FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

ALGEBRAS MULTIPLICATIVAMENTE PRIMAS:
VISION ALGEBRAICA Y ANALITICA

AMIR ABDULILLAH MOHAMMED

UNIVERSIDAD DE GRANADA

2000

Memoria realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. D. Miguel Cabrera García, profesor titular de la Universidad de Granada, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, por la Universidad de Granada.

V^{o}. B^{o}. El Director

Fdo.: Miguel Cabrera García

Aspirante al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas:

Fdo.: Amir Abdulillah Mohammed

Al alma de mi hermano Abdulnaser.

INDICE

INTRODUCCION

En este trabajo introducimos e iniciamos el estudio de las álgebras multiplicativamente primas y de las álgebras totalmente multiplicativamente primas. Las primeras aparecen naturalmente cuando se profundiza en la interrelación de los centroides extendidos y de las clausuras centrales de un álgebra y de su álgebra de multiplicación. Las segundas surgen del fortalecimiento analítico de una caracterización en términos de operadores de las primeras, y resultan ser especialmente interesantes ya que permiten un tratamiento analítico de la clausura central, así como, cuando se está en contexto asociativo, de las álgebras de cocientes.

Con la intención de señalar puntos de referencia que permitan situar nuestro trabajo, así como concretar los pilares en los que este se sustenta, incluiremos varias citas bibliográficas. Así, para apreciar el papel que desempeña el álgebra de multiplicación en varios campos pueden consultarse los libros [26], [50], [28], [53], [35], [52] y los artículos [21], [19], [22], [40], [41], [42], [45], [46], [14], [5], [6] y [30]. En lo que respecta al centroide extendido y a la clausura central pueden consultarse [29], [31], [18], [2], [9] y [47]. Para estos conceptos en contexto asociativo remitimos al libro de reciente aparición [3], que además es nuestra referencia estándar para la teoría de anillos de cocientes y de identidades polinomiales generalizadas. En lo que respecta a la teoría de operadores y a la teoría de las álgebras normadas citaremos los libros [51], [44], [39], [37], [35], y [38], y el artículo recopilatorio [46].

A lo largo de todo este trabajo, salvo que se especifique otra cosa, todas las álgebras se entenderán no nulas y no necesariamente asociativas sobre un cuerpo K. El *álgebra de multiplicación* $M(A)$ de un álgebra A se define como la subálgebra de $L(A)$ (el álgebra de todos los operadores lineales en A) generada por el operador identidad Id_A y los operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha:

$$L_a : A \longrightarrow A \quad \text{y} \quad R_a : A \longrightarrow A .$$
$$x \longmapsto ax \qquad\qquad x \longmapsto xa$$

No tiene por qué ocurrir que bondades del álgebra A se transfieran a su álgebra de multiplicación. Así, por ejemplo, si A es un álgebra simple (de producto no nulo y carente de ideales propios no nulos) su álgebra de multiplicación puede no ser simple [**41**; Teorema 2.5]. Lo mismo ocurre con la primidad y la semiprimidad como se muestra en los ejemplos I.4.1 y I.5.9. Recordemos que un álgebra A se dice semiprima si carece de ideales de cuadrado cero y se dice prima si verifica que el producto de dos ideales no nulos es no nulo.

En la teoría de descripción y clasificación de las álgebras semiprimas desempeñan un papel primordial los conceptos de centroide extendido y de clausura central. El centroide extendido $C(A)$ de un álgebra semiprima A es un anillo regular von Neumann que extiende a K, mientras que la clausura central $Q(A)$ de A es un álgebra extensión de A, semiprima, generada por A como $C(A)$-álgebra, y cuyo centroide extendido es igual a $C(A)$.

En el primer capítulo abordamos el estudio de la relación existente entre los centroides extendidos y las clausuras centrales de un álgebra semiprima y de su álgebra de multiplicación. El principal resultado que obtenemos es el siguiente:

Principal resultado del Capítulo I (Teoremas I.3.2. y I.4.11)

Si A es un álgebra asociativa semiprima con centroide extendido $C(A)$ y con clausura central $Q(A)$, entonces:

i) $M(A)$ es un álgebra semiprima, y

ii) el centroide extendido de $M(A)$ es isomorfo a $C(A)$ y la clausura central de $M(A)$ es isomorfa a $M(Q(A))$.

Este resultado lo conseguimos en dos etapas. En la primera nos ocupamos de establecer la parte ii), incluso en ambiente no necesariamente asociativo, si bien exigimos de partida la semiprimidad de $M(A)$. A las álgebras semiprimas con álgebra de multiplicación semiprima se les llamará *multiplicativamente semiprimas*. Con esta terminología podemos enunciar el resultado obtenido como sigue.

Teorema I.3.2.

Si A es un álgebra multiplicativamente semiprima con centroide extendido $C(A)$ y con clausura central $Q(A)$, entonces el centroide extendido de $M(A)$ es isomorfo a $C(A)$ y la clausura central de $M(A)$ es isomorfa a $M(Q(A))$.

En realidad la formulación inicial que hacemos es más general en dos aspectos, ya que nos proponemos, por una parte, reemplazar $M(A)$ por álgebras de operadores $\mathfrak{B}$ en A que contengan a $M(A)$, y por otra, no exigir a priori la semiprimidad de dichas álgebras de operadores. En este esquema, y tras un análisis del papel jugado por los ideales esenciales (ideales que tienen intersección no nula con todo ideal no nulo) de $M(A)$ en el precedente obtenido en [5], cobran protagonismo los ideales de $\mathfrak{B}$ que tienen anulador derecho cero (ideales $\mathfrak{P}$ para los que la condición $\mathfrak{P}F=0$ implica $F=0$). En este punto, resultará providencial el tratamiento dado por K. McCrimmon en [36] al álgebra simétrica de cocientes de Martindale relativa a un filtro de denominadores para un álgebra asociativa no necesariamente semiprima. Así, nos planteamos la determinación del centroide extendido $C(A)$ de un álgebra semiprima dada A a través de un álgebra de operadores $\mathfrak{B}$ que contiene a $M(A)$, y en la que se ha considerado el filtro de denominadores $\mathfrak{D}$ formado por todos los ideales de $\mathfrak{B}$ que tienen anulador derecho cero. En este contexto determinamos propiedades relativas a $\mathfrak{B}$ que permiten obtener un isomorfismo de $C(A)$ sobre el centro $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ de $Q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ (el álgebra simétrica de cocientes de Martindale del álgebra de denominadores $(\mathfrak{B},\mathfrak{D})$), así como considerar a la subálgebra $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\mathfrak{B}$ de $Q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ como un álgebra de operadores en $Q(A)$ que contiene a $M(Q(A))$.

La aplicación más relevante de estos resultados aparece cuando $\mathfrak{B}$ es igual a la propia álgebra de multiplicación, y en ese caso, supuesta A multiplicativamente semiprima se obtiene el teorema anterior. Así mismo, en este contexto, se obtiene como consecuencia que cualquier subálgebra de $Q(A)$ que contenga a A es multiplicativamente semiprima. Igualmente aplicamos los resultados anteriores en dos ambientes especialmente interesantes: (1) A es un álgebra semiprima normada y $\mathfrak{B}$ es un álgebra de operadores en A que contiene a $M(A)$ y que está contenida en el cierre de $M(A)$ para la topología fuerte de operadores (Teorema I.3.9), y (2) A es un álgebra asociativa semiprima y $\mathfrak{B}$ es el álgebra $\mathcal{E}\ell(A)$ de todos los operadores elementales en A (Teorema I.4.15).

El hecho de que la clase de las álgebras multiplicativamente semiprimas es muy extensa queda patente por la diversidad de álgebras que contiene: las álgebras fuertemente semiprimas (Proposición I.4.5), las álgebras semiprimas con centroide grande (Proposición I.4.7), las álgebras semiprimas con una forma bilineal asociativa simétrica no-degenerada (Proposición I.4.8), y las álgebras normadas anuladoras generalizadas (Proposición I.4.9). Pero sin lugar a duda el mejor argumento que se puede dar para justificar la abundancia de álgebras multiplicativamente semiprimas es el siguiente teorema que concluye la segunda etapa del principal resultado del Capítulo I.

Teorema I.4.11.

Toda álgebra asociativa semiprima es multiplicativamente semiprima.

La demostración que hacemos de este resultado utiliza la teoría de identidades polinomiales generalizadas, y más concretamente descansa en nuestro siguiente teorema.

Teorema I.4.13.

Sea A un álgebra asociativa semiprima, y sea $\phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} p_i\mathbf{x}q_i$ una identidad polinomial generalizada lineal en la variable $\mathbf{x}$ y con coeficientes en el álgebra simétrica de cocientes de Martindale de A. Si, para cualesquiera que sean a,b en A, se verifica que $\phi(a\phi(\mathbf{x})b)$ es una identidad polinomial generalizada satisfecha por A, entonces $\phi=0$.

Puesto que la primidad de un álgebra semiprima se caracteriza por el hecho de que su centroide extendido sea un cuerpo, se sigue de nuestros resultados que si A es un álgebra multiplicativamente semiprima entonces A es prima si, y sólo si, $M(A)$ es prima. Diremos que un álgebra A es *multiplicativamente prima* cuando tanto A como $M(A)$ sean álgebras primas. El comentario que ha motivado la introducción del concepto indica dos caracterizaciones de la multiplicativa-primidad que se recogen en la Proposición I.5.1, en la que además aparece, entre otras, una caracterización en términos de operadores, que será trascendental para el resto de nuestro trabajo.

Caracterización de la multiplicativa-primidad en términos de W-operadores (Proposición I.5.1)

Un álgebra de producto no cero A es multiplicativamente prima si, y sólo si, para F en $M(A)$ y a en A, la condición $W_{F,a}=0$ implica que $F=0$ o $a=0$, donde $W_{F,a}$ es la aplicación de $M(A)$ en A definida por

$$W_{F,a}(G):=FG(a)$$

para todo G en $M(A)$.

El comportamiento de la multiplicativa-primidad con respecto al proceso de extensión de escalares es análogo al exhibido para la primidad en [**18**; Teoremas 3.5 y 3.6] como probamos en los siguientes dos teoremas. Recordemos que un álgebra prima se dice *centralmente cerrada* si la inclusión canónica del cuerpo de base en el centroide extendido es sobreyectiva.

Teorema I.5.11.

Sea A un álgebra multiplicativamente prima centralmente cerrada sobre K. Si Φ es un cuerpo extensión de K, entonces la extensión escalar

$\Phi \otimes_K A$ *es un álgebra multiplicativamente prima centralmente cerrada sobre* Φ.

Teorema I.5.12.

Sea A *un álgebra multiplicativamente prima, y sea* Φ *un cuerpo extensión de* K. *Entonces existe una* Φ*-álgebra multiplicativamente prima* B *que contiene a* A *como* K*-subálgebra y que está* Φ*-generada por* A.

Terminamos el Capítulo I dando una condición analítica que implica la multiplicativa-primidad y que descansa en resultados de [12].

Proposición I.5.14.

Sea A *un álgebra real normada, y supóngase que todo ideal no nulo de* $M(A)$ *contiene a un operador que es un isomorfismo topológico sobre su imagen. Entonces* A *es un álgebra multiplicativamente prima y el centroide extendido de* A *es isomorfo a* $\mathbb{R}$ *o a* $\mathbb{C}$.

El concepto de álgebra ultraprima apareció por primera vez en la Tesis Doctoral de M. Mathieu [32], en ambiente asociativo. En dicho trabajo desempeñó un papel importante la caracterización de la primidad de un álgebra asociativa en términos de los operadores de multiplicación bilátera: *Un álgebra asociativa* A *es prima si, y sólamente si, para cualesquiera que sean* $a,b\in A$, *la condición* $M_{a,b}=0$ *implica que* $a=0$ *o* $b=0$, *donde* $M_{a,b}$ *es la aplicación de* A *en* A *definida por*

$$M_{a,b}(x):=axb$$

para todo x *en* A.

M. Mathieu utilizó esta caracterización para obtener una condición intrínseca que caracteriza a la ultraprimidad en ambiente asociativo evitando el uso de ultrapotencias y que hoy día es usual encontrarla como definición de álgebra asociativa ultraprima: Un álgebra asociativa normada A es *ultraprima* si, y sólamente si, existe una constante positiva K tal que

$$K\|a\|\|b\|\leq\|M_{a,b}\|$$

para cualesquiera $a,b\in A$.

El hecho de que las álgebras asociativas ultraprimas resulten del fortalecimiento analítico de la caracterización de la primidad en términos de los M-operadores invita a considerar aquellas álgebras que surgen del fortalecimiento analítico de conceptos algebraicos expresables de manera similar en términos de convenientes operadores. Este proceder se ha llevado a cabo, que sepamos, en [**10**] y en dos ocasiones en [**11**]. Así por ejemplo, en [**10**] se introdujo el concepto de álgebra totalmente prima a partir de la siguiente caracterización de la primidad: Un álgebra A es prima si, y sólamente si, para cualesquiera que sean a,b en A, la condición $N_{a,b}=0$ implica $a=0$ o $b=0$, donde $N_{a,b}$ denota la aplicación bilineal de $M(A)\times M(A)$ en A definida por $N_{a,b}(F,G)=F(a)G(b)$ para cualesquiera F,G en $M(A)$. El fortalecimiento analítico de esta caracterización de la primidad en términos de N-operadores lleva a la siguiente definición [**10**]: Un álgebra normada A se dice *totalmente prima* si existe una constante positiva K tal que

$$K\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$$

para cualesquiera a,b en A.

En esta línea, nosotros introducimos las álgebras normadas que resultan del fortalecimiento analítico de la antes citada caracterización en términos de W-operadores de la multiplicativa-primidad.

Definición II.1.1.

Un álgebra normada $(A, \|.\|)$ se dice que es *totalmente multiplicativamente prima* (abreviadamente *t.m.p.*) si es de producto no cero y existe una constante positiva K tal que

$$K\|F\|\|a\| \leq \|W_{F,a}\|$$

para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A.

Probamos que toda álgebra t.m.p. es totalmente prima (Proposición II.1.7), y por tanto la clase de las álgebras totalmente primas proporciona un marco común para las álgebras t.m.p. y para las álgebras ultraprimas [**10**; Teorema 3]. También, hablando un tanto alegremente, probamos que las álgebras t.m.p. son aquellas álgebras normadas cuya álgebra de multiplicación es ultraprima (Proposición II.1.5).

El principal resultado del Capítulo II discute el centroide extendido y la clausura central de las álgebras t.m.p.

Principal resultado del Capítulo II (Proposición II.2.1 y Teorema II.2.4)

Si $(A, \|.\|)$ es un álgebra real t.m.p., entonces el centroide extendido $C(A)$ de A es isomorfo a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$. Si $C(A)$ es isomorfo a $\mathbb{C}$, entonces existe una norma compleja de álgebra $|.|$ en la clausura central $Q(A)$ de A tal que *i) Las inclusiones de* $(A, \|.\|)$ *en* $(Q(A), |.|)$ *y de* $(M(A), \|.\|)$ *en* $(M(Q(A)), |.|)$ *son topológicas;*

ii) $(Q(A), |.|)$ *es t.m.p.; y*

iii) Si Q *es una subálgebra de* $Q(A)$ *que contiene a* A *y* $[\![.]\!]$ *es una norma de álgebra en* Q *tal que las inclusiones de* $(A, \|.\|)$ *en* $(Q, [\![.]\!])$ *y de* $(M(A), \|.\|)$ *en* $(M(Q), [\![.]\!])$ *son topológicas, entonces las inclusiones de* $(Q, [\![.]\!])$ *en* $(Q(A), |.|)$ *y de* $(M(Q), [\![.]\!])$ *en* $(M(Q(A)), |.|)$ *son continuas.*

Como consecuencia se sigue que las álgebras complejas t.m.p. son centralmente cerradas. Además, si A es un álgebra compleja normada, entonces A es t.m.p. si, y sólamente si, el álgebra real normada subyacente $A_{\mathbb{R}}$ lo es.

Ejemplos de álgebras t.m.p. que no son ultraprimas aparecen en el estudio de las H*-álgebras. Recordemos que las H*-álgebras primas son ejemplos no triviales de álgebras totalmente primas [**10**; Teorema 1]. Esta información se mejora en el siguiente resultado.

H*-álgebras primas (Teorema II.3.1).

Toda H-álgebra prima es un álgebra t.m.p.*

Concretamente:

i) Si A es una H-álgebra compleja prima, entonces*

$\|W_{F,a}\| = \|F\| \|a\|$ *para cualesquiera* F *en* $M(A)$ *y* a *en* A.

ii) Si A es una H-álgebra real prima, entonces*

$\|W_{F,a}\| \geq 2^{-1/2} \|F\| \|a\|$ *para cualesquiera* F *en* $M(A)$ *y* a *en* A.

Ejemplos de álgebras ultraprimas, más aún, absolutamente valuadas, que no son t.m.p. aparecen con el estudio de las álgebras no asociativas libres dotadas con una norma clásica $\|.\|_p$ $(1\leq p\leq\infty)$.

Algebras no asociativas libres con normas clásicas (Proposición II.3.11 y Teorema II.3.12).

Sea A el álgebra no asociativa libre sobre $\mathbb{K}$ generada por un conjunto no vacio X, y para $1\leq p\leq+\infty$ considérese en A la ℓ_p-norma clásica $\|.\|_p$ relativa a la base U de todas las palabras no asociativas formadas a partir de los elementos de X. Entonces:

i) $M(A)$ es el álgebra asociativa unital libre sobre $\mathbb{K}$ generada por el conjunto $Y=\{L_u,R_u : u\in U\}$, y

ii) $(A,\|.\|_p)$ es un álgebra t.m.p. si, y sólamente si, $p=1$.

Además, cuando $p=1$ la correspondiente norma de operadores en $M(A)$ es también la ℓ_1-norma clásica relativa a la base constituida por la unidad y todas las palabras asociativas formadas a partir de los elementos de Y, y se verifica que

$$\|W_{F,a}\|_1=\|F\|_1\|a\|_1$$

para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A.

El éxito que se ha tenido en el estudio de la clausura central de las álgebras t.m.p. parece invitar a que en contexto asociativo se puedan alcanzar resultados análogos para álgebras de cocientes. Sin embargo, la H*-álgebra de los operadores de Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert infinito dimensional pone de relieve que ello no es esperable. Este contratiempo hace que replanteemos el problema en el sentido de encontrar subálgebras de las álgebras de cocientes que sean "álgebras analíticas de cocientes" (esto es, que puedan ser dotadas de una estructura analítica que produzca resultados análogos a los exhibidos para la clausura central en el Teorema II.2.4). En esta línea hay que citar como precedente los resultados obtenidos por M. Mathieu en [33] y [**34**], los cuales pueden interpretarse en el sentido de que el álgebra acotada de cocientes es un "álgebra analítica de cocientes" para la clase de las álgebras asociativas ultraprimas.

Recordemos que el *álgebra derecha de cocientes* de un álgebra asociativa semiprima A, denotada aquí por $Q^{r}(A)$, puede definirse como el álgebra maximal en el conjunto de las álgebras Q que son extensión de A y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Para cada $q \in Q$ existe un ideal esencial I de A tal que $qI \subseteq A$.

(ii) Si $q \in Q$ es tal que $qI=0$ para algún ideal esencial I de A, entonces $q=0$.

Para q en $Q^{r}(A)$ e I ideal de A tales que $qI \subseteq A$, denotamos por L_{q}^{I} a la aplicación de I en A dada por $L_{q}^{I}(x)=qx$ para todo x en I. En el caso en que adicionalmente A sea un álgebra normada, se define el *álgebra acotada derecha de cocientes* de A como la subálgebra de $Q^{r}(A)$ dada por

$$Q_{b}^{r}(A)=\{q \in Q^{r}(A) \ : \ \exists I \text{ ideal esencial } A \text{ t.q. } qI \subseteq A \text{ y } L_{q}^{I} \text{ es continua}\}$$

dotada con la seminorma de álgebra

$$\| q \|_{r}=\operatorname{Inf}\{\|L_{q}^{I}\| \ : \ I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } qI \subseteq A \text{ y } L_{q}^{I} \text{ es continua}\}.$$

La búsqueda de un álgebra analítica de cocientes para la clase de las álgebras t.m.p., tiene como punto de partida un resultado de naturaleza puramente algebraica, que descansa en la teoría de las identidades polinomiales generalizadas. Este resultado nos permite afirmar que las inclusiones entre subálgebras de $Q^{r}(A)$ que contienen a

A, se transfieren a las correspondientes álgebras de multiplicación, y que precisamente dichas inclusiones para las álgebras de multiplicación se reconocen vía la evaluación en los elementos de A (Proposición III.1.2). Este hecho nos autoriza a restringuir a $M(A)$ las aplicaciones evaluación E_q determinadas por los elementos de $Q^r(A)$, y por tanto posibilita la búsqueda de convenientes subconjuntos de $M(A)$ en los que dichas aplicaciones evaluación tomen valores en A. Así, si para q en $Q^r(A)$ e I ideal esencial de A tales que $qI\subseteq A$, denotamos por I^r al ideal de $M(A)$ generado por el conjunto $\{R_x : x\in I\}$, entonces podemos considerar la aplicación evaluación $E_q^{I^r}$ de I^r en A dada por $E_q^{I^r}(F)=F(q)$ para todo F en I^r. En el caso en que adicionalmente A sea un álgebra normada, sin más que reemplazar el papel desempeñado por los cocientes que producen multiplicación izquierda continua en la definición de álgebra acotada de cocientes por aquellos que producen evaluación continua, obtenemos el *álgebra derecha de cocientes con evaluación continua de A*, cuya presentacción formal se hace en el siguiente teorema.

Algebra derecha de cocientes con evaluación continua (Teorema III.1.5).

Sea A un álgebra asociativa semiprima normada. Entonces

$$Q^r_{be}(A)=\{q\in Q^r(A)\ :\ \exists I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } qI\subseteq A \text{ y } E_q^{I^r} \text{ es continua}\}$$

es una subálgebra de $Q^r(A)$, y $|\cdot|_r:Q^r_{be}(A)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$|q|_r=\text{Inf}\{\|E_q^{I^r}\|\ :\ I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } qI\subseteq A \text{ y } E_q^{I^r} \text{ es continua}\}$$

es una seminorma de álgebra. Además $Q^r_{be}(A)$ está contenida en $Q^r_b(A)$ y contiene a A, y estas inclusiones son continuas. También se verifica que la inclusión de $M(A)$ en $M(Q^r_{be}(A))$ es continua.

Un primer contraste que ayuda a clarificar diferencias entre el álgebra acotada de cocientes y el álgebra de cocientes con evaluación continua se lleva a cabo a través de la determinación de ambas álgebras para una gama importante de ideales del álgebra $BL(H)$ de todos los operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert H. A saber, el ideal $KL(H)$ de los operadores compactos, y los p-ideales de Schatten $\mathcal{C}_p(H)$ $(1\leq p<\infty)$. Recordemos que un *norma-ideal* en H es un ideal A de $BL(H)$ dotado con una norma $\|.\|$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|$ para cualesquiera x,y en H, donde $x\otimes y$ designa al operador en H definido por

$$(x\otimes y)(z)=<z,y>x \quad \text{para todo} \quad z \text{ en } H.$$

ii) $\|FTG\|\leq\|F\|_\infty\|T\|\|G\|_\infty$ para cualesquiera F,G en $BL(H)$ y T en A, donde $\|.\|_\infty$ denota a la norma de operadores.

Puesto que tanto $KL(H)$ como $\mathcal{C}_p(H)$ $(1\leq p<\infty)$ son norma-ideales en H, como consecuencia del siguiente teorema se tiene que el álgebra acotada de cocientes de ambas es el álgebra $(BL(H),\|.\|_\infty)$.

Teorema III.2.3.

Sea H un espacio de Hilbert y sea $(A,\|.\|)$ un norma-ideal en H. Entonces

$$(Q_b^r(A),|\!|\!|.|\!|\!|_r)=(BL(H),\|.\|_\infty).$$

Sin embargo el comportamiento de $KL(H)$ y de $\mathcal{C}_p(H)$ $(1\leq p<\infty)$ para el álgebra de cocientes con evaluación continua es muy diferente. Ambos ejemplifican las dos situaciones extremas en las que el álgebra de cocientes con evaluación continua se puede encontrar (recuerdense las inclusiones $A\subseteq Q_{be}^r(A)\subseteq Q_b^r(A)$).

Teorema III.2.8

Sea H un espacio de Hilbert, entonces

$$(Q^r_{be}(KL(H)), |.|_r)=(BL(H), \|.\|_\infty).$$

Teorema III.2.12.

Sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{C}_p(H)$ el p-ideal Schatten de H para $1\leq p<\infty$. Entonces

$$(Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H)), |.|_r)=(\mathcal{C}_p(H), \|.\|_p).$$

Finalmente, las expectativas de idoneidad del álgebra de cocientes con evaluación continua para las álgebras t.m.p. se cumplen sobradamente ya que las álgebras simétricas de cocientes con evaluación continua resultan ser álgebras analíticas de cocientes incluso para la clase de las álgebras totalmente primas. En la obtención de estos resultados ha sido útil un proceso que nos da acceso directo al álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua y que evita el paso por las álgebras laterales. La idea consiste en la consideración de cocientes simétricos que hacen continuas las evaluaciones en ideales generados por multiplicaciones biláteras. Concretamente, para cada ideal I de un álgebra asociativa A definimos I^m como el ideal de $M(A)$ generado por el conjunto $\{M_{x,y}: x,y\in I\}$. Con esta notación podemos presentar el álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua de un álgebra asociativa totalmente prima como se recoge en la primera parte del siguiente enunciado.

Principal resultado del Capítulo III (Teoremas III.3.7 y III.3.8)

Si A un álgebra asociativa totalmente prima, y $Q^s(A)$ designa al álgebra simétrica de cocientes de A, entonces

$$Q^s_{be}(A)=\{q\in Q^s(A):\ \exists I \text{ ideal no nulo de } A \text{ t.q. } qI+Iq\subseteq A \text{ y } E_q^{I^m} \text{ es continua}\},$$

es una subálgebra de $Q^s(A)$, y $|.|:Q^s_{be}(A)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$|q|=\operatorname{Inf}\{\|E_q^{I^m}\| :\ I \text{ ideal no nulo de } A \text{ t.q. } qI+Iq\subseteq A \text{ y } E_q^{I^m} \text{ es continua}\}$$

es una norma de álgebra. Además:

i) Las inclusiones de A en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son topológicas.

ii) $(Q^s_{be}(A),|.|)$ es un álgebra totalmente prima. Además $(Q^s_{be}(A),|.|)$ es un álgebra t.m.p. cuando A lo sea.

iii) Si $(Q,\|.\|)$ es un álgebra normada tal que Q es una subálgebra de $Q^s(A)$ que contiene a A y las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas, entonces Q está contenida en $Q^s_{be}(A)$ y las inclusiones de Q en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(Q)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son continuas.

La práctica totalidad del contenido de esta Memoria se encuetra recogida en los trabajos de investigación [5], [6], [7] y [8].

AGRADECIMIENTOS

Para terminar esta introducción, quiero expresar mi gratitud a las personas que han contribuido a la elaboración de esta Memoria:

En primer lugar a mi director de tesis, Prof. Miguel Cabrera García, por la constante labor de orientación del trabajo, así como por las innumerables horas de trabajo compartido a lo largo de muchos años.

En segundo lugar a mi tutor, Prof. Angel Rodríguez Palacios, por su disponibilidad en todo momento para la discusión de los problemas, así como por su generosidad en el aporte de ideas y resultados.

A los Profesores del Departamento de Análisis Matemático, especialmente a los Profesores Antonio Moreno Galindo y Juan Carlos Cabello Piñar por leer con gran cuidado esta Memoria contribuyendo con útiles sugerencias a su perfeccionamiento. Asímismo al Prof. Juan Francisco Mena Jurado por estar siempre dispuesto a escuchar cualquier resultado en el período de realización de la misma.

Al Gobierno Iraquí y a la Universidad de Mosul por su confianza en mí y por haber prorrogado el tiempo necesario para terminar mis estudios de doctorado, así como por el gran apoyo que me han prestado en todo momento.

A la Agencia Española de Cooperación Internacional (Instituto de Cooperación con el Mundo Arabe), por la concesión de una beca de doctorado de la que he disfrutado durante casi cinco años.

Finalmente, no quiero dejar pasar esta oportunidad sin agradecer el gran apoyo de mi familia: padres, esposa e hijos (Abdulnaser y Jamal).

CAPITULO I

EL CENTROIDE EXTENDIDO Y LA CLAUSURA CENTRAL DEL ALGEBRA DE MULTIPLICACION

El principal objetivo de este capítulo es probar que si A es un álgebra asociativa semiprima, entonces el álgebra de multiplicación $M(A)$ de A es también semiprima, los centroides extendidos de A y de $M(A)$ son isomorfos, y además $Q(M(A))$ es isomorfa a $M(Q(A))$, donde el símbolo $Q(.)$ se está utilizando para denotar la clausura central. Este resultado se conseguirá en dos etapas. En la primera se obtiene dicho resultado, incluso en ambiente no necesariamente asociativo, pero exigiendo de partida la semiprimidad de $M(A)$. En la segunda se prueba que cuando A es asociativa semiprima, entonces $M(A)$ es semiprima.

La primera sección tiene un caracter introductorio y en ella se pretende exponer resumidamente la teoría básica del centroide extendido y de la clausura central de un álgebra semiprima, así como recopilar el tratamiento dado por K. McCrimmon al álgebra simétrica de cocientes de Martindale relativa a un filtro de denominadores para un álgebra asociativa no necesariamente semiprima.

El punto de partida de la Sección 2 es la determinación del centroide extendido $C(A)$ de un álgebra semiprima dada A a través de un álgebra de operadores $\mathfrak{B}$ en A que contiene a $M(A)$, y en la que se ha considerado el filtro $\mathfrak{D}$ de todos los ideales de $\mathfrak{B}$ que tienen anulador derecho cero. En este contexto se determinan propiedades relativas a $\mathfrak{B}$ para obtener un isomorfismo de $C(A)$ sobre el centro $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ de $Q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ (el álgebra simétrica de cocientes de Martindale del álgebra de denominadores $(\mathfrak{B},\mathfrak{D})$) que sea "compatible" con las acciones de evaluación. Vía este isomorfismo demostramos que, si adicionalmente $\mathfrak{B}$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$, entonces la subálgebra $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\mathfrak{B}$ de $Q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ puede verse como un álgebra de operadores en $Q(A)$ que contiene a $M_{C(A)}(Q(A))$.

La Sección 3 se dedica a exponer las principales aplicaciones de los resultados obtenidos. La primera y más relevante aparece cuando se toma $\mathfrak{B}$ igual a la propia álgebra de multiplicación. En ese caso, supuesto que tanto A como $M(A)$ son álgebras semiprimas se obtiene la primera etapa del principal resultado. A las álgebras semiprimas con álgebra de multiplicación semiprima se les llamará *multiplicativamente semiprimas*. Se prueba que las extensiones intermedias entre un álgebra multiplicativamente semiprima y su clausura central siguen siendo álgebras multiplicativamente semiprimas. También, se muestra una aplicación al caso en que A es un álgebra semiprima normada y $\mathfrak{B}$ es un álgebra de operadores en A que contiene a $M(A)$ y que está contenida en el cierre de $M(A)$ para la topología fuerte de operadores.

La Sección 4 se dedica a presentar ejemplos relevantes de álgebras multiplicativamente semiprimas y a establecer la segunda etapa de nuestro principal resultado. Haciendo uso de la teoría de identidades polinomiales generalizadas demostramos que las álgebras asociativas semiprimas son multiplicativamente semiprimas. Finalmente se discute el álgebra $\mathcal{E}\ell(A)$ de los operadores elementales de un álgebra asociativa semiprima A.

La Sección final de este capítulo se dedica al estudio de las álgebras multiplicativamente primas. Diremos que un álgebra A es *multiplicativamente prima* si tanto A como $M(A)$ son álgebras primas. Un resultado trascendental para el resto de nuestro trabajo será la caracterización en términos de operadores de tales álgebras: El álgebra A es multiplicativamente prima si, y sólo si, para F en $M(A)$ y a en A, $W_{F,a}=0$ implica que $F=0$ o $a=0$, donde $W_{F,a}$ es la aplicación de $M(A)$ en A definida por $W_{F,a}(G):=FG(a)$ para todo G en $M(A)$. También discutimos las extensiones escalares de las álgebras multiplicativamente primas centralmente cerradas. Finalmente recogemos una condición topológica para álgebras normadas que implica la multiplicativa-primidad.

1. Preliminares.

Como ya hemos advertido en la Introducción, a lo largo de todo este trabajo, y salvo que se especifique otra cosa, siempre que se haga referencia a un álgebra, ésta se entenderá no nula y no necesariamente asociativa sobre un cuerpo K. Comencemos recordando algunos conceptos básicos.

El *anulador* de un álgebra A se denota por $An(A)$ y se define como el conjunto

$$An(A):=\{x\in A : xa=ax=0 \text{ para todo } a\in A\}.$$

$An(A)$ es un ideal de A tal que $An(A)^2=0$. Recordemos también que el álgebra A se dice *semiprima* si 0 es el único ideal U de A satisfaciendo la condición $U^2=0$, así como que A se dice *prima* si verifica que, para cualesquiera ideales U y V de A, la condición $UV=0$ implica que o bien $U=0$ o bien $V=0$.

Es claro que para cualesquiera ideales U,V de un álgebra A se verifican las inclusiones $(U\cap V)^2\subseteq UV\subseteq U\cap V$, a partir de las que se deduce inmediatamente que, cuando A es semiprima, las siguientes condiciones relativas a U y V son equivalentes:

$$(i)\ UV=0; \qquad (ii)\ U\cap V=0; \qquad (iii)\ VU=0. \tag{I.1}$$

Un ideal U de un álgebra A se dice *esencial* si verifica que $U\cap V\neq 0$ para cualquier ideal no nulo V de A. Es claro, a partir del comentario anterior, que todos los ideales no nulos de un álgebra prima son ideales esenciales.

El *centro* $Z(A)$ del álgebra A se define como el conjunto formado por aquellos elementos que asocian y conmutan con todos los elementos de A. $Z(A)$ es una subálgebra asociativa y conmutativa de A. Para cada a en A, denotaremos por L_a y R_a a los *operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha* (respectivamente) determinados por a, esto es, los operadores en A definidos por:

$$L_a(x)=ax \quad \text{y} \quad R_a(x)=xa \qquad \text{para todo } x\in A.$$

El *centroide* $\Gamma(A)$ del álgebra A se define como el conjunto de todas las aplicaciones lineales T de A en A que conmutan con los operadores de multiplicación, esto es, verifican la condición

$$T(ab)=T(a)b=aT(b)$$

para cualesquiera que sean a,b en A. $\Gamma(A)$ es una subálgebra unital del álgebra $L(A)$ de todas las aplicaciones lineales de A en A, y la aplicación $\alpha\longmapsto\alpha Id_A$ es una inmersión del cuerpo base K en $\Gamma(A)$. El álgebra A se dice *central* cuando ocurre que $\Gamma(A)=KId_A$. Además, la aplicación $z\longmapsto L_z$ es un homomorfismo de $Z(A)$ en $\Gamma(A)$ que, es inyectivo cuando A es de anulador cero, y que, es sobreyectivo cuando A tiene unidad.

Para un estudio detallado del centroide extendido y de la clausura central de un álgebra semiprima remitimos a los artículos [2] y [**18**]. Aquí nos limitaremos a presentar estos conceptos y a citar aquellas propiedades que nos serán de utilidad.

Definición I.1.1. Sea A un álgebra semiprima. Un *centralizador parcialmente definido* (abreviadamente *c.p.d.*) en A es una aplicación lineal $f:dom(f)\longrightarrow A$ cuyo dominio $dom(f)$ es un ideal no nulo de A y que verifica

$$f(ax)=af(x) \quad \text{y} \quad f(xa)=f(x)a$$

para cualesquiera $a\in A$ y $x\in dom(f)$. En el caso en que $dom(f)$ sea un ideal esencial de A, se dice que f es un *centralizador esencialmente definido* (abreviadamente *c.e.d.*) en A. En el conjunto CE de todos los c.e.d. en A se considera la relación de equivalencia $\simeq$ definida por:

$(dom(f),f)\simeq(dom(g),g)$ si y sólo si $f(x)=g(x)$ para todo $x\in dom(f)\cap dom(g)$.

Se define el *centroide extendido* de A como el conjunto cociente $C(A):=CE/\simeq$ que dotado con las siguientes operaciones

$$[(dom(f_1),f_1)]+[(dom(f_2),f_2)]:=[(dom(f_1)\cap dom(f_2),f_1+f_2)],$$

$$\alpha[(dom(f),f)]:=[(dom(f),\alpha f)], \qquad (\alpha\in K)$$

$$[(dom(f_1),f_1)][(dom(f_2),f_2)]:=[(dom(f_1f_2),f_1f_2)],$$

(donde $dom(f_1f_2):=\{x\in dom(f_2)\ :\ f_2(x)\in dom(f_1)\}$) resulta ser un álgebra asociativa conmutativa con unidad que es regular von Neumann (esto es, verifica que para todo $\lambda\in C(A)$ existe $\mu\in C(A)$ tal que $\lambda=\lambda\mu\lambda$). Además, $C(A)$ es un cuerpo si, y sólamente si, A es un álgebra prima.

Un c.e.d. f en A se dice que es *maximal* si no hay ningún c.p.d. en A que lo extienda estrictamente. Es bien conocido que cada c.e.d. f en A puede extenderse únicamente a un c.e.d. maximal en A (véase por ejemplo [**9**; Proposición 1]). En consecuencia, cada clase de equivalencia en $C(A)$ contiene a un único c.e.d. maximal, y la sustitución de cada clase por su único c.e.d. maximal nos permite evitar el paso a cociente en la definición de centroide extendido. Con esta visión, es claro que el centroide $\Gamma(A)$ de A puede considerarse como una subálgebra de $C(A)$.

Si bien como ya hemos advertido las álgebras en las que trabajamos se entienden siempre referidas al cuerpo K, sin embargo nos interesará en ciertos momentos la consideración de una tal álgebra como álgebra sobre una extensión posiblemente no corporea de K. Llamaremos *álgebra escalar* (sobre K) a toda álgebra asociativa conmutativa con unidad **1**.

Dada un álgebra escalar S, diremos que el álgebra A es una S-álgebra si hay definida una aplicación K-bilineal $(s,a)\longmapsto sa$ de $S\times A$ en A verificando las propiedades

$$(st)a=s(ta), \quad s(ab)=(sa)b=a(sb), \quad \text{y} \quad \mathbf{1}a=a \quad (s,t\in S,\ a,b\in A).$$

Es claro que toda álgebra A es una $\Gamma(A)$-álgebra para la acción dada por

$$Ta=T(a) \quad \text{para cualesquiera } T \text{ en } \Gamma(A) \text{ y } a \text{ en } A.$$

En cierto sentido $\Gamma(A)$ es la más grande álgebra escalar S para la que el álgebra A es una S-álgebra. En efecto, supongamos que S es un álgebra escalar para la que A es una S-álgebra y consideremos para cada $s\in S$ la aplicación lineal $T_s:A\longrightarrow A$ definida por $T_s(a)=sa$. Es claro entonces que $T_s\in\Gamma(A)$ y que la aplicación $s\longmapsto T_s$ es un homomorfismo unital de álgebras de S en $\Gamma(A)$.

Introducimos ahora los conceptos de álgebra de multiplicación y de ideal de multiplicación que serán fundamentales a lo largo de nuestro trabajo.

Definición I.1.2. Sea A un álgebra. El *álgebra de multiplicación* de A se denota por $M(A)$ y se define como la subálgebra de $L(A)$ generada por el operador identidad Id_A y el conjunto de los operadores de multiplicación $\{L_a,R_a : a\in A\}$. El *ideal de multiplicación* de A se denota por $M^{\#}(A)$ y se define como la subálgebra de $L(A)$ generada por el conjunto $\{L_a,R_a : a\in A\}$. Obviamente $M^{\#}(A)$ es un ideal de $M(A)$ tal que $M(A)=M^{\#}(A)+KId_A$.

Nótese que si el álgebra A es una S-álgebra para conveniente álgebra escalar S, entonces

$$L_S(A):=\{T\in L(A) : T(sa)=sT(a) \text{ para cualesquiera } s\in S \text{ y } a\in A\}$$

es una subálgebra de $L(A)$ que contiene a Id_A y a L_a,R_a $(a\in A)$, luego

$M(A)\subseteq L_S(A)$, esto es, los operadores en $M(A)$ son S-lineales. Puesto que también $L_S(A)$ es una S-álgebra para la acción $(s,T)\longrightarrow sT$ de $S\times L_S(A)$ en $L_S(A)$ dada por

$$(sT)(a):=sT(a) \quad \text{para todo } a\in A,$$

podemos definir $M_S^{\#}(A)$ como la S-subálgebra de $L_S(A)$ generada por los operadores L_a, R_a $(a\in A)$ y así mismo $M_S(A)$ como la S-subálgebra de $L_S(A)$ generada por los operadores Id_A y L_a, R_a $(a\in A)$. Es claro que $M_S^{\#}(A)=M^{\#}(A)$ y que $M_S(A)=M(A)+SId_A$, y por tanto $M_S(A)$ está S-generada por $M(A)$.

Proposición I.1.3. *Sea A un álgebra y sea B un álgebra extensión de A tal que B está generada por A como S-álgebra para conveniente álgebra escalar S. Si Q es una K-subálgebra de B que contiene a A, entonces para todo F en $M(Q)$ existe un único elemento $\tilde{F}$ en $M(B)$ tal que*

$$\tilde{F}(a)=F(a) \quad \text{para todo } a \text{ en } A. \tag{I.2}$$

La aplicación $F\longmapsto\tilde{F}$ es un monomorfismo de álgebras de $M(Q)$ en $M(B)$ que aplica $M^{\#}(Q)$ en $M^{\#}(B)$. Además, si $M(Q)$ se considera como subálgebra de $M(B)$ vía dicho monomorfismo, entonces $M_S(B)$ está S-generada por $M(Q)$ y también $M^{\#}(B)$ está S-generado por $M^{\#}(Q)$.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathfrak{S}=\{F\in M(Q)\ :\ \exists\tilde{F}\in M(B) \text{ tal que } \tilde{F}(q)=F(q) \quad \text{para todo } q\in Q\}.$$

Es claro que $\mathfrak{S}$ es una subálgebra $M(Q)$. Puesto que para $p,q\in Q$ se verifica que

$$L_p(q)=L_p^B(q), \qquad R_p(q)=R_p^B(q) \qquad \text{e} \qquad Id_Q(q)=Id_B(q),$$

donde estamos denotando por L_p^B y R_p^B a los operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha respectivamente determinados por p en el álgebra B, se sigue que L_p, R_p $(p\in Q)$ e Id_Q pertenecen a $\mathfrak{S}$. En consecuencia $\mathfrak{S}=M(Q)$, y por tanto hemos probado más de lo que se pretendía, a saber:

Para todo $F\in M(Q)$ existe $\tilde{F}\in M(B)$ tal que $\tilde{F}(q)=F(q)$ para todo $q\in Q$. (I.3)

Para establecer la unicidad de los asociados, nos bastará probar que si $T\in M(B)$ es tal que $T(A)=0$, entonces $T=0$. Supóngase que $T\in M(B)$ es tal que $T(A)=0$. Puesto que los elementos de $M(B)$ son S-lineales, se sigue que para cualesquiera que sean $n\in\mathbb{N}$, $s_i\in S$ y $a_i\in A$ $(1\le i\le n)$ se verifica que

$$T(\sum_{i=1}^{n} s_i a_i)=\sum_{i=1}^{n} s_i T(a_i)=0.$$

Luego $T=0$ ya que B está S-generada por A.

El hecho de que la aplicación $F\longmapsto\tilde{F}$ es un monomorfismo de álgebras de $M(Q)$ en $M(B)$ es de verificación inmediata teniendo en cuenta (I.3). Además, de las expresiones $\tilde{L}_p=L_p^B$ y $\tilde{R}_p=R_p^B$ se sigue fácilmente que $M^{\#}(Q)$ se aplica en $M^{\#}(B)$. Finalmente, si vía el monomorfismo anterior $M(Q)$ se considera como una subálgebra de $M(B)$, entonces se tienen las identificaciones $L_p\equiv L_p^B$, $R_p\equiv R_p^B$ y $Id_Q\equiv Id_B$, a partir de las cuales, teniendo en cuenta que B está S-generada por A, se sigue inmediatamente que $M_S(B)$ está S-generada por $M(Q)$ y también que $M^{\#}(B)$ está S-generado por $M^{\#}(Q)$. ■

Para comprender bien la construcción de la clausura central bueno será recordar el concepto de producto tensorial de dos K-álgebras. Dadas dos K-álgebras A y B, consideremos el K-espacio vectorial V generado por el conjunto $A\times B$ y sea N el subespacio de V generado por todos los elementos de la forma siguiente:

$$(a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b),$$

$$(a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2),$$

$$(\alpha a,b)-\alpha(a,b),$$

$$(a,\alpha b)-\alpha(a,b),$$

para $a,a_1,a_2\in A$, $b,b_1,b_2\in B$ y $\alpha\in K$. Se define el *álgebra producto tensorial* de A y B, y se denota por $A\otimes_K B$, como el espacio vectorial cociente V/N dotado con el producto determinado en generadores por la expresión:

$$(a_1\otimes b_1)(a_2\otimes b_2)=a_1a_2\otimes b_1b_2,$$

donde, como es usual, estamos denotando por $a\otimes b$ a la imagen en $A\otimes_K B$ del elemento básico (a,b) de V.

Dadas un álgebra escalar S y un álgebra A es inmediato verificar que el álgebra $S\otimes_K A$ puede verse como una S-álgebra para la acción de S-módulo determinada en generadores por

$$s(t\otimes a)=st\otimes a.$$

Es claro que la aplicación que a cada $a\in A$ le asigna $\mathbf{1}\otimes a\in S\otimes_K A$ es un monomorfismo de álgebras que permite ver A como una K-subálgebra de $S\otimes_K A$. A la S-álgebra $S\otimes_K A$ se le llama el *álgebra extensión escalar de A por S*. Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es la existencia de una inmersión natural $M(A)$ en $M(S\otimes_K A)$.

Recordemos en este momento el concepto de clausura central de un álgebra semiprima, que proporciona un álgebra extensión que desempeña un papel primordial en lo que se refiere a las teorías de descripción y clasificación de álgebras.

Definición I.1.4. Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C. Un elemento $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\otimes a_i$ de la extensión escalar de A por C se dice que es un *elemento anulante* si existe un ideal esencial U de A contenido en $\bigcap_{i=1}^{n} dom(\lambda_i)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)F(a_i)=0$$

para cualesquiera $x\in U$ y $F\in M(A)$. El conjunto M de todos los elementos anulantes es un ideal de $C\otimes A$ que se conoce con el nombre de *ideal anulante*. Se prueba que M está caracterizado por ser el único ideal de $C\otimes A$ que contiene al conjunto $I_0=\{\lambda\otimes x-1\otimes\lambda(x) : \lambda\in C$ y $x\in dom(\lambda)\}$ y que es maximal con respecto a la propiedad $M\cap(1\otimes A)=0$. Se define la *clausura central* $Q(A)$ de A como el álgebra cociente del producto tensorial $C\otimes A$ por el ideal M. $Q(A)$ es un álgebra semiprima cuyo centroide extendido es igual a su centroide e igual a C. La aplicación $a\longrightarrow\overline{1\otimes a}$ es un homomorfismo inyectivo de K-álgebras de A en $Q(A)$ que se llama la *inmersión natural* de A en $Q(A)$, que nos permite ver A como una K-subálgebra de $Q(A)$. Es claro que $Q(A)$ está generada por A como C-álgebra. Además, para todo ideal esencial U de A se verifica que CU es un ideal esencial de $Q(A)$. Finalmente, nótese que, para λ en C y x en $dom(\lambda)$, el hecho de que $\lambda\otimes x-1\otimes\lambda(x)$ pertenezca a M puede y debe ahora entenderse a través de la igualdad $\lambda x=\lambda(x)$ en $Q(A)$.

Como consecuencia de la proposición anterior, las relaciones de inclusión para subálgebras de $Q(A)$ que contengan a A se transfieren a las correspondientes álgebras de multiplicación, vía un proceso arbitrado por la evaluación en los elementos de A. Este hecho se utilizará en lo que sigue sin mención explícita.

Corolario I.1.5. *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C y sean Q y Q' subálgebras de $Q(A)$ tales que $A\subseteq Q\subseteq Q'\subseteq Q(A)$. Entonces, la evaluación en los elementos de A determina las siguientes inclusiones*

$$M(A)\subseteq M(Q)\subseteq M(Q')\subseteq M(Q(A)).$$

Además $M_C(Q(A))$ está C-generada por $M(A)$.

En contexto asociativo, como es bien conocido, el centroide extendido y la clausura central están inmersos en el álgebra simétrica de cocientes de Martindale (véanse por ejemplo [2; Teorema 3.17] o [3; Capítulo 2]). Lo que resta de sección lo dedicaremos a resumir el tratamiento general dado por K. McCrimmon en [36] al álgebra simétrica de cocientes de Martindale relativa a un filtro de denominadores para un álgebra asociativa no necesariamente semiprima. Con vistas a conseguir una mayor claridad en la exposición y teniendo en cuenta la utilización que haremos de dicha teoría, nos limitaremos a filtros de denominadores que sean filtros en el sentido habitual de la teoría de conjuntos.

Definición I.1.6. Sea A un álgebra asociativa. Un *filtro de denominadores* $\mathfrak{D}$ en A es una familia no vacía de ideales de A tal que:

i) Si U,U' son ideales de A con $U\subseteq U'$ y $U\in\mathfrak{D}$, entonces $U'\in\mathfrak{D}$.

ii) Si $U,V\in\mathfrak{D}$, entonces $UV\in\mathfrak{D}$.

iii) Si $U\in\mathfrak{D}$, entonces $An(U):=\{a\in A : aU=Ua=0\}$ es cero.

Definición I.1.7. Sea $(A,\mathfrak{D})$ un álgebra asociativa con un filtro de denominadores. Un *doble centralizador* $\mathfrak{D}$*-definido* (abreviadamente *d.c.*$\mathfrak{D}$*-d.*) en A es una terna (U,λ,ρ) formada por un ideal U de A perteneciente a $\mathfrak{D}$ y dos aplicaciones lineales λ,ρ de U en A verificando

$$\lambda(xa)=\lambda(x)a, \quad x\lambda(y)=\rho(x)y \quad \text{y} \quad \rho(ax)=a\rho(x)$$

para cualesquiera $a\in A$ y $x,y\in U$. Denotemos por $DC(A,\mathfrak{D})$ al conjunto de todos los d.c.$\mathfrak{D}$-d en A y consideremos en él la relación de equivalencia dada por:

$(U_1,\lambda_1,\rho_1)\simeq(U_2,\lambda_2,\rho_2)$ si, y sólamente si,

$$\lambda_1|_{U_1\cap U_2}=\lambda_2|_{U_1\cap U_2} \quad \text{y} \quad \rho_1|_{U_1\cap U_2}=\rho_2|_{U_1\cap U_2}.$$

El conjunto cociente $Q_{\mathfrak{D}}(A):=DC(A,\mathfrak{D})/\simeq$ es un álgebra sobre K para las siguientes operaciones

$$[(U_1,\lambda_1,\rho_1)]+[(U_2,\lambda_2,\rho_2)]:=[(U_1\cap U_2,\lambda_1+\lambda_2,\rho_1+\rho_2)],$$

$$\alpha[(U,\lambda,\rho)]:=[(U,\alpha\lambda,\alpha\rho)], \qquad (\alpha\in K)$$

$$[(U_1,\lambda_1,\rho_1)][(U_2,\lambda_2,\rho_2)]:=[(U_2U_1,\lambda_1\lambda_2,\rho_2\rho_1)],$$

que se llama el *álgebra simétrica de cocientes de Martindale* del álgebra de denominadores $(A,\mathfrak{D})$. Notése que la clase $[(A,Id_A,Id_A)]$ es la unidad de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ y que A puede verse como una subálgebra de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ vía el monomorfismo $a\longmapsto[(A,L_a,R_a)]$. El centro de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ se denota por $C_{\mathfrak{D}}(A)$ (abreviadamente $C_{\mathfrak{D}}$), y la $C_{\mathfrak{D}}$-subálgebra de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ generada por A se denota por $C_{\mathfrak{D}}A$.

El siguiente lema permite dar una reformulación cómoda de la equivalencia de dos c.p.$\mathfrak{D}$-d., de la cual se sigue fácilmente la transitividad.

Lema I.1.8. *Sea A un álgebra asociativa. Si (I,λ,ρ) es un d.c.$\mathfrak{D}$-d. en A tal que $\lambda_{|U}=\rho_{|U}=0$ para algún ideal U en $\mathfrak{D}$ contenido en I, entonces $\lambda=\rho=0$.*

Demostración. Si (I,λ,ρ) es un d.c.$\mathfrak{D}$-d. en A para el que existe un ideal U en $\mathfrak{D}$ contenido en I tal que $\lambda_{|U}=\rho_{|U}=0$, entonces para todo x en I ocurre que

$$\lambda(x)U=\lambda(xU)\subseteq\lambda(U)=0 \quad \text{y} \quad U\lambda(x)=\rho(U)x=0,$$

y también que

$$\rho(x)U=x\lambda(U)=0 \quad \text{y} \quad U\rho(x)=\rho(Ux)\subseteq\rho(U)=0.$$

Luego, como U es un ideal con anulador cero de A, se tiene que $\lambda(x)=0$ y $\rho(x)=0$. ■

A partir del lema anterior y teniendo en cuenta que $\mathfrak{D}$ es un filtro "de verdad", argumentando como en [9; Lema 1 y Proposición 1] se obtiene que cualquier elemento de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ contiene a un único d.c.$\mathfrak{D}$-d. maximal en A, hecho que puede aprovecharse para evitar el paso a cociente envuelto en la definición de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$. Con esta visión de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ es claro que $C_{\mathfrak{D}}$ consiste precisamente de todos los centralizadores $\mathfrak{D}$-definidos maximales de A.

La siguiente proposición contiene la propiedad universal del álgebra simétrica de cocientes de Martindale relativa a un filtro de denominadores para un álgebra no necesariamente semiprima. Aunque la demostración de este resultado es bien conocida se incluye aquí por complitud.

Proposición I.1.9. (Propiedad universal de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$). *Sea $(A,\mathfrak{D})$ un álgebra asociativa con un filtro de denominadores. Entonces $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ es, salvo isomorfismo, la más grande álgebra asociativa (con unidad) Q que extiende a A y que verifica*

i) Para todo q en Q existe U en $\mathfrak{D}$ tal que $qU+Uq\subseteq A$;

ii) Si q en Q verifica $qU+Uq=0$ para algún U en $\mathfrak{D}$, entonces $q=0$.

Demostración. Comenzamos probando que $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ satisface las propiedades i) y ii).

i).- Sea q en $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ y sea (U,λ,ρ) en q. Para cualquier x en U

$$qx=[(U,\lambda,\rho)][(A,L_x,R_x)]=[(AU,\lambda L_x,R_x\rho)]=[(AU,L_{\lambda(x)},R_{\lambda(x)})]=\lambda(x),$$

y análogamente $xq=\rho(x)$. Así, $qU\subseteq A$ y $Uq\subseteq A$.

ii).- Sean $q=[(U',\lambda,\rho)]$ y $U\in\mathfrak{D}$ tales que $qU+Uq=0$. Entonces $U\cap U'\in\mathfrak{D}$ y es claro que

$$\lambda(U\cap U')=q(U\cap U')=0 \quad \text{y} \quad \rho(U\cap U')=(U\cap U')q=0,$$

luego por el lema anterior $\lambda=\rho=0$, y por tanto $q=0$.

Ahora veamos que para cada álgebra asociativa Q conteniendo a A como subálgebra y verificando (i) y (ii) existe un único homomorfismo inyectivo de Q en $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ que extiende a Id_A. Para cada q en Q, por (i), existe un ideal $U_q\in\mathfrak{D}$ tal que $qU_q+U_qq\subseteq A$ y por consiguiente podemos considerar las aplicaciones $\lambda_q,\rho_q:U_q\longrightarrow A$ definidas por $\lambda_q(x):=qx$ y $\rho_q(x):=xq$. Claramente (U_q,λ_q,ρ_q) es un d.c.$\mathfrak{D}$-d. en A y $\phi:q\longmapsto[(U_q,\lambda_q,\rho_q)]$ es un homomorfismo de Q en $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ que extiende Id_A y que es inyectivo en virtud de (ii). Además, si $\psi:Q\longrightarrow Q_{\mathfrak{D}}(A)$ es un homomorfismo de álgebras que extiende Id_A, entonces para cada q en Q y para todo x en U_q se tiene que

$$(\phi(q)-\psi(q))x=\phi(q)x-\psi(q)x=\phi(qx)-\psi(qx)=qx-qx=0,$$

análogamente $x(\phi(q)-\psi(q))=0$, luego por la propiedad (ii), $\phi(q)=\psi(q)$ y así $\phi=\psi$. En particular, $Id_{Q_{\mathfrak{D}}(A)}$ es el único endomorfismo de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ que extiende Id_A. Finalmente, para probar la unicidad de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ supongamos que B es un álgebra extensión maximal de A verificando (i) y (ii). Tenemos entonces dos homomorfismos $\phi_1:Q_{\mathfrak{D}}(A)\longrightarrow B$ y $\phi_2:B\longrightarrow Q_{\mathfrak{D}}(A)$ dejando fijos los elementos de A y por tanto $\phi_2\phi_1$ es un endomorfismo de $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ cuya restricción a A es la identidad, luego $\phi_2\phi_1=Id_{Q_{\mathfrak{D}}(A)}$. Análogamente $\phi_1\phi_2=Id_B$ y por tanto ϕ_1 es un isomorfismo entre $Q_{\mathfrak{D}}(A)$ y B fijando los elementos de A. ∎

En nuestro desarrollo aparecerá como ejemplo importante de filtro de denominadores el filtro de todos los ideales que tienen anulador derecho cero. Recordemos que el *anulador derecho* de un ideal U de un álgebra asociativa A se define como el ideal $\{a\in A : Ua=0\}$. A partir de (I.1), es fácil ver que si A es semiprima, entonces los ideales con anulador derecho cero son precisamente los ideales esenciales.

Nota I.1.10. Si en la proposición anterior se toma $\mathfrak{D}$ como el filtro de todos los ideales de A que tienen anulador derecho cero, entonces la condición ii) se puede reemplazar por la siguiente

ii') Si q en Q verifica $Uq=0$ para algún U en $\mathfrak{D}$, entonces $q=0$.

A saber, si A es un álgebra asociativa, $\mathfrak{D}$ es el filtro de los ideales de A que tienen anulador derecho cero y Q es un álgebra asociativa extensión de A verificando las propiedades i) y ii), entonces Q satisface ii').

En efecto, supongamos que $q\in Q$ y $U\in\mathfrak{D}$ son tales que $Uq=0$. Teniendo en cuenta i), podemos tomar $V\in\mathfrak{D}$ tal que $qV+Vq\subseteq A$. Entonces $qVU\subseteq A$ y $UqVU=0$, luego qVU está contenido en el anulador derecho de U en A, y por tanto $qVU=0$. La demostración concluye aplicando ii) una vez que se tiene en cuenta que $VU\in\mathfrak{D}$ y que $VUq=0$.

2. Buscando álgebras de operadores que determinen el centroide extendido.

En [5] se demostró que si A es un álgebra prima tal que $M(A)$ es también prima, entonces existe un isomorfismo de K-álgebras $\varphi: C(A) \longrightarrow C(M(A))$ determinado de manera única por la siguiente condición de compatibilidad con las acciones de evaluación

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x)) \qquad \text{(I.4)}$$

para cualesquiera λ en $C(A)$, T en $dom(\varphi(\lambda))$, y x en $dom(\lambda)$, así como que dicho isomorfismo induce un isomorfismo de $Q(M(A))$ sobre $M_{C(A)}(Q(A))$. El objetivo de esta sección es generalizar estos resultados a ambiente semiprimo. Haciendo uso de la teoría de álgebras de cocientes relativas a filtros de denominadores conseguiremos incluso evitar imponer condiciones adicionales al álgebra de multiplicación. Más generalmente, abordaremos la determinación del centroide extendido C de un álgebra semiprima dada A a través de un álgebra de operadores $\mathfrak{B}$ en A que contiene a $M(A)$, y en la que se ha considerado el filtro $\mathfrak{D}$ de todos los ideales de $\mathfrak{B}$ que tienen anulador derecho cero. En este contexto determinaremos propiedades relativas a $\mathfrak{B}$ bajo las que se obtiene un isomorfismo de C sobre el centro $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ del álgebra $Q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ (el álgebra simétrica de cocientes de Martindale del álgebra de denominadores $(\mathfrak{B},\mathfrak{D})$) determinado por la condición (I.4). Vía este isomorfismo demostraremos que, si adicionalmente $\mathfrak{B}$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$, entonces la subálgebra $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\mathfrak{B}$ de $Q_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ puede verse como un álgebra de operadores en $Q(A)$ que contiene a $M_C(Q(A))$.

Dadas un álgebra A y una subálgebra $\mathfrak{B}$ de $L(A)$ que contiene a $M(A)$, para un ideal $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{B}$, un elemento $a\in A$, y un ideal U de A, notaremos por

$$\mathfrak{P}(a):=\{T(a)\ :\ T\in\mathfrak{P}\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{P}(U):=\{\sum_{i=1}^{n} T_i(x_i)\ :\ n\in\mathbb{N},\ T_i\in\mathfrak{P},\ x_i\in U\ (1\le i\le n)\}.$$

Claramente $\mathfrak{P}(a)$ y $\mathfrak{P}(U)$ son ideales de A. En la demostración de los resultados de [5] anteriormente citados es esencial el hecho de que $\mathfrak{P}(U)\neq 0$ para cualesquiera ideales no nulos $\mathfrak{P}$ de $M(A)$ y U de A. Esto sugiere que en contextos más generales, los ideales $\mathfrak{P}$ de las álgebras de operadores que verifican que $\mathfrak{P}(U)\neq 0$ para todo ideal no nulo U de A deben jugar un papel primordial. Vamos a empezar caracterizando estos ideales por la propiedad de tener anulador derecho cero.

Proposición I.2.1. *Sea A un álgebra de anulador cero y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$. Para $\mathfrak{P}$ ideal de $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathfrak{P}(U)=0$ (U ideal de A) implica $U=0$.

ii) $\mathfrak{P}(a)=0$ ($a\in A$) implica $a=0$.

iii) $\mathfrak{P}F=0$ ($F\in\mathfrak{B}$) implica $F=0$.

Demostración. i)$\Rightarrow$ii).- Sea a en A tal que $\mathfrak{P}(a)=0$. Ya que $\mathfrak{P}M(A)\subseteq\mathfrak{P}\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{P}$, se sigue que $\mathfrak{P}(M(A)(a))=0$. Luego, por hipótesis, $M(A)(a)$ (y por tanto a) es igual a 0.

ii)$\Rightarrow$iii).- es claro.

iii)$\Rightarrow$i).- Sea U un ideal de A tal que $\mathfrak{P}(U)=0$. Entonces se verifica que $\mathfrak{P}L_x=\mathfrak{P}R_x=0$ para todo x en U, y por tanto $L_x=R_x=0$ para todo x en U. Luego $U\subseteq An(A)$, y así U es igual a 0. ∎

Sea A un álgebra semiprima y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$. En lo que sigue, $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ (abreviadamente $\mathfrak{D}$ si no hay lugar a confusión) denotará el filtro de denominadores de todos los ideales de

$\mathfrak{B}$ que verifican las condiciones equivalentes de la Proposición I.2.1. Ejemplos de ideales en $\mathfrak{D}$ aparecen a partir de los ideales esenciales de A. Si U es un ideal de A denotaremos por $\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}$ al ideal de $\mathfrak{B}$ generado por $\{L_x, R_x : x\in U\}$. Claramente

$$\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}=\{\sum_{i=1}^{n} F_i S_{x_i} G_i \ :\ n\in\mathbb{N},\ F_i, G_i\in\mathfrak{B},\ x_i\in U,\ \text{y para todo } 1\le i\le n\ S_{x_i}=L_{x_i} \text{ ó } R_{x_i}\},$$

y $\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}(A)$ es un ideal $\mathfrak{B}$-invariante de A contenido en $\mathfrak{B}(U)$.

Proposición I.2.2. *Sea A un álgebra semiprima y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$. Entonces*

i) Si U es un ideal esencial de A, entonces $\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}\in\mathfrak{D}$ y $\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}(A)$ es un ideal esencial de A.

ii) Si $\Lambda:\mathfrak{P}\longrightarrow\mathfrak{B}$ es un c.p.d. con $\mathfrak{P}\in\mathfrak{D}$ y tal que $\Lambda(\mathfrak{P})(U)=0$ para algún ideal esencial U de A, entonces $\Lambda=0$.

Demostración. i).- Ya que las inclusiones $UV\subseteq\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}(V)$ y $UV\subseteq\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}(A)\cap V$ son claramente ciertas para cualesquiera ideales U,V de A, se sigue inmediatamente que cuando U es un ideal esencial de A se verifica que $\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}\in\mathfrak{D}$ y $\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}(A)$ es un ideal esencial de A.

ii).- Sea Λ un c.p.d. en $\mathfrak{B}$ definido en $\mathfrak{P}\in\mathfrak{D}$ y supóngase la existencia de un ideal esencial U de A tal que $\Lambda(\mathfrak{P})(U)=0$. Ya que

$$\Lambda(\mathfrak{P}\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}})(A)=\Lambda(\mathfrak{P})\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}(A)\subseteq\Lambda(\mathfrak{P})\mathfrak{B}(U)=\Lambda(\mathfrak{P}\mathfrak{B})(U)\subseteq\Lambda(\mathfrak{P})(U)=0,$$

se tiene que $\Lambda(\mathfrak{P}\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}})=0$. De aquí se sigue que $\Lambda=0$ ya que por i) se tiene que $\mathfrak{P}\mathcal{I}_U^{\mathfrak{B}}\in\mathfrak{D}$. ∎

Sea A un álgebra semiprima y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$. Para un c.p.d. en $\mathfrak{B}$ con dominio en $\mathfrak{D}$, vamos a mostrar cómo la condición (I.4) permite construir un c.p.d. en A. Sea h un c.p.d. en $\mathfrak{B}$ con $dom(h)\in\mathfrak{D}$. Consideremos el conjunto d_h de todos los elementos x en A para los que existe un elemento y en A verificando $h(T)(x)=T(y)$ para todo T en $dom(h)$. Dado $x\in d_h$, si $y_1,y_2\in A$ verifican $T(y_1)=h(T)(x)=T(y_2)$ para todo $T\in dom(h)$, entonces $dom(h)(y_1-y_2)=0$, y por tanto $y_1=y_2$ ya que $dom(h)$ pertenece a $\mathfrak{D}$. Consecuentemente, para cada $x\in d_h$ existe un único elemento $f(x)$ en A verificando $h(T)(x)=T(f(x))$ para todo $T\in dom(h)$. Es inmediato que

$$h(T)(x_1+x_2)=T(f(x_1)+f(x_2)), \quad h(T)(\alpha x)=T(\alpha f(x)),$$
$$h(T)(F(x))=T(F(f(x))), \quad \text{y} \quad h(T)(S(a))=T(h(S)(a))$$

para cualesquiera $T,S\in dom(h)$, $x_1,x_2,x\in d_h$, $\alpha\in K$, $F\in\mathfrak{B}$, y $a\in A$. Luego d_h es un subespacio $\mathfrak{B}$-invariante (y por tanto un ideal) de A que contiene a $dom(h)(A)$ y $f:d_h\longrightarrow A$ es una aplicación lineal verificando $f(F(x))=F(f(x))$ para cualesquiera $F\in\mathfrak{B}$ y $x\in d_h$ (y por tanto es un c.p.d. en A), y $f(T(a))=h(T)(a)$ para cualesquiera $T\in dom(h)$ y $a\in A$. Además, de las definiciones de d_h y f se sigue que f extiende a cualquier c.p.d. g en A que verifique la condición $h(T)(x)=T(g(x))$ para cualesquiera $T\in dom(h)$ y $x\in dom(g)$. Resumiendo, tenemos el siguiente lema.

Lema I.2.3. *Sea A un álgebra semiprima y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$. Para cada c.p.d. h en $\mathfrak{B}$ con $dom(h)\in\mathfrak{D}$ existe un único c.p.d. f en A que es maximal con respecto a la propiedad siguiente*

$$h(T)(x)=T(f(x)) \tag{I.5}$$

para cualesquiera $T\in dom(h)$ y $x\in dom(f)$. Concretamente,

$$dom(f)=\{x\in A : \text{existe } y\in A \text{ tal que } h(T)(x)=T(y) \text{ para todo } T\in dom(h)\}$$

y para cada $x\in dom(f)$, $f(x)$ está únicamente determinado por (I.5). Además, tenemos:

i) $dom(f)$ es un subespacio $\mathfrak{B}$-invariante de A, y $f(F(x))=F(f(x))$ para cualesquiera $F\in\mathfrak{B}$ y $x\in dom(f)$, y

ii) $dom(h)(A)\subseteq dom(f)$, y $f(T(a))=h(T)(a)$ para cualesquiera $T\in dom(h)$

y $a\in A$.

Este resultado pone de relieve que si queremos que la condición (I.4) determine una aplicación de $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ en el centroide extendido C de A, entonces debemos imponer a $\mathfrak{B}$ la siguiente propiedad:

$\boxed{\textbf{P1.}}$ *Para todo Λ en $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ el conjunto*

$$d_{\Lambda}=\{x\in A \ : \ \text{existe } y\in A \text{ tal que } \Lambda(T)(x)=T(y) \text{ para todo } T\in dom(\Lambda)\}$$

es un ideal esencial de A.

Permítasenos suponer en este momento que $\mathfrak{B}$ verifica la propiedad P1. Si para cada Λ en $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ denotamos por $\psi(\Lambda)$ a la extensión maximal del c.p.d. en A asociado por el Lema I.2.3 a Λ, es fácil comprobar que

$$\psi(\Lambda_1+\Lambda_2)=\psi(\Lambda_1)+\psi(\Lambda_2), \quad \psi(\alpha\Lambda)=\alpha\psi(\Lambda), \quad \psi(\Lambda_1\Lambda_2)=\psi(\Lambda_1)\psi(\Lambda_2)$$

para cualesquiera $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda\in C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ y $\alpha\in K$. En consecuencia, la aplicación $\psi:C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\longrightarrow C$ es un homomorfismo de K-álgebras. Además, si $\psi(\Lambda)=0$, entonces $\Lambda(T)(x)=T(\psi(\Lambda)(x))=0$ para cualesquiera $T\in dom(\Lambda)$ y $x\in d_{\Lambda}$, por tanto $\Lambda(dom(\Lambda))(d_{\Lambda})=0$, y así $\Lambda=0$ por la Proposición I.2.2.(ii). Así, hemos demostrado el siguiente lema.

Lema I.2.4. *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$ y verifica la propiedad P1. Si para cada Λ en $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ denotamos por $\psi(\Lambda)$ a la extensión maximal del c.p.d. en A asociado a Λ por el Lema I.2.3, entonces la aplicación $\psi:C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\longrightarrow C$ es un monomorfismo de K-álgebras.*

Teniendo en cuenta el Lema I.2.3, si se desea que ψ sea sobreyectivo hemos de imponer adicionalmente a $\mathfrak{B}$ la siguiente otra propiedad:

$\boxed{\text{P2.}}$ *Para cada λ en C existe un ideal esencial $\mathfrak{B}$-invariante U de A tal que $U \subseteq dom(\lambda)$ y $\lambda(F(x))=F(\lambda(x))$ para cualesquiera $F \in \mathfrak{B}$ y $x \in U$.*

Supongamos en este momento que A es un álgebra semiprima y que $\mathfrak{B}$ es una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$ y que verifica la propiedad P2. Para cada $\lambda \in C$ denotemos por $dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$ al ideal maximal U de A que satisface las condiciones requeridas en P2. Fijemos $\lambda \in C$ y consideremos el conjunto

$$D^{\lambda} := \{F \in \mathfrak{B} \ : \ F(A) \subseteq dom_{\mathfrak{B}}(\lambda) \text{ y } \lambda F \in \mathfrak{B}\}$$

y la aplicación $h^{\lambda}: D^{\lambda} \longrightarrow \mathfrak{B}$ definida por $h^{\lambda}(F)=\lambda F$. Es fácil comprobar que D^{λ} es un ideal de $\mathfrak{B}$ que contiene a $\mathcal{I}^{\mathfrak{B}}_{dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)}$ (luego $D^{\lambda} \in \mathfrak{D}$ por la Proposición I.2.2.(i)) y la aplicación h^{λ} es un c.p.d. en $\mathfrak{B}$ tal que $h^{\lambda}(L_x)=L_{\lambda(x)}$ y $h^{\lambda}(R_x)=R_{\lambda(x)}$ para todo $x \in dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$. Si denotamos por $\varphi(\lambda)$ a la extensión maximal de h^{λ}, tenemos entonces que $\varphi(\lambda) \in C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$. Ahora, veamos que si $\mathfrak{B}$ verifica adicionalmente la propiedad P1, entonces $\psi(\varphi(\lambda))=\lambda$, y por tanto $\psi=\varphi^{-1}$. En efecto, como $\mathcal{I}^{\mathfrak{B}}_{dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)} \subseteq D^{\lambda}$ se sigue de la Proposición I.2.2.(i) que $D^{\lambda}(A)$ es un ideal esencial de A, y por el Lema I.2.3 tenemos $D^{\lambda}(A) \subseteq dom(\psi(\varphi(\lambda)))$ y

$$\psi(\varphi(\lambda))(T(a))=\varphi(\lambda)(T)(a)=(\lambda T)(a)=\lambda(T(a))$$

para cualesquiera $T \in D^{\lambda}$ y $a \in A$. Luego $\psi(\varphi(\lambda))$ y λ coinciden en $D^{\lambda}(A)$, y así son iguales ya que son c.p.d. maximales en A. Puesto que por el Lema I.2.3 se verifica que $dom(\varphi(\lambda))(A) \subseteq dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$ y $\lambda T=\varphi(\lambda)(T)$ para todo $T \in dom(\varphi(\lambda))$ se sigue que $dom(\varphi(\lambda)) \subseteq D^{\lambda}$ y por tanto $dom(\varphi(\lambda))=D^{\lambda}$. En consecuencia, $dom(\varphi(\lambda))(A)$ es un ideal esencial de A. Así, hemos demostrado el siguiente lema.

Lema I.2.5. *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$ y que verifica las propiedades P1 y P2. Entonces la aplicación $\psi:C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\longrightarrow C$ es un isomorfismo de K-álgebras cuyo inverso φ está determinado por las condiciones*

$$\varphi(\lambda)(L_x)=L_{\lambda(x)} \quad \text{y} \quad \varphi(\lambda)(R_x)=R_{\lambda(x)}$$

para cualesquiera $\lambda\in C$ y $x\in dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$. Además, para todo $\lambda\in C$ se verifica que

$$dom(\varphi(\lambda))=\{F\in\mathfrak{B} : F(A)\subseteq dom_{\mathfrak{B}}(\lambda) \text{ y } \lambda F\in\mathfrak{B}\}$$

y $dom(\varphi(\lambda))(A)$ es un ideal esencial de A.

Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C. Nuestro desarrollo pone de relieve las propiedades precisas exigibles a un álgebra de operadores $\mathfrak{B}$ en A que contenga a $M(A)$ para conseguir un isomorfismo entre C y $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ según el espíritu de la condición (I.4). Pero, nótese que, si $\mathfrak{B}$ satisface la propiedad P2, como consecuencia de las partes finales de los Lemas I.2.3 y I.2.5 se sigue que la propiedad P1 es equivalente a la siguiente propiedad más elemental:

P1'. *Para todo Λ en $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$, el conjunto $dom(\Lambda)(A)$ es un ideal esencial de A.*

Ahora, podemos formular nuestro primer resultado importante.

Teorema I.2.6. *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$ y que verifica las propiedades P1' y P2. Entonces para cada λ en C existe un único elemento $\varphi(\lambda)$ en $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ que verifica*

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x))$$

para cualesquiera $T\in dom(\varphi(\lambda))$ *y* $x\in dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$, *y la aplicación* $\varphi:\lambda\longmapsto\varphi(\lambda)$ *es un isomorfismo de K-álgebras de C sobre* $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$. *Además, tenemos que*

i) $\mathcal{F}^{\mathfrak{B}}_{dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)}\subseteq dom(\varphi(\lambda))$, *y* $\varphi(\lambda)(L_x)=L_{\lambda(x)}$ *y* $\varphi(\lambda)(R_x)=R_{\lambda(x)}$ *para todo* $x\in dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$, *y*

ii) $dom(\varphi(\lambda))(A)\subseteq dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)$, *y* $\lambda(T(a))=\varphi(\lambda)(T)(a)$ *para cualesquiera* $T\in dom(\varphi(\lambda))$ *y* $a\in A$.

El siguiente corolario es una consecuencia directa de las afirmaciones i) y ii) en el teorema anterior.

Corolario I.2.7. *Sea A un álgebra semiprima y sea* $\mathfrak{B}$ *una subálgebra de L(A) que contiene a M(A) y que verifica las propiedades P1' y P2. Para cada* $\Lambda\in C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ *se verifica que*

$$L_{F(a)},R_{F(a)}\in dom(\Lambda) \quad y \quad \Lambda(L_{F(a)})=L_{\Lambda(F)(a)}\,, \quad \Lambda(R_{F(a)})=R_{\Lambda(F)(a)}$$

para cualesquiera $F\in dom(\Lambda)$ *y* $a\in A$.

Nota I.2.8. Una demostración directa del teorema anterior podría llevarse a cabo haciendo intervenir la subálgebra del centroide extendido C de A definida en términos de límite directo como sigue:

$$C_{\mathfrak{B}}(A):=\underrightarrow{\lim}\,\{Hom_{\mathfrak{B}}(U,A)\ :\ U \text{ ideal esencial } \mathfrak{B}\text{-invariante de } A\}.$$

La propiedad P2 implica que $C_{\mathfrak{B}}(A)=C$ y la propiedad P1' permite identificar $C_{\mathfrak{B}}(A)$ con $C_{\mathfrak{D}}$. Para más detalles véase [**6**].

Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C. Dada una subálgebra $\mathfrak{B}$ de $L(A)$, parece bastante natural extender la acción de $\mathfrak{B}$ sobre A a $Q(A)$ de manera que la acción de $F\in\mathfrak{B}$ en λa ($\lambda\in C$, $a\in A$) venga dada por $\lambda F(a)$. Sin embargo, para garantizar la bondad de esta definición es obligado suponer que $\mathfrak{B}$ *preserve expresiones anulantes* de

$Q(A)$, esto es, si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0$ ($n\in\mathbb{N}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in C$, y $a_1,\ldots,a_n\in A$), entonces $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(a_i)=0$ para todo $F\in\mathfrak{B}$.

Teorema I.2.9. *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C, sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $L(A)$ que contiene a $M(A)$, y supóngase que $\mathfrak{B}$ verifica las propiedades P1' y P2, y que preserva expresiones anulantes de $Q(A)$. Considérese $C_{\mathfrak{D}}\mathfrak{B}$ como una C-álgebra vía el isomorfismo φ dado por el teorema anterior. Entonces existe un monomorfismo de C-álgebras Φ de $C_{\mathfrak{D}}\mathfrak{B}$ en $L_C(Q(A))$ determinado por*

$$\Phi\Big(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)F_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j\Big):=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}\lambda_i\mu_j F_i(a_j)$$

para cualesquiera n,m en $\mathbb{N}$, λ_i,μ_j en C, F_i en $\mathfrak{B}$, y a_j en A ($1\le i\le n$, $1\le j\le m$). Como consecuencia, $C_{\mathfrak{D}}\mathfrak{B}$ puede verse como una subálgebra de $L_C(Q(A))$ que contiene a $M_C(Q(A))$.

Demostración. Ya que $\mathfrak{B}$ preserva expresiones anulantes se sigue que, para cada $F\in\mathfrak{B}$, la correspondencia $\overline{F}$ dada por

$$\overline{F}\colon \sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j \longmapsto \sum_{j=1}^{m}\mu_j F(a_j)$$

para cualesquiera $m\in\mathbb{N}$, $\mu_j\in C$, y $a_j\in A$ ($1\le j\le m$), resulta ser una aplicación bien definida de $Q(A)$ en $Q(A)$. Es claro que $\overline{F}$ es C-lineal, así como también que la aplicación $F\longmapsto\overline{F}$ es un homomorfismo de K-álgebras de $\mathfrak{B}$ en $L_C(Q(A))$ tal que $\overline{Id_A}=Id_{Q(A)}$, $\overline{L_a}=L_a^{Q(A)}$ (la multiplicación izquierda por a en $Q(A)$) y $\overline{R_a}=R_a^{Q(A)}$ (la multiplicación derecha por a en $Q(A)$) para todo $a\in A$. Puesto que $M_C(Q(A))$ está generada como C-álgebra por $Id_{Q(A)}$, $L_a^{Q(A)}$ y $R_a^{Q(A)}$ ($a\in A$), obtenemos que $M_C(Q(A))=C\overline{M(A)}\subseteq C\overline{\mathfrak{B}}$.

Supongamos en este momento que la igualdad $\sum_{i=1}^{n}\varphi(\rho_i)G_i=0$ es cierta en $C_{\mathfrak{D}}\mathfrak{B}$. Tomemos $U:=\bigcap_{i=1}^{n}dom_{\mathfrak{B}}(\rho_i)$, fijemos $x\in U$ y $G\in M(A)$, y recordemos que por el Teorema I.2.6.(i) se verifica que $R_x \in dom(\varphi(\rho_i))$ y $\varphi(\rho_i)(R_x)=R_{\rho_i(x)}$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$. Luego

$$\sum_{i=1}^{n} R_{\rho_i(x)}GG_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\rho_i)(R_x)GG_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\rho_i)R_xGG_i =$$
$$\sum_{i=1}^{n} R_xG\varphi(\rho_i)G_i = R_xG\sum_{i=1}^{n} \varphi(\rho_i)G_i = 0,$$

y por tanto

$$\overline{G}(\sum_{i=1}^{n} \rho_iG_i(a))x = (\sum_{i=1}^{n} \rho_iGG_i(a))x = \sum_{i=1}^{n} GG_i(a)\rho_ix =$$
$$\sum_{i=1}^{n} GG_i(a)\rho_i(x) = (\sum_{i=1}^{n} R_{\rho_i(x)}GG_i)(a) = 0,$$

para todo $a\in A$. De este hecho y de la igualdad $M_C(Q(A))=C\overline{M(A)}$ se sigue que, si $\hat{V}$ denota el ideal de $Q(A)$ generado por $\{\sum_{i=1}^{n} \rho_iG_i(a) : a\in A\}$ y $\hat{U}=CU$, entonces $\hat{V}\hat{U}=0$. Puesto que U es un ideal esencial de A se tiene que también $\hat{U}$ es un ideal esencial de $Q(A)$, y por tanto la semiprimidad de $Q(A)$ nos permite concluir que $\sum_{i=1}^{n} \rho_iG_i(a)=0$ para todo $a\in A$. Luego

$$(\sum_{i=1}^{n} \rho_i\overline{G_i})(\sum_{j=1}^{m} \mu_ja_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \rho_i\mu_jG_i(a_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j(\sum_{i=1}^{n} \rho_iG_i(a_j)) = 0$$

para todo $\sum_{j=1}^{m} \mu_ja_j\in Q(A)$, y por tanto $\sum_{i=1}^{n} \rho_i\overline{G_i}=0$.

Ahora podemos afirmar que la correspondencia Φ dada por

$$\Phi: \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)F_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overline{F}_i$$

resulta ser una aplicación bien definida de $C_{\mathfrak{D}}\mathfrak{B}$ en $L_C(Q(A))$. Es fácil comprobar que Φ es un homomorfismo de C-álgebras. Veamos finalmente la inyectividad de Φ. Supuesto que $\Phi(\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)F_i)=0$, se tiene entonces que

$$0=\Phi(\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)F_i)(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_iF_i(a)$$

para todo $a\in A$, y por tanto

$$\sum_{i=1}^{n} L_{\lambda_i(x)}GF_i(a) = x\overline{G}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_iF_i(a)) = 0,$$

así como también análogamente

$$\sum_{i=1}^{n} R_{\lambda_i(x)} GF_i(a)=0,$$

para cualesquiera $x \in U=\bigcap_{i=1}^{n} dom_{\mathfrak{B}}(\lambda_i)$, $G \in \mathfrak{B}$, y $a \in A$. De nuevo, por el Teorema I.2.6.(i), para cualesquiera que sean $i \in \{1,\ldots,n\}$ y $x \in U$, se verifica que $S_x (=L_x$ ó $R_x)$ pertenece a $dom(\varphi(\lambda_i))$ y $\varphi(\lambda_i)(S_x)=S_{\lambda_i(x)}$, y por tanto

$$0=\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)(S_x) GF_i(a)=[\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i) S_x GF_i](a)=[S_x G \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i) F_i](a).$$

Luego

$$0=S_x G \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i) F_i$$

para cualesquiera $x \in U$, y $G \in \mathfrak{B}$. Como consecuencia, tenemos que $\mathcal{S}_U^{\mathfrak{B}}(\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i) F_i)=0$, de donde podemos concluir $\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i) F_i=0$ en virtud de la Nota I.1.10. ■

3. Primera etapa del principal resultado y algunas otras aplicaciones.

En esta sección mostramos algunas aplicaciones de los resultados obtenidos en la sección anterior. La primera y más relevante aplicación surge en el caso en que se toma como álgebra de operadores la propia álgebra de multiplicación. En ese caso, y supuesto que también el álgebra de multiplicación es semiprima, se obtiene la primera etapa del principal resultado del capítulo. También aplicamos los resultados al caso en que A es un álgebra semiprima normada y $\mathfrak{B}$ es un álgebra de operadores en A que contiene a $M(A)$ y que está contenida en el cierre de $M(A)$ para la topología fuerte de operadores.

Definición I.3.1. Un álgebra A se dice *multiplicativamente semiprima* si tanto A como $M(A)$ son álgebras semiprimas.

La particularización a álgebras multiplicativamente semiprimas de los Teoremas I.2.6 y I.2.9 nos da la primera parte del resultado principal. Hablando de manera informal, para tales álgebras ocurre que el centroide extendido permanece inalterable cuando se pasa al álgebra de multiplicación, así como que hay conmutación en los procesos de toma de clausura central y de paso al álgebra de multiplicación.

Teorema I.3.2. (Primera etapa del resultado principal) *Si A es un álgebra multiplicativamente semiprima con centroide extendido C, entonces existe un isomorfismo de K-álgebras φ de C sobre $C(M(A))$ determinado de manera única por la siguiente condición:*

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x))$$

para cualesquiera λ en C, T en $dom(\varphi(\lambda))$, y x en $dom(\lambda)$. Además, si $Q(M(A))$ se considera como una C-álgebra vía el isomorfismo φ, entonces existe un isomorfismo de C-álgebras Φ de $Q(M(A))$ sobre $M_C(Q(A))$ determinado por

$$\Phi(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)F_i)(\sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j):=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}\lambda_i\mu_j F_i(a_j)$$

para cualesquiera $\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)F_i$ en $Q(M(A))$ y $\sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j$ en $Q(A)$.

Conviene llamar la atención sobre el hecho de que el isomorfismo Φ de $Q(M(A))$ sobre $M_C(Q(A))$ dado en el teorema anterior no es más que la única extensión a un homomorfismo de C-álgebras de la aplicación $Id_{M(A)}$, una vez que $M(A)$ se considera como subálgebra de $Q(M(A))$ (naturalmente) y de $M_C(Q(A))$ (vía el Corolario I.1.5).

Ya que los ideales con anulador derecho cero en un álgebra asociativa semiprima son precisamente los ideales esenciales, el resultado anterior es una particularización de la siguiente más general aplicación de los Teoremas I.2.6 y I.2.9.

Teorema I.3.3. *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C. Entonces existe un isomorfismo de K-álgebras φ de C sobre $C_{\mathfrak{D}}(=C_{\mathfrak{D}}(M(A)))$ determinado de forma única por la condición siguiente:*

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x))$$

para cualesquiera $\lambda\in C$, $T\in dom(\varphi(\lambda))$, y $x\in dom(\lambda)$. Además, si $C_{\mathfrak{D}}M(A)$ se considera como una C-álgebra vía el isomorfismo φ, entonces existe un isomorfismo de C-álgebras Φ de $C_{\mathfrak{D}}M(A)$ sobre $M_C(Q(A))$ determinado por

$$\Phi(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)F_i)(\sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j):=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}\lambda_i\mu_j F_i(a_j)$$

para cualesquiera $\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)F_i$ en $C_{\mathfrak{D}}M(A)$ y $\sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j$ en $Q(A)$.

Demostración. Puesto que dado $\mathfrak{P}\in\mathfrak{D}$ se verifica para todo ideal U de A la inclusión $\mathfrak{P}(U)\subseteq\mathfrak{P}(A)\cap U$, se sigue de la Proposición I.2.1 que $\mathfrak{P}(A)$ es un ideal esencial de A. Luego $M(A)$ verifica la propiedad P1'. Es claro que si f es un c.p.d. en A, entonces $fF_{|dom(f)}=Ff$ para todo $F\in M(A)$. Como consecuencia $M(A)$ verifica la propiedad P2 y $dom_{M(A)}(\lambda)=dom(\lambda)$ para todo $\lambda\in C$. Veamos además que $M(A)$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$. En efecto, considérese el conjunto V de todos los elementos F de $M(A)$ que verifican $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(a_i)=0$ para cualesquiera que sean $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in C$ y $a_1,\ldots,a_n\in A$ cumpliendo que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0$, y nótese que V es una subálgebra de $M(A)$ que contiene a Id_A, L_a y R_a para todo $a\in A$, por lo que $V=M(A)$. Finalmente, ya que $C_{\mathfrak{D}}M(A)$ está generada como C-álgebra por Id_A, y L_a, R_a para todo $a\in A$, y ocurre que $\Phi(Id_A)=Id_{Q(A)}$, y $\Phi(L_a)=L_a^{Q(A)}$, $\Phi(R_a)=R_a^{Q(A)}$, se sigue que $\Phi(C_{\mathfrak{D}}M(A))=M_C(Q(A))$. ∎

Con ayuda del Corolario I.1.5 podemos en este momento mostrar la primera propiedad de estabilidad de las álgebras multiplicativamente semiprimas.

Corolario I.3.4. *Si A es un álgebra multiplicativamente semiprima, entonces toda K-subálgebra de $Q(A)$ que contenga a A es también un álgebra multiplicativamente semiprima.*

Demostración. Sea Q una K-subálgebra de $Q(A)$ que contiene a A. Veamos en primer lugar que Q es un álgebra semiprima. Si U es un ideal de Q tal que $U^2=0$, entonces CU es un ideal de $Q(A)$ verificando $(CU)^2=0$. Puesto que $Q(A)$ es semiprima se sigue que $CU=0$, y por tanto $U=0$. Por el

Corolario I.1.5 $M(A)\subseteq M(Q)\subseteq M(Q(A))$, luego con mayor motivo $M(A)\subseteq M(Q)\subseteq M_C(Q(A))$. Finalmente, por el Teorema I.3.2 $M_C(Q(A))$ es isomorfa a $Q(M(A))$, y por tanto $M(Q)$ puede considerarse como una subálgebra de $Q(M(A))$ que contiene a $M(A)$, por lo que razonando como en la primera parte de la demostración obtenemos que $M(Q)$ es semiprima. ∎

Estamos interesados en este momento en llamar la atención acerca del hecho de que el isomorfismo de centroides extendidos en el Teorema I.3.2 no está obligado a preservar los centroides. En esa tarea convendrá tener presente el siguiente enunciado que recoge la particularización al caso de un álgebra compleja vista como real de los comentarios que preceden a la Proposición I.1.3.

Proposición I.3.5. *Sea A un álgebra compleja, y denótese por $A_{\mathbb{R}}$ al álgebra real subyacente. Entonces la inclusión canónica de $L(A)$ en $L(A_{\mathbb{R}})$ determinada por la restricción de escalares permite considerar $M(A_{\mathbb{R}})$ como una subálgebra real de $M(A)$ verificandose las igualdades:*

$$M(A)=M(A_{\mathbb{R}})+\mathbb{C}Id_A \quad \text{y} \quad M^{\#}(A)=M^{\#}(A_{\mathbb{R}}).$$

Nota I.3.6. Sea A un álgebra multiplicativamente semiprima y considérese el isomorfismo φ de $C(A)$ en $C(M(A))$ dado en el Teorema I.3.2. Recordemos que en los Lemas I.2.3 y I.2.5 se recoge la descripción de los dominios de $\varphi(\lambda)$, para λ en $C(A)$, y de $\varphi^{-1}(\Lambda)$, para Λ en $C(M(A))$. A saber

$$dom(\varphi(\lambda))=\{F\in M(A)\ :\ F(A)\subseteq dom(\lambda) \text{ y } \lambda F\in M(A)\}$$

y

$$dom(\varphi^{-1}(\Lambda))=\{x\in A\text{: Existe } y\in A \text{ tal que } \Lambda(T)(x)=T(y) \text{ para todo } T\in dom(\Lambda)\}.$$

Teniendo en mente estos hechos, podemos discutir el trato que φ le da a los centroides. Así, si Λ pertenece a $\Gamma(M(A))$, entonces para cualesquiera x en A y T en $M(A)$ tenemos que

$$\Lambda(T)(x)=\Lambda(TId_A)(x)=T\Lambda(Id_A)(x),$$

y por tanto $dom(\varphi^{-1}(\Lambda))=A$. Luego $\Gamma(M(A))\subseteq\varphi(\Gamma(A))$. Sin embargo, la inclusión contraria no tiene por qué ser cierta como se demuestra en el siguiente ejemplo: Sea A un álgebra compleja multiplicativamente semiprima tal que $Id_A\notin M^{\#}(A)$. (Un ejemplo concreto es el álgebra no asociativa libre sobre un conjunto no vacio X, hecho que resultará evidente de nuestro desarrollo en la Sección 3 del Capítulo II.) Sabemos que $M(A_{\mathbb{R}})=M^{\#}(A_{\mathbb{R}})\oplus\mathbb{R}Id_{A_{\mathbb{R}}}$ es una subálgebra de $M(A)=M^{\#}(A)\oplus\mathbb{C}Id_A$ y que $M^{\#}(A_{\mathbb{R}})=M^{\#}(A)$. Es claro que $A_{\mathbb{R}}$ es un álgebra semiprima, y puesto que $M(A)$ está $\mathbb{C}$-generada por $M(A_{\mathbb{R}})$ se sigue inmediatamente que también $M(A_{\mathbb{R}})$ es semiprima, por lo que $A_{\mathbb{R}}$ es un álgebra multiplicativamente semiprima. Si denotamos por ι a la aplicación de multiplicación por la unidad imaginaria, entonces es claro que ι pertenece a $\Gamma(A_{\mathbb{R}})$, pero sin embargo veamos que $\varphi(\iota)$ no pertenece a $\Gamma(M(A_{\mathbb{R}}))$. Para ello, empecemos notando que ι no pertenece a $M(A_{\mathbb{R}})$. En efecto, en otro caso, existirían $F\in M^{\#}(A_{\mathbb{R}})$ y $r\in\mathbb{R}$ tales que $\iota=F+rId_{A_{\mathbb{R}}}$, y en consecuencia

$$-Id_{A_{\mathbb{R}}}=\iota^2=(F+rId_{A_{\mathbb{R}}})^2=F^2+2rF+r^2Id_{A_{\mathbb{R}}},$$

luego

$$-(1+r^2)Id_{A_{\mathbb{R}}}=F^2+2rF\in M^{\#}(A_{\mathbb{R}})\cap\mathbb{R}Id_{A_{\mathbb{R}}}=0,$$

y por tanto $1+r^2=0$, lo que es una contradicción. Finalmente, si $\varphi(\iota)$ perteneciera a $\Gamma(M(A_{\mathbb{R}}))$, entonces $dom(\varphi(\iota))$ sería igual a $M(A_{\mathbb{R}})$, luego $Id_{A_{\mathbb{R}}}$ pertenecería a $dom(\varphi(\iota))$, y por tanto $\iota=\iota Id_{A_{\mathbb{R}}}$ pertenecería a $M(A_{\mathbb{R}})$, lo cual sería una contradicción. ■

Nuestro objetivo final en esta sección es aplicar los resultados de la Sección 2 al caso en que A es un álgebra semiprima normada y el álgebra $\mathfrak{B}$ está contenida en el cierre del álgebra de multiplicación para la topología fuerte de operadores. Estas álgebras de operadores son especialmente interesantes en la teoría de las álgebras normadas como puede verse por ejemplo en [**46**; Sección B]. Empecemos recordando la siguiente definición.

Definición I.3.7. Sea X un espacio normado y denótese por $BL(X)$ el álgebra normada de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en X. La *topología fuerte de operadores* en $BL(X)$, denotada abreviadamente por SOT, se define como la topología inicial para la familia de aplicaciones de la forma $F\longmapsto F(x)$ de $BL(X)$ en X (con la topología de la norma) cuando x varía en X. En consecuencia, SOT es la topología de la convergencia puntual, esto es, una red $\{F_\gamma\}$ de elementos de $BL(X)$ es SOT-convergente a $F\in BL(X)$ si, y sólo si, $\{F_\gamma(x)\}$ es $\|.\|$-convergente a $F(x)$ para todo $x\in X$. La topología fuerte de operadores está incluida en la topología de la norma, es compatible con la estructura de espacio vectorial de $BL(X)$ y hace el producto de $BL(X)$ separadamente continuo. En consecuencia, si $\mathfrak{B}$ es una subálgebra de $BL(X)$, entonces $\overline{\mathfrak{B}}^{SOT}$ (el cierre de $\mathfrak{B}$ en SOT) es también una subálgebra de $BL(X)$ que es cerrada para la topología de la norma de $BL(X)$.

El siguiente lema de [**9**] proporciona una de las propiedades necesarias para aprovechar nuestros resultados en este contexto.

Lema I.3.8 [**9**; Corolario 1 y Lema 4] *Sea A un álgebra semiprima normada con centroide extendido C. Para cada λ en C se verifica que $dom(\lambda)$ es invariante por $\overline{M(A)}^{SOT}$ y*

$$\lambda(F(x))=F(\lambda(x))$$

para cualesquiera F en $\overline{M(A)}^{SOT}$ y x en $dom(\lambda)$.

Teorema I.3.9. *Sea A un álgebra semiprima normada con centroide extendido C y sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $BL(A)$ que contiene a $M(A)$ y que está contenida en $\overline{M(A)}^{SOT}$. Entonces existe un isomorfismo de K-álgebras φ de C sobre $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})$ determinado de manera única por la condición siguiente:*

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x))$$

para cualesquiera $\lambda\in C$, $T\in dom(\varphi(\lambda))$, y $x\in dom(\lambda)$. Además, si $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\mathfrak{B}$ se considera como C-álgebra vía el isomorfismo φ, entonces $C_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{B})\mathfrak{B}$ puede verse como una subálgebra de $L_C(Q(A))$ que contiene a $M_C(Q(A))$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathfrak{B}$ verifica la propiedad P1'. Sea $\mathfrak{P}\in\mathfrak{D}$ y supongamos que U es un ideal de A tal que $\mathfrak{P}(A)\cap U=0$. Puesto que A es semiprima se sigue que $\mathfrak{P}(A)U=0$, y por tanto también $\mathfrak{P}(A)\overline{U}=0$, donde $\overline{U}$ denota el cierre de U en la norma de A, y de nuevo por ser A semiprima se tiene que $\mathfrak{P}(A)\cap\overline{U}=0$. Ahora, de las inclusiones $\mathfrak{P}(U)\subseteq\mathfrak{P}(A)\cap\mathfrak{B}(U)\subseteq\mathfrak{P}(A)\cap\overline{U}$ se sigue que $\mathfrak{P}(U)=0$ y, por la Proposición I.2.1, $U=0$. Luego $\mathfrak{P}(A)$ es un ideal esencial de A.

Por el lema anterior, $\mathfrak{B}$ verifica la propiedad P2 y además $dom_{\mathfrak{B}}(\lambda)=dom(\lambda)$ para todo $\lambda\in C$.

Finalmente vamos a demostrar que $\mathfrak{B}$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$. Supongamos que $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in C$ y $a_1,\ldots,a_n\in A$ son tales que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0$. Fijemos $F\in\mathfrak{B}$ y $x\in U:=\bigcap_{i=1}^{n} dom(\lambda_i)$, y tomemos una red $\{F_\gamma\}$ en $M(A)$ SOT-convergente a F. Por definición de la topología fuerte de operadores se tiene que $\{F_\gamma(a_i)\}$ es $\|.\|$-convergente a $F(a_i)$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, y por tanto $\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)F_\gamma(a_i)\}$ es $\|.\|$-convergente a $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)F(a_i)$. Ya que $M(A)$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$ (véase el final de la demostración del Teorema I.3.3) tenemos que para todo γ se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)F_\gamma(a_i)=x(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_\gamma(a_i))=0,$$

y por tanto $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)F(a_i)=0$. Sustituyendo en esta expresión F por GF para $G\in M(A)$ tenemos que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)GF(a_i)=0$ para todo $G\in M(A)$. Ahora, como $M_C(Q(A))$ está generada por $M(A)$ como C-álgebra se sigue que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)TF(a_i)=0$ para todo $T\in M_C(Q(A))$. Luego

$$0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)TF(a_i)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x)TF(a_i)=x(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i TF(a_i))=xT(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(a_i))$$

para todo $T\in M_C(Q(A))$. De aquí se sigue que $\hat{U}\hat{V}=0$, donde $\hat{U}=CU$ denota el ideal de $Q(A)$ generado por U y $\hat{V}$ denota el ideal de $Q(A)$ generado por $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(a_i)$. Ya que $Q(A)$ es semiprima y $\hat{U}$ es un ideal esencial de $Q(A)$ podemos concluir que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(a_i)=0$. ■

4. Ejemplos de álgebras multiplicativamente semiprimas.

La más importante aportación de esta sección es la obtención de la segunda etapa del principal resultado de este capítulo: Las álgebras asociativas semiprimas son multiplicativamente semiprimas. Ello se conseguirá utilizando profusamente la teoría de identidades polinomiales generalizadas. Comenzaremos la sección ejemplificando la existencia de álgebras semiprimas que no son multiplicativamente semiprimas. A continuación nos ocuparemos de justificar que la clase de las álgebras multiplicativamente semiprimas es bastante amplia mostrando que contiene a varias gamas importantes de álgebras. Finalizaremos aplicando los resultados obtenidos hasta este momento al álgebra de los operadores elementales sobre un álgebra asociativa semiprima.

El siguiente método de construcción permite obtener álgebras semiprimas que no son multiplicativamente semiprimas tanto en dimensión finita como infinita. Recordemos previamente la bien conocida caracterización de la semiprimidad en términos de elementos para álgebras asociativas: Un álgebra asociativa A es semiprima si, y sólamente si, $aAa=0$ implica $a=0$.

Ejemplo I.4.1. *Sea B un álgebra semiprima, y sea C una subálgebra no nula de B con anulador cero en sí misma. Considérese el álgebra A con espacio vectorial subyacente $B\times C$ y con producto definido por*

$$(b_1,c_1)(b_2,c_2)=(b_1b_2+c_1c_2,0) .$$

Entonces A es un álgebra semiprima que no es multiplicativamente semiprima.

Demostración. Empecemos notando que para cada ideal U de A se verifica que el conjunto $I:=\{b\in B\ :\ (b,0)\in U\}$ es un ideal de B tal que

$$UA+AU\subseteq I\times\{0\}\subseteq U.$$

Puesto que $An(A)=An(B)\times An(C)=0$, se tiene que $I=0$ implica $U=0$. Ahora, la semiprimidad de A se sigue inmediatamente de la de B. Por otra parte, ya que para todo $c\in C$ se verifica que

$$L_{(0,c)}(A)\subseteq B\times\{0\} \quad \text{y} \quad L_{(0,c)}(B\times\{0\})=0,$$

se sigue que $L_{(0,c)}M(A)L_{(0,c)}=0$, y por tanto $M(A)$ no es semiprima. ∎

Si en el ejemplo anterior se toma B un álgebra anticonmutativa semiprima y C una subálgebra no nula de B con anulador cero en sí misma, entonces el álgebra A obtenida es también anticonmutativa, y por tanto de *potencias asociativas* (la subálgebra generada por cada elemento de A es asociativa). En consecuencia, hay álgebras de potencias asociativas semiprimas que no son multiplicativamente semiprimas.

Las álgebras multiplicativamente semiprimas son bastante abundantes como quedará claro a lo largo de esta sección. Comencemos estableciendo un resultado que pone de relieve cómo en la definición de álgebra multiplicativamente semiprima se puede sustituir el álgebra de multiplicación por el ideal de multiplicación. Recordemos que todo ideal no nulo U de un álgebra asociativa semiprima A es un álgebra semiprima. En efecto, si $x\in U$ es tal que $xUx=0$, entonces $xAxAxAx=0$, y por tanto $xAx=0$, y $x=0$, donde hemos aplicado dos veces la semiprimidad de A.

Proposición I.4.2. *Para toda álgebra A de producto no cero equivalen:*

i) $M^{\#}(A)$ es un álgebra semiprima, *ii) $M(A)$ es un álgebra semiprima.*

Demostración. i)$\Rightarrow$ii).- Sea $\mathfrak{P}$ un ideal de $M(A)$ tal que $\mathfrak{P}^2=0$. Entonces $\mathfrak{P}\cap M^{\#}(A)$ es un ideal de $M^{\#}(A)$ de cuadrado cero, luego $\mathfrak{P}\cap M^{\#}(A)=0$, y en consecuencia también $\mathfrak{P}M^{\#}(A)=0$. Dado $F\in\mathfrak{P}$, escribamos $F=T+\alpha Id_A$ para convenientes $T\in M^{\#}(A)$ y $\alpha\in K$. Si $\alpha=0$, entonces $F=T\in\mathfrak{P}\cap M^{\#}(A)$, y por tanto $F=0$. En otro caso, tenemos que $0=F^2=F(T+\alpha Id_A)=FT+\alpha F=\alpha F$, y por tanto $F=0$. En consecuencia, $\mathfrak{P}=0$.

ii)$\Rightarrow$i).- Se ha comentado previamente. ■

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de álgebras y considérese el álgebra suma directa $A=\underset{i\in I}{\oplus}A_i$. Identificando cada álgebra A_i con su inyección canónica en A, podemos ver A_i como un ideal de A, y en consecuencia para cada $F\in M(A)$ podemos considerar la aplicación $F_i:A_i\longrightarrow A_i$ determinada por la restricción de F. Es claro que la aplicación $F\longmapsto F_i$ es un homomorfismo de álgebras de $M(A)$ en $L(A_i)$ que aplica $Id_A\longmapsto Id_{A_i}$, $L^A_{a_j}\longmapsto 0$, $R^A_{a_j}\longmapsto 0$ para $j\neq i$, y $L^A_{a_i}\longmapsto L_{a_i}$, $R^A_{a_i}\longmapsto R_{a_i}$, donde estamos denotando por $L^A_{a_k}$, $R^A_{a_k}$ a los respectivos operadores de multiplicación en A determinados por $a_k\in A_k$. Puesto que A está linealmente generada por $\bigcup_{i\in I} A_i$ se sigue que $M(A)$ está generada como álgebra por $\bigcup_{i\in I}\{L^A_{a_i},\ R^A_{a_i}\ :\ a_i\in A_i\}\cup\{Id_A\}$. De lo anterior se deduce inmediatamente que la aplicación $F\longmapsto F_i$ es un epimorfismo de $M(A)$ sobre $M(A_i)$ que aplica $M^{\#}(A)$ sobre $M^{\#}(A_i)$. Contrariamente a lo que ocurre con el álgebra de multiplicación, el ideal de multiplicación tiene un buen comportamiento respecto de la suma directa. El siguiente lema es una generalización de [**21**; Lema 2.6.(a)].

Lema I.4.3. *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de álgebras y se considera el* *álgebra* $A=\oplus_{i\in I}A_i$, *entonces la aplicación* $F\longmapsto(F_i)$ *es un isomorfismo de* $M^{\#}(A)$ *sobre* $\oplus_{i\in I}M^{\#}(A_i)$.

Demostración. Consideremos el homomorfismo $F\longmapsto(F_i)$ de $M^{\#}(A)$ en el álgebra producto directo $\prod_{i\in I}M^{\#}(A_i)$. Si $F\in M^{\#}(A)$ es tal que $(F_i)=0$, entonces $F(A_i)=0$ para todo $i\in I$, y por tanto $F=0$ ya que A está linealmente generada por $\bigcup_{i\in I}A_i$. Así, el anterior homomorfismo es inyectivo. Una vez que $\oplus_{i\in I}M^{\#}(A_i)$ se considera como subálgebra de $\prod_{i\in I}M^{\#}(A_i)$, la prueba de que dicho homomorfismo está valuado en $\oplus_{i\in I}M^{\#}(A_i)$ se sigue de que el conjunto

$$\{F\in M^{\#}(A)\ :\ (F_i)\in\oplus_{i\in I}M^{\#}(A_i)\}$$

es una subálgebra de $M^{\#}(A)$ que contiene a los generadores $\bigcup_{i\in I}\{L^{A}_{a_i},\ R^{A}_{a_i}\ :\ a_i\in A_i\}$. Finalmente, para probar la sobreyectividad obsérvese que para cada $i\in I$ el conjunto

$$\{T\in M^{\#}(A_i)\ :\ \text{Existe } F\in M^{\#}(A) \text{ tal que } F_i=T \text{ y } F_j=0 \text{ para todo } j\in I\backslash\{i\}\}$$

es una subálgebra de $M^{\#}(A_i)$ que contiene a L_{a_i}, R_{a_i} $(a_i\in A_i)$, y por tanto coincide con $M^{\#}(A_i)$. Ahora, dado $(F_i)\in\oplus_{i\in I}M^{\#}(A_i)\backslash\{0\}$, si consideramos el conjunto $J=\{i\in I\ :\ F_i\neq 0\}$, y para cada $i\in J$ tomamos $T^{(i)}\in M^{\#}(A)$ tal que $T^{(i)}_i=F_i$ y $T^{(i)}_j=0$ para todo $j\in I\backslash\{i\}$, entonces es claro que $T:=\sum_{i\in J}T^{(i)}\in M^{\#}(A)$ y $T_i=F_i$ para todo $i\in I$. ■

Puesto que la suma directa de una familia de álgebras semiprimas es un álgebra semiprima, se sigue de los dos resultados anteriores el siguiente

Corolario I.4.4. *La suma directa de una familia de álgebras multiplicativamente semiprimas es un álgebra multiplicativamente* *semiprima.*

Nuestro objetivo inmediato será establecer que las álgebras fuertemente semiprimas introducidas por Handelman en [**24**] son multiplicativamente semiprimas. Siguiendo [**52**; 34.3.(d)] un álgebra se dice ser *fuertemente semiprima* si es semiprima y su clausura central es suma directa de ideales simples.

Proposición I.4.5. *Toda álgebra fuertemente semiprima es multiplicativamente semiprima.*

Demostración. Sea A un álgebra fuertemente semiprima con centroide extendido C y supóngase que $Q(A)=\oplus_{i\in I}Q_i$, donde $\{Q_i\}_{i\in I}$ es una familia de ideales simples de $Q(A)$. Por la Proposición I.4.2 nos bastará probar que $M^{\#}(A)$ es semiprima. Sea $F\in M^{\#}(A)$ tal que $FM^{\#}(A)F=0$. Por la Proposición I.1.3 se tiene que $M^{\#}(A)\subseteq M^{\#}(Q(A))$ y $M^{\#}(Q(A))$ está C-generada por $M^{\#}(A)$. En consecuencia, si $\tilde{F}\in M^{\#}(Q(A))$ designa la extensión de F, entonces $\tilde{F}M^{\#}(Q(A))\tilde{F}=0$. Por el lema anterior $M^{\#}(Q(A))=\oplus_{i\in I}M^{\#}(Q_i)$, luego $M^{\#}(Q(A))$ es un álgebra semiprima, y por tanto $\tilde{F}=0$, y así $F=0$. ■

Como consecuencia se sigue que nuestro Teorema I.3.2 es una extensión a ambiente no necesariamente asociativo multiplicativamente semiprimo del Teorema 2.4 de [**30**].

Ahora presentaremos la clase de las álgebras con centroide grande que, como se anuncia en [**52**; pág. 267], contiene a bastantes álgebras que satisfacen identidades polinomiales. Así, es bien conocido que contiene a las PI-álgebras asociativas semiprimas, también contiene a los anillos de Cayley-Dickson (véase [**53**; pag.193]), y así mismo contiene a las álgebras de Jordan semiprimas que satisfacen una identidad polinomial normal (véase [**49**; Teorema 2.5]).

Definición I.4.6. Sea A un álgebra. Se dice que A tiene *centro grande* si $Z(A)\cap U\neq 0$ para cualquier ideal no nulo U de A. También, se dice que A tiene *centroide grande* si para cualquier ideal no nulo U de A existe un centralizador $f\in\Gamma(A)\setminus\{0\}$ tal que $f(A)\subseteq U$.

Puesto que la aplicación $z\longrightarrow L_z$ de $Z(A)$ en $\Gamma(A)$ es un homomorfismo inyectivo cuando A tiene anulador cero, se sigue que: Toda álgebra de anulador cero con centro grande también tiene centroide grande.

Además, puesto que la inclusión de $Z(A)$ en $\Gamma(A)$ es un isomorfismo en el caso en que A tiene unidad, se sigue que: Para álgebras con unidad las propiedades de "tener centro grande" y de "tener centroide grande" coinciden.

Proposición I.4.7. *Toda álgebra semiprima con centroide grande es multiplicativamente semiprima.*

Demostración. Sea A un álgebra semiprima con centroide grande. Supongamos que existe un ideal no nulo $\mathfrak{P}$ de $M(A)$ tal que $\mathfrak{P}^2=0$. Entonces $\mathfrak{P}(A)$ es un ideal no nulo de A, y por tanto existe $f\in\Gamma(A)\setminus\{0\}$ tal que $f(A)\subseteq\mathfrak{P}(A)$. En consecuencia, $f(\mathfrak{P}(A))=\mathfrak{P}(f(A))\subseteq\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))\subseteq\mathfrak{P}^2(A)=0$, y por tanto $0=Af(\mathfrak{P}(A))=f(A)\mathfrak{P}(A)\supseteq f(A)f(A)$. De aquí se deduce que $f(A)^2=0$, lo que contradice la semiprimidad de A ya que $f(A)$ es un ideal no nulo de A. ■

Sea $(A,<.,.>)$ un álgebra con una forma bilineal simétrica no-degenerada. Un operador $T\in L(A)$ tiene *adjunto (con respecto a* $<.,.>$*)*

si existe un operador (necesariamente único) $T^{\#}\in L(A)$ tal que $<T(a),b>=<a,T^{\#}(b)>$ para cualesquiera $a,b\in A$. A $T^{\#}$ se le llama el *operador adjunto (con respecto a* $<.,.>$*)* de T. Es claro que $\#$ es una *involución lineal de álgebra* en la subálgebra unital de $L(A)$ constituida por todos los operadores que tienen adjunto, esto es, $\#$ verifica las siguientes propiedades: (i) $T^{\#\#}=T$, (ii) $(T+S)^{\#}=T^{\#}+S^{\#}$, (iii) $(\lambda T)^{\#}=\lambda T^{\#}$, y (iv) $(TS)^{\#}=S^{\#}T^{\#}$ para cualesquiera T,S operadores con adjunto y $\lambda\in K$. Recordemos que una forma bilineal $<.,.>$ definida en un álgebra A se dice ser *asociativa* si verifica

$$<ab,c>=<a,bc>=<b,ca>$$

para cualesquiera a,b,c en A. Luego, si $(A,<.,.>)$ es un álgebra con una forma bilineal asociativa simétrica no-degenerada, entonces

$$L_a^{\#}=R_a \quad \text{y} \quad R_a^{\#}=L_a \quad \text{para todo } a\in A,$$

y en consecuencia $M(A)$ es una subálgebra $\#$-invariante del álgebra de los operadores en A que tienen adjunto. El siguiente resultado no es más que la versión en contexto semiprimo de [**48**; Lema 5.(iv)].

Proposición I.4.8. *Toda álgebra semiprima con una forma bilineal asociativa simétrica no-degenerada es multiplicativamente semiprima.*

Demostración. Sea $(A,<.,.>)$ un álgebra con una forma bilineal asociativa simétrica no-degenerada. Sea $\mathfrak{P}$ un ideal de $M(A)$ tal que $\mathfrak{P}^2=0$. Si ocurriese que $\mathfrak{P}^{\#}=\mathfrak{P}$, entonces

$$<A,\mathfrak{P}(A)^2>=<A\mathfrak{P}(A),\mathfrak{P}(A)>\subseteq<\mathfrak{P}(A),\mathfrak{P}(A)>=<\mathfrak{P}^2(A),A>=0,$$

y de la no-degeneración de la forma y de la semiprimidad de A se tendría que $\mathfrak{P}(A)=0$, o lo que es lo mismo $\mathfrak{P}=0$. Puesto que tanto $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{\#}$ como $\mathfrak{P}^{\#}\mathfrak{P}$ son $\#$-invariantes y tienen cuadrado cero se sigue de lo anterior que $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{\#}=\mathfrak{P}^{\#}\mathfrak{P}=0$. En consecuencia, $\mathfrak{P}+\mathfrak{P}^{\#}$ es un ideal $\#$-invariante de $M(A)$ que tiene cuadrado cero, y de nuevo por lo anterior se sigue que $\mathfrak{p}+\mathfrak{p}^{\#}=0$, y en consecuencia $\mathfrak{p}=0$. ■

Se define el *anulador de un ideal* U de un álgebra A como el más grande ideal V de A verificando $UV=VU=0$. En el caso en que A es semiprima, el anulador $An(U)$ del ideal U se caracteriza como el más grande ideal V de A satisfaciendo cualquiera de las condiciones equivalentes expresadas en (I.1). Un álgebra normada A se dice ser un *álgebra anuladora generalizada* si es semiprima y todo ideal cerrado propio de A tiene anulador no nulo. Ejemplos triviales de álgebras normadas anuladoras generalizadas son las álgebras normadas *topológicamente simples* (álgebras normadas con producto no cero y que carecen de ideales cerrados propios no nulos). Las álgebras normadas completas anuladoras generalizadas se estudiaron en profundidad en [**20**] (ver también [**45**]). Nótese que si U es un ideal de un álgebra anuladora generalizada A, entonces $U\oplus An(U)$ es denso en A. En efecto, en otro caso se tendría que $An(\overline{U\oplus An(U)})\neq 0$, y por tanto con mayor motivo $An(U)\cap An(An(U))\neq 0$, lo que es una contradicción.

Proposición I.4.9. *Toda álgebra normada anuladora generalizada es multiplicativamente semiprima.*

Demostración. Sea A un álgebra normada anuladora generalizada. Supóngase que $F\in M(A)$ es tal que $FM(A)F=0$, o lo que es lo mismo $F(U)=0$, donde U denota al ideal de A generado por $F(A)$. Nótese que si $a\in An(U)$, entonces $F(a)\in An(U)\cap U$, y por tanto $F(a)=0$. En consecuencia, $F(An(U))=0$. Luego $F(U\oplus An(U))=0$, y por tanto $F=0$, ya que F es continua y $U\oplus An(U)$ es denso en A. ■

Recordemos que una *H*-álgebra* es un álgebra real o compleja A provista de una *involución conjugado-lineal de álgebra* $*$ (esto es, una aplicación $*:A\longrightarrow A$ verificando

(i) $a^{**}=a$, (ii) $(a+b)^*=a^*+b^*$, (iii) $(\lambda a)^*=\bar{\lambda}a^*$, y (iv) $(ab)^*=b^*a^*$

para cualesquiera $a,b\in A$ y $\lambda\in\mathbb{K}$) y dotada con un producto escalar $<.|.>$ para el que es un espacio de Hilbert satisfaciendo las igualdades

$$<ab|c>=<a|cb^*>=<b|a^*c>$$

para cualesquiera a,b,c en A. El producto de toda H*-álgebra es continuo para la topológia de la norma $a\longrightarrow\|a\|:=\sqrt{<a|a>}$ [**16**; Proposición 2.(i)], y por tanto, previa multiplicación del producto escalar por conveniente constante positiva (si ello fuera necesario), podemos afirmar que toda H*-álgebra es un álgebra normada completa en el sentido usual de la palabra. Recordemos también que, por [**16**; Proposiciones 2.(ii) y 1(ii)], una H*-álgebra es semiprima si, y sólamente si, tiene anulador cero. Como consecuencia directa de cualquiera de las dos proposiciones anteriores se obtiene el siguiente corolario.

Corolario I.4.10. *Toda H*-álgebra de anulador cero es multiplicativamente semiprima.*

Nos ocupamos ahora del principal resultado de esta sección.

Teorema I.4.11. (Segunda etapa del resultado principal) *Las álgebras asociativas semiprimas son multiplicativamente semiprimas.*

Para su demostración necesitaremos utilizar técnicas de la teoría de identidades polinomiales generalizadas. Nuestra referencia estándar para dicha teoría será el libro de reciente aparición [3], si bien parece conveniente advertir que en este texto las identidades polinomiales generalizadas se presentan a partir del anillo maximal derecho de cocientes, mientras que para nuestro desarrollo será suficiente trabajar con el álgebra simétrica de cocientes de Martindale.

Empecemos recordando la presentación abstracta del coproducto de dos álgebras unitales, que es la maquinaria que permite construir la "casa" donde habitan las identidades polinomiales generalizadas. Dada un álgebra escalar S y dadas dos S-álgebras asociativas con unidad A_1 y A_2, entonces existe una única (salvo isomorfismo) terna (A,α_1,α_2), donde A es una S-álgebra asociativa con unidad y $\alpha_i:A_i\longrightarrow A$ $(i=1,2)$ son homomorfismos de S-álgebras unitales tales que A está S-generada por $\alpha_1(A_1)\cup\alpha_2(A_2)$, verificando la siguiente propiedad:

Para toda S-álgebra con unidad B y para cualesquiera dos homomorfismos de S-álgebras unitales $\beta_i:A_i\longrightarrow B$ $(i=1,2)$ existe un único homomorfismo de S-álgebras unitales $\gamma:A\longrightarrow B$ tal que $\gamma\alpha_i=\beta_i$ $(i=1,2)$, esto es, haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, dashed, "\beta_1"'] & A \arrow[d, dotted, "\gamma"] & A_2 \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[dl, dashed, "\beta_2"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

El álgebra A se llama el *álgebra coproducto* de A_1 y A_2.

Fijemos en este momento un álgebra asociativa semiprima A con centroide extendido C, así como también un conjunto infinito numerable de "variables formales" $\mathbf{X}$. Consideremos el álgebra $Q^s_C\langle\mathbf{X}\rangle$ coproducto de las C-álgebras Q^s y $C\langle\mathbf{X}\rangle$, donde Q^s es el álgebra simétrica de cocientes de Martindale de A (acaso véase la Definición I.1.7 tomando $\mathfrak{D}$ igual al filtro de todos los ideales esenciales en A) y $C\langle\mathbf{X}\rangle$ es el álgebra asociativa libre unital sobre C generada por $\mathbf{X}$ (acaso véase la Sección 3 del Capítulo II). Los elementos del álgebra $Q_C^s\langle\mathbf{X}\rangle$ son sumas finitas de monomios de la forma

$$q_1\mathbf{x}_{i_1}q_2\mathbf{x}_{i_2}\ldots q_n\mathbf{x}_{i_n}q_{n+1}$$

para $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $q_1,\ldots,q_{n+1}\in Q^s$ y $\mathbf{x}_{i_1},\ldots,\mathbf{x}_{i_n}\in\mathbf{X}$.

Dado un ideal no nulo U de A, diremos que un elemento ϕ de $Q_C^s\langle\mathbf{X}\rangle$ es una *identidad polinomial generalizada* (abreviadamente IPG) para U, o bien que U satisface la IPG ϕ, si $s(\phi)=0$ para todo *homomorfismo sustitución* de las variables formales por elementos de U, esto es, para todo homomorfismo de C-álgebras $s:Q_C^s\langle\mathbf{X}\rangle\longrightarrow Q^s$ que verifique

$$s(\mathbf{X})\subseteq U \quad \text{y} \quad s(q)=q \quad \text{para todo } q \text{ en } Q^s.$$

Como quiera que el centroide extendido C de un álgebra semiprima A es regular von Neumann se tiene que C es abundante en idempotentes. Así, para cualquier elemento q en Q^s existe un único idempotente $E(q)\in C$ tal que

$$(1-E(q))C=\{\lambda\in C : q\lambda=0\}.$$

Además, se verifica que $E(q)q=q$ y $E(eq)=eE(q)$ para cualesquiera q en Q^s y e idempotente en C (véase [**3**; Teorema 2.3.9]).

Lema I.4.12. *Sea A un álgebra asociativa semiprima con centroide extendido C y supóngase que $p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n$ son elementos de Q^s tales que $\phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}p_i\mathbf{x}q_i$ es una IPG para A y que $\sum_{i=1}^{n}Cp_i=\oplus_{i=1}^{n}Cp_i$. Entonces $E(p_i)q_i=0$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. El caso $n=1$ se sigue de [**3**; Lema 2.3.10]. Así, supondremos en este momento que n es un natural mayor que 1 tal que el resultado es cierto para las identidades polinomiales generalizadas lineales que envuelvan k sumandos con $k<n$. Si $E(p_j)q_j=0$ para algun $j\in\{1,...,n\}$, entonces

$$p_j\mathbf{x}q_j=E(p_j)p_j\mathbf{x}q_j=p_j\mathbf{x}E(p_j)q_j=0,$$

luego $\sum_{i\neq j} p_i\mathbf{x}q_i$ es también una IPG en A, y así $E(p_i)q_i=0$ para todo i por la hipótesis de inducción. Ahora, supongamos que para todo $i\in\{1,...,n\}$ se verifica que $E(p_i)q_i\neq 0$. Escribamos

$$\phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} E(p_i)p_i\mathbf{x}E(q_i)q_i=\sum_{i=1}^{n} E(q_i)p_i\mathbf{x}E(p_i)q_i. \qquad \text{(I.6)}$$

Nótese que

$$\sum_{i=1}^{n} CE(q_i)p_i=\bigoplus_{i=1}^{n} CE(q_i)p_i,$$

y que para todo $i\in\{1,...,n\}$ se verifica que

$$E(E(q_i)p_i)=E(q_i)E(p_i)=E(p_i)E(q_i)=E(E(p_i)q_i)\neq 0.$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar [**3**; Lema 6.3.12] y conseguir una contradicción, lo que concluye la demostración. ■

Teorema I.4.13. *Sean A un álgebra asociativa semiprima con centroide extendido C, Q^s el álgebra simétrica de cocientes de Martindale de A, y $\phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} p_i\mathbf{x}q_i\in Q_C^s\langle \mathbf{X}\rangle$. Supóngase que $\phi(a\phi(\mathbf{x})b)$ es una IPG en A para cualesquiera a,b en A. Entonces $\phi=0$.*

Demostración. Supongamos que $p_i\neq 0$ para todo $i\in\{1,...,n\}$. Teniendo en cuenta [**3**; Teorema 2.3.9.(iv)], podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sum_{i=1}^{n} Cp_i=\bigoplus_{i=1}^{n} Cp_i$. Por hipótesis tenemos

$$0=\sum_{i=1}^{n} p_ia\Big(\sum_{j=1}^{n} p_jcq_j\Big)bq_i=\sum_{i=1}^{n} p_ia\Big(\sum_{j=1}^{n} p_jcq_jbq_i\Big)$$

para cualesquiera a,b,c en A. Por el Lema I.4.12 tenemos que

$$0=E(p_i)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_jcq_jbq_i\Big)=\sum_{j=1}^{n} p_jcq_jbE(p_i)q_i$$

para cualesquiera b,c en A e $i\in\{1,...,n\}$. De nuevo, por el Lema I.4.12

tenemos que

$$0=E(p_j)q_j bE(p_i)q_i$$

para cualesquiera b en A e $i,j\in\{1,...,n\}$. Luego $E(p_i)q_i AE(p_i)q_i=0$, y por tanto $E(p_i)q_i=0$ para todo $i\in\{1,...,n\}$. Reescribiendo ϕ como en (I.6) se sigue claramente que $\phi=0$. ■

Recogemos a continuación uno de los más relevantes resultados en la teoría de IPG que usaremos enseguida y que también será el pilar en el que sustentará el arranque del tercer capítulo.

Proposición I.4.14. [3; Proposición 6.3.13] *Sea A un álgebra semiprima con centroide extendido C y con álgebra simétrica de cocientes de Martindale Q^s. Si $\phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} p_i\mathbf{x}q_i\in Q^s_C\langle X\rangle$ es una IPG en A, entonces $\phi=0$.*

Sea A un álgebra asociativa semiprima, y denótese por A^1 al *álgebra envolvente unital* de A. Así, $A^1=A$ en el caso en que A tenga unidad, mientras que, en el caso contrario, $A^1=A\oplus K1$ con el producto natural. Para x,y en A^1, el *operador de multiplicación bilátera* $M_{x,y}:A\longrightarrow A$ está definido por $M_{x,y}(a):=xay$ para todo a en A.

Es claro que

$$M(A)=\{\sum_{i=1}^{n} M_{x_i,y_i} \ :\ n\in\mathbb{N},\ x_i,y_i\in A^1\ (1\le i\le n)\}\ .$$

Demostración del Teorema I.4.11. Sea A un álgebra asociativa semiprima. Consideremos la envolvente unital A^1 de A como la subálgebra de Q^s generada por A y la unidad de Q^s. Por la proposición anterior se tiene que la correspondencia

$$F=\sum_{i=1}^{n} M_{x_i,y_i} \longmapsto \tilde{F}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{x}y_i$$

determina una aplicación bien definida de $M(A)$ en $Q_C^s\langle X\rangle$. Es fácil comprobar que esta aplicación es lineal y verifica la propiedad $(FG)^{\sim}(\mathbf{x})=\tilde{F}(\tilde{G}(\mathbf{x}))$ para cualesquiera F,G en $M(A)$. Además es inyectiva ya que si $F\in M(A)$ es tal que $\tilde{F}=0$, entonces la imagen de $\tilde{F}$ por cualquier homomorfismo sustitución es cero, y en consecuencia $F=0$. Finalmente, si $F\in M(A)$ es tal que $FM(A)F=0$, entonces $FM_{a,b}F=0$ para cualesquiera a,b en A, por tanto $\tilde{F}(a\tilde{F}(\mathbf{x})b)=0$, y así $F=0$ aplicando el Teorema I.4.13. ∎

Concluimos la sección dando una aplicación de los resultados fundamentales al álgebra de los operadores elementales sobre un álgebra asociativa semiprima. Recordemos que para cada álgebra asociativa semiprima A hay una más grande álgebra asociativa (semiprima) que contiene a A como ideal esencial. Esta álgebra se llama el *álgebra de los multiplicadores* de A y se denotará aquí por $Mult(A)$. Es bien conocido que $Mult(A)$ puede materializarse como el álgebra formada por todos los doble centralizadores totalmente definidos en A. Como A es un ideal esencial de $Mult(A)$, por el conocido como teorema memoria [36; Teorema 4.1] se tiene que la inclusión de A en $Mult(A)$ se extiende a un isomorfismo de Q^s sobre $Q^s(Mult(A))$, y por tanto $C(Mult(A))$ coincide con C. En consecuencia, $Q(A)=CA$ puede verse como un ideal de $Q(Mult(A))=CMult(A)$. Además, si $q\in Q(Mult(A))$ es tal que $qQ(A)=0$, entonces $qA=0$, y por tanto $q=0$. En consecuencia, $Q(A)$ tiene anulador cero en $Q(Mult(A))$, y por tanto $Q(A)$ es un ideal esencial de $Q(Mult(A))$. Este hecho nos permite afirmar que la aplicación $Id_{Q(A)}$ se extiende a un monomorfismo χ de $Q(Mult(A))$ en $Mult(Q(A))$.

Dada un álgebra asociativa semiprima A, se define el *álgebra $\mathcal{E}\ell(A)$ de los operadores elementales* de A como la subálgebra de $L(A)$ generada por los operadores determinados por multiplicaciones a izquierda y a derecha por elementos en $Mult(A)$. Si para p,q en $Mult(A)$, consideramos el operador $M_{p,q}:A\longrightarrow A$ definido por $M_{p,q}(a):=paq$ para todo a en A, entonces es inmediato que

$$\mathcal{E}\ell(A)=\{\sum_{i=1}^{n} M_{p_i,q_i} \ :\ n\in\mathbb{N},\ p_i,q_i\in Mult(A)\ (1\le i\le n)\}.$$

Referencia obligada de la teoría de los operadores elementales es el libro [35]. Particularmente interesante en conexión con nuestros resultados es el artículo [1] en el que se establece una teoría de estructura para operadores elementales.

Teorema I.4.15. *Sea A un álgebra asociativa semiprima con centroide extendido C. Entonces $\mathcal{E}\ell(A)$ es un álgebra asociativa semiprima y existe un isomorfismo de K-álgebras φ de C sobre $C(\mathcal{E}\ell(A))$ únicamente determinado por la siguiente condición:*

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x)) \qquad (I.7)$$

para cualesquiera λ en C, T en $dom(\varphi(\lambda))$, y x en $dom_{\mathcal{E}\ell(A)}(\lambda)$. Además, si $Q(\mathcal{E}\ell(A))$ se considera como una C-álgebra vía el isomorfismo φ, entonces $Q(\mathcal{E}\ell(A))$ puede verse como una subálgebra de $\mathcal{E}\ell(Q(A))$ que contiene a $M_C(Q(A))$.

Demostración. Cambiando $M(A)$ por $\mathcal{E}\ell(A)$ en la demostración del Teorema I.4.11 se obtiene que $\mathcal{E}\ell(A)$ es un álgebra semiprima, y en consecuencia $\mathfrak{D}$ es el filtro de todos los ideales esenciales de $\mathcal{E}\ell(A)$. Para $\mathfrak{P}\in\mathfrak{D}$ y U ideal de A, teniendo en cuenta la inclusión $\mathfrak{P}(AUA)\subseteq\mathfrak{P}(A)\cap U$ y la Proposición I.2.1 se deduce que $\mathfrak{P}(A)$ es un ideal esencial de A. Luego $\mathcal{E}\ell(A)$ verifica la propiedad P1'.

Dado $\lambda\in C$, tomemos el ideal U de A contenido en $dom(\lambda)$ dado por $U:=Adom(\lambda)A$. Puesto que el producto de ideales esenciales en un álgebra asociativa semiprima es un ideal esencial, se sigue U es un ideal esencial de A. Además, para $a,b\in A$, $x\in dom(\lambda)$ y $p,q\in Mult(A)$ se verifica que

$$M_{p,q}(axb)=paxbq\in U$$

y

$$\lambda(M_{p,q}(axb))=\lambda(paxbq)=pa\lambda(x)bq=M_{p,q}(a\lambda(x)b)=M_{p,q}\lambda(axb).$$

De aquí se sigue que U es $\mathcal{E}\ell(A)$-invariante y se verifica que $\lambda(F(x))=F(\lambda(x))$ para cualesquiera F en $\mathcal{E}\ell(A)$ y x en U. Por tanto $\mathcal{E}\ell(A)$ verifica la propiedad P2.

Vamos a demostrar que $\mathcal{E}\ell(A)$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$. Supónganse dados $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in C$ y $a_1,\dots,a_n\in A$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i=0$. Para $p,q\in Mult(A)$ y $a,b\in A$ tenemos que

$$a[\sum_{i=1}^n \lambda_i M_{p,q}(a_i)]b=a[\sum_{i=1}^n \lambda_i pa_iq]b=\sum_{i=1}^n \lambda_i apa_iqb=\sum_{i=1}^n \lambda_i M_{ap,qb}(a_i)=0,$$

donde hemos utilizado que $M_{ap,qb}$ pertenece a $M(A)$ y que $M(A)$ preserva expresiones anulantes de $Q(A)$. Como consecuencia, para cada F en $\mathcal{E}\ell(A)$, se sigue que $A[\sum_{i=1}^n \lambda_i F(a_i)]A=0$, y así $\sum_{i=1}^n \lambda_i F(a_i)=0$. Ahora, aplicando los Teoremas I.2.6 y I.2.9 se sigue la existencia de un isomorfismo de K-álgebras φ de C sobre $C(\mathcal{E}\ell(A))$ determinado de manera única por (I.7), así como la existencia de un monomorfismo de K-álgebras Φ de $Q(\mathcal{E}\ell(A))$ en $L_C(Q(A))$ determinado por

$$\Phi(\sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)F_i)(\sum_{j=1}^m \mu_j a_j):=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \lambda_i\mu_j F_i(a_j),$$

para cualesquiera $\sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)F_i$ en $Q(\mathcal{E}\ell(A))$ y $\sum_{j=1}^m \mu_j a_j$ en $Q(A)$. Finalmente, para $\lambda_i\in C$, $p_i,q_i\in Mult(A)$ $(1\leq i\leq n)$ y $\mu_j\in C$, $a_j\in A$ $(1\leq j\leq m)$, podemos escribir

$$\Phi(\sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)M_{p_i,q_i})(\sum_{j=1}^m \mu_j a_j)=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \lambda_i\mu_j M_{p_i,q_i}(a_j)=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \lambda_i\mu_j p_i a_j q_i=$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i(\sum_{j=1}^m \mu_j a_j)q_i=\sum_{i=1}^n \chi(\lambda_i p_i)(\sum_{j=1}^m \mu_j a_j)\chi(q_i),$$

y así $\Phi(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i)M_{p_i,q_i})=\sum_{i=1}^{n}M_{\chi(\lambda_i p_i),\chi(q_i)}$ está en $\mathcal{E}\ell(Q(A))$. Luego, $Q(\mathcal{E}\ell(A))$ se puede ver como una subálgebra de $\mathcal{E}\ell(Q(A))$ que contiene a $M_C(Q(A))$. ∎

5. Algebras multiplicativamente primas.

Introducimos el concepto de álgebra multiplicativamente prima y damos diversas caracterizaciones, entre las que hay que destacar una que consiste en la expresión de este concepto en términos de operadores, y que será crucial para el resto de nuestro trabajo. También discutimos las extensiones escalares de las álgebras multiplicativamente primas centralmente cerradas. Finalmente recogemos una condición topológica para álgebras normadas que conlleva la multiplicativa-primidad.

Sea A un álgebra. Para U ideal de A y para $\mathfrak{P}$ ideal de $M(A)$, definimos

$$U^{\mathrm{an}}:=\{F\in M(A)\ :\ F(U)=0\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{P}_{\mathrm{an}}:=\{a\in A\ :\ \mathfrak{P}(a)=0\}.$$

Claramente U^{an} es un ideal de $M(A)$ y $\mathfrak{P}_{\mathrm{an}}$ es un ideal de A. También, el conjunto

$$[U:A]:=\{F\in M(A)\ :\ F(A)\subseteq U\}$$

es un ideal de $M(A)$. Para F en $M(A)$ y a en A, denotaremos por $W_{F,a}$ al operador lineal de $M(A)$ en A definido por $W_{F,a}(G):=FG(a)$ para todo $G\in M(A)$.

Proposición I.5.1. *Para un álgebra A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A tiene producto no cero, y la condición $\mathfrak{P}(U)=0$, para $\mathfrak{P}$ ideal de $M(A)$ y U ideal A, implica que $\mathfrak{P}=0$ o $U=0$.

ii) A tiene producto no cero y $\mathfrak{P}_{\mathrm{an}}=0$ para cualquier ideal no nulo $\mathfrak{P}$ de $M(A)$.

iii) A tiene producto no cero y $U^{\mathrm{an}}=0$ para cualquier ideal no nulo

U de *A*.

iv) A tiene producto no cero, y la condición $W_{F,a}=0$, *para F en M(A) y a en A, implica que F=0 o a=0.*

v) A tiene anulador cero y M(A) es prima.

vi) A es semiprima y M(A) es prima.

vii) A es prima y M(A) es prima.

viii) A es prima y M(A) es semiprima.

Demostración. Las implicaciones i)⇒ii) y vii)⇒viii) son claras, mientras que ii)⇒iii) se sigue de la inclusión $U\subseteq (U^{an})_{an}$.

iii)⇒iv).- Supongamos que $F\in M(A)$ y $a\in A$ son tales que $W_{F,a}=0$. Entonces $F\in (M(A)(a))^{an}$, y por tanto, teniendo en cuenta la hipótesis, o bien $F=0$ o bien $M(A)(a)=0$. En consecuencia, o bien $F=0$ o bien $a=0$.

iv)⇒v).- Puesto que *A* tiene producto no cero, podemos tomar un elemento *a* en *A* tal que $L_a\neq 0$. Ya que claramente $W_{L_a,x}=0$ para todo $x\in An(A)$, se sigue de la hipótesis que $An(A)=0$. Ahora, sean $\mathfrak{P},\mathfrak{Q}$ ideales de $M(A)$ tales que $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}=0$. Entonces $\mathfrak{P}(\mathfrak{Q}(A))=0$, y en consecuencia $W_{F,G(a)}=0$ para cualesquiera *F* en $\mathfrak{P}$, *G* en $\mathfrak{Q}$, y *a* en *A*. Luego $\mathfrak{P}=0$ o $\mathfrak{Q}(A)=0$, esto es $\mathfrak{P}=0$ o $\mathfrak{Q}=0$.

v)⇒vi).- Sea *U* un ideal de *A* tal que $U^2=0$. Puesto que $M(A)$ es prima y siempre se verifica que $U^{an}[U:A]=0$ se sigue que $U^{an}=0$ o $[U:A]=0$. Ya que para todo *x* en *U* se verifica que $L_x,R_x\in [U:A]$ y, por ser $U^2=0$, también $L_x,R_x\in U^{an}$, se sigue en cualquier caso que $L_x=R_x=0$. En consecuencia, *U* está contenido en $An(A)$ y, como por hipótesis *A* tiene anulador cero, se sigue que $U=0$.

vi)⇒vii).- Sean U,V ideales de *A* tales que $U\cap V=0$. Entonces tenemos que $[U:A][V:A]=0$, y por tanto, por la primidad de $M(A)$, $[U:A]=0$ o $[V:A]=0$. Ahora teniendo en cuenta la semiprimidad de *A* y las inclusiones

$U^2 \subseteq [U:A](U)$ y $V^2 \subseteq [V:A](V)$ se tiene que $U=0$ o $V=0$.

viii)$\Rightarrow$i).- Sean $\mathfrak{P}$ ideal de $M(A)$ y U ideal de A tales que $\mathfrak{P}(U)=0$. Entonces $\mathfrak{P}[U:A]=0$ y, como $M(A)$ es semiprima, por (I.1) también $[U:A]\mathfrak{P}=0$. En consecuencia $L_x\mathfrak{P}=0$ para todo x en U, y por tanto $U\mathfrak{P}(A)=0$. De la primidad de A, o bien $U=0$ o bien $\mathfrak{P}(A)=0$, esto es o bien $U=0$ o bien $\mathfrak{P}=0$. ■

Definición I.5.2. Diremos que un álgebra A es *multiplicativamente prima* si A verifica las condiciones equivalentes en la proposición anterior.

Siguiendo [**52**; 35.6.(d)] un álgebra se dice ser *fuertemente prima* si es prima y su clausura central es simple. Como consecuencia de la Proposición I.4.5 se tiene que

Proposición I.5.3. *Toda álgebra fuertemente prima es multiplicativamente prima.*

De interés para nosotros es la siguiente proposición, que no es más que una selección del material contenido en [**52**; 35.10].

Proposición I.5.4. *Sea A un álgebra con centroide grande. Equivalen:*

i) A es prima.

ii) A es fuertemente prima.

iii) A es multiplicativamente prima.

Demostración. i)$\Rightarrow$ii).- Sea U un ideal no nulo de A, y tomemos $f \in \Gamma(A) \setminus \{0\}$ tal que $f(A) \subseteq U$. Puesto que A es prima, el centroide extendido C de A es un cuerpo, y por tanto $Cf=C$. Luego

$$Q(A)=CA=CfA=Cf(A)\subseteq CU,$$

y por tanto $CU=Q(A)$. Finalmente, si I es un ideal no nulo de $Q(A)$, entonces $I\cap A$ es un ideal no nulo de A, y por lo anterior $C(I\cap A)=Q(A)$, luego $I=Q(A)$. En consecuencia, $Q(A)$ es un álgebra simple. ii)⇒iii).- es la proposición anterior. iii)⇒i).- es evidente. ■

Ejemplos triviales de álgebras multiplicativamente primas son:

- las álgebras simples,

- las álgebras primas con una forma bilineal asociativa simétrica no-degenerada (Proposición I.4.8),

- las álgebras normadas topológicamente simples (Proposición I.4.9).

Ahora aprovecharemos la obligación de particularizar a ambiente primo el principal resultado de la sección anterior, para incluir la correspondiente extensión a álgebras alternativas.

Teorema I.5.5. *Toda álgebra alternativa prima A con $3A\neq 0$ es multiplicativamente prima.*

Demostración. Por el Teorema de estructura de Slater [**53**; Teorema 9 en pag. 194] se sigue que o bien A es un álgebra asociativa prima o bien A es un álgebra de Cayley-Dickson. En el primer caso, A es multiplicativamente prima por el Teorema I.4.11. En el segundo caso, A es multiplicativamente prima ya que los anillos de Cayley-Dickson tienen centro grande [**53**; pag.193]. ■

Nos vamos a ocupar en este momento del estudio de la envolvente unital de las álgebras multiplicativamente primas, lo que nos va a permitir mostrar un ejemplo interesante de álgebra prima que no es multiplicativamente prima.

Sea A un álgebra, y denotemos por A^1 a la envolvente unital de A. Es bien conocido, y fácil de comprobar, que las afirmaciones siguientes son equivalentes: (i) A es un álgebra prima sin unidad, (ii) $A\oplus K\mathbf{1}$ es un álgebra prima. Como consecuencia, A es un álgebra prima si, y sólo si, A^1 es un álgebra prima. Ya que A es un ideal de A^1, para cada F en $M(A^1)$ podemos considerar el operador lineal $\psi(F):A\longrightarrow A$ determinado por la restricción de F a A, esto es, dado por

$$\psi(F)(a):=F(a) \qquad \text{para todo } a \text{ en } A.$$

Es fácil comprobar que la aplicación $F\longmapsto\psi(F)$ es un homomorfismo de $M(A^1)$ sobre $M(A)$. Para evitar cualquier confusión, para cada a en A, denotemos por L^1_a y R^1_a a los respectivos operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha determinados por a en A^1.

Proposición I.5.6. *Para un álgebra A equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) A^1 es un álgebra multiplicativamente prima.

ii) A es un álgebra multiplicativamente prima y ψ es un isomorfismo.

Demostración. i)⇒ii).- Comencemos notando la validez de la siguiente igualdad

$$W_{F,a}(G)=W_{\psi(F),a}(\psi(G)), \qquad \text{(I.8)}$$

para cualesquiera $F,G\in M(A^1)$ y $a\in A$. Fijado $a\in A\setminus\{0\}$, tenemos que $L^1_a(\mathbf{1})=a\neq 0$, luego $L^1_a\in M(A^1)\setminus\{0\}$, y por tanto $W_{L^1_a,a}\neq 0$. Por (I.8) también $W_{L_a,a}\neq 0$, y en consecuencia A tiene producto no cero. Ahora, supongamos que $T\in M(A)$ y $a\in A$ son tales que $W_{T,a}=0$. Tomando F en $M(A^1)$ tal que

$\psi(F)=T$, tenemos que $W_{F,a}=0$ (por (I.8)), luego $F=0$ o $a=0$, y por tanto $T=0$ o $a=0$. Finalmente, si F pertenece a $Ker(\psi)$, entonces $W_{F,a}=0$ para todo a en A (de nuevo por (I.8)), y por tanto $F=0$ (de nuevo por la hipótesis).

ii)⇒i).- Supongamos que $F\in M(A^1)\setminus\{0\}$ y $x\in A^1$ son tales que $W_{F,x}=0$. Ya que ψ es un isomorfismo, para cualesquiera que sean $T\in M(A)$ y $a\in A$ tenemos

$$W_{\psi(F),xa}(T)=\psi(F)T(xa)=\psi(F)TR_a^1(x)=W_{F,x}(\psi^{-1}(TR_a))=0.$$

luego $xa=0$ (por la hipótesis). Pero, esta última igualdad admite la siguiente lectura $\psi(L_x)=0$, de donde se sigue que $L_x=0$, y así $x=L_x(\mathbf{1})=0$. ■

La siguiente descripción del ideal de multiplicación nos será muy útil.

Proposición I.5.7. *Sea A un álgebra. Entonces $M^{\#}(A)=\psi(\mathfrak{N})$, donde*

$$\mathfrak{N}:=\{F\in M(A^1)\ :\ F(\mathbf{1})\in A\}.$$

Demostración. Denótese por $\mathfrak{I}$ al ideal de $M(A^1)$ generado por todos los operadores L_a^1 y R_a^1 ($a\in A$). Ya que $\mathfrak{N}$ es un ideal de $M(A^1)$ que contiene a L_a^1,R_a^1 para todo a en A, tenemos $\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{N}$. Por otra parte, $\mathfrak{I}+KId_{A^1}$ es una subálgebra de $M(A^1)$ que contiene a Id_{A^1}, $L_{a+\alpha\mathbf{1}}$, y $R_{a+\alpha\mathbf{1}}$ para cualesquiera a en A y α en K, y por tanto $M(A^1)=\mathfrak{I}+KId_{A^1}$. Puesto que $Id_{A^1}\notin\mathfrak{N}$ se sigue que $\mathfrak{I}=\mathfrak{N}$. En consecuencia, $\mathfrak{N}$ es el ideal de $M(A^1)$ generado por $\{L_a^1,R_a^1\ :\ a\in A\}$, y por tanto $\psi(\mathfrak{N})$ es el ideal de $M(A)$ generado por L_a y R_a para a variando en A. ■

Sea X un espacio vectorial y sea A una subálgebra del álgebra $L(X)$ de todos los operadores lineales en X. Se define el *centralizador* de A como la subálgebra unital de $L(X)$ dada por

$$D=\{T\in L(X)\ :\ TF=FT \text{ para todo } F\in A\}.$$

Se dice que el álgebra de operadores A es una *subálgebra irreducible* de $L(X)$ o que *A actúa irreduciblemente* en X si A es no nula y $\{0\}$ y X son los únicos subespacios A-invariantes de X. El bien conocido lema de Schur afirma que si A actúa irreduciblemente en X, entonces D es un álgebra de división. En ese caso, se define en X una estrutura de espacio vectorial izquierdo sobre D mediante la acción dada por

$$Tx=T(x) \text{ para cualesquiera } T \text{ en } D \text{ y } x \text{ en } X.$$

Teorema I.5.8. (Teorema de densidad de Jacobson) *Sea X un espacio vectorial y sea A un álgebra de operadores que actua irreduciblemente en X. Entonces para cualesquiera $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ en X con $\{x_1,\dots,x_n\}$ linealmente D-independientes, existe T en A tal que*

$$T(x_1)=y_1,\dots,T(x_n)=y_n.$$

Ya está todo preparado para presentar el ejemplo antes comentado.

Ejemplo I.5.9. *Si A es un álgebra central simple finito-dimensional sin unidad, entonces A^1 es un álgebra prima que no es multiplicativamente prima.*

Demostración. A^1 es un álgebra prima ya que A es un álgebra prima sin unidad. Puesto que A es un álgebra simple y los ideales de A son precisamente los subespacios de A que son invariantes por $M^{\#}(A)$, se sigue que $M^{\#}(A)$ es una subálgebra irreducible de $L(A)$. Ahora, ya que A es finito-dimensional sobre $K=\Gamma(A)$, se sigue del teorema de densidad de Jacobson que $M^{\#}(A)=L(A)$. Por la proposición anterior, existe F en $M(A^1)$ tal que $\psi(F)=Id_A$ y $F(\mathbf{1})\in A$. Puesto que $Id_{A^1}(\mathbf{1})=\mathbf{1}\notin A$, se tiene que $F\neq Id_{A^1}$.

Como $\psi(F)=Id_A=\psi(Id_{A^1})$ se sigue que ψ no es injectivo. Finalmente, por la Proposición I.5.6, A^1 no es multiplicativamente prima. ■

El siguiente objetivo es, tomando como referencia los Teoremas 3.5 y 3.6 de [**18**] para álgebras primas, llevar a cabo la discusión del comportamiento de las álgebras multiplicativamente primas bajo extensión escalar. El siguiente resultado que es de comprobación inmediata puede verse por ejemplo en [**52**].

Proposición I.5.10. [**52**; 15.11] *Sean A un álgebra y S un álgebra escalar. Entonces existe un isomorfismo de S-álgebras ϕ de $S\otimes_K M(A)$ sobre $M_S(S\otimes_K A)$ determinado por*

$$\phi(\sum_{i=1}^{n} s_i\otimes F_i)(\sum_{j=1}^{m} t_j\otimes a_j):=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} s_i t_j\otimes F_i(a_j)$$

para cualesquiera $n,m\in\mathbb{N}$, $s_i, t_j\in S$, $F_i\in M(A)$, y $a_j\in A$ ($1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$).

Nótese que ϕ no es más que la única extensión de la aplicación $Id_{M(A)}$ a un homomorfismo de S-álgebras, una vez que $M(A)$ se ve como subálgebra de $S\otimes_K M(A)$ (naturalmente) y de $M_S(S\otimes_K A)$ (vía la Proposición I.1.3).

Como es fácil comprobar, si A designa el álgebra real de los números complejos, entonces A es un álgebra multiplicativamente prima cuya complexificación deja de ser prima. El Teorema 3.5 de [**18**] afirma sin embargo la estabilidad por extensiones escalares de la clase de las álgebras primas centralmente cerradas. Recordemos que un álgebra prima A se dice *centralmente cerrada* si el monomorfismo canónico $\alpha\longmapsto\alpha Id_A$ del cuerpo base K en el centroide extendido de A es sobreyectivo.

Teorema I.5.11. *Sea A un álgebra multiplicativamente prima centralmente* *cerrada sobre K. Si Φ es un cuerpo extensión de K, entonces la extensión escalar $\Phi\otimes_K A$ es un álgebra multiplicativamente prima centralmente cerrada sobre Φ.*

Demostración. Puesto que A es un álgebra prima centralmente cerrada, se sigue de [**18**; Teorema 3.5] que $\Phi\otimes_K A$ es un álgebra prima centralmente cerrada. Además, por ser A centralmente cerrada se sigue del Teorema I.3.2 que $M(A)$ es también centralmente cerrada. De nuevo podemos aplicar [**18**; Teorema 3.5] a $M(A)$ para obtener que $\Phi\otimes_K M(A)$ es un álgebra prima centralmente cerrada. Finalmente por la proposición anterior, $\Phi\otimes_K A$ es un álgebra multiplicativamente prima centralmente cerrada. ∎

Dados Φ y Γ cuerpos extensión de K, podemos siempre encontrar un cuerpo extensión común de Φ y Γ, a saber: El producto tensorial $\Phi\otimes_K\Gamma$ es un álgebra asociativa conmutativa con unidad y si M es un ideal maximal de dicha álgebra, entonces $L:=(\Phi\otimes_K\Gamma)/M$ es un cuerpo, los homomorfismos naturales de Φ y Γ en L son inmersiónes, y L está generado por las imagenes de Φ y Γ. Un cuerpo R se dice que es un *compuesto* de Φ y Γ sobre K si R es un cuerpo extensión de K y existen K-monomorfismos $\Phi\longrightarrow R$ y $\Gamma\longrightarrow R$ tales que R está generado (como cuerpo) por las imagenes de Φ y Γ. Dos cuerpos compuestos de Φ y Γ sobre K no tienen por que ser equivalentes (véase [**13**; Teorema 1 en pág. 245]).

Teorema I.5.12. *Sea A un álgebra multiplicativamente prima, y sea Φ un cuerpo extensión de K. Entonces existe una Φ-álgebra multiplicativamente prima B que contiene a A como K-subálgebra y que está Φ-generada por A.*

Demostración. Denotemos por C y por Q respectivamente al centroide extendido y a la clausura central de A. Sea L un cuerpo compuesto de C y Φ sobre K y consideremos el álgebra $L\otimes_C Q$ extensión escalar de Q por L. Como consecuencia inmediata del Teorema I.3.2 se obtiene que Q es una C-álgebra multiplicativamente prima. Puesto que Q es una C-álgebra centralmente cerrada, se sigue del teorema anterior que $L\otimes_C Q$ es una L-álgebra multiplicativamente prima centralmente cerrada. Definamos B como la Φ-subálgebra de $L\otimes_C Q$ generada por A. Notemos que a partir del hecho de que el cuerpo L está generado por C y Φ, y Q está generada como C-álgebra por A, se sigue que $L\otimes_C Q$ está generada como L-álgebra por B. En efecto,

$$LB=L\Phi A=LA=LCA=LQ=L\otimes_C Q.$$

Veamos ahora que B es un álgebra multiplicativamente prima. Sea U un ideal no nulo de B y supóngase que F en $M(B)$ es tal que $F(U)=0$. Por la Proposición I.1.3, existe un único $\tilde{F}$ en $M(L\otimes_C Q)$ tal que $\tilde{F}(x)=F(x)$ para todo x en B. Luego $ker(\tilde{F})$ es un L-subespacio de $L\otimes_C Q$ que contiene a U, y por tanto también contiene a LU. Puesto que LU es un ideal no nulo de $L\otimes_C Q$, aplicando la Proposición I.5.1.iii) se sigue que $\tilde{F}=0$, y por tanto $F=0$. De nuevo por la Proposición I.5.1.iii) se obtiene que B es multiplicativamente prima. ■

Recordemos que un elemento a de un álgebra normada A es un *divisor topológico izquierdo* (resp. *derecho*) *de cero* si existe una sucesión $\{b_n\}$ de elementos de la esfera unidad de A tal que la sucesión $\{ab_n\}$ (resp. $\{b_n a\}$) converge a cero. Así mismo, a es un *divisor topológico junto de cero* si existe una sucesión $\{b_n\}$ de elementos de la esfera unidad de A tal que las sucesiones $\{ab_n\}$ y $\{b_n a\}$ convergen a cero. Terminamos este capítulo dando una aplicación en ambiente normado de nuestros resultados a través del siguiente

Teorema I.5.13. [12; Teorema 1] *Sea A un álgebra real normada, y supóngase que todo ideal no nulo de A contiene a un elemento que no es divisor topológico junto de cero en A. Entonces A es un álgebra prima y el centroide extendido de A es isomorfo a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$.*

Recordemos que un operador lineal continuo T en un espacio normado X se dice que es un *isomorfismo topológico (sobre su imagen)* si es inyectivo y tiene inverso $T^{-1}:T(X)\longrightarrow X$ continuo, lo que equivale a la existencia de una constante $m>0$ tal que $\|T(x)\|\geq m\|x\|$ para todo x en X. Nótese que si A es un álgebra normada y $F\in M(A)$ es un isomorfismo topológico, entonces F no es un divisor topológico izquierdo de cero en $M(A)$. En efecto, si $m>0$ es tal que $\|F(a)\|\geq m\|a\|$ para todo $a\in A$, entonces

$$m\|G(a)\|\leq\|FG(a)\|\leq\|FG\|\,\|a\|$$

para cualesquiera $G\in M(A)$ y $a\in A$, y en consecuencia $m\|G\|\leq\|FG\|$ para todo $G\in M(A)$.

Proposición I.5.14. *Sea A un álgebra real normada, y supóngase que todo ideal no nulo de $M(A)$ contiene a un operador que es un isomorfismo topológico. Entonces A es un álgebra multiplicativamente prima y el centroide extendido de A es isomorfo a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{P}$ un ideal no nulo de $M(A)$. Entonces $\mathfrak{P}_{an}=0$ ya que $\mathfrak{P}$ contiene un operador que es un isomorfismo topológico. Por tanto A es multiplicativamente prima en virtud de la Proposición I.5.1. Ahora, la demostración se concluye aplicando el teorema anterior y el Teorema I.3.2. ∎

CAPITULO II

ALGEBRAS TOTALMENTE MULTIPLICATIVAMENTE PRIMAS

La caracterización de la multiplicativa-primidad en términos de operadores obtenida en la Proposición I.5.1 será el punto de partida de este capítulo. Siguiendo un procedimiento ya estándar utilizado en parecidas circunstancias en **[32]**, **[10]** y **[11]**, consideraremos el correspondiente fortalecimiento normado de la anteriormente referida caracterización algebraica haciendo surgir así el concepto de álgebra totalmente multiplicativamente prima.

La Seción 1 se inicia con la introducción del concepto de álgebra totalmente multiplicativamente prima y se dedica a exhibir las primeras consecuencias de la definición. Así mismo, recoge la relación entre tales álgebras y dos familias ya clásicas, a saber, la clase de las álgebras ultraprimas y la clase de las álgebras totalmente primas. Probaremos que toda álgebra totalmente multiplicativamente prima es totalmente prima, y que, hablando un tanto alegremente, las álgebras totalmente multiplicativamente primas son aquellas álgebras normadas cuya álgebra de multiplicación es ultraprima.

La Sección 2 contiene la discusión del centroide extendido y de la clausura central de las álgebras totalmente multiplicativamente primas. Probamos que toda álgebra real totalmente multiplicativamente prima tiene centroide extendido isomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y que, cuando ocurre lo segundo, la clausura central es un álgebra compleja totalmente multiplicativamente prima. Como consecuencia se sigue que las álgebras complejas totalmente multiplicativamente primas son centralmente cerradas. Además, si A es un álgebra compleja normada, entonces A es totalmente multiplicativamente prima si, y sólamente si, el álgebra real subyacente $A_{\mathbb{R}}$ lo es.

La Sección 3 se dedica a analizar las H*-álgebras y las álgebras no asociativas libres dotadas con una norma clásica $\|.\|_p$ $(1\leq p\leq\infty)$. Probamos que las H*-álgebras primas son totalmente multiplicativamente primas y que $\|.\|_1$ es la única norma clásica para la que el álgebra no asociativa libre resulta ser totalmente multiplicativamente prima.

1. Concepto de álgebra totalmente multiplicativamente prima. Relación con algunas álgebras precedentes.

A lo largo de este capítulo todas las álgebras se considerarán sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Para motivar la introducción de las álgebras objeto de este capítulo, bueno será empezar recordando el nacimiento de las álgebras ultraprimas acaecido en [32]. Comencemos recordando la definción de ultrapotencia para un álgebra normada y haciendo algunos comentarios que necesitaremos, si bien remitimos a [25] y [32] para un desarrollo detallado de la teoría de ultraproductos. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en un conjunto I se dice *numerablemente incompleto* si no es cerrado por intersecciones numerables de sus elementos. Es inmediato verificar que esta condición es equivalente a la existencia de una sucesión estrictamente decreciente $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tales que $I_1=I$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\emptyset$. Dada un álgebra normada A y un ultrafiltro numerablemente incompleto $\mathcal{U}$ en un conjunto I se define la *ultrapotencia de A (con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$)* como el álgebra normada cociente $A_{\mathcal{U}}:=\ell^{\infty}(I,A)/N_{\mathcal{U}}$, donde $\ell^{\infty}(I,A)$ es el álgebra normada de todas las funciones acotadas de I en A con la norma del supremo, y $N_{\mathcal{U}}$ es el ideal cerrado definido por:

$$N_{\mathcal{U}}:=\{\ (a_i)_{i\in I}\in\ell^{\infty}(I,A)\ :\ \lim_{\mathcal{U}}\|a_i\|=0\}.$$

Si, por abuso de notación, seguimos denotando por (a_i) a la imagen canónica del elemento $(a_i)\in\ell^{\infty}(I,A)$ en el álgebra cociente $A_{\mathcal{U}}$, es fácil verificar que $\|(a_i)\|=\lim_{\mathcal{U}}\|a_i\|$. Siguiendo a [32] diremos que un álgebra normada (no necesariamente asociativa) A es *ultraprima* si alguna ultrapotencia $A_{\mathcal{U}}$ (con respecto a un ultrafiltro numerablemte incompleto

$\mathcal{U}$) es un álgebra prima.

En el estudio de las álgebras asociativas ultraprimas desempeña un papel decisivo la bien conocida caracterización de la primidad de un álgebra asociativa en términos de los operadores de multiplicación bilátera: Un álgebra asociativa A es prima si, y sólamente si, $M_{a,b}=0$ implica que $a=0$ o $b=0$. M. Mathieu utilizó esta caracterización para obtener una condición intrínseca que caracteriza a la ultraprimidad en ambiente asociativo evitando el uso de ultrapotencias y que hoy día es usual encontrarla como definición de álgebra asociativa ultraprima: Un álgebra asociativa normada A es *ultraprima* si, y sólamente si, existe una constante positiva K tal que $K\|a\|\|b\|\leq\|M_{a,b}\|$ para cualesquiera $a,b\in A$.

El hecho de que las álgebras asociativas ultraprimas resulten del fortalecimiento analítico de la caracterización de la primidad en términos de los M-operadores invita a considerar aquellas álgebras que surgen del fortalecimiento analítico de conceptos algebraicos expresables de manera similar en términos de convenientes operadores. Este proceder se ha llevado a cabo en [**10**] para la primidad de las álgebras no necesariamente asociativas (caracterizada en términos de N-operadores) obteniéndose las álgebras totalmente primas, y por partida doble en [**11**], tanto para la *-primidad de las álgebras asociativas con una involución lineal (caracterizada en términos de M-operadores) obteniéndose las álgebras asociativas ultra-*-primas, así como para la primidad no-degenerada de las álgebras de Jordan (caracterizada en términos de U-operadores) obteniendose las álgebras de Jordan nodegeneradamente ultraprimas. En esta linea, presentamos la siguiente definición que resulta de la caracterización en términos de W-operadores de la multiplicativa-primidad obtenida en la Proposición I.5.1: Un álgebra de producto no cero A es multiplicativamente prima si, y sólamente si, $W_{F,a}=0$ implica $F=0$ o $a=0$, donde para $F\in M(A)$ y $a\in A$ el operador $W_{F,a}:M(A)\longrightarrow A$ está definido por $W_{F,a}(T)=FT(a)$.

Definición II.1.1. Un álgebra normada $(A,\|.\|)$ se dice que es *totalmente multiplicativamente prima* (abreviadamente *t.m.p.*) si es de producto no cero y existe una constante positiva K tal que

$$K\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\|$$

para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A, donde $\|F\|$ denota la norma de operadores de F y $\|W_{F,a}\|$ denota la norma del operador continuo $W_{F,a}$ del álgebra de multiplicación con la norma de operadores $(M(A),\|.\|)$ en $(A,\|.\|)$.

Aprovechando la compacidad de la esfera unidad de los espacios normados finito dimensionales podemos presentar los primeros ejemplos de álgebras t.m.p.

Proposición II.1.2. *Toda álgebra multiplicativamente prima finito dimensional es t.m.p.*

Demostración. Si A es un álgebra multiplicativamente prima finito dimensional, entonces el operador bilineal continuo

$$W:M(A)\times A\longrightarrow BL(M(A),A)$$

definido por $W(F,a)=W_{F,a}$ alcanza su valor mínimo en el producto de esferas $S_{M(A)}\times S_A$. Si

$$K:=\text{Mín}\{\|W_{F,a}\| : F\in S_{M(A)},\ a\in S_A\},$$

entonces K es una (de hecho, la más grande) constante positiva para la que se verifica la condición de total-multiplicativa-primidad para A. ∎

La existencia de álgebras primas finito dimensionales que no son multiplicativamente primas (véanse los Ejemplos I.4.1 y I.5.9) muestra que las álgebras ultraprimas no están obligadas a ser t.m.p. Nuestro primer objetivo será demostrar que las álgebras t.m.p. están estrechamente relacionadas con las álgebras primas normadas cuya álgebra de multiplicación es ultraprima.

Con la única intención de conseguir una nomenclatura cómoda para las álgebras normadas cuyas ultrapotencias tienen anulador cero, convendremos en llamar a un álgebra *propia* cuando tenga anulador cero. Es claro que A es propia si, y sólo si, $L_a=R_a=0$ $(a\in A)$ implica $a=0$. Procediendo de manera similar a como se hizo en [**32**; Lema 1.1] y en [**11**; Proposición 1.1] vamos a mostrar como la anterior caracterización en términos de L-R-operadores permite obtener una caracterización de las álgebras normadas que tienen alguna ultrapotencia propia vía una condición que no involucra ultraproductos. Para tal fin, notemos previamente que es fácil verificar que si A es un álgebra normada y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro numerablemente incompleto en un conjunto I, entonces la correspondencia φ de $M(A)_{\mathcal{U}}$ en $BL(A_{\mathcal{U}})$ dada por $\varphi((F_i))(a_i)=(F_i(a_i))$ para cualesquiera $(F_i)\in M(A)_{\mathcal{U}}$ y $(a_i)\in A_{\mathcal{U}}$, determina un bien definido homomorfismo isométrico de $M(A)_{\mathcal{U}}$ en $BL(A_{\mathcal{U}})$. Puesto que $\varphi((L_{a_i}))=L_{(a_i)}$, $\varphi((R_{a_i}))=R_{(a_i)}$ y $\varphi((Id_A))=Id_{A_{\mathcal{U}}}$, se sigue que $\varphi(M(A)_{\mathcal{U}})$ contiene a $M(A_{\mathcal{U}})$, y por tanto $M(A_{\mathcal{U}})$ puede verse de manera canónica como una subálgebra del álgebra $M(A)_{\mathcal{U}}$.

Proposición II.1.3. *Para un álgebra normada A equivalen:*

i) Toda ultrapotencia de A es propia.

ii) Existe una ultrapotencia de A que es propia.

iii) Existe una constante positiva K tal que $K\|a\|\leq \text{Máx}\{\|L_a\|,\|R_a\|\}$ *para todo a en A.*

Demostración. i)$\Rightarrow$ii).- es clara. ii)$\Rightarrow$iii).- Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto en un conjunto I tal que $A_{\mathcal{U}}$ es propia y sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $I_1=I$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\emptyset$. Supongamos que iii) no es cierta y tomemos para cada $n\in\mathbb{N}$ un elemento $a_n\in A$ con $\|a_n\|=1$ tal que

$$\text{Máx}\{\|L_{a_n}\|,\|R_{a_n}\|\} < \frac{1}{n}.$$

Puesto que para cada $i\in I$ existe un único $n(i)\in\mathbb{N}$ tal que $i\in I_{n(i)}\backslash I_{n(i)+1}$ podemos considerar el elemento $(a_i)\in A_{\mathcal{U}}$ dado por $a_i:=a_{n(i)}$ para todo $i\in I$. Es claro que (a_i) es un elemento no nulo (de hecho, de norma 1) de $A_{\mathcal{U}}$. Sin embargo, ocurre que

$$0\leq\| L_{(a_i)}\|=\|\varphi((L_{a_i}))\|=\|(L_{a_i})\|=\text{lím}_{\mathcal{U}}\|L_{a_i}\|\leq\text{lím}_{\mathcal{U}}\frac{1}{n(i)}=0,$$

por lo que $L_{(a_i)}=0$, y análogamente se comprueba que $R_{(a_i)}=0$. Esto contradice el hecho de que $A_{\mathcal{U}}$ es propia. iii)$\Rightarrow$i).- Supongamos que K es una constante positiva tal que $K\|a\|\leq\text{Máx}\{\|L_a\|,\|R_a\|\}$ para todo $a\in A$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto en un conjunto I. Dado $(a_i)\in A_{\mathcal{U}}$, se tiene que

$$K\|a_i\|\leq\text{Máx}\{\|L_{a_i}\|,\|R_{a_i}\|\} \tag{II.1}$$

para todo $i\in I$. De aquí se sigue inmediatamente que

$$K\|(a_i)\|\leq\text{Máx}\{\|L_{(a_i)}\|,\|R_{(a_i)}\|\}.$$

En efecto, supuesto lo contrario tomemos un número real α tal que

$$\text{Máx}\{\|L_{(a_i)}\|,\|R_{(a_i)}\|\}<\alpha<K\|(a_i)\|.$$

Entonces $\alpha>\|L_{(a_i)}\|=\|\varphi((L_{a_i}))\|=\|(L_{a_i})\|$, por lo que el conjunto $U_1:=\{i\in I : \|L_{a_i}\|<\alpha\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. Análogamente, $U_2:=\{i\in I : \|R_{a_i}\|<\alpha\}$

pertenece a $\mathcal{U}$. Por otra parte, ya que $\frac{\alpha}{K} < \|(a_i)\|$, se sigue que también $U_3 := \{i \in I : \frac{\alpha}{K} < \|a_i\|\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. En consecuencia, para todo $i \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$ se contradice (II.1). Hemos probado pues que la condición iii) se transfiere a $A_{\mathcal{U}}$, y por tanto $A_{\mathcal{U}}$ es propia. ■

Definición II.1.4. Un álgebra normada satisfaciendo las condiciones equivalentes en la proposición anterior se llamará *ultrapropia.*

Ahora podemos precisar el comentario hecho arriba sobre la interrelación de las álgebras t.m.p. con las álgebras primas normadas cuya álgebra de multiplicación es ultraprima.

Proposición II.1.5. *Sea A un álgebra normada.*

i) Si A es un álgebra t.m.p., entonces $M(A)$ es ultraprima.

ii) Si A es ultrapropia y $M(A)$ es ultraprima, entonces A es t.m.p.

Demostración. i).- Supóngase que A es un álgebra t.m.p. y que K es una constante positiva tal que $K\|F\|\|a\| \leq \|W_{F,a}\|$ para cualesquiera $F \in M(A)$ y $a \in A$. Para $F,G,T \in M(A)$ y $a \in A$ tenemos que

$$\|W_{F,G(a)}(T)\| = \|FTG(a)\| \leq \|FTG\|\|a\| = \|M_{F,G}(T)\|\|a\| \leq \|M_{F,G}\|\|T\|\|a\|,$$

luego $\|W_{F,G(a)}\| \leq \|M_{F,G}\|\|a\|$, y así $K\|F\|\|G(a)\| \leq \|M_{F,G}\|\|a\|$. En consecuencia, para $F,G \in M(A)$ tenemos que $K\|F\|\|G\| \leq \|M_{F,G}\|$, y por tanto $M(A)$ es un álgebra ultraprima.

ii).- Supongamos que A es un álgebra ultrapropia tal que $M(A)$ es ultraprima, y supongamos que K_1, K_2 son constantes positivas tales que $K_1\|a\| \leq \text{Máx}\{\|L_a\|, \|R_a\|\}$ para todo $a \in A$ y $K_2\|F\|\|G\| \leq \|M_{F,G}\|$ para cualesquiera $F,G \in M(A)$. Para F,T en $M(A)$ y a,x en A tenemos

$$\| M_{F,L_a}(T)(x)\| = \|FTL_a(x)\| = \|FT(ax)\| = \|FTR_x(a)\| = \|W_{F,a}(TR_x)\| \leq \|W_{F,a}\|\|T\|\|x\|,$$

por tanto $\|M_{F,L_a}\|\leq\|W_{F,a}\|$, y así $K_2\|F\|\|L_a\|\leq\|W_{F,a}\|$. Razonando análogamente podemos obtener $K_2\|F\|\|R_a\|\leq\|W_{F,a}\|$, y en consecuencia $K_1K_2\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\|$. Luego A es t.m.p. ■

Existen álgebras t.m.p. que no son ultrapropias. Un ejemplo es la H*-álgebra asociativa prima $(\mathcal{C}_2(H),\|.\|_2)$ de todos los operadores de Hilbert-Schmidt sobre un espacio de Hilbert infinito dimensional H. En efecto, $(\mathcal{C}_2(H),\|.\|_2)$ es t.m.p. como consecuencia de nuestro próximo Teorema II.3.1. Sin embargo observemos que $(\mathcal{C}_2(H),\|.\|_2)$ no es ultrapropia. $\mathcal{C}_2(H)$ es un ideal de $BL(H)$ (el álgebra de todos los operadores lineales y continuos en H) verificando la propiedad

$$\|FTG\|_2\leq\|F\|\|T\|_2\|G\| \quad \text{para cualesquiera } F,G\in BL(H) \text{ y } T\in\mathcal{C}_2(H),$$

donde $\|.\|$ denota la norma de operadores. De aquí se sigue inmediatamente que $\text{Máx}\{\|L_F\|_2,\|R_F\|_2\}\leq\|F\|$ para todo $F\in\mathcal{C}_2(H)$. Puesto que para cada $n\in\mathbb{N}$ y para cada sistema ortonormal $\{e_1,...,e_n\}$ formado por n vectores de H es inmediato comprobar que la proyección ortogonal P de H sobre el subespacio generado por $\{e_1,...,e_n\}$ verifica que $\|P\|=1$ y $\|P\|_2=\sqrt{n}$, se sigue de la anterior desigualdad que $(\mathcal{C}_2(H),\|.\|_2)$ no es ultrapropia.

Recordemos que un álgebra normada A tiene *unidad aproximada* si existe una red $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de A tal que para todo $x\in A$ se verifica que las redes $\{e_\lambda x\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{xe_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ convergen a x. La unidad aproximada $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se dice *acotada* si existe una constante positiva K tal que $\|e_\lambda\|\leq K$ para todo $\lambda\in\Lambda$. Es claro que si $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en una unidad aproximada acotada por K del álgebra normada A, entonces se verifica que

$$K^{-1}\|a\|\leq\|L_a\|\leq\|a\| \quad \text{y} \quad K^{-1}\|a\|\leq\|R_a\|\leq\|a\|$$

para todo $a\in A$, y en consecuencia A es ultrapropia. Así tenemos el siguiente corolario.

Corolario II.1.6. *Si A es un álgebra normada con una unidad aproximada acotada, entonces A es t.m.p. si, y sólamente si, $M(A)$ es ultraprima.*

Ahora vamos a estudiar la relación entre las álgebras totalmente primas introducidas en [**10**] y las álgebras t.m.p. Recordemos que un álgebra normada A se dice *totalmente prima* si existe una constante positiva K tal que $K\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$ para cualesquiera a,b en A, donde $N_{a,b}$ denota la aplicación bilineal de $M(A)\times M(A)$ en A definida por $N_{a,b}(F,G)=F(a)G(b)$ para cualesquiera F,G en $M(A)$.

Proposición II.1.7. *Toda álgebra t.m.p. es totalmente prima.*

Demostración. Sea A un álgebra t.m.p. y supóngase que K es una constante positiva tal que $K\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\|$ para cualesquiera $F\in M(A)$ y $a\in A$. Veamos que la desigualdad

$$K\rho\|a\|\leq\text{Sup}\{\|R_{F(a)}\| \ : \ F\in M(A) \text{ con } \|F\|=1\} \qquad \text{(II.2)}$$

es cierta para todo $a\in A$, donde estamos designando por ρ a la norma del producto de A, esto es

$$\rho=\text{Sup}\{\|xy\| \ : \ x,y\in A \text{ con } \|x\|=\|y\|=1\}.$$

Fijemos un elemento a en A y un real arbitrario ε en $]0,1[$. Elijamos x en A de norma uno tal que $\|L_x\|\geq\varepsilon\rho$. Puesto que para todo F en $M(A)$ se verifica

$$\|W_{L_x,a}(F)\|=\|xF(a)\|\leq\|R_{F(a)}\|,$$

se sigue que $\|W_{L_x,a}\|\leq\text{Sup}\{\|R_{F(a)}\| \ : \ F\in M(A) \text{ con } \|F\|=1\}$. De aquí y de las desigualdades $K\varepsilon\rho\|a\|\leq K\|L_x\|\|a\|\leq\|W_{L_x,a}\|$ se obtiene que

$$K\varepsilon\rho\|a\|\leq\text{Sup}\{\|R_{F(a)}\| \ : \ F\in M(A) \text{ con } \|F\|=1\}.$$

Ya que ε es arbitrario en $]0,1[$ se sigue (II.2).

Finalmente, fijemos a,b en A y notemos que para F,G en $M(A)$ con $\|F\|=\|G\|=1$ se verifica

$$\|W_{R_{F(b)},a}(G)\|=\|G(a)F(b)\|=\|N_{a,b}(G,F)\|\leq\|N_{a,b}\|,$$

así $\|W_{R_{F(b)},a}\|\leq\|N_{a,b}\|$, y por tanto $K\|R_{F(b)}\|\|a\|\leq\|N_{a,b}\|$. Teniendo en cuenta (II.2) se puede concluir directamente que $K^2\rho\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$. ■

La Proposición II.1.7 y el Teorema 3 de [**10**] ponen de manifiesto que la clase de todas las álgebras totalmente primas es muy extensa ya que contiene a todas las álgebras t.m.p. y a todas las álgebras ultraprimas.

Para concluir esta sección vamos a recoger algunas de las primeras consecuencias de la definición de álgebra t.m.p. Para un elemento a de un álgebra A, denotaremos por E_a a la *aplicación evaluación* en a, esto es a la aplicación $E_a:M(A)\longrightarrow A$ definida por $E_a(F)=F(a)$ para todo F en $M(A)$. A partir de este momento para designar la restricción de una cierta aplicación f a un subconjunto S de su dominio utilizaremos el símbolo f^S.

Proposición II.1.8. *Sea A un álgebra t.m.p., y supóngase que K es una constante positiva tal que $K\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\|$ para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A. Entonces*

i) $K\|F\|\leq\|F^U\|\leq\|F\|$ para cualesquiera $F\in M(A)$ y U ideal no nulo de A;

ii) $K\|a\|\leq\|E_a^{\mathfrak{P}}\|\leq\|a\|$ para cualesquiera $a\in A$ y $\mathfrak{P}$ ideal no nulo de $M(A)$;

iii) $K^2\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}^{\mathfrak{P}}\|$ para cualesquiera $F\in M(A)$, $a\in A$ y $\mathfrak{P}$ ideal no nulo de $M(A)$.

Demostración. i).- Fijemos F en $M(A)$ y U ideal no nulo de A. La desigualdad $\|F^U\|\leq\|F\|$ es clara. Por otra parte, para $x\in U$ con $\|x\|=1$ y

$T\in M(A)$ con $\|T\|=1$, notemos que $\|W_{F,x}(T)\|=\|F^{U}T(x)\|\leq\|F^{U}\|$, y así $\|W_{F,x}\|\leq\|F^{U}\|$. Luego $K\|F\|\leq\|F^{U}\|$.

ii).- Fijemos a en A y $\mathfrak{P}$ ideal no nulo de $M(A)$. Para $F\in\mathfrak{P}$ y $G\in M(A)$ con $\|F\|=\|G\|=1$ tenemos

$$\|W_{F,a}(G)\|=\|FG(a)\|=\|E_{a}^{\mathfrak{P}}(FG)\|\leq\|E_{a}^{\mathfrak{P}}\|\,\|FG\|\leq\|E_{a}^{\mathfrak{P}}\|,$$

luego $\|W_{F,a}\|\leq\|E_{a}^{\mathfrak{P}}\|$, y por tanto $K\|a\|\leq\|E_{a}^{\mathfrak{P}}\|$. La desigualdad $\|E_{a}^{\mathfrak{P}}\|\leq\|a\|$ es obvia.

iii).- Fijemos F en $M(A)$, a en A y $\mathfrak{P}$ ideal no nulo de $M(A)$. Para $T\in\mathfrak{P}$ con $\|T\|=1$, de las igualdades $W_{F,T(a)}(G)=FGT(a)=W_{F,a}^{\mathfrak{P}}(GT)$ válidas para todo $G\in M(A)$, tenemos que $\|W_{F,T(a)}\|\leq\|W_{F,a}^{\mathfrak{P}}\|$, luego $K\|F\|\,\|T(a)\|\leq\|W_{F,a}^{\mathfrak{P}}\|$, y así $K\|F\|\,\|E_{a}(T)\|\leq\|W_{F,a}^{\mathfrak{P}}\|$. Utilizando ii) obtenemos $K^{2}\|F\|\,\|a\|\leq\|W_{F,a}^{\mathfrak{P}}\|$. ■

El siguiente resultado proporciona una caracterización de las álgebras t.m.p. en términos del ideal de multiplicación.

Corolario II.1.9. *Para un álgebra normada A las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A es un álgebra t.m.p.

ii) Existe una constante positiva $K^{\#}$ tal que $K^{\#}\|F\|\,\|a\|\leq\|W_{F,a}^{M^{\#}(A)}\|$ para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A.

Demostración. i)⇒ii) es una consecuencia directa de la parte iii) de la Proposición II.1.8. La implicación ii)⇒i) es inmediata. ■

2. Centroide extendido y clausura central.

En esta sección abordamos el estudio del centroide extendido y de la clausura central para álgebras t.m.p. El principal resultado afirma que toda álgebra real totalmente multiplicativamente prima tiene centroide extendido isomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y que, cuando ocurre lo segundo, la norma admite una extensión topológica a una norma compleja de álgebra en la clausura central para la que ésta es t.m.p. Como consecuencia se sigue que las álgebras complejas t.m.p. son centralmente cerradas. Además, si A es un álgebra compleja normada, entonces A es t.m.p. si, y sólamente si, el álgebra real subyacente $A_{\mathbb{R}}$ lo es.

Puesto que el centroide extendido de las álgebras totalmente primas y de las álgebras asociativas ultraprimas se determinó en [**10**] y en [**32**] respectivamente, podemos argumentar con cualquiera de estos dos resultados para dar una demostración muy corta de la siguiente proposición.

Proposición II.2.1. *Sea $(A,\|.\|)$ un álgebra real t.m.p. Entonces el centroide extendido $C(A)$ de A es isomorfo a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$.*

Demostración 1ª.- Por la Proposición II.1.7 A es un álgebra totalmente prima, luego por [**10**; Teorema 2 y Nota 2] $C(A)$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$. ∎

Demostración 2ª.- Por la Proposición II.1.5.i) $M(A)$ es un álgebra ultraprima, luego por [**32**] $C(M(A))$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$. La demostración se concluye teniendo en cuenta que por el Teorema I.3.2

$C(A)$ y $C(M(A))$ son isomorfos. ■

Las anteriormente citadas determinaciones del centroide extendido tanto de las álgebras asociativas ultraprimas como de las álgebras totalmente primas descansan en el Teorema de Gelfand-Mazur, hecho que inspiró en [**12**] el siguiente resultado que es básico en la obtención del ya referido Teorema I.5.13.

Lema II.2.2. [**12**; Lema 1] *Si A es un álgebra real prima normada en la que todo c.p.d. es continuo, entonces el centroide extendido de A es isomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*

Finalizamos nuestra lista de demostraciones de la Proposición II.2.1 añadiendo la siguiente otra que descansa en el lema anterior.

Demostración 3ª.- Bastará probar que todo c.p.d. en A es continuo. Sea K una constante positiva tal que

$$K\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\|$$

para cualesquiera $F\in M(A)$ y $a\in A$. Dado $\lambda\in C(A)$, haciendo uso del Teorema I.3.2, podemos escribir

$$W_{F,\lambda(x)}(T)=FT\lambda(x)=F(\lambda(T(x)))=\varphi(\lambda)(F)(T(x))=W_{\varphi(\lambda)(F),x}(T),$$

para cualesquiera $x\in dom(\lambda)$, $F\in dom(\varphi(\lambda))$ y $T\in M(A)$. De aquí se sigue que

$$K\|F\|\|\lambda(x)\|\leq\|W_{F,\lambda(x)}\|=\|W_{\varphi(\lambda)(F),x}\|\leq\|\varphi(\lambda)(F)\|\|x\|$$

para cualesquiera $x\in dom(\lambda)$ y $F\in dom(\varphi(\lambda))$. Expresión que implica la continuidad de λ. ■

Corolario II.2.3. *Toda álgebra compleja t.m.p. es centralmente cerrada.*

Contrariamente a lo que ocurre en el estudio del centroide extendido, a la hora de tratar la clausura central no hemos encontrado precedentes en los que apoyarnos. En este sentido el trabajo realizado en el capítulo anterior será clave en la obtención del siguiente teorema que es el principal resultado de esta sección. En él se aborda el problema de normar la clausura central $Q(A)$ de un álgebra t.m.p. no centralmente cerrada A de manera que $Q(A)$ resulte ser una extensión topológica de A y siga siendo un álgebra t.m.p. Recordemos que el Teorema I.3.2 afirma la existencia de un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $\varphi:C(A)\longrightarrow C(M(A))$ determinado por la siguiente condición

$$\varphi(\lambda)(T)(x)=T(\lambda(x))$$

para cualesquiera $\lambda\in C(A)$, $T\in dom(\varphi(\lambda))$ y $x\in dom(\lambda)$, así como también la existencia de un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\Phi:Q(M(A))\longrightarrow M(Q(A))$ que extiende a la aplicación $Id_{M(A)}$ y que viene determinado de la siguiente forma

$$\Phi(F+\varphi(\iota)G)(a+\iota b)=F(a)-G(b)+\iota(F(b)+G(a)), \qquad \text{(II.3)}$$

para cualesquiera $F,G\in M(A)$ y $a,b\in A$ (donde ι está designando a un elemento de $C(A)$ tal que $\iota^2=-1$), que nos permite identificar $Q(M(A))$ con $M(Q(A))$. Recordemos también que si Q es una subálgebra real de $Q(A)$ que contiene a A, entonces $M(Q)$ puede considerarse como una subálgebra real de $M(Q(A))$ que contiene a $M(A)$ (véase el Corolario I.1.5).

Teorema II.2.4. *Sea $(A,\|.\|)$ un álgebra real t.m.p. con centroide extendido $C(A)=\mathbb{C}$. Entonces existe una norma compleja de álgebra $|.|$ en la clausura central $Q(A)$ de A tal que*

i) Las inclusiones de $(A,\|.\|)$ en $(Q(A),|.|)$ y de $(M(A),\|.\|)$ en $(M(Q(A)),|.|)$ son topológicas;

ii) $(Q(A),|.|)$ es t.m.p.; y

iii) Si Q es una subálgebra real de $Q(A)$ que contiene a A y $\|.\|$ es *una norma de álgebra en Q tal que las inclusiones de $(A,\|.\|)$ en $(Q,|||.|||)$ y de $(M(A),\|.\|)$ en $(M(Q),|||.|||)$ son topológicas, entonces las inclusiones de $(Q,|||.|||)$ en $(Q(A),|.|)$ y de $(M(Q),|||.|||)$ en $(M(Q(A)),|.|)$ son continuas.*

Demostración. Comencemos observando que si ι denota a la unidad imaginaria de $C(A)$, entonces

$$\iota(dom(\iota))=dom(\iota). \qquad \text{(II.4)}$$

En efecto, puesto que ι es un c.p.d. no nulo, y por tanto inyectivo, se sigue la buena definición de la aplicación $\lambda:\iota(dom(\iota))\longrightarrow A$ dada por $\lambda(\iota(x))=-x$ para todo $x\in dom(\iota)$. Es claro que λ es un c.p.d. en A. Además, si $x=\iota(y)\in dom(\iota)\cap\iota(dom(\iota))$, entonces

$$\lambda(x)=\lambda(\iota(y))=-y=\iota(\iota(y))=\iota(x),$$

y por tanto λ es equivalente a ι. Puesto que ι es un c.p.d. maximal se sigue que $\iota(dom(\iota))\subseteq dom(\iota)$. Aplicando ι a esta inclusión obtenemos la inclusión contraria, y por tanto la validez de (II.4).

Por comodidad a lo largo de toda la demostración usaremos el símbolo D para designar a $dom(\varphi(\iota))$. Puesto que $\varphi(\iota)^2=\varphi(\iota^2)=\varphi(-\mathbf{1})=-\mathbf{1}$ se sigue que $\varphi(\iota)$ está en las mismas circunstancias que ι, por lo que se obtiene del párrafo anterior que $\varphi(\iota)(D)=D$. Esta información es también fácilmente deducible a partir de (II.4) si se recuerda la determinación de D dada por el Lema I.2.5

$$D=\{F\in M(A)\ :\ F(A)\subseteq dom(\iota) \text{ y } \iota F\in M(A)\}, \qquad \text{(II.5)}$$

lo cual se utilizará asiduamente en lo que sigue. Puesto que toda álgebra genera a su clausura central sobre el centroide extendido se tiene que

$$Q(A)=\{a+\iota b\ :\ a,b\in A\} \text{ y } Q(M(A))=\{F+\varphi(\iota)G\ :\ F,G\in M(A)\}. \qquad \text{(II.6)}$$

Estas expresiones y la estabilidad de $dom(\iota)$ por ι y de D por $\varphi(\iota)$ nos permiten afirmar que $dom(\iota)$ es un ideal de $Q(A)$ y que D es un ideal de

$Q(M(A))$, y por tanto también de $M(Q(A))$. Además, para $T\in D$ y $q\in Q(A)$, expresando $q=a+\iota b$ para convenientes $a,b\in A$, usando y abusando de (II.3), podemos escribir

$$T(q)=T(a)+\iota(T(b)),$$

por lo que $T(q)$ pertenece a A (más aún, pertenece a $dom(\iota)$) como consecuencia de (II.5). Luego, la aplicación evaluación en un elemento $q\in Q(A)$ es A-valuada cuando se considera definida en D. Veamos ahora que para cada $q\in Q(A)$ dicha aplicación evaluación $E_q^D:D\longrightarrow A$ es continua. Comencemos notando que como consecuencia de la demostración 3ª de la Proposición II.2.1 se tiene la continuidad de ι. Ahora, si para $q\in Q(A)$ elegimos $a,b\in A$ tales que $q=a+\iota b$, obtenemos que

$$\|E_q^D(T)\|=\|T(a)+\iota T(b)\|\leq\|T\|\|a\|+\|\iota\|\|T\|\|b\|\leq(1+\|\iota\|)\text{Máx}\{\|a\|,\|b\|\}\|T\|$$

para todo $T\in D$, y en consecuencia E_q^D es continua. Esto autoriza a que para q en $Q(A)$ podamos definir

$$|q|:=\|E_q^D\|.$$

Puesto que $E_{\alpha q}^D=\alpha E_q^D$ y $E_{q_1+q_2}^D=E_{q_1}^D+E_{q_2}^D$ para cualesquiera que sean $q,q_1,q_2\in Q(A)$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, se sigue inmediatamente que $|.|$ es una seminorma real en $Q(A)$. Además, si $|q|=0$, entonces $D(q)=0$, y puesto que $Q(A)$ es multiplicativamente prima se sigue que $q=0$. Luego, $|.|$ es de hecho una norma. Abordemos ahora la tarea de mostrar que $|.|$ es una norma de álgebra. Para $q\in Q(A)$, $T\in D$ y $a\in A$ tenemos

$$\|TR_q(a)\|=\|T(aq)\|=\|TL_a(q)\|=\|E_q^D(TL_a)\|\leq\|E_q^D\|\|T\|\|a\|,$$

y por tanto $\|TR_q\|\leq\|E_q^D\|\|T\|$. Como consecuencia, para cualesquiera $p,q\in Q(A)$ y $T\in D$ obtenemos que

$$\|E_{pq}^D(T)\|=\|T(pq)\|=\|E_p^D(TR_q)\|\leq\|E_p^D\|\|TR_q\|\leq\|E_p^D\|\|E_q^D\|\|T\|,$$

y por tanto $\|E_{pq}^D\|\leq\|E_p^D\|\|E_q^D\|$, esto es $|pq|\leq|p||q|$.

Finalmente, veamos que el operador en $Q(A)$ determinado por la multiplicación por ι (a saber, la aplicación $q\longmapsto\iota q$ de $Q(A)$ en $Q(A)$), que denotaremos por $\iota Id_{Q(A)}$ es continuo. Dado $q\in Q(A)$, escribiendo q en la forma $q=a+\iota b$ para convenientes $a,b\in A$, tenemos que

$$E^D_{\iota q}(T)=T(\iota q)=T(\iota a-b)=\iota(T(a))-T(b)=\iota(T(a)+\iota(T(b)))=\iota(T(q))=\iota(E^D_q(T))$$

para todo $T\in D$, y por tanto $E^D_{\iota q}=\iota E^D_q$. Luego

$$|(\iota Id_{Q(A)})(q)|=|\iota q|=\|E^D_{\iota q}\|=\|\iota E^D_q\|\leq\|\iota\|\|E^D_q\|=\|\iota\||q|,$$

y por tanto el operador $\iota Id_{Q(A)}$ es continuo con $|\iota Id_{Q(A)}|\leq\|\iota\|$. Puesto que $|.|$ es una norma real de álgebra en $Q(A)$ que hace continua a la aplicación $\iota Id_{Q(A)}$, se sigue de [**43**; Teorema 1.3.3] que definiendo para todo $q\in Q(A)$

$$\mathbf{|}q\mathbf{|}:=\operatorname{Sup}_{\vartheta\in\mathbb{R}} |\cos\vartheta\ q+\iota\operatorname{sen}\vartheta\ q|$$

se obtiene una norma compleja de álgebra en $Q(A)$ satisfaciendo

$$|q|\leq\mathbf{|}q\mathbf{|}\leq(1+|\iota Id_{Q(A)}|)|q|. \qquad \text{(II.7)}$$

i).- Por la Proposición II.1.8.ii)

$$K\|a\|\leq|a|\leq\|a\| \qquad \text{(II.8)}$$

para todo $a\in A$, y por tanto, teniendo en cuenta (II.7), la inclusión de $(A,\|.\|)$ en $(Q(A),\mathbf{|}.\mathbf{|})$ es topológica.

Nótese que $M(A)$ es la subálgebra de $L_{\mathbb{R}}(Q(A))$ (el álgebra de todos los operadores $\mathbb{R}$-lineales en $Q(A)$) generada por el operador identidad y L_a,R_a ($a\in A$), y consecuentemente $M(A)$ está contenida en $BL_{\mathbb{R}}(Q(A),|.|)$ (el álgebra normada de todos los operadores $\mathbb{R}$-lineales y continuos en $(Q(A),|.|)$). Dado $F\in M(A)$, utilizando (II.8), tenemos que

$$K\|F(a)\|\leq|F(a)|\leq|F|\,|a|\leq|F|\,\|a\|$$

para todo $a\in A$, y por tanto $K\|F\|\leq|F|$. Por otra parte, para $T\in D$ y $q\in Q(A)$, tenemos

$$\|E^D_{F(q)}(T)\|=\|TF(q)\|=\|E^D_q(TF)\|\leq\|E^D_q\|\,\|T\|\,\|F\|,$$

luego $\|E^D_{F(q)}\|\leq\|E^D_q\|\,\|F\|$, o lo que es lo mismo $|F(q)|\leq|q|\,\|F\|$, y por tanto $|F|\leq\|F\|$. Resumiendo

$$K\|F\|\leq|F|\leq\|F\| \qquad \text{(II.9)}$$

para todo $F\in M(A)$, luego la inclusión de $(M(A),\|.\|)$ en $(BL_{\mathbb{R}}(Q(A)),|.|)$ es topológica. La prueba de i) se concluye ahora a partir de (II.8) y (II.9) teniendo en cuenta (II.7).

ii).- Empecemos notando que el álgebra compleja $M(Q(A))$ coincide con la subálgebra real de $L_{\mathbb{R}}(Q(A))$ generada por L_q, R_q $(q\in Q(A))$, $Id_{Q(A)}$ e $\iota Id_{Q(A)}$, y por tanto $M(Q(A))$ está contenida en $BL_{\mathbb{R}}(Q(A),|.|)$. Veamos que para todo $F\in M(Q(A))$ se verifica que

$$(1+|\iota Id_{Q(A)}|)^{-1}|F|\leq\mathbf{|}F\mathbf{|}\leq(1+|\iota Id_{Q(A)}|)|F|. \qquad \text{(II.10)}$$

En efecto, utilizando reiteradamente (II.7), se tiene para todo $q\in Q(A)$ que

$$|F(q)|\leq\mathbf{|}F(q)\mathbf{|}\leq\mathbf{|}F\mathbf{|}\,\mathbf{|}q\mathbf{|}\leq\mathbf{|}F\mathbf{|}(1+|\iota Id_{Q(A)}|)|q|$$

y

$$\mathbf{|}F(q)\mathbf{|}\leq(1+|\iota Id_{Q(A)}|)|F(q)|\leq(1+|\iota Id_{Q(A)}|)|F|\,|q|\leq(1+|\iota Id_{Q(A)}|)|F|\,\mathbf{|}q\mathbf{|},$$

desigualdades de las que se sigue inmediatamente (II.10). Ahora, gracias a (II.7) y (II.10), podemos trabajar con la norma $|.|$ tanto en $Q(A)$ como en $M(Q(A))$ para probar que $(Q(A),\mathbf{|}.\mathbf{|})$ es t.m.p. Empecemos demostrando la siguiente afirmación:

Para cada $F\in M(Q(A))$ la aplicación

$$R_F^D:(D,\|.\|)\longrightarrow(D,\|.\|)$$

es continua y

$$K^2|F|\leq\|R_F^D\|\leq K^{-1}|F|. \qquad \text{(II.11)}$$

En efecto, dado $F\in M(Q(A))$, utilizando (II.9) tenemos que para todo $T\in D$ se verifica

$$K\|R_F^D(T)\|=K\|TF\|\leq|TF|\leq|T|\,|F|\leq\|T\|\,|F|,$$

luego R_F^D es continua y $\|R_F^D\|\leq K^{-1}|F|$. Por otra parte, para $T\in D$, $G\in M(A)$ con $\|T\|=\|G\|=1$ y $q\in Q(A)$, utilizando (II.8) y (II.9), tenemos

$$K\|W_{Id_A,TF(q)}(G)\|=K\|GTF(q)\|\leq|GTF(q)|\leq\|GTF\|\,|q|=\|R_F^D(GT)\|\,|q|\leq$$

$$\|R_F^D\|\,\|GT\|\,|q|\leq\|R_F^D\|\,|q|,$$

por tanto $K\|W_{Id_A,TF(q)}\|\leq\|R_F^D\|\,|q|$, y así $K^2\|TF(q)\|\leq\|R_F^D\|\,|q|$. Reescribiendo esta desigualdad en la forma $K^2\|E_{F(q)}^D(T)\|\leq\|R_F^D\|\,|q|$, concluimos que $K^2\|E_{F(q)}^D\|\leq\|R_F^D\|\,|q|$, esto es $K^2|F(q)|\leq\|R_F^D\|\,|q|$, y consecuentemente $K^2|F|\leq\|R_F^D\|$.

Para finalizar la demostración de este apartado vamos a probar que

$$K^5|F|\,|q|\leq|W_{F,q}^D| \tag{II.12}$$

para cualesquiera $F\in M(Q(A))$ y $q\in Q(A)$. Para $F\in M(Q(A))$, $R,S,T\in D$ con $\|R\|=\|S\|=\|T\|=1$ y $q\in Q(A)$, utilizando (II.8) y (II.9) tenemos

$$K\|W_{SF,T(q)}^D(R)\|=K\|SFRT(q)\|\leq K\|FRT(q)\|\leq|FRT(q)|=|W_{F,q}^D(RT)|\leq$$
$$|W_{F,q}^D|\,|RT|\leq|W_{F,q}^D|\,\|RT\|\leq|W_{F,q}^D|.$$

Luego $K\|W_{SF,T(q)}^D\|\leq|W_{F,q}^D|$. Por la Proposición II.1.8.iii) obtenemos que $K^3\|SF\|\,\|T(q)\|\leq|W_{F,q}^D|$. Reescribiendo esta desigualdad en la forma $K^3\|R_F^D(S)\|\,\|E_q^D(T)\|\leq|W_{F,q}^D|$ deducimos que $K^3\|R_F^D\|\,\|E_q^D\|\leq|W_{F,q}^D|$. Ahora, (II.12) se sigue directamente de (II.11).

iii).- Sea Q una subálgebra real de $Q(A)$ que contiene a A y sea $|||.|||$ una norma de álgebra en Q tal que las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas. Supongamos que $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ son reales positivos tales que $\alpha\|a\|\leq|||a|||\leq\beta\|a\|$ para todo $a\in A$, y $\gamma\|F\|\leq|||F|||\leq\delta\|F\|$ para todo $F\in M(A)$. Dado $q\in Q$, se verifica para todo $F\in D$ que

$$\|E_q^D(F)\|=\|F(q)\|\leq\alpha^{-1}|||F(q)|||\leq\alpha^{-1}|||F|||\,|||q|||\leq\alpha^{-1}\delta\|F\|\,|||q|||,$$

luego $\|E_q^D\|\leq\alpha^{-1}\delta|||q|||$, y así $|q|\leq\alpha^{-1}\delta|||q|||$. Por (II.7), la inclusión de $(Q,|||.|||)$ en $(Q(A),|.|)$ es continua. Finalmente, dados $T\in M(Q)$, $q\in Q$ y $F\in D$ tenemos que $E_{T(q)}^D(F)=FT(q)=E_q^D(FT)$, y por tanto

$$\|E_{T(q)}^D(F)\|=\|E_q^D(FT)\|\leq\|E_q^D\|\,\|FT\|\leq\gamma^{-1}\|E_q^D\|\,|||FT|||\leq\gamma^{-1}\|E_q^D\|\,|||F|||\,|||T|||\leq\delta\gamma^{-1}\|E_q^D\|\,\|F\|\,|||T|||,$$

de donde se sigue que $\|E_{T(q)}^D\|\leq\delta\gamma^{-1}\|E_q^D\|\,|||T|||$, o lo que es lo mismo $|T(q)|\leq\delta\gamma^{-1}|q|\,|||T|||$. En consecuencia $|T|\leq\delta\gamma^{-1}|||T|||$ para todo $T\in M(Q)$, y por (II.10) la inclusión de $(M(Q),|||.|||)$ en $(M(Q(A)),|.|)$ es continua. ■

Corolario II.2.5. *Si A es un álgebra compleja cuya álgebra real subyacente $A_{\mathbb{R}}$ es un álgebra t.m.p. para conveniente norma $\|.\|$, entonces existe una norma compleja de álgebra $|.|$ en A equivalente a $\|.\|$ y tal que $(A,|.|)$ es t.m.p.*

Demostración. Bastará observar que $Q(A_{\mathbb{R}})=A$ y aplicar el teorema anterior. ■

Corolario II.2.6. *Sea A un álgebra compleja normada, y sea $A_{\mathbb{R}}$ el álgebra real normada subyacente. Entonces A es t.m.p. si, y sólamente si, $A_{\mathbb{R}}$ es t.m.p.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que A es un álgebra t.m.p. Puesto que la inclusión canónica de $M(A_{\mathbb{R}})$ en $M(A)$ dada en la Proposición I.3.5 es isométrica y $M^{\#}(A)=M^{\#}(A_{\mathbb{R}})$, se sigue inmediatamente del Corolario II.1.9 que $A_{\mathbb{R}}$ es t.m.p.

Recíprocamente, si $A_{\mathbb{R}}$ es t.m.p., por el corolario anterior, existe una norma de álgebra $|.|$ en A que es equivalente a la norma inicial $\|.\|$ en A y tal que $(A,|.|)$ es t.m.p. En consecuencia, $(A,\|.\|)$ es t.m.p. ■

3. H^*-álgebras y álgebras no asociativas libres con normas clásicas.

En esta sección tratamos dos de los más relevantes ejemplos de álgebras totalmente primas, a saber, las H*-álgebras primas y las álgebras no asociativas libres con las normas clasicas. Es bien conocido que las primeras no están obligadas ser ultraprimas, mientras que sin embargo las segundas son álgebras *absolutamente valuadas* (esto es, satisfacen la igualdad $\|ab\|=\|a\|\|b\|$ para cualesquiera dos elementos a,b), y por tanto son ultraprimas. Probamos que las H*-álgebras primas son totalmente multiplicativamente primas y que $\|.\|_1$ es la única norma clásica para la que el álgebra no asociativa libre resulta ser totalmente multiplicativamente prima.

Recordemos que una H*-álgebra es prima si, y sólamente si, es topológicamente simple ([**16**; Proposición 2.(ii)]), y por tanto toda H*-álgebra prima es multiplicativamente prima. Nuestro primer resultado importante de esta sección es el siguiente.

Teorema II.3.1. *Toda H*-álgebra prima es un álgebra t.m.p. Concretamente*

i) Si A es una H-álgebra compleja prima, entonces*

$\|W_{F,a}\|=\|F\|\|a\|$ *para cualesquiera F en M(A) y a en A.*

ii) Si A es una H-álgebra real prima, entonces*

$\|W_{F,a}\|\geq 2^{-1/2}\|F\|\|a\|$ *para cualesquiera F en M(A) y a en A.*

La demostración que haremos de la parte i) es una adaptación, con algunas simplificaciones, de la llevada a cabo en [**10**; Teorema 1] para probar que toda H*-álgebra compleja prima es totalmente prima. Esta demostración utiliza los clásicos Teoremas del biconmutante de von

Neumann y de densidad de Kaplansky, que recogeremos a continuación. Recordemos que si H es un espacio de Hilbert y S es un subconjunto del álgebra de operadores $BL(H)$ se define S^c, el *conmutante* de S, como el conjunto de todos los operadores de $BL(H)$ que conmutan con todos los elementos de S. Es claro que S^c es una subálgebra de $BL(H)$ que contiene al operador identidad. Además, si adicionalmente S es invariante por la adjunción de operadores, entonces S^c es una subálgebra autoadjunta de $BL(H)$. El *biconmutante* de S se define por $(S^c)^c$, y se nota por S^{cc}.

Teorema II.3.2 (Teorema del biconmutante de von Neumann) [17; Corolario I.3.4.1] *Sea H un espacio de Hilbert complejo. Si A es una subálgebra autoadjunta de $BL(H)$ tal que el subespacio vectorial generado por el conjunto $\{F(x) : F\in A,\ x\in H\}$ es denso en H (lo que ocurre por ejemplo si el operador identidad pertenece a A), entonces $A^{cc}=\overline{A}^{SOT}$.*

Teorema II.3.3 (Teorema de densidad de Kaplansky) [17; Teorema I.3.5.3] *Sea H un espacio de Hilbert complejo. Si A es una subálgebra autoadjunta del $BL(H)$, entonces la bola unidad cerrada de A es SOT-densa en la bola unidad cerrada de $\overline{A}^{SOT}$.*

Demostración de la parte i) del Teorema II.3.1. Sea A una H*-álgebra compleja prima. Es claro que para establecer el enunciado nos bastará probar que $\|W_{F,a}\|=1$ para cualesquiera que sean $F\in M(A)$ y $a\in A$ con $\|F\|=\|a\|=1$. Es obvio que para F y a en tales circunstancias se verifica la desigualdad $\|W_{F,a}\|\leq 1$. Para demostrar la desigualdad contraria, comencemos notando que por [15; Teorema 1.2] en el álgebra de operadores $BL(A)$ se verifica que $M(A)^c=\mathbb{C}Id_A$, y por tanto $M(A)^{cc}=BL(A)$. Ahora, por el teorema del biconmutante de von Neumann y por el teorema de densidad de Kaplansky podemos asegurar que la bola unidad $B_{M(A)}$ de $M(A)$ es SOT-densa en la bola unidad $B_{BL(A)}$ de $BL(A)$. De la continuidad de las aplicaciones:

$(BL(A),\mathrm{SOT})\longrightarrow A$ definida por $T\longrightarrow T(a)$,

$A\longrightarrow A$ definida por $x\longrightarrow F(x)$, y

$A\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $x\longrightarrow\|x\|$

se sigue que la aplicación

$$h:(BL(A),\mathrm{SOT})\longrightarrow\mathbb{R} \text{ definida por } h(T)=\|FT(a)\|$$

es continua. Puesto que para todo $T\in M(A)$ se verifica que

$$h(T)=\|FT(a)\|=\|W_{F,a}(T)\|\le\|W_{F,a}\|\|T\|,$$

se sigue que $h(B_{M(A)})\subseteq[0,\|W_{F,a}\|]$. Esta inclusión, la continuidad de h, y la SOT-densidad de $B_{M(A)}$ en $B_{BL(A)}$ antes probada, nos permiten afirmar que $h(B_{BL(A)})\subseteq[0,\|W_{F,a}\|]$. Finalmente, para cada $x\in A$ consideremos el operador de rango uno $T_x:A\longrightarrow A$ definido por $T_x(y)=<y|a>x$ para todo $y\in A$. Es claro que $T_x(a)=x$ y que T_x es continuo con $\|T_x\|=\|x\|$. Luego para $x\in A$ con $\|x\|=1$ tenemos que

$$\|F(x)\|=\|FT_x(a)\|=h(T_x)\le\|W_{F,a}\|.$$

De aquí obtenemos que $1=\|F\|\le\|W_{F,a}\|$, como se pretendía. ■

La demostración de la parte ii) del Teorema II.3.1 se hará a partir de la parte i) utilizando la teoría de estructura de las H*-álgebras reales dada en [**4**]. Recordemos que si B es una H*-álgebra compleja, entonces el álgebra real subyacente $B_{\mathbb{R}}$ es una H*-álgebra (real para la misma involución de H*-álgebra que B y para el producto escalar real $Re<.|.>$) llamada la *H*-álgebra realización* de B. Recordemos así mismo que si B es una H*-álgebra compleja prima, y si τ es una **-involución lineal* en B (esto es, $\tau:B\longrightarrow B$ es una involución lineal verificando que $\tau(b^*)=\tau(b)^*$ para todo $b\in B$), entonces $A=\{b\in B : \tau(b)=b^*\}$ es una H*-álgebra real prima para la involución de H*-álgebra y el producto escalar heredados de B [**4**; Proposición 1].

Teorema II.3.4 [**4**; Teorema 1]. *Sea A una H^*-álgebra real prima. Entonces o bien A es la H^*-álgebra realización de una H^*-álgebra compleja prima, o bien existe una H^*-álgebra compleja prima B con una $*$-involución lineal τ tal que $A=\{b\in B : \tau(b)=b^*\}$.*

Ya podemos concluir la prueba del Teorema II.3.1.

Demostración de la parte ii) del Teorema II.3.1. Sea A un H*-álgebra real prima. Supongamos en primer lugar que existe una H*-álgebra compleja prima B tal que A es la H*-álgebra realización de B. Por la parte i) y por la Proposición II.1.8.iii) tenemos que $\|W_{F,a}^{M^{\#}(B)}\|=\|F\|\|a\|$ para cualesquiera $F\in M(B)$ y $a\in B$. Puesto que la inclusión canónica de $M(A)$ en $M(B)$ dada por la Proposición I.3.5 es isométrica y $M^{\#}(A)=M^{\#}(B)$, se sigue que también para el álgebra A se tiene $\|W_{F,a}\|=\|F\|\|a\|$ para cualesquiera $F\in M(A)$ y $a\in A$, y por tanto en este caso se obtiene la misma información que en el caso complejo. Ahora, teniendo en cuenta el Teorema II.3.4, sólo nos resta considerar el caso en el que existe una H*-álgebra compleja prima B con una *-involución lineal τ tal que $A=\{b\in B : \tau(b)=b^*\}$. Puesto que τ es lineal y * es conjugado-lineal es claro que $A\cap iA=0$. Además, puesto que todo $b\in B$ se escribe en la forma $b=\frac{1}{2}(b+\tau(b)^*)+i[\frac{1}{2i}(b-\tau(b)^*]$ y $\frac{1}{2}(b+\tau(b)^*),\frac{1}{2i}(b-\tau(b)^*)\in A$, se sigue inmediatamente que $B=\{x+iy : x,y\in A\}$ puede verse como la complexificación de A. Esta información se transfiere a álgebras de multiplicación, ya que por la Proposición I.5.10 existe un isomorfismo ϕ de $M(A)_{\mathbb{C}}$ sobre $M(B)$ determinado por

$$\phi(S+iT)(x+iy)=S(x)-T(y)+i(S(y)+T(x))$$

para cualesquiera $S,T\in M(A)$ y $x,y\in A$. Vía ϕ se puede ver $M(A)$ como una subálgebra real de $M(B)$. Además, esta inclusión es isométrica. En efecto, para S en $M(A)$, la desigualdad $\|S\|\leq\|\phi(S)\|$ es clara, y la contraria se sigue del hecho de que

$$\|\phi(S)(x+iy)\|^2=\|S(x)+iS(y)\|^2=\|S(x)\|^2+\|S(y)\|^2\leq\|S\|^2(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|S\|^2\|x+iy\|^2$$

para cualesquiera $x,y\in A$. También aplicaremos que la desigualdad

$$\text{Máx}\{\|S\|,\|T\|\}\leq\|\phi(S+iT)\|$$

es válida para cualesquiera S,T en $M(A)$. Ello es consecuencia de que

$$\text{Máx}\{\|S(x)\|^2,\|T(x)\|^2\}\leq\|S(x)\|^2+\|T(x)\|^2=\|S(x)+iT(x)\|^2=$$
$$\|\phi(S+iT)(x)\|^2\leq\|\phi(S+iT)\|^2\|x\|^2$$

para todo $x\in A$. Ahora, tómense F,S,T en $M(A)$ y x en A, y nótese que

$$\|W_{\phi(F),x}\phi(S+iT)\|^2=\|\phi(F)\phi(S+iT)(x)\|^2=\|FS(x)+iFT(x)\|^2=\|FS(x)\|^2+\|FT(x)\|^2=$$
$$\|W_{F,x}(S)\|^2+\|W_{F,x}(T)\|^2\leq\|W_{F,x}\|^2(\|S\|^2+\|T\|^2)\leq$$
$$2\|W_{F,x}\|^2\text{Máx}\{\|S\|^2,\|T\|^2\}\leq2\|W_{F,x}\|^2\|\phi(S+iT)\|^2,$$

por tanto $\|W_{\phi(F),x}\|^2\leq2\|W_{F,x}\|^2$. Finalmente, teniendo en cuenta i) y el hecho de que la inclusión de $M(A)$ en $M(B)$ es isométrica deducimos que $\|F\|^2\|x\|^2\leq2\|W_{F,x}\|^2$. ■

La segunda parte de esta sección se dedicará al estudio de las álgebras no asociativas dotadas con las normas clásicas. Seguidamente recogemos el material que nos va a ser necesario, lo que de paso nos permitirá fijar alguna terminología, si bien remitimos a [**28**; pp. 23-25] y a [**53**; Capítulo 1] para un desarrollo más detallado. En lo que sigue, X denotará un conjunto no vacío arbitrario y U denotará la mónada de todas las palabras no asociativas con letras en X. Si definimos el *grado de una palabra* no asociativa como el número de elementos de X que aparecen en su escritura, los elementos de U se construyen inductivamente como sigue: Las palabras de grado *1* son precisamente los elementos de X, las palabras de grado 2 se obtienen simplemente yuxtaponiendo dos palabras de grado 1 de todas las maneras posibles y, en general, si se suponen conocidas todas las palabras de grado estrictamente menor que un determinado natural $n\geq 2$, entonces las palabras de grado n se obtienen yuxtaponiendo de todas las maneras posibles dos palabras de grado estrictamente menor que n, con la precaución de que la suma de los grados de las palabras que se yuxtaponen sea igual a n y de que las palabras de grado estrictamente mayor que 1 deben ser encerradas entre paréntesis previamente a la yuxtaposición. El siguiente enunciado contiene la propiedad fundamental de la representación única de las palabras no asociativas que puede verse en [**28**; Lema de la pág. 24] o en [**53**; Proposición 2 de la pág. 2].

Proposición II.3.5. *Sea X un conjunto no vacío y sea U la mónada de las palabras no asociativas de elementos de X. Entonces todo elemento de U con grado mayor o igual que 2 tiene una única representación como producto de dos elementos de U de grado menor.*

Consideremos el conjunto $\mathfrak{F}$ de todas las aplicaciones de U en U, el cual claramente tiene estructura de monoide con unidad para la operación determinada por la composición de aplicaciones, y denotemos por $M(U)$ al submonoide unital de $\mathfrak{F}$ generado por el conjunto $Y=\{\ell_u,r_u : u\in U\}$, donde, para cada u en U, ℓ_u y r_u designan las aplicaciones de U en U definidas por

$$\ell_u(v)=uv \quad \text{y} \quad r_u(v)=vu$$

para todo v en U. Recordemos que el monoide unital libre $F(Y)$ generado por Y es el conjunto de todas las palabras asociativas que se pueden construir con los elementos de Y dotado con el producto determinado por la juxtaposición de palabras, y donde se le da cabida a la palabra vacía, la cual juega el papel de la unidad, por lo que dicha palabra será denotada por **1**. Por consiguiente, aparte de la novedad de la palabra vacía a la que debe asignársele "grado" cero, los elementos de $F(Y)$ se describen de manera análoga a como lo hicimos con los elementos de U si bien ahora no se han de utilizar paréntesis. En consecuencia, los elementos de $F(Y)$ de grado $n\in\mathbb{N}$ son de la forma $s_1s_2\ldots s_n$ con $s_1,s_2,\ldots,s_n\in Y$. La propiedad universal de $F(Y)$ nos va a permitir visualizar cada elemento de $F(Y)$ como una concreta aplicación de U en U. A saber, consideremos el único homomorfismo unital ζ de $F(Y)$ en $M(U)$ determinado por la aplicación inclusión de Y en $M(U)$. Puesto que la imagen de ζ es un submonoide de $M(U)$ que contiene a todos sus generadores se sigue que ζ es sobreyectivo. Veremos dentro de un momento que de hecho ζ es biyectivo.

Dada una palabra no asociativa $v\in U$, diremos que $\mathbf{p}\in F(Y)$ toma *valor exclusivo* en v si se verifica que la igualdad $\zeta(\mathbf{p})(v)=\zeta(\mathbf{q})(v)$ para $\mathbf{q}\in F(Y)$, implica $\mathbf{p}=\mathbf{q}$. Denotaremos por $\mathfrak{E}(v)$ al subconjunto de $F(Y)$ formado por todos aquellos elementos de $F(Y)$ que toman valor exclusivo en v. Puesto que para todo $u\in U$ se tiene que las palabras producto uv y vu tienen grado estrictamente mayor que el de v, se sigue inmediatamente que para todo $\mathbf{q}\in F(Y)\backslash\{\mathbf{1}\}$ se verifica que $\zeta(\mathbf{q})(v)\neq v$, y por tanto $\mathbf{1}\in\mathfrak{E}(v)$. Dadas dos palabras no asociativas u y v, diremos que v es una *subpalabra de* u o que u *contine como subpalabra a* v si existe p en $M(U)$ tal que $u=p(v)$.

Lema II.3.6. *Supónganse fijada* v *en* U. *Entonces, para* $u\in U$ *equivalen:*

i) u *no contiene a* v *como subpalabra.*

ii) $\ell_u\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$ *para todo* $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$.

iii) $\ell_u\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$ *para algún* $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$.

Análogo enunciado se obtiene cambiando ℓ_u *por* r_u.

Demostración. i)⇒ii).- Supongamos que $u\in U$ es tal que no contiene como subpalabra a v y que $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$ y $\mathbf{q}\in F(Y)$ son tales que $\zeta(\ell_u\mathbf{p})(v)=\zeta(\mathbf{q})(v)$. Puesto que $\mathbf{1}\in\mathfrak{E}(v)$ se sigue de la anterior igualdad que necesariamente $\mathbf{q}\neq\mathbf{1}$. En consecuencia $\mathbf{q}=s_1s_2...s_n$ para convenientes $s_1,s_2,...,s_n\in Y$, y por tanto la anterior igualdad se puede escribir en la forma $\ell_u(\zeta(\mathbf{p})(v))=s_1(\zeta(s_2...s_n)(v))$. Puesto que v no es una subpalabra de u se sigue de la Proposición II.3.5 que necesariamente $s_1=\ell_u$ y $\zeta(\mathbf{p})(v)=\zeta(s_2...s_n)(v)$. Como $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$ se sigue que $\mathbf{p}=s_2...s_n$, y por tanto $\mathbf{q}=s_1s_2...s_n=s_1\mathbf{p}=\ell_u\mathbf{p}$.

ii)⇒iii).- Esta implicación es obvia.

iii)⇒i).- Supongamos que $u\in U$ contiene a v como subpalabra, y que existe $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$ tal que $\ell_u\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$. Si $\mathbf{q}\in F(Y)$ es tal que $u=\zeta(\mathbf{q})(v)$, entonces

$$\zeta(\ell_u\mathbf{p})(v)=\zeta(\ell_u)\zeta(\mathbf{p})(v)=\ell_u\zeta(\mathbf{p})(v)=u\zeta(\mathbf{p})(v)=\zeta(\mathbf{q})(v)\zeta(\mathbf{p})(v)=$$
$$r_{\zeta(\mathbf{p})(v)}\zeta(\mathbf{q})(v)=\zeta(r_{\zeta(\mathbf{p})(v)})\zeta(\mathbf{q})(v)=\zeta(r_{\zeta(\mathbf{p})(v)}\mathbf{q})(v),$$

luego $\ell_u\mathbf{p}$ y $r_{\zeta(\mathbf{p})(v)}\mathbf{q}$ son elementos distintos de $F(Y)$ que producen la misma acción sobre v, lo que es una contradicción. ■

Corolario II.3.7. *Supónganse fijada* v *en* U. *Entonces, para* $u\in U$ *equivalen:*

i) u *no contiene a* v *como subpalabra.*

ii) $\ell_u\in\mathfrak{E}(v)$.

iii) $r_u\in\mathfrak{E}(v)$.

Lema II.3.8. *Supónganse fijada* v *en* U. *Si* $\mathbf{p},\mathbf{p}'\in F(Y)$ *son tales que*

$\mathbf{pp'}\in\mathfrak{C}(v)$, *entonces* $\mathbf{p'}\in\mathfrak{C}(v)$.

Demostración. Sean $\mathbf{p},\mathbf{p'}\in F(Y)$ tales que $\mathbf{pp'}\in\mathfrak{C}(v)$. Supuesto que $\mathbf{q}\in F(Y)$ es tal que $\zeta(\mathbf{p'})(v)=\zeta(\mathbf{q})(v)$, se verifica que

$$\zeta(\mathbf{pp'})(v)=\zeta(\mathbf{p})\zeta(\mathbf{p'})(v)=\zeta(\mathbf{p})\zeta(\mathbf{q})(v)=\zeta(\mathbf{pq})(v),$$

y por tanto $\mathbf{pp'}=\mathbf{pq}$ ya que $\mathbf{pp'}\in\mathfrak{C}(v)$. Ahora, teniendo en cuenta que $F(Y)$ es un monoide libre se sigue que $\mathbf{p'}=\mathbf{q}$. ∎

Estamos ahora en condiciones de establecer la siguiente proposición.

Proposición II.3.9.

i) Para cada v *en* U *se verifica que* $\mathfrak{C}(v)$ *es el submonoide unital de* $F(Y)$ *generado por el conjunto*

$$\{\ell_u,r_u \text{ : } u \text{ no contiene como subpalabra a } v\}.$$

ii) Si $\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n$ *son elementos de* $F(Y)$, *entonces existe* v *en* U *tal que* $\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n$ *pertenecen a* $\mathfrak{C}(v)$.

Demostración. i).- Fijemos v en U, y denotemos por $S(v)$ al submonoide unital de $F(Y)$ generado por el subconjunto Z de Y dado por

$$Z=\{\ell_u,r_u \text{ : } u \text{ no contiene como subpalabra a } v\}.$$

Hemos de probar que $\mathfrak{C}(v)$ y $S(v)$ coinciden. Por el lema II.3.6 $s\mathbf{p}$ pertenece a $\mathfrak{C}(v)$ para cualesquiera $s\in Z$ y $\mathbf{p}\in\mathfrak{C}(v)$. En consecuencia, Z está contenido en el conjunto

$$\mathcal{C}=\{\mathbf{p}\in F(Y) \text{ : } \mathbf{pq}\in\mathfrak{C}(v) \text{ siempre que } \mathbf{q}\in\mathfrak{C}(v)\}.$$

Puesto que claramente $\mathcal{C}$ es un submonoide unital de $F(Y)$, se tiene la inclusión $S(v)\subseteq\mathcal{C}$. Como $\mathbf{1}\in\mathfrak{C}(v)$, de la defínción de $\mathcal{C}$ se sigue que también $\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{C}(v)$. En consecuencia, $S(v)\subseteq\mathfrak{C}(v)$. Para probar la inclusión contraria nos bastará con demostrar que todo elemento de $\mathfrak{E}(v)$ distinto de la unidad pertenece a $S(v)$. Dado $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)\setminus\{\mathbf{1}\}$, escribamos $\mathbf{p}=s_1 s_2 \ldots s_n$ para convenientes $s_1, s_2, \ldots, s_n \in Y$. Si $n=1$, entonces por el Corolario II.3.7 se tiene que $s_1 \in Z$, y por tanto $\mathbf{p}=s_1 \in S(v)$. Supuesto $n>1$, se sigue del Lema II.3.8 que $s_2 \ldots s_n \in \mathfrak{E}(v)$ y del Lema II.3.6.iii) que $s_1 \in Z$. Un argumento de inducción finita nos permite concluir que $s_1, s_2, \ldots, s_n \in Z$, y por tanto $\mathbf{p}\in S(v)$.

ii).- Comencemos notando que el conjunto C de los elementos $u\in U$ tales que ℓ_u o r_u intervienen en la escritura de alguno de los $\mathbf{p}_i$ $(1\leq i\leq n)$ tiene cardinal finito. Puesto que cada elemento de U tiene un número finito de subpalabras, se sigue que el conjunto D de todas las subpalabras de todos los elementos de C tiene cardinal finito. Puesto que U tiene cardinal infinito, podemos tomar $v\in U\setminus D$. Ahora, el resultado es consecuencia inmediata de la parte i). ■

Corolario II.3.10. *ζ es un isomorfismo de monoides de $F(Y)$ sobre $M(U)$.*

Demostración. Sean $\mathbf{p},\mathbf{q}\in F(Y)$ tales que $\zeta(\mathbf{p})=\zeta(\mathbf{q})$. Por la parte ii) de la proposición anterior existe $v\in U$ tal que $\mathbf{p}\in\mathfrak{E}(v)$. Puesto que $\zeta(\mathbf{p})=\zeta(\mathbf{q})$, se tiene que $\zeta(\mathbf{p})(v)=\zeta(\mathbf{q})(v)$, y por tanto $\mathbf{p}=\mathbf{q}$. En consecuencia ζ es inyectivo. ■

En lo que sigue $F(Y)$ se identificará vía ζ con $M(U)$, lo que, adelantando acontecimientos, nos permitirá visualizar los elementos del álgebra asociativa unital libre construida a partir de Y como combinaciones lineales formales de elementos de $M(U)$.

Recordemos en este momento los conceptos de álgebra no asociativa libre y de álgebra asociativa unital libre. Fijado un conjunto no vacío arbitrario X, si U denota la mónada de todas las palabras no asociativas con letras en X, se define el *álgebra no asociativa libre* sobre $\mathbb{K}$ construida a partir de X como el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ generado por U dotado con el producto definido por

$$(\sum \alpha_i u_i)(\sum \beta_j v_j)=\sum \alpha_i \beta_j (u_i v_j),$$

para $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$ y $u_i, v_j \in U$.

Así mismo fijado un conjunto no vacío arbitrario Y, si P denota el monoide unital de todas las palabras asociativas construidas a partir de Y, se define el *álgebra asociativa unital libre* generada por Y sobre $\mathbb{K}$ como el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ generado por P con el producto definido por

$$(\sum \alpha_i p_i)(\sum \beta_j q_j)=\sum \alpha_i \beta_j (p_i q_j),$$

para cualesquiera $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$ y $p_i, q_j \in P$. En la siguiente proposición haremos uso de la bien conocida propiedad universal de este álgebra que la caracteriza salvo isomorfismos: Sea $\mathbb{K}\langle Y\rangle$ el álgebra asociativa unital libre sobre $\mathbb{K}$ construida a partir de Y. Si B es un álgebra asociativa unital sobre $\mathbb{K}$ y ϑ es una aplicación de Y en B, entonces ϑ se extiende de manera única a un homomorfismo de álgebras unitales de $\mathbb{K}\langle Y\rangle$ en B.

Proposición II.3.11. *Sea A el álgebra no asociativa libre sobre $\mathbb{K}$ generada a partir de un conjunto no vacío X. Denotemos por U la mónada de todas las palabras no asociativas formadas a partir de los elementos de X, y consideremos el conjunto $Y=\{\ell_u, r_u : u \in U\}$, donde, para todo u en U, ℓ_u y r_u designan las aplicaciones de U en U definidas por*

$$\ell_u(v)=uv \quad \text{y} \quad r_u(v)=vu$$

para todo v en U. Si $\mathcal{S}$ es el único homomorfismo de álgebras unitales de $\mathbb{K}\langle Y\rangle$ en $M(A)$ que extiende a la aplicación de Y en $M(A)$ dada por

$$\ell_u \longmapsto L_u \quad y \quad r_u \longmapsto R_u \quad (u \in U),$$

entonces $\mathcal{S}$ es un isomorfismo de $\mathbb{K}\langle Y\rangle$ sobre $M(A)$.

Demostración. Ya que $\mathcal{S}(Id_U)=Id_A$ y, para $a=\sum \alpha_i u_i$ en A,

$$L_a=\sum \alpha_i L_{u_i}=\mathcal{S}(\sum \alpha_i \ell_{u_i}) \quad \text{y} \quad R_a=\sum \alpha_i R_{u_i}=\mathcal{S}(\sum \alpha_i r_{u_i}),$$

se sigue que la imagen de $\mathcal{S}$ es una subálgebra de $M(A)$ que contiene al operador identidad Id_A y a los operadores de multiplicación L_a y R_a para todo $a\in A$. En consecuencia, $\mathcal{S}$ es sobreyectivo. Para probar la inyectividad de $\mathcal{S}$ obsérvese que el conjunto

$$\{p\in M(U) \ : \ \mathcal{S}(p)(u)=p(u) \text{ para todo } u\in U\}$$

es un submonoide unital de $M(U)$ que contiene a los generadores de $M(U)$, y por tanto se verifica que $\mathcal{S}(p)(u)=p(u)$ para cualesquiera $p\in M(U)$ y $u\in U$. Ahora, supongamos que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i$ es un elemento de $\mathbb{K}\langle Y\rangle$ que pertenece al núcleo de $\mathcal{S}$, y supongamos que dicho elemento se ha escrito de manera que las palabras asociativas $p_1,\ldots,p_n$ en P son distintas. Por la parte ii) de la proposición anterior, podemos tomar $v\in U$ tal que las palabras no asociativas $p_1(v),\ldots,p_n(v)$ sean distintas. Puesto que

$$0=\mathcal{S}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i)(v)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathcal{S}(p_i)(v)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i(v)$$

se tiene que $\alpha_i=0$ $(1\le i\le n)$, y por tanto $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i=0$. ∎

La proposición anterior nos autoriza a que a partir de ahora, el álgebra de multiplicación de un álgebra no asociativa libre se vea, vía el isomorfismo $\mathcal{S}$, como la correspondiente álgebra asociativa unital libre. Recordemos que si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y G es una base prefijada de E, entonces, para cada p con $1\le p\le+\infty$, la ℓ_p-norma clásica en E (relativa a G) está definida por

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\|_p=\begin{cases}\left[\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right]^{1/p} & \text{si } 1\le p<+\infty \\ Max\{|\alpha_i| \ : \ 1\le i\le n\} & \text{si } p=+\infty\end{cases},$$

para cualesquiera $\alpha_i\in\mathbb{K}$ y $g_i\in G$. Cuando hablemos de las normas clásicas sobre las álgebras no asociativas libres (resp. álgebras asociativas unitales libres) construidas a partir de un conjunto "abecedario" entenderemos siempre que dichas normas son relativas a la base canónica antes descrita, a saber: El conjunto de todas las palabras no asociativas formadas con letras del "abecedario" (resp. el conjunto determinado por la palabra vacía y todas las palabras asociativas formadas con letras del "abecedario").

Teorema II.3.12. *Sea A el álgebra no asociativa libre sobre $\mathbb{K}$ generada por un conjunto no vacío X, y para $1\leq p\leq +\infty$ considérese en A la ℓ_p-norma $\|.\|_p$. Entonces $(A,\|.\|_p)$ es un álgebra t.m.p. si, y sólamente si, $p=1$. Además, cuando $p=1$ la correspondiente norma de operadores en $M(A)$ es también la norma clásica ℓ_1 y se verifica que*

$$\|W_{F,a}\|_1=\|F\|_1\|a\|_1 \qquad \text{(II.13)}$$

para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A.

Demostración. Puesto que, para cada p con $1\leq p\leq +\infty$, el álgebra normada $(A,\|.\|_p)$ es absolutamente valuada, se sigue que el conjunto

$$\{F\in M(A)\ :\ F \text{ es una isometría sobre } (A,\|.\|_p)\}$$

es un submonoide unital de $M(A)$ que contiene a L_u y a R_u para todo $u\in U$. En consecuencia, todos los elementos de $M(U)$ son isometrías en $(A,\|.\|_p)$.

Demostraremos en primer lugar que $(A,\|.\|_1)$ es un álgebra t.m.p. satisfaciendo (II.13). Con ese propósito empezaremos describiendo la norma de operadores $\|.\|_{oper(1)}$ sobre el álgebra de multiplicación de $(A,\|.\|_1)$. Es claro que para $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i$ en $M(A)$ se verifica que

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i\|_{oper(1)}\leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\|p_i\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|.$$

Por otra parte, por la Proposición II.3.9.ii) podemos elegir v en U tal que las palabras no asociativas $p_1(v),\ldots,p_n(v)$ sean distintas, y por tanto

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \|_{oper(1)} \geq \| (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i)(v) \|_1 = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i (v) \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| .$$

En consecuencia

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \|_{oper(1)} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ,$$

y por tanto la norma $\|.\|_{oper(1)}$ en $M(A)$ es de nuevo la norma clásica ℓ_1.

Ahora, consideremos $F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$ en $M(A)$ y $a = \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j$ en A. De nuevo por la Proposición II.3.9.ii) podemos elegir v en U tal que las nm palabras no asociativas $p_i L_{u_j}(v)$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ sean distintas, y por tanto

$$\|W_{F,a}\|_1 \geq \|W_{F,a}(R_v)\|_1 = \|F(av)\|_1 = \| \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_i \beta_j p_i (u_j v) \|_1 = \| \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_i \beta_j (p_i L_{u_j})(v) \|_1 =$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} |\alpha_i \beta_j| = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|)(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j|) = \|F\|_1 \|a\|_1 ,$$

como se deseaba.

Finalmente demostraremos que, para $1 < p \leq +\infty$, $(A, \|.\|_p)$ no es t.m.p. Fijemos u en U, y consideremos para cada número natural n el operador $F_n := \sum_{k=1}^{n} L_u^{n-k} R_{u^k}$, donde $u^k := L_u^{k-1}(u)$ y $L_u^0 := Id_A$. Nótese que

$$\|F_n\|_{oper(p)} = \| \sum_{k=1}^{n} L_u^{n-k} R_{u^k} \|_{oper(p)} \leq \sum_{k=1}^{n} \|L_u^{n-k} R_{u^k}\|_{oper(p)} = n,$$

y

$$\|F_n\|_{oper(p)} \geq \|F_n(u)\|_p = \| \sum_{k=1}^{n} L_u^{n-k} R_{u^k}(u) \|_p = \| \sum_{k=1}^{n} u^{n+1} \|_p = \|nu^{n+1}\|_p = n,$$

luego $\|F_n\|_{oper(p)} = n$. Supuesto que $a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$ es un elemento de A tal que $u_i \neq u$ $(1 \leq i \leq m)$ entonces

$$F_n(a) = \left[\sum_{k=1}^{n} L_u^{n-k} R_{u^k} \right] \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \right) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \alpha_i L_u^{n-k} R_{u^k}(u_i),$$

y, puesto que claramente las palabras no asociativas $L_u^{n-k} R_{u^k}(u_i)$ $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq m)$ son distintas, se sigue que para $1 < p < +\infty$

$$\|F_n(a)\|_p^p = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} |\alpha_i|^p = n \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^p = n \|a\|_p ,$$

mientras que para $p=\infty$

$$\|F_n(a)\|_\infty=\text{Máx}\{|\alpha_i| \ : \ 1\le i\le m\}=\|a\|_\infty .$$

Resumiendo, para todo elemento $a=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$ de A tal que $u_i\ne u$ $(1\le i\le m)$ se verifica que

$$\|F_n(a)\|_p=t_n\|a\|_p ,$$

donde

$$t_n=\begin{cases} n^{1/p} & \text{si} \quad 1<p<+\infty \\ 1 & \text{si} \quad p=+\infty . \end{cases}$$

Fijemos $v\in U$ que no sea subpalabra de u. Puesto que para todo $G\in M(A)$ se verifica que $G(v)$ es una combinación lineal de palabras distintas de u, se sigue de lo anterior que

$$\|F_n(G(v))\|_p=t_n\|G(v)\|_p ,$$

y por tanto

$$\|W_{F_n,v}(G)\|_p=\|F_n(G(v))\|_p=t_n\|G(v)\|_p\le t_n\|G\|_{\text{oper}(p)} .$$

En consecuencia, $\|W_{F_n,v}\|_p\le t_n$, donde estamos denotando por $\|W_{F_n,v}\|_p$ a la norma del operador $W_{F_n,v}:(M(A),\|.\|_{\text{oper}(p)})\longrightarrow(A,\|.\|_p)$. Supuesta la existencia de un real positivo K tal que $\|W_{F,a}\|_p\ge K\|F\|_{\text{oper}(p)}\|a\|_p$ para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A, entonces para todo número natural n se verifica que $\|W_{F_n,v}\|_p\ge K\|F_n\|_{\text{oper}(p)}\|v\|_p$, y por tanto $t_n\ge Kn$, lo cual es imposible. ■

CAPITULO III

ALGEBRAS DE COCIENTES CON EVALUACION CONTINUA

En el presente capítulo abordamos el problema de buscar un álgebra de cocientes analítica que sea apropiada para las álgebras asociativas t.m.p. en el sentido de que desempeñe un papel análogo al del álgebra acotada de cocientes en la clase de las álgebras asociativas ultraprimas.

En la Sección 1 introducimos las álgebras de cocientes con evaluación continua para un álgebra asociativa semiprima normada. Como su propio nombre indica, dichas álgebras están formadas por aquellos cocientes que producen evaluación continua, y su presentación se hará en completa analogía con la habitual para el álgebra acotada de cocientes que, como es bien sabido, está constituida por los cocientes que producen multiplicación continua. El punto de partida es un resultado de naturaleza puramente algebraica que nos permite afirmar que las inclusiones entre álgebras de cocientes de un álgebra semiprima A se transfieren a las álgebras de multiplicación y precisamente dichas inclusiones para las álgebras de multiplicación se reconocen vía la evaluación en los elementos de A.

La Sección 2 comienza estableciendo que el álgebra $BL(H)$ de los operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert H es el álgebra acotada de cocientes de cualquier norma-ideal en H. El principal resultado es la determinación de las álgebras de cocientes con evaluación continua del ideal $KL(H)$ de los operadores compactos y de los

p-ideales de Schatten $\mathcal{C}_p(H)$ $(1\leq p<\infty)$. Resultará que $BL(H)$ es el álgebra de cocientes con evaluación continua de $KL(H)$, mientras que los p-ideales de Schatten $\mathcal{C}_p(H)$ permanecen "cerrados" por paso a álgebras de cocientes con evaluación continua.

En la Sección 3 llevamos a cabo el estudio de las álgebras de cocientes con evaluación continua para las álgebras asociativas en la clase de las álgebras totalmente primas y especialmente en la clase de las álgebras t.m.p. Nuestros resultados nos permitirán presentar la clausura central normada para un álgebra asociativa totalmente prima. También daremos un procedimiento que permite acceder al álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua sin necesidad de pasar por las álgebras laterales y que se muestra especialmente útil en contexto t.m.p. El principal resultado establece que el álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua $Q^{s}_{be}(A)$ de un álgebra asociativa t.m.p. A es una álgebra t.m.p., que es una extensión topológica de A, con álgebra de multiplicación así mismo extensión topológica de $M(A)$, y que contiene continuamente a cualquier álgebra normada de cocientes que verifique estas propiedades.

1. Algebras de cocientes con evaluacion continua de un álgebra asociativa semiprima normada.

Empecemos recordando la presentación abstracta del álgebra derecha de cocientes de un álgebra asociativa semiprima A. El *álgebra derecha de cocientes* de A, denotada aquí por $Q^r(A)$, se define como el álgebra maximal en el conjunto de las álgebras Q que extienden a A y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Para cada $q\in Q$ existe un ideal esencial I de A tal que $qI\subseteq A$.

(ii) Si $q\in Q$ es tal que $qI=0$ para algún ideal esencial I de A, entonces $q=0$.

Supuesto que $(A,\|.\|)$ es un álgebra asociativa semiprima normada, parece deseable la existencia de una norma de álgebra $|.|$ en $Q^r(A)$ de manera que la inclusión de $(A,\|.\|)$ en $(Q^r(A),|.|)$ sea topológica. Sin embargo, existen ejemplos sencillos que muestran que esto no siempre ocurre. Así, consideremos la H*-álgebra $(\mathcal{C}_2(H),\|.\|_2)$ de todos los operadores de Hilbert-Schmidt sobre el espacio de Hilbert H que, como consecuencia de nuestra próxima Proposición III.2.2, tiene por álgebra derecha de cocientes al álgebra $L(H)$ de todos los operadores lineales en H. Supongamos la existencia de una norma de álgebra $|.|$ en $L(H)$ tal que la inclusión de $(\mathcal{C}_2(H),\|.\|_2)$ en $(L(H),|.|)$ sea topológica, y supongamos que α y β son constantes positivas tales que

$$\alpha|T|\leq\|T\|_2\leq\beta|T| \quad \text{para todo } T \text{ en } \mathcal{C}_2(H).$$

Si para $x,y\in H$ denotamos por $x\otimes y$ al operador en H de rango menor o igual que 1 definido por

$$(x\otimes y)(z)=\langle z,y\rangle x \quad \text{para todo } z\in H,$$

se comprueba fácilmente que $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|$ y que $F(x\otimes y)=F(x)\otimes y$ para todo $F\in L(H)$. Además, para $F\in L(H)$ y $x\in H$ con $\|x\|=1$ se tiene que

$$\|F(x)\|=\|F(x)\otimes x\|_2=\|F(x\otimes x)\|_2\leq\beta|F(x\otimes x)|\leq\beta|F||x\otimes x|\leq\beta\alpha^{-1}|F|\|x\otimes x\|_2=\beta\alpha^{-1}|F|,$$

de donde se deduce inmediatamente la continuidad de F. En consecuencia, $L(H)=BL(H)$, y por tanto H ha de ser finito-dimensional.

El hecho antes comentado sugiere que, en ambiente analítico, el estudio del álgebra derecha de cocientes deba enfocarse a traves de la consideración de subálgebras del álgebra derecha de cocientes que sean (semi)normables y que al menos en ciertas clases de álgebras semiprimas normadas respondan a un "apropiado" concepto de álgebra derecha analítica de cocientes. En este sentido conviene tener presente el trabajo de M. Mathieu acerca del álgebra acotada de cocientes para álgebras asociativas ultraprimas (véanse [**32**; Capítulo 2], [**33**] y [**34**]).

Definición III.1.1. Sea A un álgebra asociativa semiprima normada. Para q en $Q^r(A)$ e I ideal de A tales que $qI\subseteq A$, denotemos por L_q^I a la aplicación de I en A dada por $L_q^I(x)=qx$ para todo x en I. El *álgebra acotada derecha de cocientes* de A se define como la subálgebra de $Q^r(A)$ dada por

$$Q_b^r(A)=\{q\in Q^r(A)\ :\ \exists I \text{ ideal esencial } A \text{ t.q. } qI\subseteq A \text{ y } L_q^I \text{ es continua}\}$$

dotada con la seminorma de álgebra

$$|q|_r=\operatorname{Inf}\{\|L_q^I\|\ :\ I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } qI\subseteq A \text{ y } L_q^I \text{ es continua}\}.$$

Análogamente a partir de $Q^l(A)$ (el álgebra izquierda de cocientes de A) se introduce el *álgebra acotada izquierda de cocientes* de A, que se denotará por $(Q_b^l(A),|\cdot|_l)$.

El objetivo de esta sección es presentar el álgebra derecha (semi)normada de cocientes que aparece al reemplazar los cocientes que producen multiplicación izquierda continua por aquellos que producen evaluación continua. El punto de partida es el siguiente resultado de naturaleza puramente algebraica que es análogo al recogido en el Corolario I.1.5 para la clausura central.

Proposición III.1.2. *Sea A un álgebra asociativa semiprima y sean Q y Q' subálgebras de $Q^r(A)$ tales que $A\subseteq Q\subseteq Q'\subseteq Q^r(A)$. Entonces para todo F en $M(Q)$ existe un único elemento $\tilde{F}$ en $M(Q')$ tal que*

$$\tilde{F}(a)=F(a) \quad \text{para todo } a \text{ en } A, \tag{III.1}$$

y la aplicación $F\longmapsto\tilde{F}$ es un monomorfismo de álgebras de $M(Q)$ en $M(Q')$.

Demostración. Si consideramos la envolvente unital Q^1 de Q como la subálgebra de $Q^r(A)$ generada por Q y la unidad de $Q^r(A)$, y para cualesquiera p,q en Q^1 designamos por $M^Q_{p,q}$ al operador de multiplicación en Q definido por $M^Q_{p,q}(r)=prq$ para todo r en Q, sabemos que

$$M(Q)=\{\sum_{i=1}^{n} M^Q_{p_i,q_i} \;:\; n\in\mathbb{N},\ p_i,q_i\in Q^1\ (1\leq i\leq n)\}.$$

Igual notación seguiremos para Q'. Dado $F\in M(Q)$, tomemos $n\in\mathbb{N}$ y $p_i,q_i\in Q^1$ $(1\leq i\leq n)$ tales que $F=\sum_{i=1}^{n} M^Q_{p_i,q_i}$. Es claro que el elemento de $M(Q')$ dado por $F':=\sum_{i=1}^{n} M^{Q'}_{p_i,q_i}$ verifica que

$$F'(q)=F(q) \quad \text{para todo } q\in Q, \tag{III.2}$$

y por tanto responde a la condición (III.1). Para probar la unicidad de $\tilde{F}$ es suficiente mostrar que para T en $M(Q')$ la condición $T(a)=0$ para todo a en A, implica que $T=0$. Sea T en $M(Q')$ tal que $T(a)=0$ para todo a en A. Si elegimos n en $\mathbb{N}$ y p_i,q_i en Q'^1 $(1\leq i\leq n)$ tales que $T=\sum_{i=1}^{n} M^{Q'}_{p_i,q_i}$, entonces $\phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} p_i\mathbf{x}q_i$ es una identidad polinomial generalizada satisfecha por A. Por la Proposición I.4.14, $\phi(\mathbf{x})=0$. Para cada $q\in Q'$, la sustitución de **x** por q nos da que $T(q)=0$, y en consecuencia $T=0$. Finalmente, el hecho de que la aplicación $F\longrightarrow\tilde{F}$ es un monomorfismo de álgebras de $M(Q)$ en $M(Q')$ es de verificación inmediata teniendo en cuenta (III.2). ■

La proposición anterior nos permite afirmar que si A es un álgebra asociativa semiprima y Q,Q' son subálgebras de $Q^r(A)$ tales que $A\subseteq Q\subseteq Q'\subseteq Q^r(A)$, entonces la evaluación en los elementos de A determina a las correspondientes inclusiones para las álgebras de multiplicación

$$M(A)\subseteq M(Q)\subseteq M(Q')\subseteq M(Q^r(A)).$$

Este hecho se utilizará en lo que sigue sin mención explícita. Dado q en $Q^r(A)$, si queremos que la aplicación evaluación $E_q:M(A)\longrightarrow Q^r(A)$ definida por $E_q(F)=F(q)$ para todo $F\in M(A)$ sea A-valuada, nos vemos obligados a restringirla al conjunto $D=\{F\in M(A)\ :\ F(q)\in A\}$. Es claro que D es un ideal izquierdo de $M(A)$ y que si I es un ideal de A tal que $qI\subseteq A$, entonces el conjunto $\{R_x\ :\ x\in I\}$ está contenido en D. Denotaremos por I^r al ideal de $M(A)$ generado por el conjunto $\{R_x\ :\ x\in I\}$. El siguiente resultado nos permite afirmar que I^r está incluido en D.

Lema III.1.3. *Sea A un álgebra asociativa. Si I es un ideal de A, entonces I^r coincide con los ideales izquierdo y derecho de $M(A)$ generados por el conjunto $\{R_x\ :\ x\in I\}$, y puede describirse como sigue*

$$I^r=\{\sum_{i=1}^{n} M_{a_i,x_i}\ :\ n\in\mathbb{N},\ a_i\in A^1,\ x_i\in I\ (1\leq i\leq n)\}.$$

Demostración. Sea I un ideal de A y sea

$$\mathcal{P}=\{\sum_{i=1}^{n} M_{a_i,x_i}\ :\ n\in\mathbb{N},\ a_i\in A^1,\ x_i\in I\ (1\leq i\leq n)\}.$$

Puesto que para a,b,c,d en A^1 se verifica que $M_{a,b}M_{c,d}=M_{ac,db}$ se sigue inmediatamente que $\mathcal{P}$ es un ideal bilátero de $M(A)$. Además, escribiendo

$R_x=M_{1,x}$ y $M_{a,x}=L_aR_x=R_xL_a$ para $x\in I$ y $a\in A^1$, se deduce inmediatamente que el conjunto $\{R_x : x\in I\}$ está contenido en $\mathcal{P}$ y que $\mathcal{P}$ está contenido simultaneamente en los ideales izquierdo y derecho de $M(A)$ generados por $\{R_x : x\in I\}$. De aquí se obtiene claramente el enunciado. ∎

Lema III.1.4. *Sea A un álgebra asociativa semiprima. Para I,J ideales de A y q en $Q^r(A)$ tales que $qJ\subseteq A$ se verifica que $(JI)^rR_q\subseteq I^r$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del lema anterior y del hecho de que para cualesquiera que sean $a\in A^1$, $x\in I$, $y\in J$ se verifica que

$$M_{a,yx}R_q=M_{a,qyx}\in I^r.$$

∎

Dado q en el álgebra $Q^r(A)$ de cocientes derechos de un álgebra asociativa semiprima A y dado I ideal de A tal que $qI\subseteq A$, se sigue del lema III.1.3 que I^r está contenido en el conjunto $D=\{F\in M(A) : F(q)\in A\}$ por lo que podemos considerar la aplicación A-valuada $E_q^{I^r}$ obtenida por restricción a I^r de la aplicación evaluación E_q.

Teorema III.1.5. *Sea A un álgebra asociativa semiprima normada. Entonces*

$$Q^r_{be}(A)=\{q\in Q^r(A) : \exists I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } qI\subseteq A \text{ y } E_q^{I^r} \text{ es continua}\}$$

es una subálgebra de $Q^r(A)$, y $|\cdot|_r : Q^r_{be}(A)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$|q|_r=\operatorname{Inf}\{\|E_q^{I^r}\| : I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } qI\subseteq A \text{ y } E_q^{I^r} \text{ es continua}\}$$

es una seminorma de álgebra. Además $Q^r_{be}(A)$ está contenida en $Q^r_b(A)$ y contiene a A, y estas inclusiones son continuas. Concretamente, $|a|_r\leq\|a\|$ para todo a en A, y $\|q\|_r\leq|q|_r$ para todo q en $Q^r_{be}(A)$. También se verifica que la inclusión de $M(A)$ en $M(Q^r_{be}(A))$ es continua; concretamente, $|F|_r\leq\|F\|$ para todo F en $M(A)$.

Demostración. Para $q\in Q_{\mathrm{be}}^{\mathrm{r}}(A)$ es claro que $|q|_{\mathrm{r}}\geq 0$, así como que $|\alpha q|_{\mathrm{r}}=|\alpha|\,|q|_{\mathrm{r}}$ para $\alpha=0$. Supongamos que $\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$. Si I es un ideal esencial de A tal que $qI\subseteq A$ y $E_q^{I^{\mathrm{r}}}$ es continua, entonces $(\alpha q)I\subseteq A$ y $E_{\alpha q}^{I^{\mathrm{r}}}=\alpha E_q^{I^{\mathrm{r}}}$ es continua y $\|E_{\alpha q}^{I^{\mathrm{r}}}\|=|\alpha|\,\|E_q^{I^{\mathrm{r}}}\|$. Luego $\alpha q\in Q_{\mathrm{be}}^{\mathrm{r}}(A)$ y $|\alpha q|_{\mathrm{r}}\leq|\alpha|\,\|E_q^{I^{\mathrm{r}}}\|$. De aquí se sigue que $|\alpha q|_{\mathrm{r}}\leq|\alpha|\,|q|_{\mathrm{r}}$. Finalmente, escribiendo $q=\alpha^{-1}(\alpha q)$, se deduce de lo anterior que $|q|_{\mathrm{r}}\leq|\alpha|^{-1}|\alpha q|_{\mathrm{r}}$. Por tanto $|\alpha q|_{\mathrm{r}}=|\alpha|\,|q|_{\mathrm{r}}$.

Sean p,q en $Q_{\mathrm{be}}^{\mathrm{r}}(A)$, y considérense ideales esenciales I,J de A tales que $pI\subseteq A$, $qJ\subseteq A$ y las aplicaciones $E_p^{I^{\mathrm{r}}}$, $E_q^{J^{\mathrm{r}}}$ sean continuas. Nótese que $I\cap J$ es un ideal esencial de A tal que $(p+q)(I\cap J)\subseteq A$, así como que $(I\cap J)^{\mathrm{r}}\subseteq I^{\mathrm{r}}\cap J^{\mathrm{r}}$. Para F en $(I\cap J)^{\mathrm{r}}$ podemos por tanto escribir

$$E_{p+q}^{(I\cap J)^{\mathrm{r}}}(F)=F(p+q)=F(p)+F(q)=E_p^{I^{\mathrm{r}}}(F)+E_q^{J^{\mathrm{r}}}(F),$$

luego

$$\|E_{p+q}^{(I\cap J)^{\mathrm{r}}}(F)\|\leq\|E_p^{I^{\mathrm{r}}}\|\,\|F\|+\|E_q^{J^{\mathrm{r}}}\|\,\|F\|.$$

Por tanto, $E_{p+q}^{(I\cap J)^{\mathrm{r}}}$ es continua y $\|E_{p+q}^{(I\cap J)^{\mathrm{r}}}\|\leq\|E_p^{I^{\mathrm{r}}}\|+\|E_q^{J^{\mathrm{r}}}\|$. En consecuencia, $p+q\in Q_{\mathrm{be}}^{\mathrm{r}}(A)$ y $|p+q|_{\mathrm{r}}\leq\|E_p^{I^{\mathrm{r}}}\|+\|E_q^{J^{\mathrm{r}}}\|$. Ahora, moviendo I y J y tomando ínfimos se obtiene que $|p+q|_{\mathrm{r}}\leq|p|_{\mathrm{r}}+|q|_{\mathrm{r}}$.

De nuevo sean p,q en $Q_{\mathrm{be}}^{\mathrm{r}}(A)$, y considérense ideales esenciales I,J de A tales que $pI\subseteq A$, $qJ\subseteq A$ y $E_p^{I^{\mathrm{r}}}$, $E_q^{J^{\mathrm{r}}}$ sean continuas. Nótese que JI es un ideal esencial de A tal que $pqJI\subseteq A$ y $(JI)^{\mathrm{r}}\subseteq I^{\mathrm{r}}\cap J^{\mathrm{r}}$. Además, por el lema anterior, se verifica que $(JI)^{\mathrm{r}}R_q\subseteq I^{\mathrm{r}}$. Ahora, para F en $(JI)^{\mathrm{r}}$ podemos escribir

$$E_{pq}^{(JI)^{\mathrm{r}}}(F)=F(pq)=FR_q(p)=E_p^{I^{\mathrm{r}}}(FR_q),$$

y así

$$\|E_{pq}^{(JI)^{\mathrm{r}}}(F)\|=\|E_p^{I^{\mathrm{r}}}(FR_q)\|\leq\|E_p^{I^{\mathrm{r}}}\|\,\|FR_q\|. \tag{III.3}$$

Además, para a en A tenemos

$$FR_q(a)=F(aq)=FL_a(q)=E_q^{J^{\mathrm{r}}}(FL_a),$$

luego

$$\|FR_q(a)\|=\|E_q^{J^r}(FL_a)\|\leq\|E_q^{J^r}\|\|FL_a\|\leq\|E_q^{J^r}\|\|F\|\|a\|,$$

y así

$$\|FR_q\|\leq\|E_q^{J^r}\|\|F\|. \qquad \text{(III.4)}$$

De (III.3) y (III.4) se sigue que $E_{pq}^{(JI)^r}$ es continua y $\|E_{pq}^{(JI)^r}\|\leq\|E_p^{I^r}\|\|E_q^{J^r}\|$, y así pq pertenece a $Q_{be}(A)$ y $|pq|_r\leq\|E_p^{I^r}\|\|E_q^{J^r}\|$. De aquí, moviendo I y J y tomando ínfimos, se sigue que $|pq|_r\leq|p|_r|q|_r$.

Para a en A y F en A^r tenemos

$$\|E_a^{A^r}(F)\|=\|F(a)\|\leq\|F\|\|a\|,$$

luego $E_a^{A^r}$ es continua y $\|E_a^{A^r}\|\leq\|a\|$, y así $a\in Q_{be}^r(A)$ y $|a|_r\leq\|a\|$. Sea q en $Q_{be}^r(A)$, y supóngase que I es un ideal esencial de A tal que $qI\subseteq A$ y $E_q^{I^r}$ es continua. Entonces para todo x en I tenemos

$$\|L_q^I(x)\|=\|qx\|=\|E_q^{I^r}(R_x)\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|x\|,$$

por tanto L_q^I es continua y $\|L_q^I\|\leq\|E_q^{I^r}\|$, y así q pertenece a $Q_b^r(A)$ y $\|q\|_r\leq|q|_r$.

Veamos finalmente que la inclusión de $M(A)$ en $M(Q_{be}^r(A))$ es contractiva. Fijemos F en $M(A)$. Si q en $Q_{be}^r(A)$ e I ideal esencial de A son tales que $qI\subseteq A$ y $E_q^{I^r}$ es continua, entonces $F(q)I\subseteq I^rF(q)\subseteq I^r(q)\subseteq A$ y por tanto, para todo G en I^r, podemos escribir $E_q^{I^r}(GF)=GF(q)=E_{F(q)}^{I^r}(G)$, de donde se sigue que $\|E_{F(q)}^{I^r}(G)\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|G\|\|F\|$, y por tanto $E_{F(q)}^{I^r}$ es continua y $\|E_{F(q)}^{I^r}\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|F\|$. Consecuentemente, $|F(q)|_r\leq\|E_q^{I^r}\|\|F\|$ y, variando I y tomando ínfimos, obtenemos $|F(q)|_r\leq|q|_r\|F\|$. De aquí se sigue que $|F|_r\leq\|F\|$. ■

Definición III.1.6. Sea A un álgebra asociativa semiprima normada. El álgebra seminormada $(Q_{be}^r(A),|.|_r)$ descrita en la proposición anterior se llamará el *álgebra derecha de cocientes con evaluación continua* de A. De forma similar, partiendo de $Q^l(A)$, el álgebra izquierda de cocientes de

A, y considerando para cada $q\in Q^1(A)$ y para cada ideal I de A tal que $Iq\subseteq A$ la aplicación evaluación $E_q^{I^1}$ definida en I^1 (el ideal de $M(A)$ generado por el conjunto $\{L_x: x\in I\}$) se obtiene $(Q^1_{be}(A), |\cdot|_1)$, el *álgebra izquierda de cocientes con evaluación continua* de A, que vendrá dada de la siguiente manera:

$$Q^1_{be}(A)=\{q\in Q^1(A)\ :\ \exists I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } Iq\subseteq A \text{ y } E_q^{I^1} \text{ es continua}\}$$

y

$$|q|_1=\mathrm{Inf}\{\|E_q^{I^1}\|\ :\ I \text{ ideal esencial de } A \text{ t.q. } Iq\subseteq A \text{ y } E_q^{I^1} \text{ es continua}\}.$$

Recordemos de la Sección 1 del Capítulo I que el álgebra simétrica de cocientes de un álgebra asociativa semiprima A, denotada aquí por $Q^s(A)$, puede definirse como el álgebra maximal en el conjunto de las álgebras Q que son extensión de A y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Para cada $q\in Q$ existe un ideal esencial I de A tal que $qI+Iq\subseteq A$.

(ii) Si $q\in Q$ es tal que $qI=0$ para algún ideal esencial I de A, entonces $q=0$.

Es fácil ver que $Q^s(A)=Q^r(A)\cap Q^1(A)$. Expresión esta que sugiere el camino a seguir para introducir versiones analíticas del álgebra simétrica de cocientes. Así, recordemos la siguiente definición que aparece usualmente en la literatura. Para un álgebra asociativa semiprima normada A, se define $(Q^s_b(A),\|\cdot\|_s)$, el *álgebra acotada simétrica de cocientes* de A, por

$$Q^s_b(A)=Q^r_b(A)\cap Q^1_b(A) \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_s=\text{Máx}\{\|\cdot\|_r,\|\cdot\|_1\}.$$

En completa analogía, definimos ahora el álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua.

Definición III.1.7. Sea A un álgebra asociativa semiprima normada. El *álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua* de A se define como el álgebra seminormada $(Q^s_{be}(A),|.|_s)$ dada por

$$Q^s_{be}(A)=Q^r_{be}(A)\cap Q^l_{be}(A) \quad \text{y} \quad |.|_s=\text{Máx}\{|.|_r,|.|_l\}.$$

Puesto que las álgebras laterales de cocientes con evaluación continua están contenidas contractivamente en las correspondientes álgebras acotadas (Teorema III.1.5) se sigue que también $Q^s_{be}(A)$ está contenida contractivamente en $Q^s_b(A)$.

2. Algebras de cocientes con evaluacion continua del ideal de los operadores compactos y de los ideales Schatten.

El cometido de esta sección es la determinación de las álgebras de cocientes con evaluación continua del ideal de los operadores compactos y de los ideales de Schatten en un espacio de Hilbert H. Puesto que tales ideales son de hecho norma-ideales, comenzaremos determinando las álgebras acotadas de cocientes de los norma-ideales en H. Probaremos que $BL(H)$ es el álgebra acotada de cocientes de cualquier norma-ideal en H. El principal resultado establece que $BL(H)$ es el álgebra de cocientes con evaluación continua del ideal de los operadores compactos, así como que los p-ideales de Schatten permanecen "cerrados" por paso a álgebras de cocientes con evaluación continua.

Definición III.2.1. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $(BL(H),\|.\|_{\infty})$ el álgebra de todos los operadores lineales y continuos en H con la norma de operadores. Un *norma-ideal* en H es un ideal A de $BL(H)$ dotado con una norma $\|.\|$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|$ para cualesquiera x,y en H (propiedad-cruz),

ii) $\|FTG\|\leq\|F\|_{\infty}\|T\|\|G\|_{\infty}$ para cualesquiera F,G en $BL(H)$ y T en A.

De estas condiciones, para T en A y x,y en H con $\|x\|=\|y\|=1$, se sigue que

$$\|T(x)\|=\|T(x)\otimes y\|=\|T(x\otimes y)\|\leq\|T\|\|x\otimes y\|=\|T\|.$$

Por tanto $\|T\|_{\infty}\leq\|T\|$, y utilizando de nuevo ii) se concluye que A es un álgebra normada.

Con la intención de recoger la bien conocida determinación del álgebra derecha de cocientes de las álgebras primas con zócalo no nulo vamos a recordar algunos resultados y a introducir alguna notación. El *zócalo* de un álgebra asociativa semiprima se define como la suma de los ideales izquierdos minimales del álgebra (la cual coincide con la suma de los ideales derechos minimales). Como referencia obligada para la teoría de zócalo nos remitimos al libro de Jacobson [27]. Un *apareamiento* sobre un álgebra asociativa de división Δ es una terna $(X,Y,<.,.>)$, donde X es un espacio vectorial izquierdo sobre Δ, Y es un espacio vectorial derecho sobre Δ y $<.,.>:X\times Y \longrightarrow \Delta$ es una aplicación Δ-bilineal no-degenerada. Es usual denotar por $L_Y(X)$ al álgebra de todos los operadores (necesariamente Δ-lineales) T en X que tienen un ádjunto con respecto a $<.,.>$, esto es, existe un operador (necesariamente único) $T^{\#}$ en Y tal que $<T(x),y>=<x,T^{\#}(y)>$ para cualesquiera $x\in X$, $y\in Y$. También es usual denotar por $FL_Y(X)$ al conjunto de todos los operadores en $L_Y(X)$ que tienen rango finito sobre Δ. Las álgebras asociativas primas con zócalo no nulo están perfectamente descritas por el siguiente Teorema: *Un álgebra asociativa A sobre K es prima con zócalo no nulo si, y sólamente si, existe una K-algebra de división Δ y un apareamiento $(X,Y,<.,.>)$ sobre Δ tal que A es una subálgebra de $L_Y(X)$ conteniendo a $FL_Y(X)$. En tal caso, el zócalo de A es igual a $FL_Y(X)$.*

El siguiente resultado forma parte del Teorema 4.3.7 de [3].

Proposición III.2.2. *Si $(X,Y,<.,.>)$ es un apareamiento sobre el álgebra de división Δ y A es una subálgebra de $L_Y(X)$ que contiene a $FL_Y(X)$, entonces el álgebra derecha de cocientes de A, $Q^r(A)$, se identifica con el álgebra $L_\Delta(X)$ de todos los operadores Δ-lineales en X.*

Sea $(A,\|.\|)$ un norma-ideal en el espacio de Hilbert H. Si denotamos por H^c al *espacio de Hilbert conjugado* de H, esto es al espacio de Hilbert que se obtiene cuando en H se reemplazan el producto número-vector y el producto escalar por los siguientes

$$\alpha.x:=\bar{\alpha}x \qquad \text{y} \qquad <x,y>_c:=<y,x>$$

para cualesquiera $\alpha\in\mathbb{K}$ y $x,y\in H$, es claro entonces que el producto escalar en H puede verse como una aplicación $\mathbb{K}$-bilinear no-degenerada de $H\times H^c$ en $\mathbb{K}$, y por tanto $(H,H^c,<.,.>)$ es un apareamiento sobre $\mathbb{K}$. Es claro que si $T\in BL(H)$ y T^* denota el adjunto hilbertiano de T, entonces $T\in L_{H^c}(H)$ y $T^\#$ viene dado por $T^\#(x)=T^*(x)$ para todo $x\in H$. Una aplicación inmediata del Teorema de la gráfica cerrada pone de relieve la veracidad del recíproco. En consecuencia, $L_{H^c}(H)=BL(H)$, y por tanto

$$FL_{H^c}(H)=FL(H)(=\{\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\ :\ n\in\mathbb{N},\ x_i,y_i\in H\ (1\le i\le n)\}).$$

Si A es una subálgebra (resp. ideal izquierdo, ideal derecho, ideal) de $BL(H)$, es inmediato que

$$A^*:=\{T^*\ :\ T\in A\}$$

es una subálgebra (resp. ideal derecho, ideal izquierdo, ideal) de $BL(H)$ y $*:A\longrightarrow A^*$ es un anti-isomorfismo de álgebras. Si adicionalmente $\|.\|$ es una norma de álgebra en A, es claro que $\|.\|^*$ definida por

$$\|S\|^*=\|S^*\| \quad \text{para todo } S \text{ en } A^*$$

es una norma de álgebra en A^*. Al álgebra normada $(A^*,\|.\|^*)$ la notaremos $(A,\|.\|)^*$ y la llamaremos la *adjunta* de $(A,\|.\|)$. A partir de la isometría de la adjunción de operadores y de la igualdad

$$(x\otimes y)^*=y\otimes x \quad \text{para cualesquiera } x,y\in H,$$

se sigue inmediatamente que si $(A,\|.\|)$ es un norma-ideal en H, entonces también su álgebra adjunta es un norma-ideal en H.

El primer importante resultado de esta sección establece que $BL(H)$ coincide con cualquiera de las diferentes álgebras acotadas de cocientes de todo norma-ideal en H.

Teorema III.2.3. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(A,\|.\|)$ un norma-ideal en H. Entonces*

$$(Q_b^r(A),\|\!|.|\!\|_r)=(Q_b^l(A),\|\!|.|\!\|_l)=(Q_b^s(A),\|\!|.|\!\|_s)=(BL(H),\|.\|_\infty).$$

Demostración. Puesto que $(H,H^c,<.,.>)$ es un apareamiento sobre $\mathbb{K}$ y A es una subálgebra de $L_{H^c}(H)=BL(H)$ que contiene a $FL_{H^c}(H)=FL(H)$ se sigue de la proposición anterior que $Q^r(A)=L(H)$. Puesto que para T en $BL(H)$ y F en $FL(H)$ tenemos

$$\|L_T^{FL(H)}(F)\|=\|TF\|\leq\|T\|_\infty\|F\|,$$

se sigue que $L_T^{FL(H)}:(FL(H),\|.\|)\longrightarrow(A,\|.\|)$ es continuo y $\|L_T^{FL(H)}\|\leq\|T\|_\infty$. Luego $BL(H)\subseteq Q_b^r(A)$ y $\|\!|T|\!\|_r\leq\|T\|_\infty$ para todo T en $BL(H)$. Para demostrar la inclusion contraria, empecemos notando que dado que $FL(H)$ es el ideal mínimo de A ocurre que $Q_b^r(A)$ es la subálgebra de $L(H)$ formada por todos los operadores $T\in L(H)$ para los que $L_T^{FL(H)}:(FL(H),\|.\|)\longrightarrow(A,\|.\|)$ es continuo, y que de hecho $\|\!|T|\!\|_r=\|L_T^{FL(H)}\|$ para todo $T\in Q_b^r(A)$. Ahora bien, dado $T\in Q_b^r(A)$ tenemos que para todo x en H se verifica

$$\|T(x)\|\|x\|=\|T(x)\otimes x\|=\|T(x\otimes x)\|=\|L_T^{FL(H)}(x\otimes x)\|\leq\|L_T^{FL(H)}\|\|x\otimes x\|=\|L_T^{FL(H)}\|\|x\|^2,$$

y por lo tanto $T\in BL(H)$ y $\|T\|_\infty\leq\|\!|T|\!\|_r$. Luego $(Q_b^r(A),\|\!|.|\!\|_r)=(BL(H),\|.\|_\infty)$.

Vamos ahora a ocuparnos de probar que $(Q_b^l(A),\|\!|.|\!\|_l)=(BL(H),\|.\|_\infty)$. Razonando como arriba es claro que para todo $T\in BL(H)$ se verifica que $R_T^{FL(H)}:(FL(H),\|.\|)\longrightarrow(A,\|.\|)$ es continuo y $\|R_T^{FL(H)}\|\leq\|T\|_\infty$. En consecuencia, $BL(H)\subseteq Q_b^l(A)$ y $\|\!|T|\!\|_l\leq\|T\|_\infty$ para todo T en $BL(H)$. Para probar la inclusión contraria notemos que si $q\in Q_b^l(A)$, entonces la aplicación

$\rho:(FL(H),\|.\|)\longrightarrow(A,\|.\|)$ definida por $\rho(F)=Fq$ es lineal continua y verifica que

$$\rho(TF)=T\rho(F) \quad \text{para cualesquiera } F\in FL(H) \text{ y } T\in A.$$

En consecuencia, la aplicación $\lambda:(FL(H),\|.\|^*)\longrightarrow(A^*,\|.\|^*)$ definida por

$$\lambda(F):=\rho(F^*)^* \quad \text{para todo } F\in FL(H)$$

es lineal continua y verifica

$$\lambda(FT)=\lambda(F)T \quad \text{para cualesquiera } F\in FL(H) \text{ y } T\in A^*,$$

luego, por la descripción concreta del álgebra derecha de cocientes, existe $p\in Q_b^r(A^*)$ tal que $\lambda(F)=pF$ para todo $F\in FL(H)$. Por la primera parte de la demostración aplicada al norma-ideal A^* podemos asegurar la existencia de $S\in BL(H)$ tal que

$$\lambda(F)=L_S(F) \quad \text{para todo } F\in FL(H).$$

En consecuencia,

$$\rho(F)=\lambda(F^*)^*=(SF^*)^*=FS^*=R_{S^*}(F) \quad \text{para todo } F\in FL(H),$$

y por tanto $\rho=R_{S^*}^{FL(H)}$. Lo que nos permite afirmar la igualdad $Q_b^l(A)=BL(H)$. Ahora, razonando como en el final de la primera parte de la demostración obtenemos que $\|S\|_\infty\le\|R_{S^*}^{FL(H)}\|$ para todo $S\in BL(H)$, lo que nos permite concluir la igualdad $|\!|\!|.|\!|\!|_l=\|.\|_\infty$.

Finalmente, de la definición de álgebra simétrica acotada de cocientes se sigue de lo anterior que $(Q_b^s(A),|\!|\!|.|\!|\!|_s)=(BL(H),\|.\|_\infty)$. ∎

Sea H un espacio de Hilbert, y sea A una subálgebra de $BL(H)$. Puesto que $*:A\longrightarrow A^*$ es un anti-isomorfismo de álgebras, se sigue inmediatamente que $*$ induce un isomorfismo entre las álgebras de multiplicación que también lo denotaremos por $*$ y que está determinado por la condición

$$\mathcal{T}^*(T)=\mathcal{T}(T^*)^*$$

para cualesquiera $\mathcal{T}$ en $M(A)$ y T en A. Si adicionalmente $\|.\|$ es una norma de álgebra en A, es claro que el isomorfismo $*:M(A,\|.\|)\longrightarrow M(A^*,\|.\|^*)$ es isométrico. Puesto que las álgebras de cocientes con evaluación continua están incluidas en las álgebras acotadas de cocientes, el teorema anterior nos autoriza a considerar las álgebras adjuntas de las álgebras de cocientes con evaluación continua de los norma-ideales.

Proposición III.2.4. *Sea H un espacio de Hilbert y sea A un norma-ideal en H. Entonces*

$$(Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A),|.|_{\mathrm{r}})^*=(Q^{\mathrm{l}}_{\mathrm{be}}(A^*),|.|_{\mathrm{l}}).$$

Demostración. Es claro que si I es un ideal no nulo de A entonces $(I^{\mathrm{r}})^*=(I^*)^{\mathrm{l}}$, así como que para $F\in BL(H)$ se verifica que $FI\subseteq A$ si y sólo si $I^*F^*\subseteq A^*$, y que en tal caso $E_F^{I^{\mathrm{r}}}(\mathcal{T})=E_{F^*}^{(I^*)^{\mathrm{l}}}(\mathcal{T}^*)^*$ para todo $\mathcal{T}\in I^{\mathrm{r}}$. En consecuencia, $\|E_F^{I^{\mathrm{r}}}(\mathcal{T})\|=\|E_{F^*}^{(I^*)^{\mathrm{l}}}(\mathcal{T}^*)\|^*$ para todo $\mathcal{T}\in I^{\mathrm{r}}$. Luego $E_F^{I^{\mathrm{r}}}$ es continua si y sólo si $E_{F^*}^{(I^*)^{\mathrm{l}}}$ es continua, y en tal caso $\|E_F^{I^{\mathrm{r}}}\|=\|E_{F^*}^{(I^*)^{\mathrm{l}}}\|^*$. Consecuentemente, $F\in Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A)$ si y sólo si $F^*\in Q^{\mathrm{l}}_{\mathrm{be}}(A^*)$, y en tal caso $|F|_{\mathrm{r}}=|F^*|_{\mathrm{l}}$. ∎

La proposición anterior hace que en el estudio de las álgebras de cocientes con evaluación continua de los norma-ideales podamos centrar nuestro interés en las álgebras derechas. La siguiente proposición recoge información sobre las propiedades de dichas álgebras.

Proposición III.2.5. *Sean H un espacio de Hilbert y $(A,\|.\|)$ un norma-ideal en H. Entonces $Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A)$ es un ideal derecho de $BL(H)$ y $|.|_{\mathrm{r}}$ es una norma de álgebra satisfaciendo las siguientes propiedades:*

i) $|T|_{\mathrm{r}}\leq\|T\|$ *para todo T en A,*

ii) $\|T\|_{\infty}\leq|T|_{\mathrm{r}}$ *para todo T en $Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A)$,* *iii)* $|x\otimes y|_r = \|x\|\|y\|$ *para cualesquiera* x,y *en* H,

iv) $\|TF\| \le |T|_r \|F\|_\infty$ *para cualesquiera* T *en* $Q^r_{be}(A)$ *y* F *en* $FL(H)$,

v) $|TF|_r \le |T|_r \|F\|_\infty$ *para cualesquiera* T *en* $Q^r_{be}(A)$ *y* F *en* $BL(H)$.

Demostración. Por los Teoremas III.1.5 y III.2.3, $Q^r_{be}(A)$ es una subálgebra de $BL(H)$ que contiene a A, y por tanto a $FL(H)$, y $|\cdot|_r$ es una seminorma de álgebra en $Q^r_{be}(A)$ satisfaciendo i) y ii). Como consecuencia de ii) $|\cdot|_r$ es de hecho una norma en $Q^r_{be}(A)$.

iii).- Utilizando ii) y i) tenemos que para x,y en H

$$\|x\|\|y\| = \|x\otimes y\|_\infty \le |x\otimes y|_r \le \|x\otimes y\| = \|x\|\|y\|,$$

y por tanto $|x\otimes y|_r = \|x\|\|y\|$.

iv). Para T en $Q^r_{be}(A)$ y F en $FL(H)$ tenemos que

$$\|TF\| = \|E_T^{FL(H)^r}(R_F)\| \le \|E_T^{FL(H)^r}\|\|R_F\| \le \|E_T^{FL(H)^r}\|\|F\|_\infty = |T|_r \|F\|_\infty.$$

Finalmente, demostremos que $Q^r_{be}(A)$ es un ideal derecho de $BL(H)$ y que se satisface v). Puesto que $FL(H)$ es un ideal de $BL(H)$, se sigue inmediatamente que para F en $BL(H)$ la inclusión $FL(H)^r R_F \subseteq FL(H)^r$ es válida. Además, teniendo en cuenta que A es un norma-ideal de $BL(H)$, para $\mathcal{T}$ en $FL(H)^r$ y T en A tenemos que

$$\|(\mathcal{T}R_F)(T)\| = \|\mathcal{T}(TF)\| \le \|\mathcal{T}\|\|TF\| \le \|\mathcal{T}\|\|T\|\|F\|_\infty,$$

por tanto $\|\mathcal{T}R_F\| \le \|\mathcal{T}\|\|F\|_\infty$.

Ahora, para $T\in Q^r_{be}(A)$, $F\in BL(H)$ y $\mathcal{T}\in FL(H)^r$ tenemos

$$\|E_{TF}^{FL(H)^r}(\mathcal{T})\| = \|\mathcal{T}(TF)\| = \|\mathcal{T}R_F(T)\| = \|E_T^{FL(H)^r}(\mathcal{T}R_F)\| \le$$

$$\|E_T^{FL(H)^r}\|\|\mathcal{T}R_F\| \le \|E_T^{FL(H)^r}\|\|\mathcal{T}\|\|F\|_\infty,$$

por tanto $E_{TF}^{FL(H)^r}$ es continuo y $\|E_{TF}^{FL(H)^r}\| \le \|E_T^{FL(H)^r}\|\|F\|_\infty$, y así TF pertenece a $Q^r_{be}(A)$ y $|TF|_r \le |T|_r \|F\|_\infty$. ■

Seguidamente vamos a ocuparnos de la determinación de las álgebras de cocientes con evaluación continua del ideal de los operadores compactos.

Definición III.2.6. Sea H un espacio de Hilbert. Un operator T sobre H se dice que es *compacto* si la imagen de la bola unidad cerrada $T(B_H)$ es relativamente compacta en H. El conjunto $KL(H)$ de todos los operadores compactos en H es un ideal cerrado auto-adjunto de $BL(H)$, y por tanto es un norma-ideal auto-adjunto en H. El ideal $FL(H)$ de todos los operadores de rango finito es denso en $(KL(H),\|.\|_\infty)$.

El siguiente enunciado es bien conocido y podría deducirse utilizando el Teorema de Goldstine a partir del hecho de que $BL(H)$ es el bidual de $KL(H)$. Nuestra demostración descansa en los Teoremas del biconmutante de von Neumann y de densidad de Kaplansky.

Proposición III.2.7. *Para todo espacio de Hilbert H se verifica que la bola unidad cerrada $B_{KL(H)}$ de $KL(H)$ es SOT-densa en $B_{BL(H)}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Puesto que el centralizador de $KL(H)$ es igual a $\mathbb{C}Id_H$, se sigue del Teorema del biconmutante de von Neumann (Teorema II.3.2) que $KL(H)$ es SOT-denso en $BL(H)$, y además por el Teorema de densidad de Kaplansky (Teorema II.3.3) que $B_{KL(H)}$ es SOT-densa en $B_{BL(H)}$. Supongamos ahora que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y denotemos por $H_{\mathbb{C}}$ al espacio de Hilbert complexificación de H. Si para cada $T\in BL(H)$, definimos $\phi(T):H_{\mathbb{C}}\longrightarrow H_{\mathbb{C}}$ por

$$\phi(T)(x+iy)=T(x)+iT(y) \quad \text{para cualesquiera } x,y\in H,$$

entonces $\phi(T)\in BL(H_{\mathbb{C}})$ y la aplicación $\phi:BL(H)\longrightarrow BL(H_{\mathbb{C}})$ es un $*$-homomorfismo (real) isométrico tal que $BL(H_{\mathbb{C}})=\phi(BL(H))\oplus i\phi(BL(H))$

(véase por ejemplo [**23**; Proposición 8.2]). A partir de la definición de operador compacto es inmediato verificar que $KL(H_{\mathbb{C}})=\phi(KL(H))\oplus i\phi(KL(H))$. Ahora, dado $T\in B_{BL(H)}$, se tiene que $\phi(T)\in B_{BL(H_{\mathbb{C}})}$, y por la primera parte de la demostración podemos asegurar la existencia de una red $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $B_{KL(H_{\mathbb{C}})}$ SOT-convergente a $\phi(T)$. Si para cada $\lambda\in\Lambda$ $F_\lambda=\phi(T_\lambda)+i\phi(S_\lambda)$ se sigue inmediatamente que $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en $B_{KL(H)}$ que SOT-converge a T. ∎

Teorema III.2.8. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces*

$$(Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(KL(H)),|.|_{\mathrm{r}})=(Q^{\mathrm{l}}_{\mathrm{be}}(KL(H)),|.|_{\mathrm{l}})=(Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{be}}(KL(H)),|.|_{\mathrm{s}})=(BL(H),\|.\|_\infty).$$

Demostración. Demostremos en primer lugar que $(Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(KL(H)),|.|_{\mathrm{r}})=(BL(H),\|.\|_\infty)$. Sabemos por la Proposición III.2.5 que $Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(KL(H))$ es un ideal derecho de $BL(H)$ y $\|T\|_\infty\le|T|_{\mathrm{r}}$ para todo T en $Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(KL(H))$. Veamos que para cada $\mathcal{T}\in M(BL(H))$ se verifica que $\|\mathcal{T}\|_\infty=\|\mathcal{T}^{KL(H)}\|_\infty$, donde estamos denotando por $\mathcal{T}^{KL(H)}$ a la restrición de $\mathcal{T}$ a $KL(H)$. Sea $\mathcal{T}$ en $M(BL(H))$. Fijado un número positivo ε tomemos F en $B_{BL(H)}$ y x en B_H tales que $\|\mathcal{T}\|_\infty-\varepsilon<\|\mathcal{T}(F)(x)\|$. Por la proposición anterior podemos tomar una red $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $B_{KL(H)}$ que SOT-converge a F. Por la SOT-continuidad en cada variable del producto de $BL(H)$ se sigue que $\{\mathcal{T}(F_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es SOT-convergente a $\mathcal{T}(F)$. En consecuencia $\{\|\mathcal{T}(F_\lambda)(x)\|\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\|\mathcal{T}(F)(x)\|$. Luego, existe λ_0 en Λ tal que $\|\mathcal{T}\|_\infty-\varepsilon<\|\mathcal{T}(F_\lambda)(x)\|$ para todo $\lambda\ge\lambda_0$. Por tanto

$$\|\mathcal{T}\|_\infty-\varepsilon<\|\mathcal{T}(F_{\lambda_0})(x)\|\le\|\mathcal{T}(F_{\lambda_0})\|_\infty\le\|\mathcal{T}^{KL(H)}\|_\infty.$$

Ya que ε es arbitrario, se obtiene que $\|\mathcal{T}\|_\infty=\|\mathcal{T}^{KL(H)}\|_\infty$.

Ahora, teniendo en mente la cadena de inclusiones

$$FL(H)^{\mathrm{r}}\subseteq M(KL(H))\subseteq M(BL(H))\subseteq BL(BL(H)),$$

donde estamos denotando por $FL(H)^r$ al ideal de $M(KL(H))$ generado por el conjunto $\{R_F : F\in FL(H)\}$, y lo arriba demostrado se sigue que para T en $BL(H)$ y $\mathcal{T}$ en $FL(H)^r$

$$\|E_T^{FL(H)^r}(\mathcal{T})\|_\infty=\|\mathcal{T}(T)\|_\infty\leq\|\mathcal{T}\|_\infty\|T\|_\infty=\|\mathcal{T}^{KL(H)}\|_\infty\|T\|_\infty,$$

por tanto $E_T^{FL(H)^r}$ es continuo y $\|E_T^{FL(H)^r}\|_\infty\leq\|T\|_\infty$, y así T pertenece a $Q_{be}^r(KL(H))$ y $|T|_r\leq\|T\|_\infty$.

Finalmente, puesto que $(KL(H),\|.\|_\infty)^*=(KL(H),\|.\|_\infty)$ se sigue de la Proposición III.2.4 que también $(Q_{be}^1(KL(H)),|.|_1)=(BL(H),\|.\|_\infty)$, y por tanto $(Q_{be}^s(KL(H)),|.|_s)=(BL(H),\|.\|_\infty)$. ■

Nuestro objetivo final en esta sección es la determinación de las álgebras de cocientes con evaluación continua de los p-ideales de Schatten los cuales son ejemplos relevantes de norma-ideales en un espacio de Hilbert. Ahora, recogemos algunos aspectos de estas álgebras que son de interés para nuestro desarrollo y que pueden encontrarse por ejemplo en [39], [51], [44] y [37].

Definición III.2.9. Sea H un espacio de Hilbert. Diremos que un operador $T\in BL(H)$ admite una *representación Schmidt* si existen familias ortonormales $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ de vectores de H y una familia de escalares $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ tales que $T=\sum_{i\in I}\sigma_i x_i\otimes y_i$. Para $1\leq p<\infty$, el *ideal de Schatten* $\mathcal{C}_p(H)$ se define como el conjunto de todos los operadores T en $BL(H)$ que admiten una representación Schmidt $T=\sum_{i\in I}\sigma_i x_i\otimes y_i$ tal que

$$\sum_{i\in I}|\sigma_i|^p<\infty,$$

definiendose para tal un operador T la *norma de Schatten* $\|.\|_p$ por

$$\|T\|_p=(\sum_{i\in I}|\sigma_i|^p)^{1/p}.$$

Se demuestra que esta definición es independiente de la representación

Schmidt elegida. $(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)$ es un álgebra de Banach que es norma-ideal auto-adjunto en H y la involución * es $\|.\|_p$-isométrica, esto es $\|T^*\|_p=\|T\|_p$ para todo T en $\mathcal{C}_p(H)$. Además, $FL(H)\subseteq\mathcal{C}_p(H)\subseteq KL(H)$ y $FL(H)$ es denso en $(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)$. Para $1\leq p\leq q<\infty$, se verifica que $\mathcal{C}_p(H)\subseteq\mathcal{C}_q(H)$ y $\|T\|_q\leq\|T\|_p$ para todo T en $\mathcal{C}_p(H)$.

El ideal de operadores $\mathcal{C}_2(H)$ es el ideal de los operadores de Hilbert-Schmidt en H, que es una H*-álgebra prima que hemos tratado anteriormente. También, el ideal de operadores $\mathcal{C}_1(H)$ es el bien-conocido *ideal de los operadores clase-traza*. Se define la *función traza tr* en $\mathcal{C}_1(H)$ por

$$tr(T)=\sum_{\lambda\in\Lambda}<T(e_\lambda),e_\lambda>$$

para todo T en $\mathcal{C}_1(H)$, donde $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una base ortonormal cualquiera de H (de nuevo, esta definición es independiente de la base• elegida). Además, la aplicación $tr:\mathcal{C}_1(H)\longrightarrow\mathbb{K}$ es una forma lineal conmutativa y continua satisfaciendo $|tr(T)|\leq\|T\|_1$ para todo T en $\mathcal{C}_1(H)$.

Recordemos que un operador T en un espacio de Hilbert H se dice que es *positivo* si es simétrico y verifica que $<T(x),x>\geq 0$ para todo $x\in H$. Si T es un operador positivo, entonces T tiene una única raíz cuadrada positiva que se suele denotar por $T^{1/2}$. Se define el *valor absoluto* $[F]$ de un operador F como la única raíz cuadrada positiva del operador F^*F, esto es $[F]=(F^*F)^{1/2}$. Recordemos también que un operador W en H se dice que es una *isometría parcial* si verifica que $WW^*W=W$.

Teorema III.2.10. (Teorema de descomposición polar) *Sea H un espacio de Hilbert. Para T en $BL(H)$ existe una única isometría parcial $W\in BL(H)$ tal que $T=W[T]$ y $[T]=W^*T$.*

Recordemos así mismo la siguiente versión del *Teorema de diagonalización* que será suficiente para nuestros intereses.

Teorema III.2.11. (Teorema de diagonalización) *Sea H un espacio de Hilbert. Si T es un operador en H que es compacto y simétrico, entonces T es diagonalizable. Concretamente, existen una familia ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ y una familia de números reales $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ que se anula en infinito (esto es, para todo $\varepsilon>0$ el conjunto $\{i\in I : |\lambda_i|\geq\varepsilon\}$ es finito) tales que $T=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\otimes e_i$.*

Ya podemos enunciar y demostrar la determinación de las álgebras de cocientes con evaluación continua de los ideales de Schatten.

Teorema III.2.12. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{C}_p(H)$ el p-ideal Schatten de H para $1\leq p<\infty$. Entonces*

$$(Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H)),|.|_r)=(Q^l_{be}(\mathcal{C}_p(H)),|.|_l)=(Q^s_{be}(\mathcal{C}_p(H)),|.|_s)=(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p).$$

Demostración. Fijemos un número real p tal que $1\leq p<\infty$, y demostremos en primer lugar que $(Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H)),|.|_r)=(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)$. Sabemos por la Proposición III.2.5 que $Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H))$ es un ideal derecho de $BL(H)$. Tomemos un operador positivo T en $Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H))$ y probemos que T pertenece a $\mathcal{C}_p(H)$ y que $\|T\|_p\leq|T|_r$. De nuevo por la Proposición III.2.5 tenemos que

$$\|FT\|_p=\|TF^*\|_p\leq|T|_r\|F\|_\infty, \tag{III.5}$$

para todo F en $FL(H)$. Elijamos un número natural n tal que $p\leq 2^n$ y demostremos que

$$\|FT^{2^k}\|_{2^{n-k}}\leq|T|_r^{2^k}\|F\|_\infty \tag{III.6}$$

para cualesquiera $F\in FL(H)$ y $k\in\{0,1,...,n\}$. Para $k=0$ el resultado se sigue directamente de (III.5) y el hecho de que $\|.\|_{2^n}\leq\|.\|_p$. Ahora supongamos que (III.6) es cierta para algún $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ y demostremos que sigue siendo cierta para $k+1$. Si para F fijado en $FL(H)$ denotamos por P a la proyección ortogonal de H sobre el subespacio $T^{2^{k+1}}F^*(H)$, entonces

$$FT^{2^{k+1}}P=(PT^{2^{k+1}}F^*)^*=(T^{2^{k+1}}F^*)^*=FT^{2^{k+1}},$$

y así

$$\|FT^{2^{k+1}}\|_{2^{n-k-1}}=\|FT^{2^{k+1}}P\|_{2^{n-k-1}}.$$

Puesto que por [**39**; Teorema 15.5.9] para cualesquiera $R,S\in\mathcal{C}_{2^{n-k}}(H)$ se verifica que $RS\in\mathcal{C}_{2^{n-k-1}}(H)$ y $\|RS\|_{2^{n-k-1}}\le\|R\|_{2^{n-k}}\|S\|_{2^{n-k}}$ se sigue de la igualdad anterior que

$$\|FT^{2^{k+1}}\|_{2^{n-k-1}}\le\|FT^{2^k}\|_{2^{n-k}}\|T^{2^k}P\|_{2^{n-k}}\le|T|_r^{2^k}\|F\|_\infty|T|_r^{2^k}\|P\|_\infty=|T|_r^{2^{k+1}}\|F\|_\infty.$$

Esto termina el argumento de inducción finita que prueba (III.6). En consecuencia, para todo F en $FL(H)$ se verifica que

$$\|FT^{2^n}\|_1\le|T|_r^{2^n}\|F\|_\infty,$$

y por tanto

$$|tr(FT^{2^n})|\le|T|_r^{2^n}\|F\|_\infty.$$

Por [**39**; 6.4.1 y Teorema 22.1.9] T^{2^n} es un operador de clase traza, y por tanto T^{2^n} es compacto. Puesto que la raíz cuadrada de todo operador positivo compacto es también compacto, se sigue que T es compacto. Por el Teorema de diagonalización III.2.17 existen una familia ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ y una familia de números reales no negativos $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ que se anula en infinito tales que $T=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\otimes e_i$. Si para cada subconjunto finito $\Gamma=\{i_1,\dots,i_n\}$ de I consideramos la proyección $P_\Gamma=\sum_{k=1}^{n}e_{i_k}\otimes e_{i_k}$ se sigue inmediatamente de (III.5) que

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}^p=\|P_\Gamma T\|_p^p\le|T|_r^p\|P_\Gamma\|_\infty^p=|T|_r^p,$$

y por tanto $T\in\mathcal{C}_p(H)$ y $\|T\|_p\leq|T|_r$.

Ahora, sea T un operador arbitrario en $Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H))$. Por la decomposicion polar de T^* existe una única isometría parcial W tal que $T^*=W[T^*]$, y además $[T^*]=W^*T^*$. Puesto que $Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H))$ es un ideal derecho de $BL(H)$, se sigue que $[T^*]=TW\in Q^r_{be}(\mathcal{C}_p(H))$ y además, por la Proposición III.2.11.v)

$$|[T^*]|_r=|TW|_r\leq|T|_r\|W\|_\infty=|T|_r.$$

Ya que $[T^*]$ es positivo, de la parte primera de la demostración se sigue que $[T^*]$ pertenece a $\mathcal{C}_p(H)$ y $\|[T^*]\|_p\leq|T|_r$. Ahora, teniendo en cuenta la igualdad $T^*=W[T^*]$, podemos concluir que T^* (y por tanto T) pertenece a $\mathcal{C}_p(H)$. Además, de las desigualdades

$$\|T\|_p=\|T^*\|_p=\|W[T^*]\|_p\leq\|[T^*]\|_p\leq|T|_r,$$

se sigue que $\|T\|_p\leq|T|_r$. La desigualdad contraria es cierta por la Proposición III.2.5.i).

Finalmente, puesto que $(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)^*=(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)$ se sigue de la Proposición III.2.4 que también $(Q^1_{be}(\mathcal{C}_p(H)),|.|_1)=(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)$, y por tanto $(Q^s_{be}(\mathcal{C}_p(H)),|.|_s)=(\mathcal{C}_p(H),\|.\|_p)$. ■

El Teorema anterior pone de manifiesto que las álgebras de cocientes con evaluación continua pueden tener centro cero, por lo que no están obligadas a contener al centroide extendido.

3. Algebras de cocientes con evaluación continua para las álgebras asociativas totalmente primas y t.m.p.

Con el propósito de, por una parte, iluminar la sugerencia hecha en el inicio de la Sección 1 acerca de la búsqueda de cocientes analíticos, y, por otra, sugerir el contenido de esta sección, empezaremos recogiendo el siguiente resultado de M. Mathieu sobre la excelencia del álgebra acotada de cocientes en la clase de las álgebras ultraprimas (véanse [**33**; Teorema 4.1] y [**34**; Proposición 2.8]):

Si A es un álgebra asociativa ultraprima, entonces se verifica

i) la inclusión de A en $Q_b^r(A)$ es topológica,

ii) $Q_b^r(A)$ es un álgebra ultraprima, y

iii) si Q es una subálgebra de $Q^r(A)$ que contiene a A, y si $\|.\|$ es una norma de álgebra en Q para la que Q es una extensión topológica de A, entonces Q está incluida en $Q_b^r(A)$ y la inclusión es continua.

Análogo resultado se establece para el álgebra simétrica acotada de cocientes $Q_b^s(A)$.

Estos hechos quizá deban interpretarse en el sentido de que, en la clase de las álgebras ultraprimas, las álgebras acotadas de cocientes responden a la idea de álgebras analíticas de cocientes. El objetivo principal de esta sección es el estudio, desde esta prespectiva, de las álgebras de cocientes con evaluación continua en la clase de las álgebras totalmente primas. El proceso que seguimos se ajusta en la medida de lo posible al llevado a cabo por M. Mathieu. El punto de partida es el siguiente lema básico.

Lema III.3.1. *Sea A un álgebra asociativa totalmente prima, y sea K una constante positiva tal que $K\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$ para cualesquiera $a,b\in A$. Si $q\in Q^{r}_{be}(A)$ es tal que existe un ideal no nulo I de A tal que $qI\subseteq A$ y $E_q^{I^r}$ es continua, entonces para todo ideal no nulo J de A tal que $qJ\subseteq A$ se verifica que $E_q^{J^r}$ es continua y $K\|E_q^{J^r}\|\leq\|E_q^{I^r}\|$.*

Demostración. Sea $q\in Q^{r}_{be}(A)$ tal que existe un ideal no nulo I de A verificando que $qI\subseteq A$ y $E_q^{I^r}$ es continua. Supongamos que J es un ideal no nulo de A tal que $qJ\subseteq A$. Para $x\in I$ con $\|x\|=1$, $F\in J^{r}$ y $S,T\in M(A)$ tenemos

$$N_{F(q),x}(S,T)=SF(q)T(x)=R_{T(x)}SF(q)=E_q^{I^r}(R_{T(x)}SF),$$

por tanto

$$\|N_{F(q),x}(S,T)\|=\|E_q^{I^r}(R_{T(x)}SF)\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|T\|\|S\|\|F\|,$$

y así

$$\|N_{F(q),x}\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|F\|.$$

De la total primidad de A se sigue que

$$K\|F(q)\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|F\|,$$

o lo que es lo mismo

$$K\|E_q^{J^r}(F)\|\leq\|E_q^{I^r}\|\|F\|,$$

y así $E_q^{J^r}$ es continua y

$$K\|E_q^{J^r}\|\leq\|E_q^{I^r}\|. \qquad \blacksquare$$

El siguiente enunciado recoge el comportamiento del álgebra derecha de cocientes con evaluación continua para álgebras totalmente primas.

Teorema III.3.2. *Sea A un álgebra asociativa totalmente prima, y sea K una constante positiva tal que $K\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$ para cualesquiera a,b en A. Entonces se verifica:*

i) Las inclusiones de A en $Q^{r}_{be}(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q^{r}_{be}(A))$ son *topológicas. Concretamente, se verifica que* $K\|a\|\leq|a|_r\leq\|a\|$ *para todo* a *en* A, *y* $K\|F\|\leq|F|_r\leq\|F\|$ *para todo* F *en* $M(A)$.

ii) $(Q^r_{be}(A),|.|_r)$ *es un álgebra totalmente prima. Concretamente, se verifica que*

$$K^2|p|_r|q|_r\leq|N^{I^r\times J^r}_{p,q}|_r$$

para cualesquiera p,q *en* $Q^r_{be}(A)$ *e* I,J *ideales no nulos de* A *tales que* $pI\subseteq A$ *y* $qJ\subseteq A$.

iii) Si $(Q,\|.\|)$ *es un álgebra normada tal que* Q *es una subálgebra de* $Q^r(A)$ *que contiene a* A *y las inclusiones de* A *en* Q *y de* $M(A)$ *en* $M(Q)$ *son topológicas, entonces* Q *está contenida en* $Q^r_{be}(A)$ *y la inclusión es continua.*

Demostración. Por el Teorema III.1.5, $Q^r_{be}(A)$ es un álgebra extensión de A y $|.|_r$ es una seminorma de álgebra en $Q^r_{be}(A)$ tal que $|a|_r\leq\|a\|$ para todo a en A. Si $q\in Q^r_{be}(A)$ es tal que $|q|_r=0$, por el lema anterior, podemos asegurar que para todo ideal no nulo I de A tal que $qI\subseteq A$ se verifica que $E^{I^r}_q=0$, luego $qI=0$, y por tanto $q=0$. En consecuencia, $|.|_r$ es una norma en $Q^r_{be}(A)$. Dados $a\in A$ e I ideal no nulo de A, para $x\in I$ con $\|x\|=1$ y para cualesquiera que sean $F,G\in M(A)$ tenemos

$$N_{a,x}(F,G)=F(a)G(x)=R_{G(x)}F(a)=E^{I^r}_a(R_{G(x)}F),$$

por tanto

$$\|N_{a,x}(F,G)\|=\|E^{I^r}_a(R_{G(x)}F)\|\leq\|E^{I^r}_a\|\|G\|\|F\|,$$

y así

$$\|N_{a,x}\|\leq\|E^{I^r}_a\|.$$

Puesto que A es un álgebra totalmente prima se sigue que $K\|a\|\leq\|E^{I^r}_a\|$. Finalmente, variando I en los ideales no nulos de A y tomando ínfimos, se concluye que $K\|a\|\leq|a|_r$.

También sabemos por el Teorema III.1.5 que la inclusión de $M(A)$ en

$M(Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A))$ es contractiva. Nuestro siguiente objetivo es mostrar que dicha inclusión es topológica. Dado $F\in M(A)$, se tiene para todo a en A que

$$K\|F(a)\|\leq|F(a)|_{\mathrm{r}}\leq|F|_{\mathrm{r}}|a|_{\mathrm{r}}\leq|F|_{\mathrm{r}}\|a\|,$$

luego $K\|F\|\leq|F|_{\mathrm{r}}$.

Ahora demostraremos que $(Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A),|.|_{\mathrm{r}})$ es un álgebra totalmente prima. Fijemos p y q en $Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A)$ y consideremos I y J ideales no nulos de A tales que $pI\subseteq A$ y $qJ\subseteq A$. Para $F\in I^{\mathrm{r}}$, $G\in J^{\mathrm{r}}$ y $S,T\in M(A)$ tenemos

$$N_{F(p),G(q)}(S,T)=SF(p)TG(q)=N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}(SF,TG).$$

Por tanto

$$K\|N_{F(p),G(q)}(S,T)\|=K\|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}(SF,TG)\|\leq|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}(SF,TG)|_{\mathrm{r}}\leq$$
$$|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}|_{\mathrm{r}}|S|_{\mathrm{r}}|F|_{\mathrm{r}}|T|_{\mathrm{r}}|G|_{\mathrm{r}}\leq|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}|_{\mathrm{r}}\|S\|\|F\|\|T\|\|G\|,$$

y así

$$K\|N_{F(p),G(q)}\|\leq|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}|_{\mathrm{r}}\|F\|\|G\|.$$

Por ser A un álgebra totalmente prima tenemos que

$$K^2\|F(p)\|\|G(q)\|\leq|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}|_{\mathrm{r}}\|F\|\|G\|,$$

en consecuencia

$$K^2\|E^{I^{\mathrm{r}}}_{p}\|\|E^{J^{\mathrm{r}}}_{q}\|\leq|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}|_{\mathrm{r}},$$

y así

$$K^2|p|_{\mathrm{r}}|q|_{\mathrm{r}}\leq|N^{I^{\mathrm{r}}\times J^{\mathrm{r}}}_{p,q}|_{\mathrm{r}}.$$

Finalmente, sea $(Q,\|.\|)$ un álgebra normada tal que Q es una subálgebra de $Q^{\mathrm{r}}(A)$ que contiene a A y tal que las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas. Supongamos que $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ son reales positivos tales que $\alpha\|a\|\leq\|a\|\leq\beta\|a\|$ para todo a en A, y $\gamma\|F\|\leq\|F\|\leq\delta\|F\|$ para todo F en $M(A)$. Sea q en Q, y supóngase que I es un ideal no nulo de A tal que $qI\subseteq A$. Para todo F en I^{r} tenemos que

$$\|E^{I^{\mathrm{r}}}_{q}(F)\|=\|F(q)\|\leq\alpha^{-1}\|F(q)\|\leq\alpha^{-1}\|F\|\|q\|\leq\alpha^{-1}\delta\|F\|\|q\|,$$

por tanto $E^{I^{\mathrm{r}}}_{q}$ es continua y $\|E^{I^{\mathrm{r}}}_{q}\|\leq\alpha^{-1}\delta\|q\|$, y así q pertenece a $Q^{\mathrm{r}}_{\mathrm{be}}(A)$ y

$|q|_r \leq \alpha^{-1}\delta\|q\|$. Luego Q está contenida en $Q^r_{be}(A)$ y la inclusión es continua. ■

Como consecuencia vamos a obtener una caracterización topológica de las subálgebras del álgebra derecha de cocientes con evaluación continua.

Corolario III.3.3. *Sea A un álgebra asociativa totalmente prima, y sea $(Q^r_{be}(A), |.|_r)$ el álgebra derecha de cocientes con evaluación continua de A.*

i) Si Q es una subálgebra de $Q^r_{be}(A)$ que contiene a A y en Q se considera la norma inducida por $|.|_r$, entonces las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas y se verifica que existe un número real positivo K' tal que

$$K'|p|_r|q|_r \leq |N^{I^r\times J^r}_{p,q}|_r$$

para cualesquiera $p,q\in Q$ e I,J ideales no nulos de A tales que $pI\subseteq A$ y $qJ\subseteq A$.

ii) Si $(Q,\|.\|)$ es un álgebra normada tal que Q es una subálgebra de $Q^r(A)$ que contiene a A y las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas, y existe una constante positiva K' tal que

$$K'\|p\|\|q\| \leq \|N^{I^r\times J^r}_{p,q}\|$$

para cualesquiera $p,q\in Q$ e I,J ideales no nulos de A tales que $pI\subseteq A$ y $qJ\subseteq A$, entonces Q está contenida en $Q^r_{be}(A)$ y la inclusión es topológica.

Demostración. i).- Por la parte i) del teorema anterior las inclusiones de A en $Q^r_{be}(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q^r_{be}(A))$ son topológicas, y concretamente $K\|a\|\leq|a|_r\leq\|a\|$ para todo $a\in A$, y $K\|F\|\leq|F|_r\leq\|F\|$ para todo $F\in M(A)$. En consecuencia, la inclusión de A en Q es topológica. Veamos que la inclusión de $M(A)$ en $M(Q)$ es también topológica. En efecto, si para $F\in M(A)$ denotamos por F^Q a F visto en $M(Q)$, tenemos por una parte que

$$|F^Q|_r \leq |F|_r \leq \|F\|,$$

y por otra que para todo $a\in A$

$$K\|F(a)\| \leq |F(a)|_r = |F^Q(a)|_r \leq |F^Q|_r |a|_r \leq |F^Q|_r \|a\|,$$

luego $K\|F\| \leq |F^Q|_r$. Ahora se concluye la demostración fácilmente a partir de la parte ii) del teorema anterior.

ii) Sea $(Q, |||.|||)$ una álgebra normada como en el enunciado y considérense $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ como en el final de la demostración del teorema anterior. Sabemos que Q está contenida continuamente en $Q^r_{be}(A)$ y que $|q|_r \leq \alpha^{-1}\delta |||q|||$ para todo $q\in Q$. Fijemos q en Q, y tomemos un ideal no nulo I de A tal que $qI\subseteq A$. Para $a\in A$ con $|||a|||=1$ y para $0<\varepsilon<1$ tomemos F en I^r con $|||F|||=1$ y G en $M(A)$ con $|||G|||=1$ tales que $\varepsilon K' |||q||| \leq |||N_{q,a}(F,G)|||$. Entonces

$$\varepsilon K' |||q||| \leq |||F(q)G(a)||| \leq |||F(q)|||\, |||G(a)||| \leq \beta \|F(q)\| \leq \beta \|E_q^{I^r}\|\, \|F\| \leq \beta\gamma^{-1} \|E_q^{I^r}\|.$$

De la arbitraridad de ε se sigue que $K' |||q||| \leq \beta\gamma^{-1} \|E_q^{I^r}\|$. Ahora, variando I y tomando ínfimos se obtiene que $K' |||q||| \leq \beta\gamma^{-1} |q|_r$, como se quería. ■

Para álgebras asociativas totalmente primas no centralmente cerradas podemos completar la información del Teorema III.3.2 en el siguiente sentido:

Corolario III.3.4. *Sea A un álgebra real asociativa totalmente prima con centroide extendido $\mathbb{C}$. Entonces $Q^r_{be}(A)$ es una subálgebra compleja de $Q^r(A)$ y hay una norma compleja de álgebra en $Q^r_{be}(A)$ equivalente a $|.|_r$.*

Demostración. Sea K una constante positiva tal que $K\|a\|\,\|b\| \leq \|N_{a,b}\|$ para cualesquiera $a,b\in A$. Incluyamos por complitud la demostración del bien conocido hecho de que el centralizador unidad imaginaria ι es continuo (véase [**10**]). En efecto, para $x,y\in dom(\iota)$ es inmediato verificar que $N_{\iota(x),y}=N_{x,\iota(y)}$ por lo que

$$K\|\iota(x)\|\|y\|\leq\|N_{\iota(x),y}\|=\|N_{x,\iota(y)}\|\leq\|x\|\|\iota(y)\|,$$

de donde se sigue la continuidad de ι. Ahora, dado $q\in Q^{r}_{be}(A)$ y fijado I ideal no nulo de A tal que $qI\subseteq A$ y $E^{I^{r}}_{q}$ es continua, notemos que $J:=Idom(\iota)$ es un ideal no nulo de A tal que $\iota qIdom(\iota)\subseteq A$ y para todo $F\in J^{r}$ se verifica que

$$E^{J^{r}}_{\iota q}(F)=F(\iota q)=\iota F(q)=\iota E^{J^{r}}_{q}(F),$$

y en consecuencia $E^{J^{r}}_{\iota q}=\iota E^{J^{r}}_{q}$. Ya que por el Lema III.3.1 $E^{J^{r}}_{q}$ es continua se sigue que $E^{J^{r}}_{\iota q}$ es continua y $\|E^{J^{r}}_{\iota q}\|\leq\|\iota\|\|E^{J^{r}}_{q}\|$. En consecuencia $\iota q\in Q^{r}_{be}(A)$ y $|\iota q|_{r}\leq\|\iota\||q|_{r}$. Ahora, tal y como se hizo en la demostración del Teorema II.2.4, podemos aplicar [**43**; Teorema 1.3.3] para concluir el enunciado. ∎

Sea A un álgebra real asociativa totalmente prima no centralmente cerrada. El corolario anterior nos autoriza a considerar la *clausura central normada* de A como la subálgebra compleja de $Q^{r}_{be}(A)$ generada por A y dotada de una norma compleja de álgebra equivalente a $|.|_{r}$. Nótese también que a partir de la parte i) del Corolario III.3.3 se deduce fácilmente que la clausura central normada de A es un álgebra compleja totalmente prima. Los resultados que estableceremos posteriormente mostrarán que la topología de la clausura central de A permanece inalterable si se opta por introducir ésta a partir de las álgebras de cocientes $Q^{l}_{be}(A)$ y $Q^{s}_{be}(A)$. Nos ocupamos en este momento de probar que en el caso particular en el que A sea t.m.p. reencontramos la clausura central de A dada en el Teorema II.2.4.

Corolario III.3.5. *Si A es un álgebra real asociativa t.m.p. con* *centroide extendido $\mathbb{C}$, entonces las normas complejas de álgebra en $Q(A)$ dadas por el Teorema II.2.4 y por el Corolario III.3.4 son equivalentes.*

Demostración. Sea A es un álgebra real asociativa t.m.p. con centroide extendido $\mathbb{C}$ y sea $Q(A)$ la clausura central de A. Consideremos en $Q(A)$ las normas dadas por el Teorema II.2.4 y por el Corolario III.3.4. Por las partes i) de dichos resultados se tiene que ambas normas hacen topológicas a las inclusiones de A en $Q(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q(A))$. Ahora, por las partes iii) de dichos resultados se sigue que ambas normas han de ser equivalentes. ∎

Ni que decir tiene que para el álgebra izquierda de cocientes con evaluación continua se obtienen resultados completamente análogos a los que se han establecido para la derecha. Para terminar esta Sección nos ocuparemos del estudio del álgebra simétrica en la que se obtendrá alguna perfección adicional. Nuestro objetivo inmediato va a ser mostrar un procedimiento que es simétrico desde su inicio y que nos va a dar acceso directo al álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua para las álgebras totalmente primas sin necesidad de pasar por las álgebras laterales.

Para cada ideal I de un álgebra asociativa A notaremos por I^m al ideal de $M(A)$ generado por el conjunto $\{M_{x,y}:\ x,y\in I\}$. Es claro que

$$I^m=\{\sum_{i=1}^{n} M_{x_i,y_i} \ :\ n\in\mathbb{N},\ x_i,y_i\in I\ (1\le i\le n)\}.$$

Así mismo, a partir de las descripciones de I^r, I^l e I^m, se sigue inmediatamente que $I^m\subseteq I^r\cap I^l$ y que $I^rI^l=I^lI^r=I^m$.

Lema III.3.6. *Sea A un álgebra asociativa totalmente prima, y sea K una* *constante positiva tal que* $K\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$ *para cualesquiera* $a,b\in A$. *Para* $q\in Q^r(A)$ *e* I *ideal no nulo de* A *tales que* $qI\subseteq A$ *se verifica que:*

$$E_q^{I^r} \text{ es continua si, y sólamente si, } E_q^{I^m} \text{ es continua;}$$

y en tal caso se verifica que

$$K\|E_q^{I^r}\|\leq\|E_q^{I^m}\|\leq\|E_q^{I^r}\|.$$

Análogo enunciado cambiando "derecha" por "izquierda".

Demostración. Sean $q\in Q^r(A)$ e I ideal no nulo de A tales que $qI\subseteq A$. Puesto que $I^m\subseteq I^r$, de la continuidad de $E_q^{I^r}$ se sigue inmediatamente la de $E_q^{I^m}$, así como que $\|E_q^{I^m}\|\leq\|E_q^{I^r}\|$. Supongamos ahora que $E_q^{I^m}$ es continua. Para $x\in I$, $F\in I^r$ y $S,T\in M(A)$, se tiene que $L_{S(x)}TF\in I^m$ y

$$N_{x,F(q)}(S,T)=S(x)TF(q)=L_{S(x)}TF(q)=E_q^{I^m}(L_{S(x)}TF).$$

Si adicionalmente $\|x\|=1$ y $\|F\|=\|S\|=\|T\|=1$ se sigue que

$$\|N_{x,F(q)}(S,T)\|=\|E_q^{I^m}(L_{S(x)}TF)\|\leq\|E_q^{I^m}\|,$$

y así

$$\|N_{x,F(q)}\|\leq\|E_q^{I^m}\|.$$

Ya que K es una constante de total primidad de A, se sigue que

$$K\|F(q)\|\leq\|E_q^{I^m}\|,$$

o lo que es lo mismo

$$K\|E_q^{I^r}(F)\|\leq\|E_q^{I^m}\|,$$

y en consecuencia $E_q^{I^r}$ es continua y

$$K\|E_q^{I^r}\|\leq\|E_q^{I^m}\|. \qquad \blacksquare$$

El lema anterior invita a presentar el álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua de un álgebra totalmente prima, a partir de la consideración de la ley que a cada ideal I le asigna el ideal I^m en el álgebra de multiplicación, siguiendo un proceso similar al que se utilizó en ambiente general para las álgebras laterales.

Recogemos en el siguiente teorema la formalización de esta idea, así como la presentación que resulta de las propiedades del álgebra simétrica. Hemos de destacar que la propiedad iii) en el enunciado es una mejora con respecto a la misma propiedad en contexto lateral.

Teorema III.3.7. *Sea A un álgebra asociativa totalmente prima, y sea K una constante positiva tal que $K\|a\|\|b\|\leq\|N_{a,b}\|$ para cualesquiera a,b en A. Entonces*

$Q^s_{be}(A)=\{q\in Q^s(A)$: $\exists I$ *ideal no nulo de* A *t.q.* $qI+Iq\subseteq A$ *y* $E_q^{I^m}$ *es continua*$\}$,

y $|.|:Q^s_{be}(A)\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por*

$$|q|=\mathrm{Inf}\{\|E_q^{I^m}\| : I \text{ ideal no nulo de } A \text{ t.q. } qI+Iq\subseteq A \text{ y } E_q^{I^m} \text{ es continua}\}$$

es una norma de álgebra equivalente a $|.|_r$ *y a* $|.|_l$ *(luego, también a* $|.|_s$*). Además:*

i) Las inclusiones de A en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son topológicas. Concretamente, se verifica que $K^2\|a\|\leq|a|\leq\|a\|$ para todo a en A, y $K^2\|F\|\leq|F|\leq\|F\|$ para todo F en $M(A)$.

ii) $(Q^s_{be}(A),|.|)$ es un álgebra totalmente prima. Concretamente, se verifica que

$$K^3|p||q|\leq|N_{p,q}^{I^m\times J^m}|$$

para cualesquiera $p,q\in Q^s_{be}(A)$ e I,J ideales no nulos de A tales que $pI+Ip\subseteq A$ y $qJ+Jq\subseteq A$.

iii) Si $(Q,\|.\|)$ es un álgebra normada tal que Q es una subálgebra de $Q^s(A)$ que contiene a A y las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas, entonces Q está contenida en $Q^s_{be}(A)$ y las inclusiones de Q en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(Q)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son continuas.

Demostración. Empecemos verificando la descripción de $Q^s_{be}(A)$ dada en el enunciado. Si $q\in Q^s_{be}(A)$ e I,J son ideales no nulos de A tales que $qI\subseteq A$,

$Jq\subseteq A$ y $E_q^{I^r}, E_q^{J^l}$ son continuas, entonces $I\cap J$ es un ideal no nulo de A tal que $q(I\cap J)+(I\cap J)q\subseteq A$ y, teniendo en cuenta el lema anterior, $E_q^{(I\cap J)^m}$ es continua y se verifica que

$$\|E_q^{(I\cap J)^m}\|\le\|E_q^{I^r}\| \quad \text{y} \quad \|E_q^{(I\cap J)^m}\|\le\|E_q^{J^l}\|. \qquad \text{(III.7)}$$

Recíprocamente, si $q\in Q^s(A)$ es tal que existe un ideal no nulo I de A tal que $qI+Iq\subseteq A$ y $E_q^{I^m}$ es continua, entonces haciendo uso de nuevo del lema anterior tenemos que $E_q^{I^r}$, $E_q^{I^l}$ son continuas con

$$K\|E_q^{I^r}\|\le\|E_q^{I^m}\| \quad \text{y} \quad K\|E_q^{I^l}\|\le\|E_q^{I^m}\|. \qquad \text{(III.8)}$$

En consecuencia, $q\in Q^r_{be}(A)\cap Q^l_{be}(A)=Q^s_{be}(A)$.

Haciendo mínimos cambios en la demostración del Teorema III.1.5 se obtiene que $|.|$ es una seminorma de álgebra en $Q^s_{be}(A)$ para la que se verifican las desigualdades $|a|\le\|a\|$ para todo $a\in A$ y $|F|\le\|F\|$ para todo $F\in M(A)$. Además, de las desigualdades (III.7) y (III.8) se deduce fácilmente que $|.|$ es equivalente a $|.|_r$ y a $|.|_l$, concretamente

$$K|.|_r\le|.|\le|.|_r \quad \text{y} \quad K|.|_l\le|.|\le|.|_l. \qquad \text{(III.9)}$$

Ahora es el momento de aludir al Teorema III.3.2 para terminar la demostración de i). A saber, ya que $K\|a\|\le|a|_r$ para todo $a\in A$, se sigue de (III.9) que $K^2\|a\|\le|a|$ para todo $a\in A$. De aquí se deduce que para $F\in M(A)$ se verifica que $K^2\|F(a)\|\le|F(a)|\le|F|\,|a|\le|F|\,\|a\|$ para todo $a\in A$, y por tanto $K^2\|F\|\le|F|$. En este momento haciendo las modificaciones obligadas en la demostración de la parte ii) del Teorema III.3.2 se obtiene la parte ii) de nuestro enunciado.

Finalmente, sea $(Q, \|.\|)$ un álgebra normada tal que Q es una subálgebra de $Q^s(A)$ que contiene a A y tal que las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas. Sean $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ números reales positivos tales que $\alpha\|a\|\le\|a\|\le\beta\|a\|$ para todo a en A, y $\gamma\|F\|\le\|F\|\le\delta\|F\|$ para todo F en $M(A)$. Procediendo de manera similar a como se hizo en la parte final de la demostración del Teorema III.3.2 se obtiene que Q está incluida en

$Q^s_{be}(A)$ y la inclusión es continua; concretamente $|q|\leq\alpha^{-1}\delta\|q\|$ para todo $q\in Q$. Veamos que la inclusión de $M(Q)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ es también continua. Sea $T\in M(Q)$, y tomemos $n\in\mathbb{N}$ y $p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n\in Q^1$ (la envolvente unital de Q en $Q^s(A)$) tales que $T=\sum_{i=1}^{n} M_{p_i,q_i}$. Dado $q\in Q^s_{be}(A)$, tomemos un ideal no nulo I de A satisfaciendo $qI+Iq\subseteq A$ y $E_q^{I^m}$ es continua. No hay pérdida de generalidad en suponer adicionalmente que $p_iI+Ip_i\subseteq A$ y $q_iI+Iq_i\subseteq A$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$. Puesto que $T(q)=\sum_{i=1}^{n} p_iqq_i$, es claro entonces que $T(q)I^3+I^3T(q)\subseteq A$. Además, se verifica que

$$(I^3)^mT\subseteq I^m,$$

como se deduce inmediatamente de la expresión siguiente

$$M_{xyz,tuv}T=M_{xyz,tuv}(\sum_{i=1}^{n} M_{p_i,q_i})=\sum_{i=1}^{n} M_{xyzp_i,q_ituv}$$

y del hecho de que $xyzp_i$ y q_ituv pertenecen a I cuando $x,y,z,t,u,v\in I$. En consecuencia, para cada $F\in(I^3)^m$ podemos escribir

$$E_{T(q)}^{(I^3)^m}(F)=FT(q)=E_q^{I^m}(FT),$$

de donde

$$\|E_{T(q)}^{(I^3)^m}(F)\|=\|E_q^{I^m}(FT)\|\leq\|E_q^{I^m}\|\|FT\|\leq\gamma^{-1}\|E_q^{I^m}\|\|FT\|\leq$$

$$\gamma^{-1}\|E_q^{I^m}\|\|F\|\|T\|\leq\delta\gamma^{-1}\|E_q^{I^m}\|\|F\|\|T\|.$$

En consecuencia $E_{T(q)}^{(I^3)^m}$ es continuo y

$$\|E_{T(q)}^{(I^3)^m}\|\leq\delta\gamma^{-1}\|E_q^{I^m}\|\|T\|,$$

y por tanto

$$|T(q)|\leq\delta\gamma^{-1}\|E_q^{I^m}\|\|T\|.$$

Variando I y tomando ínfimos obtenemos que

$$|T(q)|\leq\delta\gamma^{-1}|q|\|T\|.$$

De aquí, se sigue que

$$|T|\leq\delta\gamma^{-1}\|T\|. \quad \blacksquare$$

El objetivo último de esta sección es probar que el álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua de un álgebra asociativa t.m.p. es t.m.p.

Teorema III.3.8. *Sea A un álgebra asociativa t.m.p., y sea K una constante positiva tal que $K\|F\|\|a\|\leq\|W_{F,a}\|$ para cualesquiera F en $M(A)$ y a en A. Entonces:*

i) Las inclusiones de A en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son topológicas. Concretamente, $K\|a\|\leq|a|\leq\|a\|$ para todo $a\in A$, y $K\|F\|\leq|F|\leq\|F\|$ para todo $F\in M(A)$.

ii) $(Q^s_{be}(A),|.|)$ es un álgebra t.m.p. Concretamente,

$$K^4|F||q|\leq|W^{I^m}_{F,q}|$$

para cualesquiera que sean F en $M(Q^s_{be}(A))$, q en $Q^s_{be}(A)$ e I ideal no nulo de A tal que $FI^m+I^mF\subseteq M(A)$ y $qI+Iq\subseteq A$.

iii) Si $(Q,\|.\|)$ es un álgebra normada tal que Q es una subálgebra de $Q^s(A)$ conteniendo a A y las inclusiones de A en Q y de $M(A)$ en $M(Q)$ son topológicas, entonces Q está contenida en $Q^s_{be}(A)$ y las inclusiones de Q en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(Q)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son continuas.

Demostración. Puesto que toda álgebra t.m.p. es un álgebra totalmente prima, por el teorema anterior sabemos que $(Q^s_{be}(A),|.|)$ es un álgebra normada totalmente prima, las inclusiones de A en $Q^s_{be}(A)$ y de $M(A)$ en $M(Q^s_{be}(A))$ son topológicas y se satisface la propiedad iii). También podemos afirmar que $|a|\leq\|a\|$ para todo $a\in A$, y $|F|\leq\|F\|$ para todo $F\in M(A)$. Veamos la validez de las dos restantes desigualdades exhibidas en i). Dados $a\in A$ e I ideal no nulo de A, para $F\in I^m$ y $G\in M(A)$ con $\|F\|=\|G\|=1$ tenemos

$$\|W_{F,a}(G)\|=\|FG(a)\|=\|E^{I^m}_a(FG)\|\leq\|E^{I^m}_a\|,$$

por tanto

$$\|W_{F,a}\|\leq\|E^{I^m}_a\|,$$

y así $K\|a\|\leq\|E_a^{I^m}\|$. Moviendo I y tomando ínfimos obtenemos $K\|a\|\leq|a|$. Ahora, dado $F\in M(A)$, se tiene para todo a en A que

$$K\|F(a)\|\leq|F(a)|\leq|F||a|\leq|F|\|a\|,$$

luego $K\|F\|\leq|F|$.

Para probar que $(Q_{be}^s(A),|.|)$ es t.m.p. estableceremos previamente la siguiente afirmación:

$$(\Delta)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Si } F\in M(Q_{be}^s(A)) \text{ y si } I \text{ es un ideal no nulo de } A \text{ tales que}\\ FI^m+I^mF\subseteq A^m, \text{ entonces la aplicación } R_F^{I^m}:(I^m,\|.\|)\longrightarrow(A^m,\|.\|) \text{ es}\\ \text{continua y } K^2|F|\leq\|R_F^{I^m}\|\leq K^{-1}|F|.\end{array}\right.$$

En efecto, dados $F\in M(Q_{be}^s(A))$ e I ideal no nulo de A tales que $FI^m+I^mF\subseteq A^m$, se tiene para todo $T\in I^m$ que

$$K\|R_F^{I^m}(T)\|=K\|TF\|\leq|TF|\leq|T||F|\leq\|T\||F|,$$

luego $R_F^{I^m}$ es continua y $\|R_F^{I^m}\|\leq K^{-1}|F|$. Por otra parte, para $q\in Q_{be}^s(A)$, tomemos un ideal no nulo J de A tal que $F(q)J+JF(q)\subseteq A$, y observemos que para cualesquiera $T\in(I\cap J)^m$ y $G\in M(A)$ con $\|T\|=\|G\|=1$ ocurre que

$$K\|W_{Id_A,TF(q)}(G)\|=K\|GTF(q)\|\leq|GTF(q)|\leq|GTF||q|\leq\|GTF\||q|=$$

$$\|R_F^{I^m}(GT)\||q|\leq\|R_F^{I^m}\|\|GT\||q|\leq\|R_F^{I^m}\||q|,$$

luego $K\|W_{Id_A,TF(q)}\|\leq\|R_F^{I^m}\||q|$, y así $K^2\|TF(q)\|\leq\|R_F^{I^m}\||q|$. Reescribiendo esta desigualdad en la forma $K^2\|E_{F(q)}^{J^m}(T)\|\leq\|R_F^{I^m}\||q|$, se deduce que $K^2\|E_{F(q)}^{J^m}\|\leq\|R_F^{I^m}\||q|$, por tanto $K^2|F(q)|\leq\|R_F^{I^m}\||q|$, y en consecuencia $K^2|F|\leq\|R_F^{I^m}\|$.

Vamos finalmente a probar la desigualdad anunciada en la parte ii) del enunciado. Sean $F\in M(Q_{be}^s(A))$, $q\in Q_{be}^s(A)$ e I ideal no nulo de A tal que $FI^m+I^mF\subseteq M(A)$ y $qI+Iq\subseteq A$. Para $G,H\in I^m$ y $T\in M(A)$ con $\|G\|=\|H\|=\|T\|=1$ tenemos

$$K\|W_{GF,H(q)}(T)\|=K\|GFTH(q)\|\leq K\|FTH(q)\|\leq|FTH(q)|=$$

$$|W_{F,q}^{I^m}(TH)|\leq|W_{F,q}^{I^m}||TH|\leq|W_{F,q}^{I^m}|\|TH\|\leq|W_{F,q}^{I^m}|,$$

donde hemos hecho uso de las desigualdades recogidas en la parte i) del enunciado. Luego $K\|W_{GF,H(q)}\|\leq|W^{I^{m}}_{F,q}|$, y por la total-multiplicativa-primidad de A también $K^2\|GF\|\|H(q)\|\leq|W^{I^{m}}_{F,q}|$. Reescribiendo esta desigualdad en la forma $K^2\|R^{I^{m}}_{F}(G)\|\|E^{I^{m}}_{q}(H)\|\leq|W^{I^{m}}_{F,q}|$ deducimos que $K^2\|R^{I^{m}}_{F}\|\|E^{I^{m}}_{q}\|\leq|W^{I^{m}}_{F,q}|$. Ahora, aplicando la afirmación (Δ), obtenemos que $K^4|F|\|E^{I^{m}}_{q}\|\leq|W^{I^{m}}_{F,q}|$. De donde se sigue inmediatamente que

$$K^4|F||q|\leq|W^{I^{m}}_{F,q}|. \qquad \blacksquare$$

A partir del Teorema III.3.7 (resp. III.3.8) pueden obtenerse resultados análogos a los Corolarios III.3.3 y III.3.4 para el álgebra simétrica de cocientes con evaluación continua $Q^{s}_{be}(A)$ para A álgebra totalmente prima (resp. t.m.p.).

REFERENCIAS

[1] P. ARA, Elementary operators on semiprime rings. In: *Elementary operators and applications*, (Proc. Internat. Workshop, Blaubeuren, June 1991) (ed. by M. Mathieu), World Scientific, Singapore 1992, 143-147.

[2] W. E. BAXTER and W. S. MARTINDALE III, Central closure of semiprime nonassociative rings, *Comm. Algebra* **7** (1979), 1103-1132.

[3] K. I. BEIDAR, W. S. MARTINDALE III, and A. V. MIKHALEV, *Rings with generalized identities*, Marcel Dekker, New York 1996.

[4] M. CABRERA, J. MARTíNEZ and A. RODRíGUEZ, Nonassociative real H*-algebras, *Publ. Mat.* **32** (1988), 267-274.

[5] M. CABRERA and A. A. MOHAMMED, Extended centroid and central closure of the multiplication algebra. *Comm. Algebra* **27** (1999), 5723-5736.

[6] M. CABRERA and A. A. MOHAMMED, Extended centroid and central closure of multiplicatively semiprime algebras. *Comm. Algebra* (por aparecer).

[7] M. CABRERA and A. A. MOHAMMED, Algebra of quotients with bounded evaluation of a normed prime algebra, Universidad de Granada, Presentado en el "Congrès International de Mathématiques de Rabat (12-14 Avril 1999)".

[8] M. CABRERA and A. A. MOHAMMED, Totally multiplicatively prime algebras, Universidad de Granada, Preprint.

[9] M. CABRERA and A. RODRíGUEZ, Extended centroid and central closure of semiprime normed algebras. A first approach, *Comm. Algebra* **18** (1990), 2293-2326.

[10] M. CABRERA and A. RODRíGUEZ, Nonassociative ultraprime normed algebras, *Quart. J. Math. Oxford (2)* **43** (1992), 1-7.

[11] M. CABRERA and A. RODRíGUEZ, Non-degenerately ultraprime Jordan-Banach algebras: A Zel'manovian treatment, *Proc. London Math. Soc.* **69** (1994), 576-604.

[12] M. CABRERA and A. RODRíGUEZ, A new simple proof of the Gelfand-Mazur-Kaplansky theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 2663-2666.

[13] P. M. COHN, *Algebra*, John Wiley & Sons Ltd., Volume 2, England, 1977.

[14] R. COSTA and A. SUAZO, The multiplication algebra of a Berstein algebra: Basic results, *Comm. Algebra* **24** (1996), 1809-1821.

[15] J. A. CUENCA and A. RODRíGUEZ, Isomorphisms of H*-algebras, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **97** (1985), 93-99.

[16] J. A. CUENCA and A. RODRíGUEZ, Structure theory for non-commutative Jordan H*-algebras, *J. Algebra* **106** (1987), 1-14.

[17] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris 1967.

[18] T. S. ERICKSON, W. S. MARTINDALE III, and J. M. OSBORN, Prime nonassociative algebras, *Pacific J. Math.* **60** (1975), 49-63.

[19] S. M. F. FARRAND and D. R. FINSTON, On the multiplication ideal of a nonassociative algebra, *Arch. Math.* **48** (1987), 298-302.

[20] A. FERNANDEZ and A. RODRIGUEZ, A Wedderburn theorem for nonassociative complete normed algebras, *J. London Math. Soc.* **33** (1986), 328-338.

[21] D. R. FINSTON, On multiplication algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*

293 (1986), 807-818.

[22] D. R. FINSTON, Polynomial algebras have polynomial growth, *Trans. Amer. Math. Soc.* **300** (1987), 535-556.

[23] K. R. GOODEARL, *Notes on real and complex C*-algebras*, Shiva Publishing Limited, Cheshire 1982.

[24] D. HANDELMAN, Strongly semiprime rings, *Pac. J. Math.* **60** (1975), 115-122.

[25] S. HEINRICH, Ultraproducts in Banach space theory, *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), 72-104.

[26] N. JACOBSON, *Lie algebras*, Dover Publication Inc., New York, 1962.

[27] N. JACOBSON, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **37**, Providence, Rhode Island, 1968.

[28] N. JACOBSON, *Structure and representations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39**, Providence, Rhode Island, 1968.

[29] R. E. JOHNSON, The extended centralizer of a ring over a module, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 891-895.

[30] A. KAUCIKAS and R. WISBAUER, On strongly prime rings and ideals, *Preprint*, 1999.

[31] W. S. MARTINDALE III, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *J. Algebra* **12** (1969), 576-584.

[32] M. MATHIEU, *Applications of ultraprime Banach algebras in the theory of elementary operators*, Thesis, Túbingen 1986.

[33] M. MATHIEU, Rings of quotients of ultraprime Banach algebras with applications to elementary operators, *Proc. Centre Math. Anal. Austral Nat. Univ.* **21** (1989), 297-317.

[**34**] M. MATHIEU, The symmetric algebra of quotients of an ultraprime Banach algebras, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **50** (1991), 75-87.

[**35**] M. MATHIEU, *Elementary operators and applications*, (Proc. Internat. Workshop, Blaubeuren, June 1991), World Scientific, Singapore 1992.

[**36**] K. McCRIMMON, Martindale systems of symmetric quotients, *Algebras Groups Geom.* **6** (1989), 153-237.

[**37**] G. J. MURPHY, *C*-algebras and operator theory*, Academic Press, San Diego 1990.

[**38**] T. W. PALMER, *Banach algebras and the general theory of *-algebras. Volume I: Algebras and Banach algebras*, Cambridge University Press, 1994.

[**39**] A. PIETSCH, *Operator ideals*, North-Holland, Oxford 1980.

[**40**] F. L. PRITCHARD, Zero divisors in a nonassociative K-algebra, *Algebras Groups Geom.* **8** (1991), 61-76.

[**41**] F. L. PRITCHARD, Ideals in the multiplication algebra of a nonassociative K-algebra, *Comm. Algebra* **21** (1993), 4541-4559.

[**42**] F. L. PRITCHARD, The radical and the multiplication algebra of a nonassociative algebra, *Algebras Groups Geom.* **11** (1994), 329-345.

[**43**] C. E. RICKART, *General theory of Banach algebras*, Krieger Publishing Company, New York 1960.

[**44**] J. R. RINGROSE, *Compact non-self-adjoint operators*, Van nostrand reinhold company, London 1971.

[**45**] A. RODRíGUEZ, An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras, *Ann. Sci. Univ. "Blaise Pascal", Clermont II, Sér. Math., Fasc.* **27** éme (1991), 1-57.

[46] A. RODRíGUEZ, Jordan structures in Analysis. In: *Jordan algebras*, (Oberwolfach, 1992) (ed. by W. Kaup, K. McCrimmon and H. P. Petersson), Walter de Gruyter, Berlin-New York 1994, 97-186.

[47] A. RODRíGUEZ, Primitive nonassociative normed algebras and extended centroid. In: *Nonassociative algebraic models* (ed. by S. González and H. Ch. Myung), Nova Science Publishers, New York 1992, 233-243.

[48] A. RODRíGUEZ, Continuity of densely valued homomorphisms into H*-algebras, *Quart. J. Math. Oxford* **46** (1995), 107-118.

[49] L. H. ROWEN, Nonassociative rings satisfying normal polynomial identities, *J. Algebra* **49** (1977), 104-111.

[50] R. D. SCHAFER, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York 1966.

[51] R. SCHATTEN, *Norm ideals of completely continuous operators*, Springer-Verlag, New York 1970.

[52] R. WISBAUER, *Modules and algebras: Bimodule structure and group actions on algebras*, Pitman Monographs and surveys in Pure and Appl. Math. **81**, Addison Wesley Longman Limited 1996.

[53] K. A. ZHEVLAKOV, A. M. SLINKO, I. P. SHESTAKOV, and A. I. SHIRSHOV, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York, 1982.

INDICE DE SIMBOLOS

INDICE DE TERMINOLOGIA