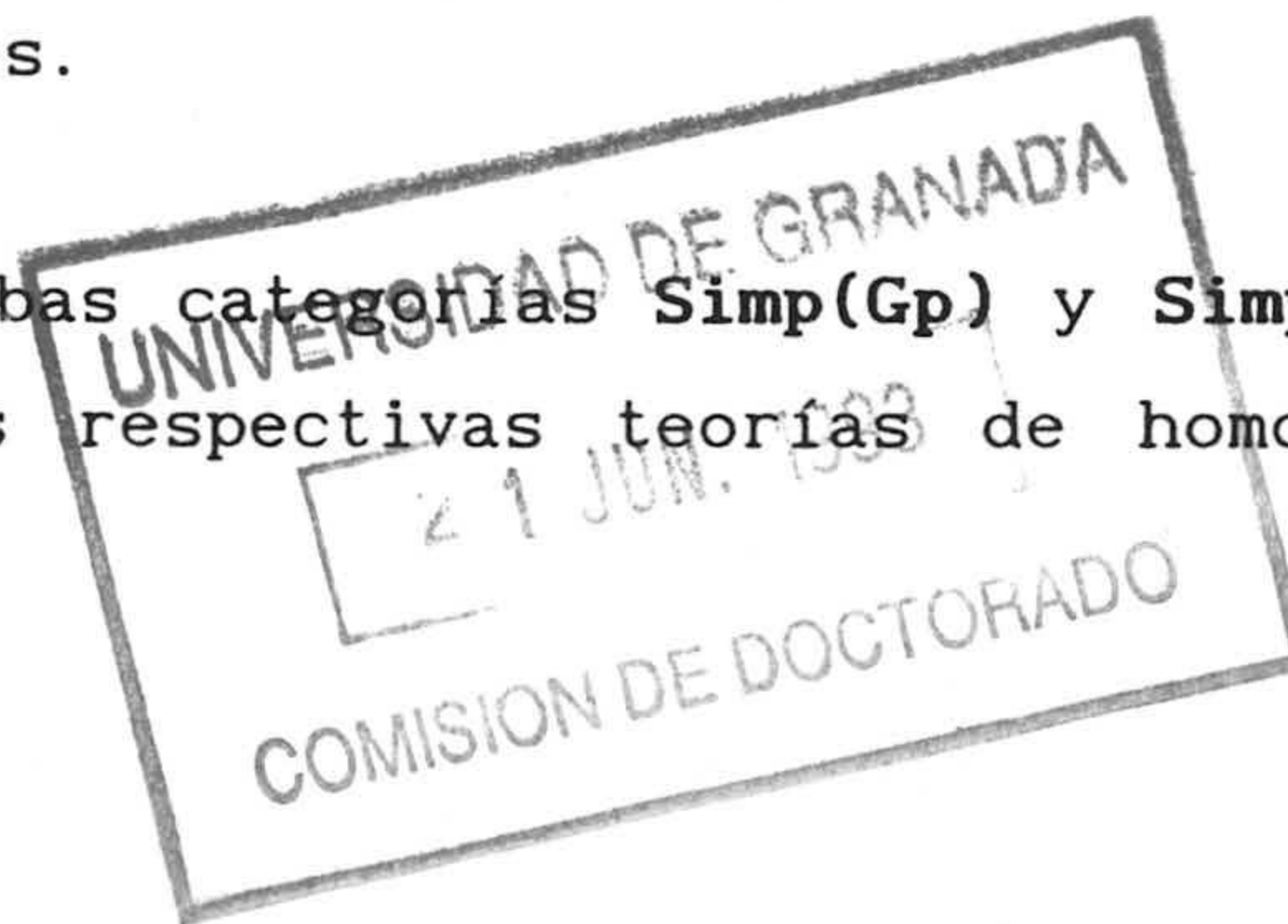


En cuanto a la segunda parte del Teorema 1.2.2.2., demostraremos que  $f: TG. \longrightarrow X$  es equivalencia débil de  $n$ -grupos simpliciales si y solamente si el morfismo adjunto,  $\varphi(f): G. \longrightarrow \bar{W}X$ , es equivalencia débil de grupos simpliciales, para cualesquiera  $G. \in \mathbf{Simp}(Gp)$  y  $X \in \mathbf{Simp}^n(Gp)$ .

Supongamos pues que un morfismo  $f: TG. \longrightarrow X$  es equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}^n(Gp)$ , esto es,  $\bar{W}f: \bar{W}TG. \longrightarrow \bar{W}X$  es equivalencia débil de grupos simpliciales. Por definición de la biyección  $\varphi$ ,  $\varphi(f) = \bar{W}f \eta_{G.}$ , es claro entonces que el morfismo adjunto a  $f$ ,  $\varphi(f): G. \longrightarrow \bar{W}X$ , es equivalencia débil de grupos simpliciales, por el axioma CM2 de una categoría de modelos cerrada, dado que la unidad siempre lo es.

Recíprocamente, si  $\varphi(f): G. \longrightarrow \bar{W}X$  es equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(Gp)$ , para probar que lo es  $f: TG. \longrightarrow X$  en  $\mathbf{Simp}^n(Gp)$  hay que probar, por definición, que es equivalencia débil el morfismo  $\bar{W}f: \bar{W}TG. \longrightarrow \bar{W}X$ . El resultado se tiene de nuevo por el axioma CM2, puesto que para los tres morfismos  $\{\varphi(f), \bar{W}f, \eta_{G.}\}$  se tiene que  $\varphi(f)$  y  $\eta_{G.}$  son equivalencias débiles. Así pues,  $\text{Ho}(\mathbf{Simp}(Gp))$  y  $\text{Ho}(\mathbf{Simp}^n(Gp))$  son equivalentes.

Por último, puesto que ambas categorías  $\mathbf{Simp}(Gp)$  y  $\mathbf{Simp}^n(Gp)$  son punteadas, se tiene que sus respectivas teorías de homotopía son equivalentes. ■





### 3.3. ESTRUCTURAS DE MODELOS EN OTRAS CATEGORIAS DE $n$ -TIPOS.

En secciones precedentes, se ha analizado el problema de dotar de una estructura de modelos en el sentido de Quillen a ciertos modelos algebraicos de  $(n+1)$ -tipos de espacios, como son las categorías de  $n$ -hipergrupoides de grupos,  $n$ -Hypgd(Gp), y  $n$ -hipercomplejos cruzados de grupos,  $n$ -HXC(Gp). Existen, sin embargo, otros muchos, (ver [26], [5], [39]), entre los cuales destaca, por el interés creciente que ha suscitado en los últimos años, la categoría de los cat- $n$ -grupos en el sentido de Loday,  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$ .

El objetivo de esta sección es pues, estudiar la posibilidad de que  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  soporte una estructura de modelos como aplicación del método general de levantamiento de tales estructuras expuesto en 2.2., del mismo modo en que dicho método ha conducido a estructuras de este tipo para otras categorías de modelos de  $(n+1)$ -tipos, como son  $n$ -Hypgd(Gp) y  $n$ -HXC(Gp) (ver 3.1.).

Hagamos notar que, en cualquier caso, se trata únicamente de una conjetura, en relación a la cual ofreceremos los elementos que nos inducen a creer que tal estructura es posible en  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$ , usando el método del levantamiento basado en una adecuada situación de adjunción.

Notaremos por  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  a la categoría de cat- $n$ -grupos en el sentido de Loday, (ver definición explícita en [14], [39]), categoría que es equivalente a la categoría de todas las categorías internas en  $\text{Cat}^{n-1}(\text{Gp})$ ,  $\text{Cat}(\text{Cat}^{n-1}(\text{Gp}))$ . Usando cada una de las  $n$  estructuras de categoría que sustenta un cat- $n$ -grupo, se define un funtor multinervio;



$$N: \text{Cat}^n(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Simp}^n(\text{Gp})$$

que embebe  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  en  $\text{Simp}^n(\text{Gp})$  como la subcategoría plena y reflexiva formada por aquellos  $n$ -grupos simpliciales con complejo de Moore trivial, para cada una de las  $n$  direcciones independientes, en dimensiones  $\geq 2$  (ver [14]).

Nótese que, para  $n=1$ , la categoría  $\text{Cat}^1(\text{Gp})$  es la categoría de categorías internas en grupos (grupoides en grupos), y en consecuencia, el functor  $N$  es el functor nervio usual,  $N$ . El adjunto a izquierda de  $N$ , el functor *grupoide fundamental*  $\mathcal{P}: \text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Cat}^1(\text{Gp})$ , puede describirse como sigue, para cada grupo simplicial  $G_*$ :

$$\mathcal{P}(G_*) = \frac{G_1}{d_2 N_2(G_*)} \xrightleftharpoons[t]{s} G_0 \quad \text{Id}$$

donde los morfismos dominio, codominio e identidad están inducidos por  $d_0, d_1$  y  $s_0$  respectivamente.

En general, para  $n \geq 2$ , el functor reflector

$$\mathbb{P}: \text{Simp}^n(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Cat}^n(\text{Gp}),$$

está definido tomando grupoide fundamental en cada una de las  $n$  direcciones independientes, esto es,  $\mathbb{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_n$ .

Consideremos entonces la siguiente situación de adjunción:

$$\text{Cat}^n(\text{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{P}} \\ \xrightarrow{\text{N}} \end{array} \text{Simp}^n(\text{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{T}} \\ \xrightarrow{\bar{\text{W}}} \end{array} \text{Simp}(\text{Gp})$$

para la que proponemos las siguientes definiciones, en la línea habitual del método expuesto en el Capítulo 2.

**Definición 3.3.1.**

Un morfismo  $f$  en  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  es una fibración (respectivamente equivalencia débil) si  $\bar{\text{W}}\text{N}(f)$  es una fibración de grupos simpliciales (respectivamente equivalencia débil).

Un morfismo  $f$  en  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Para obtener una estructura de modelos cerrada en  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  -basada en las anteriores definiciones- como aplicación del Teorema 2.2.5., estudiemos la verificación de cada una de las hipótesis del mencionado criterio.

En este sentido, nótese en primer lugar que el funtor  $\text{N}$  preserva límites directos, ([34]), y, por tanto, los preserva el funtor  $\bar{\text{W}}\text{N}$ .

Por otra parte, el funtor  $\text{PT}:\text{Simp}(\text{Gp}) \longrightarrow \text{Cat}^n(\text{Gp})$  preserva equivalencias débiles dado que la unidad de la adjunción,

$$\eta_{G.} : G. \longrightarrow \bar{\text{W}}\text{NPT}G.,$$



induce isomorfismos en los grupos de homotopía  $\Pi_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , para cada grupo simplicial  $G_*$ , (ver [14]). En efecto, teniendo en cuenta que, para todo cat-n-grupo  $\mathcal{C}$ ,  $\overline{WN}\mathcal{C}$  es un grupo simplicial con complejo de Moore trivial en dimensiones  $\geq n+1$ , (ver [14]), siendo  $f.: X_* \longrightarrow Y_*$  una equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(Gp)$ , se tiene que  $\overline{WNPT}(f.)$  es equivalencia débil de grupos simpliciales, por el axioma CM2, para el siguiente cuadrado conmutativo: (naturalidad de la unidad)

$$\begin{array}{ccc}
 & & f. \\
 & X_* & \longrightarrow & Y_* \\
 \eta_{X_*} \downarrow & & & \downarrow \eta_{Y_*} \\
 \overline{WNPT}(X_*) & \longrightarrow & \overline{WNPT}(Y_*) \\
 & \overline{WNPT}(f.) & & 
 \end{array}$$

(Nótese que de este diagrama se tiene que  $\overline{WNPT}(f.)$  induce isomorfismos en los grupos de homotopía  $\Pi_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , lo que conduce a que  $\overline{WNPT}(f.)$  sea equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(Gp)$  puesto que los restantes grupos de homotopía son triviales).

En definitiva, si  $\overline{WNPT}(f.)$  es equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(Gp)$ , por definición se tiene que  $PT(f.)$  es equivalencia débil en  $\mathbf{Cat}^n(Gp)$ , es decir, el funtor  $PT$  preserva equivalencias débiles.

Sin embargo, como ocurría con  $\mathbf{Simp}^n(Gp)$ , (ver Capítulo 3, 3.2.), la counidad de la adjunción,  $\varepsilon: PT\overline{WN}\mathcal{C} \longrightarrow Id$ , no es un isomorfismo. No se tendría pues la estructura de modelos cerrada en  $\mathbf{Cat}^n(Gp)$  por aplicación estricta del Teorema 2.2.5., aunque la idea básica que subyace en su demostración sigue siendo válida si se demuestra el siguiente resultado (análogo al Lema 3.2.2.):

**Proposición 3.3.2.**

Para todo diagrama pushout en  $\text{Cat}^n(\text{Gp})$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} \text{PT}\Delta[s,k] & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{PT}\Delta[s] & \longrightarrow & \mathcal{C}', \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0, \end{array}$$

el morfismo  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$  es una equivalencia débil.



#### CAPITULO 4. ESTRUCTURAS DE MODELOS PARA n-TIPOS DE GRUPOS SIMPLICIALES.

La categoría de grupos simpliciales  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  proporciona, como es bien conocido, modelos algebraicos para todos los tipos de homotopía conexos y es, como ya ha quedado patente, un importante ejemplo de lo que es una categoría de modelos en el sentido de Quillen, lo que significa que en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es posible "hacer teoría de homotopía" como en las categorías de espacios topológicos, es decir, se tienen análogos de la mayoría de las construcciones y resultados que son inherentes a la clásica teoría de homotopía de espacios.

El primer objetivo de este capítulo es mostrar que dicha estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  puede ser generalizada, en el sentido de que pueden darse convenientes nociones de n-fibración, n-cofibración y n-equivalencia débil que proporcionan, para cada  $n \geq 1$ , una estructura de modelos cerrada en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (a la que nos referiremos como la n-estructura) obteniéndose además, cuando n tiende a infinito, la clásica estructura de modelos de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver [48]).

La comparación entre ambas estructuras (teorías) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , es posteriormente analizada mediante el par de funtores adjuntos (n+1)-esqueleto y (n+1)-coesqueleto,

$$\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{Sk}^{n+1}} \\ \xrightarrow{\mathbf{Cosk}^{n+1}} \end{array} \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

obteniéndose en particular una equivalencia de categorías (Corolario 4.3.2.),

$$\mathbf{Ho}_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \mid n\text{-cc}),$$



que muestra a la propia categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  como una categoría de modelos algebraicos de  $n$ -tipos de grupos simpliciales (y por tanto, de  $(n+1)$ -tipos de espacios conexos). Otras interesantes categorías de modelos algebraicos de tales tipos de homotopía han sido recordadas en el Capítulo 3, y en concreto, la categoría  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ , que fue allí dotada de una estructura de modelos de Quillen.

El objetivo final de este capítulo será pues, mostrar que, considerando en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  la  $n$ -estructura y en  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  la citada estructura de modelos (Teorema 3.1.2.) existe entre ellas, no sólo una equivalencia al nivel de categorías de homotopía (pues ambas modelan  $n$ -tipos de grupos simpliciales), sino que existe de hecho una equivalencia de teorías de homotopía, (ver [49]), lo que supone que la equivalencia entre las categorías de homotopía preserva toda la estructura extra (ver [48]).

Es de destacar finalmente, que si  $\underline{V}$  es una variedad de  $\Omega$ -grupos, ([39]), la categoría  $\mathbf{Simp}\underline{V}$  de objetos simpliciales en  $\underline{V}$  es una categoría de modelos cerrada como consecuencia del resultado general dado por Quillen en [48] (§4, Teorema 4), y que tal estructura puede ser generalizada sin dificultad en la misma línea en que se generaliza la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , es decir, que en  $\mathbf{Simp}\underline{V}$  pueden darse, para cada  $n \geq 1$ , convenientes nociones de  $n$ -fibración,  $n$ -cofibración y  $n$ -equivalencia débil que la dotan de una estructura de modelos cerrada, para cada  $n \geq 1$ .

En este mismo sentido de generalizar por un proceso canónico de truncación, una estructura de modelos sobre una categoría, hay que reseñar los resultados ofrecidos en [32] para la categoría de Complejos Cruzados, y en [28] para la categoría de espacios topológicos.



#### 4.1. TRUNCANDO LA ESTRUCTURA DE MODELOS DE $\text{Simp}(\text{Gp})$ .

Ofrecemos en esta sección diversas versiones truncadas de resultados conocidos sobre fibraciones (triviales) de grupos simpliciales, (ver [48]), que nos conducirán a convenientes definiciones y caracterizaciones de nuevas clases de morfismos en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  que llamaremos  $n$ -(co)-fibraciones (triviales), proporcionando, como posteriormente veremos en 4.2., una nueva truncada estructura de modelos en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  para cada  $n \geq 1$ .

##### Definición 4.1.1.

Diremos que un morfismo  $p.: E. \longrightarrow B.$  en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , si  $p.$  satisface la condición de Kan hasta dimensión  $n$ , es decir, el morfismo canónico

$$E_s \longrightarrow B_s \times_{\Lambda_k^s(B.)} \Lambda_k^s(E.)$$

es sobreyectivo para  $0 \leq k \leq s$  y  $0 < s \leq n$ , o dicho de otro modo, si  $p.$  satisface la condición de fibración de Kan, en el sentido usual:

Para toda colección de  $s$   $(s-1)$ -símplices  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s \in E_{s-1}$  compatibles en el sentido de que  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ ,  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , y para todo símlice  $y \in B_s$  tal que  $d_i y = p_{s-1}(x_i)$  para  $i \neq k$ , existe un símlice  $x \in E_s$  verificando  $d_i x = x_i$ ,  $i \neq k$ , y  $p_s(x) = y$ , para  $0 \leq k \leq s$  y  $0 < s \leq n$ .

A partir de este concepto de fibración de Kan truncada definiremos el concepto de  $n$ -fibración, como sigue:

**Definición 4.1.2.**

Diremos que un morfismo  $p.:E. \longrightarrow B.$  es una  $n$ -fibración,  $n>0$ , si  $p.$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$  y el morfismo inducido en el  $(n+1)$ -grupo de homotopía,

$$\Pi_{n+1}(E.) \xrightarrow{\bar{p}_{n+1}} \Pi_{n+1}(B.),$$

es sobreyectivo.

Nótese en primer lugar que esta definición generaliza la definición clásica de fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , ya que una  $\omega$ -fibración es una fibración de Kan.

Recordemos que una de las diversas definiciones equivalentes de fibración de Kan que aparecen en la literatura, expresada en términos de propiedad de levantamiento por la derecha (RLP), es la dada por Curtis en [20], según la cual un morfismo  $p.:E. \longrightarrow B.$  es una fibración de Kan si  $p.$  tiene la RLP con respecto a las inclusiones

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad s > 0$$

Esta "definición" de fibración de Kan, considerada por Quillen como caracterización de las mismas, (ver [48], Cap.II, § 2, Proposición 1), juega un papel fundamental en la demostración de que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es categoría de modelos cerrada, para la aplicación del llamado "argumento del objeto pequeño" (ver [48]).

La siguiente Proposición da ahora la correspondiente caracterización de las  $n$ -fibraciones, en términos de la propiedad de levantamiento por la derecha (RLP) respecto a convenientes familias de morfismos, cuyos dominios son objetos pequeños.



**Proposición 4.1.3.**

Si  $p.:E. \longrightarrow B.$  es cualquier morfismo de  $\mathbf{Simp}(Gp)$ , las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i)p. es una n-fibración.

ii)p. tiene la propiedad de levantamiento por la derecha (RLP) con respecto a las dos siguientes familias de inclusiones en  $\mathbf{SS}$ :

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s] \text{ para } 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2 \quad \text{y} \quad * \hookrightarrow S^{n+1}$$

donde  $*$  denota el conjunto simplicial generado por un único elemento.

iii)p. tiene la propiedad de levantamiento por la derecha (RLP) con respecto a las dos siguientes familias de morfismos en  $\mathbf{Simp}(Gp)$ :

$$F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s] \text{ para } 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2 \quad \text{y} \quad F* \longrightarrow FS^{n+1}$$

donde  $F:\mathbf{SS} \longrightarrow \mathbf{Simp}(Gp)$  es el funtor grupo libre.

**Demostración.**

La equivalencia entre ii) y iii) es consecuencia directa de la propiedad universal del funtor  $F$ . A lo largo de este capítulo, utilizaremos indistintamente ii) y iii) según la conveniencia del caso.

i) $\Rightarrow$ ii) Supongamos que  $p.$  es una n-fibración y debemos probar la existencia de levantamiento en cualesquiera diagramas conmutativos del tipo

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \Delta[s,k] & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B. \end{array} \quad 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2.$$

y del tipo

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{a_s} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ S^{n+1} & \xrightarrow{b_s} & B. \end{array}$$

Para los diagramas de tipo (1), consideremos el  $s$ -símplice de  $B.$ ,  $y \in B_s$ , cuyo morfismo representante es  $b_s$ , es decir,  $b_s(i_s) = y$ , y notemos que el morfismo simplicial  $a_s: \Delta[s, k] \rightarrow E.$  determina un elemento  $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s) \in \Lambda_k^s(E.)$ , definido de la forma siguiente:

$$x_i = a_{s-1}(d_i(i_s)), \quad i=0, \dots, s, \quad i \neq k.$$

Veamos que estos  $s$   $(s-1)$ -símplices de  $E.$  son compatibles:

$$\begin{aligned} \text{Para } i < j, \quad i, j \neq k, \quad d_i(x_j) &= d_i a_{s-1}(d_j(i_s)) = \\ &= a_{s-2}(d_i d_j(i_s)) = \\ &= a_{s-2}(d_{j-1} d_i(i_s)) = \\ &= d_{j-1} a_{s-1}(d_i(i_s)) = \\ &= d_{j-1}(x_i). \end{aligned}$$

Puesto que la conmutatividad del cuadrado (1) establece entonces que  $p_{s-1}(x_i) = d_i y$  para  $i \neq k$ , aplicando la condición de fibración de Kan al elemento

$$(y, (x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)) \in B_s \times \Lambda_k^s(E.)$$

$$\Lambda_k^s(B.)$$



(nótese que esta condición puede aplicarse para  $0 < s \leq n+2$  por ser  $p$ . una fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ ), existe un  $s$ -símplice  $x \in E_s$  que verifica  $d_i x = x_i$ ,  $i \neq k$ , y  $p_s(x) = y$ . El morfismo representante de este  $s$ -símplice de  $E$ ,  $x$ ,  $D.: \Delta[s] \longrightarrow E$ , es entonces un levantamiento para el diagrama (1). En efecto, por construcción del morfismo representante de un símplice, el morfismo  $D.: \Delta[s] \longrightarrow E$  asociado al símplice  $x \in E_s$  está definido por

$$D_s(i_s) = x$$

$$D_r(\beta) = d_{i_1} \dots d_{i_k} s_{j_1} \dots s_{j_q}(x) \quad \text{cuando} \quad \beta = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_k} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_q}.$$

Si denotamos por simplicidad  $j.$  a todas las inclusiones  $\Delta[s, k] \hookrightarrow \Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $0 < s \leq n+2$ ,  $D.$  será levantamiento en los diagramas (1) cuando verifique

$$D.j. = a. \quad \text{y}$$

$$p.D. = b..$$

Es claro, por la definición del morfismo  $D.$ , que si se obtiene conmutatividad en una dimensión, ésta puede hacerse extensiva a todas las dimensiones. Nótese entonces que se tiene:

$$p_s D_s(i_s) = p_s(x) = y = b_s(i_s).$$

$$D_{s-1} j_{s-1}(d_i(i_s)) = d_i D_s j_s(i_s) =$$

$$= d_i(x) =$$

$$= x_i =$$

$$= a_{s-1}(d_i(i_s)), \quad i=0, \dots, s, \quad i \neq k.$$

Por tanto,  $D.$  es un levantamiento para (1).

En cuanto al segundo tipo de diagramas, dado cualquier cuadrado conmutativo de la forma

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ S^{n+1} & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

consideremos el s3mplice  $y \in B_{n+1}$  representado por  $b.: S^{n+1} \rightarrow B.$ , y n3tese que  $d_i y = p_{n+1} a_{n+1} (*) = p_{n+1} (e) = e$  para  $i=0, \dots, n+1$ , por la conmutatividad del cuadrado (2). Podemos entonces considerar su clase de equivalencia en el  $(n+1)$ -grupo de homotop3a,  $\bar{y} \in \Pi_{n+1}(B.)$  y debido a que, por hip3tesis, el morfismo

$$\Pi_{n+1}(E.) \xrightarrow{\bar{p}_{n+1}} \Pi_{n+1}(B.),$$

es sobreyectivo, existe  $\bar{x} \in \Pi_{n+1}(E.)$  (es decir,  $x \in E_{n+1}$  con  $d_i x = e$ ,  $i=0, \dots, n+1$ ) tal que  $\bar{p}_{n+1}(\bar{x}) = \bar{y}$ .

Sea  $z \in B_{n+2}$  la homotop3a que existe entre  $p_{n+1}(x)$  e  $y$ , es decir,  $z$  verifica

$$\begin{aligned} d_{n+2} z &= y, \\ d_{n+1} z &= p_{n+1}(x) \quad y \\ d_i z &= s_n d_i p_{n+1}(x) = s_n d_i y \quad \text{para } i=0, \dots, n. \end{aligned}$$

Consideramos la siguiente colecci3n de  $(n+2)$   $(n+1)$ -s3mplices de  $E.$ :

$$\begin{aligned} x_i &= s_n d_i x, \quad i=0, \dots, n, & y \\ x_{n+1} &= x \end{aligned}$$



que, por las identidades simpliciales, satisfacen la condición de compatibilidad, esto es,  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  para  $i < j$ ,  $i, j \neq n+2$ , lo que reduce la comprobación de la compatibilidad al caso  $i=0, \dots, n$  y  $j=n+1$ :

$$d_i x_j = d_i x_{n+1} = d_i x = d_{j-1} x_i = d_n s_n d_i x = d_i x.$$

Nótese que, además,  $d_i z = p_{n+1}(x_i)$  para  $i \neq n+2$ , puesto que por ser  $z$  la homotopía entre  $p_{n+1}(x)$  é  $y$ , en particular,

$$\begin{aligned} d_{n+1} z &= p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x_{n+1}) && \text{y} \\ d_i z &= s_n d_i p_{n+1}(x) = p_{n+1}(s_n d_i x) = p_{n+1}(x_i) && \text{para } i=0, \dots, n. \end{aligned}$$

Se tiene pues un elemento del correspondiente producto fibrado,

$$(z, (x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})) \in B_{n+2} \times \begin{matrix} \Lambda_{n+2}^{n+2}(E.) \\ \Lambda_{n+2}^{n+2}(B.) \end{matrix}$$

y por el hecho de ser  $p.$  fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ , existe  $x' \in E_{n+2}$  tal que  $d_i x' = x_i$  si  $i \neq n+2$  y  $p_{n+2}(x') = z$ .

Para este  $(n+2)$ -símplice  $x'$ , se verifica, si  $i=0, \dots, n+1$ ,

$$d_i d_{n+2} x' = d_{n+1} d_i x' = d_{n+1} x_i = \begin{cases} d_{n+1} s_n d_i x = d_i x = e & \text{para } i=0, \dots, n \\ d_{n+1} x_{n+1} = d_{n+1} x = e & \text{para } i=n+1, \end{cases}$$

es decir,  $d_i d_{n+2} x' = e$  para  $i=0, \dots, n+1$ , y

$$p_{n+1}(d_{n+2} x') = d_{n+2} p_{n+2}(x') = d_{n+2} z = y.$$

Es pues claro que el levantamiento que buscamos para el diagrama (2),  $G.:S^{n+1} \longrightarrow E.$ , viene dado como el morfismo representante de  $d_{n+2}x'$ , lo que prueba ii).

ii) $\Rightarrow$ i) Recíprocamente demostremos que si  $p.:E. \longrightarrow B.$  tiene la RLP con respecto a los morfismos

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s] \text{ para } 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2 \quad \text{y} \quad * \hookrightarrow S^{n+1}$$

entonces  $p.$  es una  $n$ -fibración. Para ello, nótese en primer lugar, que si  $p.$  tiene la RLP con respecto a los morfismos

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s] \quad \text{para } 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2,$$

$p.$  es entonces una fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ , por el mismo argumento usado en la demostración i) $\Rightarrow$ ii), utilizado en este caso en la dirección opuesta.

Queda pues probar que el morfismo

$$\Pi_{n+1}(E.) \xrightarrow{\bar{p}_{n+1}} \Pi_{n+1}(B.),$$

es sobreyectivo.

Para ello, sea  $\bar{y} \in \Pi_{n+1}(B.)$  y consideremos cualquier representante de su clase de equivalencia,  $y \in B_{n+1}$  con  $d_i y = e$  para  $i=0, \dots, n+1$ . Siendo  $b.:S^{n+1} \longrightarrow B.$  el morfismo representante de  $y \in B_{n+1}$  y  $a.:* \longrightarrow E.$  el único morfismo simplicial que existe, puesto que  $d_i y = e$  para  $i=0, \dots, n+1$ , el diagrama construido a partir de ellos,



$$\begin{array}{ccc}
 * & \xrightarrow{a.} & E. \\
 \downarrow & & \downarrow p. \\
 S^{n+1} & \xrightarrow{b.} & B.
 \end{array}
 ,$$

es conmutativo y, por tanto, existe un levantamiento  $H.:S^{n+1} \longrightarrow E.$  para este diagrama. Consideramos entonces la siguiente composición,

$$\Delta[n+1] \longrightarrow S^{n+1} \xrightarrow{H.} E.$$

que, como morfismo representante, determina un  $(n+1)$ -símplice de  $E.$ ,  $x \in E_{n+1}$  verificando, por las propiedades de conmutación de  $H.$ , que  $d_i x = e$  para  $i=0, \dots, n+1$  y  $p_{n+1}(x)=y$ . En consecuencia podemos considerar su clase de equivalencia  $\bar{x} \in \Pi_{n+1}(E.)$  teniéndose que  $\bar{p}_{n+1}(\bar{x})=\bar{y}$ , esto es, que  $\bar{p}_{n+1}$  es sobreyectivo. ■

#### Observación.

Nótese que en el transcurso de la demostración se pone de manifiesto la siguiente equivalencia para cualquier morfismo de grupos simpliciales  $p.:E. \longrightarrow B.:$

$p.:E. \longrightarrow B.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  si y solamente si  $p.$  tiene la RLP con respecto a las inclusiones

$$\Delta[s,k] \hookrightarrow \Delta[s] \quad \text{para } 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n.$$

Nótese asimismo que, sin embargo, no es cierto que exista equivalencia entre la sobreyectividad de  $\bar{p}_{n+1}$  y el que  $p.$  tenga la RLP con respecto a la inclusión  $* \hookrightarrow S^{n+1}$ .

A continuación damos los siguientes resultados, versiones truncadas de los correspondientes resultados dados por Quillen para  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ :

**Lema 4.1.4.**

Todo morfismo de grupos simpliciales  $f.:X. \longrightarrow Y.$  tal que  $f_q : X_q \longrightarrow Y_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ , es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $f_q : X_q \longrightarrow Y_q$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$  y probemos  $f.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , comprobando que se tiene la condición de fibración de Kan en cualquier dimensión  $q$ , para  $0 \leq q \leq n$ .

Consideremos para ello una colección de  $q$   $(q-1)$ -símplices compatibles de  $X.$ ,

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_q \in X_{q-1}$$

tales que  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  para  $i < j$ ,  $i, j \neq k$  y sea  $y \in Y_q$  tal que  $d_i y = f_{q-1}(x_i)$  para  $i \neq k$ . Por ser  $f_q$  sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ , el subgrupo de  $X_q$

$$f_q^{-1}(y) = \{x \in X_q \text{ tales que } f_q(x) = y\}$$

es no vacío, y podemos escoger por tanto,  $v \in f_q^{-1}(y)$ .

Sea entonces

$$z_i = -d_i v + x_i, \quad \text{si } i \neq k$$

con la operación de grupo en  $X_{q-1}$ . Se obtienen de este modo  $q$   $(q-1)$ -símplices de  $X.$ , que resultan ser compatibles:



$$\begin{aligned}
d_{ij} z_i &= d_i (-d_j v + x_j) = \\
&= -d_i d_j v + d_i x_j = \\
&= -d_{j-1} d_i v + d_{j-1} x_i = \\
&= d_{j-1} (-d_i v + x_i) = \\
&= d_{j-1} z_i \quad \text{si } i < j, i, j \neq k.
\end{aligned}$$

$X.$  es un grupo simplicial y, en consecuencia, es de Kan; existe, pues,  $w \in X_q$  tal que  $d_i w = z_i$  para  $i \neq k$ . El  $q$ -símplice  $v+w$  de  $X.$  verifica entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d_i (v+w) &= d_i v + d_i w = d_i v + z_i = d_i v + (-d_i v + x_i) = x_i, \quad \text{si } i \neq k. \\
f_q (v+w) &= f_q (v) + f_q (w) = y + e = y,
\end{aligned}$$

donde  $f_q (w) = e$  se deduce de la propia construcción del símplice  $w$  en la demostración de que todo grupo simplicial es de Kan. Se tiene pues que  $f.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , ya que el argumento usado es la sobreyectividad del morfismo  $f.$  y ésta es válida para  $0 \leq q \leq n$ . ■

#### Lema 4.1.5.

Para todo morfismo de grupos simpliciales  $f.: X. \longrightarrow Y.$  son equivalentes:

- i)  $f_q : X_q \longrightarrow Y_q$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ .
- ii) El morfismo inducido en el complejo de Moore,  $N_q (f.): N_q (X.) \longrightarrow N_q (Y.)$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ .

#### Demostración.

i)  $\Rightarrow$  ii) Nótese en primer lugar que si el morfismo  $f_q : X_q \longrightarrow Y_q$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ , por el Lema 4.1.4.,  $f.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ .

Para probar entonces que  $N_q(f.):N_q(X.) \longrightarrow N_q(Y.)$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ , sea  $y \in N_q(Y.)$ ,  $0 \leq q \leq n$ , es decir,  $y \in Y_q$  con  $d_i y = e$  para  $i=0, \dots, q-1$ .

Consideramos la siguiente colección de  $q$   $(q-1)$ -símplices de  $X.$ , evidentemente compatibles:

$$x_i = e \in X_{q-1}, \text{ para } i=0, \dots, q-1,$$

para los que es claro que se tiene que  $d_i y = f_{q-1} x_i$  para  $i=0, \dots, q-1$ . Por ser  $f.$  una fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , existe  $x \in X_q$  tal que  $d_i x = x_i = e$  para  $i=0, \dots, q-1$  y  $f_q(x) = y$ , esto es, existe  $x \in N_q(X.)$  tal que  $N_q(f.)(x) = y$ . En definitiva,  $N_q(f.)$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ .

ii)  $\Rightarrow$  i) Recíprocamente, supongamos que  $N_q(f.)$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ , y demostremos que lo es  $f_q$ , por inducción sobre  $q$ .

Para  $q=0$  es claro que se tiene que  $f_0$  es sobreyectivo puesto que  $f_0 = N_0(f.)$ .

Supongamos entonces que  $f_{q-1}$  es sobreyectivo y sea  $y \in Y_q$ . Este  $q$ -símplice de  $Y.$  admite la siguiente descomposición (ver [16]):

$$y = \tilde{y} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} y'$$

en un  $q$ -símplice  $\tilde{y} \in N_q(Y.)$  y una suma de  $q$ -símplices degenerados, donde cada  $y' \in Y_{q-1}$ . Por hipótesis de inducción, existen  $x' \in X_{q-1}$  tal que  $f_{q-1}(x') = y'$  y por ser  $N_q(f.)$  sobreyectivo, existe  $\tilde{x} \in N_q(X.)$  tal que  $N_q(f.)(\tilde{x}) = \tilde{y}$ .

El  $q$ -símplice de  $X.$   $x = \tilde{x} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} x'$  verifica entonces que



$$\begin{aligned}
f_q(\tilde{x} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} x') &= f_q(\tilde{x}) + \sum_{\sigma} s_{\sigma} f_{q-1}(x') = \\
&= \tilde{y} + \sum_{\sigma} s_{\sigma} y' = \\
&= y.
\end{aligned}$$

Se tiene, pues,  $f_q: X_q \longrightarrow Y_q$  sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ . ■

Se tiene entonces el siguiente resultado para fibraciones de Kan truncadas en dimensión  $n$  (compárese con el correspondiente dado por Quillen para fibraciones de Kan, Capítulo 1, Proposición 1.1.IV.2.). Posteriormente obtendremos el resultado análogo, enunciado finalmente en términos de  $n$ -fibraciones.

**Lema 4.1.6.**

Para un morfismo  $p.: E. \longrightarrow B.$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , son equivalentes:

- i)  $p.$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ .
- ii)  $N_q(p.): N_q(E.) \longrightarrow N_q(B.)$  es sobreyectivo,  $0 < q \leq n$ .
- iii) El morfismo canónico

$$(p., \varepsilon)_q: E_q \longrightarrow B_q \times \begin{matrix} K(\Pi_0(E.), 0)_q \\ K(\Pi_0(B.), 0)_q \end{matrix}$$

es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ .

**Demostración.**

i)  $\Rightarrow$  ii) Supongamos que  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  y probemos que  $N_q(p.): N_q(E.) \longrightarrow N_q(B.)$  es sobreyectivo,  $0 < q \leq n$ . Para ello, sea  $y \in N_q(B.)$ ,  $0 < q \leq n$ , esto es,  $y \in B_q$  con  $d_i y = e$  para  $i=0, \dots, q-1$ .

Construimos entonces el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[q,q] & \xrightarrow{0} & E. \\
 \downarrow & & \downarrow p. \\
 \Delta[q] & \xrightarrow{b.} & B.
 \end{array}$$

donde  $b.$  es el morfismo representante de  $y \in N_q(B.)$  y  $0$  denota el morfismo simplicial que envía cualquier símplice de  $\Delta[q,q]$  al elemento neutro de  $E.$ . La conmutatividad del diagrama está asegurada puesto que  $d_i y = e$  para  $i=0, \dots, q-1$ .

Por la Proposición 4.1.3., puesto que  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , existe un levantamiento para este diagrama, es decir, existe  $D.: \Delta[q] \rightarrow E.$ . Llamando  $x$  al  $q$ -símplice de  $E.$  representado por  $D.$ , esto es,  $x = D_q(i) \in E_q$ , de las propiedades de conmutación del morfismo  $D.$  se tiene que  $d_i x = e$  para  $i=0, \dots, q-1$  y que  $p_q(x) = y$ .

En consecuencia,  $N_q(p.): N_q(E.) \rightarrow N_q(B.)$  es sobreyectivo, donde, por ser  $p.$  fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , el argumento es válido para  $0 < q \leq n$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii) Supongamos que el correspondiente morfismo inducido en el complejo de Moore,  $N_q(p.): N_q(E.) \rightarrow N_q(B.)$ , es sobreyectivo para  $0 < q \leq n$  y demostremos que el morfismo canónico

$$(p., \varepsilon)_q : E_q \longrightarrow B_q \times \begin{array}{c} K(\Pi_0(E.), 0)_q \\ K(\Pi_0(B.), 0)_q \end{array}$$

obtenido del siguiente diagrama pullback



$$\begin{array}{ccc}
 E. & \xrightarrow{p.} & \\
 \searrow (p., \varepsilon) & & \downarrow \\
 B. \times K(\Pi_0(E.), 0) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & B. \\
 \downarrow K(\Pi_0(B.), 0) & & \downarrow \\
 K(\Pi_0(E.), 0) & \xrightarrow{K(\bar{p}_0, 0)} & K(\Pi_0(B.), 0)
 \end{array}$$

es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ , probando, por el Lema 4.1.5., que lo es el correspondiente morfismo inducido en el complejo de Moore,

$$N_q(p., \varepsilon): N_q(E.) \longrightarrow N_q \left( \begin{array}{c} B. \times K(\Pi_0(E.), 0) \\ K(\Pi_0(B.), 0) \end{array} \right)$$

para  $0 \leq q \leq n$ .

En primer lugar, observamos que el codominio del morfismo  $N_q(p., \varepsilon)$  es exactamente  $N_q(B.)$ , esto es, que

$$N_q \left( \begin{array}{c} B. \times K(\Pi_0(E.), 0) \\ K(\Pi_0(B.), 0) \end{array} \right) = N_q(B.), \quad \text{si } q > 0.$$

Efectivamente, teniendo en cuenta que para todo grupo  $G$  con elemento neutro  $e$ , se verifica

$$N_q(K(G, 0)) = \begin{cases} G & \text{si } q=0 \\ e & \text{si } q>0 \end{cases} ,$$

es claro que, puesto que  $N_q(K(\Pi_0(E.),0))=N_q(K(\Pi_0(B.),0))=e$  para  $q>0$ , se tiene

$$N_q(B.) \times \frac{N_q(K(\Pi_0(E.),0))}{N_q(K(\Pi_0(B.),0))} = N_q(B.), \text{ para } q>0.$$

Por otra parte, por la propiedad universal del anterior diagrama pullback, existe un único morfismo de grupos

$$N_q \left( \begin{array}{c} B. \times K(\Pi_0(E.),0 \\ K(\Pi_0(B.),0) \end{array} \right) \longrightarrow N_q(B.) \times \frac{N_q(K(\Pi_0(E.),0))}{N_q(K(\Pi_0(B.),0))} = N_q(B.)$$

que, por la mencionada propiedad universal de la que ha sido obtenido, resulta ser el morfismo inducido en los correspondientes complejos de Moore por la proyección  $pr_1: B. \times \frac{K(\Pi_0(E.),0)}{K(\Pi_0(B.),0)} \longrightarrow B..$

Por ser  $pr_1$  sobreyectivo en todas las dimensiones se tiene que  $N_q(pr_1)$  lo es (ver [48], Cap.II, § 3. Lema 5); en particular  $N_q(pr_1)$  es sobreyectivo para  $q>0$ , y en consecuencia,

$$\frac{N_q \left( \begin{array}{c} B. \times K(\Pi_0(E.),0 \\ K(\Pi_0(B.),0) \end{array} \right)}{\text{Ker}(N_q(pr_1))} \cong \text{Im}N_q(pr_1) = N_q(B.), \text{ } q>0.$$

Puesto que el funtor complejo de Moore  $N$  cumple que un morfismo  $f$ . en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  es inyectivo si y solamente si  $Nf$ . es inyectivo, (ver [48], Cap.II, § 3. Lema 5), se tiene que  $\text{Ker}(N_q(pr_1))$  es trivial, como probamos a continuación:



$$\begin{aligned}
\text{Ker}(N_q(\text{pr}_1)) &= N_q(\text{Ker pr}_1) = \\
&= N_q(\{(y,x) \in B_0 \times K(\Pi_0(E_0), 0) \text{ con } \text{pr}_1(y,x) = y=e\}) = \\
&\quad K(\Pi(B_0), 0) \\
&= N_q(\{(e,x) \in B_0 \times K(\Pi_0(E_0), 0)\}) = \\
&\quad K(\Pi(B_0), 0) \\
&= N_q(x \in K(\Pi_0(E_0), 0) \text{ con } K(\bar{p}_0, 0)(x) = e) = \\
&= N_q(\text{ker } K(\bar{p}_0, 0)) = \\
&= e,
\end{aligned}$$

puesto que el morfismo  $K(\bar{p}_0, 0)$  es un morfismo simplicial entre grupos simpliciales constantes,  $K(\Pi_0(E_0), 0)$  y  $K(\Pi_0(B_0), 0)$ , cuyas caras y degeneraciones (en particular sus morfismos cara) son la identidad en todos los casos. En definitiva se ha probado que

$$N_q \left( \begin{array}{c} B_0 \times K(\Pi_0(E_0), 0) \\ K(\Pi_0(B_0), 0) \end{array} \right) = N_q(B_0), \quad \text{si } q > 0.$$

lo que supone que, para probar que el morfismo  $N_q(p., \varepsilon)$  es sobreyectivo, es necesaria la siguiente disyunción de casos:

Para  $0 < q \leq n$  es evidente que  $N_q(p., \varepsilon)$  es sobreyectivo puesto que  $N_q(p., \varepsilon) = N_q(p.)$  y éste es sobreyectivo por hipótesis.

Supongamos entonces que  $q=0$  y sea  $(y, \bar{x}) \in B_0 \times \Pi_0(E_0)$ , esto es,  $y \in B_0$  y  $x \in E_0$  con  $\bar{p}_0(x) = y$ . Existe pues una homotopía entre ellos,  $w \in B_1$  tal que  $d_0 w = p_0(x)$  y  $d_1 w = y$ . Nótese que, en este caso,  $w - s_0 p_0(x) \in N_1(B_0)$  puesto que

$$\begin{aligned}
d_0(w - s_0 p_0(x)) &= d_0 w - d_0 s_0 p_0(x) = \\
&= d_0 w - p_0(x) = \\
&= d_0 w - d_0 w = \\
&= e.
\end{aligned}$$

Por ser  $N_1(p_0)$  sobreyectivo, existe  $z \in N_1(E)$  (nótese que  $d_0 z = e$ ) tal que  $p_1(z) = w - s_0 p_0(x)$ ; el 0-símplice  $d_1 z + x$  es, entonces, la preimagen buscada para  $(y, \bar{x})$ , esto es,

$$N_0(p_0, \varepsilon)(d_1 z + x) = (p_0, \varepsilon)_0(d_1 z + x) = (p_0(d_1 z + x), \overline{d_1 z + x}) = (y, \bar{x})$$

debido a que, por una parte,

$$\begin{aligned}
p_0(d_1 z + x) &= d_1 p_1(z) + p_0(x) = \\
&= d_1(w - s_0 p_0(x)) + p_0(x) = \\
&= d_1 w - d_1 s_0 p_0(x) + p_0(x) = \\
&= y - p_0(x) + p_0(x) = \\
&= y,
\end{aligned}$$

y además,  $\overline{d_1 z + x} = \bar{x}$  donde la homotopía que los relaciona es  $z + s_0 x$  ya que

$$\begin{aligned}
d_0(z + s_0 x) &= d_0 z + d_0 s_0(x) = e + x = x \quad y \\
d_1(z + s_0 x) &= d_1 z + d_1 s_0 x = d_1 z + x.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que  $N_0(p_0, \varepsilon)$  es sobreyectivo y, en definitiva, que lo es  $N_q(p_0, \varepsilon)$  para  $0 \leq q \leq n$ . En consecuencia, por el Lema 4.1.5., el morfismo canónico  $(p_0, \varepsilon)_q$  es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$ .



iii)⇒i) Supongamos para terminar, que el morfismo

$$(p., \varepsilon) : E_q \longrightarrow B_q \times_{K(\Pi_0(B.), 0)_q} K(\Pi_0(E.), 0)_q$$

es sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n$  y probemos que  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ .

Nótese, en primer lugar, que por aplicación del Lema 4.1.4., se tiene que  $(p., \varepsilon)$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ . A partir del diagrama pullback del cual se obtiene el morfismo  $(p., \varepsilon)$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 E. & \xrightarrow{p.} & B. \\
 \searrow (p., \varepsilon) & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 B. \times K(\Pi_0(E.), 0) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & B. \\
 \downarrow K(\Pi_0(B.), 0) & & \downarrow \\
 K(\Pi_0(E.), 0) & \xrightarrow{K(\bar{p}_0, 0)} & K(\Pi_0(B.), 0)
 \end{array}$$

y puesto que  $p.$  se tiene como composición de los morfismos  $(p., \varepsilon)$  y la proyección a  $B.$ ,  $\text{pr}_1$ :

$$\begin{array}{ccc}
 E. & \xrightarrow{(p., \varepsilon)} & B. \times K(\Pi_0(E.), 0) \xrightarrow{\text{pr}_1} B. \\
 & & \downarrow \\
 & & K(\Pi_0(B.), 0) \\
 & \xrightarrow{p.} & 
 \end{array}$$

es claro que  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  cuando lo sea la proyección  $\text{pr}_1$ .

El morfismo  $K(\bar{p}_0, 0): K(\Pi_0(E.), 0) \longrightarrow K(\Pi_0(B.), 0)$  es el morfismo simplicial constante  $\bar{p}_0: \Pi_0(E.) \longrightarrow \Pi_0(B.)$  donde los morfismos cara y degeneración para los grupos simpliciales  $K(\Pi_0(E.), 0)$  y  $K(\Pi_0(B.), 0)$  son identidades en cada caso. Por tanto es claro que  $K(\bar{p}_0, 0)$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  (aun más, es fibración de Kan).

Por la observación hecha a la Proposición 4.1.3., el morfismo  $K(\bar{p}_0, 0)$  tiene entonces la RLP con respecto a las inclusiones

$$\Delta[s, k] \hookrightarrow \Delta[s] \quad , 0 \leq k \leq s, 0 < s \leq n.$$

Puesto que la proyección  $pr_1$  se ha obtenido de un diagrama pullback, por la propiedad universal de éste, se tiene que  $pr_1$  tiene igualmente la RLP con respecto a las inclusiones

$$\Delta[s, k] \hookrightarrow \Delta[s] \quad , 0 \leq k \leq s, 0 < s \leq n.$$

y, en consecuencia,  $pr_1$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ . En definitiva,  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ . ■

El Lema 4.1.4. puede, como consecuencia de estos resultados, reenunciarse como una condición necesaria y suficiente, en el siguiente Lema:

**Lema 4.1.7.**

Para todo morfismo de grupos simpliciales  $f.: X. \longrightarrow Y.$ , son equivalentes:

- i)  $f_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ .
- ii)  $f.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  y el morfismo inducido  $\bar{f}_0: \Pi_0(X.) \longrightarrow \Pi_0(Y.)$  es sobreyectivo.



**Demostración.**

i)⇒ii) Si  $f_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ , por el Lema 4.1.4., únicamente hay que probar que  $\bar{f}_0: \Pi_0(X.) \longrightarrow \Pi_0(Y.)$  es sobreyectivo, lo cual es claro puesto que  $f_0$  lo es.

ii)⇒i) Recíprocamente, supongamos que  $f.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  y  $\bar{f}_0$  es sobreyectivo. Por el Lema 4.1.6., si  $f.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ , el morfismo inducido en el complejo de Moore,  $N_q(f.)$ , es sobreyectivo para  $0 < q \leq n$ . Nótese que, por el Lema 4.1.5.,  $f_q$  será sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ , si probamos que lo es  $N_0(f.) = f_0: X_0 \longrightarrow Y_0$ .

Para ello, sea  $y \in Y_0$  y consideremos su clase  $\bar{y} \in \Pi_0(Y.)$ . Puesto que, por hipótesis,  $\bar{f}_0$  es sobreyectivo, existe  $\bar{x} \in \Pi_0(X.)$  tal que  $\bar{f}_0(\bar{x}) = \bar{y}$ . Sea  $w \in Y_1$  la homotopía existente entre ellos, esto es,

$$\begin{aligned} d_1 w &= y & y \\ d_0 w &= f_0(x). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que el 1-símplice de  $Y.$   $w - s_0 f_0(x) \in N_1(Y.)$  puesto que

$$\begin{aligned} d_0(w - s_0 f_0(x)) &= d_0 w - d_0 s_0 f_0(x) = \\ &= d_0 w - f_0(x) = \\ &= e, \end{aligned}$$

y, por ser  $N_q(f.)$ , es sobreyectivo para  $0 < q \leq n$ , en particular para  $q=1$ , existe  $z \in N_1(X.)$  (nótese que  $d_0 z = e$ ) tal que  $f_1(z) = w - s_0 f_0(x)$ . El 0-símplice de  $X.$   $d_1 z + x$  es, entonces, la preimagen del 0-símplice y dado originalmente:

$$\begin{aligned}
f_0(d_1 z+x) &= d_1 f_1(z) + f_0(x) = \\
&= d_1(w-s_0 f_0(x)) + f_0(x) = \\
&= d_1 w - d_1 s_0 f_0(x) + f_0(x) = \\
&= d_1 w - f_0(x) + f_0(x) = \\
&= y,
\end{aligned}$$

lo que demuestra que  $f_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ . ■

Estas versiones truncadas de los resultados sobre fibraciones, permiten ahora la siguiente caracterización para  $n$ -fibraciones.

**Proposición 4.1.8.**

Para un morfismo  $p.: E. \longrightarrow B.$  de grupos simpliciales son equivalentes:

i)  $p.$  es  $n$ -fibración.

ii) Son sobreyectivos los siguientes morfismos:

ii<sub>1</sub>) El morfismo inducido en el complejo de Moore,

$$N_q(p.): N_q(E.) \longrightarrow N_q(B.) \text{ para } 0 < q \leq n+2$$

ii<sub>2</sub>) El morfismo inducido en el  $(n+1)$ -grupo de homotopía,

$$\bar{p}_{n+1}: \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.).$$

iii) Son sobreyectivos los siguientes morfismos:

iii<sub>1</sub>) El morfismo canónico

$$(p., \varepsilon)_q: E_q \longrightarrow (B. \times K(\Pi_0(E.), 0))_q, \text{ para } 0 \leq q \leq n+2.$$

$$K(\Pi_0(B.), 0)$$



iii<sub>2</sub>) El morfismo inducido en el (n+1)-grupo de homotopía,

$$\bar{p}_{n+1} : \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.).$$

**Demostración.**

i)⇒ii) Según la Definición 4.1.2., p. es n-fibración si es fibración de Kan truncada en dimensión n+2 y el morfismo  $\bar{p}_{n+1} : \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.)$  es sobreyectivo. La condición ii<sub>2</sub>) se verifica por tanto.

Por otra parte, si p. es fibración de Kan truncada en dimensión n+2, por el Lema 4.1.6., se tiene ii<sub>1</sub>).

ii)⇒iii) Puesto que las condiciones ii<sub>2</sub>) y iii<sub>2</sub>) son la misma, es claro que únicamente hay que probar que ii<sub>1</sub>) implica iii<sub>1</sub>), lo cual se deduce directamente del Lema 4.1.6.

iii)⇒i) Es consecuencia de nuevo del Lema 4.1.6., por el cual se tiene que p. es una fibración de Kan truncada en dimensión n+2. Por último, nótese que la condición iii<sub>2</sub>), es decir, el morfismo  $\bar{p}_{n+1} : \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.)$  es sobreyectivo, vía la Definición 4.1.2., determina que p. sea n-fibración. ■

Se tiene entonces, como consecuencia de esta Proposición, el análogo del conocido resultado de que todo grupo simplicial, con la estructura clásica de modelos de Quillen, es fibrante.

**Corolario 4.1.9.**

Todo objeto G. en **Simp(Gp)** es n-fibrante, n>0, esto es, el único morfismo simplicial  $G. \longrightarrow *$  es una n-fibración.

**Demostración.**

Es claro que el morfismo inducido en el complejo de Moore,  $N_q(G.) \longrightarrow *$  es sobreyectivo para  $0 < q \leq n+2$  así como que es sobreyectivo el inducido en el  $(n+1)$ -grupo de homotopía. Por aplicación de la Proposición 4.1.8.ii), se tiene entonces el resultado. ■

A continuación, enunciaremos y demostraremos los resultados truncados de los obtenidos por Quillen para fibraciones triviales. Comenzamos, pues, con la definición de  $n$ -equivalencia débil:

**Definición 4.1.10.**

Un morfismo de grupos simpliciales  $f.:X. \longrightarrow Y.$  es una  $n$ -equivalencia débil,  $n > 0$ , si  $f.$  induce isomorfismos en los primeros  $n+1$  grupos de homotopía, esto es,

$$\bar{f}_i : \Pi_i(X.) \longrightarrow \Pi_i(Y.) \text{ es isomorfismo para } 0 \leq i \leq n.$$

Por tanto una  $n$ -fibración trivial,  $n > 0$ , es todo morfismo de grupos simpliciales que sea simultáneamente  $n$ -fibración y  $n$ -equivalencia débil.

Se tiene la siguiente caracterización de las  $n$ -fibraciones triviales.

**Proposición 4.1.11.**

Para todo morfismo  $p.:E. \longrightarrow B.$  en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  son equivalentes:

- i)  $p.$  es una  $n$ -fibración trivial.
- ii)  $p.$  tiene la RLP con respecto a las dos siguientes familias de morfismos en  $\text{SS}$ :



$$\Delta[s] \longrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq s \leq n+1, \quad \text{y} \quad \Delta[n+2, k] \longrightarrow \Delta[n+2], \quad 0 \leq k \leq n+2.$$

(o, equivalentemente, con respecto a las dos siguientes familias de morfismos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  inducidas por las anteriores, vía el funtor grupo libre,

$$F\Delta[s] \longrightarrow F\Delta[s], \quad 0 \leq s \leq n+1, \quad \text{y} \quad F\Delta[n+2, k] \longrightarrow F\Delta[n+2], \quad 0 \leq k \leq n+2).$$

**Demostración.**

i)  $\Rightarrow$  ii) En primer lugar nótese que, por ser  $p$ . una  $n$ -fibración, por la Proposición 4.1.3.,  $p$ . tiene la RLP con respecto a las familias de morfismos de  $\mathbf{SS}$ :

$$\Delta[n+2, k] \longrightarrow \Delta[n+2], \quad 0 \leq k \leq n+2$$

Por tanto, hay que probar únicamente que  $p$ . tiene la RLP con respecto a

$$\Delta[s] \longrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq s \leq n+1.$$

Para ello, consideremos cualquier diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s] & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B. \end{array} \quad 0 \leq s \leq n+1$$

Para  $s=0$ , puesto que el morfismo inclusión  $\Delta[0] \longrightarrow \Delta[0]$  se transforma en este caso en identidad, encontrar levantamiento en el correspondiente diagrama equivale a probar que  $p_0$  es sobreyectivo. Para ello, sea  $y \in B_0$  y consideremos su clase de equivalencia,  $\bar{y}$ , en  $\Pi_0(B.)$ . Puesto que  $\bar{p}_0: \Pi_0(E.) \longrightarrow \Pi_0(B.)$  es un isomorfismo por hipótesis, es, en particular, sobreyectivo, y en consecuencia existe  $\bar{x} \in \Pi_0(E.)$  tal que  $\bar{p}_0(\bar{x}) = \bar{y}$ .

Sea  $z \in B_1$  la homotopía que existe entre  $p_0(x)$  e  $y$ , es decir,  $z \in B_1$  verificando que  $d_0 z = p_0(x)$  y  $d_1 z = y$ .

Por hipótesis,  $p$  es  $n$ -fibración, y en particular, es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ . Aplicando entonces la condición de fibración de Kan al par  $(x, z) \in B_1 \times \Lambda_1^1(E.)$  existe  $x' \in E_1$  tal que  $d_0 x' = x$  y  $p_1(x') = z$ . El 0-símplice  $d_1 x' \in E_0$  verifica que  $p_0(d_1 x') = d_1 p_1(x') = d_1 z = y$ . Esto demuestra que  $p_0$  es sobreyectivo.

Probemos a continuación que existe levantamiento en cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s] & \xrightarrow{a_s} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b_s} & B. \end{array} \quad 0 < s \leq n+1$$

El morfismo simplicial  $b_s: \Delta[s] \rightarrow B.$  es el morfismo representante de un cierto  $s$ -símplice  $y \in B_s$ . Por otra parte, el morfismo simplicial dado  $a_s: \Delta[s] \rightarrow E.$  determina un elemento del núcleo simplicial  $\Lambda_s(E.)$  (ver Capítulo 1, Ejemplo IV). Sea pues  $(x_0, \dots, x_{s-1}, x_s)$  el elemento de  $\Lambda_s(E.)$  determinado por  $a_s$ , es decir,  $x_i \in E_{s-1}$  verificando que  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  para  $i < j$ ,  $i, j = 0, \dots, s$ .

Debido a la conmutatividad del diagrama dado, se tiene que  $d_i y = p_{s-1}(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, s$ . En particular,  $d_i y = p_{s-1}(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, s-1$ , es decir, podemos considerar el siguiente elemento del correspondiente producto fibrado,

$$(y, (x_0, \dots, x_{s-1})) \in B_s \times \begin{array}{c} \Lambda_s^s(E.) \\ \Lambda_s^s(B.) \end{array}$$



Por ser  $s \leq n+1$  y  $p_s$  una fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ , existe  $\alpha \in E_s$  tal que  $d_i \alpha = x_i$  para  $i \neq s$  y  $p_s(\alpha) = y$ . Veamos en primer lugar que  $d_i(x_s - d_s \alpha) = e$  para  $i=0, \dots, s-1$ , lo cual permitirá considerar su clase de equivalencia  $\overline{x_s - d_s \alpha} \in \Pi_{s-1}(E)$ :

$$\begin{aligned} d_i(x_s - d_s \alpha) &= d_i x_s - d_i d_s \alpha = \\ &= d_i x_s - d_{s-1} d_i \alpha = \\ &= d_i x_s - d_{s-1} x_i = \quad [x_i \text{ son compatibles}] \\ &= e. \end{aligned}$$

Además se verifica que  $p_{s-1}(x_s - d_s \alpha) = e$ :

$$\begin{aligned} p_{s-1}(x_s - d_s \alpha) &= p_{s-1}(x_s) - p_{s-1}(d_s \alpha) = \\ &= d_s y - d_s p_s(\alpha) = \\ &= d_s y - d_s y = \\ &= e, \end{aligned}$$

teniéndose en consecuencia que  $\overline{x_s - d_s \alpha} \in \text{Ker } \overline{p_{s-1}}$ . Puesto que  $\overline{p_{s-1}}$  es un isomorfismo, en particular, inyectivo, se tiene que  $\overline{x_s - d_s \alpha} = \overline{e}$ . Sea  $\alpha' \in E_s$  la homotopía existente entre  $x_s - d_s \alpha$  y el neutro  $e$ , es decir,  $\alpha'$  verifica que

$$\begin{aligned} d_s \alpha' &= x_s - d_s \alpha \\ d_{s-1} \alpha' &= e \quad \text{y} \\ d_i \alpha' &= s_{s-2} d_i(x_s - d_s \alpha) = s_{s-2} d_i e = e \quad \text{si } i=0, \dots, s-2, \end{aligned}$$

lo que en definitiva conduce a que  $d_i \alpha' = e$  para  $i=0, \dots, s-1$ .

Consideremos el  $s$ -símplice de  $E$ .  $\alpha'' = \alpha' + \alpha$ , para el cual se verifica, como veremos a continuación, que  $d_i(p_s(\alpha'') - y) = e$ , si  $i=0, \dots, s$ . Esto permitirá entonces considerar la clase de equivalencia de  $p_s(\alpha'') - y$  en  $\Pi_s(B)$ ,  $\overline{p_s(\alpha'') - y}$ . Para probar lo que deseamos, esto es, que  $d_i(p_s(\alpha'') - y) = e$ , (\*\*), para  $i=0, \dots, s$ , veamos previamente que  $d_i \alpha'' = x_i$ , (\*).

Para demostrar (\*) consideramos los siguientes casos, utilizando las propiedades de los s-símplices de E.,  $\alpha$  y  $\alpha'$  expuestas anteriormente:

$$\begin{aligned} \text{Si } i=0, \dots, s-1, \quad d_i \alpha'' &= d_i \alpha' + d_i \alpha = \\ &= e + d_i \alpha = \\ &= x_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } i=s, \quad d_s \alpha'' &= d_s \alpha' + d_s \alpha = \\ &= x_s - d_s \alpha + d_s \alpha = \\ &= x_s. \end{aligned}$$

Esto prueba entonces (\*\*), ya que

$$\begin{aligned} d_i (p_s(\alpha'') - y) &= d_i p_s(\alpha'') - d_i y = \\ &= p_{s-1}(d_i \alpha'') - d_i y = \quad [\text{por (*)}] \\ &= p_{s-1}(x_i) - d_i y = \\ &= e, \quad \text{para } i=0, \dots, s. \end{aligned}$$

En definitiva, podemos considerar la clase de equivalencia de  $p_s(\alpha'') - y$  en  $\Pi_s(B.)$ ,  $\overline{p_s(\alpha'') - y}$ ; puesto que  $\overline{p_s}$  es un epimorfismo para  $0 < s \leq n+1$  (de hecho es un isomorfismo hasta dimensión n, y  $\overline{p}_{n+1}$  es epimorfismo por ser p. una n-fibración), existe  $\overline{z} \in \Pi_s(E.)$  tal que  $\overline{p_s(z)} = \overline{p_s(\alpha'') - y}$ . Para su uso posterior, nótese que si  $\overline{z} \in \Pi_s(E.)$ , cualquier representante  $z \in E_s$  de  $\overline{z} \in \Pi_s(E.)$  verifica  $d_i z = e$  para  $i=0, \dots, s$ .

Sea  $w \in B_{s+1}$  la homotopía entre  $p_s(\alpha'') - y$  y  $p_s(z)$ , esto es,  $w \in B_{s+1}$  verificando que

$$\begin{aligned} d_{s+1} w &= p_s(\alpha'') - y \\ d_s w &= p_s(z) \\ d_i w &= s_{s-1} d_i p_s(z) = \\ &= s_{s-1} d_i (p_s(\alpha'') - y) = \quad [\text{por (**)}] \\ &= e, \quad i=0, \dots, s-1, \end{aligned}$$



por lo cual, puede considerarse el siguiente elemento del producto fibrado:

$$(w, (e, \dots^s e, z)) \in B_s \times \Lambda_{s+1}^{s+1}(E.),$$

$$\Lambda_{s+1}^{s+1}(B.)$$

(los  $s$ -símplices de  $E.$   $(e, \dots^s e, z)$  son claramente compatibles ya que, como se hizo notar anteriormente,  $d_i z = e$  para  $i=0, \dots, s$ ).

Aplicando entonces la condición de fibración de Kan para  $p.$  a dicho elemento, puesto que  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$  por hipótesis, se tiene que existe  $\lambda \in E_{s+1}$  verificando  $d_i \lambda = e$ , si  $i=0, \dots, s-1$ ,  $d_s \lambda = z$  y  $p_{s+1}(\lambda) = w$ .

Finalmente, el levantamiento  $L.: \Delta[s] \longrightarrow E.$ , buscado para el diagrama dado originalmente,

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s] & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & \nearrow L. & \downarrow p. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B. \end{array} \quad 0 \leq s \leq n+1,$$

está dado como el morfismo representante del  $s$ -símplice de  $E.$   $x = -d_{s+1} \lambda + \alpha''$ , ya que éste verifica que

$$\begin{aligned} d_i x &= d_i (-d_{s+1} \lambda + \alpha'') = \\ &= -d_i d_{s+1} \lambda + d_i \alpha'' = \quad [\text{por } (*)] \\ &= -d_s d_i \lambda + x_i = \\ &= -d_s e + x_i = \\ &= x_i \quad \text{para } i=0, \dots, s-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_s x &= d_s (-d_{s+1} \lambda + \alpha'') = \\
&= -d_s d_s \lambda + d_s \alpha'' = && \text{[por (*)]} \\
&= -d_s z + x_i = && [\bar{z} \in \Pi_s(E.)] \\
&= e + x_s = \\
&= x_s,
\end{aligned}$$

es decir,  $d_i x = x_i$  para  $i=0, \dots, s$ , y por tanto  $L$ . hace conmutar el triángulo superior del diagrama.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
p_s(x) &= p_s (-d_{s+1} \lambda + \alpha'') = \\
&= -p_s (d_{s+1} \lambda) + p_s (\alpha'') = \\
&= -d_{s+1} p_{s+1} (\lambda) + p_s (\alpha'') = \\
&= -d_{s+1} w + p_s (\alpha'') = \\
&= y - p_s (\alpha'') + p_s (\alpha'') = \\
&= y,
\end{aligned}$$

lo que se traduce en que  $L$ . verifica que  $p.L. = b..$

ii)  $\Rightarrow$  i) Recíprocamente, supongamos que  $p$ . tiene la RLP con respecto a las familias de morfismos en  $SS$

$$\Delta[s] \longrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq s \leq n+1, \quad \text{y} \quad \Delta[n+2, k] \longrightarrow \Delta[n+2], \quad 0 \leq k \leq n+2.$$

y demostraremos que  $p$ . es una  $n$ -fibración trivial, en dos pasos:

1. En primer lugar, probaremos que si  $p$ . tiene la RLP con respecto a

$$\Delta[s] \longrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq s \leq n+1,$$

entonces el morfismo  $\bar{p}_s$  es sobreyectivo,  $0 \leq s \leq n+1$ , y  $\bar{p}_{s-1}$  es inyectivo,  $0 < s \leq n+1$ , lo que conduce a  $\bar{p}_{n+1}$  sobreyectivo y  $\bar{p}_i$  isomorfismo para  $0 \leq i \leq n$ . Nótese que, en particular,  $p$ . será una  $n$ -equivalencia débil.



Para demostrar que  $\bar{p}_s$  es sobreyectivo,  $0 \leq s \leq n+1$ , sea  $\bar{y} \in \Pi_s(B.)$  y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s] & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

donde  $b.: \Delta[s] \longrightarrow B.$  es el morfismo representante de cualquier  $s$ -símplice  $y \in B_s$ , representante de la clase  $\bar{y} \in \Pi_s(B.)$ , y el morfismo simplicial  $a.: \Delta[s] \longrightarrow E.$  es el determinado, según el razonamiento hecho en la anterior implicación, por el elemento del núcleo simplicial  $(e, \dots, e)$ . Es claro, pues, que este diagrama conmuta puesto que, por ser  $y$  un símplice representante de la clase  $\bar{y} \in \Pi_s(B.)$ , se tiene que  $d_i y = e$ ,  $i=0, \dots, s$ .

Por hipótesis, existe levantamiento para este diagrama,  $D.: \Delta[s] \longrightarrow E.$ . Considerando entonces el  $s$ -símplice de  $E.$  representado por  $D.$ ,  $x = D_s(i_s)$ , las propiedades de conmutación del morfismo  $D.$  se traducen en las siguientes propiedades de  $x$ :

$$\begin{aligned} d_i x &= e, \text{ para } i=0, \dots, s & \text{ y} \\ p_s(x) &= y, \end{aligned}$$

La primera de estas propiedades,  $d_i x = e$  si  $i=0, \dots, s$ , supone que pueda considerarse la clase de equivalencia del  $s$ -símplice  $x$ ,  $\bar{x} \in \Pi_s(E.)$ , y de la segunda es claro que  $\bar{p}_s$  es sobreyectivo,  $0 \leq s \leq n+1$ , puesto que  $\bar{p}_s(\bar{x}) = \bar{y}$ .

Para probar que  $\bar{p}_{s-1}$  es inyectivo,  $0 < s \leq n+1$ , sea  $\bar{x} \in \text{Ker } \bar{p}_{s-1}$  (en particular,  $d_i x = e$  para  $i=0, \dots, s-1$  para cualquier representante  $x \in E_{s-1}$  de la clase  $\bar{x} \in \Pi_{s-1}(E.)$ ) y, puesto que  $\bar{p}_{s-1}(\bar{x}) = \bar{e}$ , sea  $w \in B_s$  la homotopía que existe entre  $p_{s-1}(x)$  y  $e$ , esto es,  $w \in B_s$  verificando

$$\begin{aligned} d_s w &= p_{s-1}(x), \\ d_{s-1} w &= e \quad \text{y} \\ d_i w &= s_{s-2} d_i p_{s-1}(x) = \\ &= s_{s-2} d_i e = \\ &= e \quad \text{si } i=0, \dots, s-2. \end{aligned}$$

En definitiva,  $d_s w = p_{s-1}(x)$  y  $d_i w = e$  para  $i=0, \dots, s-1$ .

Si  $x$  es cualquier representante de la clase  $\bar{x} \in \Pi_{s-1}(E.)$ , como hemos mencionado, se tiene que  $d_i x = e$  para  $i=0, \dots, s-1$ , y por tanto  $(e, \dots, e, x)$  es un elemento del núcleo simplicial  $\Delta_s(E.)$ . Sea  $a.: \Delta[s] \rightarrow E.$  el morfismo simplicial determinado por dicho elemento del núcleo simplicial, y  $b.: \Delta[s] \rightarrow B.$  el morfismo representante de la homotopía  $w \in B_s$ , a partir de los cuales construimos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s] & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & \nearrow D. & \downarrow p. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

Este cuadrado es conmutativo puesto que se ha probado que  $d_i w = e$  para  $i=0, \dots, s-1$  y  $d_s w = p_{s-1}(x)$ ; por hipótesis existe, pues, un levantamiento  $D.: \Delta[s] \rightarrow E.$  para  $0 < s \leq n+1$ . El  $s$ -símplice de  $E.$  al cual  $D.$  representa,  $\alpha = D'_s(i_s)$ , determina la homotopía existente entre  $x \in E_{s-1}$  y el neutro  $e$ , puesto que las propiedades de conmutación de  $D.$  se traducen en las siguientes propiedades de  $\alpha$ :



$$\begin{aligned}
d_s \alpha &= x, \\
d_i \alpha &= e \text{ para } i=0, \dots, s-1 \quad \text{y} \\
p_s(\alpha) &= w,
\end{aligned}$$

es decir, en particular,  $\alpha$  determina que  $\bar{x}=\bar{e}$ , lo que demuestra que  $\bar{p}_{s-1}$  es inyectivo,  $0 < s \leq n+1$ .

2. El segundo paso en esta demostración consiste en probar que si  $p$  tiene la RLP con respecto a los morfismos

$$\Delta[s] \longrightarrow \Delta[s], \quad 0 \leq s \leq n+1,$$

entonces  $p$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n+1$ , lo que, unido a la hipótesis de que  $p$  tenga la RLP con respecto a

$$\Delta[n+2, k] \longrightarrow \Delta[n+2], \quad 0 \leq k \leq s,$$

implicará, por la Observación hecha a la Proposición 4.1.3., que  $p$  sea fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ . Nótese que esto finalizará la demostración, puesto que se ha probado con anterioridad que el morfismo inducido en el  $(n+1)$ -grupo de homotopía,  $\bar{p}_{n+1} : \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.)$ , es sobreyectivo, lo que conduce a que  $p$  sea una  $n$ -fibración.

En definitiva, según lo probado anteriormente,  $p$  será una  $n$ -fibración trivial como deseamos.

Probemos entonces que  $p$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n+1$ ; para ello, consideramos el siguiente elemento del producto fibrado:

$$(y, (x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)) \in B_s \times \begin{matrix} \Lambda_k^s(E.) \\ \Lambda_k^s(B.) \end{matrix}, \quad 0 \leq k \leq s, \quad 0 \leq s \leq n+1,$$

es decir,  $y \in B_s$ ,  $x_i \in E_{s-1}$  para  $i=0, \dots, s$ ,  $i \neq k$ , con  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  si  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , y teniéndose que  $d_i y = p_{s-1}(x_i)$  para  $i=0, \dots, s$ ,  $i \neq k$ .

Definimos a partir de los  $(s-1)$ -símplices  $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)$ , la siguiente colección de  $s$   $(s-2)$ -símplices de  $E$ :

$$z_i = \begin{cases} d_{k-1} x_i & \text{si } i \leq k-1 \\ d_k x_{i+1} & \text{si } i > k-1 \end{cases}$$

y veamos que  $(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_s)$  es un elemento del núcleo simplicial  $\Delta_{s-1}(E)$ , comprobando que, en cualquier caso, estos  $(s-2)$ -símplices  $z_i$  verifican la condición de compatibilidad. Para ello, usaremos que la colección dada de  $(s-1)$ -símplices de  $E$ ,  $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)$ , verifican tal condición.

Para  $i < j$ ,  $i, j \neq k$  se tienen los dos siguientes casos:

$$\begin{aligned} \text{Si } j \leq k-1, \quad d_i z_j &= d_i d_{j-1} x_j = && [i < j \leq k-1] \\ &= d_{k-2} d_i x_j = && [\text{los símplices } x_i \text{ son compatibles}] \\ &= d_{k-2} d_{j-1} x_i = && [j-1 < k-1 \text{ puesto que } j \leq k-1] \\ &= d_{j-1} d_{k-1} x_i = \\ &= d_{j-1} z_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } j > k-1, \quad d_i z_j &= d_i d_k x_{j+1} = && [\text{si } i < j \text{ y } j > k-1 \Rightarrow i < k] \\ &= d_{k-1} d_i x_{j+1} = && [x_i \text{ compatibles y } i < j \Rightarrow i < j+1] \\ &= d_{k-1} d_j x_i = && [k-1 < j] \\ &= d_{j-1} d_{k-1} x_i = && [\text{por definición de } z_i \text{ para } i \leq k-1 \text{ ya} \\ &&& \text{que, si } i < j \text{ y } j > k-1 \Rightarrow i \leq k-1] \\ &= d_{j-1} z_i. \end{aligned}$$



El elemento  $(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_s) \in \Delta_{s-1}(E.)$  determina por tanto un morfismo simplicial  $c.: \Delta[s-1] \longrightarrow E..$

Consideremos el  $(s-1)$ -símplice  $d_k y \in B_{s-1}$  para el que probaremos que se verifica  $p_{s-2}(z_i) = d_i(d_k y)$ ,  $i \neq k$ . De nuevo se tienen los dos siguientes casos:

$$\begin{aligned} \text{Para } i \leq k-1, \quad d_i(d_k y) &= d_{k-1} d_i y = \\ &= d_{k-1} p_{s-1}(x_i) = \\ &= p_{s-2}(d_{k-1} x_i) = & \text{[definición de } z_i \text{]} \\ &= p_{s-2}(z_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } i > k-1, \quad d_i(d_k y) &= d_k d_{i+1} y = & \text{[si } i > k-1, \text{ entonces } k < i+1 \text{]} \\ &= d_k p_{s-1}(x_{i+1}) = \\ &= p_{s-2}(d_k x_{i+1}) = & \text{[definición de } z_i \text{]} \\ &= p_{s-2}(z_i). \end{aligned}$$

Asociado al elemento  $(z_0, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_s) \in \Delta_{s-1}(E.)$  se tiene pues, un morfismo simplicial  $c.: \Delta[s-1] \longrightarrow E.$ , y determinado por el  $(s-1)$ -símplice de  $B.$   $d_k y$ , se tiene un morfismo simplicial  $d.: \Delta[s-1] \longrightarrow B.$ , como su morfismo representante.

Si, como acabamos de demostrar,  $p_{s-2}(z_i) = d_i(d_k y)$ ,  $i \neq k$ , el diagrama construido a partir de ellos es conmutativo, y, por hipótesis, existe levantamiento, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s-1] & \xrightarrow{c.} & E. \\ \downarrow & \nearrow H. & \downarrow p. \\ \Delta[s-1] & \xrightarrow{d.} & B. \end{array} \quad 0 < s \leq n+1$$

Sea  $x_k$  el  $(s-1)$ -símplice de  $E$ , representado por  $H.: \Delta[s-1] \longrightarrow E$ , esto es,  $x_k = H_{s-1}(i_{s-1})$ , y nótese que  $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s)$  es entonces un elemento del núcleo simplicial  $\Delta_s(E)$  puesto que  $d_{i,j} x_j = d_{j-1,i} x_i$  para todo  $i < j$  por las propiedades de conmutación de  $x_k$  heredadas de las de  $H$ ; en concreto, este  $(s-1)$ -símplice de  $E$ ,  $x_k$  verifica:

$$d_{i,k} x_k = z_i \text{ para } i=0, \dots, s-1 \quad y$$

$$p_{s-1}(x_k) = d_k y.$$

De la primera propiedad de  $x_k$  concluimos que  $d_{i,j} x_j = d_{j-1,i} x_i$  para  $i < j$ ,  $i, j=0, \dots, s$ . En efecto, puesto que la compatibilidad se tiene por hipótesis para  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ , los únicos dos casos que restan por comprobar son:

Para  $j=k$ :  $d_{i,k} x_k = z_i =$  [definición de  $z_i$  para  $i < j=k$ ]  
 $= d_{k-1,i} x_i.$

Para  $i=k$ :  $d_{j-1,k} x_k = z_{j-1} =$  [def. de  $z_i$  para  $j-1 > k-1$ ]  
 $= d_{k,j} x_j.$

En definitiva se tiene que  $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s) \in \Delta_s(E)$ . Por otra parte  $p_{s-1}(x_k) = d_k y$ , lo que unido a la hipótesis dada, permite afirmar que  $d_{i,j} x_j = p_{s-1}(x_i)$  para  $i=0, \dots, k, \dots, s$ .

Considerando entonces los morfismo simpliciales determinados por  $(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s) \in \Delta_s(E)$  é  $y \in B_s$ ,  $c.: \Delta[s] \longrightarrow E$  y  $d.: \Delta[s] \longrightarrow B$  respectivamente, contruímos un nuevo diagrama conmutativo:



$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[s] & \xrightarrow{c.} & E. \\
 \downarrow & \nearrow G. & \downarrow p. \\
 \Delta[s] & \xrightarrow{d.} & B.
 \end{array}
 \quad 0 < s \leq n+1$$

para el que, por hipótesis, existe levantamiento  $G.: \Delta[s] \longrightarrow E.$ . Finalmente, el  $s$ -símplice de  $E.$  representado por el levantamiento  $G.$ ,  $x' \in E_s$ , verifica

$$\begin{aligned}
 d_i x' &= x_i, & i \neq k, & \text{ y} \\
 p_s(x') &= y
 \end{aligned}$$

y en consecuencia,  $p.$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n+1$ . Como se ha comentado con anterioridad, esto demuestra que  $p.$  es  $n$ -fibración trivial. ■

Una nueva caracterización de las  $n$ -fibraciones triviales puede obtenerse como consecuencia del siguiente Lema:

**Lema 4.1.12.**

Para cualquier morfismo  $p.: E. \longrightarrow B.$  en  $\text{Simp}(Gp)$  son equivalentes:

i)  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ ,  $\bar{p}_q: \Pi_q(E.) \longrightarrow \Pi_q(B.)$  es un isomorfismo,  $0 \leq q \leq n$ , y  $\bar{p}_{n+1}$  es sobreyectivo.

ii)  $p_q$  es sobreyectivo y  $\Pi_q(\text{Ker } p.) = 0$ , para  $0 \leq q \leq n$ .

**Demostración.**

i)  $\Rightarrow$  ii) Supongamos que  $p.$  es una fibración de Kan truncada en dimensión  $n$ ,  $\bar{p}_q$  es un isomorfismo,  $0 \leq q \leq n$  y  $\bar{p}_{n+1}$  es sobreyectivo.

En primer lugar, puesto que en particular se tiene que  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n$  y  $\bar{p}_0$  es sobreyectivo, por el Lema 4.1.7.,  $p_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ .

Veamos entonces que  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ , para  $0 \leq q \leq n$ . Por ser  $p_q$  sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n$ , notando por  $K_q$  al grupo simplicial  $\text{Kerp.}$ , se tiene la siguiente sucesión exacta corta, para  $0 \leq q \leq n$ :

$$0 \longrightarrow K_q \longrightarrow E_q \xrightarrow{p_q} B_q \longrightarrow 0$$

Esta sucesión sigue siendo exacta,  $0 \leq q \leq n$ , si consideramos la correspondiente inducida en el complejo de Moore: (ver [48], Cap. II, §3, Lemas 2 y 5)

$$0 \longrightarrow N_q(K_q) \longrightarrow N_q(E_q) \xrightarrow{N_q(p_q)} N_q(B_q) \longrightarrow 0$$

Se tiene, en consecuencia, una sucesión exacta larga,  $0 \leq q \leq n$ , en homología:

$$\begin{aligned} & \dots \longrightarrow \Pi_n(K_q) \longrightarrow \Pi_n(E_q) \xrightarrow[\cong]{\bar{p}_n} \Pi_n(B_q) \longrightarrow \Pi_{n-1}(K_q) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \Pi_{n-1}(E_q) \xrightarrow[\cong]{\bar{p}_{n-1}} \Pi_{n-1}(B_q) \longrightarrow \Pi_{n-2}(K_q) \longrightarrow \dots \Pi_0(K_q) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \Pi_0(E_q) \xrightarrow[\cong]{\bar{p}_0} \Pi_0(B_q), \end{aligned}$$

de la cual, por ser  $\bar{p}_q$  un isomorfismo,  $0 \leq q \leq n$ , se tiene que  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ , para  $0 \leq q \leq n-1$ .

En cuanto a  $\Pi_n(\text{Kerp.})$ , detallando la sucesión exacta larga en esta dimensión,





Si, por hipótesis,  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ ,  $0 \leq q \leq n$ , es claro entonces que  $\bar{p}_q: \Pi_q(E.) \longrightarrow \Pi_q(B.)$  es un isomorfismo,  $0 < q \leq n$ ,  $\bar{p}_{n+1}$  es sobreyectivo y  $\bar{p}_0$  es inyectivo lo que, unido a que se ha probado que  $\bar{p}_0$  es sobreyectivo, conduce finalmente al resultado deseado. ■

A partir de este Lema se obtiene una nueva caracterización de las  $n$ -fibraciones triviales, versión truncada de la dada por Quillen en [48] (Cap.II, §3, Proposición 2).

**Proposición 4.1.13.**

Para todo morfismo  $p.: E. \longrightarrow B.$  en  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , se tiene que  $p.$  es una  $n$ -fibración trivial si y solamente si  $p_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n+2$ , y  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ , para  $0 \leq q \leq n$ .

**Demostración.**

Es consecuencia directa del anterior Lema teniendo en cuenta que, en el transcurso de su demostración, se pone de manifiesto la equivalencia entre que un morfismo de grupos simpliciales  $p_q$  sea sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n+2$ , y que  $p.$  sea fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$  y  $\bar{p}_0$  es sobreyectivo, vía el Lema 4.1.7.. Veámoslo en detalle:

Supongamos que  $p.$  es  $n$ -fibración trivial, esto es, por las definiciones dadas,  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ ,  $\bar{p}_{n+1}$  es epimorfismo y  $\bar{p}_i$  es isomorfismo para  $0 \leq i \leq n$ ; esto permite afirmar, por el Lema anterior, que  $p_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n+2$ .

Repitiendo entonces su demostración en el sentido  $i) \Rightarrow ii)$ , se tiene que  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ , para  $0 \leq q \leq n$ . (Nótese que, aunque  $p_q$  sea sobreyectivo para  $0 \leq q \leq n+2$ , únicamente puede afirmarse que  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ ,  $0 \leq q \leq n$ , puesto que es determinante el hecho de que  $\bar{p}_i$  sea isomorfismo para  $0 \leq i \leq n$  en el uso de la sucesión exacta larga en homología).



Recíprocamente, supongamos que  $p_q$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n+2$ , y  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ , para  $0 \leq q \leq n$ . De nuevo por el Lema 4.1.7.,  $p$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$ , y  $\bar{p}_0$  es epimorfismo.

La hipótesis de que  $\Pi_q(\text{Kerp.})=0$ ,  $0 \leq q \leq n$ , junto con el hecho de que, en particular,  $p_q$ ,  $0 \leq q \leq n$ , y  $\bar{p}_0$  son sobreyectivos, concluye la demostración de esta caracterización repitiendo la ya hecha para el Lema 4.1.12., ii)  $\Rightarrow$  i). ■

Para terminar esta sección de resultados truncados, completamos las tres familias de morfismos distinguidos en una categoría de modelos cerrada con la siguiente Definición:

**Definición 4.1.14.**

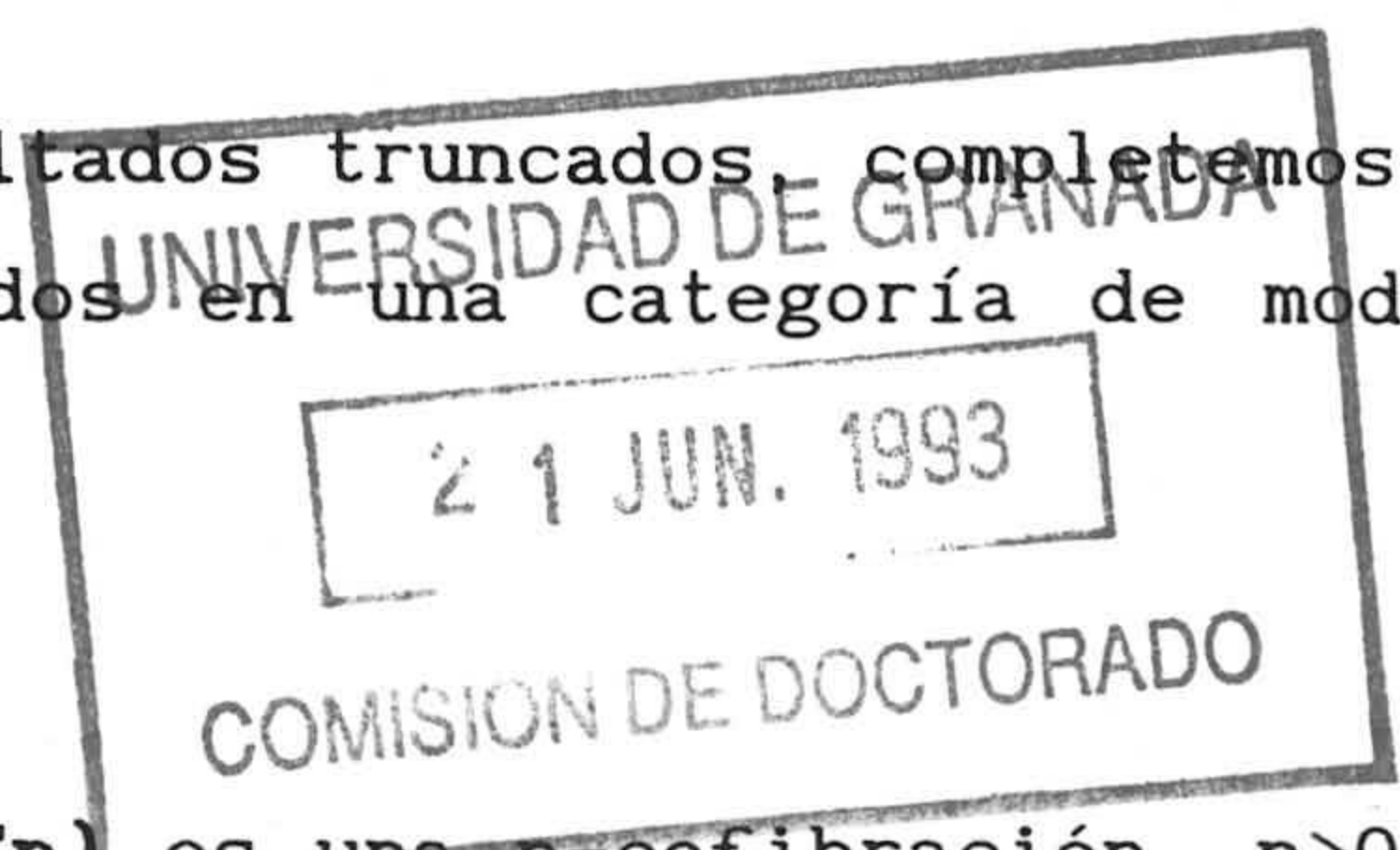
Un morfismo  $f.: X \longrightarrow Y$  en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  es una  $n$ -cofibración,  $n > 0$ , si  $f$ . tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones triviales.

Nótese que, a consecuencia de la Proposición 4.1.11., se tiene la siguiente secuencia de inclusiones para las  $n$ -fibraciones triviales:

$$(\infty\text{-fib. triv.}) \subseteq \dots \subseteq (n+1\text{-fib. triv.}) \subseteq (n\text{-fib. triv.}) \subseteq \dots$$

y por tanto, según la definición de  $n$ -cofibración dada, se tiene una secuencia que relaciona estos morfismos entre sí:

$$\dots \subseteq (n\text{-cofibración}) \subseteq (n+1\text{-cofibración}) \subseteq \dots \subseteq (\infty\text{-cofibración}).$$





#### 4.2.LA n-ESTRUCTURA EN $\text{Simp}(\text{Gp})$ .

Esta sección está dedicada a demostrar que las definiciones propuestas anteriormente de n-fibración, n-cofibración y n-equivalencia débil,  $n > 0$ , para la categoría de grupos simpliciales,  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , determinan una estructura de modelos cerrada para cada  $n > 0$  en dicha categoría. Una vez probado esto, dicha estructura de modelos, que hemos llamado n-estructura, se mostrará como una generalización de la clásica estructura de Quillen para  $\text{Simp}(\text{Gp})$ , a consecuencia de que las definiciones de n-fibración y n-equivalencia débil (y por tanto, de n-cofibración puesto que ésta se obtiene a partir de las otras) coinciden con las clásicas para  $n = \infty$ , como hicimos notar en la sección anterior.

Para probar que se verifican todos y cada uno de los axiomas que definen una categoría de modelos cerrada, serán determinantes las caracterizaciones de n-fibración y n-fibración trivial obtenidas en la anterior sección ya que, como veremos en el transcurso de las demostraciones que a continuación haremos, dichas caracterizaciones permiten hacer uso del llamado "argumento del objeto pequeño", un argumento básico en la demostración de que  $\text{Simp}(\text{Gp})$  es categoría de modelos cerrada con la estructura clásica.

Para situar el problema que nos ocupa en el marco más adecuado, recordemos que las definiciones de n-fibración, n-equivalencia débil y n-cofibración propuestas (ver Definiciones 4.1.2., 4.1.10. y 4.1.14) son las siguientes:

Un morfismo en  $\text{Simp}(\text{Gp})$   $p.: E. \longrightarrow B.$  es una n-fibración si  $p.$  es fibración de Kan truncada en dimensión  $n+2$  y el morfismo inducido en el  $(n+1)$ -grupo de homotopía,  $\bar{p}_{n+1}: \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.)$ , es sobreyectivo.



Un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$   $f.:X. \longrightarrow Y.$  es una  $n$ -equivalencia débil si  $\bar{f}_i:\Pi_i(E.) \longrightarrow \Pi_i(B.)$  es isomorfismo para  $0 \leq i \leq n$  y, finalmente, un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$   $f.:X. \longrightarrow Y.$  es una  $n$ -cofibración si  $f.$  tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones triviales.

En el siguiente Lema se darán algunos resultados previos a la demostración del principal resultado (Teorema 4.2.2.) de esta sección:

**Lema 4.2.1.**

i) Si  $f^i:A.^i \longrightarrow B.^i$  es una familia de  $n$ -cofibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , entonces el morfismo inducido en los coproductos,  $\coprod f^i:\coprod A.^i \longrightarrow \coprod B.^i$ , es una  $n$ -cofibración.

ii) Si  $f.:A. \longrightarrow X.$  es una  $n$ -cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y  $A. \longrightarrow C.$  es cualquier morfismo de grupos simpliciales, el morfismo inducido en el pushout,  $C. \longrightarrow X. \amalg_{A.} C.$ , es una  $n$ -cofibración.

iii) Si  $A_0 \xrightarrow{1} A_1 \xrightarrow{2} \dots \longrightarrow A_m \xrightarrow{m+1} \dots$  es una sucesión de  $n$ -cofibraciones (respectivamente  $n$ -equivalencias débiles) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , el morfismo canónico  $i.:A_0 \longrightarrow A_\infty = \varinjlim A_m$  es una  $n$ -cofibración (respectivamente,  $n$ -equivalencia débil).

**Demostración.**

Las propiedades i), ii), y iii) relativas a  $n$ -cofibraciones, se obtienen por las propiedades universales de coproductos, pushouts y límites directos en cada caso. Veamos en detalle cada una de ellas.

i) Supongamos que  $f^i:A.^i \longrightarrow B.^i$  es una familia de  $n$ -cofibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y veamos que el morfismo inducido en los coproductos,  $\coprod f^i:\coprod A.^i \longrightarrow \coprod B.^i$  es  $n$ -cofibración probando, por definición, que tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones triviales.

Consideremos pues cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \coprod A^i & \xrightarrow{a.} & E. \\ \coprod f^i \downarrow & & \downarrow p. \\ \coprod B^i & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

donde  $p.:E. \longrightarrow B.$  es una  $n$ -fibración trivial. Este diagrama puede extenderse, vía las inyecciones canónicas  $u^i:A^i \longrightarrow \coprod A^i$  y  $v^i:B^i \longrightarrow \coprod B^i$ , al siguiente diagrama, también conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A^i & \xrightarrow{u^i} & \coprod A^i & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow f^i & & \downarrow \coprod f^i & & \downarrow p. \\ B^i & \xrightarrow{v^i} & \coprod B^i & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

Puesto que, por hipótesis, los morfismos simpliciales  $f^i:A^i \longrightarrow B^i$  son  $n$ -cofibraciones, existe levantamiento para el diagrama total, esto es, existe  $D^i:B^i \longrightarrow E.$  tal que  $p.D^i=b.v^i$  y  $D^i.f^i=a.u^i$ . Por la propiedad universal del coproducto  $\coprod B^i$ , existe entonces un morfismo simplicial  $D.: \coprod B^i \longrightarrow E.$  verificando que  $D.v^i=D^i$ . En consecuencia,  $D.$  es levantamiento para el diagrama original:

$$\begin{aligned} p.D.v^i &= p.D^i = b.v^i \text{ y por tanto, } p.D. = b. & \text{y} \\ D.\coprod f^i.u^i &= D.v^i.f^i = D^i.f^i = a.u^i \text{ y por tanto, } D.\coprod f^i = a. \end{aligned}$$

En definitiva,  $\coprod f^i:\coprod A^i \longrightarrow \coprod B^i$  es una  $n$ -cofibración.

ii) Supongamos que  $f.:A. \longrightarrow X.$  es una  $n$ -cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y  $A. \longrightarrow C.$  es cualquier morfismo de grupos simpliciales; probemos



entonces que el morfismo inducido en el pushout,  $C. \longrightarrow X. \amalg_{A.} C.$ , es una  $n$ -cofibración, demostrando que tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones triviales, como anteriormente.

Dado cualquier diagrama conmutativo

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} C. & \xrightarrow{a.} & E. \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ X. \amalg_{A.} C. & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

con  $p.: E. \longrightarrow B.$   $n$ -fibración trivial, consideremos el siguiente diagrama, también conmutativo, construido, añadiéndole al anterior, el diagrama pushout dado:

$$\begin{array}{ccccc} A. & \longrightarrow & C. & \xrightarrow{a.} & E. \\ f. \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p. \\ X. & \longrightarrow & X. \amalg_{A.} C. & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

Por ser  $f.$  una  $n$ -cofibración, existe levantamiento para el diagrama total, es decir, existe  $G.: X. \longrightarrow E.$ ; este morfismo simplicial induce, por la propiedad universal de los diagramas pushout, un morfismo  $G.: X. \amalg_{A.} C. \longrightarrow E.$  que, por las propiedades de conmutación derivadas de su obtención vía la mencionada propiedad universal, resulta ser el levantamiento buscado para el diagrama  $(*)$ , probando así que el morfismo inducido en el pushout,  $C. \longrightarrow X. \amalg_{A.} C.$ , es una  $n$ -cofibración.

La demostración de iii) referente a  $n$ -cofibraciones está basada de nuevo en una propiedad universal, en este caso de los límites directos.



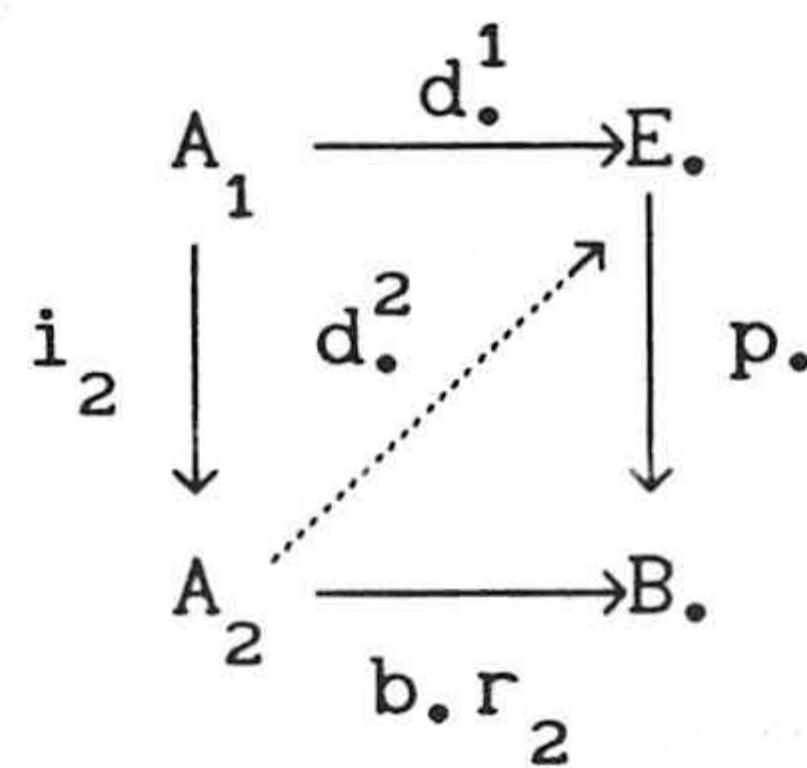


que es claramente conmutativo puesto que

$$b.r_1 i_1 = b.i. = [\text{conmutatividad de (**)}] = \\ = p.a..$$

Dado que  $i_1$  es una  $n$ -cofibración, existe entonces levantamiento  $d^1: A_1 \longrightarrow E.$ , es decir,  $p.d^1 = b.r_1$  y  $d^1 i_1 = a..$

Para obtener  $d^2$  construimos el siguiente diagrama:



para el que se tiene, por las propiedades de conmutación de  $d^1$ , que

$$p.d^1 = b.r_1 = b.r_2 i_2,$$

es decir, es un diagrama conmutativo en el que el morfismo simplicial  $i_2: A_1 \longrightarrow A_2$  es una  $n$ -cofibración y, en consecuencia, existe un levantamiento  $d^2$ .

Nótese que se tiene que  $d^2 i_2 = d^1$  y  $p.d^2 = b.r_2$ .

De forma recurrente, habiendo obtenido un levantamiento  $d^{m-1}: A_{m-1} \longrightarrow E.$  usando que el morfismo simplicial  $i_{m-1}: A_{m-2} \longrightarrow A_{m-1}$  es  $n$ -cofibración, se tiene garantizada la existencia de  $d^m: A_m \longrightarrow E.$  tal que  $d^m i_m = d^{m-1}$ , con  $d^0 = a..$ , y  $p.d^m = b.r_m$  para  $m \geq 1$ .

El par  $(E., d.^i: A_i \longrightarrow E.)$  es entonces un límite directo de la sucesión de  $n$ -cofibraciones dada,  $A_0 \xrightarrow{i_1} A_1 \xrightarrow{i_2} \dots \longrightarrow A_m \xrightarrow{i_{m+1}} \dots$ , y así pues, por la propiedad universal de los límites directos, existe un morfismo simplicial  $D.: A_\infty = \lim_{\longrightarrow m} A_m \longrightarrow E.$  tal que  $D.r_m = d.^m$ , para  $m \geq 0$ . Dicho morfismo es el levantamiento buscado para el diagrama dado originalmente, (\*\*), ya que

$$\begin{aligned} p.D.r_m &= p.d.^m = b.r_m \text{ para todo } m \geq 1, \text{ y por tanto, } p.D. = b. \text{ y} \\ D.i. &= D.r_0 = d.^0 = a.. \end{aligned}$$

Esto prueba que el morfismo canónico  $i.: A_0 \longrightarrow A_\infty = \lim_{\longrightarrow m} A_m$  es una  $n$ -cofibración.

Demostramos entonces iii) referido a las  $n$ -equivalencias débiles, esto es, dada

$$A_0 \xrightarrow{i_1} A_1 \xrightarrow{i_2} \dots \longrightarrow A_m \xrightarrow{i_{m+1}} \dots$$

una sucesión de  $n$ -equivalencias débiles en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , probaremos que lo es entonces el morfismo canónico  $i.: A_0 \longrightarrow A_\infty$ .

Si, por hipótesis, cada morfismo  $i_m: A_{m-1} \longrightarrow A_m$  es  $n$ -equivalencia débil, por la Definición 4.1.10., se tiene que para  $m \geq 1$ , los morfismos

$$(\bar{i}_m)_j: \Pi_j(A_{m-1}) \longrightarrow \Pi_j(A_m) \text{ son isomorfismos, } 0 \leq j \leq n.$$

Para probar que lo es  $i.: A_0 \longrightarrow A_\infty$ , recordemos que en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  se verifica que límites directos conmutan con grupos de homotopía, esto es,  $\Pi_j(\lim_{\longrightarrow m} A_m) = \lim_{\longrightarrow m} \Pi_j(A_m)$ . En consecuencia, demostraremos que el morfismo

$$(\bar{i}.)_j: \Pi_j(A_0) \longrightarrow \Pi_j(\lim_{\longrightarrow m} A_m) = \lim_{\longrightarrow m} \Pi_j(A_m)$$



es isomorfismo,  $0 \leq j \leq n$ , usando en este caso la propiedad universal del límite directo  $(\lim_{\rightarrow} \Pi_j(A_m), s_m^j: \Pi_j(A_m) \longrightarrow \lim_{\rightarrow} \Pi_j(A_m))$  con  $s_m^j(\bar{i}_m)_j = s_{m-1}^j$ ,  $m \geq 1$  ( $s_0^j = (\bar{i}_\bullet)_j$ ) para la sucesión de morfismos siguiente,

$$\Pi_j(A_0) \xrightarrow{(\bar{i}_1)_j} \Pi_j(A_1) \xrightarrow{(\bar{i}_2)_j} \dots \xrightarrow{(\bar{i}_m)_j} \Pi_j(A_m) \xrightarrow{(\bar{i}_{m+1})_j} \dots$$

Consideramos el par  $(\Pi_j(A_0), t_m^j: \Pi_j(A_m) \longrightarrow \Pi_j(A_0))$ , donde los morfismos

$$t_m^j: \Pi_j(A_m) \longrightarrow \Pi_j(A_0)$$

se obtienen usando que cada  $(\bar{i}_m)_j$  es isomorfismo,  $0 \leq j \leq n$ , y por tanto, para cada uno de ellos, existe morfismo inverso. Definimos los morfismos  $t_m^j$  como sigue:

$$t_0^j: \Pi_j(A_0) \longrightarrow \Pi_j(A_0) \text{ es el morfismo identidad, } t_0^j = \text{Id}_{\Pi_j(A_0)}.$$

$$\text{Se define } t_1^j: \Pi_j(A_1) \longrightarrow \Pi_j(A_0) \text{ como } t_1^j = (\bar{i}_1)_j^{-1}.$$

$$\text{Se define } t_2^j = (\bar{i}_1)_j^{-1} (\bar{i}_2)_j^{-1}, \text{ esto es,}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (\bar{i}_2)_j^{-1} & & (\bar{i}_1)_j^{-1} \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow \\ \Pi_j(A_2) & \longrightarrow & \Pi_j(A_1) & \longrightarrow & \Pi_j(A_0) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & t_2^j & & \end{array}$$

En general,

$$t_m^j = (\bar{i}_1)_j^{-1} (\bar{i}_2)_j^{-1} \dots (\bar{i}_m)_j^{-1} = [(\bar{i}_m)_j (\bar{i}_{m-1})_j \dots (\bar{i}_1)_j]^{-1}$$

Es claro, de la definición de los morfismos  $t_m^j$ , que  $t_m^j(\bar{i}_m)_j = t_{m-1}^j$  para  $m \geq 1$ ; por la propiedad universal del límite directo

$$(\lim_{\rightarrow} \Pi_j(A_m), s_m^j: \Pi_j(A_m) \longrightarrow \lim_{\rightarrow} \Pi_j(A_m))$$

existe pues un único morfismo simplicial

$$T^j: \lim_{\rightarrow} \Pi_j(A_m) \longrightarrow \Pi_j(A_0) \quad \text{tal que } T^j s_m^j = t_m^j \text{ para } m \geq 0 \quad [*].$$

Comprobemos entonces que dicho morfismo es el inverso del morfismo simplicial dado originalmente:

Para  $m=0$ ,  $T^j s_0^j = T^j(\bar{i}_0)_j = t_0^j = \text{Id}_{\Pi_j(A_0)}$  y por tanto,  $(\bar{i}_0)_j$  es monomorfismo.

Por la unicidad de un morfismo obtenido mediante una propiedad universal, para demostrar que  $(\bar{i}_0)_j T^j = \text{Id}_{\lim_{\rightarrow} \Pi_j(A_m)}$ , demostraremos equivalentemente que  $(\bar{i}_0)_j T^j s_m^j = s_m^j$ . Se tiene pues lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\bar{i}_0)_j T^j s_m^j & \stackrel{[*]}{=} (\bar{i}_0)_j t_m^j = \\ & = s_m^j [(\bar{i}_m)_j (\bar{i}_{m-1})_j \dots (\bar{i}_1)_j] t_m^j = \\ & = s_m^j [(\bar{i}_m)_j (\bar{i}_{m-1})_j \dots (\bar{i}_1)_j] [(\bar{i}_m)_j (\bar{i}_{m-1})_j \dots (\bar{i}_1)_j]^{-1} = \\ & = s_m^j. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $(\bar{i}_0)_j$  es sobreyectivo y por tanto un isomorfismo. ■

El resultado principal de esta sección es entonces el siguiente.



**Teorema 4.2.2.**

Con las definiciones dadas de n-fibración, n-cofibración y n-equivalencia débil,  $n \geq 1$ , la categoría  $\text{Simp}(\text{Gp})$  es, en cada caso, una categoría de modelos cerrada.

**Demostración.**

Es conocido que **CM1** se verifica. En cuanto a **CM2**, sean dos morfismos de grupos simpliciales para los que existe su composición,  $f.:G. \longrightarrow H.$  y  $g.:H. \longrightarrow L.$ , y supongamos que dos de los tres morfismos  $f.$ ,  $g.$ ,  $g.f.$ , son n-equivalencias débiles; en este caso, es claro que también lo es el tercero puesto que la relación entre los morfismos inducidos en los grupos de homotopía por  $f.$ ,  $g.$  y  $g.f.$ ,

$$\bar{g}_i \bar{f}_i = \overline{(g.f.)}_i$$

pone de manifiesto que si dos de los tres morfismos  $\bar{g}_i$ ,  $\bar{f}_i$  y  $\overline{(g.f.)}_i$  son isomorfismos para  $0 \leq i \leq n$ , también lo es el tercero.

**CM3.** Probemos ahora que todo retracts de una n-fibración (respectivamente n-cofibración ó n-equivalencia débil) es de nuevo n-fibración (respectivamente n-cofibración ó n-equivalencia débil).

Sea  $l.:A. \longrightarrow C.$  una n-fibración y  $f.:X. \longrightarrow Y.$  un retracts de  $l.$  con  $r.:A. \longrightarrow X.$  la retracción existente, esto es, existe un diagrama del tipo

$$\begin{array}{ccc} X. & \xleftarrow{r.} & A. \\ f. \downarrow & i. & \downarrow l. \\ Y. & \xleftarrow{s.} & C. \\ & j. & \end{array}$$

con  $l.i.=j.f.$ ,  $f.r.=s.l.$ ,  $r.i.=\text{Id}_{X.}$  y  $s.j.=\text{Id}_{Y.}$ .

Demostraremos que  $f.$  es  $n$ -fibración, por la Proposición 4.1.3., viendo que  $f.$  tiene la RLP con respecto a las familias de morfismos en  $\mathcal{S}\mathcal{S}$

$$\Delta[s,k] \longrightarrow \Delta[s], 0 \leq k \leq s, 0 < s \leq n+2 \quad \text{y} \quad * \longrightarrow S^{n+1}.$$

Consideremos pues los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \Delta[s,k] & \xrightarrow{a.} & X. \\ \text{in}_1 \downarrow & \nearrow & \downarrow f. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & Y. \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{a.} & X. \\ \text{in}_2 \downarrow & \nearrow & \downarrow f. \\ S^{n+1} & \xrightarrow{b.} & Y. \end{array}$$

para los que el levantamiento que buscamos estará definido, en ambos casos, como la composición del correspondiente levantamiento para  $l.$  con la retracción  $r.$ ; es decir, a partir de los diagramas dados, considérense los siguientes, también conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[s,k] & \xrightarrow{a.} & X. & \xrightarrow{i.} & A. \\ \text{in}_1 \downarrow & & \downarrow f. & & \downarrow l. \\ \Delta[s] & \xrightarrow{b.} & Y & \xrightarrow{j.} & C. \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccccc} * & \xrightarrow{a.} & X. & \xrightarrow{i.} & A. \\ \text{in}_2 \downarrow & & \downarrow f. & & \downarrow l. \\ S^{n+1} & \xrightarrow{b.} & Y & \xrightarrow{j.} & C. \end{array}$$

para los que, por ser  $l.$   $n$ -fibración, existe levantamiento en cada uno de estos diagramas

$$D.: \Delta[s] \longrightarrow A. \quad \text{y} \quad G.: S^{n+1} \longrightarrow A.$$

verificando:



$$\begin{aligned}
l.D. = j.b. \text{ y } D.in_1 = i.a. & \quad \text{y, en el segundo caso,} \\
l.G. = j.b. \text{ y } G.in_2 = i.a.. &
\end{aligned}$$

Los levantamientos que demuestran que  $f.$  es  $n$ -fibración son, como hemos indicado,  $r.D.$  y  $r.G.$  respectivamente ya que

para el primer tipo de diagramas,

$$\begin{aligned}
f.r.D. = (f.r.)D. = s.(l.D.) = (s.j.)b. = Id_{Y.} b. = b. & \quad \text{y} \\
r.D.in_1 = r.(D.in_1) = (r.i.)a. = Id_{X.} a. = a. &
\end{aligned}$$

y para el segundo,

$$\begin{aligned}
f.r.G. = (f.r.)G. = s.(l.G.) = (s.j.)b' = Id_{Y.} b' = b' & \quad \text{y} \\
r.G.in_2 = r.(G.in_2) = (r.i.)a' = Id_{X.} a' = a' &
\end{aligned}$$

En definitiva se ha probado que todo retracto de una  $n$ -fibración es  $n$ -fibración.

Sea ahora  $l.:A. \longrightarrow C.$  una  $n$ -equivalencia débil y  $f.:X. \longrightarrow Y.$  un retracto de  $l.$ , como anteriormente. Se tiene entonces que  $\bar{f}.$  es retracto de  $\bar{l}.$ , como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_k(X.) & \xleftrightarrow[\bar{i}_k]{\bar{r}_k} & \Pi_k(A.) \\
\bar{f}_k \downarrow & & \downarrow \bar{l}_k \\
\Pi_k(Y.) & \xleftrightarrow[\bar{j}_k]{\bar{s}_k} & \Pi_k(C.)
\end{array}$$

De aquí, ya que  $\bar{r}_k \bar{i}_k = Id_{\Pi_k(X.)}$  y  $\bar{s}_k \bar{j}_k = Id_{\Pi_k(Y.)}$ , es claro que ambos morfismos  $\bar{i}_k$  y  $\bar{j}_k$  son monomorfismos y  $\bar{r}_k$  y  $\bar{s}_k$  epimorfismos. Por otra

parte se tiene que  $\bar{l}_k \bar{i}_k = \bar{j}_k \bar{f}_k$  y  $\bar{f}_k \bar{r}_k = \bar{s}_k \bar{l}_k$ ; puesto que  $\bar{l}_k$  es un isomorfismo para  $0 \leq k \leq n$  por ser  $l.$  una  $n$ -equivalencia débil, de la primera de estas igualdades,  $\bar{l}_k \bar{i}_k = \bar{j}_k \bar{f}_k$ , es claro que  $\bar{f}_k$  es monomorfismo para  $0 \leq k \leq n$ .

De igual forma, ya que  $\bar{f}_k \bar{r}_k = \bar{s}_k \bar{l}_k$  se tiene que  $\bar{f}_k$  es epimorfismo,  $0 \leq k \leq n$ . En consecuencia,  $f.$  es  $n$ -equivalencia débil.

Por último, supongamos que  $l.: A. \longrightarrow C.$  es una  $n$ -cofibración y  $f.: X. \longrightarrow Y.$  un retracto de  $l.$ . Demostremos que  $f.$  es  $n$ -cofibración probando que tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones triviales. Consideramos entonces un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 X. & \xrightarrow{\alpha.} & E. \\
 f. \downarrow & & \downarrow p. \\
 Y. & \xrightarrow{\beta.} & B.
 \end{array}$$

con  $p.$   $n$ -fibración trivial, a partir del cual, usando que  $f.$  es un retracto de  $l.$ , puede construirse el siguiente, también conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \xrightarrow{\alpha. \Gamma.} & E. \\
 l. \downarrow & \nearrow H. & \downarrow p. \\
 C. & \xrightarrow{\beta. \Sigma.} & B.
 \end{array}$$

Para este diagrama, existe levantamiento  $H.$  por ser  $l.$  una  $n$ -cofibración. El levantamiento para el diagrama dado, que prueba que  $f.$  es  $n$ -cofibración, es la composición  $H.j.$ .



Demostremos a continuación el axioma **CM5** relativo a la factorización de cualquier morfismo de grupos simpliciales  $f.:X. \longrightarrow Y.$  en  $n$ -cofibración y  $n$ -fibración trivial. Para ello, consideramos todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[s] & \longrightarrow & X. \\ \downarrow & \lambda & \downarrow f. \\ F\Delta[s] & \longrightarrow & Y. \\ 0 \leq s \leq n+1 & & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[n+2,k] & \longrightarrow & X. \\ \downarrow & \mu & \downarrow f. \\ F\Delta[n+2] & \longrightarrow & Y. \\ 0 \leq k \leq n+2 & & \end{array}$$

y notemos  $X._{-1} \equiv X.$  y  $q._{-1} = f.$ . Obtenemos entonces un primer grupo simplicial  $X._0$  del siguiente diagrama pushout:

$$(Q_0) \quad \begin{array}{ccc} (\coprod F\Delta[s]) \amalg (\coprod F\Delta[n+2,k]) & \xrightarrow{h.} & X._{-1} \\ \downarrow \lambda \quad H. \quad \downarrow \mu & & \downarrow i._0 \\ (\coprod F\Delta[s]) \amalg (\coprod F\Delta[n+2]) & \xrightarrow{\alpha._0} & X._0 \\ \downarrow \lambda \quad \downarrow \mu & & \downarrow q._0 \\ & \xrightarrow{t._{-1}} & Y. \end{array}$$

con  $0 \leq s \leq n+1$ ,  $0 \leq k \leq n+2$ , donde los coproductos se indizan en el conjunto de todos los diagramas (\*). Asimismo, se obtienen morfismos de grupos simpliciales  $i._0: X._{-1} \longrightarrow X._0$  y  $q._0: X._0 \longrightarrow Y.$ , este último por la propiedad universal de los diagramas pushout.

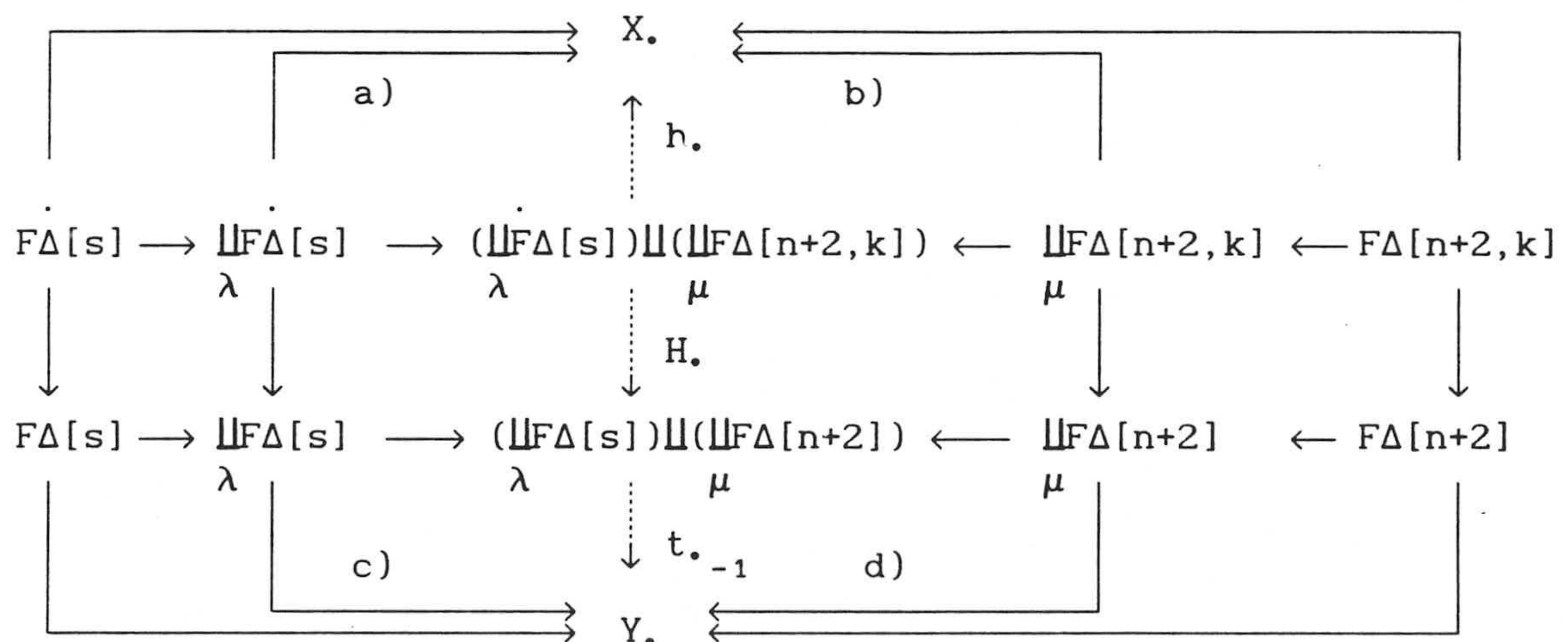
Puesto que iteraremos esta misma construcción posteriormente, detallamos en este caso la obtención del morfismo  $q._0: X._0 \longrightarrow Y.$  a partir de la mencionada propiedad universal del diagrama pushout.

Partiendo de los diagramas conmutativos (\*), nótese que los morfismos simpliciales  $h.$  y  $H.$ , así como  $t._{-1}$ , se obtienen por la propiedad universal del coproducto, de la siguiente forma:

De los morfismos dados en (\*),  $F\Delta[s] \rightarrow X.$ ,  $F\Delta[n+2, k] \rightarrow X.$ ,  $F\Delta[s] \rightarrow Y.$  y  $F\Delta[n+2] \rightarrow Y.$ , por la propiedad de los coproductos correspondientes, se tienen de forma natural los morfismos

- a)  $\coprod_{\lambda} F\Delta[s] \rightarrow X.$ ,
- b)  $\coprod_{\mu} F\Delta[n+2, k] \rightarrow X.$ ,
- c)  $\coprod_{\lambda} F\Delta[s] \rightarrow Y.$ ,
- d)  $\coprod_{\mu} F\Delta[n+2] \rightarrow Y.$

a partir de los cuales, de nuevo por la propiedad universal del coproducto, se obtienen los morfismos simpliciales  $h.$ ,  $H.$  y  $t._{-1}$ , como muestra el siguiente diagrama conmutativo, (1):





Puesto que los morfismos  $h.$ ,  $H.$  y  $t._{-1}$  se han obtenido de forma natural a partir de los datos en (\*), por ser estos diagramas conmutativos al igual que lo es (1), se tiene, para el diagrama pushout  $(Q_0)$ , que  $t._{-1}H.=f.h.$ , lo que justifica la existencia del morfismo  $q._0: X._0 \longrightarrow Y.$ ; verificando  $q._0\alpha._0=t._{-1}$  y  $f=q._0i._0$ .

Así pues, se tiene una primera factorización del morfismo  $f.$ .

Repetimos la construcción, en este caso para el nuevo morfismo simplicial  $q._0: X._0 \longrightarrow Y.$ , es decir, consideramos todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[s] & \longrightarrow & X._0 \\ \downarrow & \lambda_0 & \downarrow q._0 \\ F\Delta[s] & \longrightarrow & Y. \\ 0 \leq s \leq n+1 & & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[n+2, k] & \longrightarrow & X._0 \\ \downarrow & \mu_0 & \downarrow q._0 \\ F\Delta[n+2] & \longrightarrow & Y. \\ 0 \leq k \leq n+2 & & \end{array}$$

como conjunto de índices para los coproductos utilizados en el diagrama pushout

$$(Q_1) \quad \begin{array}{ccc} (\coprod F\Delta[s]) \amalg (\coprod F\Delta[n+2, k]) & \xrightarrow{h._0} & X._0 \\ \downarrow \lambda_0 \quad H._0 \quad \downarrow \mu_0 & & \downarrow i._1 \\ (\coprod F\Delta[s]) \amalg (\coprod F\Delta[n+2]) & \xrightarrow{\alpha._1} & X._1 \\ \downarrow \lambda_0 \quad \downarrow \mu_0 & & \downarrow q._1 \\ & \xrightarrow{t._0} & Y. \end{array}$$

donde los morfismos simpliciales  $h_{\cdot 0}$ ,  $H_{\cdot 0}$  y  $t_{\cdot 0}$  se obtienen de forma natural por la propiedad universal del coproducto (como en (1)), indizando éstos en este caso en el nuevo conjunto de índices (\*\*). De este diagrama,  $(Q_1)$ , se obtiene entonces un nuevo grupo simplicial  $X_{\cdot 1}$  así como morfismos simpliciales  $i_{\cdot 1}: X_{\cdot 0} \longrightarrow X_{\cdot 1}$  y  $q_{\cdot 1}: X_{\cdot 1} \longrightarrow Y_{\cdot}$ , verificándose que

$$q_{\cdot 1} \alpha_{\cdot 1} = t_{\cdot 0} \quad \text{y}$$

$$f_{\cdot} = q_{\cdot 0} i_{\cdot 0} = q_{\cdot 1} i_{\cdot 1} i_{\cdot 0}.$$

Iterando esta construcción un número contable de veces, se obtiene una sucesión de grupos simpliciales  $\{X_{\cdot m}\}_{m \geq 0}$  con  $X_{\cdot -1} = X_{\cdot}$ , así como sucesiones de morfismos simpliciales, como muestra el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} X_{\cdot} & \xrightarrow{i_{\cdot 0}} & X_{\cdot 0} & \xrightarrow{i_{\cdot 1}} & X_{\cdot 1} & \longrightarrow & \dots \\ f_{\cdot} \downarrow & & q_{\cdot 0} & & q_{\cdot 1} & & \\ Y_{\cdot} & & & & & & \end{array}$$

donde, habiendo obtenido  $X_{\cdot m}$  y considerando todos los diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[s] \longrightarrow X_{\cdot m} & & F\Delta[n+2, k] \longrightarrow X_{\cdot m} \\ \downarrow & \lambda_m & \downarrow & & \downarrow & \mu_m & \downarrow \\ F\Delta[s] \longrightarrow Y_{\cdot} & & q_{\cdot m} & \text{y} & q_{\cdot m} & & \\ 0 \leq s \leq n+1 & & & & & & \\ & & & & F\Delta[n+2] \longrightarrow Y_{\cdot} & & \\ & & & & 0 \leq k \leq n+2 & & \end{array}$$



el grupo simplicial  $X_{m+1}$  así como los morfismos  $i_{m+1}: X_m \longrightarrow X_{m+1}$  y  $q_{m+1}: X_{m+1} \longrightarrow Y.$ , están definidos a partir del diagrama pushout

$$(Q_m) \quad \begin{array}{ccc} (\coprod \Delta[s]) \amalg (\coprod \Delta[n+2, k]) & \xrightarrow{h_m} & X_m \\ \lambda_m \downarrow H_m \quad \mu_m & & \downarrow i_{m+1} \\ (\coprod \Delta[s]) \amalg (\coprod \Delta[n+2]) & \xrightarrow{\alpha_{m+1}} & X_{m+1} \\ \lambda_m \downarrow \quad \mu_m & & \downarrow q_{m+1} \\ & & Y. \end{array}$$

$t_m$  (arrow from  $(\coprod \Delta[s]) \amalg (\coprod \Delta[n+2])$  to  $Y.$ )

$q_m$  (arrow from  $X_m$  to  $Y.$ )

verificando  $q_{m+1} \alpha_{m+1} = t_m$  y  $q_{m+1} i_{m+1} = q_m$  para  $m \geq -1$ .

Consideramos el límite directo de la sucesión de grupos simpliciales  $\{X_m\}_{m \geq 0}$ , esto es,

$$(X_\infty = \varinjlim X_m, r_m: X_m \longrightarrow X_\infty).$$

El morfismo canónico,  $q = \varinjlim q_m$ , obtenido a partir de la propiedad universal de los límites directos aplicada al par  $(Y., q_m: X_m \longrightarrow Y.)$ , proporciona la factorización del morfismo simplicial dado inicialmente,

$$\begin{array}{ccc} X. & \xrightarrow{f.} & Y. \\ i. & & q. \\ & & X_\infty \end{array}$$

puesto que, a consecuencia de la obtención de  $q$  por mencionada propiedad universal, este morfismo simplicial verifica  $q.r_m = q_m$  y, por consiguiente

$$\begin{aligned}
q.i. &= q.(r_m i_m i_{m-1} \dots i_0) = \\
&= (q.r_m) i_m i_{m-1} \dots i_0 = \\
&= (q.i_m) i_{m-1} \dots i_0 = \\
&= (q.i_{m-1}) i_{m-2} \dots i_0 = \dots = \\
&= q.i_0 = f..
\end{aligned}$$

Obtenida la factorización  $f.=q.i.$ , probemos en primer lugar que  $q.$  es  $n$ -fibración trivial demostrando, por la Proposición 4.1.11., que  $q.$  tiene la RLP con respecto a las familias de morfismos de **Simp(Gp)**

$$F\Delta[s] \longrightarrow F\Delta[s], 0 \leq s \leq n+1 \quad \text{y} \quad F\Delta[n+2, k] \longrightarrow F\Delta[n+2], 0 \leq k \leq n+2.$$

Consideremos pues un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
F\Delta[s] & \xrightarrow{u.} & X_{\infty} \\
\text{in}_1 \downarrow & & \downarrow q. \\
F\Delta[s] & \xrightarrow{v.} & Y., 0 \leq s \leq n+1.
\end{array}$$

para el que el levantamiento que buscamos está definido por la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc}
F\Delta[s] & \xrightarrow{u.} & X_{\infty} \\
\downarrow \text{in}_1 & \searrow \gamma. & \downarrow q. \\
(\coprod F\Delta[s]) \amalg (\coprod F\Delta[n+2, k]) & \xrightarrow{\quad} & X_m \\
\downarrow H_{m-1} & \searrow i_m h_{m-1} & \downarrow \alpha_m \\
(\coprod F\Delta[s]) \amalg (\coprod F\Delta[n+2]) & \xrightarrow{\quad} & Y. \\
\downarrow & \searrow t_{m-1} & \downarrow v. \\
F\Delta[s] & \xrightarrow{v.} & Y.
\end{array}$$



En este diagrama, el morfismo simplicial  $\gamma_*$  se obtiene por el hecho de ser los objetos  $F\Delta[s]$  secuencialmente pequeños, y, en consecuencia,

$$\text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gp})}(F\Delta[s], \varinjlim X_m) = \varinjlim \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gp})}(F\Delta[s], X_m) .$$

Existe por tanto una factorización del morfismo dado  $u_*$  de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[s] & \xrightarrow{u_*} & X_\infty \\ & \gamma_* \searrow & \uparrow r_m \\ & & X_m \end{array}$$

Este hecho determina que la composición propuesta sea levantamiento del diagrama dado originalmente, puesto que cada uno de los subdiagramas que lo integran son conmutativos, dado que han sido obtenidos a partir de propiedades universales de coproductos y pushouts. Nótese que éste es también el caso de los subdiagramas

$$(S_1) \quad \begin{array}{ccc} F\Delta[s] & \xrightarrow{\gamma_*} & X_m \\ & & \downarrow i_m \quad \downarrow h_{m-1} \\ & & (\coprod F\Delta[s]) \coprod (\coprod F\Delta[n+2, k]) \end{array}$$

y

$$(S_2) \quad \begin{array}{ccc} & & (\coprod F\Delta[s]) \coprod (\coprod F\Delta[n+2]) \\ & & \downarrow t_{m-1} \\ F\Delta[s] & \xrightarrow{v_*} & Y \end{array}$$

a consecuencia de ser conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[s] & \xrightarrow{\gamma_*} & X_m \\ \text{in}_1 \downarrow & & \downarrow q_* \\ F\Delta[s] & \xrightarrow{v_*} & Y. \end{array} ,$$



ya que  $v_* \text{in}_1 = q_* u_* = q_* r_* \gamma_* = q_* \gamma_*$ . Este es, por tanto, uno de los diagramas sobre los que se indizan los coproductos para obtener el grupo simplicial  $X_m$ .

En consecuencia, los morfismos simpliciales  $t_{m-1}$  y  $h_{m-1}$  se han obtenido de un diagrama análogo a (1), por la propiedad universal del coproducto, lo que determina la conmutatividad de los subdiagramas  $(S_1)$  y  $(S_2)$ .

En definitiva,  $q_*$  es  $n$ -fibración trivial puesto que, por el mismo argumento,  $q_*$  tiene la RLP con respecto a

$$F\Delta[n+2, k] \longrightarrow F\Delta[n+2], \quad 0 \leq k \leq n+2,$$

ya que los objetos  $F\Delta[n+2, k]$ ,  $0 \leq k \leq n+2$ , son igualmente secuencialmente pequeños.

Para terminar esta primera parte del axioma de factorización, demostramos que el morfismo simplicial  $i_* : X_m \longrightarrow X_\infty$  es  $n$ -cofibración. Por el Lema 4.2.1. iii), es suficiente probar que cada uno de los morfismos  $i_{m+1} : X_m \longrightarrow X_{m+1}$ , obtenidos anteriormente, son  $n$ -cofibraciones y por ii) y i), puesto que cada  $i_{m+1}$  se obtiene de un diagrama pushout  $(Q_m)$  se tiene que  $i_*$  es  $n$ -cofibración si lo son los morfismos de grupos simpliciales



$$F\Delta[s] \longrightarrow F\Delta[s], 0 \leq s \leq n+1 \quad \text{y} \quad F\Delta[n+2, k] \longrightarrow F\Delta[n+2], 0 \leq k \leq n+2,$$

lo cual es cierto por la Proposición 4.1.11. y la definición de n-cofibración.

Demostramos a continuación la factorización de cualquier morfismo de  $\text{Simp}(\text{Gp})$ ,  $f.: X. \longrightarrow Y.$ , en n-cofibración trivial y n-fibración. Para ello, repetimos el argumento usado en la anterior factorización, tomando en este caso todos los diagramas conmutativos de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
 F\Delta[s, k] \longrightarrow X._m & & F* \longrightarrow X._m \\
 \downarrow \lambda_m & & \downarrow \mu_m \\
 F\Delta[s] \longrightarrow Y. & & FS^{n+1} \longrightarrow Y.
 \end{array}
 \quad \text{y}$$

$0 \leq k \leq s, 0 < s \leq n+2$

y definiendo el grupo simplicial  $X._{m+1}$  y los morfismos simpliciales  $j._{m+1}: X._m \longrightarrow X._{m+1}$   $p._{m+1}: X._{m+1} \longrightarrow Y.$  mediante el siguiente diagrama pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 (\coprod F\Delta[s, k]) \coprod (\coprod F*) & \longrightarrow & X._m \\
 \downarrow \lambda_m \quad \mu_m & & \downarrow j._{m+1} \\
 (\coprod F\Delta[s]) \coprod (\coprod FS^{n+1}) & \xrightarrow{\beta._{m+1}} & X._{m+1} \\
 \downarrow \lambda_m \quad \mu_m & & \downarrow p._{m+1} \\
 & & Y.
 \end{array}$$

(P<sub>m</sub>)

De esta forma, considerando  $(X_{\infty} = \varinjlim X_m, s_m: X_m \longrightarrow X_{\infty})$ ,  $p. = \varprojlim p_m$  y  $j.: X. \longrightarrow X_{\infty}$  el morfismo canónico, se tiene, como anteriormente, una factorización  $f. = p.j.$  para la que probaremos que  $p.$  es  $n$ -fibración y  $j.$  es  $n$ -cofibración trivial.

En primer lugar, nótese que  $p.$  es  $n$ -fibración, por la Proposición 4.1.3., si y solamente si  $p.$  tiene la RLP con respecto a los morfismos de grupos simpliciales

$$F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2 \quad \text{y} \quad F* \longrightarrow FS^{n+1}.$$

Dado pues un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[s,k] & \xrightarrow{u.} & X_{\infty} \\ \text{in}_1 \downarrow & & \downarrow p. \\ F\Delta[s] & \xrightarrow{v.} & Y. \end{array}$$

el levantamiento buscado para dicho diagrama está definido por la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[s,k] & \xrightarrow[\delta.]{u.} & X_{\infty} \\ \text{in}_1 \downarrow & & \downarrow p. \\ (\coprod_{\lambda_{m-1}} F\Delta[s,k]) \coprod (\coprod_{\mu_{m-1}} F*) & \xrightarrow{\quad} & X_m \\ \downarrow & & \nearrow s_m \\ (\coprod_{\lambda_{m-1}} F\Delta[s]) \coprod (\coprod_{\mu_{m-1}} FS^{n+1}) & \xrightarrow{\beta_m} & X_m \\ \downarrow & & \downarrow p. \\ F\Delta[s] & \xrightarrow{v.} & Y. \end{array}$$



donde el morfismo simplicial  $\delta_*$  se obtiene por el hecho de ser los objetos  $F\Delta[s,k]$  secuencialmente pequeños y en consecuencia, existe una factorización del morfismo dado  $u_*$  de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
 F\Delta[s,k] & \xrightarrow{u_*} & X_{\infty} \\
 & \delta_* & s_{*m} \\
 & & X_{*m}
 \end{array}$$

Como ocurría en la primera parte del axioma de factorización, puesto que  $u_* = s_{*m} \delta_*$ , el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 F\Delta[s,k] & \xrightarrow{\delta_*} & X_{*m} \\
 \text{in}_1 \downarrow & & \downarrow p_{*m} \\
 F\Delta[s] & \xrightarrow{v_*} & Y_*
 \end{array}$$

ya que  $v_* \text{in}_1 = p_* u_* = p_* s_{*m} \delta_* = p_* \delta_*$  y es, por tanto, uno de los diagramas sobre los que se indizan los coproductos para obtener el grupo simplicial  $X_{*m}$ . Este hecho determina, por un argumento análogo al usado en la primera parte de este axioma de factorización, que la mencionada composición sea el levantamiento buscado para el diagrama dado inicialmente.

De igual forma se tiene que  $p_*$  tiene la RLP con respecto a  $F^* \longrightarrow FS^{n+1}$  debido a que  $F^*$  es secuencialmente pequeño. En consecuencia,  $p_*$  es  $n$ -fibración.

Para probar que el morfismo canónico  $j.:X. \longrightarrow X._\infty$  es n-cofibración trivial, nótese que  $j.$  es n-cofibración, por el Lema 4.2.1., puesto que los morfismos

$$F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2, \quad \text{y} \quad F* \longrightarrow FS^{n+1}$$

son n-cofibraciones triviales por la Proposición 4.1.3. y, en particular, son n-cofibraciones. Queda pues probar que  $j.$  es n-equivalencia débil, y según el Lema 4.2.1.iii), es suficiente demostrar que lo son cada uno de los morfismos  $j._{m+1}:X._m \longrightarrow X._{m+1}$ , obtenidos de del diagrama pushout  $(P_m)$

$$(P_m) \quad \begin{array}{ccc} (\coprod F\Delta[s,k]) \coprod (\coprod F*) & \xrightarrow{\quad} & X._m \\ \lambda_m \downarrow & \mu_m & \downarrow j._{m+1} \\ (\coprod F\Delta[s]) \coprod (\coprod FS^{n+1}) & \xrightarrow{\beta._{m+1}} & X._{m+1} \\ \lambda_m \downarrow & \mu_m & \downarrow p._{m+1} \\ & & Y. \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ \downarrow p._m \end{array}$$

Para ello, nótese que para cada uno de estos morfismos simpliciales se tiene que  $j._{m+1} = \beta.\alpha.$ , donde los morfismos  $\alpha.$  y  $\beta.$  están definidos por los siguientes diagramas pushout:

$$\begin{array}{ccc} \coprod F\Delta[s,k] & \longrightarrow & X._m \\ \lambda_m \downarrow & & \downarrow \alpha. \\ \coprod F\Delta[s] & \longrightarrow & T. \\ \lambda_m & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \coprod F* & \longrightarrow & T. \\ \mu_m \downarrow & & \downarrow \beta. \\ \coprod FS^{n+1} & \longrightarrow & P. \end{array} ,$$

En efecto, puesto que el diagrama conmutativo



$$\begin{array}{ccc}
(\coprod \Delta[s,k]) \coprod (\coprod F^*) & \longrightarrow & X_m \\
\lambda_m \downarrow & & \downarrow \beta \cdot \alpha \\
(\coprod \Delta[s]) \coprod (\coprod FS^{n+1}) & \longrightarrow & P. \\
\lambda_m \downarrow & & \downarrow \mu_m
\end{array}$$

verifica la propiedad universal del pushout  $(P_m)$  por las correspondientes propiedades universales que verifican  $T$  y  $P$  respectivamente, se tiene que  $j_{m+1} = \beta \cdot \alpha$  y  $P_m = X_{m+1}$ . En definitiva, para demostrar que cada morfismo  $j_{m+1}$  es  $n$ -equivalencia débil es suficiente pues probar, por el axioma CM2, que lo son  $\alpha$  y  $\beta$ .

Para el morfismo simplicial  $\alpha$ , nótese que los morfismos  $F\Delta[s,k] \longrightarrow F\Delta[s]$ ,  $0 \leq k \leq s$ ,  $0 < s \leq n+2$ , son cofibraciones triviales con la estructura de modelos de Quillen en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver Capítulo 1, Proposición 1.1.IV.2.) y lo son, por tanto los morfismos

$$\coprod F\Delta[s,k] \longrightarrow \coprod F\Delta[s], \quad 0 \leq k \leq s, \quad 0 < s \leq n+2,$$

(ver demostración del Teorema 2.2.5. -axioma CM5).

Este hecho, vía el axioma M4 de una categoría de modelos en su axiomática original, (ver Capítulo 1), conduce a que el morfismo de grupos simpliciales  $\alpha$  sea equivalencia débil y, en consecuencia, es  $n$ -equivalencia débil para todo  $n \geq 1$ .

En lo referido al morfismo  $\beta: T \longrightarrow X_{m+1}$ , obtenido del diagrama pushout

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod F^* & \longrightarrow & T. \\
 \mu_m \downarrow & & \downarrow \beta. \\
 \coprod FS^{n+1} & \longrightarrow & X_{m+1}
 \end{array}
 ,$$

nótese en primer lugar que, para la inclusión de conjuntos simpliciales  $\text{in.} : * \longrightarrow S^{n+1}$ , por ser el conjunto simplicial  $*$  objeto final de  $\text{SS}$ , existe un único morfismo simplicial  $k. : S^{n+1} \longrightarrow *$  para el que, por la unicidad de morfismos  $S. \longrightarrow *$  para todo  $S. \in \text{Obj}(\text{SS})$ , se verifica que  $k. \text{in.} = \text{Id}_*$ .

Por tanto, se tiene un morfismo de grupos simpliciales  $\text{Fk.} : FS^{n+1} \longrightarrow F^*$  tal que  $\text{Fk.} \text{Fin.} = \text{Id}_{F^*}$ . Por la propiedad universal de coproductos y pushouts, el morfismo  $\text{Fk.}$  induce morfismos simpliciales tal y como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 F^* & \longrightarrow & \coprod F^* & \longrightarrow & T. & & \\
 \text{Fin.} \downarrow \uparrow \text{Fk.} & & \mu \downarrow \uparrow \coprod \text{Fk.} & & \downarrow \beta. & & \\
 FS^{n+1} & \longrightarrow & \coprod FS^{n+1} & \longrightarrow & X_{m+1} & & \\
 & & \mu \downarrow & & \downarrow h. & & \\
 & & & & & & T.
 \end{array}
 \quad \text{Id}_{T.}$$

Existe pues un morfismo simplicial  $h. : X_{m+1} \longrightarrow T.$  verificando, en particular, que  $h. \beta. = \text{Id}_{T.}$  y, por tanto,  $h.$  es epimorfismo y  $\beta.$  monomorfismo. Por otra parte, los grupos simpliciales libres  $F^*$  y  $FS^{n+1}$  coinciden hasta dimensión  $n$ , esto es,  $(F^*)_i = (FS^{n+1})_i = \mathbb{Z}$  para  $0 \leq i \leq n$  (de hecho,  $F^*$  es el grupo simplicial constante  $\mathbb{Z}$  mientras que  $(FS^{n+1})_{n+1} = \mathbb{Z} \amalg \mathbb{Z}$ , donde  $\amalg$  denota producto libre de grupos).

Por tanto es claro que el morfismo simplicial  $(\text{Fin.})_i : (F^*)_i \longrightarrow (FS^{n+1})_i$  es isomorfismo para  $0 \leq i \leq n$  (de hecho es una igualdad), siendo  $(\text{Fk.})_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , el morfismo inverso, y, en



consecuencia, el morfismo inducido por Fin. en los correspondientes coproductos,  $\coprod_{\mu} F^* \longrightarrow \coprod_{\mu} FS^{n+1}$ , es isomorfismo hasta dimensión n.

Así pues, por la propiedad universal del pushout,  $\beta_i$  es un isomorfismo,  $0 \leq i \leq n$ , y por tanto, una (n-1)-equivalencia débil.

Para demostrar finalmente que  $\beta_n$  es n-equivalencia débil, calculemos la homología de los correspondientes complejos de Moore, según se muestra en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & N_{n+1}(T_*) & \xrightarrow{d_{n+1}} & N_n(T_*) & \xrightarrow{d_n} & N_{n-1}(T_*) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow & & \\
 & & N_{n+1}(\beta_*) & & N_{n+1}(h_*) & \cong & & & \\
 & & \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow & & \downarrow \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & N_{n+1}(X_{m+1}) & \xrightarrow{d'_{n+1}} & N_n(X_{m+1}) & \xrightarrow{d'_n} & N_{n-1}(X_{m+1}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Por definición,

$$\Pi_n(T_*) = \frac{\text{Kerd}_n}{\text{Imd}_{n+1}} \quad \text{y} \quad \Pi_n(X_{m+1}) = \frac{\text{Kerd}'_n}{\text{Imd}'_{n+1}},$$

donde  $\text{Kerd}_n \cong \text{Kerd}'_n$  puesto que  $N_n(\beta_*)$  y  $N_{n-1}(\beta_*)$  son isomorfismos a consecuencia de serlo  $\beta_n$  y  $\beta_{n-1}$  (ver [48], Cap. II, §3. Lema 5). De igual forma, por ser h. sobreyectivo, el correspondiente morfismo inducido en el complejo de Moore es sobreyectivo; en particular,  $N_{n+1}(h_*)$  es sobreyectivo y por tanto,

$$\text{Imd}'_{n+1} \cong \text{Imd}_{n+1} N_{n+1}(h_*) = \text{Imd}_{n+1},$$

$$\text{es decir, } \Pi_n(T.) = \frac{\text{Kerd}_n}{\text{Imd}_{n+1}} \cong \frac{\text{Kerd}'_n}{\text{Imd}'_{n+1}} = \Pi_n(X_{m+1}).$$

Se tiene pues que  $\beta.$  es  $n$ -equivalencia débil y por tanto lo es cada uno de los morfismos  $j_{m+1}: X_m \longrightarrow X_{m+1}$ . En consecuencia, el morfismo  $j.: X. \longrightarrow X_\infty$  es una  $n$ -cofibración trivial, lo que prueba entonces el axioma **CM5** por completo.

Para su uso posterior -axioma **CM4**- demostraremos además que el morfismo canónico  $j.: X. \longrightarrow X_\infty$  tiene, por construcción, la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones. Para ello, consideremos un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} X. & \xrightarrow{a.} & E. \\ j. \downarrow & & \downarrow g. \\ X_\infty & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

con  $g.: E. \longrightarrow B.$  una  $n$ -fibración, para el que el levantamiento buscado está definido por la propiedad universal del límite directo ( $X_\infty = \varinjlim X_m$ ,  $s_m: X_m \longrightarrow X_\infty$ ) para el par  $(E., d_m: X_m \longrightarrow X_\infty)$ , donde cada uno de los morfismos simpliciales  $d_m: X_m \longrightarrow X_\infty$  se obtienen como el levantamiento en los siguientes diagramas conmutativos:

El morfismo simplicial  $d_0: X_0 \longrightarrow X_\infty$  se obtiene, construyendo a partir del diagrama dado, el siguiente, también conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X. & \xrightarrow{a.} & E. \\ j_0 \downarrow & \nearrow d_0 & \downarrow g. \\ X_0 & \xrightarrow{b.s_0} & B. \end{array}$$



En él, la existencia del levantamiento  $d_0$  está asegurada por la Proposición 4.1.3.. En efecto, si ampliamos dicho diagrama vía las inyecciones canónicas a los correspondientes coproductos y el diagrama pushout del cual se obtiene el grupo simplicial  $X_0$ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 F\Delta[s,k] & \longrightarrow & \coprod_{\lambda} F\Delta[s,k] & \longrightarrow & (\coprod_{\lambda} F\Delta[s,k]) \coprod (\coprod_{\mu} F^*) & \longrightarrow & X_0 \xrightarrow{a_0} E. \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j_0 & & \downarrow g. \\
 F\Delta[s] & \longrightarrow & \coprod_{\lambda} F\Delta[s] & \longrightarrow & (\coprod_{\lambda} F\Delta[s]) \coprod (\coprod_{\mu} FS^{n+1}) & \longrightarrow & X_0 \xrightarrow{b.s_0} B.
 \end{array}$$

por la mencionada Proposición 4.1.3., existe levantamiento  $F\Delta[s] \longrightarrow E$ . que a su vez induce, por la propiedad universal del coproducto, levantamientos  $\coprod_{\lambda} F\Delta[s] \longrightarrow E$ . y  $(\coprod_{\lambda} F\Delta[s]) \coprod (\coprod_{\mu} FS^{n+1}) \longrightarrow E$ .. Finalmente,  $d_0$  se define, por la propiedad universal del pushout, como el morfismo inducido por el anterior, verificándose  $g.d_0 = b.s_0$  y  $d_0.j_0 = a_0$ ..

El morfismo simplicial  $d_1 : X_1 \longrightarrow E$ . se obtiene, al igual que  $d_0$  por la Proposición 4.1.3. -dado que  $g : E \longrightarrow B$ . es n-fibración- como levantamiento del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{d_0} & E. \\
 j_1 \downarrow & \nearrow d_1 & \downarrow g. \\
 X_1 & \xrightarrow{b.s_1} & B.
 \end{array}$$

verificando en consecuencia  $g.d_1 = b.s_1$  y  $d_1.j_1 = d_0$ . En general, habiendo obtenido  $d_{m-1}$ , el morfismo simplicial  $d_m : X_m \longrightarrow E$ . se define de nuevo, vía la Proposición 4.1.3., como el levantamiento del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X_{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & E \\
 j_m \downarrow & \nearrow d_m & \downarrow g \\
 X_m & \xrightarrow{b.s._m} & B
 \end{array}$$

con  $g.d_m = b.s._m$  y  $d_m.j_m = d_{m-1}$ .

En definitiva, todo morfismo de grupos simpliciales  $f.:X. \longrightarrow Y.$  puede factorizarse como  $f.=p.j.$  donde  $p.$  es  $n$ -fibración y  $j.$  es  $n$ -cofibración trivial que, además, tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones.

Para terminar la demostración del Teorema 4.2.2., probemos el axioma de levantamiento **CM4**, que por la definición considerada de  $n$ -cofibración,  $n>0$ , se reduce a demostrar la existencia de levantamiento en diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \xrightarrow{a.} & X. \\
 k. \downarrow & & \downarrow q. \\
 B. & \xrightarrow{b.} & Y.
 \end{array}$$

donde  $q.$  es una  $n$ -fibración y  $k.$  una  $n$ -cofibración trivial.

Para ello, factorizamos el morfismo simplicial dado  $k.:A. \longrightarrow B.,$  según la segunda parte del axioma **CM5**,

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \xrightarrow{k.} & B. \\
 i. & & p. \\
 & A_{\infty} &
 \end{array}$$



es decir,  $k. = p.i.$  con  $p.$   $n$ -fibración é  $i.$   $n$ -cofibración trivial.

Nótese entonces que, por el axioma **CM2**,  $p.$  es también  $n$ -equivalencia débil y por tanto,  $p.$  es  $n$ -fibración trivial.

El levantamiento buscado para el diagrama dado inicialmente,

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \xrightarrow{a.} & X. \\
 k. \downarrow & \nearrow D. & \downarrow q. \\
 B. & \xrightarrow{b.} & Y.
 \end{array}$$

está definido como la composición  $D. = G.s.$ , donde  $s.: B. \longrightarrow A._\infty$  es levantamiento para el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \xrightarrow{i.} & A._\infty \\
 k. \downarrow & \nearrow s. & \downarrow p. \\
 B. & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B.
 \end{array}$$

por el hecho de ser  $p.$   $n$ -fibración trivial y  $k.$   $n$ -cofibración (trivial), y  $G.$  es levantamiento para el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \xrightarrow{a.} & X. \\
 i. \downarrow & \nearrow G. & \downarrow q. \\
 A._\infty & \xrightarrow{b.p.} & Y.
 \end{array}$$

puesto que la n-cofibración trivial,  $i.:A. \longrightarrow A._\infty$ , obtenida de la segunda parte de **CM5**, tiene la LLP con respecto a las n-fibraciones, como hicimos notar anteriormente. Por las propiedades de conmutación que verifican s. y G. se tiene que

$$q.D.=q.(G.s.)=(q.G.)s.=b.(p.s.)=b.Id_{B.}=b. \quad y$$

$$D.k.=(G.s.)k.=G.(s.k.)=G.i.=a.. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de este Teorema, se tiene una caracterización de las n-cofibraciones.

#### Proposición 4.2.3.

Un morfismo en  $\text{Simp}(\text{Gp})$   $f.:X. \longrightarrow Y.$  es una n-cofibración si y solamente si f. es retracts de un morfismo  $i.:X. \longrightarrow X._\infty$  obtenido de la factorización de f. en n-cofibración y n-fibración trivial.

#### Demostración.

Sea  $f.:X. \longrightarrow Y.$  una n-cofibración y factoricémosla, según la primera parte de **CM5**, en n-cofibración i. y n-fibración trivial q.. El siguiente diagrama demuestra entonces que f. es retracts de i.:

$$\begin{array}{ccc} X. & \xrightarrow{\text{Id}_{X.}} & X. \\ f. \downarrow & & \downarrow i. \\ Y. & \xrightarrow{d.} & X._\infty \\ & \xleftarrow{q.} & \end{array}$$

donde d. es el levantamiento que existe, por **CM4**, para el siguiente diagrama conmutativo:



$$\begin{array}{ccc}
 X. & \xrightarrow{i.} & X._{\infty} \\
 f. \downarrow & \nearrow d. & \downarrow q. \\
 Y. & \xrightarrow{\text{Id}_{Y.}} & Y.
 \end{array}$$

Recíprocamente, supongamos que  $f.$  es retracts del morfismo  $i.$  obtenido en la factorización de  $f.$  en  $n$ -cofibración y  $n$ -fibración trivial. Por el axioma **CM3**,  $f.$  es entonces  $n$ -cofibración. ■

Se tiene por tanto una caracterización de los objetos  $n$ -cofibrantes.

**Corolario 4.2.4.**

Para todo grupo simplicial  $G.$  se tiene que  $G.$  es  $n$ -cofibrante si y solamente si  $G.$  es retracts de un grupo simplicial de la forma  $\Phi._{\infty}$ , obtenido de la factorización por **CM5** del único morfismo  $g.: \Phi. \longrightarrow G.$  en  $n$ -cofibración y  $n$ -fibración trivial.

**Demostración.**

Sea  $G.$  un grupo simplicial  $n$ -cofibrante, esto es, el único morfismo simplicial  $g.: \Phi. \longrightarrow G.$  es  $n$ -cofibración, donde  $\Phi.$  denota el grupo simplicial con un único elemento (objeto inicial y final en **Simp(Gp)**).

Por la Proposición 4.2.3., esto es equivalente a que  $g.: \Phi. \longrightarrow G.$  sea retracts del morfismo  $\Phi. \longrightarrow \Phi._{\infty}$ , obtenido éste de la factorización de  $g.$  en  $n$ -cofibración y  $n$ -fibración trivial, esto es, existe un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi_n & \xrightarrow{\text{Id}_{\Phi_n}} & \Phi_n \\
 g_n \downarrow & & \downarrow \\
 G_n & \xrightleftharpoons[u_n]{v_n} & \Phi_\infty
 \end{array}$$

es decir,  $G_n$  es retracto de  $\Phi_\infty$ . ■



#### 4.3.COMPARACION DE ESTRUCTURAS. EQUIVALENCIA DE TEORIAS DE HOMOTOPIA.

En las secciones precedentes se ha probado que las definiciones propuestas de n-fibración, n-cofibración y n-equivalencia débil,  $n > 0$ , en la categoría de grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , dan lugar a una estructura de modelos cerrada para dicha categoría, para cada  $n > 0$ , que hemos llamado n-estructura. La relación entre la n-estructura de grupos simpliciales y la estructura clásica ha sido descrita anteriormente, presentándose la primera como una generalización de la segunda, en el sentido ya mencionado de que la  $\omega$ -estructura es justamente la estructura de modelos de Quillen en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Sin embargo, puede hacerse un estudio más preciso de la relación que existe entre ambas vía el par de funtores adjuntos (ver Capítulo 1, Ejemplo IV)

$$\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \begin{array}{c} \xleftarrow{S_k^{n+1}} \\ \xrightarrow{\text{Cosk}^{n+1}} \end{array} \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

El objetivo de esta sección es en primer lugar, determinar las propiedades de los funtores  $S_k^{n+1}$  y  $\text{Cosk}^{n+1}$  en relación con la n-estructura y la estructura clásica de modelos de Quillen en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (Teorema 4.3.1.).

Por otra parte, recordemos que la categoría de n-hipergrupoides en grupos,  $n\text{-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ , admite una estructura de modelos cerrada -levantada de la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ - según se vio en el Capítulo 3. Usando entonces el criterio dado por Quillen para determinar cuándo categorías



con distintas estructuras dan lugar a teorías de homotopía equivalentes (Teorema 1.2.2.2., Capítulo 1), probaremos finalmente que éste es el caso de las categorías  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$  y  $\text{Simp}(\text{Gp})$  con la  $n$ -estructura, resultado que se enuncia en el Teorema 4.3.3.

Consideremos la categoría de grupos simpliciales con la estructura usual de modelos cerrada (ver Capítulo 1, Ejemplo IV) y notemos por  $\text{Simp}(\text{Gp})_n$  a la categoría de grupos simpliciales equipada con la  $n$ -estructura de modelos cerrada,  $n > 0$ . Se tiene entonces el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.1.**

Para la adjunción

$$\text{Simp}(\text{Gp})_n \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Sk}^{n+1}} \\ \xrightarrow{\text{Cosk}^{n+1}} \end{array} \text{Simp}(\text{Gp})$$

se verifican las siguientes propiedades:

i) Si  $p.:E. \longrightarrow B.$  es una  $n$ -fibración de grupos simpliciales (resp.  $n$ -equivalencia débil), entonces  $\text{Cosk}^{n+1} p.: \text{Cosk}^{n+1} E. \longrightarrow \text{Cosk}^{n+1} B.$  es una fibración de Kan (resp. equivalencia débil).

ii) Si  $i.:A. \longrightarrow C.$  es una cofibración en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  (resp. equivalencia débil),  $\text{Sk}^{n+1} i.$  es una  $n$ -cofibración (resp.  $n$ -equivalencia débil).

**Demostración.**

i) Supongamos que  $p.:E. \longrightarrow B.$  es  $n$ -fibración. Por la Proposición 4.1.8.ii), esto es equivalente a que el morfismo inducido en los correspondientes complejos de Moore,  $N_q(p.): N_q(E.) \longrightarrow N_q(B.)$ , sea sobreyectivo para  $0 < q \leq n+2$ , y el morfismo inducido en el  $(n+1)$ -grupo de homotopía,  $\bar{p}_{n+1}: \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.)$ , sea igualmente sobreyectivo.



Probaremos entonces que  $\text{Cosk}^{n+1} p.$  es una fibración de Kan demostrando equivalentemente que  $N_q(\text{Cosk}^{n+1} p.)$  es sobreyectivo para  $q > 0$  (ver Capítulo 1, Proposición 1.1.IV.2.). Puesto que para todo grupo simplicial  $G.$ , se tiene que

$$N_q(\text{Cosk}^{n+1} G.) = \begin{cases} N_q(G.) & \text{si } 0 \leq q \leq n+1 \\ \text{Ker}(d_{n+1} : N_{n+1}(G.) \longrightarrow N_n(G.)) & \text{si } q = n+2 \\ 0 & \text{si } q > n+2 \end{cases}$$

(ver [32]), es claro que el morfismo simplicial  $N_q(\text{Cosk}^{n+1} p.)$  es sobreyectivo para  $0 < q \leq n+1$ . Queda entonces únicamente probar que el morfismo

$$N_{n+2}(\text{Cosk}^{n+1} p.) : N_{n+2}(\text{Cosk}^{n+1} E.) \longrightarrow N_{n+2}(\text{Cosk}^{n+1} B.)$$

es sobreyectivo, ya que en dimensiones superiores se tiene la sobreyectividad trivialmente. Consideremos para ello el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N_{n+2}(E.) & \xrightarrow{d_{n+2}} & N_{n+1}(E.) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ & \text{Im } d_{n+2} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N_{n+2}(B.) & \xrightarrow{d'_{n+2}} & N_{n+1}(B.) \\ & \searrow & \downarrow \\ & \text{Im } d'_{n+2} & \end{array}$$

del cual, dado que por hipótesis el morfismo  $N_{n+2}(p.)$  es sobreyectivo, se tiene que el morfismo  $\text{Im } d_{n+2} \longrightarrow \text{Im } d'_{n+2}$  también lo es.

Demostramos a continuación que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Im } d_{n+2} & \longrightarrow & \text{Ker } d_{n+1} & \longrightarrow & \Pi_{n+1}(E.) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Im } d'_{n+2} & \longrightarrow & \text{Ker } d'_{n+1} & \longrightarrow & \Pi_{n+1}(B.) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

es de sucesiones exactas cortas. Para ello, nótese que, puesto que  $d_{n+1}d_{n+2} = 0$  y  $d'_{n+1}d'_{n+2} = 0$ , los morfismos

$$\begin{array}{l}
 i: \text{Im } d_{n+2} \longrightarrow \text{Ker } d_{n+1} \quad y \\
 i': \text{Im } d'_{n+2} \longrightarrow \text{Ker } d'_{n+1}
 \end{array}$$

son inyectivos, así como las proyecciones

$$\begin{array}{l}
 p: \text{Ker } d_{n+1} \longrightarrow \Pi_{n+1}(E.) \quad y \\
 p': \text{Ker } d'_{n+1} \longrightarrow \Pi_{n+1}(B.),
 \end{array}$$

son claramente epimorfismos.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } p &= \{x \in N_{n+1}(E.) \text{ con } d_{n+1}x = e \text{ tal que } \bar{x} = \bar{e}\} = \\
 &= \{x \in N_{n+1}(E.) \text{ con } d_{n+1}x = e, \text{ tal que existe } z \in E_{n+2} \text{ con} \\
 &\quad d_{n+2}z = x \text{ y } d_i z = e \text{ para } i=0, \dots, n+1\} \\
 &= \{x \in \text{Ker } d_{n+1} \text{ tal que } x = d_{n+2}z \text{ para algún } z \in N_{n+2}(E.)\} = \\
 &= \text{Im } i,
 \end{aligned}$$

y análogamente se tiene que  $\text{Ker } p' = \text{Im } i'$ .



De este diagrama de sucesiones exactas cortas, es claro que el morfismo  $\text{Ker}d_{n+1} \longrightarrow \text{Ker}d'_{n+1}$  es sobreyectivo, esto es, es sobreyectivo el morfismo

$$N_{n+2}(\text{Cosk}^{n+1}p.): N_{n+2}(\text{Cosk}^{n+1}E.) \longrightarrow N_{n+2}(\text{Cosk}^{n+1}B.),$$

y en consecuencia  $\text{Cosk}^{n+1}p.$  es fibración de Kan.

En lo referido a  $n$ -equivalencias débiles, supongamos que el morfismo simplicial  $p.: E. \longrightarrow B.$  es  $n$ -equivalencia débil, es decir,  $\bar{p}_i: \Pi_i(E.) \longrightarrow \Pi_i(B.)$  es isomorfismo para  $0 \leq i \leq n$ . Puesto que

$$\begin{aligned} \Pi_i(\text{Cosk}^{n+1}E.) &= \Pi_i(E.) \text{ si } 0 \leq i \leq n & \text{ y} \\ \Pi_i(\text{Cosk}^{n+1}E.) &= 0 & \text{ si } i > n, \end{aligned}$$

se tiene que  $\text{Cosk}^{n+1}p.$  es equivalencia débil.

ii) Sea  $i.: A. \longrightarrow C.$  una cofibración en  $\text{Simp}(\text{Gp})$  y demostremos que  $\text{Sk}^{n+1}i.$  es  $n$ -cofibración, por definición, probando la existencia de levantamiento para cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \text{Sk}^{n+1}A. & \longrightarrow & E. \\ \text{Sk}^{n+1}i. \downarrow & & \downarrow p. \\ \text{Sk}^{n+1}C. & \longrightarrow & B. \end{array}$$

donde  $p.: E. \longrightarrow B.$  es  $n$ -fibración trivial. Puesto que los funtores  $\text{Sk}^{n+1}$  y  $\text{Cosk}^{n+1}$  son adjuntos, siendo el functor  $\text{Sk}^{n+1}$  el adjunto a izquierda, esto es equivalente a demostrar la existencia de levantamiento en diagramas conmutativos de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
 A. & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1} E. \\
 i. \downarrow & & \downarrow \text{Cosk}^{n+1} p. \\
 C. & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1} B.
 \end{array}$$

donde, si  $p.$  es cualquier  $n$ -fibración trivial, por lo ya probado en i), el morfismo simplicial  $\text{Cosk}^{n+1} p.$  es cualquier fibración trivial.

Se tiene pues, que la existencia de levantamiento en este segundo tipo de diagramas está asegurada. En consecuencia,  $\text{Sk}^{n+1} i.$  es  $n$ -cofibración.

Por último, supongamos que el morfismo simplicial  $i.: A. \longrightarrow C.$  es equivalencia débil. Se tiene entonces que  $\text{Sk}^{n+1} i.$  es  $n$ -equivalencia débil puesto que para todo grupo simplicial  $G.$ , se tiene que

$$\Pi_i(\text{Sk}^{n+1} G.) = \Pi_i G., \quad 0 \leq i \leq n,$$

y por tanto,  $\overline{(\text{Sk}^{n+1} i.)}_i = \bar{i}.$  es isomorfismo para  $0 \leq i \leq n.$  ■

Diremos que un grupo simplicial  $G.$  es  $n$ -coconexo si  $\Pi_i(G.) = 0$  para  $i \geq n+1.$  Si  $\text{Ho}_n(\text{Simp}(Gp))$  denota la categoría de homotopía de  $\text{Simp}(Gp)$  con la  $n$ -estructura y  $\text{Ho}(\text{Simp}(Gp) | n\text{-cc})$  denota la subcategoría plena de  $\text{Ho}(\text{Simp}(Gp))$  formada por aquellos grupos simpliciales que son coconexos, una consecuencia del Teorema 4.3.1. es el siguiente



**Corolario 4.3.2.**

Los funtores  $Sk^{n+1}$  y  $Cosk^{n+1}$  inducen una equivalencia de categorías

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) | n\text{-cc}).$$

**Demostración.**

Comprobaremos que se verifican las hipótesis del Teorema 1.2.2.2. (ver Capítulo 1) para la adjunción dada inicialmente,

$$\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_n \begin{array}{c} \xleftarrow{Sk^{n+1}} \\ \xrightarrow{Cosk^{n+1}} \end{array} \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

Por el Teorema 4.3.1.ii), el funtor adjunto a izquierda,  $Sk^{n+1}$ , preserva cofibraciones y equivalencias débiles, ya que  $Sk^{n+1}i.$  es  $n$ -cofibración (respectivamente  $n$ -equivalencia débil) para todo morfismo de grupos simpliciales  $i.$  que sea cofibración (resp. equivalencia débil). En lo referido a equivalencias débiles se tiene pues, en particular, la hipótesis requerida de que  $Sk^{n+1}$  lleve equivalencias débiles entre grupos simpliciales cofibrantes (esto es, retractsos de grupos simpliciales libres), en  $n$ -equivalencias débiles.

Igualmente, por el Teorema 4.3.1.i), el funtor  $Cosk^{n+1}$  preserva fibraciones y equivalencias débiles, es decir, la hipótesis requerida por el criterio de Quillen ya que todos los grupos simpliciales son  $n$ -fibrantes, (Corolario 4.1.9.). Entonces, del mencionado criterio (Teorema 1.2.2.2.), se deduce que la anterior adjunción pasa al nivel de las categorías de homotopía, esto es,

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \begin{array}{c} \xleftarrow{Sk^{n+1}} \\ \xrightarrow{Cosk^{n+1}} \end{array} Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$$

Para ella, seguimos notando por  $Sk^{n+1}$  y  $Cosk^{n+1}$  a los funtores inducidos por éstos al nivel de categorías de homotopía  $\underline{L}Sk^{n+1}$  y  $\underline{R}Cosk^{n+1}$ , dado que coinciden con ellos en objetos -según la equivalencia de categorías  $Ho(\underline{C})$  y  $\Pi_{cf}\underline{C}$  dada en Capítulo 1, Teorema 1.2.1.2. para una categoría de modelos  $\underline{C}$ , puede asumirse que los objetos de  $Ho(\underline{C})$  son los objetos fibrantes y cofibrantes de  $\underline{C}$ .

Por otra parte, puesto que  $\Pi_i(Cosk^{n+1}G.)=0$  para  $i \geq n+1$  (ver [16]), la imagen del funtor  $Cosk^{n+1}$  se identifica con la subcategoría  $Ho(\mathbf{Simp}(Gp) | n\text{-cc})$ . En consecuencia, se tiene una equivalencia de categorías

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(Gp)) \cong Ho(\mathbf{Simp}(Gp) | n\text{-cc}). \quad \blacksquare$$

A consecuencia del Teorema 4.3.1., se puede igualmente completar el estudio de los grupos simpliciales  $n$ -cofibrantes hecho anteriormente.

Para ello, diremos que un grupo simplicial  $G.$  es  $(n+1)$ -esqueleto si  $G. \cong Sk^{n+1}(G.)$ , es decir, si los grupos simpliciales  $G.$  y  $Sk^{n+1}(G.)$  coinciden a partir de dimensión  $n+2$ , puesto que, por definición del funtor  $Sk^{n+1}$ , se tiene que  $G_i = (Sk^{n+1}(G.))_i$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ . De esta forma, los grupos simpliciales  $(n+1)$ -esqueletos y libres aparecerán como grupos simpliciales  $n$ -cofibrantes, como caso particular la siguiente Proposición.

**Proposición 4.3.3.**

Todo grupo simplicial  $G.$  que sea retracto de un grupo simplicial libre y  $(n+1)$ -esqueleto es  $n$ -cofibrante.



**Demostración.**

Supongamos que un grupo simplicial  $G_.$  es retracto de un grupo simplicial libre y  $(n+1)$ -esqueleto, esto es, existen morfismos simpliciales

$$\begin{array}{ccc} & j. & \\ & \longleftarrow & \\ G. & & Z. \\ & \longrightarrow & \\ & i. & \end{array}$$

verificando que  $j.i.=Id_{G.}$ , para  $Z. \in \text{Simp}(Gp)$  tal que  $Z.$  es libre y  $Sk^{n+1}(Z.)=Z..$

Si notamos por  $g.: \Phi. \longrightarrow G.$  y  $z.: \Phi. \longrightarrow Z.$  los únicos morfismos simpliciales que existen con dominio el objeto inicial  $\Phi.$ , se tiene entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & Id_{\Phi.} & \\ & \longrightarrow & \\ \Phi. & & \Phi. \\ g. \downarrow & j. & \downarrow z. \\ G. & \longleftarrow & Z. \\ & \longrightarrow & \\ & i. & \end{array}$$

que demuestra, por la unicidad de los morfismos  $\Phi. \longrightarrow H.$  para todo grupo simplicial  $H.$ , que  $g.$  es retracto de  $z..$

Probaremos entonces que  $G.$  es  $n$ -cofibrante demostrando que existe levantamiento en cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \Phi. & \xrightarrow{a.} & E. \\ g. \downarrow & & \downarrow p. \\ G. & \xrightarrow{b.} & B. \end{array}$$

con  $p.:E. \longrightarrow B.$  una  $n$ -fibración trivial. Consideremos entonces el siguiente diagrama, también conmutativo:

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} & & \text{Id}_{\Phi.} & & \\ & & \longrightarrow & & \\ \text{Sk}^{n+1}\Phi. & \longrightarrow & \Phi. & \xrightarrow{a.} & E. \\ \text{Sk}^{n+1}z. \downarrow & & z. \downarrow & & \downarrow p. \\ \text{Sk}^{n+1}Z. & \longrightarrow & Z. & \longrightarrow & B. \\ & & \text{Id}_{\text{Sk}^{n+1}Z.} & & \text{b. j.} \end{array}$$

y nótese que, por ser  $Z.$  un grupo simplicial libre, el morfismo  $z.: \Phi. \longrightarrow Z.$  es libre en el sentido de Quillen y, en consecuencia, una cofibración ([48], Cap.II). Por el Teorema 4.3.1.ii),  $\text{Sk}^{n+1}z.$  es pues  $n$ -cofibración.

Por otra parte, dado que los funtores  $(n+1)$ -esqueleto y  $(n+1)$ -coesqueleto son adjuntos, la existencia de levantamiento en diagramas (2) es equivalente a encontrar levantamiento para los diagramas del tipo

$$\begin{array}{ccc} \Phi. & \xrightarrow{\varphi(a.)} & \text{Cosk}^{n+1}E. \\ z. \downarrow & \nearrow D. & \downarrow \text{Cosk}^{n+1}p. \\ Z. & \xrightarrow{\varphi(b.j.)} & \text{Cosk}^{n+1}B. \end{array}$$

donde  $\varphi: \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gp})}(\text{Sk}^{n+1}X., Y.) \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gp})}(X., \text{Cosk}^{n+1}Y.)$  es la biyección para la adjunción entre los funtores  $\text{Sk}^{n+1}$  y  $\text{Cosk}^{n+1}$ , definida por



$$\begin{aligned}\varphi(t.) &= \text{Cosk}^{n+1} t. \eta_G \text{ para todo morfismo } t.: \text{Sk}^{n+1} G. \longrightarrow H. \text{ y} \\ \varphi^{-1}(h.) &= \varepsilon_{H.} \text{Sk}^{n+1} h. \text{ para todo morfismo } h.: G. \longrightarrow \text{Cosk}^{n+1} H..\end{aligned}$$

Nótese que para esta adjunción, por las definiciones de los funtores (n+1)-esqueleto y (n+1)-coesqueleto,  $\text{Cosk}^{n+1} \text{Sk}^{n+1} = \text{Cosk}^{n+1}$  y  $\text{Sk}^{n+1} \text{Cosk}^{n+1} = \text{Sk}^{n+1}$  y por tanto, se tiene que la unidad es  $\eta_G.: G. \longrightarrow \text{Cosk}^{n+1} G.$ , y la counidad  $\varepsilon_{H.}: \text{Sk}^{n+1} H. \longrightarrow H.$ , para cualesquiera grupos simpliciales G. y H..

Dado que el diagrama (2) es conmutativo, también lo es su diagrama adjunto en el que, por ser el morfismo simplicial z. una n-cofibración y  $\text{Cosk}^{n+1} p.$  una fibración trivial por el Teorema 4.3.1.i), existe levantamiento  $D.: Z. \longrightarrow \text{Cosk}^{n+1} E.$  tal que

$$\begin{aligned}\text{Cosk}^{n+1} p. D. &= \varphi(b. j.) \text{ y} \\ D. z. &= \varphi(a.).\end{aligned}$$

El levantamiento para (1) está definido entonces como la composición  $\varphi^{-1}(D.)i.$ , puesto que

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1}(D.)i.)g. &= \varphi^{-1}(D.)(i.g.) = \\ &= \varphi^{-1}(D.)z. = \\ &= \varepsilon_{E.} \text{Sk}^{n+1} D. \text{Sk}^{n+1} z. = \\ &= \varepsilon_{E.} \text{Sk}^{n+1}(D.z.) = \\ &= \varphi^{-1}(D.z.) = [\text{por hipótesis, } D.z. = \varphi(a.)] \\ &= a..\end{aligned}$$

Nótese que esta igualdad de morfismos simpliciales,  $(\varphi^{-1}(D.)i.)g.=a.$ , en cualquier caso está obligada a ser cierta por la unicidad de morfismos con dominio el objeto inicial. Por otra parte, si por hipótesis  $\text{Cosk}^{n+1}(p.)D.=\varphi(b.j.)$ , esto supone que  $\varphi^{-1}(\text{Cosk}^{n+1}(p.)D.)=b.j.$  y por tanto, que

$$\varphi^{-1}(\text{Cosk}^{n+1}(p.)D.)i.=b.j.i.=b..$$

Entonces,

$$\begin{aligned} b.&=\varphi^{-1}(\text{Cosk}^{n+1}(p.)D.)i.= \quad [\text{por definición de } \varphi^{-1}] \\ &=\varepsilon_{B.} \text{Sk}^{n+1}(\text{Cosk}^{n+1}(p.)D.)i.= \\ &=\varepsilon_{B.} \text{Sk}^{n+1}p.\text{Sk}^{n+1}(D.)i.= \\ &=p.\varepsilon_{E.} \text{Sk}^{n+1}(D.)i.= \\ &=p.\varphi^{-1}(D.)i., \end{aligned}$$

probando así que el morfismo simplicial  $\Phi. \longrightarrow G.$  es  $n$ -cofibración y por tanto,  $G.$  es  $n$ -cofibrante. ■

Veamos ahora la anunciada equivalencia de teorías de homotopía para las categoría de  $n$ -hipergrupoides de grupos,  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$ , con la estructura de modelos definida en el Capítulo 3 (Teorema 3.1.2.), y grupos simpliciales con la  $n$ -estructura,  $\text{Simp}_n(\text{Gp})$  (Teorema 4.2.2.).

Se tiene pues el siguiente resultado.

#### Teorema 4.3.3.

Considerando  $\text{Simp}(\text{Gp})$  con la  $n$ -estructura y  $n\text{-Hypgd}(\text{Gp})$  con la estructura de modelos cerrada, se tiene que las correspondientes teorías de homotopía son equivalentes.



**Demostración.**

Usando el criterio de Quillen (Teorema 1.2.2.2.) para la adjunción

$$\mathbf{n-Hypgd(Gp)} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbb{P}} \\ \xrightarrow{\mathbb{J}} \\ \end{array} \mathbf{Simp(Gp)}$$

se tiene que el funtor adjunto a izquierda  $\mathbb{P}$  preserva cofibraciones por la Proposición 2.2.2.i) y, tal y como se probó a lo largo de la demostración del Teorema 3.1.2.,  $\mathbb{P}$  preserva todas las equivalencias débiles, en particular,  $\mathbb{P}$  lleva equivalencias débiles entre grupos simpliciales cofibrantes en equivalencias débiles de  $\mathbf{n-Hypgd(Gp)}$ .

Por otra parte,  $\mathbb{J}$  preserva fibraciones y equivalencias débiles, por definición se estos morfismos en  $\mathbf{n-Hypgd(Gp)}$ .

Finalmente, demostremos que un morfismo  $\mathbb{P}G. \longrightarrow X.$  es equivalencia débil en  $\mathbf{n-Hypgd(Gp)}$  si y solamente si el morfismo adjunto  $G. \longrightarrow JX.$  es  $n$ -equivalencia débil de grupos simpliciales, para todo  $G. \in \mathbf{Simp(Gp)}$  y  $X. \in \mathbf{n-Hypgd(Gp)}$ .

Sea pues  $\mathbb{P}G. \longrightarrow X.$  equivalencia débil en  $\mathbf{n-Hypgd(Gp)}$ , esto es, por definición  $J\mathbb{P}G. \longrightarrow JX.$  es equivalencia débil de grupos simpliciales. Nótese que, por ser  $X.$  y  $\mathbb{P}G.$   $n$ -hipergrupoides de grupos, y por tanto,  $\Pi_i(X.) = \Pi_i(\mathbb{P}G.) = 0$  para  $i \geq n+1$ , se tiene que de hecho,  $J\mathbb{P}G. \longrightarrow JX.$  es  $n$ -equivalencia débil en  $\mathbf{Simp(Gp)}$ . Puesto que la unidad de la adjunción  $\eta_{G.} : G. \longrightarrow J\mathbb{P}G.$  es también  $n$ -equivalencia débil, se tiene

$$\begin{array}{ccc} & J\mathbb{P}G. & \longrightarrow JX. \\ & \uparrow & \\ \eta_{G.} & & \\ & G. & \end{array}$$

por el axioma **CM2**, que  $G. \longrightarrow JX.$  verifica que  $\Pi_1(G.) \cong \Pi_1(JX.)$  para  $0 \leq i \leq n$ , esto es, es  $n$ -equivalencia débil en **Simp(Gp)**.

Recíprocamente, supongamos que  $G. \longrightarrow JX.$  es  $n$ -equivalencia débil de grupos simpliciales. Por el axioma **CM2**, ya que la unidad de la adjunción es  $n$ -equivalencia débil, el morfismo  $JPG. \longrightarrow JX.$  lo es, es decir, por definición,  $PG. \longrightarrow X.$ , es equivalencia débil en **n-Hypgd(Gp)**.

Esto prueba entonces que las correspondientes categorías de homotopía de **Simp(Gp)** con la  $n$ -estructura, y de **n-Hypgd(Gp)** son equivalentes. Dado que además ambas categorías **Simp(Gp)** y **n-Hypgd(Gp)** son punteadas, se tiene entonces una equivalencia al nivel de las correspondientes teorías de homotopía. ■



## BIBLIOGRAFIA

- [1]. D.W.Anderson, *Axiomatic homotopy theory*, L.N. in Math. 741 (1978) 520-547.
- [2]. H.J.Baues, *Algebraic Homotopy*, (Cambridge University Press, 1989).
- [3]. A.K.Bousfield y E.Friedlander, *Homotopy theory of  $\Gamma$ -spaces, spectra and bisimplicial sets*, L.N. in Math. 658, Springer (1978).
- [4]. A.K.Bousfield y D.M.Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, L.N. in Math. 304, Springer (1972).
- [5]. K.S. Brown, *Abstract homotopy theory and generalised sheaf cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973) 419-458.
- [6]. R.Brown, *Fibrations of groupoids*, J. of Algebra 15 (1970) 103-132.
- [7]. R.Brown, *Some non-abelian methods in homotopy theory and homological algebra*, Cat. Topology Proc. Conf. Toledo (1983).
- [8]. R.Brown y N.D.Gilbert, *Algebraic models for 3-types and automorphism structures for crossed modules*, Proc. London Math. Soc. (1988).
- [9]. R.Brown y M.Golasinski, *A model structure for the homotopy category of crossed complexes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. XXX (1989) 61-82.
- [10]. R.Brown y P.J.Higgins, *The classifying space of a crossed complex*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991) 95-120.

- [11]. R. Brown y J.L. Loday, *Homotopical extensions and Hurewicz theorems for  $n$ -cubes of spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) 54, (1987b) 176-192.
- [12]. R. Brown y J.L. Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology 26 (1987).
- [13]. M.Bullejos y A.M.Cegarra, *A 3-dimensional non abelian cohomology of groups with applications to homotopy classification of continuous maps*, Canadian J. of Math. 43 (1991).
- [14]. M.Bullejos, A.M.Cegarra y J.Duskin, *On  $\text{Cat}^n$  Groups and Homotopy Types*, J. of Pure and Applied Algebra 86 (1993) 135-154.
- [15]. M.Bullejos, A.M.Cegarra y A.R.Garzón, *Higher dimensional obstruction theory in algebraic categories*, J. of Pure and Applied Algebra 49 (1987).
- [16]. P.Carrasco y A.M.Cegarra, *Group theoretic algebraic models for homotopy types*, por aparecer en J. of Pure and Applied Algebra (1990).
- [17]. P.Carrasco y A.M.Cegarra, *La categoría de 2-módulos cruzados es equivalente a la de 2-hipergrupoides*, Actas X, Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, Univ. de Murcia (1985).
- [18]. D.Conduché, *Modules croisés généralisés de longueur 2*, J. of Pure and Applied Algebra 34 (1984) 155-178.
- [19]. S.E.Crans, *Quillen closed model structures for sheaves*, Univ. of Utrecht Maths., Preprints 778 (1993).



- [20]. E.B.Curtis, *Simplicial homotopy theory*, Adv. in Math. 6 (1971) 107-209.
- [21]. A.Dold y D.Puppe, *Homology nicht additiver funktoren Anwendungen*, Ann. Inst. Fourier 11 (1961) 201-312.
- [22]. W.G.Dwyer y D.M.Kan, *Homotopy Theory and Simplicial Groupoids*, Proc. Konick. Neder. Akad. 87 (1984) 379-89.
- [23]. A.Edwards y H.M.Hastings, *Ech and Steenrod homotopy theories with application to geometric topology*, L.N. in Math. 542, Springer (1976).
- [24]. P.J.Ehlers, *Simplicial groupoids as models for homotopy type*, Diss. Math. U.C.N.W. (1991).
- [25]. S.Eilenberg y S.Mac Lane, *Relations between homology and homotopy groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 29 (1943).
- [26]. G.Ellis, *Crossed modules and their higher dimensional analogues*, Ph. Thesis, Univ. of Bangor (1984).
- [27]. G.Ellis, *Homology of 2-types*, J. London Math. Soc. (2) 46 (1992) 1-27.
- [28]. C.Elvira, *n-tipos y cohomotopía*, Tesis Doctoral, Univ. Zaragoza (1991).
- [29]. P.Gabriel y M.Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory* (Springer, Berlin 1967).

- [30]. P.Glenn, *Realization of cohomology classes in arbitrary exact categories*, J. of Pure and Applied Algebra 25 (1982) 33-107.
- [31]. A.Heller, *Homotopy theories*, Memoirs A.M.S. 383 (1988).
- [32]. L.J.Hernández y T.Porter, *Categorical models of n-types for pro-crossed complexes and  $j_n$ -prospaces*, preprint (1990).
- [33]. P.J. Higgings, *Groups with multiple operators*. Proc. London Math. Soc. 6, (1956), 366-416.
- [34]. L.Illusie, *Complexe cotangent et déformations I and II*, L.N. in Math. 239 y 283, Springer (1971-72).
- [35]. D.M.Kan, *Abstract homotopy I*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41 (1955) 1092-1096.
- [36]. D.M.Kan, *A combinatorial definition of homotopy groups*, Ann. of Math. 67 (2) (1958) 282-312.
- [37]. D.M.Kan, *On homotopy theory and C.P.P. groups*, Ann. of Math. 68 (1958) 38-53.
- [38]. D.M.Kan, *On C.P.P. complexes*, Amer. J. Math. 78 (1957) 449-476.
- [39]. J.L.Loday, *Spaces with finitely many non trivial homotopy groups*, J. of Pure and Applied Algebra 24 (1982) 179-202.
- [40]. S.Mac Lane y J.H.C.Whitehead, *On the 3- type of a complex*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 30 (1956) 41-48.



- [41]. J.P.May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, (Nostrand, New York, 1976).
- [42]. I.Moerdijk, *Bisimplicial sets and the group-completion theorem*, Algebraic K-theory: connections with geometry and topology, Kluwer, Dordrecht (1989) 225-240.
- [43]. I.Moerdijk y J.A. Svensson, *Algebraic classification of equivariant homotopy types part I*, preprint (1990).
- [44]. J.C.Moore, *Seminar on algebraic homotopy theory*, Mimeographed notes (Princeton 1956).
- [45]. T.Porter, *Abstract homotopy theory. The interaction of category theory and homotopy theory*, Univ. Génova, Preprints 199 (1992).
- [46]. T.Porter, *A combinatorial definition of  $n$ -types*, por aparecer en Topology.
- [47]. T.Porter,  *$n$ -types of simplicial groups and crossed  $n$ -cubes*, U.C.N.W. Maths. Preprints, 91.07 (1991).
- [48]. D.Quillen, *Homotopical Algebra*, L.N. in Math. 43, Springer (1967).
- [49]. D.Quillen, *Rational Homotopy Theory*, Ann. of Math. 90 (1969).
- [50]. R.Steiner, *Resolutions of spaces by  $n$ -cubes of fibrations*, Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1986), 169-176.

- [51]. Strøm, *The homotopy category is a homotopy category*, Arch. Math. 23 (1973) 435-441.
- [52]. R.W.Thomason, *Cat as a closed model category*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol.XXI-3 (1980).
- [53]. J.H.C.Whitehead, *Algebraic homotopy theory*, Proc. Int.Cong. of Math., Harvard 2, 354-357.
- [54]. J.H.C.Whitehead, *Combinatorial Homotopy I and II*, Bull. Amer. Soc. 55 (1949), 213-245 y 496-543.
- [55]. G.W.Whitehead, *Elements of homotopy theory*, (Springer 1978).