



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Gravedad Estocástica: una Aplicación de la Teoría de la Información a un Sistema Físico Relativista

Tesis doctoral
por

Julio Angulo Ibáñez

Programa de Doctorado en Estadística Matemática y Aplicada
Universidad de Granada

3 de junio de 2018

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Julio Angulo Ibáñez
ISBN: 978-84-9163-949-7
URI: <http://hdl.handle.net/10481/52505>

Tesis doctoral dirigida por:

Dr. José Miguel Angulo Ibáñez

Dr. Juan Carlos Angulo Ibáñez

El Doctorando: D. Julio Angulo Ibáñez

Y los Directores de la tesis:

D. José Miguel Angulo Ibáñez, doctor en Matemáticas y Catedrático del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

D. Juan Carlos Angulo Ibáñez, doctor en Física y Catedrático del Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la supervisión de los directores de la tesis y, hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 3 de junio de 2018

Directores de la Tesis:

Doctorando:

Firmado:

Firmado:

Firmado

Dedicatoria

A mis hijos, mis nietos, mi madre, mis hermanos
y, especialmente, a María Elia, mi mujer

Agradecimientos

Nunca pensé que esta sería una tarea tan difícil. Porque es mucho lo que hay que agradecer y a muchas personas... más de lo que pude imaginar. Quizá sea debido a las circunstancias atípicas que envuelven este trabajo.

En este momento acuden a mi mente un aluvión de nombres y de situaciones, unas recientes y otras no tanto. Posiblemente porque a estas alturas uno aborda un trabajo de estas características habiendo vivido prácticamente toda una vida, y ha crecido a lo largo de tanto tiempo a partir de un gran número de relaciones, de experiencias, de momentos,..., hasta llegar a la resultante de la persona, yo mismo, en el momento presente.

Tuve la suerte de crecer en el seno de una familia en la que, como en la mayoría, la formación humana e intelectual se consideró siempre, entre otros, un valor primordial. Así se nos inculcó a mis hermanas y hermanos, y a mí mismo, y así lo hicimos seguir con nuestros hijos.

Por esto, tengo que iniciar esta 'rueda' de agradecimientos con la familia. Sin esa familia este trabajo probablemente nunca habría tenido la motivación suficiente para ver la luz, dadas las circunstancias.

A mi madre, Francisca, tengo que agradecerle, además de sus cuidados iniciales de excelente madre, su capacidad de aglutinar, haciendo gala de una incombustible 'juventud', a la familia, mostrando un interés momento a momento por todos y cada uno de sus miembros. ¿Cómo va la tesis?. ¿Para cuándo?,... Cuántas veces preguntó por ello!. No me cabe duda de que le interesa tanto, al menos, como si yo fuese (casi) medio siglo más joven.

A mi padre, Julio, que un día nos dejó... pero no del todo. Porque nunca dejó de estar presente, en todos los ámbitos, en todo momento... Tengo que agradecerle sus siempre templados y acertados consejos, los que me regaló en vida y los que de él me llegan, aún hoy, siempre que los necesito. Sé que se sentiría (y se siente) orgulloso de que yo, al igual que mis hermanas y hermanos, siga apreciando esos valores.

A mis hermanas, Paqui y Adela, les agradezco esa voluntad férrea, inquebrantable, de fomento de la unidad familiar, de apoyo en los momentos

difíciles, de avivar el cariño entre todos nosotros. De tal actitud sólo pueden derivarse consecuencias positivas.

A mis hermanos, José Miguel y Juan Carlos, no puedo por menos que agradecerles que hoy, muchos años después de haber iniciado un continuo compartir interesantes momentos de debate científico y de otra naturaleza, desde los comienzos de sus brillantes carreras profesionales, sigan confiando en mí y en mi modesta capacidad para desarrollar un trabajo que pueda suscitar un interés razonable, habiendo tenido a bien ser los directores de dicho trabajo, dedicando su tiempo y su esfuerzo. Espero que les haya merecido la pena.

A mis hijos, María Elia y Julio, ingenieros industriales en ejercicio, amantes de las cuestiones científicas, en general, ... tengo tanto que agradecerles en relación con este trabajo! Su admiración, sin duda exagerada, a un padre al que atribuyen una capacidad y unas cualidades a las que ni mucho menos se ha hecho acreedor. Pero de algo no puede haber duda: su padre ha tratado, en cualquier caso, de ser ejemplo de esfuerzo y dedicación, de afán por contribuir, a una sociedad que hace nuestra vida confortable, aportando una actividad profesional relevante. Y lo hacen con creces, como demuestran sus brillantes carreras, una labor admirable en mi opinión, en el ámbito de la ingeniería.

A mi mujer, María Elia, compañera inseparable durante una larga vida. Le agradezco un amor y una generosidad que me han quedado patentes en mil formas, en mil ocasiones, en los momentos difíciles y en los que no lo fueron (afortunadamente estos últimos mayoría). Desde siempre, porque medio siglo de apoyo, de confianza, de entrega, de inmerecida admiración, es sin duda 'desde siempre'. Y porque sé que todo ello es también 'para siempre'. Espero haber estado a la altura. Haber correspondido en consonancia. Esa fue mi intención. Y mi sentimiento profundo.

Y ¿cómo no? a mis nietos. Tengo que agradecerles la alegría que han aportado a mi vida, lo que no es ajeno a mi ilusión por este trabajo. Espero que algún día sean conscientes de ello.

No me es posible enumerar uno a uno a todos los miembros de mi familia, a los que sinceramente creo que debo mucho de lo que este momento representa: primos sobrinos, hermanos políticos,... A todos ellos mi agradecimiento, por sus frecuentes palabras de ánimo.

No puedo dejar de referirme a las personas que decidieron contar conmigo en alguna actividad investigadora en el pasado y con los que tuve la suerte de compartir la autoría de algunas publicaciones en diversas disciplinas.

Debo reconocer mi ilusión al contribuir, en la realización de algunos trabajos, además de con mis hermanos José Miguel y Juan Carlos, con amigos, a la vez que compañeros, como José L. Raymond, modelo de profesionalidad y estímulo, así como de generosidad sin límites, o Carlos Contreras, de infatigable capacidad creativa y actividad frenética.

Quiero agradecer finalmente la positiva contribución a mi desempeño profesional de algunos colaboradores que en estos momentos recuerdo especialmente: Jesús Pérez, Jesús Sanz, Emilio Llorente,... y tantos otros que prefiero no enumerar, porque seguramente incurriría en olvidos involuntarios no deseables. Su aportación fue determinante. A todos ellos mi agradecimiento profundo por haber contribuido a que a estas alturas de mi vida siga manteniendo la ilusión creativa al mismo nivel de siempre, desde que tuve consciencia del mundo y de la vida.

Madrid 3 de junio de 2018

RESUMEN

El objetivo principal de la presente memoria es la construcción sólida de un modelo innovador de aplicación de la Teoría de la Información a un campo físico clásico estocástico. El campo físico elegido es el campo gravitacional. Las principales razones de la elección son las siguientes:

1.- Actualmente se realizan intensos esfuerzos investigadores, aún no culminados con éxito, por alcanzar un modelo de Gravedad Cuántica que permitiría fundamentar una Teoría Unificada (en el proceso de cuantización el concepto de incertidumbre juega un papel fundamental).

2.- El contexto relativista estocástico permite hacer un análisis basado en una clasificación de eventos según su posición relativa en el espaciotiempo, en el que la conexión causal es un concepto clave relacionado con el nivel de información mutua entre eventos.

3.- Aunque se han realizado algunos estudios fructíferos sobre Gravedad Clásica Estocástica, éstos no se han sometido, hasta donde el autor ha podido verificar, a un pertinente análisis informacional, lo cual constituye una evidente carencia que deja incompleta la investigación.

Los primeros pasos en un campo nuevo de investigación aconsejan, y así lo ha interpretado el autor de la memoria, la aplicación de una adecuada simplificación en la definición del marco gravitacional estocástico, manteniendo el nivel de utilidad y validez de unos resultados que abren diversas líneas de investigación. Las simplificaciones adoptadas han sido las siguientes:

a) Se ha considerado un espaciotiempo de Minkowski, compatible con escenarios especial-relativistas, en los que las geodésicas inerciales, tanto reales como imaginarias, son líneas rectas, si bien sólo las primeras corresponden a líneas del universo de partículas, no contemplando la curvatura asociada a la presencia de una distribución de materia, tal como exigiría un modelo general-relativista.

b) El modelo utilizado en la memoria está basado en la dotación de un carácter estocástico al tensor de stress de energía-momento en cada punto de una región espaciotemporal ocupada por un campo material. Se supone que, como consecuencia de la influencia de una o varias fuentes externas al campo material, el tensor de stress experimenta fluctuaciones de baja intensidad generándose así un campo estocástico tetradimensional.

c) Se supone que en el sistema, cuyo estado es próximo al equilibrio, una fuente induce un campo estocástico gaussiano, markoviano y estacionario.

d) Se ha utilizado un tensor de stress diagonalizado (con 4 componentes), con lo que las propiedades informacionales fundamentales, que en el caso gaussiano dependen del determinante y la traza del núcleo de covarianza, se conservan, al margen de los aspectos geometrodinámicos, que son ajenos a los objetivos de la memoria.

La memoria está estructurada en tres Partes claramente diferenciadas en su contenido, un capítulo complementario de Discusión y Temas Abiertos, y varios Apéndices.

En la Parte I se describen y analizan las propiedades de las magnitudes fundamentales del campo estocástico necesarias para llevar a cabo un amplio análisis informacional:

- Tensores de covarianza incondicional y condicional (a una información dada)
- Tensores de propagación de correlación elementales (markovianos) y compuestos.
- Tensor de distancia (cuantificador del grado de reducción de la incertidumbre) y tensor de carga de correlación (complementario del anterior), y factores escalares de distancia y carga de correlación, propuestos por el autor, con unas propiedades que enriquecen el análisis informacional en un punto, dada una información en su entorno.

Se incluye un análisis exhaustivo de algunos conceptos metodológicos relevantes:

- 1) Identificación de la estructura de las fuentes actuantes sobre el sistema material.
- 2) Impacto de la agregación de varias fuentes, con y sin información mutua.

Se incluyen unos capítulos que intentan destacar (y al mismo tiempo sugerir propuestas a) las carencias que, en cuanto a un análisis informacional exigible, tiene toda teoría física aproximada, clásica o cuántica. Se sugiere un método, cuya sencillez se justifica en su finalidad didáctica, para incentivar el desarrollo de metodologías que aporten medidas de la validez de la aproximación de cualquier teoría consolidada en base a la evidencia de una buena aproximación científicamente aceptada.

Esta Parte I contiene un breve capítulo introductorio finalmente agregado en el se pone el énfasis en la realidad del espaciotiempo minkowskiano subyacente, destacando las características diferenciales respecto a un escenario tetradimensional euclidiano.

En la Parte II se invocan y aplican las medidas de la incertidumbre más importantes, de larga y fructífera utilización histórica en diversos campos, a un campo físico gravitacional tetradimensional estocástico, que constituye la base del desarrollo del trabajo. Se obtienen unos resultados informacionales para el modelo estocástico gaussiano utilizando las magnitudes descritas en la Parte I. Así, las medidas teórico-informacionales de Shannon, de Fisher, el desequilibrio o las complejidades adoptarán unas expresiones concretas, de valiosa interpretación. En un capítulo específico el autor propone unas medidas informacionales alternativas (cuyos resultados complementarían a los de las medidas convencionales), denominadas efectivas, cuyo objetivo es proporcionar un mayor grado de generalidad en cuanto a homogeneidad dimensional y cumplimiento de leyes clásicas de conservación (p.e. frente a la conservación de las complejidades convencionales que lo es sólo ante cambios homogéneos de escala). La amplitud de los resultados, siendo notable, ve limitado su alcance por el hecho restrictivo de utilizar un modelo estocástico tetradimensional gaussiano.

La Parte III está dedicada exclusivamente a la exposición de los casos prácticos, que de forma exhaustiva reflejan unos resultados, numéricos en la mayor parte de los casos, obtenidos para los diferentes escenarios que han sido analizados a lo largo de la memoria.

La memoria culmina con un capítulo de Conclusiones y Líneas Abiertas de Investigación, cuya incorporación es necesaria para cerrar la visión global que el trabajo pretende, a partir del análisis crítico del contexto definido y los resultados obtenidos, así como la enumeración de los diversos frentes en los que la investigación puede tener una enriquecedora continuidad.

RESUMEN

Se incorpora un conjunto extenso de Apéndices que profundizan sobre algunas cuestiones tratadas en el texto de la memoria y se añaden finalmente las Referencias Bibliográficas consultadas.

Índice general

1. Objetivos y Metodología	11
Parte I. Análisis del efecto estocástico inducido por fuentes externas en un sistema material que ocupa una región del espaciotiempo	25
2. Introducción	29
3. El tensor de stress (componente estocástica), el núcleo de covarianza y el tensor de propagación de covarianza	39
4. Identificación de los procesos asociados al efecto estocástico producido por varias fuentes externas no conocidas	49
4.1. Efecto inducido markoviano causado por una fuente externa (conocido el valor del tensor de stress en un punto anterior)	50
4.2. Efecto inducido no markoviano causado por una o más fuentes externas (conocido el valor del tensor de stress en dos puntos anteriores)	53
4.3. Efecto inducido markoviano causado por una fuente externa (conocido el valor del tensor de stress en dos puntos, uno anterior y otro posterior)	57
5. Determinación del efecto agregado de los campos aleatorios inducidos por una o varias fuentes externas identificadas	59
5.1. Teoría exacta de agregación de procesos inducidos	61
5.2. Teorías aproximadas de agregación de procesos inducidos	66

5.2.1.	Teoría 1 aproximada: descomposición en suma maximalmente equivalente de procesos con correlación cruzada nula	68
5.2.2.	Teoría 2 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación marginal (en formatos normal y mínimo)	71
5.2.3.	Teoría 3 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación contributiva (en formatos normal y mínimo) . .	79
6.	El tensor de distancia: tensor de evaluación de la reducción de incertidumbre en función de una información disponible	83
6.1.	Definición de tensor de distancia y conceptos asociados	84
6.2.	Propuesta de una teoría exacta de agregación basada en el tensor de distancia	88
7.	Propuesta de unos criterios elementales de evaluación del grado de exactitud de una teoría aproximada	93
7.1.	Aplicación de algunos criterios a la medición de la exactitud (o grado de aproximación) de una teoría: tensores de inexactitud	97
7.2.	Aplicación de los conceptos propuestos a la validación de la exactitud de la teoría 1 aproximada: descomposición en suma maximalmente equivalente de procesos con correlación cruzada nula	100
7.3.	Aplicación de los conceptos propuestos a la validación de la exactitud de la teoría 2 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación marginal	104
7.4.	Aplicación de los conceptos propuestos a la validación de la exactitud de la teoría 3 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación contributiva	111
8.	Breve introducción al análisis ‘espaciotemporal’ basado en la información acerca de dos puntos	119
8.1.	Inversión temporal	122
8.2.	Información en dos puntos (uno en el pasado y otro en el futuro)	125
8.3.	Información en dos puntos pertenecientes al pasado de un punto dado	128
9.	Conclusiones de la Parte I	133

Parte II. Medidas teórico-informacionales de incertidumbre aplicables al tensor de stress de un campo material	135
10. Introducción	139
11. Conceptos clásicos informacionales: entropía de Shannon, información de Fisher, desequilibrio y complejidad	141
11.1. Modelo gaussiano tetradimensional incondicional	142
11.2. Entropía de Shannon	144
11.3. Información de Fisher	144
11.4. Longitudes entrópicas convencionales	145
11.4.1. Longitud de Shannon	146
11.4.2. Longitud de Fisher	146
11.4.3. Varianza global y desviación estándar	147
11.5. Desequilibrio	147
11.6. Medidas de complejidad convencionales asociadas al tensor de ruido incondicional	148
12. Evaluación de la reducción de la incertidumbre basada en la identificación de fuentes externas perturbadoras	153
12.1. Tensor de estrés con una estructura markoviana, condicional respecto a una información en un punto anterior del espacio-tiempo	154
12.2. Tensor de estrés con una estructura no markoviana (dos fuentes externas no correlacionadas), condicional respecto a una información en un punto anterior del espaciotiempo	156
12.3. Tensor de estrés con una estructura general no markoviana (dos fuentes externas correlacionadas), condicional respecto a una información en un punto anterior del espaciotiempo	158
12.4. Tensor de estrés con una estructura markoviana, condicional respecto a una información en dos puntos (anterior y posterior) del espaciotiempo	161
13. Medidas entrópicas condicionales	165
13.1. La complejidad del modelo de tensor condicional	167
13.2. Entropía relativa, similitud y divergencia de los escenarios incondicional y condicional	168
13.3. M-Divergencias	169
13.3.1. Distancia Cuadrática	169
13.3.2. Divergencia de Matusita	170

13.4. Divergencias de Csiszár	170
13.4.1. Entropía de Kullback-Leibler	171
13.4.2. Divergencia de Jeffreys	171
13.5. Índice de similitud	172
13.6. Divergencia de Fisher	172
14. Medidas de la incertidumbre basadas en el producto exterior (longitudes tetradimensionales)	175
14.1. Información de Fisher <i>efectiva</i>	176
14.2. Desequilibrio <i>efectivo</i>	177
14.3. Longitudes entrópicas <i>efectivas</i>	178
14.3.1. Longitud <i>efectiva</i> de Fisher	178
14.3.2. Varianza global <i>efectiva</i>	179
14.4. Medidas de complejidad <i>efectivas</i> asociadas al tensor de ruido incondicional	179
15. Conclusiones de la Parte II	183
Parte III. Aplicaciones a los diversos escenarios de estructura del conjunto de fuentes externas pertur- badoras	185
Ejemplo 1	189
Ejemplo 2.a	199
Ejemplo 2.b	207
Ejemplo 2.c	212
Ejemplo 2.d	217
Ejemplo 3: Dos fuentes F1 y F2	221
Ejemplo 3.1: Dos fuentes F1 y F2 no correlacionadas	228
Ejemplo 3.2: Dos fuentes F1 y F2 correlacionadas	231
Ejemplo 4: Análisis comparativo de las medidas de información de dos procesos agregables	240
Ejemplo 5: Teoría 1 aproximada - Asimilación de los dos proce- sos inducidos correlacionados a dos procesos aproximados no correlacionados	248
Ejemplo 6: Teoría 2 aproximada - Asignación marginal de dos pro- cesos agregables	257
Ejemplo 7: Teoría 3 aproximada - Asignación contributiva de dos procesos agregables	264

Ejemplo 8: Información en 1 ó 2 puntos con diversos escenarios de causalidad	275
16. Conclusiones finales y temas abiertos de investigación	285
16.1. Conclusiones	285
16.2. Líneas abiertas de investigación	297
Apéndices	321
A. Determinante y traza del tensor de covarianza e información mutua	323
B. Diagonalización del tensor de covarianza	325
C. Cálculo fundamental para la obtención de las longitudes entrópicas gaussianas	327
D. Estructura de un proceso gaussiano tetradimensional (análisis de la identificación dado un núcleo de covarianza)	329
E. Identificación de la perturbación provocada por dos fuentes correlacionadas cuando no se conoce el nivel de correlación	343
F. Aportación marginal agregativa de una fuente externa a la varianza residual	347
G. Análisis de la deformación covariante entre los tensores núcleo de covarianza incondicional y núcleo de covarianza condicional	349
H. Aplicabilidad de la ley de conservación al tensor de stress estocástico	355
I. Tensores de covarianza cruzada	359
J. Tensor de propagación simétrica de covarianza	363
Bibliografía	365

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Objetivos y Metodología

El objetivo principal de esta memoria es hacer un ejercicio de aplicación de la Teoría de la Información [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 34, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 34, 39, 66, 67, 68, 85, 86, 87, 102, 104, 107, 113, 114, 127] a un campo físico sometido a una perturbación estocástica [2, 42, 72, 96]. Se ha elegido un campo Gravitacional Relativista debido al peso importante, así como a la indiscutible atracción, que actualmente ejerce la investigación orientada hacia un modelo final de Gravedad Cuántica [17, 62, 75, 78, 90, 92, 93, 111], o sea, un modelo que concilie la Teoría de la Relatividad General [17, 31, 32, 38, 50, 60, 64, 73, 120, 123] y la Mecánica Cuántica [29, 33, 40, 52, 61, 63, 98, 125]. Ello justifica el contenido de este trabajo, que utiliza alguno de esos modelos como ejemplo de referencia especialmente relevante. Sin embargo, con el fin de desarrollar unas ideas útiles de aproximación, la modelización propuesta está enfocada, como un posible paso intermedio, a la descripción del comportamiento estocástico de un campo físico clásico relativista tetradimensional, y en particular a un campo Gravitacional Clásico, al que se le supone una naturaleza aleatoria como consecuencia de la influencia, estrictamente clásica, de otros sistemas físicos externos. Dicha influencia es, por tanto, el agente causante de que las magnitudes fundamentales exhiban valores fluctuantes en torno a unos valores centrales en una región espaciotemporal dada.

En las últimas décadas se ha intensificado la investigación orientada a alcanzar una teoría satisfactoria de la Gravedad Cuántica. Una de las líneas de análisis se basa en la denominada Ecuación Semiclásica de Einstein-Langevin, que considera la inclusión de un término estocástico gaussiano para intentar aproximar la respuesta de la geometría espaciotemporal a las fluctuaciones causadas por el comportamiento esencialmente probabilístico (asociado a su

naturaleza cuántica) de las magnitudes observables de uno o varios sistemas materiales inmersos en una región del espaciotiempo curvo [57, 58]. Sin embargo, sin ignorar que la completitud de un análisis en cualquier campo de la física actual debería incorporar el hecho cuántico imprescindible, pero teniendo en cuenta que las consecuencias del mismo tienen una relevancia sustancial a escala muy por debajo de los eventos naturales a un nivel cósmico, es posible abordar un análisis de las fluctuaciones de origen clásico, en el ámbito de la denominada Gravedad Estocástica [2, 41, 42, 72, 96], que a dicho nivel tienen lugar en una diversidad amplia de sistemas físicos.

La utilidad del análisis en ese sentido, objetivo de esta memoria, reside básicamente en elaborar, sobre la base de un modelo adecuado, un escenario de concurrencia de varias disciplinas que, con un efecto sinérgico, aprovecha el contexto probabilístico para enriquecer y diversificar, e incluso validar, las potenciales líneas de investigación a seguir, incluyendo un horizonte de aproximación a la vía cuántica. La incorporación de un término estocástico gaussiano sugiere, y así se hace en la memoria, cuantificar en un sentido amplio la incertidumbre, tanto incondicional como condicional (respecto a unas condiciones intrínsecas conocidas), incluyendo, entre otras, algunas medidas idóneas de entropía de la información, conceptos que, por otra parte, tienen importantes antecedentes en teorías físicas como, por ejemplo, la Termodinámica (la entropía de Boltzmann de un sistema representado por un punto de un espacio de fases).

Aunque la incorporación de un posible comportamiento probabilístico de la materia puede justificarse en base a una amplia diversidad de causas, en el caso de una propuesta de aproximación a la descripción de la esencia cuántica hay que establecer una excepción fundamental respecto al resto de posibles escenarios, debido principalmente al conjunto de restricciones necesariamente aplicables para dar un correcto cumplimiento de las leyes que la teoría cuántica ha consolidado firmemente. Así debe ser aun teniendo presente que una teoría de Gravedad Cuántica Estocástica basada en un modelo gaussiano [57, 58, 69, 70, 115, 116] no puede pretender constituir, en el mejor de los casos y si ello fuere finalmente posible, más que una buena aproximación a la descripción probabilística de las fluctuaciones cuánticas de la materia. Acerca de ese grado de bondad, el buen uso de la Teoría de la Información tiene quizá mucho que aportar [87, 102, 104, 114].

Sin embargo, la diferencia entre los distintos escenarios es algo que requiere ser claramente resaltado. En efecto, el hecho cuántico (sin ignorar su carácter holístico universal, cuestión compleja que dejamos al margen) no

es algo activamente exógeno, provocado por agentes externos perturbadores, sino algo endógeno asociado a la incertidumbre de los observables del sistema que pueden adoptar, en general, diferentes estados con una cierta probabilidad. Lo ‘cuántico’ está en la esencia misma de la materia, y con carácter general, de todo lo que existe en el universo, ya que aunque, dicho a modo de ejemplo, una masa o una carga no son magnitudes cuánticas por sí mismas (de hecho, en el marco cuántico se denominan parámetros ‘desnudos’), sí lo es su comportamiento dinámico descrito por unas magnitudes observables, cuando la masa se mueve o la carga ejerce una atracción o una repulsión sobre otra, o sea, cuando dichas magnitudes adoptan diferentes estados discretos o autoestados asociados a un determinado operador cuántico.

Por aclarar esta cuestión podríamos decir que un sistema material que podemos idealizar (por ejemplo, considerando un fluido perfecto) es un sistema ‘cerrado’ (en un sentido clásico) en una región acotada del espaciotiempo en la que indisolublemente reside, cuando no intercambia información (en un sentido amplio) con el exterior a dicha región, es decir, no se ve afectado por la influencia de (ni a su vez afecta a) otros campos físicos externos al sistema, y, sin embargo, los fenómenos cuánticos tienen lugar porque constituyen algo esencial de la materia en cualquier posición espaciotemporal en que ésta esté localizada. Esto tiene implicaciones diferenciales importantes (con respecto a un plano descriptivo estrictamente clásico en el que los campos físicos se manifiestan por su interacción con otros campos). Una de estas implicaciones es la ley de conservación (no exenta de debate dependiendo de la elección de un modelo cosmológico) del tensor de stress de energía-momento (en adelante tensor de stress), lo que no es necesariamente aplicable en un contexto clásico si el sistema no se considera cerrado.

El tensor de stress es un concepto fundamental sobre el que pivota la metodología desarrollada en esta memoria, en el sentido de que será objeto de análisis desde la aplicación de unas medidas informacionales idóneas. La conservación o no del tensor de stress es una cuestión asociada a la versión gravitacional actualizada de la propiedad clásica prerrelativista de la conservación o no de la energía y el momento globales de un sistema, según las condiciones que se presupongan a éste (que sea cerrado o, por el contrario, que pueda intercambiar energía con otros sistemas).

En este punto debemos anticipar una aclaración general respecto a la naturaleza del sistema objeto de estudio y las fuentes externas perturbadoras. Empecemos por considerar un escenario, diferente del que se considera en la memoria, en el que un análisis clásico de un sistema físico gravitacional

que experimenta fluctuaciones del tensor de stress, de baja intensidad, con carácter ‘endógeno’, es posible. Consideremos que una determinada estrella es un fluido esférico perfecto cercano al equilibrio, que se suele denominar equilibrio hidrostático. Este equilibrio es debido a causas bien conocidas: compensación entre la presión provocada por las reacciones en su núcleo y la gravedad propia, ignorando efectos como la relativamente pequeña pérdida de masa (en función del tamaño de la estrella) debida al viento solar. En este sistema el equilibrio se verá alterado por las fluctuaciones debidas a las continuas colisiones moleculares. Este sería un escenario de Gravedad Clásica Estocástica, diferente al considerado en este estudio, en el que la fuente perturbadora es el propio sistema.

Supongamos ahora unos escenarios relativistas distintos: una nube de polvo interestelar, o un fluido preparado en un laboratorio en determinadas condiciones de confinamiento. Se trata de dos ejemplos de sistemas físicos muy diferentes, que en cada caso suponemos que pueden ser influenciados por determinadas fuentes externas. Estos sistemas objeto de estudio pueden considerarse como fluidos perfectos con características de presión y densidad de energía (componentes del tensor de stress) distintas de acuerdo con las propiedades físicas de cada sistema. Las fuentes externas pueden ser: estrellas (eventualmente nuestro Sol) más o menos masivas, púlsares, quásares, galaxias, cúmulos,..., o simples fuentes de radiación creadas artificialmente en laboratorio con fines experimentales acordes con nuestro estudio.

El equilibrio termodinámico del sistema físico deriva de la compensación entre la radiación electromagnética recibida (normalmente muy energética, en el rango de ‘onda corta’) de las fuentes externas y la radiación ‘devuelta’ al entorno (con un nivel energético generalmente menor, o sea, con longitud de onda mayor, en función de la temperatura de equilibrio del sistema analizado). Por tanto, estaríamos considerando para cada fuente (que en realidad sólo aportarían una energía radiante positiva) el efecto ‘neto’ de su aportación energética compensada por la liberación de energía ‘devuelta’ al entorno por el sistema, con balance nulo en el tensor de stress, aunque, en el esquema que estamos proponiendo, lo supondríamos aproximadamente nulo, con promedio igual a cero y una fluctuación pequeña o moderada en torno a este valor.

La versión actual del principio físico de conservación se complica, más allá de una posible complejidad analítica intrínseca, como consecuencia de la diversidad de las cosmologías en las que, con un mayor o menor grado de aceptación, diferentes grupos de físicos teóricos se posicionan en el actual

contexto de ‘crisis’ provocado por eventos físicos que, aunque claramente detectados, son casi absolutamente inidentificados, como los asociados a la materia oscura y, especialmente y en mayor grado, la energía oscura, que, dominando la (casi) totalidad del universo, inducen unos efectos en el mismo que están lejos de haber sido modelizados con una razonabilidad satisfactoria. En otras palabras, la determinación de la masa en reposo de los neutrinos o la del valor de la constante cosmológica pueden producir un paisaje cosmológico específico diferente según sean sus valores adoptados (en cualquier caso relativamente muy ‘pequeños’, si no nulos), actualmente aún por determinar.

No hay que olvidar que la ley de conservación implícita en la ecuación original de Einstein (1915) [31] surge como una propiedad (quizá la más importante) del tensor de Riemann asociado a la geometría del espaciotiempo curvo, propiedad que queda representada por las identidades de Bianchi contraídas, que dotan al tensor de Einstein (miembro izquierdo de la ecuación fundamental) del carácter de conservado, lo que en su versión simple original lleva a que el tensor de stress ‘herede’ dicha propiedad, hecho que, en principio, es un resultado especial e incuestionablemente relevante, y, por supuesto, intuitivamente muy aceptable por razones anteriormente apuntadas.

Como sabemos, no obstante, la historia de dicha ecuación ha sido, desde que nació hasta el momento presente, muy larga y diversificada, habiendo dado lugar a lo que podríamos denominar una numerosa familia de teorías gravitacionales alternativas, con diversos grados de adopción en el conjunto de la comunidad de físicos teóricos, que lógicamente tiende en cualquier caso a posicionarse a favor de la información experimental disponible. Una mayoría de esa comunidad estaría a favor del Modelo Estándar de Partículas [17, 29, 43, 53, 82, 123, 126], la Teoría Cuántica de Campos [28, 36, 37, 79, 99, 105, 121, 126] y el denominado Modelo de Universo Inflacionario [17, 48, 49, 51, 98, 106, 117, 120, 123], que exhiben la mejor compatibilidad con la experiencia observacional contrastada (como las características de la radiación de fondo de microondas del universo), y algunos resultados mucho más cercanos (como la detección del bosón de Higgs o la de las ondas gravitacionales), que, a falta de confirmaciones ulteriores, parecen haber evidenciado algunos experimentos recientes. Sin embargo, hay que recordar una vez más que el desconocimiento acerca de algunos componentes y características no triviales, ya mencionados, de la materia-energía del universo impide la formulación de un modelo completo que resulte evidente y cerrado, y definitivamente aceptado sin reservas.

Si se pretende describir el comportamiento cuántico de un sistema, lo que,

además de corresponder a un escenario realista, se hace progresivamente más relevante a medida que la escala de observación y análisis se aproxima a un nivel ‘planckiano’, y dado que dicho comportamiento se asocia a un nivel de incertidumbre (que podríamos denominar probabilístico en un sentido cuántico), es preciso alcanzar un modelo válido que, además de ajustarse suficientemente a la fluctuación cuántica de la materia, permita hacerlo simultáneamente (y en este punto reside en buena medida la enorme dificultad para alcanzar una teoría completa de Gravedad Cuántica) con la geometría del espaciotiempo subyacente.

Un modelo geometrodinámico cuántico que sea satisfactorio, suponiendo que sea potencialmente accesible, parece encontrarse lejos del alcance de la investigación actual, sin hacer menosprecio de la gran cantidad de resultados parciales alcanzados (existencia de antipartículas, creación y aniquilación de partículas,...), producto del esfuerzo investigador, que conforman un campo de conocimiento muy valioso que ha facilitado una visión cada vez más amplia y mejor aproximada de nuestro universo observable.

Que un modelo físico que incluya un término gaussiano basado en la idea inicial de Langevin puede ser insuficiente resulta evidente si el objetivo es alcanzar un modelo cuántico ‘exacto’. Pero, como sabemos, ni siquiera las teorías cuánticas ‘renormalizables’ alcanzadas para interacciones distintas de la gravitacional (electrodinámica cuántica, cromodinámica cuántica, unificación electrodébil,...), son exactas, aunque con ellas se ha logrado, según consenso en el seno de la Física Teórica, un suficiente y consistente grado de aproximación que avala su alta validez bajo hipótesis aceptables. La vía estocástica basada en un soporte probabilístico gaussiano siempre gozará de la simplicidad y las buenas propiedades de la distribución normal o de Gauss, y, por tanto, de una actitud favorable por parte de algunos investigadores que suponen que el ‘manejo’ analítico relativamente cómodo de estos modelos puede permitir avances importantes. Sin embargo, surge la pregunta: ¿medimos bien ese alto grado de validez? En otros términos: ¿cuánto se acercaría a la realidad el modelo gaussiano?, ¿se utilizan las medidas objetivas adecuadas para estar razonablemente seguros al afirmar que la aproximación es suficiente? La Teoría de la Información, en base a sus logros contrastados, ha construido unos criterios potentes consolidados que pueden ser utilizados para intentar responder a estas preguntas.

Algunas características asociadas a la densidad gaussiana pueden limitar, en un grado a determinar en cada caso, su aplicabilidad en diversos ámbitos de análisis. Algunas de estas características son, en primer lugar, el hecho de

que el rango de valores de una variable gaussiana se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$ (o sea, una variable descrita por dicha densidad debería poder tomar, aunque con probabilidad decadente, valores negativos o positivos ilimitadamente alejados) y también que sólo posee dos momentos (la media y la varianza) que la identifican de forma absoluta, por lo que hay que proceder con cierta prudencia en la modelización de magnitudes que, por ejemplo, sólo pueden tomar valores positivos o en el caso de que las variables presenten un comportamiento probabilístico que exija, de cara a una correcta descripción, la consideración de momentos de un orden superior a 2 [35]. Se hace necesario cuestionar: ¿son importantes en algún grado esas limitaciones?

Resulta obvio recordar que existe una gran cantidad de distribuciones conocidas a considerar, algunas derivadas de la propia distribución gaussiana (densidades normales truncadas, densidades log-normales, . . .) y otras de naturaleza diferente, aunque en cualquier caso, además de no asegurar el correcto ajuste exigido, incorporarían eventualmente un grado de dificultad añadida en el tratamiento analítico de los modelos. No obstante, una adecuada definición del contexto analítico de aplicación de un modelo gaussiano puede tener un soporte aceptable, como históricamente ha sucedido en ciertas aplicaciones en las que se ha usado un término adicional de Langevin. En la medida en que las fluctuaciones susceptibles de modelización gaussiana sean relativamente pequeñas respecto al valor medio de la magnitud fundamental considerada, mayor es la aplicabilidad del modelo, ya que la cola de valores negativos de la distribución se haría despreciable. Nuevamente habría que plantear: ¿dónde se sitúa la frontera de la validez o no de esta afirmación? Este es el caso que contempla la Ecuación Semiclásica, al margen de otros problemas derivados de naturaleza distinta.

La reiterada referencia en este capítulo introductorio a una aproximación gaussiana al modelo cuántico de la materia, en el marco de la denominada Gravedad Cuántica Estocástica, tiene en nuestro caso la doble utilidad de, por una parte, destacar ésta como una línea de investigación abierta, quizá la más relevante, en el marco de esta memoria, teniendo en cuenta las necesarias restricciones mencionadas, y, por otra, definir de un modo claro y preciso, y por supuesto útil, el contexto del análisis a desarrollar, incorporando los conceptos que resulten realmente relevantes de cara a su aplicabilidad a diferentes teorías físicas.

En primer lugar hay que resaltar que queda establecido en esta memoria un marco general, diferente del escenario cuántico, acorde con la denominada Gravedad Clásica Estocástica [2, 41, 42, 72, 96]. Por tanto, consideraremos

un sistema físico clásico fluctuante en el que la naturaleza de las fluctuaciones no es de carácter cuántico. En consecuencia, la causa de la perturbación estocástica de la materia (que en cualquier caso debería tener su reflejo en la geometría espaciotemporal, algo que dejamos al margen de nuestro estudio como una cuestión abierta) es de carácter exógeno, o sea, reside en la influencia de una o varias fuentes externas, de diversa naturaleza. Por consiguiente, el sistema objeto de análisis no puede considerarse como un sistema clásicamente cerrado, sino que se trata de un sistema conceptualmente abierto. Sin embargo, la validez del estudio, en el que fundamentaremos la naturaleza estocástica de la materia mediante un esquema gaussiano determinado, se basa en un comportamiento ‘cuasi-cerrado’ del sistema, esto es, en que su intercambio con regiones disjuntas a la región espaciotemporal ocupada por el sistema es relativamente pequeño. Esto implica que la acción o influencia inducida por las fuentes externas es pequeña respecto a los valores medios de las magnitudes fundamentales (presión, densidad de energía,...) y, en consecuencia, el modelo gaussiano que da soporte a las fluctuaciones materiales se considera suficientemente válido.

La hipótesis de relativa pequeñez del comportamiento eventualmente fluctuante de la materia no actúa en detrimento del interés que puede conllevar su análisis detallado con fines prácticos asociados con vías diversas de investigación, más allá del interés esencial que suscita cualquier evento real posible, susceptible, por tanto, de la correspondiente, conveniente, y siempre presente, iniciativa investigadora.

Un tensor de stress gaussiano, resultante de la acción de unas fuentes perturbadoras externas, más allá de las consideraciones previas que justifican el desarrollo de esta memoria, resulta en sí misma una expresión demasiado abierta, que puede dispersar las líneas analíticas de avance si no se selecciona bien un entorno de condiciones, el más conveniente en una fase inicial, que permita hacer una sistematización en el acoplamiento de las ideas que se generan y se asocian, enfocadas hacia un objetivo concreto que se expone a continuación en este capítulo introductorio.

Se hará la hipótesis, con carácter general, de que el sistema objeto de estudio se encuentra en un estado de equilibrio, o muy próximo al equilibrio, en una región acotada del espaciotiempo. La condición de equilibrio condiciona las características del proceso aleatorio gaussiano que se supone constituye la componente estocástica del tensor de stress. Consecuentemente, se considerará que dicho proceso es una función estocástica tetradimensional, lineal y estacionaria. La tetradimensionalidad viene impuesta por el entorno espacio-

temporal relativista, y, en consecuencia, por la naturaleza tetradimensional del tensor de stress, la ‘contrapartida’ del espaciotiempo en las ecuaciones einsteinianas gravitacionales. Se considera además, por simplicidad razonable, que son prescindibles los efectos de curvatura del espaciotiempo, dado que el objetivo principal es, como ya se ha indicado e inmediatamente reiteraremos, la aplicación de los principales conceptos teórico-informacionales para evaluar la incertidumbre del sistema. Por tanto, el contexto es un espaciotiempo plano de Minkowski [71] (aunque la bibliografía al respecto es muy extensa, para una primera revisión se puede consultar [89], así como los excelentes textos semidivulgativos [81] y [97] y, por supuesto, los capítulos introductorios de cualquier obra sobre Gravitación [60, 73, 120, 123]). La linealidad constituye la primera selección natural de una amplia y exhaustiva gama de posibles procesos aleatorios y es perfectamente acorde con el contexto general que estamos definiendo. En cuanto a la condición de estacionariedad, que implica físicamente estabilidad y control natural en la evolución de una magnitud, es compatible con la condición de equilibrio impuesta al sistema objetivo.

Este contexto es menos restrictivo de lo que puede parecer inicialmente, ya que contempla una familia muy amplia de estructuras estacionarias posibles asociadas a unos procesos estocásticos tetradimensionales, que, excluyendo explícitamente cualquier configuración estrictamente no estacionaria, ofrece un rango muy abierto que va desde la estructura más simple de ‘ruido blanco’, caso extremo que consideramos irrelevante dado que prescinde de cualquier tipo de información mutua entre pares de puntos espaciotemporales separados y causalmente conectados, hasta, en el otro extremo, el proceso tetradimensional no estacionario (por no serlo al menos una de las componentes estocásticas del tensor de stress), que consideramos inaccesible, ya que dicho esquema comportaría la pérdida de estabilidad del sistema, que en el contexto de esta memoria, reiteramos, no se contempla, quedando como un posible tema abierto de investigación.

La utilidad del análisis en el campo de la Gravedad Estocástica se basa principalmente en el hecho de esbozar una metodología inicialmente simple y complementada con ejemplos ilustrativos, utilizando las medidas adecuadas que proporciona la Teoría de la Información. Esta teoría permite hacer un análisis fértil de la incertidumbre inherente a todo sistema, físico o no, de naturaleza estocástica. Los observables de un sistema estocástico son magnitudes aleatorias, y, por tanto, inciertas desde la perspectiva del observador. La aportación principal de la propuesta metodológica radica precisamente

en, a diferencia de los criterios históricamente utilizados en relación con la Gravedad y otros campos físicos, sugerir la utilización de medidas avanzadas, consistentes y robustas, que permitan evaluar la información en una diversidad de escenarios de un modo más eficaz que como lo hacen las medidas probabilísticas convencionales. Un campo gravitatorio estocástico, sea cual sea la causa de su aleatoriedad, contiene un grado de incertidumbre (en un punto espaciotemporal, o una región,...) que debe y puede ser bien medido. Los distintos escenarios a analizar resultan de un conjunto de diferentes factores (el modelo estocástico estructural utilizado, el conjunto de información disponible a partir de datos experimentales,...), y la presente memoria pretende abrir paso a una literatura técnica avanzada en este ámbito.

La memoria contiene básicamente tres partes desarrolladas en un orden lógico, claramente diferenciadas, cada una de ellas centrada en los aspectos relacionados con las disciplinas principales cuyo contenido fundamental se combina de forma razonada a lo largo del estudio, y de un capítulo de cierre en el que se hacen unas consideraciones finales.

La Parte I, titulada ‘Análisis del efecto inducido por fuentes externas a un sistema’, iniciada con un amplio capítulo introductorio (Capítulo 2), hace referencia, partiendo de la hipótesis de un sistema material que ocupa una determinada región del espaciotiempo, al efecto provocado en dicho sistema por la acción de una o varias fuentes externas que inducen una perturbación estocástica en el tensor de stress como descriptor de las características de distribución de la materia. El estudio se desarrolla con especial referencia a un concepto fundamental asociado al tensor estocástico de stress: el núcleo de covarianza entre dos puntos causalmente conectados a lo largo de la geodésica espaciotemporal que los une (Capítulo 3). El hecho de considerar este tipo de conexión causal es relevante a partir de la consideración de que el efecto provocado por las fuentes es de naturaleza puramente estocástica, eliminando la posibilidad de existencia de una acción determinística significativa que implicaría una trayectoria consecuentemente deformada respecto a las trayectorias inerciales naturales de un espaciotiempo plano de Minkowski, o sea, líneas rectas (geodésicas) en dicho espaciotiempo pseudoeuclidiano tetradimensional.

El análisis desarrollado en la Parte I contiene varios capítulos que incluyen tratamientos con enfoques netamente diferentes. En un primer enfoque del análisis (Capítulo 4) se considera que la acción provocada por agentes físicos externos ya se ha producido. A partir de este escenario estático, que contempla el conocimiento completo (en términos probabilísticos), por parte del

observador, del núcleo de covarianza del tensor de stress, se hace un análisis que podríamos asociar con una ‘fase de identificación’, mediante la cual, dado un punto elegido del espaciotiempo de la región objetivo, y tomando como punto de partida el desconocimiento acerca de valores observados del tensor en el entorno causalmente conectado del punto elegido (caso incondicional, que no conlleva reducción de la incertidumbre sobre el contenido informacional del punto objetivo), se considera un incremento progresivo del conjunto de información disponible (valor conocido en uno, o dos, o más puntos del entorno de conexión causal, . . . , lo que generaría distintos escenarios condicionales), con lo cual se produciría una reducción de incertidumbre sobre el tensor estocástico de stress en el punto de referencia. Seguidamente se procede a la identificación verosímil del proceso estocástico gaussiano estacionario subyacente y compatible con la información disponible en cada escenario seleccionado. Se hace un estudio detallado de los casos más sencillos, y al mismo tiempo más significativos, que permita una exposición sistematizada resaltando los aspectos más relevantes.

En un capítulo posterior (Capítulo 5), se considera un escenario diferente, no estático, en el que se analiza el efecto acumulativo que, sobre la incertidumbre asociada al tensor estocástico de stress en un punto dado, produce la acción agregada de varias fuentes. Se incluye una propuesta de agregación (que denominamos convencionalmente teoría ‘exacta’) y de asignación (que denominamos asimismo convencionalmente, aunque con intención didáctica como veremos, teoría ‘aproximada’) de la aportación efectiva individual imputable a cada fuente. Esto último se hará utilizando diferentes criterios, con ventajas e inconvenientes en función de los objetivos del análisis. Como veremos, el concepto de proceso estocástico gaussiano estacionario markoviano, como pieza elemental de construcción de los modelos analíticos, es especialmente relevante, incluso fundamental.

La Parte I incluye la propuesta de un concepto fundamental (que servirá como puente entre ésta y la Parte II), que hemos denominado convencionalmente *tensor de distancia* (Capítulo 6), y que es, por naturaleza, una medida informacional relevante. Esta magnitud pretende ser una medida global eficaz para cuantificar (por ejemplo, en el caso de una fuente perturbadora única) el grado de ‘reducción’ de incertidumbre, en términos tensoriales, cuando se hace una transformación de un tensor de covarianza incondicional en un tensor de covarianza condicional equivalente al tensor de covarianza del tensor estocástico residual, una vez utilizada idóneamente la información disponible obtenida de los datos observados acerca del tensor de

stress en el entorno del punto espaciotemporal de referencia. Sin embargo, la aplicación de este concepto puede ser mucho más amplia, y generalizable a un conjunto de varias fuentes, diversificando la dirección en que la aplicabilidad puede producirse. Además de, por supuesto, extender la medición anterior a la reducción de incertidumbre condicionada a un conjunto de información, podría utilizarse el concepto de tensor de distancia, también a modo de ejemplo, para evaluar la proximidad entre modelos alternativos.

En esta memoria (Capítulo 7) se hará un ejercicio de evaluación de la bondad de aproximación entre modelos pertenecientes a una teoría ‘exacta’ y modelos pertenecientes a una teoría ‘aproximada’, modelos estos últimos que, sin ser exactos, son una alternativa justificada en base a ciertas propiedades útiles, aunque en este caso hemos utilizado la denominación específica de *tensor de inexactitud*. Se podría aportar una cantidad de ejemplos adicionales, aunque la aplicación a los ejemplos anteriormente mencionados justifica en buena parte el contenido y los desarrollos de esta memoria, en la que de forma reiterada se pretende resaltar la necesidad de utilizar las medidas informacionales para obtener un respaldo objetivo a la modelización de un sistema físico estocástico, y, en definitiva, a una teoría en la que el comportamiento fluctuante aleatorio es la característica principal.

El Capítulo 8 constituye una incorporación final insertada en la memoria con el fin de cubrir una ‘laguna’, de la que, a juicio del autor, podría adolecer un trabajo que, desarrollado en un contexto tetradimensional, no hace tal vez el énfasis necesario en las características asociadas al escenario real subyacente: un espaciotiempo tetradimensional de Minkowski, dotado de una pseudométrica que clasifica los eventos que suceden en el mismo de forma netamente diferencial respecto a la que, a lo largo de la historia de la física prerrelativista, ha sido utilizada en el seno de un espacio espacial tridimensional fibrado en un espacio base temporal unidimensional. En este capítulo se esbozan al mismo tiempo las ideas generales que permitirían iniciar el desarrollo de una de las líneas más importantes de investigación propuestas, como es la consideración, no de un solo punto, sino de un conjunto de puntos del que el observador posee una información aprovechable para evaluar la incertidumbre residual en un punto espaciotemporal de referencia.

En la Parte II, titulada ‘Medidas teórico-informacionales de incertidumbre aplicables al tensor de stress de un campo material’ e iniciada igualmente con un capítulo introductorio (Capítulo 10), se hace una revisión y aplicación exhaustiva de un conjunto de medidas importadas de la Teoría de la Información y aplicadas al sistema descrito anteriormente (Capítulos 11 y 13).

Estas medidas basan su aplicabilidad en el hecho de que, cuando se dispone de una información observada, la densidad probabilística del tensor de stress cambia, porque cambia la incertidumbre asociada, lo que posibilita un amplio conjunto de resultados procedentes de dichas medidas, que, según el concepto medido, pertenecen a un conjunto con una tipología diversa, como diversa es su interpretación, ofreciendo una información muy aprovechable cuando se utilizan sinérgicamente, tanto implícita como explícitamente (Capítulo 12).

Un concepto fundamental en Teoría de la Información, que implica en mayor o menor medida al resto de medidas utilizadas, es el concepto de ‘entropía’, y muy especialmente, al margen de su valor histórico seminal, el de ‘entropía de Shannon’, aunque con posterioridad han sido definidas, y profundamente analizadas, y, por supuesto, ampliamente utilizadas, otras definiciones de ‘entropías’, entre las que destacan las ‘entropías de Rényi’ y las ‘entropías de Tsallis’, cuyas buenas propiedades e idoneidad de aplicación en determinados escenarios han sido exhaustivamente expuestas en la literatura.

Al tema central que nos ocupa en esta memoria se han aplicado conceptos como ‘longitudes entrópicas’, ‘información de Fisher’, ‘desequilibrio’, ‘similitud’ y ‘divergencia’, cada uno con su propia definición y consiguiente utilidad. Mención especial han merecido por su amplia y fértil aplicación las denominadas ‘medidas de complejidad’, aunque su riqueza potencial no se manifiesta en toda su extensión en esta memoria en la que, en todo caso, el análisis no trasciende el modelo gaussiano, si bien pueden ofrecer más amplias posibilidades en otros estudios abiertos objeto de ulteriores desarrollos.

La exposición de la Parte II refuerza la relevancia, como concepto fundamental, del ‘núcleo de covarianza’, por su contenido óptimo de información de un proceso aleatorio gaussiano estacionario (markoviano o no markoviano, aunque como veremos a modo de propuesta subyacente en esta memoria, en un conjunto amplio de procesos lineales estacionarios, la propiedad de Markov está implícitamente presente). Este hecho adquiere importancia mediante un ensayo de propuesta de unas medidas alternativas, ‘no convencionales’ en el ámbito de la teoría de la información, a las que, en un ejercicio libre de denotación, se les ha añadido el calificativo de ‘efectivas’ (Capítulo 14). Estas medidas, que conceptualmente complementan a las medidas convencionales, que están basadas en el producto interior, o sea, el producto escalar de dos vectores (el tensor de stress diagonal, asimilable a un vector fila, multiplicado por su transpuesto), están definidas, a diferencia, en base al producto exterior (el tensor de stress diagonal, asimilable a un vector columna, multiplicado por su transpuesto), lo que genera una matriz, cuyo valor esperado

es el núcleo de covarianza. Los funcionales fundamentales de dicho tensor (determinante y traza), al ser numérica y dimensionalmente diferentes, permiten, según interpretación del autor, una utilidad adicional (cuando menos diferente y merecedora de exploración general) en cuanto al aprovechamiento de las características de correlación del proceso.

En las partes I y II de la memoria se incluyen sendos capítulos finales de ‘Conclusiones’ (Capítulos 9 y 15) en los que se hace expresa y detallada referencia a los resultados obtenidos respecto a las cuestiones anteriormente descritas.

La Parte III desarrolla una exhaustiva colección de casos prácticos, que aporta ilustración y visibilidad sobre los resultados teóricos alcanzados, al tiempo que facilita la interpretación de los conceptos utilizados, con el punto de mira centrado en el objetivo principal de la memoria: análisis del tensor estocástico de stress bajo las medidas informacionales idóneas en el marco de un modelo general de Gravedad Clásica Estocástica.

El Capítulo 16, denominado ‘Conclusiones finales y temas abiertos de investigación’, estructurado en dos secciones, aporta unas reflexiones con las que finaliza esta memoria. En la Sección 16.1 se mencionan detalladamente las conclusiones generales más importantes, así como la justificación de la metodología empleada y la validez y aplicación general de los resultados alcanzados, con lo que queda cerrado el objetivo global proyectado en el trabajo. Este último capítulo es de gran importancia en una memoria que abre amplios frentes de desarrollo muy diversificados, como queda descrito la Sección 16.2. Aunque la enumeración de estas cuestiones abiertas es extensa, y tienen su justificación principal en el necesario proceso de simplificación que se ha seguido, tanto en los casos analizados (que han sido limitados convenientemente) como en los ejemplos expuestos en la Parte III, hay que destacar una vez más que uno de esos temas abiertos, sin duda el más trascendente y el que comporta, con diferencia, el mayor grado de dificultad, con restricciones adicionales específicas, es el que se refiere a la vía abierta desde hace décadas de aproximación a una teoría de Gravedad Cuántica Estocástica y, en general, a una teoría unificada de Gravedad Cuántica (actualmente estas teorías responden a enfoques muy diversos). En opinión del autor de esta memoria, y hasta donde alcanza su conocimiento acerca de este tema, esta teoría adolece, por ahora, de una perspectiva de solución válida, así como de un análisis riguroso teórico-informacional que respalde la investigación realizada en esa dirección, en el sentido de que los resultados aproximados gocen del nivel suficiente de aproximación que conceda un soporte válido final a la

teoría.

Los siempre presentes e inevitables ‘Apéndices’ tienen en esta memoria un peso bastante significativo (se han desarrollado 10 apéndices: A, B,...,J). La justificación de la extensión de este apartado está basada en la inconveniencia de incluir en el cuerpo del texto principal amplios desarrollos que, aunque en mayor o menor grado útiles, puedan resultar deductiva y expositivamente tediosos y mermar la continuidad de la línea argumental de los apartados pertenecientes al texto principal, cuya visión global debe estar orientada a la presentación de unos resultados fácilmente interpretables.

La memoria finaliza con un conjunto, no exhaustivo, de ‘Figuras’ ilustrativas (previo a los Apéndices), así como con una lista de ‘Referencias’ bibliográficas en las que los conceptos expuestos se han basado en mayor o menor medida.

**Análisis del efecto estocástico
inducido por fuentes externas
en un sistema material que
ocupa una región del
espaciotiempo**

Capítulo 2

Introducción

Comencemos en este capítulo introductorio haciendo una breve referencia a un modelo estocástico de Gravedad Cuántica, actualmente en fase de investigación, que constituye una referencia importante en esta memoria, por cuanto es, a la vez que una teoría que ha inspirado el desarrollo de algunos de los conceptos utilizados, un horizonte en la investigación subsiguiente, en la medida en que algunos de los resultados alcanzados fueren aplicables en el contexto de dicha teoría.

El primer paso hacia una conciliación entre la Relatividad General y la Mecánica Cuántica fue la denominada Ecuación Semiclásica de Einstein [57, 58, 120]. Ésta se construye, como veremos, a partir de la Ecuación Clásica de Einstein, o Ecuación de Einstein-Grossmann, formulada en 1915, una vez resueltos algunos problemas iniciales de inconsistencia, en la forma definitiva [31]

$$G_{ab}[g] = kT_{ab}[g],$$

donde k es la constante gravitacional de Einstein y G_{ab} y T_{ab} son los denominados, respectivamente, tensor de Einstein y tensor de stress, cuya interpretación es bien conocida. Ambos tensores son simétricos y son función del tensor métrico (también simétrico) $g \equiv g_{ab}$, que describe la geometría del espaciotiempo, considerado como una variedad tetradimensional (M, g_{ab}) [60, 108, 120, 123].

Las soluciones de esta ecuación (en realidad se trata de un sistema de 10 ecuaciones), en desacuerdo con una concepción ‘a priori’ del universo por parte de Einstein basada en una estabilidad y no en un comportamiento evolutivo, le indujeron a considerar un término Λg_{ab} , añadido aditivamente al tensor G_{ab} , con lo que la ecuación finalmente adquiriría la forma

$$G_{ab}[g] + \Lambda g_{ab} = kT_{ab}[g]. \quad (2.1)$$

El símbolo Λ representa la denominada constante cosmológica, intermitentemente utilizada a lo largo del tiempo por razones diversas. En efecto, aunque Einstein eliminó posteriormente dicho término ante la evidencia, derivada de los datos observados por Hubble, de que el universo es expansivo, mantendremos en lo que sigue dicho término por la doble razón de que, en primer lugar, la constante Λ puede ser eventualmente igual a cero si los datos experimentales avalasen este dato finalmente, y, en segundo, lugar, porque su permanencia podría ser útil, al parecer, para intentar dar respuesta al efecto gravitacional expansivo debido a una magnitud recientemente descubierta, aunque de origen desconocido, como es la energía oscura.

La ecuación (2.1), por su naturaleza determinística, es considerada como la base de una teoría incompleta al no incorporar las características que la entonces emergente Teoría Cuántica atribuye incuestionablemente a la materia. Algunos autores prefieren expresar la ecuación (2.1), y otras ecuaciones derivadas, en términos del campo ‘tetrad’ e_{ab} (tal que e_a es una 1-forma que cumple $e_a = e_{ab}dx^b$, $a, b = 0, 1, 2, 3$), o campo ‘gravitacional’, en vez de hacerlo en función del tensor métrico g_{ab} , por la mayor facilidad que el formalismo ‘tetrad’ proporciona en algunos modelos de partículas, como los fermiones, o por su uso generalizado en modelos de Gravedad Cuántica [92].

En la búsqueda de un modelo de Gravedad Cuántica [62, 78, 90, 92], se han considerado, entre los numerosos modelos existentes, algunas formulaciones estocásticas [58, 72, 93] que incorporan un ruido blanco gaussiano en las ecuaciones de campo de Einstein. En este contexto, merecen ser mencionados determinados estudios acerca de la reacción de la gravedad a las fluctuaciones de la materia [75, 122].

La Ecuación Semiclásica de Einstein constituye uno de los primeros intentos de incorporar las características cuánticas, manteniendo el carácter clásico del espaciotiempo. Dicha ecuación adquiere la forma

$$G_{ab}[g] + \Lambda g_{ab} = k\langle\psi|\hat{T}_{ab}[g]|\psi\rangle_q, \quad (2.2)$$

en la que $\langle\psi|\hat{T}_{ab}|\psi\rangle_q$ es el valor esperado, en un sentido cuántico, del operador tensor de stress de energía-momento \hat{T}_{ab} y ψ representa un determinado estado cuántico.

Es frecuente escribir (2.2) abreviadamente como

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = k\langle\hat{T}_{ab}\rangle_q. \quad (2.3)$$

De hecho, la ecuación (2.3) es determinística, al no incluir las fluctuaciones del operador \hat{T}_{ab} , por lo que resulta evidente su falta de validez cuando dichas fluctuaciones sean significativas frente al valor esperado del operador de stress y también, por supuesto, a escala microcósmica subplanckiana. La ecuación semiclásica describe un tipo de dinámica diferente al de la Gravedad Clásica. Algunas soluciones de esa ecuación son físicamente inaceptables.

Aunque en otras teorías, como la Electrodinámica, los modelos semiclásicos pueden proporcionar soluciones físicamente válidas aplicando ciertas restricciones a las condiciones iniciales, resulta mucho más difícil encontrar procedimientos aplicables a (2.3) que permitan alcanzar ese objetivo.

La Gravedad Semiclásica es un hito indudable en el camino hacia la construcción definitiva, si ello es posible, de una teoría de la Gravedad Cuántica. La teoría semiclásica, construida a partir de la Ecuación Clásica de Einstein, describe la respuesta del espaciotiempo curvo a un campo cuántico de materia. La fuente, en este caso, es el valor esperado del tensor de stress para un campo de materia, en un determinado estado cuántico. Sin embargo, esta fuente es cuadrática (y, por tanto, no lineal) en el operador de campo, que sólo puede definirse en términos de una distribución sobre el espaciotiempo, lo que comporta cantidades mal definidas. Esto provoca divergencias (denominadas ‘ultravioleta’) que requieren un procedimiento de regularización y renormalización, lo que permite obtener un valor esperado único del operador de stress bajo criterios que han sido investigados, entre otros, por Wald [118, 119].

El proceso de renormalización de la Ecuación Semiclásica de Einstein conduce a la expresión

$$G_{ab}[g] + \Lambda g_{ab} - 2(\alpha A_{ab} + \beta B_{ab})[g] = k \langle \hat{T}_{ab}^R[g] \rangle_q,$$

donde $\hat{T}_{ab}^R[g]$ es el tensor de stress renormalizado, α y β son constantes de acoplamiento renormalizadas, y A_{ab} y B_{ab} son tensores locales de curvatura.

En este intento de alcanzar una posible solución de la Gravedad Semiclásica, Hu y otros investigadores han iniciado el desarrollo de la teoría de la Gravedad Cuántica Estocástica [56, 57, 58, 69, 70, 115, 116], basada en la incorporación de una fuente estocástica capaz, supuestamente, de aproximarse de modo eficaz a la descripción de las fluctuaciones cuánticas, cuestión relevante en la medida en que dichas fluctuaciones sean importantes. La aportación adicional de esta teoría es la incorporación a las fuentes de materia, que en la ecuación semiclásica están representadas por el valor esperado del operador de stress, de un nuevo operador, el valor esperado en el vacío del tensor de

stress de energía-momento, mediante el cual se pretende describir una nueva fuente inductora de las fluctuaciones cuánticas del operador de stress.

Dados dos puntos espaciotemporales x e y , el tensor de covarianza entre dichos puntos se define como

$$N_{abcd}[g; x, y) = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{t}_{ab}[g; x), \hat{t}_{cd}[g; y) \} \rangle_q,$$

donde

$$\hat{t}_{ab}[g; x) := \hat{T}_{ab}[g; x) - \langle \hat{T}_{ab}[g; x) \rangle_q.$$

Los operadores $\langle \dots \rangle_q$ y $\{ \dots \}$ representan, respectivamente, promedio cuántico y anticonmutación.

Finalmente, en el marco de esta teoría, se obtiene la ecuación de Einstein-Langevin [69, 70, 115, 116], que puede expresarse como

$$G_{ab}[g + h) + \Lambda(g_{ab} + h_{ab}) - 2(\alpha A_{ab} + \beta B_{ab})[g + h) = k \left(\langle \hat{T}_{ab}^R[g + h) \rangle_q + \xi_{ab}[g) \right), \quad (2.4)$$

donde $\xi_{ab}[g; x)$ es un campo tensorial estocástico gaussiano, definido por los siguientes momentos:

$$\langle \xi_{ab}[g; x) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi_{ab}[g; x) \xi_{cd}[g; y) \rangle = N_{abcd}[g; x, y).$$

El operador $\langle \dots \rangle$ tiene el significado de media estadística. El tensor $N_{abcd}[g; x, y)$ es un núcleo de covarianza entre dos puntos, real y semidefinido positivo, dado que $\langle \hat{T}_{ab}^R \rangle$ es un operador autoadjunto.

Así, (2.4) es la ecuación de Einstein-Langevin renormalizada, que incorpora el comportamiento dinámico de la perturbación métrica h_{ab} y constituye un primer orden de extensión de la ecuación semiclásica, incluyendo las fluctuaciones cuánticas del tensor de stress de los campos de materia. El operador renormalizado $\hat{T}_{ab}^R[g + h)$ tiene la misma forma que en la ecuación semiclásica, pero ahora actúa en la métrica perturbada $g_{ab} + h_{ab}$. En el primer orden de aproximación, la fuente estocástica no es dinámica y es independiente de h_{ab} , ya que describe las fluctuaciones del tensor de stress en la métrica g_{ab} subyacente. En este modelo gravitacional cuántico, el tensor de stress es conservado, restricción necesaria para la obtención de las soluciones dinámicas del sistema. La métrica $g_{ab} + \langle h_{ab} \rangle$ constituye una solución de la ecuación semiclásica de Einstein linealizada en torno a g_{ab} .

Esta introducción, con un arranque inicial en un modelo gravitacional cuántico, está justificada por varias razones. La menos evidente, y quizá la más importante, es que en el espíritu investigador de la Física Teórica parece estar siempre presente esa referencia lejana del objetivo final de una Gravedad Cuántica. Actualmente una de las vías de desarrollo que pretende alcanzar ese objetivo es la teoría, de dudoso aunque loable recorrido, de la Gravedad Cuántica Estocástica anteriormente esbozada, que intenta llevar los métodos estocásticos utilizados por la Física Clásica hasta el nivel ‘microcósmico’ cuántico por el simple hecho de que al fin y al cabo se trabaja en todos los casos con modelos probabilísticos. Quizá (este es un juicio del autor) constituye un cierto exceso asimilar la probabilidad asociada a los fenómenos que se producen a escala cósmica con la probabilidad de los eventos que suceden al nivel planckiano, ya que no se trata de una simple cuestión de escala. Pero no es la primera vez que la investigación científica utiliza el método de la ‘analogía’ para encontrar vías de aproximación. Otras razones estarían basadas en que, en cualquier caso, la Teoría de la Gravedad Cuántica Estocástica es un caso ilustrativo, uno más, sobre la utilización pragmática de un término gaussiano simple de Langevin, que resalta la relevancia de un concepto fundamental como es el núcleo de covarianza entre dos puntos del espaciotiempo, cuyo conocimiento y aplicación serían imprescindibles.

En la presente memoria se propone el desarrollo de un modelo estrictamente clásico basado en los conceptos aludidos en esta introducción, partiendo del planteamiento de una posible inexactitud de la Ecuación Clásica de Einstein. En nuestro escenario de análisis, en el que se supone que un sistema físico puede estar sometido a un nivel de fluctuación de la materia debido a la influencia de unos sistemas externos que lo perturban, lo que se sugiere es considerar el tensor de stress como un tensor aleatorio [19, 30, 46, 65, 87].

Con ese propósito fundamental de mejorar la descripción dinámica de esos sistemas físicos, el modelo de análisis que se sugiere, y en parte se desarrolla, se basa en una teoría estocástica ampliada que denominamos Gravedad Estocástica Clásica, que no contempla en modo alguno los aspectos cuánticos de la materia, y se mantiene en un plano estrictamente clásico [2, 41, 42, 96]. Esta descripción, que comporta diferencias fundamentales obvias con el análisis cuántico, ampliamente desarrollado durante las últimas décadas, sólo pretende abrir líneas de desarrollo a un nivel cósmico, en el que los efectos cuánticos no son relevantes, pero sí pueden serlo los efectos estocásticos si las fluctuaciones inducidas, aunque pequeñas, en general, frente a los valores esperados de un tensor de stress aleatorio, son suficientemente significativas.

Sin embargo, hay que destacar la importancia evidente del hecho diferencial de considerar un contexto clásico estocástico como alternativa a un escenario clásico determinista. La asignación de una naturaleza estocástica a los observables de un sistema físico hace que emerja un elemento nuevo, un grado de libertad adicional, como es la *incertidumbre* asociada al sistema, con lo que ello comporta en cuanto a posibilidades de investigación mediante la utilización de los conceptos pertenecientes a áreas de conocimiento complementarias, como la Teoría de la Información [6, 7, 18, 87, 88, 102, 103, 104] y la Complejidad [1, 4, 12, 16, 66, 68, 74, 91, 101], que se han demostrado especialmente fértiles en su aplicación a una diversidad muy amplia de campos disciplinares (economía, biología, ingeniería, teleinformática,...), destacando especialmente la propia Física Cuántica.

Una Ecuación de Gravedad Clásica Estocástica estaría construida, en general, a partir de la definición del tensor de stress como un tensor aleatorio. Ahora, la ecuación clásica, expresada abreviadamente como

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = kT_{ab},$$

contiene variables tensoriales que no son determinísticas, ya que los tensores g_{ab} y T_{ab} , y por tanto G_{ab} , son aleatorios.

Desde un punto de vista analítico, un escenario sencillo consiste en considerar que el tensor T_{ab} , siendo una matriz cuadrada, o sea, una magnitud tetradimensional de referencia en esta memoria, tiene un carácter gaussiano. Aunque se han ensayado otras vías de asignación de una naturaleza estocástica a la gravedad [72], algunas conceptualmente dudosas a juicio del autor, tradicionalmente el camino que se ha seguido, por su relativa simplicidad, ha consistido en incorporar aditivamente un ruido gaussiano con una cierta estructura de correlación.

De este modo, la Ecuación de Gravedad Estocástica Clásica de Einstein-Langevin puede expresarse como

$$G_{ab}[g + h] + \Lambda(g_{ab} + h_{ab}) = k \left(\langle \hat{T}_{ab}[g + h] \rangle + \xi_{ab}[g] \right),$$

donde h_{ab} representa la perturbación lineal aleatoria añadida al tensor métrico determinístico g_{ab} como ‘contrapartida’ espaciotemporal de la aleatoriedad de la materia reflejada en el tensor estacionario gaussiano ξ_{ab} .

El tensor estocástico h_{ab} es también necesariamente simétrico y, con el fin de poder hacer la hipótesis válida de una expansión lineal, sus elementos deben ser, en valor absoluto, cantidades reales mucho menores que 1.

Un término gaussiano de Langevin presupone que un escalar, o las componentes de un vector, o un tensor, pueden, con una cierta probabilidad, tomar cualquier valor real. Sin embargo, la relativa pequeñez de las fluctuaciones frente a los valores medios del tensor (densidad de energía y presión) permite suponer que la masa de probabilidad correspondiente a la cola negativa de la distribución es despreciable, manteniendo la relativa simplicidad analítica inherente a los esquemas gaussianos.

En esta primera parte se hace un análisis, desde una amplia perspectiva, del efecto estocástico inducido en un campo gravitacional por una o varias fuentes de distinta naturaleza. Se supone que dicho efecto es, por razón de distancia, o de naturaleza de las fuentes, o incluso otras, comparativamente pequeño respecto a la intensidad del tensor de stress de un sistema material que se supone asimilable a un fluido relativista aproximadamente perfecto.

Debido a la posible diversidad tipológica, y al tipo de influencia ejercida, de las fuentes perturbadoras, la estructura del campo aleatorio global inducido puede tener un cierto grado de complejidad. La metodología que se desarrolla a continuación intenta construir una amplia familia de procesos estocásticos [10, 44, 45, 80] lineales tetradimensionales, de tal modo que un proceso de ajuste razonable a un escenario concreto quede suficientemente garantizado.

El proceso de construcción que lleva a la estructura arbitrariamente compleja está basado en la propiedad de Markov, concepto básico anteriormente mencionado y frecuentemente utilizado [9, 10, 44, 45, 76, 80]. Aunque un modelo gaussiano markoviano lineal estacionario podría considerarse como el proceso estocástico más simple (excluyendo el ruido blanco, que es carente de estructura), el hecho de poseer una estructura paramétrica no nula (tetradimensional en nuestro caso) concede grandes posibilidades de adaptación y ajuste.

En efecto, aunque es muy extensa la bibliografía que propone, en casi la totalidad de disciplinas en las que evoluciona el conocimiento humano, una modelización general, frecuentemente no markoviana, el hecho de que los procesos pertenecientes a una muy amplia familia de procesos lineales estacionarios no markovianos pueda expresarse, en general, como suma de procesos markovianos, hace que, de algún modo convencional, en este tipo de procesos, la propiedad de Markov es subyacente. Cabe una evidente y amplia discusión a este respecto si tenemos en cuenta, por ejemplo, que el filtro de un proceso lineal no markoviano podría tener raíces no reales, que, como sabemos, pueden darse en la naturaleza en asociación, por ejemplo,

con eventos de tipo cíclico, correspondiendo con uno o varios pares de raíces complejas conjugadas, aunque si el análisis lo restringimos, como se ha indicado, a procesos estacionarios, las raíces complejas conjugadas darían lugar a comportamientos pseudocíclicos amortiguados, que no consideraremos, sin descartar su interés. Otra cuestión a tener en cuenta es que, dado un proceso gaussiano lineal estacionario no markoviano, no siempre es posible la descomposición en suma finita de procesos markovianos elementales, y tampoco que lo sea, en su caso, de forma que éstos estén exentos de correlación. Por tanto, hay que suponer que, en un caso general, para esa amplia familia en que la descomposición es posible, puede existir un grado de correlación, y, consecuentemente, de información mutua no nula entre pares de procesos. Aun así, podríamos convenir en que, en ese último caso, estaríamos ante un escenario markoviano subyacente agregado.

De hecho, se propone en esta memoria la denominación de ‘proceso markoviano en sentido amplio’ a cualquier proceso gaussiano lineal estacionario con estructura no necesariamente markoviana que puede representarse como la suma de un número finito de procesos elementales markovianos (con información mutua, o sin ella, asociada a cada par de procesos integrantes). De este modo, los ‘procesos elementales markovianos en un sentido estricto’ son los procesos aleatorios, en formato continuo o discreto, que cumplen estrictamente la propiedad de Markov.

La influencia de una fuente externa sobre un sistema físico gravitacional (p.e. el fluido relativista considerado anteriormente) puede ser de origen muy distinto. Podemos suponer que dicho origen es de naturaleza electromagnética, como sería el caso de una fuente cósmica (p.e. un púlsar) de radiación electromagnética intensa o una fuente radiante diseñada en laboratorio con objetivos experimentales afines al análisis descrito en la presente memoria (por tanto, el impacto perturbador de la fuente en el sistema se transmitiría, bajo esta hipótesis, a la velocidad de la luz). El fluido influenciado por la fuente alcanzará un equilibrio termodinámico que dependerá de la magnitud de la radiación recibida y de la radiación reflejada y emitida a su entorno. El efecto neto, o sea, el balance energía-momento, que imputamos a la fuente causante de la perturbación debe ser nulo en el escenario supuesto de equilibrio termodinámico del sistema. Suponemos, sin embargo, que, debido a un conjunto de factores incidentes, de diversa naturaleza, anteriormente mencionados, dicho efecto es moderadamente fluctuante en torno al valor cero. Hacemos la hipótesis, como se ha indicado, de que la fluctuación es estocástica y se extiende tetradimensionalmente en el espaciotiempo ocupa-

do por el fluido objeto de estudio, de acuerdo con una modelización que se describe detalladamente en la memoria. En el caso general en que se considera un cierto número de fuentes influenciadas en el fluido analizado, el efecto conjunto se considera bien modelizado como la suma del efecto individual producido por cada una de las fuentes cuando no existe correlación entre las perturbaciones de las mismas, lo cual ocurre cuando entre dichas fuentes no existe interacción alguna. Si las fuentes perturbadoras son mutuamente interaccionantes (lo cual se produce, si la interacción es asimismo de carácter electromagnético, a una velocidad lumínica) el efecto global inducido no tiene las características de un proceso equivalente a la suma de procesos individuales, sino las de un proceso inducido agregado en el que participan adicionalmente las covarianzas cruzadas entre dichos procesos.

Dado que los procesos que se proponen poseen una estructura paramétrica determinada (simple, pero no nula), las covarianzas cruzadas tendrían, en consecuencia, una estructura dinámica espaciotemporalmente desfasada (incluido el desfase cero), aunque, dada la hipótesis de naturaleza gaussiana estacionaria markoviana de los procesos individuales, que se hace en la memoria, solo serán de interés, en la modelización resultante, las covarianzas cruzadas que denominaremos convencionalmente tetrasimultáneas (concepto tetradimensional asociado al desfase cero, equivalente al de instantaneidad en el caso unidimensional temporal). En adelante, la denominación abreviada de covarianza cruzada se interpretará como covarianza cruzada tetrasimultánea.

Capítulo 3

El tensor de stress (componente estocástica), el núcleo de covarianza y el tensor de propagación de covarianza

El *tensor de stress* describe la distribución de la materia residente en una región del espaciotiempo. Así pues, el tensor de stress toma valores en cada punto del espaciotiempo, ya que éste es, en un contexto clásico, una magnitud continua espaciotemporal. Este tensor de stress es una matriz simétrica cuadrada de orden 4, con 16 elementos, de acuerdo con la dimensionalidad del espaciotiempo (una dimensión temporal y tres dimensiones espaciales, con su correspondiente contrapartida en el tensor: una componente de energía y tres componentes de momento). Recordemos que, ya que simultáneamente la geometría espaciotemporal determina la distribución de la materia residente, y viceversa, puede decirse que el tensor de stress es una de las caras de la ‘moneda’ única representada en la Ecuación de Einstein.

Es evidente que la consideración de una componente estocástica (con media nula) del tensor de stress conlleva una perturbación estocástica de la métrica espaciotemporal. Sin embargo, esta memoria centra su atención en la modelización estocástica, y el análisis subsiguiente, del tensor de stress, dejando al margen, como un tema abierto en el que profundizar, la modelización estocástica del espaciotiempo, analíticamente más compleja, debido al carácter de la dependencia del tensor de Einstein respecto al tensor métrico.

En este capítulo se pretende destacar la aplicación de los conceptos hasta ahora mencionados prescindiendo de algunas precisiones (que se mencionarán más adelante) que serían exigibles en una modelización más general. Supondremos un sistema físico relativista, asimilable a un fluido perfecto homogéneo, que ocupa una región del espaciotiempo: una nube térmica de polvo interestelar, o un fluido (líquido o gas) preparado en laboratorio con fines experimentales, o una estrella,..., en el que las magnitudes observables fundamentales (densidad de energía y presión) presentan cierto grado de inestabilidad pero no varían significativamente. De hecho, consideraremos que dichas magnitudes observables son estacionarias en el sentido de que poseen unos valores medios y una intensidad de sus fluctuaciones (derivadas de su carácter aleatorio), así como de la estructura de autocorrelación, que son aproximadamente constantes. Asimismo, en un primer escenario de análisis, no consideraremos los efectos locales de curvatura (que, no obstante, deben ser incorporados en etapas más avanzadas de investigación).

El tensor de stress, que en un esquema general es un tensor de orden 4, tiene una representación estocástica de la forma $T_{ab}(x)$, $a, b = 0, 1, 2, 3$, o sea,

$$T_{ab}(x) = \begin{pmatrix} T_{00}(x) & T_{01}(x) & T_{02}(x) & T_{03}(x) \\ T_{01}(x) & T_{11}(x) & T_{12}(x) & T_{13}(x) \\ T_{02}(x) & T_{12}(x) & T_{22}(x) & T_{23}(x) \\ T_{03}(x) & T_{13}(x) & T_{23}(x) & T_{33}(x) \end{pmatrix},$$

donde $T_{00}(x)$, $T_{0b}(x)$, $b = 1, 2, 3$, y $T_{ab}(x)$, $a, b = 1, 2, 3$, son, respectivamente, las componentes estocásticas de densidad de energía, de densidad de momento (o densidad del flujo de energía) y de densidad del flujo de momento de la materia.

El valor medio $\langle T_{ab}(x) \rangle$ de las magnitudes aleatorias $T_{ab}(x)$, $a, b = 0, 1, 2, 3$, viene dado ergódicamente por $\langle T_{ab}(x) \rangle = \int_x d^4x f(x) T_{ab}(x)$, donde la integral se extiende a toda la región espaciotemporal objeto de estudio.

Por tanto, deberíamos definir la componente estocástica ξ_{ab} del tensor como $\xi_{ab}(x) = T_{ab}(x) - \langle T_{ab}(x) \rangle$, $a, b = 0, 1, 2, 3$, o sea,

$$\xi_{ab}(x) = \begin{pmatrix} \xi_{00}(x) & \xi_{01}(x) & \xi_{02}(x) & \xi_{03}(x) \\ \xi_{01}(x) & \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \xi_{13}(x) \\ \xi_{02}(x) & \xi_{12}(x) & \xi_{22}(x) & \xi_{23}(x) \\ \xi_{03}(x) & \xi_{13}(x) & \xi_{23}(x) & \xi_{33}(x) \end{pmatrix}.$$

Como es sabido, en el modelo gravitatorio de Einstein el tensor G_{ab} es un tensor conservado como consecuencia de las igualdades de Bianchi con-

traídas, consistentes con la geometría espaciotemporal, según la cuales se cumple $\partial^a T_{ab} = 0$ (divergencia nula). Utilizamos la derivada ordinaria ∂ en vez del operador derivada covariante ∇ debido a que hacemos una hipótesis simplificadora de curvatura nula espaciotemporal. Si el tensor de Einstein es conservado, el tensor de stress también debe serlo. Hay que tener en cuenta que $T_{ab} = \langle T_{ab} \rangle + \xi_{ab}$, por lo que la restricción, que evidentemente es cierta cuando se aplica a cada uno de los sumandos, es estrictamente aplicable, en principio, a la suma de ambos tensores. Sin embargo, esta condición debe aplicarse al conjunto cerrado formado por el sistema objeto de estudio y los sistemas que actúan sobre él como fuentes externas perturbadoras. En nuestro sistema objetivo, que obviamente no es cerrado, la presión-densidad de energía experimenta pequeños cambios aleatorios debido a tal acción. Incidiremos en estas relevantes cuestiones en el Capítulo 16 y en el Apéndice H.

Supongamos que el tensor simplificado de stress, que en un esquema general es un tensor de orden 4, tiene una representación estocástica diagonalizada en un punto espaciotemporal x de la forma [2, 96]

$$T_{ab}(x) = \begin{pmatrix} T_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_3(x) \end{pmatrix},$$

que es compatible con un escenario de no curvatura (geometría plana min-kowskiana) que corresponde a un contexto de relatividad especial, en el que el análisis puede quedar reducido al de un tetravector de energía-momento. Por tanto, podríamos definir

$$\xi_{ab}(x) = \begin{pmatrix} \xi_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_3(x) \end{pmatrix},$$

siendo

$$\xi_j(x) = T_j(x) - \langle T_j(x) \rangle, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Cabe señalar que, en el contexto de la relatividad general, una diagonalización del tensor de stress como la propuesta no es útil para el análisis de los aspectos geometrodinámicos, ya que las matrices unitarias de la transformación ‘extraen’ información necesaria para la obtención de las ecuaciones

de movimiento, pero esta cuestión está fuera del alcance de este estudio, que centra su atención estrictamente en los aspectos informacionales cuando el campo es estocástico. En consecuencia, en este modelo, podemos reescribir el tensor ξ_{ab} como un vector tetradimensional ξ .

Se considera que la componente estocástica del tensor de stress es un tensor estacionario gaussiano [9, 10, 44, 80], lo que equivale a afirmar que cada una de las cuatro componentes dimensionales de la misma son de naturaleza estacionaria gaussiana, con media nula en cada punto del espaciotiempo. Recordando que el sistema analizado no es cerrado y es perturbado por fuentes externas (nuestro sistema formaría parte, pues, de un sistema físico más amplio), y por razones adicionales que se comentarán en el Capítulo 16, consideraremos que el tensor ξ_{ab} es libre de la restricción de divergencia.

En la primera etapa del análisis desarrollado en este trabajo suponemos, por tanto, que la geometría espaciotemporal es minkowskiana, o sea, determinística y plana, aunque con una métrica pseudoeuclidiana, descrita por el tensor simétrico η_{ab} , tal que $\eta_{00} = -1$, $\eta_{ab}(x) = 1$ donde $a = b$, y $\eta_{ab}(x) = 0$ donde $a \neq b$, $a, b = 1, 2, 3$. En un sistema de referencia inercial dado, un punto x de dicho espaciotiempo tiene cuatro coordenadas: x^0 (tiempo) y tres espaciales x^1, x^2, x^3 [71].

Consideremos ahora dos puntos x and x' causalmente conectados a través de la geodésica que une ambos puntos en el espacio minkowskiano (M, η) , usualmente designado como \mathbb{M} , siendo x' posterior a x en el tiempo (esta condición se supondrá a lo largo de esta memoria). El *núcleo de covarianza 'retardado' entre dos puntos* vendría dado, en este contexto simplificado, por el tensor 4×4 matricial $N^{ret}(x', x)$ (o simplemente $N(x', x)$ si x precede a x'), tal que $N(x', x) = (N_{ikjl}(x', x)), i, k, j, l = 0, 1, 2, 3$. Este tensor tiene 16 elementos no nulos correspondientes a $i = k$ y $j = l$. Estos 16 elementos vienen dados por $N_{iijj}(x', x) = \langle \xi_i(x') \xi_j(x) \rangle$.

Por tanto, podemos expresar $N(x', x) = \langle \xi(x') \xi'(x) \rangle$, donde el superíndice ' r ', aplicado a un vector o un tensor, indica transformación de 'transposición'. Adicionalmente, como se ha justificado anteriormente, $N(x', x)$ puede expresarse como una función de la distancia pseudoeuclidiana (o 'tiempo propio') $|x' - x|$, siendo $|x' - x|^2 = -\eta_{ab}(x'^a - x^a)(x'^b - x^b)$, donde se ha usado el criterio notacional de sumación de Einstein. Así, $N(x', x) = N(|x' - x|)$. Los puntos x y x' están causalmente conectados cuando $|x' - x|^2$ es no-negativo. Designamos simplemente N al *tensor de covarianza en un punto* cuando x y x' coinciden.

Por simplicidad, expresaremos $N_{iijj}(x', x) = N_{ij}(x', x)$. Por otra parte,

dado que $\langle \xi_i(x') \xi_j(x) \rangle = \langle \xi_j(x) \xi_i(x') \rangle$, obtenemos la relación $N_{ij}(x', x) = N_{ji}(x, x')$.

Análogamente, el *tensor de covarianza ‘adelantado’ entre dos puntos* $N^{adv}(x, x')$ vendría dado por

$$N^{adv}(x, x') = (N_{kl}(x, x'))_{k,l=0,1,2,3} = N^{adv}(|x' - x|),$$

donde se ha tenido en cuenta que se mantiene la hipótesis de que x precede a x' y que $|x' - x| = |x - x'|$. Los superíndices ‘*ret*’ y ‘*adv*’ aplicados a un tensor denotan el concepto de ‘retardado’ y ‘adelantado’, respectivamente.

Por consiguiente, dados x' y x , los tensores $N^{ret}(x', x)$ y $N^{adv}(x, x')$ son mutuamente transpuestos y, en general, no son simétricos. Por tanto,

$$\begin{aligned} N^{ret}(x', x) &= (N^{adv}(x, x'))' = N^{ret}(|x' - x|), \\ N^{adv}(x, x') &= (N^{ret}(x', x))' = N^{adv}(|x' - x|). \end{aligned}$$

Reiteramos que, en adelante, se supone que $N(x', x) \equiv N^{ret}(x', x)$, lo que implícitamente comporta que x' es ‘posterior’ a x .

Resumiendo, en este escenario diagonalizado estacionario podemos asimilar el tensor ξ_{ab} a un vector tetradimensional $(\xi_i)_{i=0,1,2,3}$, y el núcleo de covarianza entre dos puntos a una matriz cuadrada $N(x', x)$ de orden 4, que podemos expresar como $N(x', x) = (N_{ij}(x', x))_{i,j=0,1,2,3}$. De este modo el cálculo se simplifica prescindiendo de los elementos nulos (Apéndice B).

Hemos denominado núcleo de covarianza N en un punto al tensor $N(x', x)$ cuando x' y x coinciden, por lo que el tensor N es simétrico. Dado que el tensor $N(x', x)$ es estacionario, se cumple $|N(x', x)| < |N|$ y $Tr(N(x', x)) < Tr(N)$. Además,

$$\lim_{|x'-x| \rightarrow \infty} N(|x' - x|) = 0.$$

El tensor N de covarianza en un punto admite una descomposición en un producto de tres tensores, de tal modo que

$$N = SRS',$$

donde S es un tensor, denominado tensor diagonal de dispersión y R es un tensor simétrico de correlación. Expresando $S = (s_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$, se cumple $s_{ij} = 0, i \neq j$ y $s_{ii} = \sqrt{N_{ii}}, i = 0, 1, 2, 3$, siendo todos los elementos no negativos. Análogamente, expresando $R = (r_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$, se verifica $r_{ij} = r_{ji}$, siendo los elementos números reales no negativos y menores que 1 cuando $i \neq j$, y $r_{ii} = 1$.

De un modo similar, el tensor $N(x', x)$ de covarianza entre dos puntos puede descomponerse en un producto de tres tensores, de tal modo que

$$N(x', x) = S(x', x) R(x', x) S(x', x)',$$

donde S es un tensor diagonal de dispersión, siendo $S(x', x) = \left(s(x', x)_{ij} \right)_{i,j=0,1,2,3}$, cuyos elementos están definidos como $s(x', x)_{ij} = 0, i \neq j$, y $s(x', x)_{ii} = \sqrt{N(x', x)_{ii}}$, y $R(x', x)$ es un tensor, en general no simétrico, de correlación entre dos puntos, que verifica que, siendo $R(x', x) = \left(r(x', x)_{ij} \right)_{i,j=0,1,2,3}$, sus elementos $r(x', x)_{ij}$ son números reales no negativos y menores que 1 cuando $i \neq j$ y $r(x', x)_{ii} = 1$.

Definimos ahora un nuevo tensor, el *tensor 'retardado' de propagación de covarianza* $A(x', x)$, de acuerdo con la expresión

$$N(x', x) = A(x', x) N.$$

El tensor $A(x', x)$ es autorregresivo, estacionario, diagonalizable y definido no negativo, cuyos autovalores están comprendidos entre 0 y 1. El determinante del propagador $A(x', x)$ es menor que 1 y su traza inferior a la dimensión 4, excepto cuando x' y x coinciden, en cuyo caso $A(x', x)$ es idénticamente igual al tensor unidad I , cuyos 4 autovalores son iguales a 1. En el extremo opuesto, si x y x' están infinitamente alejados, el tensor $A(x', x)$ tiende al tensor nulo y sus 4 autovalores tienden al límite 0. Cuando x' y x no coinciden, no estando infinitamente alejados, los 4 autovalores de $A(x', x)$ son números reales no negativos y menores que 1. Los elementos de este tensor dependen de la pseudonorma positiva $|x' - x|$, debido a la estacionariedad. Siguiendo el criterio anteriormente expuesto, se supone que, por defecto, $A(x', x) \equiv A^{ret}(x', x)$, de acuerdo con la hipótesis de que x es 'anterior' a x' . Entonces

$$A(x', x) = A^{ret}(x', x) = A^{ret}(|x' - x|) = A(|x' - x|).$$

El *tensor 'adelantado' de propagación de covarianza* $A^{adv}(x, x')$, o, equivalentemente, $A^{adv}(|x' - x|)$, es, por tanto,

$$A^{adv}(x, x') = N^{adv}(x, x') N^{-1} = N (A^{ret}(x', x))' N^{-1} = N A'(x', x) N^{-1}.$$

Así pues, $A(|x' - x|)$, al igual que $N(|x' - x|)$, depende de dos puntos espaciotemporales, pero lo relevante es su posición temporal relativa. Por tanto,

$A(|x' - x|)$ depende sólo de un escalar, una pseudonorma, la pseudodistancia espaciotemporal entre los puntos x' y x , con lo cual se hace necesario denotar la posición temporal relativa entre dichos puntos.

Tal como hemos definido el tensor $A(x', x)$, dando por supuesto, por tanto, que x' es ‘posterior’ a x , dicho tensor admitiría una representación diagonalizada como la siguiente:

$$A(|x' - x|) = P\Lambda(|x' - x|)P^{-1},$$

donde P es un tensor cuadrado no singular de orden 4.

Dado que los autovalores de $A(|x' - x|)$ están comprendidos entre 0 y 1, está asegurado que

$$\lim_{|x'-x| \rightarrow 0} A(|x' - x|) = I,$$

$$\lim_{|x'-x| \rightarrow \infty} A(|x' - x|) = 0.$$

Los autovalores de $A(|x' - x|)$ pueden representarse en la forma $e^{\frac{\alpha_i}{2}|x'-x|}$, $i = 0, 1, 2, 3$, siendo los valores α_i reales y negativos. En tal caso

$$\Lambda(|x' - x|) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha_0}{2}|x'-x|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\alpha_1}{2}|x'-x|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\alpha_2}{2}|x'-x|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\alpha_3}{2}|x'-x|} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos utilizar alternativamente la expresión

$$\Lambda(|x' - x|) = \sum_{i=0}^3 e^{\frac{\alpha_i}{2}|x'-x|} I_i,$$

siendo I_i , $i = 0, 1, 2, 3$, cuatro tensores cuyos elementos son todos nulos excepto el elemento que ocupa la posición diagonal (ii) , cuyo valor es igual a 1, con lo que

$$A(|x' - x|) = \sum_{i=0}^3 e^{\frac{\alpha_i}{2}|x'-x|} Q_i, \tag{3.1}$$

donde los cuatro tensores base $Q_i = P I_i P^{-1}$, $i = 0, 1, 2, 3$, son singulares y cumplen la condición $\sum_{i=0}^3 Q_i = I$. Es evidente que estos tensores base verifican las siguientes propiedades:

- 1) Idempotencia: $Q_i Q_i = Q_i$
- 2) Ortogonalidad: $Q_i Q_j = 0 \quad (i \neq j)$

Por tanto, los operadores Q_i son *proyectores*. En este caso el tensor de propagación de covarianza, por unidad de pseudodistancia, podría expresarse como

$$A(1) = \sum_{i=0}^3 e^{\frac{\alpha_i}{2}} Q_i.$$

Podemos proponer, alternativamente a (3.1), la expresión generalizada

$$A^{(k)}(|x' - x|) = \sum_{i=0}^3 \left\{ \sum_{j=1}^k e^{\frac{\alpha_{ij}}{2}|x'-x|} Q_{ij} \Gamma_j \right\},$$

siendo k un número entero positivo arbitrario. Los k tensores de peso $\Gamma_j, j = 1, \dots, k$, son definidos no negativos y cumplen $\sum_{j=1}^k \Gamma_j = I$. Los tensores base Q_{ij} admiten la descomposición $Q_{ij} = P_j I_{ij} P_j^{-1}, i = 0, 1, 2, 3$, y son singulares, cumpliendo la condición $\sum_{i=0}^3 Q_{ij} = I, j = 1, \dots, k$. Los $4 \times k$ tensores I_{ij} , al igual que anteriormente, son tales que sus elementos son nulos, excepto el elemento que ocupa la posición (ii) , para $j = 1, \dots, k$, cuyo valor es igual a 1. Además, para todo j , los tensores Q_{ij} cumplen las propiedades de idempotencia y ortogonalidad, o sea, $Q_{ij} Q_{ij} = Q_{ij}$ y $Q_{ij} Q_{hj} = 0 \quad (i \neq h)$, respectivamente.

De acuerdo con (3.1), llamando

$$A_j(|x' - x|) = \sum_{i=0}^3 e^{\frac{\alpha_{ij}}{2}|x'-x|} Q_{ij},$$

podemos expresar finalmente

$$A^{(k)}(|x' - x|) = \sum_{j=1}^k A_j(|x' - x|) \Gamma_j. \quad (3.2)$$

Por tanto, en este caso general el tensor de propagación de covarianza, por unidad de pseudodistancia, podría expresarse como

$$A^{(k)}(1) = \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=0}^3 e^{\frac{\alpha_{ij}}{2}} Q_{ij} \right\} \Gamma_j.$$

Llamaremos *tensor elemental de propagación de covarianza* (o tensor markoviano) al tensor de propagación que admite únicamente la representación (3.1) y *tensor generalizado de propagación de covarianza* al que admite una representación (3.2), o sea, puede ser expresado como promedio ponderado de tensores de propagación elementales. Observamos, y este es un hecho relevante en esta memoria, que un tensor de propagación elemental verifica que, dado un punto x_0 , anterior a x y perteneciente a la geodésica que contiene a x' y x , se cumple, teniendo en cuenta las propiedades de los tensores base Q_i , que

$$A(|x' - x_0|) = A(|x' - x|)A(|x - x_0|), \quad (3.3)$$

equivalente a la propiedad de Markov, mientras que, en general, para un tensor generalizado de propagación se tendrá

$$A^{(k)}(|x' - x_0|) \neq A^{(k)}(|x' - x|)A^{(k)}(|x - x_0|), \quad (3.4)$$

salvo en el caso trivial en el que el tensor generalizado corresponda a un tensor elemental, o sea, todos los coeficientes Γ , excepto uno de ellos, sean nulos.

Así, en esta primera toma de contacto con los conceptos propuestos en esta memoria, la notación se simplifica considerablemente, sin pérdida conceptual fundamental acerca de la metodología general sugerida, que constituye el objetivo central de este trabajo, y que, no obstante, debe ser trasladada a esquemas más generales en futuros desarrollos. El objetivo de esta simplificación radica en un grado de comodidad notacional y facilidad expositiva.

En el análisis llevado a cabo en esta memoria, en el que el estudio de eventos físicos implican magnitudes de naturaleza estocástica, los tensores núcleo de covarianza y de propagación de covarianza constituyen unos conceptos de principal relevancia.

Capítulo 4

Identificación de los procesos asociados al efecto estocástico producido por varias fuentes externas no conocidas

Consideraremos a continuación, a modo introductorio, varios casos de análisis, que permitirán utilizar, de un modo inicialmente simple, los conceptos que sugerirán su tratamiento analítico de una forma más generalizada.

Con el fin de fijar claramente los conceptos del capítulo, dejando nítidamente establecida la diferencia con el enfoque que se seguirá en otros capítulos posteriores, indicaremos cuál es la idea central que subyace en (y es común a) los casos que se analizan a continuación.

El problema de la identificación parte de un supuesto simple que se resume en la afirmación de que, dado un estado para un sistema que ha recibido la influencia de una o varias fuentes o sistemas físicos externos que inducen una perturbación, éste ya no cambia, o sea, permanece el conjunto de fuentes externas actuantes sobre el sistema. Por tanto, el conjunto de conocimiento o información que el observador, utilizando técnicas experimentales a las que no nos referiremos porque quedan fuera del objetivo de esta memoria, pueda obtener acerca del proceso que describe la evolución estocástica del proceso aleatorio asociado a la componente estocástica del tensor de stress, es aprovechable de forma óptima por dicho observador para conocer la estructura paramétrica de dicho proceso. Este procedimiento está basado en unas hipótesis fundamentales, principalmente dos: 1) que el proceso estocástico es lineal

y 2) que el proceso es estacionario. Consecuentemente, en la medida en que el conjunto de información disponible es más grande, mayor es la verosimilitud de que el proceso posea una determinada estructura, siguiendo el principio habitual en el ámbito científico de que, dado un conjunto de información, el modelo identificado más simple es, en un orden similar de verosimilitud, el mejor candidato a representar el proceso real subyacente. El análisis de los casos intencionadamente simples que se desarrolla a continuación se hace bajo estas premisas argumentales. En dicho análisis se hace especial énfasis en la importancia del concepto fundamental repetidamente aludido, clave en esta memoria y en otros estudios que de ella pudieran derivar: el núcleo de covarianza. Como es bien conocido, un proceso aleatorio gaussiano, lineal y estacionario (por reiterar las condiciones que se supondrán en cualquier escenario de estudio en esta memoria) queda unívocamente determinado por su estructura de autocovarianza en el rango de valores posibles del parámetro (n -dimensional) del que la evolución del proceso es dependiente. En otros términos: dos procesos que comparten la misma función de autocovarianza son equivalentes (en el sentido de autocovarianza compartida).

En el contexto de análisis de esta memoria el parámetro es el espacio-tiempo (un parámetro tetradimensional), aunque habría que precisar que se considera una determinada región acotada del espaciotiempo, como se mencionó anteriormente. Concretando, si, dado un punto x del espaciotiempo elegido como objeto del estudio, se dispone de la información acerca del tensor de stress en otro punto anterior separado de x por una pseudodistancia real, así como sobre el tensor de covarianza en un punto y del tensor de covarianza entre dos puntos separados por dicha pseudodistancia, o de una información más amplia (un mayor número de puntos y los tensores de stress en dichos puntos y de covarianza entre los mismos,...), debemos aproximar el proceso estocástico compatible con un criterio de simplicidad. Veamos a continuación tres casos diferentes de estudio, caracterizados por su relativa sencillez, con el fin de fijar unas líneas metodológicas a seguir.

4.1. Efecto inducido markoviano causado por una fuente externa (conocido el valor del tensor de stress en un punto anterior)

Suponemos que una fuente externa al sistema objeto de estudio provoca una perturbación que se traduce en una componente gaussiana estacionaria,

con valor esperado nulo, añadida al tensor de stress del sistema. Supongamos además que x_a es un punto del espaciotiempo ‘anterior’ a un punto de referencia x . Dada la hipótesis de estacionariedad del campo ξ proponemos inicialmente, para un proceso tetradimensional que describe el comportamiento estocástico del tensor de stress, el modelo dinámico siguiente:

$$\xi(x) = A(x, x_a)\xi(x_a) + \varepsilon(x, x_a), \quad (4.1)$$

donde el tensor retardado de propagación $A(x, x_a)$ corresponde con la definición expresada en (3.1), o sea, es un tensor elemental autorregresivo estacionario diagonalizable definido no negativo, cuyos autovalores están comprendidos entre 0 y 1. Los elementos de este tensor dependen, como sabemos, de una pseudonorma positiva $|x - x_a|$, debido a la estacionariedad, y el vector $\varepsilon(x, x_a)$ es un vector gaussiano ruido blanco, independiente de $\xi(x_a)$, cuya matriz de covarianza depende asimismo de la pseudonorma positiva $|x - x_a|$.

Estamos suponiendo que el tensor $A(x, x_a)$, que hemos denominado elemental en el capítulo anterior, es markoviano, ya que se cumple la condición de transitividad, expresada en (3.3), que ahora reproducimos como

$$A(x, x_d) = A(x, x_a)A(x_a, x_d),$$

siendo x_d un punto del espaciotiempo, perteneciente a la geodésica que pasa por x y x_a , y ‘anterior’ al punto x_a . Esta condición implica que, dado el tensor $\xi(x_a)$, la información acerca del tensor $\xi(x_d)$ no modifica la información acerca de $\xi(x)$, o sea, no reduce su incertidumbre.

Denominando $f(\xi)$ a la función de densidad tetradimensional de ξ , la condición de Markov equivale a expresar

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_d)) = f(\xi(x)|\xi(x_a)).$$

Multiplicando (4.1), miembro a miembro, por su transpuesta obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \xi(x)\xi'(x) &= A(x, x_a)\xi(x_a)\xi'(x_a)A'(x, x_a) + A(x, x_a)\xi(x_a)\varepsilon'(x, x_a) \\ &\quad + \varepsilon(x, x_a)\xi'(x_a)A'(x, x_a) + \varepsilon(x, x_a)\varepsilon'(x, x_a). \end{aligned}$$

Como hemos visto en el capítulo anterior, $N(x, x_a)$ es el tensor de covarianza entre dos puntos espaciotemporales x y x_a y N el tensor de covarianza en un punto. Así pues, tomando valores esperados, se cumple

$$N = A(x, x_a)NA'(x, x_a) + V(x, x_a),$$

donde $V(x, x_a)$ es el tensor de covarianza (o tensor condicional) de ε para los dos puntos dados x y x_a , siendo, por tanto, $V(x', x) = \langle \varepsilon(x', x) \varepsilon'(x', x) \rangle$.

Por otra parte,

$$\xi(x) \xi'(x_a) = A(x, x_a) \xi(x_a) \xi'(x_a) + \varepsilon(x, x_a) \xi'(x_a),$$

de donde se deduce que, dado el tensor de correlación entre $N(x, x_a)$ entre dos puntos, el tensor $A(x, x_a)$ cumple la condición conocida

$$A(x, x_a) = N(x, x_a) N^{-1}. \quad (4.2)$$

Por tanto,

$$N = N(x, x_a) N^{-1} N'(x, x_a) + V(x, x_a).$$

En consecuencia,

$$V(x, x_a) = N - N(x, x_a) N^{-1} N'(x, x_a). \quad (4.3)$$

Equivalentemente,

$$V(x, x_a) = N - A(x, x_a) N A'(x, x_a).$$

Nótese que, dada la relación (4.2), cabe expresar

$$V(x, x_a) N^{-1} = I - N(x, x_a) N^{-1} N'(x, x_a) N^{-1}$$

o, equivalentemente,

$$V(x, x_a) N^{-1} = I - A(x, x_a) N A'(x, x_a) N^{-1}.$$

La expresión (4.3) evidencia que el tensor condicional de covarianza $V(x, x_a)$ es simétrico.

Debido a la condición de estacionariedad, cuando la distancia entre x y x_a se hace infinita, el tensor $N(x, x_a)$, al igual que lo hace el tensor $A(x, x_a)$, tiende al tensor nulo.

El conocimiento del núcleo de covarianza $N(x, x_a)$ y de unas condiciones iniciales (información intrínseca) modifica la incertidumbre asociada a ξ , que queda reducida a la incertidumbre asociada a $\varepsilon(x, x_a)$. Puede decirse que $\xi(x)$ es un tensor aleatorio incondicional con una incertidumbre mayor que la del tensor aleatorio condicional $\varepsilon(x, x_a) = \xi(x) | \xi(x_a)$ (que equivaldría a la hipótesis de nula incertidumbre en x_a).

4.2. Efecto inducido no markoviano causado por una o más fuentes externas (conocido el valor del tensor de stress en dos puntos anteriores)

Supongamos en este caso que el número de fuentes externas que perturban el sistema puede ser superior a uno. Manteniendo la condición de estacionariedad del campo ξ proponemos ahora proceso dinámico similar al de la sección anterior:

$$\xi(x) = A(x, x_a)\xi(x_a) + \varepsilon(x, x_a),$$

donde igualmente el tensor de propagación $A(x, x_a)$ es un tensor autorregresivo estacionario, cuyos autovalores están comprendidos entre 0 y 1 (el determinante del propagador $A(x, x_a)$ es menor que 1 y su traza inferior a la dimensión 4 cuando x y x_a no coinciden). E igualmente los elementos de esta matriz dependen sólo de la norma positiva $|x - x_a|$, debido a la estacionariedad. Supondremos adicionalmente que el vector $\varepsilon(x, x_a)$ es un vector residual gaussiano.

Consideraremos en esta sección que la matriz $A(x, x_a)$ es no-markoviana dados x y x_a , que pertenecen a una geodésica determinada del espaciotiempo. Esto quiere decir que, dado un tercer punto x_d , perteneciente a la misma geodésica, tiene lugar, de acuerdo con (3.4),

$$A(x, x_d) \neq A(x, x_a)A(x_a, x_d). \quad (4.4)$$

Esta condición implica ahora que, dado el tensor $\xi(x_a)$, la información acerca del tensor $\xi(x_d)$ modifica la información acerca de $\xi(x)$, o sea, reduce su incertidumbre.

El modelo deja de ser markoviano, con lo que la función de densidad condicional cumple, en general,

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_d)) \neq f(\xi(x)|\xi(x_a)).$$

Utilizaremos la hipótesis de que el nuevo modelo propuesto verifica que, dado un punto espaciotemporal adicional x_e , perteneciente a la geodésica que pasa por x , x_a y x_d , y es anterior a x_d , se cumple

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_d), \xi(x_e)) = f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_d)).$$

Por otra parte, de acuerdo con (4.3) podríamos expresar

$$\xi(x_a) = A(x_a, x_d)\xi(x_d) + \varepsilon(x_a, x_d), \quad (4.5)$$

y también

$$\xi(x) = A(x, x_d)\xi(x_d) + \varepsilon(x, x_d). \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.3) podemos escribir

$$\xi(x) = A(x, x_a)A(x_a, x_d)\xi(x_d) + \varepsilon(x, x_a) + A(x, x_a)\varepsilon(x_a, x_d). \quad (4.7)$$

De la comparación de (4.6) y (4.7) se deduce que, si se cumple (4.4), tiene lugar

$$\varepsilon(x, x_d) \neq \varepsilon(x, x_a) + A(x, x_a)\varepsilon(x_a, x_d).$$

Por tanto, $\varepsilon(x, x_a)$ es un ruido ‘no blanco’ que necesariamente no puede ser independiente de $\xi(x_a)$ ni de $\xi(x_d)$, por lo que cabe proponer la relación

$$\varepsilon(x, x_a) = (A_1(x, x_a) - A(x, x_a))\xi(x_a) + A_2(x, x_d)\xi(x_d) + \varepsilon^*(x, x_a, x_d), \quad (4.8)$$

siendo $A_1(x, x_a)$ y $A_2(x, x_d)$ unos determinados tensores. La expresión (4.8) ha sido formulada de este modo por comodidad, ya que permite la representación de $\xi(x)$ como

$$\xi(x) = A_1(x, x_a)\xi(x_a) + A_2(x, x_d)\xi(x_d) + \varepsilon^*(x, x_a, x_d), \quad (4.9)$$

en la que los tensores $A_1(x, x_a)$ y $A_2(x, x_d)$ son fácilmente interpretables como tensores estacionarios de propagación de correlación.

En (4.9) puede suponerse inicialmente que $\varepsilon^*(x, x_a, x_d)$ es un ruido blanco, cuyo tensor de covarianza denominamos $V^*(x, x_a, x_d)$. Entonces, multiplicando (4.9) por su versión transpuesta y tomando valores esperados, obtenemos

$$\begin{aligned} N &= A_1(x, x_a)NA_1'(x, x_a) + A_2(x, x_d)NA_2'(x, x_d) + \\ &A_1(x, x_a)N(x_a, x_d)A_2'(x, x_d) + A_2(x, x_d)N(x_a, x_d)A_1'(x, x_a) + V^*(x, x_a, x_d). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V^*(x, x_a, x_d) &= N - A_1(x, x_a)NA_1'(x, x_a) - A_2(x, x_d)NA_2'(x, x_d) - \\ &A_1(x, x_a)N(x_a, x_d)A_2'(x, x_d) - A_2(x, x_d)N(x_a, x_d)A_1'(x, x_a). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Además, a partir de (4.9) obtenemos, multiplicando por $\xi(x_a)$, la expresión

$$N(x, x_a) = A_1(x, x_a)N + A_2(x, x_d)N(x_a, x_d), \quad (4.11)$$

y, multiplicando por $\xi(x_d)$,

$$N(x, x_d) = A_1(x, x_a)N(x_a, x_d) + A_2(x, x_d)N.$$

Entonces es fácil obtener $A_1(x, x_a)$ y $A_2(x, x_d)$, resultando

$$A_1(x, x_a) = \{N(x, x_d)N^{-1} - N(x, x_a)N^{-1}(x_a, x_d)\} H(x_a, x_d),$$

$$A_2(x, x_d) = \{N(x, x_a)N^{-1} - N(x, x_d)N^{-1}(x_a, x_d)\} H(x_a, x_d),$$

siendo

$$H(x_a, x_d) = NN(x_a, x_d) \{I - [NN^{-1}(x_a, x_d)]^2\}^{-1},$$

Vemos que si se cumpliera

$$N = N(x, x_a)N^{-1}(x, x_d)N(x_a, x_d),$$

expresión que corresponde a la propiedad de Markov, ello implicaría $A_2(x, x_d) = 0$ y $A_1(x, x_a) = N(x, x_a)N^{-1}$.

La ganancia ‘positiva’ en reducción de la incertidumbre viene medida por comparación entre las matrices calculadas en las expresiones (4.3) y (4.10).

Para estimar esta ganancia establezcamos una relación entre la expresión (4.2), que expresa el valor del propagador de covarianza $N(x, x_a)$ cuando no se dispone de la información en x_d , con la expresión (4.11), que expresa el valor del propagador conocido el valor del tensor de stress en x_d , lo que permite proponer la equivalencia

$$A(x, x_a) = A_1(x, x_a) + A_2(x, x_d)N(x_a, x_d)N^{-1}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo en (4.3) obtenemos el valor del tensor de covarianza $V(x, x_a)$ condicionado a x_a , dado por

$$V(x, x_a) = N -$$

$$\{A_1(x, x_a) + A_2(x, x_d)N(x_a, x_d)N^{-1}\} N \{A_1'(x, x_a) + N^{-1}N(x_a, x_d)A_2'(x, x_d)\}.$$

Comparando con el valor $V^*(x, x_a, x_d)$, condicionado a x_a y x_d , expresado en (4.10), se obtiene la ganancia (‘reducción’ del tensor de covarianza y, por tanto, de la incertidumbre)

$$V(x, x_a) - V^*(x, x_a, x_d) =$$

$$A_2(x, x_d)NA_2'(x, x_d) - A_2(x, x_d)N(x_a, x_d)N^{-1}N(x_a, x_d)A_2'(x, x_d).$$

Agrupando términos podemos expresar esta ganancia como

$$V(x, x_a) - V^*(x, x_a, x_d) = A_2(x, x_d) \{N - N(x_a, x_d)N^{-1}N(x_a, x_d)\} A_2'(x, x_d),$$

resultado que, como cabía esperar, evidencia el carácter ‘positivo’ de la ganancia.

Este proceso es esencialmente no markoviano, aunque (ver Apéndice D) puede considerarse equivalente en covarianza a la suma de dos procesos markovianos generados, por ejemplo, por la acción de dos fuentes externas de naturaleza diferente.

Sin embargo, dado que suponemos que el ruido del proceso es un ruido blanco (y, por tanto, que consideramos solo dos fuentes externas inductoras), este escenario no es compatible con el hecho de que las fuentes externas sean no correlacionadas, o sea, con nula información mutua, siéndolo sólo con el caso en que supongamos que existe un cierto grado de correlación (o información mutua), de carácter ‘negativo’ entre dichas fuentes. Esta característica de comportamiento de dos fuentes externas no parece natural, aunque podría ser compatible con un experimento diseñado en laboratorio.

Un escenario general, analizado en el Apéndice D, está basado en el efecto superpuesto de dos o más fuentes ‘markovianas’ con un grado cualquiera de correlación entre ambas, que incluiría como caso particular el desarrollado en esta sección.

De acuerdo con (4.12), el proceso analizado en esta sección es, en un sentido estricto, ‘no markoviano’, lo cual quiere decir que el tensor de propagación de covarianza $A(x, x_a)$, tal que $A(x, x_a) = N(x, x_a)N$, es un tensor generalizado (con dos componentes elementales) correspondiente a la expresión (3.2), de tal modo que, en general, tendrá lugar (3.4), equivalente, en este caso particular, a (4.4).

En esta sección se ha hecho un esfuerzo de modelización de una estructura tetradimensional estocástica asociada a un proceso aleatorio añadido aditivamente al tensor de stress de un sistema físico relativista que ocupa una determinada región espaciotemporal.

Dado que el número de puntos espaciotemporales, para los que se obtiene una información observada acerca del tensor de stress, es superior a uno, la estructura a identificar puede hacerse compleja si está basada en una única fuente actuante sobre el sistema físico objetivo, como puede observarse a partir de los resultados analíticos previos, habiendo considerado sólo dos puntos ‘proveedores’ de información.

No obstante, como se sugiere en el Apéndice D, que da el soporte de decisión adecuado a esta cuestión, y dado que, aun en el caso de que se diesen las condiciones adecuadas, una estructura paramétrica única correspondiente a una única fuente, requeriría considerar determinadas estructuras complejas subyacentes de covarianza, la decisión adecuada radica, como se propone reiteradamente en la memoria, en la elección de un número de fuentes (correlacionadas o no) acorde con el conjunto de información disponible a partir de los datos observados asociados a varios puntos espaciotemporales.

4.3. Efecto inducido markoviano causado por una fuente externa (conocido el valor del tensor de stress en dos puntos, uno anterior y otro posterior)

Continuando con la hipótesis de estacionariedad del campo aleatorio $\xi(x)$, y suponiendo de nuevo la existencia de una única fuente externa perturbadora, proponemos ahora de nuevo un proceso dinámico con una estructura markoviana, o sea, tal que

$$\xi(x) = A(x, x_a)\xi(x_a) + \varepsilon(x, x_a),$$

donde el tensor de propagación $A(x, x_a)$ es estacionario, con autovalores comprendidos entre 0 y 1, y siendo $\varepsilon(x, x_a)$ un vector de ruido blanco gaussiano, independiente de $\xi(x_a)$.

Sin embargo, consideraremos que, además de disponer de la información relativa a un tensor $\varepsilon(x, x_a)$, siendo x_a un punto espaciotemporal ‘anterior’ a x (o sea, perteneciente al segmento del pasado de x en la geodésica que pasa por x y x_a), disponemos de la información del tensor de stress en un punto x_b perteneciente al futuro de x , en la geodésica que une a los tres puntos (anterior, presente y posterior). En este escenario se trata de calcular la función de densidad $f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b))$, que evidentemente cumple

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) \neq f(\xi(x)|\xi(x_a)),$$

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) \neq f(\xi(x)|\xi(x_b)).$$

Es fácil establecer la relación bayesiana markoviana siguiente:

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) = \frac{f(\xi(x_b)|\xi(x))f(\xi(x)|\xi(x_a))}{f(\xi(x_b)|\xi(x_a))},$$

siendo

$$\begin{aligned}
 f(\xi(x_b)|\xi(x)) &= (2\pi)^{-2}|V(x_b, x)|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon'(x_b, x)V^{-1}(x_b, x)\varepsilon(x_b, x)}, \\
 f(\xi(x)|\xi(x_a)) &= (2\pi)^{-2}|V(x, x_a)|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon'(x, x_a)V^{-1}(x, x_a)\varepsilon(x, x_a)}, \\
 f(\xi(x_b)|\xi(x_a)) &= (2\pi)^{-2}|V(x_b, x_a)|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon'(x_b, x_a)V^{-1}(x_b, x_a)\varepsilon(x_b, x_a)}, \\
 f(\xi(x_b)|\xi(x_a), \xi(x)) &= (2\pi)^{-2}|V(x, x_a, x_b)|^{-\frac{1}{2}} \times \\
 &e^{-\frac{1}{2}(\xi(x)-E[\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)])'V^{-1}(x, x_a, x_b)(\xi(x)-E[\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)])}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, identificamos el tensor de varianza condicional $V(x, x_a, x_b)$ del tensor $\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)$ de acuerdo con la expresión

$$V(x, x_a, x_b) = \{A'(x_b, x)V^{-1}(x_b, x)A(x_b, x) + V^{-1}(x, x_a)\}^{-1}.$$

En consecuencia, siguiendo el criterio que venimos utilizando, la reducción de la incertidumbre puede evaluarse a partir de la expresión

$$\begin{aligned}
 &V(x, x_a) - V(x, x_a, x_b) = \\
 &V(x, x_a) \left\{ I - \{I + A'(x_b, x)V^{-1}(x_b, x)A(x_b, x)V(x, x_a)\}^{-1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Esta ganancia en cuanto a reducción de incertidumbre, respecto al caso descrito en la Sección 4.1, es, evidentemente, de carácter ‘positivo’.

Esta sección constituye una extensión de la Sección 4.1, por cuanto en ambos escenarios la hipótesis compartida razonable es la de la identificación de una única fuente externa perturbadora. Sin embargo, introduce un elemento conceptual nuevo, que será tratado en un capítulo posterior con mayor profundidad, como es el efecto sinérgico reductor de incertidumbre a partir de la información procedente de la observación en puntos espaciotemporales pasados y futuros respecto a un punto dado de referencia.

Capítulo 5

Determinación del efecto agregado de los campos aleatorios inducidos por una o varias fuentes externas identificadas

El desarrollo que se expone en este capítulo sigue, en cierto modo, un proceso metodológico inverso al propuesto en el capítulo anterior. El punto de partida es un sistema físico ‘cuasi-cerrado’, residente en una región del espaciotiempo. Como hasta ahora, se considera que la condición de sistema cerrado puede ser violada por la influencia de baja intensidad de fuentes externas caracterizadas por campos físicos de tipología eventualmente diversa.

El efecto inducido por una o varias fuentes de naturaleza no homogénea se supone asimilable a un término adicional del tipo Langevin, aunque se considera específicamente que, en el ámbito global del sistema objeto de estudio, dicho término posee una estructura gaussiana lineal estacionaria markoviana. En consecuencia, el efecto acumulado por grupos diferentes de fuentes no homogéneas se obtendrá por agregación de un número equivalente de procesos gaussianos markovianos diferentes, que pueden, en un escenario abierto de análisis, presentar un determinado grado de correlación.

En cualquier metodología de agregación estocástica el escenario de una posible existencia de una correlación entre los procesos agregados es de gran importancia. En el caso que nos ocupa en la presente memoria los proce-

Los procesos a agregar proceden del efecto inducido en un sistema físico residente en una región espaciotemporal. Por tanto, son procesos tetradimensionales. El contexto d -dimensional comporta consecuencias importantes conceptuales respecto a un contexto unidimensional, más allá de la pluralidad dimensional. Veamos esto más detalladamente.

Con la finalidad de hacer un ejercicio en el que se ponga de manifiesto la utilidad de la aplicación de las medidas informacionales, como las que se proponen en el próximo capítulo, así como la de las medidas convencionales cuya aplicación se desarrolla en la Parte II, vamos a exponer dos teorías diferentes de agregación: una de agregación en sentido estricto, que denominaremos ‘exacta’, y otra que denominaremos ‘aproximada’ (en realidad revisaremos varios casos de ‘aproximación’, cuya discrepancia respecto a la teoría ‘exacta’ será objeto de un análisis informacional ilustrativo). La primera corresponde a una descripción de la agregación de procesos estocásticos en un espacio tetradimensional, en un contexto general que contempla la posibilidad de covarianza cruzada entre los procesos inducidos por un número dado de fuentes externas distinguibles (o sea, con un efecto diferenciado para cada fuente, aunque interactuante con los de las restantes fuentes). La agregación, sin embargo, en el marco de esta teoría, hace que no sea posible, en general, ‘separar’ absolutamente el efecto de cada fuente respecto a los de las demás. Las teorías ‘aproximadas’ que presentamos no son arbitrarias, sino que se proponen en función de ciertas propiedades que suponemos útiles, y que son inalcanzables en la teoría ‘exacta’. Concretando, en una teoría exacta d -dimensional se dan determinadas condiciones, que en las teorías ‘aproximadas’ se modificarán de acuerdo con criterios que presentan, en cada caso, alguna ventaja, con el correspondiente ‘coste’ de un grado asociado de inexactitud que evaluaremos. Una teoría ‘exacta’, en un contexto d -dimensional ($d > 1$), debe tener en cuenta que: a) el proceso agregado no es estrictamente markoviano, ya que, al ser suma de procesos markovianos, el proceso conjunto tiene una estructura no markoviana, b) las covarianzas cruzadas tienen un carácter libre, o sea, no restringido (aunque evidentemente las correlaciones cruzadas no pueden ser incompatibles con los núcleos de covarianza de cada fuente, de acuerdo con el Apéndice I), por lo que el ‘troceado’ aditivo de los núcleos de covarianza no es posible, tanto para la construcción de una estructura de autocovarianza alternativa exactamente equivalente (lo que sí es posible en un escenario unidimensional), como para poder realizar una descomposición exacta del proceso agregado en suma de procesos markovianos elementales no correlacionados (lo que también es posible en el caso unidimensional). Las

tres teorías ‘aproximadas’, que compararemos con la teoría exacta, son las siguientes:

1.- Aproximar la descomposición a la suma maximalmente equivalente en covarianza de procesos con correlación cruzada nula

2.- Aproximar la descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación marginal, considerando dos casos: formatos normal y mínimo

3.- Aproximar la descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación contributiva, considerando dos casos: formatos normal y mínimo

En las secciones siguientes se hará, con fines didácticos de aplicación, una descripción más detallada, así como un desarrollo comparativo respecto a la teoría exacta, de las teorías aproximadas propuestas, que constituyen sólo unos ejemplos seleccionados.

5.1. Teoría exacta de agregación de procesos inducidos

Comencemos esta sección exponiendo el siguiente concepto: un proceso estocástico gaussiano lineal estacionario queda bien determinado a partir de conocimiento de su estructura completa de autocovarianza en el sentido de que, si dos procesos estocásticos responden a modelos representados con estructuras paramétricas diferentes, presentan una equivalencia en autocovarianza si comparten la función completa de autocovarianza. Se supone que ello implica un grado de equivalencia suficiente como para considerar que se trata de diferentes representaciones alternativas que son equivalentes. La importancia de este concepto radica, como veremos, en que presenta como principal ventaja la posibilidad de elegir (para un conjunto suficientemente grande de procesos gaussianos lineales estacionarios markovianos) una estructura desagregada en suma de procesos markovianos elementales, lo que permite visualizar mejor los resultados del análisis en términos de interpretación (cada proceso elemental se puede asociar con el efecto inducido por una fuente o un grupo de fuentes homogéneas). De hecho, en este capítulo se está suponiendo que se produce un efecto agregado en un proceso único en el que cada componente elemental corresponde a un proceso gaussiano estacionario markoviano asociado a una fuente.

Veamos algunos ejemplos de representación alternativa de procesos aleatorios equivalentes en estructura de covarianza. Expondremos estos ejemplos en un escenario unidimensional (p.e. una dimensión temporal), por simplicidad:

Ejemplo 1:

$$\xi_x^{(1)} = \xi_{1,x} + \xi_{2,x} = \phi_1 \xi_{1,x-1} + \phi_2 \xi_{2,x-1} + \varepsilon_{1,x} + \varepsilon_{2,x},$$

$$\xi_x^{(2)} = \delta_1 \xi_{1,x-1} + \delta_2 \xi_{2,x-1} + a_x - \omega a_{x-1},$$

donde $(\varepsilon_{1,x}, \varepsilon_{2,x})$ es un ruido blanco gaussiano bivalente con correlación ρ instantánea (o sea, temporalmente simultánea) y a_x es un ruido blanco univariante. Hay una relación bien determinada entre los parámetros característicos de ambas representaciones (los parámetros autorregresivos ϕ_1 y ϕ_2 , las varianzas de $\varepsilon_{1,x}$ y $\varepsilon_{2,x}$ y su correlación mutua, y los parámetros autorregresivos δ_1 y δ_2 y de media móvil ω y la varianza de a_x), que garantiza la equivalencia en covarianza entre las representaciones $\xi_x^{(1)}$ y $\xi_x^{(2)}$.

Ejemplo 2:

$$\xi_x^{(1)} = \xi_{1,x} + \xi_{2,x} = \phi_1 \xi_{1,x-1} + \phi_2 \xi_{2,x-1} + \varepsilon_{1,x} + \varepsilon_{2,x}, \quad (5.1)$$

$$\xi_x^{(2)} = \xi_{1,x}^* + \xi_{2,x}^* = \phi_1 \xi_{1,x-1}^* + \phi_2 \xi_{2,x-1}^* + \varepsilon_{1,x}^* + \varepsilon_{2,x}^*, \quad (5.2)$$

donde entre $\xi_{1,x}$ y $\xi_{2,x}$ existe un determinado grado de información mutua como consecuencia de que $(\varepsilon_{1,x}, \varepsilon_{2,x})$ se define como un proceso gaussiano ruido blanco bivalente con correlación instantánea, y entre $\xi_{1,x}^*$ y $\xi_{2,x}^*$ la información mutua es nula, ya que $(\varepsilon_{1,x}^*, \varepsilon_{2,x}^*)$ se define como un proceso gaussiano ruido blanco bivalente sin correlación (en un escenario tetradimensional no podremos considerar, en general, una correlación residual nula, manteniendo la condición de equivalencia en autocovarianza). En adelante prescindiremos del superíndice que distingue entre representaciones diferentes cuando los procesos son equivalentes en autocovarianza.

Consideraremos dos niveles diferenciados de representación o formato:

1.- Normal

2.- Mínima

Las representaciones normal y mínima corresponden, respectivamente, a los

formatos (5.1) y (5.2). La principal característica diferencial entre ambos formatos es, como veremos, que si la correlación mutua entre procesos componentes es positiva, se verifica

$$Var[\xi_x | \xi_{1,x-1}, \xi_{2,x-1}] > Var[\xi_x | \xi_{1,x-1}^*, \xi_{2,x-1}^*]$$

o, equivalentemente,

$$Var[\varepsilon_{1,x} + \varepsilon_{2,x}] > Var[\varepsilon_{1,x}^* + \varepsilon_{2,x}^*]$$

En otros términos, ante un objetivo de minimización de la incertidumbre, el formato (5.2) es más eficiente que el formato (5.1) cuando la correlación es positiva. Evidentemente, se obtiene el resultado contrario cuando la correlación es negativa. Veamos estos conceptos más detalladamente, generalizando la notación, considerando procesos markovianos en los que la información disponible corresponde a un punto x_a anterior a un punto x .

Supongamos que un proceso $\xi(x)$ es la suma de dos procesos gaussianos lineales estacionarios markovianos $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$ entre los que puede haber correlación cruzada, y consideremos, con fines didácticos, dos escenarios de análisis: a) los procesos son unidimensionales y b) los procesos son tetradiimensionales.

En el escenario a) podemos afirmar que el proceso $\xi(x)$ admite una representación normal, como suma de los procesos

$$\xi_1(x) = \phi_1^{|x-x_a|} \xi_1(x_a) + \varepsilon_1(x),$$

$$\xi_2(x) = \phi_2^{|x-x_a|} \xi_2(x_a) + \varepsilon_2(x),$$

y una representación alternativa, que denominamos representación mínima, en suma de dos procesos no correlacionados $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$, tales que

$$\xi_1^*(x) = \phi_1^{|x-x_a|} \xi_1^*(x_a) + \varepsilon_1^*(x),$$

$$\xi_2^*(x) = \phi_2^{|x-x_a|} \xi_2^*(x_a) + \varepsilon_2^*(x),$$

de tal forma que ambas representaciones son equivalentes (en el sentido de compartir la misma función de autocovarianza del proceso $\xi(x)$). Para ver esto basta con considerar que, llamando $\sigma_{x_1}^2$ y $\sigma_{x_2}^2$ a las varianzas respectivas de $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, y siendo ρ_x el coeficiente de correlación instantánea entre ambos procesos, y denominando σ_x^2 a la varianza de $\xi(x)$, se cumple $\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + 2\rho_x \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}$, con lo que, salvo en el caso en que $\rho_x = 0$,

tendremos que $\sigma_x^2 \neq \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$, o sea, no podemos ‘trocear’ la varianza del proceso global a partir de las varianzas de los procesos componentes $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$. A partir de aquí podemos establecer que las varianzas respectivas $\sigma_{x_1^*}^2$ y $\sigma_{x_2^*}^2$ de los procesos $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$ cumplen $\sigma_{x_1^*}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \rho_x \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}$ y $\sigma_{x_2^*}^2 = \sigma_{x_2}^2 + \rho_x \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}$, supuestos ambos valores positivos, lo cual es exigible y está garantizado bajo la hipótesis de que ρ_x es no-negativo (en otro caso la representación mínima no sería posible, siéndolo unas representaciones *límite* degeneradas, correspondientes a $\rho_x = -\frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}}$ y $\rho_x = -\frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}}$, carentes de interés en esta memoria y difícilmente asimilables a eventos naturales como los que estamos considerando). Entonces, para ambas representaciones alternativas la función de autocovarianza $\xi(x)$ es, evidentemente, la misma. Sin embargo, la segunda representación permite un ‘troceado’ aditivo de la varianza de ξ_x , por cuanto $\sigma_x^2 = \sigma_{x_1^*}^2 + \sigma_{x_2^*}^2$. En ambos casos de representación la función de autocorrelación $\rho(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, del proceso $\xi(x)$ es la misma, una combinación lineal de términos ϕ_1^k y ϕ_2^k ponderados por la carga de covarianza relativa de cada proceso componente en el proceso total. La representación mínima podríamos denominarla, con propiedad, en el caso unidimensional, representación nula.

En el escenario b), correspondiente a un contexto tetradimensional, podemos afirmar (Apéndice D) que el proceso $\xi(x)$ admite una representación normal, como suma de los procesos tetradimensionales

$$\xi_1(x) = A_1 \xi_1(x_a) + \varepsilon_1(x), \quad (5.3)$$

$$\xi_2(x) = A_2 \xi_2(x_a) + \varepsilon_2(x), \quad (5.4)$$

y una representación alternativa, que denominamos representación mínima, en suma de dos procesos tetradimensionales mínimamente correlacionados $\xi_{1,x}^*$ y $\xi_{2,x}^*$, tales que

$$\xi_1^*(x) = A_1 \xi_1^*(x_a) + \varepsilon_1^*(x), \quad (5.5)$$

$$\xi_2^*(x) = A_2 \xi_2^*(x_a) + \varepsilon_2^*(x), \quad (5.6)$$

de tal forma que ambas representaciones son equivalentes (en el sentido de compartir la misma función de autocovarianza del proceso $\xi(x)$). En efecto, denominemos ahora N_1 y N_2 a los núcleos de covarianza respectivos de $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, y C_{12} al tensor de covarianza cruzada (en general, no simétrico), entre ambos procesos, tal que $C_{12} = \langle \xi_1 \xi_2' \rangle$ y C_{21} el tensor transpuesto de C_{12} , tal que $C_{21} = \langle \xi_2 \xi_1' \rangle$ (Apéndice E). Entonces, denominando N , como hasta ahora, al núcleo de covarianza en un punto de ξ_x , se cumple $N = N_1 + N_2 + C_{12} + C_{21}$,

con lo que, salvo en el caso en que C_{12} (y, por tanto, C_{21}) sea igual al tensor nulo, tendremos que $N \neq N_1 + N_2$, o sea, tampoco ahora podemos ‘trocear’ el núcleo de covarianza del proceso global a partir de los núcleos de covarianza de los procesos componentes $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$. A partir de aquí no podemos definir dos núcleos N_1^* y N_2^* de los procesos $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$, respectivamente, que cumplieran $N_1^* = N_1 + C_{12}$ y $N_2^* = N_2 + C_{21}$ (lo que permitiría un ‘troceado’ perfecto, al ser los procesos componentes no correlacionados), ya que estos tensores N_1^* y N_2^* estarían mal definidos al no ser simétricos. La simetrización se consigue utilizando un tensor simétrico auxiliar $X_{1,2}$ definido como $X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$, que podemos denominar tensor de ‘covarianza media cruzada’.

Una definición válida para los núcleos de covarianza en representación mínima sería $N_1^* = N_1 + X_{1,2}$ y $N_2^* = N_2 + X_{1,2}$. Sin embargo, en este caso sucede que, siendo ambas representaciones equivalentes en covarianza, los procesos $\xi_{1,x}^*$ y $\xi_{2,x}^*$ son correlacionados, ya que $\langle \xi_1^* \xi_2^{*'} \rangle = Z_{12}$ y $\langle \xi_2^* \xi_1^{*'} \rangle = Z_{21}$ siendo Z_{12} y Z_{21} dos tensores antisimétricos (mutuamente transpuestos), tales que $Z_{12} = \frac{1}{2}(C_{12} - C_{21})$ y $Z_{21} = \frac{1}{2}(C_{21} - C_{12})$. En términos de incertidumbre, el grado de desajuste de la representación mínima respecto a una representación normal es, como veremos, acorde con la dispersión de los tensores Z_{12} y Z_{21} respecto al tensor nulo, siendo éste, obviamente, la suma de ambos tensores.

En efecto, utilizando una notación diferente para ambas representaciones con el fin de facilitar la interpretación,

$$\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x),$$

$$\xi^*(x) = \xi_1^*(x) + \xi_2^*(x),$$

siendo

$$\xi_1(x) = A_1 \xi_1(x_a) + \varepsilon_1(x),$$

$$\xi_2(x) = A_2 \xi_2(x_a) + \varepsilon_2(x),$$

y

$$\xi_1^*(x) = A_1 \xi_1^*(x_a) + \varepsilon_1^*(x),$$

$$\xi_2^*(x) = A_2 \xi_2^*(x_a) + \varepsilon_2^*(x).$$

Observamos que el tensor A de propagación de autocorrelación de $\xi(x)$ adopta la forma

$$A = A_1 (N_1 + C_{12}) N^{-1} + A_2 (N_2 + C_{21}) N^{-1}, \quad (5.7)$$

mientras que el tensor A^* de autocorrelación de $\xi^*(x)$ adopta la forma

$$A^* = A_1 (N_1^* + Z_{12}) N^{-1} + A_2 (N_2^* + Z_{21}) N^{-1} = \\ A_1 (N_1 + X_{1,2} + Z_{12}) N^{-1} + A_2 (N_2 + X_{1,2} + Z_{21}) N^{-1},$$

o sea, A y A^* son evidentemente coincidentes, por lo que afirmamos que $\xi(x)$ y $\xi^*(x)$ son equivalentes en autocovarianza.

El hecho de que Z_{12} y Z_{21} sean, en general, diferentes del tensor nulo, hace que el ‘troceado’ del núcleo de covarianza no sea posible, en general, bajo cualquiera de las representaciones equivalentes en autocovarianza del proceso $\xi(x)$.

Consultar el Apéndice I para revisar algunas de las características asociadas a los tensores de covarianza cruzada normal y mínima.

En las secciones que siguen, el análisis se realiza en un espacio tetradimensional, de acuerdo con las características del contexto de esta memoria. En todos los casos, en que se considera un grado de correlación tetrasimultánea entre los procesos residuales ruido blanco gaussiano de cada par de componentes de la representación base, la condición de incorrelación de los procesos componentes de la representación alternativa, resultante de la asignación, hace que en todos los casos que analizaremos (y de los que podemos ver algún ejemplo en la Parte III) no se obtenga una equivalencia en autocovarianza entre las representaciones base y alternativa. El concepto convenido de tetrasimultaneidad es el equivalente en el espaciotiempo tetradimensional de la instantaneidad en el caso unidimensional consistente en una única dimensión temporal. Un ejercicio interesante de aplicación de las medidas de incertidumbre consistiría en la aplicación adecuada de medidas teórico-informacionales que permitan evaluar en términos objetivos el desajuste de estructura de covarianza entre las representaciones objeto de comparación.

5.2. Teorías aproximadas de agregación de procesos inducidos

Un concepto en el que están basadas las teorías ‘aproximadas’ es el concepto de asignación, que consiste en la construcción de un ‘troceado’ aditivo en el núcleo de covarianza, de tal modo que se define un núcleo atribuido o asignado a cada uno de los procesos componentes, supuestos ahora no correlacionados, lo que, evidentemente, en un contexto tetradimensional no es

posible, en general, de forma exacta, utilizando una representación del proceso que sea equivalente en covarianza. Sin embargo, es posible utilizar unos criterios de ‘troceado’ o asignación que pueden tener algún nivel de utilidad práctica, lo que dependerá de la cuantificación, en términos de incertidumbre, de la desviación respecto a la estructura base de descomposición del proceso.

Desde un punto de vista práctico, y con fines de sistematización adecuada del análisis, podemos considerar diferentes enfoques (con características diferenciadas y distintos niveles de utilidad). Consideraremos, a efectos de estudio didáctico basado en medidas aplicables de la Teoría de la Información, dos ejes diferenciados de asignación del tensor condicional:

1.- Asignación marginal

2.- Asignación contributiva

El concepto de marginalidad responde a un marco conceptual en el que se considera relevante el orden de llegada de la influencia de las fuentes sobre el sistema. Más explícitamente, si se considera que existe el efecto previo inducido por una fuente, el efecto condicional asignado a una segunda fuente tiene un carácter diferencial, de tal modo que dicho efecto atribuido a esta segunda fuente es la ‘diferencia’ entre el efecto condicional conjunto de las dos fuentes (que obviamente no tiene por qué ser la suma de los efectos inducidos por ambas) y el efecto atribuido a la primera fuente. Por tanto, bajo este primer criterio de asignación, una vez que se asigna una representación ξ_i^m (en formato normal) al proceso inducido por la fuente F_i , tal que

$$\xi_i^m(x) = A_i^m(x_a) + \varepsilon_i^m(x),$$

este formato permanece asignado a dicha fuente. Evidentemente se verifica, en general, $A_i^m \neq A_i$. El grado de discrepancia es acorde con el nivel de ‘aproximación’ de la asignación.

Alternativamente, el concepto de contribución ignora el orden de llegada del efecto condicional de las fuentes, de tal modo que cada fuente contribuye con su efecto inducido parcial al efecto condicional conjunto, optimizando el ‘reparto’ de la correlación conjunta cruzada, manteniendo la hipótesis de correlación nula entre los nuevos formatos de proceso alternativo elegidos. En este caso se requiere un criterio válido de asignación, teniendo en cuenta que, como sabemos, las medidas utilizadas no siguen, en general, un proceso aditivo de agregación. Se necesitará tener en cuenta ciertas condiciones de

regularización que se explicitarán. Bajo un criterio de asignación contributiva el proceso estocástico $\xi_i^{(k),c}$ inducido por la misma fuente F_i vendría dado por la expresión

$$\xi_i^{(k),c}(x) = A_i^{(k),c}(x_a) + \varepsilon_i^{(k)c}(x),$$

verificándose también, en general, $A_i^{(k)c} \neq A_i$. Sin embargo, dada la definición de este criterio de asignación, evidentemente el formato de la fuente sustituta depende del número total de fuentes actuantes, de tal modo que si este número varía, cambiará la representación de todos los procesos asignados.

Aunque, por razones didácticas, se ha considerado más de un criterio de asignación (marginal y contributivo) en la construcción de algunas teorías ‘no exactas’, o sea, teorías con un determinado grado de aproximación a la teoría ‘exacta’ de agregación anteriormente descrita, es intuitivo que el criterio de asignación contributiva, que hace un reparto equilibrado de la correlación cruzada entre todas las fuentes, debe constituir una mejor aproximación que el que conlleva una asignación marginal, en el que el reparto de la correlación cruzada (tanto en un formato normal como en un formato mínimo) hace que la carga de correlación cruzada sea progresivamente mayor para los procesos posteriormente incorporados al proceso inducido conjunto.

Por esta razón, en adelante, y aunque en este capítulo se hará una descripción analítica detallada de ambos criterios (reiteramos, con fines exclusivamente ilustrativos), el análisis informacional deberá conducir al hecho de que la teoría ‘aproximada’ más adecuada es la que corresponde a un criterio de asignación, o teoría ‘aproximada’, contributiva, tanto en formato normal como en formato mínimo.

5.2.1. Teoría 1 aproximada: descomposición en suma maximalmente equivalente de procesos con correlación cruzada nula

Empecemos considerando un escenario sencillo consistente en dos fuentes externas F1 y F2 que influyen induciendo sendos procesos estocásticos gaussianos estacionarios markovianos en un sistema físico, en el sentido reiteradamente expresado. Supongamos además que entre dichas fuentes existe correlación cruzada. Sean dichos procesos ξ_1 y ξ_2 , siendo N_1 y N_2 sus respectivos núcleos de covarianza, y C_{12} y C_{21} los tensores de covarianza cruzada anteriormente definidos. El proceso ξ_{ex} inducido por el sistema conjunto de

las dos fuentes viene dado por

$$\xi_{ex}(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x).$$

En adelante, el subíndice ‘ex’ alude a que la magnitud (sea escalar, vectorial o tensorial) corresponde a la teoría exacta, respecto a la cual se analiza la teoría aproximada, para cuyas magnitudes se utilizará el subíndice ‘ap’. Sabemos que el tensor A_{ex} de propagación de correlación de ξ_{ex} , entre los puntos x y x_a , puede expresarse como

$$A_{ex} = \{A_1(N_1 + C_{12}) + A_2(N_2 + C_{21})\} N^{-1},$$

y que ξ_{ex} admite la representación alternativa, que designaremos ξ_{ex}^* ,

$$\xi_{ex}^*(x) = \xi_1^*(x) + \xi_2^*(x),$$

siendo ξ_1^* y ξ_2^* dos procesos cuyos respectivos núcleos de covarianza son N_1^* y N_2^* tales que $N_1^* = N_1 + X_{1,2}$ y $N_2^* = N_2 + X_{1,2}$, tal como han sido definidos en el desarrollo de la teoría ‘exacta’. Para esta representación de ξ , el tensor A^+ de propagación de correlación de ξ es

$$A^+ = \{A_1(N_1^* + Z_{12}) + A_2(N_2^* + Z_{21})\} N^{-1},$$

siendo evidentemente $A^+ = A_{ex}$, con lo cual consideramos que $\xi(x)$ y $\xi^*(x)$ son equivalentes en covarianza.

La aproximación que realizamos ahora consiste en suponer que los procesos ξ_1^* y ξ_2^* son no correlacionados. Bajo esta hipótesis, el proceso agregado ξ_{ap} , tal que $\xi_{ap} = \xi_1^* + \xi_2^*$ (mantenemos la misma notación para los procesos componentes), no es equivalente en covarianza a ξ_{ex}^* . El tensor A_{ap} de propagación de covarianza de ξ_{ap} es

$$A_{ap} = \{A_1 N_1^* + A_2 N_2^*\} N^{-1},$$

siendo obviamente $A_{ap} \neq A_{ex}$. Definiendo ΔA como $\Delta A = A_{ap} - A_{ex}$, es evidente que $\Delta A = -\{A_1 Z_{12} + A_2 Z_{21}\} N^{-1}$.

Definamos ahora los tensores simétricos de propagación $W_{1,2}$ y $W_{1,2}^*$ de covarianza media cruzada propagada, normal y mínima, respectivamente, como $W_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 C_{12} A_2' + A_2 C_{21} A_1')$ y $W_{1,2}^* = \frac{1}{2}(A_1 Z_{12} A_2' + A_2 Z_{21} A_1')$. Evidentemente, entre $W_{1,2}$ y $W_{1,2}^*$ se cumple la relación

$$W_{1,2} - W_{1,2}^* = \frac{1}{2}(A_1 X_{1,2} A_2' + A_2 X_{1,2} A_1').$$

Entonces, así como los tensores condicionales V_{ex} y V_{ex}^* de covarianza de ξ_{ex} y ξ_{ex}^* vienen dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} V_{ex} &= N - A_1 N_1 A_1' - A_2 N_2 A_2' - 2W_{1,2}, \\ V_{ex}^* &= N - A_1 N_1^* A_1' - A_2 N_2^* A_2' - 2W_{1,2}^*, \end{aligned}$$

el tensor condicional V_{ap}^* de covarianza de ξ_{ap} viene dado por

$$V_{ap}^* = N - A_1 N_1^* A_1' - A_2 N_2^* A_2',$$

con lo cual, llamando $\Delta V = V_{ap}^* - V_{ex}$, obtenemos

$$\Delta V = 2W_{1,2} - A_1 X_{1,2} A_1' - A_2 X_{1,2} A_2', \quad (5.8)$$

y llamando $\Delta V^* = V_{ap}^* - V_{ex}^*$, obtenemos asimismo

$$\Delta V^* = 2W_{1,2}^*. \quad (5.9)$$

Equivalentemente, haciendo algunas agrupaciones algebraicas en (5.8),

$$\Delta V = 2W_{1,2}^* - (A_1 - A_2) X_{1,2} (A_1' - A_2'). \quad (5.10)$$

Comparando (5.9) y (5.10) se obtiene

$$\Delta V^* - \Delta V = (A_1 - A_2) X_{1,2} (A_1' - A_2').$$

Aunque el carácter ‘aproximado’ de esta teoría afecta al proceso agregado y no a los procesos componentes, hagamos algunas consideraciones respecto a estos, utilizando los resultados obtenidos para el proceso conjunto. Considerando los procesos componentes ξ_1 y ξ_2 , sabemos que los tensores de covarianza condicionales V_1 y V_2 respectivos verifican

$$\begin{aligned} V_1 &= N_1 - A_1 N_1 A_1', \\ V_2 &= N_2 - A_2 N_2 A_2', \end{aligned}$$

mientras que para los procesos alternativos ξ_1^* y ξ_2^* los tensores de covarianza condicionales V_1^* y V_2^* respectivos cumplen

$$\begin{aligned} V_1^* &= N_1^* - A_1 N_1^* A_1', \\ V_2^* &= N_2^* - A_2 N_2^* A_2'. \end{aligned}$$

Llamando ΔV_1^* y ΔV_2^* a los tensores diferencia de covarianza condicionales, tales que $\Delta V_1^* = V_1^* - V_1$ y $\Delta V_2^* = V_2^* - V_2$, y teniendo en cuenta (5.8), obtenemos fácilmente

$$\Delta V_1^* + \Delta V_2^* = \Delta V + 2(X_{1,2} - W_{1,2}).$$

Usando (5.10) obtenemos finalmente

$$\Delta V_1^* + \Delta V_2^* = 2\{X_{1,2} - (W_{1,2} - W_{1,2}^*)\} - (A_1 - A_2)X_{1,2}(A'_1 - A'_2).$$

Generalizando estos resultados a un número k de fuentes, y, en consecuencia, de procesos markovianos inducidos, el proceso conjunto ξ_{ex} es tal que $\xi_{ex} = \sum_{j=1}^k \xi_{j,ex}$.

Obtenemos fácilmente los resultados

$$\Delta V = \sum_{i,j=1}^k W_{i,j}^* - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (A_i - A_j) X_{i,j} (A'_i - A'_j),$$

$$\Delta V^* = \sum_{i,j=1}^k W_{i,j}^*,$$

y, para la agrupación de procesos componentes,

$$\sum_{i=1}^k \Delta V_i^* = \Delta V + \sum_{i,j=1}^k (X_{i,j} - W_{i,j}).$$

5.2.2. Teoría 2 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación marginal (en formatos normal y mínimo)

Supongamos que una fuente externa F1 actúa sobre el sistema objeto de estudio, de tal modo que la componente estocástica del tensor de stress corresponde al campo estacionario markoviano

$$\xi_1(x) = A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + \varepsilon_1(x, x_a),$$

que expresa el tensor aleatorio $\xi_1(x)$ en función del valor dado $\xi_1(x_a)$.

De acuerdo con (4.2) y (4.3),

$$V_1(x, x_a) = N_1 - A_1(x, x_a)N_1A_1'(x, x_a), \quad (5.11)$$

donde $V_1(x, x_a) = Var[\varepsilon_1(x, x_a)]$ y N_1 es el tensor de covarianza de $\xi_1(x)$. En adelante, por simplicidad y facilidad de interpretación, prescindiremos del argumento (x, x_a) . Así, reescribimos (5.11) como $V_1 = N_1 - A_1N_1A_1'$.

Incorporamos una segunda fuente externa F2, cuyo efecto inducido viene representado por

$$\xi_2(x) = A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + \varepsilon_2(x, x_a). \quad (5.12)$$

Llamando $\xi(x)$ al tensor agregado dado por $\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x)$, podemos expresar

$$\xi(x) = A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

donde $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ es un proceso ruido blanco gaussiano conjunto tetrasimultáneamente covariante. En adelante, en el proceso de agregación de procesos se omitirá ocasionalmente la mención expresa de esta condición necesaria para la existencia garantizada de distribución gaussiana conjunta, lo que se dará por supuesto a lo largo de la memoria.

Denominando $V_2 = Var[\varepsilon_1 + \varepsilon_2]$, obtenemos

$$V_2 = N^{(2)} - A_1N_1A_1' - A_2N_2A_2' - A_1C_{12}A_2' - A_2C_{21}A_1', \quad (5.13)$$

donde $N^{(2)}$ es el núcleo de covarianza del tensor agregado $\xi(x)$, cuando este procede de la agregación de 2 fuentes (este es el significado del superíndice), N_2 es el núcleo de correlación de $\xi_2(x)$ y C_{12} y C_{21} son los tensores (mutuamente transpuestos) de covarianza cruzada en un punto, entre los tensores $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, tales que $C_{12} = \langle \xi_1(x)\xi_2'(x) \rangle$ y $C_{21} = \langle \xi_2(x)\xi_1'(x) \rangle$ (Apéndice E).

Además se cumple

$$N^{(2)} = N_1 + N_2 + C_{12} + C_{21}. \quad (5.14)$$

Denominamos $V_{2,ap}^m$ al tensor de covarianza marginal de la fuente F2, que es una medida de incertidumbre, definida como $V_{2,ap}^m = V_2 - V_1$. Así pues,

$$V_{2,ap}^m = N_2 - A_2N_2A_2' + C_{12} + C_{21} - A_1C_{12}A_2' - A_2C_{21}A_1'. \quad (5.15)$$

Podemos afirmar que hemos sustituido el proceso (5.12) por un proceso marginalmente asignado $\xi_{2,ap}^m(x)$, no correlacionado con $\xi_1(x)$ y dado por

$$\xi_{2,ap}^m(x) = A_{2,ap}^m(x, x_a)\xi_{2,ap}^m(x_a) + \varepsilon_{2,ap}^m,$$

cuyo tensor de covarianza incondicional N_2^m es tal que $N_2^m = N_2 + C_{12} + C_{21}$ y el tensor condicional $V_{2,ap}^m$ está dado por (5.15). En general, se cumple $A_{2,ap}^m \neq A_2$.

Incorporemos una tercera fuente F3, cuyo efecto inducido viene representado por

$$\xi_3(x) = A_3(x, x_a)\xi_3(x_a) + \varepsilon_3(x, x_a).$$

Llamando $\xi(x)$ al tensor agregado dado por $\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x) + \xi_3(x)$, expresamos

$$\xi(x) = A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + A_3(x, x_a)\xi_3(x_a) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

y, dado que ahora

$$N^{(3)} = N_1 + N_2 + N_3 + C_{12} + C_{21} + C_{13} + C_{31} + C_{23} + C_{32},$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} V_{3,ap}^m &= N_3 - A_3 N_3 A_3' + C_{13} - A_1 C_{13} A_3' + C_{31} - \\ &A_3 C_{31} A_1' + C_{23} - A_2 C_{23} A_3' + C_{32} - A_3 C_{32} A_2'. \end{aligned}$$

Y, generalizando a un número k de fuentes externas (Apéndice F),

$$V_k = N^{(k)} - \sum_{i=1}^k A_i N_i A_i' - \sum_{i \neq j=1}^k A_i C_{ij} A_j',$$

$$V_{k,p}^m = N_k - A_k N_k A_k' + \sum_{i=1}^{k-1} (C_{ik} + C_{ki}) - \sum_{i=1}^{k-1} (A_i C_{ik} A_k' + A_k C_{ki} A_i'),$$

donde, de acuerdo con la notación utilizada, $C_{ij} = \langle \xi_i(x) \xi_j'(x) \rangle$.

El tensor C_{ji} es, por tanto, el transpuesto de C_{ij} y $N^{(k)}$ el tensor núcleo de covarianza del proceso agregado de k fuentes. El tensor $N^{(k)}$ está bien definido, ya que el tensor $C_{ij} + C_{ji}$ es simétrico.

Si adoptamos el convenio $C_{ii} = N_i$, con lo que podemos expresar $N^{(k)} = \sum_{i,j=1}^k C_{ij}$, unas expresiones más generales y útiles son las siguientes:

$$V_k = \sum_{i,j=1}^k (C_{ij} - A_i C_{ij} A'_j), \quad (5.16)$$

$$V_{k,ap}^m = C_{kk} - A_k C_{kk} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} (C_{ik} - A_i C_{ik} A'_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (C_{ki} - A_k C_{ki} A'_i). \quad (5.17)$$

Por tanto, hemos sustituido el proceso $\xi_k(x)$ por un proceso marginalmente asignado $\xi_{k,ap}^m(x)$, no correlacionado con $\xi_i^m(x), i = 1, 2, \dots, k-1$, dado por

$$\xi_{k,ap}^m(x) = A_{k,ap}^m(x, x_a) \xi_{k,ap}^m(x_a) + \varepsilon_{k,ap}^m,$$

cuyo tensor incondicional de covarianza N_k^m es tal que $N_k^m = \sum_{i=1}^k C_{ik}$ y el tensor condicional $V_{k,p}^m$ viene dado por (5.17). En general, se cumplirá $A_{k,p}^m \neq A_k$.

Podemos definir los *tensores de peso* $\Gamma_{ij}^{(k)}$ como

$$\Gamma_{ij}^{(k)} = C_{ij} N^{(k)-1}. \quad (5.18)$$

Por tanto, podemos expresar (5.16) y (5.17) del modo siguiente:

$$V_k = \sum_{i,j=1}^k (\Gamma_{ij}^{(k)} N^{(k)} - A_i \Gamma_{ij}^{(k)} N^{(k)} A'_j), \quad (5.19)$$

$$V_{k,ap}^m = \Gamma_{kk}^{(k)} N^{(k)} - A_k \Gamma_{kk}^{(k)} N^{(k)} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\Gamma_{ik}^{(k)} N^{(k)} - A_i \Gamma_{ik}^{(k)} N^{(k)} A'_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (\Gamma_{ki}^{(k)} N^{(k)} - A_k \Gamma_{ki}^{(k)} N^{(k)} A'_i).$$

Evidentemente se verifica la relación de cierre $I = \sum_{i,j=1}^k \Gamma_{ij}^{(k)}$.

Obviamente, en el caso de una fuente única F1 perturbadora las representaciones normal y mínima no reflejan ninguna diferencia. Aunque, por fijar una diferencia de notación, y denominando $V_{1,p}^{*m}$ a la varianza asociada a la aportación marginal de incertidumbre de la primera fuente F1 en un escenario de formato mínimo, tenemos que evidentemente $V_{1,p}^{*m} = V_1$, por lo que podemos expresar

$$V_{1,p}^{*m} = N_1 - A_1 N_1 A'_1.$$

La incorporación de una segunda fuente F2 conlleva un tensor de covarianza conjunta V_2 (en representación normal), dado por la expresión

$$V_2 = N_1 + N_2 + C_{12} + C_{21} - A_1 N_1 A'_1 - A_2 N_2 A'_2 - A_1 C_{12} A'_2 - A_2 C_{21} A'_1, \quad (5.20)$$

donde se han combinado las expresiones (5.13) y (5.14).

Sin embargo, en representación mínima utilizaremos la expresión

$$V_2^* = N_1^{*2} + N_2^{*2} - A_1 N_1^{*2} A'_1 - A_2 N_2^{*2} A'_2 - A_1 Z_{12} A'_2 - A_2 Z_{21} A'_1, \quad (5.21)$$

donde, como sabemos, los tensores de covarianza cruzada Z_{12} y Z_{21} están definidos como $Z_{12} = \frac{1}{2}(C_{12} - C_{21})$ y $Z_{21} = \frac{1}{2}(C_{21} - C_{12})$, respectivamente, y se cumple $Z_{12} + Z_{21} = 0$ (Apéndice E). Además

$$N_1^{*2} = N_1 + X_{1,2},$$

$$N_2^{*2} = N_2 + X_{1,2},$$

donde $X_{1,2}$, recordando una vez más la definición realizada en el Apéndice E, viene dado por $X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$, siendo, por tanto, N_1^{*2} y N_2^{*2} unos núcleos de covarianza modificados de los campos tensoriales transformados ξ_1^{*2} y ξ_2^{*2} , a partir de los núcleos normales N_1 y N_2 de los tensores ξ_1 y ξ_2 . Esta transformación sólo es posible si se da la condición, no evidente, de que los tensores transformados N_1^{*2} y N_2^{*2} sean ambos definidos positivos, o sea, que se comporten como tensores de covarianza, lo cual depende de las características del tensor $X_{1,2}$ de covarianza media cruzada (que combina simultáneamente las características de los dos tensores N_1 y N_2 , de tal modo que, aunque estos dos tensores son definidos positivos, el tensor $X_{1,2}$ no tiene por qué serlo; de aquí que no esté garantizada esta propiedad para los dos tensores N_1^{*2} y N_2^{*2} , aunque sí para al menos uno de ellos). Estas consideraciones son similares a las realizadas en la Sección 5.1 en un contexto unidimensional temporal.

Supongamos que, en un caso límite, se cumple para F1, elegida arbitrariamente, que $N_1^{*2} = 0$, equivalente a la condición $X_{1,2} = -N_1$, lo que supone que el tensor $X_{1,2}$ es definido negativo. El carácter ‘negativo’ de la correlación mutua entre las dos fuentes hace que la contribución de la fuente F1 se anule, quedando sólo la contribución equivalente de la fuente F2, cuyo núcleo de covarianza equivalente N_2^{*2} vendría dado por la expresión $N_2^{*2} = N_2 - N_1$, que es evidentemente un tensor definido positivo. Este sería, pues, un escenario degenerado. En adelante consideraremos, como caso general no degenerado, aquel en el que todos los núcleos de correlación corregidos

por contribución son tensores definidos positivos, correspondientes a fuentes externas cuya contribución a la varianza global es no nula, escenario aplicable razonablemente a eventos naturales como los que nos ocupan en esta memoria.

Hemos sustituido el proceso $\xi_2(x)$ por un proceso marginalmente asignado $\xi_{2,p}^{*m}(x)$, no correlacionado con $\xi_1(x)$ y dado por

$$\xi_{2,ap}^{*m}(x) = A_{2,ap}^{*m}(x, x_a)\xi_{2,ap}^{*m}(x_a) + \varepsilon_{2,ap}^{*m},$$

cuyo tensor de covarianza incondicional N_2^{*m} es tal que $N_2^{*m} = N_2 + X_{1,2}$ y el tensor condicional $V_{2,ap}^{*m}$ viene dado por (5.23). En un caso general, se cumple $A_{2,ap}^{*m} \neq A_2$.

Comparando las expresiones (5.20) y (5.21) obtenemos

$$V_2 - V_2^* = (A_1 - A_2)X_{1,2}(A_1' - A_2'). \quad (5.22)$$

La expresión (5.22) constituye una medida de la eficiencia relativa de la incertidumbre evaluada bajo el criterio de representación normal frente al criterio de representación mínima. Dado que dicha expresión es una forma cuadrática del tensor diferencial $A_1 - A_2$, el signo de dicha eficiencia dependerá de las características del tensor $X_{1,2}$. Por ejemplo, si suponemos que los autovalores de $X_{1,2}$ son positivos (un escenario natural razonable) el signo de la medida (5.21) tendría un carácter evidentemente positivo, lo que podría interpretarse como que la evaluación de la incertidumbre mediante un formato mínimo resultaría más eficiente.

Denominando ahora $V_{2,ap}^{*m}$ a la varianza asociada a la aportación marginal de incertidumbre de la segunda fuente F2 en un escenario de formato mínimo, obtenemos

$$\begin{aligned} V_{2,ap}^{*m} = V_2^* - V_{1,ap}^{*m} = N_2^{*2} - A_2 N_2^{*2} A_2' + X_{1,2} - \\ A_1 X_{1,2} A_1' - A_1 Z_{12} A_2' - A_2 Z_{21} A_1'. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Comparando la expresión (5.23), correspondiente a una representación mínima, con la expresión (5.15), correspondiente a una representación normal, obtenemos

$$V_{2,ap}^m - V_{2,ap}^{*m} = (A_1 - A_2)X_{1,2}(A_1' - A_2'),$$

resultado, como cabía esperar, idéntico al de la expresión (5.22), ya que, en el caso de dos fuentes perturbadoras F1 y F2, la ganancia diferencial entre los

dos formatos de representación, normal y mínimo, es debida exclusivamente a la fuente F2.

Generalizando ahora a un número k de fuentes externas,

$$V_k^* = N^{(k)} - \sum_{i=1}^k A_i N_i^{*k} A_i' - \sum_{i \neq j=1}^k A_i Z_{ij} A_j', \quad (5.24)$$

$$V_{k,ap}^{*m} = N_k^{*k} - A_k N_k^{*k} A_k' - \sum_{i=1}^{k-1} (A_i Z_{ik} A_k' + A_k Z_{ki} A_i'),$$

siendo Z_{ik} el tensor antisimétrico cuyos elementos diagonales son nulos, tal que $Z_{ik} = \frac{1}{2}(C_{ik} - C_{ki})$, de acuerdo con la definición reiteradamente propuesta. Se ha tenido en cuenta que se verifica $Z_{ik} + Z_{ki} = 0$ para $k \neq i$, ya que adoptamos el convenio $Z_{ii} = N_i^{*k}$, con lo que podemos utilizar las expresiones

$$V_k^* = \sum_{i,j=1}^k (Z_{ij} - A_i Z_{ij} A_j'), \quad (5.25)$$

$$V_{k,ap}^{*m} = Z_{kk} - A_k Z_{kk} A_k' + \sum_{i=1}^{k-1} (Z_{ik} - A_i Z_{ik} A_k') + \sum_{i=1}^{k-1} (Z_{ki} - A_k Z_{ki} A_i'). \quad (5.26)$$

Hemos sustituido el proceso $\xi_k(x)$ por un proceso marginalmente asignado $\xi_{k,ap}^{*m}(x)$, no correlacionado con $\xi_i(x)^{*m}$, $i = 1, \dots, k$, y dado por

$$\xi_{k,ap}^{*m}(x) = A_{k,ap}^{*m}(x, x_a) \xi_{k,ap}^{*m}(x_a) + \varepsilon_{k,ap}^{*m},$$

cuyo tensor de covarianza incondicional N_k^{*m} es tal que $N_k^{*m} = \sum_{i=1}^k X_{i,k}$ y el tensor de varianza condicional $V_{k,ap}^{*m}$ es acorde con (5.26). En general, se cumplirá $A_{k,ap}^{*m} \neq A_k$.

Tengamos en cuenta que se cumple $N_i^{*(k)} = \sum_{j=1}^k X_{i,j}$ y, por tanto, $N^{(k)} = \sum_{i,j=1}^k X_{i,j}$, consecuencia del convenio de notación $N_i = X_{i,i}$, compatible con la ya utilizada $N_i = C_{ii}$.

Podemos definir ahora los *tensores de peso* $\Gamma_{ij}^{*(k)}$ como

$$\Gamma_{ij}^{*(k)} = Z_{ij} N^{(k)-1}. \quad (5.27)$$

Por tanto, podemos expresar (5.25) y (5.26) del modo siguiente:

$$V_k^* = \sum_{i,j=1}^{*k} (\Gamma_{ij}^{*(k)} N^{(k)} - A_i \Gamma_{ij}^{*(k)} N^{*(k)} A_j'),$$

$$V_{k,ap}^{*m} = \Gamma_{kk}^{*(k)} N^{(k)} - A_k \Gamma_{kk}^{*(k)} N^{(k)} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\Gamma_{ik}^{*(k)} N^{(k)} - A_i \Gamma_{ik}^{*(k)} N^{(k)} A'_i) + \sum_{i=1}^{k-1} (\Gamma_{ki}^{*(k)} N^{(k)} - A_k \Gamma_{ki}^{*(k)} N^{(k)} A'_i).$$

Evidentemente ahora también se verifica la relación de cierre $I = \sum_{i,j=1}^k \Gamma_{ij}^{*(k)}$.

Comparando (5.16) con (5.25), y teniendo en cuenta que $X_{i,j} = C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$, obtenemos

$$V_k - V_k^* = \sum_{i,j=1}^k A_i X_{i,j} (A'_i - A'_j).$$

Ahora bien, por simetría, y teniendo en cuenta que $X_{i,j} = X_{j,i}$, obtenemos análogamente

$$V_k - V_k^* = \sum_{i,j=1}^k A_j X_{i,j} (A'_j - A'_i).$$

Por tanto, resulta definitivamente

$$V_k - V_k^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (A_i - A_j) X_{i,j} (A'_i - A'_j). \quad (5.28)$$

Dadas las definiciones (5.18) y (5.27) podemos expresar alternativamente (5.28) como

$$V_k - V_k^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (A_i - A_j) (\Gamma_{ij}^{(k)} - \Gamma_{ij}^{*(k)}) N^{(k)} (A'_i - A'_j).$$

La conclusión acerca de este resultado es que la incertidumbre global inducida por un conjunto de k fuentes difiere cuando se utiliza un escenario mínimo respecto a que el escenario utilizado responda a un formato de representación estocástica normal. La diferencia radica en las características del tensor de covarianza cruzada media entre los procesos inducidos agregados.

A modo de ejemplo, si dicho tensor es de carácter netamente positivo (sus autovalores son positivos) el formato más eficiente es el formato mínimo, en el sentido de reducir en mayor grado la incertidumbre en un punto del espaciotiempo, cuando se dispone de la información en un punto pasado cercano causalmente conectado.

Con el objetivo de evaluar este mismo concepto cuando se compara la incertidumbre aportada por la última fuente marginalmente agregada, se procede a combinar las expresiones (5.17) y (5.26), a fin de obtener la cantidad $V_{k,ap}^m - V_{k,ap}^{*m}$, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} V_{k,ap}^m - V_{k,ap}^{*m} &= N_k^{(k)} - N_k^{*(k)} - A_k(N_k^{(k)} - N_k^{*(k)})A'_k \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} (X_{i,k} - A_i X_{i,k} A'_i) + \sum_{i=1}^{k-1} (X_{k,i} - A_k X_{k,i} A'_i). \end{aligned} \quad (5.29)$$

O, equivalentemente,

$$V_{k,ap}^m - V_{k,ap}^{*m} = \sum_{i=1}^{k-1} [(X_{i,k} - A_k X_{k,i} A'_i) + (X_{i,k} - A_i X_{i,k} A'_i) + (X_{i,k} - A_k X_{i,k} A'_i)].$$

Utilizando los pesos definidos en (5.17) y (5.26), podemos expresar alternativamente (5.29) sustituyendo $X_{i,k}$ por $(\Gamma_{ik}^{(k)} - \Gamma_{ik}^{*(k)})N^{(k)}$.

5.2.3. Teoría 3 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación contributiva (en formatos normal y mínimo)

A partir de (5.16) podemos expresar, haciendo un cambio de índices,

$$V_k = \sum_{i,j=1}^k (C_{ji} - A_j C_{ji} A'_i).$$

Por tanto, equivalentemente,

$$V_k = \sum_{i,j=1}^k \left(X_{ij} - \frac{1}{2} \{A_i C_{ij} A'_j + A_j C_{ji} A'_i\} \right). \quad (5.30)$$

‘Troceando’ elementalmente (5.30) estimamos la varianza asignada $V_{i,ap}^{(k)c}$ al proceso inducido por la fuente i -ésima como

$$V_{i,ap}^{(k)c} = \sum_{j=1}^k \left(X_{ij} - \frac{1}{2} \{A_i C_{ij} A'_j + A_j C_{ji} A'_i\} \right), \quad (5.31)$$

o bien, teniendo en cuenta (5.18),

$$V_{i,ap}^{(k)c} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(\left(\Gamma_{ij}^{(k)} + \Gamma_{ji}^{(k)} \right) N^{(k)} - \left\{ A_i \Gamma_{ij}^{(k)} N^{(k)} A_j' + A_j \Gamma_{ji}^{(k)} N^{(k)} A_i' \right\} \right),$$

siendo $N^{(k)}$ el tensor núcleo de covarianza del proceso agregado de k fuentes.

Hemos sustituido el proceso $\xi_i(x)$ por un proceso contributivamente asignado $\xi_{i,ap}^{(k)c}(x)$, no correlacionado con $\xi_{j,ap}^{(k)c}(x)$, $i \neq j = 1, \dots, k$, y dado por

$$\xi_{i,ap}^{(k)c}(x) = A_{i,ap}^{(k)c}(x, x_a) \xi_{i,ap}^{(k)c}(x_a) + \varepsilon_{i,ap}^{(k)c},$$

cuyo tensor de covarianza incondicional N_k^{*m} es tal que $N_i^{(k)c} = \sum_{j=1}^k X_{i,j}$, siendo el tensor de covarianza condicional $V_{i,ap}^{(k)c}$ el correspondiente a (5.31).

En general, se cumplirá $A_{i,ap}^{(k)c} \neq A_i$.

Considerando ahora un análisis similar, aunque basado en un formato mínimo del proceso conjunto, partimos igualmente de un escenario en el que existen k fuentes que perturban el sistema objeto de nuestro estudio. Como sabemos el núcleo de covarianza del tensor global estocástico agregado viene dado, según la definición realizada en el apartado anterior, por la expresión $N^{(k)} = \sum_{j=1}^k N_j^{*(k)}$, donde $N_j^{*(k)} = \sum_{i=1}^k X_{i,j}$.

Llamando $V_{k,ap}^*$ al tensor de covarianza residual definido en la expresión (5.25), podemos expresar, haciendo un cambio de índices y siguiendo un razonamiento similar al del punto anterior,

$$V_{k,ap}^* = \sum_{i,j=1}^k \left(X_{ij} - \frac{1}{2} \left\{ A_i Z_{ij} A_j' + A_j Z_{ji} A_i' \right\} \right),$$

con lo que estimamos el tensor de covarianza condicional $V_{i,ap}^{*(k)c}$, asignado al proceso inducido por la fuente i -ésima, como

$$V_{i,ap}^{*(k)c} = \sum_{j=1}^k \left(X_{ij} - \frac{1}{2} \left\{ A_i Z_{ij} A_j' + A_j Z_{ji} A_i' \right\} \right). \quad (5.32)$$

Recordemos que estamos utilizando el convenio $Z_{ii} = N_i^{*(k)}$.

Hemos sustituido el proceso $\xi_i(x)$ por un proceso contributivamente asignado $\xi_{i,ap}^{*(k)c}(x)$, no correlacionado con $\xi_{j,ap}^{*(k)c}(x)$, $i \neq j = 1, \dots, k$, y dado por

$$\xi_{i,ap}^{*(k)c}(x) = A_{i,ap}^{*(k)c}(x, x_a) \xi_{i,ap}^{*(k)c}(x_a) + \varepsilon_{i,ap}^{*(k)c},$$

cuyo tensor de varianza incondicional $N_i^{*(k)c}$ es tal que $N_i^{*(k)c} = \sum_{j=1}^k X_{i,j}$ y el tensor de varianza condicional $V_{i,ap}^{*(k)c}$ es el expresado en (5.32). En general, se cumplirá $A_{i,ap}^{*(k)c} \neq A_i$.

Teniendo en cuenta (5.27),

$$V_{i,ap}^{*(k)c} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(\left(\Gamma_{ij}^{*(k)} + \Gamma_{ji}^{*(k)} \right) N^{(k)} - \left\{ A_i \Gamma_{ij}^{*(k)} N^{(k)} A'_j + A_j \Gamma_{ji}^{*(k)} N^{(k)} A'_i \right\} \right),$$

siendo $N^{(k)}$ el tensor núcleo de covarianza del proceso agregado de k fuentes.

Es interesante observar que V_k (tensor de covarianza condicional, con asignación contributiva y formato normal) y V_k^* (tensor de covarianza condicional, con asignación contributiva y formato mínimo) son diferentes. Es fácil demostrar que el tensor diferencia ΔV_k entre ambos viene dado por la expresión

$$\Delta V_k = V_k - V_k^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k (A_i - A_j) X_{i,j} (A'_i - A'_j).$$

Por tanto, el tensor diferencia $\Delta V_{i,ap}^{(k)c}$, entre el tensor condicional $V_{i,ap}^{(k)c}$ asignado a la fuente i -ésima (con asignación contributiva y formato normal) y el tensor condicional $V_{i,ap}^{*(k)c}$ asignado a la fuente i -ésima (con asignación contributiva y formato mínimo), viene dado por la expresión

$$\Delta V_{i,ap}^{(k)c} = V_{i,ap}^{(k)c} - V_{i,ap}^{*(k)c} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (A_i - A_j) X_{i,j} (A'_i - A'_j).$$

Capítulo 6

El tensor de distancia: tensor de evaluación de la reducción de incertidumbre en función de una información disponible

Introducimos en este capítulo un concepto que constituye, y en ese sentido se propone, una medida informacional relevante en un espacio multidimensional. Supongamos que, dado un sistema constituido por un fluido material que ocupa una región determinada del espaciotiempo, el tensor de stress, que describe en cada punto espaciotemporal la distribución material del sistema, es una variable aleatoria debido a la acción de una o varias fuentes externas que provocan una perturbación en la evolución del fluido, que hace que el tensor de stress (fluctuante) quede definido de forma imperfecta si se considera que su naturaleza es puramente determinística. Como se ha venido haciendo en esta memoria, una mejora razonable en la descripción del comportamiento de la materia consiste en considerar que el tensor de stress puede ser modelizado como un proceso aleatorio gaussiano tetradimensional, cuyos valores fluctúan en torno a un valor medio del tensor.

Hemos denominado $\xi(x)$ a la componente estocástica gaussiana diagonalizada del tensor de stress. Por tanto, el valor medio o esperado, en un sentido probabilístico, del proceso $\xi(x)$ es igual al tensor 0. Además se ha supuesto que $\xi(x)$ es un proceso estocástico gaussiano markoviano estacionario a lo largo de las geodésicas del espaciotiempo, que por simplicidad se consideran trayectorias rectilíneas tetradimensionales (o sea, se ignoran los efectos

de curvatura y se considera un espaciotiempo ‘plano’ de Minkowski), lo que resulta suficiente para los fines de este estudio. Por tanto, el proceso $\xi(x)$ queda completamente determinado cuando se conoce su estructura de autocovarianza. En otras palabras, si son conocidos el tensor $\xi(x_a)$ y el tensor de propagación de autocorrelación $A(x, x_a)$, dados dos puntos espaciotemporales x (de referencia) y x_a (‘anterior’ a x), causalmente conectados a través de la geodésica a que ambos puntos pertenecen, el proceso aleatorio $\xi(x)$ queda determinado en cuanto a su estructura de autocovarianza.

Como sabemos, el tensor de propagación $A(x, x_a)$ (en adelante A si no se precisa mayor especificación) es estacionario y, por tanto, su valor tensorial sólo depende de la pseudodistancia espaciotemporal entre x y x_a . Recordemos que las características de dispersión del proceso $\xi(x)$ en un punto cualquiera x vienen determinadas por la estructura del núcleo de covarianza N , independiente de x .

6.1. Definición de tensor de distancia y conceptos asociados

Supongamos que se dispone de la información acerca del valor del tensor gaussiano $\xi(x)$ en el punto x_a , siendo éste un punto ‘anterior’ a un punto x de referencia. Denominamos $\varepsilon(x, x_a)$ (en adelante ε) al proceso condicional $\xi(x)|\xi(x_a)$ y $V(x, x_a)$ (en adelante V) al tensor de covarianza de ε . Definimos un nuevo tensor $U(x, x_a)$ (en adelante U), que denominaremos *tensor de distancia retardado* (en adelante, tensor de distancia, si no se hace mención expresa) del proceso $\varepsilon(x, x_a)$ que verifica

$$V = UN.$$

Por tanto, el tensor de distancia adopta la expresión $U = VN^{-1}$ y, en general, no es simétrico.

En el contexto gaussiano, y de linealidad y estacionariedad, del análisis, que supone unas características, ya expuestas, del propagador de correlación A , una propiedad importante del tensor U es que su determinante es un número comprendido entre 0 y 1 (el valor 1 corresponde al caso en que el tensor de distancia es idénticamente el tensor unidad I , situación que se produce cuando el punto x_a está infinitamente alejado en el pasado del punto x , mientras que el valor 0 corresponde al escenario en que x y x_a coinciden, en cuyo caso el tensor de distancia se identifica con el tensor nulo). Por tanto, en

este contexto de estacionariedad y de continuidad del espaciotiempo en que se basa el estudio, los 4 autovalores $\lambda_j, j = 0, 1, 2, 3$, del tensor de distancia U son números reales comprendidos entre 0 y 1. Se cumple evidentemente la condición $0 < |U| < 1$. Llamaremos *factor de distancia* (o distancia en incertidumbre) $u(x, x_a)$, abreviadamente u , a la raíz de orden 4 del determinante de U , o sea, $u = |U|^{\frac{1}{4}}$. Por tanto, u es una medida adimensional real comprendida entre 0 y 1.

En consecuencia, el tensor de distancia U es una medida tetradimensional que permite evaluar la ‘contracción’ experimentada por la función de densidad del tensor de stress estocástico en un punto del espaciotiempo cuando se dispone de la información en un punto, causalmente conectado, de su entorno. Así, si la función de densidad $f(\xi)$ de $\xi(x)$ es

$$f(\xi) = (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \xi' N^{-1} \xi},$$

y la función de densidad $f(\varepsilon)$ de ε es

$$f(\varepsilon) = (2\pi)^{-2} |U|^{-\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \varepsilon' N^{-1} U^{-1} \varepsilon}.$$

En un caso general, $\xi(x)$ es un proceso estocástico resultante de la perturbación agregada de un número arbitrario k de fuentes externas, cuyo impacto conjunto en el tensor de stress del sistema puede considerarse markoviano en un sentido amplio, como hemos convenido, ya que en el contexto del amplio conjunto de procesos lineales que contempla el estudio, si varias fuentes inducen un proceso estocástico no markoviano, éste admite una descomposición aditiva equivalente en autocovarianza a varios procesos markovianos (uno por cada fuente). Por tanto, podemos expresar

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^k A_j \xi_j(x_a) + \sum_{i=1}^k \varepsilon_j(x, x_a),$$

donde A_j es el tensor de propagación de autocorrelación del proceso $\xi_j(x)$ y $\varepsilon_j(x, x_a)$ (en adelante ε_j) es un ruido blanco gaussiano, tales que

$$\xi_j(x) = A_j \xi_j(x_a) + \varepsilon_j.$$

Por tanto, ε es la suma de los k procesos ruido blanco gaussianos ε_j (componentes del proceso ruido blanco gaussiano multivariante ε , que puede presentar correlación mutua entre pares de dichas componentes). O sea,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^k \varepsilon_j.$$

Llamando Λ_{ij} al tensor de correlación entre los ruidos blancos ε_i y ε_j , el núcleo de covarianza condicional V del tensor ε viene dado por la expresión

$$V = \sum_{i,j=1}^k \text{Var}(\varepsilon_i) \Lambda_{ij} \text{Var}(\varepsilon_j),$$

cumpliendo, por tanto,

$$V = N - \sum_{i,j=1}^k A_i C_{ij} A'_j,$$

donde C_{ij} es el tensor de covarianza cruzada, anteriormente definido, entre los procesos $\xi_i(x)$ y $\xi_j(x)$.

Por tanto, el tensor de distancia U adopta la forma

$$U = I - YN^{-1},$$

donde $Y = Y(x, x_a)$ (que depende de la distancia entre x y x_a) es un tensor que resume las características de correlación del proceso aleatorio $\xi(x)$, siendo $Y = \sum_{i,j=1}^k A_i C_{ij} A'_j$. En consecuencia, recordando de nuevo el contexto de análisis utilizado en esta memoria y reiteradamente aludido, este tensor verifica la condición $|Y| < |N|$. Finalmente, si denominamos $\Pi = \Pi(x, x_a)$ al *tensor de carga de correlación* entre los puntos x y x_a , definido como $\Pi = YN^{-1}$, podemos expresar

$$U + \Pi = I.$$

El tensor Π es el tensor complementario de U y, al igual que éste, es un tensor tetradimensional, que además verifica la condición $0 \leq |\Pi| \leq 1$, siendo asimismo sus autovalores ω_j , $j = 0, 1, 2, 3$, unos valores reales comprendidos entre 0 y 1, valores extremos alcanzables en casos límite (ver Apéndice G). Denominaremos *factor de carga de correlación* (o carga en incertidumbre) $\pi(x, x_a)$, abreviadamente π , a la raíz de orden 4 del determinante de Π , o sea, $\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}}$. Por tanto, π es una medida adimensional real comprendida entre 0 y 1.

Veamos, como caso particular, la aplicación de estos conceptos al caso descrito en la Sección 4.1 (una fuente markoviana con información en un punto anterior x_a al punto espaciotemporal x objeto de estudio). De (4.3) se deduce, como quedó indicado (referido a la distancia entre ambos puntos),

$$VN^{-1} = I - ANA'N^{-1}.$$

Por tanto, en este caso, los tensores de distancia y de carga de correlación son, respectivamente, $U = I - ANA'N^{-1}$ y $\Pi = ANA'N^{-1}$. En consecuencia, $u = |I - ANA'N^{-1}|^{\frac{1}{4}}$ y $\pi = |ANA'N^{-1}|^{\frac{1}{4}}$ son, respectivamente, los factores de distancia y de carga de correlación, que cumplen, respectivamente $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq \pi \leq 1$.

Tengamos en cuenta que los factores positivos u y π cumplen la condición $0 < u + \pi \leq 1$ (Apéndice G). La cota 1 se alcanza cuando los autovalores del tensor U y, por tanto, del tensor Π , son todos iguales, o sea

$$\begin{aligned}\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \\ \omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega = 1 - \lambda,\end{aligned}$$

lo que equivaldría a afirmar que los tensores U y Π son tensores diagonales, o sea, de la forma $U = \lambda I$ y $\Pi = (1 - \lambda)I$, siendo, por tanto, $u = \lambda$ y $\pi = (1 - \lambda)$. Para el caso general, podemos definir un factor τ o *factor de deformación covariante*, como

$$\tau = 1 - (u + \pi),$$

que evidentemente cumple la condición $0 \leq \tau \leq 1$ y que constituye una medida adimensional escalar global de la discrepancia de los tensores U y Π respecto a una estructura diagonal y, por tanto, es una medida de un determinado grado de deformación covariante (por inhomogeneidad de cambio de escala, o sea, por discrepancia de la relación entre los autovalores de N y V , y por distorsión de la correlación entre ambos con la distancia espaciotemporal entre puntos). Podemos afirmar, pues, que el factor τ es una medida informacional relevante. En adelante las expresiones referentes a ‘cambio homogéneo o inhomogéneo de escala’ deben entenderse como ‘reducción homogénea o inhomogénea de escala’ en todos los casos al pasar de un núcleo de covarianza incondicional a un núcleo de covarianza condicional (reducción de la incertidumbre), ya que los autovalores de U han de ser, como se ha indicado, positivos y menores que 1, acorde con la hipótesis de un escenario estacionario.

Además, los tensores U y Π cumplen la relación

$$Tr(U) + Tr(\Pi) = Tr(I) = 4.$$

Los conceptos de tensor de distancia y tensor de carga de correlación son, como veremos, fácilmente generalizables a un número mayor de fuentes.

6.2. Propuesta de una teoría exacta de agregación basada en el tensor de distancia

Veamos, a modo de ejemplo, el caso de dos fuentes externas F1 y F2 no correlacionadas. En este caso, como sabemos,

$$N = N_1 + N_2,$$

siendo N , N_1 y N_2 los respectivos núcleos de covarianza, en un punto, del proceso inducido conjunto, del proceso inducido por la primera y del proceso inducido de la segunda fuente. Además, llamando V al tensor de covarianza condicional o residual del proceso conjunto cuando se conoce la información acerca de un punto x_a causalmente conectado con x , sabemos que

$$V = N - A_1 N_1 A_1' - A_2 N_2 A_2',$$

siendo A_1 y A_2 los tensores de propagación de correlación correspondientes a los procesos estocásticos estacionarios markovianos (no correlacionados) inducidos respectivamente por las fuentes F1 y F2. Llamando U al tensor de distancia del proceso conjunto, dado por $U = V N^{-1}$ como sabemos, se cumple

$$U = I - A_1 N_1 A_1' N^{-1} - A_2 N_2 A_2' N^{-1}.$$

Y llamando Γ al *tensor de peso* tal que

$$\Gamma = N_1 N^{-1}, \tag{6.1}$$

obtenemos

$$U = U_1 \Gamma + U_2 (I - \Gamma).$$

Por tanto, el tensor de carga de correlación del proceso conjunto es

$$\Pi = \Pi_1 \Gamma + \Pi_2 (I - \Gamma).$$

Como vemos, los tensores U y Π se obtienen respectivamente promediando los tensores de distancia U_1 y U_2 y de carga de correlación Π_1 y Π_2 de los procesos inducidos por las dos fuentes, utilizando los tensores de peso Γ y $I - \Gamma$.

Los resultados obtenidos para u (siendo $u = |U|^{\frac{1}{4}}$), π (siendo $\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}}$) y τ (siendo $\tau = 1 - (u + \pi)$), son obviamente aplicables, de igual modo, en este escenario analizado.

Consideremos ahora la posibilidad de que los dos procesos inducidos sean correlacionados. Ello quiere decir, como se ha expuesto reiteradamente, que existen unos tensores de correlación cruzada C_{12} y C_{21} , mutuamente transpuestos, entre los dos procesos componentes. De acuerdo con el análisis realizado en el capítulo anterior, podemos considerar diferentes modelos de representación del proceso agregado que son equivalentes en autocovarianza. El análisis se ha centrado en dos formatos que hemos denominado normal y mínimo.

En el escenario correspondiente a un formato normal, como sabemos,

$$N = N_1 + N_2 + C_{12} + C_{21} = N_1 + N_2 + 2X_{1,2}.$$

Recordemos que, dado que el tensor A de propagación de autocorrelación del proceso conjunto viene dado por $A = A_1(N_1 + C_{12}) + A_2(N_2 + C_{21})$, el núcleo N no es, en general, ‘troceable’, debido a que los tensores de correlación cruzada no son, en general, simétricos.

En cuanto al tensor V , el tensor de covarianza residual del proceso conjunto cuando se conoce la información acerca de un punto x_a causalmente conectado con x , viene dado en este caso por la expresión

$$V = N - A_1 N_1 A_1' - A_2 N_2 A_2' - A_1 C_{12} A_2' - A_2 C_{21} A_1',$$

que, evidentemente, tampoco es ‘troceable’. Utilizamos, por comodidad, el tensor $W_{1,2}$, ya definido, de propagación de correlación cruzada media, dado por $W_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 C_{12} A_2' + A_2 C_{21} A_1')$. Entonces

$$V = N - A_1 N_1 A_1' - A_2 N_2 A_2' - 2W_{1,2}.$$

Llamando U , como venimos haciendo, al tensor de distancia del proceso conjunto, dado por $U = VN^{-1}$, se verifica, agrupando términos,

$$U = I - A_1 N_1 A_1' N^{-1} - A_2 N_2 A_2' N^{-1} - 2W_{1,2} N^{-1}.$$

Definamos ahora nuevamente el *tensor de peso* Γ tal que

$$U = U_1 \Gamma + U_2 (I - \Gamma).$$

Por tanto, es fácil obtener, en este nuevo escenario,

$$\Gamma = N_1 N^{-1} + 2 (A_1 N_1 A_1' N_1^{-1} - A_2 N_2 A_2' N_2^{-1})^{-1} (W_{1,2} - A_2 N_2 A_2' N_2^{-1} X_{1,2}) N^{-1}, \quad (6.2)$$

expresión que, comparada con (6.1), permite destacar la incorporación de un término adicional que captura el efecto adicional de la covarianza cruzada.

Equivalentemente, podemos expresar (6.2) como

$$\Gamma = N_1 N^{-1} - 2(U_1 - U_2)^{-1} (W_{1,2} - (I - U_2) X_{1,2}) N^{-1},$$

y, por tanto,

$$I - \Gamma = N_2 N^{-1} - 2(U_2 - U_1)^{-1} (W_{1,2} - (I - U_1) X_{1,2}) N^{-1}.$$

Incluso, utilizando los tensores de carga de correlación de los dos procesos, podemos adoptar las expresiones alternativas

$$\Gamma = N_1 N^{-1} + 2(\Pi_1 - \Pi_2)^{-1} (W_{1,2} - \Pi_2 X_{1,2}) N^{-1},$$

$$I - \Gamma = N_2 N^{-1} + 2(\Pi_2 - \Pi_1)^{-1} (W_{1,2} - \Pi_1 X_{1,2}) N^{-1}.$$

Consecuentemente, el tensor de carga de correlación Π del proceso conjunto es

$$\Pi = \Pi_1 \Gamma + \Pi_2 (I - \Gamma),$$

donde Γ y $I - \Gamma$ son los tensores de peso anteriores, obtenidos para este escenario.

Como vemos, también en este escenario de correlación cruzada (en formato normal), los tensores U y Π se obtienen promediando los tensores de distancia U_1 y U_2 y de carga de correlación Π_1 y Π_2 de los procesos inducidos por las dos fuentes, mediante una ponderación basada en los tensores Γ y $I - \Gamma$, que ahora incorporan el efecto de dicha correlación cruzada.

Son aplicables igualmente las medidas escalares $u = |U|^{\frac{1}{4}}$, $\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}}$ y $\tau = 1 - (u + \pi)$.

En el escenario correspondiente a un formato mínimo el procedimiento deductivo es similar, si bien, como sabemos, los resultados obtenidos difieren respecto a los de un formato normal. En este caso

$$N = N_1 + N_2 + 2X_{1,2} = N_1^* + N_2^*,$$

siendo $N_1^* = N_1 + X_{1,2}$ y $N_2^* = N_2 + X_{1,2}$. Por tanto, N , como sabemos, no es, en general, ‘troceable’.

En cuanto al tensor V^* , el tensor de covarianza condicional o residual, para este formato de agregación, del proceso conjunto cuando se conoce la

información acerca de un punto x_a , causalmente conectado con x , viene dado por la expresión

$$V^* = N - A_1 N_1^* A_1' - A_2 N_2^* A_2' - A_1 Z_{12} A_2' - A_2 Z_{21} A_1',$$

que, evidentemente, tampoco es ‘troceable’. Utilizamos ahora el tensor de propagación $W_{1,2}^*$ de correlación media cruzada propagada en formato mínimo, que anteriormente quedó definido como $W_{1,2}^* = \frac{1}{2} (A_1 Z_{12} A_2' + A_2 Z_{21} A_1')$. Entonces se obtiene

$$V^* = N - A_1 N_1^* A_1' - A_2 N_2^* A_2' - 2W_{1,2}^*.$$

Llamando ahora U^* al tensor de distancia del proceso conjunto, dado por

$$U^* = V^* N^{-1},$$

se cumple

$$U^* = I - A_1 N_1^* A_1' N^{-1} - A_2 N_2^* A_2' N^{-1} - 2W_{1,2}^* N^{-1}.$$

Definamos ahora un nuevo tensor de peso Γ^* tal que

$$U^* = U_1 \Gamma^* + U_2 (I - \Gamma^*).$$

En consecuencia,

$$\Gamma^* = N_1^* N^{-1} + 2 \left(A_1 N_1^* A_1' N_1^{*-1} - A_2 N_2^* A_2' N_2^{*-1} \right)^{-1} W_{1,2}^* N^{-1},$$

o, equivalentemente,

$$\Gamma^* = N_1 N^{-1} + \left\{ X_{1,2} + 2 \left(A_1 N_1^* A_1' N_1^{*-1} - A_2 N_2^* A_2' N_2^{*-1} \right)^{-1} W_{1,2}^* \right\} N^{-1}. \quad (6.3)$$

Asimismo, comparando la expresión anterior con (6.1), vemos que queda incorporado un término adicional que captura, también en este formato mínimo aunque con resultado no coincidente, el efecto adicional de la covarianza cruzada.

Equivalentemente, podemos expresar (6.3) como

$$\Gamma^* = N_1 N^{-1} - \left\{ 2 (U_1 - U_2)^{-1} W_{1,2}^* - X_{1,2} \right\} N^{-1},$$

y, por tanto,

$$I - \Gamma^* = N_2 N^{-1} - \{2 (U_2 - U_1)^{-1} W_{1,2}^* - X_{1,2}\} N^{-1}.$$

Utilizando, al igual que anteriormente, los tensores de carga de correlación de los dos procesos, podemos obtener las expresiones

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= N_1 N^{-1} + \{2 (\Pi_1 - \Pi_2)^{-1} W_{1,2}^* + X_{1,2}\} N^{-1}, \\ I - \Gamma^* &= N_2 N^{-1} + \{2 (\Pi_2 - \Pi_1)^{-1} W_{1,2}^* + X_{1,2}\} N^{-1}. \end{aligned}$$

El tensor de carga de correlación Π^* del proceso conjunto es

$$\Pi^* = \Pi_1 \Gamma^* + \Pi_2 (I - \Gamma^*).$$

También en este escenario de correlación cruzada (en formato mínimo), los tensores U^* y Π^* se obtienen promediando los tensores de distancia U_1 y U_2 y de carga de correlación Π_1 y Π_2 de los procesos elementales inducidos por las dos fuentes, mediante una ponderación basada en los tensores Γ^* y $I - \Gamma^*$, que incorporan el efecto de la covarianza cruzada en el formato mínimo utilizado.

Son aplicables igualmente las medidas escalares $u^* = |U^*|^{\frac{1}{4}}$, $\pi^* = |\Pi^*|^{\frac{1}{4}}$ y $\tau^* = 1 - (u^* + \pi^*)$.

Capítulo 7

Propuesta de unos criterios elementales de evaluación del grado de exactitud de una teoría aproximada

En el capítulo anterior hemos propuesto una teoría ‘exacta’ de agregación de procesos inducidos, así como un conjunto de varias teorías ‘inexactas’ o ‘aproximadas’ (cuya propuesta se justifica a partir de ciertas propiedades a considerar), que presentan un grado de ‘inexactitud’ diferente respecto a la teoría ‘exacta’ en función de las características de dichas propiedades. Podríamos concretar esta idea diciendo que ciertas propiedades (como la representación equivalente en autocovarianza basada en una representación del proceso como suma de procesos elementales markovianos, uno por cada fuente externa actuante, que sean no correlacionados) son inalcanzables cuando el espacio en que están definidos dichos procesos es tetradimensional (en general, esto será cierto para cualquier espacio d -dimensional con $d > 1$). O sea, resumiendo, la hipótesis de existencia de dichas propiedades inalcanzables comporta el ‘coste’ de un grado de ‘inexactitud’. Para ilustrar esto, como uno de los propósitos más importantes de esta memoria, que se centra en buena medida en la aplicación eficaz de medidas informacionales a un sistema físico, analizaremos los resultados correspondientes a las teorías descritas (en número reducido, ya que son sólo un ejemplo).

Previamente hagamos algunas consideraciones sobre el concepto de ‘exactitud’ que estamos utilizando. En un sentido estricto, la exactitud, en general,

no es un concepto inherente a la mayoría de las teorías que han sido desarrolladas en los diversos ámbitos del conocimiento humano. Haciendo un breve enfoque filosófico en el concepto de exactitud, y asumiendo el riesgo de incurrir en un cierto grado de heterodoxia, el autor de esta memoria expone, desde un punto de vista estrictamente personal, un breve análisis al respecto. Las teorías que podrían calificarse estrictamente como exactas son las que pertenecen a la denominada Ciencia Matemática, ya que su elaboración permanece en el plano de la mente humana, y constituyen, por tanto, un conjunto de conocimiento puramente conceptual. De hecho, la Ciencia Matemática recibió la denominación formal, hoy en desuso, de ‘Ciencia Exacta’. Podría decirse que se trata de un conjunto de teorías que gozan de una aceptación generalizada derivada del razonamiento puro. Otras expresiones, por ejemplo, algunas de carácter más emocional que racional, como las que describirían las teorías asociadas a ciertos movimientos artísticos a lo largo de la historia, quedarían posiblemente al margen de esa consideración, ya que podrían no ser susceptibles de una valoración desde la Teoría de la Información y su aplicación (concepto que constituye en última instancia la base de esta memoria), expresado esto último con todas las reservas por el autor de esta memoria, más bien desde la intuición que desde un conocimiento real al respecto.

Entre ambos extremos se encontraría la gran mayoría de teorías, que, con mayor o menor robustez, han permitido una modelización razonable de los eventos ‘naturales’ (física, química, ingeniería, biogenética, medicina,...) o ‘humanísticos’ (economía, sociología, política,...). En opinión del autor, todas estas teorías, con la posible excepción de la Mecánica Cuántica, son ‘inexactas’ en algún grado.

Las teorías de la Ciencia Matemática (incluidas la Lógica y, por supuesto, la Teoría de la Información) son exactas independientemente de la ‘inexactitud’ asociada al proceso de aplicación al desarrollo de otras teorías que utilizan la Ciencia Matemática como base. Afortunadamente, y ello ha constituido un cierto estímulo para su desarrollo, todas las teorías matemáticas, con la excepción quizá de alguna teoría especial, como la Teoría de Números, son aplicables en todas las áreas de conocimiento. Dejando al margen las que hemos convenido en denominar teorías ‘humanísticas’ (en las que el análisis matemático, el álgebra, los métodos probabilísticos y estadísticos,..., son de indudable fértil aplicación) centraremos las ideas en torno a las teorías sobre la Naturaleza, por la proximidad con el contexto seleccionado en el desarrollo de esta memoria como ejercicio de aplicación de la Teoría de la Información

a un sistema físico.

Por concretar, aludiremos a un ejemplo históricamente muy relevante por su elevado nivel estético en su formalización matemática: la teoría del Electromagnetismo de Maxwell de finales del XIX. Aunque esta teoría ya incorporaba el germen de la que unos años más tarde, a principios del XX, sería una teoría de fuerte impacto en el desarrollo de la física, la teoría de la Relatividad Especial, se trata de una teoría ‘inexacta’, ya que no incorpora el comportamiento ‘cuántico’ (en este caso, del campo electromagnético), que hoy sería exigible a cualquier teoría ‘exacta’. Por ello, en principio, cualquier teoría natural, exceptuando posiblemente, como ya se ha apuntado y siendo evidentemente debatible, la propia Física Cuántica, estaría condenada a ser calificada como teoría ‘inexacta’ si no incluye de forma aceptable dicho comportamiento.

El afán continuado de perfección de la actividad investigadora ha permitido la consecución de muy robustas teorías ‘cuánticas’ que incorporan ‘muy razonablemente’ las características cuánticas de la materia, como la Electrodinámica Cuántica (la ‘cuantización’ del campo electromagnético) o la Cromodinámica Cuántica (la ‘cuantización’ de la interacción entre quarks y gluones). Sin embargo, como se ha reiterado en diversos puntos de esta memoria, el espaciotiempo (marco de cualquier teoría física moderna) y la Física Cuántica no concilian bien. De hecho, no se dispone aún de una teoría exacta (ni siquiera razonablemente aproximada) de Gravitación Cuántica. Por ello, las mencionadas teorías cuánticas ‘exitosas’ han sido posibles como consecuencia de un complejo proceso de ‘cuantización’ en el que (siendo ésta una cuestión que excede el objetivo de esta memoria) surgen unas series divergentes de potencias de la constante natural característica del campo físico, o constante de ‘acoplamiento’, conocidas como divergencias ultravioleta. Estas divergencias resultan de la imposibilidad de evitar cantidades mal definidas cuando se elaboran cálculos basados en productos de operadores cuánticos en un punto del espaciotiempo. Los métodos de regularización y renormalización de operadores cuánticos permiten obtener aproximaciones ‘suficientes’ cuando se realiza un truncamiento de dichas series, eliminando los términos (ultravioleta) que generan la divergencia. En consecuencia, podemos afirmar que, incluso estas teorías consolidadas, que han alcanzado el éxito (muy valioso para la física teórica moderna) de la ‘cuantización’, lo son debido a una aproximación eficaz contrastada y consensuada.

Podemos concluir, pues, que desde un punto de vista estricto, las actuales teorías cuánticas de campos físicos son, en algún grado inevitable, ‘inexactas’.

tas'. Con mayor razón son 'inexactas' las diversas teorías de la 'naturaleza', ya que, en general, no incluyen los efectos relativistas, y menos aún los efectos cuánticos. Ni ello sería necesario, ya que, de cara a los objetivos perseguidos por esas teorías, no se precisa un innecesario afinamiento, y de hecho, prescindir del mismo facilita su desarrollo y aplicabilidad desde un punto de vista práctico. Las diferentes teorías del ámbito de la ingeniería, por ejemplo, avalarían esta afirmación. Incluso puede ocurrir y ocurre que una teoría 'aproximada' puede proporcionar mejores resultados que una teoría pretendidamente 'exacta', que incorporaría un elevadísimo grado de complejidad, si no una inaccesibilidad, a la luz de los actuales métodos observacionales. Tal sería el caso de la Termodinámica de Boltzmann, basada en métodos estadísticos, precursores de conceptos actuales como la 'entropía', frente a una hipotética teoría 'exacta' que incluyera los cálculos globales asociados a las posiciones, los momentos y la energía de un conjunto muy numeroso de partículas constituyentes de un fluido.

Consideraciones similares podrían hacerse en relación con el movimiento browniano propuesto por Einstein a principios del XX. Asimismo sería aplicable este enfoque al término gaussiano que, en esos momentos de desarrollo fértil de la física teórica, incorporó Langevin, para resumir el posible efecto complejo de agentes de diversa naturaleza sobre alguna magnitud descriptiva de un sistema físico, concepto utilizado a lo largo de esta memoria.

Las actuales teorías cuánticas de Gravitación, con una meta en un horizonte aún lejano, caminan por la senda de la aproximación inevitable. Una de las razones más importantes radica en la dependencia no lineal del tensor de Einstein respecto a la métrica del espaciotiempo. Entre otras muchas, la Teoría de Cuerdas, basada en la eliminación de las divergencias mediante la utilización de pequeñas 'cuerdas' (unos objetos no adimensionales que representarían a partículas residentes en el espaciotiempo), la Teoría de Bucles, la Teoría de Red de Yang-Mills o la Teoría de Twistores de Penrose [92, 62, 81], parecen hallarse lejos de una meta convincente, y alguna otra teoría, como la mencionada en la introducción de esta memoria, la teoría de la Gravedad Cuántica Estocástica, ha nacido y se desarrolla bajo la imposibilidad de llegar a ser una teoría 'exacta', dado que intenta modelizar el comportamiento probabilístico cuántico, a partir de un modelo gaussiano aplicable al comportamiento fluctuante del tensor de stress, con la dificultad matemática que ello implica en cuanto a su reflejo en la geometría espaciotemporal, planteamiento loable que, no obstante, plantearía dudas respecto al nivel de exactitud de una hipotética teoría final, si esta fuese alcanzable. Se trata de

un ejemplo claro de necesidad de aplicación de las medidas informacionales pertinentes que avalasen, o no, la validez de la teoría soportada por un grado de ‘exactitud’ bien evaluado.

Hasta donde el autor de esta memoria conoce, la Teoría de la Información, profusamente aplicada en Mecánica Cuántica con resultados muy relevantes, no ha sido aplicada en la evaluación, o al menos en un intento de la misma, del grado de ‘aproximación’ de teorías ‘inexactas’, como serían, según hemos comentado anteriormente, todas las teorías de la ‘naturaleza’ (siempre sujeto al pertinente debate).

Una conclusión de lo expresado anteriormente es que la teoría que hemos denominado ‘exacta’ en el capítulo anterior, con fines didácticos, realmente no lo sería. Sin embargo, justificaremos la denominación utilizada considerando los objetivos ilustrativos pretendidos en este apartado.

Se trata de establecer un escenario hipotético en que se dispone de una teoría que convenimos en calificar de ‘exacta’ frente a un conjunto de teorías ‘inexactas’ alternativas, cuya propuesta queda justificada a partir de alguna simplificación a la que se supone un cierto grado de utilidad. Así pues, nos situamos en un planteamiento simple con fines didácticos enfocados en un concepto a destacar: la evaluación del grado de ‘inexactitud’ de una determinada teoría frente a otra más ‘exacta’.

7.1. Aplicación de algunos criterios a la medición de la exactitud (o grado de aproximación) de una teoría: tensores de inexactitud

Una teoría T1 cualquiera, por ejemplo una teoría física relativista, se construye sobre la base de unas magnitudes fundamentales (tensoriales, vectoriales, escalares,...) características (p.e. tensor de stress de energía-momento, flujo del tetravector de densidad de corriente, tetravector de velocidad, parámetro de curvatura,...) en un marco base general (p.e. una región dada del espaciotiempo). Supongamos que esta teoría es ‘exacta’ (conviniendo ‘a priori’ que ello no es posible) y llamaremos genéricamente a estas magnitudes $\{H_{i,ex}\}_{i=1,\dots,n}$. Supongamos que, por razones ventajosas en algún sentido, construimos una teoría ‘aproximada’ T2, cuyas magnitudes fundamentales difieren, en un grado a determinar, de las magnitudes de T1. Llamaremos

$\{H_{i,ap}\}_{i=1,\dots,n}$ a las magnitudes asociadas a T2, de tal modo que, en general, $H_{i,ex} \neq H_{i,ap}$, $i = 1, \dots, n$.

Definimos el *tensor de inexactitud diferencial* $F_{i,dif}$ relativo a $H_{i,ap}$, como la magnitud tetradimensional tensorial que verifica

$$F_{i,dif} = H_{i,ap} - H_{i,ex}.$$

Análogamente, definimos el *tensor de inexactitud proporcional* $F_{i,pr}$ relativo a $H_{i,ap}$, como la magnitud tetradimensional tensorial que verifica

$$F_{i,pr} = H_{i,ap}H_{i,ex}^{-1}.$$

Los tensores $F_{i,dif}$ y $F_{i,pr}$ cumplen las relaciones inmediatas

$$\begin{aligned} F_{i,dif} &= -(I - F_{i,pr})H_{i,ex}, \\ F_{i,pr} &= I + F_{i,dif}H_{i,ex}^{-1}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

que implican a la magnitud ‘exacta’ $H_{i,ex}$. Y también las relaciones

$$\begin{aligned} F_{i,dif} &= (I - F_{i,pr})H_{i,ap}, \\ F_{i,pr} &= \{I - F_{i,dif}H_{i,ap}^{-1}\}^{-1}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

que implican a la magnitud ‘aproximada’ $H_{i,ap}$.

Ambos tensores de inexactitud constituyen dos medidas tensoriales de discrepancia $F_{i,dif}$ y $F_{i,pr}$ (una medida absoluta y otra relativa), dos criterios similares y complementarios de evaluación de la ‘discrepancia’. Evidentemente, en la obtención de unas evaluaciones útiles, la medida $F_{i,dif}$ compara con el tensor nulo y la medida $F_{i,pr}$ compara con el tensor unidad.

A partir de estas medidas tensoriales de inexactitud es posible proponer unas medidas escalares que resuman en un número real el grado de ‘inexactitud’ entre dos magnitudes (‘exacta’ y ‘aproximada’). Cabe elegir entre una variedad de candidatos (por ejemplo, valor absoluto del determinante, o de la media de los elementos de la diagonal principal,..., de los tensores de inexactitud $F_{i,dif}$ y $I - F_{i,pr}$) aplicables a tal medida, cada uno con unas propiedades que deben ser objeto de análisis, lo que dejamos como un tema abierto de investigación. En los casos prácticos expuestos en la Parte III se utilizará una medida escalar de esta clase. Así, llamamos *factor de inexactitud diferencial* $f_{i,dif}$ al valor real escalar positivo definido como

$$f_{i,dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \lambda_{j,dif}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{7.3}$$

siendo $\lambda_{j,dif}$ los 4 autovalores de $F_{i,ad}$. Análogamente, definimos el *factor de inexactitud proporcional* $f_{i,pr}$ como el valor real escalar positivo

$$f_{i,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (1 - \lambda_{j,pr})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.4)$$

siendo $\lambda_{j,pr}$ los 4 autovalores de $F_{i,pr}$.

En las secciones siguientes veremos la aplicación de estos conceptos a las teorías ‘aproximadas’ propuestas y desarrolladas en el capítulo anterior. Previamente construiremos el conjunto de las principales magnitudes tensoriales fundamentales de la, denominada en el capítulo anterior, teoría ‘exacta’ de agregación de procesos estocásticos inducidos por fuentes externas que pueden presentar un grado de correlación. Dichas magnitudes son:

- El núcleo de covarianza incondicional N_{ex} en un punto (en formato normal),
- El núcleo de covarianza incondicional N_{ex}^* en un punto (en formato mínimo),
- El núcleo de covarianza condicional V_{ex} en un punto x dada la información en otro punto x_a causalmente conectado en la misma geodésica de x (en formato normal),
- El núcleo de covarianza condicional V_{ex}^* en un punto x dada la información en otro punto x_a causalmente conectado en la misma geodésica de x (en formato mínimo),
- El tensor de propagación A_{ex} entre dos puntos,
- El tensor de propagación simétrica $A_{ex}^{(S)}$ entre dos puntos (Apéndice J),
- El tensor de covarianza cruzada media $X_{i,j,ex}$ en un punto (entre los procesos ξ_i y ξ_j ,
- El tensor de distancia U_{ex} entre dos puntos (en formato normal),
- El tensor de distancia U_{ex}^* entre dos puntos (en formato mínimo),
- El tensor de carga de covarianza Π_{ex} entre dos puntos (en formato normal),
- El tensor de carga de covarianza Π_{ex}^* entre dos puntos (en formato mínimo).

Recordamos que el subíndice ‘ex’ hace referencia a que se trata de magnitudes fundamentales de la teoría ‘exacta.’ El resto de magnitudes tensoriales

fundamentales no se han incluido en el anterior conjunto, bien por no ser objeto de discriminación en la comparación entre la teoría ‘exacta’ y la teoría ‘aproximada’, o bien porque son magnitudes que pueden obtenerse a partir de las magnitudes incluidas en dicho conjunto. De hecho, podría haberse prescindido de incluir explícitamente el tensor $X_{i,j,ex}$, que no es objeto de modificación en los ejemplos seleccionados sobre teorías alternativas, o sea, $X_{i,j,ap} = X_{i,j,ex}$, aunque se ha preferido su incorporación para hacer una referencia a la consideración, no de una, sino de una multiplicidad de fuentes externas correlacionadas. No obstante, con el fin de no extender excesivamente el análisis sin mayor aporte conceptual, tanto en el análisis desarrollado en las secciones siguientes como en la Parte III, dedicada a los casos prácticos, se considerará un conjunto de dos fuentes que inducen sendos procesos estocásticos correlacionados.

7.2. Aplicación de los conceptos propuestos a la validación de la exactitud de la teoría 1 aproximada: descomposición en suma maximalmente equivalente de procesos con correlación cruzada nula

La base de esta teoría ‘aproximada’ consiste en la sustitución de los procesos (5.3) y (5.4) por los procesos $\xi_{1,ap}$ y $\xi_{2,ap}$ tales que

$$\xi_{1,ap}(x) = A_1\xi_{1,ap}(x_a) + \varepsilon_{1,ap}(x), \quad (7.5)$$

$$\xi_{2,ap}(x) = A_2\xi_{2,ap}(x_a) + \varepsilon_{2,ap}(x), \quad (7.6)$$

siendo la correlación cruzada entre los dos procesos el tensor simétrico $X_{1,2}$, definido como $X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$, donde C_{12} y C_{21} son, como sabemos, los tensores de covarianza, en general no simétricos, entre los procesos (5.3) y (5.4). Por tanto, estamos haciendo la hipótesis de que $C_{12,ap} = C_{21,ap} = X_{1,2}$.

Equivalentemente, podemos decir que la teoría supone la sustitución de los procesos (5.5) y (5.6) por los procesos ‘aproximados’

$$\xi_{1,ap}^*(x) = A_1\xi_{1,ap}^*(x_a) + \varepsilon_{1,ap}^*(x), \quad (7.7)$$

$$\xi_{2,ap}^*(x) = A_2\xi_{2,ap}^*(x_a) + \varepsilon_{2,ap}^*(x), \quad (7.8)$$

siendo el tensor nulo el tensor de covarianza cruzada entre estos dos procesos, lo que equivale a afirmar que los tensores antisimétricos mutuamente transpuestos $Z_{12,ap}$ y $Z_{21,ap}$ verifican $Z_{12,ap} = Z_{21,ap} = 0$.

Podemos decir, por tanto, que esta teoría centra su criterio de ‘aproximación’ en la agregación de los dos procesos. En consecuencia, considerados individualmente, los procesos (7.5) y (7.6) son equivalentes en autocovarianza a los procesos (5.3) y (5.4), respectivamente. Asimismo, considerados individualmente, los procesos (7.7) y (7.8) son equivalentes en autocovarianza a los procesos (5.5) y (5.6), respectivamente. La ‘aproximación’ simplificadora, supuestamente ventajosa para la teoría, radica en que los procesos (7.5) y (7.6) exhiben una covarianza cruzada simétrica y los procesos (7.7) y (7.8) son no correlacionados.

Iniciamos el análisis en representación normal de los procesos inducidos. Para el proceso agregado, pues, se obtienen los valores ‘exacto’ y ‘aproximado’ del tensor condicional

$$V_{ex} = N - A_1 N_1 A'_1 - A_2 N_2 A'_2 - A_1 C_{12} A'_2 - A_2 C_{21} A'_1,$$

$$V_{ap} = N - A_1 N_1 A'_1 - A_2 N_2 A'_2 - A_1 X_{1,2} A'_2 - A_2 X_{1,2} A'_1.$$

El tensor de ‘inexactitud’ $F_{dif}^{(V)}$ aplicable al tensor condicional proporciona

$$F_{dif}^{(V)} = V_{ap} - V_{ex} = 2W_{1,2}^*, \quad (7.9)$$

donde $W_{1,2}^*$ viene dado por la expresión $W_{1,2}^* = \frac{1}{2} (A_1 Z_{12} A'_2 + A_2 Z_{21} A'_1)$, como conocemos.

El tensor de ‘inexactitud’ $F_{pr}^{(V)}$ aplicable al tensor condicional proporciona, de acuerdo con la propiedad (7.2),

$$F_{pr}^{(V)} = V_{ap} V_{ex}^{-1} = V_{ap} \{V_{ap} - 2W_{1,2}^*\}^{-1}.$$

Por tanto,

$$F_{pr}^{(V)} = \{I - 2W_{1,2}^* V_{ap}^{-1}\}^{-1}. \quad (7.10)$$

Utilizando la propiedad (7.1), encontramos

$$F_{pr}^{(V)} = V_{ap} V_{ex}^{-1} = \{V_{ex} + 2W_{1,2}^*\} V_{ex}^{-1}.$$

Así, obtendríamos

$$F_{pr}^{(V)} = I + 2W_{1,2}^* V_{ex}^{-1},$$

equivalente a (7.10).

Los tensores de ‘inexactitud’ $F_{dif}^{(V)}$ y $F_{pr}^{(V)}$ comparan con los tensores 0 e I , respectivamente.

Siguiendo con el proceso agregado, se obtienen los valores ‘exacto’ y ‘aproximado’ del tensor de propagación:

$$A_{ex} = \{A_1 (N_1 + C_{12}) + A_2 (N_2 + C_{21})\} N^{-1},$$

$$A_{ap} = \{A_1 (N_1 + X_{1,2}) + A_2 (N_2 + X_{1,2})\} N^{-1}.$$

En este caso, los tensores de inexactitud (diferencial y proporcional) proporcionan $F_{dif}^{(A)} = A_{ap} - A_{ex}$ y $F_{pr}^{(A)} = A_{ap} A_{ex}^{-1}$, con lo que

$$F_{dif}^{(A)} = - \{A_1 Z_{12} + A_2 Z_{21}\} N^{-1},$$

$$F_{pr}^{(A)} = \{A_1 (N_1 + X_{1,2}) + A_2 (N_2 + X_{1,2})\} \{A_1 (N_1 + C_{12}) + A_2 (N_2 + C_{21})\}^{-1}.$$

Por tanto,

$$F_{pr}^{(A)} = \{A_{ex} + F_{dif}^{(A)}\} A_{ex}^{-1} = I + F_{dif}^{(A)} A_{ex}^{-1}.$$

En definitiva,

$$F_{pr}^{(A)} = I - \{A_1 Z_{12} + A_2 Z_{21}\} \{A_1 (N_1 + C_{12}) + A_2 (N_2 + C_{21})\}^{-1}.$$

En cuanto a los tensores de distancia y carga de correlación, obtenemos los siguientes resultados:

$$U_{ex} = V_{ex} N^{-1},$$

$$U_{ap} = V_{ap} N^{-1}.$$

En consecuencia,

$$F_{dif}^{(U)} = (V_{ap} - V_{ex}) N^{-1} = F_{dif}^{(V)} N^{-1} = 2W_{1,2}^* N^{-1},$$

$$F_{pr}^{(U)} = U_{ap} U_{ex}^{-1} = V_{ap} V_{ex}^{-1} = F_{pr}^{(V)}.$$

Por otra parte,

$$\Pi_{ex} = I - U_{ex},$$

$$\Pi_{ap} = I - U_{ap},$$

luego, para los tensores de ‘inexactitud’ correspondientes, obtenemos

$$F_{dif}^{(\Pi)} = \Pi_{ap} - \Pi_{ex} = U_{ex} - U_{ap} = -F_{dif}^{(U)} = -2W_{1,2}^* N^{-1},$$

$$F_{pr}^{(\Pi)} = \Pi_{ap} \Pi_{ex}^{-1} = (I - U_{ap}) (I - U_{ex})^{-1} = (I - V_{ap} N^{-1}) (I - V_{ex} N^{-1})^{-1}.$$

Equivalentemente,

$$F_{pr}^{(\Pi)} = \{A_1 N_1 A'_1 + A_2 N_2 A'_2 + 2(W_{1,2} - W_{1,2}^*)\} \{A_1 N_1 A'_1 + A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\}^{-1}.$$

En definitiva,

$$F_{pr}^{(\Pi)} = I - 2W_{1,2}^* \{A_1 N_1 A'_1 + A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\}^{-1}. \quad (7.11)$$

Utilizando un formato mínimo, los resultados obtenidos para el tensor de covarianza condicional son

$$\begin{aligned} V_{ex}^* &= N - A_1 N_1^* A'_1 - A_2 N_2^* A'_2 - 2W_{1,2}^*, \\ V_{ap}^* &= N - A_1 N_1^* A'_1 - A_2 N_2^* A'_2. \end{aligned}$$

El tensor de ‘inexactitud’ $F_{dif}^{(V^*)}$, aplicable al tensor condicional en formato mínimo, proporciona

$$F_{dif}^{(V^*)} = V_{ap}^* - V_{ex}^* = 2W_{1,2}^*,$$

coincidente con (7.9).

En cuanto al tensor de ‘inexactitud’ $F_{pr}^{(V^*)}$, aplicable al tensor condicional (mínimo), el resultado es

$$F_{pr}^{(V^*)} = I + 2W_{1,2}^* V_{ex}^{*-1}.$$

Los valores ‘exacto’ y ‘aproximado’ del tensor de propagación del proceso agregado en formato mínimo son coincidentes con los obtenidos en un formato normal, ya que los tensores de propagación individuales no cambian.

En relación con los tensores de distancia y carga de correlación, obtenemos

$$\begin{aligned} U_{ex}^* &= V_{ex}^* N^{-1}, \\ U_{ap}^* &= V_{ap}^* N^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} F_{dif}^{(U^*)} &= 2W_{1,2}^* N^{-1}, \\ F_{pr}^{(U^*)} &= U_{ap}^* U_{ex}^{*-1} = V_{ap}^* V_{ex}^{*-1} = F_{pr}^{(V^*)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, dada la relación entre los tensores de distancia y de carga de correlación,

$$\Pi_{ex}^* = I - U_{ex}^*,$$

$$\Pi_{ap}^* = I - U_{ap}^*.$$

Luego, para los tensores de ‘inexactitud’ correspondientes, obtenemos

$$F_{dif}^{(\Pi^*)} = -2W_{1,2}^* N^{-1},$$

$$F_{pr}^{(\Pi^*)} = \Pi_{ap}^* \Pi_{ex}^{*-1} = (I - U_{ap}^*) (I - U_{ex}^*)^{-1} = (I - V_{ap}^* N^{-1}) (I - V_{ex}^* N^{-1})^{-1}.$$

Equivalentemente,

$$F_{pr}^{(\Pi^*)} = \{A_1 N_1^* A'_1 + A_2 N_2^* A'_2\} \{A_1 N_1^* A'_1 + A_2 N_2^* A'_2 + 2W_{1,2}^*\}^{-1}.$$

En definitiva,

$$F_{pr}^{(\Pi^*)} = I - 2W_{1,2}^* \{A_1 N_1^* A'_1 + A_2 N_2^* A'_2 + 2W_{1,2}^*\}^{-1}. \quad (7.12)$$

Observamos que los tensores de inexactitud ‘diferenciales’ no presentan ‘discrepancias’ entre los escenarios normal y mínimo.

Recordemos que en todos los casos los tensores de inexactitud ‘diferencial’ y ‘proporcional’ comparan con los tensores nulo y unidad, respectivamente. Asimismo, recordemos que para obtener una medida escalar de la inexactitud aplicaremos un criterio como el propuesto en (7.3) y (7.4), utilizando los autovalores de los tensores de ‘inexactitud’.

7.3. Aplicación de los conceptos propuestos a la validación de la exactitud de la teoría 2 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación marginal

Tanto en esta teoría como en la que se desarrolla en la sección siguiente, el planteamiento es opuesto al realizado en la sección anterior en relación con la teoría aproximada 1. Podríamos decir que las teorías aproximadas 2 y 3 mantienen inmodificado el proceso agregado conjunto (seguimos considerando por simplicidad sólo dos fuentes, aunque la generalización no ofrece

dificultad). Sin embargo, se consideran procesos individuales que son ‘aproximados’ (no conservando la equivalencia en autocovarianza) a los procesos individuales considerados en la teoría ‘exacta’ de referencia. Este paso de aproximación queda descrito en las Subsección 5.2.2, por lo que realizamos seguidamente el análisis pertinente de la ‘inexactitud’ inherente a esta teoría, de acuerdo con la metodología propuesta.

Comenzamos considerando un formato normal de los procesos. Con respecto al tensor incondicional N haríamos la siguiente asignación a los procesos primero y segundo, respectivamente:

$$\begin{aligned} N_{1,ap}^m &= N_1 = N_{1,ex}^m, \\ N_{2,ap}^m &= N_2 + 2X_{1,2} = N_{2,ex}^m. \end{aligned}$$

De acuerdo con este ‘troceado’ del núcleo incondicional de covarianza,

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(N)} &= N_{1,ap}^m - N_{1,ex}^m = 0, \\ F_{2,dif}^{(N)} &= N_{2,ap}^m - N_{2,ex}^m = 0, \\ F_{1,pr}^{(N)} &= N_{1,ap}^m N_{1,ex}^{m-1} = I, \\ F_{2,pr}^{(N)} &= N_{2,ap}^m N_{2,ex}^{m-1} = I. \end{aligned}$$

Estos resultados son triviales, acorde con el planteamiento general de la teoría.

Para el proceso agregado el tensor condicional responde a la expresión conocida (que, por razones didácticas, reproducimos en este punto)

$$V = N - A_1 N_1 A_1' - A_2 N_2 A_2' - A_1 C_{12} A_2' - A_2 C_{21} A_1',$$

mientras que para los procesos individuales los tensores condicionales serían

$$\begin{aligned} V_{1,ap}^m &= V_{1,ex}^m = V_{1,ap} = N_1 - A_1 N_1 A_1', \\ V_{2,ap}^m &= V_{2,ex}^m = N_2 - A_2 N_2 A_2' + 2(X_{1,2} - W_{1,2}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Notemos que, en este caso, el primer proceso inducido mantiene la equivalencia en autocovarianza con el primer proceso considerado en la teoría ‘exacta’ (no así, evidentemente, el segundo proceso).

En consecuencia, los tensores de ‘inexactitud’ deben proporcionar, evidentemente, los resultados

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(V)} &= V_{1,ap}^m - V_{1,ex}^m = 0, \\ F_{2,dif}^{(V)} &= V_{2,ap}^m - V_{2,ex}^m = 0, \\ F_{1,pr}^{(V)} &= V_{1,ap}^m V_{1,ex}^{m-1} = I, \\ F_{2,pr}^{(V)} &= V_{2,ap}^m V_{2,ex}^{m-1} = I. \end{aligned}$$

En cuanto al tensor de propagación del primer proceso, obtenemos

$$A_{1,ap}^m = A_{1,ex} = A_1.$$

Sin embargo, encontramos una dificultad para calcular $A_{2,ap}^m$, ya que a partir de los tensores incondicional $N_{2,ap}^m$ y condicional $V_{2,ap}^m$, dado por (7.13), no podemos determinar el tensor de propagación del proceso segundo ‘aproximado’ ¿Cómo encontrar el propagador $A_{2,ap}^m$ del segundo proceso?. De acuerdo con el Apéndice J podemos elegir un representante del conjunto de propagadores admisibles. La elección razonable recae sobre el tensor especial $A_{2,ap}^{(S)}$ de propagación simétrica del proceso segundo ‘aproximado’, de tal modo que

$$V_{2,ap}^m = \left(I - A_{2,ap}^{(S)2} \right) N_{2,ap}^m = \left(I - A_{2,ap}^{(S)2} \right) (N_2 + 2X_{1,2}),$$

de donde es fácil obtener

$$A_{2,ap}^{(S)2} = \{A_2 N_2 A_2' + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1},$$

con lo que

$$A_{2,ap}^{(S)} = \left\{ \{A_2 N_2 A_2' + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.14)$$

Por razones de coherencia asociada a la medida de aproximación a realizar mediante los tensores de inexactitud, el propagador $A_{2,ap}^{(S)}$ no debe ser comparado con el propagador A_2 del proceso ‘exacto’ ξ_2 , sino con el correspondiente tensor de propagación simétrica $A_{2,ex}^{(S)}$ de dicho proceso, tal que

$$\left(I - A_{2,ex}^{(S)2} \right) N_2 = N_2 - A_2 N_2 A_2',$$

de donde

$$A_{2,ex}^{(S)} = \left\{ A_2 N_2 A_2' N_2^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.15)$$

Por tanto,

$$F_{2,dif}^{(A^{(S)})} = \left\{ \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \{A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{2,pr}^{(A^{(S)})} = \left\{ \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \{A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}.$$

En cuanto a los tensores de distancia y carga de correlación, es preciso definir $U_{2,ap}^{(S)}$ y $\Pi_{2,ap}^{(S)}$ como $U_{2,ap}^{(S)} = I - A_{2,ap}^{(S)2}$ y $\Pi_{2,ap}^{(S)} = A_{2,ap}^{(S)2}$, con lo que resulta

$$U_{2,ap}^{(S)} = I - \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1}. \quad (7.16)$$

Y dado que

$$U_{2,ex}^{(S)} = I - A_{2,ex}^{(S)2} = I - A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}, \quad (7.17)$$

obtenemos

$$F_{2,dif}^{(U^{(S)})} = A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1} - \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1},$$

$$F_{2,pr}^{(U^{(S)})} = \{I - \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1}\} \{I - A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}\}^{-1}.$$

Por otra parte, evidentemente,

$$F_{2,dif}^{(\Pi^{(S)})} = -F_{2,dif}^{(U^{(S)})} = \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{N_2 + 2X_{1,2}\}^{-1} - A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1},$$

$$F_{2,pr}^{(\Pi^{(S)})} = \{A_2 N_2 A'_2 + 2W_{1,2}\} \{A_2 N_2 A'_2 (I + 2N_2^{-1} X_{1,2})\}^{-1}.$$

En un escenario de representación mínima de procesos, los resultados obtenidos se exponen a continuación.

Con respecto al tensor incondicional N haríamos en este escenario la siguiente asignación a los procesos primero y segundo, respectivamente:

$$N_{1,ap}^{*m} = N_1 + X_{1,2} = N_{1,ex}^{*m},$$

$$N_{2,ap}^{*m} = N_2 + X_{1,2} = N_{2,ex}^{*m}.$$

De acuerdo con este ‘troceado’ del núcleo incondicional de covarianza, obtenemos

$$F_{1,dif}^{(N^*)} = N_{1,ap}^{*m} - N_{1,ex}^{*m} = 0,$$

$$F_{2,dif}^{(N^*)} = N_{2,ap}^{*m} - N_{2,ex}^{*m} = 0,$$

$$F_{1,pr}^{(N^*)} = N_{1,ap}^{*m} N_{1,ex}^{*m-1} = I,$$

$$F_{2,pr}^{(N^*)} = N_{2,ap}^{*m} N_{2,ex}^{*m-1} = I.$$

Nuevamente, en este escenario, de acuerdo con el planteamiento general de esta teoría, no se produce inexactitud en el ‘troceado’ del tensor de covarianza incondicional, sino un reparto convencional de dicho tensor. No obstante, para evitar errores conceptuales, dado que el análisis de las teorías ‘aproximadas’ se extiende sólo a un conjunto de dos procesos agregados, haremos notar que seguimos manteniendo un criterio de agregación marginal ajustado al concepto de representación mínima.

En caso de agregar un tercer proceso inducido, el tensor incondicional $N_{1,ap}^{*(3)m}$ permanece con el valor tensorial asignado $N_{1,ap}^{*(3)m} = N_{1,ap}^{*m} = N_1 + X_{1,2}$, mientras que el tensor incondicional $N_{2,ap}^{*(3)m}$ se vería modificado, de forma que $N_{2,ap}^{*(3)m} = N_2 + X_{1,2} + X_{1,3} = N_{2,ap}^{*(2)m} + X_{2,3}$, con lo que $N_{3,ap}^{*(3)m} = N_3 + 2X_{1,3} + X_{2,3}$ (por tanto, sólo en el proceso anterior recae la mitad de la correlación media cruzada entre dicho proceso y el último proceso agregado). En un caso general (siendo $k > 3$) en que se produjera la agregación marginal de k procesos en formato mínimo, podemos afirmar, según el criterio establecido, que los primeros $k - 2$ procesos mantienen el núcleo de covarianza incondicional asignado, mientras que para los procesos $(k - 1)$ -ésimo y k -ésimo se verificaría

$$N_{k-1,ap}^{*(k)m} = N_{k-1} + 2 \sum_{j=1}^{k-3} X_{j,k-1} + X_{k-2,k-1} + X_{k-1,k},$$

$$N_{k,ap}^{*(k)m} = N_k + 2 \sum_{j=1}^{k-2} X_{j,k} + X_{k-1,k},$$

a diferencia de la asignación del núcleo de covarianza en formato normal, que en el caso de k procesos agregados dejaría inalterado el ‘trozo’ asignado a cada proceso previo, excepto para el último proceso, que verificaría

$$N_{k,ap}^{(k)m} = N_k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} X_{j,k}.$$

Para el proceso agregado de dos procesos inducidos el tensor condicional responde a la expresión conocida

$$V^* = N - A_1 N_{1,ap}^{*m} A_1' - A_2 N_{2,ap}^{*m} A_2' - A_1 Z_{12} A_2' - A_2 Z_{21} A_1',$$

mientras que para los procesos individuales los tensores condicionales serían

$$V_{1,ap}^{*m} = V_{1,ap} = N_{1,ap}^{*m} - A_1 N_{1,ap}^{*m} A_1',$$

$$V_{2,ap}^{*m} = N_{2,ap}^{*m} - A_2 N_{2,ap}^{*m} A_2' - 2W_{1,2}^*.$$

Notemos que también en este caso el primer proceso inducido mantiene la equivalencia en autocovarianza con el primer proceso considerado (en formato mínimo) en la teoría ‘exacta’, no siendo así, evidentemente, para el segundo proceso.

En consecuencia, también en este escenario, por las mismas razones expuestas para un formato normal, los tensores de inexactitud proporcionan

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(V^*)} &= V_{1,ap}^{*m} - V_{1,ex}^{*m} = 0, \\ F_{2,dif}^{(V^*)} &= V_{2,ap}^{*m} - V_{2,ex}^{*m} = 0, \\ F_{1,pr}^{(V^*)} &= V_{1,ap}^{*m} V_{1,ex}^{*m-1} = I, \\ F_{2,pr}^{(V^*)} &= V_{2,ap}^{*m} V_{2,ex}^{*m-1} = I. \end{aligned}$$

En cuanto al tensor de propagación del primer proceso, obtenemos

$$A_{1,ap}^{*m} = A_{1,ex} = A_1.$$

De acuerdo nuevamente con el Apéndice J, elegimos un representante del conjunto de propagadores admisibles para el segundo proceso inducido en formato mínimo. La elección recae en este caso sobre el tensor singular $A_{2,ap}^{*(S)}$ de propagación simétrica del proceso segundo ‘aproximado’ mínimo, de tal modo que

$$V_{2,ap}^{*m} = \left(I - A_{2,ap}^{*(S)2} \right) N_{2,ap}^{*m},$$

de donde obtenemos fácilmente

$$A_{2,ap}^{*(S)2} = \{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A_2' + 2W_{1,2}^* \} N_{2,ap}^{*m-1},$$

con lo que

$$A_{2,ap}^{*(S)} = \left\{ \{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A_2' + 2W_{1,2}^* \} N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.18)$$

Por razones indicadas anteriormente el propagador $A_{2,ap}^{*(S)}$ no debe compararse con el propagador A_2 del proceso ‘exacto’ mínimo ξ_2^* , sino con el correspondiente tensor de propagación simétrica $A_{2,ex}^{*(S)}$ de dicho proceso, dado por

$$A_{2,ex}^{*(S)} = \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A_2' N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.19)$$

Por tanto,

$$F_{2,dif}^{*(A^{(S)})} = \left\{ \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 + 2W_{1,2}^* \right\} N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{2,pr}^{*(A^{(S)})} = \left\{ \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 + 2W_{1,2}^* \right\} N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Definimos los tensores de distancia y carga de correlación $U_{2,ap}^{*(S)}$ y $\Pi_{2,ap}^{*(S)}$ como $U_{2,ap}^{*(S)} = I - A_{2,ap}^{*(S)2}$ y $\Pi_{2,ap}^{*(S)} = A_{2,ap}^{*(S)2}$, resultando

$$U_{2,ap}^{*(S)} = I - \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 + 2W_{1,2}^* \right\} N_{2,ap}^{*m-1}. \quad (7.20)$$

Dado que

$$U_{2,ex}^{*(S)} = I - A_{2,ex}^{*(S)2} = I - A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 N_{2,ap}^{*m-1}, \quad (7.21)$$

obtenemos

$$F_{2,dif}^{*(U^{(S)})} = -2W_{1,2}^* N_{2,ap}^{*m-1},$$

$$F_{2,pr}^{*(U^{(S)})} = I - 2W_{1,2}^* N_{2,ap}^{*m-1} \left\{ I - A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 N_{2,ap}^{*m-1} \right\}^{-1}.$$

Por otra parte,

$$F_{2,dif}^{*(\Pi^{(S)})} = -F_{2,dif}^{*(U^{(S)})} = 2W_{1,2}^* N_{2,ap}^{*m-1},$$

$$F_{2,pr}^{*(\Pi^{(S)})} = I - 2W_{1,2}^* \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*m} A'_2 \right\}^{-1}.$$

Reiteramos la evidencia de que el tensor de inexactitud ‘diferencial’ compara con el tensor nulo y el tensor de inexactitud ‘proporcional’ compara con el tensor unidad.

Aunque esta teoría, como resulta obvio, presenta las ventajas: a) los procesos agregados son no correlacionados y b) la asignación realizada con la agregación de cada proceso nuevo incorporado sólo afecta a dicho proceso, también presenta una desventaja importante por cuanto hace recaer toda la covarianza conjunta adicional en el último proceso, con lo que se genera una inevitable inexactitud creciente progresiva, lo que queda expuesto en los casos prácticos incluidos en la Parte III.

En cualquier caso, en el escenario marginal con formato mínimo este efecto se atenúa en cierta medida, ya que distribuye de forma óptima, aunque condicionada a este contexto, la correlación cruzada entre procesos.

7.4. Aplicación de los conceptos propuestos a la validación de la exactitud de la teoría 3 aproximada: descomposición del proceso agregado en suma de procesos no correlacionados con asignación contributiva

El criterio de aproximación utilizado en esta teoría ha quedado expuesto en la Subsección 5.2.3, por lo que procedemos al análisis de la inexactitud correspondiente. Haremos un breve inciso para recordar que esta teoría presenta la ‘ventaja’ respecto a la teoría ‘exacta’ consistente en suponer que los procesos individuales asignados son no correlacionados, aunque la estructura de cada proceso es dependiente (a diferencia del planteamiento de la teoría 2 ‘aproximada’) del número de procesos integrantes. Respecto a la teoría ‘aproximada’ marginal, la teoría 3 ‘aproximada’, basada en una asignación contributiva, presenta, como veremos, un criterio de ‘troceado’ de los tensores de covarianza más adecuado. De hecho, es un criterio óptimo de distribución de la covarianza cruzada cuando se hace la hipótesis de que los procesos asignados son no correlacionados.

Como es habitual, comenzamos el análisis en un escenario de formato normal de los procesos inducidos. Respecto al tensor incondicional N hacemos la siguiente asignación (en este caso la indicación de un número de proceso es convencional e irrelevante):

$$\begin{aligned} N_{1,ap}^c &= N_1 + X_{1,2} = N_{1,ex}^c, \\ N_{2,ap}^c &= N_2 + X_{1,2} = N_{2,ex}^c. \end{aligned}$$

Este ‘troceado’ del núcleo de covarianza no comporta, como sabemos, inexactitud, lo que evaluamos mediante las expresiones

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(N)} &= N_{1,ap}^c - N_{1,ex}^c = 0, \\ F_{2,dif}^{(N)} &= N_{2,ap}^c - N_{2,ex}^c = 0, \\ F_{1,pr}^{(N)} &= N_{1,ap}^c N_{1,ex}^{c-1} = I, \\ F_{2,pr}^{(N)} &= N_{2,ap}^c N_{2,ex}^{c-1} = I. \end{aligned}$$

El ‘troceado’ del tensor de covarianza condicional es

$$V_{1,ap}^c = N_1 - A_1 N_1 A_1' + X_{1,2} - W_{1,2} = V_{1,ex}^c,$$

$$V_{2,ap}^c = N_2 - A_2 N_2 A_2' + X_{1,2} - W_{1,2} = V_{2,ex}^c,$$

con lo que, una vez más, obtenemos

$$F_{1,dif}^{(V)} = V_{1,ap}^c - V_{1,ex}^c = 0,$$

$$F_{2,dif}^{(V)} = V_{2,ap}^c - V_{2,ex}^c = 0,$$

$$F_{1,pr}^{(V)} = V_{1,ap}^c V_{1,ex}^{c-1} = I,$$

$$F_{2,pr}^{(V)} = V_{2,ap}^c V_{2,ex}^{c-1} = I.$$

Esta teoría requiere la utilización de los tensores $A_{1,ap}^{(S)c}$ y $A_{2,ap}^{(S)c}$ de propagación simétrica de covarianza para ambos procesos. Como sabemos, dichos tensores verifican

$$V_{1,ap}^c = \left(1 - A_{1,ap}^{(S)c^2}\right) N_{1,ap}^c,$$

$$V_{2,ap}^c = \left(1 - A_{2,ap}^{(S)c^2}\right) N_{2,ap}^c.$$

De estas expresiones obtenemos

$$A_{1,ap}^{(S)c^2} = \{A_1 N_1 A_1' + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1},$$

$$A_{2,ap}^{(S)c^2} = \{A_2 N_2 A_2' + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1}.$$

Y, por tanto,

$$A_{1,ap}^{(S)c} = \left\{ \{A_1 N_1 A_1' + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.22)$$

$$A_{2,ap}^{(S)c} = \left\{ \{A_2 N_2 A_2' + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.23)$$

Por otra parte, los tensores de propagación simétrica ‘exactos’ son, como ya conocemos,

$$A_{1,ex}^{(S)} = \{A_1 N_1 A_1' N_1^{-1}\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.24)$$

$$A_{2,ex}^{(S)} = \{A_2 N_2 A_2' N_2^{-1}\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.25)$$

En consecuencia,

$$F_{1,dif}^{(A_1^{(S)})} = \left\{ \{A_1 N_1 A'_1 + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \{A_1 N_1 A'_1 N_1^{-1}\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{2,dif}^{(A_2^{(S)})} = \left\{ \{A_2 N_2 A'_2 + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \{A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{1,pr}^{(A_1^{(S)})} = \left\{ \{A_1 N_1 A'_1 + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \{A_1 N_1 A'_1 N_1^{-1}\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$F_{2,pr}^{(A_2^{(S)})} = \left\{ \{A_2 N_2 A'_2 + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \{A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}\}^{-\frac{1}{2}}.$$

En cuanto a los tensores de distancia y de carga de correlación de los procesos asignados ‘aproximados’,

$$U_{1,ap}^c = I - \{A_1 N_1 A'_1 + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1}, \quad (7.26)$$

$$U_{2,ap}^c = I - \{A_2 N_2 A'_2 + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1}, \quad (7.27)$$

$$\Pi_{1,ap}^c = \{A_1 N_1 A'_1 + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1},$$

$$\Pi_{2,ap}^c = \{A_2 N_2 A'_2 + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1}.$$

Tomamos como referencia los correspondientes tensores de distancia y carga de correlación de los procesos inducidos ‘exactos’, dados por

$$U_{1,ex} = I - A_1 N_1 A'_1 N_1^{-1}, \quad (7.28)$$

$$U_{2,ex} = I - A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}, \quad (7.29)$$

$$\Pi_{1,ex} = A_1 N_1 A'_1 N_1^{-1},$$

$$\Pi_{2,ex} = A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}.$$

Por tanto, los tensores de ‘inexactitud’ del tensor de distancia son

$$F_{1,dif}^{(U_1^c)} = A_1 N_1 A'_1 N_1^{-1} - \{A_1 N_1 A'_1 + W_{1,2}\} \{N_1 + X_{1,2}\}^{-1},$$

$$F_{2,dif}^{(U_2^c)} = A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1} - \{A_2 N_2 A'_2 + W_{1,2}\} \{N_2 + X_{1,2}\}^{-1},$$

$$F_{1,pr}^{(U_1^c)} = I + F_{1,dif}^{(U_1^c)} \{I - A_1 N_1 A'_1 N_1^{-1}\}^{-1},$$

$$F_{2,pr}^{(U_2^c)} = I + F_{2,dif}^{(U_2^c)} \{I - A_2 N_2 A'_2 N_2^{-1}\}^{-1}.$$

Y respecto a los tensores de ‘inexactitud’ relativos al tensor de carga de correlación,

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(\Pi_1^c)} &= -F_{1,dif}^{(U_1^c)}, \\ F_{2,dif}^{(\Pi_2^c)} &= -F_{2,dif}^{(U_2^c)}, \\ F_{1,pr}^{(\Pi_1^c)} &= I - F_{1,dif}^{(U_1^c)} \{A_1 N_1 A_1' N_1^{-1}\}^{-1}, \\ F_{2,pr}^{(\Pi_2^c)} &= I - F_{2,dif}^{(U_2^c)} \{A_2 N_2 A_2' N_2^{-1}\}^{-1}. \end{aligned}$$

Trasladamos ahora el análisis a un escenario de formato mínimo de los procesos inducidos. Empezamos con el ‘troceado’ del tensor incondicional N llevando a cabo la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} N_{1,ap}^{*c} &= N_1 + X_{1,2} = N_{1,ex}^{*c}, \\ N_{2,ap}^{*c} &= N_2 + X_{1,2} = N_{2,ex}^{*c}, \end{aligned}$$

coincidente con el realizado en formato normal y que no comporta ‘inexactitud’, evaluado igualmente mediante los tensores

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(N^*)} &= N_{1,ap}^{*c} - N_{1,ex}^{*c} = 0, \\ F_{2,dif}^{(N^*)} &= N_{2,ap}^{*c} - N_{2,ex}^{*c} = 0, \\ F_{1,pr}^{(N^*)} &= N_{1,ap}^{*c} N_{1,ex}^{*c-1} = I, \\ F_{2,pr}^{(N^*)} &= N_{2,ap}^{*c} N_{2,ex}^{*c-1} = I. \end{aligned}$$

En este escenario mínimo el ‘troceado’ del tensor de covarianza condicional es

$$\begin{aligned} V_{1,ap}^{*c} &= N_{1,ap}^{*c} - A_1 N_{1,ap}^{*c} A_1' - W_{1,2}^* = V_{1,ex}^{*c}, \\ V_{2,ap}^{*c} &= N_{2,ap}^{*c} - A_2 N_{2,ap}^{*c} A_2' - W_{1,2}^* = V_{2,ex}^{*c}, \end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} F_{1,dif}^{(V^*)} &= V_{1,ap}^{*c} - V_{1,ex}^{*c} = 0, \\ F_{2,dif}^{(V^*)} &= V_{2,ap}^{*c} - V_{2,ex}^{*c} = 0, \\ F_{1,pr}^{(V^*)} &= V_{1,ap}^{*c} V_{1,ex}^{*c-1} = I, \\ F_{2,pr}^{(V^*)} &= V_{2,ap}^{*c} V_{2,ex}^{*c-1} = I. \end{aligned}$$

También en este contexto de representación mínima, esta teoría requiere la utilización de los tensores $A_{1,ap}^{(S)*c}$ y $A_{2,ap}^{(S)*c}$ de propagación simétrica de covarianza para ambos procesos. Dichos tensores verifican

$$\begin{aligned} V_{1,ap}^{*c} &= \left(1 - A_{1,ap}^{(S)*c^2}\right) N_{1,ap}^{*c}, \\ V_{2,ap}^{*c} &= \left(1 - A_{2,ap}^{(S)*c^2}\right) N_{2,ap}^{*c}. \end{aligned}$$

De estas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} A_{1,ap}^{(S)*c^2} &= \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}}, \\ A_{2,ap}^{(S)*c^2} &= \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}}. \end{aligned}$$

Y, por tanto,

$$A_{1,ap}^{(S)*c} = \left\{ \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.30)$$

$$A_{2,ap}^{(S)*c} = \left\{ \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.31)$$

Por otra parte, los tensores de propagación simétrica exactos en formato mínimo son

$$A_{1,ex}^{(S)*} = \left\{ A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7.32)$$

$$A_{2,ex}^{(S)*} = \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.33)$$

En consecuencia,

$$F_{1,dif}^{(A_1^{(S)*})} = \left\{ \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{2,dif}^{(A_2^{(S)*})} = \left\{ \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$F_{1,pr}^{(A_1^{(S)*})} = \left\{ \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$F_{2,pr}^{(A_2^{(S)*})} = \left\{ \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

En cuanto a los tensores de distancia y de carga de correlación de los procesos asignados (mínimos) ‘aproximados’,

$$U_{1,ap}^{*c} = I - \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}}, \quad (7.34)$$

$$U_{2,ap}^{*c} = I - \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}}, \quad (7.35)$$

$$\Pi_{1,ap}^{*c} = \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}},$$

$$\Pi_{2,ap}^{*c} = \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}}.$$

En este escenario mínimo, los correspondientes tensores de distancia y carga de correlación de los procesos inducidos ‘exactos’ de referencia son

$$U_{1,ex} = I - A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}}, \quad (7.36)$$

$$U_{2,ex} = I - A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}}, \quad (7.37)$$

$$\Pi_{1,ex} = A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}},$$

$$\Pi_{2,ex} = A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}}.$$

Por tanto, los tensores de inexactitud del tensor de distancia son

$$F_{1,dif}^{(U_1^{*c})} = A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} - \{A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 + W_{1,2}^*\} N_{1,ap}^{*c^{-1}} = -W_{1,2}^* N_{1,ap}^{*c^{-1}},$$

$$F_{2,dif}^{(U_2^{*c})} = A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} - \{A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 + W_{1,2}^*\} N_{2,ap}^{*c^{-1}} = -W_{1,2}^* N_{2,ap}^{*c^{-1}},$$

$$F_{1,pr}^{(U_1^{*c})} = I + F_{1,dif}^{(U_1^{*c})} \left\{ I - A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-1} =$$

$$I - W_{1,2}^* N_{1,ap}^{*c^{-1}} \left\{ I - A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-1},$$

$$F_{2,pr}^{(U_2^{*c})} = I + F_{2,dif}^{(U_2^{*c})} \left\{ I - A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-1} =$$

$$I - W_{1,2}^* N_{2,ap}^{*c^{-1}} \left\{ I - A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-1}.$$

Y respecto a los tensores de ‘inexactitud’ relativos al tensor de carga de correlación (en formato mínimo),

$$F_{1,dif}^{(\Pi_1^{*c})} = -F_{1,dif}^{(U_1^{*c})},$$

$$F_{2,dif}^{(\Pi_2^{*c})} = -F_{2,dif}^{(U_2^{*c})},$$

$$F_{1,pr}^{(\Pi_1^{*c})} = I - F_{1,dif}^{(U_1^{*c})} \left\{ A_1 N_{1,ap}^{*c} A'_1 N_{1,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-1},$$

$$F_{2,pr}^{(\Pi_2^{*c})} = I - F_{2,dif}^{(U_2^{*c})} \left\{ A_2 N_{2,ap}^{*c} A'_2 N_{2,ap}^{*c^{-1}} \right\}^{-1}.$$

A partir de estos resultados podemos hacer una evaluación del grado de ‘exactitud’ de la teoría ‘aproximada’. Para todas las teorías aproximadas podemos complementar los resultados tensoriales alcanzados que se han propuesto en cada una de ellas con los de los valores escalares de ‘inexactitud’ definidos en (7.3) y (7.4), que proporcionan una medida resumida global.

Capítulo 8

Breve introducción al análisis ‘espaciotemporal’ basado en la información acerca de dos puntos

Aunque esta cuestión ya ha sido tratada de forma puntual simplificada en el Capítulo 4, tanto para tratar el problema de la identificación de la naturaleza de las fuentes como para ilustrar la disponibilidad de información pasada y futura respecto de un punto espaciotemporal de referencia, este capítulo pretende presentar un análisis más amplio y abierto a futuras investigaciones acerca del impacto de una información relativa a un conjunto de varios puntos, habida cuenta de que en esta memoria el estudio, en general, se ha realizado partiendo de la información conocida en un punto x_a y el subsiguiente efecto de reducción en la incertidumbre asociada a un punto futuro x , causalmente conectado con x_a e implicando, por tanto, a una única geodésica minkowskiana, que pasa por ambos puntos. Dicha geodésica, en el contexto inercial que se ha considerado, es una línea recta de \mathbb{M} [71, 97, 81].

Con el fin de facilitar la exposición, recordaremos brevemente algunos de los conceptos básicos que caracterizan a la variedad espaciotemporal \mathbb{M} , dejando al margen las conocidas propiedades topológicas, cuya mención es prescindible en la línea argumental propuesta. Como sabemos, \mathbb{M} es una variedad tetradimensional pseudoeuclidiana, para cuya métrica se ha elegido, en esta memoria, la signatura $(-1,1,1,1)$, tal como queda indicado en el Capítulo 3. Un punto x dado de dicha variedad define un conjunto de regiones en \mathbb{M}

que merecen ser mencionadas. Antes propondremos, por razones de utilidad, la idea expresada en [97] que identifica una geodésica (o línea del universo) de \mathbb{M} con la ‘vida’ de una partícula. En un contexto inercial la geodésica es una línea recta y la partícula describe un movimiento uniforme a lo largo de dicha geodésica. Llamaremos geodésica ‘nula’ a la línea del universo de una partícula en reposo, o sea, cuya velocidad es nula y, por tanto, las coordenadas x^1 , x^2 y x^3 no cambian. Sólo cambia la coordenada x^0 , el tiempo. Por el punto x pasan una infinidad de geodésicas, cuya ‘inclinación’ respecto a la geodésica nula depende de la velocidad uniforme de la partícula.

De acuerdo con la definición dada en el Capítulo 3, no todas las rectas que pasan por x son geodésicas admisibles, ya que ninguna partícula puede superar la velocidad de la luz (haciendo abstracción de situaciones muy específicas, como la posible existencia teórica de partículas extrañas como los taquiones, que sí superarían la velocidad de la luz o los eventos asociados al entrelazamiento cuántico, concepto que no consideraremos). De este modo, las geodésicas admisibles pertenecerían al interior y a la frontera del denominado ‘cono de luz’ de x . El cono de luz de x es una región tetradiimensional (que en la bibliografía se representa de forma gráfica eliminando necesariamente una dimensión espacial para facilitar su visualización), cuya frontera consiste en una variedad tridimensional ‘hipercónica’ de revolución que contiene a todas las geodésicas, que denominaremos geodésicas ‘límite’, cuya ‘inclinación’ respecto a la geodésica nula es de $\pi/4$ radianes. En consecuencia, dicha frontera contiene las líneas del universo de todas las partículas que, pasando por el punto x , se desplazan a la velocidad de la luz, como es el caso de los fotones. Como sabemos, estas partículas tienen ‘masa en reposo’ nula, aunque poseen una determinada masa relativista equivalente a su energía.

Llamaremos convencionalmente ‘hiperplano de simultaneidad’ respecto a x a la variedad tridimensional que, conteniendo al punto x , es perpendicular a la geodésica nula que pasa por dicho punto (en este caso la perpendicularidad minkowskiana y la perpendicularidad euclidiana coinciden). Por tanto, tomando un punto cualquiera perteneciente al hiperplano de simultaneidad, distinto de x , ambos puntos son evidentemente no conectados causalmente (todo par de puntos de dicho hiperplano es causalmente no conectado; de hecho, se requeriría una velocidad infinita para la conexión).

El hiperplano de simultaneidad respecto a x divide el espaciotiempo de Minkowski en dos regiones: la región ‘superior’ o ‘el futuro’ y la región ‘inferior’ o ‘el pasado’. En el ‘futuro’ respecto a x sólo el subcono superior de

luz (cuyo vértice inferior es x) contiene las geodésicas ‘admisibles’ respecto a x , o sea, las geodésicas formadas por puntos futuros causalmente conectados con x .

Cualquier par de puntos de dichas geodésicas están causalmente conectados, ya que su distancia pseudoeuclidiana es un número real (de acuerdo con la signatura elegida), lo que equivale a decir que es posible transitar desde un punto al otro (a una velocidad no superior a la de la luz, por supuesto). Las geodésicas admisibles pertenecientes al interior del cono superior de luz, también pertenecen evidentemente al subcono inferior de luz respecto a x (siendo x también el vértice superior del subcono de su pasado). La geodésica perpendicular a una geodésica admisible es una geodésica no admisible simétrica respecto a la geodésica límite coplanaria con ambas. Así pues, las geodésicas límite respecto a un punto x son perpendiculares (en un sentido minkowskiano) a sí mismas. Las geodésicas no admisibles quedan fuera del cono de luz de x , siendo un número imaginario la distancia pseudoeuclidiana entre cualquier punto de una de esas líneas y x y, por supuesto, entre dos puntos cualesquiera de una geodésica no admisible. Finalmente, añadiremos que la pseudodistancia entre x y un punto cualquiera de una geodésica límite respecto a x es nula, siendo nula igualmente la pseudodistancia entre dos puntos cualesquiera de una geodésica límite.

Mención especial merece el concepto de ‘esfera (o hipersfera) minkowskiana’. Mediante analogía con la esfera euclidiana tridimensional de un espacio euclidiano tetradimensional, o sea, el lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan en sentido euclidiano de un punto denominado centro de la esfera, la esfera minkowskiana es el lugar geométrico, en el seno de \mathbb{M} , de todos los puntos cuya pseudodistancia respecto a un punto dado x , que podemos denominar centro de la ‘pseudoesfera’, es la misma. El ‘aspecto euclidiano’ de una esfera minkowskiana es el de un hiperboloide tetradimensional de revolución (con dos regiones, superior futura e inferior pasada) inscrito en el cono de luz.

En este contexto esbozaremos unas líneas básicas que permitan alcanzar algunos conceptos generales enfocados a un análisis elemental basado en la disponibilidad de información en dos puntos, generalizable a un conjunto con un número mayor de puntos con información asociada conocida.

8.1. Inversión temporal

Es un hecho notable que, con frecuencia, las teorías físicas son igualmente aplicables tanto si en sus ecuaciones fundamentales se considera que el tiempo tiene el sentido direccional directo habitual ‘del pasado al futuro’ como si se considera el sentido opuesto, si bien los sentidos del ser humano, en su percepción macrocósmica del universo, avalada por su evidencia experimental, sólo contempla el primer escenario. En lo que sigue, con fines prácticos de modelización útil y eficiente para obtener determinados resultados, vamos a considerar consistentemente una formulación complementaria similar a la desarrollada en esta memoria, en la que el tiempo fluye desde el futuro hacia el pasado, con unas implicaciones conceptualmente interesantes que destacaremos.

Empecemos con un ejemplo sencillo: un modelo unidimensional gaussiano markoviano estacionario en el que la única dimensión que se considera es el tiempo. Dicho modelo establece que el valor de la variable aleatoria ξ_t depende de la variable aleatoria ξ_{t-1} en la forma

$$\xi_t = \phi\xi_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (8.1)$$

donde ε_t es una variable aleatoria ruido blanco gaussiano independiente de ξ_{t-1} y ϕ es un parámetro real positivo menor que 1. Consideraremos ahora una forma alternativa del modelo anterior, por cuanto presenta una equivalencia en el sentido de compartir la misma función de autocovarianza, cuya forma es

$$\xi_t = \phi\xi_{t+1} + \eta_t, \quad (8.2)$$

siendo η_t un ruido blanco independiente de ξ_{t+1} . El primero expresa el presente en función del pasado y el segundo expresa el presente en función del futuro. Podemos observar que, aunque los ruidos ε_t y η_t podrían expresarse en representación continua, respectivamente, como $\varepsilon_t = \sigma_\varepsilon \int_{t-1}^t \phi^{t-s} dW_s^P$ y $\eta_t = \sigma_\eta \int_{t+1}^t \phi^{s-t} dW_s^F$ (siendo W_s^P y W_s^F dos procesos de Wiener), o sea, recorren intervalos disjuntos, están correlacionados, es decir, poseen una información mutua no nula, lo que sugiere una cierta interacción entre el pasado y el futuro, a uno y otro lado del presente. En efecto, combinando estocásticamente (8.1) y (8.2), encontramos fácilmente la correlación $\rho_{\varepsilon,\eta}$ entre ε_t y η_t dada por $\rho_{\varepsilon,\eta} = 1 - \phi^2$. Además, es claro que $\sigma_\eta = \sigma_\varepsilon = \sigma$. Estos resultados permiten clarificar otros obtenidos en el contexto tetradsimensional minkowskiano.

Sean x_a y x_d dos puntos espaciotemporales. Si suponemos que x_a es anterior a x_d y ambos puntos están causalmente conectados podemos, de acuerdo con el proceso $\xi(x_d) = A\xi(x_a) + \varepsilon$, expuesto en el Capítulo 3, recordar la expresión

$$V = N - ANA', \quad (8.3)$$

donde las magnitudes tensoriales responden a la definición dada en dicho capítulo. Pero también es posible, a partir de la representación alternativa $\xi(x_a) = B\xi(x_d) + \eta$, equivalente en autocovarianza, expresar

$$W = N - BNB', \quad (8.4)$$

donde W es el tensor de covarianza condicional cuando se considera x_a como el punto espaciotemporal de referencia y x_d el punto acerca del cual la información sobre el tensor de stress es conocida. El tensor propagador adelantado B es equivalente al tensor $A^{adv}(x_a, x_d)$ analizado en el Capítulo 3.

De la relación entre los núcleos de covarianza $N(x_d, x_a) = AN$ y $N(x_a, x_d) = BN$, dada por $N(x_d, x_a) = N'(x_a, x_d)$, obtenemos inmediatamente

$$AN = NB', \quad (8.5)$$

$$NA' = BN. \quad (8.6)$$

Es inmediato que $|A| = |B|$. Además A y B pueden expresarse, uno en función del otro, como

$$A = NB'N^{-1},$$

$$B = NA'N^{-1}.$$

Resulta claro que $Tr(A) = Tr(B)$, ya que si el tensor A admite la descomposición matricial $P_A \Lambda P_A^{-1}$, el tensor B admite la descomposición $P_B \Lambda P_B^{-1}$, siendo $P_B = N(P_A^{-1})'$. Luego, como cabía esperar, los tensores A y B tienen los mismos autovalores.

Un resultado evidente es el siguiente:

$$N = A^{-1}NB' = ANB'^{-1} = BNA'^{-1} = B^{-1}NA'.$$

Combinando (8.3) y (8.4) con (8.5) y (8.6),

$$V = (I - AB)N,$$

$$W = (I - BA)N.$$

Recordando el concepto de tensor de distancia y expresando $V = U_V N$ y $W = U_W N$, obtenemos

$$U_V = I - AB,$$

$$U_W = I - BA.$$

Consecuentemente, los tensores de carga de correlación Π_V y Π_W vienen dados por las expresiones simples

$$\Pi_V = AB,$$

$$\Pi_W = BA.$$

Se cumplen, pues, las relaciones $|U_V| = |U_W|$, $|\Pi_V| = |\Pi_W|$ y $|V| = |W|$, así como $Tr(U_V) = Tr(U_W)$, $Tr(\Pi_V) = Tr(\Pi_W)$ (tengamos en cuenta que U_V y U_W poseen los mismos autovalores, e igual sucede con Π_V y Π_W), aunque, en general, $Tr(V) \neq Tr(W)$.

Sigamos profundizando en el análisis a partir de la relación

$$f(\xi(x_a)|\xi(x_d)) = \frac{f(\xi(x_d)|\xi(x_a)) f(\xi(x_a))}{f(\xi(x_d))}.$$

Dado que

$$f(\xi(x_a)|\xi(x_d)) = (2\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_a) - B\xi(x_d))'V^{-1}(\xi(x_a) - B\xi(x_d))},$$

$$f(\xi(x_d)|\xi(x_a)) = (2\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_d) - A\xi(x_a))'V^{-1}(\xi(x_d) - A\xi(x_a))},$$

$$f(\xi(x_d)) = (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi'(x_d)N^{-1}\xi(x_d)},$$

$$f(\xi(x_a)) = (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi'(x_a)N^{-1}\xi(x_a)},$$

son inmediatas, igualando términos, las relaciones

$$V^{-1} = B'W^{-1}B + N^{-1}, \quad (8.7)$$

$$W^{-1} = A'V^{-1}A + N^{-1}, \quad (8.8)$$

que permiten expresar el núcleo de covarianza en un punto como

$$N = (V^{-1} - B'W^{-1}B)^{-1} = (W^{-1} - A'V^{-1}A)^{-1},$$

así como la relación

$$B'W^{-1} = V^{-1}A,$$

o, equivalentemente,

$$WB'^{-1} = A^{-1}V,$$

con lo que

$$W = A^{-1}VB' = BVA'^{-1},$$

$$V = AWB'^{-1} = B^{-1}WA'.$$

Y también

$$W^{-1} = A'V^{-1}B^{-1} = B'^{-1}V^{-1}A,$$

$$V^{-1} = B'W^{-1}A^{-1} = A'^{-1}W^{-1}B.$$

Finalmente destacaremos la relación

$$V^{-1} + A'V^{-1}A = W^{-1} + B'^{-1}W^{-1}B,$$

obtenida a partir de (8.7) y (8.8).

8.2. Información en dos puntos (uno en el pasado y otro en el futuro)

Aunque este modelo ha sido tratado en forma simple en el Capítulo 4, hacemos ahora un tratamiento más generalizado en un contexto minkowskiano. Al igual que en la sección anterior consideremos inicialmente, con fines didácticos, un escenario unidimensional, con el tiempo como única dimensión.

Supongamos que x_t es un punto temporal presente y x_{t-1} y x_{t+1} dos puntos temporales, pasado y futuro respectivamente, dados, o sea, cuya información es conocida. Bajo las hipótesis de cumplimiento de la propiedad de Markov, así como de estacionariedad y de distribución gaussiana, sabemos que se cumplen (8.3) y (8.4). Resulta evidente que, en un intento de incorporar la información de x_{t-1} y x_{t+1} , cualquier representación sobre dos puntos (pasado y futuro) del tipo

$$\xi_t = \alpha(\phi\xi_{t-1} + \varepsilon_t) + (1 - \alpha)(\phi\xi_{t+1} + \eta_t),$$

o equivalentemente

$$\xi_t = \alpha\phi\xi_{t-1} + (1 - \alpha)\phi\xi_{t+1} + \alpha\varepsilon_t + (1 - \alpha)\eta_t, \quad (8.9)$$

no incorpora eficiencia adicional respecto a las representaciones basadas en un punto (pasado o futuro), debido a que se verifica que entre ξ_{t-1} y η_t existe correlación (y consiguientemente información mutua), e igual ocurre entre las variables ξ_{t+1} y ε_t , y ello ocurre en ambos casos en la misma cuantía, debido a la relación conocida $\sigma_\varepsilon = \sigma_\eta = \sigma$.

A partir de la relación bayesiana

$$f(x_t|x_{t-1}, x_{t+1}) = \frac{f(x_{t+1}|x_t)f(x_t)|x_{t-1})}{f(x_{t+1}|x_{t-1})}, \quad (8.10)$$

es fácil obtener la expresión

$$\xi_t = \frac{\phi}{1 + \phi^2} (\xi_{t-1} + \xi_{t+1}) + \nu_t,$$

donde ν_t es un ruido blanco independiente de x_{t-1} y x_{t+1} , cuya desviación estándar σ_ν cumple con la relación

$$\sigma_\nu = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \phi^2}},$$

en la que queda evidenciada la ganancia en eficiencia.

Traslademos estos conceptos a un contexto tetradimensional minkowskiano.

Supongamos un punto espaciotemporal de referencia x_0 y dos puntos x_a y x_d , pasado y futuro, respectivamente, pertenecientes a una geodésica admisible que contiene a x_0 . La relación bayesiana (8.10) adquiere la forma

$$f(\xi(x_0)|\xi(x_d), \xi(x_a)) = \frac{f(\xi(x_d)|\xi(x_0)) f(\xi(x_0)|\xi(x_a))}{f(\xi(x_d)|\xi(x_a))}. \quad (8.11)$$

Dado que

$$\begin{aligned} & f(\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)) = \\ & (2\pi)^{-2} |V_{0|a,d}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_0) - E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)])' V_{0|a,d}^{-1} (\xi(x_0) - E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)])}, \\ & f(\xi(x_d)|\xi(x_0)) = \\ & (2\pi)^{-2} |V_d|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_d) - A_d \xi(x_0))' V_d^{-1} (\xi(x_d) - A_d \xi(x_0))}, \\ & f(\xi(x_0)|\xi(x_a)) = \\ & (2\pi)^{-2} |V_a|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_0) - A_a \xi(x_a))' V_a^{-1} (\xi(x_0) - A_a \xi(x_a))}, \end{aligned}$$

$$f(\xi(x_d)|\xi(x_a)) = (2\pi)^{-2} |V_{a,d}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_d)-A_dA_a\xi(x_a))'V_{a,d}^{-1}(\xi(x_d)-A_dA_a\xi(x_a))},$$

son inmediatas las relaciones que permiten determinar los valores de $V_{0|a,d}$ y $E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)]$.

Así, para el núcleo de covarianza condicional $V_{0|a,d}$ encontramos las cuatro expresiones equivalentes

$$\begin{aligned} V_{0|a,d} &= \{A'_dV_d^{-1}A_d + V_a^{-1}\}^{-1}, \\ V_{0|a,d} &= \{B'_aW_a^{-1}B_a + W_d^{-1}\}^{-1}, \\ V_{0|a,d} &= \{W_d^{-1} + V_a^{-1} - N^{-1}\}^{-1}, \\ V_{0|a,d} &= \{A'_dV_d^{-1}A_d + B'_aW_a^{-1}B_a + N^{-1}\}^{-1}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Son fácilmente deducibles las relaciones

$$N = (V_a^{-1} - B'_aW_a^{-1}B_a)^{-1} = (W_d^{-1} - A'_dV_d^{-1}A_d)^{-1},$$

a uno y otro lado (pasado y futuro) del presente representado por x_0 , ya obtenidas en la sección anterior.

Es resaltable la expresión resultante para el núcleo de covarianza $V_{a,d}$, dada por

$$V_{a,d} = N - A_dA_aNA'_dA'_a = V_d + A_dV_aA'_d = V_a + A_aV_dA'_a.$$

Se deduce de forma inmediata que los tensores de covarianza condicionales cumplen la relación $|V_{0|a,b}| = |V_a||V_b|/|V_{a,b}|$.

En cuanto al valor esperado del tensor de estrés condicional obtenemos

$$E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)] = V_{0|a,d}^{-1} (W_d^{-1}B_d\xi(x_d) + V_a^{-1}A_a\xi(x_a)),$$

con lo que una expresión posible, que facilita la interpretación del resultado, es

$$\begin{aligned} E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)] &= \\ &= (W_d^{-1} + V_a^{-1} - N^{-1})^{-1} (W_d^{-1}B_d\xi(x_d) + V_a^{-1}A_a\xi(x_a)). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Una expresión alternativa es la obtenida con una sencilla agrupación algebraica como

$$\begin{aligned} E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)] &= \\ &= (I + W_dB'_aW_a^{-1}B_a)^{-1} B_d\xi(x_d) + (I + V_aA'_dV_d^{-1}A_d)^{-1} A_a\xi(x_a). \end{aligned}$$

En cuanto al tensor de distancia $U_{0|a,b}$ obtenemos sin dificultad el resultado

$$U_{0|a,b} = (U_{w,d}^{-1} + U_{v,a}^{-1} - I)^{-1},$$

donde $U_{w,d}$ y $U_{v,a}$ son, respectivamente, los tensores de distancia asociados a los tensores de covarianza condicional W_d y V_a .

Las expresiones relativas al tensor de carga de correlación se obtienen de forma inmediata, por lo que quedan obviadas en el texto.

8.3. Información en dos puntos pertenecientes al pasado de un punto dado

En esta sección se desarrollan unas ideas adicionales con las que culmina este breve capítulo orientado a la definición de una posible línea a seguir en la generalización a un conjunto de información más amplio que la que se asocia a un sólo punto de cuya información se dispone y es afectado por un conjunto de fuentes externas.

Sea como hasta ahora un punto espaciotemporal x_0 de referencia y supongamos que se dispone de la información acerca de dos puntos x_a y x_c pertenecientes al pasado admisible de x_0 . Ello equivale a afirmar que x_a y x_c pertenecen al subcono inferior de luz asociado a x_0 . Por razones obvias, ya que el análisis es irrelevante, se excluyen de dicho análisis los escenarios en los que alguno o ambos puntos temporalmente precedentes no están causalmente conectados con x_0 .

Dentro del cono de luz, los puntos x_a y x_c pueden estar causalmente conectados o no. Para que lo estén, como sabemos, uno debe pertenecer al subcono de luz del futuro de otro, y este debe entonces pertenecer al subcono de luz del pasado de aquel. Analizaremos primeramente el caso, más simple, en que los dos puntos espaciotemporales del pasado no están causalmente conectados. Ello equivale a poder afirmar que entre los tensores de stress asociados no puede existir información mutua.

Siguiendo la metodología habitual establezcamos la relación bayesiana, fácilmente alcanzable, siguiente:

$$f(\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_c)) = \frac{f(\xi(x_0)|\xi(x_a)) f(\xi(x_0)|\xi(x_c))}{f(\xi(x_0))},$$

Dado que, en este caso,

$$\begin{aligned}
 f(\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_c)) &= \\
 (2\pi)^{-2} |V_{0|a,c}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_0)-E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_c)])'V_{0|a,c}^{-1}(\xi(x_0)-E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_c)])}, \\
 f(\xi(x_0)|\xi(x_a)) &= (2\pi)^{-2} |V_a|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_0)-A_a\xi(x_a))'V_a^{-1}(\xi(x_0)-A_a\xi(x_a))}, \\
 f(\xi(x_0)|\xi(x_c)) &= (2\pi)^{-2} |V_c|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi(x_0)-A_c\xi(x_c))'V_c^{-1}(\xi(x_0)-A_c\xi(x_c))}, \\
 f(\xi(x_0)) &= (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi'(x_0)N^{-1}\xi(x_0)},
 \end{aligned}$$

de la comparación adecuada de los términos correspondientes, resulta

$$V_{0|a,c} = \{V_a^{-1} + V_c^{-1} - N^{-1}\}^{-1}, \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned}
 E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_c)] &= \\
 \{V_a^{-1} + V_c^{-1} - N^{-1}\}^{-1} \{V_a^{-1}A_a\xi(x_a) + V_c^{-1}A_c\xi(x_c)\}, & \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

que son similares a las expresiones (8.12) y (8.13), si tenemos en cuenta las características de los resultados asociadas a la ‘inversión temporal’.

Por otra parte, no debe percibirse como algo sorprendente el hecho de que los resultados anteriores son independientes de la pseudodistancia entre x_a y x_c , ya que entre ambos no hay conexión causal, luego dicha pseudodistancia es imaginaria, por lo que su magnitud, en el universo relativista real, resulta irrelevante.

Consideremos ahora el escenario en el que los puntos x_a y x_c pertenecientes al pasado de x_0 están conectados causalmente. Dado que los tres puntos pertenecen a un plano, llevaremos el argumento geométrico siguiente a dicho plano, ignorando, sin pérdida de generalidad, dos dimensiones espaciales, sin perjuicio de que, obviamente, las magnitudes geométricas (los puntos x_0 , x_a y x_c) y las estocásticas asociadas (los procesos $\xi(x_0)$, $\xi(x_a)$ y $\xi(x_c)$) son tetradimensionales.

En este caso de conexión causal entre los puntos con incertidumbre nula (respecto al tensor de stress), uno de los puntos, sea x_c , precede al otro, sea x_a . Con ello queremos decir que la esfera minkowskiana a la que pertenece x_c es más cercana a x_0 que la esfera minkowskiana a la que pertenece x_a . Teniendo en cuenta el sentido temporal de la conexión indicado, ello quiere decir que, en el arco de hipérbola plana comprendido entre las geodésicas límite que pasan por x_a y son paralelas (en sentido euclidiano) a las geodésicas límite

que pasan por x_0 en la sección plana que estamos considerando, se sitúa necesariamente el punto x_c . Dado que el modelo que estamos considerando es gaussiano, markoviano y estacionario, sabemos que el tensor de propagación depende sólo de la pseudodistancia, y suponemos que dicho tensor no tiene un carácter direccional, por lo que, en el rango de puntos posibles en que el punto x_c puede ubicarse, se cumple la relación conocida

$$\xi(x_0) = A_{c,0}\xi(x_c) + \varepsilon_{c,0}, \quad (8.16)$$

en la que se utiliza una notación más clarificadora.

Por otra parte, es igualmente evidente la relación

$$\xi(x_0) = A_{a,0}\xi(x_a) + \varepsilon_{a,0}. \quad (8.17)$$

Sin embargo, tomando el punto x_c como referencia respecto al punto x_a tendríamos la tercera relación

$$\xi(x_c) = A_{a,c}\xi(x_a) + \varepsilon_{a,c}, \quad (8.18)$$

estando expresadas las tres relaciones en sentido directo del tiempo.

Combinando (8.16) y (8.18) encontramos

$$\xi(x_0) = A_{c,0}(A_{a,c}\xi(x_a) + \varepsilon_{a,c}) + \varepsilon_{c,0} = A_{c,0}A_{a,c}\xi(x_a) + A_{c,0}\varepsilon_{a,c} + \varepsilon_{c,0}. \quad (8.19)$$

Comparando (8.19) y (8.17), y dado que evidentemente $A_{c,0}A_{a,c} \neq A_{a,0}$, debemos concluir que $\varepsilon_{c,0}$ y $\xi(x_a)$ poseen información mutua, ya que entre $\varepsilon_{a,c}$ y $\xi(x_a)$ la información mutua es nula. Luego

$$\varepsilon_{c,0} = (A_{a,0} - A_{c,0}A_{a,c})\xi(x_a) + \varepsilon_{a,0} - A_{c,0}\varepsilon_{a,c} = (A_{a,0} - A_{c,0}A_{a,c})\xi(x_a) + \eta_{c,0},$$

expresión en la que el ruido $\eta_{c,0}$ es independiente de $\varepsilon_{c,0}$.

Por tanto, establecemos definitivamente que, en el escenario planteado, se cumple

$$f(\xi(x_0)|\xi(x_c), \xi(x_a)) = f(\xi(x_0)|\xi(x_c)), \quad (8.20)$$

o sea, que si se dispone de la información en un punto x_c , que precede, en el sentido minkowskiano anteriormente expresado, al punto x_a (sobre el que tampoco hay incertidumbre), o sea, con conexión causal entre ambos (de x_a a x_c), la información disponible acerca del proceso en x_c es suficiente.

Este sencillo modelo lleva a una conclusión adicional interesante: si (8.20) se cumple, entonces, tomando ahora x_c como punto espaciotemporal de referencia, x_0 queda en el futuro admisible de x_c y x_a en el pasado admisible de x_c . En consecuencia, se llega inmediatamente a la relación bayesiana

$$f(\xi(x_c)|\xi(x-0), \xi(x_a)) = \frac{f(\xi(x_0)|\xi(x_a)) f(\xi(x_c)|\xi(x_a))}{f(\xi(x_0)|\xi(x_a))}. \quad (8.21)$$

Comparando las expresiones (8.11) y (8.21) observamos que son expresiones formalmente idénticas, si bien (8.21) describe el comportamiento relativo probabilístico de tres tensores aleatorios asociados a puntos espaciotemporales que no pertenecen a una única geodésica inercial, lo que constituye una generalización respecto a (8.11), hecho que permite cerrar la modelización.

Con las ideas propuestas en este capítulo, uno de cuyos objetivos sería la obtención de modelos más generales para un número cualquiera de puntos pertenecientes al espaciotiempo en que reside un sistema material con un comportamiento estocástico, queda esbozada una línea importante de investigación, a la que se alude en el Capítulo 16. En esa línea cabe considerar una cierta diversidad de escenarios: la información disponible sobre un conjunto de puntos finito o infinito, compacto o no (con las implicaciones inherentes en cuanto a conexión causal), o la propia naturaleza del sistema material, un fluido supuestamente perfecto, y su impacto en la naturaleza del tensor de stress.

Capítulo 9

Conclusiones de la Parte I

En esta primera parte de la memoria se hace un tratamiento general de los procesos estocásticos tetradimensionales, que constituyen una simplificación de unos procesos tensoriales cuadrados de orden 4, inducidos por fuentes externas a un sistema gravitacional físico dado. Dichos procesos estocásticos son una componente estocástica añadida al tensor de stress del sistema y acerca de ellos se hacen unas hipótesis básicas que definen lo que va a constituir el tratamiento analítico general realizado. Se supone, pues, que el proceso individual inducido por la influencia de una fuente dada es gaussiano, lineal, markoviano y estacionario. Si se considera un conjunto de varias fuentes, el proceso inducido global resulta de la agregación estocástica de los procesos inducidos individuales, de tal modo que el proceso agregado es la suma de los procesos componentes individuales de un proceso gaussiano multivariante en el que puede existir una correlación cruzada entre cualquier par de procesos componentes del proceso conjunto.

Se han desarrollados dos fases diferentes: a) identificación del proceso o procesos inducidos cuando existe una información disponible, o sea, uno o varios valores observados en otros tantos puntos del espaciotiempo, y b) procedimiento de agregación en un proceso conjunto a partir de varios procesos individuales, así como la asignación o imputación del efecto de cada proceso en la incertidumbre global del proceso agregado.

Se han creado y propuesto algunos conceptos básicos (como el tensor de distancia, el tensor de carga de correlación y el factor de deformación covariante), cuya utilización se sugiere en base a sus propiedades y a su aplicabilidad en la utilización sistematizada de las medidas informacionales que se exponen y se aplican en la Parte II.

El problema de la identificación ha sido siempre una cuestión complicada. En nuestro caso, la dificultad tiene su origen en el hecho de que el espacio es tetradimensional, así como en el conjunto de magnitudes estructurales a considerar, incluidos los tensores de covarianza de los procesos y los de covarianza cruzada entre cada par de procesos individuales. Para favorecer el procedimiento de identificación se ha definido un conjunto de procesos que engloba a todos aquellos procesos que pueden desestructurarse en suma de procesos markovianos, de acuerdo con la hipótesis inicial simplificadora de que un proceso individual inducido por una fuente externa tiene, en todos los casos, una estructura simple markoviana. De este modo, y siempre que apliquemos el principio de que, ante un conjunto de procesos candidatos compatibles (y en condiciones de similar grado de ajuste) con un conjunto dado de información, el mejor candidato es el más simple, disponemos de un criterio suficiente para intentar asegurar una identificación válida en cualquier caso. Explicamos esto del modo siguiente: si dado un punto x queremos conocer el modelo adecuado asignado al proceso en dicho punto cuando se dispone de la información en otro punto ‘pasado’ x_a , así como del núcleo de covarianza entre los dos puntos, podemos elegir entre una multiplicidad prácticamente ilimitada de candidatos posibles con dicha información. Sin embargo, aplicando el principio de simplicidad, el mejor candidato es un proceso markoviano, o sea, un proceso inducido por una única fuente, aunque evidentemente, si no disponemos de información adicional, no podemos tener la garantía de que el proceso real subyacente no es otro (por ejemplo, el resultante de la agregación de los procesos inducidos por un número mayor de fuentes). Se trata, pues, de un problema de decisión razonable.

En un caso general, si disponemos de la información de k puntos del pasado de x (x_j , $j = 1, \dots, k$), así como del núcleo de covarianza entre cada par de puntos, dándose la circunstancia adicional de que cualquier subconjunto formado por h puntos, siendo $h < k$, aporta una reducción de incertidumbre estrictamente inferior a la correspondiente a los k puntos, entonces existe un amplio conjunto de procesos compatibles con este escenario, aunque, siguiendo el criterio de identificación propuesto, podemos suponer que el proceso global inducido es el agregado de k procesos inducidos por un número igual de fuentes, existiendo entre ellos una multiplicidad de posibilidades de estructuras de correlación cruzada. En este caso, aunque la función de covarianza es única, son múltiples las representaciones (equivalentes en autocovarianza) compatibles con dicha función. En ese caso la elección recaería sobre una de esas representaciones, de acuerdo con un criterio adoptado (por ejemplo,

razonablemente, con la representación más eficiente, o sea, aquella para la que las medidas de incertidumbre proporcionen un valor óptimo). Por tanto, las medidas de incertidumbre, que se revisarán en la segunda parte de esta memoria, pueden aportar un criterio eficaz en el proceso de identificación.

El procedimiento de agregación descrito es, en definitiva, un ejercicio, en un espacio tetradimensional, de suma de procesos estocásticos correlacionados, en los que se consideran unas determinadas condiciones: naturaleza gaussiana conjunta, la propiedad de Markov, estacionariedad de los procesos y correlaciones cruzadas. A partir de esta plataforma se obtienen unas estructuras agregadas generales que son conocidas y ampliamente utilizadas en la literatura, por lo que en el Capítulo 5, que analiza estos conceptos, el énfasis se aplica a la construcción de una metodología que se propone en esta memoria con fines de simplificación, así como de aplicación útil de las medidas informacionales que se introducen en la Parte II.

Esta metodología, que se ha denominado metodología de asignación, consiste en la desestructuración de un proceso inducido agregado en un conjunto de procesos individuales markovianos no correlacionados. Dado que esta incorrelación perfecta es, en general, inalcanzable cuando los procesos integrantes son tetradimensionales, el procedimiento sólo puede producir resultados aproximados, que aportan, por una parte, la ventaja de un ‘troceado’ aditivo del núcleo de covarianza, aunque, por otra parte, la desventaja de que ello implica un grado de inexactitud, o si se prefiere, de aproximación, evaluable en cualquier caso a partir de algunas medidas informacionales propuestas. Se han considerado diferentes escenarios en cuanto a las posibles representaciones alternativas del proceso agregado y se han analizado las características diferenciales correspondientes. Estas cuestiones son consideradas en algunos ejemplos incluidos en la Parte III de la memoria.

Finalmente, se han utilizado los criterios de aproximación mencionados para ilustrar, de un modo simplificado, un concepto que en esta memoria se ha considerado fundamental. Las teorías físicas, en general, deben considerarse por diversas razones aportadas como teorías no exactas, aunque con un grado de robustez que permite considerarlas suficientemente válidas. Por tanto, sería un ejercicio deseable, por parte de la investigación basada en la Teoría de la Información, la definición de unos criterios que permitiesen evaluar el grado de ‘exactitud’ de una teoría física. Este tema, de amplio contenido, queda como un tema abierto para futuros estudios al respecto, si bien en esta memoria se exponen, a modo de ejemplo muy sencillo, unas líneas y unos criterios encaminados hacia ese razonable objetivo.

Medidas
teórico-informacionales de
incertidumbre aplicables al
tensor de stress de un campo
material

Capítulo 10

Introducción

El contenido de la primera parte de la memoria, y una fracción significativa de los contenidos de los Apéndices finales, constituyen una plataforma amplia y suficientemente desarrollada con el fin de disponer de un campo de aplicación de las principales medidas teórico-informacionales aplicables a cualquier sistema con una componente estocástica perteneciente a, prácticamente, todas las disciplinas abarcadas por el conocimiento humano, y muy especialmente a los sistemas físicos estocásticos (siendo un caso especialmente relevante el de los sistemas físicos cuánticos). En este trabajo se ha elegido como campo de aplicación un sistema físico, y, en particular, un sistema gravitacional, o sea un sistema material residente en una región dada del espaciotiempo. Y se le ha supuesto un carácter estocástico en respuesta a la influencia externa, de origen diverso, procedente de otros sistemas físicos interactuantes con el sistema objeto de estudio, que genéricamente hemos denominado fuentes externas perturbadoras.

El punto de partida es incuestionable. Si el sistema físico (mediante la aleatorización del tensor de stress en nuestro escenario gravitatorio) posee un grado de incertidumbre en cada punto de la región elegida cuando la información es nula, y existiendo un núcleo de covarianza entre cada dos puntos de dicha región, el hecho de disponer de alguna información cambia totalmente este 'paisaje' estocástico, dado que la incertidumbre necesariamente se reduce, en mayor o menor grado, dependiendo de factores como la distancia a la que se sitúa la información disponible. Y la densidad probabilística en cada punto 'colapsa' en algún grado a determinar. Este es el punto de partida, y desde aquí el trabajo a realizar es la construcción de un modelo coherente que, teniendo en cuenta rigurosamente todos los condicionantes menciona-

dos, evalúe con la eficiencia adecuada tanto los niveles de incertidumbre (en un sentido entrópico) como los cambios que se producen como consecuencia de disponer de una cierta cantidad de información. La formalización correcta de estos conceptos es el objetivo principal de esta Parte II, con el apoyo de algunos conceptos complementarios expuestos en Apéndices finales y algunos casos numéricos discutidos en la Parte III.

Capítulo 11

Conceptos clásicos informacionales: entropía de Shannon, información de Fisher, desequilibrio y complejidad

En la actualidad la Teoría de la Información es una teoría compacta que aglutina una amplia cantidad de conceptos, algunos de los cuales tienen raíces alejadas en el pasado y con un origen muy diverso, en el marco de disciplinas que han seguido una evolución diferenciada. Conceptos como entropía, y en particular entropía de Shannon, o la Información de Fisher, en el ámbito de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades, surgieron con unos fines de aplicación amplios, aunque relativamente específicos, en cuanto a su contexto disciplinar.

En la actualidad estas teorías, junto con otros conceptos afines, convergen en una muy potente Teoría de la Información, en la que se produce una sinergia que refuerza las propias teorías y rescata conceptos tradicionales, como el de la varianza de una distribución, cuya relevancia se ve aumentada y relativizada en un marco disciplinar amplio, sistematizado, en la que todos estos conceptos aportan una riqueza de resultados basada en su aplicabilidad conjunta.

Ejemplos de esta circunstancia son los conceptos derivados, de indudable riqueza analítica complementaria, como son el desequilibrio de una distri-

bución probabilística o divergencia de densidades de probabilidad determinadas, mereciendo una especial mención las medidas de complejidad que, con un criterio contrastadamente eficaz, combinan sinérgicamente medidas informacionales elementales.

En las siguientes secciones se pretende esbozar el que puede considerarse principal objetivo de esta memoria, como es la utilización de estos conceptos informacionales para evaluar eficientemente la incertidumbre inherente a un sistema descrito en base a un comportamiento probabilístico de una determinada etiología. Conceptos que incuestionablemente tuvieron una enorme relevancia, como la entropía de Boltzmann o el movimiento browniano de Einstein y otros, aunque con una aplicabilidad limitada en sus orígenes, han tenido un reconocimiento progresivo por parte de la ciencia, que, no obstante, ha mantenido restringido el análisis de la incertidumbre a la utilización de unas pocas medidas convencionales. En la actualidad, la Teoría de la Información permite retomar cuestiones tradicionales, como el propio principio de incertidumbre de Heisenberg, para fortalecer tanto la interpretación como las implicaciones de los conceptos asociados. Con esta perspectiva, abordamos en el ejercicio general de esta memoria, la aplicación de esa pléyade de conceptos, de forma compacta y coherente, en el contexto general del análisis.

11.1. Modelo gaussiano tetradimensional incondicional

Analizamos en esta sección, desde las Teorías de la Información [2, 3, 6, 7, 8, 18, 26, 67, 86, 87, 88, 102, 103, 104] y la Complejidad [1, 2, 4, 5, 12, 13, 16, 20, 21, 23, 25, 34, 66, 68, 74, 85, 91, 101, 107, 113], el grado de estocasticidad, o sea, el impacto en la incertidumbre (podría decirse en la densidad de incertidumbre en un punto x del espaciotiempo) cuando se considera que el tensor de stress de un campo material que ‘reside’ en una región a la que el punto x pertenece es de naturaleza estocástica). Con la perspectiva de tal objetivo aplicaremos las medidas que se han demostrado útiles en los últimos tiempos en su aplicación a distintas disciplinas teóricas y experimentales.

Aunque queda lejos en el pasado el inicio de la aplicación de modelos probabilísticos a la Física Estadística, cuyo principal precedente puede considerarse la creación del concepto de entropía de un sistema que puede adoptar una multiplicidad muy grande de microestados, parece claro que tal prece-

dente, representado en la, no bien reconocida en su momento, fértil ley de Boltzmann, deviene, mediante una extrapolación directa, en conceptos que hoy pertenecen a la denominada Teoría de la Información. Iniciada en su formalización por Shannon y basada en sus importantes y sólidos teoremas, esta teoría tuvo un desarrollo explosivo, al que ha contribuido una élite numerosa de investigadores que han permitido una generalización y, en muchos casos, una aplicación más adecuada a determinados escenarios. La aplicación de la teoría, en un sentido amplio, se ha llevado a cabo en campos de conocimiento muy diversos, destacando, entre otros muchos, el de las telecomunicaciones. En el presente estudio se aplican esas medidas con el fin de mejorar la comprensión del conocimiento de un sistema físico relativista idealizado que requiere una descripción en términos estocásticos, en un caso sencillo ilustrativo.

El comportamiento probabilístico del tensor de stress $\xi(x)$ (en adelante ξ) está descrito por la densidad gaussiana conjunta de probabilidad $f(\xi)$, cuya expresión es

$$f(\xi) = (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \xi' N^{-1} \xi},$$

en la que N es el tensor de covarianza en el punto x .

El hecho de que, en general, el tensor N (ya ‘contraído’ en un primer nivel) no sea diagonal, implica la existencia de correlaciones mutuas ρ_{ij} entre las componentes del tensor gaussiano ξ . Como consecuencia, existe entre cada par de componentes una información mutua $I(\xi_i : \xi_j)$ que depende de su correlación ρ_{ij} . Puede decirse, por tanto, que el determinante $|N|$ es un indicador global del nivel de información mutua conjunta. Cabe interpretar que en la medida en que las informaciones mutuas son altas (o sea, las correlaciones son cercanas a la unidad), el valor de $|N|$ se hace pequeño. Por el contrario, si las informaciones mutuas fuesen nulas (las componentes son independientes) el tensor N sería diagonal y el valor de $|N|$ se haría máximo e igual a $\prod_{j=0}^3 \sigma_j^2$, donde σ_j es la desviación estándar de cada componente estocástica del tensor de stress.

Puede verificarse que, dadas dos componentes ξ_i y ξ_j cuya correlación mutua es ρ_{ij} , la información mutua $I(\xi_i : \xi_j)$ cumple

$$I(\xi_i : \xi_j) = I(\xi_j : \xi_i) = \ln \left\{ (1 - \rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (11.1)$$

En el Apéndice A se hace una aproximación a la relación entre $|N|$ y la información mutua ‘global’.

11.2. Entropía de Shannon

Una de las medidas más frecuentemente utilizadas para evaluar la incertidumbre, o la ‘desinformación’, de un sistema físico es la entropía de Shannon, definida en el mismo sentido que la entropía, o el ‘desorden’, de un sistema termodinámico susceptible de adoptar una multiplicidad de estados. Para una densidad de probabilidad de una variable continua tetradimensional ξ (caso que nos ocupa en esta memoria) la definición de la entropía S_ξ es [18]

$$S_\xi = - \int d^4\xi f(\xi) \ln f(\xi).$$

Por tanto, en un escenario gaussiano, se cumple

$$S_\xi = S(N) = \ln \left\{ (2\pi)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{2} \int d^4\xi (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} \xi' N^{-1} \xi e^{-\frac{1}{2} \xi' N^{-1} \xi}.$$

De acuerdo con el resultado del Apéndice C, para $n = 0$, se obtiene

$$\int d^4\xi (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} \xi' N^{-1} \xi e^{-\frac{1}{2} \xi' N^{-1} \xi} = Tr(I) = 4,$$

con lo que

$$S(N) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\},$$

claramente sensible a la información mutua entre las componentes de ξ .

Nótese que este concepto comporta una cierta dificultad de interpretación, por cuanto representa la aplicación de la función logaritmo a una magnitud que no es adimensional. Esta circunstancia, consecuencia de la inconsistencia relativa de la definición de la entropía de Shannon en el caso continuo, se verá resuelto, como veremos más adelante, aplicando una transformación conveniente en su incorporación a las medidas, o longitudes, entrópicas.

11.3. Información de Fisher

La medida de información de Fisher es un concepto que difiere de la entropía de Shannon, debido a que utiliza la derivada de la función de densidad,

por lo que se suele interpretar como una medida de ‘esparcimiento’ o deslocalización, ya que evalúa el ritmo de cambio local relativo de la densidad. En un caso general tetradimensional, se define como [39]

$$F_{\xi} = \int d^4\xi \frac{\left[\frac{d}{d\xi'} f(\xi) \right] \left[\frac{d}{d\xi} f(\xi) \right]}{f(\xi)} = \left\langle \frac{d}{d\xi'} \ln f(\xi) \frac{d}{d\xi} \ln f(\xi) \right\rangle. \quad (11.2)$$

En consecuencia, en un escenario gaussiano,

$$F_{\xi} = F(N) = \int d^4\xi (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} \xi' N^{-2} \xi e^{-\frac{1}{2} \xi' N^{-1} \xi},$$

de donde, de acuerdo con el resultado del Apéndice C para $n = -1$, se obtiene

$$F(N) = Tr(N^{-1}). \quad (11.3)$$

Se trata de una medida cuya dimensión es -2 y es sensible a la información mutua entre componentes.

11.4. Longitudes entrópicas convencionales

Con el fin de dotar de una utilidad práctica a los conceptos tradicionalmente propuestos para medir la cantidad de información, o el grado de incertidumbre, de uno o varios sistemas de naturaleza estocástica, se han definido históricamente unas medidas, asociadas a dichos conceptos, que se expresan en las unidades dimensionales adecuadas, lo que pretende facilitar, aunque no en todos los casos, además del análisis comparativo objetivo, la construcción de otras medidas más elaboradas y orientadas en diversos sentidos de aplicación.

Como veremos, las longitudes entrópicas convencionales son unidimensionales, excepto en el caso de la longitud de Shannon, que es tetradimensional. La utilidad de una longitud, dada una o varias distribuciones, tiene un valor relativo, es decir, dadas varias distribuciones, una longitud entrópica aporta un criterio que permite hacer una afirmación respecto a la mayor o menor longitud relativa de las mismas. En opinión del autor, el análisis comparativo entre las medidas basadas en longitudes entrópicas diferentes aplicadas a una distribución no posee una utilidad clara, dada la distinta naturaleza de cada longitud, construida en función de conceptos probabilísticos con una raíz histórica diferente.

11.4.1. Longitud de Shannon

El concepto de longitud de Shannon se define a partir de la entropía de Shannon cuando el sistema estocástico se basa en magnitudes continuas, como es el caso. Esta magnitud queda definida como $L_{S,\xi} = e^{S\xi}$, con lo que, en el caso gaussiano,

$$L_{S,\xi} = L_S(N) = (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}}.$$

Esta medida, que posee dimensiones de volumen tetradimensional, presenta notables ventajas, en cuanto a su interpretación, que salvan la dificultad de interpretación de la entropía de Shannon en el caso de una variable aleatoria continua.

Su valor se hace máximo cuando la correlación mutua (y, por tanto, la información mutua) de las componentes del tensor ξ es nula, mientras que tiende a anularse cuando las correlaciones mutuas son muy altas. Cabe esperar este resultado si se tiene en cuenta que si una o más correlaciones tienden a valores cercanos a la unidad, algunos autovalores del tensor N serían cercanos a cero, por lo que un proceso de transformación ortogonal de ξ y, por tanto, de $f(\xi)$, conduciría a una nueva densidad tetradimensional ‘ortonormalizada’, que sería el producto de densidades gaussianas independientes, algunas de ellas colapsadas (del tipo ‘delta’ de Dirac) en una o más dimensiones, lo que, en un contexto tetradimensional, implicaría una longitud de Shannon que tendería a cero (Apéndice B).

Como ya se ha comentado, dada la tetradimensión de esta medida, al margen del carácter irrelevante de la constante de proporcionalidad, hace que el análisis comparativo con el resto de longitudes entrópicas convencionales, que son medidas unidimensionales, carezca de utilidad física.

11.4.2. Longitud de Fisher

La longitud de Fisher $L_{F,\xi}$, definida como $L_{F,\xi} = F_\xi^{-\frac{1}{2}}$, es, consecuentemente, en un escenario gaussiano,

$$L_{F,\xi} = L_F(N) = \{Tr(N^{-1})\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Esta medida posee unidades de longitud unidimensional.

La longitud de Fisher tiende a anularse cuando las correlaciones mutuas entre componentes son altas.

11.4.3. Varianza global y desviación estándar

La raíz cuadrada de la varianza de una variable aleatoria es una medida tradicional de la dispersión. Por analogía con la definición de esta variable en el caso unidimensional, se puede hacer una generalización al caso tetradiimensional definiendo la varianza global Δ_ξ^2 como

$$\Delta_\xi^2 = \langle \xi' \xi \rangle.$$

En el caso particular gaussiano, de acuerdo con el resultado del Apéndice C, para $n = 1$, resulta

$$\Delta_\xi^2 = \Delta^2(N) = Tr(N).$$

En consecuencia, se obtiene el siguiente valor $\Delta(N)$ de la dispersión o desviación estándar gaussiana:

$$\Delta(N) = \{Tr(N)\}^{\frac{1}{2}},$$

que es una medida unidimensional no sensible al nivel de correlación mutua de las componente del tensor ξ .

11.5. Desequilibrio

Como se muestra en secciones precedentes, existe una variedad de candidatos para ser considerados como una medida directa de la incertidumbre de una densidad de probabilidad $f(\xi)$, como puede ser la bien conocida, y comúnmente utilizada, varianza Δ_ξ^2 . Un candidato importante, que comparte las propiedades positivas de la desviación estándar Δ_ξ (las mismas unidades de la variable, invarianza frente a traslación e inversión, linealidad de escala, y ‘colapso’ en el límite a una ‘delta’ de Dirac) es el ‘ratio’ de participación inversa o energía informacional D_ξ^{-1} [84], tal que

$$D_\xi = \int_\xi d^4\xi f^2(\xi).$$

El momento entrópico de segundo orden D_ξ se aplica en diferentes campos para representar la energía de información de Onicescu [77], autosimilitud [14], o desequilibrio [68]. Es también una cantidad medible experimentalmente en una diversidad de sistemas cuánticos [59].

Consecuentemente con su definición, el desequilibrio, o autosimilitud, tiene una interpretación, como medida de dispersión, en un sentido opuesto a las descritas anteriormente, e intenta cuantificar el grado de uniformidad de una distribución, midiendo la densidad media de la misma.

En nuestro escenario gaussiano de estudio

$$D_\xi = D(N) = \int_\xi d^4\xi (2\pi)^{-4} |N|^{-1} e^{-\xi' N^{-1} \xi}.$$

Por tanto,

$$D(N) = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}}.$$

El desequilibrio de una distribución tetradimensional que describe el comportamiento estocástico del tensor de ruido local del tensor de stress tiende a aumentar, como cabe esperar, en la medida en que son grandes las correlaciones mutuas entre componentes, de acuerdo con el argumento expuesto anteriormente. Si una o varias densidades parciales colapsan, ello implica en un contexto tetradimensional que el desequilibrio crece arbitrariamente.

En nuestro modelo, el desequilibrio muestra un comportamiento asimilable al de una longitud entrópica inversa.

11.6. Medidas de complejidad convencionales asociadas al tensor de ruido incondicional

En las últimas décadas ha crecido notablemente la aplicación de estas medidas adimensionales basadas en la información de una distribución, con la finalidad de cuantificar una magnitud, que se conviene en llamar ‘complejidad’, basada en la combinación eficaz de las medidas simples informacionales formuladas anteriormente. En esta memoria se analizarán específicamente las medidas de Cramér-Rao (C_{CR}), Fisher-Shannon (C_{FS}) y López-Mancini-Calbet (C_{LMC}).

La medida de Cramér-Rao [4] combina la información de Fisher y la dispersión de la distribución, o sea, el gradiente de la densidad y el esparcimiento local, de modo que

$$C_{CR,\xi} = F_\xi \Delta_\xi^2,$$

o, equivalentemente

$$C_{CR,\xi} = L_{F,\xi}^{-2} \Delta_\xi^2.$$

La medida resultante es el cuadrado del cociente de dos longitudes entrópicas. Por tanto, en este caso gaussiano de estudio,

$$C_{CR,\xi} = C_{CR}(N) = Tr(N^{-1}) Tr(N).$$

La medida de Fisher-Shannon [91, 100] hace un balance conjunto de la variación de la densidad y la deslocalización global, agrupando adecuadamente la información de Fisher y la entropía de Shannon. Su definición es

$$C_{FS,\xi} = F_{\xi} J_{S,\xi},$$

donde $J_{S,\xi}$ es un funcional, denominado potencia entrópica [27], que en el caso d-dimensional se define como

$$J_{S,\xi} = \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{2}{a} S_{\xi}},$$

por lo que en el caso tetradimensional adopta la expresión

$$J_{S,\xi} = \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{1}{2} S_{\xi}},$$

cuyas unidades son las del cuadrado de una longitud unidimensional. Por tanto, expresado en términos de cociente de longitudes entrópicas,

$$C_{FS,\xi} = L_{F,\xi}^{-2} \left(J_{S,\xi}^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

En nuestro caso gaussiano,

$$J_{S,\xi} = J_S(N) = |N|^{\frac{1}{4}},$$

y, consecuentemente,

$$C_{FS,\xi} = C_{FS}(N) = Tr(N^{-1}) |N|^{\frac{1}{4}}.$$

Y finalmente, se utiliza la medida de López-Mancini-Calbet [16, 68], que agrupa en un valor único el nivel medio de la densidad, tal como recoge el desequilibrio de la distribución, y la deslocalización evaluada a través de la longitud de Shannon. Su definición, acorde con este objetivo, responde a la expresión

$$C_{LMC,\xi} = D_{\xi} L_{S,\xi}.$$

Como se observa, esta medida adimensional es esencialmente diferente a las dos anteriores, tanto en su definición como en su interpretación. La medida C_{LMC} es la única medida de complejidad, de las tres que se han considerado, que es independiente de la información mutua entre componentes. En nuestro caso gaussiano de estudio se obtiene

$$C_{LMC,\xi} = C_{LMC}(N) = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Las tres medidas reflejan valores acordes con la hipótesis de un modelo de tensor estocástico gaussiano.

Entre otras propiedades significativas, destaca la propiedad, compartida por las tres medidas de complejidad analizadas, de invariancia frente a cambios homogéneos de escala [101].

Estas medidas presentan cotas inferiores que dependen de la dimensión del espacio de la variable probabilística (ver [66], [27] y [18], respectivamente, para LMC, FS y CR). En un caso general las cotas son

$$C_{LMC}(N) \geq 1,$$

$$C_{FS}(N) \geq 4,$$

$$C_{CR}(N) \geq 4^2,$$

donde el valor 4 corresponde a la dimensión del espaciotiempo, y por tanto, a la del tensor de stress. Las cotas C_{CR} y C_{FS} se saturan cuando la variable aleatoria sobre la que se aplican tiene estructura gaussiana.

Para medidas de complejidad similares a las que se han analizado, definidas como producto de dos magnitudes con dimensión inversa (lo que les aporta la mencionada adimensionalidad), genéricamente $C = AB$, una cota inferior constante k , tal que $C \geq k$, impone una restricción mutua entre los factores A y B , ya que los valores que estas magnitudes pueden tomar deben cumplir la condición $AB \geq k$. Esto significa que, en el caso en que k es positivo, los rangos de valores posibles de A y B son, respectivamente, las semirrectas reales de valores positivos $A \in [k/B, +\infty)$ y $B \in [k/A, +\infty)$.

Consideremos el denominado *plano de información* $A - B$ [4, 91, 100], o sea, la región subtendida por los dos ejes ortogonales asociados con las cantidades $A \geq 0$ y $B \geq 0$, perteneciente al primer cuadrante del plano real. Sin embargo, la restricción mutua entre A y B delimita en este cuadrante unas regiones denominadas ‘región permitida’ y ‘región prohibida’. La frontera entre ambas regiones, o sea, la curva definida por la igualdad $AB = k$,

pertenece a la ‘región permitida’ debido a que las cotas son accesibles. Esta curva es el conjunto de pares de valores (A, B) para los que la desigualdad $C \geq k$ resulta ‘saturada’.

Estos comentarios son aplicables a las tres medidas de complejidad que se han considerado, concretamente para LMC con $k = 1$, FS con $k = 4$, y CR con $k = 16$.

En opinión del autor, el hecho relevante es que estas medidas de complejidad poseen unas cotas inferiores. Sin embargo, estas cotas, que constituyen una referencia importante en los numerosos y muy diversos análisis realizados en este ámbito, derivan de las propiedades de conceptos probabilísticos clásicos que constituyen la base de su construcción, y quizá por este motivo se sigue haciendo uso de las mismas, aunque ello conllevaría una dificultad para establecer ciertos análisis comparativos entre medidas diferentes, si ello fuese procedente. Podemos decir esto en otros términos: las medidas utilizan escalas propias no homogéneas que responden a razones convencionales; la homogeneidad, o sea, el establecimiento de una cota única normalizada (eventualmente unitaria) sería fácilmente alcanzable realizando una simple reescala de los conceptos base utilizados, o bien, utilizando las propias cotas como factores inversos de normalización.

En cuanto al valor que ofrece la medida $C_{LMC}(N)$ es consecuencia del hecho de mantener la constante de proporcionalidad derivada de la forma naturalmente normalizada de la densidad gaussiana.

Capítulo 12

Evaluación de la reducción de la incertidumbre basada en la identificación de fuentes externas perturbadoras

El tensor N de covarianza es un tensor asimilado a una matriz cuadrada de orden 4, que tiene carácter incondicional y refleja la densidad de incertidumbre en un punto x del espaciotiempo. En nuestro caso de estudio se ha supuesto un escenario de equilibrio termodinámico, con pequeñas fluctuaciones aleatorias, que otorga un carácter estocásticamente estacionario a dicho tensor.

Sin embargo, dadas unas condiciones iniciales, o sea, a modo de ejemplo, el conocimiento cierto de un valor intrínseco del tensor en un punto x_a , causalmente conectado con x , se produce necesariamente una reducción de la incertidumbre del tensor $\xi(x)$ que, lógicamente, aumenta en alguna forma con el decrecimiento de la distancia entre x y x_a .

Revisaremos a continuación esa reducción de incertidumbre para los escenarios analizados en la Parte I de esta memoria, haciendo la hipótesis simplificadora de que V y N son tensores semejantes, o sea, sin deformación covariante entre ambos. Esto quiere decir que el ‘colapso’ desde N a V se produce mediante un cambio único de escala, manteniendo invariante la estructura interna de correlación.

12.1. Tensor de estrés con una estructura markoviana, condicional respecto a una información en un punto anterior del espaciotiempo

Como se ha visto en la Sección 4.1, en este caso los valores inducidos del tensor (estocástico) de stress en el punto x son valores condicionales como consecuencia de que se supone que el tensor residual $\epsilon(x, x_a)$ es un ruido blanco, o sea, carente de autocorrelación espaciotemporal, de tal modo que

$$f(\epsilon(x, x_a)) = (2\pi)^{-2} |V(x, x_a)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon'(x, x_a)V^{-1}(x, x_a)\epsilon(x, x_a)},$$

supuesto conocido el tensor de correlación $N(x, x_a)$ entre los puntos x y x_a . Este escenario markoviano estacionario implica que cualquier información acerca del tensor en un punto ‘anterior’ a x_a no aporta reducción adicional de incertidumbre y que el tensor $N(x, x_a)$ solo depende de la pseudodistancia $|x - x_a|$ entre los puntos conectados x y x_a , de modo que podría expresarse $N(x, x_a) = N(|x - x_a|)$.

De acuerdo con las expresiones (4.2) y (4.3) el tensor de distancia $U(x, x_a)$ adopta la forma

$$U(x, x_a) = I - A(x, x_a) N A'(x, x_a) N^{-1},$$

siendo $A(x, x_a)$ el tensor de propagación entre los puntos x y x_a y N el tensor de correlación en un punto. En consecuencia, el tensor $\Pi(x, x_a)$ de carga de correlación adopta la expresión

$$\Pi(x, x_a) = A(x, x_a) N A'(x, x_a) N^{-1}.$$

Por tanto, la función de densidad de $\epsilon(x, x_a)$ puede ser expresada como

$$f(\epsilon(x, x_a)) = (2\pi)^{-2} |U(x, x_a)|^{-\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon'(x, x_a)N^{-1}U^{-1}(x, x_a)\epsilon(x, x_a)}.$$

A modo de ejemplo simplificado, bajo una hipótesis de correlación dinámica espaciotemporal estable del tensor de stress, supongamos

$$N(x, x_a) = e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} N,$$

lo que equivale a suponer, según la expresión (4.2), que el propagador $A(x, x_a)$ adopta la forma diagonal simplificada

$$A(x, x_a) = e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} I,$$

siendo I el tensor identidad y α un número real negativo (bajo la hipótesis de estacionariedad el ‘decay factor’ $e^{\frac{\alpha}{2}}$ debe ser menor que la unidad). En un escenario más próximo a un escenario real debe considerarse una estructura más general del propagador A , con autovalores diferentes en cada dimensión.

En este ejemplo, el tensor de distancia adquiere la expresión

$$U(x, x_a) = I - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} I N e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} N^{-1} = (1 - e^{\frac{\alpha}{2}}) I.$$

En consecuencia, el tensor de carga de correlación es

$$\Pi(x, x_a) = I - U(x, x_a) = e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} I.$$

En cuanto al tensor condicional de covarianza de $\epsilon(x, x_a)$, se obtiene

$$V(x, x_a) = U(x, x_a) N = (1 - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}) N.$$

Por tanto, la función de densidad puede expresarse como

$$f(\epsilon(x, x_a)) = (2\pi u(|x - x_a|))^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2u(|x-x_a|)} \epsilon'(x, x_a) N^{-1} \epsilon(x, x_a)},$$

donde $u(|x - x_a|)I$ es el tensor de distancia y $u(|x - x_a|)$ un factor (escalar) de distancia, definido en la Parte I, de modo que

$$U(x, x_a) = u(|x - x_a|) I = (1 - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}) I,$$

$$u(|x - x_a|) = |U(x, x_a)|^{\frac{1}{4}} = 1 - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}.$$

El factor de carga de correlación $\pi(|x - x_a|)$ adquiere el valor

$$\pi(|x - x_a|) = |\Pi(x, x_a)|^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} = 1 - u(|x - x_a|).$$

Por tanto, $u(|x - x_a|) + \pi(|x - x_a|) = 1$. En adelante, por simplicidad de notación, designaremos $\epsilon(x, x_a) = \epsilon$, $u(|x - x_a|) = u$ y $\pi(|x - x_a|) = \pi$.

El factor u toma valores entre 0 (para $|x - x_a| = 0$) y 1 (para $|x - x_a| = \infty$).

El factor π toma valores entre 0 (para $|x - x_a| = \infty$) y 1 (para $|x - x_a| = 0$).

12.2. Tensor de estrés con una estructura no markoviana (dos fuentes externas no correlacionadas), condicional respecto a una información en un punto anterior del espaciotiempo

De acuerdo con el Apéndice D, en el caso de dos fuentes externas markovianas agregadas, sin información mutua, podemos exponer el siguiente esquema de correlación:

$$A(x, x_a) = A_1(x, x_a)\Gamma + A_2(x, x_a)(I - \Gamma),$$

siendo $A(x, x_a)$ el tensor de propagación del proceso agregado $\xi(x)$ entre los puntos x y x_a , y los tensores $A_1(x, x_a)$ y $A_2(x, x_a)$ los propagadores de los procesos componentes. Los tensores Γ y $I - \Gamma$ son los tensores de peso de los procesos $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, dados por $\Gamma = N_1 N^{-1}$ y $I - \Gamma = N_2 N^{-1}$, siendo N , N_1 y N_2 los núcleos de covarianza respectivos de los procesos $\xi(x)$ (agregado), $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$.

Según la expresión (D.1), el tensor de covarianza condicional V_2 del tensor estocástico, es decir, la varianza de ε , tal que $\varepsilon = \varepsilon_1(x, x_a) + \varepsilon_2(x, x_a)$, viene dada por

$$V_2 = N - A_1(x, x_a)\Gamma N A_1'(x, x_a) - A_2(x, x_a)(I - \Gamma)N A_2'(x, x_a).$$

Entonces el tensor de distancia $U(x, x_a)$ adopta la expresión

$$U(x, x_a) = I - [A_1(x, x_a)\Gamma N A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)(I - \Gamma)N A_2'(x, x_a)]N^{-1},$$

y, por tanto, el tensor de carga de correlación $\Pi(x, x_a)$ es

$$\Pi(x, x_a) = [A_1(x, x_a)\Gamma N A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)(I - \Gamma)N A_2'(x, x_a)]N^{-1}.$$

Veamos un caso particular en el que suponemos los propagadores diagonales simplificados

$$A_1(x, x_a) = e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}I,$$

$$A_2(x, x_a) = e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|}I,$$

siendo α y β dos escalares negativos, lo que asegura que los factores de ‘caída’ $e^{\frac{\alpha}{2}}$ y $e^{\frac{\beta}{2}}$ son valores comprendidos entre 0 y 1, y, por, tanto, que el proceso $\xi(x)$ es estacionario.

Por tanto, el tensor de covarianza condicional viene dada por

$$V_2 = N - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} \Gamma N e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} (I - \Gamma) N e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|}.$$

En consecuencia,

$$V_2 = V(x, x_a) = N - e^{\alpha|x-x_a|} \Gamma N - e^{\beta|x-x_a|} (I - \Gamma) N.$$

En definitiva

$$V(x, x_a) = \{I - e^{\alpha|x-x_a|} \Gamma - e^{\beta|x-x_a|} (I - \Gamma)\} N.$$

El tensor de distancia $U(x, x_a)$ viene dado por

$$U(x, x_a) = I - e^{\alpha|x-x_a|} \Gamma - e^{\beta|x-x_a|} (I - \Gamma),$$

y el tensor $\Pi(x, x_a)$ de carga de correlación por

$$\Pi(x, x_a) = e^{\alpha|x-x_a|} \Gamma + e^{\beta|x-x_a|} (I - \Gamma).$$

Bajo una hipótesis simplificadora adicional tal que $\Gamma = \gamma I$, podemos expresar el factor de distancia u como

$$u = |U|^{\frac{1}{4}} = 1 - \gamma e^{\alpha|x-x_a|} - (1 - \gamma) e^{\beta|x-x_a|}.$$

El factor de carga de correlación π adquiere el valor

$$\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = \gamma e^{\alpha|x-x_a|} (1 - \gamma) e^{\beta|x-x_a|} = 1 - u.$$

Por tanto, la función de densidad de ε viene dada por

$$f(\varepsilon) = (2\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2u} \varepsilon' N^{-1} \varepsilon}.$$

Al igual que en la sección anterior, el factor u toma valores entre 0 (para $|x - x_a| = 0$) y 1 (para $|x - x_a| = \infty$) y el factor π toma valores entre 0 (para $|x - x_a| = \infty$) y 1 (para $|x - x_a| = 0$).

En este caso la reducción de incertidumbre frente al escenario de una fuente única identificada es

$$\Delta_V = \left(e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} \right) \Gamma N (1 - \Pi') \left(e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} \right)'$$

Utilizando la hipótesis $\Gamma = \gamma I$ obtenemos

$$\Delta_V = \left(e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} \right)^2 \gamma (1 - \gamma) N,$$

expresión que evidencia, como cabía esperar, que la ganancia en disminución de la incertidumbre aumenta con la reducción de la distancia, la discrepancia entre los valores de α y β y la aproximación de γ a los valores 0 ó 1.

12.3. Tensor de estrés con una estructura general no markoviana (dos fuentes externas correlacionadas), condicional respecto a una información en un punto anterior del espaciotiempo

De acuerdo con los resultados obtenidos en el Apéndice D planteamos un siguiente ahora esquema general de correlación:

$$A(x, x_a) = A_1(x, x_a)\Gamma_1 + A_2(x, x_a)\Gamma_2 + \{A_1(x, x_a)C_{12} + A_2(x, x_a)C_{21}\}N^{-1}.$$

Alternativamente,

$$A(x, x_a) = A_1(x, x_a)(\Gamma_1 + C_{12}N^{-1}) + A_2(x, x_a)(\Gamma_2 + C_{21}N^{-1}),$$

siendo $A(x, x_a)$, como sabemos, el tensor de propagación del proceso agregado $\xi(x)$ entre los puntos x y x_a . Los tensores Γ_1 y Γ_2 son los tensores de peso de autocorrelación de los procesos $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, respectivamente, dados por $\Gamma_1 = N_1N^{-1}$ y $\Gamma_2 = N_2N^{-1}$. Los tensores C_{12} y C_{21} (mutuamente transpuestos) son los tensores de covarianza mutua entre los procesos $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$. Y el tensor N es el núcleo de covarianza del proceso agregado $\xi(x)$.

Según la expresión (D.7), el tensor condicional de covarianza tensor estocástico, es decir, el tensor de covarianza de ε , tal que $\varepsilon = \varepsilon_1(x, x_a) + \varepsilon_2(x, x_a)$, estando ahora $\varepsilon_1(x, x_a)$ y $\varepsilon_2(x, x_a)$ correlacionados, viene dada por

$$\begin{aligned} V_2 = N - A_1(x, x_a)\Gamma_1NA'_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\Gamma_2NA'_2(x, x_a) \\ - A_1(x, x_a)C_{12}A'_2(x, x_a) - A_2(x, x_a)C_{21}A'_1(x, x_a). \end{aligned}$$

Entonces el tensor de distancia $U(x, x_a)$ adopta la expresión

$$\begin{aligned} U(x, x_a) = I - \{A_1(x, x_a)\Gamma_1NA'_1(x, x_a) + A_2(x, x_a)\Gamma_2NA'_2(x, x_a)\}N^{-1} \\ - \{A_1(x, x_a)C_{12}A'_2(x, x_a) + A_2(x, x_a)C_{21}A'_1(x, x_a)\}N^{-1}. \end{aligned}$$

El tensor de carga de correlación $\Pi(x, x_a)$ es

$$\begin{aligned} \Pi(x, x_a) = \{A_1(x, x_a)\Gamma_1NA'_1(x, x_a) + A_2(x, x_a)\Gamma_2NA'_2(x, x_a)\}N^{-1} \\ + \{A_1(x, x_a)C_{12}A'_2(x, x_a) + A_2(x, x_a)C_{21}A'_1(x, x_a)\}N^{-1}. \end{aligned}$$

De modo similar al desarrollo de la sección anterior analizamos un caso particular en el que suponemos los propagadores simplificados

$$\begin{aligned} A_1(x, x_a) &= e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} I, \\ A_2(x, x_a) &= e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} I, \end{aligned}$$

siendo α y β dos escalares negativos, lo que asegura que los factores de ‘caída’ $e^{\frac{\alpha}{2}}$ y $e^{\frac{\beta}{2}}$ son valores comprendidos entre 0 y 1 y, por, tanto, que el proceso $\xi(x)$ es estacionario.

Además suponemos que el tensor de correlación C entre las componentes estocásticas de los tensores de stress, provocadas por la perturbación de las dos fuentes consideradas, verifica (Apéndice D)

$$2CN^{-1} = I - \Gamma_1 - \Gamma_2, \quad (12.1)$$

donde C es la magnitud definida en (D.15) e introducida en la Sección 5.1 bajo la denominación $X_{1,2}$. O sea, $C = X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$.

Añadiendo las hipótesis simplificadoras $\Gamma_1 = \gamma_1 I$ y $\Gamma_2 = \gamma_2 I$, y la condición

$$|\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2}| \leq 1 \leq \sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2},$$

obtenemos que la reducción de incertidumbre frente al escenario de una fuente única identificada es

$$\Delta_V = \left(e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} \right)^2 \gamma (1 - \gamma) (1 - \rho_x^2) N, \quad (12.2)$$

donde ρ_x es un parámetro (coeficiente de correlación entre los dos procesos markovianos) que verifica

$$\rho_x = \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}.$$

La expresión (12.2) evidencia, como cabía esperar, que la ganancia en disminución de la incertidumbre aumenta con la reducción de la distancia, la discrepancia entre los valores de α y β y la aproximación de γ_1 o γ_2 a 0.

A partir de (D.4) obtenemos

$$\begin{aligned} V_2 &= N - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} \Gamma_1 N e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} \Gamma_2 N e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} \\ &\quad - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} C e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} C e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}. \end{aligned}$$

Usando (12.1) resulta

$$V_2 = N - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}\Gamma_1 N e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|}\Gamma_2 N e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|} - e^{\frac{\alpha}{2}|x-x_a|}(I - \Gamma_1 - \Gamma_2)e^{\frac{\beta}{2}|x-x_a|}.$$

En consecuencia,

$$V_2 = V(x, x_a) = N - e^{\alpha|x-x_a|}\Gamma_1 N - e^{\beta|x-x_a|}\Gamma_2 N - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}|x-x_a|}(I - \Gamma_1 - \Gamma_2)N.$$

En definitiva

$$V(x, x_a) = \left\{ I - e^{\alpha|x-x_a|}\Gamma_1 - e^{\beta|x-x_a|}\Gamma_2 - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}|x-x_a|}(I - \Gamma_1 - \Gamma_2) \right\} N.$$

El tensor de distancia $U(x, x_a)$ viene dado por

$$U(x, x_a) = I - e^{\alpha|x-x_a|}\Gamma_1 - e^{\beta|x-x_a|}\Gamma_2 - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}|x-x_a|}(I - \Gamma_1 - \Gamma_2),$$

y el tensor $\Pi(x, x_a)$ de carga de correlación por

$$\Pi(x, x_a) = e^{\alpha|x-x_a|}\Gamma_1 + e^{\beta|x-x_a|}\Gamma_2 + e^{\frac{\alpha+\beta}{2}|x-x_a|}(I - \Gamma_1 - \Gamma_2).$$

En este caso podemos expresar el factor de distancia u como

$$u = 1 - \gamma_1 e^{\alpha|x-x_a|} - \gamma_2 e^{\beta|x-x_a|} - (1 - \gamma_1 - \gamma_2) e^{\frac{\alpha+\beta}{2}|x-x_a|}.$$

El factor de carga de correlación π adquiere el valor

$$\pi = \gamma_1 e^{\alpha|x-x_a|} + \gamma_2 e^{\beta|x-x_a|} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) e^{\frac{\alpha+\beta}{2}|x-x_a|} = 1 - u.$$

Por tanto, la función de densidad de ε viene dada por

$$f(\varepsilon) = (2\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2u}\varepsilon' N^{-1}\varepsilon},$$

donde los parámetros corresponden con los resultados obtenidos.

Al igual que en las secciones anteriores, el factor u toma valores entre 0 (para $|x - x_a| = 0$) y 1 (para $|x - x_a| = \infty$) y el factor π toma valores entre 0 (para $|x - x_a| = \infty$) y 1 (para $|x - x_a| = 0$).

12.4. Tensor de estrés con una estructura markoviana, condicional respecto a una información en dos puntos (anterior y posterior) del espaciotiempo

Tenemos en cuenta que, genéricamente, de acuerdo con (4.1),

$$\varepsilon'(x, x^*) = \xi'(x) - \xi'(x^*)A'(x, x^*),$$

cuyo tensor de covarianza (condicional) es

$$V(x, x^*) = N - N(x, x^*)N^{-1}N(x, x^*),$$

donde $N(x, x^*) = A(x, x^*)N$.

El caso que se analiza constituye una extensión de la Sección 12.1 en la que se considera una información adicional aprovechable de cara a la reducción de la incertidumbre de $\xi(x)$, debido al hecho de que dicha información procede del ‘otro lado’ (el futuro respecto a x) de la geodésica.

Analizamos directamente el caso usando una vez más la simplificación correspondiente a un modelo estacionario simple:

$$N(x, x^*) = e^{\frac{\alpha}{2}|x-x^*|} N,$$

al que corresponde un factor de distancia $u(x, x^*)$, tal que

$$u(x, x^*) = 1 - e^{\alpha|x-x^*|}.$$

Sin embargo, por comodidad en el desarrollo analítico, definamos dos factores de distancia designados como $u(x_b, x)$ (adelantado) y $u(x, x_a)$ (retrasado), siendo x_a y x_b dos puntos espaciotemporales, anterior y posterior, respectivamente, en cuanto a la posición temporal relativa al punto x .

Mediante el análisis bayesiano adecuado (que por ser tedioso obviamos en el texto) obtenemos la función de densidad $f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b))$ condicional, cuya forma es

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) = (2\pi \frac{u_a u_b}{u_a + u_b - u_a u_b})^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u_a + u_b - u_a u_b}{2u_a u_b} \Lambda'(x, x_a, x_b) N^{-1} \Lambda(x, x_a, x_b)},$$

siendo

$$\Lambda(x, x_a, x_b) = \xi(x) - \left\{ \frac{u_a \sqrt{1 - u_b}}{u_a + u_b - u_a u_b} \xi(x_b) + \frac{u_b \sqrt{1 - u_a}}{u_a + u_b - u_a u_b} \xi(x_a) \right\}.$$

En consecuencia

$$E[\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)] = \frac{u_a\sqrt{1-u_b}}{u_a+u_b-u_a u_b}\xi(x_b) + \frac{u_b\sqrt{1-u_a}}{u_a+u_b-u_a u_b}\xi(x_a),$$

$$V(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) = \frac{u_a u_b}{u_a+u_b-u_a u_b} N.$$

Podemos visualizar la reducción de incertidumbre comparando con el caso condicional respecto, solamente, al pasado, expresando alternativamente la varianza como

$$V(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) = \left\{ 1 - \frac{1 - (1 - u_a)(1 - u_b) - u_a u_b}{1 - (1 - u_a)(1 - u_b)} \right\} N.$$

De aquí deducimos que el tensor de distancia U del proceso condicional es

$$U = V(\xi(x), x_a, x_b)N^{-1} = \frac{u_a u_b}{u_a + u_b - u_a u_b} I.$$

y el factor global de distancia u es, por tanto,

$$u = |U|^{\frac{1}{4}} = \frac{u_a u_b}{u_a + u_b - u_a u_b} = 1 - \frac{1 - (1 - u_a)(1 - u_b) - u_a u_b}{1 - (1 - u_a)(1 - u_b)}.$$

El factor de carga global de correlación π viene dada, en consecuencia, por

$$\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = \frac{u_a + u_b - 2u_a u_b}{u_a + u_b - u_a u_b} = \frac{1 - (1 - u_a)(1 - u_b) - u_a u_b}{1 - (1 - u_a)(1 - u_b)} = 1 - u,$$

donde, recordemos, $u_a = 1 - e^{-\alpha|x-x_a|}$ y $u_b = 1 - e^{-\alpha|x-x_b|}$, lo que proporciona

$$u = \frac{(1 - e^{-\alpha|x-x_a|})(1 - e^{-\alpha|x-x_b|})}{1 - e^{-\alpha|x_a-x_b|}},$$

$$\pi = \frac{e^{-\alpha|x-x_a|} + e^{-\alpha|x-x_b|} - 2e^{-\alpha|x_a-x_b|}}{1 - e^{-\alpha|x_a-x_b|}}.$$

Casos particulares:

1.- El punto espaciotemporal x_b está infinitamente alejado, o sea, $u_b = 1$.
En este caso

$$E[\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)] = E[\xi(x)|\xi(x_a)] = \sqrt{1 - u_a} \xi(x_a),$$

$$V(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) = V(\xi(x)|\xi(x_a)) = u_a N,$$

equivalente al caso descrito en la Sección 12.1 (markoviano respecto al pasado), ya analizado, que proporciona

$$u = 1 - e^{\alpha|x-x_a|},$$

$$\pi = e^{\alpha|x-x_a|}.$$

2.- Los puntos espaciotemporales u_a y u_b están situados a la misma distancia de u . Se cumple $u_a = u_b = u^*$. Entonces

$$E[\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)] = \frac{\sqrt{1-u^*}}{2-u^*} \{\xi(x_b) + \xi(x_a)\},$$

$$V(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) = \frac{u^*}{2-u^*} N.$$

De aquí deducimos que el tensor de distancia U del proceso condicional es

$$U = V(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_b)) N^{-1} = \frac{u^*}{2-u^*} I,$$

y el factor global de distancia u es, por tanto,

$$u = |U|^{\frac{1}{4}} = \frac{u^*}{2-u^*}.$$

El factor de carga global de correlación π viene dada, en consecuencia, por

$$\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = \frac{2(1-u^*)}{2-u^*} = 1-u,$$

sabiendo que $u^* = u_a = 1 - e^{\alpha|x-x_a|}$.

Por tanto,

$$u = \frac{1-e^{\alpha|x-x_a|}}{1+e^{\alpha|x-x_a|}},$$

$$\pi = \frac{2e^{\alpha|x-x_a|}}{1+e^{\alpha|x-x_a|}}.$$

En todos los casos simplificados analizados se ha obtenido el resultado $u + \pi = 1$ (lo cual en general no se cumple) y el factor de deformación covariante τ es igual a 0, ya que, siendo V y N ‘semejantes’ en este caso, no hay deformación covariante. En estos casos particulares, las hipótesis simplificadoras conllevan el hecho de que U y Π son tensores diagonales en los que los elementos de la diagonal principal coinciden, lo que justifica los resultados.

En un caso más general, en el que los 4 autovalores $e^{\frac{\alpha_i}{2}|x'-x|}$, $i = 0, 1, 2, 3$, de A son diferentes, no hay ‘semejanza’ entre V y N . En este último caso $\pi = e^{\frac{\sum_{i=0}^3 \alpha_i |x'-x|}{4}}$ y, por tanto, $u = \prod_{i=0}^3 (1 - e^{\alpha_i |x'-x|})^{\frac{1}{4}}$.

Consecuentemente $\tau = 1 - \left\{ e^{\frac{\sum_{i=0}^3 \alpha_i |x' - x|}{4}} + \prod_{i=0}^3 (1 - e^{\alpha_i |x' - x|})^{\frac{1}{4}} \right\} \geq 0$.

El valor τ es estrictamente mayor que 0 cuando los cuatro autovalores son diferentes (entonces existe deformación covariante y la invariancia de las medidas de complejidad no se cumple al comparar los tensores de covarianza incondicional N y condicional V).

Capítulo 13

Medidas entrópicas condicionales

Como punto de partida para el presente capítulo, consideremos de nuevo las magnitudes informacionales más relevantes en un escenario gaussiano.

En particular, la relación $|V| = u^4|N|$ entre los determinantes de los tensores de covarianza N (incondicional) y V (condicional) permite determinar analíticamente la entropía de Shannon, la longitud entrópica de Shannon y la potencia entrópica como

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= S(V) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\}, \\ L_{S,\varepsilon} &= L_S(V) = (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = u^2 L_S(N), \\ J_{S,\varepsilon} &= J_S(V) = \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{1}{2}S(V)} = |V|^{\frac{1}{4}} = u |N|^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

con lo que se cuantifica la reducción de la entropía y el acortamiento de la longitud entrópica de Shannon, como consecuencia de la reducción de la incertidumbre. La variación de estas magnitudes es

$$\delta_{|x'-x|} S = S(V) - S(N) = 2 \ln u, \quad (13.1)$$

$$\delta_{|x'-x|} L_S = L_S(V) - L_S(N) = (u^2 - 1)L_S(N) = (u^2 - 1)(2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta_{|x'-x|} J_S = J_S(V) - J_S(N) = (u - 1) |N|^{\frac{1}{4}}.$$

Obsérvese que, dado que $f(\varepsilon(x, x_a)) = f(\xi(x)|\xi(x_a))$, puede deducirse de (13.1) que la cantidad $\delta_{|x-x_a|} S$ es igual, cambiada de signo, a la información mutua $I(\xi : \varepsilon)$ entre los tensores ξ y ε .

En el nuevo escenario condicional el factor $1 - u^2$ representa el ratio de acortamiento de la longitud de Shannon, o sea, el grado de reducción de la incertidumbre. La variación negativa (ya que la incertidumbre decae) de la entropía de Shannon sólo depende del factor de distancia.

En cuanto a la dispersión estimada mediante la desviación estándar, el resultado obtenido es

$$\Delta_\varepsilon = \Delta(V) = \{Tr(V)\}^{\frac{1}{2}} = \{Tr(UN)\}^{\frac{1}{2}},$$

que refleja una reducción, evaluada como

$$\delta_{|x'-x|}\Delta = \Delta(V) - \Delta(N) = \{Tr(UN)\}^{\frac{1}{2}} - \{Tr(N)\}^{\frac{1}{2}}.$$

En el caso particular en que $U = uI$, que representaría un cambio homogéneo de escala, obtenemos

$$\Delta(V) = u^{\frac{1}{2}}\Delta(N).$$

En este caso la reducción podemos evaluarla como

$$\delta_{|x'-x|}\Delta = \Delta(V) - \Delta(N) = \left(u^{\frac{1}{2}} - 1\right)\Delta(N) = \left(u^{\frac{1}{2}} - 1\right)\{Tr(N)\}^{\frac{1}{2}}.$$

La reducción relativa del grado de dispersión de la distribución sería, por tanto, $1 - u^{\frac{1}{2}}$.

El desequilibrio, o densidad media, se ve asimismo modificado, siendo ahora su valor

$$D_\varepsilon = D(V) = (4\pi)^{-2}|V|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi u)^{-2}|N|^{-\frac{1}{2}} = u^{-2}D(N).$$

El desequilibrio, como cabía esperar, aumenta. El incremento es $u^{-2} - 1$, en términos relativos.

Finalmente se hace referencia al efecto que la información disponible produce en la, ahora condicional, información de Fisher. Las nuevas medidas proporcionan los resultados

$$F_\xi = F(V) = Tr(V^{-1}) = Tr(N^{-1}(U^{-1})) = Tr(UN^{-1}),$$

$$L_{F,\varepsilon} = L_F(V) = F^{-\frac{1}{2}}(V).$$

En el caso particular en que $U = uI$ (cambio homogéneo de escala) obtenemos

$$F(V) = Tr(V^{-1}) = u^{-1}Tr(N^{-1}) = u^{-1}F(N),$$

$$L_F(V) = F^{-\frac{1}{2}}(V) = u^{\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}}(N) = u^{\frac{1}{2}}L_F(N).$$

La información de Fisher aumenta y la longitud de Fisher disminuye.

13.1. La complejidad del modelo de tensor condicional

El conocimiento de unas condiciones iniciales, asignadas a un punto del espaciotiempo, implica, bajo la hipótesis $U = uI$, una reescala, representada por el factor de distancia, del modelo probabilístico, que sigue siendo gaussiano, aunque con un núcleo de covarianza ‘reducido’. Por ese motivo, las medidas adimensionales de complejidad no varían.

Se ha producido un cambio de escala en las medidas fundamentales de la incertidumbre, pero se produce una compensación perfecta en la combinación de esas magnitudes para elaborar la medida la complejidad. Por tanto, la complejidad, robustamente construida, no cambia con en el cambio de escenario, como es razonable.

Sin embargo, implícitamente, algo sí ha cambiado, ya que la densidad probabilística tetradimensional se ha ‘contraído’, aunque permanezca la estructura gaussiana. De hecho, las longitudes entrópicas, que genéricamente evalúan la dispersión de la distribución, se han reducido (en un factor en todos los casos) y, como se ha visto, las medidas de complejidad guardan una relación potencial entre longitudes entrópicas, interpretando el desequilibrio como una longitud inversa de volumen tetradimensional. No cambia el resultado, pero sí la cuantía de los factores componentes. Explícitamente:

$$\begin{aligned}
 C_{CR,\varepsilon} &= C_{CR}(V) = L_F^{-2}(V) \Delta^2(V) = u^{-1} L_F^{-2}(N) u \Delta^2(N) \\
 &= C_{CR}(N), \\
 C_{FS,\varepsilon} &= C_{FS}(V) = L_F^{-2}(V) \left(J_S^{\frac{1}{2}}(V) \right)^2 = u^{-1} L_F^{-2}(N) u \left(J_S^{\frac{1}{2}}(N) \right)^2 \\
 &= C_{FS}(N), \\
 C_{LMC,\varepsilon} &= C_{LMC}(V) = D(V) L_S(V) = u^{-2} D(N) u^2 L_S(N) \\
 &= C_{LMC}(N).
 \end{aligned}$$

Por tanto, las complejidades se conservan, debido a la hipótesis ‘diagonal’, que proporciona $Tr(N) = uTr(V)$. En un caso general, en el que $Tr(N) \neq uTr(V)$, la condición de invariancia no se cumple para C_{CR} y C_{FS} .

13.2. Entropía relativa, similitud y divergencia de los escenarios incondicional y condicional

Anteriormente se ha aludido a unas medidas elementales (del tipo ‘ratio’ de variación), que son de uso común en cualquier ámbito de conocimiento, para cuantificar el grado de variación de las medidas fundamentales asociadas a un contexto de incertidumbre, en el que ésta cambia debido a que pueden presentarse diferentes escenarios (con distintos grados de estocasticidad) por causas diversas.

La investigación suele avanzar, en general, en el sentido de definir unas magnitudes que, además de constituir un estándar de comunicación lo más válido posible, posean buenas propiedades, que permitan la consolidación de los conceptos y la robusta interrelación interdisciplinar. Así sucede en el ámbito de la Teoría de la Información, lo que justifica su amplia y exitosa aplicabilidad.

En nuestro caso de estudio, la causa que hace variar el grado de incertidumbre en un punto del espaciotiempo es el conocimiento de una determinada información, concretamente el valor adoptado por el tensor aleatorio de stress en otro punto. Se trata de un caso sencillo en el que la estructura probabilística no cambia esencialmente, pero sufre una ‘contracción’ (asociada a la reducción de incertidumbre), lo que modifica los parámetros de la distribución probabilística. Bajo la hipótesis de un comportamiento estocástico gaussiano del tensor de stress, los únicos parámetros que cambian son los momentos tetradimensionales de segundo orden, recogidos en unos tensores (núcleos de covarianza) que reflejan la estructura local de correlación (en un punto dado) o de separación espaciotemporal (dados dos puntos distintos).

Las medidas de entropía relativa y divergencia de dos densidades de probabilidades [94], que forman parte de ese lenguaje común, exhiben unas propiedades que aconsejan su uso, y así se hace a modo de ejemplo de aplicación en esta sección, aunque las dos densidades objeto de comparación cuantificada correspondan a la misma magnitud física, con niveles de incertidumbre distintos.

Con el fin de simplificar la notación convendremos en denominar f_0 y f_1 a $f(\xi)$ y $f(\varepsilon)$, respectivamente, y omitiremos, por simplicidad notacional, el diferencial de tetravolumen en las expresiones integrales.

13.3. M-Divergencias

Las denominadas M-divergencias se caracterizan por la expresión general

$$M_{(\phi)}[f_1, f_0] = \int \left(\phi(f_1)^{\frac{1}{2}} - \phi(f_0)^{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

siendo ϕ un funcional real, convexo, positivo y diferenciable. Son medidas simétricas y no-negativas. Su capacidad para medir una divergencia es evidente y poseen la propiedad de ‘saturación’, o sea que cumplen $M_{(\phi)}[f_1, f_0] = 0$ cuando $f_0 = f_1$. Analizaremos dos casos de uso común.

13.3.1. Distancia Cuadrática

La Distancia Cuadrática $QD[f_1, f_0]$ de dos densidades f_0 y f_1 es un concepto clásico intuitivo, que utilizamos con carácter introductorio. Es una medida de disimilitud o divergencia, definida como

$$QD[f_1, f_0] = \left(\int (f_1 - f_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La potencia de orden 2 de esta medida pertenece al conjunto de las M-divergencias, ya que, si se supone que ϕ es tal que $\phi(f) = f^2$, se obtiene

$$M_{(f^2)}[f_1, f_0] = \int (f_1 - f_0)^2 = QD^2[f_1, f_0].$$

Se trata evidentemente de una medida no-negativa. Podemos expresar

$$QD[f_1, f_0] = \left(\int f_1^2 + \int f_0^2 - 2 \int f_1 f_0 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dado que, en nuestro caso de estudio,

$$\int f_1^2 = (4\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\int f_0^2 = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\int f_1 f_0 = \{2\pi(1+u)\}^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}},$$

resulta

$$QD[f_1, f_0] = (1-u) \{4\pi u(1+u)\}^{-1} \{1+4u+u^2\}^{\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{4}},$$

resultado que es sensible a la información mutua entre componentes. Se deduce la propiedad

$$|x - x_a| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow QD[f_1, f_0] = \infty,$$

o sea, incertidumbre nula, y la denominada propiedad de ‘saturación’:

$$|x - x_a| = \infty \Rightarrow u = 1 \Rightarrow QD[f_1, f_0] = 0,$$

o sea, absoluta ausencia de información: $f_0 \equiv f_1$.

13.3.2. Divergencia de Matusita

Es un caso simple en el que se supone $\phi(f) = f$. Esta medida responde a la expresión

$$MD[f_1, f_0] = \int \left(f_1^{\frac{1}{2}} - f_0^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

En nuestro caso

$$\int f_1^{\frac{1}{2}} f_0^{\frac{1}{2}} = 4u(1+u)^{-2}.$$

Por tanto,

$$MD[f_1, f_0] = 2(1-u)^2(1+u)^{-2}.$$

El resultado es un valor comprendido entre 0 y 2, no sensible a la información mutua entre componentes. Se cumple la propiedad de ‘saturación’:

$$|x - x_a| = \infty \Rightarrow u = 1 \Rightarrow MD[f_1, f_0] = 0.$$

13.4. Divergencias de Csiszár

Las divergencias de Csiszár son medidas que adoptan la expresión general

$$C_{(\phi)}[f_1, f_0] = \int f_1 \phi\left(\frac{f_1}{f_0}\right),$$

siendo, igualmente, ϕ un funcional real, convexo, positivo y diferenciable, que además cumple $\phi(1) = 0$. Constituyen una clase amplia de divergencias, en la que destacamos seguidamente algunas de las más importantes.

13.4.1. Entropía de Kullback-Leibler

La entropía relativa de Kullback-Leibler es una medida que evalúa la desviación de f_1 respecto a f_0 . Por tanto, f_0 es la densidad de referencia, acorde con el objetivo del análisis. Se trata de una medida que posee la propiedad de no-negatividad, cuya definición corresponde a $\phi\left(\frac{f_1}{f_0}\right) = \ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right)$. Por tanto, su expresión es

$$KL[f_1, f_0] = \int f_1 \ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right).$$

En nuestro análisis el cálculo conduce al resultado

$$KL[f_1, f_0] = -2(1 - u + \ln u).$$

Es destacable el hecho de que la medida no es sensible a la información mutua entre componentes, similarmente a la variación de la entropía de Shannon con la distancia. Igualmente se cumplen las propiedades

$$|x - x_a| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow KL[f_1, f_0] = \infty,$$

$$|x - x_a| = \infty \Rightarrow u = 1 \Rightarrow KL[f_1, f_0] = 0.$$

13.4.2. Divergencia de Jeffreys

La entropía relativa de Kullback-Leibler cumple la propiedad de ‘saturación’. Esta medida no es, en general simétrica, por lo que se define la entropía de Kullback-Leibler ‘simetrizada’, o divergencia de Jeffreys $JD[f_1, f_0]$, entre dos densidades f_0 y f_1 , como

$$JD[f_1, f_0] = KL[f_1, f_0] + KL[f_0, f_1] = \int f_1 \ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right) + \int f_0 \ln\left(\frac{f_0}{f_1}\right).$$

Dado que

$$KL[f_0, f_1] = 2\left(\frac{1-u}{u} + \ln u\right),$$

se obtiene

$$JD[f_1, f_0] = \frac{2(1-u)^2}{u}.$$

Se cumplen igualmente las propiedades

$$|x - x_a| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow JD[f_1, f_0] = \infty,$$

$$|x - x_a| = \infty \Rightarrow u = 1 \Rightarrow JD[f_1, f_0] = 0.$$

13.5. Índice de similitud

En un sentido opuesto al objetivo de las medidas de divergencia, con el fin de valorar el grado de ‘solapamiento’ entre dos distribuciones, se suelen utilizar indicadores como el denominado Índice de Similitud Cuántica (QSI), definido como

$$QSI[f_1, f_0] = \frac{\int f_1 f_0}{(\int f_1^2 \int f_0^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En nuestro caso de estudio, el resultado es

$$QSI[f_1, f_0] = \frac{4u}{(1+u)^2}$$

Puede observarse ahora que

$$|x - x_a| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow QSI[f_1, f_0] = 0,$$

$$|x - x_a| = \infty \Rightarrow u = 1 \Rightarrow QSI[f_1, f_0] = 1.$$

Esta medida, que toma valores entre 0 y 1, no es sensible a la información mutua entre componentes.

13.6. Divergencia de Fisher

Esta medida de disimilitud o divergencia, no-simétrica, cumple la propiedad de no-negatividad. Combina las entropías relativas de Fisher de dos densidades f_0 y f_1 , proporcionando una evaluación de la deslocalización mutua de ambas densidades. La entropía relativa de Fisher $FR[f_1, f_0]$ de una densidad f_1 respecto de una densidad de referencia f_0 se define como

$$FR[f_1, f_0] = \int f_1 \left(\nabla' \ln \frac{f_1}{f_0} \right) \left(\nabla \ln \frac{f_1}{f_0} \right),$$

donde el símbolo ∇ representa el gradiente tetradimensional (derivada vectorial). Análogamente

$$FR[f_0, f_1] = \int f_0 \left(\nabla' \ln \frac{f_0}{f_1} \right) \left(\nabla \ln \frac{f_0}{f_1} \right).$$

La divergencia de Fisher $FD[f_1, f_2]$ se define como

$$FD[f_1, f_0] = FR[f_1, f_0] + FR[f_0, f_1].$$

Para el presente estudio, el cálculo proporciona

$$FR[f_1, f_0] = \frac{(1-u)^2}{u} Tr(N^{-1}).$$

Análogamente

$$FR[f_0, f_1] = \frac{(1-u)^2}{u^2} Tr(N^{-1}).$$

Por tanto,

$$FD[f_0, f_1] = \frac{(1-u)(1-u^2)}{u^2} Tr(N^{-1}).$$

Se cumplen las propiedades

$$|x - x_a| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow FD[f_1, f_0] = \infty,$$

$$|x - x_a| = \infty \Rightarrow u = 1 \Rightarrow FD[f_1, f_0] = 0.$$

La divergencia de Fisher es sensible al grado de información mutua entre componentes. Si ésta aumenta, la divergencia crece.

Capítulo 14

Medidas de la incertidumbre basadas en el producto exterior (longitudes tetradimensionales)

En este capítulo proponemos la definición de unas nuevas medidas de evaluación de los diferentes aspectos relacionados con la incertidumbre inherente a una distribución probabilística. En esta memoria estamos interesados en el análisis de la distribución probabilística de la componente estocástica del tensor de stress de un sistema influenciado por un conjunto de fuentes externas de diversa naturaleza.

Con la excepción de la definición clásica de las entropías, principalmente la Entropía de Shannon, en la que estamos centrando el estudio, y que constituye un concepto básico específico, las definiciones acerca de otras medidas fundamentales, como la Información de Fisher, o las diferentes medidas de longitud entrópica, desequilibrio, similitud y complejidad, están basadas en el producto interior (o sea, escalar) de conceptos que incluyen de un modo u otro, la función de densidad de la distribución (potenciación, gradiente, . . .) y su integración extendida en un recinto en que dicha función de densidad queda definida.

El enfoque tradicional se fundamenta en el hecho de que las longitudes entrópicas (con excepción de la longitud de Shannon) son esencialmente unidimensionales, lo que, como veremos, conlleva en algunos casos una cierta pérdida de información, o en cualquier caso, que las medidas convencionales posean ciertas propiedades, de gran utilidad sin duda alguna, aunque no posean otras propiedades que, como veremos en la propuesta que sigue en esta

sección, son importantes y deseables.

Con carácter genérico, a estas nuevas medidas las calificaremos como medidas *efectivas*, siguiendo la propuesta de algunos autores que han realizado definiciones en un sentido similar al que ahora tratamos. Así, nos referiremos a la varianza *efectiva* [83] o a la desviación estándar *efectiva*, para distinguirlas de sus equivalentes definidas convencionalmente, que han sido previamente expuestas y aplicadas en el contexto de la memoria.

De hecho, parece natural que las medidas sobre la información asociada a un proceso aleatorio n -dimensional, recojan de algún modo (lo más eficaz posible) esa dimensionalidad, lo que no ocurre cuando el resultado de la medida es sistemáticamente unidimensional, como es el caso, por ejemplo, de la desviación estándar. Unas medidas basadas en el producto exterior que generen resultados a partir de magnitudes tensoriales contienen necesariamente una información rica y aprovechable, y en cualquier caso, complementaria.

Veamos a qué resultados nos lleva esta nueva línea de análisis propuesta. En primer lugar, a efectos de tenerlo en cuenta en cálculos realizados más adelante, haremos constar el hecho de que la longitud convencional de Shannon y la longitud ‘efectiva’ de Shannon no presentan diferencias conceptuales, ya que son medidas con dimensión acorde con la de la variable aleatoria sobre las que se aplican (en nuestro caso, dimensión 4, la dimensión del tensor estocástico de stress), por lo que

$$L_S^{eff}(N) = (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}}.$$

Sin embargo, en el caso de la medida que denominamos potencia entrópica, cuya estructura, incluyendo una constante de regularización, deriva directamente del concepto de entropía de Shannon, propondremos un cambio conveniente de definición con el objetivo de obtener unos resultados globalmente coherentes.

14.1. Información de Fisher *efectiva*

La información de Fisher es un concepto que, como se dijo anteriormente, difiere de la entropía de Shannon, ya que utiliza el gradiente de la función de densidad, por lo que se interpreta como una medida de ‘deslocalización’. Su definición clásica responde a la expresión (11.2), que ahora reproducimos:

$$F_\xi = \left\langle \frac{d}{d\xi'} \ln f(\xi) \frac{d}{d\xi} \ln f(\xi) \right\rangle.$$

Observamos que esta expresión refleja el valor medio del producto interior de dos vectores (el gradiente de la función de densidad, como vector fila, por el gradiente de dicha función, como vector columna), por lo que el resultado es un escalar. El tratamiento consecuente conduce al resultado (11.2).

Definamos una Información de Fisher *efectiva* basada en el valor esperado del producto exterior de ambos gradientes, que equivale a un tensor, interpretable como una matriz de información de Fisher, información cuyo determinante es un escalar que mide una cantidad efectiva de información.

En consecuencia, si denominamos $F^{eff}(N)$ a la Información de Fisher ‘efectiva’, podemos hacer la definición

$$F_{\xi}^{eff} = \left| \left\langle \frac{d}{d\xi} \ln f(\xi) \frac{d}{d\xi'} \ln(\xi) \right\rangle \right|,$$

de tal modo que

$$F_{\xi}^{eff} = F^{eff}(N) = |N^{-1} \langle \xi \xi' \rangle N^{-1}|,$$

con lo que finalmente

$$F^{eff}(N) = |N^{-1}|.$$

La Información de Fisher efectiva es, con esta definición alternativa, el determinante del tensor inverso de covarianza, a diferencia de la Información de Fisher clásica, que proporciona como resultado la traza de dicho tensor inverso (por, tanto, además del aspecto dimensional, que establece una diferencia de criterio, es evidente la discrepancia en la medición, y el subsiguiente análisis, de la información mutua entre componentes).

14.2. Desequilibrio *efectivo*

El desequilibrio, o autosimilitud, intenta, como ya quedó establecido, cuantificar el grado de uniformidad de una distribución, mediante la obtención de la densidad media. El desequilibrio es un momento entrópico de segundo orden, que definimos igualmente como

$$D_{\xi} = \int_{\xi} d^4 \xi f^2(\xi).$$

Por tanto,

$$D_{\xi}^{eff} = D^{eff}(N) = \int_{\xi} d^4 \xi (2\pi)^{-4} |N|^{-1} e^{-\xi' N^{-1} \xi}.$$

En definitiva

$$D^{eff}(N) = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}}.$$

El desequilibrio *efectivo* de una distribución tetradimensional tiende a aumentar en la medida en que son grandes las correlaciones mutuas de las componentes del tensor de ruido local del tensor de stress. Como es obvio, dada su definición, el desequilibrio convencional y el desequilibrio efectivo coinciden en nuestro escenario gaussiano.

14.3. Longitudes entrópicas *efectivas*

Mantenemos el objetivo de hacer comparables los conceptos propuestos en esta sección, en el proceso de medida de la cantidad de información, o el grado de incertidumbre, de un sistema de naturaleza estocástica. Se definen unas nuevas medidas, asociadas a dichos conceptos, que se expresan en unidades tetradimensionales, acorde con la dimensionalidad del contexto, lo que facilita el análisis comparativo, que es siempre un objetivo deseable.

14.3.1. Longitud *efectiva* de Fisher

La longitud de Fisher $L_{F,\xi}$, definida convencionalmente como $L_{F,\xi} = F_{\xi}^{-\frac{1}{2}}$, es, como obtuvimos,

$$L_{F,\xi} = L_F(N) = \{Tr(N^{-1})\}^{-\frac{1}{2}}.$$

La longitud ‘efectiva’ de Fisher, definida análogamente como $L_{F,\xi}^{eff} = F_{\xi}^{-\frac{1}{2}}$, es, por tanto,

$$L_{F,\xi}^{eff} = L_F^{eff}(N) = |N|^{\frac{1}{2}},$$

una medida que, de acuerdo con nuestro objetivo, es una longitud tetradimensional, claramente diferente a la expresión convencional, y que, por tanto, incorpora el impacto global de la información mutua entre componentes de forma distinta. Con esta nueva definición de la longitud de Fisher efectiva como una medida tetradimensional, la relevancia del núcleo de covarianza resulta, en opinión del autor de la memoria, más destacable.

Igualmente, en este caso, la longitud de Fisher efectiva tiende a anularse cuando la correlación mutua es alta.

14.3.2. Varianza global *efectiva*

Mantenemos el criterio, que usaremos, de que la raíz cuadrada de la varianza de una variable es una medida tradicional de la dispersión. Por analogía con la definición de esta variable en el caso unidimensional, se puede hacer una extrapolación al caso tetradimensional definiendo la varianza global Δ_{ξ}^{2eff} como [83]

$$\Delta_{\xi}^{2eff} = \Delta^{2eff}(N) = |\langle \xi \xi' \rangle| = |N|.$$

En consecuencia, se obtiene el siguiente valor $\Delta^{eff}(N)$ de la dispersión efectiva:

$$\Delta^{eff}(N) = |N|^{\frac{1}{2}},$$

medida tetradimensional que, a diferencia del concepto clásico de dispersión, es sensible al nivel de correlación mutua de las componente del tensor ξ . Como cabía esperar, con este nuevo enfoque propuesto, la longitud de Fisher y la dispersión se igualan dado el modelo estocástico gaussiano considerado.

14.4. Medidas de complejidad *efectivas* asociadas al tensor de ruido incondicional

Estas medidas adimensionales *efectivas* de la información de una distribución intentan igualmente cuantificar una magnitud, la ‘complejidad’, basada en la combinación eficaz de las medidas simples informacionales aplicadas anteriormente, ahora redefinidas.

En nuestro estudio se analizarán las medidas efectivas, cuya denominación mantendremos, a pesar de la redefinición de los conceptos integrantes: Cramér-Rao (CCR), Fisher-Shannon (CFS) y López-Mancini-Calbet (CLMC).

La medida de Cramér-Rao combina la información de Fisher y la dispersión de la distribución, o sea, el gradiente de la densidad y la deslocalización local, de modo que ahora resulta

$$C_{CR,\xi}^{eff} = L_{F,\xi}^{-2eff} \Delta_{\xi}^{2eff}.$$

Por tanto, en nuestro caso gaussiano,

$$C_{CR,\xi}^{eff} = C_{CR}^{eff}(N) = |N|^{-1} |N| = 1,$$

resultado evidentemente adimensional, de acuerdo con las propiedades exigibles a la medida. Más resaltante es el hecho de que, en el caso gaussiano tetradsimensional, su valor es igual a 1.

Queda como un tema abierto de investigación futura la exploración de las propiedades de esta medida para cualquier tipo de distribución y su rango de valores admisibles.

Al igual que en su definición convencional, la medida ‘efectiva’ propuesta de Fisher-Shannon hace un balance conjunto de la variación de la densidad y la deslocalización global, agrupando multiplicativamente la información *efectiva* de Fisher y la entropía de Shannon, y quedando definida como

$$C_{FS,\xi}^{eff} = (2\pi e)^{-4} L_{F,\xi}^{-2eff} L_{S,\xi}^{2eff},$$

con lo que

$$C_{FS,\xi}^{eff} = C_{FS}^{eff}(N) = (2\pi e)^{-4} |N|^{-1} (2\pi e)^4 |N| = 1,$$

coincidente con la medida de Cramér-Rao. Cabe hacer las mismas consideraciones que las realizadas en relación con dicha medida.

Notemos que para que exista una coherencia entre las definiciones convencional y efectiva de la medida de complejidad de Fisher-Shannon, cuya definición general se hace como producto de la información de Fisher y la potencia entrópica, convendremos en la definición de una potencia entrópica *efectiva* como la potencia de orden 4 (la dimensión del espaciotiempo y del tensor de stress) de la potencia entrópica convencional, o sea,

$$J_{S,\xi}^{eff} = \frac{1}{(2\pi e)^4} e^{2S_\xi},$$

que daría lugar al resultado

$$J_{S,\xi}^{eff} = J_S^{eff}(N) = |N|,$$

coincidente con la varianza efectiva. Esta transformación tiene sentido en este contexto de propuesta de medidas alternativas cuyo objetivo es que estén basadas en unas longitudes entrópicas con dimensiones que correspondan a la magnitud de la variable aleatoria objeto de análisis, como alternativa a unas longitudes entrópicas que son convencionalmente unidimensionales en cualquier caso, circunstancia que, en opinión del autor de la memoria, restringe el uso eficaz de la información global. No obstante, esta es una cuestión que

debería explorarse adecuadamente y que abre una línea de discusión sobre el tema a analizar convenientemente.

En consecuencia, es posible expresar

$$C_{FS}^{eff}(N) = F^{eff}(N) J_S^{eff}(N) = |N|^{-1} |N| = 1.$$

Finalmente, se utiliza la medida efectiva de López-Mancini-Calbet, que, como ya quedó descrito, agrupa en un valor único el nivel medio de la densidad, reflejando el efecto conjunto del desequilibrio de la distribución y la dispersión evaluada a través de la longitud de Shannon.

Su definición, en consecuencia, responde a la expresión

$$C_{LMC,\xi}^{eff} = D_{\xi}^{eff} L_{S,\xi}^{eff},$$

concluyendo

$$C_{LMC,\xi}^{eff} = C_{LMC}^{eff}(N) = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2,$$

igual resultado, como cabía esperar, que el proporcionado por la medida definida convencionalmente en el caso gaussiano.

Las tres medidas analizadas son, en este caso gaussiano, insensibles, además de a un cambio de escala (homogéneo o no), a cualquier cambio de estructura de correlación entre las componentes del tensor estocástico. En definitiva, las tres medidas son invariantes frente a cualquier transformación definida por un operador tensorial de distancia U , que, como sabemos, posee, entre otras propiedades, la de no-singularidad para valores finitos de la pseudodistancia. En efecto,

$$C_{CR}^{eff}(UN) = |UN|^{-1} |UN| = 1,$$

$$C_{FS}^{eff}(UN) = |UN|^{-1} |UN| = 1,$$

$$C_{LMC}^{eff}(UN) = (4\pi)^{-2} |UN|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |UN|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Teniendo en cuenta que, en todo caso, el argumento del que depende una medida de complejidad (convencional o *efectiva*) debe ser, en un escenario gaussiano, un tensor de covarianza, podría hacerse una generalización, que traspasaría los límites de esta memoria, afirmando que las tres medidas también serían invariantes frente a una transformación definida por un tensor de distancia *generalizado* T (ver Apéndice G), no trivial, tal que $T = MN^{-1}$, siendo M cualquier tensor de covarianza condicional (a una información conocida), aunque T no sería compatible con la estacionariedad del campo estocástico si al menos uno de sus autovalores fuese igual o mayor que 1.

Capítulo 15

Conclusiones de la Parte II

El análisis informacional llevado a cabo en esta segunda parte se ha basado en una diversificación de escenarios de acuerdo con un conjunto de información disponible. Con el tensor de stress, y en particular su componente estocástica, como objeto del análisis, se ha establecido una diferencia entre el tensor incondicional (asociado a una ausencia de información) y el tensor condicional (asociado a una información disponible). Aunque el hecho de mantener en todos los escenarios estudiados un modelo gaussiano ha impedido que pueda aflorar la riqueza de resultados cuando se comparan distribuciones probabilísticas distintas, los diferentes escenarios considerados han contemplado modelos gaussianos con características diferenciales suficientes, lo que ha permitido obtener un conjunto de resultados que, a juicio del autor, son de interés (en la Parte III se analizan algunos ejemplos diversos en el plano condicional, con resultados útiles).

En ese análisis el uso de conceptos como el tensor de distancia o el tensor de carga de correlación se han mostrado eficaces, facilitando los datos buscados para poder evaluar en términos comparativos los resultados de la medidas diversas aplicadas al tensor incondicional, en relación con los resultados proporcionados por dichas medidas aplicadas a los diferentes escenarios para el tensor condicional. Se han analizado algunas propiedades de estas medidas y su cumplimiento relativo en función de la estructura de covarianza del proceso agregado.

Se han utilizado la entropía de Shannon y la información de Fisher, así como las diferentes longitudes entrópicas condicionales, para verificar el cambio experimentado en la transición desde un escenario incondicional a los diferentes escenarios condicionales considerados (solo unos pocos a modo de

ejemplo).

Las medidas de divergencia se han aplicado para evaluar la distancia entre las densidades incondicionales y condicionales. Mención especial merece el análisis realizado acerca de las medidas de complejidad más frecuentemente utilizadas y con propiedades más conocidas (Cramér-Rao, Fisher-Shannon y López-Mancini-Calbet). Una de esas propiedades, especialmente relevante, es la existencia para cada una de esas medidas de complejidad de una cota inferior, más allá del hecho no tan relevante de que esas cotas dependen de la dimensión del espacio en que están definidas (medidas de Cramér-Rao y de Fisher-Shannon), ya que, precisamente por esta circunstancia, sería fácil mediante un procedimiento de reescala hacer que esas cotas adoptaran otro valor, por ejemplo, igual a 1.

Por otra parte, el hecho de su diferente definición, a partir de factores componentes distintos, hace que su interpretación no sea completamente comparable, lo que resta importancia, en términos de utilidad, a un eventual procedimiento de reescala con un objetivo de homogeneización numérica. Expresado más directamente, la formulación actual de esas medidas viene a tener el mismo valor que una formulación reescalada. El resultado verdaderamente relevante reside en la distancia entre el valor de la complejidad obtenido y el de la cota mínima.

A propósito de estas medidas, conviene resaltar el hecho de que la propiedad de invariancia que se les atribuye tiene lugar sólo en el caso de que los dos escenarios comparados difieran en un cambio único de escala, es decir, el mismo en cada dimensión. Si el cambio afecta al nivel de reescala en cada dimensión de forma diferente (inhomogeneidad de cambio de escala) o a la estructura tetradimensional de correlación, o a ambos, la propiedad de invariancia no se cumple. Por este motivo, en esta Parte II de la memoria se proponen unas medidas informacionales alternativas efectivas, que trasladan su efecto a las medidas de complejidad, y que tienen una interpretación diferente y guardan una relación sistemática con la dimensionalidad del espacio en el que están definidas (al contrario de lo que ocurre con las medidas convencionales, de las que se derivan unas longitudes entrópicas siempre unidimensionales, con la excepción de la longitud de Shannon), lo que, a juicio del autor, limita su alcance.

Analíticamente, la explicación de este hecho radica en que las medidas convencionales, a excepción de Shannon y derivadas, dependen, en el escenario gaussiano, de la traza del tensor núcleo de covarianza, mientras que en el caso de las nuevas medidas propuestas, que hemos calificado como ‘efecti-

vas', siguiendo la terminología utilizada en [83], la dependencia es en todos los casos respecto al determinante de dicho tensor, lo que permite, a juicio del autor, utilizar una estructura de información más completa.

Aplicaciones a los diversos
escenarios de estructura del
conjunto de fuentes externas
perturbadoras

Esta Parte III pretende dar una referencia acerca del orden de magnitud de las cifras asociadas a los conceptos desarrollados, en términos relativos a los parámetros que en cada caso se consideren, o sean estimados. Se pretende además resaltar la importancia de magnitudes como la escala por componentes o la correlación entre cada par de componentes en los valores obtenidos para las medidas informacionales, así como el cumplimiento o no, según las restricciones consideradas, de determinadas propiedades por parte de dichas medidas. Para ello, vamos a revisar seguidamente varios ejemplos en los que se analizarán diversos escenarios.

No se harán, en general, comentarios acerca de los resultados obtenidos, ya que la interpretación numérica directa es suficiente, aunque en algún caso, como el Ejemplo 4, especialmente relevante por la amplitud de escenarios que contempla, se llevará a cabo un breve análisis interpretativo con el fin de evidenciar la utilidad de las medidas aplicadas.

Ejemplo 1

Supongamos que el tensor de stress estocástico corresponde al efecto inducido markoviano debido a una fuente externa perturbadora. Supóngase, además, una aproximación similar a la utilizada en el Apéndice A, según la cual la dispersión univariante de cada una de las componentes del vector gaussiano local (en un punto x) se puede identificar con un valor único σ y que el coeficiente de correlación mutua entre cada dos componentes, también único, es ρ (no-negativo e inferior a 1). Estos parámetros pueden considerarse como valores medios representativos. Entonces

$$N = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

siendo, por tanto,

$$\begin{aligned} |N| &= \sigma^8(1 - \rho)^3(1 + 3\rho), \\ |N|^{-1} &= \sigma^{-8}(1 - \rho)^{-3}(1 + 3\rho)^{-1}, \\ Tr(N) &= 4\sigma^2, \\ Tr(N^{-1}) &= 4\sigma^{-2}(1 + 2\rho)\{(1 - \rho)(1 + 3\rho)\}^{-1}. \end{aligned}$$

El parámetro ρ (correlación media) debe cumplir la condición de consistencia $\rho \in (-\frac{1}{3}, 1)$. En este caso las medidas de Shannon y relacionadas son

$$\begin{aligned} S(\sigma, \rho) &= \ln \left\{ (2\pi\sigma^2e)^2(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}(1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}} \right\}, \\ L_S(\sigma, \rho) &= \sigma^4(2\pi e)^2(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}(1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}}, \\ J_S(\sigma, \rho) &= \sigma^2(1 - \rho)^{\frac{3}{4}}(1 + 3\rho)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

La información de Fisher proporciona los valores

$$\begin{aligned} F(\sigma, \rho) &= 4\sigma^{-2}(1 + 2\rho)\{(1 - \rho)(1 + 3\rho)\}^{-1}, \\ L_F(\sigma, \rho) &= \frac{\sigma}{2}(1 + 2\rho)^{-\frac{1}{2}}\{(1 - \rho)(1 + 3\rho)\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La dispersión, representada por la raíz cuadrada de la varianza global, viene medida por

$$\Delta(\sigma, \rho) = 2\sigma.$$

Y el desequilibrio de la distribución adquiere la expresión

$$D(\sigma, \rho) = (4\pi\sigma^2)^{-2}\{(1 - \rho)^3(1 + 3\rho)\}^{-\frac{1}{2}}.$$

En cuanto a las medidas ‘convencionales’ de complejidad, que no dependen de σ , obtenemos

$$C_{CR}(\rho) = 16(1 + 2\rho)\{(1 - \rho)(1 + 3\rho)\}^{-1},$$

cuyo valor mínimo se alcanza cuando la información mutua global es nula ($\rho = 0$), en cuyo caso se obtiene $C_{CR}(\rho = 0) = 16 = 4^2$, el cuadrado de la dimensión (cota mínima),

$$C_{FS}(\rho) = 4(1 + 2\rho)(1 - \rho)^{-\frac{1}{4}}(1 + 3\rho)^{-\frac{3}{4}}.$$

También para esta medida el valor mínimo se alcanza cuando la información mutua global es nula, o sea, $\rho = 0$. En ese caso se obtiene $C_{FS}(\rho = 0) = 4$ (cota mínima), la tetradimensión. Finalmente,

$$C_{LMC}(\rho) = \left(\frac{e}{2}\right)^2,$$

o sea, la medida es independiente de ρ .

En cuanto a las medidas ‘efectivas’ (ver Capítulo 14):

$$L_S^{eff}(\sigma, \rho) = \sigma^4(2\pi e)^2(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}(1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}},$$

$$F^{eff}(\sigma, \rho) = \sigma^{-8}(1 - \rho)^{-3}(1 + 3\rho)^{-1},$$

$$L_F^{eff}(\sigma, \rho) = \sigma^4(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}(1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta^{eff}(\sigma, \rho) = \sigma^4(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}(1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}}.$$

Como vemos, las longitudes entrópicas son tetradimensionales.

Y, como sabemos, las medidas ‘efectivas’ de complejidad proporcionan

$$C_{CR}^{eff} = 1,$$

$$C_{FS}^{eff} = 1,$$

$$C_{LMC}^{eff} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Ahora se hace la hipótesis de que la información acerca del valor del tensor de stress en x_a es conocida. La información correspondiente a un punto x (causalmente conectado con x_a) es, consecuentemente, modificada.

Supongamos, en este ejemplo simplificado, que el núcleo de covarianza $N(1)$ entre dos puntos separados por una pseudodistancia unitaria, viene dado por

$$N(1) = z\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho\nu & \rho\nu & \rho\nu \\ \rho\nu & 1 & \rho\nu & \rho\nu \\ \rho\nu & \rho\nu & 1 & \rho\nu \\ \rho\nu & \rho\nu & \rho\nu & 1 \end{pmatrix},$$

donde z es un factor de escala (en este caso común para las cuatro componentes) y ν es un factor de distorsión covariante. Por tanto, debido a la condición de estacionariedad, el parámetro z verifica la condición $z \in (0, 1)$ y el parámetro ν verifica la condición de consistencia $\rho\nu \in (-\frac{1}{3}, 1)$.

Obtenemos el tensor markoviano de propagación A , para una pseudodistancia unitaria, teniendo en cuenta que, en este caso, $A = N(1)N^{-1}$. En consecuencia,

$$A = z \left\{ 1 - \frac{3\rho^2(\nu - 1)}{(1 - \rho)(1 + 3\rho)} \right\} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} \\ \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & 1 & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} \\ \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & 1 & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} \\ \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & \frac{\rho(\nu-1)}{1+\rho(2-3\rho\nu)} & 1 \end{pmatrix}.$$

En este escenario simétrico se verifica que $A'N^{-1}$ es simétrico y, por tanto, igual a $N^{-1}A$, con lo cual, el tensor de carga de correlación viene expresado finalmente como

$$\Pi = A^2 = w(1 + 3a^2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} \\ \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & 1 & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} \\ \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & 1 & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} \\ \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & \frac{2a(1+a)}{1+3a^2} & 1 \end{pmatrix},$$

donde, para simplificar la notación en adelante, se han introducido

$$w = z \left\{ 1 - \frac{3\rho^2(\nu - 1)}{(1 - \rho)(1 + 3\rho)} \right\}, \quad (15.1)$$

$$a = \frac{\rho(\nu - 1)}{1 + \rho(2 - 3\rho\nu)}. \quad (15.2)$$

Consecuentemente, dado que $U = I - \Pi$, se obtiene que el tensor de distancia viene dado por la expresión

$$U = \{1 - w^2(1 + 3a^2)\} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} \\ \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & 1 & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} \\ \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & 1 & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} \\ \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & \frac{-2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (15.3)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 |A| &= w^4 (1 + 3a^2)^2 \left(1 - \frac{2a(1+a)}{1+3a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{6a(1+a)}{1+3a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
 |\Pi| &= w^8 (1 + 3a^2)^4 \left(1 - \frac{2a(1+a)}{1+3a^2}\right)^3 \left(1 + \frac{6a(1+a)}{1+3a^2}\right), \\
 |U| &= \{1 - w^2(1 + 3a^2)\}^4 \left(1 + \frac{2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)}\right)^3 \left(1 - \frac{6w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)}\right).
 \end{aligned}$$

En este modelo, con características simétricas de covarianza, las matrices Π y U son simétricas, aunque en general no tienen por qué serlo.

Finalmente, el factor de carga de correlación π (por unidad de distancia) del proceso adquiere la expresión

$$\pi = w^2 (1 + 3a^2) \left(1 - \frac{2a(1+a)}{1+3a^2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{6a(1+a)}{1+3a^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Y el factor de distancia u correspondiente es

$$\begin{aligned}
 u &= \{1 - w^2(1 + 3a^2)\} \times \\
 &\quad \left(1 + \frac{2w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)}\right)^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{6w^2a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{15.4}
 \end{aligned}$$

donde los parámetros w y a están definidos por las expresiones (15.1) y (15.2), respectivamente.

Observemos que en el caso $\nu = 1$ (no hay distorsión covariante, con lo cual el nivel medio de correlación mutua en el núcleo de covarianza no depende de la distancia entre dos puntos dados) se obtiene $w = z$ y $a = 0$, con lo que resultan para los tensores de propagación, de carga de correlación y de distancia, las expresiones respectivas

$$\begin{aligned}
 A &= zI, \\
 \Pi &= z^2I, \\
 U &= (1 - z^2)I.
 \end{aligned}$$

Consecuentemente, los factores de carga de correlación y de distancia adoptan, respectivamente, las expresiones

$$\begin{aligned}
 \pi &= z^2, \\
 u &= 1 - z^2.
 \end{aligned}$$

En este caso, en que no hay deformación covariante, los resultados obtenidos para los tensores y factores escalares anteriores son, como cabía esperar, independientes de la desviación estándar media σ y de la correlación media ρ . Vemos además que en este caso particular en que se cumple la condición $\nu = 1$ se verifica $u + \pi = 1$.

Volvamos al caso menos restringido en que el factor ν de distorsión covariante puede tomar cualquier valor cumpliendo la condición conocida $\rho\nu \in (-\frac{1}{3}, 1)$, dada la correlación media.

En este caso, las medidas de Shannon y relacionadas son

$$S(\sigma, \rho, u) = \ln \left\{ (2\pi\sigma^2 eu)^2 (1 - \rho)^{\frac{3}{2}} (1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}} \right\} = S(\sigma, \rho) + 2 \ln u,$$

$$L_S(\sigma, \rho, u) = \sigma^4 (2\pi eu)^2 (1 - \rho)^{\frac{3}{2}} (1 + 3\rho)^{\frac{1}{2}} = u^2 L_S(\sigma, \rho),$$

$$J_S(\sigma, \rho, u) = \sigma^2 u (1 - \rho)^{\frac{3}{4}} (1 + 3\rho)^{\frac{1}{4}} = u J_S(\sigma, \rho),$$

donde u adopta el valor que refleja la expresión (15.4).

Hagamos una nueva simplificación de notación, reexpresando (15.3) como

$$U = g \begin{pmatrix} 1 & h & h & h \\ h & 1 & h & h \\ h & h & 1 & h \\ h & h & h & 1 \end{pmatrix},$$

donde g y h son parámetros definidos como

$$g = 1 - w^2(1 + 3a^2),$$

$$h = \frac{-2w^2 a(1-a)}{1-w^2(1+3a^2)},$$

por lo que el factor de distancia lo podemos expresar como

$$u = g (1 - h)^{\frac{3}{4}} (1 + 3h)^{\frac{1}{4}}.$$

La matriz UN adopta la expresión

$$UN = g \sigma^2 (1 + 3h\rho) \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} \\ \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & 1 & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} \\ \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & 1 & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} \\ \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & \frac{h+\rho+2h\rho}{1+3h\rho} & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$|UN| = u^4 \sigma^8 (1 - \rho)^3 (1 + 3\rho),$$

$$|UN|^{-1} = u^{-4} \sigma^{-8} (1 - \rho)^{-3} (1 + 3\rho)^{-1},$$

$$Tr(UN) = 4g \sigma^2 (1 + 3h\rho),$$

$$Tr((UN)^{-1}) = 4g^{-1} \sigma^{-2} \frac{1+2(h+\rho)+5h\rho}{(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)}.$$

La información de Fisher proporciona los valores

$$F(\sigma, \rho, u) = g^{-1} \frac{(1-\rho)(1+3\rho)(1+2(h+\rho)+5h\rho)}{(1+2\rho)(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)} F(\sigma, \rho),$$

$$L_F(\sigma, \rho, u) = g^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(1-\rho)(1+3\rho)(1+2(h+\rho)+5h\rho)}{(1+2\rho)(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)} \right\}^{-\frac{1}{2}} L_F(\sigma, \rho).$$

La dispersión, representada por la raíz cuadrada de la varianza global, viene medida por

$$\Delta(\sigma, \rho, u) = \{g(1 + 3h\rho)\}^{\frac{1}{2}} \Delta(\sigma, \rho).$$

Y el desequilibrio de la distribución adquiere la expresión

$$D(\sigma, \rho, u) = (4\pi\sigma^2 u)^{-2} \{(1 - \rho)^3 (1 + 3\rho)\}^{-\frac{1}{2}} = u^{-2} D(\sigma, \rho).$$

En cuanto a las medidas ‘convencionales’ de complejidad, obtenemos

$$C_{CR}(\rho, u) =$$

$$g^{-1} \frac{(1-\rho)(1+3\rho)(1+2(h+\rho)+5h\rho)g(1+3h\rho)}{(1+2\rho)(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)} F(\sigma, \rho) \Delta^2(\sigma, \rho),$$

luego

$$C_{CR}(\rho, u) =$$

$$\frac{(1-\rho)(1+3\rho)(1+2(h+\rho)+5h\rho)(1+3h\rho)}{(1+2\rho)(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)} C_{CR}(\rho).$$

Por tanto, si no se cumple $\nu = 1$ (ausencia de deformación covariante), lo que implicaría $h = 0$, en general será

$$C_{CR}(\rho, u) \neq C_{CR}(\rho).$$

Sin embargo, observamos que en el caso $\nu = 1$ (independientemente del valor medio de correlación ρ , que se mantiene constante en el núcleo de

covarianza para cualquier valor de la pseudodistancia entre dos puntos) sí se cumple $C_{CR}(\rho, u) = C_{CR}(\rho)$, ya que el efecto del tensor de distancia queda reducido a un cambio único de escala representado por el parámetro g , frente al que la medida es, como es sabido, invariante.

El valor mínimo de la medida $C_{CR}(\rho)$ se alcanza cuando la información mutua global es nula ($\rho = 0$), en cuyo caso se obtiene $C_{CR}(\rho = 0) = 16 = 4^2$, el cuadrado de la dimensión (cota mínima). En cuanto a la medida $C_{CR}(\rho, u)$ ocurre igualmente que $C_{CR}(\rho = 0, u) = 16 = 4^2$ si se da la condición adicional de que el tensor de distancia solo produce un cambio de escala común a las cuatro componentes del tensor.

Respecto a la medida de Fisher-Shannon,

$$C_{FS}(\rho, u) = g^{-1} \frac{(1-\rho)(1+3\rho)(1+2(h+\rho)+5h\rho)}{(1+2\rho)(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)} F(\sigma, \rho) u J_S(\sigma, \rho).$$

Dado que $u = g(1-h)^{\frac{3}{4}}(1+3h)^{\frac{1}{4}}$ podemos expresar

$$C_{FS}(\rho, u) = \frac{(1-\rho)(1+3\rho)(1+2(h+\rho)+5h\rho)(1+3h\rho)(1-h)^{\frac{3}{4}}(1+3h)^{\frac{1}{4}}}{(1+2\rho)(1-(h+\rho)+2h\rho)(1+3(h+\rho)+6h\rho)} C_{FS}(\rho).$$

En consecuencia, si $\nu \neq 1$, se cumple en general

$$C_{FS}(\rho, u) \neq C_{FS}(\rho).$$

Observamos igualmente que, en el caso $\nu = 1$, sí se cumple $C_{FS}(f(\rho, u) = C_{FS}(\rho)$, ya que el efecto del tensor de distancia queda reducido a un cambio de escala (común a las cuatro componentes) representado por el parámetro g , frente al que la medida es, como sabemos, invariante. El valor mínimo de la medida $C_{FS}(\rho)$ se alcanza cuando la información mutua global es nula ($\rho = 0$), en cuyo caso se obtiene $C_{FS}(\rho = 0) = 4$, la tetradimensión (cota mínima). En cuanto a la medida $C_{FS}(\rho, u)$ ocurre igualmente que se obtiene $C_{FS}(\rho = 0, u) = 4$ si se da la condición adicional de que el tensor de distancia solo produce un cambio de escala único.

Finalmente, para valores cualesquiera de ρ y de u , se obtiene

$$C_{LMC}(\rho, u) = (4\pi)^{-2} |UN|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e) |UN|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2 = C_{LMC}(\rho),$$

ya que la medida es independiente de ambos parámetros. En definitiva, la medida C_{LMC} es invariante, no sólo a los cambios de escala, sino al efecto

producido por cualquier operador tensor de distancia correspondiente a un escenario estacionario, como se está considerando a lo largo de esta memoria.

En cuanto a las medidas *efectivas* de complejidad, sabemos que proporcionan

$$\begin{aligned}
 C_{CR}^{eff}(\rho, u) &= L_F^{-2^{eff}}(\sigma, \rho, u) \Delta^{2^{eff}}(\sigma, \rho, u) \\
 &= |UN|^{-1} |UN| = 1 = C_{CR}^{eff}(\rho), \\
 C_{FS}^{eff}(\rho, u) &= (2\pi e)^{-4} L_F^{-2^{eff}}(\sigma, \rho, u) L_S^{2^{eff}}(\sigma, \rho, u) \\
 &= (2\pi e)^{-4} |UN|^{-1} (2\pi e)^4 |UN| = 1 = C_{FS}^{eff}(\rho), \\
 C_{LMC}^{eff}(\rho, u) &= D(\sigma, \rho, u)^{eff} L_S^{eff}(\sigma, \rho, u) \\
 &= (4\pi)^{-2} |UN|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |UN|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2 = C_{LMC}^{eff}(\rho).
 \end{aligned}$$

Las medidas *efectivas* de complejidad son invariantes, no sólo frente a cambios de escala, sino con más generalidad frente a la aplicación de cualquier tensor de distancia estacionario que incluya un cambio de escala diferente por componentes o una distorsión covariante (cambio en el valor de la correlación mutua entre componentes) y, por supuesto, si se dan ambos escenarios.

Divergencia y similitud entre las densidades incondicional y condicional del tensor de stress

Estas medidas, ya definidas anteriormente, son aplicables al análisis comparativo informacional de dos densidades de probabilidad, como es el caso que nos ocupa, en el que se dispone de dos densidades asociadas a los tensores de stress, incondicional y condicional. Son, dado el carácter gaussiano de dichas densidades (lo que limita la riqueza del análisis), medidas sensibles al factor de distancia u , parámetro informacional que resume la reducción de incertidumbre en el paso del ámbito incondicional al condicional. Esta reducción de la incertidumbre está asociada a la transformación tensorial tetradimensional mediante un operador tensor de distancia. Mostramos los resultados a continuación, recordando que

$$\begin{aligned}
 f(\xi) &= f_0 = (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} z' N^{-1} z}, \\
 f(\varepsilon) &= f_1 = (2\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2u} z' N^{-1} z}.
 \end{aligned}$$

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática:

$$QD[f_1, f_0] = \frac{(1-u)(1+4u+u^2)^{\frac{1}{2}}}{4\pi u(1+u)} |N|^{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{(1-u)(1+4u+u^2)^{\frac{1}{2}}}{4\pi u(1+u)\sigma^2\{(1-\rho)^3(1+3\rho)\}^{\frac{1}{4}}}.$$

Distancia de Matusita:

$$MD[f_1, f_0] = \frac{2(1-u)^2}{(1+u)^2}.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler:

$$KL[f_1, f_0] = -2(1-u + \ln u).$$

Divergencia de Jeffreys:

$$JD[f_1, f_0] = \frac{2(1-u)^2}{u}.$$

c) Similitud

$$QSI[f_1, f_0] = \frac{4u}{(1+u)^2}.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR[f_1, f_0] = \frac{(1-u)^2}{u} Tr(N^{-1}) = \frac{4(1-u)^2(1+2\rho)}{u\sigma^2(1-\rho)(1+3\rho)},$$

$$FR[f_0, f_1] = \frac{(1-u)^2}{u^2} Tr(N^{-1}) = \frac{4(1-u)^2(1+2\rho)}{u^2\sigma^2(1-\rho)(1+3\rho)},$$

$$FD[f_1, f_0] = \frac{(1-u)(1-u^2)}{u^2} Tr(N^{-1}) = \frac{4(1-u)(1-u^2)(1+2\rho)}{u^2\sigma^2(1-\rho)(1+3\rho)}.$$

Ejemplo 2.a

Veamos ahora un caso general, en el que los parámetros del tensor estocástico de stress toman valores numéricos, permitidos de acuerdo con el rango de valores admisibles. Supongamos conocidos los tensores de covarianza, N en un punto y N^* en dos puntos, de un tensor de stress estocástico gaussiano markoviano inducidos por una fuente externa a un sistema material inmerso en una región espaciotemporal dada. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que los dos puntos están separados por una pseudodistancia espaciotemporal unitaria. Sean, pues,

$$N = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 \end{pmatrix},$$

$$N^* = \begin{pmatrix} 0,7747 & 0,2462 & 0,2613 & 0,2715 \\ 0,2538 & 0,7101 & 0,2782 & 0,2832 \\ 0,2453 & 0,2577 & 0,7429 & 0,2587 \\ 0,2680 & 0,2666 & 0,2693 & 0,8390 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, para el tensor en un punto, $|N| = 0,6517$ y $Tr(N) = 4,0000$, y para el tensor entre dos puntos $|N^*| = 0,1963$ y $Tr(N^*) = 3,0667$.

Se ha supuesto inicialmente, sin pérdida de generalidad, que en un punto espaciotemporal cualquiera, la varianza de cada componente del tensor (incondicional) es igual a 1 y que la correlación mutua entre cada par de componentes es 0,3. Sin embargo, observamos que entre dos puntos la varianza decae con una intensidad diferente, y que el nivel de correlación varía con intensidad diferente entre cada par de componentes, existiendo un cierto grado de deformación covariante. Comprobamos esto mediante una descomposición tensorial, hecho que será de utilidad en el análisis posterior de resultados.

Llamemos S al tensor diagonal de desviación estándar en un punto, cuya forma es, evidentemente,

$$S = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Y llamemos R al tensor simétrico de correlación unitaria asociado a N , que viene dado por

$$R = S^{-1} N S^{-1}.$$

Por tanto, dado que en este ejemplo, S coincide con la matriz unidad, se obtiene

$$R = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, llamemos S^* al tensor diagonal de desviación estándar entre dos puntos, cuya forma es,

$$S^* = \begin{pmatrix} 0,8801 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,8427 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,8619 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9160 \end{pmatrix}.$$

Y llamemos R^* al tensor no simétrico de correlación unitaria asociado a N^* , que análogamente vendría dado por

$$R^* = S^{*-1} N^* S^{*-1}.$$

Por tanto,

$$R^* = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3320 & 0,3444 & 0,3368 \\ 0,3422 & 1,0000 & 0,3831 & 0,3669 \\ 0,3234 & 0,3547 & 1,0000 & 0,3277 \\ 0,3325 & 0,3454 & 0,3411 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el tensor de propagación A para una pseudodistancia unitaria, que viene dado por la relación $A = N^* N^{-1}$, resulta

$$A = \begin{pmatrix} 0,7562 & 0,0013 & 0,0228 & 0,0374 \\ 0,0185 & 0,6704 & 0,0534 & 0,0605 \\ 0,0111 & 0,0287 & 0,7219 & 0,0302 \\ 0,0123 & 0,0103 & 0,0141 & 0,8280 \end{pmatrix},$$

siendo $|A| = 0,3012$ y $Tr(A) = 2,9765$.

Los autovalores de A (en orden ascendente) son

$$\lambda_0 = 0,6490,$$

$$\lambda_1 = 0,7278,$$

$$\lambda_2 = 0,7540,$$

$$\lambda_3 = 0,8458,$$

valores comprendidos entre 0 y 1, de acuerdo con la condición de estacionariedad.

Es útil definir unos ‘factores de caída’ de correlación por distancia unitaria $\alpha_i, i = 0, 1, 2, 3$, tales que $\lambda_i = e^{\frac{\alpha_i}{2}}$, de tal modo que $\alpha_i = 2 \ln \lambda_i$. Por tanto, los factores de caída son parámetros negativos, que en este ejemplo adoptan los valores

$$\alpha_0 = -0,8647,$$

$$\alpha_1 = -0,6356,$$

$$\alpha_2 = -0,5648,$$

$$\alpha_3 = -0,3350.$$

Llamando \bar{a} al valor medio de los factores de caída, o ‘factor medio de caída’, tal que $\bar{a} = \frac{\sum_{i=0}^3 \alpha_i}{4}$, es evidente que se cumple $\bar{a} = \ln \pi = -0,6000$.

Calculamos el tensor de carga de correlación Π , dado por $\Pi = ANA'N^{-1}$, resultando

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,5750 & 0,0143 & 0,0182 & 0,0583 \\ 0,0281 & 0,4609 & 0,0607 & 0,0839 \\ 0,0262 & 0,0549 & 0,5144 & 0,0517 \\ 0,0224 & 0,0342 & 0,0078 & 0,6852 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi| = 0,0907$ y su traza $Tr(\Pi) = 2,2355$.

El factor de carga de correlación viene dado por

$$\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = 0,5488.$$

Los autovalores de Π son

$$\pi_0 = 0,4200,$$

$$\pi_1 = 0,5288,$$

$$\pi_2 = 0,5695,$$

$$\pi_3 = 0,7172.$$

En consecuencia, podemos obtener el tensor de distancia del campo como

$$U = I - \Pi = \begin{pmatrix} 0,4250 & -0,0143 & -0,0182 & -0,0583 \\ -0,0281 & 0,5391 & -0,0607 & -0,0839 \\ -0,0262 & -0,0549 & 0,4856 & -0,0517 \\ -0,0224 & -0,0342 & -0,0078 & 0,3148 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U| = 0,0333$ y $Tr(U) = 1,7645$, de donde obtenemos el valor del factor de distancia, que resulta

$$u = |U|^{\frac{1}{4}} = 0,4271.$$

Los autovalores de U son (en orden ascendente)

$$u_0 = 0,2828,$$

$$u_1 = 0,4305,$$

$$u_2 = 0,4710,$$

$$u_3 = 0,5800,$$

valores comprendidos entre 0 y 1, como cabía esperar.

Observamos que $u + \pi = 0,9759 < 1$, debido a que hay un grado de inhomogeneidad de escala y un grado de distorsión covariante (Apéndice G).

El factor que hemos denominado *factor de deformación covariante* τ , definido como $\tau = 1 - (u + \pi)$, que estima el grado de deformación por el efecto conjunto de la inhomogeneidad de escala y la distorsión covariante, toma un valor comprendido entre 0 y 1. En este ejemplo $\tau = 0,0241$. Este factor puede considerarse también una medida de la discrepancia entre la complejidad convencional de una distribución incondicional frente a una distribución condicional (discrepancia que presentan las medidas de complejidad de Fisher-Shannon y Cramér-Rao, aunque no la de López-Mancini-Calbet).

Finalmente calculamos el tensor simétrico de covarianza del tensor de stress condicional V que, conocido el tensor de distancia U , podemos calcular directamente como $V = UN$, resultando

$$V = \begin{pmatrix} 0,3978 & 0,0902 & 0,0875 & 0,0595 \\ 0,0902 & 0,4873 & 0,0674 & 0,0512 \\ 0,0875 & 0,0674 & 0,4458 & 0,0696 \\ 0,0595 & 0,0512 & 0,0696 & 0,2955 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V| = 0,0217$ y su traza es $Tr(V) = 1,6263$. Observamos que $|V| = u|N|$ y $Tr(V) \neq uTr(N)$, ya que $uTr(N) = 1,7083$ (como cabe esperar en este escenario analizado).

Llamemos S^V al tensor diagonal de desviación estándar condicional, cuya forma es

$$S^V = \begin{pmatrix} 0,6307 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,6980 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,6677 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5436 \end{pmatrix}.$$

Y llamemos R^V al tensor simétrico de correlación unitaria asociado a V , que calculamos según la expresión

$$R^V = S^{V^{-1}} V S^{V^{-1}}.$$

Por tanto,

$$R^V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,2049 & 0,2079 & 0,1734 \\ 0,2049 & 1,0000 & 0,1446 & 0,1348 \\ 0,2079 & 0,1446 & 1,0000 & 0,1919 \\ 0,1734 & 0,1348 & 0,1919 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

La inhomogeneidad de escala y la distorsión covariante están corroborados por las relaciones de desigualdad $S^V \neq \gamma S$ (siendo γ un escalar) y $R^V \neq R$, respectivamente.

A partir de los resultados anteriores podemos obtener los valores que adoptan las medidas informacionales, tanto incondicionales como condicionales. Así, las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan

$$S(N) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = 5,4617,$$

$$L_S(N) = (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = 235,4900,$$

$$J_S(N) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(N)} = 0,8985.$$

La información de Fisher es evaluada como

$$F(N) = Tr(N^{-1}) = 4,8120,$$

$$L_F(N) = \{Tr(N^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0,4559.$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(N) = \{Tr(N)\}^{\frac{1}{2}} = 2,0000.$$

El desequilibrio (incondicional) responde al cálculo siguiente:

$$D(N) = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} = 0,0078.$$

Las medidas de complejidad reflejan

$$C_{CR}(N) = F(N) \Delta^2(N) = 19,2481,$$

$$C_{FS}(N) = F(N) J_S(N) = 4,3235,$$

$$C_{LMC}(N) = D(N) L_S(N) = 1,8473.$$

Veamos a continuación los valores que adoptan las medidas informacionales condicionales, o sea, asociadas al tensor residual ε .

Las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan ahora

$$S(V) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = 3,7601,$$

$$L_S(V) = (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = 42,9542,$$

$$J_S(V) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V)} = |V|^{\frac{1}{4}} = u |N|^{\frac{1}{4}} = 0,3837.$$

La información de Fisher es evaluada como

$$F(V) = \text{Tr}(V^{-1}) = \text{Tr}((UN)^{-1}) = 10,9796,$$

$$L_F(V) = \{\text{Tr}(V^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = \{\text{Tr}((UN)^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0,3018.$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(V) = \{\text{Tr}(V)\}^{\frac{1}{2}} = \{\text{Tr}(UN)\}^{\frac{1}{2}} = 1,2752.$$

El desequilibrio (condicional) responde al cálculo siguiente:

$$D(V) = (4\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U|^{-\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} = 0,0430.$$

Las medidas de complejidad reflejan

$$C_{CR}(V) = F(V) \Delta^2(V) = 17,8557,$$

$$C_{FS}(V) = F(V) J_S(V) = 4,2132,$$

$$C_{LMC}(V) = D(V) L_S(V) = 1,8473.$$

Como vemos, las medidas C_{CR} y C_{FS} no coinciden en los casos incondicional y condicional, debido a que la transformación tensorial subyacente no se reduce a un cambio único de escala. De hecho, como cabe esperar, se produce, para ambas medidas, un cambio de la complejidad del caso condicional respecto al incondicional, debido al efecto de la deformación covariante (diferente cambio de escala por componentes y diferente correlación entre cada par de componentes), lo que provoca que, aunque se cumpla siempre $|UN| = u^4 |N|$, en general se producirá $\text{Tr}(UN) \neq u \text{Tr}(N)$. La medida C_{LMC} sí se conserva frente a dicha transformación.

Calcularemos a continuación los valores que proporcionan las medidas teórico-informacionales ‘efectivas’ asociadas al tensor de stress incondicional. Como vimos, las medidas de Shannon (entropía y longitud entrópica de Shannon) presentan un carácter esencialmente d -dimensional (en nuestro caso, tetradimensional), por lo que no hay diferencia entre su definición convencional y la que en esta memoria hemos denominado ‘efectiva’. Algo similar ocurre con el concepto de desequilibrio, que es una medida informacional asimilable a una longitud entrópica tetradimensional inversa, por lo que no hay distinción entre sus definiciones convencional y efectiva.

La información de Fisher presenta en su definición ‘efectiva’, basada en el producto exterior del valor esperado tensorial del gradiente de la distribución de probabilidad, una clara diferencia respecto a su definición convencional, según la cual $F(N) = Tr(N^{-1})$. La información efectiva de Fisher proporcionaba un resultado diferente que, como vimos, era $F^{eff}(N) = |N^{-1}|$, con un contenido informacional claramente diferente, ya que, al margen del hecho evidente de que la dimensionalidad difiere, el impacto de la información mutua entre componentes es claramente distinto. En nuestro ejemplo obtenemos

$$F^{eff}(N) = |N^{-1}| = 1,5344.$$

Por tanto, la longitud efectiva de Fisher proporciona el valor tetradimensional

$$L_F^{eff}(N) = |N|^{\frac{1}{2}} = 0,8073,$$

con interpretación claramente diferente a la de la longitud de Fisher convencional. Igual resultado ofrece la desviación estándar efectiva (también una medida tetradimensional), que vendría dada por

$$\Delta^{eff}(N) = |N|^{\frac{1}{2}} = 0,8073.$$

Las medidas anteriores, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados siguientes:

$$F^{eff}(V) = |V^{-1}| = |(UN)^{-1}| = u^{-4} |N^{-1}| = u^{-4} F^{eff}(N) = 46,1196.$$

$$L_F^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = u^2 L_F^{eff}(N) = 0,1473,$$

$$\Delta^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N) = 0,1473.$$

En cuanto a las medidas de complejidad efectivas reiteramos el resultado

ya establecido:

$$C_{CR}^{eff}(V) = C_{CR}^{eff}(N) = 1,$$

$$C_{FS}^{eff}(V) = C_{FS}^{eff}(N) = 1,$$

$$C_{LMC}^{eff}(N) = C_{LMC}^{eff}(N) = 1,8473,$$

teniendo en cuenta que, para el cálculo normalizado de la complejidad efectiva de Fisher-Shannon se ha utilizado la conversión propuesta para la potencia entrópica, cuyos valores obtenidos son:

$$J_S^{eff}(N) = 0,6517,$$

$$J_S^{eff}(V) = 0,0217.$$

Divergencia y similitud

Obtenemos unos resultados numéricos basados en el valor $u = 0,4271$.

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática:

$$QD[f_1, f_0] = \frac{(1-u)(1+4u+u^2)^{\frac{1}{2}}}{4\pi u(1+u)} |N|^{\frac{1}{4}} = 0,1143.$$

Distancia de Matusita:

$$MD[f_1, f_0] = \frac{2(1-u)^2}{(1+u)^2} = 0,3223.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler:

$$KL[f_1, f_0] = -2(1-u + \ln u) = 0,5557.$$

Divergencia de Jeffreys:

$$JD[f_1, f_0] = \frac{2(1-u)^2}{u} = 1,5371.$$

c) Similitud

$$QSI[f_1, f_0] = \frac{4u}{(1+u)^2} = 0,8388.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR[f_1, f_0] = \frac{(1-u)^2}{u} Tr(N^{-1}) = 3,6982,$$

$$FR[f_0, f_1] = \frac{(1-u)^2}{u^2} Tr(N^{-1}) = 8,6591,$$

$$FD[f_1, f_0] = \frac{(1-u)(1-u^2)}{u^2} Tr(N^{-1}) = 12,3573.$$

Obviamente los resultados numéricos obtenidos no facilitan una interpretación inmediata, ya que están condicionados por la escala adoptada en la definición de las diferentes medidas. Su utilidad, ampliamente contrastada, va asociada necesariamente a estudios de una mayor extensión en los se analice una diversidad de escenarios, en relación con diversos conjuntos admisibles de información disponible, que permitan un análisis comparativo, o eventualmente evolutivo. En el marco elegido de la Gravedad Estocástica se ha desarrollado un análisis simplificado, que abre un amplio conjunto de posibilidades en diferentes direcciones de investigación.

Ejemplo 2.b

Analícemos ahora un caso diferente, en el que los parámetros del tensor estocástico de stress toman, también en este caso, unos valores numéricos (permitidos, de acuerdo con el rango de valores admisibles). Análogamente, supongamos conocidos los tensores de covarianza incondicional N y condicional V , dados dos puntos, que están, por convenio y sin pérdida de generalidad, separados por una pseudodistancia espaciotemporal unitaria:

$$N = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0,3978 & 0,1321 & 0,1263 & 0,1028 \\ 0,1321 & 0,4873 & 0,1398 & 0,1138 \\ 0,1263 & 0,1398 & 0,4458 & 0,1089 \\ 0,1028 & 0,1138 & 0,1089 & 0,2955 \end{pmatrix}.$$

cuyo determinante es $|V| = 0,0166$ y su traza es $Tr(V) = 1,6263$.

Utilizamos igualmente S^V , el tensor diagonal de desviación estándar condicional, cuya forma es

$$S^V = \begin{pmatrix} 0,6307 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,6980 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,6677 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,5436 \end{pmatrix}.$$

Resultamos, de cara al análisis comparativo con el ejemplo anterior, que su valor es igual al de dicho ejemplo,

Llamemos R^V al tensor simétrico de correlación unitaria asociado a V , que calculamos según la expresión $R^V = S^{V^{-1}} V S^{V^{-1}}$.

Por tanto,

$$R^V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 \end{pmatrix},$$

coincidente con el núcleo unitario de correlación de N , hecho que destacamos de cara a las conclusiones obtenidas en este ejemplo.

En consecuencia, podemos obtener el tensor de distancia del campo como

$$U = V N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3970 & 0,0175 & 0,0093 & -0,0243 \\ -0,0082 & 0,4992 & 0,0028 & -0,0343 \\ -0,0047 & 0,0146 & 0,4517 & -0,0296 \\ 0,0068 & 0,0225 & 0,0155 & 0,2820 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U| = 0,0255$ y $Tr(U) = 1,6299$, de donde obtenemos el valor del factor de distancia, que resulta

$$u = |U|^{\frac{1}{4}} = 0,3997.$$

Observamos que $Tr(V) \neq u Tr(N)$, ya que $u Tr(N) = 1,5989$ Los autovalores de U son (en orden ascendente)

$$u_0 = 0,2897,$$

$$u_1 = 0,3977,$$

$$u_2 = 0,4485,$$

$$u_3 = 0,4940,$$

valores comprendidos entre 0 y 1.

Calculamos el tensor de carga de correlación Π , resultando

$$\Pi = I - U = \begin{pmatrix} 0,6030 & -0,0175 & -0,0093 & 0,0243 \\ 0,0082 & 0,5008 & -0,0028 & 0,0343 \\ 0,0047 & -0,0146 & 0,5483 & 0,0296 \\ -0,0068 & -0,0225 & -0,0155 & 0,7180 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi| = 0,1194$ y su traza $Tr(\Pi) = 2,3701$.

Los autovalores de Π son

$$\pi_0 = 1 - u_0 = 0,5060,$$

$$\pi_1 = 1 - u_1 = 0,5515,$$

$$\pi_2 = 1 - u_2 = 0,6023,$$

$$\pi_3 = 1 - u_3 = 0,7103.$$

El factor de carga de correlación viene dado por

$$\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = 0,5878.$$

Observamos en este caso que $u + \pi = 0,9875 < 1$, debido a que hay deformación covariante, ya que existe un grado de inhomogeneidad de escala.

El factor de deformación covariante τ , definido como $\tau = 1 - (u + \pi)$, estima en este caso sólo el grado de inhomogeneidad de escala y toma un valor positivo, concretamente $\tau = 0,0125$. Este factor constituye, como sabemos, una medida de la discrepancia entre la complejidad convencional de una distribución incondicional frente a una distribución condicional (afecta, reiteramos, sólo a las medidas de complejidad de Fisher-Shannon y Cramér-Rao).

Los resultados de este ejemplo nos llevan a los siguientes comentarios. Se produce inhomogeneidad de escala, ya que $S_V \neq \gamma S$, siendo γ un escalar. Sin embargo, no hay distorsión covariante, ya que $R^V = R$. Por ello hay un cierto grado de deformación covariante, medido por τ , cuyo valor, como hemos visto, es estrictamente mayor que 0. En este ejemplo preparado para evidenciar unas conclusiones, los tensores R y R^V son coincidentes, lo que implica una ausencia de distorsión covariante.

A partir de estos resultados podemos obtener, también en este ejemplo, los valores que adoptan las medidas informacionales condicionales, o sea, asociadas al tensor residual ε (obviamos la exposición de los datos correspondientes a las medidas incondicionales, ya que proporcionan los mismos resultados que en el ejemplo anterior).

Las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan ahora:

$$\begin{aligned} S(V) &= \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = 3,6277, \\ L_S(V) &= (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = 37,6248, \\ J_S(V) &= (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V)} = |V|^{\frac{1}{4}} = u |N|^{\frac{1}{4}} = 0,3591. \end{aligned}$$

La información de Fisher es evaluada como

$$\begin{aligned} F(V) &= Tr(V^{-1}) = Tr((UN)^{-1}) = 12,2636, \\ L_F(V) &= \{Tr(V^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = \{Tr((UN)^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0,2856. \end{aligned}$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(V) = \{Tr(V)\}^{\frac{1}{2}} = \{Tr(UN)\}^{\frac{1}{2}} = 1,2752.$$

El desequilibrio (condicional) responde al cálculo siguiente:

$$D(V) = (4\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U|^{-\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} = 0,0491.$$

Las medidas de complejidad reflejan

$$\begin{aligned} C_{CR}(V) &= F(V) \Delta^2(V) = 19,9439, \\ C_{FS}(V) &= F(V) J_S(V) = 4,4036, \\ C_{LMC}(V) &= D(V) L_S(V) = 1,8473. \end{aligned}$$

Como vemos, las medidas C_{CR} y C_{FS} tampoco coinciden, en este ejemplo, en los casos incondicional y condicional, debido a que la transformación tensorial subyacente se reduce a un cambio de escala (el mismo para las 4 dimensiones), ya que no hay distorsión covariante. De hecho, como cabe esperar, se produce, para ambas medidas, un incremento de la complejidad del caso condicional respecto al incondicional, debido al efecto de una inhomogeneidad de escala, en cuyo caso $Tr(UN) > uTr(N)$. La medida C_{LMC} sí se conserva, como es sabido, frente a dicha transformación.

Las medidas *efectivas*, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados siguientes

$$F^{eff}(V) = |V^{-1}| = |(UN)^{-1}| = u^{-4} |N^{-1}| = u^{-4} F^{eff}(N) = 60,1104,$$

$$L_F^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = u^2 L_F^{eff}(N) = 0,1290,$$

$$\Delta^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N) = 0,1290.$$

Las medidas *efectivas* de complejidad, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados, ya conocidos, siguientes:

$$C_{CR}^{eff}(V) = C_{CR}^{eff}(N) = 1,$$

$$C_{FS}^{eff}(V) = C_{FS}^{eff}(N) = 1,$$

$$C_{LMC}^{eff}(f(V)) = C_{LMC}^{eff}(N) = 1,8473.$$

En cuanto a la potencia entrópica, el resultado obtenido, de acuerdo con la definición convenida, es

$$J_S^{eff}(V) = 0,0166.$$

Divergencia y similitud

Al igual que en el ejemplo anterior, obtenemos unos resultados numéricos basados, en este caso, en el valor $u = 0,3997$.

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática:

$$QD[f_1, f_0] = 0,1274.$$

Distancia de Matusita:

$$MD[f_1, f_0] = 0,3678.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler:

$$KL[f_1, f_0] = 0,6334.$$

Divergencia de Jeffreys:

$$JD[f_1, f_0] = 1,8030.$$

c) Similitud

$$QSI[f_1, f_0] = 0,8161.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR[f_1, f_0] = 4,3380,$$

$$FR[f_0, f_1] = 10,8528,$$

$$FD[f_1, f_0] = 15,1908.$$

Ejemplo 2.c

Supongamos, una vez más, conocidos los tensores de covarianza incondicional N y condicional V en un punto, dados dos puntos. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que los dos puntos están separados por una pseudo-distancia espaciotemporal unitaria. El tensor incondicional es

$$N = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Y el tensor simétrico de stress condicional V viene dado por

$$V = \begin{pmatrix} 0,4500 & 0,0990 & 0,0855 & 0,0810 \\ 0,0990 & 0,4500 & 0,0675 & 0,0765 \\ 0,0855 & 0,0675 & 0,4500 & 0,0720 \\ 0,0810 & 0,0765 & 0,0720 & 0,4500 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V| = 0,0348$ y su traza es $Tr(V) = 1,8000$.

Llamemos S^V al tensor diagonal de desviación estándar condicional, cuya forma es

$$S^V = \begin{pmatrix} 0,6708 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,6708 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,6708 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6708 \end{pmatrix}.$$

Y llamemos R^V al tensor simétrico de correlación unitaria asociado a V , que calculamos según la expresión $R^V = S^{V^{-1}}V S^{V^{-1}}$. Por tanto,

$$R^V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,2200 & 0,1900 & 0,1800 \\ 0,2200 & 1,0000 & 0,1500 & 0,1700 \\ 0,1900 & 0,1500 & 1,0000 & 0,1600 \\ 0,1800 & 0,1700 & 0,1600 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Existe, por tanto, homogeneidad de escala, ya que $S^V = 0,6708S$, pero se produce un grado de distorsión covariante dado que $R^V \neq R$.

Podemos obtener el tensor de distancia del campo como

$$U = VN^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4815 & -0,0200 & -0,0392 & -0,0457 \\ -0,0149 & 0,4865 & -0,0599 & -0,0470 \\ -0,0301 & -0,0558 & 0,4906 & -0,0494 \\ -0,0376 & -0,0440 & -0,0504 & 0,4896 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U| = 0,0534$ y $Tr(U) = 1,9482$, de donde obtenemos el valor del factor de distancia, que resulta

$$u = |U|^{\frac{1}{4}} = 0,4807.$$

Observamos que $Tr(V) \neq u Tr(N)$, ya que $u Tr(N) = 1,9226$. Los auto-

valores de U son (en orden ascendente)

$$u_0 = 0,3624,$$

$$u_1 = 0,4974,$$

$$u_2 = 0,5391,$$

$$u_3 = 0,5493,$$

valores comprendidos entre 0 y 1.

Calculamos el tensor de carga de correlación Π , resultando

$$\Pi = I - U = \begin{pmatrix} 0,5185 & 0,0200 & 0,0392 & 0,0457 \\ 0,0149 & 0,5135 & 0,0599 & 0,0470 \\ 0,0376 & 0,0558 & 0,5094 & 0,0494 \\ 0,0200 & 0,0440 & 0,0504 & 0,5104 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi| = 0,0666$ y su traza $Tr(\Pi) = 2,0518$.

Por tanto, los autovalores de Π son

$$\pi_0 = 1 - u_0 = 0,4507,$$

$$\pi_1 = 1 - u_1 = 0,4609,$$

$$\pi_2 = 1 - u_2 = 0,5026,$$

$$\pi_3 = 1 - u_3 = 0,6376.$$

El factor de carga de correlación viene dado por

$$\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = 0,5079.$$

Observamos que $u + \pi = 0,9886 < 1$, debido a que existe un grado de deformación covariante.

El factor de deformación covariante τ toma el valor $\tau = 0,0114$. Este factor es, como reiteradamente hemos visto, una medida de la discrepancia entre la complejidad convencional de una distribución incondicional frente a una distribución condicional (aunque no afecta a la medida de López-Mancini-Calbet).

Exponemos a continuación los valores que adoptan las medidas informacionales condicionales, o sea, asociadas al tensor residual ε .

Las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan ahora:

$$S(V) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = 3,9965,$$

$$L_S(V) = (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = 54,4062,$$

$$J_S(V) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V)} = |V|^{\frac{1}{4}} = u |N|^{\frac{1}{4}} = 0,4319.$$

La información de Fisher es evaluada como

$$F(V) = Tr(V^{-1}) = Tr((UN)^{-1}) = 9,5807,$$

$$L_F(V) = \{Tr(V^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = \{Tr((UN)^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0,3231.$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(V) = \{Tr(V)\}^{\frac{1}{2}} = \{Tr(UN)\}^{\frac{1}{2}} = 1,3416.$$

El desequilibrio (condicional) viene dado por

$$D(V) = (4\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U|^{-\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} = 0,0340.$$

Las medidas de complejidad reflejan los valores siguientes:

$$C_{CR}(V) = F(V) \Delta^2(V) = 17,2453,$$

$$C_{FS}(V) = F(V) J_S(V) = 4,1376,$$

$$C_{LMC}(V) = D(V) L_S(V) = 1,8473.$$

Tampoco coinciden en este ejemplo las medidas C_{CR} y C_{FS} en los casos incondicional y condicional, debido a que la transformación tensorial subyacente no se reduce a un cambio único de escala. Para ambas medidas se produce una disminución de la complejidad del caso condicional respecto al incondicional, debido al efecto de la deformación covariante (diferente correlación entre cada par de componentes aunque exista homogeneidad de escala, por lo que $Tr(UN) < u Tr(N)$), con la excepción de la medida C_{LMC} , que sí es invariante frente a dicha transformación.

Las medidas *efectivas*, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados siguientes:

$$F^{eff}(V) = |V^{-1}| = u^{-4} |N^{-1}| = u^{-4} F^{eff}(N) = 28,7475,$$

$$L_F^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = u^2 L_F^{eff}(N) = 0,1865,$$

$$\Delta^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N) = 0,1865.$$

Los valores que proporcionan las medidas teórico-informacionales *efectivas* de complejidad, asociadas al tensor de stress condicional, son los ya conocidos y reiterados

$$\begin{aligned} C_{CR}^{eff}(V) &= C_{CR}^{eff}(N) = 1, \\ C_{FS}^{eff}(V) &= C_{FS}^{eff}(N) = 1, \\ C_{LMC}^{eff}(V) &= C_{LMC}^{eff}(N) = 1,8473. \end{aligned}$$

En cuanto a la potencia entrópica, el resultado obtenido, de acuerdo con la definición convenida, es

$$J_S^{eff}(V) = 0,0348.$$

Divergencia y similitud

Al igual que en los ejemplos anteriores, obtenemos unos resultados numéricos basados en el valor $u = 0,4807$.

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática

$$QD[f_1, f_0] = 0,0927.$$

Distancia de Matusita

$$MD[f_1, f_0] = 0,2460.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler

$$KL[f_1, f_0] = 0,4265.$$

Divergencia de Jeffreys

$$JD[f_1, f_0] = 1,1223.$$

c) Similitud

$$QSI[f_1, f_0] = 0,8770.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR[f_1, f_0] = 2,7002,$$

$$FR[f_0, f_1] = 5,6177,$$

$$FD[f_1, f_0] = 8,3177.$$

Ejemplo 2.d

Supongamos, también en este ejemplo, que son conocidos los tensores de covarianza incondicional N y condicional V en un punto, dados dos puntos (que suponemos nuevamente, sin pérdida de generalidad, separados por una distancia espaciotemporal unitaria):

$$N = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 & 0,3000 \\ 0,3000 & 0,3000 & 0,3000 & 1,0000 \end{pmatrix},$$

El tensor simétrico de stress condicional V es, en este caso,

$$V = \begin{pmatrix} 0,4000 & 0,1200 & 0,1200 & 0,1200 \\ 0,1200 & 0,4000 & 0,1200 & 0,1200 \\ 0,1200 & 0,1200 & 0,4000 & 0,1200 \\ 0,1200 & 0,1200 & 0,1200 & 0,4000 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V| = 0,0167$ y su traza es $Tr(V) = 1,6000$.

En consecuencia, podemos obtener de forma inmediata el tensor de distancia del campo como

$$U = VN^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,4000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,4000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,4000 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U| = 0,0256$ y $Tr(U) = 1,6000$, de donde obtenemos el valor del factor de distancia, que resulta evidentemente $u = 0,4000$.

Observamos que $Tr(UN) = uTr(N) = 1,6000$, o sea, no existe deformación covariante. Obviamente, los autovalores de U son

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0,4000.$$

Calculamos el tensor de carga de correlación Π , resultando

$$\Pi = I - U = \begin{pmatrix} 0,6000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,6000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,6000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6000 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi| = 0,1296$ y su traza $Tr(\Pi) = 2,4000$.

Por tanto, los autovalores de Π son, en este caso trivial,

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0,6000.$$

El factor de carga de correlación viene dado por $\pi = 0,6000$.

Observamos que $u + \pi = 1$, debido a que no hay inhomogeneidad de escala ni existe un grado de distorsión covariante. En este caso, los tensores U y Π son simétricos y diagonales.

El factor de deformación τ toma el valor $\tau = 0$, ya que no hay deformación covariante.

Exponemos a continuación los valores que adoptan las medidas informacionales condicionales, o sea, asociadas al tensor residual.

Las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan ahora

$$S(V) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} \right\} = 3,6291,$$

$$L_S(V) = (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U|^{\frac{1}{2}} |N|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e u)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = 37,6784,$$

$$: J_S(V) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V)} = |V|^{\frac{1}{4}} = u |N|^{\frac{1}{4}} = 0,3594.$$

La información de Fisher es evaluada como

$$F(V) = Tr(V^{-1}) = Tr((UN)^{-1}) = 12,0301,$$

$$L_F(V) = \{Tr(V^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = \{Tr((UN)^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0,2883.$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(V) = \{Tr(V)\}^{\frac{1}{2}} = \{Tr(UN)\}^{\frac{1}{2}} = 1,2649.$$

El desequilibrio condicional es

$$D(V) = (4\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U|^{-\frac{1}{2}} |N|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi u)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} = 0,0490.$$

Las medidas de complejidad reflejan

$$C_{CR}(V) = F(V) \Delta^2(V) = 19,2481,$$

$$C_{FS}(V) = F(V) J_S(V) = 4,3235,$$

$$C_{LMC}(V) = D(V) L_S(V) = 1,8473.$$

Coinciden en este ejemplo las medidas C_{CR} y C_{CR} en los casos incondicional y condicional, debido a que la transformación tensorial subyacente se reduce a un cambio único de escala (el mismo para las 4 dimensiones), además de la medida C_{LMC} , que es invariante frente a cualquier transformación.

Las medidas *efectivas*, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados siguientes:

$$F^{eff}(V) = |V^{-1}| = |(UN)^{-1}| = u^{-4} |N^{-1}| = u^{-4} F^{eff}(N) = 59,9394,$$

$$L_F^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = u^2 L_F^{eff}(N) = 0,1292,$$

$$\Delta^{eff}(V) = |V|^{\frac{1}{2}} = |UN|^{\frac{1}{2}} = u^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N) = 0,1292.$$

Calcularemos a continuación los valores que proporcionan las medidas teórico-informacionales *efectivas* de complejidad, asociadas al tensor de stress condicional. Dichos valores son

$$C_{CR}^{eff}(V) = C_{CR}^{eff}(N) = 1,$$

$$C_{FS}^{eff}(V) = C_{FS}^{eff}(N) = 1,$$

$$C_{LMC}^{eff}(V) = C_{LMC}^{eff}(N) = 1,8473.$$

En cuanto a la potencia entrópica, el resultado obtenido, de acuerdo con la definición convenida, es

$$J_S^{eff}(V) = 0,0167.$$

Divergencia y similitud

Al igual que en los ejemplos anteriores, obtenemos unos resultados numéricos basados en el valor $u = 0,4000$.

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática:

$$QD[f_1, f_0] = 0,1273.$$

Distancia de Matusita:

$$MD[f_1, f_0] = 0,3673.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler:

$$KL[f_1, f_0] = 0,6326.$$

Divergencia de Jeffreys:

$$JD[f_1, f_0] = 1,8000.$$

c) Similitud

$$QSI[f_1, f_0] = 0,8163.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR[f_1, f_0] = 4,3308,$$

$$FR[f_0, f_1] = 10,8271,$$

$$FD[f_1, f_0] = 15,1579.$$

Ejemplo 3: Dos fuentes F1 y F2

Consideremos un nuevo caso general, incorporando una segunda fuente F2. Analizaremos exhaustivamente los diferentes escenarios de agregación de dos fuentes, tomando como primera fuente F1 la que ha sido analizada en el ejemplo 2.a. Con el fin de facilitar el análisis comparativo de los resultados del análisis separado respecto al análisis integrado haremos un estudio independiente previo acerca de la fuente 2, similar al que se realizó en el caso de la fuente 1, a pesar de que, por reiterativo, los resultados obtenidos no aportan conceptualmente nada nuevo en relación con el ejemplo 2.a. Supongamos conocidos los tensores de covarianza N_2 en un punto y N_2^* en dos puntos de un tensor de stress estocástico gaussiano markoviano inducidos por la nueva fuente externa. Supongamos además, como en todos los casos analizados, que los dos puntos están separados por una distancia espaciotemporal unitaria. Sean

$$N_2 = \begin{pmatrix} 2,2500 & 0,8000 & 0,6000 & 0,7000 \\ 0,8000 & 2,5600 & 0,6000 & 0,7000 \\ 0,6000 & 0,6000 & 2,2500 & 0,6000 \\ 0,7000 & 0,7000 & 0,6000 & 1,9600 \end{pmatrix},$$

$$N_2^* = \begin{pmatrix} 1,8129 & 0,7104 & 0,5217 & 0,6619 \\ 0,6869 & 2,1264 & 0,5389 & 0,6124 \\ 0,5299 & 0,5582 & 1,8956 & 0,5450 \\ 0,6585 & 0,6557 & 0,5421 & 1,6668 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos para el tensor en un punto $|N_2| = 16,5498$ y $Tr(N_2) = 9,0200$, y para el tensor entre dos puntos $|N_2^*| = 7,3574$ y $Tr(N_2^*) = 7,5016$.

El tensor S_2 diagonal de desviación estándar en un punto es

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1,5000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,6000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,5000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,4000 \end{pmatrix}.$$

y el tensor R_2 de correlación unitaria, asociado a N_2 , viene dado por

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3333 & 0,2667 & 0,3333 \\ 0,3333 & 1,0000 & 0,2500 & 0,3125 \\ 0,2667 & 0,2500 & 1,0000 & 0,2857 \\ 0,3333 & 0,3125 & 0,2857 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, el tensor diagonal S_2^* de desviación estándar entre dos puntos es

$$S_2^* = \begin{pmatrix} 1,3464 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,4582 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,3768 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,2911 \end{pmatrix}.$$

Y el tensor R_2^*

$$R_2^* = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3618 & 0,2814 & 0,3808 \\ 0,3498 & 1,0000 & 0,2684 & 0,3253 \\ 0,2859 & 0,2780 & 1,0000 & 0,3066 \\ 0,3788 & 0,3483 & 0,3050 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, el tensor de propagación A_2 para una distancia unitaria resulta

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,7823 & 0,0181 & 0,0050 & 0,0503 \\ 0,0050 & 0,8220 & 0,0157 & 0,0123 \\ 0,0021 & 0,0178 & 0,8329 & 0,0160 \\ 0,0250 & 0,0190 & 0,0072 & 0,8325 \end{pmatrix},$$

siendo $|A_2| = 0,4446$ y $Tr(A_2) = 3,2697$.

Los autovalores de A_2 (en orden ascendente) son

$$\lambda_{2,0} = 0,7639,$$

$$\lambda_{2,1} = 0,8088,$$

$$\lambda_{2,2} = 0,8283,$$

$$\lambda_{2,3} = 0,8687.$$

Calculamos ahora el tensor de carga de correlación Π_2 , resultando

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0,6158 & 0,0200 & 0,0138 & 0,0818 \\ 0,0131 & 0,6688 & 0,0291 & 0,0391 \\ 0,0025 & 0,0228 & 0,6961 & 0,0285 \\ 0,0462 & 0,0140 & 0,0161 & 0,6983 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi_2| = 0,1976$ y su traza $Tr(\Pi_2) = 2,6789$. El factor de carga de correlación viene dado por $\pi_2 = |\Pi_2|^{\frac{1}{4}} = 0,6637$.

Los autovalores de Π_2 son

$$\pi_{2,0} = 0,5832,$$

$$\pi_{2,1} = 0,6507,$$

$$\pi_{2,2} = 0,6872,$$

$$\pi_{2,3} = 0,7578.$$

En consecuencia, el tensor de distancia viene dado por

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0,3842 & -0,0200 & -0,0138 & -0,0818 \\ -0,0131 & 0,3312 & -0,0291 & -0,0391 \\ -0,0025 & -0,0228 & 0,3039 & -0,0285 \\ -0,0462 & -0,0140 & -0,0161 & 0,3017 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U_2| = 0,0110$ y $Tr(U_2) = 1,3211$. El factor de distancia resulta $u_2 = |U_2|^{\frac{1}{4}} = 0,3241$.

Los autovalores de U_2 son (en orden ascendente)

$$u_{2,0} = 0,2422,$$

$$u_{2,1} = 0,3128,$$

$$u_{2,2} = 0,3493,$$

$$u_{2,3} = 0,4168.$$

Observamos que $u_2 + \pi_2 = 0,9908 < 1$, debido a que hay un grado de inhomogeneidad de escala y un grado de distorsión covariante. Por tanto, en este ejemplo, $\tau = 0,0092$.

Finalmente calculamos el tensor simétrico de covarianza del tensor de stress condicional V_2 , que resulta

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0,7830 & 0,1907 & 0,1385 & 0,0864 \\ 0,1907 & 0,7927 & 0,1021 & 0,1287 \\ 0,1385 & 0,1021 & 0,6514 & 0,1088 \\ 0,0864 & 0,1287 & 0,1088 & 0,5395 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V_2| = 0,1825$ y su traza es $Tr(V_2) = 2,7667$. Observamos que $Tr(V_2) \neq u_2 Tr(N_2)$, ya que $u_2 Tr(N_2) = 2,9230$.

El tensor S_2^V de desviación estándar condicional es

$$S_2^V = \begin{pmatrix} 0,8849 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,8903 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,8071 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,7345 \end{pmatrix}.$$

Y R_2^V , el tensor de correlación unitaria asociado a V_2

$$R_2^V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,2420 & 0,1939 & 0,1330 \\ 0,2420 & 1,0000 & 0,1420 & 0,1968 \\ 0,1939 & 0,1420 & 1,0000 & 0,1835 \\ 0,1330 & 0,1968 & 0,1835 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, la inhomogeneidad de escala y la distorsión covariante están corroborados por las relaciones de desigualdad $S_2^V \neq \gamma S_2$ y $R_2^V \neq R_2$.

Exponemos a continuación las medidas informacionales, tanto incondicionales como condicionales. Las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan

$$S(N_2) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |N_2|^{\frac{1}{2}} \right\} = 7,0789,$$

$$L_S(N_2) = (2\pi e)^2 |N_2|^{\frac{1}{2}} = 1186,7127,$$

$$J_S(N_2) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S_2(\xi)} = 2,0170.$$

Obtenemos la información de Fisher como

$$F(N_2) = Tr(N_2^{-1}) = 2,1571,$$

$$L_F(N_2) = \{Tr(N_2^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0,6809.$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(N_2) = \{Tr(N_2)\}^{\frac{1}{2}} = 3,0033.$$

Y el desequilibrio (incondicional):

$$D(N_2) = (4\pi)^{-2} |N_2|^{-\frac{1}{2}} = 0,0016.$$

Las medidas de complejidad:

$$C_{CR}(N_2) = F(N_2) \Delta^2(N_2) = 19,4567,$$

$$C_{FS}(N_2) = F(N_2) J_S(N_2) = 4,3507,$$

$$C_{LMC}(N_2) = D(f(N_2)) L_S(N_2) = 1,8473.$$

En cuanto a las medidas informacionales condicionales, o sea, asociadas al tensor residual ε_2 , obtenemos para la entropía de Shannon y relacionadas:

$$\begin{aligned} S(V_2) &= \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V_2|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U_2|^{\frac{1}{2}} |N_2|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e u_2)^2 |N_2|^{\frac{1}{2}} \right\} = 4, 8253, \\ L_S(V_2) &= (2\pi e)^2 |V_2|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U_2|^{\frac{1}{2}} |N_2|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e u_2)^2 |N_2|^{\frac{1}{2}} = 124, 6236, \\ J_S(V_2) &= (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V_2)} = |V_2|^{\frac{1}{4}} = u_2 |N_2|^{\frac{1}{4}} = 0, 6536. \end{aligned}$$

Y la información de Fisher:

$$\begin{aligned} F(V_2) &= Tr (V_2^{-1}) = Tr ((U_2 N_2)^{-1}) = 6, 4234, \\ L_F(V_2) &= \{Tr (V_2^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = \{Tr ((U_2 N_2)^{-1})\}^{-\frac{1}{2}} = 0, 3946. \end{aligned}$$

La desviación estándar:

$$\Delta(V_2) = \{Tr (V_2)\}^{\frac{1}{2}} = \{Tr (U_2 N_2)\}^{\frac{1}{2}} = 1, 6633.$$

El desequilibrio (condicional):

$$D(V_2) = (4\pi)^{-2} |V_2|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U_2|^{-\frac{1}{2}} |N_2|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi u_2)^{-2} |N_2|^{-\frac{1}{2}} = 0, 0148.$$

Las medidas de complejidad:

$$\begin{aligned} C_{CR}(V_2) &= F(V_2) \Delta^2(V_2) = 17, 7717, \\ C_{FS}(V_2) &= F(V_2) J_S(V_2) = 4, 1985, \\ C_{LMC}(V_2) &= D(V_2) L_S(V_2) = 1, 8473. \end{aligned}$$

Como era de esperar, las medidas C_{CR} y C_{FS} no coinciden en los casos incondicional y condicional, debido a que la transformación tensorial subyacente no se reduce a un cambio único de escala. Se produce, para ambas medidas, un cambio de la complejidad del caso condicional respecto al incondicional, debido al efecto de la deformación covariante (diferente cambio de escala por componentes y diferente correlación entre cada par de componentes), lo que provoca, también para esta fuente, que, tenga lugar la desigualdad $Tr(U_2 N_2) \neq u_2 Tr(N_2)$.

Calcularemos a continuación los valores que proporcionan las medidas teórico-informacionales ‘efectivas’ asociadas al tensor de stress incondicional.

$$F^{eff}(N_2) = |N_2^{-1}| = 0, 0604.$$

Por tanto, la longitud efectiva de Fisher, definida de acuerdo con el convenio propuesto, proporciona el valor tetradsimensional

$$L_F^{eff}(N_2) = |N_2|^{\frac{1}{2}} = 4,0681.$$

Igual resultado ofrece la desviación estándar efectiva (también una medida tetradsimensional), que vendría dada por

$$\Delta^{eff}(N_2) = |N_2|^{\frac{1}{2}} = 4,0681.$$

Las medidas anteriores, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados siguientes

$$F^{eff}(V_2) = |V_2^{-1}| = |(U_2 N_2)^{-1}| = u_2^{-4} |N_2^{-1}| = u_2^{-4} F^{eff}(N_2) = 5,4789,$$

$$L_F^{eff}(V_2) = |V_2|^{\frac{1}{2}} = |U_2 N_2|^{\frac{1}{2}} = u_2^2 |N_2|^{\frac{1}{2}} = u_2^2 L_F^{eff}(N_2) = 0,4272,$$

$$\Delta^{eff}(N_2) = |V_2|^{\frac{1}{2}} = |U_2 N_2|^{\frac{1}{2}} = u_2^2 |N_2|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(\xi_2) = 0,4272.$$

En cuanto a las medidas de complejidad efectivas reiteramos el resultado conocido

$$C_{CR}^{eff}(V_2) = C_{CR}^{eff}(N_2) = 1,$$

$$C_{FS}^{eff}(V_2) = C_{FS}^{eff}(N_2) = 1,$$

$$C_{LMC}^{eff}(V_2) = C_{LMC}^{eff}(N_2) = 1,8473,$$

teniendo en cuenta una vez más que, para el cálculo normalizado de la complejidad efectiva de Fisher-Shannon se ha utilizado la conversión propuesta para la potencia entrópica, habiéndose obtenido los valores

$$J_S^{eff}(N_2) = 16,5498,$$

$$J_S^{eff}(V_2) = 0,1825.$$

Divergencia y similitud

Al igual que en el ejemplo anterior, obtenemos unos resultados numéricos basados en el valor $u = 0,4204$.

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática:

$$QD[f_1, f_0] = \frac{(1 - u_2)(1 + 4u_2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}}{4\pi u_2(1 + u_2)} |N_2|^{\frac{1}{4}} = 0,3918.$$

Distancia de Matusita:

$$MD[f_1, f_0] = \frac{2(1 - u_2)^2}{(1 + u_2)^2} = 0,5212.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler:

$$KL[f_1, f_0] = -2(1 - u_2 + \ln u_2) = 0,9018.$$

Divergencia de Jeffreys:

$$JD[f_1, f_0] = \frac{2(1 - u_2)^2}{u_2} = 2,8198.$$

c) Similitud

$$QSI[f_1, f_0] = \frac{4u_2}{(1 + u_2)^2} = 0,7394.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR[f_1, f_0] = \frac{(1-u_2)^2}{u_2} Tr(N_2^{-1}) = 3,0412,$$

$$FR[f_0, f_1] = \frac{(1-u_2)^2}{u_2^2} Tr(N_2^{-1}) = 9,3847,$$

$$FD[f_1, f_0] = \frac{(1-u_2)(1-u_2^2)}{u_2^2} Tr(N_2^{-1}) = 12,4260.$$

Ejemplo 3.1: Dos fuentes F1 y F2 no correlacionadas

Analizaremos en este ejemplo el efecto agregado conjunto de dos fuentes externas que perturban simultáneamente un sistema físico relativista que ocupa una región determinada espaciotemporal. Dichas fuentes son las que corresponden al comportamiento descrito en el Ejemplo 2.a (Fuente F1) y en la introducción previa incluida en este Ejemplo 3 (fuente F2). Se utilizará un subíndice '1' para distinguir los valores de las magnitudes asignadas a la fuente F1.

Dado que $N = N_1 + N_2$, el núcleo de covarianza del proceso conjunto es

$$N = \begin{pmatrix} 3,2500 & 1,1000 & 0,9000 & 1,0000 \\ 1,1000 & 3,5600 & 0,9000 & 1,0000 \\ 0,9000 & 0,9000 & 3,2500 & 0,9000 \\ 1,0000 & 1,0000 & 0,9000 & 2,9600 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos, para este tensor en un punto, $|N| = 72,7044$ y $Tr(N) = 13,0200$.

El tensor diagonal S de desviación estándar en un punto es

$$S = \begin{pmatrix} 1,8028 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,8868 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,8028 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,7205 \end{pmatrix},$$

y el tensor R de correlación unitaria, asociado a N , viene dado por

$$R = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3234 & 0,2769 & 0,3224 \\ 0,3234 & 1,0000 & 0,2646 & 0,3081 \\ 0,2769 & 0,2646 & 1,0000 & 0,2902 \\ 0,3224 & 0,3081 & 0,2902 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Recordando que la matriz de peso Γ del proceso ξ_1 viene dada por $\Gamma = N_1 N^{-1}$, obtenemos

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0,3099 & -0,0137 & 0,0108 & -0,0020 \\ -0,0078 & 0,2778 & 0,0161 & 0,0052 \\ 0,0050 & 0,0043 & 0,3035 & 0,0059 \\ -0,0110 & -0,0096 & 0,0028 & 0,3440 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza (evidentemente positivos) son, respectivamente, $|\Gamma| = 0,0090$ y $Tr(\Gamma) = 1,2352$.

En consecuencia

$$I - \Gamma = \begin{pmatrix} 0,6901 & 0,0137 & -0,0108 & 0,0020 \\ 0,0078 & 0,7222 & -0,0161 & -0,0052 \\ -0,0050 & -0,0043 & 0,6965 & -0,0059 \\ 0,0110 & 0,0096 & -0,0028 & 0,6560 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza (también positivos) son $|I - \Gamma| = 0,2276 < 1 - |\Gamma|$ y $Tr(I - \Gamma) = 1,2352 = Tr(I) - Tr(\Gamma)$, respectivamente.

Por tanto, dado que el tensor de distancia U verifica $U = U_1\Gamma + U_2(I - \Gamma)$, obtenemos

$$U = \begin{pmatrix} 0,3966 & -0,0192 & -0,0145 & -0,0738 \\ -0,0191 & 0,3895 & -0,0356 & -0,0536 \\ -0,0084 & -0,0304 & 0,3582 & -0,0355 \\ -0,0387 & -0,0201 & -0,0136 & 0,3061 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U| = 0,0161$ y $Tr(U) = 1,4503$. El factor de distancia resulta, por tanto, $u = |U|^{\frac{1}{4}} = 0,3560$.

Los autovalores de U son (en orden ascendente)

$$u_0 = 0,2576,$$

$$u_1 = 0,3582,$$

$$u_2 = 0,4126,$$

$$u_3 = 0,4219.$$

Eligiendo cualquiera de las posibles vías para hacerlo, calculamos ahora el tensor de carga de correlación Π , resultando

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,6034 & 0,0192 & 0,0145 & 0,0738 \\ 0,0191 & 0,6105 & 0,0356 & 0,0536 \\ 0,0084 & 0,0304 & 0,6418 & 0,0355 \\ 0,0387 & 0,0201 & 0,0136 & 0,6939 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi| = 0,1618$ y su traza $Tr(\Pi) = 2,5497$. El factor de carga de correlación π resulta, por tanto, $\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = 0,6342$.

Los autovalores de Π son

$$\pi_0 = 0,5781,$$

$$\pi_1 = 0,5874,$$

$$\pi_2 = 0,6418,$$

$$\pi_3 = 0,7424.$$

El factor τ de deformación covariante adopta el valor $\tau = 1 - (u + \pi) = 0,0098$.

El tensor de propagación A (por unidad de distancia) del proceso agregado es ‘no-markoviano’ y viene dado, de acuerdo con (5.7), por la expresión $A = A_1\Gamma + A_2(I - \Gamma)$. En este ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0,7740 & 0,0133 & 0,0099 & 0,0479 \\ 0,0096 & 0,7790 & 0,0253 & 0,0293 \\ 0,0039 & 0,0193 & 0,7997 & 0,0207 \\ 0,0197 & 0,0153 & 0,0095 & 0,8317 \end{pmatrix}.$$

Finalmente calculamos el tensor simétrico correlación del tensor condicional V , a partir, por ejemplo, de la expresión $V = UN$, de la que resulta

$$V = \begin{pmatrix} 1,1808 & 0,2809 & 0,2260 & 0,1459 \\ 0,2809 & 1,2800 & 0,1695 & 0,1799 \\ 0,2260 & 0,1695 & 1,0972 & 0,1784 \\ 0,1459 & 0,1799 & 0,1784 & 0,8350 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V| = 1,1678$ y su traza es $Tr(V) = 4,3930$. Observamos que $Tr(V) \neq uTr(N)$, ya que $uTr(N) = 4,6352$.

Evidentemente se cumple que el tensor condicional V es igual a la suma de los tensores condicionales de los procesos individuales inducidos por las fuentes F1 y F2.

El tensor S^V de desviación estándar condicional es

$$S^V = \begin{pmatrix} 1,0867 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,1314 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0475 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9138 \end{pmatrix}.$$

Y R^V , el tensor de correlación unitaria asociado a V

$$R^V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,2285 & 0,1985 & 0,1469 \\ 0,2285 & 1,0000 & 0,1430 & 0,1740 \\ 0,1985 & 0,1430 & 1,0000 & 0,1864 \\ 0,1469 & 0,1740 & 0,1864 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

También en este caso de acción conjunta de dos fuentes externas la inhomogeneidad de escala y la distorsión covariante están corroborados por las relaciones de desigualdad $S^V \neq \gamma S$ y $R^V \neq R$.

Ejemplo 3.2: Dos fuentes F1 y F2 correlacionadas

Analizaremos en este ejemplo el efecto agregado conjunto de dos fuentes externas que perturban simultáneamente un sistema físico relativista que ocupa una región determinada espaciotemporal. Dichas fuentes son, también en este ejemplo, las que corresponden al comportamiento descrito en el Ejemplo 2.a (Fuente F1) y en la introducción previa incluida en este Ejemplo 3 (fuente F2), aunque se supondrá que entre ambas fuentes existe una correlación cruzada, o sea, una información mutua.

El núcleo de covarianza del proceso conjunto es ahora $N = N_1 + N_2 + C_{12} + C_{21}$, siendo C_{12} el tensor de covarianza $\langle \xi_1 \xi_2' \rangle$, en general no simétrico, y C_{21} el tensor transpuesto de C_{12} . Supongamos el siguiente valor observado del tensor (no simétrico):

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,2000 & 0,3000 & 0,4000 \\ 0,7000 & 0,8000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0,7000 & 0,6000 & 0,4000 & 0,6000 \\ 0,6000 & 0,4000 & 0,5000 & 0,3000 \end{pmatrix}, \quad (15.5)$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|C_{12}| = 0,0006$ y $Tr(C_{12}) = 2,0000$.

Este tensor es, en general, no simétrico, y admite una descomposición similar a la realizada con los núcleos de covarianza, en cuanto a identificar la estructura unitaria de correlación R_{12} , utilizando la descomposición $C_{12} =$

$S_1 R_{12} S_2$. Conocidos S_1 y S_2 obtenemos

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0,1250 & 0,2000 & 0,2857 \\ 0,4667 & 0,5000 & 0,3333 & 0,3571 \\ 0,4667 & 0,3750 & 0,2667 & 0,4286 \\ 0,4000 & 0,2500 & 0,3333 & 0,2143 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|R_{12}| = 0,0001$ y $Tr(R_{12}) = 1,3143$. R_{12} no es simétrico como consecuencia de que C_{12} no lo es.

En los casos que se analizarán seguidamente, que implicarán escenarios alternativos de equivalencia en autocovarianza, concretamente los que se han denominado de formato mínimo, se utilizarán otros tensores auxiliares. Uno de esos tensores, el tensor $X_{1,2}$, que podemos denominar tensor de covarianza cruzada media normal, es un tensor simétrico que quedó definido como $X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$, cuya forma resulta

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} 0,5000 & 0,4500 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0,4500 & 0,8000 & 0,5500 & 0,4500 \\ 0,5000 & 0,5500 & 0,4000 & 0,5500 \\ 0,5000 & 0,4500 & 0,5500 & 0,3000 \end{pmatrix}, \quad (15.6)$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|X_{1,2}| = 0,0045$ y $Tr(X_{1,2}) = 2,0000 = Tr(C_{12}) = Tr(C_{21})$.

En ese análisis tienen utilidad el tensor antisimétrico Z_{12} y el tensor transpuesto de éste, Z_{21} , también obviamente antisimétrico, que podemos denominar tensores de covarianza cruzada mínima. Recordemos que Z_{12} y Z_{21} quedaron definidos, respectivamente, como $Z_{12} = \frac{1}{2}(C_{12} - C_{21})$ y $Z_{21} = \frac{1}{2}(C_{21} - C_{12})$, ambos, evidente, con una diagonal principal formada por elementos nulos. En nuestro ejemplo

$$Z_{12} = \begin{pmatrix} 0,0000 & -0,2500 & -0,2000 & -0,1000 \\ 0,2500 & 0,0000 & -0,0500 & 0,0500 \\ 0,2000 & 0,0500 & 0,0000 & 0,0500 \\ 0,1000 & -0,0500 & -0,0500 & 0,0000 \end{pmatrix}, \quad (15.7)$$

cuya traza es nula.

Dado que $N = N_1 + N_2 + C_{12*} + C_{21} = N_1 + N_2 + 2X_{1,2}$, el núcleo de covarianza del proceso conjunto es

$$N = \begin{pmatrix} 4,2500 & 2,0000 & 1,9000 & 2,0000 \\ 2,0000 & 5,1600 & 2,0000 & 1,9000 \\ 1,9000 & 2,0000 & 4,0500 & 2,0000 \\ 2,0000 & 1,9000 & 2,0000 & 3,5600 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos para este tensor en un punto $|N| = 112,2075$ y $Tr(N) = 17,0200$.

El tensor diagonal S de desviación estándar en un punto es

$$S = \begin{pmatrix} 2,0616 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 2,2716 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 2,0125 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,8868 \end{pmatrix}.$$

y el tensor R de correlación unitaria, asociado a N , viene dado por

$$R = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,4271 & 0,4580 & 0,5142 \\ 0,4271 & 1,0000 & 0,4375 & 0,4433 \\ 0,4580 & 0,4375 & 1,0000 & 0,5267 \\ 0,5142 & 0,4433 & 0,5267 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

La matriz de peso normal Γ_1 del proceso ξ_1 viene dada por $\Gamma_1 = N_1 N^{-1}$, con lo que obtenemos

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0,2784 & -0,0241 & -0,0213 & -0,0473 \\ -0,0163 & 0,2102 & -0,0178 & -0,0088 \\ -0,0239 & -0,0282 & 0,2995 & -0,0555 \\ -0,0592 & -0,0285 & -0,0647 & 0,3657 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza (evidentemente positivos) son, respectivamente, $|\Gamma| = 0,0058$ y $Tr(\Gamma) = 1,1538$.

Del mismo modo, la matriz de peso normal Γ_2 del proceso ξ_2 viene dada por $\Gamma_2 = N_2 N^{-1}$, con lo que obtenemos

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0,6210 & -0,0169 & -0,0887 & -0,0934 \\ -0,0092 & 0,5526 & -0,1030 & -0,0353 \\ -0,0664 & -0,0739 & 0,6948 & -0,1451 \\ -0,0840 & -0,0335 & -0,1383 & 0,6933 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza (también positivos) son, respectivamente, $|\Gamma_2| = 0,1475 < 1 - |\Gamma|$ y $Tr(\Gamma_2) = 2,5617$.

El tensor complementario, que evalúa el peso relativo de la correlación mutua entre los dos procesos, es $I - \Gamma_1 - \Gamma_2$, resultando

$$I - \Gamma_1 - \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0,1006 & 0,0410 & 0,1100 & 0,1407 \\ 0,0254 & 0,2372 & 0,1208 & 0,0441 \\ 0,0903 & 0,1021 & 0,0057 & 0,2005 \\ 0,1431 & 0,0620 & 0,2030 & -0,0590 \end{pmatrix}.$$

Dado que el tensor de distancia U verifica $U = I - \sum_{i,j=1}^2 A_i C_{ij} A'_j$, donde todos los tensores implicados son conocidos, obtenemos (recordando que $C_{ii} = N_i, i = 1, 2$)

$$U = \begin{pmatrix} 0,4016 & -0,0109 & -0,0004 & -0,0992 \\ -0,0120 & 0,4060 & -0,0285 & -0,0748 \\ -0,0016 & -0,0196 & 0,3642 & -0,0525 \\ -0,0293 & -0,0131 & 0,0018 & 0,2880 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U| = 0,0164$ y $Tr(U) = 1,4597$. El factor de distancia resulta, por tanto, $u = |U|^{\frac{1}{4}} = 0,3581$. Los autovalores de U son (en orden ascendente)

$$u_0 = 0,2582,$$

$$u_1 = 0,3578,$$

$$u_2 = 0,4207,$$

$$u_3 = 0,4230.$$

Calculamos ahora el tensor de carga de correlación Π , resultando

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,5984 & 0,0109 & 0,0004 & 0,0992 \\ 0,0120 & 0,5940 & 0,0285 & 0,0748 \\ 0,0016 & 0,0196 & 0,6358 & 0,0525 \\ 0,0293 & 0,0131 & -0,0018 & 0,7120 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi| = 0,1592$ y su traza $Tr(\Pi) = 2,5403$. El factor de carga de correlación π resulta, por tanto, $\pi = |\Pi|^{\frac{1}{4}} = 0,6319$. Luego el factor τ de deformación covariante es $\tau = 1 - (u + \pi) = 0,0102$. Los autovalores de

Π son

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0,5770, \\ \pi_1 &= 0,5793, \\ \pi_2 &= 0,6422, \\ \pi_3 &= 0,7418.\end{aligned}$$

Finalmente calculamos el tensor simétrico correlación del tensor de stress condicional V a partir, por ejemplo, de la expresión $V = UN$, de la que resulta

$$V = \begin{pmatrix} 1,4856 & 0,5575 & 0,5411 & 0,4284 \\ 0,5575 & 1,8722 & 0,5245 & 0,4243 \\ 0,5411 & 0,5245 & 1,3278 & 0,5012 \\ 0,4284 & 0,4243 & 0,5012 & 0,9451 \end{pmatrix}, \quad (15.8)$$

cuyo determinante es $|V| = 1,8448$ y su traza es $Tr(V) = 5,6307$. Observamos que $Tr(V) \neq u Tr(N)$, ya que $u Tr(N) = 6,0945$.

El tensor S^V de desviación estándar condicional es

$$S^V = \begin{pmatrix} 1,2189 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,3683 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,1523 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9722 \end{pmatrix}.$$

Y R^V , el tensor de correlación unitaria asociado a V ,

$$R^V = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3343 & 0,3853 & 0,3615 \\ 0,3343 & 1,0000 & 0,3326 & 0,3190 \\ 0,3853 & 0,3326 & 1,0000 & 0,4474 \\ 0,3615 & 0,3190 & 0,4474 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

También en este caso, de acción conjunta de dos fuentes externas, la inhomogeneidad de escala y la distorsión covariante están corroborados por las relaciones de desigualdad $S^V \neq \gamma S$ y $R^V \neq R$.

Los resultados obtenidos utilizando una representa mínima en la agregación de los dos procesos inducidos es la que se describe a continuación. Los resultados no difieren demasiado, aunque el hecho destacable es precisamente que sí son diferentes, como comprobaremos, lo que indica un distinto nivel de eficiencia en cuanto al uso de una información disponible, bajo la aplicación de una u otra representación. La cuantía de esas pequeñas diferencias es acorde a la discrepancia entre los tensores Z y el tensor nulo.

El tensor de peso mínimo Γ_1^* del proceso ξ_1^* viene dado por $\Gamma_1^* = N_1^* N^{-1}$, donde, como sabemos $N_1^* = N_1 + X_{1,2}$, o sea,

$$N_1^* = \begin{pmatrix} 1,5000 & 0,7500 & 0,8000 & 0,8000 \\ 0,7500 & 1,8000 & 0,8500 & 0,7500 \\ 0,8000 & 0,8500 & 1,4000 & 0,8500 \\ 0,8000 & 0,7500 & 0,8500 & 1,3000 \end{pmatrix},$$

cuya desestructuración proporciona

$$S_1^* = \begin{pmatrix} 1,2247 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,3416 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,1832 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,1402 \end{pmatrix}.$$

$$R_1^* = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,4564 & 0,5521 & 0,5729 \\ 0,4564 & 1,0000 & 0,5354 & 0,4903 \\ 0,5521 & 0,5354 & 1,0000 & 0,6301 \\ 0,5729 & 0,4903 & 0,6301 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

La matriz de peso Γ_1^* es, por tanto,

$$\Gamma_1^* = \begin{pmatrix} 0,3287 & -0,0036 & 0,0337 & 0,0230 \\ -0,0036 & 0,3288 & 0,0426 & 0,0132 \\ 0,0213 & 0,0228 & 0,3023 & 0,0448 \\ 0,0124 & 0,0025 & 0,0368 & 0,3362 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza (evidentemente positivos) son, respectivamente, $|\Gamma| = 0,0106$ y $Tr(\Gamma) = 1,2961$.

Del mismo modo, la matriz de peso $\Gamma_2^* = I - \Gamma_1^*$ del proceso ξ_2^* viene dada por $\Gamma_2^* = N_2^* N^{-1}$, siendo N_2^* el núcleo de correlación de ξ_2^* , dado por $N_2^* = N_2 + X_{1,2}$. Por tanto

$$N_2^* = \begin{pmatrix} 2,7500 & 1,2500 & 1,1000 & 1,2000 \\ 1,2500 & 3,3600 & 1,1500 & 1,1500 \\ 1,1000 & 1,1500 & 2,6500 & 1,1500 \\ 1,2000 & 1,1500 & 1,1500 & 2,2600 \end{pmatrix},$$

cuya desestructuración proporciona

$$S_2^* = \begin{pmatrix} 1,6583 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,8330 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,6279 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 1,5033 \end{pmatrix},$$

$$R_2^* = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,4112 & 0,4075 & 0,4813 \\ 0,4112 & 1,0000 & 0,3854 & 0,4173 \\ 0,4075 & 0,3854 & 1,0000 & 0,4669 \\ 0,4813 & 0,4173 & 0,4699 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz de peso mínima $\Gamma_2^* = I - \Gamma_1^*$ viene dada por

$$\Gamma_2^* = \begin{pmatrix} 0,6713 & 0,0036 & -0,0337 & -0,0230 \\ 0,0036 & 0,6712 & -0,0426 & -0,0132 \\ -0,0213 & -0,0228 & 0,6977 & -0,0448 \\ -0,0124 & -0,0025 & -0,0368 & 0,6638 \end{pmatrix}.$$

cuyos determinante y traza (también positivos) son, respectivamente, $|\Gamma_2^*| = 0,2070$ y $Tr(\Gamma_2^*) = 2,7039$.

Dado que el tensor de distancia U^* verifica $U^* = I - \sum_{i,j=1}^2 A_i Z_{ij} A_j'$, donde todos los tensores implicados son conocidos, obtenemos (recordando que $Z_{ii} = N_i^*$, $i = 1, 2$)

$$U^* = \begin{pmatrix} 0,4016 & -0,0111 & -0,0009 & -0,0990 \\ -0,0117 & 0,4041 & -0,0287 & -0,0741 \\ -0,0019 & -0,0200 & 0,3641 & -0,0523 \\ -0,0293 & -0,0132 & 0,0015 & 0,2881 \end{pmatrix},$$

cuyos determinante y traza son, respectivamente, $|U^*| = 0,0164$ y $Tr(U^*) = 1,4579$. El factor de distancia resulta, por tanto, $u^* = |U^*|^{\frac{1}{4}} = 0,3577$. Los autovalores de U^* son (en orden ascendente)

$$u_0^* = 0,2580,$$

$$u_1^* = 0,3577,$$

$$u_2^* = 0,4193,$$

$$u_3^* = 0,4229.$$

Calculamos ahora el tensor de carga de correlación Π^* , resultando

$$\Pi^* = \begin{pmatrix} 0,5984 & 0,0111 & 0,0009 & 0,0990 \\ 0,0117 & 0,5959 & 0,0287 & 0,0741 \\ 0,0019 & 0,0200 & 0,6359 & 0,0523 \\ 0,0293 & 0,0132 & -0,0015 & 0,7119 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|\Pi^*| = 0,1597$ y su traza $Tr(\Pi^*) = 2,5421$. El factor de carga de correlación π^+ resulta, por tanto, $\pi^* = |\Pi^*|^{\frac{1}{4}} = 0,6322$.

Luego el factor τ^* de deformación covariante es $\tau^* = 1 - (u^* + \pi^*) = 0,0102$.

Los autovalores de Π^* son

$$\pi_0^* = 0,5771,$$

$$\pi_1^* = 0,5807,$$

$$\pi_2^* = 0,6423,$$

$$\pi_3^* = 0,7420.$$

Finalmente calculamos el tensor simétrico condicional de covarianza V^* del tensor de stress, a partir, por ejemplo, de la expresión $V^* = U^*N$, de la que resulta

$$V^* = \begin{pmatrix} 1,4850 & 0,5561 & 0,5392 & 0,4280 \\ 0,5561 & 1,8640 & 0,5219 & 0,4236 \\ 0,5392 & 0,5219 & 1,3263 & 0,5003 \\ 0,4280 & 0,4236 & 0,5003 & 0,9449 \end{pmatrix}, \quad (15.9)$$

cuyo determinante es $|V^*| = 1,8363$ y su traza es $Tr(V^*) = 5,6203$. Observamos que $Tr(V^*) \neq u^* Tr(N)$, ya que $u^* Tr(N) = 6,0875$.

El tensor S^{V^*} de desviación estándar condicional es

$$S^{V^*} = \begin{pmatrix} 1,2186 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,3653 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,1517 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9721 \end{pmatrix}.$$

Y R^{V^*} , el tensor de correlación unitaria asociado a V^* ,

$$R^{V^*} = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,3343 & 0,3842 & 0,3613 \\ 0,3343 & 1,0000 & 0,3319 & 0,3191 \\ 0,3842 & 0,3319 & 1,0000 & 0,4469 \\ 0,3613 & 0,3191 & 0,4469 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

También en este caso de influencia conjunta de dos fuentes externas con información mutua, la inhomogeneidad de escala y la distorsión covariante están corroboradas por las relaciones de desigualdad $S^{V^*} \neq \gamma S^*$ y $R^{V^*} \neq R^*$.

Evidentemente, en este escenario de correlación entre procesos inducidos, el tensor condicional conjunto no es igual a la suma de los tensores condicionales de cada proceso individual. Los tensores de exceso condicional ΔV y

Δ^*V , normal y mínimo respectivamente, obtenidos como $\Delta V = V - (V_1 + V_2)$ y $\Delta^*V = V^* - (V_1 + V_2)$, son

$$\Delta V = \begin{pmatrix} 0,3048 & 0,2766 & 0,3151 & 0,2825 \\ 0,2766 & 0,5922 & 0,3550 & 0,2444 \\ 0,3151 & 0,3550 & 0,2306 & 0,3228 \\ 0,2825 & 0,2444 & 0,3228 & 0,1101 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^*V = \begin{pmatrix} 0,3042 & 0,2752 & 0,3133 & 0,2821 \\ 0,2752 & 0,5840 & 0,3525 & 0,2437 \\ 0,3133 & 0,3525 & 0,2292 & 0,3219 \\ 0,2821 & 0,2437 & 0,3219 & 0,1099 \end{pmatrix},$$

y evalúan, en los escenarios de representación normal y mínima, la covarianza cruzada en un punto entre los tensores condicionales de los procesos inducidos. Ambos tensores de exceso de covarianza son obviamente diferentes a partir de los conceptos que hemos revisado y de los resultados obtenidos en esta memoria.

Observamos, pues, que los tensores condicionales, bajo representación normal o mínima, toman valores diferentes. Si denominamos $\Delta_{N,M}$ a dicha diferencia, o sea, $\Delta_{N,M} = \Delta V - \Delta^*V$, obtenemos la discrepancia en el núcleo de covarianza condicional para ambas representaciones. Así

$$\Delta_{N,M} = \begin{pmatrix} 0,0006 & 0,0014 & 0,0019 & 0,0003 \\ 0,0014 & 0,0082 & 0,0026 & 0,0007 \\ 0,0019 & 0,0026 & 0,0014 & 0,0009 \\ 0,0003 & 0,0007 & 0,0009 & 0,0002 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos constatar, de acuerdo con los resultados analíticos alcanzados que $\Delta_{N,M} = (A_1 - A_2) X_{1,2} (A_1 - A_2)'$. Por otra parte, del hecho de que, siendo $|\Delta_{N,M}| = 0$, obtengamos que $Tr(\Delta_{N,M}) = 0,0104$, un valor positivo, podemos interpretar que la representación mínima es más eficiente, en un cierto grado, que la representación normal, en el sentido de que, utilizando la información conocida en el punto x_a , se obtiene una mejora en la reducción de la incertidumbre evaluada en x . Esta afirmación queda ratificada por los resultados numéricos obtenidos en el análisis comparativo de datos que se lleva a cabo en el siguiente ejemplo. Aunque las diferencias en los valores obtenidos no son muy significativas (premisa que constituye, por su falta de objetividad, un cierto abuso y falta de rigor en el lenguaje utilizado) permiten evidenciar la coherencia entre dichos valores y el carácter

‘positivo’ que presenta el tensor $X_{1,2}$. En definitiva, el carácter de este tensor determina la mayor o menor eficiencia entre diferentes representaciones, equivalentes en autocovarianza, del proceso agregado ξ_x , sea la representación normal o natural, o la representación que hemos venido en denominar mínima, o incluso alguna otra que cumpliera las restricciones exigibles a las correlaciones cruzadas en relación con la estructura paramétrica del proceso.

Ejemplo 4: Análisis comparativo de las medidas de información de dos procesos agregables

Obtenemos los resultados que se exponen a continuación para las medidas incondicionales y condicionales de los procesos asociados a dos fuentes F1 y F2, considerando dos casos: primero, las fuentes son no correlacionadas, para el que se utilizará el superíndice I y segundo, las fuentes son correlacionadas, para el cual se utilizará el superíndice C , distinguiendo éste último en las medidas condicionales para las que se utilizará C_N en formato normal y C_M en formato mínimo.

Las medidas de Shannon y relacionadas proporcionan

$$S(N^I) = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |N^I|^{\frac{1}{2}} \right\} = 7,8190,$$

$$S(N^C) = \ln \left\{ (2\pi e)^{2a} : |N^C|^{\frac{1}{2}} \right\} = 8,0359,$$

$$L_S(N^I) = (2\pi e)^2 |N^I|^{\frac{1}{2}} = 2487,3044,$$

$$L_S(N^C) = (2\pi e)^2 |N^C|^{\frac{1}{2}} = 3090,0077,$$

$$J_S(N^I) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(N^I)} = 2,9200,$$

$$J_S(N^C) = (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(N^C)} = 3,2547.$$

Obtenemos la información de Fisher como

$$F(N^I) = Tr \left(N^{I^{-1}} \right) = 1,4845,$$

$$F(N^C) = Tr \left(N^{C^{-1}} \right) = 1,4773,$$

$$L_F(N^I) = \left\{ Tr \left(N^{I^{-1}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = 0,8207,$$

$$L_F(N^C) = \left\{ Tr \left(N^{C^{-1}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = 0,8228.$$

La desviación estándar se obtiene como

$$\Delta(N^I) = \left\{ Tr \left(N^I \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 3,6083,$$

$$\Delta(N^C) = \left\{ Tr \left(N^C \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 4,1255.$$

Y el desequilibrio (incondicional):

$$D(N^I) = (4\pi)^{-2} |N^I|^{-\frac{1}{2}} = 0,0007,$$

$$D(N^C) = (4\pi)^{-2} |N^C|^{-\frac{1}{2}} = 0,0006.$$

Las medidas de complejidad:

$$C_{CR}(N^I) = F(N^I) \Delta^2(N^I) = 19,3287,$$

$$C_{CR}(N^C) = F(N^C) \Delta^2(N^C) = 25,1428,$$

$$C_{FS}(N^I) = F(N^I) J_S(N^I) = 4,3349,$$

$$C_{FS}(N^C) = F(N^C) J_S(N^C) = 4,8079,$$

$$C_{LMC}(N^I) = D(N^I) L_S(N^I) = 1,8473,$$

$$C_{LMC}(N^C) = D(N^C) L_S(N^C) = 1,8473.$$

En cuanto a las medidas informacionales condicionales, o sea, asociadas al tensor residual ε , obtenemos que la entropía de Shannon y medidas rela-

cionadas proporcionan ahora

$$\begin{aligned}
 S(V^I) &= \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V^I|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U^I|^{\frac{1}{2}} |N^I|^{\frac{1}{2}} \right\} = \\
 &\quad \ln \left\{ (2\pi e u^I)^2 |N^I|^{\frac{1}{2}} \right\} = 5,7533, \\
 S(V^{C_N}) &= \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V^{C_N}|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U^{C_N}|^{\frac{1}{2}} |N^C|^{\frac{1}{2}} \right\} = \\
 &\quad \ln \left\{ (2\pi e u^{C_N})^2 |N^C|^{\frac{1}{2}} \right\} = 5,9819, \\
 S(V^{C_M}) &= \ln \left\{ (2\pi e)^2 |V^{C_M}|^{\frac{1}{2}} \right\} = \ln \left\{ (2\pi e)^2 |U^{C_M}|^{\frac{1}{2}} |N^C|^{\frac{1}{2}} \right\} = \\
 &\quad \ln \left\{ (2\pi e u^{C_M})^2 |N^C|^{\frac{1}{2}} \right\} = 5,9796,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_S(V^I) &= (2\pi e)^2 |V^I|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U^I|^{\frac{1}{2}} |N^I|^{\frac{1}{2}} = \\
 &\quad (2\pi e u^I)^2 |N^I|^{\frac{1}{2}} = 315,2401, \\
 L_S(V^{C_N}) &= (2\pi e)^2 |V^{C_N}|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U^{C_N}|^{\frac{1}{2}} |N^C|^{\frac{1}{2}} = \\
 &\quad (2\pi e u^{C_N})^2 |N^C|^{\frac{1}{2}} = 396,2069, \\
 L_S(V^{C_M}) &= (2\pi e)^2 |V^{C_M}|^{\frac{1}{2}} = (2\pi e)^2 |U^{C_M}|^{\frac{1}{2}} |N^C|^{\frac{1}{2}} = \\
 &\quad (2\pi e u^{C_M})^2 |N^C|^{\frac{1}{2}} = 395,2943,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_S(V^I) &= (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V^I)} = |V^I|^{\frac{1}{4}} = u^I |N^I|^{\frac{1}{4}} = 1,0396, \\
 J_S(V^{C_N}) &= (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V^{C_N})} = |V^{C_N}|^{\frac{1}{4}} = u^{C_N} |N^C|^{\frac{1}{4}} = 1,1654, \\
 J_S(V^{C_M}) &= (2\pi e)^{-1} e^{\frac{1}{2}S(V^{C_M})} = |V^{C_M}|^{\frac{1}{4}} = u^{C_M} |N^C|^{\frac{1}{4}} = 1,1641.
 \end{aligned}$$

Y la información de Fisher:

$$\begin{aligned}
 F(V^I) &= Tr \left(V^{I^{-1}} \right) = Tr \left((U^I N^I)^{-1} \right) = 4,0354, \\
 F(V^{C_N}) &= Tr \left(V^{C_N^{-1}} \right) = Tr \left((U^{C_N} N^C)^{-1} \right) = 3,9965, \\
 F(V^{C_M}) &= Tr \left(V^{C_M^{-1}} \right) = Tr \left((U^{C_M} N^C)^{-1} \right) = 3,9988,
 \end{aligned}$$

$$L_F(V^I) = \left\{ \text{Tr} \left(V^{I^{-1}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \text{Tr} \left((U^I N^I)^{-1} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = 0,4978,$$

$$L_F(V^{C_N}) = \left\{ \text{Tr} \left(V^{C_N^{-1}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \text{Tr} \left((U^{C_N} N^C)^{-1} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = 0,5002,$$

$$L_F(V^{C_M}) = \left\{ \text{Tr} \left(V^{C_M^{-1}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \text{Tr} \left((U^{C_M} N^C)^{-1} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = 0,5001.$$

La desviación estándar:

$$\Delta(V^I) = \left\{ \text{Tr} \left(V^I \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \text{Tr} \left(U^I N^I \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 2,0959,$$

$$\Delta(V^{C_N}) = \left\{ \text{Tr} \left(V^{C_N} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \text{Tr} \left(U^{C_N} N^C \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 2,3729,$$

$$\Delta(V^{C_M}) = \left\{ \text{Tr} \left(V^{C_M} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \text{Tr} \left(U^{C_M} N^C \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 2,3707.$$

El desequilibrio (condicional):

$$D(V^I) = (4\pi)^{-2} |V^I|^{-\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U^I|^{-\frac{1}{2}} |N^I|^{-\frac{1}{2}} =$$

$$(4\pi u^I)^{-2} |N^I|^{-\frac{1}{2}} = 0,0059,$$

$$D(V^{C_N}) = (4\pi)^{-2} |V^{C_N}|^{\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U^{C_N}|^{\frac{1}{2}} |N^C|^{\frac{1}{2}} =$$

$$(4\pi u^{C_N})^{-2} |N^C|^{\frac{1}{2}} = 0,0047,$$

$$D(V^{C_M}) = (4\pi)^{-2} |V^{C_M}|^{\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |U^{C_M}|^{\frac{1}{2}} |N^C|^{\frac{1}{2}} =$$

$$(4\pi u^{C_M})^{-2} |N^C|^{\frac{1}{2}} = 0,0047.$$

Las medidas de complejidad son las siguientes:

$$C_{CR}(V^I) = F(V^I) \Delta^2(V^I) = 17,7274,$$

$$C_{CR}(V^{C_N}) = F(V^{C_N}) \Delta^2(V^{C_N}) = 22,5031,$$

$$C_{CR}(V^{C_M}) = F(V^{C_M}) \Delta^2(V^{C_M}) = 22,4741,$$

$$C_{FS}(V^I) = F(V^I) J_S(V^I) = 4,1950,$$

$$C_{FS}(V^{C_N}) = F(V^{C_N}) J_S(V^{C_N}) = 4,6577,$$

$$C_{FS}(V^{C_M}) = F(V^{C_M}) J_S(V^{C_M}) = 4,6549,$$

$$C_{LMC}(V^I) = D(V^I) L_S(V^I) = 1,8473,$$

$$C_{LMC}(V^{C_N}) = D(V^{C_N}) L_S(V^{C_N}) = 1,8473,$$

$$C_{LMC}(V^{C_M}) = D(V^{C_M}) L_S(V^{C_M}) = 1,8473.$$

Como cabía esperar, las medidas C_{CR} y C_{FS} no coinciden en los casos incondicional y condicional (en ambas representaciones, normal y mínima), tanto en el escenario de incorrelación como en el de correlación, debido a que las transformaciones tensoriales subyacentes no se reducen a un cambio único de escala. Se produce, para ambas medidas, un cambio de la complejidad del caso condicional respecto al incondicional, debido al efecto de la deformación covariante (diferente cambio de escala por componentes y diferente correlación entre cada par de componentes), lo que provoca que, tengan lugar las desigualdades $Tr(U^I N^I) \neq u^I Tr(N^I)$, $Tr(U^{C_N} N^{C_N}) \neq u^{C_N} Tr(N^{C_N})$ y $Tr(U^{C_M} N^{C_M}) \neq u^{C_M} Tr(N^{C_M})$.

Los resultados anteriores merecerían un análisis comparativo detenido, lo que no haremos de forma exhaustiva, aunque sí haremos algún comentario en relación especialmente con las longitudes entrópicas y las complejidades.

Con carácter general todas las longitudes entrópicas referidas al escenario de incorrelación respecto a los escenarios de correlación entre los procesos inducidos, siendo así tanto para el tensor de covarianza incondicional como para el tensor condicional, lo cual constituye una conclusión que cabría esperar. Una conclusión interesante, aunque la magnitud numérica no es significativa, es que, en la observación de los datos relativos al tensor condicional, las longitudes entrópicas son ligeramente inferiores en los casos de representación mínima respecto a los de representación normal. En consonancia con los resultados anteriores, el desequilibrio no muestra una discrepancia significativa entre escenarios diferentes para el tensor de covarianza incondicional, aunque para el tensor condicional refleja un incremento a tener en cuenta en el escenario de incorrelación respecto al de correlación, aunque la discrepancia entre las representaciones normal y mínima no es relevante.

Las complejidades de Cramér-Rao y de Fisher-Shannon ofrecen unas cifras muy ilustrativas. Respecto al tensor incondicional, las complejidades se incrementan de forma significativa en el escenario de correlación entre procesos respecto al escenario de incorrelación. E igualmente sucede con el tensor de covarianza condicional, aunque para este tensor, produciéndose una reducción de la complejidad cuando el formato es mínimo respecto al formato normal, dicha reducción no es muy significativa, si bien es compatible con las características de los procesos, incluyendo la covarianza cruzada que se ha asignado. Evidentemente, la complejidad de López-Mancini-Calbet es invariante en todos los escenarios.

Calcularemos a continuación los valores que proporcionan las medidas teórico-informacionales *efectivas* asociadas al tensor de stress incondicional

(comparando los dos escenarios: incorrelación y correlación).

$$F^{eff}(N^I) = |N^{I^{-1}}| = 0,0138,$$

$$F^{eff}(N^C) = |N^{C^{-1}}| = 0,0089.$$

Por tanto, la longitud efectiva de Fisher, definida convencionalmente, proporciona el valor tetradimensional

$$L_F^{eff}(N^I) = |N^I|^{\frac{1}{2}} = 8,5267,$$

$$L_F^{eff}(N^C) = |N^C|^{\frac{1}{2}} = 10,5928.$$

Igual resultado ofrece la desviación estándar efectiva (también una medida tetradimensional), que vendría dada por

$$\Delta^{eff}(N^I) = |N^I|^{\frac{1}{2}} = 8,5267,$$

$$\Delta^{eff}(N^C) = |N^C|^{\frac{1}{2}} = 10,5928.$$

Las medidas anteriores, aplicadas al tensor estocástico de stress condicional, proporcionan los resultados siguientes:

$$F^{eff}(V^I) = |V^{I^{-1}}| = u^{I^{-4}} |N^{I^{-1}}| = |(U^I N^I)^{-1}| = u^{I^{-4}} |N^{I^{-1}}| =$$

$$u^{I^{-4}} F^{eff}(N^I) = 0,8563,$$

$$F^{eff}(V^{C_N}) = |V^{C_N^{-1}}| = |(U^{C_N} N^C)^{-1}| = u^{C_N^{-4}} |N^{C^{-1}}| =$$

$$u^{C_N^{-4}} F^{eff}(N^C) = 0,5421,$$

$$F^{eff}(V^{C_M}) = |V^{C_M^{-1}}| = |(U^{C_M} N^C)^{-1}| = u^{C_M^{-4}} |N^{C^{-1}}| =$$

$$u^{C_M^{-4}} F^{eff}(N^C) = 0,5446,$$

$$L_F^{eff}(V^I) = |V^I|^{\frac{1}{2}} = |U^I N^I|^{\frac{1}{2}} = u^{I^2} |N^I|^{\frac{1}{2}} =$$

$$u^{I^2} L_F^{eff}(N^I) = 1,0807,$$

$$L_F^{eff}(V^{C_N}) = |V^{C_N}|^{\frac{1}{2}} = |U^{C_N} N^C|^{\frac{1}{2}} = u^{C_N^2} |N^{C_N}|^{\frac{1}{2}} =$$

$$u^{C_N^2} L_F^{eff}(N^C) = 1,3582,$$

$$L_F^{eff}(V^{C_M}) = |V^{C_M}|^{\frac{1}{2}} = |U^{C_M} N^C|^{\frac{1}{2}} = u^{C_M^2} |N^{C_M}|^{\frac{1}{2}} =$$

$$u^{C_M^2} L_F^{eff}(N^C) = 1,3551,$$

e iguales valores para

$$\begin{aligned}\Delta^{eff}(V^I) &= |V^I|^{\frac{1}{2}} = |U^I N^I|^{\frac{1}{2}} = u^{I^2} |N^I|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N^I) = 1,0807. \\ \Delta^{eff}(V^{C_N}) &= |V^{C_N}|^{\frac{1}{2}} = |U^{C_N} N^C|^{\frac{1}{2}} = u^{C_N^2} |N^C|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N^C) = 1,3582, \\ \Delta^{eff}(V^{C_M}) &= |V^{C_M}|^{\frac{1}{2}} = |U^{C_M} N^C|^{\frac{1}{2}} = u^{C_M^2} |N^C|^{\frac{1}{2}} = \Delta^{eff}(N^C) = 1,3551.\end{aligned}$$

En cuanto a las medidas de complejidad *efectivas* reiteramos los resultados conocidos

$$\begin{aligned}C_{CR}^{eff}(V) &= C_{CR}^{eff}(N) = 1, \\ C_{FS}^{eff}(V) &= C_{FS}^{eff}(N) = 1, \\ C_{LMC}^{eff}(V) &= C_{LMC}^{eff}(N) = 1,8473,\end{aligned}$$

en todos los escenarios. Se ha supuesto una vez más, para el cálculo normalizado de la complejidad efectiva de Fisher-Shannon, la definición propuesta para la potencia entrópica.

Como podemos observar, las conclusiones, exceptuando las relativas a las medidas de complejidad, son similares a las expuestas anteriormente en relación con las medidas convencionales, aunque evidentemente con cifras diferentes, acorde con la diferente definición entre unas y otras medidas.

Divergencia y similitud

En el análisis comparativo siguiente los resultados numéricos están basados en los valores $u^I = 0,3560$, $u^{C_N} = 0,3581$ y $u^{C_M} = 0,3577$.

a) M-Divergencias

Distancia Cuadrática:

$$\begin{aligned}QD^I[f_1, f_0] &= \frac{(1-u^I)(1+4u^I+u^{I^2})^{\frac{1}{2}}}{4\pi u^I(1+u^I)} |N^I|^{\frac{1}{4}} = 0,1523, \\ QD^{C_N}[f_1, f_0] &= \frac{(1-u^{C_N})(1+4u^{C_N}+u^{C_N^2})^{\frac{1}{2}}}{4\pi u^{C_N}(1+u^{C_N})} |N^C|^{\frac{1}{4}} = 0,1510, \\ QD^{C_M}[f_1, f_0] &= \frac{(1-u^{C_M})(1+4u^{C_M}+u^{C_M^2})^{\frac{1}{2}}}{4\pi u^{C_M}(1+u^{C_M})} |N^C|^{\frac{1}{4}} = 0,1513.\end{aligned}$$

Distancia de Matusita:

$$MD^I[f_1, f_0] = \frac{2(1-u^I)^2}{(1+u^I)^2} = 0,4511.$$

$$MD^{C_N}[f_1, f_0] = \frac{2(1-u^{C_N})^2}{(1+u^{C_N})^2} = 0,4468,$$

$$MD^{C_M}[f_1, f_0] = \frac{2(1-u^{C_M})^2}{(1+u^{C_M})^2} = 0,4477.$$

b) Divergencias de Csiszár

Entropía Relativa de Kullback-Leibler:

$$KL^I[f_1, f_0] = -2(1 - u^I + \ln u^I) = 0,7776,$$

$$KL^{C_N}[f_1, f_0] = -2(1 - u^{C_N} + \ln u^{C_N}) = 0,7702,$$

$$KL^{C_M}[f_1, f_0] = -2(1 - u^{C_M} + \ln u^{C_M}) = 0,7716.$$

Divergencia de Jeffreys:

$$JD^I[f_1, f_0] = \frac{2(1-u^I)^2}{u^I} = 2,3299,$$

$$JD^{C_N}[f_1, f_0] = \frac{2(1-u^{C_N})^2}{u^{C_N}} = 2,3015,$$

$$JD^{C_M}[f_1, f_0] = \frac{2(1-u^{C_M})^2}{u^{C_M}} = 2,3071.$$

c) Similitud

$$QSI^I[f_1, f_0] = \frac{4u^I}{(1+u^I)^2} = 0,7745,$$

$$QSI^{C_N}[f_1, f_0] = \frac{4u^{C_N}}{(1+u^{C_N})^2} = 0,7766,$$

$$QSI^{C_M}[f_1, f_0] = \frac{4u^{C_M}}{(1+u^{C_M})^2} = 0,7762.$$

d) Divergencia de Fisher

$$FR^I[f_1, f_0] = \frac{(1-u^I)^2}{u^I} Tr(N^{I^{-1}}) = 5,6058,$$

$$FR^{C_N}[f_1, f_0] = \frac{(1-u^{C_N})^2}{u^{C_N}} Tr(N^{C^{-1}}) = 5,5374,$$

$$FR^{C_M}[f_1, f_0] = \frac{(1-u^{C_M})^2}{u^{C_M}} Tr(N^{C^{-1}}) = 5,5509,$$

$$FR^I[f_0, f_1] = \frac{(1-u^I)^2}{u^{I^2}} Tr \left(N^{I^{-1}} \right) = 15,7464,$$

$$FR^{C_N}[f_0, f_1] = \frac{(1-u^{C_N})^2}{u^{C_N^2}} Tr \left(N^{C^{-1}} \right) = 15,4642,$$

$$FR^{C_M}[f_0, f_1] = \frac{(1-u^{C_M})^2}{u^{C_M^2}} Tr \left(N^{C^{-1}} \right) = 15,5198,$$

$$FD^I[f_1, f_0] = \frac{(1-u^I)(1-u^{I^2})}{u^{I^2}} Tr \left(N^{I^{-1}} \right) = 21,3522,$$

$$FD^{C_N}[f_1, f_0] = \frac{(1-u^{C_N})(1-u^{C_N^2})}{u^{C_N^2}} Tr \left(N^{C^{-1}} \right) = 21,0016,$$

$$FD^{C_M}[f_1, f_0] = \frac{(1-u^{C_M})(1-u^{C_M^2})}{u^{C_M^2}} Tr \left(N^{C^{-1}} \right) = 21,0707.$$

Como podemos observar, las divergencias ofrecen, en general, una cifras claramente inferiores en el escenario de correlación respecto a las del escenario de incorrelación, aunque la discrepancia entre los datos relativos a los formatos normal y mínimo son ligeramente superiores en el caso de esta última representación. La medida de similitud refleja un comportamiento opuesto al de las divergencias.

Este ejemplo, con un amplio contexto de escenarios diversos, ha proporcionado unos resultados comparativos interesantes, que merecerían un análisis más exhaustivo y profundo, lo que dejamos abierto de cara a estudios más específicos acerca de las cuestiones tratadas.

Ejemplo 5: Teoría 1 aproximada - Asimilación de los dos procesos inducidos correlacionados a dos procesos aproximados no correlacionados

Siguiendo los pasos indicados en la Sección 6.2, dados los procesos inducidos por las fuentes F1 y F2, obtenemos a continuación unos resultados correspondientes a la teoría 1 ‘aproximada’.

Como se indica en dicha sección, la base de esta teoría ‘aproximada’ consiste en la sustitución de los procesos (5.3) y (5.4) por los procesos $\xi_{1,ap}$ y $\xi_{2,ap}$ tales que

$$\xi_{1,ap}(x) = A_1 \xi_{1,ap}(x_a) + \varepsilon_{1,ap}(x),$$

$$\xi_{2,ap}(x) = A_2 \xi_{2,ap}(x_a) + \varepsilon_{2,ap}(x),$$

siendo la covarianza cruzada entre los dos procesos el tensor simétrico $X_{1,2}$, definido como $X_{1,2} = \frac{1}{2} (C_{12} + C_{21})$, donde C_{12} y C_{21} son, como sabemos, los tensores de covarianza cruzada, en general no simétricos, entre los procesos (5.3) y (5.4). En nuestro ejemplo, C_{12} viene dado por (15.5) y $X_{1,2}$ por (15.6). En esta teoría estamos haciendo la hipótesis de que $C_{12,ap} = C_{21,ap} = X_{1,2}$.

Equivalentemente, podemos decir que la teoría supone la sustitución de los procesos (5.5) y (5.6) por los procesos ‘aproximados’

$$\xi_{1,ap}^*(x) = A_1 \xi_{1,ap}^*(x_a) + \varepsilon_{1,ap}^*(x),$$

$$\xi_{2,ap}^*(x) = A_2 \xi_{2,ap}^*(x_a) + \varepsilon_{2,ap}^*(x),$$

siendo el tensor nulo la correlación cruzada entre estos dos procesos, lo que equivale a afirmar que los tensores antisimétricos mutuamente transpuestos $Z_{12,ap}$ y $Z_{21,ap}$ (que sustituyen a los tensores Z_{12} , dado por la expresión (15.7), y Z_{21} , de covarianza cruzada residual entre ξ_1 y ξ_2 , y tales que $Z_{12} = -Z_{21}$) verifican $Z_{12,ap} = Z_{21,ap} = 0$.

Recordemos que, como se dijo entonces, considerados individualmente, los procesos (7.5) y (7.6) son equivalentes en autocovarianza a los procesos (5.3) y (5.4), respectivamente. Asimismo, considerados individualmente, los procesos (7.7) y (7.8) son equivalentes en autocovarianza a los procesos (5.5) y (5.6), respectivamente. La ‘aproximación’ consiste en que los nuevos procesos (7.5) y (7.6) poseen una correlación cruzada simétrica y los procesos (7.7) y (7.8) son no correlacionados.

En representación normal de los procesos inducidos, para el proceso agregado se obtienen, por tanto, los valores ‘exacto’ y ‘aproximado’ del tensor condicional. El valor exacto viene dado por

$$V_{ex} = N - A_1 N_1 A_1' - A_2 N_2 A_2' - 2W_{1,2},$$

donde $W_{1,2} = \frac{1}{2} \{A_1 C_{12} A_2' - A_2 C_{21} A_1'\}$, siendo, por tanto,

$$W_{1,2} = \begin{pmatrix} 0,3476 & 0,3117 & 0,3424 & 0,3588 \\ 0,3117 & 0,5039 & 0,3725 & 0,1799 \\ 0,3424 & 0,3725 & 0,2847 & 0,3886 \\ 0,3588 & 0,1799 & 0,3886 & 0,2450 \end{pmatrix},$$

y, en consecuencia,

$$V_{ex} = \begin{pmatrix} 1,4856 & 0,5575 & 0,5411 & 0,4284 \\ 0,5575 & 1,8722 & 0,5245 & 0,4243 \\ 0,5411 & 0,5245 & 1,3278 & 0,5012 \\ 0,4284 & 0,4243 & 0,5012 & 0,9451 \end{pmatrix},$$

coincidente con (15.8).

Por otra parte,

$$V_{ap} = N - A_1 N_1 A'_1 - A_2 N_2 A'_2 - A_1 X_{1,2} A'_2 - A_2 X_{1,2} A'_1.$$

Equivalentemente,

$$V_{ap} = N - A_1 N_1 A'_1 - A_2 N_2 A'_2 - 2(W_{1,2} - W_{1,2}^*),$$

donde, como sabemos, $W_{1,2}^* = \frac{1}{2} \{A_1 Z_{12} A'_2 - A_2 Z_{21} A'_1\}$, siendo, por tanto,

$$W_{1,2}^* = \begin{pmatrix} -0,0012 & -0,0068 & -0,0044 & 0,0008 \\ -0,0068 & -0,0034 & -0,0027 & -0,0017 \\ -0,0044 & -0,0027 & -0,0028 & -0,0014 \\ 0,0008 & -0,0017 & -0,0014 & 0,0010 \end{pmatrix},$$

luego

$$V_{ap} = \begin{pmatrix} 1,4832 & 0,5439 & 0,5323 & 0,4299 \\ 0,5439 & 1,8654 & 0,5191 & 0,4209 \\ 0,5323 & 0,5191 & 1,3221 & 0,4984 \\ 0,4299 & 0,4209 & 0,4984 & 0,9472 \end{pmatrix}.$$

El tensor de ‘inexactitud’ $F_{dif}^{(V)}$, aplicable al tensor condicional, proporcional

$$F_{dif}^{(V)} = V_{ap} - V_{ex} = 2W_{1,2}^*,$$

y, por tanto,

$$F_{dif}^{(V)} = \begin{pmatrix} -0,0024 & -0,0136 & -0,0088 & 0,0015 \\ -0,0136 & -0,0068 & -0,0054 & -0,0034 \\ -0,0088 & -0,0054 & -0,0057 & -0,0028 \\ 0,0015 & -0,0034 & -0,0028 & 0,0021 \end{pmatrix}. \quad (15.10)$$

Los autovalores de este tensor son

$$\lambda_{1,dif}^V = -0,0241,$$

$$\lambda_{2,dif}^V = -0,0013,$$

$$\lambda_{3,dif}^V = 0,0010,$$

$$\lambda_{4,dif}^V = 0,0117.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.3), viene dado por

$$f_{V,dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \lambda_{j,dif}^{V^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0134$$

El tensor de ‘inexactitud’ $F_{pr}^{(V)}$ aplicable al tensor condicional, dado por la expresión

$$F_{pr}^{(V)} = I + 2 W_{1,2}^* V_{ex}^{-1},$$

proporciona

$$F_{pr}^{(V)} = \begin{pmatrix} 1,0015 & -0,0075 & -0,0074 & 0,0082 \\ -0,0090 & 0,9989 & -0,0004 & 0,0011 \\ -0,0050 & -0,0010 & 0,9978 & 0,0009 \\ 0,0020 & -0,0024 & -0,0036 & 1,0043 \end{pmatrix}, \quad (15.11)$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,pr}^V = 0,9900,$$

$$\lambda_{2,pr}^V = 0,9975,$$

$$\lambda_{3,pr}^V = 1,0028,$$

$$\lambda_{4,pr}^V = 1,0123.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.4), viene dado por

$$f_{V,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (1 - \lambda_{j,pr}^V)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0081.$$

Siguiendo con el proceso agregado, se obtienen los valores ‘exacto’ y ‘aproximado’ del tensor de propagación

$$A_{ex} = \{A_1 (N_1 + C_{12}) + A_2 (N_2 + C_{21})\} N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,7720 & 0,0147 & 0,0101 & 0,0459 \\ 0,0032 & 0,7740 & 0,0269 & 0,0283 \\ -0,0021 & 0,0183 & 0,8022 & 0,0167 \\ 0,0199 & 0,0171 & 0,0092 & 0,8309 \end{pmatrix},$$

$$A_{ap} = \{A_1 (N_1 + X_{1,2}) + A_2 (N_2 + X_{1,2})\} N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,7740 & 0,0130 & 0,0083 & 0,0459 \\ 0,0144 & 0,7731 & 0,0229 & 0,0285 \\ 0,0028 & 0,0189 & 0,8006 & 0,0162 \\ 0,0209 & 0,0163 & 0,0083 & 0,8309 \end{pmatrix}.$$

En este caso, el tensor de ‘inexactitud’ diferencial proporciona

$$F_{dif}^{(A)} = -\{A_1 Z_{12} + A_2 Z_{21}\} N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0020 & -0,0017 & -0,0018 & 0,0000 \\ 0,0082 & -0,0009 & -0,0041 & 0,0002 \\ 0,0049 & 0,0005 & -0,0016 & -0,0005 \\ 0,0011 & -0,0008 & -0,0009 & 0,0000 \end{pmatrix},$$

Los autovalores de este tensor son

$$\lambda_{1,dif}^A = -0,0013,$$

$$\lambda_{2,dif}^A = -0,0002,$$

$$\lambda_{3,dif}^A = 0,0001,$$

$$\lambda_{4,dif}^A = 0,0010.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.3), viene dado por

$$f_{A,dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \lambda_{j,dif}^{A^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0008.$$

Y en cuanto el tensor de ‘inexactitud’ proporcional, obtenemos

$$F_{pr}^{(A)} = I + F_{dif}^{(A)} A_{ex}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0026 & -0,0021 & -0,0022 & 0,0000 \\ 0,0106 & -0,9988 & -0,0052 & -0,0003 \\ 0,0064 & 0,0006 & 0,9979 & -0,0010 \\ 0,0014 & -0,0010 & -0,0011 & 1,0000 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,pr}^A = 0,9990,$$

$$\lambda_{2,pr}^A = 0,9999,$$

$$\lambda_{3,pr}^A = 1,0000,$$

$$\lambda_{4,pr}^A = 1,0004.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.4), viene dado por

$$f_{A,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (1 - \lambda_{j,pr}^A)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0005.$$

En cuanto a los tensores de distancia y carga de correlación, obtenemos los siguientes resultados

$$U_{ex} = V_{ex} N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4016 & -0,0109 & -0,0004 & -0,0992 \\ -0,0120 & 0,4060 & -0,0285 & -0,0748 \\ -0,0016 & -0,0196 & 0,3642 & -0,0525 \\ -0,0293 & -0,0131 & 0,0018 & 0,2880 \end{pmatrix},$$

$$U_{ap} = V_{ap} N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4020 & -0,0139 & -0,0029 & -0,0961 \\ -0,0156 & 0,4057 & -0,0286 & -0,0735 \\ -0,0036 & -0,0199 & 0,3634 & -0,0515 \\ -0,0286 & -0,0141 & 0,0006 & 0,2894 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$F_{dif}^{(U)} = 2W_{1,2}^* N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0005 & -0,0030 & -0,0025 & 0,0032 \\ -0,0036 & -0,0004 & -0,0001 & 0,0013 \\ -0,0020 & -0,0003 & -0,0008 & 0,0009 \\ 0,0007 & -0,0010 & -0,0012 & 0,0014 \end{pmatrix}. \quad (15.12)$$

Los autovalores de este tensor son

$$\lambda_{1,dif}^U = -0,0038,$$

$$\lambda_{2,dif}^U = -0,0010,$$

$$\lambda_{3,dif}^U = 0,0004,$$

$$\lambda_{4,dif}^U = 0,0051.$$

Por tanto, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.3), viene dado por

$$f_{U,dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \lambda_{j,dif}^{U^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0032.$$

Además

$$F_{pr}^{(U)} = F_{pr}^{(V)},$$

equivalente, por tanto, a (15.11).

Por otra parte, recordando que $\Pi_{ex} = I - U_{ex}$ y $\Pi_{ap} = I - U_{ap}$, para los tensores de inexactitud correspondientes, obtuvimos $F_{dif}^{(\Pi)} = -2W_{1,2}^*N^{-1}$, equivalente al tensor opuesto de (15.12).

En cuanto al tensor de ‘inexactitud’ proporcional, de acuerdo con (7.11), obtenemos

$$F_{pr}^{(\Pi)} = \begin{pmatrix} 0,9993 & 0,0051 & 0,0036 & -0,0052 \\ 0,0062 & 1,0005 & 0,0001 & -0,0028 \\ 0,0035 & 0,0005 & 1,0012 & -0,0020 \\ -0,0011 & 0,0017 & 0,0019 & 0,9979 \end{pmatrix}, \quad (15.13)$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,pr}^{\Pi} = 0,9927,$$

$$\lambda_{2,pr}^{\Pi} = 0,9993,$$

$$\lambda_{3,pr}^{\Pi} = 1,0009,$$

$$\lambda_{4,pr}^{\Pi} = 1,0060.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.4), viene dado por

$$f_{\Pi,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (1 - \lambda_{j,pr}^{\Pi})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0048.$$

En formato mínimo, los resultados obtenidos para el tensor de covarianza condicional son

$$V_{ex}^* = N - A_1 N_1^* A_1' - A_2 N_2^* A_2' - 2W_{1,2}^* = \begin{pmatrix} 1,4850 & 0,5561 & 0,5392 & 0,4280 \\ 0,5561 & 1,8640 & 0,5219 & 0,4236 \\ 0,5392 & 0,5219 & 1,3263 & 0,5003 \\ 0,4280 & 0,4236 & 0,5003 & 0,9449 \end{pmatrix},$$

coincidente con (15.9), y

$$V_{ap}^* = N - A_1 N_1^* A_1' - A_2 N_2^* A_2' = \begin{pmatrix} 1,4826 & 0,5425 & 0,5304 & 0,4296 \\ 0,5425 & 1,8572 & 0,5165 & 0,4201 \\ 0,5304 & 0,5165 & 1,3207 & 0,4975 \\ 0,4296 & 0,4201 & 0,4975 & 0,9470 \end{pmatrix}.$$

El tensor de 'inexactitud' $F_{dif}^{(V^*)}$, aplicable al tensor condicional en formato mínimo, proporciona $F_{dif}^{(V^*)} = 2 W_{1,2}^*$, coincidente con (15.10).

En cuanto al tensor de 'inexactitud' $F_{pr}^{(V^*)}$, aplicable al tensor condicional (mínimo), el resultado es

$$F_{pr}^{(V^*)} = I + 2 W_{1,2}^* V_{ex}^{*-1} = \begin{pmatrix} 1,0015 & -0,0076 & -0,0074 & 0,0082 \\ -0,0090 & 0,9989 & -0,0004 & 0,0011 \\ -0,0050 & -0,0010 & 0,9978 & 0,0009 \\ 0,0020 & -0,0024 & -0,0036 & 1,0043 \end{pmatrix}, \quad (15.14)$$

muy similar, como cabía esperar, a (15.11).

Por razones didácticas calculamos los autovalores, que son

$$\lambda_{1,pr}^{V^*} = 0,9901,$$

$$\lambda_{2,pr}^{V^*} = 0,9987,$$

$$\lambda_{3,pr}^{V^*} = 1,0013,$$

$$\lambda_{4,pr}^{V^*} = 1,0125.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición (7.4), viene dado por

$$f_{V^*,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (1 - \lambda_{j,pr}^{V^*})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0080,$$

resultado similar al obtenido usando un formato normal.

Los valores ‘exacto’ y ‘aproximado’ del tensor de propagación del proceso agregado en formato mínimo son coincidentes con los obtenidos en un formato normal, ya que los tensores de propagación individuales no cambian.

En relación con los tensores de distancia y carga de correlación, obtenemos, usando las expresiones $U_{ex}^* = V_{ex}^* N^{-1}$ y $U_{ap}^* = V_{ap}^* N^{-1}$,

$$F_{dif}^{(U^*)} = 2 W_{1,2}^* N^{-1} = F_{dif}^{(U)},$$

dado por (15.12), y

$$F_{pr}^{(U^*)} = U_{ap}^* U_{ex}^{*-1} = V_{ap}^* V_{ex}^{*-1} = F_{pr}^{(V^*)},$$

dado por (15.14).

Por otra parte, dada la relación conocida entre los tensores de distancia y de carga de correlación $\Pi_{ex}^* = I - U_{ex}^*$ y $\Pi_{ap}^* = I - U_{ap}^*$, obtenemos

$$F_{dif}^{(\Pi^*)} = -2 W_{1,2}^* N^{-1} = -F_{dif}^{(U^*)}.$$

Y teniendo en cuenta (7.12), resulta

$$F_{pr}^{(\Pi^*)} = \begin{pmatrix} 0,9993 & 0,0051 & 0,0036 & -0,0052 \\ 0,0062 & 1,0005 & 0,0001 & -0,0028 \\ 0,0035 & 0,0005 & 1,0012 & -0,0019 \\ -0,0011 & 0,0016 & 0,0019 & 0,9979 \end{pmatrix},$$

tensor muy próximo a (15.13), cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,pr}^{\Pi} = 0,9927,$$

$$\lambda_{2,pr}^{\Pi} = 0,9994,$$

$$\lambda_{3,pr}^{\Pi} = 1,0009,$$

$$\lambda_{4,pr}^{\Pi} = 1,0060.$$

similares a los obtenidos en formato normal.

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{\Pi^*,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (1 - \lambda_{j,pr}^{\Pi^*})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0048.$$

Los tensores de ‘inexactitud’ diferenciales no presentan diferencias entre los escenarios normal y mínimo.

La magnitud de los resultados obtenidos, tanto para los tensores de ‘inexactitud’ como para los factores de ‘inexactitud’, proporcionan un reflejo de la medida del grado de aproximación que esperamos obtener. Sin embargo, es preciso realizar un análisis en profundidad de las propiedades de dichas medidas, con el fin de disponer de los criterios objetivos que permitan decidir sobre la suficiencia o no de la aproximación que otorgaría la validez a la teoría.

Ejemplo 6: Teoría 2 aproximada - Asignación marginal de dos procesos agregables

Recordemos que en esta teoría, así como en la desarrollada en el ejemplo siguiente analizado, el planteamiento es opuesto al realizado en el ejemplo anterior. Estas teorías aproximadas (2 y 3) mantienen el proceso agregado conjunto, aunque se considera que los procesos individuales son ‘aproximados’ (no conservando la equivalencia en autocovarianza) a los procesos individuales considerados en la teoría ‘exacta’ de referencia. Por tanto, no procede analizar la ‘inexactitud’ de los tensores incondicional y condicional, extendiéndose el análisis al resto de magnitudes relevantes de la teoría, distinguiendo una vez más entre los formatos normal y mínimo.

Comenzamos considerando un formato normal de los procesos. Dado que el proceso 1 es ‘exacto’, centramos el análisis en el proceso 2.

A partir de la expresión (7.14) obtenemos

$$A_{2,ap}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0,7758 & 0,0049 & -0,0084 & 0,0759 \\ 0,0023 & 0,7950 & 0,0076 & 0,0442 \\ -0,0076 & 0,0033 & 0,8314 & 0,0246 \\ 0,0182 & 0,0038 & -0,0055 & 0,8529 \end{pmatrix}.$$

Comparamos este tensor con el tensor de propagación simétrica $A_{2,ex}^{(S)}$ del proceso ‘exacto’ ξ_2 , dado por (7.15), resultando

$$A_{2,ex}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0,7837 & 0,0122 & 0,0081 & 0,0503 \\ 0,0078 & 0,8175 & 0,0174 & 0,0232 \\ 0,0012 & 0,0137 & 0,8341 & 0,0168 \\ 0,0285 & 0,0082 & 0,0094 & 0,8346 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$F_{2,dif}^{(A^{(S)})} = \begin{pmatrix} -0,0079 & -0,0073 & -0,0165 & 0,0256 \\ -0,0055 & -0,0225 & -0,0099 & 0,0210 \\ -0,0088 & -0,0104 & -0,0027 & 0,0077 \\ -0,0103 & -0,0044 & -0,0149 & 0,0183 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de este tensor son

$$\lambda_{1,dif}^{A_2^{(S)}} = -0,0212,$$

$$\lambda_{2,dif}^{A_2^{(S)}} = -0,0029,$$

$$\lambda_{3,dif}^{A_2^{(S)}} = -0,0024,$$

$$\lambda_{4,dif}^{A_2^{(S)}} = 0,0118.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’, según la definición propuesta en (7.3), viene dado por

$$f_{A_2^{(S)},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{A_2^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0123.$$

También obtenemos

$$F_{2,pr}^{(A^{(S)})} = \begin{pmatrix} 0,9889 & -0,0087 & -0,0199 & 0,0320 \\ -0,0077 & 0,9726 & -0,0115 & 0,0266 \\ -0,0115 & -0,0126 & 0,9970 & 0,0104 \\ -0,0139 & -0,0051 & -0,0179 & 1,0233 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,pr}^{A_2^{(S)}} = 0,9743,$$

$$\lambda_{2,pr}^{A_2^{(S)}} = 0,9966,$$

$$\lambda_{3,pr}^{A_2^{(S)}} = 0,9972,$$

$$\lambda_{4,pr}^{A_2^{(S)}} = 1,0136.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{(S)},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{A_2^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0147.$$

Abordamos el análisis del tensor de distancia. De acuerdo con (7.16) y (7.17) obtenemos

$$U_{2,ap}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0,3967 & -0,0079 & 0,0139 & -0,1236 \\ -0,0044 & 0,3678 & -0,0120 & -0,0732 \\ 0,0118 & -0,0054 & 0,3088 & -0,0410 \\ -0,0297 & -0,0063 & 0,0094 & 0,2711 \end{pmatrix},$$

$$U_{2,ex}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0,3842 & -0,0200 & -0,0138 & -0,0818 \\ -0,0131 & 0,3312 & -0,0291 & -0,0391 \\ -0,0025 & -0,0228 & 0,3039 & -0,0285 \\ -0,0462 & -0,0140 & -0,0161 & 0,3017 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$F_{2,dif}^{(U^{(S)})} = \begin{pmatrix} 0,0124 & 0,0121 & 0,0277 & -0,0419 \\ 0,0088 & 0,0365 & 0,0170 & -0,0342 \\ 0,0143 & 0,0174 & 0,0050 & -0,0125 \\ 0,0165 & 0,0077 & 0,0255 & -0,0306 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_{1,dif}^{U^{(S)}} = -0,0201,$$

$$\lambda_{2,dif}^{U^{(S)}} = 0,0040,$$

$$\lambda_{3,dif}^{U^{(S)}} = 0,0047,$$

$$\lambda_{4,dif}^{U^{(S)}} = 0,0348.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U^{(S)},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{U^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0203.$$

Y además,

$$F_{2,pr}^{(U^{(S)})} = \begin{pmatrix} 1,0198 & 0,0388 & 0,0896 & -0,1199 \\ 0,0164 & 1,1119 & 0,0628 & -0,0844 \\ 0,0366 & 0,0553 & 1,0222 & -0,0222 \\ 0,0348 & 0,0277 & 0,0839 & 0,9197 \end{pmatrix},$$

siendo los autovalores de este tensor los siguientes:

$$\lambda_{1,pr}^{U^{(S)}} = 0,9294,$$

$$\lambda_{2,pr}^{U^{(S)}} = 1,0138,$$

$$\lambda_{3,pr}^{U^{(S)}} = 1,0154,$$

$$\lambda_{4,pr}^{U^{(S)}} = 1,1149.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U^{(S)},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{U^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0682.$$

En este punto detenemos el análisis en formato normal por varias razones. En cuanto al tensor de carga de correlación cabe esperar unos resultados del mismo orden de magnitud. Por otra parte, los resultados en cuanto a ‘exactitud’ de esta teoría se muestran deficientes (a expensas de algún criterio objetivo a determinar). Conviene matizar, antes de seguir adelante, que la teoría resulta intuitivamente ‘rechazada’ desde la perspectiva de un análisis de la exactitud. Este hecho, sin embargo, no invalida la aplicación de este criterio de asignación cuando se persiguen unos objetivos diferentes al de someter a la teoría a un criterio de validez basado en la exactitud.

En un escenario de representación mínima de procesos, los resultados obtenidos se exponen a continuación. También en este escenario, recordamos, de acuerdo con el planteamiento general de esta teoría, no se produce inexactitud en el ‘troceado’ de los tensores incondicional y condicional de covarianza, sino un reparto convencional de dicha covarianza.

En el formato mínimo que estamos considerando, el tensor de propagación del primer proceso verifica plena ‘exactitud’

$$A_{1,ap}^{*m} = A_{1,ex} = A_1.$$

Sin embargo, de acuerdo nuevamente con el Apéndice J, elegimos un representante del conjunto de propagadores admisibles para el segundo proceso inducido en formato mínimo. La elección recae en este caso sobre el tensor especial $A_{2,ap}^{*(S)}$ de propagación simétrica del proceso segundo ‘aproximado’ mínimo, de tal modo que, de acuerdo con (7.18) y (7.19),

$$A_{2,ap}^{*(S)} = \begin{pmatrix} 0,7817 & 0,0075 & 0,0053 & 0,0608 \\ 0,0018 & 0,8152 & 0,0171 & 0,0297 \\ -0,0020 & 0,0109 & 0,8334 & 0,0229 \\ 0,0238 & 0,0064 & 0,0077 & 0,8402 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,ex}^{*(S)} = \begin{pmatrix} 0,7813 & 0,0104 & 0,0074 & 0,0581 \\ 0,0052 & 0,8155 & 0,0172 & 0,0286 \\ -0,0001 & 0,0112 & 0,8341 & 0,0221 \\ 0,0232 & 0,0073 & 0,0087 & 0,8390 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$F_{2,dif}^{*(A^{(S)})} = \begin{pmatrix} 0,0004 & -0,0029 & -0,0021 & 0,0028 \\ -0,0034 & -0,0003 & -0,0002 & 0,0012 \\ -0,0019 & -0,0003 & -0,0007 & 0,0008 \\ 0,0007 & -0,0009 & -0,0010 & 0,0012 \end{pmatrix},$$

$$F_{2,pr}^{*(A^{(S)})} = \begin{pmatrix} 1,0005 & -0,0035 & -0,0025 & 0,0035 \\ -0,0044 & 0,9997 & -0,0002 & 0,0017 \\ -0,0024 & -0,0003 & 0,9992 & 0,0011 \\ 0,0008 & -0,0011 & -0,0012 & 1,0014 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores del tensor $F_{2,dif}^{*(A^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{A_2^{*(S)}} = -0,0003,$$

$$\lambda_{2,dif}^{A_2^{*(S)}} = -0,0035,$$

$$\lambda_{3,dif}^{A_2^{*(S)}} = 0,0003,$$

$$\lambda_{4,dif}^{A_2^{*(S)}} = 0,0042.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{*(S)}, dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j, dif}^{A_2^{*(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0027.$$

En cuanto a los autovalores del tensor $F_{2,pr}^{*(A^{(S)})}$ obtenemos

$$\lambda_{1,pr}^{A_2^{*(S)}} = 0,9957,$$

$$\lambda_{2,pr}^{A_2^{*(S)}} = 0,9995,$$

$$\lambda_{3,pr}^{A_2^{*(S)}} = 1,0005,$$

$$\lambda_{4,pr}^{A_2^{*(S)}} = 1,0051.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{*(S)}, pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{A_2^{*(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0034.$$

En cuanto al tensor de distancia, de acuerdo con (7.20) y (7.21), obtenemos

$$U_{2,ap}^{*(S)} = \begin{pmatrix} 0,3875 & -0,0125 & -0,0091 & -0,0990 \\ -0,0035 & 0,3350 & -0,0284 & -0,0497 \\ 0,0026 & -0,0181 & 0,3051 & -0,0385 \\ -0,0386 & -0,0109 & -0,0132 & 0,2923 \end{pmatrix},$$

$$U_{2,ex}^{*(S)} = \begin{pmatrix} 0,3882 & -0,0171 & -0,0126 & -0,0946 \\ -0,0089 & 0,3345 & -0,0287 & -0,0480 \\ -0,0004 & -0,0186 & 0,3039 & -0,0373 \\ -0,0376 & -0,0124 & -0,0149 & 0,2943 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$F_{2,dif}^{*(U^{(S)})} = \begin{pmatrix} -0,0007 & 0,0046 & 0,0036 & -0,0045 \\ 0,0054 & 0,0005 & 0,0004 & -0,0018 \\ 0,0030 & 0,0005 & 0,0012 & -0,0012 \\ -0,0011 & 0,0015 & 0,0017 & -0,0020 \end{pmatrix},$$

$$F_{2,pr}^{*(U^{(S)})} = \begin{pmatrix} 0,9973 & 0,0140 & 0,0123 & -0,0122 \\ 0,0138 & 1,0023 & 0,0019 & -0,0010 \\ 0,0078 & 0,0021 & 1,0044 & -0,0008 \\ -0,0032 & 0,0044 & 0,0056 & 0,9936 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{2,dif}^{*(U^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{*U^{(S)}} = -0,0006,$$

$$\lambda_{2,dif}^{*U^{(S)}} = 0,0006,$$

$$\lambda_{3,dif}^{*U^{(S)}} = -0,0006,$$

$$\lambda_{4,dif}^{*U^{(S)}} = 0,0007.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{*U^{(S)},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{*U^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0006.$$

Los autovalores de $F_{2,pr}^{*(U^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{*U^{(S)}} = 0,9799,$$

$$\lambda_{2,pr}^{*U^{(S)}} = 0,9981,$$

$$\lambda_{3,pr}^{*U^{(S)}} = 1,0021,$$

$$\lambda_{4,pr}^{*U^{(S)}} = 1,0175.$$

Por tanto, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{*U^{(S)},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{*U^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0134.$$

Finalizamos en este punto el análisis numérico contemplado en este ejemplo, ya que los resultados en cuanto al tensor de carga de correlación no cambiarán sustancialmente la conclusión obtenida, que se resume en que, utilizando un formato mínimo, los resultados en cuanto a evaluación de la ‘exactitud’ mejoran notablemente respecto a un formato normal, en el marco de una teoría aproximada que utiliza un criterio de asignación marginal.

Vemos que en el escenario de asignación marginal con formato mínimo, el efecto de desplazamiento de la covarianza cruzada hacia el último proceso agregado queda obviamente muy atenuado. Esto es debido a la distribución óptima de la correlación cruzada entre procesos en el caso de una representación mínima respecto a una representación normal, minimizando la covarianza cruzada mediante el procedimiento expuesto de incorporación óptima de la misma en los núcleos de covarianza de dichos procesos. Sin embargo, conviene recordar que el análisis realizado en este ejemplo ha quedado restringido a dos procesos, en los que el efecto de la distribución óptima de la covarianza se hace más resaltable, lo que no necesariamente debe mantenerse para el proceso n -ésimo en la medida en que sucesivos procesos se añadan al conjunto agregado, ya que los últimos incorporan progresivamente la mayor carga de covarianza cruzada. Evidentemente estos comentarios quedan relativizados a la cuantía de la covarianza cruzada entre procesos, ya que, obviamente, el grado de ‘exactitud’ de la teoría dependerá directamente de la ‘pequeñez’ de dicha covarianza cruzada.

Ejemplo 7: Teoría 3 aproximada - Asignación contributiva de dos procesos agregables

Como es habitual, comenzamos el análisis en un escenario de formato normal de los procesos inducidos.

Esta teoría requiere, como sabemos, la utilización de los tensores $A_{1,ap}^{(S)c}$, $A_{2,ap}^{(S)c}$, $A_{1,ex}^{(S)c}$ y $A_{2,ex}^{(S)c}$ de propagación simétrica de covarianza (aproximados y exactos) para ambos procesos, que, de acuerdo con (7.22), (7.23), (7.24) y (7.25), son

$$A_{1,ap}^{(S)c} = \begin{pmatrix} 0,7573 & 0,0041 & 0,0017 & 0,0636 \\ 0,0063 & 0,6922 & 0,0448 & 0,0748 \\ 0,0170 & 0,0340 & 0,6962 & 0,0723 \\ 0,0080 & 0,0149 & -0,0108 & 0,8480 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,ap}^{(S)c} = \begin{pmatrix} 0,7803 & 0,0078 & 0,0009 & 0,0608 \\ 0,0054 & 0,8043 & 0,0126 & 0,0318 \\ -0,0033 & 0,0075 & 0,8324 & 0,0197 \\ 0,0234 & 0,0053 & 0,0025 & 0,8416 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,ex}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0,7577 & 0,0091 & 0,0120 & 0,0362 \\ 0,0186 & 0,6767 & 0,0433 & 0,0545 \\ 0,0170 & 0,0388 & 0,7158 & 0,0318 \\ 0,0138 & 0,0226 & 0,0043 & 0,8267 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,ex}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0,7837 & 0,0122 & 0,0081 & 0,0503 \\ 0,0078 & 0,8175 & 0,0174 & 0,0232 \\ 0,0012 & 0,0137 & 0,8341 & 0,0168 \\ 0,0285 & 0,0082 & 0,0094 & 0,8346 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$F_{1,dif}^{(A_1^{(S)})} = \begin{pmatrix} -0,0004 & -0,0050 & -0,0103 & 0,0274 \\ -0,0122 & 0,0156 & 0,0016 & 0,0204 \\ 0,0000 & -0,0048 & -0,0196 & 0,0405 \\ -0,0058 & -0,0077 & -0,0151 & 0,0213 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,dif}^{(A_1^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{A_1^{(S)}} = -0,0040,$$

$$\lambda_{2,dif}^{A_1^{(S)}} = 0,0156,$$

$$\lambda_{3,dif}^{A_1^{(S)}} = 0,0026 + 0,0216i \pmod{0,0217},$$

$$\lambda_{4,dif}^{A_1^{(S)}} = 0,0026 - 0,0216i \pmod{0,0217}.$$

Para los autovalores complejos utilizamos, convencionalmente, su módulo (aunque este es un criterio que debería ser sometido a un pertinente análisis de validez). En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_1^{(S)},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{A_1^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0174.$$

$$F_{2,dif}^{(A_2^{(S)})} = \begin{pmatrix} -0,0035 & -0,0044 & -0,0072 & 0,0106 \\ -0,0024 & -0,0131 & -0,0048 & 0,0086 \\ -0,0045 & -0,0062 & -0,0017 & 0,0028 \\ -0,0051 & -0,0029 & -0,0069 & 0,0071 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{2,dif}^{(A_2^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{A_2^{(S)}} = -0,0131,$$

$$\lambda_{2,dif}^{A_2^{(S)}} = 0,0051,$$

$$\lambda_{3,dif}^{A_2^{(S)}} = -0,0016 + 0,0028i \text{ (mod } 0,0032),$$

$$\lambda_{4,dif}^{A_2^{(S)}} = -0,0016 - 0,0028i \text{ (mod } 0,0032).$$

Seguimos el criterio anterior para los autovalores complejos, utilizando su módulo. En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{(S)},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{A_2^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0074.$$

$$F_{1,pr}^{(A_1^{(S)})} = \begin{pmatrix} 0,9994 & -0,0078 & -0,0141 & 0,0342 \\ -0,0172 & 1,0224 & 0,0010 & 0,0239 \\ -0,0002 & -0,0072 & 0,9727 & 0,0505 \\ -0,0074 & -0,0110 & -0,0205 & 1,0277 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,pr}^{(A_1^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{A_1^{(S)}} = 0,9942,$$

$$\lambda_{2,pr}^{A_1^{(S)}} = 1,0234,$$

$$\lambda_{3,pr}^{A_1^{(S)}} = 1,0022 + 0,0267i \text{ (mod } 1,0026),$$

$$\lambda_{4,pr}^{A_1^{(S)}} = 1,0022 - 0,0267i \text{ (mod } 1,0026).$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_1^{(S)},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{A_1^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0122.$$

$$F_{2,pr}^{(A_2^{(S)})} = \begin{pmatrix} 0,9952 & -0,0053 & -0,0087 & 0,0133 \\ -0,0032 & 0,9840 & -0,0055 & 0,0111 \\ -0,0058 & -0,0075 & 0,9981 & 0,0040 \\ -0,0068 & -0,0033 & -0,0083 & 1,0091 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{2,pr}^{(A_2^{(S)})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{A_2^{(S)}} = 0,9843,$$

$$\lambda_{2,pr}^{A_2^{(S)}} = 1,0061,$$

$$\lambda_{3,pr}^{A_2^{(S)}} = 0,9980 + 0,0036i \text{ (mod } 0,9980),$$

$$\lambda_{4,pr}^{A_2^{(S)}} = 0,9980 - 0,0036i \text{ (mod } 0,9980).$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{(S)},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{A_2^{(S)}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0085.$$

En cuanto al tensor de distancia, de acuerdo con (7.26), (7.27), (7.28) y (7.29), obtenemos

$$U_{1,ap}^c = \begin{pmatrix} 0,4259 & -0,0069 & -0,0019 & -0,1025 \\ -0,0105 & 0,5182 & -0,0615 & -0,1189 \\ -0,0254 & -0,0483 & 0,5146 & -0,1152 \\ -0,0128 & -0,0226 & 0,0160 & 0,2801 \end{pmatrix},$$

$$U_{2,ap}^c = \begin{pmatrix} 0,3897 & -0,0127 & -0,0016 & -0,0989 \\ -0,0093 & 0,3527 & -0,0207 & -0,0530 \\ 0,0049 & -0,0124 & 0,3070 & -0,0329 \\ -0,0380 & -0,0090 & -0,0042 & 0,2900 \end{pmatrix},$$

$$U_{1,ex} = \begin{pmatrix} 0,4250 & -0,0143 & -0,0182 & -0,0583 \\ -0,0281 & 0,5391 & -0,0607 & -0,0839 \\ -0,0262 & -0,0549 & 0,4856 & -0,0517 \\ -0,0224 & -0,0342 & -0,0078 & 0,3148 \end{pmatrix},$$

$$U_{2,ex} = \begin{pmatrix} 0,3842 & -0,0200 & -0,0138 & -0,0818 \\ -0,0131 & 0,3312 & -0,0291 & -0,0391 \\ -0,0025 & -0,0228 & 0,3039 & -0,0285 \\ -0,0462 & -0,0140 & -0,0161 & 0,3017 \end{pmatrix}.$$

Realizamos a continuación el análisis de exactitud, basado en los tensores de ‘inexactitud’ del tensor de distancia para ambos procesos, que proporciona

los resultados siguientes:

$$F_{1,dif}^{(U_1^c)} = \begin{pmatrix} 0,0009 & 0,0075 & 0,0163 & -0,0442 \\ 0,0176 & -0,0209 & -0,0007 & -0,0350 \\ 0,0007 & 0,0066 & 0,0290 & -0,0635 \\ 0,0095 & 0,0116 & 0,0238 & -0,0347 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,dif}^{(U_1^c)}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{U_1^c} = -0,0211,$$

$$\lambda_{2,dif}^{U_1^c} = 0,0054,$$

$$\lambda_{3,dif}^{U_1^c} = -0,0050 + 0,0350i \text{ (mod } 0,0354),$$

$$\lambda_{4,dif}^{U_1^c} = -0,0050 - 0,0350i \text{ (mod } 0,0354).$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_1^c,dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{U_1^c} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0273.$$

$$F_{2,dif}^{(U_2^c)} = \begin{pmatrix} 0,0055 & 0,0074 & 0,0121 & -0,0172 \\ 0,0038 & 0,0215 & 0,0083 & -0,0139 \\ 0,0074 & 0,0104 & 0,0031 & -0,0045 \\ 0,0082 & 0,0050 & 0,0118 & -0,0117 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{2,dif}^{(U_2^c)}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{U_2^c} = -0,0087,$$

$$\lambda_{2,dif}^{U_2^c} = 0,0024,$$

$$\lambda_{3,dif}^{U_2^c} = 0,0124 + 0,0095i \text{ (mod } 0,0156),$$

$$\lambda_{4,dif}^{U_2^c} = 0,0124 - 0,0095i \text{ (mod } 0,0156).$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_2^c,dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{U_2^c} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0119.$$

$$F_{1,pr}^{(U_1^c)} = \begin{pmatrix} 0,9977 & 0,0086 & 0,0324 & -0,1333 \\ 0,0316 & 0,9537 & -0,0080 & -0,1190 \\ -0,0045 & 0,0057 & 1,0571 & -0,1916 \\ 0,0222 & 0,0215 & 0,0511 & 0,9079 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,pr}^{(U_1^c)}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{U_1^c} = 0,9608,$$

$$\lambda_{2,pr}^{U_1^c} = 1,0104,$$

$$\lambda_{3,pr}^{U_1^c} = 0,9726 + 0,0993i \text{ (mod } 0,9777),$$

$$\lambda_{4,pr}^{U_1^c} = 0,9726 - 0,0993i \text{ (mod } 0,9777).$$

Por tanto, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_1^c,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{U_1^c} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0257.$$

$$F_{2,pr}^{(U_2^c)} = \begin{pmatrix} 1,0097 & 0,0235 & 0,0401 & -0,0474 \\ 0,0086 & 1,0663 & 0,0324 & -0,0322 \\ 0,0200 & 0,0333 & 1,0142 & -0,0037 \\ 0,0189 & 0,0179 & 0,0400 & 0,9724 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,pr}^{(U_2^c)}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{U_2^c} = 0,9700,$$

$$\lambda_{2,pr}^{U_2^c} = 1,0746,$$

$$\lambda_{3,pr}^{U_2^c} = 1,0089 + 0,0111i \text{ (mod } 1,0090),$$

$$\lambda_{4,pr}^{U_2^c} = 1,0089 - 0,0111i \text{ (mod } 1,0090).$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_2^c,pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{U_2^c} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0407.$$

Realizamos a continuación el análisis en un escenario de formato mínimo de los procesos inducidos.

Como se ha indicado reiteradamente, esta teoría requiere la utilización de los tensores $A_{1,ap}^{(S)*c}$ y $A_{2,ap}^{(S)*c}$ de propagación simétrica de covarianza para ambos procesos. Dichos tensores, de acuerdo con (7.30), (7.31), (7.32) y (7.33), son

$$A_{1,ap}^{(S)*c} = \begin{pmatrix} 0,8521 & 0,0678 & 0,0950 & 0,1437 \\ 0,0622 & 0,8695 & 0,1317 & 0,1080 \\ 0,1008 & 0,1431 & 0,7409 & 0,1602 \\ 0,1281 & 0,0979 & 0,1388 & 0,8303 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,ap}^{(S)*c} = \begin{pmatrix} 0,8284 & 0,0353 & 0,0599 & 0,1108 \\ 0,0245 & 0,9087 & 0,0738 & 0,0573 \\ 0,0414 & 0,0573 & 0,8600 & 0,0922 \\ 0,0825 & 0,0408 & 0,0829 & 0,8423 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,ex}^{(S)*} = \begin{pmatrix} 0,8513 & 0,0718 & 0,0971 & 0,1412 \\ 0,0660 & 0,8701 & 0,1317 & 0,1073 \\ 0,1030 & 0,1434 & 0,7416 & 0,1599 \\ 0,1269 & 0,0988 & 0,1397 & 0,8294 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,ex}^{(S)*} = \begin{pmatrix} 0,8281 & 0,0369 & 0,0609 & 0,1096 \\ 0,0262 & 0,9088 & 0,0740 & 0,0569 \\ 0,0423 & 0,0575 & 0,8604 & 0,0920 \\ 0,0821 & 0,0412 & 0,0833 & 0,8419 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$F_{1,dif}^{(A_1^{(S)*})} = \begin{pmatrix} 0,0008 & -0,0040 & -0,0021 & 0,0025 \\ -0,0037 & -0,0006 & 0,0001 & 0,0007 \\ -0,0022 & -0,0003 & -0,0006 & 0,0003 \\ 0,0012 & -0,0009 & -0,0009 & 0,0009 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,dif}^{(A_1^{(S)*})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{A_1^{(S)*}} = -0,0002,$$

$$\lambda_{2,dif}^{A_1^{(S)*}} = 0,0003,$$

$$\lambda_{3,dif}^{A_1^{(S)*}} = 0,0000 + 0,0078i \pmod{0,0078},$$

$$\lambda_{4,dif}^{A_1^{(S)*}} = 0,0000 - 0,0078i \pmod{0,0078}.$$

Para los autovalores complejos utilizamos su módulo (aunque este es un criterio que debe ser sometido, como ya se ha indicado, a un pertinente análisis de validez). En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_1^{(S)*}, dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j, dif}^{A_1^{(S)*}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0055.$$

$$F_{2, dif}^{(A_2^{(S)*})} = \begin{pmatrix} 0,0003 & -0,0016 & -0,0010 & 0,0011 \\ -0,0017 & -0,0002 & -0,0002 & 0,0003 \\ -0,0010 & -0,0001 & -0,0004 & 0,0002 \\ 0,0004 & -0,0004 & -0,0004 & 0,0005 \end{pmatrix},$$

Los autovalores de $F_{2, dif}^{(A_2^{(S)*})}$ son

$$\lambda_{1, dif}^{A_2^{(S)*}} = -0,0001,$$

$$\lambda_{2, dif}^{A_2^{(S)*}} = 0,0002,$$

$$\lambda_{3, dif}^{A_2^{(S)*}} = 0,0000 + 0,0030i \text{ (mod } 0,0030),$$

$$\lambda_{4, dif}^{A_2^{(S)*}} = 0,0000 - 0,0030i \text{ (mod } 0,0030).$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{(S)*}, dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j, dif}^{A_2^{(S)*}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0021.$$

$$F_{1, pr}^{(A_1^{(S)*})} = \begin{pmatrix} 1,0011 & -0,0047 & -0,0029 & 0,0040 \\ -0,0046 & 0,9995 & 0,0005 & 0,0016 \\ -0,0026 & -0,0001 & 0,9993 & 0,0010 \\ 0,0015 & -0,0011 & -0,0015 & 1,0012 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1, pr}^{(A_1^{(S)*})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{A_1^{(S)*}} = 0,9951,$$

$$\lambda_{2,pr}^{A_1^{(S)*}} = 0,9991,$$

$$\lambda_{3,pr}^{A_1^{(S)*}} = 1,0004,$$

$$\lambda_{4,pr}^{A_1^{(S)*}} = 1,0065.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_1^{(S)*},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{A_1^{(S)*}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0041.$$

$$F_{2,pr}^{(A_2^{(S)})} = \begin{pmatrix} 1,0003 & -0,0018 & -0,0012 & 0,0016 \\ -0,0021 & 0,9999 & -0,0001 & 0,0007 \\ -0,0012 & -0,0001 & 0,9996 & 0,0004 \\ 0,0005 & -0,0005 & -0,0005 & 1,0006 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{2,pr}^{(A_1^{(S)*})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{A_2^{(S)*}} = 0,9979,$$

$$\lambda_{2,pr}^{A_2^{(S)*}} = 0,9997,$$

$$\lambda_{3,pr}^{A_2^{(S)*}} = 1,0002,$$

$$\lambda_{4,pr}^{A_2^{(S)*}} = 1,0026.$$

Por tanto, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{A_2^{(S)*},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{A_2^{(S)*}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0017.$$

En cuanto al tensor de distancia de los procesos asignados (mínimos) ‘aproximados’, de acuerdo con (7.34), (7.35), (7.36) y (7.37), obtenemos

$$U_{1,ap}^{*c} = \begin{pmatrix} 0,2417 & -0,1443 & -0,1802 & -0,2643 \\ -0,1343 & 0,2103 & -0,2331 & -0,2136 \\ -0,1900 & -0,2530 & 0,4004 & -0,2817 \\ -0,2355 & -0,1950 & -0,2432 & 0,2594 \end{pmatrix},$$

$$U_{2,ap}^{*c} = \begin{pmatrix} 0,3013 & -0,0692 & -0,1130 & -0,1926 \\ -0,0503 & 0,1669 & -0,1368 & -0,1098 \\ -0,0789 & -0,1066 & 0,2460 & -0,1648 \\ -0,1423 & -0,0791 & -0,1490 & 0,2714 \end{pmatrix},$$

$$U_{1,ex}^* = \begin{pmatrix} 0,2426 & -0,1515 & -0,1839 & -0,2605 \\ -0,1407 & 0,2087 & -0,2336 & -0,2128 \\ -0,1937 & -0,2543 & 0,3989 & -0,2811 \\ -0,2341 & -0,1971 & -0,2449 & 0,2612 \end{pmatrix},$$

$$U_{2,ex}^* = \begin{pmatrix} 0,3017 & -0,0721 & -0,1148 & -0,1908 \\ -0,0532 & 0,1665 & -0,1372 & -0,1094 \\ -0,0806 & -0,1070 & 0,2453 & -0,1645 \\ -0,1417 & -0,0800 & -0,1498 & 0,2723 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, los tensores de inexactitud del tensor de distancia son

$$F_{1,dif}^{(U_1^{*c})} = \begin{pmatrix} -0,0009 & 0,0071 & 0,0037 & -0,0037 \\ 0,0064 & 0,0015 & 0,0006 & -0,0008 \\ 0,0037 & 0,0013 & 0,0015 & -0,0006 \\ -0,0014 & 0,0022 & 0,0017 & -0,0018 \end{pmatrix},$$

$$F_{2,dif}^{(U_2^{*c})} = \begin{pmatrix} -0,0004 & 0,0029 & 0,0018 & -0,0018 \\ 0,0029 & 0,0004 & 0,0004 & -0,0004 \\ 0,0017 & 0,0004 & 0,0008 & -0,0003 \\ -0,0006 & 0,0009 & 0,0008 & -0,0009 \end{pmatrix},$$

$$F_{1,pr}^{(U_1^{*c})} = \begin{pmatrix} 0,9882 & 0,0115 & 0,0008 & -0,0158 \\ 0,0059 & 0,9925 & -0,0071 & -0,0111 \\ 0,0016 & -0,0049 & 0,9964 & -0,0084 \\ -0,0049 & 0,0055 & 0,0025 & 0,9955 \end{pmatrix},$$

$$F_{2,pr}^{(U_2^c)} = \begin{pmatrix} 0,9906 & 0,0025 & -0,0051 & -0,0153 \\ 0,0002 & 0,9911 & -0,0099 & -0,0110 \\ -0,0015 & -0,0067 & 0,9933 & -0,0088 \\ -0,0032 & 0,0027 & 0,0007 & -0,9960 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $F_{1,dif}^{(U_1^{*c})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{U_1^{*c}} = -0,0081,$$

$$\lambda_{2,dif}^{U_1^{*c}} = 0,0006,$$

$$\lambda_{3,dif}^{U_1^{*c}} = 0,0009,$$

$$\lambda_{4,dif}^{U_1^{*c}} = 0,0082.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_1^{*c},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{U_1^{*c}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0058.$$

Los autovalores de $F_{2,dif}^{(U_1^{*c})}$ son

$$\lambda_{1,dif}^{U_2^{*c}} = -0,0003,$$

$$\lambda_{2,dif}^{U_2^{*c}} = 0,0002,$$

$$\lambda_{3,dif}^{U_2^{*c}} = 0,0002 + 0,0053i \pmod{0,0053},$$

$$\lambda_{4,dif}^{U_2^{*c}} = 0,0002 - 0,0053i \pmod{0,0053}.$$

Por tanto, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_2^{*c},dif} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\lambda_{j,dif}^{U_2^{*c}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0037.$$

Los autovalores de $F_{1,pr}^{(U_1^{*c})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{U_1^{*c}} = 0,9810,$$

$$\lambda_{2,pr}^{U_1^{*c}} = 0,9927,$$

$$\lambda_{3,pr}^{U_1^{*c}} = 0,9970,$$

$$\lambda_{4,pr}^{U_1^{*c}} = 1,0019.$$

En consecuencia, el factor escalar de ‘inexactitud’ viene dado por

$$f_{U_1^{*c},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{U_1^{*c}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0103.$$

Los autovalores de $F_{2,pr}^{(U_2^{*c})}$ son

$$\lambda_{1,pr}^{U_2^{*c}} = 0,9989,$$

$$\lambda_{2,pr}^{U_2^{*c}} = 1,0012,$$

$$\lambda_{3,pr}^{U_2^{*c}} = 0,9854 + 0,0034i \pmod{0,9854},$$

$$\lambda_{4,pr}^{U_2^{*c}} = 0,9854 - 0,0034i \pmod{0,9854}.$$

Por tanto,, el factor escalar de 'inexactitud' viene dado por

$$f_{U_2^{*c},pr} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(1 - \lambda_{j,pr}^{U_2^{*c}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,0103.$$

A partir de los resultados numéricos obtenidos podemos hacer una evaluación del grado de 'exactitud' de la teoría 'aproximada'.

Para todas las teorías aproximadas se han complementado los resultados tensoriales alcanzados en cada una de ellas con los de los valores escalares de 'inexactitud' definidos en (7.3) y (7.4), que proporcionan una medida resumida global.

Reiteramos de nuevo que la magnitud de los resultados obtenidos para los tensores de 'inexactitud' y para los factores de 'inexactitud', proporcionan unas medidas de un grado de aproximación. No obstante, se hace necesario realizar un análisis de las propiedades de dichas medidas, que permita disponer de los criterios objetivos para decidir sobre la validez o no de una teoría.

Ejemplo 8: Información en 1 ó 2 puntos con diversos escenarios de causalidad

Supongamos, una vez más, un sistema físico relativista influenciado por una fuente externa que induce en dicho sistema una perturbación, que, de acuerdo con las hipótesis de trabajo utilizadas en esta memoria, podemos asociar a un campo estocástico gaussiano estacionario markoviano.

Supongamos además que dicha fuente tiene características idénticas a las de la fuente F2 analizada en el Ejemplo 3 anterior.

El núcleo de covarianza N en un punto de dicho campo es, por tanto,

$$N = \begin{pmatrix} 2,2500 & 0,8000 & 0,6000 & 0,7000 \\ 0,8000 & 2,5600 & 0,6000 & 0,7000 \\ 0,6000 & 0,6000 & 2,2500 & 0,6000 \\ 0,7000 & 0,7000 & 0,6000 & 1,9600 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que $|N| = 16,5498$ y $Tr(N) = 9,0200$ y que el propagador de distancia, por unidad de pseudodistancia, es

$$A = \begin{pmatrix} 0,7823 & 0,0181 & 0,0050 & 0,0503 \\ 0,0050 & 0,8220 & 0,0157 & 0,0123 \\ 0,0021 & 0,0178 & 0,8329 & 0,0160 \\ 0,0250 & 0,0190 & 0,0072 & 0,8325 \end{pmatrix},$$

siendo $|A| = 0,4446$ y $Tr(A) = 3,2697$ y los autovalores de A los valores:

$$\lambda_{A,0} = 0,7639,$$

$$\lambda_{A,1} = 0,8088,$$

$$\lambda_{A,2} = 0,8283,$$

$$\lambda_{A,3} = 0,8687.$$

Sigamos recordando datos para facilitar el análisis de este ejemplo. Así

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} 0,6158 & 0,0200 & 0,0138 & 0,0818 \\ 0,0131 & 0,6688 & 0,0291 & 0,0391 \\ 0,0025 & 0,0228 & 0,6961 & 0,0285 \\ 0,0462 & 0,0140 & 0,0161 & 0,6983 \end{pmatrix},$$

con determinante $|\Pi_A| = 0,1976$ y traza $Tr(\Pi_A) = 2,6789$. El factor de carga de correlación es $\pi_A = |\Pi_A|^{\frac{1}{4}} = 0,6637$. Los autovalores de Π_A son

$$\pi_{A,0} = 0,5832,$$

$$\pi_{A,1} = 0,6507,$$

$$\pi_{A,2} = 0,6872,$$

$$\pi_{A,3} = 0,7578.$$

El tensor de distancia es

$$U_A = \begin{pmatrix} 0,3842 & -0,0200 & -0,0138 & -0,0818 \\ -0,0131 & 0,3312 & -0,0291 & -0,0391 \\ -0,0025 & -0,0228 & 0,3039 & -0,0285 \\ -0,0462 & -0,0140 & -0,0161 & 0,3017 \end{pmatrix},$$

con determinante y traza respectivos $|U_A| = 0,0110$ y $Tr(U_A) = 1,3211$. El factor de distancia es $u_A = |U_A|^{\frac{1}{4}} = 0,3241$. Y los autovalores de U_A :

$$u_{A,0} = 0,2422,$$

$$u_{A,1} = 0,3128,$$

$$u_{A,2} = 0,3493,$$

$$u_{A,3} = 0,4168.$$

Recordemos también que $\tau_A - (u_A + \pi_A) = 0,0092$.

El tensor simétrico de covarianza V del tensor de stress condicional, dado un punto x_a , anterior a un punto x_0 dado, y separado de éste por una unidad de pseudodistancia, es

$$V = \begin{pmatrix} 0,7830 & 0,1907 & 0,1385 & 0,0864 \\ 0,1907 & 0,7927 & 0,1021 & 0,1287 \\ 0,1385 & 0,1021 & 0,6514 & 0,1088 \\ 0,0864 & 0,1287 & 0,1088 & 0,5395 \end{pmatrix},$$

con determinante $|V| = 0,1825$ y traza es $Tr(V) = 2,7667$.

A partir de este escenario, hagamos inicialmente un análisis de resultados considerando ahora un nuevo escenario de inversión temporal. Si el punto dado, o sea, cuya información es conocida, es x , el impacto en la reducción de la incertidumbre en el punto anterior x_a proporciona los resultados a continuación reflejados.

El tensor adelantado de propagación B viene dado, como hemos visto, por $B = NA'N^{-1}$. Por tanto,

$$B = \begin{pmatrix} 0,7848 & 0,0068 & 0,0,0111 & 0,0498 \\ 0,0107 & 0,8134 & 0,0192 & 0,0344 \\ 0,0002 & 0,0100 & 0,8351 & 0,0173 \\ 0,0317 & -0,0002 & 0,0113 & 0,8364 \end{pmatrix},$$

siendo $|B| = 0,4446$ y $Tr(B) = 3,2697$ (coincidentes con los valores respectivos para A) y los autovalores de B los valores:

$$\lambda_{B,0} = 0,7639,$$

$$\lambda_{B,1} = 0,8088,$$

$$\lambda_{B,2} = 0,8283,$$

$$\lambda_{B,3} = 0,8687,$$

idénticos, como cabía esperar, a los del propagador retardado A .

El tensor W de covarianza condicional en x_a , dado x_0 , verifica $W = A^{-1}VB'$, luego

$$W = \begin{pmatrix} 0,7838 & 0,1891 & 0,1388 & 0,0872 \\ 0,1891 & 0,7897 & 0,1011 & 0,1271 \\ 0,1388 & 0,1011 & 0,6521 & 0,1098 \\ 0,0872 & 0,1271 & 0,1098 & 0,5400 \end{pmatrix},$$

con determinante $|W| = 0,1825$ (coincidente con el de V) y traza es $Tr(W) = 2,7656$ (no coincidente con la de V).

Es inmediato obtener las medidas informacionales habituales, como son el tensor de distancia U_B y el tensor de carga de covarianza Π_B . Así,

$$U_B = \begin{pmatrix} 0,3847 & -0,0210 & -0,0136 & -0,0812 \\ -0,0134 & 0,3302 & -0,0290 & -0,0395 \\ -0,0024 & -0,0234 & 0,3041 & -0,0279 \\ -0,0457 & -0,0150 & -0,0156 & 0,3020 \end{pmatrix},$$

con determinante y traza respectivos $|U_B| = 0,0110$ y $Tr(U_B) = 1,3211$ (ambos coincidentes con los obtenidos en el caso retardado). Por tanto, el factor de distancia es $u_B = |U_B|^{\frac{1}{4}} = 0,3241$. Y los autovalores de U_B :

$$u_{B,0} = 0,2422 = u_{A,0},$$

$$u_{B,1} = 0,3128 = u_{A,1},$$

$$u_{B,2} = 0,3493 = u_{A,2},$$

$$u_{B,3} = 0,4168 = u_{A,3}.$$

Adicionalmente,

$$\Pi_B = \begin{pmatrix} 0,6153 & 0,0210 & 0,0136 & 0,0812 \\ 0,0134 & 0,6698 & 0,0290 & 0,0395 \\ 0,0024 & 0,0234 & 0,6959 & 0,0279 \\ 0,0457 & 0,0150 & 0,0156 & 0,6980 \end{pmatrix},$$

con determinante $|\Pi_B| = 0,1976$ y traza $Tr(\Pi_A) = 2,6789$, coincidentes con los obtenidos en el escenario retardado. El factor de carga de correlación es $\pi_B = |\Pi_B|^{\frac{1}{4}} = 0,6637$ y los autovalores de Π_B son

$$\pi_{B,0} = 0,5832 = \pi_{A,0},$$

$$\pi_{B,1} = 0,6507 = \pi_{A,1},$$

$$\pi_{B,2} = 0,6872 = \pi_{A,2},$$

$$\pi_{B,3} = 0,7578 = \pi_{A,3}.$$

En este escenario adelantado obtenemos $\tau_B = 1 - (u_B + \pi_B) = 0,0092 = \tau_A$.

Supongamos ahora que tenemos un punto espaciotemporal de referencia x_0 y que disponemos de la información en los puntos x_a (anterior a x_0) y x_d (posterior a x_0), perteneciendo los tres puntos a una misma geodésica real, o sea, que están causalmente conectados. Ya que se trata solo de reflejar algunos datos ilustrativos, consideraremos una cierta simplificación, que no supone pérdida alguna de generalidad. Hacemos la hipótesis simple de que $|x_0 - x_a|$ es una pseudodistancia unitaria y que se cumple $|x_0 - x_d| = 2|x_0 - x_a|$.

Llamaremos A_a y A_d a los tensores de propagación retardados entre los puntos x_a y x_0 y entre los puntos x_0 y x_d , respectivamente. Asimismo, denominaremos B_a y B_d a los propagadores adelantados entre los puntos x_0 y x_a y entre los puntos x_d y x_0 , respectivamente. El tensor condicional de covarianza V_a se obtiene en el punto x_0 dada la información en x_a y el tensor condicional de covarianza W_a se asigna al punto x_a dada la información en x_0 . Análogamente se definen los tensores condicionales de covarianza V_d y W_d , que están asignados respectivamente a los puntos x_d (dada la información en x_0) y x_0 (dada la información en x_d). Los tensores A_a (retardado) y B_a (adelantado) corresponden a los tensores A y B anteriormente utilizados. Por tanto, $A_d = A_a^2$ y $B_d = B_a^2$, o sea,

$$A_d = \begin{pmatrix} 0,6134 & 0,0301 & 0,0087 & 0,0815 \\ 0,0094 & 0,6763 & 0,0261 & 0,0209 \\ 0,0039 & 0,0298 & 0,6941 & 0,0270 \\ 0,0405 & 0,0320 & 0,0124 & 0,6947 \end{pmatrix},$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 0,6176 & 0,0109 & 0,0187 & 0,0812 \\ 0,0182 & 0,6618 & 0,0321 & 0,0576 \\ 0,0010 & 0,0164 & 0,6979 & 0,0292 \\ 0,0513 & -0,0030 & 0,0192 & 0,7012 \end{pmatrix},$$

siendo $|A_d| = 0,1976 = |A_a^2| = |B_a^2| = |B_d|$ y $Tr(A_d) = 2,6784 = Tr(A_a^2) = Tr(B_a^2) = Tr(B_d)$ y los autovalores de A_d y B_d :

$$\begin{aligned} \lambda_{A_d,0} &= 0,5835 = \lambda_{A_a,0}^2 = \lambda_{B_a,0}^2 = \lambda_{B_d,0}, \\ \lambda_{A_d,1} &= 0,6541 = \lambda_{A_a,1}^2 = \lambda_{B_a,1}^2 = \lambda_{B_d,1}, \\ \lambda_{A_d,2} &= 0,6861 = \lambda_{A_a,2}^2 = \lambda_{B_a,2}^2 = \lambda_{B_d,2}, \\ \lambda_{A_d,3} &= 0,7547 = \lambda_{A_a,3}^2 = \lambda_{B_a,3}^2 = \lambda_{B_d,3}. \end{aligned}$$

De acuerdo con (8.12) obtenemos

$$V_{0|a,d} = \begin{pmatrix} 0,6297 & 0,1428 & 0,1045 & 0,0512 \\ 0,1428 & 0,6198 & 0,0703 & 0,0908 \\ 0,1045 & 0,0703 & 0,5047 & 0,0778 \\ 0,0512 & 0,0908 & 0,0778 & 0,4166 \end{pmatrix}, \quad (15.15)$$

siendo $|V_{0|a,d}| = 0,0704 = |V_a||V_d||V_{a,d}|^{-1}$, donde V_a equivale al tensor condicional V (así denominado anteriormente) y V_d y $V_{a,b}$ a las expresiones conocidas respectivas $V_d = N - A_d N A_d'$ y $V_{a,d} = N - A_d A_a N A_a' A_d'$, con lo que

$$V_d = \begin{pmatrix} 1,2775 & 0,3370 & 0,2434 & 0,1873 \\ 0,3370 & 1,3355 & 0,1960 & 0,2413 \\ 0,2434 & 0,1960 & 1,1102 & 0,2023 \\ 0,1873 & 0,2413 & 0,2023 & 0,9235 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V_d| = 1,4147$ y

$$V_{a,d} = \begin{pmatrix} 1,5944 & 0,4488 & 0,3238 & 0,2842 \\ 0,4488 & 1,7084 & 0,2775 & 0,3363 \\ 0,3238 & 0,2775 & 1,4345 & 0,2810 \\ 0,2842 & 0,3363 & 0,2810 & 1,1993 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es $|V_{a,d}| = 3,6669$.

En consecuencia, de acuerdo con (8.13), y teniendo en cuenta que

$$W_d = A_d^{-1}V_dB'_d = \begin{pmatrix} 1,2796 & 0,3326 & 0,2444 & 0,1895 \\ 0,3326 & 1,3268 & 0,1933 & 0,2367 \\ 0,2444 & 0,1933 & 1,1121 & 0,2051 \\ 0,1895 & 0,2367 & 0,2051 & 0,9250 \end{pmatrix},$$

con $|W_d| = 1,4147$ y $Tr(W_d) = 4,6435$, obtenemos

$$\begin{aligned} E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_d)] = & \\ & \begin{pmatrix} 0,3078 & -0,0008 & 0,0035 & 0,0095 \\ 0,0039 & 0,3135 & 0,0047 & 0,0133 \\ -0,0011 & 0,0002 & 0,3195 & 0,0025 \\ 0,0081 & -0,0057 & 0,0025 & 0,3191 \end{pmatrix} \xi(x_d) + \\ & \begin{pmatrix} 0,6334 & 0,0065 & -0,0007 & 0,0142 \\ -0,0008 & 0,6466 & 0,0025 & -0,0043 \\ 0,0008 & 0,0056 & 0,6480 & 0,0038 \\ 0,0054 & 0,0089 & 0,0008 & 0,6464 \end{pmatrix} \xi(x_a). \end{aligned} \quad (15.16)$$

De acuerdo con los resultados obtenidos en el modelo sencillo propuesto, los resultados (15.15) y (15.16) son válidos en el caso más general en que $\xi(x_d)$ pertenezca al subcono del futuro de x y x_a pertenezca al subcono del pasado de x , es decir, en un escenario de conexión causal sin que se exija a los tres puntos estar contenidos una misma geodésica.

El tensor de distancia $U_{0|a,d}$, que viene dado por la relación conocida $U_{0|a,d} = V_{0|a,d}N^{-1}$, por lo que

$$U_{0|a,d} = \begin{pmatrix} 0,3131 & -0,0187 & -0,0120 & -0,0754 \\ -0,0117 & 0,2614 & -0,0261 & -0,0349 \\ -0,0016 & -0,0208 & 0,2369 & -0,0248 \\ -0,0427 & -0,0126 & -0,0137 & 0,2365 \end{pmatrix},$$

con lo que $u_{0|a,d} = 0,2554$.

El tensor de carga de correlación es, en este caso,

$$\Pi_{0|a,d} = \begin{pmatrix} 0,6869 & 0,0187 & 0,0120 & 0,0754 \\ -0,0117 & 0,7386 & 0,0261 & 0,0349 \\ 0,0016 & 0,0208 & 0,7631 & 0,0248 \\ 0,0427 & 0,0126 & 0,0137 & 0,7635 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\pi_{0|a,d} = 0,7357$. Y, en consecuencia, $\tau_{0|a,d} = 0,0089$.

Supongamos finalmente que, dado un punto espaciotemporal x_0 de referencia, acerca del cual queremos analizar el grado de incertidumbre, disponemos de la información en dos puntos x_a y x_b pertenecientes a su pasado causal, o sea, al subcono de luz del pasado de x_0 . Y suponemos, al igual que anteriormente, y sin pérdida de generalidad, que $|x_0 - x_b| = 2|x_0 - x_a|$. Cabe considerar dos escenarios diferentes: 1) x_b pertenece al subcono de luz del pasado de x_a , en cuyo caso x_a y x_b están causalmente conectados y 2) x_b no pertenece al subcono de luz del pasado de x_a , en cuyo caso x_a y x_b no están causalmente conectados.

En el caso 1), en nuestro modelo propuesto, $\xi(x_b)$ no aporta información sobre $\xi(x_0)$ conocido $\xi(x_a)$, por lo que, dado que el análisis de este escenario es conocido, analizaremos los resultados correspondientes al caso 2), en el cual $\xi(x_a)$ y $\xi(x_b)$ no están causalmente conectados.

De acuerdo con (8.14) y (8.15) obtenemos

$$V_{0|a,b} = \begin{pmatrix} 0,6292 & 0,1437 & 0,1043 & 0,0507 \\ 0,1437 & 0,6216 & 0,0708 & 0,0918 \\ 0,1043 & 0,0708 & 0,5044 & 0,0772 \\ 0,0507 & 0,0918 & 0,0772 & 0,4163 \end{pmatrix},$$

$$E[\xi(x_0)|\xi(x_a), \xi(x_b)] = \begin{pmatrix} 0,3066 & 0,0064 & -0,0010 & 0,0108 \\ -0,0009 & 0,3185 & 0,0018 & -0,0047 \\ 0,0007 & 0,0053 & 0,3181 & 0,0025 \\ 0,0036 & 0,0090 & 0,0000 & 0,3167 \end{pmatrix} \xi(x_b) +$$

$$\begin{pmatrix} 0,6328 & 0,0077 & -0,0008 & 0,0132 \\ -0,0004 & 0,6482 & 0,0028 & -0,0032 \\ 0,0005 & 0,0064 & 0,6476 & 0,0028 \\ 0,0048 & 0,0102 & 0,0000 & 0,6459 \end{pmatrix} \xi(x_a).$$

Hay que tener en cuenta que estos resultados son independientes de la pseudodistancia imaginaria entre los puntos x_a y x_b , lo cual es compatible con el hecho de que entre ξ_a y ξ_b la información mutua es nula, al no existir conexión causal entre ellos, sea cual sea su posición respecto a x_0 .

En este escenario el tensor de distancia $U_{0|a,b}$ viene dado por

$$U_{0|a,b} = \begin{pmatrix} 0,3129 & -0,0181 & -0,0121 & -0,0757 \\ -0,0116 & 0,2620 & -0,0261 & -0,0346 \\ -0,0017 & -0,0204 & 0,2368 & -0,0252 \\ -0,0430 & -0,0121 & -0,0140 & 0,2364 \end{pmatrix},$$

con lo que $u_{0|a,d} = 0,2554$.

El tensor de carga de correlación es, en este caso,

$$\Pi_{0|a,b} = \begin{pmatrix} 0,6871 & 0,0181 & 0,0121 & 0,0757 \\ 0,0116 & 0,7380 & 0,0261 & 0,0346 \\ 0,0017 & 0,0204 & 0,7632 & 0,0252 \\ 0,0430 & -0,0121 & -0,0140 & 0,7636 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\pi_{0|a,b} = 0,7357$. Consecuentemente, $\tau_{0|a,b} = 0,0089$.

Observamos que, aunque $U_{0|a,d}$ y $U_{0|a,b}$ no coinciden, y, por tanto, tampoco lo hacen $\Pi_{0|a,d}$ y $\Pi_{0|a,b}$, sí se produce $u_{0|a,d} = u_{0|a,b}$, $\pi_{0|a,d} = \pi_{0|a,b}$ y $\tau_{0|a,d} = \tau_{0|a,b}$, como cabía esperar, dada la similar construcción de los dos escenarios, que difieren en la inversión temporal.

El desarrollo de este ejemplo permite disponer de la base de medidas de incertidumbre (tensores de covarianza incondicionales y condicionales, tensores de propagación, tensores y factores de distancia y carga de correlación, ...) que permitirían realizar el análisis teórico-informacional completo, que no llevaremos a cabo dado que ha sido reiterada y exhaustivamente expuesto en los casos analizados en esta Parte III.

Capítulo 16

Conclusiones finales y temas abiertos de investigación

El presente capítulo está estructurado en dos secciones claramente diferenciadas. En la Sección 16.1 se hace una enumeración de las Conclusiones más relevantes que se derivan del estudio realizado, vinculadas a un conjunto de hipótesis de trabajo especialmente diseñado, que ha permitido dibujar un escenario razonable, a la vez válido y simplificado, con la referencia del objetivo general de la memoria, facilitando de este modo la obtención de unos resultados interpretables. En la Sección 16.2 se incorpora una exhaustiva enumeración de Líneas de Investigación, resultantes del lógico proceso de generalización asociado a la relajación de las restricciones simplificadoras utilizadas.

16.1. Conclusiones

La principal motivación de esta memoria radica en la convergencia interdisciplinar, lo que históricamente se ha demostrado siempre útil. La experiencia ha evidenciado que no hay fronteras que delimiten las muy diversas y numerosas áreas de conocimiento. La agregación permite sinergias que a su vez abren nuevas líneas de investigación.

Se ha considerado en el análisis un modelo estocástico sencillo para describir el comportamiento, en una región dada del espaciotiempo, de un sistema físico relativista, como puede ser un fluido cuasi-perfecto, levemente perturbado por el efecto de uno o varios sistemas externos que actúan como fuentes de esa perturbación incidente en el tensor de stress que describe la distribu-

ción material del sistema.

Sin embargo, los resultados de este estudio son aplicables, al igual que al campo gravitatorio, a otros campos físicos, como la Electrodinámica o la Hidrodinámica, en los que la modelización del tensor de stress de energía-momento desempeña un papel fundamental. La razón principal para la elección de un campo gravitacional radica en el largo camino de investigación que posee este campo y a sus especiales características. En primer lugar, extender el análisis a la geometría aleatoria (espejo de las características materiales del campo aleatorio) del espaciotiempo curvo, e incluso, en segundo lugar, proceder a dar un paso más avanzado, abriendo la posibilidad de trasladar algunos de los resultados en un intento de aproximación a una aplicación a un modelo de Gravedad Cuántica Estocástica [56, 57, 58, 69, 70]. Estas ideas justifican la línea argumental utilizada en el Capítulo 2

El trabajo realizado se circunscribe al estudio informacional del tensor de stress como consecuencia, en primer lugar, de la hipótesis realizada sobre su distribución espaciotemporal aleatoria gaussiana y, en segundo lugar, del conocimiento de una cierta cantidad de información en la región objeto de estudio, lo que asigna un carácter condicional al modelo estocástico en relación a la cantidad de información disponible. Este análisis informacional que se propone y los resultados obtenidos constituyen la aportación principal del estudio, que, aunque realizado en un marco simplificado como punto de partida, permite abrir líneas de investigación basadas en la utilización de modelos estructurales más generales y, por tanto, más adaptables a una tipología más diversa de escenarios específicos.

Se ha supuesto conocido el proceso probabilístico tetradimensional gaussiano que describe la distribución espaciotemporal de la componente estocástica del tensor. Y se ha considerado adicionalmente que el proceso es estacionario, con valor esperado nulo y un núcleo de covarianza no nulo entre dos puntos que depende sólo de la distancia entre ambos puntos [9, 44, 80]. La correlación, y por tanto la información mutua, entre los tensores de stress en dos puntos se ha descrito mediante un tensor de propagación (que es un operador aplicable a la matriz de varianzas y covarianzas de las componentes del tensor en cada punto), cuyos autovalores están comprendidos entre 0 y 1.

Resumiendo, en esta memoria se ha desarrollado un ejemplo simplificado de convergencia de dos disciplinas. Justificado en esa simplicidad se ha abordado un análisis de las fluctuaciones, no cuánticas, sino de origen clásico, lo que parece conveniente y suficiente en muchos escenarios. Un enfoque que permite manejar conceptos relevantes como los de ‘tensor aleatorio’, ‘núcleo

de covarianza',..., cuya utilización se justifica tanto en el ámbito clásico como en el cuántico. Las fluctuaciones de un campo, sea cual sea su naturaleza, sólo pueden ser descritas eficazmente desde el Cálculo de Probabilidades, y en consecuencia, en ese proceso tiene una entrada natural la Teoría de la Información, cuyos conceptos fundamentales se muestran cada día más eficaces.

Tras esta breve descripción resumida del contexto final en que ha devenido esta memoria, se hace seguidamente una mención más detallada de los aspectos fundamentales que la enmarcan, y con los que se relaciona en mayor o menor medida, haciendo una mención especial a los numerosos temas que quedan abiertos, siendo susceptibles de otros trabajos de investigación complementarios, más avanzados, y progresivamente más cercanos a una realidad física especialmente compleja.

El incentivo inicial de la memoria, que marcaría de algún modo el rumbo orientado hacia su forma final, está relacionado con un objetivo que la investigación profunda, tenaz, incluso obsesiva, aún no ha conseguido: un modelo de Gravedad Cuántica que pueda considerarse definitivo. Este modelo aún no existe y su carácter tenazmente esquivo aleja el sueño de una Teoría Unificada que describa el universo de forma completa y global, integrando todas las teorías físicas en una teoría única con proyección en todos y cada uno de los ámbitos de la Física.

En esta difícil carrera en la que no sólo no se vislumbra, sino que ni tan siquiera se sabe dónde puede residir, la meta final, los investigadores se ven impulsados a manejar una multiplicidad de conceptos, cuya coherencia global se muestra, por ahora, reiteradamente inalcanzable. ¿Es posible, como alguna vez sugirió el físico teórico sueco-estadounidense Max Tegmark [109, 110] que tal vez la mente humana actual no tiene capacidad suficiente para alcanzar tal objetivo?. O peor aún, ¿puede ocurrir, como se preguntan algunos físicos teóricos, que tal teoría final sea quizá inalcanzable porque simplemente no exista? La investigación ha demostrado a lo largo de la historia que nunca aceptará este último escenario. Porque la Física Teórica no puede renunciar, sin agotar todos sus recursos, a encontrar una explicación completa, única, coherente y satisfactoria de todo lo que existe. Con mayor motivo si recordamos la reflexión de Einstein en el pasado, y del propio Tegmark en el presente, siendo sólo dos ejemplos entre muchos, consistente en afirmar que es un hecho afortunado que nuestro universo 'permita' a la mente humana hacer una modelización de la naturaleza en términos matemáticos.

Sin embargo, parece que todas las teorías encaminadas hacia ese objetivo

crucial de la Física Teórica como es una Teoría completa de la Gravedad Cuántica, han seguido un largo camino en el que, por ahora, no se vislumbra una salida, en ningún caso. Una de esas teorías, dotada de un cierto atractivo, pero nacida necesariamente con un incierto futuro, es la denominada Gravedad Cuántica Estocástica, surgida a partir de la incuestionable lógica de intentar modelizar estocásticamente lo que es esencialmente aleatorio. La probabilidad lo impregna todo, desde el cimiento (más adelante matizaremos esto), porque la naturaleza es esencialmente cuántica y ‘lo cuántico’ está presente en todo sistema físico, en toda la materia, y en consecuencia, de alguna forma, tiene que impregnar también la geometría espaciotemporal que la envuelve, porque ambos conceptos, materia y espaciotiempo, son ‘las dos caras de una misma moneda’. Luego, a juicio del autor, la Teoría Final, aún no alcanzada, debe existir. Cuestión aparte es la diversidad en que, en cuanto a opinión sobre cómo enfocarla, se posiciona la comunidad científica: ¿hay que crecer a partir de las vigentes teorías actuales solucionando los problemas detectados?, o alternativamente, ¿hay que intentar desarrollar una teoría completamente nueva?.

En este punto, y dado el inmenso y fértil desarrollo del Cálculo de Probabilidades, cabe preguntarse razonablemente: ¿por qué no aprovechar ese enorme conjunto de conocimiento para intentar aproximar una explicación de la realidad cuántica? O al menos intentarlo. Al Cálculo de Probabilidades habría que asignar el calificativo de inagotable, como demuestra el desarrollo explosiva de la Teoría de la Información, cuya aplicabilidad puede considerarse ‘universal’, en el sentido de haber accedido a todo campo del conocimiento humano. Sin embargo, los modelos probabilísticos pueden ser simples a veces, y en ocasiones extraordinariamente complejos. Y sin duda la complejidad, no sólo en cuanto a comprensión sino en cuanto a la descripción de un campo físico cuantizado, cuyo análisis sea abordado desde un enfoque estocástico, va a estar ciertamente más cercano al segundo escenario, el de la gran complejidad. En cualquier caso, el intento loable, envuelto en un cúmulo de interrogantes, de construir una teoría de Gravedad Cuántica Estocástica, resulta ciertamente estimulante, lo que justifica la referencia que a ella se hace en el capítulo introductorio de esta memoria. Las dificultades que se le deben suponer a esta teoría (este es un juicio del autor) se basan, no tanto en que después de varias décadas no están clarificados los objetivos alcanzados ni la validez de las soluciones obtenidas (si esto hubiese ocurrido), como en las dudas que genera la compleja y casi inmanejable formulación analítica, incluso manteniendo un marco exclusivamente gaussiano, lo que puede ale-

jarla, en un grado desconocido, de una realidad que requiere seguramente una estructura probabilística más abierta que contemple una distribución estructuralmente ‘mayor’ ¿cuánto?, para poder afirmar que la aproximación alcanzada, o a alcanzar, es suficiente.

La cuestión de la validez de las soluciones de una teoría es de gran importancia, por una lógica elemental. Y siempre ha sido, y sigue siendo, un problema para las diferentes teorías que han ido entrando en la gran familia de Teorías Relativistas, Cuánticas y Clásicas, desde la aparición de la primera teoría de Relatividad General de Einstein-Grossmann en 1915. Resulta curioso constatar cómo la aceptación o no de unas soluciones (cuando éstas han sido conseguidas) por la comunidad científica, no proviene sólo de una compatibilidad exigible con los datos observados o experimentales, sino también, a veces, de la propia concepción ideológica de los físicos teóricos acerca del universo (o sea, no ya sólo del análisis sobre cómo se comporta la naturaleza sino sobre cómo debería comportarse según posiciones filosóficas personales, habiendo sido algunas de ellas, aunque seriamente argumentadas, calificadas como ‘fantasiosas’ [47, 112] por un sector de físicos teóricos). No obstante, en opinión del autor de esta memoria, este último rasgo de la investigación tiene un efecto claramente positivo en el desarrollo de la misma, porque ha propiciado la creación de una diversidad de modelos cosmológicos y ha enriquecido el debate sobre la validez de las diferentes cosmologías (a veces muy distintas en sus fundamentos), reforzando en cada momento aquéllas que han gozado del respaldo de los datos observacionales. El gran problema que presenta esta última cuestión es, de nuevo a juicio del autor, que el conjunto de información sobre el universo, siendo inmensamente grande, resulta insuficiente, por ahora, si somos conscientes de que un 95 por ciento del contenido material del (hasta el momento presente) universo conocido, o sea, la materia oscura y la energía oscura, cuya existencia es indudable y sus efectos constatados, es en la actualidad paradójicamente desconocida en cuanto a su estructura (el desconocimiento acerca de la energía oscura es muy superior al relativo a la materia oscura, sobre la que se analizan actualmente varias hipótesis).

Una Teoría de la Gravedad Cuántica Estocástica es heredera (no la única) de la Gravedad Cuántica Semiclásica de Einstein y, por tanto, del propio modelo original de Gravedad Clásica de Einstein. Por tanto, la validez de las soluciones de tal teoría llevaría implícita la validez de las teorías predecesoras (como casos particulares de ésta) y es augurio, por tanto, de que la teoría se mueva, si no por el camino correcto, sí al menos por una senda fértil que puede proporcionar unos resultados parciales útiles. Éste es un proceso

muy frecuente en el crecimiento de la investigación, y en este contexto se ha intentado desarrollar esta memoria, con la Gravedad Cuántica Estocástica como lejana referencia.

Si bien la Gravedad Cuántica Estocástica no es una teoría que goce de un interés generalizado en el ámbito de la Física Teórica debido a las dudas provocadas por su planteamiento inicial (contrariamente a lo que sucede con teorías como la Gravedad Cuántica de Bucles y la Gravedad Cuántica de Cuerdas [92, 62], que han despertado importantes expectativas), ha proporcionado algunos desarrollos analíticos de interés y ha merecido la mención expresa en algunas referencias bibliográficas relevantes sobre Gravedad Cuántica (por ejemplo, [62]). Al estar basada en un término complementario, aditivo, gaussiano, de Langevin (en un intento de capturar el efecto de las fluctuaciones cuánticas de la materia), puede decirse que la Gravedad Cuántica Estocástica mantiene un nivel de simplicidad (al margen de las dificultades analíticas), a expensas de una posible, y probablemente necesaria, mejora en el futuro.

El término gaussiano de Langevin añadido a la teoría Semiclásica, dotando a ésta de un carácter estocástico, no se ha sometido, hasta donde el autor de esta memoria conoce, a un análisis informacional suficiente y aconsejable que evalúe su validez en términos de incertidumbre. Si esto es prematuro por el estado actual de desarrollo de la teoría, en algún momento futuro debería ser exigible. El uso de un término de Langevin ha sido frecuente en diferentes teorías a lo largo de la historia de la física moderna, siempre con el fin de aportar a esas teorías un carácter estocástico en un contexto clásico, aplicado idóneamente a aquellos sistemas sometidos a alguna perturbación debida a causas diversas (internas o externas) al sistema, aunque interactuantes con este. Este hecho marca una diferencia fundamental respecto a la utilización de dicho término orientada a captar de algún modo eficaz las fluctuaciones cuánticas, cuyo origen no es externo, sino interno en todo caso, y esencial, en cualquier campo físico.

Una teoría de Gravedad Clásica Estocástica no tendría ninguna relación, en principio, con una teoría de Gravedad Cuántica Estocástica, ya que el origen del comportamiento estocástico es muy distinto. Sin embargo, la metodología analítica utilizada en ambos casos podría tener algunos aspectos compartidos. Cabe afirmar que un análisis en el marco de la Gravedad Estocástica Clásica puede propiciar la extrapolación de algunos conceptos hasta el ámbito cuántico, es decir, que podría constituir, con las evidentes reservas, un puente de transición desde ‘lo clásico estocástico’ hasta ‘lo cuántico’, sin

olvidar los aspectos diferenciales esenciales.

Cualquier teoría que modifique en algún aspecto la Teoría Relativista General original, resumida en la sucinta expresión básica $G = kT$, se puede considerar como una Teoría Gravitacional alternativa. Una versión estocástica de esta expresión debe ser interpretada como la igualdad de dos miembros (el de la izquierda que describe la geometría del espaciotiempo) y el de la derecha (que describe la distribución de la materia), que se comportan como magnitudes no determinísticas sino aleatorias. Los intentos de aleatorización clásica han sido diversos, ya que diversas son las magnitudes implicadas en la expresión básica de Einstein, incluyendo la constante k , denominada constante gravitacional de Einstein, que aglutina algunas constantes universales como la constante G de gravitación universal o la constante c (velocidad de la luz). En [72] se expone una metodología que propone una hipotética naturaleza aleatoria de G (que pasa a ser considerada como una variable aleatoria, cuyo valor medio es la constante de gravitación histórica). Sin embargo, en la casi totalidad de teorías Gravitacionales las constantes universales son consideradas como estrictamente constantes, y así parece que deba ser.

Al margen del hecho cuestionable (juicio del autor) de dotar de un carácter aleatorio a las constantes universales (lo que, en general, no tendría mucho sentido) o a algunas magnitudes fundamentales de la física, como la masa o la carga eléctrica, su utilidad de cara a un proceso de cuantización de un sistema físico sería prácticamente nula. De hecho, en los campos en los que se ha alcanzado una teoría cuántica válida (Electrodinámica Cuántica, Cromodinámica Cuántica,...) las magnitudes básicas de la materia (masa o carga eléctrica) y muy especialmente las constantes características, han jugado un papel fundamental en el proceso de cuantización del campo, o sea, de construcción de la teoría cuántica del campo, ajenas a cualquier consideración estocástica (clásica o cuántica) sobre su naturaleza.

La cuantización afecta, como es sabido, a ciertas magnitudes dinámicas (en determinadas circunstancias, no siempre), como el impulso o la energía de una partícula o un conjunto de partículas. Por tanto, en el camino hacia una aproximación a la cuantización de un sistema gravitacional, parece razonable iniciar el proceso de aleatorización partiendo del tensor de stress, o alternativamente partiendo del tensor de Einstein. En efecto, dejando definitivamente indiscutido que k es una constante, si la materia fluctúa, la geometría también debería hacerlo en respuesta, y viceversa. Esto debe cumplirse tanto si las fluctuaciones son de origen clásico como si lo son de origen cuántico. El hecho histórico de empezar por aplicar la modelización estocástica al tensor

de stress, para intentar encontrar seguidamente la reacción simultánea en la geometría espaciotemporal, responde, a juicio del autor, a razones como la complejidad analítica derivada de la naturaleza significativamente no lineal de la dependencia del tensor de Einstein respecto a la geometría espaciotemporal o incluso a la propia dificultad de comprensión (en el sentido de asimilación por la mente humana) del comportamiento fluctuante de la geometría frente a la del comportamiento fluctuante de las magnitudes dinámicas descriptivas de la materia (impulso y energía), hecho este último sobre el que, con indudable dificultad, se ha venido haciendo un continuado ejercicio de aproximación en el ámbito de la Física Cuántica.

En el marco de este amplio panorama, esta memoria pretende ser un primer pilar, bien definido y bien ubicado, incorporando los elementos suficientes, aunque desde un nivel de simplicidad siempre aconsejable en el arranque de un proceso que implica la incorporación de una gran cantidad de conceptos avanzados que llevarían necesariamente, como veremos, a un alto grado de dificultad analítica. De nada servirían las propuestas contenidas en esta memoria si el punto de partida no es suficientemente válido. Valoraremos este planteamiento de partida a partir de varias cuestiones básicas. ¿Es adecuado diseñar un modelo cosmológico gravitacional estocástico mediante un término aditivo de Langevin agregado al tensor de stress?. ¿Es válido proponer un tensor de stress estocástico diagonalizado libre de restricciones?. ¿Son trasladables los resultados a un tensor geométrico que obviamente debe cumplir ciertas condiciones de conservación?. ¿Son aplicables en términos de utilidad las medidas teórico-informacionales al modelo estocástico propuesto? Las respuestas a estas cuestiones justifican el desarrollo de esta memoria y al mismo tiempo sugieren un elevado número de líneas de investigación futura que mejoren la aproximación a una descripción lo más adecuada posible a la realidad física.

La deriva seguida por esta memoria en su desarrollo ha llevado a la incorporación progresiva de los conceptos teórico-informacionales como complemento imprescindible en el análisis avanzado de un sistema físico con una componente estocástica, cuyo impacto en relación con la evolución determinística del sistema (descrita por el valor esperado de las magnitudes implicadas) hace que realmente el sistema físico mantenga sus características fundamentales (las propias de un contexto determinístico), pero que al mismo tiempo esté sometido a una perturbación no despreciable, cuyo análisis aporta un valor añadido.

El término ‘perturbación’, reiteradamente utilizado en esta memoria, tie-

ne su tradicional significado que lo asocia a un cambio moderado o pequeño. En nuestro caso, de carácter estocástico. Y el análisis teórico-informacional constituye un complemento constructivo. En consecuencia, en su formato final, esta memoria constituye un ejercicio razonable de aplicación de la Teoría de la Información a un sistema físico (tetradimensional, acorde con la geometría espaciotemporal de nuestro universo), siendo el sistema físico elegido un campo gravitatorio, por su relevancia fundamental en la modelización cosmológica y los retos que plantea a la investigación en el marco de la Física Teórica. Con esta perspectiva, se hace más fácil responder a las cuestiones previamente planteadas, en el sentido de justificar un escenario de trabajo relativamente simple.

El denominado Modelo Cosmológico Estándar del Universo, al que se hizo referencia en el capítulo introductorio de esta memoria, es el que la mayoría (no la totalidad) de la comunidad de físicos teóricos acepta, principalmente por su alto grado de compatibilidad con los fenómenos observados (y constatados) en nuestro universo, como la detección del fondo de radiación de microondas del universo o la posible identificación indirecta (pendiente de confirmación) del bosón de Higgs o las ondas gravitacionales. Al mismo tiempo es mucho lo que falta por identificar, como la materia oscura (que representaría el 20 por ciento de la materia-energía del universo), responsable de un cierto grado de ‘frenada’ en la expansión del universo, y la energía oscura (de naturaleza totalmente desconocida, conteniendo un 75 por ciento de toda la materia-energía), que sería el factor causante de una expansión acelerada del universo a grandes distancias cosmológicas.

En este contexto, se ha considerado aconsejable recientemente la reincorporación provisional de la constante cosmológica Λ de Einstein, descartada en su momento por el propio Einstein cuando la evidencia de la expansión, respaldada por los datos aportados por Hubble y otros, la hicieron, a su criterio, innecesaria. La ecuación original de Einstein-Grossmann aportó unas primeras soluciones ‘no satisfactorias’ para Einstein, porque permitían una evolución expansiva o contractiva del universo (en cualquier caso, no necesariamente estacionaria), algo que era contrario a la visión ‘panteísta’ de Einstein de un universo inmutable y eterno, lo que la evidencia experimental refutó definitivamente. Esto suponía el cuestionamiento de un modelo sencillo y elegante, que además exhibía unas propiedades de gran importancia que lo hacían aún más aceptable. La más importante de esas propiedades era (y sigue siendo) la propiedad de conservación del tensor de Einstein, consecuencia de las identidades de Bianchi contraídas, que derivan de las ca-

racterísticas del tensor de Riemann, descriptor de la estructura geométrica curva del universo como una variedad tetradimensional no-euclidiana, con un determinado grado de curvatura en cada punto del espaciotiempo en función de la distribución de la materia.

La incorporación de la constante cosmológica en la forma original avalada por Cartan (1923) [15], mediante un término ‘geométrico’ aditivo Λg , siendo g el tensor que representa la geometría local espaciotemporal, de tal modo que el modelo evolucionado adoptaba la forma $G[g] + \Lambda g = T[g]$, permitía mantener la ley de conservación (4 restricciones de divergencia nula sobre las 10 ecuaciones fundamentales del modelo) en el miembro de la izquierda, lo que de forma automática heredaba el tensor de stress de energía-momento (miembro de la derecha). Bien es cierto que la consideración en el término Λg de la constante cosmológica no es obstáculo, o sea, ‘no molesta’, ya que su valor puede hacerse, dado el caso, igual a 0, si la evidencia experimental así lo aconsejase. Sin embargo, durante una centuria, y sobretodo, en la segunda mitad del siglo XX, tras varias décadas de un cierto ‘deficit de interés’ hacia la Teoría Gravitatoria Relativista, la teoría resurgió con fuerza, impulsada particularmente por las ‘escuelas’ de Princeton (liderada por J. Wheeler [124]) y London (impulsada por H. Bondi [11]), y se crearon algunos modelos cosmológicos con sólidos fundamentos, y enfoques alternativos respecto al comportamiento de la materia en el universo (representada por el miembro derecho de dichos modelos).

Aunque con el tiempo los datos observados restaron valor a algunas de ellas, como las basadas en el ‘Principio Cosmológico Perfecto’ o ‘Steady State’ (Modelos de Bondi-Gold y de Hoyle-Narlikar) [11, 54, 55, 123], según las cuales el universo, siendo expansivo, no requiere un principio y un final de su existencia, como sugiere el Modelo Estándar, su descarte relativo provisional en favor de un Modelo Estándar ‘forzado’ con una renacida constante cosmológica acerca de la que no se conoce bien qué es lo que captura exactamente, ofrece muchas dudas respecto al modelo cosmológico que en un futuro se pueda decantar en favor de una descripción precisa de las características, una vez identificadas, de la fracción de la materia universal detectada que en la actualidad no es conocida, así como sobre el cumplimiento o no de algunas eventuales leyes de conservación, y en cualquier caso, sobre qué propiedades o restricciones deberían considerarse.

De hecho, las cosmologías alternativas mencionadas (habría algunas otras como la cosmología de Jordan, que trata de un modo específico la cuestión de la conservación [123]), cuya naturaleza es determinística en su formula-

ción inicial, contemplan un tensor de stress de energía-momento que no es conservado. Si embargo, dado que el tensor de Einstein debe ser siempre conservado para cualquier geometría, es necesario considerar en esas cosmologías unos términos tensoriales correctores complementarios que preserven la ley de conservación de la geometría. Estos términos correctores no constituyen un simple recurso matemático, sino que representan de forma idónea el efecto de creación continua de la materia-energía del universo en cada punto espaciotemporal del universo durante su proceso expansivo. Por tanto, y recordando que nos mantenemos en una formulación determinística, tendríamos de un modelo general $G[g] + \Lambda g = T[g] + C[g]$, donde $C[g]$ es un tensor (contratérmino) obtenido por derivación dos veces covariante respecto a un cierto campo escalar C . Por tanto, en tal modelo la suma $T[g] + C[g]$ debería ser conservado, pero no necesariamente cada uno de los dos tensores por separado (de hecho, así se considera en las mencionadas cosmologías).

Por otra parte, actualmente, la constante Λ no tiene el sentido que, buscado por Einstein para ‘estabilizar’ el universo, le dio Cartan en 1923, por lo que sus características (constante o no), así como su incorporación a cualquier modelo cosmológico actual, presenta algunas dudas en función del desconocimiento acerca de la naturaleza de la mencionada elevada fracción de la materia oscura y la energía del universo. En cualquier caso, este modelo general nos retrotraería al modelo original simplemente haciendo $\Lambda = 0$ y $C = 0$, con lo que T recuperaría la propiedad de conservación.

En este punto es positivo tener en cuenta que la buena acogida de la ley (relativista) de conservación de T tiene que ver con que dicha ley vendría a ser actualmente la versión gravitacional de la ley (clásica) de conservación de la energía total de un sistema físico cerrado. Al igual que un sistema físico clásico que no es cerrado e intercambia energía con otros sistemas externos, no conserva necesariamente su energía total (aunque sí se conservaría la energía del sistema conjunto si dicho sistema conjunto es cerrado), el tensor de stress, compensado o no con otros tensores correctores, no sería conservado si puede ser perturbado por una o varias fuentes externas que actúen sobre él. En otros términos, en una cosmología general estocástica clásica de la forma $G[g+h] + \Lambda(g+h) = T[g+h] + C[g+h] + \xi[g]$, donde $\xi[g]$ es un término gaussiano de Langevin, con origen en fuentes perturbadoras externas, y h es la perturbación estocástica respecto a g , mediante la cual, en un primer orden de aproximación, la geometría espaciotemporal responde al impacto del tensor de stress estocástico ξ , parece claro que, aunque ξ sea sujeto de alguna posible restricción de cierto orden, este tensor estocástico complementario ξ

no tendría por qué ser conservado. De hecho, si el sistema no es cerrado, el término global $T+C+\xi$ para dicho sistema no tiene por qué verse restringido por una condición de divergencia nula.

Por tanto, habría un conjunto suficiente de razones para considerar inicialmente a ξ , sin perjuicio de futuras mejoras, como un tensor libre de divergencia (así como de la restricción de traza nula aplicable a un campo conforme), manteniendo una estructura de tensor estocástico tetradimensional libre de baja intensidad, en el sentido de que su fluctuación, o sea, su dispersión, es de un nivel significativamente inferior al valor medio de la magnitud T .

Esta memoria pone de manifiesto un conjunto de conclusiones que han sido destacadas, tanto implícita como explícitamente a lo largo de su desarrollo, y que, en última instancia, se resumen en las respuestas que se han dado a un planteamiento general: la necesidad, respaldada por una extensa gama de recursos metodológicos disponibles, de aplicar la Teoría de la Información en los más diversos campos de que se ocupan las ciencias de la naturaleza. Se trata, sin duda, de una asignatura pendiente de la investigación. Y en esta memoria la ocupación principal ha sido la de evidenciar ese objetivo, llevándolo a la práctica con el análisis, que ha pretendido ser exhaustivo, de aplicación a un sistema físico dotado justificadamente de un carácter estocástico, extensible a cualquier otro sistema, lo que ha generado un estímulo de aplicación de las medidas informacionales históricamente consolidadas, así como de creación de unas medidas adicionales complementarias, cuya utilidad ha quedado evidenciada a partir de un robusto soporte teórico así como de un amplio conjunto de casos de aplicación ilustrativos. De este modo se ha conseguido, o al menos se ha intentado, remarcar el carácter imprescindible de la aplicabilidad de los criterios informacionales para validar cualquier teoría descriptiva de un campo de conocimiento construido por la mente humana.

El análisis global realizado ha llevado, probablemente estimulado por las características del sistema físico base del estudio, a encontrar y proponer un conjunto de medidas informacionales que complementan muy positivamente los resultados ofrecidos por las medidas teórico-informacionales convencionales consolidadas. Estas nuevas medidas han permitido facilitar la visión y la medición del efecto producido en cuanto a modificación de la incertidumbre cuando se dispone de una información acerca de un campo estocástico que describe el comportamiento perturbado de las magnitudes fundamentales del sistema físico. Tanto las medidas acerca de la incertidumbre y de sus variaciones asociadas a diversos escenarios, como los criterios con que

se han acompañado para dar soporte a su correcta aplicación, han permitido obtener unos resultados en forma sencilla y fácilmente interpretable. La sencillez y la facilidad de interpretación han alcanzado a las propias medidas informacionales convencionales, que han adoptado expresiones analíticas enriquecidas con conceptos como ‘tensor y factor de distancia’, ‘tensor de carga de correlación’, ‘factor de deformación covariante’,..., incrementando la interpretabilidad de los resultados e incluso la perspectiva más amplia del conjunto de propiedades asociadas.

En este sentido, el conjunto de casos prácticos incluidos en la Parte III respalda las afirmaciones reflejadas en esta sección, ya que los conceptos informacionales mencionados son aplicados de forma exhaustiva, con lo que queda de manifiesto su utilidad en una multiplicidad de escenarios analizados.

16.2. Líneas abiertas de investigación

Como complemento a lo expuesto en la sección anterior, enumeramos a continuación algunas de las posibles líneas de investigación a partir de los conceptos y desarrollos expuestos en esta memoria. El contexto, convenientemente simplificado en el arranque de una modelización general innovadora, sugiere que el número de líneas abiertas, enfocadas a futuros desarrollos complementarios, sea elevado. Los frentes investigadores subsiguientes son muchos, amplios, y de progresiva dificultad. También, como es lógico, de progresiva mejora de los modelos inicialmente propuestos y desarrollados.

1.- Empezaremos por recordar y comentar algo importante subyacente en la memoria: la consideración de que, en un caso general, el tensor ξ es una matriz estocástica cuadrada de orden 4, con un núcleo de covarianza entre dos puntos $N_{ab}^{cd}(x, x')$, definido positivo, que posee 256 elementos, hecho que debería ser tenido en cuenta en líneas de investigación que pretendan captar, no sólo el comportamiento estocástico de las magnitudes, sino un comportamiento geometrodinámico completo en cualquier caso. La diagonalización del tensor de stress estocástico es un procedimiento realizado en el marco de la teoría de matrices estocásticas, que permite asimilar dicho tensor a un vector tetradimensional y el núcleo de covarianza entre dos puntos a una matriz cuadrada de orden 4, lo que a su vez permite manejar, en un contexto simplificado notacionalmente, los mismos conceptos que se aplicarían en un caso general. Este escenario es compatible con un modelo estocástico simplificado especial-relativista como el que se ha diseñado en el arranque de la memoria. Por ello, una primera línea de investigación abierta en esta memoria consiste

en la generalización del proceso ξ_{ab} markoviano resultante de la acción estocástica ejercida por una fuente externa, es decir, llevar a cabo el análisis basado en un modelo general markoviano $\xi_{ab}(x) = A_{ab}^{cd}(x, x_a) \xi_{cd}(x_a) + \varepsilon_{ab}(x)$, donde A_{ab}^{cd} es un tensor de propagación de correlación estacionario con dos coordenadas contravariantes y otras dos covariantes. Es obvio que en este caso, como en el caso simplificado que se ha desarrollado, el hecho de poseer información sobre el punto x_a reduce la incertidumbre en el punto x . La obtención de las medidas informacionales debe basarse, como se realizó en esta memoria, en las características del tensor condicional $\varepsilon_{ab}(x)$ y la comparación con las del tensor incondicional $\xi_{ab}(x)$, en cuyo procedimiento juegan un papel imprescindible y fundamental los tensores $A_{ab}^{cd}(x, x_a)$ y $N_{ab}^{cd}(x, x_a)$, de propagación de correlación y núcleo de covarianza, respectivamente. La generalización a un número k de fuentes se haría definiendo el proceso agregado $\xi_{ab}(x) = \sum_{j=1}^k \xi_{j_{ab}}(x) = \sum_{j=1}^k A_{j_{ab}}^{cd}(x, x_a) \xi_{j_{cd}}(x_a) + \varepsilon_{ab}(x)$, donde $\varepsilon_{ab}(x) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_{j_{ab}}(x)$.

2.- La consideración de diferentes cosmologías debe suponer la aplicación, en algún modo, de las restricciones que, en una medida que debe ser determinada en cada caso, afecten a la componente estocástica del tensor de stress. En ese caso, no sólo debe contemplarse el hecho de que el tensor global de stress deba o no ser sujeto de la restricción de divergencia dependiendo de la cosmología elegida, sino el hecho de que el tensor estocástico de stress es una componente del tensor global, lo que, como anteriormente quedó indicado, no tendría por qué recaer de forma individualizada en cada componente. A esto hay que añadir que, en un contexto clásico, el origen de la perturbación estocástica es exógeno al sistema objeto de estudio, por lo que evidentemente nuestro sistema no es cerrado y 'gana o pierde' materia-energía en función del impacto 'neto' de la perturbación externa. Para un sistema cerrado (por ejemplo, un fluido perfecto), en el marco de una cosmología clásica como $G = kT$, la ley de conservación (que, recordemos, nace de las propiedades de la geometría, o sea, del tensor de Riemann) del tensor de stress se traduce en un conjunto de 4 restricciones $\nabla^a T_{ab} = 0$ aplicables al sistema de 10 ecuaciones de la cosmología. El operador ∇^a es el operador derivada covariante, que incluye un término (que implica a los símbolos de Christoffel no nulos que describen el efecto de la curvatura en las trayectorias) que contempla un espaciotiempo curvo. En un caso aproximado más simple en que se suponga un espaciotiempo plano de Minkowski, la condición de divergencia se reduciría a $\partial^a T_{ab} = 0$, donde ∂^a es el operador derivada normal. Esta cuestión se analiza más detenidamente en el Apéndice H.

En un caso general, el modelo cosmológico contemplará una estructura más o menos compleja, determinística o estocástica, del tensor T . Recordemos que cuando existe un conjunto de sistemas de modo que uno de ellos, el sistema objeto de estudio, resulta perturbado por los sistemas restantes, la restricción de divergencia es aplicable al conjunto global (siempre que, y esto es importante, dicho sistema conjunto no sea afectado, influido, perturbado en definitiva, por algún otro sistema externo). Podríamos expresar $G_{ab}[g+h] = \sum_{j=1}^k \{T_{jab}[g+h] + C_{jab}[g+h]\} + \xi_{ab}[g]$, donde los términos C_{jab} son posibles tensores correctores. No se ha incorporado un término que contenga la constante cosmológica, aunque podría incluirse bajo diferentes hipótesis acerca de dicho término. Como vemos, la ley de conservación de la geometría, trasladable al miembro de la derecha de esta cosmología generalizada como posible futura hipótesis de trabajo, no es aplicable necesariamente a cada uno de los diversos términos contenidos en ese miembro.

3.- En la memoria se hace alusión a puntos que pertenecen a una geodésica dada y también a puntos que están causalmente conectados. Aunque relacionados, no son conceptos idénticos, aunque por un abuso de expresión, y dando por entendido el contexto del análisis, se puedan utilizar a veces de forma indistinta. La conexión causal es un concepto más débil, o si se prefiere, más amplio, en el sentido siguiente. Supongamos que una partícula ocupa un punto x del espaciotiempo. Por dicho punto pasa una geodésica, que, en el caso de una geometría de Minkowski, es una línea recta que representa la línea del universo de la partícula. Si la partícula, con una determinada velocidad, evoluciona libre de cualquier acción externa, seguirá su curso a través de dicha geodésica. Sin embargo, a cada punto de la geodésica se le asocia un, así denominado, ‘cono de luz’, que es una figura cónica en un espacio tridimensional, aunque la denominación es una ‘proyección’ desde el espacio tetradimensional para facilitar su visualización. El punto seleccionado es el vértice inferior del cono cuyo eje es la geodésica a que el punto pertenece si la partícula permaneciera en reposo. La superficie externa del cono forma un ángulo de 45 grados con la geodésica, ya que dicha superficie encierra todos los posibles puntos pertenecientes al futuro del punto que pueden ser ocupados por la partícula si se produjera alguna acción externa que le hiciera seguir una trayectoria desviada respecto a la geodésica ‘en reposo’. Por tanto, dos puntos espaciotemporales están causalmente conectados cuando es posible acceder a uno de ellos (el que pertenece al futuro) desde el otro (el que pertenece al presente), sin incumplir una ley fundamental de la física teórica como la que impide que la velocidad de la luz sea superada. Los puntos que

están fuera del cono de luz son puntos no conectados causalmente, porque una partícula nunca podría viajar de uno a otro sin superar la velocidad de la luz.

En el contexto simplificado de esta memoria, los puntos en que se localiza la información ocupan una misma geodésica real y, por tanto, están causalmente conectados. Una línea de investigación de indudable interés, que obliga a ser especialmente precisos en el concepto de propagación de la correlación y a una utilización correcta y coherente de la métrica, consiste en generalizar el modelo considerando que se dispone de información en puntos que, estando causalmente conectados, son accesibles mediante una acción forzada externa, e incluso ampliar el estudio al caso en que la información disponible se refiera a varios puntos entre los que exista o no conexión causal. La imposibilidad de una conexión causal indica que un determinado evento físico no puede producirse (p.e. una partícula dada nunca podrá ocupar los dos puntos), pero ello podría no impedir, en principio, desde una amplia perspectiva de modelización, que en un campo aleatorio que se extiende en toda una región continua y compacta del espaciotiempo y que, por tanto, en términos de covarianza podría conectar a todos sus puntos respecto a un punto dado de referencia, la información en un punto arbitrario dado no pueda ser utilizada para evaluar una posible reducción de incertidumbre. Este escenario comporta cuestiones analíticas relevantes y una línea de investigación al respecto merecería ser explorada. Algunos de los resultados recogidos en esta memoria proporcionan ideas que constituirían un punto de partida en esa posible línea de investigación, una de las más sugerentes a seguir. Acerca de estas cuestiones se proponen algunas ideas básicas, a validar en mayor profundidad, en el Capítulo 8, en el que, en una modelización propuesta simplificada se hace la hipótesis de que la inconexión causal nunca comporta una reducción de la incertidumbre.

Como se ha visto en el Capítulo 3, dado un punto x de un espaciotiempo de Minkowski, y otros dos puntos equidistantes respecto a x , que podemos denominar x_a (anterior) y x_d (posterior), los núcleos de covarianza entre los dos puntos, atrasado y adelantado, respectivamente, son mutuamente transpuestos, cuando el proceso inducido por una única fuente externa es markoviano. O sea, la simetría espaciotemporal (pasado versus futuro) produce una transposición del núcleo (recordemos que tanto en el Capítulo 3 como en estas líneas se está considerando, al igual que a lo largo de esta memoria, un modelo simplificado diagonalizado). En otras palabras, si sólo se dispone de la información de uno de los puntos (pasado o futuro) pertenecientes a una

geodésica dada que pasa por x , el grado de reducción de la incertidumbre en x es la misma, pero los núcleos de covarianza no son coincidentes, dado que los puntos x_a y x_d se encuentran geoméricamente en oposición respecto a x . De ahí el efecto de transposición del tensor de covarianza como resultado de la transformación simétrica.

Adicionalmente, como se ha visto en el Capítulo 4, si se dispone de la información en ambos puntos, x_a y x_d , la reducción de la incertidumbre no es menor que si sólo se dispone de la información acerca de uno de ellos (esta afirmación es válida incluso cuando, perteneciendo los tres puntos a la misma geodésica, la posición de x_a y x_d respecto a x no es simétrica, o sea la distancia espaciotemporal entre x y x_a es diferente de la distancia entre x_d y x). Por consiguiente, resulta evidente que, si, dado x , se dispone de la información en x_a (supongamos anterior a x), el hecho de disponer de la información adicional en un punto x_b perteneciente a una geodésica diferente a la que une a los puntos x y x_a aporta un grado de reducción de la incertidumbre en x . Existe, por tanto, una transformación que permitiría pasar del núcleo de covarianza entre x y x_a al núcleo de covarianza entre los puntos x y x_b . Obviamente, cualquier punto anterior a x_b en su geodésica, al igual que ocurre con cualquier punto anterior a x_a , no aportaría reducción de incertidumbre cuando el proceso estocástico inducido es markoviano. En este punto es conveniente recordar que: a) la transformación de un núcleo a otro es tal que cuando los dos puntos se encuentran en oposición temporal, ambos núcleos son mutuamente transpuestos, y b) en dicha transformación hay que tener en cuenta, y esto es fundamental, que la transformación del núcleo de covarianza debida a la transición de un punto a otro, en geodésicas distintas, es tetradimensional (más allá de que, por simplicidad, el cono de luz suele visualizarse en los textos sobre Relatividad como una figura geométrica tridimensional, con, solamente, dos dimensiones espaciales y una temporal).

En resumen, partiendo de un punto espaciotemporal dado, en el que el valor esperado del tensor de stress es conocido, aunque no el valor de dicho tensor, uno de los objetivos clave de la memoria es la cuantificación de la incertidumbre como consecuencia del hecho de existir una información disponible asociada a otro punto. El propósito del trabajo está basado, en una fase inicial, en la hipótesis de que el valor del tensor de stress es conocido en un segundo punto, perteneciente a un entorno del punto dado, que está causalmente conectado con éste (y ambos pertenecientes a la misma geodésica espaciotemporal). Nos detendremos en este escenario para hacer una breve reflexión. Supongamos que el campo gravitacional objeto de estu-

dio es suficientemente débil, permitiendo así la validez de no considerar, como hipótesis inicial, los efectos de curvatura, acorde con una plataforma básica de un campo gravitacional minkowskiano (una modelización más avanzada no consideraría esta hipótesis). Sin embargo, en una aproximación lineal del tensor métrico, compatible con un campo gravitacional débil, podemos suponer una representación ‘levemente’ curva de dicho tensor como $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$, donde γ_{ab} es una pequeña perturbación respecto a la métrica plana. Como es conocido, una perturbación alternativa $\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \mathcal{L}_\zeta \eta_{ab}$ (donde $\mathcal{L}_\zeta \eta_{ab}$ es la derivada de Lie, respecto a un parámetro t , obtenido a partir del grupo de diffeomorfismos $\phi_t : (M, g_{ab}) \rightarrow (M, g_{ab})$, generada por un vector ζ^a) es ‘gauge’ invariante en el sentido de que γ_{ab} y γ'_{ab} corresponden a geometrías con propiedades idénticas [120]. No obstante, un campo gravitacional estocástico débil podría ser aproximado por la representación $g_{ab} + h_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} + h_{ab}$, lo que abre evidentes líneas de investigación.

Es conveniente indicar que un escenario basado en dos puntos, sean x como referencia y otro anterior x_a , causalmente conectados a través de una misma geodésica, no produce resultados diferentes entre un espacio pseudo-euclidiano de Minkowski \mathbb{M} subyacente (en el que la geometría de nuestro universo está aproximada al mínimo nivel) y un espacio lineal tetradimensional euclidiano \mathbb{R}^4 (el tiempo y el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de la física clásica, entendido como una variedad newtoniana \mathbb{N} consistente en un espacio \mathbb{R}^3 fibrado en un espacio base temporal \mathbb{R}). Sin embargo, las diferencias quedan claramente evidenciadas si el análisis se amplía con la información asociada a un tercer punto x_b (en el pasado o en futuro de x), que pertenece a una geodésica diferente. Observemos que en \mathbb{M} , con respecto al punto x de referencia, los puntos x_a y x_b pueden estar causalmente conectados o no (tales escenarios disjuntos no se producen en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$), lo que abre interesantes líneas de investigación dado el hecho de que, en cualquier caso, conocida la información en x_a y x_b , la incertidumbre en x es necesariamente menor comparada con el caso en que sólo la información en x_a está disponible. En este punto, se abren varias vías de estudio. A partir de la equivalencia entre una geodésica, o línea del universo, y la ‘vida’ de una partícula, pueden darse varios escenarios. Si suponemos que x_b y x pertenecen a una misma geodesica, el problema teórico trata sobre dos partículas geoméricamente colisionantes, lo sean o no realmente (es decir, se crucen o no sus respectivas líneas del universo). Pero se pueden describir otros escenarios en que, para algunas de ellas, las líneas del universo (geodésicas reales) de x_a y x_b (y otros puntos posibles) no contienen a x , en cuyo caso, desde el punto de vista informacio-

nal, nos enfrentaríamos a un problema más desafiante con un mayor número de partículas involucradas. ¿Cuál es la relevancia de pertenecer a diferentes geodésicas?, o ¿la de la existencia (o no) de una conexión causal?,... Algunas ideas básicas al respecto se proponen en el Capítulo 8 en el marco de una modelización propuesta simple.

Estas líneas de investigación, junto con las esbozadas en los dos puntos anteriores, no desarrolladas en la literatura sobre el tema (hasta donde el autor de la memoria conoce), sugieren estudios ulteriores de largo alcance y máximo interés, que pueden proporcionar resultados muy útiles en la investigación basada en aplicaciones de la teoría de la información a los sistemas físicos clásicos estocásticos.

4.- Tomando como referencia el punto anterior introducimos oportunamente un concepto que en algún momento y en alguna forma debe ser incorporado: la consideración de un espaciotiempo curvo, como escenario más general que el de un espaciotiempo plano de Minkowski, siendo éste un caso límite de aquél, al margen de cuestiones conceptuales fundamentales. En este caso la conexión causal tiene una interpretación similar a la del punto anterior, pero las líneas geodésicas pueden ser curvas. De hecho, lo son en general, siendo el grado de curvatura en cada punto el que corresponde a la medida del parámetro R o parámetro de curvatura, incluido en la expresión final del tensor G de Einstein mediante un término complementario al tensor de Ricci (lo que inicialmente permitió corregir el comportamiento anómalo de una primera versión fallida de la ecuación de Einstein). En efecto, $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$, donde R_{ab} es el tensor de Ricci (contracción del tensor de Riemann) y R , el parámetro de curvatura, es la contracción de R_{ab} [123, 118]. En un punto x del espaciotiempo hay una mayor o menor curvatura en la medida en que R se aleja del valor 0. El concepto de ‘cono de luz’ se mantiene, pero los conos no se desplazan paralelamente a sí mismos debido a que la geodésica no es una línea recta. Este sería un concepto relevante a incorporar en futuras líneas de investigación, y eventualmente en conexión con las propuestas del punto anterior. En esta línea tendrá una importancia fundamental el concepto de elemento curvo de volumen. El factor conversor f^{-1} , que permite pasar de utilizar un elemento de volumen construido sobre una base coordenada curva ϵ_{abcd} a un elemento de volumen construido sobre una base coordenada plana e_{abcd} (cuyos valores son ± 1), tal que $\epsilon_{abcd} = f e_{abcd}$, viene dado por $f = \sqrt{-g}$, siendo g el determinante de la métrica (nunca positivo) [123, 118].

5.- Cualquier perturbación que se considere que afecta al tensor de stress de un sistema tiene que tener necesariamente un reflejo en la geometría

espaciotemporal. De aquí la incorporación de la perturbación estocástica métrica h_{ab} , en primer orden de aproximación en el modelo, dado un punto x , $G_{ab}[g_{ab} + h_{ab}] = T_{ab}[g_{ab} + h_{ab}] + \xi_{ab}[g_{ab}]$. Por tanto, h_{ab} es función del tensor ξ_{ab} que podría expresarse en la forma [58] $h_{ab}(x) = h_{ab}^0(x) + k \int_{x'} d^4x' \sqrt{-g(x')} G_{ab}^{cd}(x, x') \xi_{cd}(x')$, siendo G_{ab}^{cd} el tensor retardado de Green y $h_{ab}^0(x)$ un término que contiene la información acerca de unas condiciones iniciales.

De acuerdo con la expresión anterior, encontramos en la referencia citada la expresión del núcleo de covarianza H_{abcd} de la perturbación métrica h entre dos puntos x e y , tal que $H_{abcd}(x, y) = \langle h_{ab}(x)h_{cd}(y) \rangle$. Dicha expresión es $H_{abcd}(x, y) = H_{abcd}^0(x, y) + k^2 \int_{x', y'} d^4x' d^4y' G_{ab}^{ef}(x, x') N_{efgh}(x', y') G_{cd}^{gh}(y, y')$, donde $H_{abcd}^0(x, y) = \langle h_{ab}^0(x)h_{cd}^0(y) \rangle$.

Sobre una base analítica más compleja, el análisis informacional debe trasladarse al campo estocástico inducido en la métrica espaciotemporal y representado por la perturbación estocástica h , cuyo núcleo de covarianza debe estar relacionado con N , el núcleo de covarianza del tensor de stress. Siendo importante este análisis, el gran valor añadido que aportaría radica en la comparación de resultados obtenidos en los ámbitos geométrico y material, ya que permitiría obtener una evaluación objetiva de la validez de la aproximación de primer orden realizada en la modelización de la métrica estocástica.

6.- En todos los casos, tanto a lo largo de la memoria como en los comentarios incluidos en los puntos anteriores de esta sección, se han considerado modelos discretos, o sea, modelos formulados en formato de ecuaciones en diferencias finitas y no en la forma de ecuaciones diferenciales. Aunque este planteamiento ofrece evidentes ventajas (el paso del ámbito discreto al continuo siempre conlleva la consideración de cuestiones fundamentales especiales), no hay que olvidar que el campo físico de aplicación, bien sea el elegido en esta memoria, como en el caso de cualquier otro campo físico, las magnitudes implicadas son siempre de naturaleza continua. La física, en general, se ocupa de fenómenos que, prácticamente en la totalidad de los casos, son de carácter continuo. La modelización estocástica en formato continuo aporta evidentemente un determinado grado adicional de dificultad analítica. Una línea de investigación sugerida consiste en utilizar una modelización continua de los tensores aleatorios utilizando los conceptos aportados por el Cálculo Diferencial Estocástico.

En cualquier caso, un modelo discreto estocástico asociado a un sistema físico debe ser necesariamente la versión discreta de un proceso continuo sub-

yacente, por lo que teniendo esto presente, hay que imponer determinadas restricciones a los tensores del proceso que aseguren esa compatibilidad. Por ejemplo, la condición impuesta a los autovalores del tensor de propagación de correlación de adoptar valores que sean no-negativos, tienen su base en esa circunstancia, ya que un escenario distinto no tendría coherencia con la propuesta de una propagación continua de la correlación. Este punto tiene importantes implicaciones en cuanto a la utilización de un conjunto de información disponible, bien sea en uno, en varios, o en un conjunto discreto o continuo de puntos del espaciotiempo, y los subsiguientes resultados procedentes de aplicar las medidas informacionales. Por todo ello, se sugiere avanzar en esta posible línea de investigación, con el tratamiento adecuado de cuestiones tan relevantes como la curvatura del espaciotiempo o la conexión causal entre puntos arbitrariamente distanciados.

7.- Una condición, no sólo intuitivamente razonable, que se ha supuesto a cualquier modelo probabilístico aplicado al proceso estocástico que describe la componente aleatoria de un tensor, como el tensor de stress, es la condición de estacionariedad. De hecho, no se ha considerado otro posible escenario, ya que la estacionariedad de dicha componente sería compatible con una hipótesis de estabilidad del sistema físico subyacente. Sin embargo, sin renunciar a esta condición de estabilidad cuando el sistema no es perturbado, o equivalentemente, cuando su evolución es determinística, puede constituir un escenario interesante de investigación considerar que la componente estocástica del tensor de stress no sea estacionaria, empezando por considerar un campo estocástico en el que la propagación del efecto inducido fuese de tipo browniano, hipótesis que, por otra parte, es frecuente en la modelización de algunos fenómenos físicos.

Suponer que un efecto inducido requiere una modelización mediante un proceso browniano no estacionario conlleva la hipótesis de que el comportamiento propio de la fuente perturbadora no es estable, en términos estocásticos. Este aspecto diferencial, respecto a la totalidad de escenarios analizados en la memoria, sugiere que un escenario de inestabilidad estocástica constituya una línea de investigación a abordar. Aunque la inestabilidad estocástica se ha asociado tradicionalmente a una familia muy usual, y aplicada en diversos ámbitos de conocimiento, relacionada con modelos tipo browniano, o sea, procesos integrados, tales que su diferencial de primer orden es estacionario, habría otros posibles enfoques desde metodologías de desarrollo más reciente, como es el caso de los procesos con diferenciación (integración) fraccionaria, aunque, a juicio del autor, la aplicabilidad de estas últimas y las expecta-

tivas de encontrar resultados especialmente útiles, no se intuye relevante, más allá del interés que en todo caso comporta la actividad investigadora en cualquier posible dirección.

8.- Cualquier restricción aplicada a un modelo estocástico lleva implícita la posibilidad de analizar escenarios alternativos libres de tal restricción. Este es el caso de la condición unánimemente impuesta a la modelización estocástica en esta memoria consistente en que existe una correlación cruzada entre procesos inducidos por fuentes externas interactuantes entre sí, que es tetrasimultánea al nivel del ruido blanco gaussiano conjunto. Este planteamiento requiere una aclaración, ya que la velocidad de la luz es una cota superior para la velocidad de transmisión del efecto inducido por cualquier sistema físico. En consecuencia, es preciso interpretar las covarianzas cruzadas como unas covarianzas, no dependientes del punto espaciotemporal como corresponde a procesos estacionarios, que son la consecuencia del efecto combinado de la propagación de las perturbaciones individuales, que se transmiten a una velocidad no superior a la de la luz (con un impacto en la inducción de procesos estocásticos gaussianos estacionarios que describen la componente aleatoria del tensor de stress con una estructura que se ha supuesto markoviana) y de la interacción mutua entre dichas perturbaciones que también es transmitida a una velocidad lumínica (o sea, no infinita). Por tanto, dada la diversidad de la naturaleza que se puede suponer a esas fuentes perturbadoras individuales (correlacionadas o no) cuyo efecto perturbador estocástico puede ser markoviano o responder a una estructura más compleja, podría tener un grado de interés investigador el análisis de esos escenarios paramétricamente más amplios, en los que habría que considerar una compleja covarianza cruzada dinámica espaciotemporalmente desfasada. No obstante, al margen de las dudas que ofrece el hecho de que un escenario de ese tipo deba ser tenido en cuenta, es asimismo dudoso que los resultados obtenidos a partir de tal modelización puedan resultar, independientemente de su dificultad analítica, significativamente más útiles. En cualquier caso, esta posible línea de investigación merecería ser tenida en cuenta.

9.- La inmensa mayoría de modelizaciones estocásticas realizadas en cualquier ámbito del conocimiento humano está basada en una distribución gaussiana, o derivada de ésta en alguna forma: mediante algún tipo de transformación sencilla, como es el caso de la distribución log-normal, o mediante combinación lineal de distribuciones gaussianas que permita captar alguna cualidad importante, o incluso mediante truncamiento que permita que un conjunto de valores quede excluido de la distribución. Sin embargo, el ma-

nejo analítico de una distribución gaussiana modificada, o de distribuciones diferentes, como la distribución gamma (que, salvo cambio de origen, en cualquier caso finito, queda definida sólo para valores positivos), entrañan una dificultad de cálculo añadida muy significativa frente a la distribución gaussiana natural. Sin embargo, pese a su posición netamente ventajosa en el ámbito probabilístico, la distribución gaussiana tiene unas características que en ocasiones pueden ser limitantes y pueden condicionar, por tanto, su aplicación en algunos casos específicos. La estructura de momentos de la distribución gaussiana queda completamente determinada cuando se conocen los dos momentos de primer y segundo orden (media y desviación estándar), por lo que su aplicabilidad a fenómenos de carácter estocástico que requieran una estructura más compleja, puede quedar invalidada o al menos requerir de técnicas adicionales que aseguren un grado de ajuste suficiente [35]. Adicionalmente, la distribución gaussiana se extiende a un rango de valores que va desde $-\infty$ hasta $+\infty$, por lo que cualquier intervalo de valores reales negativos arbitrariamente alejados de 0, tiene asignada una probabilidad no nula. Por tanto, para magnitudes físicas que sólo pueden tomar valores positivos, su utilización como término complementario estocástico que pretenda captar un cambio aleatorio posible en dicha magnitud, es necesariamente limitada. Concretamente, podría decirse que si el término complementario gaussiano tiene una desviación estándar grande con respecto al valor medio de la magnitud cuya fluctuación aleatoria se pretende modelizar, su uso puede no ser válido. Sin embargo, su utilización en magnitudes que sólo pueden tomar valores no negativos está bastante generalizada, debido a que en la mayoría de los casos se pretende capturar la cuantía de la dispersión de una perturbación de bajo o moderado nivel en relación con el valor medio de la magnitud, por lo que la probabilidad asociada a la ‘cola negativa’ suele ser lo suficientemente pequeña como para que los resultados obtenidos puedan considerarse válidos. Este es el argumento que justifica el uso de un término gaussiano simple descriptivo de las fluctuaciones de origen clásico de un proceso inducido por una o varias fuentes externas que perturban el tensor de stress de un sistema físico gravitacional. No obstante, una línea posible de investigación consiste en explorar modelos estocásticos alternativos que describan las fluctuaciones del tensor de stress de un sistema material.

10.- Los esquemas elegidos para modelizar los procesos inducidos por una perturbación externa son markovianos (elementales en el caso de una fuente perturbadora, o agregados de markovianos en el caso de varias fuentes). Este criterio excluye a otras familias de procesos, como los procesos con estructura

de media móvil. Otra de las familias excluidas es la de los procesos cuyo filtro puede tener raíces complejas conjugadas (suponemos que son pares de raíces complejas conjugadas con el fin de asignarles un posible sentido físico). Los procesos que poseen estas raíces tienen un carácter cíclico, y por tanto, acorde con un gran número de fenómenos asociados a algunos sistemas físicos. Dependiendo del módulo de dichas raíces, estos eventos físicos pueden ser cíclicos no amortiguados (que serían no estacionarios) o amortiguados (pseudocíclicos, que son estacionarios). Dada la frecuencia con que este tipo de fenómenos se producen en la naturaleza, se abre una línea de interés indudable en la investigación futura a partir de la consideración de perturbaciones estocásticas de carácter cíclico, para lo cual hay que definir los propagadores de correlación compatibles con esa clase de modelos.

11.- En esta memoria se han revisado aspectos cuyo análisis debería ser más completo y avanzado. En este punto y en los dos siguientes vamos a insistir brevemente en ello. Gran parte del análisis relativo a la agregación del efecto inducido por diversas fuentes pivota en torno a los conceptos de 'tensor de distancia', que hemos denominado U y de 'tensor de carga de correlación', que hemos denominado Π , cuyo interés se ha visto reforzado por su relación con las medidas de incertidumbre aplicadas a los tensores incondicional y condicional, a través de un concepto creado en el seno de esta memoria, el denominado factor de 'deformación covariante', cuyas propiedades deberían ser más ampliamente exploradas en una ulterior investigación. En esta memoria ha quedado de manifiesto, a título de ejemplo, su relevancia en cuanto a la verificación del cumplimiento, o no, de la propiedad de invariancia de medidas importantes como son las medidas convencionales de complejidad de Cramér-Rao, Fisher-Shannon y López-Mancini-Calbet.

12.- Una fracción importante del contenido de la primera parte de esta memoria hace referencia a la agregación del efecto perturbador inducido por varias fuentes externas, así como al análisis en dicho contexto de los tensores incondicional y condicional asociado a una información disponible. Se ha elaborado una propuesta encaminada a facilitar el análisis, o en cualquier caso a reducir el esquema agregado a un modelo simplificado según el cual un proceso conjunto puede, mediante un procedimiento que hemos denominado de asignación, ser desestructurado como suma de un número equivalente de procesos no correlacionados. Ya que este procedimiento no puede llevarse a término en el caso d -dimensional (siendo $d > 1$) debido a que no se conserva, en general, la equivalencia en autocovarianza, el análisis basado en las medidas informacionales se hace imprescindible frente a un objetivo de de-

terminación del grado de suficiencia de dicho procedimiento. Se sugiere, por tanto, abrir una línea de investigación en esa dirección, con el fin de determinar en cada caso el grado de aceptación del procedimiento. Los principales criterios que se sugieren al respecto se identificarían principalmente con procedimientos como los basados en la aplicación de las diferentes medidas de similitud y divergencia.

13.- Una propuesta, cuya justificación se ha intentado clarificar, realizada, aunque no explorada, ha sido la de utilizar unas medidas entrópicas, que se han venido a calificar como *efectivas*, que pretenden diversos fines. El primero es un objetivo de unificación, mediante el cual las denominadas longitudes entrópicas midan una longitud en términos dimensionales perfectamente acordes con la dimensión d del espacio en que la medidas son realizadas. Desde este punto de vista, las medidas de Shannon se podrían considerar medidas dimensionalmente bien regularizadas. En un escenario gaussiano el resultado de esas medidas dependen del valor del determinante del tensor núcleo de covarianza del proceso sujeto de tales medidas. Otras longitudes convencionales, como la desviación estándar o la longitud de Fisher son medidas unidimensionales independientemente de la dimensión del espacio. En un contexto gaussiano, estas medidas no dependen del valor del determinante del tensor sino del valor de la traza de alguna potencia del mismo, lo que, en opinión subjetiva del autor, ‘empobrece’ y ‘distorsiona’ el contenido de información de la propia medida. Y esto, que no parece compatible con la tetradimensionalidad de un contexto real físico relativista, como el que subyace en la memoria, tiene consecuencias que son, en cualquier caso, debatibles. A modo de ejemplo, comentaremos que las medidas de complejidad convencionales, sobre las que recae la propiedad tradicional conocida de ser invariantes frente a cambios de escala, realmente no poseen esa propiedad cuando el cambio que lleva de una distribución a otra de la misma naturaleza (en nuestro caso, de carácter gaussiano) no se refiere estrictamente a un cambio de escala idéntico en las diferentes dimensiones. Concretando, si el cambio de escala no es único, sino que es de magnitud diferente en cada dimensión (lo que en la memoria se ha denominado inhomogeneidad de cambio de escala), las medidas de complejidad (que implican a la traza del tensor núcleo de covarianza) no son invariantes, con la excepción de la medida de López-Mancini-Calbet (que sólo implica al determinante del tensor). Tampoco son invariantes en el caso de que la estructura de correlación (lo que se ha denominado distorsión covariante en la memoria) sea diferente para los dos tensores comparados. Las denominadas medidas efectivas, al estar fundamentadas, no en el pro-

ducto interior, que da como resultado directo un escalar, sino en el producto exterior que da como resultado un tensor, del que el escalar obtenido como medida global es su determinante, poseen obviamente unas propiedades diferentes. Evidentemente las medidas de Shannon convencionales y efectivas son esencialmente similares; no así la mayoría del resto de medidas informacionales, que ofrecerían resultados diferentes, como se ha podido constatar en algunos casos prácticos de la Parte III. Una propiedad relevante contrastada es que las medidas de complejidad efectivas son invariantes frente a cambios de escala (homogéneos o no) y frente a cambios en la estructura de correlación, lo cual no deja de tener sentido, ya que, a juicio del autor, al tratarse en ambos casos comparados de una estructura gaussiana, no debería obtenerse, desde una amplia perspectiva, un grado diferente de complejidad. Sin embargo, las propiedades de estas medidas efectivas no han sido suficientemente exploradas para distribuciones probabilísticas cualesquiera, por lo que se sugiere la apertura de una línea de investigación en esta dirección.

14.- En el Capítulo 7 se hace la definición de unas medidas tensoriales y escalares de ‘inexactitud’ y se propone su aplicación para medir de grado de aproximación de una teoría ‘exacta’ frente a una medida supuestamente ‘exacta’. Con ese objetivo de construye una teoría ‘exacta’ cuya naturaleza se enmarca razonablemente bien en el contexto general de la memoria. Adicionalmente, en la Parte III se desarrollan algunos ejemplos al respecto con la obtención de unos resultados que permiten visualizar esa ‘inexactitud’ en términos numéricos. Unas primeras conclusiones son posibles, ya que, por ejemplo, pueden tomarse decisiones acerca de una mayor ‘exactitud de una teoría aproximada sobre otra respecto a la teoría ‘exacta’ de referencia. Sin embargo, esto no es suficiente. La propuesta debe ser convenientemente complementada con la exploración de unos criterios sólidos que permitan concluir el grado absoluto de exactitud de una teoría dada y la subsiguiente decisión acerca de su validez, lo cual constituye una interesante línea de investigación a seguir.

El trabajo que aquí culmina aspira a ser el punto de arranque del desarrollo de un conjunto de líneas de avance en diversas direcciones. Aunque obligadamente simplificado, se trata de un estudio en el que, para conseguir ese objetivo global de avance investigador, se ha creado un conjunto de conceptos que garantizan la solidez de los resultados futuros. Esos conceptos básicos nacen en el seno de la Teoría de la Información, y por tanto, la

presente memoria debe considerarse como un ejercicio en el marco de esa disciplina.

Sin embargo, desde sus primeras líneas introductorias, la memoria ha querido dejar clara la aplicabilidad de la metodología que en ella se describe. Por esta razón, la introducción a dicha metodología hace referencia a una de las líneas posibles de aplicación, quizá la más importante, aunque también probablemente la meta más difícil de alcanzar, como es la aproximación, desde una cuantificación correcta de la incertidumbre, a una Teoría Gravitatoria Cuántica Estocástica. Esta referencia como objetivo no es en absoluto cómoda (habría otras que lo serían mucho más), como muestran los complejos avances de la Física Teórica en los distintos caminos elegidos hacia ese objetivo casi utópico de una Gravedad Cuántica definitiva.

El camino de la Gravedad Cuántica Estocástica, como se ha comentado reiteradamente, es un camino lleno de dificultades porque arranca con muchos interrogantes en el horizonte, como la elección de un modelo gaussiano para el tensor de stress en el modelo cosmológico, por ser esencialmente más simple y manejable, y tal vez porque reduciría, en mayor grado que otros modelos aleatorios, la gran complejidad analítica que supone su reflejo en el tensor geométrico de Einstein, cuya dependencia de la métrica espaciotemporal, es altamente no lineal (esto es de por sí una complicación importante para ésta y para cualquier teoría gravitacional que aspire a describir correctamente el comportamiento cuántico de la geometría espaciotemporal a partir del comportamiento cuántico de la materia).

Sin embargo, la Teoría de la Gravedad Cuántica Estocástica es, de todas las investigadas, por su planteamiento general, quizá la más accesible desde los conceptos y medidas de la Teoría de la Información. Y por esta razón, ésta es una de las líneas de investigación que desde esta memoria se propone y que, como vamos a ver enseguida, debe tener un cierto recorrido. En efecto, en primer lugar, un análisis exhaustivo y bien orientado de la incertidumbre inherente al tensor de stress estocástico no debería servir sólo para proporcionar unas medidas a incorporar en nuestro conocimiento acerca del proceso de aleatorización realizado, sin dejar de ser importante esta cuestión, sino incluso, y mucho más importante aún, para poder facilitar un criterio objetivo que permita decidir sobre el grado de validez de la propia teoría. Expresado de forma más directa, la Teoría de la Información debería ‘informar’ sobre si el modelo tiene una bondad suficiente de comportamiento, o por el contrario no lo tiene, en su intento de explicar la naturaleza cuántica de la materia. Este es un ejercicio conveniente y recomendable para cualquier teoría física

(gravitatoria o no, como puedan ser la Electrodinámica, la Hidrodinámica o algunas otras). Adicionalmente se tiene que producir el reflejo en la geometría de los resultados obtenidos para la materia, y se tiene que producir en una forma analíticamente consistente, lo que, por supuesto, sólo es válido en definitiva si las medidas teórico-informacionales respaldan la validez de dichos resultados. Y estos procedimientos, hasta donde conoce el autor de esta memoria, no se han llevado a cabo, ni en el caso de las teorías Gravitacionales Cuánticas en curso, ni en el caso de otras teorías físicas cuya versión cuantizada ya ha sido aceptada.

En cualquier caso, y como históricamente se ha demostrado de forma reiterada, el respaldo a la bondad de la teoría llegaría casi seguramente acompañado de una mejora de los resultados en términos de valoración de la incertidumbre (cotas de algunas medidas, precisión de determinadas restricciones,...). Un ejemplo claro de apoyo de las medidas informacionales, aplicables a una teoría Gravitacional (Estocástica Clásica, Estocástica Cuántica u otras), a la bondad del modelo, radica en la coherencia que debe exigirse a la valoración de la incertidumbre (expresado en forma genérica) en el plano material y en el plano geométrico. Dada la naturaleza matemática compleja, no lineal, del tensor de Einstein, la ‘cuantización’, o la simple aleatorización, de la geometría debe realizarse a partir de alguno de los métodos aproximados conocidos (comentaremos, sin incidir en ello, para no alejarnos de la esencia del problema, que dichos métodos deberían distinguir entre campos gravitatorios débiles y campos gravitatorios fuertes), como los métodos basados en una perturbación de primer orden, cuando esto es aceptable. En este, y en cualquier otro método, se está haciendo una aproximación que, como es lógico, se espera que sea suficiente. A este respecto la Teoría de la Información tiene mucho que aportar, ya que de la bondad de la aproximación debe resultar una coherencia exigible entre las medidas de incertidumbre aplicadas en la ‘cara’ material del modelo y las aplicadas en la ‘cara’ geométrica.

En este camino, la investigación teórico-informacional a realizar, sin ocultar su dificultad, es realmente ilimitada. Dando por supuesto que todo lo expuesto es trasladable a cualquier sistema físico, sea cual sea su naturaleza, hay que tener en cuenta que una teoría no empieza y termina en lo que podríamos llamar las leyes fundamentales de la teoría. Así como la teoría gravitacional de Newton es mucho más que unas leyes fundamentales conocidas, a partir de las cuales se construye un vasto conjunto de conocimiento, en las teorías gravitacionales relativistas el cuerpo de conocimiento que dichas teorías contienen va más allá de la ecuación fundamental, sobre la que

exclusivamente hemos trabajado, que expresa que ‘el tensor de la geometría es proporcional al tensor de la materia’ (sea cual sea la naturaleza de éste y su estructura).

Como un simple ejemplo, consideremos un fluido perfecto determinístico para el que el tensor de stress T_{ab} , en nuestro modelo gravitacional, es conservado, o sea, se cumple $\partial^a T_{ab} = 0$ (estamos considerando un espaciotiempo plano). Entonces la magnitud J_a , que es el tetravector de densidad de corriente de masa-energía, que se relaciona con T_{ab} en la forma $J_a = -T_{ab}v^b$, siendo v^b el tetravector de velocidad de un observador, tiene que poseer una naturaleza aleatoria, en el caso de que el tensor de stress sea estocástico. Siendo así, las consideraciones realizadas respecto al tensor de stress en cuanto a su naturaleza conservada se trasladarían de alguna forma al vector de densidad de corriente respecto a la ley de Gauss (flujo neto nulo de J a través de una superficie cerrada). Valga este ejemplo para indicar que cualquier propuesta relevante como la aleatorización del tensor de stress impregna, de alguna forma, toda la teoría en la que se enmarca.

El análisis informacional tiene, al parecer, un largo camino por delante en apoyo de una mejor comprensión y confirmación de validez de modelos físicos, aleatorizados o cuantizados, de diversa naturaleza.

Figuras

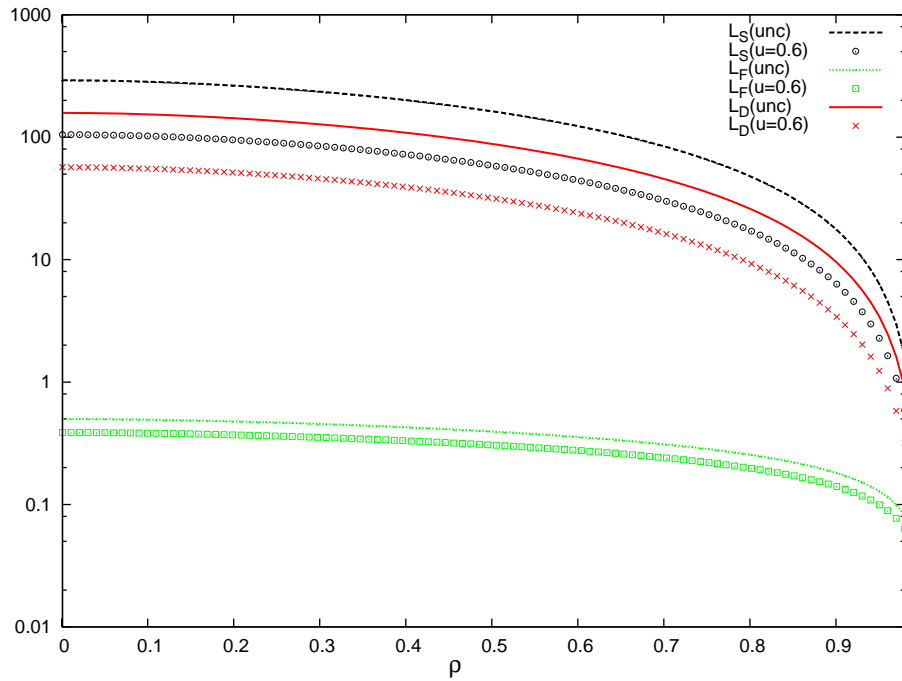


Figura 16.1: Longitud de Shannon L_S (negro), longitud de Fisher L_F (verde) y longitud de disequilibrio L_D (rojo), en función del coeficiente de correlación ρ . Los valores incondicionales (líneas) y los valores condicionales para el parámetro de distancia $u = 0,6$ (símbolos) son representados.

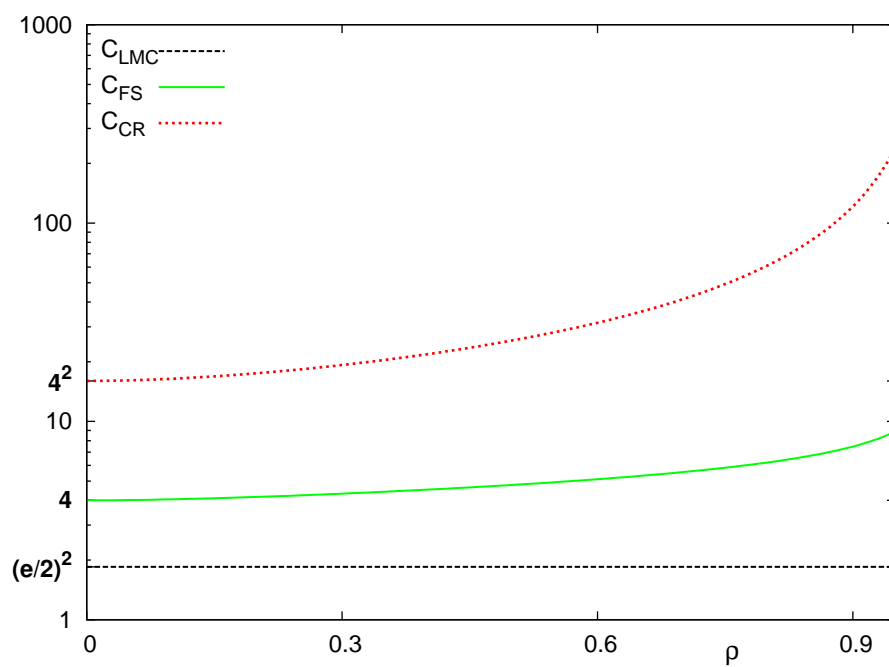


Figura 16.2: Complejidades LMC (negro), Fisher-Shannon FS (verde) y Cramér-Rao CR (rojo), en función del coeficiente de correlación ρ .

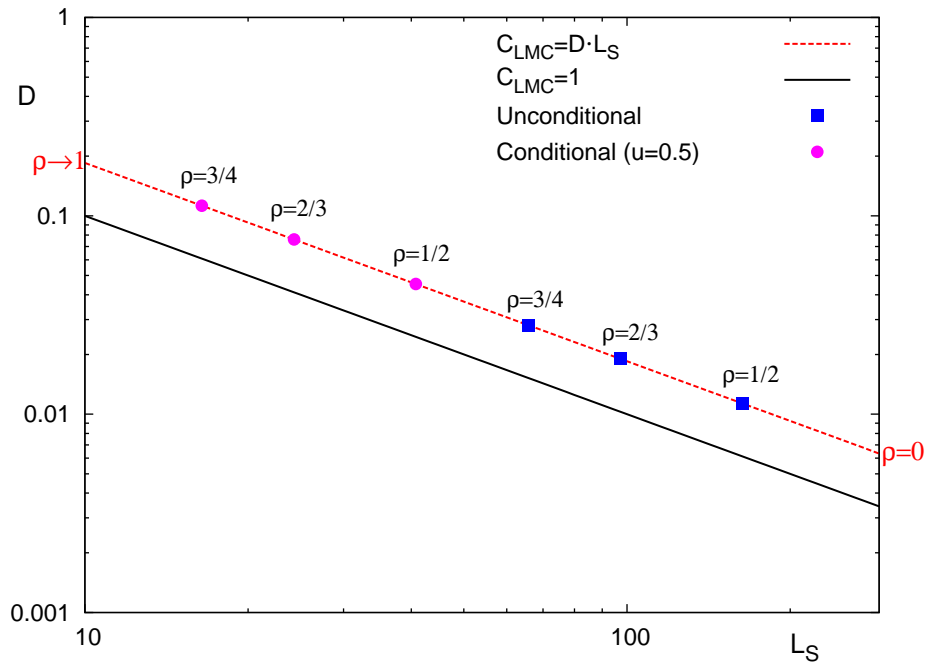


Figura 16.3: Plano Desequilibrio-Shannon $D - L_S$, incluyendo la frontera (negro) entre las regiones permitidas y prohibidas, la curva $C_{LMC} = D \cdot L_S$, y varios valores ρ para $u = 1$ (caso incondicional) y $u = 0,5$ (caso condicional).

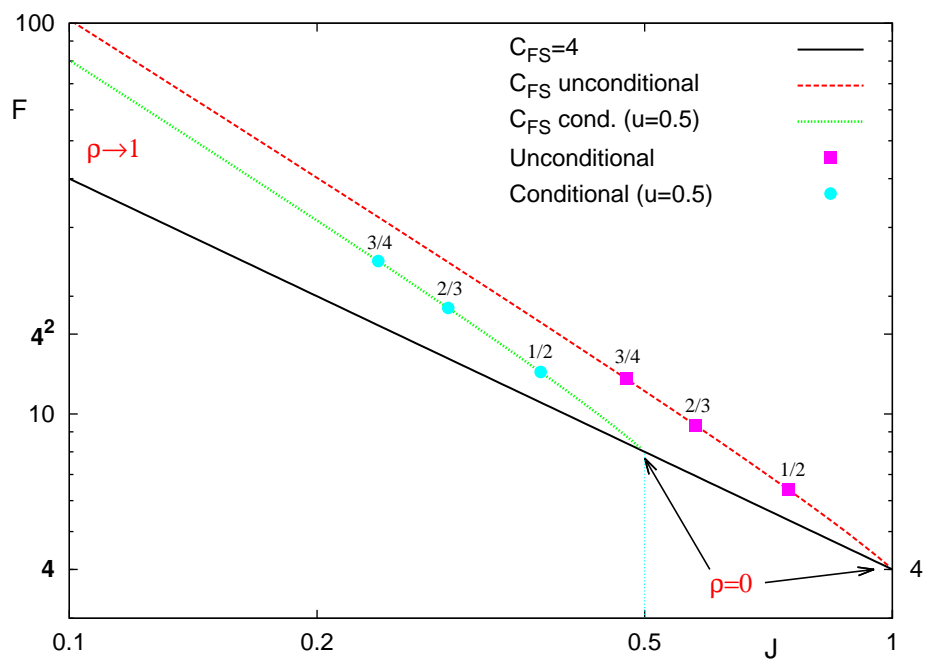


Figura 16.4: Plano Fisher-Shannon $F - J$, incluyendo la frontera (negro) entre las regiones permitidas y prohibidas, y las curvas $C_{FS} = F \cdot J$ para $u = 1$ (caso incondicional) y $u = 0,5$ (caso condicional), con varios valores ρ sobrescritos.

APÉNDICES

Apéndice A

Determinante y traza del tensor de covarianza e información mutua

Sabemos que el tensor de covarianza del proceso $\xi(x)$ puede expresarse como

$$|N| = \begin{vmatrix} \sigma_0^2 & \rho_{01}\sigma_0\sigma_1 & \rho_{02}\sigma_0\sigma_2 & \rho_{03}\sigma_0\sigma_3 \\ \rho_{01}\sigma_0\sigma_1 & \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{02}\sigma_0\sigma_2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{03}\sigma_0\sigma_3 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{vmatrix},$$

siendo $0 \leq \rho_{ij} < 1$ ($j = 0, 1, 2, 3$).

Supongamos, a efectos de simplificar la notación y mejorar la interpretación de los resultados, que σ y ρ son dos valores representativos de la desviación estándar de las componentes del tensor ξ y de la correlación mutua entre cada par de componentes, que cumplen

$$|N| = \begin{vmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{vmatrix}.$$

Estamos suponiendo que $\sigma^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \sigma_j^2$, con lo cual ρ queda bien determinado. Sabemos que la información mutua entre las componentes ξ_i y ξ_j cumple la relación (5.29). Llamemos MI a la información mutua global,

definida por analogía como

$$MI = \ln \left\{ (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Dado que $|N| = \sigma^8(1 - \rho)^3(1 + 3\rho)$, quedaría finalmente

$$|N| = \sigma^8 \left\{ 1 - (1 - e^{-2MI})^{\frac{1}{2}} \right\}^3 \left\{ 1 + 3(1 - e^{-2MI})^{\frac{1}{2}} \right\},$$

con lo que queda establecida una relación inversa clara entre la información mutua global (como un valor medio representativo) con el determinante $|N|$ del tensor de covarianza. Vemos que

$$MI = 0 \Rightarrow |N| = \sigma^8,$$

$$MI = \infty \Rightarrow |N| = 0,$$

acorde con las afirmaciones realizadas para algunas medidas analizadas cuyo valor no solo depende de u sino de la información mutua entre componentes a través de una determinada potencia de $|N|$. En cuanto a la traza de N , podemos observar que no depende de la información mutua:

$$Tr(N) = \sum_{j=0}^3 \sigma_j^2 = 4 \sigma^2.$$

Sin embargo la traza de N^{-1} sí es sensible a dicha información. Puede establecerse la relación aproximada

$$Tr(N^{-1}) = 4 \sigma^{-2} \frac{1 + 2(1 - e^{-2MI})}{\{1 - (1 - e^{-2MI})\} \{1 + 3(1 - e^{-2MI})\}},$$

de tal modo que

$$MI = 0 \Rightarrow Tr(N^{-1}) = 4 \sigma^{-2},$$

$$MI = \infty \Rightarrow Tr(N^{-1}) = \infty.$$

Apéndice B

Diagonalización del tensor de covarianza

En este apéndice se justifica la validez de los resultados obtenidos, acerca de las medidas habituales de incertidumbre y complejidad, para un tensor gaussiano cualquiera, cuyas componentes pueden poseer una información mutua no nula como consecuencia de existir un grado de correlación entre ellas.

Si se supone que el tensor clásico de stress T_{ab} es aleatorio gaussiano, se le puede asignar un tensor de covarianza $N(x, x')$ dados dos puntos x and x' (eventualmente coincidentes), causalmente conectados en un espaciotiempo tetradimensional (que hemos supuesto minkowskiano en el análisis desarrollado en la memoria). Si se supone además que, por simplicidad, el tensor T_{ab} es diagonal, podemos asimilarlo a un vector tetradimensional que denominamos $T(x)$ (abreviadamente T). Definiendo $\xi(x)$ (abreviadamente ξ) como

$$\xi = T - \langle T \rangle,$$

la densidad de probabilidad f de ξ viene expresada como

$$f(\xi) = (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi'N^{-1}\xi},$$

siendo N el tensor de covarianza en un punto x .

Podemos definir un nuevo tensor de stress Q como $Q = BT$, siendo B un tensor tetradimensional. Este tensor es una matriz 4×4 cuyo determinante es la unidad y es tal que $B' = B^{-1}$. Se supone además que la matriz B cumple la condición

$$N^{-1} = B' \Lambda B,$$

siendo Λ un tensor diagonal, cuyos elementos son los autovalores λ_j^{-1} ($j = 0, 1, 2, 3$), de N^{-1} . La componente estocástica de Q , que designaremos η , viene dada por $\eta = B \xi$. Por tanto, podemos expresar

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)B'.$$

La densidad de probabilidad de este nuevo tensor gaussiano puede expresarse, dadas las propiedades de B , como

$$\begin{aligned} f(\eta) &= (2\pi)^{-2} \left(\prod_{j=0}^3 \lambda_j \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\eta_j^2}{\lambda_j}} = \\ &= (2\pi)^{-2} \prod_{j=0}^3 \lambda_j^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\eta_j^2}{2\lambda_j}} = \prod_{j=0}^3 f^{(1)}(\eta_j), \end{aligned}$$

siendo $f^{(1)}(\eta_j)$ la densidad de probabilidad unidimensional de la componente η_j . Entre las componentes η_j la información mutua es nula.

En este caso la longitud entrópica de Shannon y el desequilibrio de la distribución pueden expresarse como

$$\begin{aligned} L_S(N) &= (2\pi e)^2 \left(\prod_{j=0}^3 \lambda_j \right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=0}^3 L_S^{(1)}(\lambda_j), \\ D(N) &= (4\pi)^{-2} \left(\prod_{j=0}^3 \lambda_j \right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=0}^3 D^{(1)}(\lambda_j). \end{aligned}$$

Resulta evidente que si al menos un autovalor se anula, lo que es equivalente a afirmar que $|N| = 0$, la densidad de probabilidad de la componente η_j correspondiente colapsaría a una hiperfunción ‘delta’ de Dirac. La distribución de dicha componente tendría una longitud entrópica nula y un desequilibrio infinito, con lo cual la longitud entrópica tetradimensional también se anula, y el desequilibrio tetradimensional se hace infinito. La maximización de la información mutua conduce a valores extremos de las medidas entrópicas.

Apéndice C

Cálculo fundamental para la obtención de las longitudes entrópicas gaussianas

Sea el funcional $F_n(N)$ tal que

$$F_n(N) = \int_{\xi} d^4\xi (2\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} \xi' N^{n-1} \xi e^{-\frac{1}{2}\xi' N^{-1}\xi},$$

siendo N el núcleo de covarianza de ξ . Siguiendo un procedimiento similar al del Apéndice B hacemos la transformación

$$\begin{aligned} N^{-1} &= B'\Lambda B, \\ \eta &= B\xi, \end{aligned}$$

siendo Λ un tensor diagonal, cuyos elementos son los autovalores λ_j^{-1} ($j = 0, 1, 2, 3$) de N^{-1} .

Las componentes de η son estocásticamente ortogonales. Teniendo en cuenta que $N^n = B'\Lambda^{-n}B$ podemos expresar

$$F_n(N) = \int_{\eta} d^4\eta (2\pi)^{-2} \left(\prod_{j=0}^3 \lambda_j \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^3 \lambda_k^{n-1} \eta_k^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\eta_j^2}{\lambda_j}}.$$

En consecuencia

$$F_n(N) = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^n = Tr(N^n).$$

Apéndice D

Estructura de un proceso gaussiano tetradimensional (análisis de la identificación dado un núcleo de covarianza)

Empezaremos considerando un proceso estructural simple autorregresivo markoviano estacionario del tensor $\xi(x)$ (provocado por la acción de una fuente externa perturbadora sobre un sistema físico cuya naturaleza se aproxima a la de un fluido perfecto), como el que refleja la expresión conocida

$$\xi(x) = A(x, x_a)\xi(x_a) + \varepsilon(x, x_a),$$

siendo $A(x, x_a)$ un propagador markoviano y $\varepsilon(x, x_a)$ un ruido blanco gaussiano. La información acerca del valor del tensor en cualquier punto x_d anterior a x_a , perteneciente a la geodésica que pasa por los puntos x y x_a , no influye en la función de densidad de $\xi(x)$, o sea, se cumple

$$f(\xi(x)|\xi(x_a), \xi(x_d)) = f(\xi(x)|\xi(x_a)).$$

En este caso se verifica

$$A(x, x_d) = A(x, x_a)A(x_a, x_d),$$

$$\varepsilon(x, x_d) = \varepsilon(x, x_a) + A(x, x_a)\varepsilon(x_a, x_d).$$

Supongamos un nuevo escenario sencillo, en el que ahora el conocimiento acerca de $\xi(x_d)$ reduce la incertidumbre del tensor en el punto x , añadida a

la reducción que comporta en el valor conocido $\xi(x_a)$. Si no se dispone de información adicional podemos suponer que este escenario es compatible con el efecto agregado de dos fuentes externas.

Llamaremos $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$ a los procesos (markovianos) inducidos por dichas fuentes. El modelo puede expresarse, por, tanto, como

$$\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x),$$

siendo, en representación discreta,

$$\xi_1(x) = A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + \varepsilon_1(x, x_a),$$

$$\xi_2(x) = A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + \varepsilon_2(x, x_a),$$

donde x_a es un punto anterior a x , causalmente conectado con este punto a través de la geodésica a que ambos puntos pertenecen.

Podemos expresar

$$\xi(x) = A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + \varepsilon_1(x, x_a) + \varepsilon_2(x, x_a),$$

$$\xi'(x) = \xi_1'(x_a)A_1'(x, x_a) + \xi_2'(x_a)A_2'(x, x_a) + \varepsilon_1'(x, x_a) + \varepsilon_2'(x, x_a).$$

De acuerdo con la notación habitual

$$N = A_1(x, x_a)N_1A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)N_2A_2'(x, x_a) + V_2,$$

donde N , N_1 y N_2 son los núcleos de covarianza respectivos de los procesos $\xi(x)$, $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$. De acuerdo con la independencia de las fuentes,

$$V_2 = E[\varepsilon_1(x, x_a)\varepsilon_1'(x, x_a)] + E[\varepsilon_2(x, x_a)\varepsilon_2'(x, x_a)].$$

Por tanto, V_2 es el tensor de covarianza del ruido residual de $\xi(x)$. Además se verifica

$$N = N_1 + N_2.$$

Llamemos Γ al tensor de peso definido como $\Gamma = N_1N^{-1}$. Por tanto, Γ representa el peso relativo del proceso $\xi(x)_1$ de la primera fuente en el proceso conjunto $\xi(x)$. Podemos expresar

$$N = A_1(x, x_a)\Gamma NA_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)(1 - \Gamma)NA_2'(x, x_a) + V_2,$$

luego

$$V_2 = N - A_1(x, x_a)\Gamma NA_1'(x, x_a)A_2(x, x_a)(1 - \Gamma)NA_2'(x, x_a). \quad (\text{D.1})$$

Llamando $N(x, x_a)$ al núcleo de covarianza de $\xi(x)$ entre los puntos x y x_a y, por tanto, $A(x, x_a)$ al tensor de propagación de correlación de $\xi(x)$, podemos escribir

$$A(x, x_a) - A_1(x, x_a)\Gamma + A_2(x, x_a)(1 - \Gamma). \quad (\text{D.2})$$

A partir de estos resultados podemos evaluar la ‘reducción’ del tensor de covarianza residual condicional entre los escenarios 1) identificación de dos fuentes externas y 2) identificación de una única fuente externa.

El escenario 1) comporta, como veremos a continuación, una menor incertidumbre asociada al tensor de covarianza condicional.

En el escenario 2), el tensor de covarianza condicional V_1 viene evaluado, de acuerdo con la ecuación (4.3), por la expresión

$$V_1 = N - A(x, x_a)NA'(x, x_a),$$

que, en función de la expresión (D.2), proporcionaría, para este escenario 2), el resultado estimado

$$\begin{aligned} V_1 = N - A_1(x, x_a)\Gamma N\Gamma' A_1'(x, x_a) - A_2(x, x_a)(1 - \Gamma)N(1 - \Gamma)' A_2'(x, x_a) - \\ A_2(x, x_a)(1 - \Gamma)N\Gamma' A_1'(x, x_a) - A_1(x, x_a)\Gamma N(1 - \Gamma)' A_2'(x, x_a). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta V = V_1 - V_2 = \\ \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} \Gamma N(1 - \Gamma)' \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\}', \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

resultado que, evidentemente, refleja una reducción de incertidumbre.

Dado que, como es fácil demostrar,

$$\Gamma N(1 - \Gamma)' = (N_1^{-1} + N_2^{-1})^{-1},$$

podemos expresar alternativamente (D.3) como

$$\begin{aligned} \Delta V = V_1 - V_2 = \\ \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} (N_1^{-1} + N_2^{-1})^{-1} \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\}'. \end{aligned}$$

Como cabe esperar, la ganancia en reducción de incertidumbre ΔV es nula en el caso en que $A_1(x, x_a) = A_2(x, x_a)$. La ganancia se reduce en la

medida en que la matriz de peso Γ se aproxima a la matriz nula o a la matriz unidad.

Supongamos ahora un caso general, en el que el proceso $\xi(x)$ es inducido por n fuentes no correlacionadas, cada una de las cuales induce un proceso $\xi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. O sea,

$$\xi(x) = \sum_{j=0}^n \xi_j(x),$$

siendo

$$\xi_j(x) = A_j(x, x_a)\xi_j(x_a) + \varepsilon_j(x, x_a), j = 1, \dots, n.$$

Entonces el tensor de covarianza V_n condicional del proceso $\xi(x)$, dados los valores conocidos $\xi_j(x_a)$, $j = 1, \dots, n$, viene dado por la expresión

$$V_n = N - \sum_{j=0}^n A_j(x, x_a)\Gamma_j N A_j'(x, x_a),$$

donde $\Gamma_j = N_j N^{-1}$, siendo N_j el núcleo de covarianza del proceso $\xi_j(x)$ en un punto del espaciotiempo.

El tensor de propagación de correlación $A(x, x_a)$ de $\xi(x)$ entre los puntos x y x_a puede expresarse como

$$A(x, x_a) = \sum_{j=0}^n A_j(x, x_a)\Gamma_j.$$

Por tanto, llamando $V_1^{(n)}$ al tensor de covarianza residual hipotético cuando sólo se ha identificado una fuente externa, este tensor puede estimarse como

$$V_1^{(n)} = N - \left(\sum_{j=0}^n A_j(x, x_a)\Gamma_j \right) N \left(\sum_{j=0}^n \Gamma_j' A_j'(x, x_a) \right).$$

En consecuencia, la ganancia en reducción en la incertidumbre $\Delta V_1^{(n)}$ asociada al tensor de stress $\xi(x)$ cuando se han identificado n fuentes externas no correlacionadas, frente al escenario en que sólo se ha identificado una fuente única, definida como $\Delta V_1^{(n)} = V_1^{(n)} - V_n$, viene dada por

$$\Delta V_1^{(n)} = \sum_{j=0}^n A_j(x, x_a)\Gamma_j N A_j'(x, x_a) - \left(\sum_{j=0}^n A_j(x, x_a)\Gamma_j \right) N \left(\sum_{j=0}^n \Gamma_j' A_j'(x, x_a) \right).$$

El cálculo de la ganancia en cada etapa, o sea, al cambiar de un escenario de identificación de $n - 1$ fuentes externas no correlacionadas a un escenario en que quedan identificadas n fuentes no correlacionadas puede hacerse por comparación entre las ganancias respectivas respecto al escenario de referencia de identificación de una sola fuente. Más concretamente, si denominamos $\Delta V_1^{(n-1)}$ a la ganancia obtenida cuando se identifican $n - 1$ frente a un escenario de una única fuente identificada, podemos estimar la ganancia en reducción de la incertidumbre de un escenario en que se identifican n fuentes, habiendo identificado previamente sólo $n - 1$ fuentes (de ese conjunto de n fuentes detectadas a partir de las observaciones y el comportamiento de la correlación entre pares de puntos del espaciotiempo), que denominaremos ΔV_{n-1}^n , como

$$\Delta V_{n-1}^n = \Delta V_1^{n-1} + \Delta V_1^n,$$

de acuerdo con la metodología propuesta en este apéndice.

Supongamos ahora un escenario basado en dos fuentes externas que pueden estar correlacionadas. Podemos expresar de nuevo

$$\begin{aligned}\xi(x) &= A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + \varepsilon_1(x, x_a) + \varepsilon_2(x, x_a), \\ \xi'(x) &= \xi_1'(x_a)A_1'(x, x_a) + \xi_2'(x_a)A_2'(x, x_a) + \varepsilon_1'(x, x_a) + \varepsilon_2'(x, x_a),\end{aligned}$$

donde ahora se supone una posible correlación tetrasimultánea entre los tensores $\varepsilon_1(x, x_a)$ y $\varepsilon_2(x, x_a)$ y, por tanto, entre los tensores $\xi_1(x, x_a)$ y $\xi_2(x, x_a)$, aunque estos, en función de su estructura paramétrica, poseen además una estructura de covarianza cruzada desfasada.

En este caso, de acuerdo con la notación habitual,

$$\begin{aligned}N &= A_1(x, x_a)N_1A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)N_2A_2'(x, x_a) + \\ &A_1(x, x_a)C_{12}A_2'(x, x_a) + A_2(x, x_a)C_{21}A_1'(x, x_a) + V_2,\end{aligned}\tag{D.4}$$

siendo C_{12} el tensor de covarianza cruzada tetrasimultánea entre los tensores $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, o sea $C_{12} = \langle \xi_1(x)\xi_2'(x) \rangle$. Por tanto, $C_{21} = \langle \xi_2(x)\xi_1'(x) \rangle$. De acuerdo con la posibilidad de dependencia entre las fuentes,

$$\begin{aligned}V_2 &= E[\varepsilon_1(a, x_a)\varepsilon_1'(a, x_a)] + E[\varepsilon_2(a, x_a)\varepsilon_2'(a, x_a)] + \\ &E[\varepsilon_1(a, x_a)\varepsilon_2'(a, x_a)] + E[\varepsilon_2(a, x_a)\varepsilon_1'(a, x_a)].\end{aligned}\tag{D.5}$$

Por tanto, V_2 es el tensor de covarianza del ruido residual de $\xi(x)$. Además, ahora se verifica

$$N = N_1 + N_2 + C_{12} + C_{21}.\tag{D.6}$$

Llamemos Γ_1 a la matriz de peso definida como $\Gamma_1 = N_1 N^{-1}$ y Γ_2 a la matriz de peso definida como $\Gamma_2 = N_2 N^{-1}$. Por tanto, Γ_1 y Γ_2 representan los pesos relativos de los procesos $\xi_1(x)$ (de la primera fuente) y $\xi_2(x)$ (de la segunda fuente) en el proceso conjunto $\xi(x)$. Podemos expresar

$$N = A_1(x, x_a)\Gamma_1 N A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)\Gamma_2 N A_2'(x, x_a) + \\ A_1(x, x_a)C_{12}A_2'(x, x_a) + A_2(x, x_a)C_{21}A_1'(x, x_a) + V_2,$$

luego

$$V_2 = N - A_1(x, x_a)\Gamma_1 N A_1'(x, x_a) - A_2(x, x_a)\Gamma_2 N A_2'(x, x_a) - \\ A_1(x, x_a)C_{12}A_2'(x, x_a) - A_2(x, x_a)C_{21}A_1'(x, x_a). \quad (\text{D.7})$$

Llamando $N(x, x_a)$ al núcleo de covarianza de $\xi(x)$ entre los puntos x y x_a y, por tanto, $A(x, x_a)$ al tensor de propagación de correlación de $\xi(x)$, podemos escribir, en este caso,

$$A(x, x_a) = A_1(x, x_a)\Gamma_1 + A_2(x, x_a)\Gamma_2 + \\ \{A_1(x, x_a)C_{12} + A_2(x, x_a)C_{21}\} N^{-1}. \quad (\text{D.8})$$

A partir de estos resultados podemos evaluar la reducción del tensor de covarianza condicional entre los escenarios 1) identificación de dos fuentes externas con correlación y 2) identificación de una única fuente externa.

En el escenario 2) el tensor de covarianza residual V_1 viene evaluado, de acuerdo con la expresión (4.3), por la expresión

$$V_1 = N - A(x, x_a)N A'(x, x_a),$$

que, utilizando (D.8), proporcionaría, para este escenario 2), el resultado estimado

$$V_1 = N - \{A_1(x, x_a)\Gamma_1 + A_2(x, x_a)\Gamma_2 + \{A_1(x, x_a)C_{12} + A_2(x, x_a)C_{21}\} N^{-1}\} \times \\ N \{\Gamma_1' A_1'(x, x_a) + \Gamma_2' A_2'(x, x_a) + N^{-1} \{C_{21} A_1'(x, x_a) + C_{12} A_2'(x, x_a)\}\}.$$

Por tanto,

$$\Delta V^* = V_1 - V_2 = \\ A_1(x, x_a)\Gamma_1 N A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)\Gamma_2 N A_2'(x, x_a) + \\ A_1(x, x_a)C_{12}A_2'(x, x_a) + A_2(x, x_a)C_{21}A_1'(x, x_a) - G(x, x_a), \quad (\text{D.9})$$

donde $G(x, x_a)$ viene dado por la expresión siguiente:

$$G(x, x_a) = \{A_1(x, x_a)\Gamma_1 + A_2(x, x_a)\Gamma_2 + \{A_1(x, x_a)C_{12} + A_2(x, x_a)C_{21}\} N^{-1}\} N \times \{\Gamma'_1 A'_1(x, x_a) + \Gamma'_2 A'_2(x, x_a) + N^{-1} \{C_{21} A'_1(x, x_a) + C_{12} A'_2(x, x_a)\}\}.$$

Este resultado, como veremos más claramente en un escenario simplificado, refleja una reducción de incertidumbre si la correlación entre los tensores tiene carácter ‘positivo’.

En efecto, de acuerdo con (E.5) podemos expresar (D.9) de forma agrupada como

$$\begin{aligned} \Delta V^* &= \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} \times \\ &\{(\Gamma_1 + C_{12}N^{-1}) N (\Gamma'_2 + N^{-1}C_{21}) - X_{1,2}\} \times \\ &\{A'_1(x, x_a) - A'_2(x, x_a)\}. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Hagamos las siguientes hipótesis simplificadoras:

$$A_1(x, x_a) = e^{\frac{\alpha_1}{2}|x-x_a|} I \quad (D.11)$$

$$A_2(x, x_a) = e^{\frac{\alpha_2}{2}|x-x_a|} I \quad (D.12)$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1 I \quad (D.13)$$

$$\Gamma_2 = \gamma_2 I \quad (D.14)$$

donde α_1 y α_2 son dos constantes reales negativas, y γ_1 y γ_2 son dos constantes reales positivas que cumplen la condición $|\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2}| \leq 1 \leq \sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2}$. Entonces

$$C_{12} + C_{21} = 2C = (1 - \gamma_1 - \gamma_2) N. \quad (D.15)$$

El tensor C equivale al tensor de covarianza cruzada media $X_{1,2}$, definido en la Sección 5.1 e incorporado en (D.10). Sustituyendo en (D.9), y teniendo en cuenta la relación (D.15),

$$\begin{aligned} \Delta V^* &= \left\{ \gamma_1 e^{\alpha_1|x-x_a|} + \gamma_2 e^{\alpha_2|x-x_a|} + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}|x-x_a|} \right\} N - \\ &\left\{ \gamma_1 e^{\frac{\alpha_1}{2}|x-x_a|} + \gamma_2 e^{\frac{\alpha_2}{2}|x-x_a|} + \frac{1}{2} (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \left(e^{\frac{\alpha_1}{2}|x-x_a|} + e^{\frac{\alpha_2}{2}|x-x_a|} \right) \right\}^2 N. \end{aligned}$$

De aquí, operando algebraicamente, obtenemos el resultado

$$\Delta V^* = \left(e^{\frac{\alpha_1}{2}|x-x_a|} + e^{\frac{\alpha_2}{2}|x-x_a|} \right)^2 \gamma_1 \gamma_2 (1 - \rho_x^2) N, \quad (\text{D.16})$$

donde ρ_x^2 es el coeficiente de correlación tetrasimultánea entre los procesos $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, que cumple la relación

$$\rho_x I = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} C N^{-1},$$

asegurando, por supuesto, la condición $-1 \leq \rho_x \leq 1$.

Podemos comprobar fácilmente que, sustituyendo (D.11), (D.12), (D.13) y (D.14) en (D.10), obtenemos el mismo resultado (D.16).

Hagamos a continuación una breve extensión del análisis de este último caso en el que se suponen dos fuentes perturbadoras que poseen una correlación cruzada, resaltando los distintos escenarios resultantes en función de la naturaleza de dicha correlación cruzada. Con el fin de no incurrir en desarrollos tediosos que corresponderían al análisis de un escenario tetradimensional, reduciremos el mismo a un escenario unidimensional.

Supongamos inicialmente el escenario correspondiente a dos fuentes externas que inducen sendos procesos gaussianos estacionarios markovianos en el tensor de stress, que inicialmente supondremos unidimensional (p.e. una dimensión temporal).

Sean dichos procesos inducidos:

$$\xi_{1,x} = \phi_1 \xi_{1,x-1} + \varepsilon_{1,x},$$

$$\xi_{2,x} = \phi_2 \xi_{2,x-1} + \varepsilon_{2,x}.$$

Los procesos $\varepsilon_{1,x}$ y $\varepsilon_{2,x}$ son procesos gaussianos ‘ruido blanco’ componentes de un proceso gaussiano bivalente $(\varepsilon_{1,x}, \varepsilon_{2,x})$ con correlación instantánea.

En esta memoria se ha propuesto una metodología basada, entre otros pilares, en el de un conjunto amplio de procesos gaussianos, lineales y estacionarios, que hemos denominado ‘markovianos en un sentido amplio’, que son aquellos procesos que pueden obtenerse por agregación de procesos markovianos elementales, o sea, markovianos en sentido estricto. Por tanto, un proceso gaussiano, lineal estacionario, que es markoviano en sentido amplio (no siéndolo en sentido estricto) se puede expresar como

$$\xi_x = \sum_{k=0}^n \xi_{k,x},$$

donde los procesos elementales $\xi_{k,x}$, $k = 1, \dots, n$, son gaussianos lineales estacionarios markovianos (en sentido estricto).

En este punto recordaremos que entendemos por proceso elemental markoviano un proceso lineal gaussiano estacionario con un único parámetro estructural, que admite la representación

$$\xi_{k,x} = \frac{\varepsilon_{k,x}}{1 - \phi_k L},$$

siendo L el operador ‘lag’ (tal que $L\xi_{k,x} = \xi_{k,x-1}$) y cumpliéndose la condición $0 < \phi_k < 1$. Por comodidad operativa utilizamos el criterio notacional de Heaviside, que, en determinadas condiciones, que deben ser siempre bien revisadas, los operadores diferenciales pueden ser tratados algebraicamente como magnitudes numéricas (como se hace habitualmente, a modo de ejemplo, en Teoría de Sistemas de Control o en Física Cuántica).

Supongamos un proceso ξ_x obtenido como la suma de los dos procesos $\xi_{1,x}$ y $\xi_{2,x}$ elementales (con las características reiteradamente mencionadas), que ahora representamos en la forma siguiente:

$$\xi_{1,x} = \frac{\varepsilon_{1,x}}{1 - \phi_1 L},$$

$$\xi_{2,x} = \frac{\varepsilon_{2,x}}{1 - \phi_2 L},$$

y suponemos una correlación instantánea ρ entre $\varepsilon_{1,x}$ y $\varepsilon_{2,x}$, tal que $\rho\sigma_{\varepsilon_1}\sigma_{\varepsilon_2} = \langle \varepsilon_{1,x}\varepsilon_{2,x} \rangle$.

Así, obtenemos

$$\xi_x = \xi_{1,x} + \xi_{2,x} = \frac{\varepsilon_{1,x}}{1 - \phi_1 L} + \frac{\varepsilon_{2,x}}{1 - \phi_2 L}. \quad (\text{D.17})$$

Dada la función de autocovarianza de ξ_x , la expresión (D.17) es equivalente en covarianza a una representación alternativa

$$\xi_x = \frac{(1 - \omega L) a_x}{(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)}. \quad (\text{D.18})$$

Si suponemos que $\phi_1 < \phi_2$, entonces, como veremos a continuación, si $\varepsilon_{1,x}$ y $\varepsilon_{2,x}$ y, por tanto, $\xi_{1,x}$ y $\xi_{2,x}$, son incorrelacionados, se verifica $\phi_1 < \omega < \phi_2$.

Hagamos una breve referencia a los casos en que $\omega \notin (\phi_1, \phi_2)$.

Caso 1) Supongamos que $\omega < \phi_1$ y que existe una correlación instantánea (no desfasada) ρ entre $\varepsilon_{1,x}$ y $\varepsilon_{2,x}$, tal que $\rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} = \langle \varepsilon_{1,x} \varepsilon_{2,x} \rangle$. Se deduce entonces que este escenario corresponde a

$$\rho < \rho^{(m)} = -\frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_1^2}.$$

Obviamente este escenario es válido cuando los parámetros del proceso sean tales que se cumpla la condición $\rho^{(m)} > -1$

Caso 2) Supongamos que $\omega > \phi_1$ y que existe igualmente una correlación instantánea (no desfasada) ρ entre $\varepsilon_{1,x}$ y $\varepsilon_{2,x}$, tal que $\rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} = \langle \varepsilon_{1,x} \varepsilon_{2,x} \rangle$. Se deduce en este caso que

$$\rho < \rho^{(M)} = -\frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}} \frac{1 - \phi_2 \phi_2}{1 - \phi_1^2}.$$

Obviamente, también en este caso, este escenario es válido cuando los parámetros del proceso cumplan la condición $\rho^{(M)} > -1$

Ambos casos corresponden a escenarios en que $\rho < 0$, o sea, existe una correlación instantánea negativa.

A partir de (D.17) y (D.18) se verifican las igualdades

$$(1 + \omega^2) \sigma_a^2 = (1 + \phi_2^2) \sigma_{\varepsilon_1}^2 + (1 + \phi_1^2) \sigma_{\varepsilon_2}^2 + 2\rho(1 + \phi_1 \phi_2) \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2}, \quad (\text{D.19})$$

$$\omega \sigma_a^2 = \phi_2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \phi_1 \sigma_{\varepsilon_2}^2 + \rho(\phi_1 + \phi_2) \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2}. \quad (\text{D.20})$$

Cancelando σ_a^2 en (D.19) y (D.20), podemos expresar

$$\frac{\omega}{1 + \omega^2} = \frac{\phi_2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \phi_1 \sigma_{\varepsilon_2}^2 + \rho(\phi_1 + \phi_2) \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2}}{(1 + \phi_2^2) \sigma_{\varepsilon_1}^2 + (1 + \phi_1^2) \sigma_{\varepsilon_2}^2 + 2\rho(1 + \phi_1 \phi_2) \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2}}.$$

Por tanto, es inmediato que si $\rho = 0$, dado $0 < \phi_1 < \phi_2 < 1$, se cumple $\phi_1 < \omega < \phi_2$. Pero además, dado que $\frac{\omega}{1 + \omega^2}$ es monótona creciente con ω y que $\frac{\omega}{1 + \omega^2}$ es la media aritmética ponderada de $\frac{\phi_1}{1 + \phi_1^2}$, $\frac{\phi_2}{1 + \phi_2^2}$ y $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2(1 + \phi_1 \phi_2)}$, y dado además que en la hipótesis $\phi_1 < \phi_2$ se cumple

$$\frac{\phi_1}{1 + \phi_1^2} < \frac{\phi_1 + \phi_2}{2(1 + \phi_1 \phi_2)} < \frac{\phi_2}{1 + \phi_2^2},$$

se tiene en consecuencia que, si $\rho > 0$, necesariamente también ha de verificarse $\phi_1 < \omega < \phi_2$.

Para valores negativos de ρ los escenarios que tienen lugar dependen de los valores $\sigma_{x_1}^2 = (1 - \phi_1^2) \sigma_{\varepsilon_1}^2$ y $\sigma_{x_2}^2 = (1 - \phi_2^2) \sigma_{\varepsilon_2}^2$, de tal modo que:

1) Si $\sigma_{x_1}^2 < \sigma_{x_2}^2$ sigue siendo $\omega > \phi_1$ mientras se cumpla

$$\rho > -\frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_1^2}.$$

En este caso ω crece con ρ .

2) Si $\sigma_{x_1}^2 > \sigma_{x_2}^2$ sigue siendo $\omega < \phi_2$ mientras se cumpla

$$\rho > -\frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2^2}.$$

En este caso ω decrece con ρ .

En el **caso particular** $\omega = 0$ se obtiene

$$\rho = -\frac{\phi_1 \frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}} + \phi_2 \frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}}}{\phi_1 + \phi_2}, \quad (\text{D.21})$$

válido cuando se verifica $\sigma_{\varepsilon_1} < \sigma_{\varepsilon_2} < \sigma_{\varepsilon_1} \frac{\phi_2}{\phi_1}$, dado que debe cumplirse $\rho > -1$.

El resultado (D.21) da soporte, desde un escenario unidimensional, a las conclusiones, expuestas en la Sección 4.2, referidas al caso tetradimensional.

Por tanto, un proceso

$$\xi_x = \frac{\varepsilon_x}{(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)},$$

o sea, carente de estructura de media móvil, puede obtenerse como suma de dos procesos elementales markovianos con correlación instantánea solo si dicha correlación, siendo posible de acuerdo con las condiciones indicadas, es negativa.

Representación mínima de procesos agregados

Sabemos que si $\xi_{1,x} = \frac{\varepsilon_{1,x}}{1 - \phi_1 L}$ y $\xi_{2,x} = \frac{\varepsilon_{2,x}}{1 - \phi_2 L}$, siendo $\phi_1 < \phi_2$, y $\rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} = \langle \varepsilon_{1,x} \varepsilon_{2,x} \rangle$, y si además se cumple

$$\rho > \text{Max} \left\{ -\frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_1^2}, -\frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2^2} \right\},$$

se puede obtener una representación

$$\xi_x = \frac{\varepsilon_{1,x}}{1 - \phi_1 L} + \frac{\varepsilon_{2,x}}{1 - \phi_2 L},$$

o, equivalentemente (en autocovarianza),

$$\xi_x = \frac{(1 - \omega L) a_x}{(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)},$$

donde ω verifica $\phi_1 < \omega < \phi_2$. En este caso cabe obtener una representación alternativa, equivalente en covarianza, tal que

$$\xi_x^{(m)} = \xi_{1,x}^* + \xi_{2,x}^*,$$

siendo

$$\begin{aligned} \xi_{1,x}^* &= (1 - \phi_1 L)^{-1}(\varepsilon_{1,x}^*), \\ \xi_{2,x}^* &= (1 - \phi_2 L)^{-1}(\varepsilon_{2,x}^*), \end{aligned}$$

cumpléndose $\langle \varepsilon_{1,x}^* \varepsilon_{2,x}^* \rangle = 0$.

Entonces, $\varepsilon_{1,x}^*$ y $\varepsilon_{2,x}^*$ son dos ruidos blancos gaussianos tales que sus varianzas $\sigma_{\varepsilon_1^*}^2$ y $\sigma_{\varepsilon_2^*}^2$ verifican

$$\sigma_{\varepsilon_1^*}^2 = \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} \frac{1 - \phi_1^2}{1 - \phi_1 \phi_2}, \quad (\text{D.22})$$

$$\sigma_{\varepsilon_2^*}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 + \rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} \frac{1 - \phi_2^2}{1 - \phi_1 \phi_2}, \quad (\text{D.23})$$

Decimos entonces que $\xi_x^{(m)}$ es la representación mínima equivalente en covarianza de ξ_x .

Sumando (D.22) y (D.23) obtenemos

$$\sigma_{\varepsilon_1^*}^2 + \sigma_{\varepsilon_2^*}^2 = \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2 + 2\rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} - \rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{1 - \phi_1 \phi_2},$$

luego

$$\sigma_{\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*}^2 = \sigma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^2 - \rho \sigma_{\varepsilon_1} \sigma_{\varepsilon_2} \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{1 - \phi_1 \phi_2}.$$

Por tanto, $\sigma_{\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*}^2 < \sigma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^2$ cuando $\rho > 0$ y $\sigma_{\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*}^2 > \sigma_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}^2$ cuando

$$\text{Max} \left\{ -\frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_1^2}, -\frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}} \frac{1 - \phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2^2} \right\} < \rho < 0.$$

En el caso en que $\rho \leq \text{Max} \left\{ -\frac{\sigma_{\varepsilon_1}}{\sigma_{\varepsilon_2}} \frac{1-\phi_1\phi_2}{1-\phi_1^2}, -\frac{\sigma_{\varepsilon_2}}{\sigma_{\varepsilon_1}} \frac{1-\phi_1\phi_2}{1-\phi_2^2} \right\}$ no encontramos una representación mínima.

Recordando que $\rho_x \sigma_{\xi_1} \sigma_{\xi_2} = \langle \xi_{1,x} \xi_{2,x} \rangle$, y que ha de ser $\rho^2 \leq 1$, a partir de la relación

$$\rho_x = \rho \frac{\sqrt{1-\phi_1^2} \sqrt{1-\phi_2^2}}{1-\phi_1\phi_2},$$

se obtiene la condición

$$\rho_x^2 \leq 1 - \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{1 - \phi_1\phi_2} \right)^2,$$

por lo que ρ_x sólo puede alcanzar sus valores extremos (1 ó -1) cuando $\phi_1 = \phi_2$.

El análisis llevado a cabo en este apéndice tiene como objetivo dar un soporte conceptual suficiente al capítulo 4, en general, y a la Sección 4.2, en particular, donde los criterios de identificación que se sugieren tienen una cierta dificultad analítica.

Sin embargo, sobre la base de los resultados obtenidos, podemos concluir, con un respaldo sólido, que la identificación de un proceso basado en el conocimiento acerca del tensor de stress en dos puntos espaciotemporales, previos en el tiempo a un punto dado de referencia, debe llevar a decidir, antes que a favor de la acción externa de una fuente que induce un proceso estocástico complejo (añadido al tensor de stress), a favor de la influencia agregada de dos fuentes perturbadoras externas cuyo efecto individual es más simple (acorde con la reiterada propuesta de esta memoria), entre la cuales puede existir una información mutua no nula (que en un evento natural analizado debería conllevar la hipótesis más razonable de que, en general, dicha información mutua es positiva, o si se prefiere, de carácter ‘constructivo’, aunque en el caso de un experimento diseñado en laboratorio se podrían considerar condiciones más abiertas).

Estas conclusiones serían, obviamente, extensibles a los casos más generales en los que la información obtenida implique a un número mayor de puntos espaciotemporales (relevante en todos ellos, o sea, con un efecto reductor en la incertidumbre asociado a cada punto), estableciendo una correspondencia, como un ejercicio idóneo de decisión, con el número de fuentes externas influenciadas.

Apéndice E

Identificación de la perturbación provocada por dos fuentes correlacionadas cuando no se conoce el nivel de correlación

Supongamos un escenario tetradimensional basado en dos fuentes externas que están correlacionadas, tal como se ha considerado en el Apéndice D. Expresamos una vez más

$$\xi(x) = A_1(x, x_a)\xi_1(x_a) + A_2(x, x_a)\xi_2(x_a) + \varepsilon_1(x, x_a) + \varepsilon_2(x, x_a),$$

$$\xi'(x) = \xi'_1(x_a)A'_1(x, x_a) + \xi'_2(x_a)A'_2(x, x_a) + \varepsilon'_1(x, x_a) + \varepsilon'_2(x, x_a),$$

donde igualmente se supone una posible correlación tetrasimultánea entre los tensores $\varepsilon_1(x, x_a)$ y $\varepsilon_2(x, x_a)$ y, por tanto, entre los tensores $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, aunque estos poseen una covarianza cruzada desfasada dependiente de su estructura paramétrica.

Consideremos los tensores maximalmente no correlacionados (o sea, con la información mutua mínima posible) $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$, tales que $\xi(x) = \xi_1^*(x) + \xi_2^*(x)$, cuyos respectivos núcleos de covarianza N_1^* y N_2^* son tales que $N_1^* = N_1 + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$ y $N_2^* = N_2 + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$, siendo, como sabemos, C_{12} el tensor de correlación cruzada dado por $\langle \xi'_1(x)\xi_1(x) \rangle$ (y, por tanto, C_{21} el tensor transpuesto de C_{12}) y V_2 el tensor de covarianza condicional del ruido residual de $\xi(x)$, definida en (D.5). Por simplicidad, definiremos la matriz

simétrica $X_{1,2}$ de correlación media entre los dos tensores componentes como $X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$.

Así, la podemos escribir alternativamente la expresión (D.6), que refleja la descomposición del núcleo de covarianza como $N = N_1 + N_2 + 2X_{1,2}$, como $N = N_1^* + N_2^*$.

Los tensores $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$ verifican

$$\begin{aligned}\xi_1^*(x) &= A_1(x, x_a)\xi_1^*(x_a) + \varepsilon_1^*(x, x_a), \\ \xi_2^*(x) &= A_2(x, x_a)\xi_2^*(x_a) + \varepsilon_2^*(x, x_a).\end{aligned}$$

Suponiendo que $\xi(x)$ admite la descomposición aditiva

$$\xi(x) = \xi_1^*(x) + \xi_2^*(x),$$

podemos expresar el tensor de covarianza de $\xi(x)$ como

$$\begin{aligned}N &= A_1(x, x_a)N_1^*A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)N_2^*A_2'(x, x_a) + \\ &A_1(x, x_a)Z_{12}A_2'(x, x_a) + A_2(x, x_a)Z_{21}A_1'(x, x_a) + V_2^*,\end{aligned}$$

donde V_2^* , dado por $V_2^* = Var[\varepsilon_1^*(x, x_a) + \varepsilon_2^*(x, x_a)]$ es el tensor de covarianza residual de $\xi(x)$, Z_{12} es el tensor antisimétrico de covarianza cruzada entre los tensores estocásticos $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$, cuyo valor es $Z_{12} = \frac{1}{2}(C_{12} - C_{21})$, y Z_{21} es el tensor transpuesto de Z_{12} , siendo su valor $Z_{21} = \frac{1}{2}(C_{21} - C_{12})$. Los tensores Z_{12} y Z_{21} son antisimétricos y verifican $Z_{12} + Z_{21} = 0$. Por tanto, las diagonales de ambos tensores están formadas por elementos nulos.

Llamemos Γ_1^* al tensor de peso definido como $\Gamma_1^* = N_1^*N^{-1}$ y Γ_2^* al tensor de peso definido como $\Gamma_2^* = N_2^*N^{-1}$. Por tanto, dado que $\Gamma_2^* = I - \Gamma_1^*$, los tensores Γ_1^* y Γ_2^* representan, en términos de correlación, los pesos relativos de los procesos $\xi_1^*(x)$ y $\xi_2^*(x)$ en el proceso conjunto $\xi(x)$.

Podemos expresar

$$\begin{aligned}V_2^* &= N - A_1(x, x_a)N_1^*A_1'(x, x_a) - A_2(x, x_a)N_2^*A_2'(x, x_a) - \\ &A_1(x, x_a)Z_{12}A_2'(x, x_a) - A_2(x, x_a)Z_{21}A_1'(x, x_a).\end{aligned}\tag{E.1}$$

Por tanto, llamando ΔV_2 al tensor diferencial $\Delta V_2 = V_2 - V_2^*$, y combinando las expresiones (E.1) y (D.4), llegamos a

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= A_1(x, x_a)(N_1^* - N_1^*)A_1'(x, x_a) + A_2(x, x_a)(N_2^* - N_2^*)A_2'(x, x_a) + \\ &+ A_1(x, x_a)(Z_{12} - C_{12})A_2'(x, x_a) - A_2(x, x_a)(Z_{21} - C_{21})A_1'(x, x_a).\end{aligned}$$

Agrupando términos convenientemente, llegamos a la expresión final

$$\Delta V_2 = \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} X_{1,2} \{A_1^*(x, x_a) - A_2^*(x, x_a)\}. \quad (\text{E.2})$$

En términos de pesos relativos, podemos expresar (E.2) alternativamente como

$$\begin{aligned} \Delta V_2 = \\ \frac{1}{2} \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} (I - \Gamma_1 - \Gamma_2) \{A_1^*(x, x_a) - A_2^*(x, x_a)\}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

O también, dado que $\Gamma_1^* + \Gamma_2^* = I$,

$$\begin{aligned} \Delta V_2 = \frac{1}{2} \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} \times \\ \{(\Gamma_1^* - \Gamma_1) + (\Gamma_2^* - \Gamma_2)\} \{A_1^*(x, x_a) - A_2^*(x, x_a)\}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Como sabemos, $N(x, x_a)$ es el núcleo de covarianza de $\xi(x)$ entre los puntos x y x_a y, por tanto, $A(x, x_a)$ el tensor de propagación de correlación de $\xi(x)$, que ahora podemos escribir, equivalentemente, como

$$A(x, x_a) = A_1(x, x_a) (\Gamma_1^* + Z_{12}N^{-1}) + A_2(x, x_a) (\Gamma_2^* + Z_{21}N^{-1}). \quad (\text{E.5})$$

El resultado (E.2) evidencia que, siendo las representaciones $\xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x)$ (1) y $\xi(x) = \xi_1^*(x) + \xi_2^*(x)$ (2), equivalentes en autocovarianza (dada la equivalencia entre (D.8) y (E.4)) entre puntos de la región espaciotemporal que estamos considerando, o sea, la geodésica que pasa por el punto x , no tienen el mismo grado de incertidumbre remanente en el sentido de que la representación (2) es más eficiente que la representación (1), o sea, el tensor de covarianza residual es ‘menor’, si el carácter del tensor de covarianza media $X_{1,2}$ entre $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$ es ‘positivo’ (o sea, sus autovalores son positivos), escenario que cabe considerar como más natural.

Por otra parte, combinando las expresiones (D.3) y (E.3) deberíamos obtener una expresión equivalente en autocovarianza a (D.9). Veamos esto. Dado que, para un tensor suma de dos tensores markovianos (que pueden estar correlacionados), el tensor de propagación de correlación es de la forma (E.5), si se supone correlación (D.3) adopta, de acuerdo con (E.5), la forma

$$\begin{aligned} \Delta V = \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} (\Gamma_1^* + Z_{12}N^{-1}) N \times \\ (\Gamma_2^* + Z_{21}N^{-1})' \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\}', \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

que representa el incremento en reducción de incertidumbre de un tensor identificado como suma de tensores markovianos correlacionados respecto a un escenario en que no se ha identificado más de un tensor markoviano.

Por tanto, calculando ΔV^* como diferencia de ΔV (definido en (E.5) y ΔV_2 (definido en (E.2)), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta V^* &= \{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\} \\ &\{(\Gamma_1^* + Z_{12}N^{-1})N(\Gamma_2^* + Z_{21}N^{-1})' - X_{1,2}\} \\ &\{A_1(x, x_a) - A_2(x, x_a)\}', \end{aligned} \tag{E.7}$$

equivalente a (D.9).

De este modo, disponemos de un criterio de identificación y selección de un modelo de fuentes externas agregadas con correlación, o sea, con un grado de información mutua, así como un criterio de agregación de fuentes externas correlacionadas, como el tratado en el Apéndice D.

Apéndice F

Aportación marginal agregativa de una fuente externa a la varianza residual

La aportación marginal V_k^m (en formato normal) de la fuente Fk puede ser obtenida como $V_k^m = V_k - V_{k-1}$. Adoptando el convenio de notación $C_{ii} = N_i^{(k)}$, podemos expresar V_k como

$$V_k = \sum_{i,j=1}^k C_{ij} - \sum_{i,j=1}^k A_j C_{ij} A'_j. \quad (\text{F.1})$$

Extrayendo los términos k -ésimos en los sumatorios de (F.1), expresamos

$$V_k = C_{kk} + \sum_{i=1}^{k-1} (C_{ik} + C_{ki}) + \sum_{i,j=1}^{k-1} C_{ij} - A_k C_{kk} A'_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_k C_{ik} A'_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_j C_{kj} A'_j - \sum_{i,j=1}^{k-1} A_j C_{ij} A'_j.$$

Y, dado que

$$V_{k-1} = \sum_{i,j=1}^{k-1} C_{ij} - \sum_{i,j=1}^{k-1} A_j C_{ij} A'_j,$$

resulta, agrupando términos,

$$V_k^* = C_{kk} - A_k C_{kk} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} (C_{ik} + C_{ki}) + \sum_{i=1}^{k-1} (A_k C_{ik} A'_k + A_i C_{ki} A'_i),$$

o, equivalentemente,

$$V_k^* = C_{kk} - A_k C_{kk} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} \{(C_{ik} - A_k C_{ik} A'_k) + (C_{ik} - A_i C_{ki} A'_i)\}.$$

Análogamente, la aportación marginal V_k^{*m} de la fuente Fk, en un escenario de representación mínima, puede ser obtenida como $V_k^{*m} = V_k^* - V_{k-1}^*$. Adoptando el convenio de notación $Z_{ii} = N_i^{*(k)} = \sum_{j=1}^k X_{i,j}$, podemos expresar V_k^* como

$$V_k^* = \sum_{i,j=1}^k Z_{ij} - \sum_{i,j=1}^k A_j Z_{ij} A'_j. \quad (\text{F.2})$$

Siguiendo el mismo procedimiento, extraemos los términos k -ésimos en los sumatorios de (F.2), y expresamos

$$V_k^* = Z_{kk} + \sum_{i,j=1}^{k-1} Z_{ij} - A_k Z_{kk} A'_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_k Z_{ik} A'_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_j Z_{kj} A'_j - \sum_{i,j=1}^{k-1} A_j Z_{ij} A'_j,$$

donde se ha aplicado la condición $Z_{ik} + Z_{ki} = 0$. Y, dado que

$$V_{k-1}^* = \sum_{i,j=1}^{k-1} Z_{ij} - \sum_{i,j=1}^{k-1} A_j Z_{ij} A'_j,$$

resulta, agrupando términos,

$$V_k^{*m} = Z_{kk} - A_k Z_{kk} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} (A_k Z_{ik} A'_k + A_i Z_{ki} A'_i),$$

o, equivalentemente,

$$V_k^{*m} = Z_{kk} - A_k Z_{kk} A'_k + \sum_{i=1}^{k-1} \{(Z_{ik} - A_k Z_{ik} A'_k) + (Z_{ik} - A_i Z_{ki} A'_i)\}.$$

Apéndice G

Análisis de la deformación covariante entre los tensores núcleo de covarianza incondicional y núcleo de covarianza condicional

Comencemos con un resultado que presentamos como una proposición, cuyo enunciado es el siguiente: ‘Si U es un tensor cuadrado de orden n , cuyos autovalores son reales, no negativos y menores o iguales que 1, y Π el tensor definido como $\Pi = I - U$, se verifica la relación $0 \leq |U| + |\Pi| \leq 1$ ’.

La relación $0 \leq |U| + |\Pi|$ no requiere demostración, ya que se deduce de la condición de no negatividad de los autovalores de U . Sean dichos autovalores $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$, que, como sabemos, son las soluciones de la ecuación característica

$$|U - \lambda I| = 0. \quad (\text{G.1})$$

Llamemos $\omega_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$ a los autovalores del tensor Π , que análogamente son las soluciones de la ecuación característica

$$|\Pi - \omega I| = 0,$$

que podemos expresar alternativamente como

$$|U - (1 - \omega)I| = 0,$$

ecuación que, comparada con (G.1), nos permite afirmar que los autovalores de ambos tensores verifican

$$\lambda_i + \omega_i = 1, i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (\text{G.2})$$

Llamando ahora $u = |N|^{\frac{1}{n}}$ y $\pi = |\Pi|^{\frac{1}{n}}$, podemos expresar

$$\begin{aligned} u &= |N|^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j, \\ \pi &= |\Pi|^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \omega_j \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda_j) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda_j) = \\ &1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \leq 1 - n, \end{aligned}$$

luego se cumple la relación

$$u + \pi \leq 1, \quad (\text{G.3})$$

y, en consecuencia, y dado que se considera que todos los autovalores son menores o iguales que 1, se ha de cumplir $|U| + |\Pi| \leq 1$, como se quería demostrar. En (G.3) la relación de igualdad se produce, evidentemente, cuando todos los autovalores de U (y, por tanto, todos los autovalores de Π) son iguales, y, consecuentemente U y Π son, en ese caso particular, tensores diagonales.

Un resultado inmediato es que también se cumple la relación

$$\text{Tr}(U) + \text{Tr}(\Pi) = n. \quad (\text{G.4})$$

En efecto, a partir de (G.2) obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j = n,$$

equivalente a (G.4).

En el caso que ocupa en esta memoria, en que $n = 4$, la tetradimensión espaciotemporal (y, por, tanto, del tensor de stress, objeto principal del análisis), la expresión (G.4) queda como $\text{Tr}(U) + \text{Tr}(\Pi) = 4$.

Una conclusión inmediata es que los tensores U y Π conmutan, cumpliéndose

$$U\Pi = \Pi U = (U^{-1} + \Pi^{-1})^{-1}. \quad (\text{G.5})$$

Una versión más general del enunciado inicial sería la siguiente: ‘Sean F y G dos tensores cuadrados cuyos autovalores son reales y no negativos.

Entonces se verifica la relación $|F|+|G| \leq |F+G|'$. Para demostrarlo bastaría con construir los tensores $U = (I + FG^{-1})^{-1}$ y $\Pi = (I + GF^{-1})^{-1}$ y aplicar la proposición anterior.

Supongamos ahora que U es un tensor de distancia estacionario, definido por la relación $U = VN^{-1}$, siendo N el tensor de covarianza en un punto espciotemporal x y V el tensor de covarianza residual o condicional (conocido el tensor estocástico de stress en otro punto causalmente conectado y, sin pérdida de generalidad, a una distancia unitaria del punto x). Sea S el tensor diagonal de desviación estándar de N , dado por

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix},$$

y R el tensor simétrico de correlación unitaria de N , tal que

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{01} & \rho_{02} & \rho_{03} \\ \rho_{01} & 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{02} & \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{03} & \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix},$$

de tal modo que podemos expresar N como $N = SRS$. Así, si $N = (\sigma_{ij})$, $j = 0, 1, 2, 3$, cada elemento σ_{ij} es de la forma $\sigma_{ij} = s_i s_j \rho_{ij}$, con $\rho_{ii}, i = 0, 1, 2, 3$.

Análogamente podemos expresar V en la forma $V = WGW$, siendo W el tensor diagonal de desviación estándar de V , dado por

$$W = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix},$$

y G es el tensor simétrico de correlación unitaria de V , cuya forma es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, podemos expresar U en la forma $U = WGS^{-1}R^{-1}S^{-1}$. Diremos que se produce homogeneidad de escala cuando se verifica $WS^{-1} =$

γI , siendo γ un escalar positivo y menor o igual que 1. Esta condición equivale a considerar

$$\gamma = \frac{w_0}{s_0} = \frac{w_1}{s_1} = \frac{w_2}{s_2} = \frac{w_3}{s_3},$$

o sea, que γ constituye un factor único de escala. En este caso podemos expresar $U = \gamma WGR^{-1}S^{-1}$.

Y consideraremos que hay homogeneidad de correlación, o sea, ausencia de distorsión covariante cuando se cumple la condición $GR^{-1} = I$, o sea, cuando los tensores de correlación interna de V y N coinciden, en cuyo caso resulta finalmente $U = \gamma I$, con lo que el tensor de distancia U se reduce a un tensor diagonal cuyos elementos son iguales e igual al factor de escala común a las cuatro componentes. En este último escenario el factor de escala es $u = \gamma$ y el factor de carga de correlación es $\pi = 1 - \gamma$, con lo que el factor de deformación covariante resulta $\tau = 0$.

Como conclusión diremos que en el caso general se cumple $|V| = u|N|$, siendo $\tau \geq 0$, pero sólo en el caso $U = uI$ (homogeneidad de escala y ausencia de distorsión covariante) se verifica $Tr(V^n) = u^n Tr(N^n)$, cumpliéndose además $\tau = 0$.

Para ver las implicaciones que esto tiene en la invariancia de las medidas de complejidad de Cramér-Rao, Fisher-Shannon y López-Mancini-Calbet, recordemos que, para el tensor incondicional ξ , éstas medidas estaban definidas como

$$C_{CR}(N) = F(N)\Delta^2(N),$$

$$C_{FS}(N) = F(N)J_S(N),$$

$$C_{LMC}(N) = D(N)L_S(N),$$

que, en nuestro caso gaussiano, adoptan las expresiones

$$C_{CR}(N) = Tr(N^{-1})Tr(N),$$

$$C_{FS}(N) = Tr(N^{-1})|N|^{\frac{1}{4}},$$

$$C_{LMC}(N) = (4\pi)^{-2} |N|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |N|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Para el tensor condicional se obtienen las expresiones

$$C_{CR}(V) = Tr(V^{-1})Tr(V) = Tr((UN)^{-1})Tr(UN),$$

$$C_{FS}(V) = Tr(V^{-1})|V|^{\frac{1}{4}} = Tr((UN)^{-1})u|N|^{\frac{1}{4}},$$

$$C_{LMC}(V) = (4\pi)^{-2} |V|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |V|^{\frac{1}{2}} = (4\pi)^{-2} |UN|^{-\frac{1}{2}} (2\pi e)^2 |UN|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Luego la medida C_{LMC} es invariante siempre frente a cualquier transformación tensorial U (con las restricciones conocidas relativas al tensor de distancia: autovalores positivos e inferiores a 1).

En cuanto a las medidas C_{CR} y C_{FS} , dado que están calculadas a partir de la traza de determinadas potencias del núcleo de correlación, el resultado es diferente. Dado que, en general, $Tr(UN) \neq u Tr(N)$ y $(Tr(UN))^{-1} \neq u^{-1} (Tr(N))^{-1}$, se cumplirá

$$\begin{aligned} C_{CR}(V) &\neq C_{CR}(N), \\ C_{FS}(V) &\neq C_{FS}(N), \end{aligned} \tag{G.6}$$

salvo en el caso en que el tensor U sea un tensor diagonal, y, por tanto, el efecto de la transformación suponga una reducción homogénea de escala, en cuyo caso sí se produce la igualdad para ambas medidas de complejidad. En otras palabras, las medidas C_{CR} y C_{FS} sólo son invariantes frente a un cambio homogéneo de escala (no siéndolo en el caso de un cambio de escala no homogéneo o un cambio de estructura de correlación, o en el caso más general de una deformación covariante que incluya ambos cambios).

Apéndice H

Aplicabilidad de la ley de conservación al tensor de stress estocástico

El hecho de que un núcleo de covarianza de ruido sea conservado deriva del hecho de que el tensor estocástico deba cumplir esta restricción. La condición de que el tensor de Einstein sea conservado (su divergencia es nula) como consecuencia de las identidades de Bianchi contraídas, es incuestionable, lo que trasladado a la parte derecha de la ecuación de Einstein (1915) conlleva que el tensor de stress deba cumplir necesariamente tal restricción. Esta restricción se mantiene incluso en el modelo de Cartan (1923), que permite incluir una constante cosmológica ('retirada' por Einstein debido a la evidencia experimental de un universo expansivo y actualmente recuperada por razones muy diferentes) sin violar tal restricción (restricción tan aceptable como su antecesora prerrelativista acerca de la conservación de la energía en un sistema cerrado). Al igual que las identidades de Bianchi reducen en 4 los grados de libertad el sistema de 10 ecuaciones de Einstein, la necesidad de aplicar la condición de conservación conllevaría una reducción, a determinar, en los grados de libertad asignados a un tensor de stress consistentemente diagonalizado. Sin embargo, el autor considera que se deben debatir las siguientes circunstancias:

- 1.- En el estudio no se considera un sistema aislado, sea S_0 , sino un sistema afectado por uno o varios sistemas externos 'perturbadores', que agruparemos convencionalmente en un sistema S_1 (distinto de S_0), que es la fuente (o conjunto de fuentes) causante de ξ . Por tanto, la restricción de conserva-

ción debería ser aplicable al tensor de stress del sistema conjunto $\{S0, S1\}$, formado por $S0$ y $S1$, lo que resta evidencia a la aplicabilidad de la restricción directa al tensor ξ . En otros términos, la ecuación a plantear debería adoptar la forma $G_{0,1} = T_0 + \xi_0 + T_1$, donde ξ_0 es el resultado estocástico de la acción ‘forzada’ de $S1$ sobre $S0$.

2.- Si consideramos la ecuación general $G + \Lambda g = T + \xi$, donde Λg es un término que mediante Λ (una constante cosmológica) veces la métrica, intenta captar efectos tan inidentificados como la expansión acelerada del universo provocada por la energía oscura (y obviando la acción de otros sistemas perturbadores adicionales por identificar como la propia materia oscura), es lícito pensar que es posible que lo que actualmente es un modelo que no viola el principio de conservación, en un futuro en que se disponga de una información más completa pueda dejar de serlo, en función de las características atribuibles al parámetro Λ y de su impacto en el modelo cosmológico.

3.- Con objeto de restar gratuidad al apartado anterior recordemos los modelos gravitatorios basados en el Principio Cosmológico Perfecto, como el modelo de Bondi-Gold y especialmente el ‘modelo estacionario’ de Hoyle-Narlikar ([123], Secciones 14.8 y 16.3). Este último requiere para el cumplimiento de la ley de conservación la incorporación de un tensor $C_{\mu\nu}$, tal que $C_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu C$ (donde D_μ y D_ν son operadores derivada covariante respecto a las dos coordenadas μ y ν , respectivamente), siendo C un campo escalar. La ecuación correspondiente de la que se obtendrían las ecuaciones del movimiento del sistema sería $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$, (en su hipotética versión estocástica: $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu}$, donde evidentemente el tensor de stress no es necesariamente conservado, al igual que en la versión determinística, en consonancia con la creación continua de materia en cada punto de un universo expansivo). Este modelo es una mera cita a modo de ejemplo, entendiendo que no dejan de ser los mencionados unos modelos gravitatorios alternativos, que, por ahora, de acuerdo con la evidencia experimental (radiación de fondo de microondas del universo) no concilian como ocurre con otros modelos cosmológicos actualmente aceptados por la comunidad científica.

4.- La argumentación anterior simplemente justifica la falta de una definitiva decisión del autor acerca de una reducción concreta de los grados de libertad del tensor estocástico, lo que requeriría la incorporación de unas ligaduras poco claras. Los grados de libertad (netos de las identidades de Bianchi) en la ecuación de Einstein darían soporte a un uso (limitado en el ámbito relativista, pero libre de restricción de divergencia) de un tensor diagonalizado en forma que facilite el análisis de la incertidumbre asociada a

la aleatoriedad de la materia, así como de la geometría espaciotemporal. En cualquier caso, la reducción de los grados de libertad, como consecuencia de un eventual grado de cumplimiento de la ley de conservación, no afectaría sustancialmente a la propuesta fundamental del estudio, referida a la aplicación coherente de unas medidas teórico-informacionales al tensor estocástico en función de un conjunto disponible de información acerca de dicho tensor. Y en última instancia, y como es preceptivo en todo estudio que se basa en un determinado grado de simplificación acumulada, quedan líneas abiertas diversas de investigación que aborden modelos más cercanos a la compleja realidad física, manteniendo la diferentes niveles de validez geometrodinámica en el modelo resultante.

Apéndice I

Tensores de covarianza cruzada

Se ha visto en el Capítulo 5 que un proceso $\xi(x)$, que admite una representación normal como suma de los procesos tetradimensionales

$$\xi_1(x) = A_1\xi_1(x_a) + \varepsilon_1(x),$$

$$\xi_2(x) = A_2\xi_2(x_a) + \varepsilon_2(x),$$

también admite una representación alternativa, que hemos denominado representación mínima, en suma de dos procesos tetradimensionales mínimamente correlacionados $\xi_{1,x}^*$ y $\xi_{2,x}^*$, tales que

$$\xi_1^*(x) = A_1\xi_1^*(x_a) + \varepsilon_1^*(x),$$

$$\xi_2^*(x) = A_2\xi_2^*(x_a) + \varepsilon_2^*(x).$$

Ambas representaciones son, como se ha visto, equivalentes (en el sentido de compartir la misma función de autocovarianza del proceso $\xi(x)$). Hemos denominado N_1 y N_2 a los núcleos de covarianza respectivos de $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$, y C_{12} al tensor de correlación cruzada (en general, no simétrico), entre ambos procesos, tal que $C_{12} = \langle \xi_1\xi_2' \rangle$ y C_{21} el tensor transpuesto de C_{12} . En relación con la representación mínima se han definido dos núcleos N_1^* y N_2^* de los procesos $\xi_1^*(x)$ que cumplen $N_1^* = N_1 + X_{1,2}$ y $N_2^* = N_2 + X_{1,2}$, siendo $X_{1,2} = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21})$. Los procesos $\xi_{1,x}^*$ y $\xi_{2,x}^*$ son correlacionados, ya que $\langle \xi_1^*\xi_2^{*'} \rangle = Z_{12}$ y $\langle \xi_2^*\xi_1^{*'} \rangle = Z_{21}$, siendo Z_{12} y Z_{21} dos tensores antisimétricos (mutuamente transpuestos), tales que $Z_{12} = \frac{1}{2}(C_{12} - C_{21})$ y $Z_{21} = \frac{1}{2}(C_{21} - C_{12})$.

Como es obvio las características de los tensores C y Z están asociadas a las de los tensores N_1 y N_2 . Veamos esto brevemente. Tal como se expuso, los núcleos N_1 y N_2 admiten las representaciones $N_1 = S_1R_1S_1$ y $N_2 =$

$S_2 R_2 S_2$ utilizando los tensores de dispersión y de correlación interna. Por tanto, podemos plantear para C_{12} y C_{21} unas representaciones tales que

$$\begin{aligned} C_{12} &= S_1 R_{12} S_2', \\ C_{21} &= S_2 R_{21} S_1', \end{aligned}$$

donde los tensores de correlación interna cruzada R_{12} y R_{21} son mutuamente transpuestos y cuyos elementos respectivos $(r_{12,ij})_{i,j=0,1,2,3}$, y $(r_{21,kl})_{k,l=0,1,2,3}$, son reales y menores, en valor absoluto, que 1.

En efecto, podemos expresar que $N_1 = (n_{1,ij})_{i,j=0,1,2,3}$, y $N_2 = (n_{2,kl})_{k,l=0,1,2,3}$ y que $C_{12} = (c_{12,ij})_{i,j=0,1,2,3}$, y $C_{21} = (c_{21,kl})_{k,l=0,1,2,3}$, donde $c_{12,ij} = \langle \xi_1^i \xi_2^j \rangle$ y $c_{21,kl} = \langle \xi_2^k \xi_1^l \rangle$ son unas covarianzas entre componentes de los tensores $\xi_{1,x}$ y $\xi_{2,x}$, de tal modo que

$$\begin{aligned} c_{12,ij} &= \sqrt{n_{1,ii}} r_{12,ij} \sqrt{n_{2,jj}}, \\ c_{21,kl} &= \sqrt{n_{2,kk}} r_{21,kl} \sqrt{n_{1,ll}}, \end{aligned}$$

lo cual impone unas restricciones evidentes a los elementos de C_{12} y C_{21} en función de los elementos de los tensores N_1 y N_2 .

Ahora podemos plantear análogamente para Z_{12} y Z_{21} unas representaciones tales que

$$\begin{aligned} Z_{12} &= S_1^* R_{12}^* S_2'^*, \\ Z_{21} &= S_2^* R_{21}^* S_1'^*, \end{aligned}$$

donde los tensores de correlación interna mutua mínima R_{12}^* y R_{21}^* son anti-simétricos y mutuamente transpuestos, cuyos elementos respectivos $(r_{12,ij}^*)_{i,j=0,1,2,3}$, y $(r_{21,kl}^*)_{k,l=0,1,2,3}$, son reales. Debemos verificar que además son menores, en valor absoluto, que 1. También podemos expresar que $X_{1,2} = (x_{i,j})_{i,j=0,1,2,3}$, donde $x_{1,j} = \frac{1}{2}(c_{12,ij} + c_{21,ij})$ y que $Z_{12} = (z_{12,ij})_{i,j=0,1,2,3}$, y $Z_{21} = (z_{21,kl})_{k,l=0,1,2,3}$, donde $z_{12,ij} = \langle \xi_1^{*i} \xi_2^{*j} \rangle$ y $z_{21,kl} = \langle \xi_2^{*k} \xi_1^{*l} \rangle$ son unas covarianzas entre componentes de los tensores $\xi_{1,x}^*$ y $\xi_{2,x}^*$.

En primer lugar, debido al proceso de construcción de Z_{12} y Z_{21} se cumple

$$z_{12,ij} = \frac{r_{ij}}{2} \{ \sqrt{n_{1,ii} n_{2,jj}} - \sqrt{n_{2,ii} n_{1,jj}} \} = -z_{21,ij}, \quad (\text{I.1})$$

y, por otra parte, dado que $N_1^* = (n_{1,ij}^*)_{i,j=0,1,2,3}$, y $N_2^* = (n_{2,kl}^*)_{k,l=0,1,2,3}$, donde $n_{1,ij}^* = n_{1,ij} + x_{i,j}$ y $n_{2,ij}^* = n_{2,ij} + x_{i,j}$, a partir de la descomposición

tensorial obtenemos

$$z_{12,ij} = \sqrt{n_{1,ii} + x_{i,i}} r_{12,ij}^* \sqrt{n_{2,ii} + x_{i,i}}, \quad (\text{I.2})$$

$$z_{21,ij} = \sqrt{n_{2,ii} + x_{i,i}} r_{21,ij}^* \sqrt{n_{2,ii} + x_{i,i}}, \quad (\text{I.3})$$

por lo que ha de cumplirse $r_{12,ij}^* = -r_{21,ij}^*$.

Relacionando (I.1), (I.2) y (I.3), es fácil obtener el resultado

$$r_{12,ij}^* = \frac{r_{12,ij} \sqrt{n_{1,ii} n_{2,jj}} - r_{12,ji} \sqrt{n_{1,jj} n_{2,ii}}}{2 \sqrt[4]{n_{1,ii} n_{2,jj}} \sqrt{(\sqrt{n_{1,ii}} + r_{12,ii} \sqrt{n_{2,ii}}) (\sqrt{n_{1,jj}} + r_{12,jj} \sqrt{n_{2,jj}})}} = -r_{21,ij}^*.$$

Es fácil verificar que si $(r_{12,ij})$ y $(r_{21,kl})_{k,l=0,1,2,3}$ son reales y menores, en valor absoluto, que 1 (lo cual debe cumplirse como condición para que C_{12} y C_{21} sean tensores de covarianza). Entonces los valores $(r_{12,ij}^*)_{k,l=0,1,2,3}$ y, por tanto, los $(r_{21,kl}^*)_{k,l=0,1,2,3}$ son reales y menores, en valor absoluto, que 1, acorde con la definición de Z_{12} y Z_{21} como tensores de covarianza cruzada.

Apéndice J

Tensor de propagación simétrica de covarianza

Como se ha visto en el Capítulo 4 de la memoria, dado el tensor núcleo de covarianza $N(x)$ en un punto x y el tensor núcleo de covarianza $N(x, x_a)$ entre dos puntos x y x_a , ambos tensores asociados a un proceso estocástico gaussiano de stress, adicional en forma aditiva al tensor de stress de un sistema físico tetradimensional, inducido por una fuente externa a dicho sistema, queda determinado de forma única el tensor de covarianza condicional en el punto x cuando se dispone de la información completa en el punto x_a . En este caso, en que se considera sólo una fuente externa, el modelo propuesto para dicho proceso responde al esquema tensorial markoviano

$$\xi(x) = A(x, x_a)\xi(x_a) + \varepsilon(x, x_a),$$

donde $A(x, x_a)$ es el tensor de propagación de covarianza del proceso, que, además de cumplir la condición de Markov. es lineal y estacionario. Sabemos que $N(x, x_a) = A(x, x_a)N(x)$ y que, llamando $V(x, x_a) = \langle \varepsilon(x, x_a)\varepsilon'(x, x_a) \rangle$ y utilizando, por simplicidad, $A \equiv A(x, x_a)$, $V \equiv V(x, x_a)$ y $N \equiv N(x)$, se obtiene

$$V = N - ANA'.$$

Supongamos ahora que el planteamiento de partida es diferente: se conocen los tensores N y V , siendo A desconocido. Vamos a tratar de obtener A . Llamemos Z al tensor simétrico tal que $Z = N - V$. Sabemos también que el tensor U es el tensor de distancia tal que $U = VN^{-1}$. Luego

$$Z = N - UN = (I - U)N = \Pi N,$$

donde Π es el tensor de carga de correlación. Definamos el tensor X , en general no simétrico, tal que $X = AN^{\frac{1}{2}}$. Entonces podemos expresar

$$Z = XX'. \quad (\text{J.1})$$

Vemos, pues, que en (J.1), dada la simetría de Z , no es posible obtener X de forma única. En efecto, sea $X = (x_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$ y $Z = (z_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$, siendo $z_{ij} = z_{ji}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Entonces, de (J.1) obtenemos el sistema

$$z_{ij} = \sum_{k=0}^3 x_{ik}x_{jk} = z_{ji}. \quad (\text{J.2})$$

El sistema (J.2) es indeterminado, ya que está constituido por 10 ecuaciones independientes y 16 elementos desconocidos a determinar. Por tanto, podemos denominar tensor de propagación admisible A a cualquier tensor de propagación compatible con (J.1), o sea, con el conjunto de información disponible $\{N, V; x, x_a\}$. El conjunto $\{A\}_{x, x_a}$ de tensores de propagación compatibles con (J.1) contiene infinitos elementos. Sin embargo, en $\{A\}_{x, x_a}$ podemos seleccionar un único tensor, denotado como $A^{(S)}$, que denominaremos *tensor de propagación simétrica de covarianza*, que verifica que $A^{(S)}N$ (equivalente a un tensor núcleo de covarianza entre los puntos x y x_a) es simétrico, aunque $A^{(S)}$ no es simétrico, en general.

Por tanto, $A^{(S)}$ es un representante especial del conjunto $\{A\}_{x, x_a}$, que, dada su definición, verifica

$$V = N - A^{(S)}NA^{(S)'} = N - A^{(S)}NA^{(S)'}N^{-1}N = (I - A^{(S)2})N. \quad (\text{J.3})$$

De (J.3) se obtiene

$$A^{(S)2} = \Pi = I - U,$$

y, por tanto,

$$A^{(S)} = \Pi^{\frac{1}{2}} = (I - U)^{\frac{1}{2}}.$$

Dado un tensor de propagación cualquiera A de $\{A\}_{x, x_a}$, se verifica evidentemente $|A| = |A^{(S)}|$, aunque los autovalores de A y $A^{(S)}$ son, en general, diferentes.

Finalmente, hay que aclarar que si A es el tensor de propagación de covarianza de un proceso $\xi(x)$, $A^{(S)}$ es el tensor de propagación de un proceso diferente $\xi^{(S)}(x)$, con un núcleo de covarianza distinto. Los procesos $\xi(x)$

y $\xi^{(S)}(x)$ comparten la información $\{N, V; x, x_a\}$ y, sin embargo, son, obviamente, en general, no equivalentes en covarianza. Generalizando, si A y A' son dos tensores cualesquiera pertenecientes al conjunto $\{A\}_{x, x_a}$, los correspondientes procesos $\xi(x)$ y $\xi^*(x)$, que comparten la información $\{N, V; x, x_a\}$, son, en general, no equivalentes en autocovarianza. Los resultados de este apéndice proporcionan unos criterios aplicables a algunos casos, que se exponen en la Parte III de la memoria, con el objetivo de analizar el grado de exactitud de teorías ‘no exactas’ en los que el tensor de propagación de covarianza no puede ser determinado.

Bibliografía

- [1] Alonso, F.J.; Bueso, M.C.; Angulo, J.M. Dependence assessment based on generalized relative complexity: Application to sampling network design. *Methodol. Comput. Appl. Prob.* **2016**, *18*, 921-933.
- [2] Angulo, J.; Angulo, J.C.; Angulo, J.M. An Application of Information Theory to Stochastic Classical Gravitational Fields. *Physica A* **2018**, *499*, 129-141.
- [3] Angulo, J.C. Information entropy and uncertainty in D-dimensional many-body systems. *Physica A* **1994**, *50*, 311.
- [4] Angulo, J.C., Antolín, J. Atomic complexity measures in position and momentum spaces. *J. Chem. Phys.* **2008**, *128*, 164109.
- [5] Angulo J.C.; Antolín, J.; Sen, K.D. Fisher–Shannon plane and statistical complexity of atoms. *Physica A* **2008**, *372(5)*, 670-674.
- [6] Angulo, J.C., Dehesa, J.S. Tight rigorous bounds to atomic information entropies. *J. Chem. Phys.* **1992**, *97*, 6485.
- [7] Angulo, J.M.; Esquivel, F.J. Multifractal dimensional dependence assessment based on Tsallis mutual information. *Entropy* **2015**, *17*, 5382-5401.
- [8] Angulo, J.M.; Madrid, A.E.; Ruiz-Medina M.D. Entropy Based Correlated Shrinkage of Spatial Random Processes. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **2011**, *25*, 389-402.
- [9] Arnold L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley and Sons: New York, USA, 1973.

- [10] Bartlett, M.S. *An Introduction to Stochastic Processes*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 1978.
- [11] Bondi, H.; Gold, T. The Steady-State Theory of the Expanding Universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **1948**, *108*, 252-270.
- [12] Bouvrie, P.A.; Angulo, J.C.; Antolín, J. A generalized relative complexity: Application to atomic one-particle densities. *Chem. Phys. Lett.* **2012**, *539-540*, 191-196.
- [13] Bueso, M.C.; Qiang C.; Angulo J.M. Stochastic Complexity and Model Selection from Incomplete Data.. *Journal of Statistical Planning and Inference* **1999**, *76*, 273-284.
- [14] Carbó, R.; Leyda, L.; Arnau, M. How similar is a molecule to another? An electron density measure of similarity between two molecular structures. *Int. J. Quant. Chem.* **1980**, *17*, 1185–1189.
- [15] Cartan, É. Sur les varietés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisée I. *Ann. École Norm. Sup.* **1923**, *40*, 325-412.
- [16] Catalán, R.G.; Garay, J.; López-Ruiz, R. Features of the extension of a statistical measure of complexity to continuous systems. *Phys. Rev. E* **2002**, *66*, 011102.
- [17] Collins P.D.B.; Martin, A.D. ; Squires, E.J. *Particle Physics and Cosmology*. John Wiley and Sons: New York, USA, 1989.
- [18] Cover, T.M.; Thomas, J.A. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience: New York, USA, 2006.
- [19] Cramér, H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press: New Jersey, USA, 1968.
- [20] Dehesa, J.S.; Van Assche, W.; Yáñez, R.J. Information Entropy of Classical Orthogonal Polynomials and their Applications to the Harmonic Oscillator and Coulomb Potentials. *J. Methods Appl. Anal.* **1997**, *4*, 91-110.
- [21] Dehesa, J.S.; Yáñez, R.J.; Aptekarev, A.I; Buyarov, V.S.. Strong Asymptotics of Laguerre Polynomials and Information Entropies of 2D Harmonic Oscillator and 1D Coulomb Potentials. *J. Math. Phys.* **1998**, *39*, 3050-3060.

-
- [22] Dehesa, J.S.; Martínez-Finkelshtein, J.; Sánchez-Ruiz, J. Quantum Information Entropies and Orthogonal Polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **2001**, *133*, 23-46.
- [23] Dehesa, J.S.; Martínez-Finkelshtein, J.; Sorokin, V.N. Quantum Information Entropies for highly excited states of single-particle systems with power-type potentials. *Phys. Review* **2002**, *66(062190)*, 1-7.
- [24] Dehesa, J.S.; Martínez-Finkelshtein, J.; Sorokin, V.N. Short-wave asymptotics of the Information Entropy of a circular membrane. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **2003**, *12(11)*, 2387-2392.
- [25] Dehesa, J.S.; Martínez-Finkelshtein, J.; Sorokin, V.N. Asymptotics of Information Entropies of some Toda-like potentials. *J. Math. Phys.* **2003**, *44(1)*, 36-47.
- [26] Dehesa J.S.; Toranzo I.V.; Puertas-Centeno D. Entropic measures of Rydberg-like harmonic states. *International Journal of Quantum Chemistry* **2017**, *17(1)*, 48-56.
- [27] Dembo, A.; Cover, T.A.; Thomas, J.A. Information theoretic inequalities. *IEEE Trans. Inf. Theory* **1991**, *37*, 1501-1518.
- [28] Dirac, P.A.M. *Lectures in Quantum Field Theory*. Academic Press: New York, USA, 1966.
- [29] Dirac, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press: Oxford, UK, 1982.
- [30] Edelman, A.; Rao, N.R. Random Matrix Theory. *Cambridge University Press* **2005**, *Acta Numerica*, 1-65.
- [31] Einstein, A. Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equations of Gravitation). *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1915**, *part 2*, 844-847.
- [32] Einstein, A. A Generalized Theory of Gravitation. *Rev. Mod.* **1948**, *20*, 35.
- [33] Eisberg R.; Resnick R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. John Wiley and Sons, Inc.: New York, USA, 1974.

BIBLIOGRAFÍA

- [34] Esquivel, F.J.; Alonso F.J.; Angulo, J.M. Multifractal Complexity Analysis in Space-Time Based on the Generalized Dimensions Derivatives. *Spatial Statistics* **2017**, *22(Parte 2)*, 469-480.
- [35] Fewster, C.J.; Ford, L.H.; Roman, T.A. Probability distributions for quantum stress tensors in four dimensions. *Phys. Rev. D* **2012**, *85*, 125038.
- [36] Feynman, R.P. Spacetime Approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Modern Phys.* **1948**, *20*, 367-387.
- [37] Feynman, R.P. The Theory of Positrons. *Phys. Rev.* **1949**, *76*, 749.
- [38] Feynman R.P. *Feynman Lectures on Gravitation*. California Institute Technology: California, USA, 1995.
- [39] Fisher, R.A. Theory of statistical estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **1925**, *22*, 700-725.
- [40] Fock V.A. *Fundamentals of Quantum Mechanics*. URSS Publishers: Moscow, RUSSIA, 1976.
- [41] Galley, C.R.; Hu, B.L. Self-force with a stochastic component from radiation reaction of a scalar charge moving in curved spacetime. *Phys. Rev. D* **2005**, *72*, 084023.
- [42] Galley, C.R.; Hu, B.L.; Lin, S.-Y. Electromagnetic and gravitational self-force on a relativistic particle from quantum fields in curved space. *Phys. Rev. D* **2006**, *74*, 024017.
- [43] Gell-Mann M.; Ne'eman, Y. *The Eightfold Way*. W.A. Benjamin, Inc.: New York, USA, 2000.
- [44] Ghiman I.I.; Skorohod A.V. *The theory of Stochastic Processes I*. Springer-Verlag: New York, USA and Berlin, DEUTSCHLAND, 1976.
- [45] Girault, M. *Stochastic Processes*. Springer Verlag New York, Inc.: New York, USA, 1966.
- [46] Gnedenko, A. *The Theory of Probability*. Mir Publishers: Moscow, RUSSIA, 1969.
- [47] Gold T. The Arrow of Time. *Am. J. Phys.* **1962**, *30*, 403.

-
- [48] Guth A. *The Inflationary Universe*. Jonathan Cape: London, UK, 1997.
- [49] Hartle, J.B.; Hawking, S.W. The Wave Function of the Universe. *Phys. Rev.* **1983**, *D28*, 2960.
- [50] Hawking S.W.; Ellis G.F.R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press: Cambridge UK and New York, USA, 1973.
- [51] Hawking, S.; Penrose R. The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **2017**, *A314*, 529-548.
- [52] Heisenberg W.. *The Physical Principles of Quantum Theory*. University of Chicago Press: Chicago, USA, 1939.
- [53] Hestenes, D. The Zitterwebeugung Interpretation of Quantum Mechanics. *Found. Physics* **1990**, *20(10)*, 1213-1232.
- [54] Hoyle, F. A New Model for the Expanding Universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **1948**, *108*, 372.
- [55] Hoyle, F.; Narlikar, J.V. A New Theory of Gravitation. *Ann. Phys.* **1969**, *54*, 191-207.
- [56] Hu, B.L. Stochastic gravity. *Int. J. Theor. Phys.* **1999**, *38*, 2987-3037.
- [57] Hu, B.L.; Verdaguer, E. Stochastic gravity: A primer with applications. *Class. Quantum Grav.* **2003**, *20*, R1-R42.
- [58] Hu, B.L.; Verdaguer, E. Stochastic Gravity: Theory and applications. *Living Rev. Relativity* **2008**, *11(3)*, 1-100.
- [59] Hyman, A.S.; Yaniger, S.I.; Liebman, J.F. Interrelations among X-ray scattering, electron densities, and ionization potentials. *Int. J. Quantum Chem.* **1978**, *14*, 757-766.
- [60] Ivanenko, D.D.; Sardanashvili, G.A. *Gravitación*. URSS: Moscow, Russia, 2004.
- [61] Jordan, T.F. *Quantum Mechanics in Simple Matrix Form*. John Wiley and Sons, Inc.: New York, USA, 1986.
- [62] Kiefer, C. *Quantum Gravity*. Oxford University Press: New York, USA, and Oxford, UK, 2010.

BIBLIOGRAFÍA

- [63] Landau L.D.; Lifshitz, E.M. *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*. Butterworth-Heinemann: Oxford, UK, 1958.
- [64] Lichnerowicz A. *Elements de Calcul Tensoriel*. Max Leclerc et Cie: Paris, France, 1950.
- [65] Loève, M. *Probability Theory*. Van Nostrand Reinhold: New York, USA, 1963.
- [66] López-Rosa, S.; Angulo, J.C.; Antolín, J. Rigorous properties and uncertainty-like relationships on product-complexity measures: Application to atomic systems. *Physica A* **2009**, *388*, 2081-2091.
- [67] López-Rosa S.; Molina-Spiritu M.; Esquivel R.O.; Soriano-Correa C.; Dehesa J.S. Study of the Chemical Space of Selected Bacteriostatic Sulfonamides from an Information Theory Point of View. *Chemphyschem* **2016**, *17(23)*, 4003-4010.
- [68] López-Ruiz, R.; Mancini, H.L.; Calbet, X. A statistical measure of complexity. *Phys. Lett. A* **1995**, *209*, 321–326.
- [69] Martín, R.; Verdaguer, E. Stochastic semiclassical gravity. *Phys. Rev. D* **1999**, *60*, 084008.
- [70] Martín, R.; Verdaguer, E. On the semiclassical Einstein-Langevin equation. *Phys. Lett. B* **1999**, *465*, 113-118.
- [71] Minkowski H. Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, *10*, **1909**, p.104.
- [72] Moffat, J.W. Stochastic Gravity. *Phys. Rev D*. **1997**, *56(10)*, 6264.
- [73] Misner, C.W.; Thorne K.S.; Wheeler J.A. *Gravitation*. W. H. Freeman: San Francisco, USA, 1973.
- [74] Molina-Espíritu, M.; Esquivel, R.O.; Angulo, J.C.; Dehesa, J.S. Concurrent phenomena at the reaction path of the S_N2 reaction CH₃Cl+F⁻. Information planes and statistical complexity analysis. *Entropy* **2013**, *15*, 4084-4104.
- [75] Mukhanov V.F.; Winitzki, S. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 2007.

-
- [76] Oksendal B.L. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer: New York, USA and Berlin DEUTSCHLAND, 1998.
- [77] Onicescu, O. Théorie de l'information. Énergie informationnelle. *C.R. Acad. Sci. Paris A* **1966**, 263, 841-842.
- [78] Oriti D. (ed.) *Approaches to Quantum Gravity*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 2000.
- [79] Parker L.; Toms, D. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 2009.
- [80] Parzen, E. *Stochastic Processes*. Holden Day, Inc.: San Francisco, USA, 1971.
- [81] Penrose R. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Physical Universe*. Random House Group Ltd: London, UK, 2004.
- [82] Penrose R.; Rindler, W. *Spinors and Spacetime: Two-Spinors Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 1984.
- [83] Peña D.; Rodríguez J. Descriptive measures of multivariate scatter and linear dependence. *Journal of Multivariate Analysis* **2003**, 85, 361-374.
- [84] Pipek, I.; Varga, I. Universal classification scheme for the spatial-localization properties of one-particle states in finite, d -dimensional systems. *Phys. Rev. A* **1992**, 46, 3148-3163.
- [85] Puertas-Centeno D.; Toranzo I.V.; Dehesa J.S. Biparametric complexities and generalized Planck radiation law. *Journal of Physics A* **2017**, 50(50), 505001.
- [86] Puertas-Centeno D.; Temme N.M.; Toranzo I.V.; Dehesa J.S. Entropic uncertainty measures for large dimensional hydrogenic systems. *Journal of Mathematical Physics* **2017**, 58(10), 103302.
- [87] Renyi A. *Calcul des Probabilités: avec un Appendice sur la Théorie de l'Information*. Dunod: Paris, FRANCE, 1966.
- [88] Renyi A. *A Diary on Information Theory*. John Wiley and Sons, Inc.: New York, USA, 1987.

BIBLIOGRAFÍA

- [89] Resnick, M. *Introduction to Special Relativity*. John Wiley and Sons, Inc.: New York, USA, 1968.
- [90] Rickles D.; French, S.; Saatsi, J. *The Structural Foundations of Quantum Gravity*. Oxford University Press: New York, USA, and Oxford, UK, 2006.
- [91] Romera, E.; Dehesa, J.S. The Fisher–Shannon information plane, an electron correlation tool. *J. Chem. Phys.* **2004**, *120*, 8906-8912.
- [92] Rovelli, C. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press: New York, USA, and Oxford, UK, 2010.
- [93] Rumpf, H. Stochastic quantization of Einstein gravity. *Phys. Rev.* **1986**, *33*, 942.
- [94] Salicrú, M. Measures of Information Associated with Csiszár’s Divergences. *Kybernetika* **1994**, *30*, 563-573.
- [95] Sánchez-Moreno, P.; Plastino, A.R.; Dehesa, J.S. A quantum uncertainty relation based on the Fisher’s information. *J. Phys. A: Mth. Gen* **2010**, *44(6)*, 065301.
- [96] Satin, S. Classical Einstein-Langevin equation and proposed applications. arXiv:1509.08196v3 [gr-qc] 31 Dec 2016.
- [97] Sazánov, A.A. *El Universo Tetradsimensional de Minkowski*. Editorial Mir: Moscú, Rusia, 1988.
- [98] Schrödinger, E. *Expanding Universes*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 1956.
- [99] Schwinger J. *Quantum Electrodynamics*. Dover: New York, USA, 1958.
- [100] Sen, K.D.; Antolín, J.; Angulo, J.C. Fisher-Shannon analysis of ionization processes and isoelectronic series. *Phys. Rev. A* **2007**, *76*, 032502
- [101] Sen, K.D. (Ed.). *Statistical Complexity: Applications in Electronic Structure*. Springer: Dordrecht, Netherlands, 2011.
- [102] Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal* **1948**, *27*, 379-423 and 623-656.

-
- [103] Shannon C.E. Communication Theory of Secrecy Systems. *Bell System Technical Journal* **1949**, *28*, 656-715.
- [104] Shannon C.E.; Weaver, W. *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press: Illinois, USA, 1998.
- [105] Shrock, R. *Neutrinos and Implications for Physics Beyond the Standard Model*. World Scientific: Singapur, SINGAPUR, 2003.
- [106] Silk, J.; Rees, M. Quasars and Galaxy Formation. *Astronomy and Astrophysics* **1998**, *331*, L1-L4.
- [107] Sobrino-Coll N.; Puertas-Centeno D.; Toranzo I.V.; Dehesa J.S. Biparametric complexities and generalized Planck radiation law. *Journal of Statistical Mechanics* **2017**, 083102.
- [108] Spivak M. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. W. A. Benjamin, Inc: New York, USA, 1971.
- [109] Tegmark M. Is ‘The Theory of Everything’ Merely the Ultimate Ensemble Theory?. *Annals of Physics* **1998**, *270*, 1-51
- [110] Tegmark M. *Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. Knopf Doubleday Publishers: New York, USA, 2003.
- [111] ’t Hooft, G. *Quantum Gravity: a fundamental problem and some radical ideas (in Recent Developments in Gravitation)*. M. Levy and S. Deser: New York, USA, 1978.
- [112] Tipler F.J. *The Physics of Inmortality*. Doubleday: New York, USA, 1994.
- [113] Toranzo I.V.; Sánchez-Moreno P.; Rudnicki L.; Dehesa J.S. One-Parameter Fisher–Rényi Complexity: Notion and Hydrogenic Applications. *Entropy* **2017**, *19(1)*, 16.
- [114] Tsallis C. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections. *Brazilian Journal of Physics* **1999**, *29*, n.1,1-35.
- [115] Verdaguer, E. Validity of semiclassical gravity in the stochastic gravity approach. *Braz. J. Phys.* **2005**, *35(2A)*, 271-279.

- [116] Verdaguer, E. Stochastic gravity: beyond semiclassical gravity. *J. Phys. Conf. Ser.* **2007**, *66*, 012006.
- [117] Vilenkin, A. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. Cambridge University Press: New York, USA, and Cambridge, UK, 2000.
- [118] Wald, R.M. The backreaction effect in particle creation in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.* **1977**, *54*, 1-19.
- [119] Wald, R.M. Trace anomaly of a conformally invariant quantum field in curved space-time. *Phys. Rev. D* **1978**, *17*, 1477-1484.
- [120] Wald, R.M. *General Relativity*. The University of Chicago Press: Chicago, USA, and London, UK, 1984.
- [121] Wald, R.M. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. The University of Chicago Press: Chicago, USA, 1994.
- [122] Wang, Q.; Zhu, Z.; Unruh W.G. How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the Universe. *Phys. Rev.* **2017**, *95*, 103504.
- [123] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, Inc.: New York, USA, 1972.
- [124] Wheeler J.A. *Geometrodynamics and the Issue on the Final State*. Gordon and Breach: New York, USA, 1965.
- [125] Yndurain F.J. *Mecánica Cuántica*. Ariel Ciencia: Barcelona, SPAIN, 2003.
- [126] Zee, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press: New Jersey, USA, 2003.
- [127] Zozor, V.; Vignat, C. On classes of non-Gaussian asymptotic minimizers in entropic uncertainty principles. *Physica A* **2006**, *375*, 499-517.