ESTUDIO DE LA SENSIBILIDAD DE LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA, EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES IMPRECISAS

Mª DEL CARMEN GARCÍA AGUADO

TESIS DOCTORAL

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

"ESTUDIO DE LA SENSIBILIDAD DE LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES IMPRECISAS"

MEMORIA QUE PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTA LA LICENCIADA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS,

Mª DEL CARMEN GARCÍA AGUADO

GRANADA,

DIRECTOR DE TESIS:

PROFESOR DR. D. JOSÉ LUIS VERDEGAY GALDEANO.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1990

I N D I C E

INDICE

PÁGINA

PÁGINA

INTRODUCCION

Y

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

INTRODUCCION Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En general, un problema de Programación Lineal (PL) se establece en los siguientes términos,

$$
\begin{aligned}
\text{Max:}\quad & z = cx \\
\text{s.a:}\quad & \\
& Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

siendo A una matriz mxn, de números reales, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Este planteamiento supone, implicitamente, que el decisor dispone de una información muy precisa, sobre los elementos que intervienen en el problema. Sin embargo, frecuentemente, el decisor se encuentra más confortable, especificando linguisticamente los parámetros del problema, que haciendolo de modo numérico. Esto es, citando al Profesor L.A. Zadeh, porque "los elementos clave del pensamiento humano no son etiquetas numéricas sino, más bien, predicados vagos". Desde este punto de vista, por tanto, tiene perfecto sentido, considerar problemas de optimización planteados a partir de ese tipo de predicados vagos.

El primer antecedente sobre problemas de optimización con planteamiento difuso que existe en la literatura, se remonta a hace ya dos décadas (R. Bellman y L.A. Zadeh: Decisión Making in a Fuzzy Environment. Management Science, 17 B(4), 141-164, 1970). De ese artículo provienen los conceptos clave de restricción, objetivo y decisión optimal difusa que, desde entonces, tan profusamente han sido usados.

Sin embargo, la Programación Lineal Difusa (PLD) no tomó carta de naturaleza hasta 1974. De modo independiente, y simultáneo, Tanaka et al. (H. Tanaka, T. Okuda y K. Asai: On Fuzzy Mathematical Programming. Journal of Cybernetics 3, 37-46, 1974) y Zimmermann (H.J. Zimmermann: Optimization in Fuzzy Environment. XXI Int. TIMS and XLVI ORSA Conference. San Juan de Puerto Rico, 1974) propusieron el mismo modelo, para tratar los problemas de PL, en los que el conjunto de restricciones, estaba dado por un conjunto difuso. A pesar de la coincidencia, enfocaron su resolución desde puntos de vista, y por tanto con métodos, diferentes que daban como resultado una solución puntual. Posteriormente, se demostró que tales métodos eran casos particulares de uno más general, que permitía obtener, a la vez, esas soluciones puntuales que aquellos proporcionaban (J.L. Verdegay: Fuzzy Mathematical Programming. En Fuzzy Information and Decision Processes (M.M. Gupta y E. Sánchez, Eds), North-Holland 1982, 231-237).

Formalmente, el problema central en PLD consiste en resolver un problema de PL en el que el conjunto de restricciones es difuso,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad Ax \lesssim b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

es decir, donde se supone que el decisor, puede aceptar violaciones moderadas sobre el cumplimiento de las restricciones, evaluándose el grado con que se efectúan estas violaciones, mediante ciertas funciones de pertenencia,

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \ , \quad i = 1, \ldots , m \qquad (2)$$

que el mismo decisor establece.

Desde este planteamiento inicial, las líneas de investigación que se han seguido en este tema, han sido muchas, pero sintéticamente pueden agruparse en los siguientes apartados:

a) Extensiones del modelo general que hemos introducido previamente, a problemas más complejos. Particularmente en el campo donde más se ha incidido, ha sido en el de los problemas multiobjetivo, y dependiendo del caso, se han usado cualquiera de las técnicas ya comentadas para su resolución. También es de destacar, el trabajo realizado en otras parcelas, como es el caso de la Programación Estocástica o la Fraccional.

b) Métodos que aportan nuevas formas de resolver los diferentes problemas. Sobre todo, se han usado las técnicas de la programación paramétrica clásica, basándolas en el Teorema de Representación de Conjuntos Difusos.

c) Modelos que usan la aritmética difusa en su planteamiento, es decir, problemas que suponen que los coeficientes, del objetivo o de la matriz tecnológica, son números difusos, y

d) Aplicaciones de la PLD a problemas concretos. Los casos más estudiados han sido los Modelos de Competencia y los Problemas de Transporte con todas sus derivaciones, aunque no hay que olvidar las innumerables aplicaciones puntuales a problemas específicos (de agricultura, de política hidráulica, de razonamiento a partir de conocimiento proposicional, etc.).

Sin embargo, en cualquiera de las aportaciones que se considere en estos apartados que hemos comentado, siempre se parte de la misma hipótesis: que los conjuntos difusos que toman parte en el problema tienen funciones de pertenencia exactamente definidas por el decisor y, sobre las cuales no puede haçerse ninguna variación, sin que cambie notablemente el modelo que se trata de resolver. Un ejemplo de esto puede verse en el artículo de Leberling (H. Leberling: On Finding Compromise Solutions in Multicriteria Problems Using the Min-Operator. Fuzzy Sets and Systems, 6, 1981, 105-118).

Del repaso de la bibliografía especializada se puede concluir que, en ningún caso se ha hecho estudio alguno acerca de la sensibilidad que pueden tener las funciones de pertenencia de un problema de PLD, de cara a su solución.

Solamente hay un antecedente remoto sobre el tema (H. Hamacher, H. Leberling y H.J. Zimmermann: Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems 1, 269-281, 1978), pero que está referido, paralelamente a lo que ocurre en el caso clásico, a la sensibilidad del segundo miembro del conjunto de restricciones y, por tanto, no trata el problema que hemos introducido ya que, por supuesto, tal segundo miembro es un número real, que no está afectado directamente por función de pertenencia alguna.

Entonces, para enfocar el análisis de la sensibilidad de las funciones de pertenencia en un problema de PLD, consideramos dos posibilidades. La primera, que en el modelo no intervinieran coeficientes difusos, pero si tuvieran esa naturaleza las restricciones. Alternativamente, la segunda, que en la matriz tecnológica y en el miembro de la derecha aparecieran numerosos difusos. En ninguno de ambos casos, hemos contemplado el que los coeficientes del objetivo pudieran ser, también, difusos. Esto es porque por dualidad, el estudio que se realice para los segundos miembros del conjunto de restricciones, puede trasladarse a dichos coeficientes sin dificultad (J.L. Verdegay: A Dual Approach to Solve the

Fuzzy Linear Programming Problem. Fuzzy Sets and Systems 14, 131-141, 1984).

Así, para la primera opción, el modelo de partida está claro. Se trata del anterior problema (1) y lo que hay que estudiar es cómo varía su solución respecto a las diferentes funciones (2) que consideremos.

En el segundo caso, nuestro punto de partida ha sido el modelo más general posible (M. Delgado, J.L. Verdegay y M.A. Vila: A General Model for Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems 29, 21-29, 1989), es decir, el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = cx \\ \text{s.a:} & \\ & Ax \lesssim b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (3)$$

donde A es una matriz (m,n), $m \leq n$, de numerosos difusos, b es un vector columna de números difusos, $c \in \mathbb{R}^n$ y $\lesssim$ es una relación de orden entre tal tipo de números.

Ahora bien, aquí surgen algunos problemas adicionales:

1) Existe un gran número de relaciones $\lesssim$ para ordenar números difusos y, siendo nuestro objetivo la sensibilidad, no convendría centrarse en una sola de ellas.

2) Los números que intervienen en (3) pueden tener diversas formas, según la función de pertenencia que se escoja para representarlos y, por tanto, el resultado de la comparación podría depender de dichas funciones.

Teniendo en cuenta esto, la memoria la organizamos del siguiente modo. En el primer capítulo introducimos el concepto de número difuso, vemos qué función de pertenencia corresponde a una combinación lineal de los mismos, para los diferentes casos que consideramos, y pasamos a analizar las distintas formas existentes de comparar tales números, particularizando al tipo de restricciones que intervienen en un problema de PLD.

En el segundo capítulo se enfoca el problema de la sensibilidad, para restricciones difusas con coeficientes reales y, en el tercero, se aborda el mismo problema, pero para el caso que modeliza (3), teniendo en cuenta los diferentes tipos de números que podemos usar, para cada una de las formas de comparar, que hemos analizado con anterioridad.

La memoria finaliza, con la recopilación de la bibliografía que hemos empleado para su confección.

CAPITULO I

ALGUNAS FORMAS DE COMPARAR NUMEROS DIFUSOS

0. INTRODUCCION

Hay una enorme variedad de situaciones de la vida real, en las que existe cierta incertidumbre sobre las cantidades numéricas que intervienen en las mismas. Esto se debe, fundamentalmente, a dos distintas causas. Por un lado, los datos que tratamos pueden ser de naturaleza aleatoria, pero este no va a ser el caso que aquí consideremos y, por tanto, no insistiremos más en él. Por otro lado, que será donde nos centraremos en lo que sigue, es posible que tales datos sean imprecisos o vagos, en el sentido de no estar exactamente definidos.

En efecto, el lenguaje natural está lleno de imprecisiones, que todos entendemos sin complicación, pero que tienen una difícil traducción en conceptos matemáticos. La modelización matemática de este tipo de situaciones, se efectúa con los Conjuntos Difusos y, más particularmente, la de las cantidades imprecisas se lleva a cabo mediante el concepto de Número Difuso.

En la literatura se encuentran dos tendencias principales en el estudio de los números difusos: Una correspondiente a su uso desde un punto de vista práctico, y otra relativa al estudio y análisis de sus propiedades topológicas. En todo lo que sigue, por razones obvias, los consideraremos desde el primer punto de vista, empleando para ello la definición de número difuso debida a Dubois y Prade (D. Dubois y H. Prade: Operations on Fuzzy Numbers. Int. J. Systems Sciences, 9 (1978), 613-626) y la aritmética que se deriva de tal definición. Así mismo, en todos los casos, los números con los que trabajaremos serán unimodales, lo que nos ayudará a simplificar los cálculos.

Dado que el tema tratado en esta memoria, considera problemas de programación lineal con coeficientes en las restricciones definidos por números difusos, la situación que para estudiarlos tomamos como punto de partida supone, dados los números difusos $\underset{\sim}{a}_{ij}$ y $\underset{\sim}{b}_i$, i y j variando en sendos conjuntos finitos, tener que realizar la siguiente comparación,

$$\sum_j \underset{\sim}{a}_{ij} \; x_j \; \circledleq \; \underset{\sim}{b}_i \qquad (1)$$

Esta es una inecuación, en la que $\circledleq$ es cierta relación, que sirve para comparar ambos números. El caso en que esos números son triangulares lineales ya fué estudiado por Campos (L. Campos: Modelos de la Programación Lineal Difusa para la Resolución de Juegos Matriciales Imprecisos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1986). A pesar de esto, y de cara a poder comparar los distintos resultados que obtengamos, aquí también los recogeremos.

Con este fin, el capítulo se desarrolla en cuatro secciones. En la primera introducimos los distintos tipos de números difusos que vamos a considerar, y que se derivan de las diferentes funciones de pertenencia que elijamos para su representación. En la segunda, se estudia la función de pertenencia que corresponde a una combinación lineal de números difusos, de cada uno de los tipos que previamente se han introducido. En la tercera sección se muestran diversas formas de comparar números difusos, es decir, diversas formas para la anterior relación $\circledleq$. Finalmente, en la cuarta, se encuentran las expresiones resultantes para (1) conforme a todas las posibilidades que se han ido analizando.

Diremos por último que, por comodidad, en lo que queda de capítulo y siempre que no haya lugar a confusiones, suprimiremos los subíndices.

1. LAS DIVERSAS EXPRESIONES DE UN NUMERO DIFUSO

En lo sucesivo, la definición de número difuso que emplearemos, será la ya referenciada a D. Dubois y H. Prade: Un número difuso A, es un conjunto μ_A de la recta real, convexo, normalizado y tal que

a) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R} : \mu_A(x_0) = 1$, que suele llamarse moda, y

b) μ_A es continua a trozos.

Por otra parte, una función (que usualmente se nota por L O R) es una función de referencia de números difusos si, y sólo si, es no creciente en $[0, \infty)$, $L(x) = L(-x)$ y $L(0) = 1$.

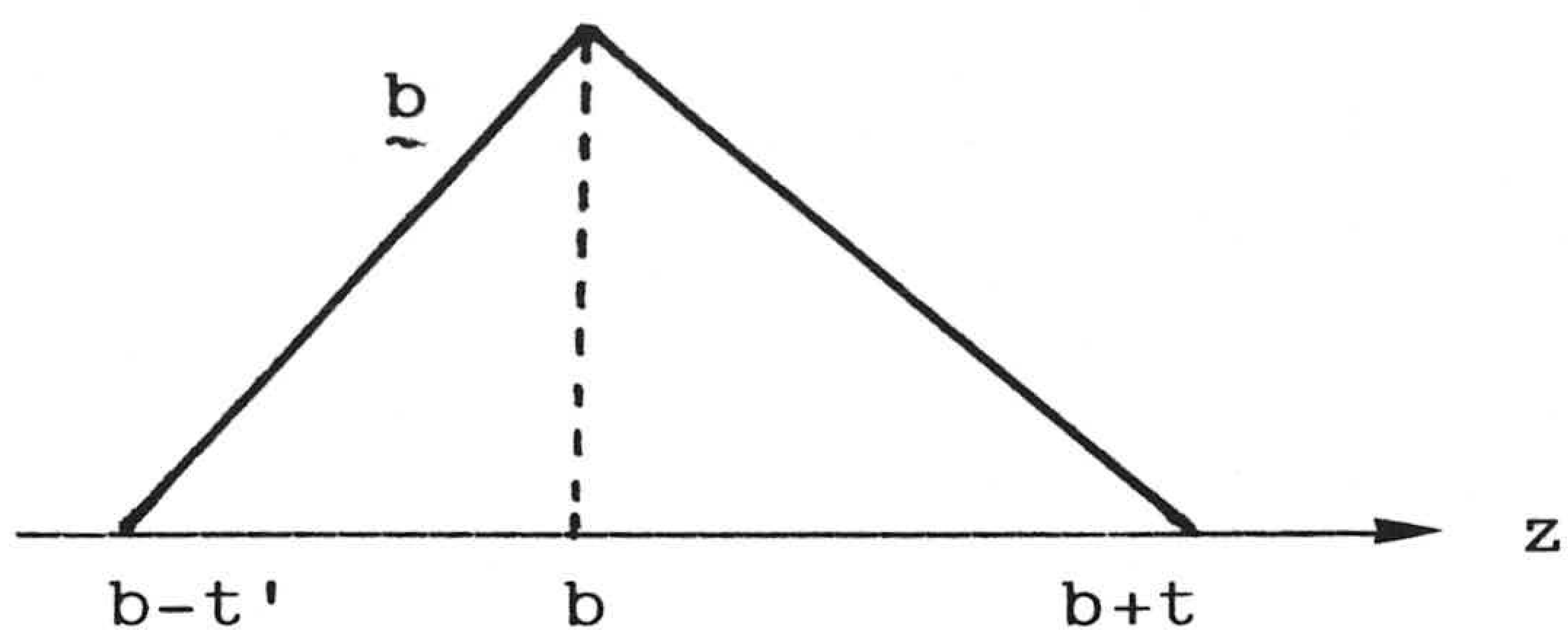
También, un número difuso M , se dice que es del tipo L - R si, y sólo si,

$$\mu(x) = \begin{cases} L\,[(m-x)/\alpha] & \text{para } x \leq m \quad y \quad \alpha > 0 \\ R\,[(x-m)/\beta] & \text{para } x \geq m \quad y \quad \beta > 0 \end{cases}$$

donde m es la moda de M y $\alpha\,(\beta)$ la amplitud por la izquierda (derecha).

Como es evidente, según sean las funciones L y R , obtendremos distintos tipos de números difusos. De entre ellos, aquí hemos seleccionado, aquellos que se caracterizan por su buen comportamiento matemático.

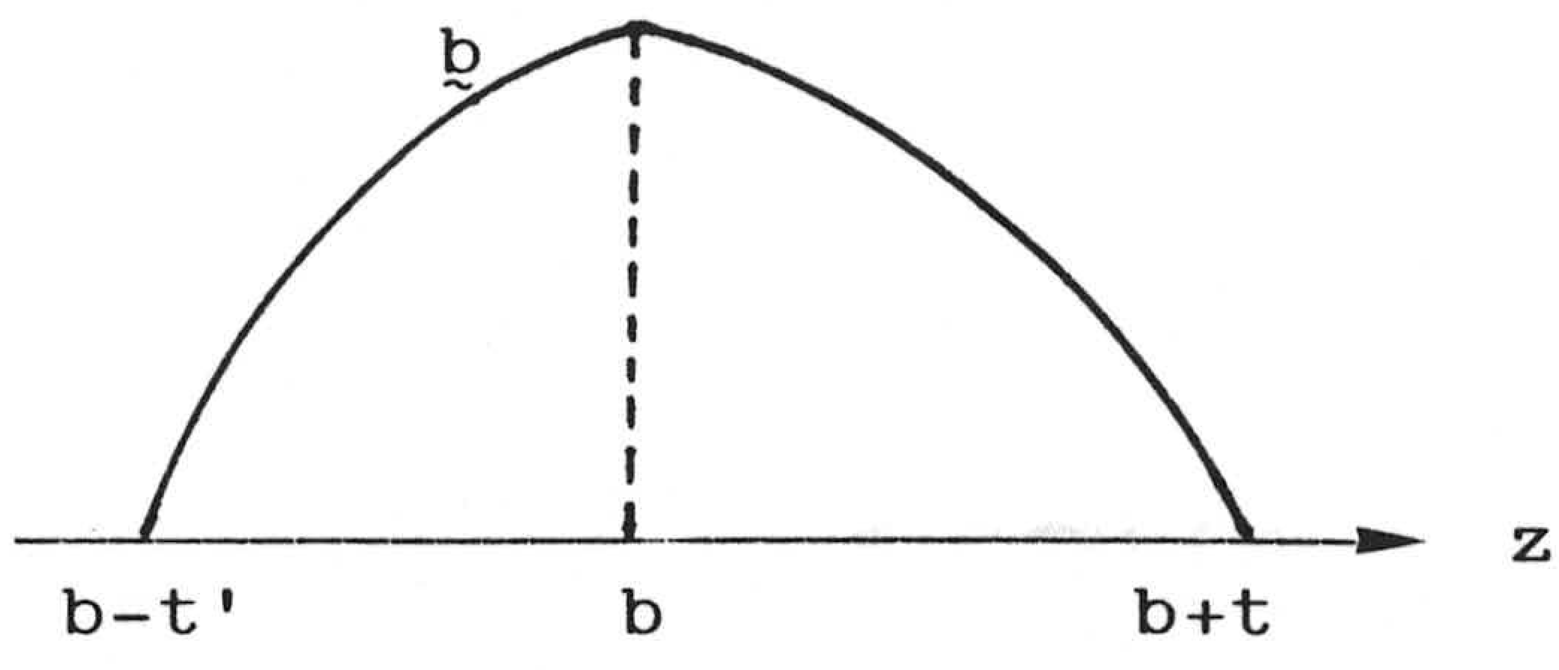
1.1. NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES O CON FUNCION DE PERTENENCIA LINEAL.



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{z-b+t'}{t'} & \text{si } b - t' \leq z \leq b \\ \dfrac{-z+b+t}{t} & \text{si } b \leq z \leq b + t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

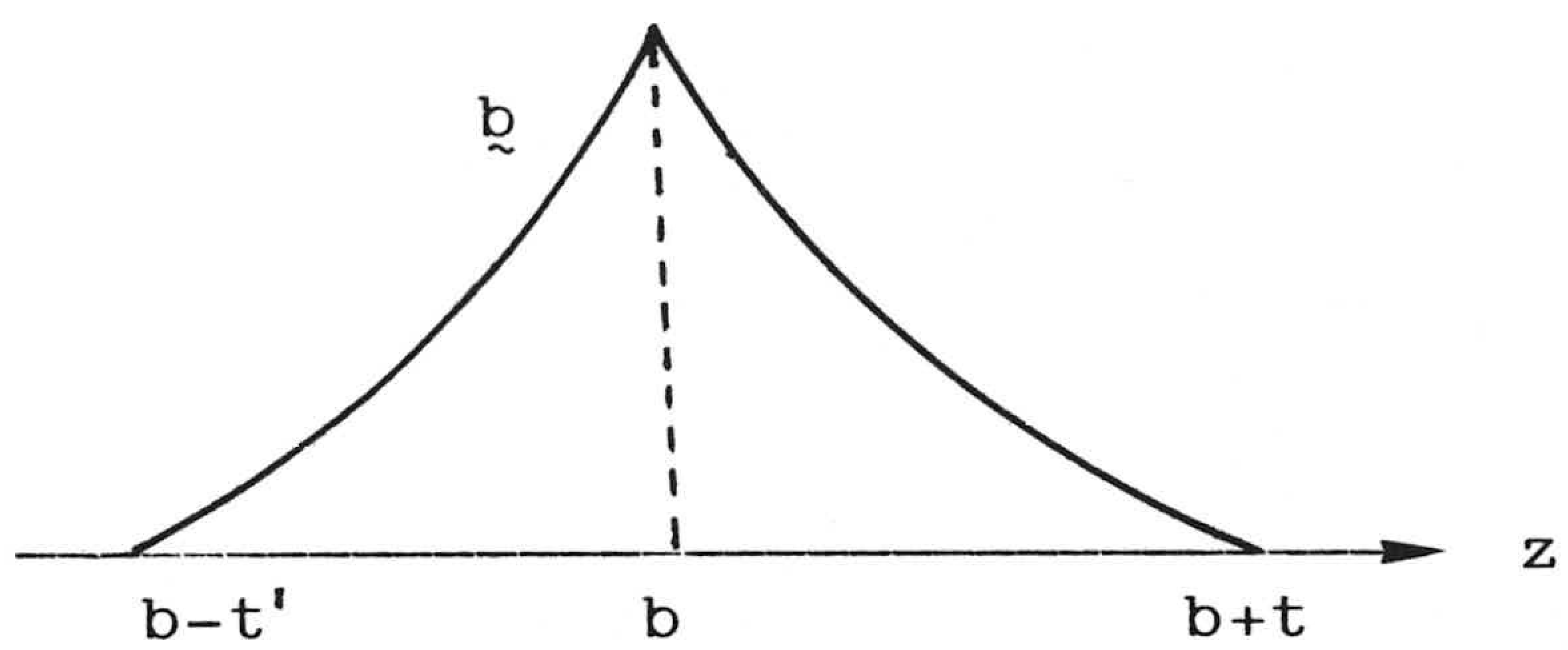
1.2. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENECIA PARABOLICA CONCAVA



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t'^2} z^2 + \dfrac{2b}{t'^2} z + 1 - \dfrac{b^2}{t'^2} & \text{si } b-t' \leq z \leq b \\ -\dfrac{1}{t^2} z^2 + \dfrac{2b}{t^2} z + 1 - \dfrac{b^2}{t^2} & \text{si } b \leq z \leq b+t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

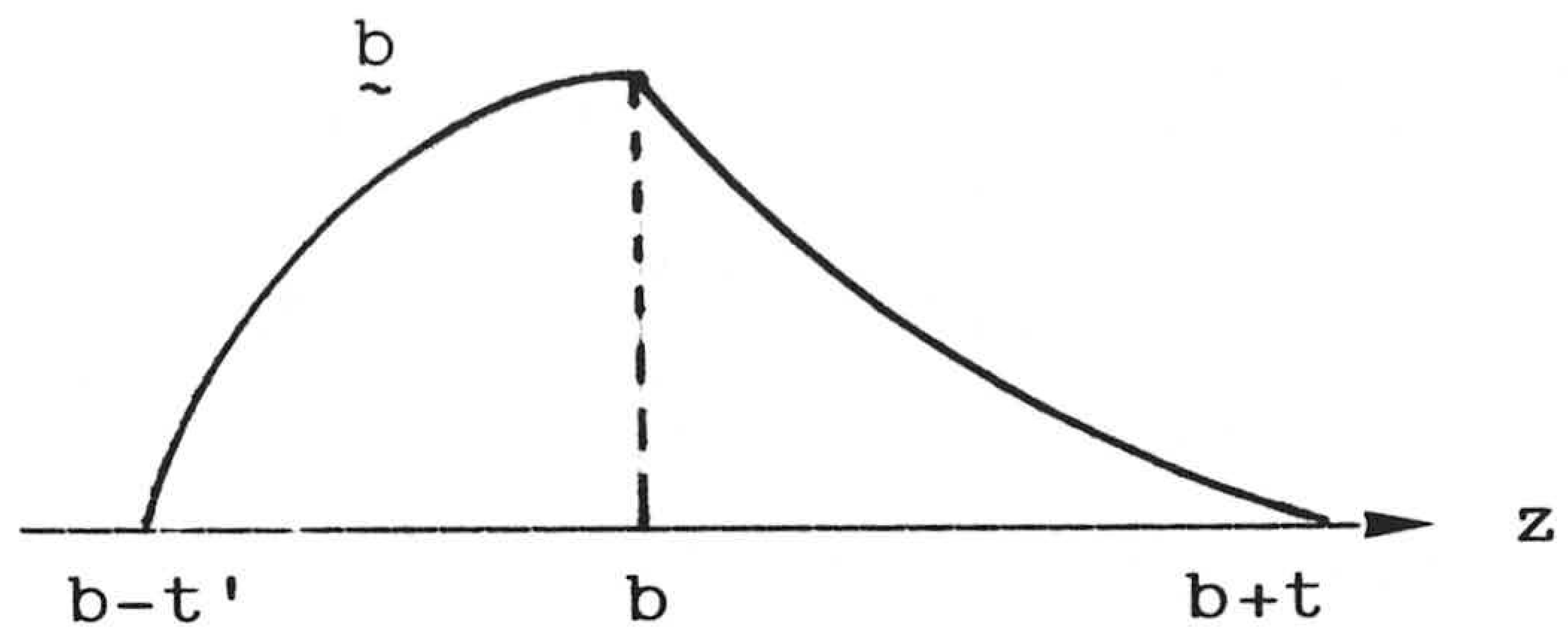
1.3. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{t'^2} z^2 - 2\,\dfrac{b-t'}{t'^2} z + \dfrac{(b-t')^2}{t'^2} & \text{si } b-t' \leq z \leq b \\ \dfrac{1}{t^2} z^2 - 2\,\dfrac{b+t}{t^2} z + \dfrac{(b+t)^2}{t^2} & \text{si } b \leq z \leq b+t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

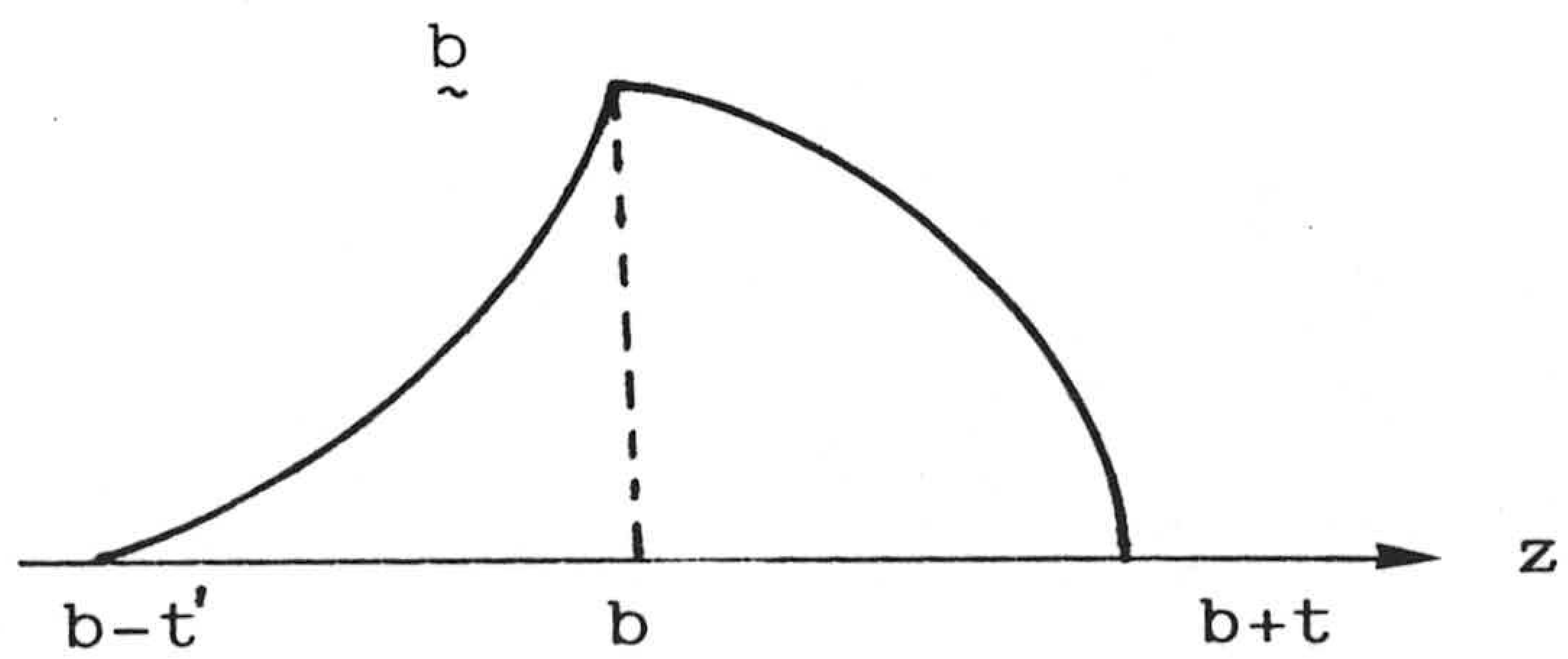
1.4. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA POR LA IZQUIERDA Y CONVEXA POR LA DERECHA.



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t'^2} z^2 + \dfrac{2b}{t'^2} z + 1 - \dfrac{b^2}{t'^2} & \text{si } b - t' \leq z \leq b \\ \dfrac{1}{t^2} z^2 - 2\dfrac{b+t}{t^2} z + \dfrac{(b+t)^2}{t^2} & \text{si } b \leq z \leq b + t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

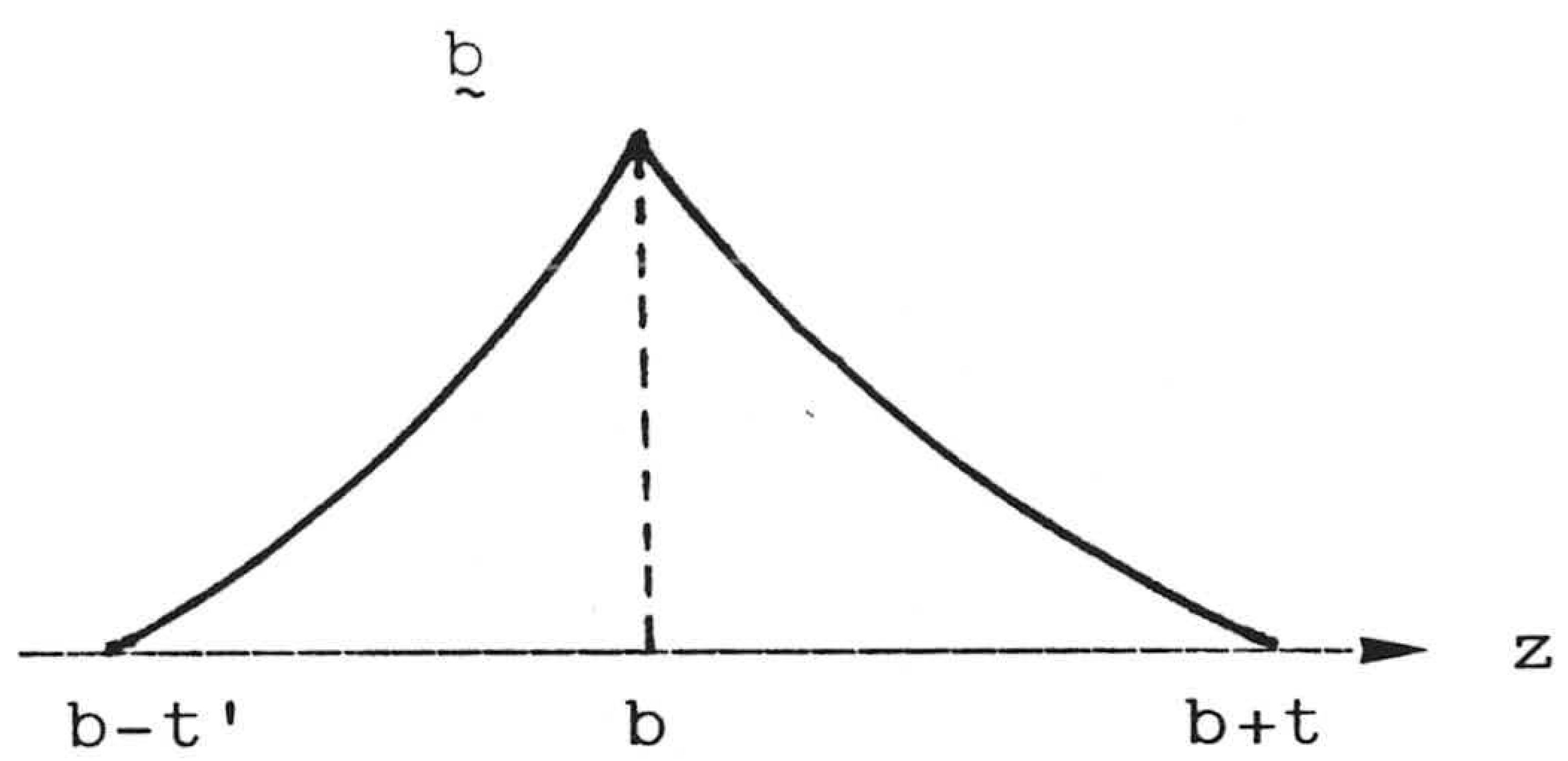
1.5. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA POR LA IZQUIERDA Y CONCAVA POR LA DERECHA.



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{t'^2} z^2 - 2\dfrac{b-t'}{t'^2} z + \dfrac{(b-t')^2}{t'^2} & \text{si} \quad b - t' \leq z \leq b \\ -\dfrac{1}{t^2} z^2 + 2\dfrac{b}{t^2} z + 1 - \dfrac{b^2}{t^2} & \text{si} \quad b \leq z \leq b + t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

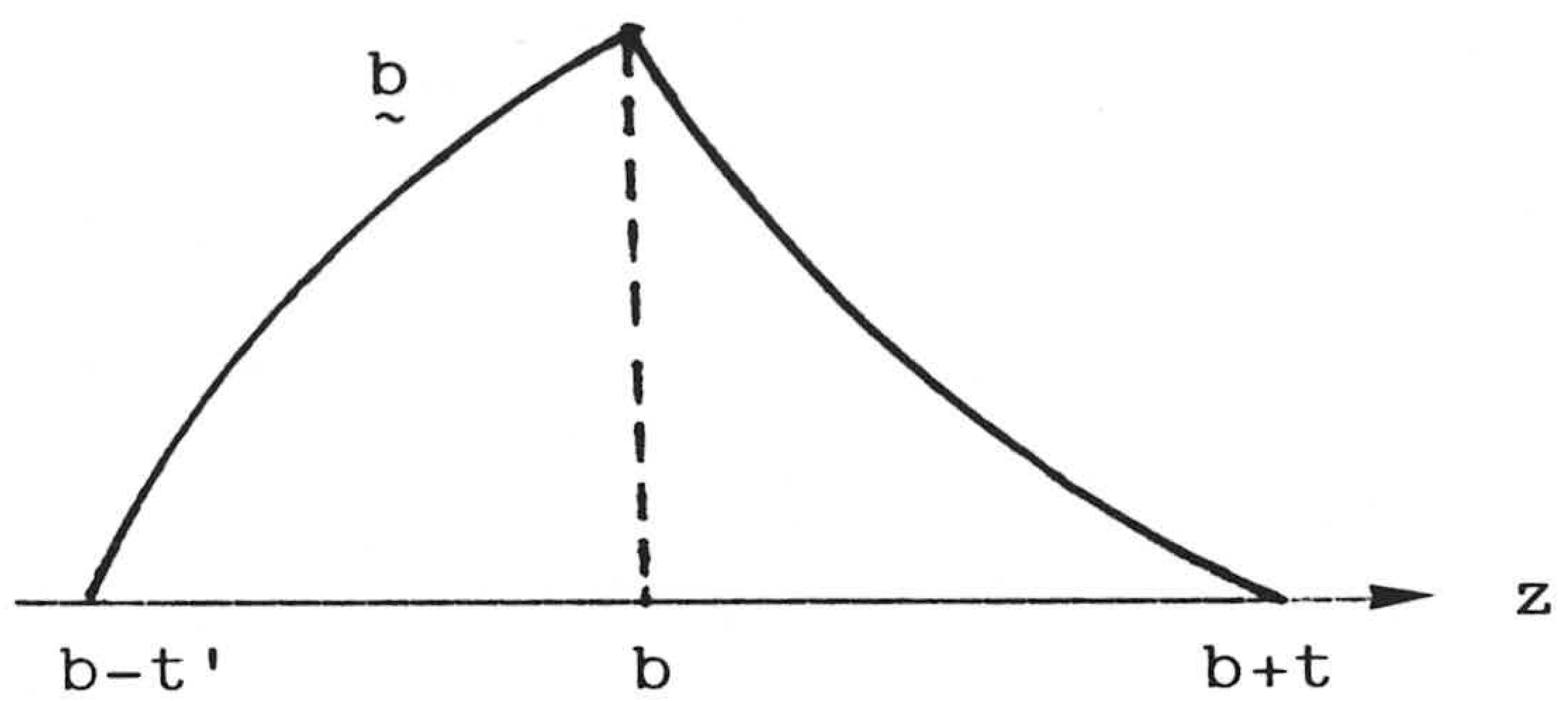
1.6. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA EXPONENCIAL



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{q_1^{z-b} - q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} \; ; \; q_1 > 1 & \text{si} \quad b - t' \leq z \leq b \\ \dfrac{q^{z-b} - q^{t}}{1 - q^{t}} \; ; \; 0 < q < 1 & \text{si} \quad b \leq z \leq b + t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

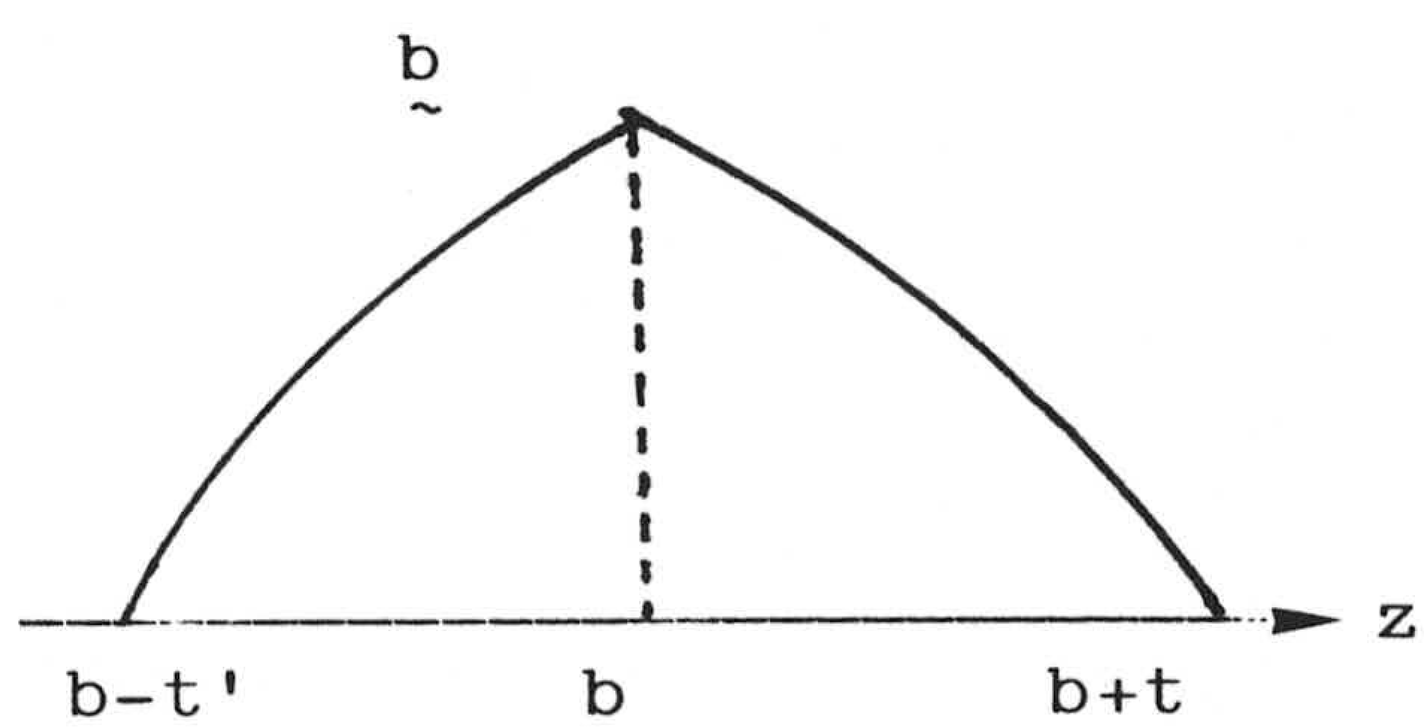
1.7. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA LOGARITMICA.



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\log_{q_1}(z-b+t'+1)}{\log_{q_1}(t'+1)} \; ; \quad q_1 > 1 & \text{si} \quad b - t' \leq z \leq b \\ \dfrac{\log_{q}(-z+b+t+1)}{\log_{q}(t+1)} \; ; \quad 0 < q < 1 & \text{si} \quad b \leq z \leq b + t \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

1.8. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA SENO



cuya función de pertenencia es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(z-b+t')}{\operatorname{sen} t'} & \text{si } b - t' \leq z \leq b \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(z-b-t)}{\operatorname{sen}(-t)} & \text{si } b \leq z \leq b + t \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

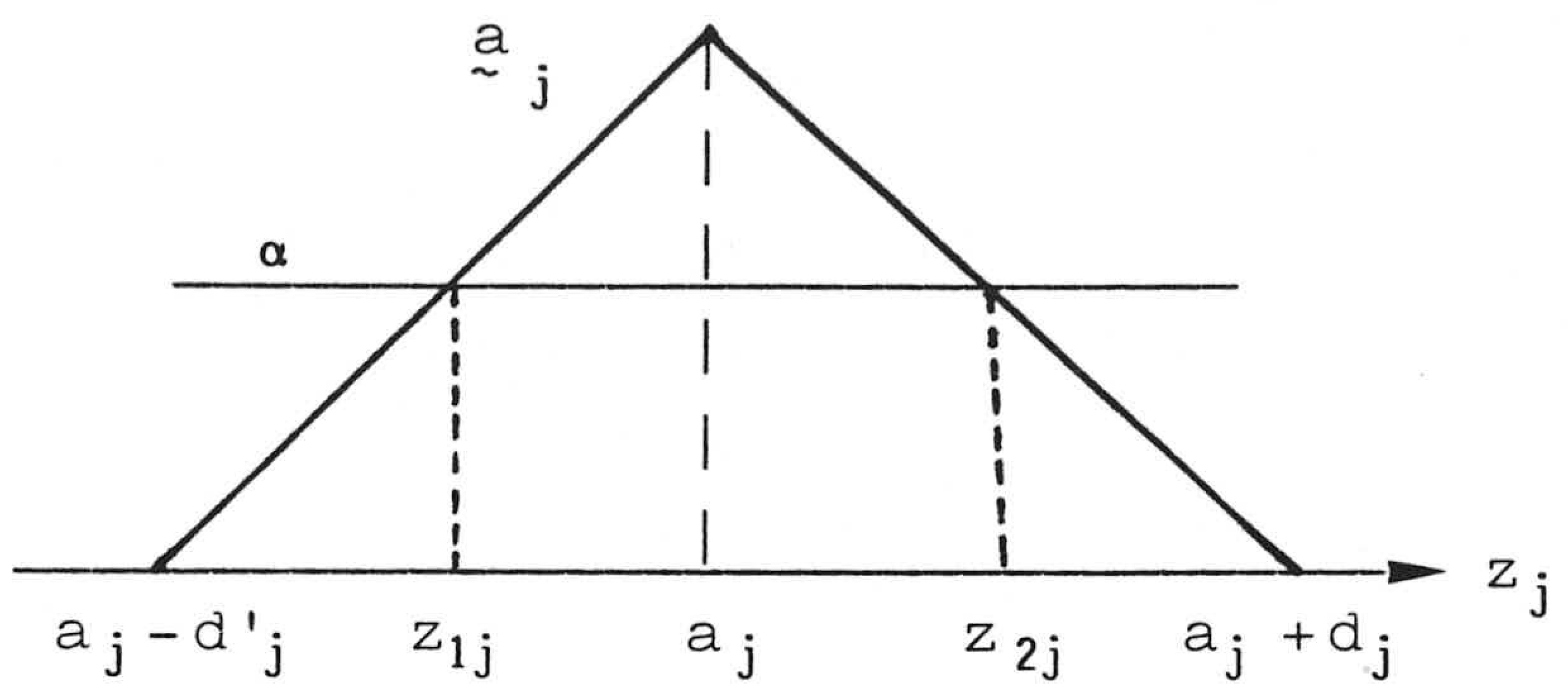
2. COMBINACIONES LINEALES CON NUMEROS DIFUSOS

El motivo de esta sección, es encontrar las funciones de pertenencia, que corresponden al número difuso $\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j$, con $x_j \geq 0$, en todos los casos previamente introducidos.

TEOREMA 2.1. Si $\tilde{y} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j x_j = \tilde{a} x$ es una expresión lineal, en la que los $\tilde{a}_j$, $j=1...n$ son números difusos con función de pertenencia lineal del tipo 1.1 y $x_j \geq 0$, $j=1...n$, entonces la función de pertenencia del número difuso $\tilde{y}$ es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{z - ax + d'x}{d'x} & \text{si } x > 0 \text{ y } ax - d'x \leq z \leq ax \\[2ex] \dfrac{-z + ax + dx}{dx} & \text{si } x > 0 \text{ y } ax \leq z \leq ax + dx \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Considerando por separado las partes no decrecientes y las partes no crecientes de las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_j$, j=1...n, tenemos:



a)

$$\frac{z_j - a_j + d'_j}{d'_j} = \alpha \Longrightarrow z_{1j} = a_j - d'_j\,(1-\alpha)$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j}\; x_j = a_j\, x_j - d'_j\; x_j\;(1-\alpha)$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}\; x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\; x_j - \sum_{j=1}^{n} d'_j\; x_j\;(1-\alpha) =$$

$$= a\,x - d'\,x\,(1-\alpha)$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{z - ax + d'x}{d'x}$$

b)

$$\frac{- z_j + a_j + d_j}{d_j} = \alpha \Longrightarrow z_{2j} = a_j + d_j\;(1-\alpha)$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{2j}\, x_j = a_j\, x_j + d_j\, x_j\, (1-\alpha)$$

Sumando en j obtenemos

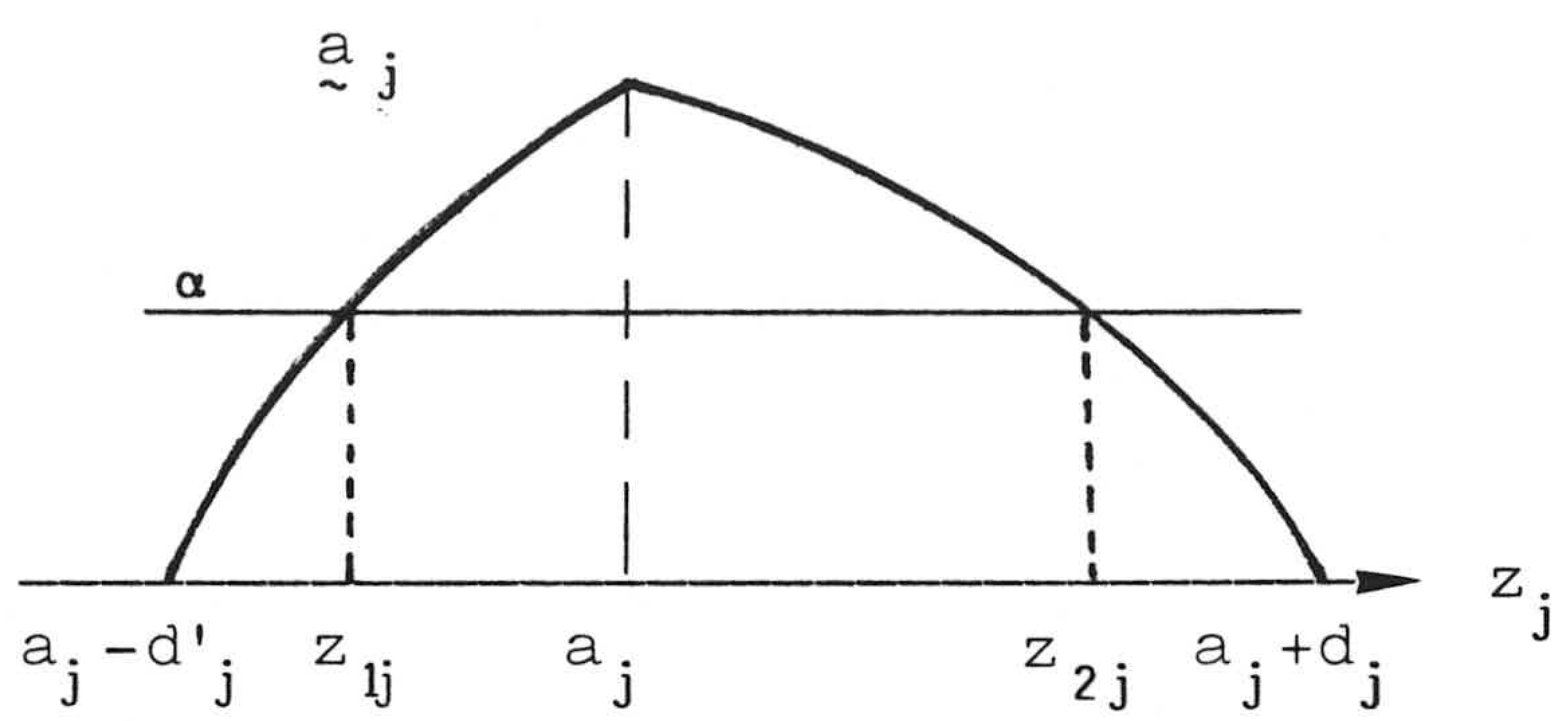
$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j\, (1-\alpha) = ax + dx\,(1-\alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{-z + ax + dx}{dx} \qquad \text{q.e.d.}$$

TEOREMA 2.2. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_j\, x_j = \underset{\sim}{a}\, x$ es una expresión lineal, en la que los $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$ son números difusos con función de pertenencia parabólica cóncava del tipo 1.2 y $x_j \geq 0$, $j=1...n$, entonces, la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{y}$ es:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(d'x)^2}\, z^2 + 2\,\dfrac{ax}{(d'x)^2}\, z + 1 - \left(\dfrac{ax}{d'x}\right)^2 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ ax - d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\[2ex] -\dfrac{1}{(d\,x)^2}\, z^2 + 2\,\dfrac{ax}{(dx)^2}\, z + 1 - \left(\dfrac{ax}{dx}\right)^2 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ ax \leq z \leq ax + d\,x \end{cases} \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Considerando por separado las partes no crecientes y los no decrecientes de las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_j$, j=1...n, tenemos:



a)

$$- \frac{1}{{d'_j}^2} z_j^2 + \frac{2 a_j}{{d'_j}^2} z_j + 1 - \frac{a_j^2}{{d'_j}^2} = \alpha \implies z_{1j} = a_j - d'_j \sqrt{1-\alpha}$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j} x_j = a_j x_j - d'_j x_j \sqrt{1-\alpha}$$

Sumando en j tenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_j d'_j x_j \sqrt{1-\alpha}$$

$$\implies \alpha = - \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2} z^2 + 2 \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2} + 1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2} =$$

$$= - \frac{1}{(d'x)^2} z^2 + 2 \frac{ax}{(d' x)^2} z + 1 - \left(\frac{ax}{d'x}\right)^2$$

b)

$$-\frac{1}{d_j^2} z_j^2 + 2\frac{a_j}{d_j^2} z_j + 1 - \frac{a_j^2}{d_j^2} = \alpha \Longrightarrow z_{2j} = a_j + d_j \sqrt{1-\alpha}$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{2j} \; x_j = a_j \; x_j + d_j \; x_j \sqrt{1-\alpha}$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{2j} \; x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \; x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j \; x_j \sqrt{1-\alpha} =$$

$$= a \; x + d \; x \sqrt{1-\alpha}$$

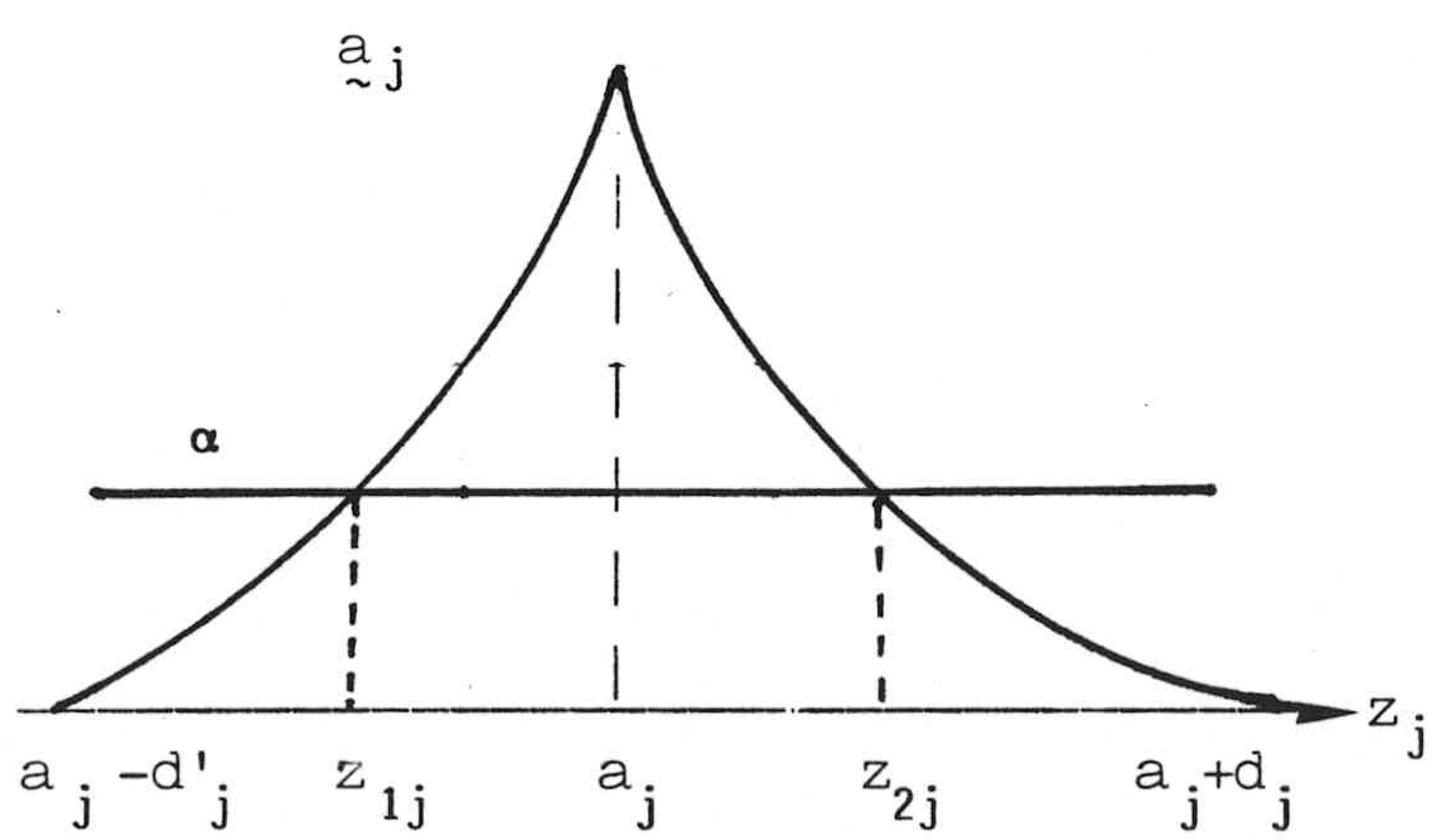
$$\Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j\right)^2} z^2 + 2\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \; x_j\right)^2} + 1 - \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j \; x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j \; x_j}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{(d\;x)^2} z^2 + 2\frac{a\;x}{(d\;x)^2} z + 1 - \left(\frac{a\;x}{d\;x}\right)^2$$

TEOREMA 2.3. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \underset{\sim}{a} x$ es una expresión lineal, en la que los $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$ son números difusos con función de pertenencia parabólica convexa del tipo 1.3. y $x_j \geq 0$, $j=1...n$, entonces, la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{y}$ es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d'x)^2} z^2 - 2\dfrac{ax-d'x}{(d'x)^2} z + \dfrac{(ax-d'x)^2}{(d'x)^2} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax-d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\ \dfrac{1}{(dx)^2} z^2 - 2\dfrac{ax+dx}{(dx)^2} z + \dfrac{(ax+dx)^2}{(dx)^2} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax \leq z \leq ax+dx \end{cases} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Considerando por separado las partes no crecientes y las no decrecientes de las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$, tenemos:



a)

$$\frac{1}{d'^2_j} z_j^2 - 2 \frac{a_j - d'_j}{d'^2_j} z_j + \frac{(a_j - d'_j)^2}{d'^2_j} = \alpha \Longrightarrow z_{1j} = a_j - d'_j (1-\sqrt{\alpha})$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j} \; x_j = a_j \; x_j - d'_j \, x_j (1 - \sqrt{\alpha})$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j} \; x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \; x_j - \sum_{j=1}^{n} d'_j \; x_j \; (1 - \sqrt{\alpha})$$

$$= ax - d'x (1 - \sqrt{\alpha})$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2} z^2 - 2 \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{n} d'_j x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2} z + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} d'_j x_j\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(d'x)^2} z^2 - 2 \frac{ax - d'x}{(d'x)^2} z + \frac{(ax - d'x)^2}{(d'x)^2}$$

b)

$$\frac{1}{d_j^2} z_j^2 - 2 \frac{a_j + d_j}{d_j^2} z_j + \frac{(a_j + d_j)^2}{d_j^2} = \alpha \Longrightarrow$$

$$z_{1j} = a_j + d_j \; (1 - \sqrt{\alpha})$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j} \; x_j = a_j \, x_j + d_j \, x_j \; (1 - \sqrt{\alpha}\,)$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j} \, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j \, x_j \, (1 - \sqrt{\alpha}\,)$$

$$= a\,x + d\,x \; (1 - \sqrt{\alpha}\,)$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \, x_j\right)^2} z^2 - 2 \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j \, x_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \, x_j\right)^2} z + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j \, x_j\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \, x_j\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(d\,x)^2} z^2 - 2 \frac{a\,x + d\,x}{(d\,x)^2} z + \frac{(a\,x + d\,x)^2}{(d\,x)^2}$$

q.e.d

TEOREMA 2.4. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\approx}{a}_j \, x_j = \underset{\approx}{a}\, x$ es una expresión lineal, en la que los $\underset{\approx}{a}_j$, j=1...n son números difusos con función de pertenencia parabólica, cóncava por la izquierda y convexa por la derecha, del tipo 1.4. y $x_j \geq 0$, j=1...n entonces, la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{y}$ es:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(d'x)^2} z^2 + 2\dfrac{a\,x}{(d'x)^2} z + 1 - \left(\dfrac{a\,x}{d'x}\right)^2 & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax - d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\[2ex] \dfrac{1}{(d\,x)^2} z - 2\dfrac{ax + dx}{(d\,x)^2} z + \dfrac{(ax + dx)^2}{(d\,x)^2} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax \leq z \leq ax + dx \end{cases} \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Basta considerar el apartado a) del teorema 2.2. y el apartado b) del teorema 2.3.

TEOREMA 2.5. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_j\, x_j = \underset{\sim}{a}\, x$ es una expresión lineal en la que los $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$, son números difusos con función de pertenencia parabólica, convexa por la izquierda y cóncava por la derecha, del tipo 1.5. y $x_j \geq 0$, $j=1...n$, entonces, la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{y}$ es:

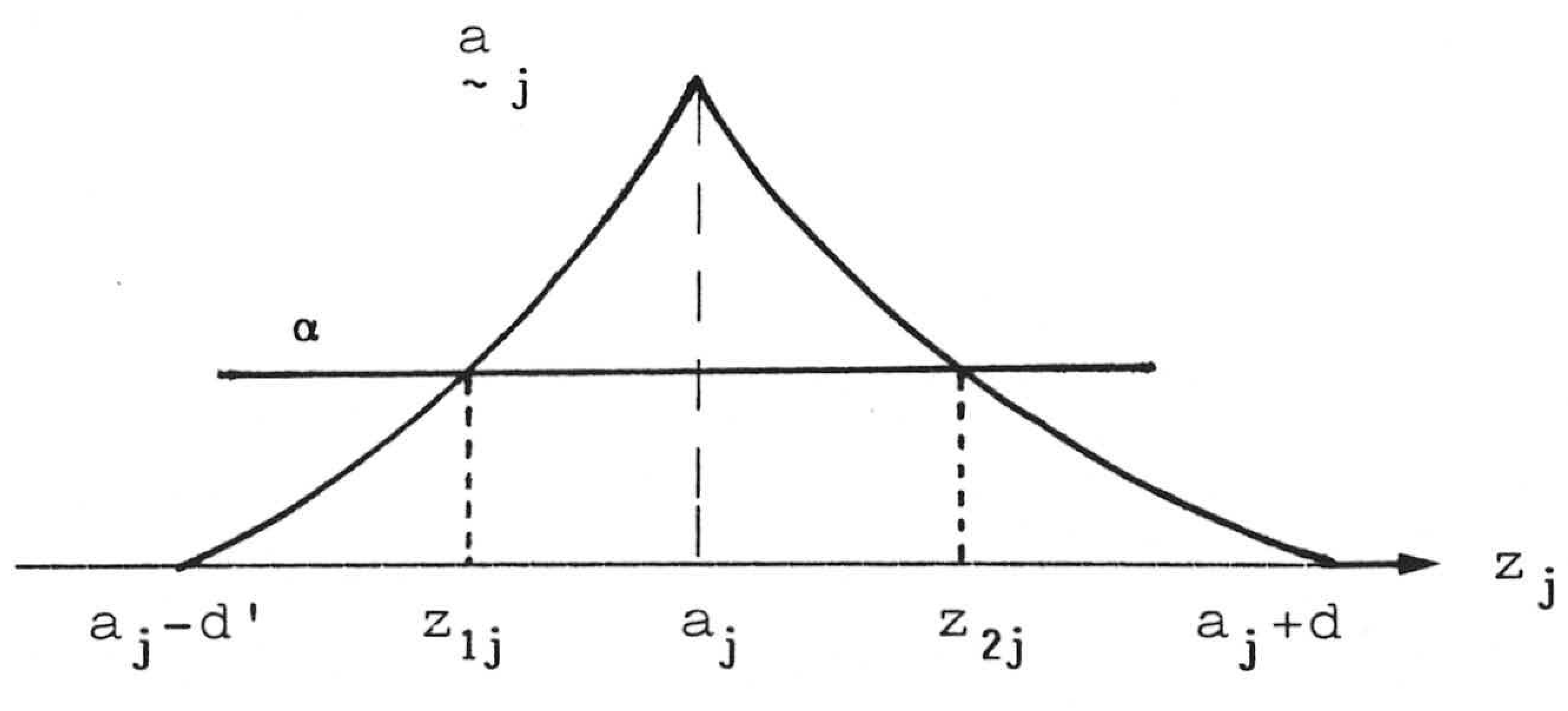
$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d'x)^2} z^2 - 2\dfrac{ax - d'x}{(d'x)^2} z + \dfrac{(ax - d'x)^2}{(d'x)^2} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax - d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\[2ex] -\dfrac{1}{(d\,x)^2} z^2 + 2\dfrac{a\,x}{(d\,x)^2} z + 1 - \left(\dfrac{a\,x}{d\,x}\right)^2 & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ ax \leq z \leq ax + dx \end{cases} \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Basta considerar el apartado b) del teorema 2.2. y el apartado a) del teorema 2.3.

TEOREMA 2.6. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_j \, x_j = \underset{\sim}{a}\, x$ es una expresión lineal en la que los $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$ son números difusos con función de pertenencia exponencial del tipo 1.6., teniendo todos la misma amplitud izquierda $d'_j = d'$, $j=1...n$ y la misma amplitud derecha $d_j = d$, $j=1...n$, entonces, la función de pertenencia de número difuso $\underset{\sim}{y}$, si $x_i \geq 0$, $j=1...n$, es

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{q_1^{\frac{z-ax}{x}} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} , \quad q_1 > 1 & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax - d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\ \dfrac{q^{\frac{z-ax}{x}} - q^{d}}{1 - q^{d}} ; \quad 0 < q < 1 & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ ax \leq z \leq ax + dx \end{cases} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Considerando por separado las partes no crecientes y las no decrecientes de las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$, tenemos:



a)

$$\frac{q_1^{z_j - a_j} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} = \alpha \implies z_{1j} = a_j + \log_{q_1} [q_1^{-d'} + \alpha (1-q_1^{-d'})]$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j}\, x_j = a_j\, x_j + x_j \log_{q_1} [\, q_1^{-d'} + \alpha\,(1 - q_1^{-d'})]$$

Sumando en j obtenemos:

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j \log_{q_1} [\, q_1^{-d'} + \alpha\,(1 - q_1^{-d'})]$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{q_1^{\frac{z - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j}} - q_1^{d'}}{1 - q_1^{-d'}} = \frac{q_1^{\frac{z - ax}{x}} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} \;; \quad q_1 > 1$$

b)

$$\frac{q^{z_j - a_j} - q^d}{1 - q^d} = \alpha \Longrightarrow z_{2j} = a_j + \log_q [\, q^d + \alpha\,(1 - q^d)\,]$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{2j}\, x_j = a_j\, x_j + x_j \log_q [\, q^d + \alpha\,(1 - q^d)\,]$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{2j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j \log_q [\, q^d + \alpha\,(1 - q^d)]$$

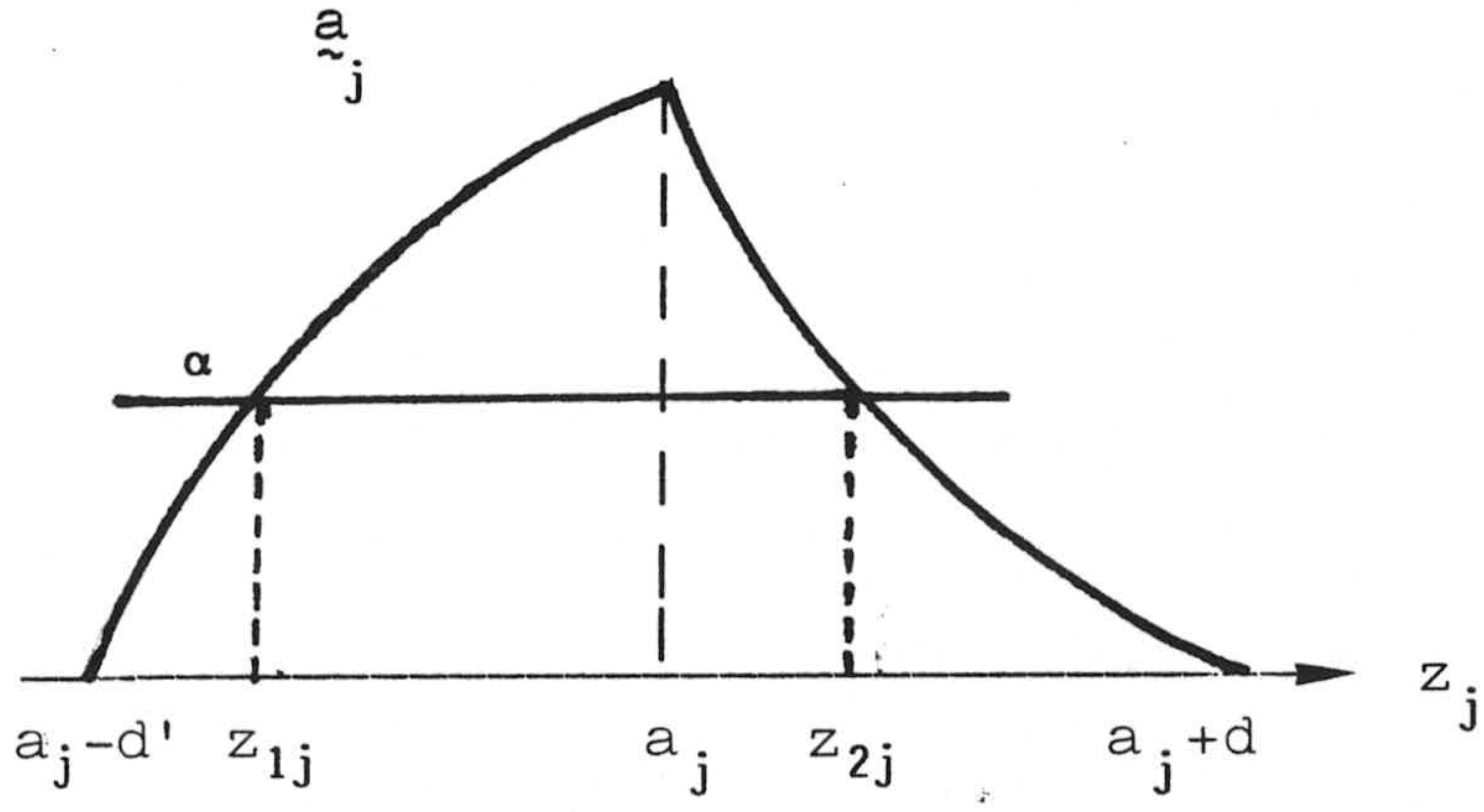
$$\Longrightarrow \alpha = \frac{q^{\frac{z - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j}} - q^{d}}{1 - q^d} = \frac{q^{\frac{z - ax}{x}} - q^d}{1 - q^d} \qquad 0 < q < 1$$

q.e.d.

TEOREMA 2.7. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_j\, x_j = \underset{\sim}{a}\, x$ es una expresión lineal, en la que los $\underset{\sim}{a}_j$, j=1...n son números difusos con función de pertenencia logarítmica del tipo 1.7., teniendo todos la misma amplitud izquierda $d'_j = d'$, j=1...n y la misma amplitud derecha $d_j = d$, j=1...n , entonces, la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{y}$, si $x_j \geq 0$, j=1...n , es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\log_{q_1}\left(\dfrac{z-ax+d'x+x}{x}\right)}{\log_{q_1}(d'+1)} \;; \quad q_1>1 , & \text{si} \begin{cases} x>0 \\ y \\ ax-d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\[2ex] \dfrac{\log_{q}\left(\dfrac{ax+dx+x-z}{x}\right)}{\log_{q}(d+1)} \;; \quad 0<q<1 , & \text{si} \begin{cases} x>0 \\ y \\ ax \leq z \leq ax+dx \end{cases} \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Considerando por separado las partes no crecientes y las no decrecientes de las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_j$, j=1...n , tenemos:



a)

$$\frac{\log_{q_1}(z_j - a_j + d' + 1)}{\log_{q_1}(d' + 1)} = \alpha \Longrightarrow z_{1j} = a_j - d' - 1 + (d'+1)^{\alpha}$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j}\, x_j = a_j\, x_j - d'\, x_j - x_j + x_j (d'+1)^{\alpha}$$

Sumando en j obtenemos:

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j - d' \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j + (d'+1)^{\alpha} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\log_{q_1}\left(\dfrac{z - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + d' \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \right)}{\log_{q_1}(d'+1)} \quad ; \quad q_1 > 1$$

Por lo tanto

$$\alpha = \frac{\log_{q_1}\left(\dfrac{z - ax + d'x + x}{x} \right)}{\log_{q_1}(d'+1)} \quad ; \quad q_1 > 1$$

b)

$$\frac{\log_q(1+a_j+d-z_j)}{\log_q(d+1)} = \alpha \Longrightarrow z_{2j} = a_j + d + 1 - (d+1)^{\alpha}$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{2j}\, x_j = a_j\, x_j + d\, x_j + x_j - x_j\, (d+1)^{\alpha}$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{2j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + d \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j - (d+1)^{\alpha} \sum_{j=1}^{n} x_j =$$

$$= ax + dx + x - (d+1)^{\alpha}\, x$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\log_q \left(\dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + d \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j - z}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \right)}{\log_q\ (d+1)} \quad ; \quad 0 < q < 1$$

Por lo tanto

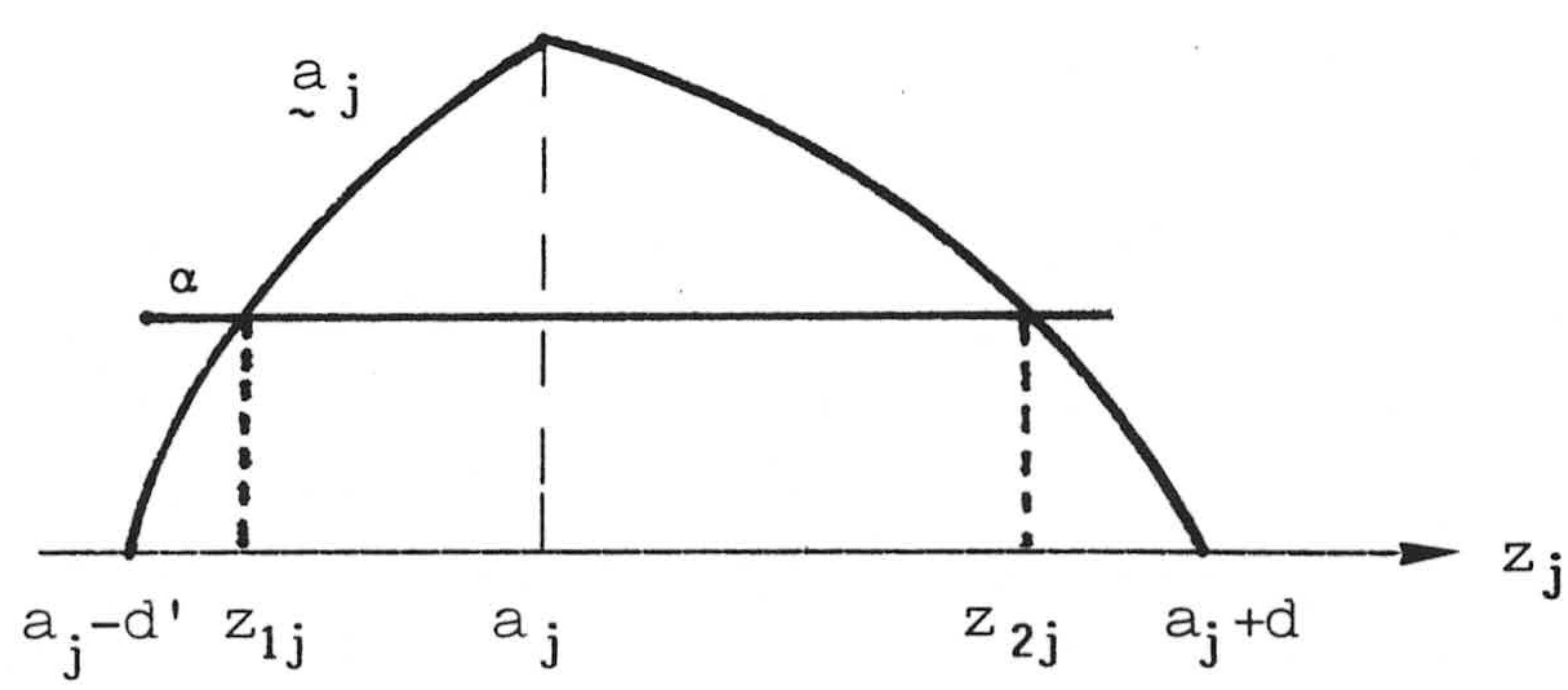
$$\alpha = \frac{\log_q \left(\dfrac{ax + dx + x - z}{x} \right)}{\log_q\ (d+1)} \quad ; \quad 0 < q < 1$$

q.e.d.

TEOREMA 2.8. Si $\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_j \, x_j = \underset{\sim}{a} \, x$ es una expresión lineal en la que los $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$ son números difusos con función de pertenencia seno del tipo 1.8., teniendo todos la misma amplitud izquierda $d'_j = d'$, $j=1...n$, y la misma amplitud derecha $d_j = d$, $j=1...n$, entonces, la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{y}$, si $x_j \geq 0$, $j=1...n$, es:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{z - ax + d'x}{x}\right)}{\operatorname{sen} d'} & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax - d'x \leq z \leq ax \end{cases} \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{z - ax - dx}{x}\right)}{\operatorname{sen}(-d)} & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ y \\ ax \leq z \leq ax + dx \end{cases} \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

DEMOSTRACION: Considerando por separado las partes no crecientes y las no decrecientes de las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_j$, $j=1...n$, tenemos:



a)

$$\frac{\text{sen }(z_j - a_j + d')}{\text{sen } d'} = \alpha \Longrightarrow \quad z_{1j} = a_j - d' + \text{arc sen }(\alpha \text{ sen } d')$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{1j}\ x_j = a_j\ x_j - d'x_j + x_j \text{ arc sen }(\alpha \text{ sen } d')$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}\ x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\ x_j - d' \sum_{j=1}^{n} x_j + \text{arc sen }(\alpha \text{ sen } d') \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$= a\,x - d'x + \text{arc sen }(\alpha \text{ sen } d')\ x$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{z - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + d' \sum_{j=1}^{n} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j}\right)}{\text{sen } d'} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\dfrac{z - ax + d'x}{x}\right)}{\text{sen } d'}$$

b)

$$\frac{\text{sen }(z_j - a_j - d)}{\text{sen }(-d)} = \alpha \Longrightarrow \quad z_{2j} = a_j + d + \text{arc sen }(\alpha \text{ sen }(-d))$$

Multiplicando por $x_j > 0$

$$z_{2j}\, x_j = a_j\, x_j + d\, x_j + x_j \text{ arc sen } (\alpha \text{ sen } (-d))$$

Sumando en j obtenemos

$$z = \sum_{j=1}^{n} z_{2j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + d \sum_{j=1}^{n} x_j + \text{arc sen } (\alpha \text{ sen } (-d)) \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$= a\, x + d\, x + \text{arc sen } (\alpha \text{ sen } (-d))\, x$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{z - \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j - d \sum_{j=1}^{n} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j}\right)}{\text{sen } (-d)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\dfrac{z - ax - dx}{x}\right)}{\text{sen } (-d)}$$

q.e.d.

3. METODOS DE COMPARACION

El problema de comparar dos números difusos dados, ha sido, y aún es, un tema muy referido en la literatura especializada. Como se sabe, hay un amplisimo catálogo de métodos, para comparar dos números difusos, que a su vez, provienen de diversos enfoques para afrontar el problema. Excelentes recopilaciones de dichos métodos, pueden encontrarse en los trabajos de Bor tolan y Degani (G. Bor tolan y R. Degani: A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets. Fuzzy Sets and Systems 15, 1985, 1-20), Campos (L. Campos: Modelos de la Programación Lineal Difusa, para la Resolución de Juegos Matriciales Imprecisos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1986) y González (A. González: Métodos Subjetivos para la Comparación de Números Difusos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1988).

En esta memoria, usaremos las formas de comparar números difusos, solo como un medio, para analizar la repercusión que, en un problema de programación lineal, tiene el empleo de diferentes tipos de números y, por consiguiente, de sus formas de compararlos. Desde este punto de vista, no es nuestro objetivo recoger aquí todas las formas posibles que hay para la comparación (como no lo es, y no lo hemos hecho, el introducir indefinidos tipos distintos de función de pertenencia, caracterizando a números). Por tanto del catálogo de métodos de comparación existente hemos seleccionado aquellos que, estando suficientemente contrastados en la literatura, nos han parecido más apropiados, para el tema concreto que estudiamos.

3.1. METODOS BASADOS EN LA DEFINICION DE UNA FUNCIÓN DE COMPARACIÓN, QUE APLIQUE CADA NÚMERO DIFUSO EN LA RECTA REAL, DONDE EXISTE UN ORDEN NATURAL.

Consideremos n números difusos

$$\underset{\sim}{u}_j = \{(z\ ,\ \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z))\} \quad , \ z \in I \subset \mathbb{R}\ , \quad j=1\ldots n$$

Se define una función de comparación

$$F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es el conjunto de los números difusos en $\mathbb{R}$. F es tal que

$$F(\underset{\sim}{u}_i) < F(\underset{\sim}{u}_j) \Longrightarrow \underset{\sim}{u}_i < \underset{\sim}{u}_j$$

$$F(\underset{\sim}{u}_i) = F(\underset{\sim}{u}_j) \Longrightarrow \underset{\sim}{u}_i \approx \underset{\sim}{u}_j$$

$$F(\underset{\sim}{u}_i) > F(\underset{\sim}{u}_j) \Longrightarrow \underset{\sim}{u}_i > \underset{\sim}{u}_j$$

A F la denominaremos INDICE.

3.1.1. INDICE DE CHAG. (CHANG 1981)

Chang propone como índice

$$F(\underset{\sim}{u}_j) = \int_{S_j} z\ \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z)\ dz$$

Siendo S_j el soporte de $\underset{\sim}{u}_j$

3.1.2. INDICES DE YAGER (YAGER, 1978, 1981)

Yager propone tres índices, sin imponer ninguna hipótesis de normalidad o convexidad.

3.1.2.1. PRIMER INDICE DE YAGER

El primer índice de Yager es

$$F_1(\underset{\sim}{u}_j) = \frac{\int_{S_j} g(z)\ \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z)\, dz}{\int_{S_j} \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z)\, dz}$$

donde $g(z)$ es una medida de la importancia del valor z.

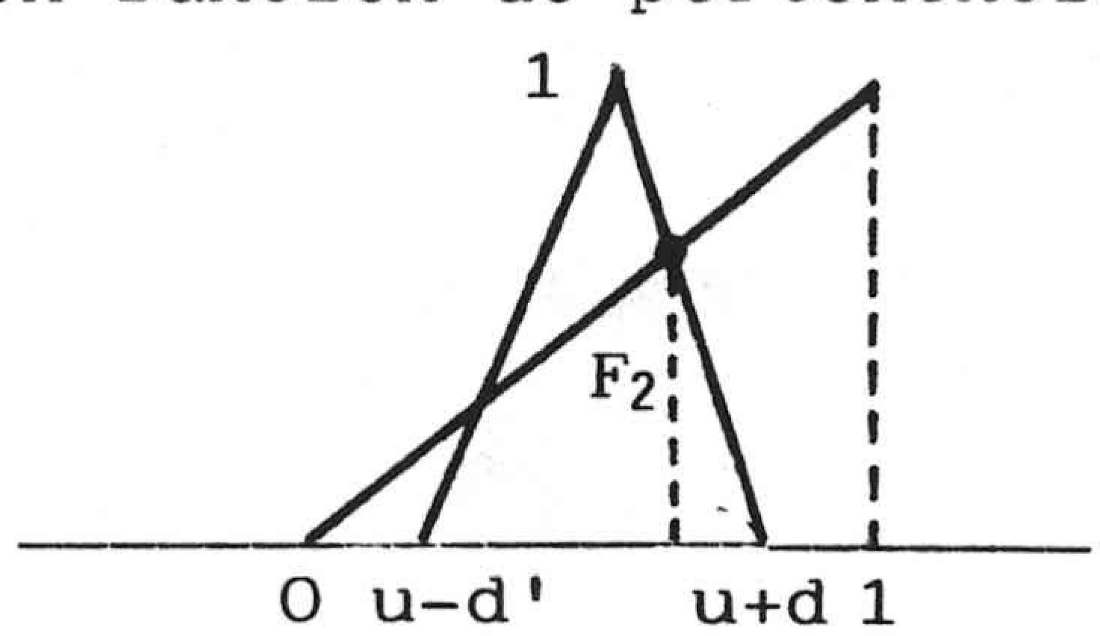
Si $g(z) = z$, este índice, representa la abcisa del centro de gravedad del número difuso $\underset{\sim}{u}_j$.

3.1.2.2. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

El segundo índice de Yager es

$$F_2(\underset{\sim}{u}_j) = \max_{z \in S_j} \min(z, \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z))$$

que mide la consistencia del número difuso $\underset{\sim}{u}_j$ cuyo soporte está contenido en el intervalo $[0,1]$, con el conjunto difuso lineal $\underset{\sim}{z}$, con función de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{z}}(z) = z$.



3.1.2.3. TERCER INDICE DE YAGER.

El tercer índice de Yager es

$$F_3(\underset{\sim}{u}_j) = \int_0^{\alpha_{max}} M(U_j^{\alpha})\, d\alpha$$

donde U_j^{α} es el α-corte de $\underset{\sim}{u}_j$, $M(U_j^{\alpha})$ es el valor medio de los elementos de U_j^{α} y $\alpha_{max} = hgt(\underset{\sim}{u}_j)$.

3.1.3. INDICE DE ADAMO. (ADAMO, 1980)

Utilizando el concepto de α-corte, Adamo define un índice de α-preferencia, dado por

$$F_{\alpha}(\underset{\sim}{u}_j) = \max \{ z \mid \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(z) \geq \alpha \}$$

para un α dado, $\alpha \in [0,1]$

3.2. METODOS BASADOS EN LA COMPRARACION DE ALTERNAIVAS.

Estos métodos, consisten en obtener el conjunto difuso de las alternativas optimales

$$\underset{\sim}{O} = \{(j\ ,\ \mu_{\underset{\sim}{O}}(j))\}\ ,\quad j=1...n$$

donde $\mu_{\underset{\sim}{O}}(j)$, es el grado, con el que la j-esima alternativa, puede considerarse como la mejor

3.2.1. METODO DE JAIN (JAIN, 1976, 1977)

Para determinar el conjunto difuso de las alternativas optimales, se obtiene en primer lugar, el soporte de la unión de los números difusos considerados, que notaremos por

$$S = \text{Sop de } \bigcup_j \underset{\sim}{u}_j$$

Sea $z_{max} = \text{Sup } S$.

El conjunto maximizante de S , es evaluado como

$$\underset{\sim}{u}_{max} = \{z \,,\; \mu_{max}(z)\} \,, \quad z \in S$$

$$\text{donde} \quad \mu_{max}(z) = \left(\frac{z}{z_{max}}\right)^K \,, \quad k > 0$$

Por último

$$\mu_{\underset{\sim}{o}}(j) = \text{hgt}\,(\underset{\sim}{u}_j \cap \underset{\sim}{u}_{max})$$

Notar que $\mu_{\underset{\sim}{o}}(j)$, no es muy diferente al índice F_2 propuesto por Yager.

Así pues, dados dos números difusos $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, diremos que

$$\underset{\sim}{a} \; (\leq) \; \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad \mu_{\underset{\sim}{o}}(\underset{\sim}{a}) \leq \mu_{\underset{\sim}{o}}(\underset{\sim}{b})$$

3.2.2. INDICES DE DUBOIS Y PRADE, (DUBOIS and PRADE, 1983)

DUBOIS y PRADE, proponen cuatro índices, que describen la posición relativa de dos números difusos $\tilde{u}_i$, $\tilde{u}_j$, de los cuales vamos a considerar dos.

3.2.2.1. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA DE $\tilde{u}_i$ SOBRE $\tilde{u}_j$.

$$PD(\tilde{u}_i) = \sup_{z_i} \min \left[\mu_{\tilde{u}_i}(z_i) \, , \, \sup_{z_j \leq z_i} \mu_{\tilde{u}_j}(z_j) \right] =$$

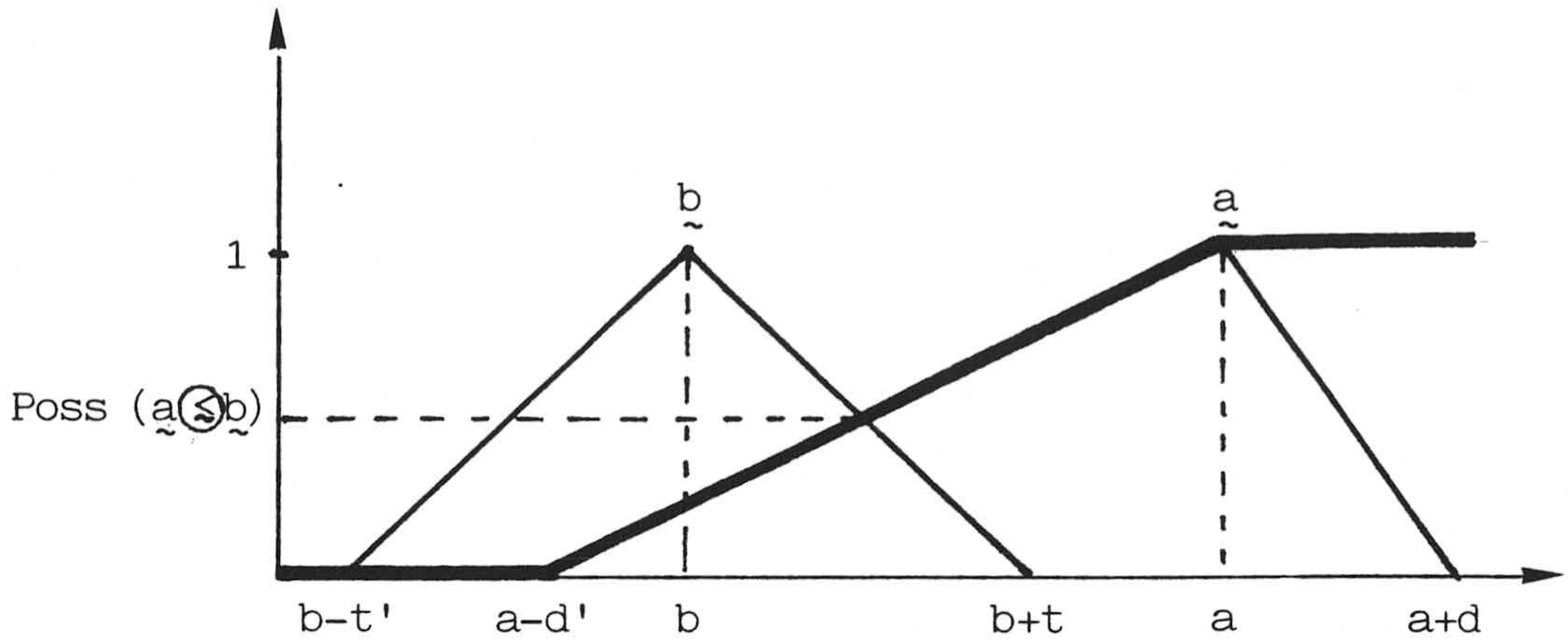
$$= \sup_{\substack{z_i, z_j \\ z_i \geq z_j}} \min \left[\mu_{\tilde{u}_i}(z_i) \, , \, \mu_{\tilde{u}_i}(z_j) \right]$$

Este índice, coincide con el propuesto por Baas y Kwakernaak (Baas and Kwakermaak, 1977).

Dados dos números difusos $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$, diremos que $\tilde{a} (\leq) \tilde{b}$ si Poss $(\tilde{a} (\leq) \tilde{b}) \geq$ Poss $(\tilde{b} (\leq) \tilde{a})$.

Geométricamente, Poss $(\tilde{a} (\leq) \tilde{b})$ es la ordenada del punto donde se cortan la función de pertenencia del número difuso $\tilde{b}$ en el intervalo $[b \, , \, b+t]$, con la función de pertenencia de los números reales z "posiblemente mayores o iguales a x ", donde $x \in \tilde{a}$ con función de pertenencia

$$\forall \, z \in \mathbb{R} \, , \, \mu_{[a, +\infty)}(z) = \sup_{x \leq z} \mu_{\tilde{a}}(x)$$



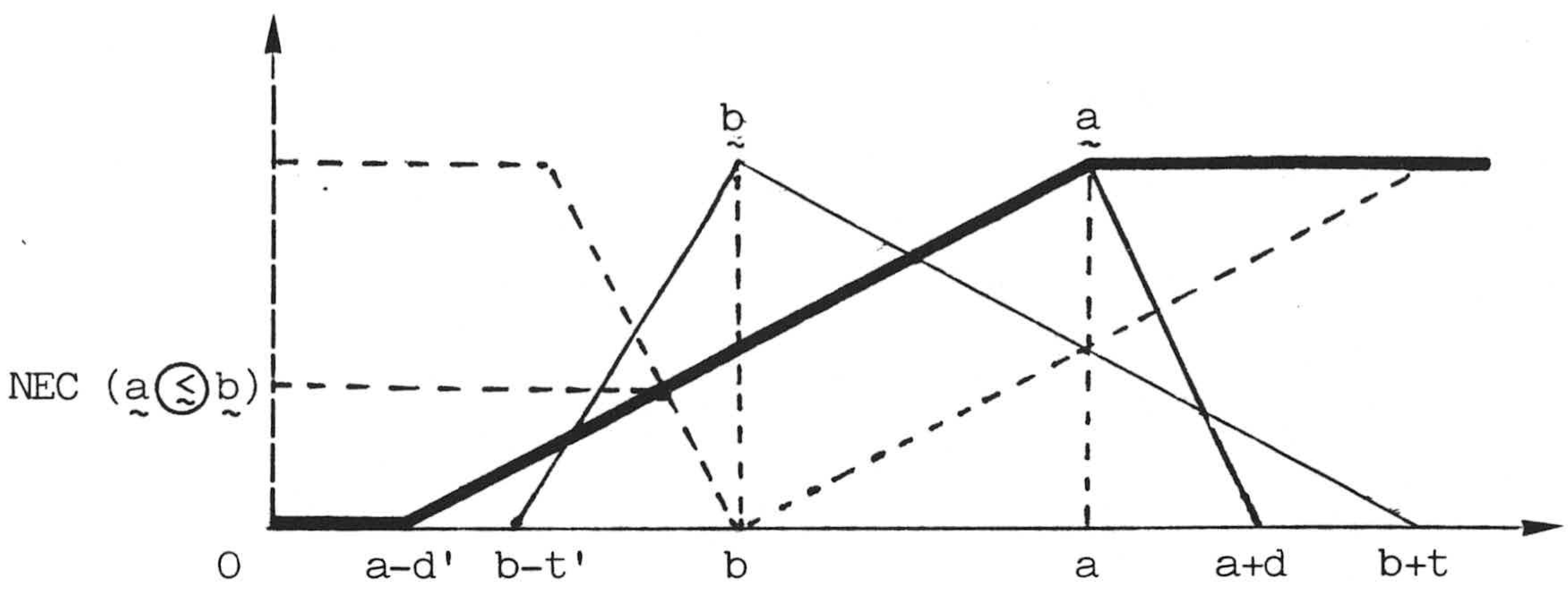
3.2.2.2. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

$$N\,D\,(\tilde{u}_i) = \inf_{z_i} \; \operatorname{Sup}_{z_i, z_j \le z_i} \; \max\left(1 - \mu_{\tilde{u}_i}(z_i) \, , \, \mu_{\tilde{u}_j}(z_j)\right)$$

Dados dos números difusos $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, geométricamente, Nec ($\tilde{a} \leq \tilde{b}$) es la ordenada, del punto donde se cortan la función de pertenencia de $1 - \mu_{\tilde{b}}(z)$, con la función de los números "z posiblemente mayores o iguales a x" donde $x \in \tilde{a}$ con función de pertenencia

$$\mu_{[a\,,\,+\infty)}(z) = \operatorname{Sup}_{x \le z} \; \mu_{\tilde{a}}(x)$$

para lo cual, calculamos el punto de corte de $1 - \mu_{\tilde{b}}$, en el intervalo [b-t' , b] , con la función de pertenencia del número difuso $\tilde{a}$, en el intervalo [a-d' , a] .



4. RESULTADOS DE LAS COMPARACIONES

En esta sección, a partir de los resultados obtenidos en las anteriores, nos dedicamos a encontrar las expresiones concretas, que resultan de la aplicación, de cada uno de los índices que ya hemos introducido, sobre cada uno de los tipos de números que venimos considerando, de cara a obtener la forma final que van a tener las restricciones, en los problemas de programación lineal, que más adelante trataremos.

4.1. NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES

4.1.1. INDICE DE CHANG

4.1.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES DEL TIPO 1.1.

$$F(\tilde{b}) = \int_{b-t'}^{b} z \, \frac{z-b+t'}{t'} \, dz + \int_{b}^{b+t} z \, \frac{-z+b+t}{t} \, dz =$$

$$= \frac{t+t'}{6} (3b + t - t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t = t'$, obtenemos:

$$F(\underset{\sim}{b}) = t \, . \, b$$

4.1.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES OBTENIDOS EN EL TEOREMA 2.1.

$$F(\underset{\sim}{a}\, x) = \int_{ax-d'x}^{ax} z \, \frac{z - ax + d'x}{d'x} \, dz + \int_{ax}^{ax+dx} z \, \frac{-z + ax + dx}{dx} \, dz$$

$$= \frac{dx + d'x}{6} \, (3\, ax + dx - d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}\, x$ es simétrico, es decir si $d'x = d\, x$, obtenemos:

$$F(\underset{\sim}{a}\, x) = d\, x \, . \, a\, x$$

4.1.1 a. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\, x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b}$ si $F(\underset{\sim}{a}\, x) \leq F(\underset{\sim}{b})$

Por lo tanto

$\underset{\sim}{a}\, x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b}$ si $(dx + d'x)\,(3\, ax + dx - d'x) \leq (t+t')\,(3b + t - t')$

Si $\underset{\sim}{a}\, x$ y $\underset{\sim}{b}$ son números difusos simétricos tenemos

$\underset{\sim}{a}\, x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b}$ si $dx \, . \, ax \leq t \, . \, b$

4.1.2. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.1.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES DEL TIPO 1.1.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \frac{\int_{b-t'}^{b} z\,\frac{z-b+t'}{t'}\,dz + \int_{b}^{b+t} z\,\frac{-z+b+t}{t}\,dz}{\int_{b-t'}^{b} \frac{z-b+t'}{t'}\,dz + \int_{b}^{b+t} \frac{-z+b+t}{t}\,dz} =$$

$$= b + \frac{1}{3}(t-t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t = t'$, obtenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.1.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES OBTENIDOS EN EL TEOREMA 2.1.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{a}\,x) = \frac{\int_{ax-d'x}^{ax} z\,\frac{z-ax+d'x}{d'x}\,dz + \int_{ax}^{ax+dx} z\,\frac{-z+ax+dx}{dx}\,dz}{\int_{ax-d'x}^{ax} \frac{z-ax+d'x}{d'x}\,dz + \int_{ax}^{ax+dx} \frac{-z+ax+dx}{dx}\,dz} =$$

$$= a\,x + \frac{1}{3}(dx - d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}\,x$ es simétrico, es decir si $d\,x = d'x$, obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}\,x) = a\,x$$

4.1.2 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad F_1(\underset{\sim}{a}\,x) \leq F_1(\underset{\sim}{b})$$

Por lo tanto

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad 3\,a\,x + d\,x - d'x \leq 3\,b + t - t'$$

Si $\underset{\sim}{a}\,x$ y $\underset{\sim}{b}$ son números difusos simétricos tenemos:

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad a\,x \leq b$$

4.1.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

4.1.3.1. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES DEL TIPO 1.1.

$$F_2(\underset{\sim}{b}) = \max_{z \in [b-t',\ b+t]} \min(z\ ,\ \mu(z)) = \frac{b+t}{t+1}$$

4.1.3.2. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES, OBTENIDOS EN EL TEOREMA 2.1.

$$F_2(\underset{\sim}{a}\,x) = \frac{a\,x + d\,x}{dx + 1}$$

4.1.3 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad F_2(\underset{\sim}{a}\,x) \leq F_2(\underset{\sim}{b})$$

Por lo tanto

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad (t+1)\,ax + (1-b)\,dx \leq b + t$$

4.1.4. TERCER INDICE DE YAGER.

4.1.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES DEL TIPO 1.1.

$$F_3\,(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 [b + \frac{1}{2}(t-t') - \frac{1}{2}(t-t')\,\alpha]\,d\alpha =$$

$$= b + \frac{1}{4}(t - t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t = t'$, obtenemos

$$F_3\,(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.1.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES, OBTENIDOS EN TEOREMA 2.1.

$$F_3\,(\underset{\sim}{a}\,x) = \int_0^1 [a\,x + \frac{1}{2}(dx - d'x) - \frac{1}{2}(dx - d'x)\alpha]\,d\alpha =$$

$$= a\,x + \frac{1}{4}(dx - d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}\,x$ es simétrico, es decir si $d'x = d\,x$ obtenemos:

$$F_3\,(\underset{\sim}{a}\,x) = a\,x$$

4.1.4 a. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\,x \circledleq \underset{\sim}{b}$ si $F_3\,(\underset{\sim}{a}\,x) \leq F_3\,(\underset{\sim}{b})$

Por lo tanto

$\underset{\sim}{a}\,x \leq \underset{\sim}{b}$ si $4\,a\,x + d\,x - d'x \leq 4\,b + t - t'$

Si los números difusos, $\underset{\sim}{a}\, x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad a\, x \leq b$$

4.1.5. INDICE DE ADAMO.

4.1.5.1. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES DEL TIPO 1.1.

$$F_\alpha (\underset{\sim}{b}) = b + t - t\alpha \quad ; \quad \alpha \text{ dado} , \quad \alpha \,\epsilon [0,1]$$

4.1.5.2. PARA NUMEROS DIFUSOS TRIANGULARES, OBTENIDOS EN EL TEOREMA 2.1.

$$F_\alpha (\underset{\sim}{a}\, x) = a\, x + d\, x - d\, x \,.\, \alpha \quad ; \quad \alpha \text{ dado} , \quad \alpha \,\epsilon [0,1]$$

4.1.5 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad F_\alpha(\underset{\sim}{a}\, x) \leq F_\alpha (\underset{\sim}{b})$$

Por lo tanto

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad ax + dx\,(1-\alpha) \leq b + t\,(1-\alpha)$$

$$\alpha \text{ dado} \quad ; \quad \alpha \,\epsilon [0,1]$$

4.1.6. METODO DE JAIN

Supongamos $k = 1$

Se presentan tres casos diferentes: a) $z_{max} = b + t$, b) $z_{max} = ax + dx$, c) $z_{max} = ax + dx = b+t$

4.1.6.1. 1er CASO: Si $z_{max} = b + t$, entonces $\mu_{max}(z) = \dfrac{z}{b+t}$, $0 \leq z \leq b+t$. Para hallar $\mu_{o}(\underset{\sim}{a}\, x)$ y $\mu_{o}(\underset{\sim}{b})$ determinamos la intersección de la función de pertenencia de $\underset{\sim}{u}_{max}$, con la función de pertenencia de $\underset{\sim}{a}\, x$ y de $\underset{\sim}{b}$ en los respectivos intervalos [ax , ax+dx] , [b , b+t]

$$\mu_{o}(\underset{\sim}{a}\, x) = \frac{ax + dx}{dx + b + t}$$

$$\mu_{o}(\underset{\sim}{b}) = \frac{b + t}{b + 2t}$$

4.1.6 a. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $\mu_{o}(\underset{\sim}{a}\, x) \leq \mu_{o}(\underset{\sim}{b})$

Por lo tanto

$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $\dfrac{ax + dx}{dx + b + t} \leq \dfrac{b + t}{b + 2t}$

Luego

$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $ax\,(b + 2t) + t\,dx \leq (b + t)^2$

4.1.6.2. 2º CASO: Si $z_{max} = ax + dx$, entonces

$\mu_{max}(z) = \frac{z}{ax + dx}$, obteniendo

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{a}\, x) = \frac{ax + dx}{ax + 2dx}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{b}) = \frac{b + t}{ax + dx + t}$$

4.1.6 b. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\, x \lesssim \underset{\sim}{b}$ si $\mu_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{a}\, x) \leq \mu_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{b})$

Por lo tnato

$\underset{\sim}{a}\, x \lesssim \underset{\sim}{b}$ si $\frac{ax + dx}{ax + 2dx} \leq \frac{b + t}{ax + dx + t}$

Luego

$\underset{\sim}{a}\, x \lesssim \underset{\sim}{b}$ si $(ax + dx)^2 - (ax + dx)\, b - (dx)(b+t) \leq 0$

4.1.6.3. 3^{er} CASO: $z_{max} = ax + dx = b + t$, entonces

$\mu_{max}(z) = \frac{z}{ax + dx} = \frac{z}{b + t}$, obteniendo

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{a}\, x) = \frac{ax + dx}{ax + 2dx}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{b}) = \frac{b + t}{b + 2t}$$

4.1.6 c. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledless \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad \mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}\, x) \leq \mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b})$$

Por lo tanto

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledless \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad a\, x \leq b$$

4.1.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA

Según la definición, obtenemos

$$\text{POSS}\,(\underset{\sim}{a}\, x \circledless \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b+t \leq ax - d'x \\ \dfrac{b+t - ax + d'x}{t + d'x} & \text{si} \quad ax > b \quad y \quad b+t > ax-d'x \\ 1 & \text{si} \quad ax \leq b \end{cases}$$

Análogamente

$$\text{POSS}\,(\underset{\sim}{b} \circledless \underset{\sim}{a}\, x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ax + dx \leq b - t' \\ \dfrac{ax + dx - b + t'}{t' + dx} & \text{si} \quad b > ax \quad y \quad ax+dx > b-t' \\ 1 & \text{si} \quad b \leq ax \end{cases}$$

4.1.7 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad \frac{b + t - ax + d'x}{t + d'x} \geq \frac{ax + dx - b + t'}{t' + dx}$$

Luego

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad ax \leq b$$

4.1.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

Según la definición, obtenemos

$$\text{Nec}\ (\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b \leq ax - d'x \\ \dfrac{b - ax + d'x}{t' + d'x} & \text{si} \quad b > ax - d'x \ \text{ y } \ ax > b - t' \\ 1 & \text{si} \quad ax \leq b - t' \end{cases}$$

Análogamente

$$\text{Nec}\ (\underset{\sim}{b} \circledleq \underset{\sim}{a}\, x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ax \leq b - t' \\ \dfrac{ax - b + t'}{t' + d'x} & \text{si} \quad ax > b - t' \ \text{ y } \ b > ax - d'x \\ 1 & \text{si} \quad b \leq ax - d'x \end{cases}$$

4.1.8 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad \frac{b - ax + d'x}{t' + d'x} \geq \frac{ax - b + t'}{t' + d'x}$$

Luego

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad 2ax - d'x \leq 2b - t'$$

4.2. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA.

4.2.1. INDICE DE CHANG.

4.2.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA DEL TIPO 1.2.

$$F(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} \left[- \frac{1}{t'^2} z^3 + \frac{2b}{t'^2} z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t'^2}\right) z \right] dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} \left[- \frac{1}{t^2} z^3 + \frac{2b}{t^2} z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right) z \right] dz$$

Operando obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = (t + t') \left[\frac{2}{3} b + \frac{1}{4} (t - t')\right]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t = t'$ tenemos:

$$F(\underset{\sim}{b}) = \frac{4}{3} b.t$$

4.2.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA, OBTENIDOS EN EL TEOREma 2.2.

$$F(\underset{\sim}{a} x) = \int_{ax-d'x}^{ax} \left[- \frac{1}{(d'x)^2} z^3 + \frac{2ax}{(d'x)^2} z^2 + \left(1 - \frac{(ax)^2}{(d'x)^2}\right) z \right] dz +$$

$$+ \int_{ax}^{ax+dx} \left[- \frac{1}{(dx)^2} z^3 + \frac{2\,ax}{(dx)^2} z^2 + \left(1 - \frac{(ax)^2}{(dz)^2}\right) z \right] dz$$

Operando obtenemos

$$F(\underset{\sim}{a}x) = (dx + d'x)\left[\frac{2}{3}ax + \frac{1}{4}(dx - d'x)\right]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos

$$F(\underset{\sim}{a}x) = \frac{4}{3}\, ax \,.\, dx$$

4.2.1 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad (dx+d'x)\left[\frac{2}{3}ax + \frac{1}{4}(dx-d'x)\right] \leq (t+t')\left[\frac{2}{3}b + \frac{1}{4}(t-t')\right]$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos

$$\underset{\sim}{a}x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax \,.\, dx \leq b.t$$

4.2.2. PRIMER INDICE DE YAGER

4.2.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA DEL TIPO 1.2.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \left[\int_{b-t'}^{b}\left[-\frac{1}{t'^2}z^3 + \frac{2b}{t'^2}z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t'^2}\right)z\right]dz + \int_{b}^{b+t}\left[-\frac{1}{t^2}z^3 + \frac{2b}{t^2}z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right)z\right]dz\right] \Big/ \left[\int_{b-t'}^{b}\left[-\frac{1}{t'^2}z^2 + \frac{2b}{t'^2}z + 1 - \frac{b^2}{t'^2}\right]dz + \int_{b}^{b+t}\left[-\frac{1}{t^2}z^2 + \frac{2b}{t^2}z + 1 - \frac{b^2}{t^2}\right]dz\right]$$

Operando obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{3}{8}(t - t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t = t'$ tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.2.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA, OBTENIDOS EN EL TEOREMA 2.2.

Si $g(z) = z$, obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = a\,x + \frac{3}{8}(dx - d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = a\,x$$

4.2.2 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si } ax + \frac{3}{8}(dx - d'x) \leq b + \frac{3}{8}(t-t')$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos tenemos

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si } a\,x \leq b$$

4.2.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

4.2.3.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA DEL TIPO 1.2.

En este caso el soporte del número difuso $\underset{\sim}{b}$ ha de estar contenido en el intervalo $[0,1]$.

Si

$$y = -\frac{1}{t^2} z^2 + \frac{2b}{t^2} z + 1 - \frac{b^2}{t^2} = z$$

Operando, obtenemos

$$F_2(\underset{\sim}{b}) = \frac{2b - t^2 + t\sqrt{t^2 - 4b + 4}}{2}$$

4.2.3.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.2.

En este caso el soporte del número difuso $\underset{\sim}{a}x$, ha de estar contenido en el intervalo $[0,1]$

Si

$$y = -\frac{1}{(dx)^2} z^2 + 2\frac{ax}{(dx)^2} z + 1 - \left(\frac{ax}{dx}\right)^2 = z$$

Operando, obtenemos

$$F_2(\underset{\sim}{a}x) = \frac{2ax - (dx)^2 + dx\sqrt{(dx)^2 - 4ax + 4}}{2}$$

4.2.3 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $F_2(\underset{\sim}{a}\, x) \leq F_2(\underset{\sim}{b})$

Es decir

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 2ax - (dx)^2 + dx\sqrt{(dx)^2 - 4ax + 4} \leq$$

$$2b - t^2 + t\sqrt{t^2 - 4b + 4}$$

4.2.4. TERCER INDICE DE YAGER

4.2.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA DEL TIPO 1.2.

Como:

$$-\frac{1}{t'^2} z^2 + \frac{2b}{t'^2} z + 1 - \frac{b^2}{t'^2} = \alpha \Longrightarrow z_1 = b - t'\sqrt{1-\alpha}$$

$$-\frac{1}{t^2} z^2 + \frac{2b}{t^2} z + 1 - \frac{b^2}{t^2} = \alpha \Longrightarrow z_2 = b + t\sqrt{1-\alpha}$$

Entonces

$$B^\alpha = [\, b - t'\sqrt{1-\alpha} \;,\; b + t'\sqrt{1-\alpha}\,]$$

$$M(B^\alpha) = b + \frac{1}{2}(t - t')\sqrt{1-\alpha}$$

Luego

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 [b + \frac{1}{2}(t-t')\sqrt{1-\alpha}]\, d\alpha = b - \frac{1}{3}(t - t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t = t'$ tenemos:

$$F_3 (\underset{\sim}{b}) = b$$

4.2.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.2.

Obtenemos que:

$$F_3 (\underset{\sim}{a} x) = a x - \frac{1}{3} (d x - d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a} x$ es simétrico, es decir si $d x = d'x$ entonces tenemos

$$F_3 (\underset{\sim}{a} x) = a x$$

4.2.4 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a} x \leq \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 3 a x - d x + d'x \leq 3 b - t + t'$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a} x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos tenemos:

$$\underset{\sim}{a} x \leq \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad a x \leq b$$

4.2.5. INDICE DE ADAMO.

4.2.5.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA DEL TIPO 2.1.

Como

$$-\frac{1}{t^2} z^2 + \frac{2b}{t^2} z + 1 - \frac{b^2}{t^2} \geq \alpha \implies z_2 \leq b + t\sqrt{1-\alpha}$$

$$\implies F_\alpha(\underset{\sim}{b}) = b + t\sqrt{1-\alpha} \quad ; \quad \alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.2.5.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.2.

Como

$$-\frac{1}{(dx)^2} z^2 + \frac{2ax}{(dx)^2} z + 1 - \frac{(ax)^2}{(dx)^2} \geq \alpha \implies z_2 \leq ax + dx\sqrt{1-\alpha}$$

$$\implies F_\alpha(\underset{\sim}{a}x) = ax + dx\sqrt{1-\alpha} \quad , \quad \alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.2.5 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}x \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax + dx\sqrt{1-\alpha} \leq b + t\sqrt{1-\alpha}$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.2.6. METODO DE JAIN

Supongamos $k = 1$

4.2.6.1. 1^{er} CASO: Si $z_{max} = b + t$ entonces

$$\mu_{max}(z) = \frac{z}{b+t} \quad ; \quad 0 \leq z \leq b + t$$

Obtenemos, operando:

$$\mu_{o}(\underset{\sim}{a}\, x) = \frac{2\,ax\,(b+t) - (dx)^2 + dx\sqrt{(dx)^2 - 4ax\,(b+t) + 4\,(b+t)^2}}{2\,(b+t)^2}$$

$$\mu_{o}(\underset{\sim}{b}) = \frac{2\,b\,(b+t) - t^2 + t\sqrt{5\,t^2 + 4\,b\,t}}{2\,(b+t)^2}$$

4.2.6 a. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}\, x \; (\leq) \; \underset{\sim}{b}$ si $\mu_{\underset{\sim}{o}}(\underset{\sim}{a}\, x) \leq \mu_{\underset{\sim}{o}}(\underset{\sim}{b})$;

Es decir $\underset{\sim}{a}\, x \; (\leq) \; \underset{\sim}{b}$ si

$$2\,a\,x\,(b+t) - (dx)^2 + dx\sqrt{(dx)^2 - 4ax\,(b+t) + 4\,(b+t)^2} \leq$$

$$2\,b\,(b+t) - t^2 + t\sqrt{5\,t^2 + 4\,b\,t}$$

4.2.6.2. 2º CASO: Si $z_{max} = ax + dx$ entonces

$$\mu_{max}(z) = \frac{z}{ax + dx} \quad ; \quad 0 \leq z \leq ax + dx$$

Operando, obtenemos

$$\mu_o(\underset{\sim}{a}x) = \frac{2\,ax\,(ax + dx) - (dx)^2 + dx\sqrt{5(dx)^2 + 4(ax)(dx)}}{2\,(ax + dx)^2}$$

$$\mu_o(\underset{\sim}{b}) = \frac{2b\,(ax + dx) - t^2 + t\sqrt{t^2 - 4b(ax + dx) + 4\,(ax + dx)^2}}{2\,(ax + dx)^2}$$

4.2.6 b. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \, \textcircled{\leq} \, \underset{\sim}{b}$ si

$$2ax\,(ax + dx) - (dx)^2 + dx\sqrt{5\,(dx)^2 + 4\,(ax)\,(dx)} \leq$$

$$2b\,(ax + dx) - t^2 + t\sqrt{t^2 - 4b\,(ax + dx) + 4\,(ax + dx)^2}$$

4.2.6.3. 3^{er} CASO: Si $z_{max} = ax + dx = b + t \Longrightarrow$

$$\mu_{max}(z) = \frac{z}{ax + dx} = \frac{z}{b + t} \quad ; \quad 0 \leq z \leq ax + dx = b + t$$

Operando, obtenemos

$$\mu_0(\underset{\sim}{a}\,x) = \frac{2ax\,(ax+dx) - (dx)^2 + dx\,\sqrt{5(dx)^2 + 4(ax)(dx)}}{2\,(ax+dx)^2}$$

$$\mu_0(\underset{\sim}{b}) = \frac{2b\,(b+t) - t^2 + t\,\sqrt{5t^2 + 4bt}}{2\,(b+t)^2}$$

4.2.6 c. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}\,x \circledless \underset{\sim}{b}$ si $\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}\,x) \leq \mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b})$

Es decir $\underset{\sim}{a}\,x \circledless \underset{\sim}{b}$ si

$$-2dx\,(b+t) - (dx)^2 + dx\,\sqrt{5(dx)^2 + 4(b+t-dx)\,dx} \leq$$

$$-2bt - 3t^2 + t\,\sqrt{5t^2 + 4bt}$$

4.2.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA

Aplicando la definición y operando, obtenemos

$$\mathrm{POSS}\,(\underset{\sim}{a}\,x \circledless \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b+t \leq ax - d'x \\ 1 - \left(\dfrac{ax - b}{t + d'x}\right)^2 & \text{si } ax > b \text{ y } b+t > ax - d'x \\ 1 & \text{si } ax \leq b \end{cases}$$

Análogamente

$$\mathrm{POSS}\,(\tilde{a}\,x \,\textcircled{\geq}\, \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ax + dx \leq b - t' \\ 1 - \left(\dfrac{b - ax}{dx + t'}\right)^2 & \text{si} \quad b > ax \quad \text{y} \quad ax + dx > b - t' \\ 1 & \text{si} \quad b \leq ax \end{cases}$$

4.2.7 a. COMPARACION

$$\tilde{a}\,x \,\textcircled{\leq}\, \tilde{b} \qquad \text{si} \qquad 1 - \left(\frac{ax - b}{t + d'x}\right)^2 \geq 1 - \left(\frac{b - ax}{dx + t'}\right)^2$$

Por lo tanto

$$\tilde{a}\,x \,\textcircled{\leq}\, \tilde{b} \qquad \text{si} \qquad dx - d'x \leq t - t'$$

4.2.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

Aplicando la definición y operando obtenemos

$$\mathrm{Nec}(\tilde{a}x \,\textcircled{\leq}\, \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b \leq ax - d'x \\ \dfrac{(ax-b)^2[(d'x)^2 - t'^2] + (d'x)^2[(d'x)^2 + t'^2] + 2d'x.t'(b-ax)\sqrt{(d'x)^2 + t'^2 - (ax-b)^2}}{[(d'x)^2 + t'^2]^2} & \text{si} \begin{cases} b > ax - d'x \\ \quad \text{y} \\ ax > b - t' \end{cases} \\ 1 & \text{si} \quad ax \leq b - t' \end{cases}$$

Análogamente

$$\mathrm{Nec}(\underset{\sim}{b} \textcircled{\leq} \underset{\sim}{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ax \leq b - t' \\ \dfrac{(b-ax)^2[t'^2-(d'x)^2]+t'^2[t'^2+(d'x)^2]+2t'd'x(ax-b)\sqrt{t'^2+(d'x)^2-(b-ax)^2}}{[t'^2+(d'x)^2]^2} & \text{si} \begin{cases} ax > b-t' \\ \quad y \\ b > ax-d'x \end{cases} \\ 1 & \text{si} \quad b \leq ax - d'x \end{cases}$$

4.2.8 a. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}x \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b}$ si $\mathrm{Nec}(\underset{\sim}{a}x \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b}) \geq \mathrm{Nec}(\underset{\sim}{b} \textcircled{\leq} \underset{\sim}{a}x)$

Es decir $\underset{\sim}{a}x \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b}$ si

$$[(d'x)^2 - t'^2]\,[2(ax-b)^2 + (d'x)^2 + t'^2] -$$

$$4\,d'x.t'(ax-b)\sqrt{(d'x)^2+t'^2-(ax-b)^2} \geq 0$$

4.3. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA.

4.3.1. INDICE DE CHANG.

4.3.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA DEL TIPO 1.3.

$$F(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} \left[\frac{1}{t'^2} z^3 - 2\,\frac{b-t'}{t'^2} z^2 + \frac{(b-t')^2}{t'^2} z\right] dz \; +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} [\frac{1}{t^2} z^3 - 2 \frac{b+t}{t^2} z^2 + \frac{(b+t)^2}{t^2} z] \; dz$$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = \frac{1}{3} (t + t') \; [b + \frac{1}{4} (t - t')]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$ tenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = \frac{2}{3} b.t$$

4.3.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA OBTENIDOS EN EL TEOREMA 2.3.

$$F(\underset{\sim}{a} x) = \int_{ax-d'x}^{ax} [\frac{1}{(d'x)^2} z^3 - 2 \frac{ax - d'x}{(d'x)^2} z^2 + \frac{(ax-d'x)^2}{(d'x)^2} z] \; dz \; +$$

$$+ \int_{ax}^{ax+dx} [\frac{1}{(dx)^2} z^3 - 2 \frac{ax+dx}{(dx)^2} z^2 + \frac{ax+dx}{(dx)^2} z] \; dz$$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{a} x) = \frac{1}{3} (dx + d'x) \; [ax + \frac{1}{4} (dx - d'x)]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a} x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ tenemos

$$F(\underset{\sim}{a} x) = \frac{2}{3} ax.dx$$

4.3.1a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad (dx+d'x)\left(ax+\frac{1}{4}(dx-d'x)\right) \leq (t+t')\left(b+\frac{1}{4}(t-t')\right)$$

Si los números difuso $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos tenemos

$$\underset{\sim}{a}\,x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad a\,x.dx \leq b.t$$

4.3.2. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.3.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA DEL TIPO 1.3.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \left[\int_{b-t'}^{b} \left[\frac{1}{t'^2} z^3 - 2\,\frac{b-t'}{t'^2} z^2 + \frac{(b-t')^2}{t'^2} z\right] dz + \right.$$

$$\left. + \int_{b}^{b+t}\left[\frac{1}{t^2} z^3 - 2\,\frac{b+t}{t^2} z^2 + \frac{(b+t)^2}{t^2} z\right] dz\right] \Big/ \left[\int_{b-t'}^{b}\left[\frac{1}{t'^2} z^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\,\frac{b-t'}{t'^2} z + \frac{(b-t')^2}{t'^2}\right] dz + \int_{b}^{b+t}\left[\frac{1}{t^2} z^2 - 2\,\frac{b+t}{t^2} z + \frac{(b+t)^2}{t^2}\right] dz\right]$$

Operando, obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{1}{4}(t - t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.3.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.3.

Operando, obtenemos

$$F_1\ (\underset{\sim}{a}\, x) = a\, x + \frac{1}{4}\,(dx - d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}\, x$ es simétrico, es decir si $d'x = d\, x$ tenemos

$$F_1\ (\underset{\sim}{a}\, x) = a\, x$$

4.3.2 a. COMPARACION.

$$\underset{\sim}{a}\, x \ (\leq)\ \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad a\, x + \frac{1}{4}\,(dx - d'x) \leq b + \frac{1}{4}\,(t - t')$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}\, x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos tenemos

$$\underset{\sim}{a}\, x \ (\leq)\ \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad a\, x \leq b$$

4.3.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

4.3.3.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA DEL TIPO 1.3.

En este caso el soporte del número difuso $\underset{\sim}{b}$ ha de estar contenido en el intervalo $[0,1]$

Si

$$\frac{1}{t^2} z^2 - 2\,\frac{b+t}{t^2}\,z + \frac{(b+t)^2}{t^2} = z$$

Operando, obtenemos

$$F_2(\underset{\sim}{b}) = \frac{2(b+t) + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b+t)}}{2}$$

4.3.3.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.3.

En este caso el soporte de número difuso $\underset{\sim}{a}\,x$ ha de estar contenido en el intervalo $[0,1]$

Si

$$\frac{1}{(dx)^2} z^2 - 2\,\frac{ax + dx}{(dx)^2}\,z + \frac{(ax + dx)^2}{(dx)^2} = z$$

Operando, obtenemos

$$F_2(\underset{\sim}{a}\,x) = \frac{2(ax + dx) + (dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4(ax + dx)}}{2}$$

4.3.3 a. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\,x \textcircled{\le} \underset{\sim}{b}$ si $F_2(\underset{\sim}{a}\,x) \le F_2(\underset{\sim}{b})$

Es decir $\underset{\sim}{a}\,x \textcircled{\le} \underset{\sim}{b}$ si

$$2(ax + dx) + (dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4(ax+dx)} \le$$
$$2(b + t) + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b + t)}$$

4.3.4. TERCER INDICE DE YAGER.

4.3.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA DEL TIPO 1.3.

Como

$$\frac{1}{t'^2} z^2 - 2\frac{b-t'}{t'^2} z + \frac{(b-t')^2}{t'^2} = \alpha \implies z_1 = b - t'(1-\sqrt{\alpha})$$

$$\frac{1}{t^2} z^2 - 2\frac{b+t}{t^2} z + \frac{(b+t)^2}{t^2} = \alpha \implies z_2 = b + t(1-\sqrt{\alpha})$$

Tenemos que

$$B^{\alpha} = [\, b - t'(1-\sqrt{\alpha}) \,,\; b + t(1-\sqrt{\alpha}) \,]$$

Luego

$$M(B^{\alpha}) = b + \frac{t-t'}{2} + \frac{t'-t}{2}\sqrt{\alpha}$$

Por lo tanto

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 \left[b + \frac{t-t'}{2} + \frac{t'-t}{2}\sqrt{\alpha} \right] d\alpha =$$

$$= b + \frac{t-t'}{6}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$ tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.3.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.3.

De manera análoga al caso anterior, obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{dx - d'x}{6}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax$$

4.3.4 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 6ax + dx - d'x \leq 6b + t - t'$$

Si $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son números difusos simétricos, tenemos

$$\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax \leq b$$

4.3.5. INDICE DE ADAMO

4.3.5.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA DEL TIPO 1.3.

Como

$$\frac{1}{t^2} z^2 - \frac{2(b+t)}{t^2} z + \frac{(b+t)^2}{t^2} \geq \alpha \implies z_2 \leq b + t\,(1 - \sqrt{\alpha}\,)$$

tenemos que

$$F_\alpha(\underset{\sim}{b}) = b + t\,(1 - \sqrt{\alpha}) \quad , \quad \alpha \text{ dado} \; ; \quad \alpha \in [0,1]$$

4.3.5.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA, OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.3.

De manera análoga al caso anterior, obtenemos

$$F_\alpha(\underset{\sim}{a}\,x) = ax + dx\,(1 - \sqrt{\alpha}) \quad \alpha \text{ dado} \; , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.3.5a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}\,x \,(\leq)\, \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax + dx\,(1 - \sqrt{\alpha}) \leq b + t\,(1 - \sqrt{\alpha})$$

$$\alpha \text{ dado} \; , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.3.6. METODO DE JAIN

Supongamos que $k = 1$

4.3.6.1. 1er CASO: $z_{max} = b + t \Longrightarrow \mu_{max}(z) = \dfrac{z}{b+t}$;

$$0 \leq z \leq b + t$$

Si

$$\frac{1}{t^2} z^2 - 2\,\frac{b+t}{t^2} z + \frac{(b+t)^2}{t^2} = \frac{z}{b+t}$$

Operando, obtenemos que

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b}) = \frac{2(b+t)^2 + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b+t)^2}}{2(b+t)^2}$$

Si

$$\frac{1}{(dx)^2} z^2 - 2\frac{ax + dx}{(dx)^2} z + \frac{(ax + dx)^2}{(dx)^2} = \frac{z}{b+t}$$

Operando, obtenemos

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}x) = \frac{2(ax+dx)(b+t)+(dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4(ax+dx)(b+t)}}{2(b+t)^2}$$

4.3.6 a. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\, x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b}$, si $\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}\, x) \leq \mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b})$

Es decir $\underset{\sim}{a}\, x \, (\leq) \, \underset{\sim}{b}$ si

$$2(ax+dx)(b+t) + (dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4(ax+dx)(b+t)} \leq$$

$$2(b+t)^2 + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b+t)^2}$$

4.3.6.2. <u>2º CASO</u>: $z_{max} = ax + dx \Longrightarrow \mu_{max}(z) = \dfrac{z}{ax+dx}$

$$0 \leq z \leq ax + dx$$

Si

$$\frac{1}{t^2} z^2 - 2\,\frac{b+t}{t^2} z + \frac{(b+t)^2}{t^2} = \frac{z}{ax+dx}$$

Operando, obtenemos

$$\mu_{\underset{\sim}{o}}(\underset{\sim}{b}) = \frac{2(b+t)\,(ax+dx) + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b+t)\,(ax+dx)}}{2\,(ax+dx)^2}$$

Si

$$\frac{1}{(dx)^2} z^2 - 2\,\frac{ax+dx}{(dx)^2} z + \frac{(ax+dx)^2}{(dx)^2} = \frac{z}{ax+dx}$$

Operando, obtenemos

$$\mu_{\underset{\sim}{o}}(\underset{\sim}{a}\,x) = \frac{2(ax+dx)^2 + (dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4(ax+dx)^2}}{2\,(ax+dx)^2}$$

4.3.6 b. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\,x \leq \underset{\sim}{b}$ si $2\,(ax+dx)^2 + (dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4\,(ax+dx)^2} \leq$

$$2\,(b+t)\,(ax+dx) + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b+t)\,(ax+dx)}$$

4.3.6.3. 3^{er} CASO: $z_{max} = ax + dx = b + t \Longrightarrow$

$$\mu_{max}(z) = \frac{z}{ax + dx} = \frac{z}{b + t} \quad ; \quad 0 \leq z \leq ax + dx$$

Si

$$\frac{1}{t^2} z^2 - 2\frac{b + t}{t^2} z + \frac{(b + t)^2}{t^2} = \frac{z}{b + t}$$

Operando obtenemos

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b}) = \frac{2(b+t)^2 + t^2 - t\sqrt{t^2 + 4(b+t)^2}}{2(b + t)^2}$$

Si

$$\frac{1}{(dx)^2} z^2 - 2\frac{ax + dx}{(dx)^2} z + \frac{(ax + dx)^2}{(dx)^2} = \frac{z}{ax + dx}$$

Operando, obtenemos

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}\, x) = \frac{2(ax+dx)^2 + (dx)^2 - dx\sqrt{(dx)^2 + 4(ax+dx)^2}}{2(ax + dx)^2}$$

4.3.6 c. COMPARACION

$\underset{\sim}{a}\, x \, \textcircled{\leq} \, \underset{\sim}{b}$ si se verifica

$$(dx)^2 - dx\sqrt{(dx) + 4(b+t)^2} \leq t^2 - t\sqrt{t + 4(b+t)^2}$$

4.3.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA.

$$\text{POSS}\ (\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b+t \leq a\,x - d'x \\ \left(\dfrac{ax - b - t - d'x}{d'x + t}\right)^2 & \text{si } ax > b \ \text{ y } b+t > ax - d'x \\ 1 & \text{si } ax \leq b \end{cases}$$

$$\text{POSS}\ (\underset{\sim}{b} \circledleq \underset{\sim}{a}\, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } ax + dx \leq b - t' \\ \left(\dfrac{b - ax - dx - t'}{dx + t'}\right)^2 & \text{si } b > ax \ \text{ y } ax + dx > b - t' \\ 1 & \text{si } b \leq ax \end{cases}$$

4.3.7 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b}$ si

$$\left(\frac{ax - b - t - d'x}{d'x + t}\right)^2 \geq \left(\frac{b - ax - dx - t'}{dx + t'}\right)^2$$

Luego

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad d'x + dx \geq -(t' + t)$$

Si $\underset{\sim}{a}\, x$ y $\underset{\sim}{b}$ son números difusos simétricos, obtenemos

$$\underset{\sim}{a}\, x \circledleq \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \qquad dx \geq -t$$

4.3.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

Aplicando la definición, obtenemos

$$
\mathrm{NEC}(\tilde{a}x \mathrel{\textcircled{$\leq$}} \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; b \leq ax - d'x \\[2ex] \dfrac{[ax-d'x-b+t']\,[(d'x)^2 - t'^2] + t'^2[t'^2 + (d'x)^2] - 2t'.d'x\sqrt{-M^2 + (d'x)^2 + t'^2}\;.\;M}{[t'^2 + (d'x)^2]^2} & \text{si } \begin{cases} b > ax - d'x \\ ax > b - t' \end{cases} \\[2ex] 1 & \text{si } \; ax \leq b - t' \end{cases}
$$

$M = ax - d'x - b - t'$

Análogamente

$$
\mathrm{NEC}(\tilde{b} \mathrel{\textcircled{$\leq$}} \tilde{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; ax \leq b - t' \\[2ex] \dfrac{[b-t'-ax+d'x]\,[t'^2 - (d'x)^2] + (d'x)^2[(d'x)^2 + t'^2] - 2d'x.t'\sqrt{-N^2 + t'^2 + (d'x)^2}\;.\;N}{[(d'x)^2 + t'^2]^2} & \text{si } \begin{cases} ax > b - t' \\ \quad y \\ b > ax - d'x \end{cases} \\[2ex] 1 & \text{si } \; b \leq ax - d'x \end{cases}
$$

$N = b - t' - ax + d'x$

4.3.8 a. COMPARACION

Decimos que $\tilde{a}x \mathrel{\textcircled{$\leq$}} \tilde{b}$ si $\mathrm{NEC}(\tilde{a}x \mathrel{\textcircled{$\leq$}} \tilde{b}) \geq \mathrm{NEC}(\tilde{b} \mathrel{\textcircled{$\leq$}} \tilde{a}x)$

Por lo que $\tilde{a}x \mathrel{\textcircled{$\leq$}} \tilde{b}$ si

$$
(d'x)^4 + 2d'x.t'\,(ax - d'x - b + t')\sqrt{-(ax-d'x-b+t')^2 + t'^2 + (d'x)^2} \leq t'^4
$$

4.4. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA POR LA IZQUIERDA CONVEXA POR LA DERECHA.

4.4.1. INDICE DE CHANG.

4.4.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.4.

$$F\,(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} \left[-\frac{1}{t'^2} z^3 + \frac{2b}{t'^2} z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t'^2}\right) z\right] dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} \left[\frac{1}{t^2} z^3 - \frac{2\,(b+t)}{t^2} z^2 + \frac{(b+t)^2}{t^2} z\right] dz$$

Operando obtenemos

$$F\,(\underset{\sim}{b}) = \frac{1}{3}\, b\,(2\,t' + t) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\, t^2 - t'^2\right)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$ tenemos

$$F\,(\underset{\sim}{b}) = b\,t - \frac{1}{6}\, t^2$$

4.4.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.4.

Análogamente al caso anterior, obtenemos

$$F\,(\underset{\sim}{a}x) = \frac{1}{3}\, ax\,(2\,d'x + dx) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\,(dx)^2 - (d'x)^2\right)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ obtenemos

$$F(\underset{\sim}{a}x) = ax.dx - \frac{1}{6}(dx)^2$$

4.4.1 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}x \,\textcircled{\le}\, \underset{\sim}{b} \qquad \text{si}$$

$$\frac{1}{3}ax(2d'x+dx) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(dx)^2 - (d'x)^2\right] \le \frac{1}{3}b(2t'+t) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}t^2 - t'^2\right)$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos:

$$\underset{\sim}{a}x \,\textcircled{\le}\, \underset{\sim}{b} \qquad \text{si} \quad ax.dx - \frac{1}{6}(dx)^2 \le b.t - \frac{1}{6}t^2$$

4.4.2. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.4.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.4.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \left[\int_{b-t'}^{b}\left[-\frac{1}{t'^2}z^3 + \frac{2b}{t'^2}z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t'^2}\right)z\right]dz + \right.$$

$$\left. + \int_{b}^{b+t}\left[\frac{1}{t^2}z^3 - \frac{2(b+t)}{t^2}z^2 + \frac{(b+t)^2}{t^2}z\right]dz\right] \Big/ \left[\int_{b-t'}^{b}\left[-\frac{1}{t'}z^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2b}{t'^2}z + \left(1 - \frac{b^2}{t'^2}\right)\right]dz + \int_{b}^{b+t}\left[\frac{1}{t^2}z^2 - \frac{2(b+t)}{t^2}z + \frac{(b+t)^2}{t^2}\right]dz\right]$$

Operando, obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{t^2 - 3t'^2}{4(2t'+t)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b - \frac{t}{6}$$

4.4.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.4.

Si $g(z) = z$

De manera análoga al caso anterior, obtenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{(dz)^2 - 3(d'x)^2}{4(2d'x + dx)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax - \frac{dx}{6}$$

4.4.2a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + \frac{(dx)^2 - 3(d'x)^2}{4(2d'x + dx)} \leq b + \frac{t^2 - 3t'^2}{4(2t'+t)}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos

$$\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 6ax - dx \leq 6b - t$$

4.4.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

Este índice coincide con el obtenido en 4.3.3. para números difusos con función de pertenncia parabólica convexa.

4.4.4. TERCER INDICE DE YAGER.

4.4.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.4.

Como

$$-\frac{1}{t'^2} z^2 + \frac{2b}{t'^2} z + 1 - \frac{b^2}{t'^2} = \alpha \Longrightarrow z_1 = b - t' \sqrt{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{t^2} z^2 - \frac{2(b+t)}{t^2} z + \frac{(b+t)^2}{t^2} = \alpha \Longrightarrow z_2 = b + t(1 - \sqrt{\alpha})$$

Tenemos

$$B^\alpha = [b - t'\sqrt{1-\alpha} \quad , \quad b + t(1 - \sqrt{\alpha})]$$

$$M(B^\alpha) = b - \frac{t'}{2}\sqrt{1-\alpha} + \frac{t}{2}(1 - \sqrt{\alpha})$$

Luego

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 \left[b - \frac{t'}{2}\sqrt{1-\alpha} + \frac{t}{2}(1-\sqrt{\alpha}) \right] d\alpha =$$

$$= b + \frac{1}{6}(t + 2t')$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{1}{2}t$$

4.4.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.4.

De manera análoga al caso anterior, tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{1}{6}(dx + 2d'x)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{1}{2}dx$$

4.4.4a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{a}x \circledless \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax + \frac{1}{6}(dx + 2d'x) \leq b + \frac{1}{6}(t + 2t')$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos:

$$\underset{\sim}{a}x \circledleq \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 2ax + dx \leq 2b + t$$

4.4.5. INDICE DE ADAMO.

Coincide con el obtenido en 4.3.5., para números difusos con función de pertenencia parabólica convexa.

4.4.6. METODO DE JAIN.

Coincide con el obtenido en 4.3.6., para números difusos con función de pertenencia parabólica convexa.

4.4.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA.

Aplicando la definición, obtenemos

$$\mathrm{POSS}\,(\underset{\sim}{a}x \circledleq \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b+t \leq ax - d'x \\ \dfrac{[ax-(b+t)]^2\,[t^2-(d'x)^2]+(d'x)^2\,[(d'x)^2+t^2]-2d'x.t\,[ax-b-t]\,\sqrt{-[ax-b-t]^2+(d'x)^2+t^2}}{[(d'x)^2+t^2]^2} & \text{si} \begin{cases} ax > b \\ \quad y \\ b+t > ax - d'x \end{cases} \\ 1 & \text{si} \quad ax \leq b \end{cases}$$

Análogamente

$$\mathrm{POSS}(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ax + dx \leq b-t' \\ \dfrac{[b-(ax+dx)]^2\,[(dx)^2-t'^2] + t'^2[t'^2+(dx)^2] - 2t'.dx\,[b-ax-dx]\sqrt{-[b-ax-dx]^2+t'^2+(dx)}}{[t'^2+(dx)^2]^2} & \text{si} \begin{cases} b > ax \\ \quad y \\ ax + dx > b-t' \end{cases} \\ 1 & \text{si} \quad b \leq ax \end{cases}$$

4.4.7.1. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $\mathrm{POSS}(\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}) \geq \mathrm{POSS}(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}x)$

Si $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos decimos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si

$$(ax-b)\,(t^2-(dx)^2)\,(ax-b-t+dx) \geq dx.t\,[\sqrt{-(ax-b-t)^2+(dx)^2+t^2}\,(-ax+b-t) + \sqrt{-(b-ax-dx)^2+t^2+(dx)^2}\,(ax-b+dx)]$$

4.4.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA.

Obtenemos el mismo resultado que para números difusos con función de pertenencia parabólica cóncava.

4.5. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA, CONVEXA POR LA IZQUIERDA Y CONCAVA POR LA DERECHA.

4.5.1. INDICE DE CHANG.

4.5.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUCNION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.5.

$$F(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} \left[\frac{1}{t'^2} z^3 - 2\,\frac{b-t'}{t'^2} z^2 + \frac{(b-t')^2}{t'^2} z\right] dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} \left[- \frac{1}{t^2} z^3 + \frac{2b}{t^2} z^2 + \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right) z\right] dz$$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = \frac{1}{3} b (t' + 2t) + \frac{1}{4} (t^2 - \frac{1}{3} t'^2)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = b t + \frac{1}{6} t^2$$

4.5.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.5.

De manera análoga al caso anterior, obtenemos:

$$F(\underset{\sim}{a}x) = \frac{1}{3} ax (d'x + 2 dx) + \frac{1}{4} \left((dx)^2 - \frac{1}{3} (d'x)^2\right)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos:

$$F(\underset{\sim}{a}x) = ax.dx + \frac{1}{6}(dx)^2$$

4.5.1 a. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{1}{3}\,ax\,(d'x+2dx) + \frac{1}{4}\left[(dx)^2 - \frac{1}{3}(d'x)^2\right] \leq \frac{1}{3}\,b\,(t'+2t) + \frac{1}{4}\left(t^2 - \frac{1}{3}t'^2\right)$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos:

$$\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax.dx + \frac{1}{6}(dx)^2 \leq b.t + \frac{1}{6}t^2$$

4.5.1. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.5.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.5.

Si $g(z) = z$

$$F(\underset{\sim}{b}) = \left[\int_{b-t'}^{b}\left[\frac{1}{t'^2}z^3 - 2\,\frac{b-t}{t'^2}z^2 + \frac{(b-t')^2}{t'^2}z\right]dz + \right.$$

$$\left. + \int_{b}^{b+t}\left[\frac{-1}{t^2}z^3 + \frac{2b}{t^2}z^2 + \left(1-\frac{b^2}{t^2}\right)z\right]dz\right] \Big/ \left[\int_{b-t'}^{b}\left[\frac{1}{t'^2}z^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\,\frac{b-t'}{t'^2}z + \frac{(b-t')^2}{t'^2}\right]dz + \int_{b}^{b+t}\left[-\frac{1}{t^2}z^2 + \frac{2b}{t^2}z + \left(1-\frac{b^2}{t^2}\right)\right]dz\right]$$

Operando, obtenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{3t^2 - t'^2}{4(t' + 2t)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{1}{6}\, t$$

4.5.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.5.

Si $g(z) = z$

De manera análoga al caso anterior, obtenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{3\,(dx)^2 - (d'x)^2}{4\,(d'x + 2\,dx)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{1}{6}\, dx$$

4.5.2 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + \frac{3\,(dx)^2 - (d'x)^2}{4\,(d'x + 2\,dx)} \leq b + \frac{3\,t^2 - t'^2}{4\,(t' + 2t)}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{ax}$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, obtenemos:

$$\underset{\sim}{ax} \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 6\ ax + dx \leq 6\ b + t$$

4.5.3. SEGUNDO INDICE SE YAGER

Este índice coincide con el 4.2.3., obtenido para números difusos con función de pertenencia parabólica cóncava.

4.5.4 TERCER INDICE DE YAGER.

4.5.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.5.

Como

$$\frac{1}{t'^2} z^2 - 2\frac{b-t'}{t'^2} z + \frac{(b-t')^2}{t'^2} = \alpha \Longrightarrow z_1 = b - t'\ (1 - \sqrt{\alpha})$$

$$-\frac{1}{t^2} z^2 + \frac{2b}{t^2} z + 1 - \frac{b^2}{t^2} = \alpha \Longrightarrow z_2 = b + t\sqrt{1-\alpha}$$

Tenemos

$$B^{\alpha} = [\, b - t'\ (1 - \sqrt{\alpha})\ ,\ b + t\sqrt{1-\alpha}\,]$$

Luego

$$M(B^{\alpha}) = b - \frac{t'}{2} + \frac{t'}{2}\sqrt{\alpha} + \frac{t}{2}\sqrt{1-\alpha}$$

Por lo tanto

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 \left[b - \frac{t'}{2} + \frac{t'}{2}\sqrt{\alpha} + \frac{t}{2}\sqrt{1-\alpha}\right] d\alpha =$$

$$= b + \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}t'\right)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, obtenemos:

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{1}{6}t$$

4.5.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.5.

De manera análoga al caso anterior, obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{1}{3}\left(dx - \frac{1}{2}d'x\right)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{1}{6}dx$$

4.5.4 a. COMPARACION

$$\underset{\sim}{ax} \, \textcircled{\leq} \, \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax + \frac{1}{3}\left(dx - \frac{1}{2} d'x\right) \leq b + \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2} t'\right)$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{ax}$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos:

$$\underset{\sim}{ax} \, \textcircled{\leq} \, \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad 6\, ax + dx \leq 6\, b + t$$

4.5.5. INDICE DE ADAMO.

Este índice coincide con el obtenido en 4.2.5. para números difusos con función de pertenencia parabólica cóncava.

4.5.6. METODO DE JAIN.

Coinciden los resultados con los obtenidos en 4.2.6., para números difusos con función de pertenencia parabólica cóncava.

4.5.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA.

Aplicando la definición obtenemos:

$$\mathrm{POSS}(\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b+t \leq ax-d'x \\ \dfrac{[ax-d'x-b]^2\,[(d'x)^2-t^2]+t^2[(d'x)^2+t^2]-2t.d'x\,[ax-d'x-b]\sqrt{-(ax-d'x-b)^2+(d'x)^2+t^2}}{[(d'x)^2+t^2]^2} & \text{si } \begin{cases} ax>b \\ \text{y} \\ b+t>ax-d'x \end{cases} \\ 1 & \text{si } ax \leq b \end{cases}$$

Análogamente

$$\mathrm{POSS}(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } ax+dx \leq b-t' \\ \dfrac{[b-t'-ax]^2[t'^2-(dx)^2]+(dx)^2[t'^2+(dx)^2]-2dx.t'[b-t'-ax]\sqrt{-(b-t'-ax)^2+t'^2+(dx)^2}}{[t'^2+(dx)^2]^2} & \text{si } \begin{cases} b>ax \\ \text{y} \\ ax+dx>b-t' \end{cases} \\ 1 & \text{si } b \leq ax \end{cases}$$

4.5.7.1. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $\mathrm{POSS}(\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}) \geq \mathrm{POSS}(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}x)$

Si $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, decimos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si

$$(ax - b)\ [(dx)^2 - t^2](ax - b - dx - t) \geq$$

$$\mp t.dx\ [(b - t - ax)\sqrt{-(b - t - ax)^2 + (dx)^2 + t^2} -$$

$$(ax - dx - b)\sqrt{-(ax - dx - b)^2 + (dx)^2 + t^2}]$$

4.5.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

El resultado coincide con el obtenido para números difusos con función de pertenencia parabólica convexa.

4.6. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCIÓN DE PERTENENCIA EXPONENCIAL.

4.6.1. INDICE DE CHANG.

4.6.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.6.

$$F(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} z\ \frac{q_1^{z-b} - q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}}\ dz + \int_{b}^{b+t} z\ \frac{q^{z-b} - q^{t}}{1 - q^{t}}\ dz$$

$$q_1 > 1 \qquad ; \qquad 0 < q < 1$$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = \frac{b}{Lq_1} - \frac{1}{(Lq_1)^2} + \left[\frac{1}{Lq_1} - b + \frac{t'}{2}\right] \frac{q_1^{-t'} \quad t'}{1 - q_1^{-t'}} -$$

$$- \frac{b}{Lq} + \frac{1}{(Lq)^2} + \left[\frac{1}{Lq} - b - \frac{t}{2}\right] \frac{q^t \quad t}{1 - q^t}$$

Si $\underset{\sim}{b}$ es un número difuso simétrico, obtenemos una expresión análoga, sustituyendo t' por t.

4.6.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.6.

$$F(\underset{\sim}{a}x) = \int_{ax-d'x}^{ax} z \, \frac{q_1^{\frac{z-ax}{x}} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} \, dz + \int_{ax}^{ax+dx} z \, \frac{q^{\frac{z-ax}{x}} - q^{d}}{1 - q^{d}} \, dz$$

$$q_1 > 1 \qquad ; \qquad 0 < q < 1$$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{a}x) = \frac{ax.x}{Lq_1} - \frac{x^2}{(Lq_1)^2} + \left[\frac{x}{Lq_1} + \frac{d'x}{2} - ax\right] \frac{q_1^{-d'} \quad d'x}{1 - q_1^{-d'}} -$$

$$- \frac{ax.x}{Lq} + \frac{x^2}{(Lq)^2} + \left[\frac{x}{Lq} - \frac{dx}{2} - ax\right] \frac{q^{d} \quad dx}{1 - q^{d}}$$

4.6.1 a. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{ax} \circledleq \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{ax.x}{Lq_1} - \frac{x^2}{(Lq)_1^2} + [\frac{x}{Lq_1} + \frac{d'x}{2} - ax] \frac{q_1^{-d'} \quad d'x}{1 - q_1^{-d'}} -$$

$$- \frac{ax.x}{Lq} + \frac{x^2}{(Lq)^2} + [\frac{x}{Lq} - \frac{dx}{2} - ax] \frac{q^d \quad dx}{1 - q^d} \leq$$

$$\frac{b}{Lq_1} - \frac{1}{(Lq_1)^2} + [\frac{1}{Lq_1} - b + \frac{t'}{2}] \frac{q_1^{-t'} \quad t'}{1 - q_1^{-t'}} -$$

$$- \frac{b}{Lq} + \frac{1}{(Lq)^2} + [\frac{1}{Lq} - b - \frac{t}{2}] \frac{q^t t}{1 - q^t}$$

$$q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

4.6.2. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.6.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.6.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = [\int_{b-t'}^{b} z \frac{q_1^{z-b} - q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} z \frac{q^{z-b} - q^t}{1 - q^t} dz] \Big/ [\int_{b-t'}^{b} \frac{q_1^{z-b} - q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} \frac{q^{z-b} - q^{t}}{1 - q^{t}} \, dz \;]$$

$$q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

Operando, obtenemos

$$F_1(b) = [\frac{b}{Lq_1} - \frac{1}{(Lq_1)^2} + \left(\frac{1}{Lq_1} - b + \frac{t'}{2}\right) \frac{q_1^{-t'}\; t'}{1 - q_1^{-t'}} -$$

$$- \frac{b}{L\,q} + \frac{1}{(L\,q)^2} + \left(\frac{1}{L\,q} - b - \frac{t}{2}\right) \frac{q^{t}\; t}{1 - q^{t}} \;] \; \Big/ [\frac{1}{Lq_1} - \frac{1}{L\,q} -$$

$$- \frac{t'\; q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} - \frac{t\; q^{t}}{1 - q^{t}} \;]$$

$$q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

4.6.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.6.

De manera análoga al caso anterior obtenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = [\frac{ax}{Lq_1} - \frac{x}{(Lq_1)^2} + \left(\frac{x}{L\,q_1} + \frac{d'x}{2} - ax\right) \frac{q_1^{-d'}\; d'}{1 - q_1^{-d'}} -$$

$$- \frac{ax}{Lq} + \frac{x}{(Lq)^2} + \left(\frac{x}{L\,q} - \frac{dx}{2} - ax\right) \frac{q^{d}\; d}{1 - q^{d}} \;] \; \Big/ [\frac{1}{Lq_1} - \frac{1}{Lq} -$$

$$- \frac{q_1^{-d'} d'}{1 - q_1^{-d'}} - \frac{q^d\ d}{1 - q^d}] \quad , \text{ siendo } \quad g(z) = z$$

$$q_1 > 1 \qquad ; \qquad 0 < q < 1$$

4.6.2 a. COMPARACION

Diremos que $\tilde{a}x \circledS \tilde{b}$ si $F_1(\tilde{a}x) \leq F_1(\tilde{b})$

La expresión que obtendríamos al sustituir los resultados obtenidos en 4.6.2.1. y 4.6.2.2. sería bastante complicada.

4.6.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

No se puede obtener, al no poder calcular z en la expresión

$$\frac{q^{z-b} - q^t}{1 - q^t} = z \qquad ; \qquad 0 < q < 1$$

4.6.4. TERCER INDICE DE YAGER.

4.6.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.6.

Como

$$\frac{q_1^{z-b} - q_1^{t'}}{1 - q_1^{t'}} = \alpha \Longrightarrow z_1 = b + \log_{q_1} [q_1^{-t'} + \alpha (1 - q_1^{-t'})]$$

$$q_1 > 1$$

$$\frac{q^{z-b} - q^t}{1 - q^t} = \alpha \Longrightarrow \quad z_2 = b + \log_q \; [q^t + \quad (1 - q^{-t})]$$

$$0 < q < 1$$

tenemos

$$B^\alpha = [b + \log_{q_1} \; [q_1^{-t'} + \alpha(1 - q_1^{-t'})] \; , \; b + \log_q \; [q^t + \alpha(1 - q^t)]]$$

Entonces

$$M(B^\alpha) = b + \frac{1}{2} \log_{q_1} [q_1^{-t'} + \alpha(1 - q_1^{-t'})] + \frac{1}{2} \log_q \; [q^t + \alpha(1 - q^t)]$$

Luego

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 (b + \frac{1}{2} \log_{q_1} [q_1^{-t'} + \alpha(1 - q_1^{-t'})] + \frac{1}{2} \log_q [q^t + \alpha(1 - q^t)]) \, d\alpha =$$

$$= b + \frac{1}{2} [\frac{1}{Lq_1} - \frac{t' \, q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} + \frac{1}{Lq} + \frac{t \, q^t}{1 - q^t}]$$

$$q_1 > 1 \qquad\qquad 0 < q < 1$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$ obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{1}{2} [\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} + t \, \frac{q^t - q_1^{-t}}{(1 - q^t)\,(1 - q_1^{-t})}]$$

$$q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

4.6.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.6.

$$\frac{q_1^{\frac{z-ax}{x}} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} = \alpha \Longrightarrow z_1 = ax + x \log_{q_1} [q_1^{-d'} + \alpha (1 - q_1^{-d'})]$$

$$q_1 > 1$$

$$\frac{q^{\frac{z-ax}{x}} - q_1^{d}}{1 - q_1^{d}} = \alpha \Longrightarrow z_2 = ax + x \log_q [q^d + \alpha (1 - q^d)]$$

$$0 < q < 1$$

Luego

$$(Ax)^\alpha = [ax + x \log_{q_1} (q_1^{-d'} + \alpha [1 - q_1^{-d'}]) , ax + x \log_q (q^d + \alpha [1 - q^d])]$$

Tenemos que

$$M(A x)^\alpha = ax + \frac{1}{2} [\log_{q_1} (q_1^{-d'} + \alpha [1 - q_1^{-d'}]) + \log_q (q^d + \alpha [1 - q^d])]$$

Por lo tanto

$$F_3 (\underset{\sim}{a}x) = \int_0^1 ax + \frac{x}{2} [\log_{q_1} (q_1^{-d'} + \alpha [1 - q_1^{-d'}]) + \log_q (q^d + \alpha [1 - q^d])] \, d\alpha =$$

$$= ax + \frac{x}{2} [\frac{1}{L q_1} - \frac{d' q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} + \frac{1}{L q} + \frac{d q^d}{1 - q^d}]$$

$$q_1 > 1 \qquad 0 < q < 1$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{x}{2}\left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} + \frac{d\,(q^d - q_1^{-d})}{(1-q_1^{-d})\,(1-q^d)}\right]$$

$$q_1 > 0 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

4.6.4 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \circledcirc{\lesssim} \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + \frac{x}{2}\left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} - \frac{d'\,q_1^{-d'}}{1-q_1^{-d'}} + \frac{d\,q^d}{1-q^d}\right] \leq$$

$$b + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{L\,q} - \frac{t'\,q_1^{-t'}}{1-q_1^{-t'}} + \frac{t\,q^t}{1-q^t}\right]$$

$$q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, obtenemos

$\underset{\sim}{a}x \lesssim \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + \frac{x}{2}\left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} + \frac{d\,(q^d - q_1^{-d})}{(1-q_1^{-d})(1-q^d)}\right] \leq$$

$$b + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{L\,q} + \frac{t\,(q^t - q_1^{-t})}{(1-q^t)(1-q_1^{-t})}\right]$$

$$q_1 > 0 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

4.6.5. INDICE DE ADAMO

4.6.5.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.6.

Como

$$\frac{q^{z-b} - q^t}{1 - q^t} \geq \alpha \Longrightarrow z \leq b + \log_q [q^t + \alpha (1 - q^t)]$$

$$0 < q < 1$$

tenemos que

$$F_\alpha(\underset{\sim}{b}) = b + \log_q [q^t + \alpha (1 - q^t)] \quad ; \quad 0 < q < 1$$

$$\alpha \text{ dado} , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.6.5.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.6.

Como

$$\frac{q^{\frac{z-ax}{x}} - q^d}{1 - q^d} \geq \alpha \Longrightarrow z \leq ax + x \log_q [q^d + \alpha (1 - q^d)]$$

$$0 < q < 1$$

Luego

$$F_\alpha(\underset{\sim}{a}x) = ax + x \log_q [q^d + \alpha (1 - q^d)]$$

$$0 < q < 1$$

4.6.5 a. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + x \log_q [q^d + \alpha(1-q^d)] \leq b + \log_q [q^t + \alpha(1-q^t)]$$

$$0 < q < 1 \quad ; \quad \alpha \text{ dado} \quad ; \quad \alpha \in [0,1]$$

4.6.6. METODO DE JAIN.

No se puede aplicar a números difusos con función de pertenencia exponencial, al no poder despejar z de la expresión

$$\left(q^{\frac{z-ax}{x}} - q^d\right) \Big/ (1 - q^d) = z \Big/ (b + t) \quad ; \quad 0 < q < 1$$

Análogamente en los restantes casos.

4.6.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA

No se puede aplicar a números difusos con función de pertenencia exponencial, al no poder despejar z de la expresión:

$$\left(q^{z-b} - q^t\right) \Big/ (1 - q^t) = \left(q_1^{\frac{z-ax}{x}} - q_1^{-d'}\right) \Big/ (1 - q_1^{-d'}) \quad ;$$

$$0 < q < 1 \quad ; \quad q_1 > 1$$

4.6.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

Sólamente se puede determinar en el caso de verificarse que $\sum_{j=1}^{n} x_j = x = 1$. Entonces, si

$$1 - \frac{q_1^{z-b} - q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} = \frac{q_1^{z-ax} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} \qquad q_1 > 1$$

Operando, obtenemos

$$q_1^{z} = \frac{q_1^{-t'-d'} - 1}{-q_1^{-b} + q_1^{-b-d'} - q_1^{-ax} + q_1^{-ax-t'}} = \frac{1 - q_1^{-t'-d'}}{q_1^{-b}(1 - q_1^{-d'}) + q_1^{-ax}(1 - q_1^{-t'})}$$

Por lo tanto

$$NEC\,(\tilde{a}x \text{\textcircled{$\lesssim$}} \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq ax-d'x \\ \dfrac{q_1^{-ax} - q_1^{-b-d'}}{q_1^{-b}(1 - q_1^{-d'}) + q_1^{-ax}(1 - q_1^{-t'})} & \text{si } b > ax-d'x \text{ y } ax > b-t' \\ 1 & \text{si } ax \leq b-t' \end{cases}$$

De manera análoga, tenemos

$$NEC\,(\tilde{b} \text{\textcircled{$\lesssim$}} \tilde{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } ax \leq b-t' \\ \dfrac{q_1^{-b} - q_1^{-ax-t'}}{q_1^{-ax}(1 - q_1^{-t'}) + q_1^{-b}(1 - q_1^{-d'})} & \text{si } ax > b-t' \text{ y } b > ax-d'x \\ 1 & \text{si } b < ax-d'x \end{cases}$$

4.6.8 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{q_1^{-ax} - q_1^{-b-d'}}{q_1^{-b}\,(1-q_1^{-d'}) + q_1^{-ax}(1-q_1^{-t'})} \geq \frac{q_1^{-b} - q_1^{-ax-t'}}{q_1^{-ax}(1-q_1^{-t'}) + q_1^{-b}\,(1-q_1^{-d'})} \quad , \quad q_1 > 1$$

Por lo tanto

$\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $ax \leq b + \log_{q_1}(1 + q_1^{-t'}) - \log_{q_1}(1 + q_1^{-d'})$

Si $t' = d'$ obtenemos

$\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $ax \leq b$

4.7. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA LOGARITMICA

4.7.1. INDICE DE CHANG.

4.7.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.7.

$$F(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} z \, \frac{\log_{q_1}(z - b + t' + 1)}{\log_{q_1}(t' + 1)} \, dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} z \, \frac{\log_{q}(1 + b + t - z)}{\log_{q}(t + 1)} \, dz$$

$q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = -\frac{t'^2}{2} - t' + bt' + \frac{t'(3t'+2-4b)}{4L(t'+1)} + 2b +$$

$$+ \frac{t^2}{2} + t + bt - \frac{t(3t+2+4b)}{4L(t+1)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = 2b(t+1) - \frac{2bt}{L(t+1)}$$

4.7.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.7.

$$F(\underset{\sim}{a}x) = \int_{ax-d'x}^{ax} z \frac{\log_{q_1}\left(\frac{z-ax}{x} + d' + 1\right)}{\log_{q_1}(d'+1)} dz +$$

$$+ \int_{ax}^{ax+dx} z \frac{\log_q\left(d + 1 + \frac{ax-z}{x}\right)}{\log_q(d+1)} dz$$

$$q_1 > 1 \qquad ; \qquad 0 < q < 1$$

Operando, obtenemos

$$F(\underset{\sim}{a}x) = -\frac{(d'x)^2}{2} + ax.d'x - d'x.x + \frac{1}{2\,L\,(d'+1)}\left[\frac{3}{2}(d'x)^2 - \right.$$

$$\left. - 2\,ax.d'x + x.d'x\right] + 2\,ax.x + \frac{(dx)^2}{2} + ax.dx + dx.x +$$

$$+ \frac{1}{2\,L\,(d+1)}\left[-\frac{3}{2}(dx)^2 - 2\,ax.dx - x.dx\right]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, tenemos

$$F(\underset{\sim}{a}x) = 2\,ax.(dx + x) - \frac{2\,ax.dx}{L\,(d+1)}$$

4.7.1a. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}$ si

$$-\frac{(d'x)^2}{2} + ax.d'x - d'x.x + \frac{1}{2\,L\,(d'+1)}\left[\frac{3}{2}(d'x)^2 - \right.$$

$$\left. - 2\,ax.d'x + x.d'x\right] + 2\,ax.x + \frac{(dx)^2}{2} + ax.dx +$$

$$+ \frac{1}{2\,L\,(d+1)}\left[-\frac{3}{2}(dx)^2 - 2\,ax.dx - x.d\right] \leq -\frac{t'^2}{2} -$$

$$- t' + bt' + \frac{t'(3\,t' + 2 - 4b)}{4\,L\,(t'+1)} + 2\,b + \frac{t^2}{2} + t + b\,t -$$

$$- \frac{t\,(3t + 2 + 4\,b)}{4\,L\,(t+1)}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos:

$$\underset{\sim}{a}x \; \textcircled{\le} \; \underset{\sim}{b} \qquad \text{si}$$

$$ax\,(dx + x) - \frac{ax.dx}{L(d+1)} \le b\,(t+1) - \frac{b\,t}{L\,(t+1)}$$

4.7.2. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.7.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.7.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \Big[\int_{b-t'}^{b} z \, \frac{\log_{q_1} (z - b + t' + 1)}{\log_{q_1} (t' + 1)} \, dz +$$

$$\int_{b}^{b+t} z \, \frac{\log_q (1 + b + t - z)}{\log_q \; (t+1)} \, dz \Big] \Big/ \Big[\int_{b-t'}^{b} \frac{\log_{q_1} (z - b + t' + 1)}{\log_{q_1} (t' + 1)} \, dz +$$

$$+ \int_{b}^{b+t} \frac{\log_q (1 + b + t - z)}{\log_q (t+1)} \, dz \Big] \quad , \quad q_1 > 1 \quad , \quad 0 < q < 1$$

Operando obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \Big[- \frac{t'^2}{2} - t' + bt' + \frac{t'\,(3t' + 2 - 4b)}{4L\,(t' + 1)} + 2\,b +$$

$$+ \frac{t^2}{2} + t + bt - \frac{t\,(3t + 2 + 4b)}{4L(t+1)} \,] \Big/ [\, t' - \frac{t'}{L(t'+1)} + 2 +$$

$$+ t - \frac{t}{L(t+1)} \,]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.7.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.7.

Si $g(z) = z$ de manera análoga al caso anterior, tenemos:

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = [\, - \frac{d'^2 x}{2} + ax.d' - d'x + \frac{1}{2L(d'+1)} (\frac{3}{2} d'^2 x - 2.ax.d' +$$

$$+ d'x) + 2.ax + \frac{d^2 x}{2} + ax.d + dx - \frac{1}{2L(d+1)} (\frac{3}{2} d^2 x + 2.ax.d +$$

$$+ dx) \,] \Big/ [\, d' - \frac{d'}{L(d'+1)} + 2 + d - \frac{d}{L(d+1)} \,]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico es decir si $d'x = dx$ obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax$$

4.7.2 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \circledleq \underset{\sim}{b}$ si $F_1(\underset{\sim}{a}x) \leq F_1(\underset{\sim}{b})$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos que:

$$\underset{\sim}{a}x \circledleq \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax \leq b$$

4.7.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER.

El segundo índice Yager para números difusos con función de pertenencia logarítmica no se puede calcular, al no poder despejar z en las expresión

$$\log_q \left(\frac{ax + dx + x - z}{x} \right) \Big/ \log_q (d+1) = z \quad ; \quad 0 < q < 1$$

4.7.4. TERCER INDICE DE YAGER

4.7.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.7.

$$\frac{\log_{q_1} (z - b + t' + 1)}{\log_{q_1} (t + 1)} = \alpha \implies z_1 = b - t' - 1 + (t'+1)^{\alpha}$$

$$q_1 > 1$$

$$\frac{\log_q (-z+b+t+1)}{\log_q (t+1)} = \alpha \implies z_2 = b+t+1-(t+1)^{\alpha}$$

$$0 < q < 1$$

Tenemos que

$$B^{\alpha} = [b - t' - 1 + (t'+1)^{\alpha} \quad , \quad b + t + 1 - (t+1)^{\alpha}]$$

Por lo tanto

$$M(B^{\alpha}) = b + \frac{t - t'}{2} + \frac{1}{2} [(t'+1)^{\alpha} - (t+1)^{\alpha}]$$

Luego

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 [b + \frac{t-t'}{2} + \frac{1}{2} \quad (t'+1)^{\alpha} - (t+1)^{\alpha}]] \, d\alpha =$$

$$= b + \frac{t-t'}{2} + \frac{t'}{2L(t'+1)} - \frac{t}{2L(t+1)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.7.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.7.

De manera análoga al caso anterior, obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + \frac{d-d'}{2}x + \frac{x}{2}\left[\frac{d'}{L(d'+1)} - \frac{d}{L(d+1)}\right]$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax$$

4.7.4 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \textcircled{\le} \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + \frac{d-d'}{2}x + \frac{x}{2}\left[\frac{d'}{L(d'+1)} - \frac{d}{L(d+1)}\right] \le$$

$$\le b + \frac{t-t'}{2}x + \frac{t'}{2L(t'+1)} - \frac{t}{2L(t+1)}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos que:

$$\underset{\sim}{a}x \textcircled{\le} \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax \le b$$

4.7.5. INDICE DE ADAMO.

4.7.5.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.7.

$$\frac{\log_q (1 + b + t - z)}{\log_q (1 + t)} \geq \alpha \Longrightarrow z \leq 1 + b + t - 1\ (1+t)^{\alpha}$$

$$0 < q < 1$$

Por lo tanto

$$F_{\alpha} (\underset{\sim}{b}) = 1 + b + t - (1+t)^{\alpha}$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.7.5.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.7.

De manera análoga al caso anterior obtenemos

$$F_{\alpha} (\underset{\sim}{a}x) = ax + dx + x - x\ (1-d)^{\alpha}$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.7.5 a. COMPARACION

Decimos que $\underset{\sim}{a}x \ (\leq)\ \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + dx + x - x\ (1+d)^{\alpha} \leq 1 + b + t - (1+t)^{\alpha}$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.7.6. METODO DE JAIN.

No se puede calcular en ninguno de los tres casos posibles, al no poder despejar z de la expresión

$$\log_q \left(\frac{ax + dx + x - z}{x} \right) \Big/ \log_q (d+1) = \frac{z}{b+t} \;; \quad 0 < q < 1$$

Analogamente para los restantes casos.

4.7.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA

Si

$$\frac{\log_q (-z+b+t+1)}{\log_q (t+1)} = \frac{\log_{q_1} \left(\frac{z - ax + d'x + x}{x} \right)}{\log_{q_1} (d' + 1)}$$

$$0 < q < 1 \quad ; \quad q_1 > 1$$

Si $d' = t$ operando, obtenemos

$$\mathrm{POSS}(\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b + t \leq ax - d'x \\ \dfrac{\log_q \left(\dfrac{-ax + b}{x + 1} + t + 1 \right)}{\log_q (t + 1)} & \text{si } ax > b \text{ y } b+t > ax-d'x \\ 1 & \text{si } ax \leq b \end{cases}$$

Si

$$\frac{\log_q \left(\frac{ax + dx + x - z}{x}\right)}{\log_q (d + 1)} = \frac{\log_{q_1} (z - b + t' + 1)}{\log_{q_1} (t' + 1)}$$

$$0 < q < 1 \quad ; \quad q_1 > 1$$

Si $t' = d$ operando obtenemos

$$\text{POSS}(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{ax}) = \begin{cases} 0 & \text{si } ax + dx \leq b - t' \\ \dfrac{\log_q \left(\frac{ax - b}{x + 1} + d + 1\right)}{\log_q (d + 1)} & \text{si } b > ax \text{ y } ax + dx > b - t' \\ 1 & \text{si } b \leq ax \end{cases}$$

4.7.7 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{ax} \circledS \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{\log_q \left(\frac{-ax + b}{x + 1} + t + 1\right)}{\log_q (t + 1)} \geq \frac{\log_q \left(\frac{ax - b}{x + 1} + dx + 1\right)}{\log_q (d + 1)}$$

$$0 < q < 1$$

Si $d = t$, operando tenemos:

$\underset{\sim}{ax} \circledS \underset{\sim}{b}$ si $ax \leq b$

4.7.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA

Sea

$$1 - \frac{\log_{q_1} (z - b + t' + 1)}{\log_{q_1} (t' + 1)} = \frac{\log_{q_1} \left(\frac{z - ax + d'x + x}{x} \right)}{\log_{q_1} (d' + 1)}$$

$$q_1 > 1$$

Si $t' = d'$, operando y notando

$$D = [ax - b - (t'+1)(x-1)]^2 + 4x(t'+1)$$

$$D' = [b - ax - (t'+1)(x-1)]^2 + 4x(t'+1)$$

tenemos:

$$\mathrm{NEC}\ (\underset{\sim}{a}x \circledS \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq ax - t'x \\ \dfrac{L \left(\dfrac{b - ax + (t'+1)(x-1) + \sqrt{D}}{2x} \right)}{L(t' + 1)} & \text{si } \begin{cases} b > ax - t'x \\ y \\ ax > b - t' \end{cases} \\ 1 & \text{si } ax \leq b - t' \end{cases}$$

$$\mathrm{NEC}\ (\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } ax \leq b - t' \\ \dfrac{L \left(\dfrac{ax - b + (t'+1)(x-1) + \sqrt{D'}}{2x} \right)}{L(t' + 1)} & \text{si } \begin{cases} ax > b - t' \\ y \\ b > ax - t'x \end{cases} \\ 1 & \text{si } b \leq ax - t'x \end{cases}$$

4.7.8 a. COMPARACION

Diremos que

$\underset{\sim}{a}x \circledcirc{\leq} \underset{\sim}{b}$ cuando Nec $(\underset{\sim}{a}x \circledcirc{\leq} \underset{\sim}{b}) \geq$ Nex $(\underset{\sim}{b} \circledcirc{\leq} \underset{\sim}{a}x)$

Operando tenemos que

$\underset{\sim}{a}x \circledcirc{\leq} \underset{\sim}{b}$ si $ax \leq b$

4.8. NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA SENO.

4.8.1. INDICE DE CHANG.

4.8.1.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.8.

$$F(\underset{\sim}{b}) = \int_{b-t'}^{b} z \, \frac{\text{sen}\,(z-b+t')}{\text{sen}\,t'} \, dz + \int_{b}^{b+t} z \, \frac{\text{sen}\,(z-b-t)}{\text{sen}\,(-t)} \, dz$$

Operando obtenemos

$$F(\underset{\sim}{b}) = -\,b \,\text{cotg}\, t' + \frac{b-t'}{\text{sen}\,t'} - \frac{b+t}{\text{sen}\,(-t)} + b \,\text{cotg}\,(-t)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$, tenemos:

$$F(\underset{\sim}{b}) = -\,2\,b \,\text{cotg}\, t + \frac{2\,b}{\text{sen}\,t}$$

4.8.1.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.8.

$$F(\underset{\sim}{ax}) = \int_{ax-d'x}^{ax} z \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z - ax + d'x}{x}\right)}{\operatorname{sen} d'} dz +$$

$$+ \int_{ax}^{ax+dx} z \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z - ax - dx}{x}\right)}{\operatorname{sen} d'} dz$$

Operando obtenemos

$$F(\underset{\sim}{ax}) = - ax.x \operatorname{cotg} d' + \frac{(ax-d'x)\,x}{\operatorname{sen} d'} - \frac{(ax+dx)\,x}{\operatorname{sen} (-d)} + ax.x \operatorname{cotg} (-d)$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{ax}$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$, tenemos:

$$F(\underset{\sim}{ax}) = 2.ax.x \operatorname{cotg} d + \frac{2.ax.x}{\operatorname{sen} d}$$

4.8.1 a. COMPARACION.

Diremos que $\underset{\sim}{ax} \leq \underset{\sim}{b}$ si

$$-ax.x \operatorname{cotg} d' + \frac{(ax-d'x)\,x}{\operatorname{sen} d'} - \frac{(ax+dx)\,x}{\operatorname{sen} (-d)} + ax.x.\operatorname{cotg} (-d) \leq$$

$$\leq - b \operatorname{cotg} t' + \frac{b-t'}{\operatorname{sen} t'} - \frac{b+t}{\operatorname{sen} (-t)} + b \operatorname{cotg} (-t)$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{ax}$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos

$$\underset{\sim}{ax} \circledcirc\!\!\leq \underset{\sim}{b} \quad \text{si}$$

$$- ax \, . \, x \cot g \, d + \frac{ax.x}{\operatorname{sen} d} \leq - b \cot g \, t + \frac{b}{\operatorname{sen} t}$$

Si además se verifica que $d = t$, tenemos $\underset{\sim}{ax} \circledcirc\!\!\leq \underset{\sim}{b}$ si $ax.x \leq b$

4.8.2. PRIMER INDICE DE YAGER.

4.8.2.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.8.

Si $g(z) = z$

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = \left[\int_{b-t'}^{b} z \frac{\operatorname{sen}(z-b+t')}{\operatorname{sen} t'} dz + \right.$$

$$\left. + \int_{b}^{b+t} z \frac{\operatorname{sen}(z-b-t)}{\operatorname{sen}(-t)} dz \right] \Big/ \left[\int_{b-t'}^{b} \frac{\operatorname{sen}(z-b+t')}{\operatorname{sen} t'} dz + \right.$$

$$\left. + \int_{b}^{b+t} \frac{\operatorname{sen}(z-b-t)}{\operatorname{sen}(-t)} dz \right]$$

Operando obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b - \frac{\dfrac{t'}{\text{sen} - t'} + \dfrac{t}{\text{sen }(-t)}}{-\text{cotg}\, t' + \dfrac{1}{\text{sen}\, t'} - \dfrac{1}{\text{sen}\,(-t)} + \text{cotg }(-t)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$ tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.8.2.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.8.

De manera análoga al caso anterior obtenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax - \frac{x\left(\dfrac{d'}{\text{sen } d'} + \dfrac{d}{\text{sen }(-d)}\right)}{-\text{ cotg } d' + \dfrac{1}{\text{sen } d'} - \dfrac{1}{\text{sen }(-d)} + \text{cotg }(-d)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ tenemos

$$F_1(\underset{\sim}{a}x) = ax$$

4.8.2 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \textcircled{\le} \underset{\sim}{b}$ si

$$ax - \frac{x\left(\frac{d'}{\text{sen } d'} + \frac{d}{\text{sen }(-d)}\right)}{-\text{cotg } d' + \frac{1}{\text{sen } d'} - \frac{1}{\text{sen}(-d)} + \text{cotg}(-d)} \le b - \frac{\frac{t'}{\text{sen } t'} + \frac{t}{\text{sen}(-t)}}{-\text{cotg } t' + \frac{1}{\text{sen } t'} - \frac{1}{\text{sen}(-t)} + \text{cotg}(-}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos obtenemos

$$\underset{\sim}{a}x \textcircled{\le} \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax \le b$$

4.8.3. SEGUNDO INDICE DE YAGER

No se puede calcular al no poder despejar z en la expresión

$$\text{sen}\left(\frac{z-ax-dx}{x}\right) \bigg/ \text{sen }(-d) = z$$

4.8.4. TERCER INDICE DE YAGER

4.8.4.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.8.

Como

$$\frac{\operatorname{sen}(z-b+t')}{\operatorname{sen} t'} = \alpha \Longrightarrow z_1 = b - t' + \operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen} t')$$

$$\frac{\operatorname{sen}(z-b-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \alpha \Longrightarrow z_2 = b + t + \operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen}(-t))$$

Por lo tanto

$$B^{\alpha} = [\, b-t'+\operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen} t') \;,\; b+t+\operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen}(-t)) \,]$$

Luego

$$M(B^{\alpha}) = b + \frac{1}{2}(t-t') + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen} t') + \operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen}(-t))]$$

Entonces:

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = \int_0^1 (b+\frac{1}{2}(t-t') + \frac{1}{2}[\operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen} t') + \operatorname{arc\,sen}(\alpha \operatorname{sen}(-t)])d\alpha$$

Operando, tenemos

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b + \frac{\cos t'-1}{2 \operatorname{sen} t'} + \frac{\cos(-t) - 1}{\operatorname{sen}(-t)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{b}$ es simétrico, es decir si $t' = t$ nos queda

$$F_3(\underset{\sim}{b}) = b$$

4.8.4.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.8.

De manera análoga al caso anterior obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax + x\,\frac{\cos d'-1}{2\,\mathrm{sen}\,d'} + x\,\frac{\cos(-d)-1}{2\,\mathrm{sen}\,(-d)}$$

Si el número difuso $\underset{\sim}{a}x$ es simétrico, es decir si $d'x = dx$ obtenemos

$$F_3(\underset{\sim}{a}x) = ax$$

4.8.4 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + x\,\frac{\cos d' - 1}{2\,\mathrm{sen}\,d'} + x\,\frac{\cos(-d) - 1}{2\,\mathrm{sen}\,(-d)} \leq$$

$$b + \frac{\cos t'-1}{2\,\mathrm{sen}\,t'} + \frac{\cos(-t) - 1}{2\,\mathrm{sen}\,(-t)}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}x$ y $\underset{\sim}{b}$ son simétricos, tenemos

$$\underset{\sim}{a}x \textcircled{\leq} \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad ax \leq b$$

4.8.5. INDICE DE ADAMO

4.8.5.1. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA DEL TIPO 1.8.

Como

$$\frac{\operatorname{sen}(z-b-t)}{\operatorname{sen}(-t)} \geq \alpha \Longrightarrow z \leq b + t + \operatorname{arc\,sen}\,[\alpha \operatorname{sen}(-t)]$$

tenemos

$$F_\alpha(\underset{\sim}{b}) = b + t + \operatorname{arc\,sen}\,[\alpha \operatorname{sen}(-t)]$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.8.5.2. PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA OBTENIDA EN EL TEOREMA 2.8.

De manera analoga al caso anterior , obtenemos

$$F_\alpha(\underset{\sim}{a}x) = ax + dx + x \operatorname{arc\,sen}[\alpha \operatorname{sen}(-d)]$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.8.5a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \; \textcircled{\leq} \; \underset{\sim}{b}$ si

$$ax + dx + \operatorname{arc\,sen}[\alpha \operatorname{sen}(-d)] \leq b + t + \operatorname{arc\,sen}\,[\alpha \operatorname{sen}(-t)]$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

4.8.6. METODO DE JAIN

No se puede obtener, para números difusos con función de pertenencia del tipo seno, al no poder despejar z en la expresión:

$$\text{sen}\left(\frac{z-ax-dx}{x}\right) \Big/ \text{sen}\,(-d) = \frac{z}{b+t}$$

Analogamente para los restantes casos

4.8.7. GRADO DE POSIBILIDAD DE DOMINANCIA

Unicamente se puede determinar en el caso de verificarse que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. Si es así, obtenemos

$$\text{POSS}\,(\tilde{a}x \leq \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b+t \leq ax-d'x \\ \dfrac{\text{sen}\,(-ax + d' + b + t)}{\sqrt{\text{sen}^2(-t)+\text{sen}^2 d'-2\,\text{sen}(-t)\text{sen}\,d'\cos(-ax+d'+b+t)}} & \text{si } \begin{cases} ax > b \\ y \\ b+t > ax-d'x \end{cases} \\ 1 & \text{si } ax \leq b \end{cases}$$

$$\text{POSS}\,(\tilde{b} \leq \tilde{a}x) = \begin{cases} 0 & \text{si } ax+dx \leq b-t' \\ \dfrac{\text{sen}\,(-b + t' + ax + d)}{\sqrt{\text{sen}^2(-d)+\text{sen}^2 t'-2\,\text{sen}(-d)\text{sen}\,t'\cos(-b+t'+ax+d)}} & \text{si } \begin{cases} b > ax \\ y \\ ax+dx > b-t \end{cases} \\ 1 & \text{si } b \leq ax \end{cases}$$

4.8.7 a. COMPARACION

Diremos que $\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{\operatorname{sen}(-ax + d' + b + t)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(-t)+\operatorname{sen}^2 d' - 2\operatorname{sen}(-t)\operatorname{sen} d' \cos(-ax+d'+b+t)}} \geq$$

$$\frac{\operatorname{sen}(-b + t' + ax + d)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(-d)+\operatorname{sen}^2 t' - 2\operatorname{sen}(-d)\operatorname{sen} t' \cos(-b+t'+ax+d)}}$$

Si $d' = d = t' = t$ y $\operatorname{sen} d > 0$ diremos que $\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b}$ cuando

$$\frac{\operatorname{sen}(-ax + b + 2d)}{\sqrt{1 + \cos(-ax + b + 2d)}} \geq \frac{\operatorname{sen}(-b + ax + 2d)}{\sqrt{1 + \cos(-b + ax + 2d)}}$$

4.8.8. GRADO DE NECESIDAD DE DOMINANCIA.

Solamente se puede determinar en el caso de ser $\sum_{j=1}^{n} x_j = x = 1$. Si es así y $d' = t'$, tenemos:

$$\operatorname{Nec}(\underset{\sim}{a}\, x \leq \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq ax - t' \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(ax-b)\sqrt{-\operatorname{sen}^2 t' + 2\,[1+\cos(ax-b)]}}{2 \operatorname{sen} t'\,[1+\cos(ax-b)]} & \text{si } \begin{cases} b > ax - t' \\ \text{y} \\ ax < b - t' \end{cases} \\ 1 & \text{si } ax \leq b - t' \end{cases}$$

Análogamente:

$$\mathrm{Nec}\,(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}\, x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ax \leq b - t' \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(b-ax)\sqrt{-\operatorname{sen}^2 t' + 2\,[\,1+\cos(ax-b)]}}{2\operatorname{sen} t'\,[\,1 + \cos(ax-b)]} & \text{si} \begin{cases} ax > b - t' \\ \quad y \\ b > ax - t' \end{cases} \\ 1 & \text{si} \quad b < ax - t' \end{cases}$$

4.8.8 a. COMPARACION.

Decimos que $\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b}$ si $\mathrm{Nec}\,(\underset{\sim}{a}\, x \circledS \underset{\sim}{b}) \geq \mathrm{Nec}\,(\underset{\sim}{b} \circledS \underset{\sim}{a}\, x)$.

Si sen t' y sen (ax - b) son del mismo signo, obtenemos que $-1 \leq 1$ y si son de signos opuestos obtenemos que $-1 \geq 1$.

CAPITULO II

PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL DIFUSA, CON RESTRICCIONES DIFUSAS

0. INTRODUCCION

Desde un punto de vista general, podemos considerar que un sitema difuso $\underset{\sim}{S}$ es un par (S,I) en el que S corresponde a la versión clásica (convencional) que $\underset{\sim}{S}$ modeliza, e I es una información sobre S que lo dota de la naturaleza difusa que lo caracteriza. Del acoplamiento de I y S surge el sitema difuso $\underset{\sim}{S}$ que en cada caso se tratará de estudiar.

En particular, en los modelos de optimización, si S está dado en términos de

$$\begin{array}{ll} \text{Max: } f(x) & \\ \text{s.a:} & \\ \quad g_i(x) \leq b_i, \quad i \in M = \{1, \ldots, m\} & \\ \quad\quad x \geq 0 & \end{array} \tag{1}$$

e I, como habitualmente, viene expresada en términos de que las restricciones de (1) se satisfagan lo mejor posible, el acomplamiento entre I y S se realiza a través del modelo de optimización difuso

$$\begin{array}{ll} \text{Max: } f(x) & \\ \text{s.a:} & \\ \quad g_i(x) \lesssim b_i, \quad i \in M = \{1, \ldots, m\} & \\ \quad\quad x \geq 0 & \end{array} \tag{2}$$

donde I se traduce en la existencia de un conjunto de funciones de pertenencia

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \tag{3}$$

que, en cada caso, expresa la información I.

En los modelos teóricos es frecuente suponer conocidas las funciones de pertenencia (3). Sin embargo, desde un punto de vista práctico, y de cara a la resolución de (2), el primer problema que encontramos es, precisamente, el seleccionar una forma concreta para esas funciones.

Es indudable que de la selección que se haga de las funciones de pertenencia (3) va a depender la solución de (2), por lo que antes de entrar a resolver cada posible modelo, es necesaria una reflexión acerca del tipo de funciones que se van a emplear.

Lo que pretendemos en este capítulo es realizar un estudio de las diferentes versiones que podemos obtener para (2), dependiendo de las funciones de pertenencia que supongamos definidas para las restricciones, con el ánimo de determinar, en primer lugar, qué tipo de funciones μ_i son las más cómodas, desde un punto de vista analítico y, en segundo, cuales son las más representativas de todo el conjunto de posibles funciones a usar.

En definitiva se trata de encontrar aquella clase de funciones que proporcionen, del modo más sencillo, la solución optimal, o más próxima a la optimal, ya que no hay que perder de vista que si, de partida, las hipótesis del modelo dan a éste una naturaleza difusa, no tiene demasiado sentido complicarlo analíticamente para conseguir una solución que, puede ser muy exacta pero, podría diferir muy poco de otra, casi-optimal, y obtenida de forma mucho más fácil usando esa clase de funciones de la que hablamos.

Con esta idea como punto de partida, en este capítulo analizamos las consecuencias de usar distintos tipos de funciones de pertenencia en las restricciones de un problema como el (2), particularizado al caso lineal. De este análisis destaca, sobre todo, el hecho de la independencia que existe entre el intervalo en el que está la solución que se obtiene para el problema y el tipo de funciones de pertenencia que se empleen en el mismo.

1. MODELO AUXILIAR PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL DIFUSA, CON RESTRICCIONES DIFUSAS.

Consideremos el problema representado por

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & z = cx \\ \text{s.a:} \quad & A\,x \lesssim b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

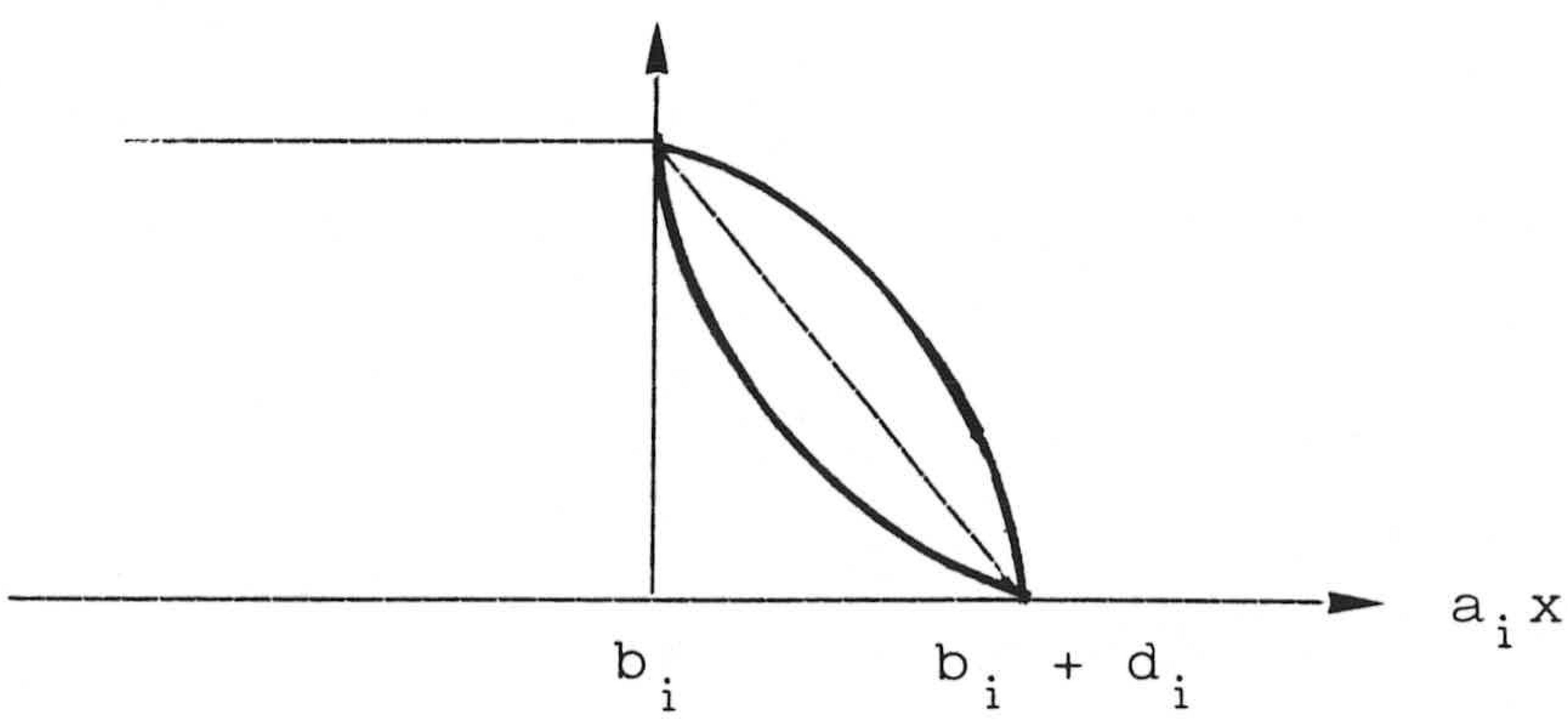
con $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y A una matriz $m \times n$ de números reales, pero donde con cada restricción $a_i\, x \lesssim b_i$, $i = 1, \ldots m$ hay definida una función.

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$$

modelizada por

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i\, x \leq b_i \\ f_i\,(a_i\, x) & \text{si } b_i \leq a_i\, x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si } a_i\, x \geq b_i + d_i \end{cases} \qquad [2]$$

siendo las f_i funciones continuas y monótonas no crecientes, cuya representación gráfica es del tipo



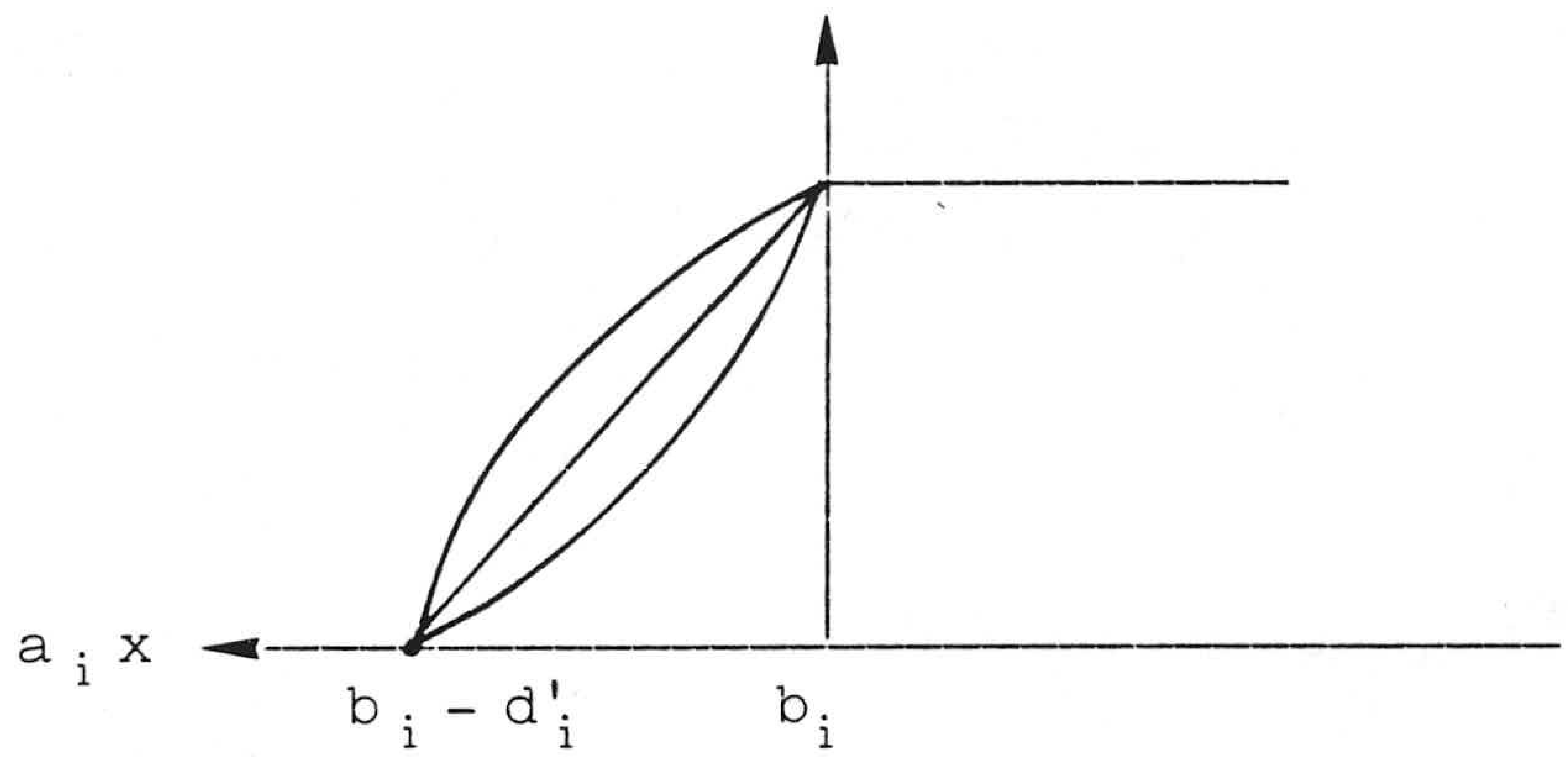
[3]

Estas funciones, expresan que el decisor tolera violaciones en cada restricción hasta un valor $b_i + d_i$, $i = 1 \ldots m$

Si las restricciones son del tipo $a_i x \geq b_i$, $i = 1 \ldots m$ la función definida, queda modelizada por

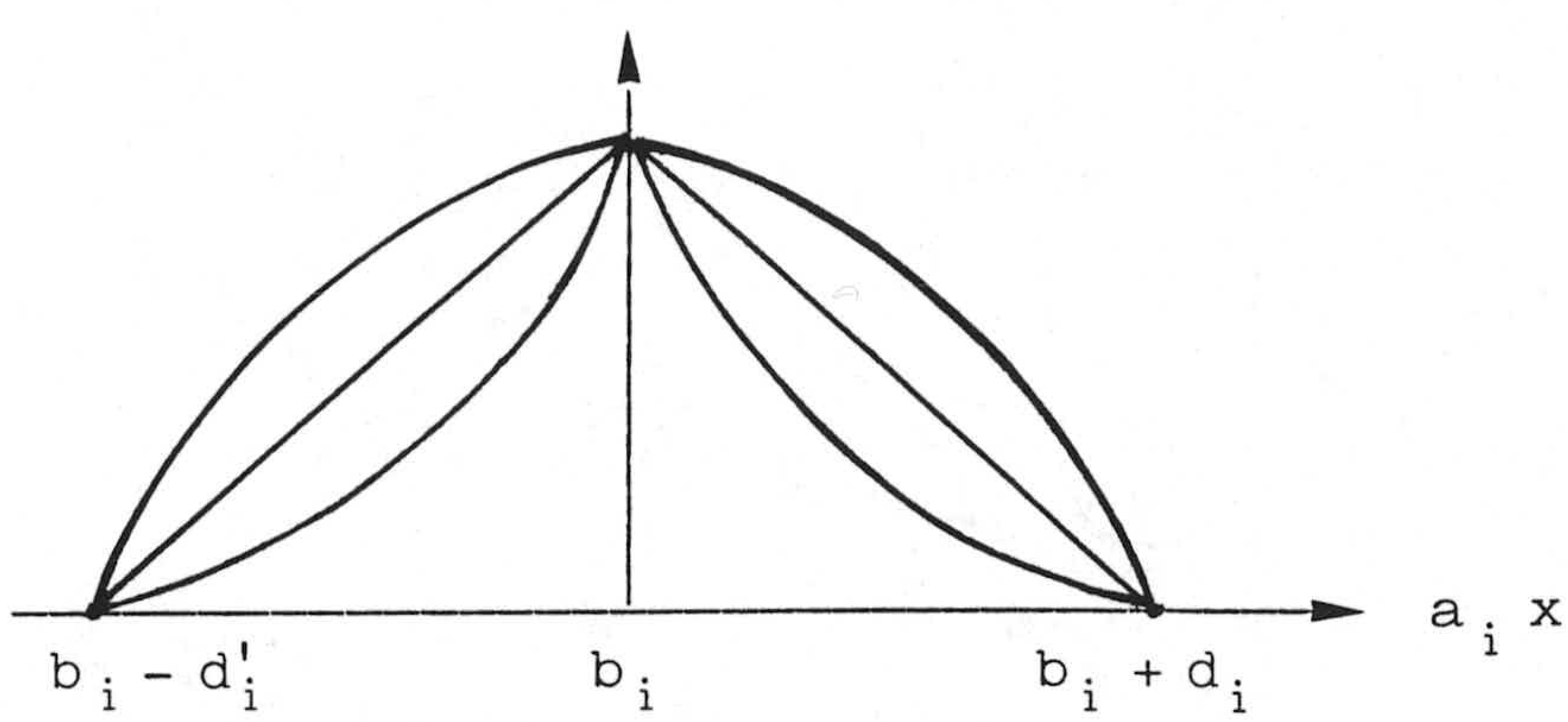
$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ h_i(a_i x) & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x - b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases} \qquad [4]$$

siendo las h_i funciones continuas y monótonas no decrecientes, cuya representación gráfica es del tipo



[5]

Para restricciones de igualdad se utilizan funciones de pertenencia como las de la figura siguiente



[6]

que tienen como expresión general

$$\mu_i(x) = \begin{cases} f_i\,(a_i\,x) & \text{si } b_i \leq a_i\,x \leq b_i + d_i \\ h_i\,(a_i\,x) & \text{si } b_i - d'_i \leq a_i\,x \leq b_i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad [7]$$

aunque no suelen ser muy habituales, al poder sustituirse una ecuación por dos inecuaciones, a las que se les asocia funciones de pertenencia como las anteriores.

Observese que la intersección de dos funciones como las [3] y [5] proporcionan una función de pertenencia como la [6], de modo idéntico a como dos restricciones en desigualdad producen una en igualdad.

Los problemas [1] han sido formalmente descritos en la literatura y se han considerado distintas aproximaciones para su resolución. En particular utilizando el Teorema de Descomposición para Conjuntos Difusos, J. L. Verdegay (1982) muestra que una solución difusa para [1] se halla resolviendo el problema lineal paramétrico:

$$\begin{aligned} \text{Max: } & z = c\,x \\ \text{s.a: } & \\ & A\,x \leq g(\alpha) \\ & x \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \qquad [8]$$

donde $g(\alpha)$ es un vector columna definido por las funciones inversas de las f_i, $i = 1 \ldots m$. Obviamente la linealidad de [1] se conserva.

TEOREMA 1 : Si las funciones f_i son continuas y monótonas no crecientes, [8] se convierte en

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = c\,x \\ \text{s.a:} & \\ & A\,x \leq b + d\,(1 - \beta) \\ & \quad x \geq 0 \qquad \beta \in [0,1] \end{array} \qquad [9]$$

DEMOSTRACION

Para cada restricción basta considerar

$$\beta_i = 1 - \frac{g_i(\alpha) - b_i}{d_i} \qquad [10]$$

Como

$$0 = f_i(b_i + d_i) \leq \alpha \Longrightarrow b_i + d_i \geq g_i(\alpha) \Longrightarrow \frac{g_i(\alpha) - b_i}{d_i} \leq 1$$

$$1 = f_i(b_i) \geq \alpha \Longrightarrow b_i \leq g_i(\alpha) \Longrightarrow \frac{g_i(\alpha) - b_i}{d_i} \geq 0$$

TEOREMA 2 : En la expresión [10] si $\alpha = 0 \Longrightarrow \beta_i = 0$ y si $\alpha = 1 \Longrightarrow \beta_i = 1$, $i = 1 \ldots m$

DEMOSTRACION

Basta considerar que $g_i(0) = b_i + d_i$, que $g_i(1) = b_i$ y sustituir en la expresión [10] .

Cuando las restricciones son del tipo $a_i x \gtrsim b$, se prueba de manera análoga que $AX \gtrsim b - d'(1-\gamma)$, siendo

$$\gamma_i = 1 + \frac{l_i(\alpha) - b_i}{d'_i} \qquad i=1\ldots m \quad [11] \quad \text{con} \quad \gamma_i \in [0,1] \quad \text{y}$$

l_i función inversa de h_i. Además si $\alpha = 0 \implies \gamma_i = 0$ y si $\alpha = 1 \implies \gamma_i = 1$ $i=1\ldots m$.

2. SOLUCION DIFUSA PARA EL PROBLEMA LINEAL DIFUSO [1]

Como la solucción difusa de [1] se halla resolviendo el problema lineal paramétrico [8] o bien el [9], si suponemos para simplificar la notación que los m primeros vectores de la matriz A son los que dán la solución óptima y representamos por Q la matriz correspondiente a estos vectores entonces

$$\bar{x} = Q^{-1}(b + d(1-\beta))$$

Siendo $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$ y pudiendo ocurrir que $m = n$.

Por lo tanto si $Q^{-1} = (q_{ji})$ $j=1\ldots m$, $i=1\ldots m$ tenemos

$$x_j = \sum_i q_{ji}(b_i + d_i) - \sum_i q_{ji} d_i \beta_i = m_i + \sum_i n_{ji} \beta_i$$

sustituyendo en z tenemos:

$$z = \sum_j c_j x_j = \sum_j c_j \sum_i q_{ji}(b_i + d_i) - \sum_j c_j \sum_i q_{ji} d_i \beta_i =$$

$$= M + \sum_i N_i \beta_i \qquad i=1...m \qquad [12]$$

Si todas las violaciones d_i $i=1...m$ son iguales a d, obtenemos

$$x_j = \sum_i q_{ji}(b_i + d) - \sum_i q_{ji} d \beta_i = r_j + \sum_i s_{ji} \beta_j$$

sustituyendo en z tenemos:

$$z = \sum_j c_j x_j = \sum_j c_j \sum_i q_{ji}(b_i + d) - \sum_j c_j \sum_i q_{ji} d \beta_i =$$

$$= R + \sum_i S_i \beta_i \qquad i=1...m \qquad [13]$$

TEOREMA 3 : La solución difusa del problema lineal difuso [1], está comprendida en el intervalo $[M, M + \sum_i N_i]$ si las violaciones d_i permitidas por el decisor en las restricciones $a_i x \leq b_i$ $i=1...m$, no son todas iguales y en el intervalo $[R, R + \sum_i S_i]$ si las violaciones d_i permitidas por el decisor en las restricciones $a_i x \leq b_i$ $i=1...m$, son todas iguales a d, independientemente de las funciones de pertenencia f_i que definan dichas restricciones, siendo además $M + \sum_i N_i = R + \sum_i S_i$

DEMOSTRACION

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \beta_i = 0$ $i=1...m$ sustituyendo en [12] tenemos

$$z = \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; (b_i + d_i) = M \qquad [12']$$

Si $\alpha = 1 \implies \beta_i = 1 \quad i=1...m$ sustituyendo en [12] tenemos

$$z = \sum_j c_j \sum_i q_{ji} (b_i + d_i) - \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; d_i =$$

$$= \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; b_i = M + \sum_i N_i = M + N \qquad [12'']$$

Observamos que el extremo M depende de las violaciones d_i permitidas por el decisor en cada una de las restricciones, sin embargo el extremo $M + N$ es independiente de dichos valores d_i .

Si $\alpha = 0 \implies \beta_i = 0$, $i=1...m$ sustituyendo en [13] tenemos

$$z = \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; (b_i + d) = R \qquad [13']$$

Si $\alpha = 1 \implies \beta_i = 1$, $i=1...m$ sustituyendo en [13] tenemos

$$z = \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; (b_i + d) - \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; d =$$

$$= \sum_j c_j \sum_i q_{ji} \; b_i = R + \sum_i S_i = R + S \qquad [13'']$$

Observamos como en el caso anterior, que el extremo R depende de la violación d permitida por el decisor en cada una de las restriciones, sin embargo el extremo $R + S$ es independiente de dicho valor.

Teniendo en cuenta [12''] y [13''] obtenemos que $M + N = R + S$.

Concluimos así, que si al decisor lo único que le interesa es saber en qué intervalo va a estar la solución difusa del problema lineal paramétrico [1], puede utilizar la función que desee para f_i en [2], ya que el intervalo es independientes de la forma de dicha función.

En caso de ser las restricciones del tipo $a_i\, x \gtrsim b_i$ $i=1...m$, podemos obtener un resultado paralelo al anterior.

En efecto, ahora:

$$\bar{x} = H^{-1} (b - d'(1-\gamma))$$

Siendo $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$ y pudiendo ocurrir $m = n$

Luego si $H^{-1} = (h_{ji})$ $j=1...m$, $i=1...m$ tenemos

$$x_j = \sum_i h_{ji} (b_i - d'_i) + \sum_i h_{ji}\, d'_i\, \gamma_i = m'_j + \sum_i n'_{ji}\, \gamma_i$$

Por lo tanto

$$z = \sum_j c_j\, x_j = \sum_j c_j \sum_i h_{ji} (b_i - d'_i) + \sum_j c_j \sum_i h_{ji}\, d'_i\, \gamma_i =$$

$$= \mathbf{M}' + \sum_i N'_i\, \gamma_i \qquad i=1...m \qquad [14]$$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow \gamma_i = 0$ $i=1...m \Rightarrow$ $z = \sum_j c_j \sum_i h_{ji} (b_i - d'_i) = M'$

Si $\alpha = 1 \Rightarrow \gamma_i = 1$ $i=1...m \Rightarrow$ $z = \sum_j c_j \sum_i h_{ji}\, b_i = M' + \sum_i N'_i =$

$$= M' + N'$$

Observamos que el extremo M' depende de las violaciones d'_i permitidas por el decisor en cada una de las restricciones, pero el extremo M'+ N' es independiente de dichos valores d'_i .

Si todas las violaciones d'_i son iguales a d' , obtenemos

$$x_j = \sum_i h_{ji} (b_i - d') + \sum_i h_{ji}\, d'\, \gamma_i = r'_j + \sum_i s'_{ji}\, \gamma_i$$

Por lo tanto

$$z = \sum_j c_j x_j = \sum_j c_j \sum_i h_{ji} \; (b_i - d') + \sum_j c_j \sum_i h_{ji}\, d'\, \gamma_i =$$

$$= R' + \sum_i S'_i\, \gamma_i \qquad i=1...m \qquad [15]$$

Si $\alpha = 0 \implies \gamma_i = 0 \quad i=1...m \implies z = \sum_j c_j \sum_i h_{ji} (b_i - d') = R'$

Si $\alpha = 1 \implies \gamma_i = 1 \quad i=1...m \implies z = \sum_j c_j \sum_i h_{ji}\, b_i =$

$$= R' + \sum_i S'_i = R' + S'$$

Observamos que el extremo R' depende de la violación d' permitida por el decisor en cada una de las restricciones, pero el extremo R'+ S' es independiente de dicho valor, siendo M'+ N'= R'+ S'

Resultando el siguiente

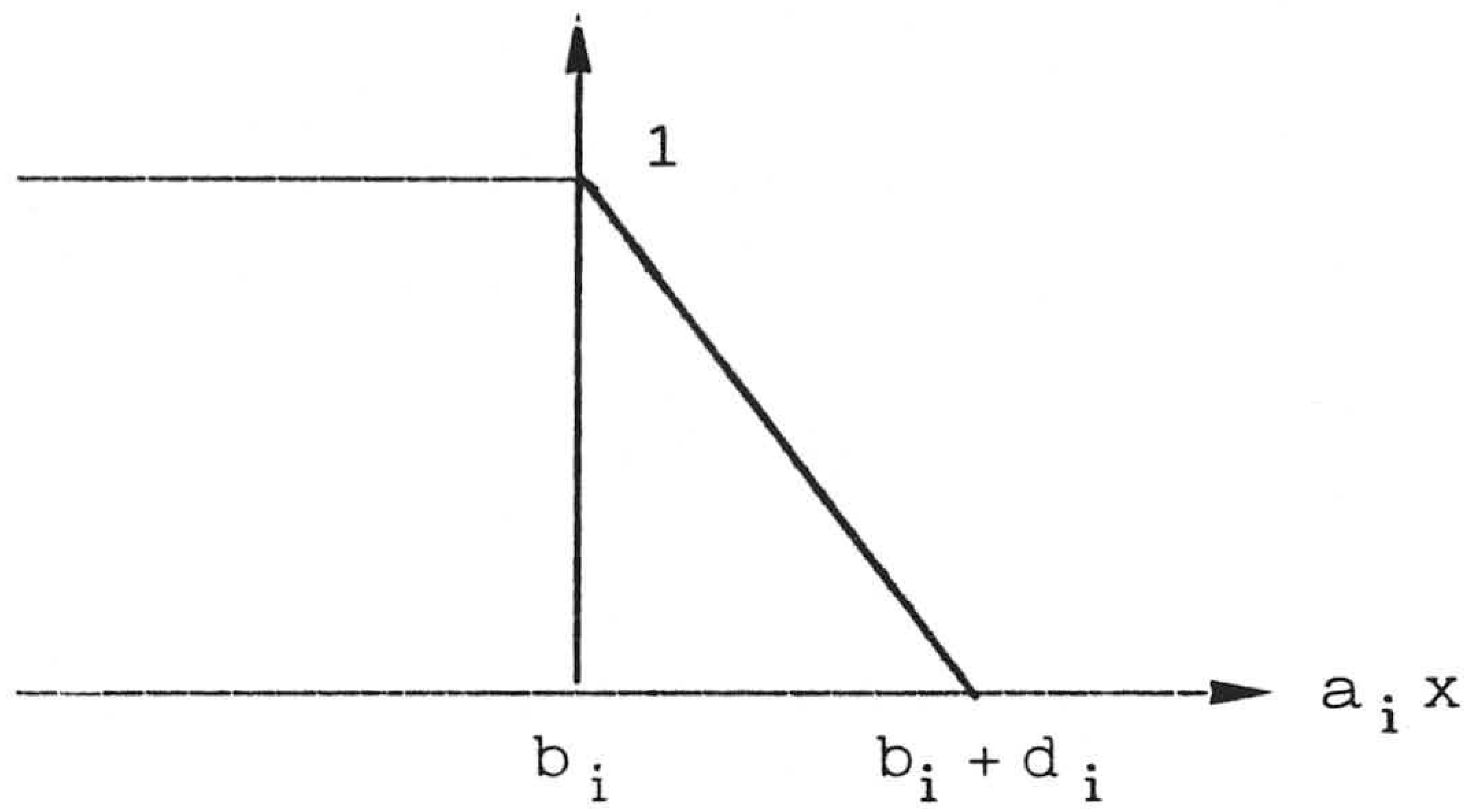
TEOREMA 4 : Cuando las restricciones son del tipo $a_i x \gtrsim b_i$ i=1...m , la solución difusa está comprendida en el intervalo [M' , M'+N'] si las violaciones d'_i permitidas por el de cisor en cada una de las restricciones no son todas iguales y en el intervalo $[R', R'+S']$, si las violaciones d'_i permitidas por el decisor son todas iguales a d', independientemente de las funciones de pertenencia h_i en [4] que definan dichas restricciones, siendo $M'+N'=R'+S'$.

Si el decisor desea conocer el tipo de solución difusa que va a obtener, además del intervalo en el que está comprendida, proponemos a continuación algunos tipos de funciones de pertenencia a utilizar, cuando las restricciones son del tipo $a_i x \lesssim b_i$ $i=1...m$ o bien del tipo $a_i x \gtrsim b_i$ $i=1...m$, obteniendo la solución correspondiente a cada una de ellas.

3. FUNCIONES DE PERTENENCIA A UTILIZAR EN LAS RESTRICCIONES DEL TIPO $a_i x \lesssim b_i$

Sin perder de vista que en la Teoría de la decisión clásica, la indiferencia, aversión o aficción al riesgo de un decisor, puede expresarse mediante funciones de utilidad lineales, convexas y cóncavas, respectivamente, en el tipo de problemas que aquí tratamos, podemos suponer funciones de pertenencia para las restricciones que, alternativamente, sean de la siguiente forma:

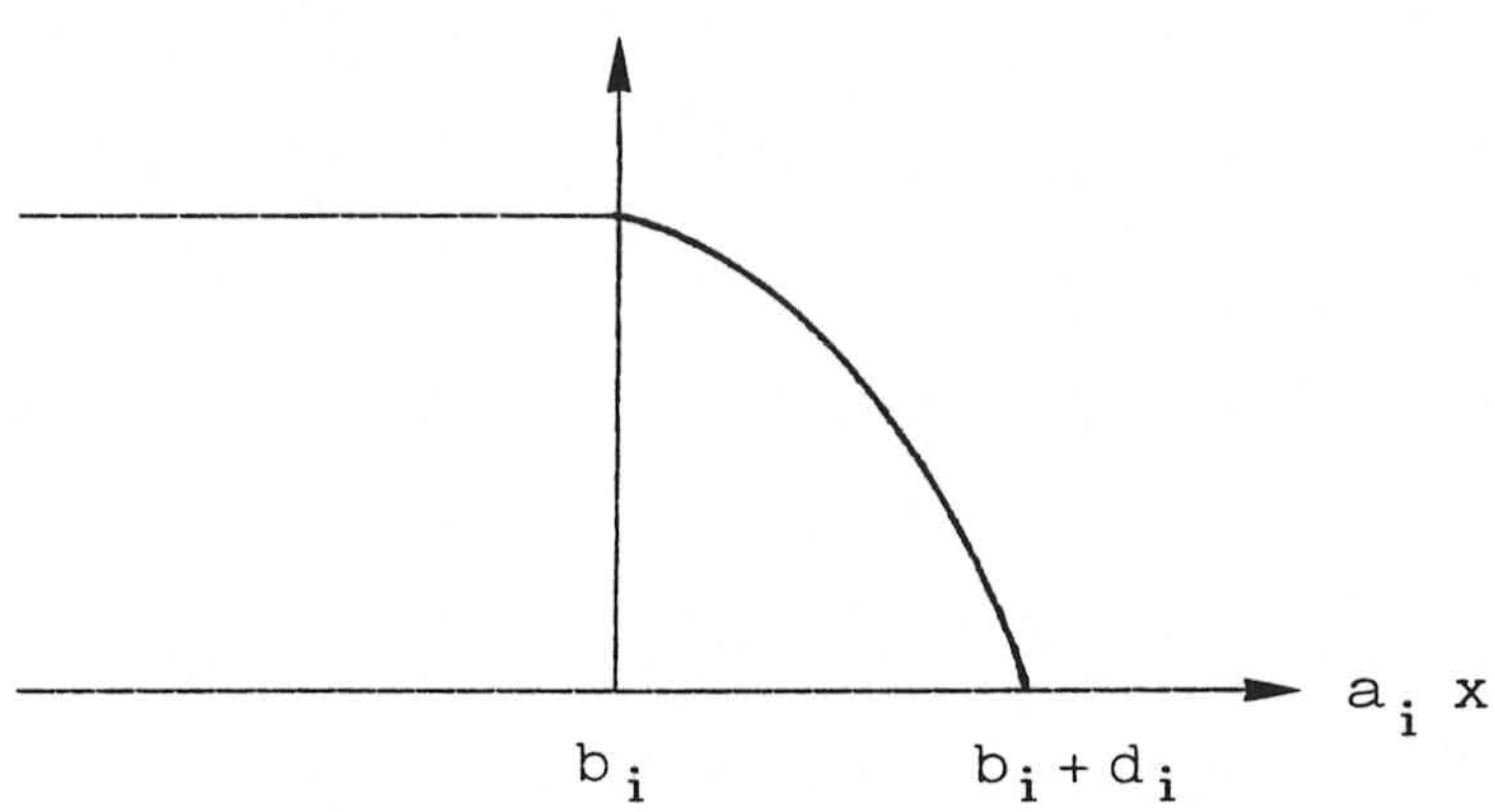
3.1. LINEAL



cuya expresión es

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i \\ \dfrac{b_i + d_i - a_i x}{d_i} & \text{si} \quad b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i + d_i \end{cases}$$

3.2. CONCAVAS NO LINEALES



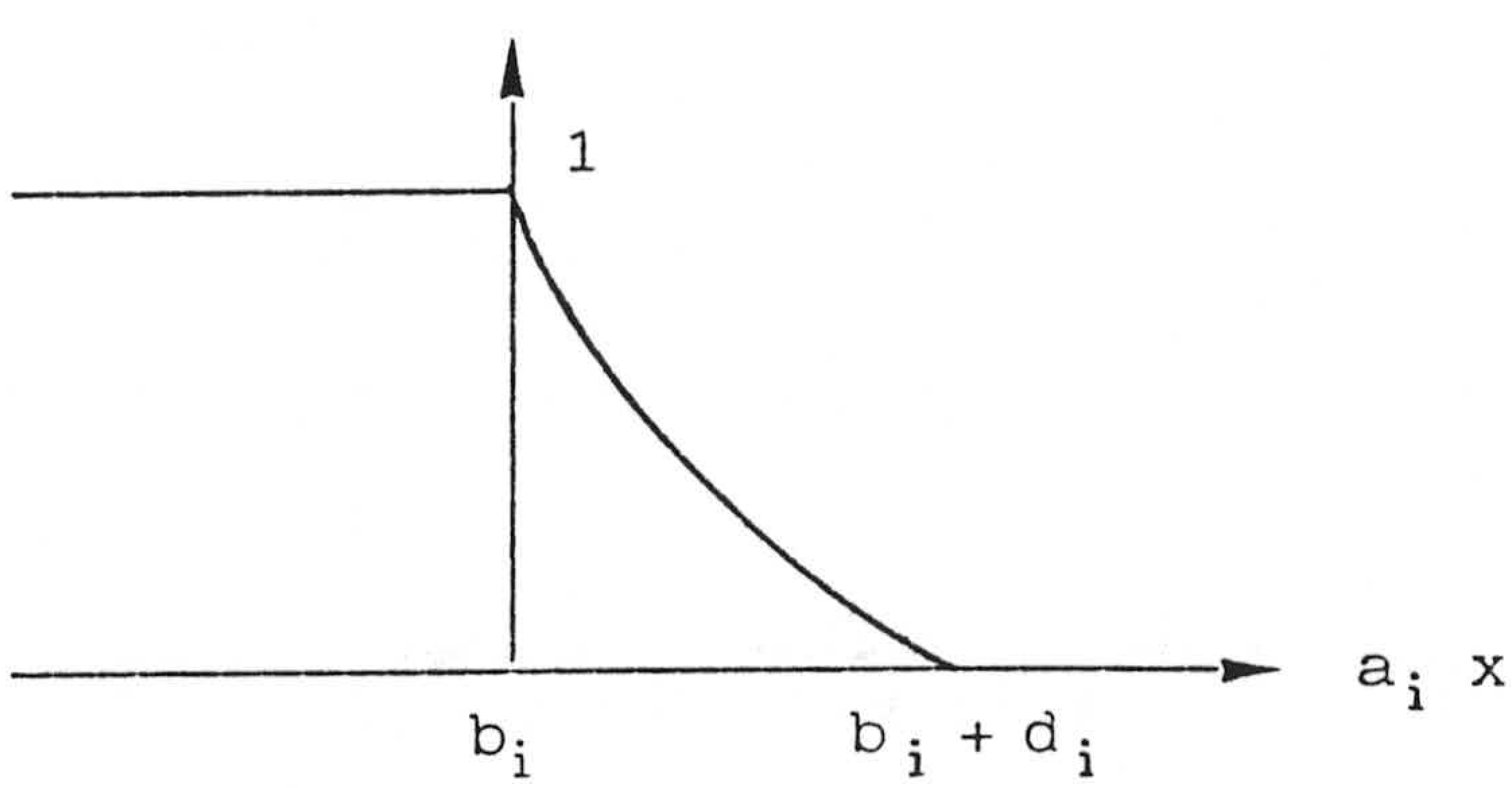
3.2.1. PARABOLICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i \\ -\dfrac{1}{d_i^2}(a_i x)^2 + \dfrac{2\, b_i}{d_i^2}(a_i x) + 1 - \dfrac{b_i^2}{d_i^2} & \text{si} \quad b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i + d_i \end{cases}$$

3.2.2. SENO

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i \\ \dfrac{\text{sen}\ (a_i x - (b_i + d_i))}{\text{sen}\ (-d_i)} & \text{si} \quad b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i + d_i \end{cases}$$

3.3. CONVEXAS NO LINEALES



3.3.1. PARABOLICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \leq b_i \\ \dfrac{1}{d_i^2}(a_i x)^2 - 2\,\dfrac{b_i + d_i}{d_i^2}(a_i x) + \dfrac{(b_i + d_i)^2}{d_i^2} & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si } a_i x \geq b_i + d_i \end{cases}$$

3.3.2. EXPONENCIAL

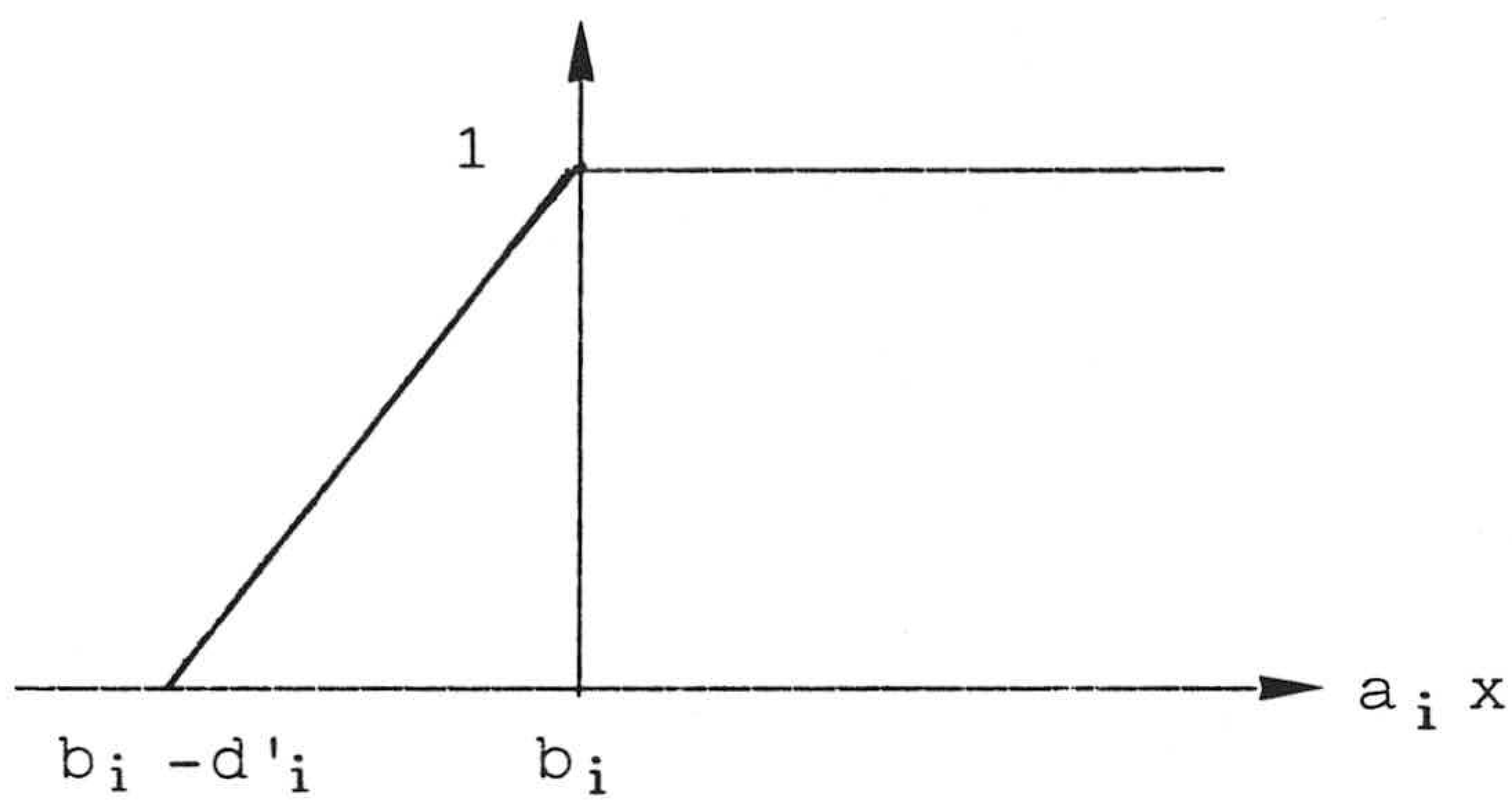
$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \leq b_i \\ \dfrac{q^{a_i x - b_i} - q^{d_i}}{1 - q^{d_i}}, \quad 0 < q < 1 & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si } a_i x \geq b_i + d_i \end{cases}$$

3.3. 3. LOGARITMICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \leq b_i \\ \dfrac{\log_q (1 + b_i + d_i - a_i x)}{\log_q (1 + d_i)} \quad 0 < q < 1 & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si } b_i + d_i \leq a_i x \end{cases}$$

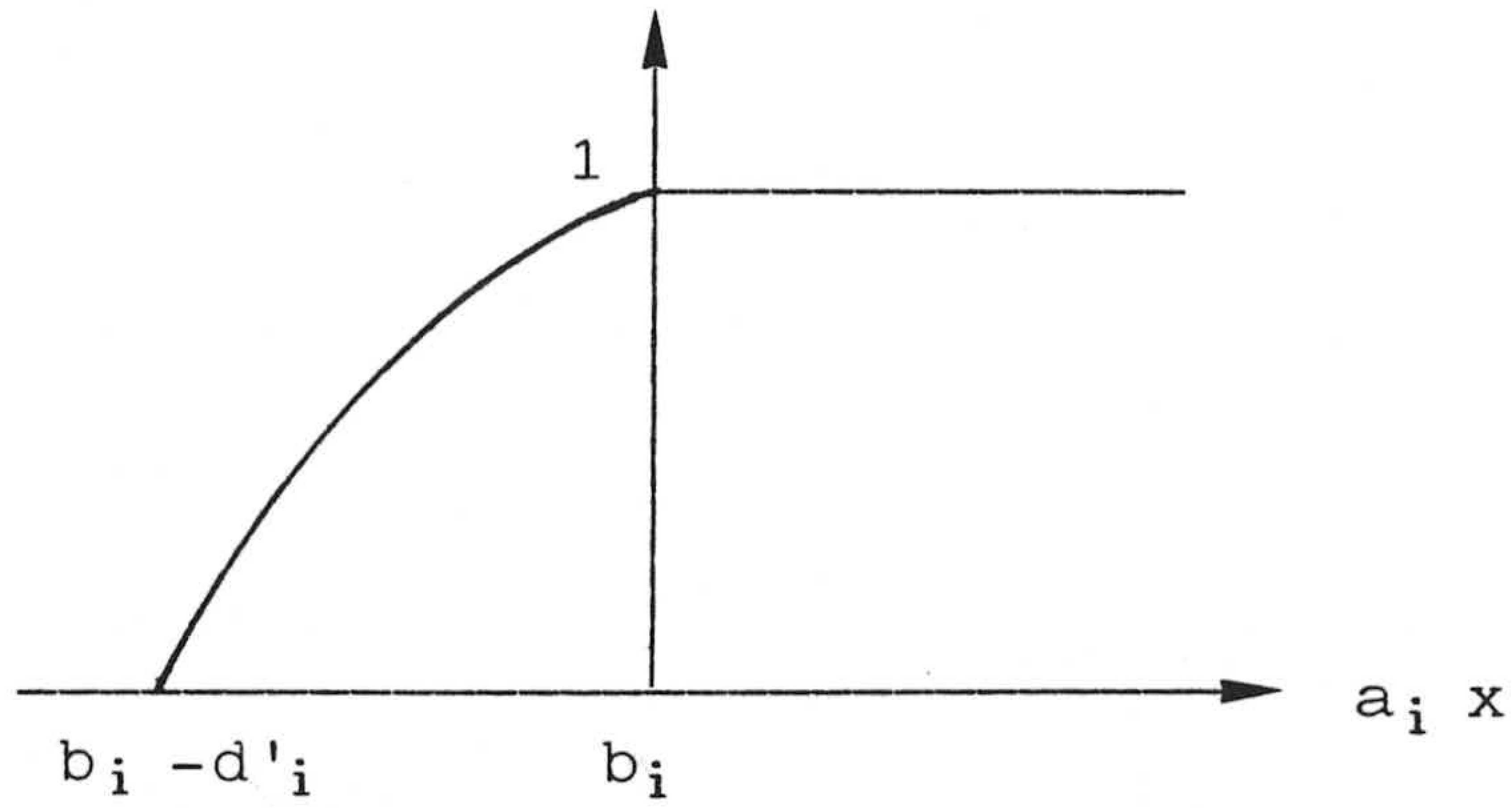
4. FUNCIONES DE PERTENENCIA A UTILIZAR EN LAS RESTRICCIONES DEL TIPO $a_i x \gtrsim b_i$

4.1. LINEAL



$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{d'_i - b_i + a_i x}{d'_i} & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.2. CONCAVAS NO LINEALES



4.2.1. PARABOLICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ -\dfrac{1}{d'^2_i}(a_i x)^2 + \dfrac{2b_i}{d'^2_i}(a_i x) + 1 - \dfrac{b^2_i}{d'^2_i} & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.2.2. LOGARITMICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{\log_{q_1}(a_i x - b_i + d'_i + 1)}{\log_{q_1}(d'_i + 1)} & q_1 > 1 & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.2.3. SENO

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{\text{sen}\,(a_i x - b_i + d'_i)}{\text{sen}\,(d'_i)} & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

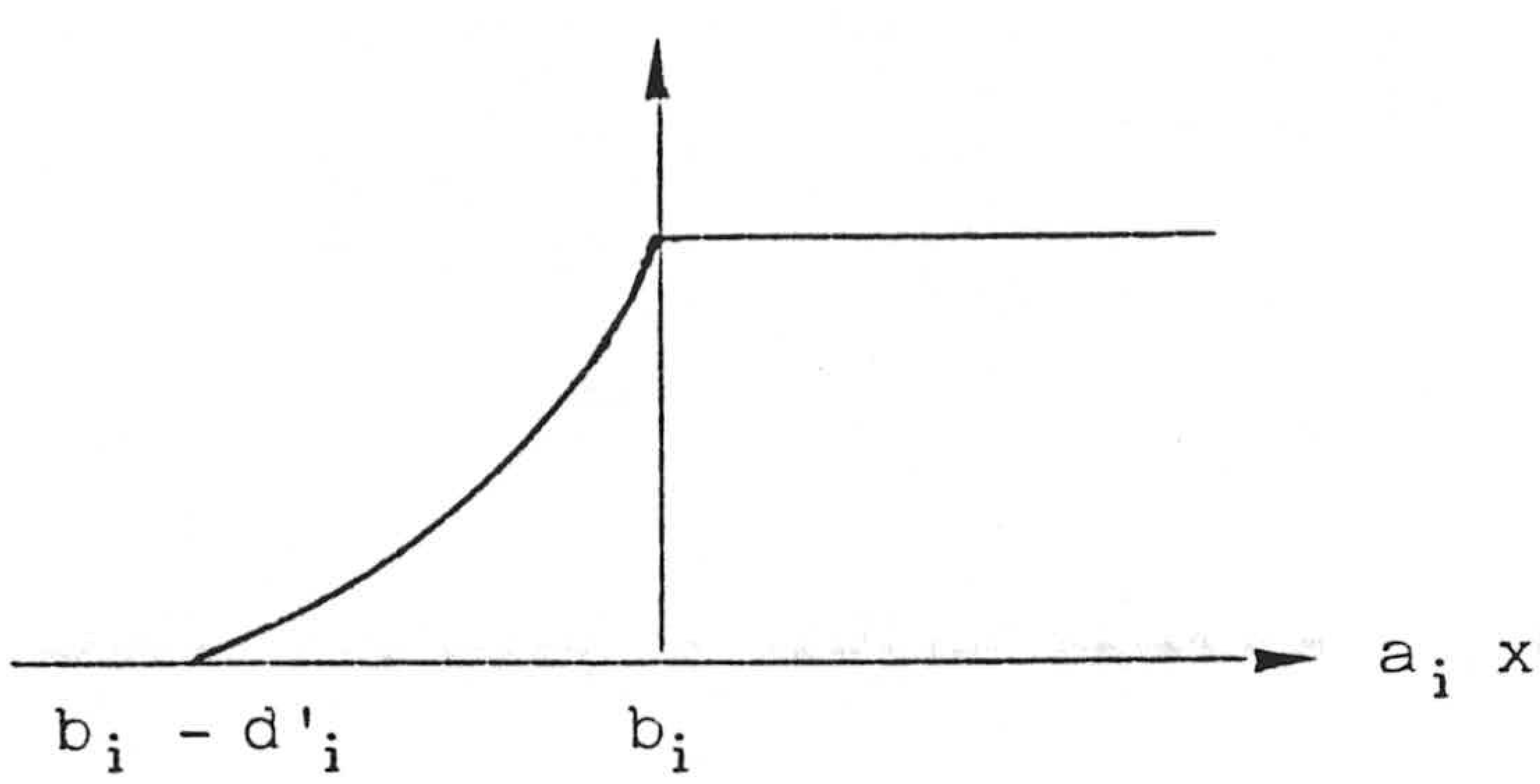
4.2.4. POTENCIAL

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{(a_i x + d'_i - b_i)^p}{{d'_i}^p} \quad 0 < p < 1 & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.2.5. TANGENTE HIPERBOLICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{\text{th}\,(a_i x + d'_i - b_i)}{\text{th}\, d'_i} & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.3. CONVEXAS NO LINEALES



4.3.1. PARABOLICA

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{1}{d'^2_i}(a_i x)^2 - \dfrac{2(b_i - d'_i)}{d'^2_i}(a_i x) + \dfrac{(b_i - d'_i)^2}{d'^2_i} & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.3.2. EXPONENCIAL

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{q_1^{a_i x - b_i} - q_1^{-d'_i}}{1 - q_1^{-d'_i}}, \quad q_1 > 1 & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.3.3. POTENCIAL

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \geq b_i \\ \dfrac{(a_i x + d'_i - b_i)^p}{d'^p_i} \quad p > 1 & \text{si} \quad b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

4.3.4. SENO HIPERBOLICO

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \geq b_i \\ \dfrac{sh\,(a_i x + d'_i - b_i)}{sh\, d'_i} & \text{si } b_i - d'_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si } a_i x \leq b_i - d'_i \end{cases}$$

Todas estas funciones nos serán de utilidad en lo sucesivo.

5. EXPRESION DE β_i PARA CADA UNA DE LAS FUNCIONES CONSIDERADAS EN LAS RESTRICCIONES DEL TIPO $a_i x \lesssim b_i$

LEMA 5.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son del tipo lineal entonces, $\beta_i = \alpha$, $i=1...m$

En efecto, si

$$\frac{b_i + d_i - a_i x}{d_i} \geq \alpha \implies b_i + d_i - a_i x \geq \alpha d_i \implies$$

$$b_i + d_i - \alpha d_i \geq a_i x \implies a_i x \leq b_i + d_i (1-\alpha) = g_i(\alpha)$$

Luego $\beta_i = 1 - \dfrac{b_i + d_i (1-\alpha) - b_i}{d_i} = \alpha \qquad i=1...m$

LEMA 5.2.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo parabólico cóncavo, entonces $\beta_i = 1 - \sqrt{1-\alpha}$, i=1...m

En efecto, si

$$-\frac{1}{d_i^2}(a_i x)^2 + \frac{2 b_i}{d_i^2}(a_i x) + 1 - \frac{b_i^2}{d_i^2} \geq \alpha$$

Operando obtenemos

$$a_i x \leq b_i + d_i \sqrt{1-\alpha} = g_i(\alpha)$$

Por lo tanto

$$\beta_i = 1 - \frac{b_i + d_i \sqrt{1-\alpha} - b_i}{d_i} = 1 - \sqrt{1-\alpha} \qquad i=1...m$$

LEMA 5.2.2 Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo seno, entonces $\beta_i = -\dfrac{\text{arc sen}(\alpha \text{ sen}(-d_i))}{d_i}$, i=1...m

En efecto, si

$$\frac{\text{sen}(a_i x - (b_i + d_i))}{\text{sen}(-d_i)} \geq \alpha \implies$$

Si sen $(-d_i) > 0$ entonces: sen $(a_i x - (b_i + d_i) \geq \alpha$ sen $(-d_i)$

$$\implies a_i x \leq b_i + d_i + \text{arc sen}(\alpha \text{ sen}(-d_i)) = g_i(\alpha)$$

Si $sen(-d_i) < 0$, entonces : $sen(a_i x - (b_i + d_i)) \leq \alpha \, sen(-d_i)$

$$\Longrightarrow \quad a_i x \leq b_i + d_i + arc\ sen(\alpha\ sen(-d_i)) = g_i(\alpha)$$

Luego obtenemos

$$\beta_i = 1 - \frac{b_i + d_i + arc\ sen(\alpha\ sen(-d_i)) - b_i}{d_i} = - \frac{arc\ sen(\alpha\ sen(-d_i))}{d_i}$$

$i=1...m$

LEMA 5.3.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo parabólico convexo, entonces $\beta_i = \sqrt{\alpha}$ $i = 1...m$

En efecto, si

$$\frac{1}{d_i^2}(a_i x)^2 - 2\frac{b_i + d_i}{d_i^2}(a_i x) + \frac{(b_i + d_i)^2}{d_i^2} \geq \alpha$$

Operando obtenemos

$$a_i x \leq b_i + d_i (1 - \sqrt{\alpha}) = g_i(\alpha)$$

Luego

$$\beta_i = 1 - \frac{b_i + d_i(1 - \sqrt{\alpha}) - b_i}{d_i} = \sqrt{\alpha} \qquad i=1...m$$

LEMA 5.3.2. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo exponencial, entonces

$$\beta_i = 1 - \frac{\log_q [q^{d_i} + \alpha(1 - q^{d_i})]}{d_i}, \quad i=1...m \quad \text{siendo } 0 < q < 1$$

En efecto, si

$$\frac{q^{a_i x - b_i} - q^{d_i}}{1 - q^{d_i}} \geq \alpha \qquad 0 < q < 1$$

$$\Longrightarrow \quad q^{a_i x - b_i} - q^{d_i} \geq \alpha (1 - q^{d_i})$$

$$\Longrightarrow \quad a_i x \leq b_i + \log_q [q^{d_i} + \alpha (1 - q^{d_i})] = g_i (\alpha)$$

Por lo tanto

$$\beta_i = 1 - \frac{b_i + \log_q [q^{d_i} + \alpha (1 - q^{d_i})] - b_i}{d_i} =$$

$$= 1 - \frac{\log_q [q^{d_i} + \alpha (1 - q^{d_i})]}{d_i} \qquad i=1...m$$

LEMA 5.3.3. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo logarítmico convexo, entonces

$$\beta_i = \frac{(1 + d_i)^{\alpha} - 1}{d_i} \quad , \quad i=1...m$$

En efecto, si

$$\frac{\log_q (1 + b_i + d_i - a_i x)}{\log_q (1 + d_i)} \geq \alpha \qquad 0 < q < 1$$

Como $\log_q (1 + d_i) < 0$ siendo $0 < q < 1$

$$\Longrightarrow \log_q (1 + b_i + d_i - a_i x) \leq \alpha \log_q (1 + d_i) = \log_q (1 + d_i)^\alpha$$

$$\Longrightarrow 1 + b_i + d_i - a_i x \geq (1 + d_i)^\alpha \Longrightarrow$$

$$a_i x \leq 1 + b_i + d_i - (1 + d_i)^\alpha = g_i(\alpha)$$

Por lo tanto

$$\beta_i = 1 - \frac{1 + b_i + d_i - (1 + d_i)^\alpha - b}{d_i} = \frac{(1 + d_i)^\alpha - 1}{d_i} \qquad i=1...m$$

6. EXPRESION DE γ_i PARA CADA UNA DE LAS FUNCIONES CONSIDERADAS EN LAS RESTRICCIONES DEL TIPO $a_i x \gtrsim b_i$

LEMA 6.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son lineales, entonces $\gamma_i = \alpha$ $\quad i=1...m$

En efecto, si

$$\frac{d'_i - b_i + a_i x}{d'_i} \geq \alpha \quad \Longrightarrow \quad d'_i - b_i + a_i x \geq d'_i \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad a_i x \geq b_i - d'_i (1 - \alpha) = l_i(\alpha)$$

luego

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i (1 - \alpha) - b_i}{d'_i} = \alpha \qquad i=1...m$$

LEMA 6.2.1. Si las funciones de pertenencia de las restriccio nes $a_i x \gtrsim b_i$ parabólico concavo, entonces $\gamma_i = 1 - \sqrt{1-\alpha}$, $i=1...m$

En efecto, si

$$- \frac{1}{d'^2_i} (a_i x)^2 + \frac{2 b_i}{d'^2_i} (a_i x) + 1 - \frac{b_i^2}{d_i^2} \geq \alpha$$

Operando tenemos

$$a_i x \geq b_i - d'_i \sqrt{1-\alpha} = l_i(\alpha)$$

Por lo tanto

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i \sqrt{1-\alpha} - b_i}{d'_i} = 1 - \sqrt{1-\alpha} \qquad i=1...m$$

LEMA 6.2.2. Si las funciones de pertenencia de las restriccio nes $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo logarítmico cóncavo, entonces

$$\gamma_i = \frac{(d'_i + 1)^{\alpha} - 1}{d'_i} \quad , \quad i=1...m$$

En efecto, si

$$\frac{\log_{q_1} (a_i x - b_i + d'_i + 1)}{\log_{q_1} (d'_i + 1)} \geq \alpha \qquad q_1 > 1$$

$$\Longrightarrow \log_{q_1} (a_i x - b_i + d'_i +-1) \geq \alpha \log_{q_1} (d'_i + 1) = \log_{q_1} (d'_i + 1)^{\alpha}$$

$$\Longrightarrow a_i x \geq b_i - d'_i - 1 + (d'_i + 1)^{\alpha} = l_i (\alpha)$$

Luego

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i - 1 + (d'_i + 1)^{\alpha} - b_i}{d'_i} = \frac{(d'_i + 1)^{\alpha} - 1}{d'_i}$$

$i=1...m$

LEMA 6.2.3. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo seno, entonces $\gamma_i = \dfrac{\text{arc sen}(\alpha \text{ sen } d'_i)}{d'_i}$ $i=1...m$

En efecto, si

$$\frac{\text{sen}(a_i x - b_i + d'_i)}{\text{sen } d'_i} \geq \alpha \quad \Longrightarrow$$

si $\text{sen } d'_i > 0 \Longrightarrow \text{sen}(a_i x - b_i + d'_i) \geq \alpha \text{ sen } d'_i \Longrightarrow$

$a_i x \geq b_i - d'_i + \text{arc sen}(\alpha \text{ sen } d'_i) = l_i(\alpha)$

si $\text{sen } d'_i < 0 \Longrightarrow \text{sen}(a_i x - b_i + d'_i) \leq \alpha \text{ sen } d'_i \Longrightarrow$

$a_i x \geq b_i - d'_i + \text{arc sen}(\alpha \text{ sen } d'_i)$

Por lo tanto

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i + \text{arc sen}(\alpha \text{ sen } d'_i) - b_i}{d'_i} = \frac{\text{arc sen}(\alpha \text{ sen } d'_i)}{d'_i}$$

$i=1...m$

LEMA 6.2.4. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo potencial cóncavo, entonces $\gamma_i = \sqrt[p]{\alpha}$, $0 < p < 1$, $i=1...m$

En efecto, si

$$\frac{(a_i x + d'_i - b_i)^p}{d'^p_i} \geq \alpha \qquad 0 < p < 1 \implies$$

$$(a_i x + d'_i - b_i)^p \geq \alpha d'^p_i \implies a_i x \geq b_i - d'_i(1 - \sqrt[p]{\alpha}) = l_i(\alpha)$$

luego

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i(1 - \sqrt[p]{\alpha}) - b_i}{d'_i} = \sqrt[p]{\alpha}, \quad i=1...m$$

LEMA 6.2.5. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son del tipo tangente hiperbólica, entonces

$$\gamma_i = \frac{\arg \operatorname{th} (\alpha \operatorname{th} d'_i)}{d'_i}, \quad i=1...m$$

En efecto, si

$$\frac{\operatorname{th} (a_i x + d'_i - b_i)}{\operatorname{th} d'_i} \geq \alpha$$ Como $\operatorname{th} d'_i > 0$ por ser $d'_i > 0$

$$\implies \operatorname{th} (a_i x + d'_i - b_i) \geq \alpha \operatorname{th} d'_i \implies$$

$$a_i x \geq b_i - d'_i + \arg \operatorname{th} (\alpha \operatorname{th} d'_i) = l_i(\alpha)$$

Luego

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i + \arg\operatorname{th}(\alpha \operatorname{th} d'_i)}{d'_i} = \frac{\arg\operatorname{th}(\alpha \operatorname{th} d'_i)}{d'_i} =$$

$$= \frac{1}{2\,d'_i} \; L \left[\frac{\alpha\,(e^{d'_i} - e^{-d'_i}) + (e^{d'_i} + e^{-d'_i})}{\alpha\,(e^{d'_i} - e^{-d'_i}) - (e^{d'_i} + e^{-d'_i})} \right]$$

LEMA 6.3.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i\ x \gtrsim b_i$ son de tipo parabólico convexo, entonces $\gamma_i = \sqrt{\alpha}$, $i=1\ldots m$

En efecto, si

$$\frac{1}{d'^2_i}\,(a_i\ x)^2 - 2\,\frac{b_i - d'_i}{d'^2_i}\,(a_i\ x) + \frac{(b_i - d'_i)^2}{d'^2_i} \geq \alpha$$

Operando obtenemos

$$a_i\ x \geq b_i - d'_i\,(1 - \sqrt{\alpha}) = l_i(\alpha)$$

Por lo tanto

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i\,(1 - \sqrt{\alpha}) - b_i}{d'_i} = \sqrt{\alpha} \qquad i=1\ldots m$$

LEMA 6.3.2. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i\ x \gtrsim b_i$ son de tipo exponencial, entonces

$$\gamma_i = 1 + \frac{\log_{q_1}[q_1^{-d'_i} + \alpha(1 - q_1^{-d'_i})]}{d'_i} \quad , \quad q_1 > 1 \;\; ; \quad 1=1\ldots m$$

En efecto, si

$$\frac{q_1^{a_i x - b_i} - q_1^{-d'_i}}{1 - q_1^{-d'_i}} \geq \alpha \qquad q_1 > 1$$

$$\Longrightarrow \quad q_1^{a_i x - b_i} - q_1^{-d'_i} \geq \alpha (1 - q_1^{-d'_i})$$

$$\Longrightarrow \quad a_i x \geq b_i + \log_{q_1} [q_1^{-d'_i} + \alpha (1 - q_1^{-d'_i})] = l_i (\alpha)$$

Por lo tanto

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i + \log_{q_1} [q_1^{-d'_i} + \alpha (1 - q_1^{-d'_i})] - b_i}{d'_i} =$$

$$= 1 + \frac{\log_{q_1} [q_1^{-d'_i} + \alpha (1 - q_1^{-d'_i})]}{d'_i} \qquad i=1...m$$

LEMA 6.3.3. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo potencial convexo, entonces $\gamma_i = \sqrt[p]{\alpha}$, $p > 1$, $i=1...m$

En efecto, si

$$\frac{(a_i x + d'_i - b_i)^p}{d_i'^{\,p}} \geq \alpha \qquad p > 1$$

$$\Longrightarrow (a_i x + d'_i - b_i)^p \geq d'^p_i \alpha \quad \Longrightarrow a_i x \geq b_i - d'_i (1 - \sqrt[p]{\alpha})$$

Luego

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i (1 - \sqrt[p]{\alpha}) - b_i}{d'_i} = \sqrt[p]{\alpha} \qquad i=1\ldots m$$

LEMA 6.3.4. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo seno hiperbólico, entonces

$$\gamma_i = \frac{\arg \operatorname{sh} (\alpha \operatorname{sh} d'_i)}{d'_i} , \qquad i=1\ldots m$$

En efecto, si

$$\frac{\operatorname{sh} (a_i x + d'_i - b_i)}{\operatorname{sh} d'_i} \geq \alpha \qquad \text{Como } \operatorname{sh} d'_i > 0 \quad \text{por ser } d'_i > 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sh} (a_i x + d'_i - b_i) \geq \alpha \operatorname{sh} d'_i \quad \Longrightarrow$$

$$a_i x \geq b_i - d'_i + \arg \operatorname{sh} (\alpha \operatorname{sh} d'_i) = l_i (\alpha)$$

Por lo tanto

$$\gamma_i = 1 + \frac{b_i - d'_i + \arg \operatorname{sh} (\alpha \operatorname{sh} d'_i) - b_i}{d'_i} = \frac{\arg \operatorname{sh} (\alpha \operatorname{sh} d'_i)}{d'_i}$$

$$= \frac{1}{d'_i} L \left[\frac{\alpha (e^{d'_i} - e^{-d'_i})}{2} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 (e^{d'_i} - e^{-d'_i})}{4}} \right]$$

7. SOLUCION DIFUSA DE [1] CUANDO LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA CONSIDERADAS SON LAS DEL APARTADO 3 .

A partir de todos los resultados anteriores, podemos obtener las formas concretas que va a ir tomando el problema de que partimos.

TEOREMA 7.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo lineal, entonces la solución difusa de [1] es el conjunto difuso

$$B = \{ (x, \frac{x - M}{N}) ; \quad x \in [M, M + N] \}$$

DEMOSTRACION: Considerando 5.1 y [12] , tenemos:

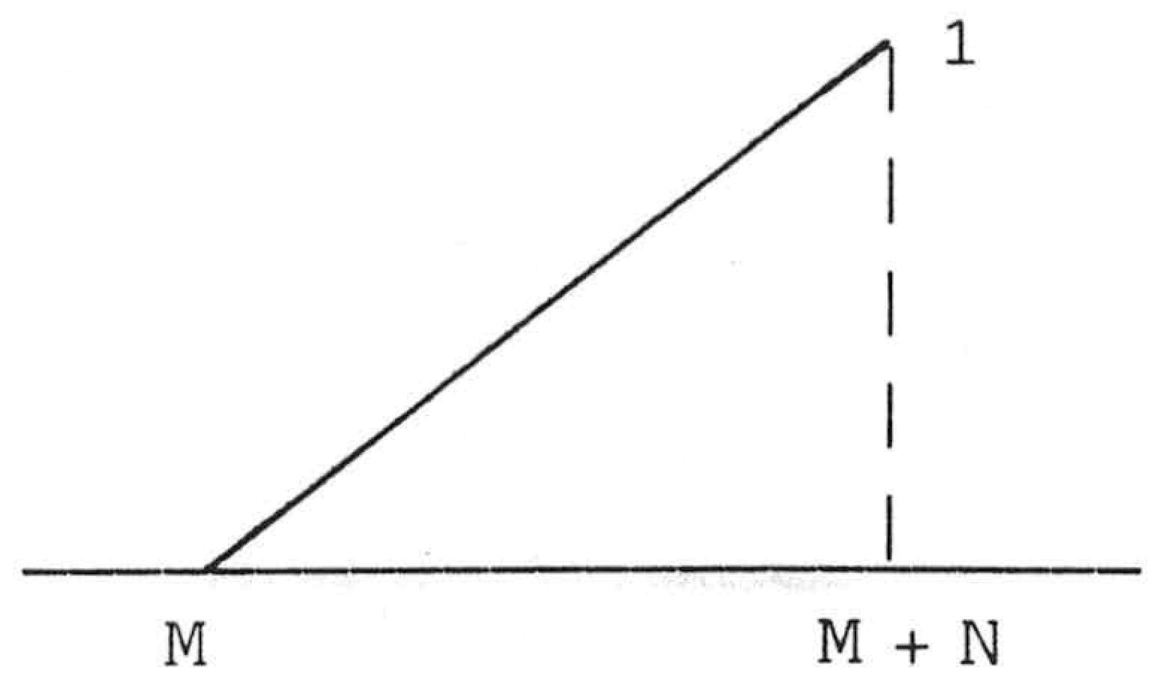
$$z = M + \sum_i N_i \beta_i = M + \alpha \sum_i N_i = M + \alpha N$$

Operando, obtenemos como solución, el conjunto difuso

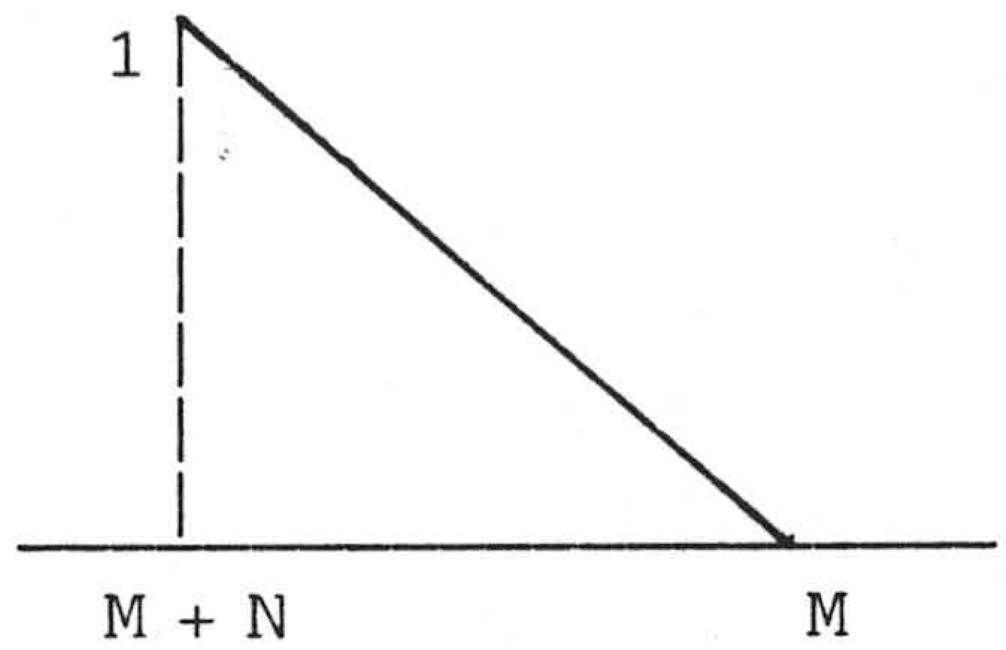
$$B = \{ (x , \frac{x - M}{N}) ; \quad x \in [M , M + N] \} \qquad [16]$$

Observación:

Si $N > 0$ la función de pertenencia de la solución es lineal y creciente



Si $N < 0$, la función de pertenencia de la solución es lineal y decreciente



TEOREMA 7.2. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo parabólico cóncavo, entonces, la solución difusa de [1] es el conjunto difuso

$$B = \{ (x, -\frac{x^2}{N^2} + \frac{2\,(M+N)}{N^2}\,x - \frac{M}{N^2}\,(M+2N));\ x \in [M,\ M+N] \}$$

DEMOSTRACION: Teniendo en cuenta 5.2.1. y [12]

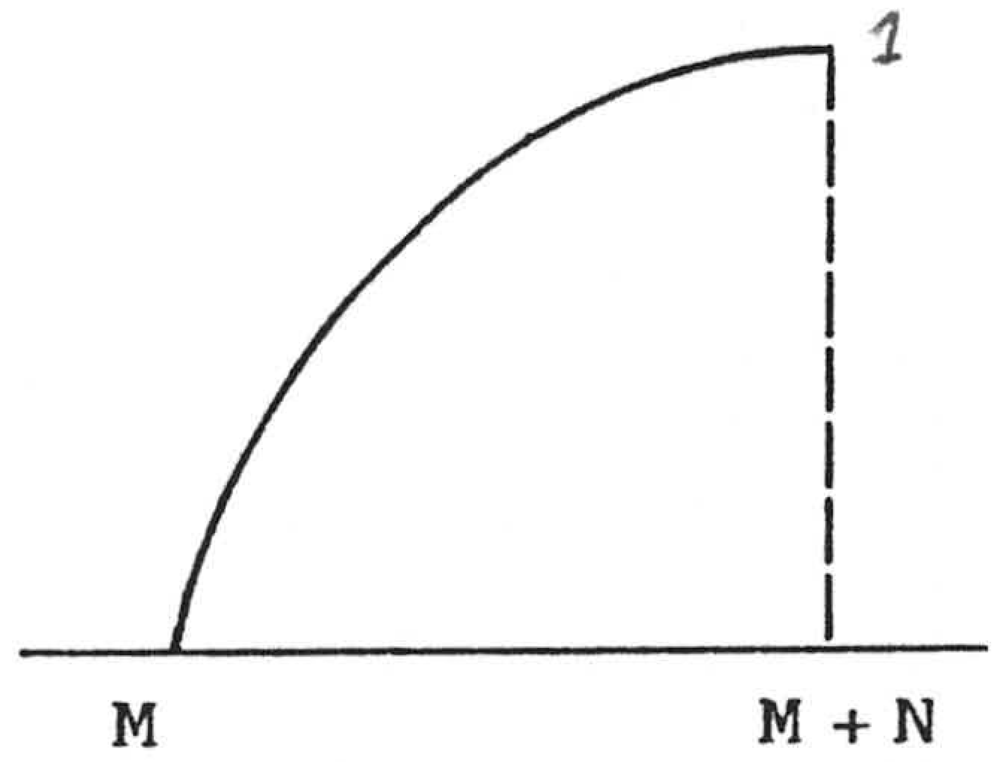
$$z = M + \sum_i N_i\,\beta_i = M + (1 - \sqrt{1-\alpha}\,)\sum_i N_i = M + (1 - \sqrt{1-\alpha}\,)\,N$$

Operando obtenemos como solución, el conjunto difuso

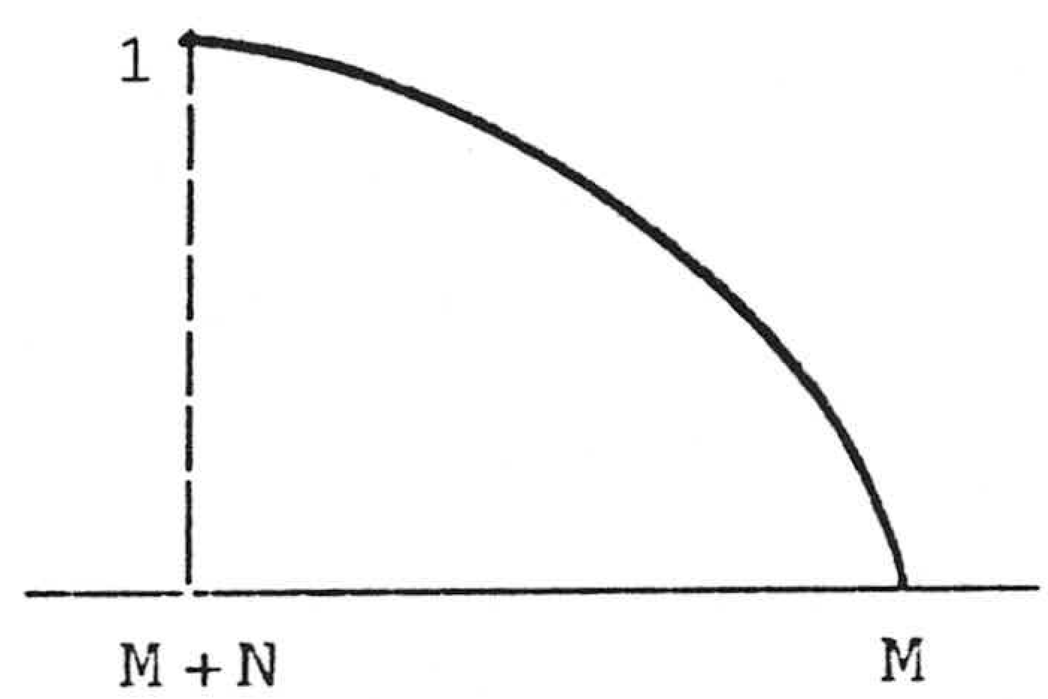
$$B = \{ (x\,, -\frac{x^2}{N^2} + \frac{2\,(M+N)}{N^2}\,x - \frac{M}{N^2}\,(M+2N));\ x \in [M,\ M+N] \} \quad [17]$$

Observación:

Si $N > 0$, la funcion de pertenencia de la solución es parabólica cóncava y creciente



Si $N < 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica cóncava y decreciente



TEOREMA 7.3. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo seno y considerando que todas las violaciones d_i , $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d , entonces la solución difusa de [1] es el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{\text{sen}\ [\ (R - x)\ d/S\ ]}{\text{sen}\ (-d)}); \ x \in [\ R\ ,\ R + S\ ]\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 5.2.2 y [13] tenemos:

$$z = R + \sum_i S_i\ \beta_i = R + (- \frac{\text{arc sen}\ [\ \alpha\ \text{sen}(-d)\ ]}{d}) \sum_i S_i =$$

$$= R + S\ (- \frac{\text{arc sen}\ [\ \alpha\ \text{sen}\ (-d)\ ]}{d}\ )$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{(x ; \frac{\operatorname{sen}[(R-x)\, d/S]}{\operatorname{sen}(-d)}) ; \quad x \in [R, R+S]\} \qquad [19]$$

Observación:

Si $S > 0$, la función de pertenencia de la solución es de tipo seno cóncava y creciente.

Si $S < 0$, la función de pertenencia de la solución es de tipo seno cóncava y decreciente.

TEOREMA 7.4. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo parabólico convexo, entonces la solución difusa de [1] es el conjunto difuso

$$B = \{(x , (\frac{x-M}{N})^2) \quad ; \quad x \in [M, M+N]\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 5.3.2. y [12] tenemos:

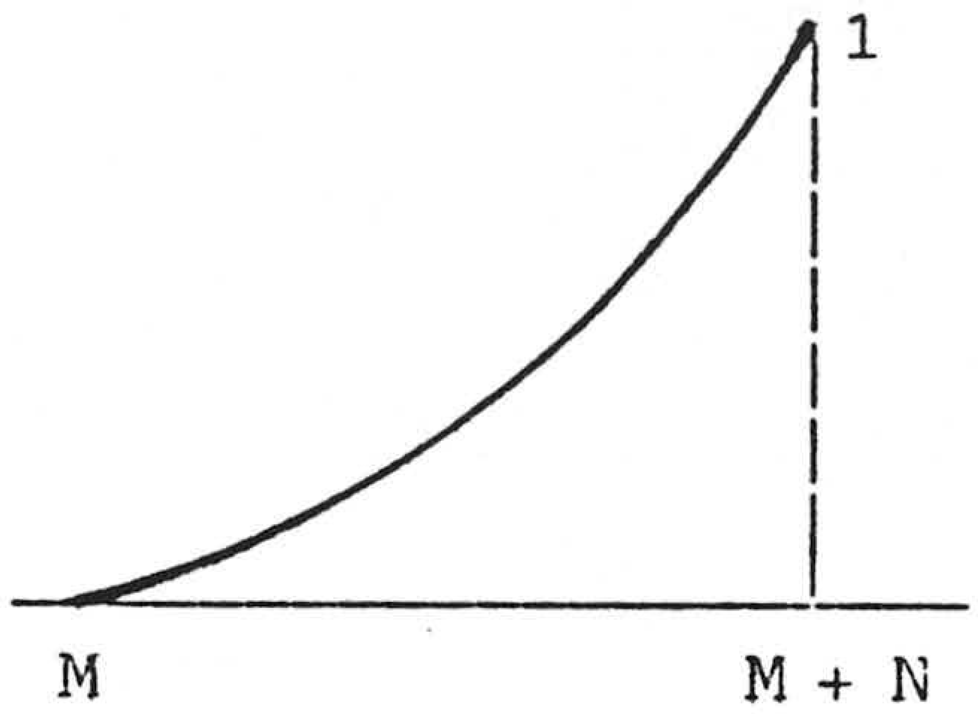
$$z = M + \sum_i N_i \beta_i = M + \sqrt{\alpha} \sum_i N_i = M + N\sqrt{\alpha}$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

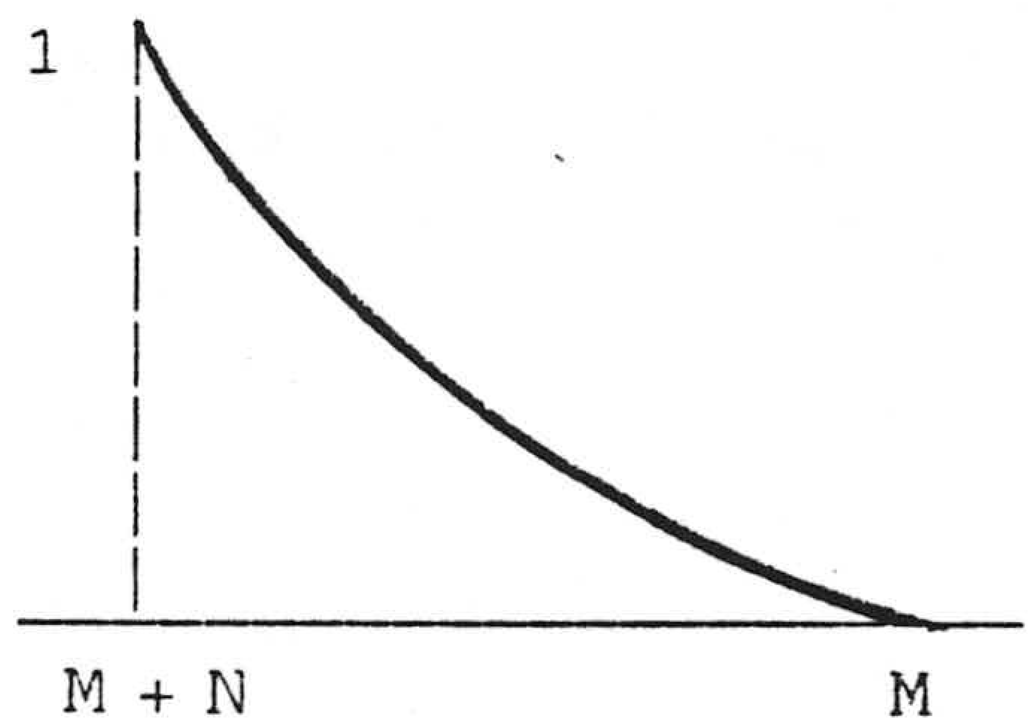
$$B = \{(x , (\frac{x-M}{N})^2) ; \quad x \in [M, M+N]\} \qquad [20]$$

Observación:

Si $N > 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica convexa y creciente



Si $N < 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica convexa y decreciente



TEOREMA 7.5. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son del tipo exponencial y consideramos que todas las violaciones d_i , $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d , entonces la solución difusa del problema [1] es el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{q^{\frac{d(S+R-x)}{S}} - q^d}{1 - q^d}) \ ; \quad 0<q<1 \ ; \ x \in [R, R+S]\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 5.3.2 y [13], tenemos:

$$z = R + \sum_i S_i \beta_i = R + \sum_i S_i \left(1 - \frac{\log_q [q^d + \alpha(1-q^d)]}{d}\right)$$

$$= R + S\left(1 - \frac{\log_q [q^d + \alpha(1-q^d)]}{d}\right) ; \quad 0 < q < 1$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{q^{\frac{d(S+R-x)}{S}} - q^d}{1 - q^d}) ; \; 0 < q < 1 ; \quad x \in [R, R+S]\} \quad [21]$$

Observación:

Si $S > 0$, la función de pertenencia de la solución es exponencial convexa y creciente.

Si $S < 0$, la función de pertenencia de la solución es exponencial convexa y decreciente.

TEOREMA 7.6. Si las funciones de pertenencia de las restricciones de [1] son de tipo logarítmico convexo, y considerando que todas las violaciones d_i $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d, la solución difusa de [1] es el conjunto difuso

$$B = \{ (x, \log_{d+1} [(x - R)\frac{d}{S} + 1]) ; \quad x \in [R, R + S] \}$$

DEMOSTRACION: Considerando 5.3.3. y [13], tenemos

$$z = R + \sum_i S_i \beta_i = R + \frac{(d + 1)^{\alpha} - 1}{d} \sum_i S_i = R + \frac{(d + 1)^{\alpha} - 1}{d} S$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{ (x, \log_{d+1} [(x - R) \frac{d}{S} + 1]) ; \quad x \in [R, R + S] \qquad [18]$$

Observación:

Si $S > 0$, la función de pertenencia de la solución es logarítmica convexa y creciente.

Si $S < 0$, la función de pertenencia de la solución es logarítmica convexa y decreciente.

8. SOLUCION DIFUSA AL PROBLEMA PLANTEADO, CUANDO LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA CONSIDERADAS SON LAS DEL APARTADO 4.

TEOREMA 8.1. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i\ x \gtrsim b_i$ son de tipo lineal, entonces la solución difusa del problema planteado es el conjunto difuso

$$B = \{ (x, \frac{x - M'}{N'}) \ ; \quad x \in [M' , M' + N']\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 6.1 y [14] tenemos

$$z = M' + \sum_i N'_i \gamma_i = M' + \sum_i N'_i \ \alpha = M' + \alpha N'$$

Operando, obtenemos como solución, el conjunto difuso

$$B = \{(x , \frac{x - M'}{N'}) \ ; \quad x \in [M' , M' + N']\} \qquad [22]$$

Observación:

Si $N' > 0$, la función de pertenencia de la solución es lineal y creciente.

Si $N' < 0$, la función de pertenencia de la solución es lineal y decreciente.

TEOREMA 8.2. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo parabólico cóncavo, entonces la solución difusa del problema planteado es el conjunto difuso

$$B = \{(x, -\frac{x^2}{N'^2} + \frac{2(M'+N')}{N'^2} x - \frac{M'}{N'^2}(M'+2N')); \ x \in [M', M'+N']\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 6.2.1 y [14] tenemos

$$z = M' + \sum_i N'_i \gamma_i = M' + \sum_i N'_i (1 - \sqrt{1-\alpha}) = M' + N'(1 - \sqrt{1-\alpha})$$

Operando, obtenemos como solución, el conjunto difuso

$$B = \{(x, -\frac{x^2}{N'^2} + \frac{2(M'+N')}{N'^2} x - \frac{M'}{N'^2}(M'+2N')) ; \ x \in [M', M'+N']\} \qquad [23]$$

Observación:

Si $N' > 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica cóncava y creciente

Si $N' < 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica cóncava y decreciente.

TEOREMA 8.3. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo logarítmico cóncavo y se considera que todas las violaciones d'_i, $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d', entonces la solución difusa del problema planteado, es el conjunto difuso

$$B = \{(x,\ \log_{d'+1}[(x - R')\ \frac{d'}{S'} + 1])\ ;\ x \in [R',\ R' + S']\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 6.2.2 y [15] , tenemos:

$$z = R' + \sum_i S'_i \gamma_i = R' + \sum_i S'_i \frac{(d'+1)^{\alpha} - 1}{d'} = R' + S' \frac{(d'+1)^{\alpha} - 1}{d'}$$

Operando, obtenemos como solución, el conjunto difuso

$$B = \{(x,\ \log_{d'+1}[(x - R')\ \frac{d'}{S'} + 1])\ ;\ x \in [R',\ R' + S']\} \qquad [24]$$

Observación:

Si $S' > 0$, la función de pertenencia de la solución es logarítmica cóncava y creciente.

Si $S' < 0$, la función de pertenencia de la solución es logarítmica cóncava y decreciente.

TEOREMA 8.4. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i\ x \gtrsim b_i$ son de tipo seno y considerando que todas las violaciones d'_i , $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d' , entonces la solución difusa al problema planteado, es el conjunto difuso

$$B = \{(x,\ \frac{\text{sen}\ [(x - R')\ d'/S']}{\text{sen}\ d'})\ ;\ x \in [R',\ R + S']\}$$

DEMOSTRACION: Por 6.2.3 y [15], tenemos

$$z = R' + \sum_i S'_i \, \gamma_i = R' + \sum_i S'_i \, \frac{\text{arc sen}\,(\alpha \text{ sen } d')}{d'} =$$

$$= R' + S' \, \frac{\text{arc sen}\,(\alpha \text{ sen } d')}{d'}$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{ (x, \frac{\text{sen } [(x-R') \, d'/S']}{\text{sen } d'}) \; ; \; x \in [R', R'+S'] \} \qquad [25]$$

Observación:

Si $S' > 0$, la función de pertenencia de la solución es tipo seno cóncava y creciente.

Si $S' < 0$, la función de pertenencia de la solución es tipo seno cóncava y decreciente.

TEOREMA 8.5. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i \, x \gtrsim b_i$ son de tipo potencial cóncava, entonces la solución difusa al problema planteado, es el conjunto difuso

$$B = \{ (x, (\frac{x - M'}{N'})^p) \; ; \; 0 < p < 1 \; ; \; x \in [M', M'+N'] \}$$

DEMOSTRACION: Considerando 6.2.4 y [14], tenemos:

$$z = M' + \sum_i N'_i \,\gamma_i = M' + \sum_i N'_i \sqrt[p]{\alpha} = M' + N' \sqrt[p]{\alpha}$$

$$0 < p < 1$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{(x, (\frac{x-M'}{N'})^p) \ , \quad 0 < p < 1 \ ; \quad x \in [M', \ M'+N']\} \qquad [26]$$

Observación:

Si $N' > 0$, la función de pertenencia de la solución es de tipo potencial cóncava y creciente.

Si $N' < 0$, la función de pertenencia de la solución es de tipo potencial cóncava y decreciente.

TEOREMA 8. 6. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i \, x \geq b_i$ son de tipo tangente hiperbólica y considerando que todas las violaciones d'_i, $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d', entonces la solución difusa al problema planteado, es el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{\text{th} \ [\, d' \, (x - R') / S' \,]}{\text{th} \ d'}) \ ; \quad x \in [R', \ R'+S']\}$$

DEMOSTRACION: Por 6.3.5 y [15] tenemos

$$z = R' + \sum_i S'_i \gamma_i = R' + \sum_i S'_i \frac{\arg th(\alpha\ th\ d')}{d'} =$$

$$= R' + S' \frac{\arg th\ (\alpha\ th\ d')}{d'}$$

Operando, obtenemos como solución, el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{th\ [d'(x - R')/S']}{th\ d'})\ ;\quad x \in [R', \ R' + S'] \qquad [31]$$

TEOREMA 8.7. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \geq b_i$ son de tipo parabólico convexo, entonces la solución difusa al problema planteado, es el conjunto difuso

$$B = \{(x, (\frac{x - M'}{N'})^2)\ ,\quad x \in [M', \ M' + N']\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 6.3.1 y [14] , tenemos:

$$z = M' + \sum_i N'_i \gamma_i = M' + \sum_i N'_i \sqrt{\alpha} = M' + N' \sqrt{\alpha}$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{(x, (\frac{x - M'}{N'})^2)\ ;\quad x \in [M', \ M' + N']\} \qquad [27]$$

Observación:

Si $N' > 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica convexa y creciente.

Si $N' < 0$, la función de pertenencia de la solución es parabólica convexa y decreciente.

TEOREMA 8.8. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i x \gtrsim b_i$ son de tipo exponencial y considerando que todas las violaciones d'_i, $i=1...m$ son iguales a d', entonces la solución difusa al problema planteado es el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{q_1^{\frac{d'}{S'}(x-R'-S')} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}}) \; ; \; q_1 > 1 \; ; \; x \in [R', R'+S']\}$$

DEMOSTRACION: Por 6.3.2 y [15] tenemos:

$$z = R' + \sum_i S'_i \gamma_i = R' + \sum_i S'_i \left(1 + \frac{\log_{q_1} [q_1^{-d'} + \alpha(1 - q_1^{d'})]}{d'}\right) =$$

$$= R' + S' \left(1 + \frac{\log_{q_1} [q_1^{-d'} + \alpha(1 - q_1^{-d'})]}{d'}\right), \quad q_1 > 1$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{q_1^{\frac{d'}{S'}(x-R'-S')} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}}) \; ; \; q_1 > 1 \; ; \; x \in [R', R'+S']\} \quad [28]$$

Observación:

Si $S' > 0$, la función de pertenencia de la solución es exponencial convexa y creciente

Si $S' < 0$, la función de pertenencia de la solución es exponencial convexa y decreciente.

TEOREMA 8.9. Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i\, x \geq b_i$ son de tipo potencial convexo, entonces la solución difusa al problema planteado es el conjunto difuso

$$B = \{(x, (\frac{x'-M'}{N'})^p) \ ; \quad p > 1 \quad ; \quad x \in [M', M'+N']\}$$

DEMOSTRACION: Considerando 6.3.3 y [14] , tenemos

$$z = M' + \sum_i N'_i \gamma_i = M' + \sum_i N'_i \sqrt[p]{\alpha} = M' + N' \sqrt[p]{\alpha} \ , \quad p > 1$$

Operando, obtenemos como solución, el conjunto difuso

$$B = \{(x, (\frac{x-M'}{N'})^p) \ , \quad p > 1 \quad , \quad x \in [M', M'+N']\} \qquad [29]$$

Observación:

Si $N' > 0$, la función de pertenencia de la solución es de tipo potencial convexa y creciente.

Si $N' < 0$, la función de pertenencia de la solución es de tipo potencial convexa y decreciente.

TEOREMA 8.10 Si las funciones de pertenencia de las restricciones $a_i\ x \gtrsim b_i$ son de tipo seno hiperbólico y considerando que todas las violaciones d'_i , $i=1...m$ permitidas por el decisor son iguales a d' , entonces la solución difusa al problema planteado, es el conjunto difuso

$$B = \{(x, \frac{sh\ [(\frac{x-R'}{S'})\ d']}{sh\ d'})\ ;\quad x \in [R',\ R'+ S']\}$$

DEMOSTRACION: Por 6.3.4 y [15] , tenemos

$$z = R'+ \sum_i S'_i\ \gamma_i = R'+ \sum_i S'_i\ \frac{\arg sh\ (\alpha\ sh\ d')}{d'} =$$

$$= R' + S'\ \frac{\arg sh\ (\alpha\ sh\ d')}{d'}$$

Operando, obtenemos como solución el conjunto difuso

$$B = \{ (x, \frac{sh\ [\ (\frac{x-R'}{S'})\ d'\ ]}{sh\ d'})\ ,\quad x \in [R',\ R'+ S'\ ]\ \} \qquad [30]$$

Observación:

Si $S' > 0$, la función de pertenencia de la solución es del tipo seno hiperbólico, convexa y creciente.

Si $S' < 0$, la función de pertenencia de la solución es del tipo seno hiperbólico convexa y decreciente.

Todos estos resultados los ilustramos a continuación con el siguiente ejemplo numérico

9.- EJEMPLO

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad [32]$$

Sabiendo, que el decisor tolera en la primera restricción una violación hasta el valor 3'5 y en la segunda hasta el valor 6'5.

La solución difusa de [32] se halla resolviendo el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 3 + 0'5\,(1 - \beta_1) \\ x_1 + x_2 &\leq 5 + 1'5\,(1 - \beta_2) \\ x_1 \geq 0\,, \quad x_2 \geq 0\,, \quad & \beta_1 \in [0,1] \quad \beta_2 \in [0,1] \end{aligned}$$

A. Si la función de pertenencia que define a cada una de las restricciones de [32] es lineal del tipo 3.1. entonces $\beta_1 = \beta_2 = \alpha$, por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + 0'5\,(1-\alpha)$$
$$x_1 + x_2 \leq 5 + 1'5\,(1-\alpha)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1]$$

Cuya solución es:

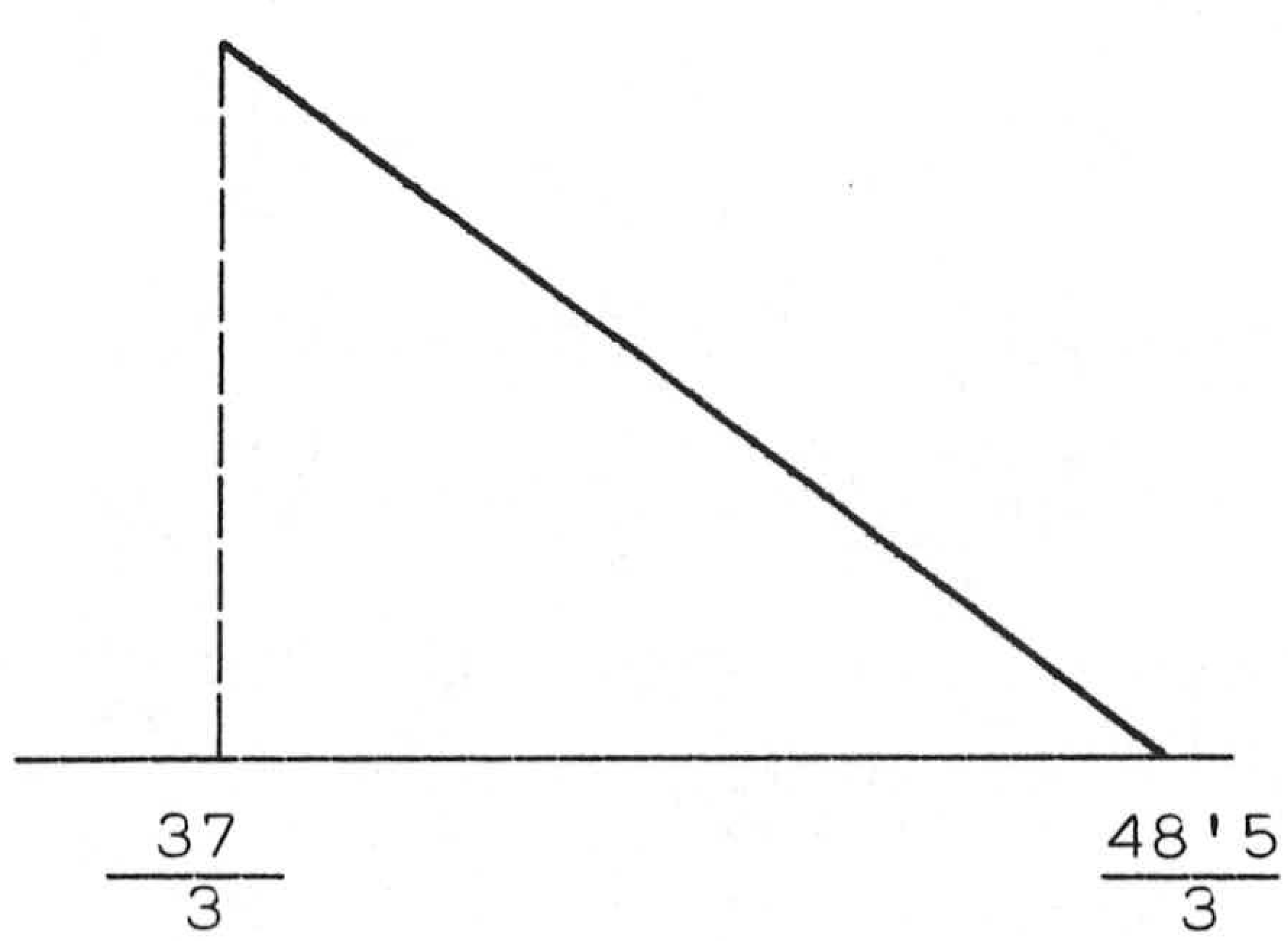
$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\alpha \quad ; \quad x_2 = \frac{9'5}{3} - \frac{2'5}{3}\alpha$$

$$z = \frac{48'5}{3} - \frac{11'5}{3}\alpha \quad \begin{cases} \alpha = 0 & z = \dfrac{48'5}{3} \\ \alpha = 1 & z = \dfrac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{(x, \frac{-3x + 48'5}{11'5}) \; ; \quad x \in [\frac{37}{3}, \frac{48'5}{3}]\}$$

con función de pertenencia lineal y decreciente



B. Si la función de pertenencia que define a cada una de las restricciones de [32] es parabólica cóncava del tipo 3.2.1 , entonces $\beta_1 = \beta_2 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$, por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + 0'5\sqrt{1-\alpha}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 + 1'5\sqrt{1-\alpha}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1]$$

Cuya solución es:

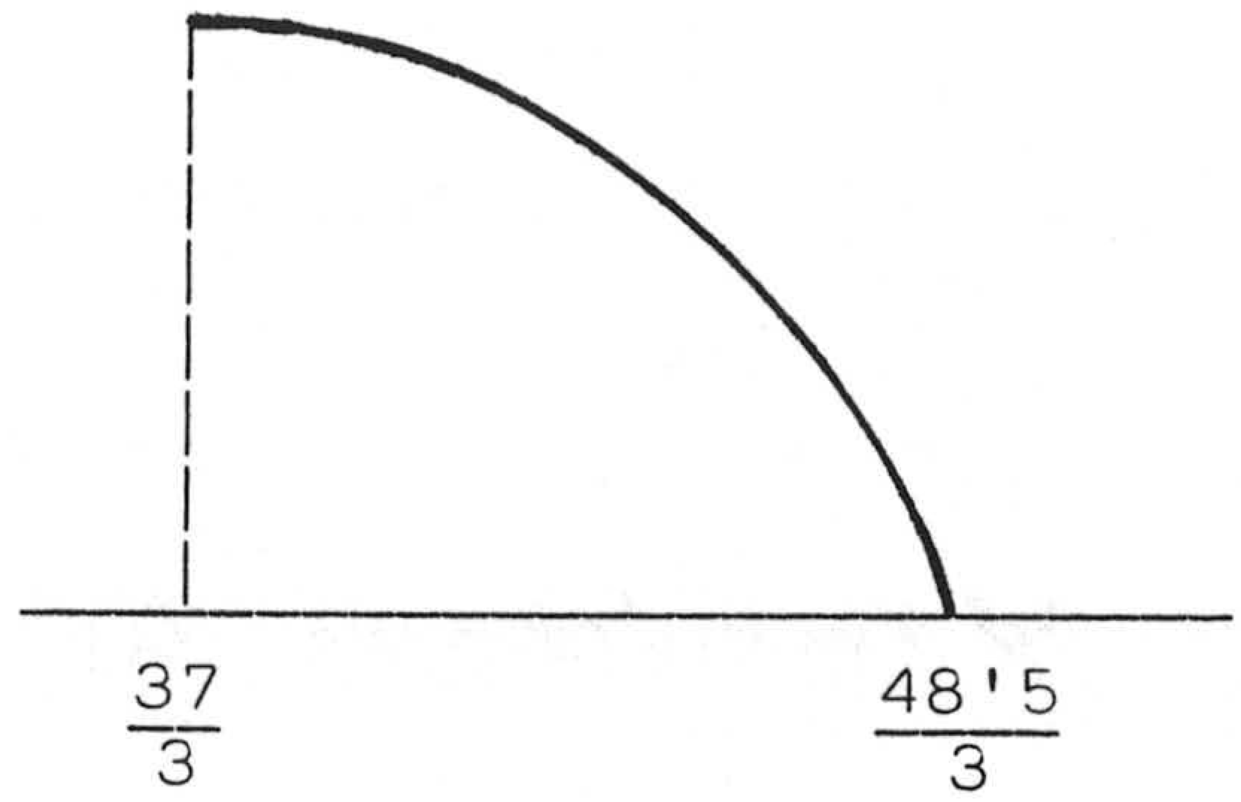
$$x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1-\alpha} \quad ; \quad x_2 = \frac{7}{3} + \frac{2'5}{3}\sqrt{1-\alpha}$$

$$z = \frac{37}{3} + \frac{11'5}{3}\sqrt{1-\alpha} \quad \begin{cases} \alpha = 0 & z = \dfrac{48'5}{3} \\ \alpha = 1 & z = \dfrac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{ (x, -0'068\,x + 1'678x - 9'352) \; ; \; x \in [\tfrac{37}{3}, \tfrac{48'5}{3}] \}$$

con función de pertenencia parabólica cóncava y decreciente



C. Si la función de pertenencia que define a cada una de las restricciones de [32] es parabólica convexa del tipo 3.3.1 ., entonces $\beta_1 = \beta_2 = \sqrt{\alpha}$,por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 \leq 3 + 0'5\,(1 - \sqrt{\alpha}\,) \\ x_1 + x_2 \leq 5 + 1'5\,(1 - \sqrt{\alpha}\,) \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1]$$

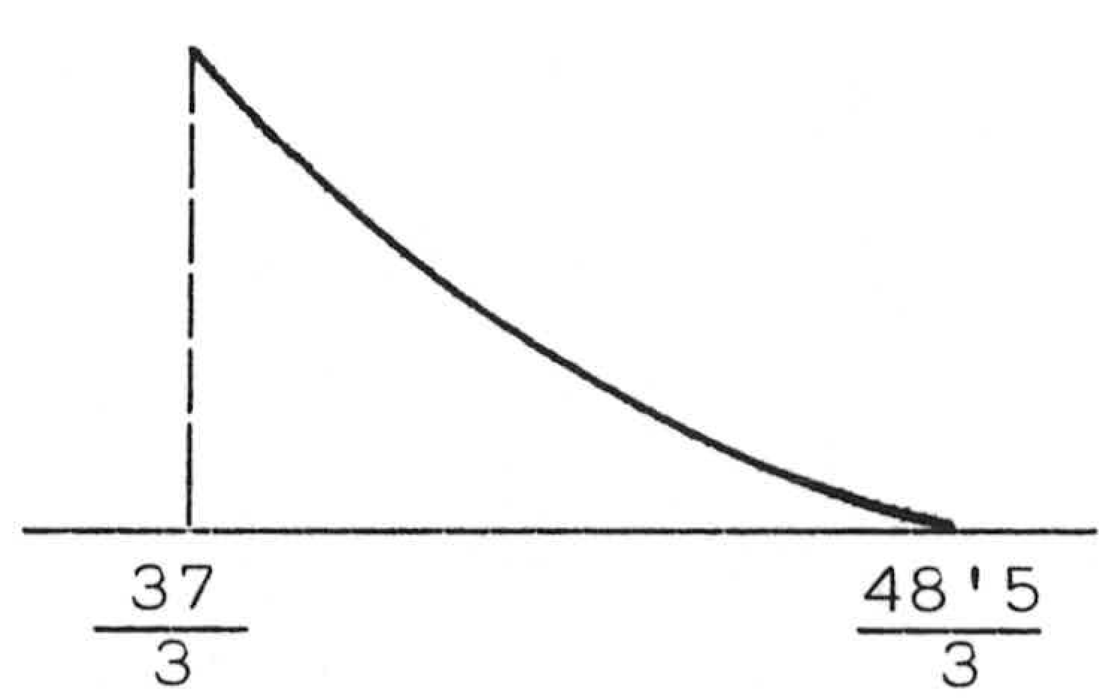
Cuya solución es:

$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} \quad ; \quad x_2 = \frac{9'5}{3} - \frac{2'5}{3}\sqrt{\alpha}$$

$$z = \frac{48'5}{3} - \frac{11'5}{3}\sqrt{\alpha} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = 0 & z = \dfrac{48'5}{3} \\ \alpha = 1 & z = \dfrac{37}{3} \end{array} \right.$$

Por lo que

$$B = \{(x, (\frac{3x - 48'5}{11'5})^2) \; ; \quad \alpha \in [\frac{37}{3} , \frac{48'5}{3}]\}$$



Supongamos que la violación permitida por el decisor en cada una de las restricciones de [32] es igual a 2 .

A'. Si la función de pertenencia que define cada una de las restricciones de [32] es lineal del tipo .3.1 , entonces $\beta_1 = \beta_2 = \alpha$, por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max. } z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 3 + 2(1-\alpha) \\ & x_1 + x_2 \leq 5 + 2(1-\alpha) \\ & x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$x_1 = 4 - \frac{4}{3}\alpha \quad ; \quad x_2 = 3 - \frac{2}{3}\alpha$$

$$z = 17 - \frac{14}{3}\alpha \begin{cases} \alpha = 0 & z = 17 \\ \alpha = 1 & z = \frac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{ (x, \frac{-3x + 51}{14}) \; ; \quad x \in [\frac{37}{3}, 17] \}$$

B'. Si la función de pertenencia que define cada una de las restricciones de [32] es parabólica cóncava del tipo 3.2.1 , entonces $\beta_1 = \beta_2 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 + 2\sqrt{1-\alpha}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1]$$

Cuya solución es:

$$x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{1-\alpha} \quad ; \quad x_2 = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1-\alpha}$$

$$z = \frac{37}{3} + \frac{14}{3}\sqrt{1-\alpha} \quad \begin{cases} \alpha = 0 & z = 17 \\ \alpha = 1 & z = \dfrac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{(x, -0'053\,x^2 + 1'37\,x - 7'10) \; ; \; x \in (\frac{37}{3}, 17)\}$$

C'. Si la función de pertenencia que define cada una de las restricciones de [32] es logarítmica del tipo 3.3.3 , entonces $\beta_1 = \beta_2 = \dfrac{(2+1)^{\alpha} - 1}{2}$, por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + 2\,\frac{3^{\alpha} - 1}{2} = 2 + 3^{\alpha}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 + 2\,\frac{3^{\alpha} - 1}{2} = 4 + 3^{\alpha}$$

Cuya solución es

$$x_1 = 2 + 2 \cdot 3^{\alpha-1} \quad ; \quad x_2 = 2 + 3^{\alpha-1}$$

$$z = 10 + 7 \cdot 3^{\alpha-1} \begin{cases} \alpha = 0 & z = 10 + \frac{7}{3} = \frac{37}{3} \\ \alpha = 1 & z = 17 \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{(x, 1 + \log_3 \frac{x - 10}{7}) \; ; \; x \in [\frac{37}{3} , 17]\}$$

D'. Si la función de pertenencia que define cada una de las restricciones de [32] es seno del tipo 3.2.2 entonces $\beta_1 = \beta_2 = - \frac{\text{arc sen}(\alpha(\text{sen}-2))}{2} = - \frac{\text{arc sen}(-o'0314\,\alpha)}{2}$

por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + 2\left(1 + \frac{\text{arc sen}(-0'0314\,\alpha)}{2}\right) = 5 + \text{arc sen}(-0'0314\alpha)$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 + 2\left(1 + \frac{\text{arc sen}(-0'0314\,\alpha)}{2}\right) = 7 + \text{arc sen}(-0'0314\,\alpha)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1]$$

Cuya solución es:

$$x_1 = 4 + \frac{2}{3} \text{ arc sen } (-0'0314\,\alpha)$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{3} \text{ arc sen } (-0'0314\,\alpha)$$

$$z = 17 + \frac{7}{3} \text{ arc sen } (-0'314\,\alpha) \begin{cases} \alpha = 0 & z = 17 \\ \alpha = 1 & z = \frac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$B = \{ (x, \frac{\text{sen } [(x-17)\ 3/7]}{\text{sen } (-2)}) \ ; \quad x \in [\frac{37}{3}, 17] \}$$

E'. Si la función de pertenencia que define cada una de las restricciones de [32] es parabólica convexa del tipo 3.3.1 entonces $\beta_1 = \beta_2 = \sqrt{\alpha}$, por lo que se trataría de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max. } z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + 2(1 - \sqrt{\alpha})$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 + 2(1 - \sqrt{\alpha})$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad \alpha \in [0,1]$$

Cuya solución es

$$x_1 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{\alpha} \quad ; \quad x_2 = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}$$

$$z = 17 - \frac{14}{3}\sqrt{\alpha} \quad \begin{cases} \alpha = 0 & z = 17 \\ \alpha = 1 & z = \dfrac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{ (x, \ (\frac{3x - 51}{14})^2) \quad ; \quad x \in [\frac{37}{3}, 17] \}$$

F'. Si la función de pertenencia que define cada una de las restricciones de [32] es exponencial del tipo 3.3.2 , entonces $\beta_1 = \beta_2 = 1 - \dfrac{\log_q [q^2 + \alpha(1-q^2)]}{2}$; $0 < q < 1$, q valor conocido, se trata de resolver el problema lineal paramétrico

$$\text{Max.} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$2x_1 - x_2 \leq 3 + \log_q [q^2 + \alpha(1-q^2)]$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 + \log_q [q^2 + \alpha(1-q^2)]$$

Cuya solución es

$$x_1 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \log_q [q^2 + \alpha (1 - q^2)]$$

$$x_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \log_q [q^2 + \alpha (1 - q^2)]$$

$$z = \frac{37}{3} + \frac{7}{3} \log_q [q^2 + \alpha (1 - q^2)] \begin{cases} \alpha = 0 & z = 17 \\ \alpha = 1 & z = \dfrac{37}{3} \end{cases}$$

Por lo que

$$B = \{ (x, \frac{q^{(3x-37)/7} - q^2}{1 - q^2}) \quad ; \quad x \in [\frac{37}{3}, 17]\}$$

10. CONCLUSIONES

1. Si al decisor le interesa conocer únicamente el intervalo en el que va a estar comprendida la solución difusa, del problema lineal paramétrico planteado, puede utilizar la función de pertenencia que desee para las restricciones, ya que el intervalo es independiente de la forma de dicha función.

   Por tanto se concluye, que las funciones de pertenencia más convenientes son las lineales, ya que son las más sencillas de usar.

2. Si además al decisor le interesa conocer el tipo de solución difusa que va a obtener, dependiendo de los tipos de funciones de pertenencia que utilice para las restricciones, tenemos que:

   2.1. Si las restricciones son del tipo $\leq$ y la función de pertenencia es del tipo:

   2.1.1. **Lineal**, la función de pertenencia de la solución es de tipo lineal, creciente si $N > 0$ y decreciente si $N < 0$.

   2.1.2. **Parabólico cóncavo**, la función de pertenencia de la solución es de tipo parabólico cóncavo, creciente si $N > 0$ y decreciente si $N < 0$.

   2.1.3. **Seno** y todas las violaciones permitidas por el decisor son iguales, la función de pertencia de la solución es de tipo seno, cóncava, creciente si $S > 0$ y decreciente si $S < 0$.

2.1.4. **Parabólico convexo,** la función de pertenencia de la solución es de tipo parabólico convexo, creciente si $N > 0$ y decreciente si $N < 0$.

2.1.5. **Exponencial** , considerando que todas las violaciones permitidas por el decisor son iguales, la función de pertenencia de la solución es de tipo exponencial, convexa , creciente si $S > 0$ y decreciente si $S < 0$.

2.1.6. **Logarítmico convexo** y todas las violaciones permitidas por el decisor son iguales, la función de pertenencia de la solución es de tipo logarítmico convexo, creciente si $S > 0$ y decreciente si $S < 0$.

2.2. Si las restricciones son del tipo $\gtrsim$ y la función de pertenencia es del tipo:

2.2.1. **Lineal,** la función de pertenencia de la solución es lineal, creciente si $N' > 0$ y decreciente si $N' < 0$.

2.2.2. **Parabólico cóncavo,** la función de pertenencia de la solución es de tipo parabólico cóncavo, creciente si $N' > 0$ y decreciente si $N' < 0$.

2.2.3. **Logarítmico cóncavo** y todas las violaciones permitidas por el decisor son iguales, la función de pertenencia de la solución es de tipo logarítmico cóncavo, creciente si $S' > 0$ y decreciente si $S' < 0$.

2.2.4. **Seno**, considerando que todas las violaciones permitidas por el decisor son iguales, la función de pertenencia de la solución es de tipo seno, creciente si $S' > 0$ y decreciente si $S' < 0$.

2.2.5. **Potencial cóncava** (exponente comprendido entre 0 y 1) la función de pertenencia de la solución es de tipo potencial cóncavo (exponente comprendido entre 0 y 1) creciente si $N' > 0$ y decreciente si $N' < 0$.

2.2.6. **Tangente hiperbólica** y siendo todas las violaciones permitidas por el decisor iguales, la función de pertenencia de la solución es del tipo tangente hiperbólica cóncava, creciente si $S' > 0$ y decreciente si $S' < 0$.

2.2.7. **Parabólico convexo**, la función de pertenencia de la solución es de tipo parabólico convexo, creciente si $N' > 0$ y decreciente si $N' < 0$.

2.2.8. **Potencial convexo** (exponente mayor que 1), la función de pertenencia de la solución es de tipo potencial convexo (exponente mayor que 1) creciente si $N' > 0$ y decreciente si $N' < 0$.

2.2.9. **Seno hiperbólico**, considerando que todas las violaciones permitidas por el decisor son iguales, la función de pertenencia de la solución es de tipo seno hiperbólico, convexo, creciente si $S' > 0$ y decreciente si $S' < 0$.

CAPITULO III

MODELOS AUXILIARES, PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL DIFUSA, CON NUMEROS DIFUSOS

0. INTRODUCCION

El uso de números difusos, es frecuente en un gran número de áreas de especialización, tanto teóricas como aplicadas. Sin ningún genero de dudas, una de ellas es la Programación Lineal Difusa, donde se han empleado para la modelización de costos, y por tanto de objetivos imprecisos, así como para el tratamiento de restricciones difusas.

Para centrar el objetivo de este tercer capítulo, haremos un breve repaso histórico sobre el uso de números difusos en problemas de Programación Lineal, poniendo el enfasis en el caso de su empleo como coeficientes en las restricciones, ya que es el que aquí más nos interesa.

Los números difusos en problemas de Programación Matemática, fueron considerados por primera vez por Oh'Eigeartaigh (M. Oh'Eigeartaigh: A Fuzzy Transportation Algorithm. Fuzzy Sets and Systems 8, 235-245, 1982), pero en el contexto particular de un problema de transporte, sobre el que se suponía que demandas y necesidades estaban definidas vagamente y, por tanto, dadas como números difusos.

Desde el punto de vista abstracto, el problema que se quería resolver era como el siguiente

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad \sum_j a_{ij}\, x_j \le b_i \\ &\qquad\qquad x_j \ge 0 \end{aligned}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $x_j \in \mathbb{R}$ y b_1, b_2, ..., b_m son números difusos.

Para resolver este problema (pero en su versión particular de problema del transporte) se propuso usar el método que Zimmermann (H.J. Zimmermann: Description and Optimization of Fuzzy Systems. Int. J. of Genral Systems 2, 209-215, 1975) dió para resolver el siguiente modelo

$$\begin{aligned} \text{Max:}\quad & z = cx \\ \text{s.a:}\quad & \\ & \sum_j a_{ij}\, x_j \lesssim b_i \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

modelo en el que $c \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ (¡no son difusos!) pero el simbolo $\lesssim$ indica que la restricción es de tipo difuso.

Indudablemente, con la vista puesta en resolver un problema de transporte "en algún sentido" difuso, Oh'Eigeartaigh asoció un método de resolución a su modelo, que no era el apropiado, ya que:

a) En el problema de Oh'Eigeartaigh, en cada restricción se quiere comparar núemros reales (en el primer miembro) con números difusos (en el segundo) mediante una relación convencional $\leq$, y

b) En el modelo de Zimmermann, en cada restricción se mide el grado de cumplimiento con que el primer miembro verifica la desigualdad, conforme a una función de pertenencia que previamente se ha especificado.

Independientemente de la conveniencia en cada caso de usar números difusos en las restricciones, lo que si está claro es que si estos aparecen en ambos miembros, la relación que ha de medir la satisfacción de cada restricción, por la naturaleza vaga que esta tiene, no puede ser una relación convencional, sino de tipo difuso. Este punto de vista, fué puesto de manifiesto por M. Delgado et al (M. Delgado, J.L. Verdegay y M.A. Vila: A General Model for Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems 29, 21-29, 1989) y desarrollado en la Tesis Doctoral de L. Campos (op. cit.), como ya se dijo, para el caso de números difusos triangulares generales. Aquí lo desarrollaremos, de acuerdo con todo lo anterior, para otros tipos de números, de cara a obtener resultados que nos informen sobre la bondad del uso de un tipo de funciones de pertenencia u otros.

0.0. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Consideremos el problema modelizado por:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_{ij}\, x_j \circledS \underset{\sim}{b}_i \qquad i=1...m \qquad [A]$$

$$x_j \geq 0$$

donde $\underset{\sim}{a}_{ij}$, $i=1...m$, $j=1...n$ y b_i , $i=1...m$ son números difusos y $\circledS$ es una relación entre números difusos por especificar.

Dependiendo del tipo de función de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_{ij}$, $i=1...m$, $j=1...n$ y $\underset{\sim}{b}_i$, $i=1...m$, así como de la relación que consideremos, iremos obteniendo diferentes modelos de problemas de programación convencional.

Notaremos $\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_{ij}\, x_j = \underset{\sim}{a}_i\, x$

1. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA LINEAL

Para el caso de números difusos con función de pertenencia lineal, los diferentes índices de comparación que hemos analizado en el Capítulo I, producen los siguientes modelos de programación convencional (L. CAMPOS, 1987):

CATALOGO DE MODELOS

1.1. Si utilizamos el índice de Chang para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$(d_i x + d'_i x)(3 a_i x + d_i x - d'_i x) \leq (t_i + t'_i)(3 b_i + t_i - t'_i) \qquad [1.1.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Cuando los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ son simétricos, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$(d_i x)\ (a_i x) \leq t_i\ b_i \qquad [1.1.2]$$

$$x \geq 0 \qquad i=1 \ldots m$$

Observación: Ambos problemas presentan el inconveniente de no ser lineales.

1.2. Si utilizamos el primer índice de Yager, con $g(z)=z$, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$3 a_i x + d_i x - d'_i x \leq 3 b_i + t_i - t'_i \qquad [1.2.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Max:}\quad z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad a_i x \leq b_i \qquad i = 1\ldots m \qquad [1.2.2] \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}$$

Observación: Ambos son problemas de programación lineal convencional y con la misma dimensión que el problema inicial [A].

1.3. Si empleamos el segundo índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max:}\quad z = cx \\
&\text{a.a:} \\
&\qquad (t_i + 1)\, a_i\, x + (1 - b_i)\, d_i\, x \leq b_i + t_i \qquad [1.3.1] \\
&\qquad x \geq 0 \qquad i = 1\ldots m
\end{aligned}$$

Observación: es un problema de programación lineal clásica, con el mismo número de restricciones que el problema inicial [A].

1.4. Si utilizamos el tercer índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max:}\quad z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad 4\, a_i\, x + d_i\, x - d'_i\, x \leq 4\, b_i + t_i - t'_i \qquad [1.4.1] \\
&\qquad x \geq 0 \qquad i = 1\ldots m
\end{aligned}$$

Cuando los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max:} \quad z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad \underset{\sim}{a}_i\, x \leq \underset{\sim}{b}_i \qquad i=1\ldots m \qquad\qquad [1.4.2] \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
$$

Observación: Ambos son problemas lineales y con la misma dimensión que el problema inicial [A] . Además el problema [1.4.2] coincide con el [1.2.2] .

1.5. Considerando el índice de Adamo para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max:} \quad z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad a_i\, x + d_i\, x\,(1 - \alpha) \leq b_i + t_i\,(1 - \alpha) \qquad\qquad [1.5.1] \\
&\qquad\quad x \geq 0 \qquad\qquad i = 1\ldots m \\
&\qquad \alpha \text{ dado} \qquad\qquad \alpha \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Observacion: Este problema, coincide con el [1.2.2] si $\alpha = 1$

1.6. Teniendo en cuenta el método de Jain, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, si $k=1$, tenemos:

1.6.1. Si consideramos el primer caso del método de Jain, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i\, x\, (b_i + 2\, t_i) + t_i\, (d_i\, x) = (b_i + t_i)^2 \qquad [1.6.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i=1...m$$

Observación: Este problema es lineal y con el mismo número de restricciones, que el problema inicial [A].

1.6.2. Si consideramos el segundo caso del método de Jain, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i\, x$ y $\tilde{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = c\, x$

s.a:

$$(a_i x + d_i x)^2 - (a_i x + d_i x)\, b_i - (d_i\, x)(b_i + t_i) \leq 0 \qquad [1.6.2]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1...m$$

Observación: Este problema, presenta el inconveniente de no ser lineal.

1.6.3. Si consideramos el tercer caso del método de Jain, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i\, x \leq b_i \quad , \; i= 1...m \qquad [1.6.3]$$

$$x \geq 0$$

Observacion: Este problema coincide con el [1.2.2] .

1.7. Si empleamos el grado de posibilidad de dominancia para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = cx \\ \text{s.a:} & \\ & a_i\, x \leq b_i \\ & x \geq 0 \qquad i = 1\ldots m \end{array} \qquad [1.7.1]$$

Observación: Este problema coincide con el [1.2.2] .

1.8. Si utilizamos el grado de necesidad de dominancia, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = cx \\ \text{s.a:} & \\ & 2\, a_i x - d'_i\, x \leq 2\, b_i - t'_i \\ & x \geq 0 \qquad i = 1\ldots m \end{array} \qquad [1.8.1]$$

Observación: Este problema es lineal y con el mismo número de restricciones que el [A] .

2. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{b}_i$, la dada en 1.2 del Capítulo I , es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t'^2_i} z^2 + \dfrac{2\, b_i}{t'^2_i} z + 1 - \dfrac{b_i^2}{t'^2_i} & \text{si } b_i - t'_i \leq z \leq b_i \\ -\dfrac{1}{t_i^2} z^2 + \dfrac{2\, b_i}{t_i^2} z + 1 - \dfrac{b_i^2}{t_i^2} & \text{si } b_i \leq z \leq b_i + t_i \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{a}_i\, x$, la obtenida en el teorema 2.2 del capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(d'_i x)^2} z^2 + \dfrac{2\, a_i x}{(d'_i x)^2} z + 1 - \left(\dfrac{a_i x}{d'_i x}\right)^2 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x - d'_i x \leq z \leq a_i x \end{cases} \\ -\dfrac{1}{(d_i x)^2} z^2 + \dfrac{2\, a_i x}{(d_i x)^2} z + 1 - \left(\dfrac{a_i x}{d_i x}\right)^2 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x \leq z \leq a_i x + d_i x \end{cases} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

TEOREMA 2.1.

Si utilizamos el índice de Chang, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$(d_i x + d'_i x)\left[\frac{2}{3} a_i x + \frac{1}{4}(d_i x - d'_i x)\right] \leq (t_i + t'_i)\left[\frac{2}{3} b + \frac{1}{4}(t_i - t'_i)\right] \qquad [2.1.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1...m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i\, x \,.\, d_i\, x \leq b_i \,.\, t_i \qquad i=1...m \qquad [2.1.2]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.1 del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas, presentan el inconveniente de no ser lineales, coincidiendo el problema [2.1.2] , con el [1.1.2] .

TEOREMA 2.2.

Si utilizamos el primer índice de Yager, con $g(z)=z$, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i\, x + \frac{3}{8}(d_i x - d'_i x) \leq b_i + \frac{3}{8}(t_i - t'_i) \qquad [2.2.1]$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1...m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = cx \\ \text{s.a:} & \\ & a_i\, x \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad [2.2.2]$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.2. del Capítulo I.

Observación: Este último problema, coincide con el [1.2.2] .

TEOREMA 2.3.

Si utilizamos el segundo índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = cx \\ \text{s.a:} & \\ & 2\, a_i\, x - (d_i\, x)^2 + d_i\, x \sqrt{(d_i\, x)^2 - 4\, a_i\, x + 4} \leq \\ & 2\, b_i - t_i^2 + t_i \sqrt{t_i^2 - 4\, b_i + 4} \quad , \; i = 1 \ldots m \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad [2.3.1]$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.3. del Capítulo I.

Observación: Este problema presenta el inconveniente de no ser lineal.

TEOREMA 2.4.

Si empleamos el tercer índice de Yager, para comparar números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\quad 3\, a_i x - d_i x + d'_i x \leq 3\, b_i - t_i + t'_i \qquad [2.4.1] \\ &\quad x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m \end{aligned}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\quad a_i x \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m \qquad [2.4.2] \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.4. del Capítulo I.

Observación: Estos problemas son lineales, con la misma dimensión que el inicial [A] y coincidiendo el [2.4.2] con el problema [1.2.2] .

TEOREMA 2.5.

Si comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, mediante el índice de Adamo, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + d_i x \sqrt{1-\alpha} \leq b_i + t_i \sqrt{1-\alpha} \qquad [2.5.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

$$\alpha \text{ dado} \quad , \qquad \alpha \in [0,1]$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.5 del Capítulo I.

Observación: Este problema es lineal, con el mismo número de restricciones que el problema inicial [A] y coincide con el [1.2.2] , para el valor $\alpha = 1$.

TEOREMA 2.6.

Si tenemos en cuenta el método de Jain, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ y $k = 1$ tenemos:

Para el primer caso, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$2a_i x(b_i+t_i)-(d_i x)^2+(d_i x)\sqrt{(d_i x)^2-4a_i x(b_i+t_i)+4(b_i+t_i)^2} \leq$$

$$2b_i(b_i+t_i) - t_i^2 + t_i\sqrt{5t_i^2+4b_i t_i} \qquad i = 1 \ldots m \qquad [2.6.1]$$

$$x \geq 0$$

Para el segundo caso, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$2a_i x(a_i x + d_i x) - (d_i x)^2 + d_i x \sqrt{5(d_i x)^2 + 4a_i x . d_i x} \leq$$

$$2b_i(a_i x + d_i x) - t_i^2 + t_i \sqrt{t_i - 4b_i(a_i x + d_i x) + 4(a_i x + d_i x)^2} \qquad [2.6.2]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Para el tercer caso, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$-2d_i x(b_i + t_i) - (d_i x)^2 + d_i x \sqrt{5(d_i x)^2 + 4(b_i + t_i - d_i x) d_i x} \leq$$

$$-2b_i t_i - 3t_i^2 + t_i \sqrt{5t_i^2 + 4b_i t_i} \quad , \qquad [2.6.3]$$

$$i = 1 \ldots m \qquad x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.6. del Capítulo I.

Observación: Es evidente, que los resultados obtenidos son poco operativo.

TEOREMA 2.7.

Si consideramos el grado de posibilidad de dominancia para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$d_i\, x - d'_i\, x \leq t_i - t'_i \qquad i = 1\ldots m \qquad [2.7.1]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.7. del Capítulo I.

Observación: Este modelo no tiene sentido utilizarle, ya que unicamente tiene en cuenta las amplitudes de los números difusos.

TEOREMA 2.8.

Si empleamos el grado de necesidad de dominancia para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$[(d'_i\, x)^2 - t'^2_i]\ [2(a_i\, x - b_i)^2 + (d'_i\, x)^2 + t'^2_i] - \qquad [2.8.1]$$

$$4\, d'_i\, x.t'_i\, (a_i x - b_i) \sqrt{(d'_i\, x)^2 + t'^2_i - (a_i\, x - b_i)^2} \geq 0$$

$$i = 1\ldots m \qquad x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.2.8 del Capítulo I.

Observación: El resultado obtenido es poco operativo.

3. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONVEXA.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{b}_i$ la dada en 1.3 , del capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{t'^2_i} z^2 - 2\,\dfrac{b_i - t'_i}{t'^2_i}\, z + \dfrac{(b_i - t'_i)^2}{t'^2_i} & \text{si } b_i - t'_i \leq z \leq b_i \\[2ex] \dfrac{1}{t_i^2} z^2 - 2\,\dfrac{b_i + t_i}{t_i^2}\, z + \dfrac{(b_i + t_i)^2}{t_i^2} & \text{si } b_i \leq z \leq b_i + t_i \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{a}_i\, x$, la dada por el teorema 2.3 , del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d'_i x)^2} z^2 - 2\,\dfrac{a_i x - d'_i x}{(d'_i x)^2} + \dfrac{(a_i x - d'_i x)^2}{(d'_i x)^2} & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ a_i x - d'_i x \leq z \leq a_i x \end{cases} \\[4ex] \dfrac{1}{(d_i x)^2} z^2 - 2\,\dfrac{a_i x + d_i x}{(d_i x)^2}\, z + \dfrac{(a_i x + d_i x)^2}{(d_i x)^2} & \text{si } \begin{cases} x \;\; 0 \\ \text{y} \\ a_i x \leq z \leq a_i x + d_i x \end{cases} \\[4ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

TEOREMA 3.1

Si consideramos el índice de Chang, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max:}\quad z = cx$$

$$\text{s.a:}$$

$$(d_i x + d'_i x)\left[a_i x + \frac{1}{4}(d_i x - d'_i x)\right] \leq (t_i + t'_i)\left[b_i + \frac{1}{4}(t_i - t'_i)\right] \qquad [3.1.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos tenemos que resolver el problema:

$$\text{Max:}\quad z = cx$$

$$\text{s.a:}$$

$$a_i\, x \,.\, d_i\, x \leq b_i \,.\, t_i \qquad [3.1.2]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.3.1 del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas presentan el inconveniente de no ser lineales y además el [3.1.2] , coincide con el problema [1.1.2]

TEOREMA 3.2

Si utilizamos el primer índice de Yager, con g(z)=z, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$4\,a_i x + d_i x - d'_i x \leq 4\,b_i + t_i - t'_i \qquad [3.2.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m \qquad [3.2.2]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta considerar 4.3.2 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas son lineales, con el mismo número de restricciones que el inicial [A] , siendo además coincidentes el [3.2.2] y el [1.2.2] .

TEOREMA 3.3.

Si utilizamos el segundo índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$2(a_i x + d_i x) + (d_i x) - d_i x \sqrt{(d_i x)^2 + 4\,(a_i x + d_i x)} \leq \qquad [3.3.1]$$

$$2(b_i + t_i) + t_i^2 - t_i \sqrt{t_i^2 + 4\,(b_i + t_i)} \qquad i = 1 \ldots m$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.3.3 , del Capítulo I.

TEOREMA 3.4.

Si utilizamos el tercer índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad 6\, a_i x + d_i x - d'_i\, x \leq 6\, b_i + t_i - t'_i \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \qquad\qquad i = 1 \ldots m \end{aligned} \qquad [3.4.1]$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos tenemos que resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad a_i\, x \leq b_i \qquad\qquad i = 1 \ldots m \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned} \qquad [3.4.2]$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.3.4 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas son lineales, con el mismo número de restricciones que el inicial [A] , coincidiendo el problema [3.4.2] , con el [1.2.2] .

TEOREMA 3.5.

Si empleamos el índice de Adamo, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$a_i x + d_i x\,(1 - \sqrt{\alpha}) \leq b_i + t_i\,(1 - \sqrt{\alpha}) \qquad [3.5.1]$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

$$\alpha \text{ dado} \qquad \alpha \in [0,1]$$

Demostración: Basta considerar 4.3.5. del Capítulo I.

Observación: Este problema coincide con el [1.2.2], para el valor $\alpha = 1$.

TEOREMA 3.6.

Si utilizamos el método de Jain, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, con $k = 1$, tenemos:

Para el primer caso, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$2(a_i x + d_i x)(b_i + t_i) + (d_i x)^2 - d_i x \sqrt{(d_i x)^2 + 4\,(a_i x + d_i x)(b_i + t_i)} \leq$$

$$2\,(b_i + t_i)^2 + t_i^2 - t_i \sqrt{t_i^2 + 4\,(b_i + t_i)^2} \qquad i = 1 \ldots m \qquad [3.6.1]$$

$$x \geq 0$$

Para el segundo caso, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$2(a_i x + d_i x)^2 + (d_i x)^2 - d_i x \sqrt{(d_i x)^2 + 4(a_i x + d_i x)^2} \leq \qquad [3.6.2]$$

$$2(b_i + t_i)(a_i x + d_i x) + t_i^2 - t_i \sqrt{t_i^2 + 4(b_i + t_i)(a_i x + d_i x)}$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1\ldots m$$

Para el tercer caso, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$(d_i x)^2 - d_i x \sqrt{(d_i x)^2 + 4(b_i + t_i)^2} \leq \qquad [3.6.3]$$

$$t_i^2 - t_i \sqrt{t_i^2 + 4(b_i + t_i)^2} \qquad i = 1\ldots m$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.3.6 del Capítulo I.

Observación: Los tres resultados, se muestran poco operativos.

TEOREMA 3.7.

Si utilizamos el grado de posibilidad de dominancia para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$d'_i x + d_i x \geq -(t'_i + t_i) \quad , \quad i = 1...m \qquad [3.7.1]$$

$$x \geq 0$$

Si $\underset{\sim}{a}$ x y $\underset{\sim}{b}$ son números difusos simétricos, el problema auxiliar a resolver es

Max: $z = cx$

s.a:

$$d_i x \geq -t_i \quad , \quad i = 1...m \qquad [3.7.2]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.3.7 del Capítulo I.

Observación: Este índice no tiene sentido utilizarle, ya que compara unicamente las amplitudes de los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$.

TEOREMA 3.8.

Si empleamos el grado de necesidad de dominancia, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$(d'_i x)^4 + 2\, d'_i x . t'_i (a_i x - d'_i x - b_i + \qquad [3.8.1]$$

$$+ t'_i) \sqrt{-(a_i x - d'_i x - b_i + t'_i)^2 + t'^2_i + (d'_i x)^2} \leq t'^4_i \quad , \quad i = 1...m$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.3.8. del Capítulo I.

Observación: Este resultado se muestra poco operativo.

4. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA CONCAVA POR LA IZQUIERDA Y CONVEXA POR LA DERECHA.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{b}$, la dada en 1.4 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t'^2_i} z^2 + \dfrac{2\, b_i}{t'^2_i} z + 1 - \dfrac{b_i^2}{t'^2_i} & \text{si } b_i - t'_i \leq z \leq b_i \\[2ex] \dfrac{1}{t_i^2} z^2 - 2\, \dfrac{b_i + t_i}{t_i^2} z + \dfrac{(b_i + t_i)^2}{t_i^2} & \text{si } b_i \leq z \leq b_i + t_i \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{a}_i x$, la obtenida en el teorema 2.4. del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(d'_i x)^2} z^2 + 2\, \dfrac{a_i x}{(d'_i x)^2} z + 1 - \left(\dfrac{a_i x}{d'_i x}\right)^2 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ a_i x - d'_i x \leq z \leq a_i x \end{cases} \\[4ex] \dfrac{1}{(d_i x)^2} z^2 - 2\, \dfrac{a_i x + d_i x}{(d_i x)^2} z + \left(\dfrac{a_i x + d_i x}{d_i x}\right)^2 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ a_i x \leq z \leq a_i x + d_i \end{cases} \\[4ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

TEOREMA 4.1

Si empleamos el índice de Chang, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$\frac{1}{3}(a_i x)(2d'_i x + d_i x) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(d_i x)^2 - (d'_i x)^2\right] \leq \qquad [4.1.1]$$

$$\frac{1}{3} b_i (2t'_i + t_i) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} t_i^2 - t'^2_i\right]$$

$x \geq 0 \qquad i = 1...m$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x . d_i x - \frac{1}{6}(d_i x)^2 \leq b_i \; t_i - \frac{1}{6} t_i^2 \qquad [4.1.2]$$

$x \geq 0 \qquad i = 1...m$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.4.1 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas, presentan el inconveniente de no ser lineales.

TEOREMA 4.2

Si utilizamos el primer índice de Yager, con $g(z)=z$, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ el problema a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

s.a:

$$a_i x + \frac{(d_i x)^2 - 3\,(d'_i\, x)^2}{4\,(2\, d'_i\, x + d_i x)} \leq b_i + \frac{t_i^2 - 3\, t'^2_i}{4\,(2t'_i + t_i)} \qquad [4.2.1]$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad i = 1\ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

s.a:

$$6\, a_i x - d_i\, x \leq 6\, b_i - t_i \qquad [4.2.2]$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad i = 1\ldots m$$

Demostración: Basta considerar los resultados obtenidos en 4.4.2, del Capítulo I.

Observación: Este último problema es lineal y de la misma dimensión que el inicial [A] y el [4.2.1], presenta el inconveniente de no ser lineal.

TEOREMA 4.3.

Si empleamos el segundo índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ el problema auxiliar a resolver es el mismo que el [3.3.1].

Demostración: Basta tener en cuenta 4.4.3 del Capítulo I.

TEOREMA 4.4.

Si utilizamos el tercer índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + \frac{1}{6}(d_i x + 2\, d'_i x) \leq b_i + \frac{1}{6}(t_i + 2 t'_i) \qquad [4.4.1]$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$2\, a_i x + d_i x \leq 2\, b_i + t_i \qquad [4.4.2]$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad i = 1 \ldots m$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.4.4 del Capítulo I.

Observación: Ambos son problemas lineales y con el mismo número de restricciones que el problema inicial [A].

TEOREMA 4.5.

Si empleamos el índice de Adamo, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver coincide con el [3.5.1].

Demostración: Basta observar 4.4.5 , del Capítulo I.

TEOREMA 4.6.

Si utilizamos el método de Jain, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, los problemas a resolver, serían los mismos que los del Teorema 3.6 de este Capítulo.

Demostración: Basta tener en cuenta 4.4.6 , del Capítulo I.

TEOREMA 4.7.

Si empleamos el grado de posibilidad de dominancia, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ y consideramos que estos números difusos son simétricos, el problema auxiliar a resolver sería:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$(a_i x - b_i)\,[t_i^2 - (d_i x)^2]\,(a_i x - b_i - t_i - d_i x) \geq$$

$$d_i x . t\,[\sqrt{-(a_i x - b_i - t_i)^2 + (d_i x)^2 + t_i^2}\,(a_i x - b_i - t_i) + \qquad [4.7.1]$$

$$\sqrt{-(b_i - a_i x - d_i x)^2 + t_i^2 + (d_i x)^2}\,(a_i x - b_i + d_i x)\,], \qquad i = 1...m$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.4.7 del Capítulo I.

Observación: Este resultado se muestra poco operativo.

TEOREMA 4.8.

Si utilizamos el grado de necesidad de dominancia para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver, sería el mismo que el obtenido en el Teorema 2.8 , de este Capítulo.

Demostración: Basta considerar 4.4.8 , del Capítulo I.

5. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA PARABOLICA, CONVEXA POR LA IZQUIERDA Y CONCAVA POR LA DERECHA.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{b}_i$ la dada en 1.5 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{t'^2_i} z^2 - 2\,\dfrac{b_i - t'_i}{t'^2_i} z + \dfrac{(b_i - t'_i)^2}{t'^2_i} & \text{si} \quad b_i - t'_i \leq z \leq b_i \\ -\dfrac{1}{t_i^2} z^2 + 2\,\dfrac{b_i}{t_i^2} z + 1 - \dfrac{b_i^2}{t_i^2} & \text{si} \quad b_i \leq z \leq b_i + t_i \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{a}_i x$, la obtenida en el Teorema 2.5 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d'_i x)^2} z^2 - 2\, \dfrac{a_i x - d'_i x}{(d'_i x)^2}\, z + \dfrac{(a_i x - d'_i x)^2}{(d'_i x)^2} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ a_i x - d'_i x \leq z \leq a_i x \end{cases} \\ -\dfrac{1}{(d_i x)^2} z^2 + 2\, \dfrac{a_i x}{(d_i x)^2}\, z + \dfrac{(a_i x)^2}{(d_i x)^2} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ \text{y} \\ a_i x \leq z \leq a_i x + d_i x \end{cases} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

TEOREMA 5.1.

Si utilizamos el índice de Chang, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

s.a:

$$\frac{1}{3}\, a_i x\, (d'_i x + 2\, d_i x) + \frac{1}{4}\, [(d_i x)^2 - \frac{1}{3} (d'_i\, x)^2] \leq$$
$$\frac{1}{3}\, b_i\, (t'_i + 2\, t_i) + \frac{1}{4} (t_i^2 - \frac{1}{3}\, t'^2_i) \qquad [5.1.1]$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x . d_i x + \frac{1}{6}(d_i x)^2 \leq b_i t_i + \frac{1}{6} t_i^2 \qquad [5.1.2]$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1...m$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.1. del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas presentan el inconveniente de no ser lineales.

TEOREMA 5.2.

Si utilizamos el primer índice de Yager, con $g(z)=z$ para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + \frac{3(d_i x)^2 - (d'_i x)^2}{4(d'_i x + 2 d_i x)} \leq b_i + \frac{3 t_i^2 - t'^2_i}{4(t'_i + 2 t_i)} \qquad [5.2.1]$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1...m$$

Si los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$6 a_i x + d_i x \leq 6 b_i + t_i \qquad [5.2.2]$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1...m$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.2 del Capítulo I.

Observación: [5.2.2] es lineal y con el mismo número de restricciones que el inicial. El problema [5.2.1] , presenta el inconveniente de no ser lineal.

TEOREMA 5.3.

Si consideramos el segundo índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es el mismo que el del Teorema 2.3 , de este Capítulo.

Demostración: Basta considerar 4.5.3 , del Capítulo I.

TEOREMA 5.4.

Si empleamos el tercer índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + \frac{1}{3}(d_i x - \frac{1}{2} d'_i x) \leq b_i + \frac{1}{3}(t_i - \frac{1}{2} t'_i) \qquad [5.4.1]$$

$$x \geq 0 \qquad , \qquad i = 1...m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad 6\, a_i x + d_i x \leq 6\, b_i + t_i \qquad [5.4.2] \\ &\qquad x \geq 0 \quad , \quad i = 1...m \end{aligned}$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.4 , del Capítulo I.

Observación: Problemas ambos que son lineales y de la misma dimensión que el problema inicial [A] .

TEOREMA 5.5.

Si utilizamos el índice de Adamo, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema a resolver es el mismo que el del Teorema 2.5 , de este Capítulo.

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.5 del Capítulo I.

TEOREMA 5.6.

Si comparamos los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ con el método de Jain, con $k = 1$, los problemas auxiliares a resolver coinciden con los del Teorema 2.6 de este Capítulo.

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.6 del Capítulo I.

TEOREMA 5.7.

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos y los comparamos mediante el grado de posibilidad de dominancia, el problema auxiliar a resolver es:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max:} \quad z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad (a_i x - b_i)\,[(d_i x)^2 - t_i^2](a_i x - b_i + d_i x - t_i) \geq \\
&\qquad -t_i d_i x\,[(b_i - t_i - a_i x)\sqrt{-(b_i - t_i - a_i x)^2 + (d_i x)^2 + t_i^2} - \qquad [5.7.1] \\
&\qquad\qquad (a_i x - d_i x - b_i)\sqrt{-(a_i x - d_i x - b_i)^2 + (d_i x)^2 + t_i^2}\,] \\
&\qquad x \geq 0 \qquad , \qquad i = 1 \ldots m
\end{aligned}
$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.7 del Capítulo I.

Observación: Este resultado se muestra poco operativo.

TEOREMA 5.8.

Si utilizamos el grado de necesidad de dominancia, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es el mismo que el del Teorema 3.8. de este Capítulo.

Demostración: Basta tener en cuenta 4.5.8 , del Capítulo I.

6. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA EXPONENCIAL.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{b}_i$, la dada en 1.6 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{q_1^{z-b_i} - q_1^{-t'_i}}{1 - q_1^{-t'_i}} , \quad q_1 > 1 & \text{si } b_i - t_i' \leq z \leq b_i \\ \dfrac{q^{z-b_i} - q^{t_i}}{1 - q^{t_i}} , \quad 0 < q < 1 & \text{si } b_i \leq z \leq b_i + t_i \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{a}_i x$, la obtenida en el teorema 2.6 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{q_1^{\frac{z-a_i x}{x}} - q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} ; \quad q_1 > 1 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x - d'x \leq z \leq a_i x \end{cases} \\ \dfrac{q^{\frac{z-a_i x}{x}} - q^{d}}{1 - q^{d}} ; \quad 0 < q < 1 & \text{si } \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x \leq z \leq a_i x + dx \end{cases} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

teniendo en cuenta, que ahora, todas las amplitudes izquierdas de los números difusos, componentes del vector $\underset{\sim}{a}_i$, coinciden con d' y todas las amplitudes derechas de los números difusos, componentes del vecto $\underset{\sim}{a}_i$, coinciden con d .

TEOREMA 6.1.

Si comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i\, x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ mediante el índice de Chang, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

s.a:

$$\frac{a_i x.x}{L\,q_1} - \frac{x^2}{(L\,q_1)^2} + \left[\frac{x}{L\,q_1} + \frac{d'x}{2} - a_i x\right] \frac{q_1^{-d'}\; d'x}{1 - q_1^{-d'}} -$$

$$\frac{a_i x.x}{L\,q} + \frac{x^2}{(L\,q)^2} + \left[\frac{x}{L\,q} - \frac{d\,x}{2} - a_i x\right] \frac{q^{d}\; d\,x}{1 - q^{d}} \leq \qquad [6.1.1]$$

$$\frac{b_i}{L\,q_1} - \frac{1}{(L\,q_1)^2} + \left[\frac{1}{L\,q_1} - b_i + \frac{t'_i}{2}\right] \frac{q_1^{-t'_i}\; t'_i}{1 - q^{-t'_i}} -$$

$$\frac{b_i}{L\,q} + \frac{1}{(L\,q)^2} + \left[\frac{1}{L\,q} - b_i - \frac{t_i}{2}\right] \frac{q^{t_i}\; t_i}{1 - q^{t_i}}$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1 \ldots m \quad ; \quad q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.6.1 del Capítulo I.

Observación: Este resultado, se muestra poco operativo.

TEOREMA 6.2.

Si empleamos el primer índice de Yager, con g(z)=z, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$[\frac{a_i x}{L q_1} - \frac{x}{(L q_1)^2} + \left(\frac{x}{L q_1} + \frac{d' x}{2} - a_i x \right) \frac{q_1^{-d'} d'}{1 - q_1^{-d'}} -$$

$$\frac{a_i x}{L q} + \frac{x}{(L q)^2} + \left(\frac{x}{L q} - \frac{d x}{2} - a_i x \right) \frac{q^d d}{1 - q^d}] \Big/ [\frac{1}{L q_1} -$$

$$\frac{1}{L q} - \frac{q_1^{-d'} d'}{1 - q_1^{-d'}} - \frac{q^d d}{1 - q^d}] \leq [\frac{b_i}{L q_1} - \frac{1}{(L q_1)^2} + \qquad [6.2.1]$$

$$\left(\frac{1}{L q_1} - b_i + \frac{t'_i}{2} \right) \frac{q_1^{-t'_i} t'_i}{1 - q_1^{-t'_i}} - \frac{b_i}{Lq} + \frac{1}{(L q)^2} +$$

$$\left(\frac{1}{L q} - b_i + \frac{t_i}{2} \right) \frac{q^{t_i} t_i}{1 - q^{t_i}}] \Big/ [\frac{1}{L q_1} - \frac{1}{L q} -$$

$$\frac{t'_i q_1^{-t'}}{1 - q_1^{-t'}} \cdot \frac{t q^t}{1 - q^t}]$$

$$x \geq 0 \quad ; \quad i = 1 \ldots m \quad ; \quad q_1 > 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

Demostración: Basta tener en cuenta 6.4.2 , del Capítulo I.

Observación: Este resultado, se muestra poco operativo.

TEOREMA 6.3

Si comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ mediante el tercer índice de Yager, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + \frac{x}{2} \left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} - \frac{d' \, q_1^{-d'}}{1 - q_1^{-d'}} + \frac{d \, q^d}{1 - q^d} \right] \leq$$

$$b_i + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} - \frac{t'_i \, q_1^{-t'_i}}{1 - q_1^{-t'_i}} + \frac{t_i \, q^{t_i}}{1 - q^{t_i}} \right] \qquad [6.3.1]$$

$x \geq 0$; $i = 1...m$; $q_1 > 1$; $0 < q < 1$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + \frac{x}{2} \left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} + \frac{d \, (q^d - q_1^{-d})}{(1-q_1^{-d})(1-q^d)} \right] \leq$$

$$b_i + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Lq_1} + \frac{1}{Lq} + \frac{t_i \, (q^{t_i} - q_1^{-t_i})}{(1-q_1^{-t_i})(1-q^{t_i})} \right] \qquad [6.3.2]$$

$x \geq 0$; $1 = 1...m$; $q_1 > 1$; $0 < q < 1$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.6.4 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas son lineales y con el mismo número de restricciones, que el problema inicial [A].

TEOREMA 6.4.

Si utilizamos el índice de Adamo, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$a_i x + x \log_q [q^d + \alpha(1-q^d)] \leq b_i + \log_q [q^{t_i} + \alpha(1-q^{t_i})] \qquad [6.4.1]$$

$$x \geq 0 \quad ; \quad i = 1 \ldots m$$

$$0 < q < 1 \quad ; \quad \alpha \text{ dado} \qquad \alpha \in [0,1]$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.6.5 del Capítulo I.

Observación: Este problema es lineal y con el mismo número de restricciones que el problema inicial [A] .

Si $\alpha = 1$, obtenemos el mismo problema que en [1.2.2] .

TEOREMA 6.5.

Si se verifica que $\sum_j x_j = x = 1$ y empleamos el grado de necesidad de dominancia, para comparar los números $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$a_i\ x \leq b_i + \log_{q_1} \frac{1 + q_1^{-t'_i}}{1 + q_1^{-d'}} \qquad [6.5.1]$$

$$x \geq 0 \quad ; \quad i = 1 \ldots m \quad ; \quad q_1 > 1$$

Demostración: Basta considerar 4.6.8 , del Capítulo I.

Observación: Este problema es de la misma dimensión que el problema inicial [A] y coincide con el problema [1.2.2] , si se verifica que $t'_i = d'$, $i = 1...m$

7. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA LOGARITMICA.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\tilde{b}_i$, la dada en 1.7 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\log_{q_1}(z - b_i + t'_i + 1)}{\log_{q_1}(t'_i + 1)} , \quad q_1 > 1 & \text{si } b_i - t'_i \leq z \leq b_i \\[2ex] \dfrac{\log_q(- z + b_i + t_i + 1)}{\log_q(t_i + 1)} , \quad 0 < q < 1 & \text{si } b_i \leq z \leq b_i + t_i \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\tilde{a}_i x$, la obtenida en el teorema 2.7 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\log_{q_1}\left(\dfrac{z - a_i x + d'x + x}{x}\right)}{\log_{q_1}(d'+1)}, \quad q_1 > 1 & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x - d'x \le z \le a_i x \end{cases} \\ \dfrac{\log_{q}\left(\dfrac{a_i x + dx + x - z}{x}\right)}{\log_{q}(d+1)}, \quad 0 < q < 1 & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x \le z \le a_i x + dx \end{cases} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

teniendo en cuenta, como en el caso de números difusos con función de pertenencia exponencial, que todas las amplitudes izquierdas de los números difusos componentes del vector $\tilde{a}_i$, coinciden con d' y todas las amplitudes derechas de los números difusos componentes del vector $\tilde{a}_i$, coinciden con d.

TEOREMA 7.1.

Si utilizamos el índice de Chang, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$\frac{-(d'x)^2}{2} + a_i x.d'x - d'x.x + \frac{1}{2L(d'+1)}\left[\frac{3}{2}(d'x)^2 - 2a_i x.d'x + x.d'x\right] +$$
$$2a_i x.x + \frac{(dx)^2}{2} + a_i x.dx + dx.x + \frac{1}{2L(d+1)}\left[-\frac{3}{2}(dx)^2 - \right.$$
$$\left. 2a_i x.dx - x.dx\right] \le -\frac{t'^2_i}{2} - t'_i + b_i t'_i + 2b_i + \qquad [7.1.1]$$
$$\frac{t'_i(3t'_i + 2 - 4b_i)}{4L(t'_i+1)} + \frac{t_i}{2} + t_i + b_i t_i - \frac{t_i(3t_i + 2 + 4b_i)}{4L(t_i+1)}$$
$$x \ge 0 \quad , \quad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

$$\text{s.a:} \quad a_i x(dx + x) - \frac{a_i x.dx}{L(d+1)} \leq b_i(t_i + 1) - \frac{b_i t_i}{L(t_i+1)} \qquad [7.1.2]$$

$$x \geq 0 \quad ; \quad i = 1...m$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.7.1 del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas presentan el inconveniente de no ser lineales.

TEOREMA 7.2.

Si utilizamos el primer índice de Yager, con $g(z)=z$ para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

$$\begin{aligned}\text{s.a:} \quad & \Big[-\frac{d'^2x}{2} + a\,x.d' - d'x + \frac{1}{2L(d'+1)}\left(\frac{3}{2}d'^2x - 2\,a\,x.d' + \right.\\ & \left. d'x\right) + 2\,a_i x + \frac{d^2x}{2} + a_i x.d + d\,x - \frac{1}{2(d+1)}\left(\frac{3}{2}d^2x + 2\,a_i x.d + \right.\\ & \left. d\,x\right)\Big] \Big/ \left[d' - \frac{d'}{L(d'+1)} + 2 + d - \frac{d}{L(d+1)}\right] \leq \Big[-\frac{t_i'^2}{2} - t'_i + \\ & b_i t'_i + \frac{t'_i(3t'_i + 2 - 4b_i)}{4L(t'_i+1)} + 2\,b_i + \frac{t_i^2}{2} + t_i + b_i t_i - \qquad [7.2.1] \\ & \frac{t_i(3t_i + 2 + 4b_i)}{4L(t_i+1)}\Big] \Big/ \left[t'_i - \frac{t'_i}{L(t'_i+1)} + 2 + t_i - \frac{t_i}{L(t_i+1)}\right]\end{aligned}$$

$$x \geq 0 \quad ; \quad i = 1...m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad a_i x \leq b_i \quad , \qquad i = 1 \ldots m \qquad [7.2.2] \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.7.2 , del Capítulo I.

Observación: El problema [7.2.1] se muestra poco operativo. El problema [7.2.2] coincide con el problema [1.2.2] .

TEOREMA 7.3.

Si utilizamos el tercer índice de Yager, para comprar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } z = cx \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad a_i x + \frac{d - d'}{2} x + \frac{x}{2} \left[\frac{d'}{L(d'+1)} - \frac{d}{L(d+1)} \right] \leq \\
&\qquad b_i + \frac{t_i - t'_i}{2} + \frac{t'_i}{2L(t'_i+1)} - \frac{t_i}{2L(t_i+1)} \qquad [7.3.1] \\
&\qquad x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m
\end{aligned}$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad a_i x \leq b_i \qquad\qquad i = 1 \ldots m \qquad\qquad [7.3.2] \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.7.4 , del Capítulo I.

Observación: [7.3.2] es el mismo problema que el [1.2.2] .

TEOREMA 7.4.

Si empleamos el índice de Adamo, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad a_i x + dx + x - x(1+d)^{\alpha} \leq 1 + b_i + t_i - (1+t_i)^{\alpha} \qquad [7.4.1] \\ &\qquad x \geq 0 \quad , \qquad i = 1 \ldots m \\ &\qquad \alpha \text{ dado} \qquad \alpha \in [0,1] \end{aligned}$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.7.5 , del Capítulo I.

Observación: El problema, coincide con el [1.2.2] , para el valor $\alpha = 1$.

TEOREMA 7.5.

Si se verifica que $d' = t_i$ y $t'_i = d$ y empleamos el grado de posibilidad de dominancia, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$\frac{\log_q\left(\dfrac{-a_i x + b_i}{x+1} + t_i + 1\right)}{\log_q (t+1)} \geq \frac{\log_q\left(\dfrac{a_i x - b_i}{x+1} + d + 1\right)}{\log_q (d+1)}$$

$$x \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m \qquad [7.5.1]$$

$$0 < q < 1$$

Si además $d = t_i$, tenemos que resolver el problema:

$$\text{Max: } z = cx$$

s.a:

$$a_i x \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m \qquad [7.5.2]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.7.7 , del Capítulo I.

Observación: El problema [7.5.2] , coincide con el problema [1.2.2] .

TEOREMA 7.6

Si se verifica que $t'_i = d'$ y utilizamos el grado de necesidad de dominancia, para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad z = cx \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad a_i x \leq b_i \qquad\qquad i = 1...m \qquad\qquad [7.6.1] \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

8. MODELOS AUXILIARES, PARA NUMEROS DIFUSOS CON FUNCION DE PERTENENCIA SENO.

Sea la función de pertenencia del número difuso $\tilde{b}_i$ la dada en 1.8 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(z - b_i + t'_i)}{\text{sen}\ t'_i} & \text{si } b_i - t'_i \leq z \leq b_i \\[2ex] \dfrac{\text{sen}\,(z - b_i - t_i)}{\text{sen}\,(-t_i)} & \text{si } b_i \leq z \leq b_i + t_i \\[2ex] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y la función de pertenencia del número difuso $\tilde{a}_i x$, la obtenida en el teorema 2.8 del Capítulo I, es decir:

$$\mu(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{z - a_i x + d'x}{x}\right)}{\operatorname{sen} d'} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x - d'x \leq z \leq a_i x \end{cases} \\[2em] \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{z - a_i x - d\,x}{x}\right)}{\operatorname{sen}(-d)} & \text{si} \begin{cases} x > 0 \\ y \\ a_i x \leq z \leq a_i x + d\,x \end{cases} \\[2em] 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta, como en los dos casos anteriores, que todas las amplitudes izquierdas de los números difusos componentes del vector $\underset{\sim}{a}_i$, coinciden con d' y las amplitudes derechas de estos números, coinciden con d .

TEOREMA 8.1.

Si utilizamos el índice de Chang, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$

$$\text{s.a:} \quad - a_i x.x \operatorname{cotg} d' + \frac{(a_i x - d'x)\,x}{\operatorname{sen} d'} - \frac{(a_i x + d\,x)\,x}{\operatorname{sen}(-d)} + \qquad [8.1.1]$$

$$a_i x.x.\operatorname{cotg}(-d) \leq - b_i \operatorname{cotg} t'_i +$$

$$\frac{b_i - t'_i}{\operatorname{sen} t'} - \frac{b_i + t_i}{\operatorname{sen}(-t_i)} + b_i \operatorname{cotg}(-t_i)$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, el problema auxiliar a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

s.a:

$$- a_i x.x \text{ cotg } d + \frac{a_i x.x}{\text{sen } d} \leq \qquad [8.1.2]$$

$$- b_i \text{ cotg } t_i + \frac{b_i}{\text{sen } t_i}$$

$$x \geq 0 \quad , \qquad i = 1 \ldots m$$

Si además se verifica que $t_i = d$, el problema a resolver es:

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

s.a:

$$a_i x.x \leq b_i \qquad , \quad i = 1 \ldots m \qquad [8.1.3]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.8.1 , del Capítulo I.

Observación: Estos tres problemas, presentan el inconveniente de no ser lineales.

TEOREMA 8.2.

Si utilizamos el primer índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i$ x y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$\left(a_i x - x\left[\frac{d'}{\operatorname{sen} d'} + \frac{d}{\operatorname{sen}(-d)}\right]\right) \Big/ \left[-\operatorname{cotg} d' + \frac{1}{\operatorname{sen} d'} - \frac{1}{\operatorname{sen}(-d)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{cotg}(-d)\right] \leq \left(b_i - \left[\frac{t'_i}{\operatorname{sen} t'_i} + \frac{t_i}{\operatorname{sen}(-t_i)}\right]\right) \Big/ \left[-\operatorname{cotg} t'_i + \right. \qquad [8.2.1]$$

$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sen} t'_i} - \frac{1}{\operatorname{sen}(-t_i)} + \operatorname{cotg}(-t_i)\right]$$

$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m \qquad [8.2.2]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.8.2 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas son lineales, de la misma dimensión que el problema inicial [A] y el [8.2.2] coincide con el [1.2.2] .

TEOREMA 8.3.

Si empleamos el tercer índice de Yager, para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ el problema a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i x + x \frac{\cos d' - 1}{2 \operatorname{Sen} d'} + x \frac{\cos(-d) - 1}{2 \operatorname{Sen}(-d)} \leq \qquad [8.3.1]$$

$$b_i + \frac{\cos t'_i - 1}{2 \operatorname{sen} t'_i} + \frac{\cos(-t_i) - 1}{2 \operatorname{sen}(-t_i)}$$

$$x \geq 0 \qquad , \qquad i = 1 \ldots m$$

Si los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos, tenemos que resolver el problema:

Max: $z = cx$

s.a:

$$a_i\ x \leq b_i \qquad , \qquad i = 1 \ldots m \qquad [8.3.2]$$

$$x \geq 0$$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.8.4 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas son lineales, con el mismo número de restricciones que el problema inicial [A] y el [8.3.2] coincide con el [1.2.2]

TEOREMA 8.4.

Si utilizamos el índice de Adamo para comparar los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, el problema a resolver es:

$$\text{Max: } z = cx$$
s.a:
$$a_i x + dx + x \text{ arc sen}[\alpha \text{ sen } (-d)] \leq b_i + t_i + \text{arc sen}[\alpha \text{ sen } (-t_i)] \qquad [8.4.1]$$
$$x \geq 0 \quad , \quad i = 1 \ldots m$$
$$\alpha \text{ dado} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

Si $\alpha = 1$, tenemos:

$$\text{Max: } z = cx$$
s.a:
$$a_i x \leq b_i \quad , \quad i = 1 \ldots m \qquad [8.4.2]$$
$$x \geq 0$$

Demostración: Basta considerar 4.8.5 , del Capítulo I.

Observación: Ambos problemas son lineales, con la misma dimensión que el inicial y el [8.4.2] coincide con el [1.2.2].

TEOREMA 8.5.

Si se verifica que $\sum_{j=1}^{n} x_j = x = 1$ y comparamos los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ mediante el grado de posibilidad de dominancia, el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$\frac{\text{sen}\,(-a_i x + d' + b_i + t_i)}{\sqrt{\text{sen}^2(-t_i) + \text{sen}^2 d' - 2\,\text{sen}\,(-t_i)\,\text{sen}\,d'\cos(-a_i x + d' + b_i + t_i)}} \geq$$

[8.5.1]

$$\frac{\text{sen}\,(-b_i + t'_i + a_i x + d_i)}{\sqrt{\text{sen}^2(-d) + \text{sen}^2 t'_i - 2\,\text{sen}(-d)\,\text{sen}\,t'_i\cos(-b_i + t'_i + a_i x + d_i)}}$$

$x \geq 0 \qquad , \qquad i = 1...m$

Si además $d' = d = t'_i = t_i$ y $\text{sen}\, d > 0$ el problema auxiliar a resolver es:

Max: $z = cx$

s.a:

$$\frac{\text{sen}\,(-a_i x + b_i + 2\,d)}{\sqrt{1 + \cos(-a_i x + b_i + 2\,d)}} \geq \frac{\text{sen}\,(-b_i + a_i x + 2\,d)}{\sqrt{1 + \cos(-b_i + a_i x + 2\,d)}} \qquad [8.5.2]$$

$x \geq 0 \qquad , \qquad i = 1...m$

Demostración: Basta tener en cuenta 4.8.7, del Capítulo I.

Observación: El resultado que obtenemos en ambos casos se muestra poco operativo.

9. CONCLUSIONES

1. En todos los casos considerados, tenemos que resolver problemas de programación, con el mismo número de restricciones que el problema inicial.

2. Si comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ mediante el índice de Chang, obtenemos un problema de programación no lineal, independientemente de las funciones de pertenencia utilizadas, dentro de las consideradas.

3. El grado de posibilidad de dominancia, cuando las funciones de pertenencia de los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son parabólica cóncava o convexas, no tiene sentido, ya que compara únicamente las amplitudes de dichos números difusos.

4. El segundo índice de Yager resulta ser poco operativo, y no se obtiene modelo auxiliar, salvo en el caso de funciones de pertenencia lineal.

5. Con el método de Jain, ocurre lo mismo que en el caso anterior, resultando además, en el segundo caso considerado para funciones de pertenencia lineales, un problema de programación no lineal.

6. Si comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ con el índice de Adamo, obtenemos el mismo modelo auxiliar para funciones de pertenencia parabólicas cóncavas y parabólicas convexas por la izquierda y cóncavas por la derecha. Tambien obtenemos el mismo resultado, siendo diferente del anterior, cuando las funciones de pertenencia son parabólicas convexas y parabólicas cóncavas por la izquierda y convexas por la derecha.

7. Mediante el grado de necesidad de dominancia, obtenemos el mismo resultado cuando las funciones de pertenencia son de tipo parabólico cóncavo y parabólico cóncavo por la izquierda y convexo por la derecha. Análogamente obtenemos el mismo modelo auxiliar, siendo distinto del anterior, si las funciones de pertenencia son parabólicas convexas y parabólicas convexas por la izquierda y cóncavas por la derecha.

8. Si las funciones de pertenencia son lineales y comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ mediante el grado de posibilidad de dominancia, obtenemos el mismo resultado que si:

   a) las funciones de pertenencia son lineales, los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos y comparamos estos números mediante el primer o tercer índice de Yager.

   b) las funciones de pertenencia son lineales y utilizamos el método de Jain en el tercer caso, es decir cuando $ax + dx = b + t = z_{max}$.

   c) las funciones de pertencia son lineales y utilizamos el índice de Adamo con $\alpha = 1$.

   d) las funciones de pertenencia son de tipo parabólico cóncavo, los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos y comparamos dichos números difusos con el primer o tercer índice de Yager.

   e) las funciones de pertenencia son de tipo parabólico cóncavo y comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ con el índice de Adamo, siendo $\alpha = 1$.

f) las funciones de pertenencia son de tipo parabólico convexo, los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ son simétricos y los comparamos con el primero o tercer índice de Yager.

g) las funciones de pertenencia son de tipo parabólico convexo y comparamos los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ mediante el índice de Adamo, siendo $\alpha = 1$.

h) las funciones de pertenencia son cóncavas por la izquierda y convexas por la derecha o recíprocamente convexas por la izquierda y cóncavas por la derecha y comparamos los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ mediante el índice de Adamo con $\alpha = 1$.

i) las funciones de pertenencia son de tipo exponencial y utilizamos el índice de Adamo con $\alpha = 1$.

j) las funciones de pertenencia son de tipo exponencial, empleando el grado de necesidad de dominancia, siendo $t' = d'$ y $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$.

k) las funciones de pertenencia son de tipo logarítmico, siendo los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ simétricos y comparamos con el primer o tercer índice de Yager.

l) las funciones de pertennci̇a son de tipo logarítmico y comparamos los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$ mediante el grado de posibilidad de dominancia siendo $t' = t = d' = d$.

m) las funciones de pertenencia son de tipo logarítmico y utilizamos el grado de necesidad de dominancia para comparar los números difusos $\tilde{a}_i x$ y $\tilde{b}_i$, siendo $t' = d'$.

n) las funciones de pertenencia son de tipo seno, los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos y los comparamos con el primer o tercer índice de Yager.

o) las funciones de pertenencia son de tipo seno y comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ mediante el índice de Adamo con $\alpha = 1$.

9. Cuando las funciones de pertenencia son lineales y comparamos los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ mediante el tercer índice de Yager obtenemos el mismo resultado que cuando las funciones de pertenencia son de tipo parabólico convexo y comparamos dichos números difusos con el primer índice de Yager.

10. Si las funciones de pertenencia son de tipo parabólico convexo por la izquierda y cóncavo por la derecha, los números difuso $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$ son simétricos y los comparamos con el primer índice de Yager, obtenemos el mismo resultado que si los comparamos con el tercer índice de Yager.

11. En los restantes casos, obtenemos soluciones distintas entre sí y con las anteriores, no pudiendo ser comparadas de forma teórica.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

- BELLMAN, R.E. and ZADEH, L.A. (1970): Decision Making in a Fuzzy Environment. Man. Sci. 17 (B), 4, 141-164.

- BENSON, H.P. (1985): Multiple Objective Linear Programming with Parametric Criteria Coefficients. Man. Sci. 31, 4, 461-474.

- BRITAN, G.R. (1980): Linear Multiple Objective Problems with Interval Coefficients. Man. Sci. 26, 7, 694-706.

- BORTOLAN, G. and DEGANI, R. (1985): A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets. Fuzzy Sets and Systems, 15, 1-20.

- BUCKLEY, J.J. (1983): Fuzzy Programming and the Pareto Optimal Set. Fuzzy Sets and Systems, 10, 57-63.

- CAMPOS, L. (1986): Fuzzy Linear Programming Models for Solving Imprecise Matrix Games. (In Spanish). Ph. D. University of Granada.

- CAMPOS, L.: Fuzzy Linear Programming Models to Solve Fuzzy Matrix Games. To be appeared in Fuzzy Sets and Systems.

- CAMPOS, L. and VERDEGAY, J.L. (1986): On Fuzzy Games. Proc. of Fall International Seminar on Applied Logic. Palma de Mallorca (Spain).

- CARLSSON, C. (1982): Fuzzy Multiobjective Programming with Composite Compromises. In Multiobjective and Stochastic Optimization. M. Grauer, A. Lewandowski and A.P. Wierzbicki (Eds.). CP-82-S12, IIASA, Laxemburg.

- CHANAS, S. (1983): Parametric Programming in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 11, 243-251.

- **CHANAS, S., KOLODZIEJCZYK, W. and MACHAJ, A.** (1984): A Fuzzy Approach to the Transportation Problem. Fuzzy Sets and Systems, 13, 211-222.

- **CHANKONG, V. and HAIMES, Y.Y.** (1982): Multiobjective Decision Making. Theory and Methodology. North-Holland.

- **DELGADO, M.** (1983): A Resolution Method for Multiobjective Problems. Eur. J. of Oper. Res. 13, 165-172.

- **DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A.** (1985): Mathematical Programming Problems with Fuzzy Costs. Presented at I IFSA Congress. Palma de Mallorca (Spain).

- **DELGADO, M. VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A.** (1985): Solving the Biobjective Linear Programming Problem: A Fuzzy Approach. In Approximate Reasoning in Expert Systems (M.M. Gupta et al. Eds.), (1985) 317-322. North-Holland.

- **DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A.** (1985): Fuzzy Vectormaximum Problem and Parametric Programming. (In spanish). Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa 36, 2, 126-137.

- **DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA; M.A.** (1987): Imprecise Costs in Mathematical Programming Problems. Control and Cybernetics, 16, 2, 113-121.

- **DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A.** (1987): Fuzzy Transportation Problems: A General Analysis. In Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory. J. Kacprzyk and S.A. Orlovski (Eds). D. Reidel Publishing Co.

- **DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A.** (1987): On Fuzzy Linear Programming Models. Preprints of II IFSA Congress. Tokyo, 715-718.

- **DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A.** (1989): A General Model for Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 29, 1, 21-29.

- DUBOIS, D., PRADE, H. (1978): Operations on Fuzzy Numbers. Int. J. Systems Sciences, 9, 613-626.

- DUBOIS, D. and PRADE, H. (1980): Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications. Academic Press.

- FABIAN, C. and STOICA, M. (1984): Fuzzy Integer Programming. In Fuzzy Sets and Decision Analysis. H.J. Zimmermann, L.A. Zadeh and B.R. Gaines (Eds). Amsterdam, 123-132.

- FENG, Y.J. (1983): A Method Using Fuzzy Mathematics to Solve the Vectormaximum Problem. Fuzzy Sets and Systems, 9, 129-136.

- GONZALEZ, A. (1988): Métodos Subjetivos para la Comparación de Números Difusos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

- HAMACHER, H., LEBERLING, H. and ZIMMERMANN, H.J. (1978): Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 1,4, 269-281.

- HANNAN, E.L. (1981): Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals. Fuzzy Sets and Systems 6, 235-248.

- HANNAN, E.L. (1981): On Fuzzy Goal Programming. Decision Sci. 12, 522-531.

- KABBARA, G. (1982): New Utilization of Fuzzy Optimization Method. In M.M. Gupta and E. Sánchez (Eds.), Fuzzy Information and Decision Processes, North-Holland, Amsterdam, 239-246.

- KACPRZYK, J. and OWSINSKI, J.W. (1984): Nonstandard Mathematical Programming Models including Imprecision as a planning tool in an agricultural enterprise operating in varying conditions. In Proc. Conf. on Organization of Agricultural Enterprises. Kolobrzeg.

- KACPRZYK, J. and ORLOVSKI, S.A. (Eds.) (1987): Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory. Reidel Publishing Co.

- **KACPRZUK, J, and YAGER, R.R.** (Eds.) (1985): Management Decision Support Systems using Fuzzy Sets and Possibility Theory. Verlag TUV Rheinland, ISR Series, Vol. 83.

- **LEBERLING, H.** (1981): On finding Compromise Solutionns in Multi-Criteria Problems Using the Fuzzy Min-Operator. Fuzzy Sets and Systems 6, 105-118.

- **LLENA, J.** (1985): On Fuzzy Linear Programming. Eur. J. Op. Res. 22, 216-223.

- **LUHANDJULA, M.K.** (1983): Linear Programming under Randomness and Fuzziness. Fuzzy Sets and Systems 10, 57-63.

- **LUHANDJULA, M.K.** (1987): Linear Programming with a Possibilistic Objective Function. Eur. J. of Op. Res. 31, 110-117.

- **NAKAMURA, K.** (1984): Some Extension of Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems 14, 211-229.

- **NARASIMHAN, R.** (1980): Goal Programming in a Fuzzy Environment. Decision Sci. 11, 325-336.

- **NARASIMHAN, R.** (1981): On Fuzzy Goal Programming - Some Comments. Decision Sci. 12, 532-538.

- **NEGOITA, C.V.** (1981): The Current Insterest in Fuzzy Optimization. Fuzzy Sets and Systems, 6, 261-269.

- **NEGOITA, C.V., FLONDOR, P. and SULARIA, M.** (1977): On Fuzzy Environment in Optimization Problems. In Modern Trends in Cybernetic and Systems. J. Rose and C. Bilciu (Eds). Springer-Verlag.

- **NEGOITA, C.V. and RALESCU, D.** (1975): Applications of Fuzzy Sets to Sytems Analysis. Birkhauser-Verlag.

- **NEGOITA, C.V. and RALESCU, D.** (1977): On Fuzzy Optimization. Kybernetes, 6, 193-195.

- **NEGOITA, C.V. and SULARIA, M.** (1976): On Fuzzy Programming and Tolerances in Planning. Econom. Comp. Econom. Cybernet. Stud. Res., 1, 3-15.

- OH'EIGEARTAIGH, M. (1982): A Fuzzy Transportation Algorithm. Fuzzy Sets and Systems, 8, 235-245.

- ORLOVSKI, S.A. (1977): On Programming with Fuzzy Constraint Sets. Kybernetes 6, 197-201.

- ORLOVSKI, S.A. (1980): On Formulization of a General Fuzzy Mathematical Problem. Fuzzy Sets and Systems 3, 311-321.

- ORLOVSKI, S.A. (1984): Multiobjective Programming Problems with Fuzzy Parameters. Control and Cybernetics 4, 175-184.

- OSTASIEWICZ, W. (1982): A New Approach to Fuzzy Programming. Fuzzy Sets and Systems 7, 139-152.

- OWSINSKI, J.W., ZADROZNY, S. and KACPRZYK, J. (1987): Analysis of Water use and Needs in Agricultural through a Fuzzy Programming Model. In Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory. J. Kacprzyk and S.A. Orlovski (Eds). D. Reidel Publishing Co., 377-395.

- PRADE, H. (1980): Operations Research with Fuzzy Data. In Fuzzy Sets. Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems. P.P. Wang and S.K. Chang (Eds). Plenum Press, 155-169.

- RALESCU, D. (1979): A Survey of Representation of Fuzzy Concepts and its Applications. In Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications. M.M. Gupta, R.K. Ragade and R.R. Yager (Eds). North-Holland, 77-91.

- RODDER, W. and ZIMMERMANN, H.J. (1977): Duality in Fuzzy Programming. Int. Symp. on Extremal Methods and Systems Analysis. University of Texas, Austin, TX.

- RODDER, W. and ZIMMERMANN, H,J. (1980): Duality in Fuzzy Linear Programming. In Extremal Methods and Systems Analyses. A. V. Fiacco and K.O. Kortanek (Eds). Berlin, Heidelberg, New York, 415-429.

- ROMMELFANGER, H. HANUSCHECK, R. and WOLF, J. (1985): Linear Programming with Fuzzy Objective Functions. Presented at the I IFSA Congress. Palma (Spain).

- **RUBIN, P.A. and NARASIMHAN, R.** (1984): Fuzzy Goal Programming with Nested Priorities. Fuzzy Sets and Systems 14, 115-129.

- **SOMMER, G. and POLLATSCHEK, M.A.** (1978): A Fuzzy Programming Approach to an Air Pollution Regulation Problem. Eur. J. Op. Res. 10, 303-313.

- **STEUER, R.E.** (1981): Algorithms for Linear Programming Problems with Interval Objective Function Coefficients. Mathematics of Operations Research 6,3,333-348.

- **TAKEDA, E. and NISHIDA, N.T.** (1980): Multiple Criteria Decision Making with Fuzzy Domination Structures. Fuzzy Sets and Systems 3, 123-136.

- **TANAKA, H. and ASAI, K.** (1984): Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers. Fuzzy Sets and Systems 13, 1-10.

- **TANAKA, H., ICHIHASHI, H. and ASAI, K.** (1984): A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems based on Comparison of Fuzzy Numbers. Control and Cybernetics, 13, 185-194.

- **TANAKA, H., OKUDA, T. and ASAI, K.** (1974): On Fuzzy Mathematical Programming. Journal of Cybernetics, 3, 37-46.

- **VERDEGAY, J.L.** (1982): Fuzzy Mathematical Programming. In Fuzzy Information and Decision Processes (M.M. Gupta and E. Sánchez, Eds.). North-Holland, 231-237.

- **VERDEGAY, J.L.** (1983): Transportation Problems with Fuzzy Parameter. (In Spanish). Rev. Acad. Ciencias Mat. Fis. Quim. y Nat. de Granada, 2, 47-56.

- **VERDEGAY, J.L.** (1984): A Dual Approach to Solve the Fuzzy Linear Programming Problem. Fuzzy Sets and Systems, 14, 131-141.

- **VERDEGAY, J.L.** (1984): Applications of Fuzzy Optimization in Operational Research. Control and Cybernetics 13, 3, 229-239.

- **VERDEGAY, J.L.** (1987): Fuzzy Mathematical Programming Problem: Resolution. In Systems and Control Encyclopedia. Theory, Technology, Applications. M.G. Singh (Ed). Pergamon Press, 1816-1819.

- **WIEDEY, G. and ZIMMERMANN, H.J.** (1978): Media Selection and Fuzzy Linear Programming. J. Op. Res. Soc. 29, 1071-1084.

- **ZADEH, L.A.** (1978): Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

- **ZIMMERMANN, H.J.** (1974): Optimization in Fuzzy Environment. Presented at XXI Int. TIMS and 46th ORSA Conference. San Juan (Puerto Rico).

- **ZIMMERMANN, H.J.** (1975): Descritption and Optimization of Fuzzy Systems. International Journal of General Systems, 2, 209-215.

- **ZIMMERMANN, H.J.**(1978): Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objetive Functions. Fuzzy Sets and Systems 1, 1, 45-55.

- **ZIMMERMANN, H.J.** (1985): Applications of Fuzzy Sets Theory to Mathematical Programming. Information Sciences, 36, 29-58.

- **ZIMMERMANN, H.J.** (1987): Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems. Kluwer Academic Publishers.

DILIGENCIA:

Reunido el Tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

D. Miguel Delgado Calvo-Flores

D. Juan M. Lope de la Manzanera y Barbero

D. Salvador Lario Martínez

D. Buenaventura Clares Rodríguez

D. Mª Amparo Vila Miranda

para juzgar la Tesis Doctoral del Licenciado Don Carmen García Aguado

se acordó por Unanimidad otorgar la calificación de Apto cum laude.

y para que conste, se extiende firmada por los componentes del Tribunal, la presente diligencia.

Granada, a 27 de Abril de 1990

El Secretario,

Mª Amparo Vila

El Presidente,

M. Delgado

El Vocal,

M. Delgado

El Vocal,

El Vocal,