SISTEMAS PRODUCTO Y TEOREMAS DE FUBINI PARA LA INTEGRACION DE RIEMANN-LOOMIS

Enrique de Amo Artero

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

1994

SISTEMAS PRODUCTO Y TEOREMAS DE FUBINI PARA LA INTEGRACION DE RIEMANN-LOOMIS

Enrique de Amo Artero

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Vº Bº del Director

Fdo.: Manuel Díaz Carrillo

Fdo.: Enrique de Amo Artero

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

1994

La presente Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Doctor Manuel Díaz Carrillo.

A todos los que con su vida dan Vida.

INDICE:

CAPITULO II:

CAPITULO III:

CAPITULO IV:

INTRODUCCION.

RESUMEN DE LA MEMORIA.

Nuestro trabajo se enmarca en el estudio de extensiones integrales para funcionales lineales no negativos arbitrarios, definidos en retículos vectoriales de funciones reales.

La situación que considera la integración respecto de medidas finitamente aditivas es bien conocida: para un semianillo **U** de partes de un conjunto arbitrario **X** y una medida μ de **U** en $[0,+\infty[$, sólo finitamente aditiva, el espacio $\mathbf{R}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ de las funciones Riemann-μ-integrables, análogo al espacio $\mathbf{L}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ de las funciones Lebesgue-μ-integrables, fue introducido por Loomis en 1952. Posteriormente, $\mathbf{R}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ fue extendido a funciones evaluadas en espacios de Banach por Dunford y Schwartz, 1958, y, más próximo en el tiempo, usando el concepto de convergencia μ-local, ha sido generalizado por Günzler, 1985.

Por otra parte, el estudio del proceso de extensión similar al de Daniell, pero sin condiciones (o condiciones más débiles) de continuidad sobre la integral elemental, ha sido tratado por diversos autores, como son Aumann, Loomis, Gould y Schäfke.

En esta última línea de extensión integral, a partir de un funcional **I** lineal y no negativo definido sobre un retículo vectorial **B** de funciones reales en un conjunto arbitrario **X**, ésto es, un sistema de Loomis (X,B,I), se obtiene el espacio abstracto $R_1(B,I)$ de las funciones Riemann-Loomis integrables. Tal generalización se obtiene por "localización", usando un tipo de convergencia en media, ya sugerido por los trabajos de Loomis y Schäfke. Esta técnica permite formular teoremas de convergencia en una forma análoga a los clásicos, y desarrollar un tratamiento unificado de la integración μ-Riemann, Riemann-Loomis, Daniell o Bourbaki.

Además, en sucesivos trabajos, la clase extendida de funciones $R_1(B,I)$ y la extensión de I a $R_1(B,I)$ se obtiene por cualquiera de los tres métodos usuales en la teoría de la integración: ciertos límites de funciones elementales, igualdad de integrales superiores e inferiores, ó clausura de B en $\bar{\mathbb{R}}^X$ respecto de una cierta seminorma integral.

La teoría de la integración desarrollada por Lebesgue a principios de siglo, logra uno de sus resultados de mayor alcance en lo referente a la integración múltiple. Este concepto, introducido a mediados del siglo XVIII, había estado asociado al de "integral indefinida" por analogía con el cálculo en una variable. Sin embargo, con Euler, se empezó a tener una concepción clara de la integral doble llegando a escribirla correctamente mediante la iteración de dos integrales simples; lo cual, por otra parte, no era difícil de justificar gracias a las "sumas de Riemann". No obstante, este proceso encontraba serias dificultades: puede existir la integral múltiple como integral de Riemann, sin que las integrales iteradas tengan sentido. Estas dificultades las corrigió Lebesgue en su tesis gracias a la nueva definición de integral por él introducida.

Pese a todo, la clase de funciones para las que Lebesgue probó un teorema satisfactorio en integración iterada, la clase de las "funciones de Baire", no es suficientemente manejable. Es entonces, 1907, cuando Fubini prueba que si se exige sólo integrabilidad a la función f, el conjunto de puntos donde las funciones sección $y \longrightarrow f(x,y)$ no son integrables es un conjunto de medida nula; y, en consecuencia, la fórmula obtenida por Lebesgue conservaba su validez, también, en este caso.

La conocida frase de Yosida y Hewitt, 1952: "El teorema de Fubini pierde su validez para medidas finitamente aditivas...", seguida de un contraejemplo, ha estimulado a algunos autores a estudiar teoremas tipo Fubini para diferentes clases de funciones integrables. Por citar dos ejemplos significativos: Mertens, 1970, en el contexto de la teoría de los procesos estocásticos, y Luxemburg, 1961, generalizando el teorema de Fichtenholz, 1906. (Tal teorema depende de las especiales propiedades de la integral de Riemann en los espacios euclídeos, que no se conservan en la integral abstracta de Riemann.)

En 1975, Elsner desarrolla un estudio muy completo acerca de los teoremas tipo Fubini para las funciones propiamente μ-integrables, $\mathbf{R}_{prop}(\mu,\bar{\mathbb{R}})$, y las abstractas μ-integrables, $\mathbf{R}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$. Los trabajos posteriores de Schäfke y Hoffmann, 1977 y 1992, en el contexto de las integrales métricas, generalizan los resultados de Elsner y ofrecen nuevas condiciones para que el teorema de Fubini continúe siendo cierto.

Nuestro trabajo comenzó intentando responder a la cuestión de si los resultados dados por Elsner (para la integración propia de Riemann y la integración abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva), admitían una traslación formalmente simétrica a las correspondientes extensiones integrales a partir de un sistema arbitrario de Loomis **(X,B,I)**. La respuesta es afirmativa.

Nos planteamos, a continuación, el problema más general de estudiar condiciones más débiles para la existencia de las integrales iteradas, en el contexto de los sistemas integrales de Loomis, y establecer la validez de teoremas tipo Fubini para varias clases de funciones integrables (las propiamente integrables, las sumables, y las integrables en el sentido de Riemann-Loomis). Los resultados, totales o parciales según los casos, a estas y otras cuestiones, constituyen el contenido de esta memoria.

En el primer capítulo establecemos la notación que se usa a lo largo de la memoria y se plantean los principales conceptos y resultados sobre sistemas integrales de Loomis y sus extensiones integrales. Se hace especial hincapié en las extensiones integrales para los sistemas producto de Loomis y la relación entre estas extensiones integrales (lema 1.2), por su importancia para nuestro trabajo.

En el segundo capítulo se expone la clase $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$ de las funciones propiamente $\mathbf{I}$-integrables, y se dan los conceptos y y resultados básicos sobre las funciones y los conjuntos nulos.

Un primer planteamiento consiste en obtener diferentes pruebas del teorema de Fubini para la integración propia de Riemann, basándose en varias caracterizaciones usuales de dichas funciones (teoremas 2.3 y 2.4). En particular, este desarrollo contiene los resultados conocidos en integración respecto de una medida finitamente aditiva.

Usando el hecho de que las funciones de $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$ son aquellas para las cuales las integrales superior e inferior de Riemann conciden, se da una demostración sencilla y directa del teorema de Fubini (teorema 2.5), que mantiene el paralelismo formal con la integral de Bourbaki o de Daniell para funciones sumables.

Analizamos también, presentando algunos ejemplos, la respuesta negativa que se sigue cuando se plantean resultados análogos para otras extensiones integrales, por ejemplo, las funciones sumables respecto de sistemas de Loomis arbitrarios.

En el tercer capítulo, dedicamos la primera sección a exponer los principales conceptos y propiedades de la clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ de las funciones Riemann-Loomis integrables, que se usarán en nuestro trabajo.

El estudio detallado de las condiciones bajo las cuales se puede establecer un teorema de Fubini para el caso $\lambda\times\mu$-aditivo, nos conduce a formular las correspondientes condiciones abstractas, y otras más generales, para que dicho teorema, en el caso funcional con un sistema de Loomis como punto de partida, mantenga su validez (teorema 3.1 y teorema 3.2, respectivamente).

Probamos, entre otros resultados, que para sistemas producto de Loomis estonianos y continuos inferiormente, dada una función integrable en el sentido de Riemann-Loomis cuyas secciones estén acotadas por una función integrable, existe su integral iterada, salvo en un conjunto numerablemente nulo, y puede evaluarse su integral mediante esta iteración integral.

En la consecución de nuestros resultados es esencial considerar la clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ como la clausura de $\mathbf{B}$ en $\bar{\mathbb{R}}^X$ respecto de la seminorma integral obtenida por la localización de la correspondiente integral inferior (definición 3.4). También es determinante la relación existente entre las integrales localizadas relativas a cada uno de los espacios que intervienen en el sistema integral producto (lemas 3.2 y 3.3). De hecho, cuando se carece de esta relación, falla el oportuno teorema de Fubini, como se prueba con varios contraejemplos.

En la última sección del capítulo se ofrece una respuesta afirmativa a la cuestión de si las funciones medibles para cuya función valor absoluto exista la integral iterada, son o no integrables (teorema 3.5).

De nuevo, la particularización de estos resultados al espacio producto de funciones integrables inducido por una medida finitamente aditiva, subsume los resultados conocidos por nosotros.

El cuarto capítulo se centra en los sistemas producto tensor y en los sistemas integrales amplios (definición 4.1), e indaga sobre la riqueza de las propiedades de tales sistemas, para dar condiciones suficientes que permitan establecer teoremas tipo Fubini en las clases más habituales de funciones integrables.

Señalemos, por último, que una parte de los resultados establecidos en los capítulos II y III, están contenidos en dos trabajos realizados en colaboración: [Am-Dí.1], que aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc., y [Am-Dí.2], sometido a publicación.

Finalmente, sólo me resta expresar mi más sincero y profundo agradecimiento:

Al Profesor Manuel Díaz Carrillo, por su capacidad de estímulo para el trabajo de investigación en el marco universitario. Sin su pedagógica dirección y dedicación continua habría sido imposible la realización de esta memoria.

Al Profesor Pablo Bobillo Guerrero, *in memoriam*. Su talante crítico en la construcción del edificio matemático, dejó profunda huella durante el año que fué tutor de este aspirante.

Al Profesor Hans Günzler, de la Universidad de Kiel. Sus numerosas sugerencias, y ejemplos, siempre han cuajado en fructíferos retos.

Y a todos los demás miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada y del Departamento de Algebra y Análisis Matemático de la Universidad de Almería, por su constante estímulo y apoyo.

Almería, abril de 1994.

Enrique de Amo Artero

CAPITULO I

SISTEMAS PRODUCTO DE LOOMIS Y EXTENSIONES INTEGRALES.

1.1 *Preliminares. Sistemas integrales de Loomis.*

1.2 *Extensiones integrales para sistemas de Loomis arbitrarios.*

1.3 *Extensiones integrales para sistemas producto.*

1.4 *Integral inducida por una medida finitamente aditiva. Espacio de medida producto.*

En este capítulo se establecen la notación y la terminología previas que se usarán a lo largo de toda esta memoria, a la vez que se recopilan los resultados básicos que utilizaremos sobre sistemas integrales de Loomis y sus extensiones integrales.

Se presentan, también, los sistemas producto de Loomis, sus correspondientes extensiones integrales y las relaciones que existen entre ellas, particularizando al caso de sistemas producto inducidos por medidas finitamente aditivas.

1.1 PRELIMINARES. SISTEMAS INTEGRALES DE LOOMIS.

Se consideran el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y la recta real ampliada $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. En $\bar{\mathbb{R}}$ se define el orden usual $\leq$, compatible con el de $\mathbb{R}$, como $-\infty \leq \mathbf{a} \leq +\infty$, para todo $\mathbf{a}$ en $\bar{\mathbb{R}}$.

En $\bar{\mathbb{R}}$ es conocido el problema que se plantea al escribir $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, con $\mathbf{a} = \mathbf{b} \in \{-\infty,+\infty\}$. En nuestro caso, se adoptan las siguientes definiciones o convenios (véanse, por ejemplo, [Dí-Gü.1] o [Gü.3]):

Para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \bar{\mathbb{R}}$, se definen dos operaciones aditivas $+$ y $\dot{+}$ como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := \begin{cases} \mathbf{a}+\mathbf{b} & \ldots \text{ definida usualmente en } \bar{\mathbb{R}} \\ 0 & \ldots \text{ si } \mathbf{a} = \mathbf{b} \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} := \begin{cases} \mathbf{a}+\mathbf{b} & \ldots \text{ definida usualmente en } \bar{\mathbb{R}} \\ \infty & \ldots \text{ si } \mathbf{a} = \mathbf{b} \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} \dot{-} \mathbf{b} := \mathbf{a} \dot{+} (-\mathbf{b}).$$

Ambas operaciones son conmutativas, pero, mientras que la operación $+$ es no asociativa, la suma $\dot{+}$ sí lo es.

Para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \bar{\mathbb{R}}$, se nota

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} := \textit{máx}\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \textit{mín}\ (\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a}^{+} := \mathbf{a} \vee 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{a}^{-} := \mathbf{a} \wedge 0.$$

Se tiene $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{+} - \mathbf{a}^{-}$ y $|\mathbf{a}| = \mathbf{a}^{+} + \mathbf{a}^{-}$, para cada $\mathbf{a} \in \bar{\mathbb{R}}$.

Se considera, asímismo, la operación $\cap$ definida por

$$\mathbf{a} \cap \mathbf{b} := (\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\ ) \vee (-\mathbf{b}), \quad \forall\ \mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \bar{\mathbb{R}},\ \mathbf{b} \geq 0.$$

Si $\mathbf{a} \geq 0$, $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Obsérvese que, con la notación de M. H. Stone [St], se tiene que

$$\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \textit{mid}\ (-\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \textit{máx}\ \{\ \textit{mín}(-\mathbf{b},\mathbf{a});\ \textit{mín}(\mathbf{a},\mathbf{b});\ \textit{mín}(-\mathbf{b},\mathbf{b})\ \}.$$

Las propiedades elementales de las operaciones arriba indicadas, se resumen en el siguiente lema. (Véase, por ejemplo, [Gü.2], pgs. 339, 354).

LEMA 1.1

Para las operaciones $\dot{+}$ *y* $\cap$ *de* $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ *en* $\bar{\mathbb{R}}$*, dados* $a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}$ *se tiene:*

i) $\dot{+}$ *es asociativa:* $a \dot{+} (b \dot{+} c) = (a \dot{+} b) \dot{+} c$;

ii) $\dot{+}$ *es compatible con el orden* $\leq$ *en* $\bar{\mathbb{R}}$*:*

si $a \leq b$, *entonces* $a \dot{+} c \leq b \dot{+} c$;

iii) si $a \dot{+} b \leq c$, *entonces* $a \leq c \dot{+} (-b) = c \dot{-} b$;

iv) si $\alpha \in \mathbb{R}^+_0$*, se tiene:* $\alpha (a \dot{+} b) = \alpha a \dot{+} \alpha b$;

v) $| a \dot{+} b | \leq | a \dot{+} c | + | b \dot{+} c |$;

vi) $| (a \dot{+} b) - (c \dot{+} d) | \leq | a - c | \dot{+} | b - d | \leq$

$\leq | a \dot{-} c | + | b \dot{-} d |$;

vii) si $a \leq b$ *y* $c \leq d$, *entonces* $a \dot{+} c \leq b \dot{+} d$;

viii) si $b, c, d \in [0,+\infty]$ *y* $a \leq b + c$, *entonces*

$a \wedge d \leq b \wedge d + c \wedge d$;

ix) si $c \in [0,+\infty]$ *se tiene*

$| a \cap c - b \cap c | \leq 2 (| a - b| \wedge c)$;

x) $a, b, c \in [0,+\infty]$, *entonces*

$(a + b) \wedge c = (a \wedge c + b \wedge c) \wedge c$;

xi) si $a, b, c \in]-\infty,+\infty]$, *entonces*

$(a - b) \wedge c = a \wedge (b + c) - b$

siempre que el segundo miembro tenga sentido;

xii) si $a \leq b$, *entonces*

$b \wedge c - a \wedge c \leq b - a$;

xiii) si $a \leq c$ *y* $b \leq c$, *entonces*

$a \leq (a \wedge b) + c - b$.

Como es habitual, las operaciones introducidas en $\bar{\mathbb{R}}$ inducen las correspondientes operaciones puntuales en el conjunto

$\bar{\mathbb{R}}^X$ de las funciones numéricas definidas sobre un conjunto arbitrario X no vacío.

Recordemos que una clase $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^X$ se dice *un* $\mathbb{R}$*-retículo vectorial* (o *retículo vectorial real*), si para $f, g \in \mathbf{B}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que αf, $f+g$, $f \wedge g$, $f \vee g \in \mathbf{B}$.

Para clases de funciones numéricas, $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, se da la siguiente

DEFINICION 1.1

La clase $\mathbf{M} \subseteq \bar{\mathbb{R}}^X$ se dirá un $\bar{\mathbb{R}}$*-retículo vectorial* sii para $f, g \in \mathbf{M}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene αf, $f \vee g$, $f \wedge g$, $|f| \in \mathbf{M}$, y, además, si $h \in \bar{\mathbb{R}}^X$, con $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ en X tal que $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, entonces $h \in \mathbf{M}$.

Con esta definición, clásica en autores como [Pf] y [Ro], se tiene que los $\bar{\mathbb{R}}$-retículos vectoriales son cerrados para las operaciones $+$ y $\dot{+}$ introducidas en $\bar{\mathbb{R}}$; es decir, si $f, g \in \mathbf{M}$, entonces $f+g$, $f \dot{+} g \in \mathbf{M}$.

El lema 1.1 se puede completar con las correspondientes propiedades de la suma $\dot{+}$ en $\bar{\mathbb{R}}^X$; en concreto, son de destacar para $f, g, h \in \bar{\mathbb{R}}^X$, $h \geq 0$:

xiv) Desigualdad de Birkhoff:

$$| f \wedge h - g \wedge h | \leq | f - g |;$$

xv) $| f \vee h - g \vee h | \leq | f - g |;$

siendo estas desigualdades ciertas para $\dot{-}$ (véase [Gü.2], pág. 339 y ss.).

Siguiendo la terminología utilizada en [Lo], [Pf], [Bo-Dí.1], etc., recordamos los siguientes conceptos.

DEFINICION 1.2

Dados un conjunto arbitrario $\mathbf{X}$ no vacío, un retículo vectorial $\mathbf{B}$ de funciones de $\mathbf{X}$ en $\mathbb{R}$ ($\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{X}}$) y un funcional $\mathbf{I}$ lineal y no negativo de $\mathbf{B}$ en $\mathbb{R}$, es decir, para f y g en $\mathbf{B}$ y α y β en $\mathbb{R}$, $\mathbf{I}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathbf{I}(f) + \beta\mathbf{I}(g)$ e $\mathbf{I}(f) \geq 0$, si $f \geq 0$, a la terna $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$ se le llama *sistema integral de Loomis*, (o *sitema de Loomis*).

Nótese que al funcional lineal no negativo $\mathbf{I}$ en $\mathbf{B}$ no se le exige ninguna condición de continuidad.

Siempre asumiremos que, dado $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$, exite f en $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{I}(f) \neq 0$ y para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbf{X}$ existe f en $\mathbf{B}$ tal que $f(\mathbf{x}) \neq 0$.

Sean $(\mathbf{X}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ y $(\mathbf{X}_2,\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$ dos sistemas de Loomis, y sea $\mathbf{X}_3 := \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$. Para toda $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}_2}$, definimos la $\mathbf{x}$-*sección* de f, $f_{\mathbf{x}} : \mathbf{X}_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, dada por $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbf{X}_2$.

Si la función f es tal que $f_{\mathbf{x}}$ está en $\mathbf{B}_2$ para cada $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}_1$, se define la función $\mathbf{I}_2 f$ en $\mathbf{X}_1$ por:

$$\mathbf{I}_2 f(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}}),\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1.$$

Si esta nueva función $\mathbf{I}_2 f$, que está en $\mathbb{R}^{\mathbf{X}_1}$, es de $\mathbf{B}_1$, podremos considerar $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f)$.

Las nociones previas nos llevan a introducir el concepto de sistema producto de Loomis que utilizaremos, salvo indicación en contra, a lo largo de esta memoria.

DEFINICION 1.3

LLamamos *sistema producto de Loomis respecto de los sistemas* (X_1,B_1,I_1) *y* (X_2,B_2,I_2) a cualquier terna (X_3,B_3,I_3) tal que:

a) $X_3 := X_1 \times X_2$.

b) $\mathbf{B}_3$ es un retículo de funciones reales definidas en X_3, $\mathbf{B}_3 \subseteq \mathbb{R}^{X_3}$, tal que, para cada $f \in \mathbf{B}_3$, se cumple

i) $f_x \in \mathbf{B}_2$, $\forall\ x \in X_1$, y

ii) $I_2 f \in \mathbf{B}_1$.

c) $I_3(f) := I_1(I_2 f)$, $\forall\ f \in \mathbf{B}_3$.

A continuación probaremos, con un cálculo elemental, que el sistema producto de Loomis (X_3,B_3,I_3) es, efectivamente, un sistema de Loomis.

Es inmediato comprobar que $\mathbf{B}_3$ es espacio vectorial, lo que junto a la hipótesis de retículo exigida en la definición 1.3 lo dota del carácter de retículo vectorial o espacio vectorial modular.

Veamos que I_3 es un funcional lineal y monótono sobre $\mathbf{B}_3$. Para ello, será útil llamar *operador* $\mathbf{x}$*-sección* $\mathbb{I}_2 : \mathbf{B}_3 \longrightarrow \mathbf{B}_1$, al operador dado por la fórmula $\mathbb{I}_2(f) := I_2 f$, donde

$$I_2 f : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ con } I_2 f(\mathbf{x}) := I_2(f_{\mathbf{x}}), \quad \forall\ \mathbf{x} \in X_1.$$

$\mathbb{I}_2$ es lineal y monótono en $\mathbf{B}_3$, en efecto:

i) $\mathbb{I}_2(\alpha f+\beta g)(\mathbf{x}) = I_2\{(\alpha f+\beta g)_{\mathbf{x}}\} =$ (I_2 es lineal en $\mathbf{B}_2$)

$$= \alpha I_2(f_{\mathbf{x}})+\beta I_2(g_{\mathbf{x}}) = \alpha \mathbb{I}_2(f)(\mathbf{x})+\beta \mathbb{I}_2(g)(\mathbf{x}), \ \forall\ \mathbf{x} \in X_1.$$

ii) sean f y g en $\mathbf{B}_3$, $f \leq g$; así,

$$\mathcal{I}_2(f)(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(f_\mathbf{x}) \leq \mathbf{I}_2(g_\mathbf{x}) =: \mathcal{I}_2(g)(\mathbf{x}),\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1.$$

Con ello, se sigue la linealidad de $\mathbf{I}_3$:

si f, $g \in \mathbf{B}_3$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathbf{I}_3(\alpha f+\beta g) := (\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2)(\alpha f+\beta g) := \mathbf{I}_1(\mathcal{I}_2(\alpha f+\beta g)) =$$

(por la linealidad de $\mathcal{I}_2$ e $\mathbf{I}_1$)

$$= \alpha\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f) + \beta\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 g) = \alpha\mathbf{I}_1(\mathcal{I}_2(f)) + \beta\mathbf{I}_1(\mathcal{I}_2(g)) =:$$

$$=: \alpha(\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2)(f) + \beta(\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2)(g) =: \alpha\mathbf{I}_3(f) + \beta\mathbf{I}_3(g).$$

Finalmente, la monotonía es consecuencia de la propia monotonía del operador $\mathcal{I}_2$ y de la integral $\mathbf{I}_1$.

Señalemos también que el operador $\mathbf{x}$-sección tiene la deseada propiedad modular

$$|\mathcal{I}_2(f)|(\mathbf{x}) := |\mathcal{I}_2(f)(\mathbf{x})| := |\mathbf{I}_2 f(\mathbf{x})| := |\mathbf{I}_2(f_\mathbf{x})| \leq$$

$$\leq \mathbf{I}_2(|f_\mathbf{x}|) := \mathbf{I}_2|f|(\mathbf{x}) := \mathcal{I}_2(|f|)(\mathbf{x}),\ \text{cualquiera que sea } \mathbf{x} \text{ en } \mathbf{X}_1.$$

Como es usual, una sucesión (h_n) en $\mathbf{B}$ se dice $\mathbf{I}$-Cauchy, si $\mathbf{I}(|h_n-h_m|) \longrightarrow 0$, si n, m $\to +\infty$.

Como consecuencia inmediata de las propiedades anteriores, se obtiene la siguiente

<u>PROPIEDAD</u> <u>1.1</u>

Si $(f_n) \subseteq \mathbf{B}_3$ *es* $\mathbf{I}_3$*-Cauchy, entonces* $(\mathbf{I}_2 f_n) \subseteq \mathbf{B}_1$ *es* $\mathbf{I}_1$*-Cauchy.*

<u>DEMOSTRACION.</u>

Por definición de sistema producto $\mathbf{I}_2 f_n \in \mathbf{B}_1$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$. Por tanto, se tiene

$$\mathbf{I}_1(|\mathcal{I}_2(f_n)-\mathcal{I}_2(f_m)|) = \mathbf{I}_1(|\mathcal{I}_2(f_n-f_m)|) \leq \mathbf{I}_1 \circ \mathcal{I}_2(|f_n-f_m|) =$$

$$= I_3(|f_n - f_m|) \longrightarrow 0, \text{ si } n, m \to +\infty. \blacksquare$$

Nótese que el sistema producto de Loomis de dos sistemas dados no tiene porqué ser único. Analizamos con más detalle esta cuestión en el estudio dedicado al "sistema producto amplio" del capítulo IV. (Véase también [Pf], cap. 15).

Por lo que se refiere al concepto de sistema producto, cabe también señalar que la definición 1.3, aquí adoptada, está en la línea de Hoffmann ([Ho], pág. 139) que difiere de la introducida en Pfeffer ([Pf], pág. 184), donde aparecen recogidas, como exigencias a verificar por el sistema producto, además de las aquí dadas, las condiciones duales:

"$f^y \in \mathbf{B}_1$ para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbf{X}_2$, e $\mathbf{I}_1 f \in \mathbf{B}_2$";

de modo que se hace natural exigir la igualdad de las integrales iteradas iniciales, ésto es, $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f) = \mathbf{I}_2(\mathbf{I}_1 f)$ para cada f en $\mathbf{B}_3$, y definir $\mathbf{I}_3$ por esta igualdad.

La definición adoptada en [Pf] es más restrictiva que la nuestra, como pone de manifiesto el ejemplo siguiente (véase [El], pág. 270, bemerkung 4.a).

(1) <u>EJEMPLO 1.1</u>

Sean los sistemas de Loomis $(\mathbf{X}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ y $(\mathbf{X}_2,\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$ dados por $\mathbf{X}_1 := \mathbb{R}$, $\mathbf{X}_2 := \mathbb{N}$;

$$\mathbf{B}_1 := \left\{ h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{]a_i,b_i]} \ ; \ m \in \mathbb{N},\ \alpha_i,\ a_i,\ b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i \right\};$$

$$\mathbf{B}_2 := \left\{ k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{A_j} \ ; \ n \in \mathbb{N},\ \beta_j \in \mathbb{R},\ A_j \subseteq \mathbb{N},\ A_j \text{ ó } \mathbb{N}-A_j \text{ finito} \right\};$$

y las integrales $\mathbf{I}_1(h) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(b_i - a_i)$ e $\mathbf{I}_2(k) := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu_2(A_j)$, donde $\mu_2(A) := 0$ si A es finito; $:= 1$ si es $\mathbb{N}-A$ finito.

Si consideramos la función $f \in \mathbb{R}^{X_3}$ dada por

$$f := \sum_n \chi_{]n,n+1]x\{n\}},$$

es claro que $f \in \mathbf{B}_3$ según la definición 1.3; pero $f \notin \mathbf{B}_3$ en el sentido de [Pf], pues $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f) = 0 \neq 1 = \mathbf{I}_2(\mathbf{I}_1 f)$.

En efecto:

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 < \mathbf{x} \leq n_0+1$; luego

$$f_x = \sum_n \chi_{]n,n+1]}(\mathbf{x})\chi_{\{n\}} = \chi_{\{n_0\}} \in \mathbf{B}_2;$$

y, en consecuencia, es, para cada $\mathbf{x}$ en X_1

$$\mathbf{I}_2 f(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(f_x) = \mathbf{I}(\chi_{\{n_0\}}) = \mu_2(\{n_0\}) = 0.$$

Por tanto, $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f) = 0$.

Pero por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \chi_{]n,n+1]} \in \mathbf{B}_1$. En consecuencia

$$\mathbf{I}_1 f(n) := \mathbf{I}_1(f^n) = \mathbf{I}_1(\chi_{]n,n+1]}) = \mu_1(]n,n+1]) = 1; \quad \text{y,}$$

por tanto, es

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{I}_1 f) = \mathbf{I}_2(\chi_{\mathbb{N}}) = \mu_2(\mathbb{N}) = 1.$$

En esta memoria trabajamos, esencialmente, con la integral producto $\mathbf{I}_3$ definida por la integral iterada $\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2$. Para el problema de la igualdad de las integrales iteradas iniciales, $\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2 \circ \mathbf{I}_1$, véanse, por ejemplo, [Lu], [Si] y [Shi].

1.2 EXTENSIONES INTEGRALES PARA SISTEMAS DE LOOMIS ARBITRARIOS.

En esta sección se recogen los conceptos desarrollados en [Bo-Dí.1] y las propiedades básicas del proceso de extensión integral, a partir de un sistema de Loomis arbitrario $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$. El método seguido mantiene un paralelismo formal con el caso de Daniell, pero sin exigir ninguna condición de continuidad al funcional $\mathbf{I}$.

El método aquí resumido puede verse con detalle en [Bo-Dí.1]. Otras propiedades y aplicaciones, teoremas de convergencia y relaciones con otras integrales, se encuentran en [Bo-Dí.2] y [Gü.3].

En [Bo-Dí.1] se introduce una primera extensión de $\mathbf{B}$ por

$$\mathbf{B}^{+} := \{\ f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}\ ;\ f = \sup g\ ,\ f \geq g \in \mathbf{B}\ \} - \{-\infty\} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}^{-} := \mathbf{B}^{+}.$$

También se extiende el funcional $\mathbf{I}$; son las llamadas *integrales superior e inferior de Riemann*, respectivamente:

Para toda $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$, $\mathbf{I}^{-}(f) := \mathit{inf}\ \{\ \mathbf{I}(g)\ :\ f \leq g \in \mathbf{B}\ \}$, con $\mathit{inf}\ \emptyset := +\infty$, e $\mathbf{I}^{+}(f) := -\mathbf{I}^{-}(-f)$.

$\mathbf{I}^{+}$ e $\mathbf{I}^{-}$ son $\mathbb{R}_{+}$-homogéneos y monótonos en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$.

Dado que estas extensiones de $\mathbf{I}$, como es conocido, no son aditivas (concretamente, $\mathbf{I}^{-}$ es subaditivo en $\mathbf{B}^{-}$ e $\mathbf{I}^{+}$ es superaditivo en $\mathbf{B}^{+}$), se introducen las clases $\mathbf{B}_{-}$ y $\mathbf{B}_{+}$ dadas por

$\mathbf{B}_{-} := \{ f \in \mathbf{B}^{-} \ ; \ \mathrm{I}^{-}(f+g) = \mathrm{I}^{-}(f) + \mathrm{I}^{-}(g), \ \forall \ g \in \mathbf{B}^{-} \}$ y $\mathbf{B}_{+} := -\mathbf{B}_{-}$.

Por ejemplo, $\mathbf{B}^{+}$ y $\mathbf{B}_{+}$ son estables para la suma y el producto por reales no negativos, $\vee$-cerradas; $\mathbf{B}^{-}$ es $\wedge$-cerrado e I^{+} es aditivo en $\mathbf{B}_{+}$.

Para cada $f \in \bar{\mathbb{R}}^{X}$ quedan definidas sus *integrales superior* e *inferior* de la manera usual, esto es,

$$\bar{\mathrm{I}}(f) := \mathit{inf} \ \{ \mathrm{I}^{+}(g) \ ; \ f \le g \in \mathbf{B}_{+} \} \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{I}}(f) := -\bar{\mathrm{I}}(-f).$$

$\bar{\mathrm{I}}$ es $\dot{+}$ subaditivo, $\bar{\mathbb{R}}_{+}$-homogéneo y monótono en $\bar{\mathbb{R}}^{X}$.

Las integrales arriba introducidas están relacionadas por la cadena de desigualdades

$$\mathrm{I}^{+}(f) \le \underline{\mathrm{I}}(f) \le \bar{\mathrm{I}}(f) \le \mathrm{I}^{+}(f), \qquad [\&]$$

cualquiera que sea f en $\bar{\mathbb{R}}^{X}$.

En [Bo-Dí.1] se introduce la clase de las *funciones* I-*sumables* $\mathbf{B}_{0}$ ó $\bar{\mathbf{B}} := \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^{X} \ ; \ \underline{\mathrm{I}}(f) = \bar{\mathrm{I}}(f) \in \mathbb{R} \}$.

El funcional $\mathbf{I}$ se extiende a esta nueva clase de manera natural ($\mathbf{I} := \bar{\mathrm{I}}$), siendo lineal y monótono. Además, la clase $\bar{\mathbf{B}}$ es un $\bar{\mathbb{R}}$-retículo vectorial (ésto es, cerrado para las operaciones $+$, $\dot{+}$, $\alpha\cdot$, $\wedge$, $\vee$ y $|\circ|$) y viene descrita como la clausura de $\mathbf{B}$ en $\bar{\mathbb{R}}^{X}$ respecto de la seminorma integral $\bar{\mathrm{I}}(|\circ|)$, tal y como establece el siguiente resultado de [Bo-Dí.1] (teorema 5.1):

Para cada función f **I**-*sumable y para cada real positivo ε existe una función g en* $\mathbf{B}$ *tal que* $\bar{\mathrm{I}}(|f-g|) < \varepsilon$.

1.3 EXTENSIONES INTEGRALES PARA SISTEMAS PRODUCTO DE LOOMIS.

Los conceptos y terminología presentados en la sección anterior, se adaptan ahora al caso en que se considere un sistema producto de Loomis.

Así, con i = 1, 2, 3, y siguiendo a [Bo-Dí.1], definimos la *integral superior de Riemann para* f en $\overline{\mathbb{R}}^{X_i}$, como

$$\mathbf{I}_i^-(f) := \inf \{ \mathbf{I}_i(h) \; ; \; f \leq g \in \mathbf{B}_i \}, \quad \text{con} \quad \inf \emptyset := +\infty.$$

$\mathbf{I}_i^-$ es positivamente homogéneo, monótono y subaditivo en $\overline{\mathbb{R}}^{X_i}$.

Dualmente se define la *integral inferior de Riemann* $\mathbf{I}_i^+(f)$, para cada f en $\overline{\mathbb{R}}^{X_i}$, $\mathbf{I}_i^+(f) := -\mathbf{I}_i^-(-f)$.

Ahora, definiremos el operador $\mathbb{I}_2^-$ de $\overline{\mathbb{R}}^{X_3}$ en $\overline{\mathbb{R}}^{X_1}$ por la fórmula

$$\mathbb{I}_2^-(f) := \mathbf{I}_2^- f, \text{ para cada } f \text{ en } \overline{\mathbb{R}}^{X_3};$$

donde $\mathbf{I}_2^- f : X_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ viene dado por

$$(\mathbf{I}_2^- f)(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2^-(f_{\mathbf{x}}), \; \forall \; \mathbf{x} \in X_1.$$

$\mathbb{I}_2^-$ es subaditivo, positivamente homogéneo y monótono en $\overline{\mathbb{R}}^{X_3}$, ésto es:

a) Para cada $\mathbf{x}$ en X_1, se tiene

$$\mathbb{I}_2^-(f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_2^-\{(f+g)_{\mathbf{x}}\} \leq \mathbf{I}_2^-(f_{\mathbf{x}}) + \mathbf{I}_2^-(g_{\mathbf{x}}) = \mathbb{I}_2^-(f)(\mathbf{x}) + \mathbb{I}_2^-(g)(\mathbf{x}).$$

b) $\mathbb{I}_2(\alpha f) = \alpha \mathbb{I}_2(f)$, para cada $\alpha \geq 0$.

c) $\mathbb{I}_2^-(f) \leq \mathbb{I}_2^-(g)$, si $f \leq g$.

Las pruebas de b) y c) son similares al cálculo realizado en a).

Análogamente se define el operador $\mathbb{I}_2^+$ de $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$ en $\bar{\mathbb{R}}^{X_1}$ por la fórmula $\mathbb{I}_2^+(f) := \mathbf{I}_2^+ f$, para cada f de $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$, donde:

$$\mathbf{I}_2^+ f : X_1 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+, \text{ con } (\mathbf{I}_2^+ f)(x) := \mathbf{I}_2^+(f_x), \ \forall\, x \in X_1.$$

$\mathbb{I}_2^+$ es superaditivo, positivamente homogéneo y monótono en $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$.

Se definie la *integral superior de* $\mathbf{I}_i$, i = 1, 2, 3, para cada f en $\bar{\mathbb{R}}^{X_i}$, por

$$\bar{\mathbf{I}}_i(f) := \inf \{ \mathbf{I}_i^+(h) \ ; \ f \le g \in (\mathbf{B}_i)_+ \}, \text{ con } \inf \emptyset := +\infty.$$

$\bar{\mathbf{I}}_i$ es positivamente homogéneo, monótono y subaditivo en $\bar{\mathbb{R}}^{X_i}$. Dualmente se define la *integral inferior de* $\mathbf{I}_i$, $\underline{\mathbf{I}}_i(f)$, para cada f en $\bar{\mathbb{R}}^{X_i}$, por $\underline{\mathbf{I}}_i(f) := -\bar{\mathbf{I}}_i(-f)$.

Definiremos el correspondiente operador $\bar{\mathbb{I}}_2$ de $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$ en $\bar{\mathbb{R}}^{X_1}$ por la fórmula

$$\bar{\mathbb{I}}_2(f) := \bar{\mathbf{I}}_2 f, \quad \text{para toda } f \text{ en } \bar{\mathbb{R}}^{X_3},$$

donde $\bar{\mathbf{I}}_2 f : X_1 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ con $(\bar{\mathbf{I}}_2 f)(x) := \bar{\mathbf{I}}_2(f_x)$, $\forall\, x \in X_1$.

Es fácil comprobar que $\bar{\mathbb{I}}_i$ e $\underline{\mathbb{I}}_i$ heredan las propiedades verificadas por $\bar{\mathbf{I}}_i$ e $\underline{\mathbf{I}}_i$, respectivamente.

Las propiedades arriba citadas sobre las integrales superiores e inferiores de Riemann $\mathbf{I}_i^+$ e $\mathbf{I}_i^-$ y las integrales superiores e inferiores $\bar{\mathbf{I}}_i$ e $\underline{\mathbf{I}}_i$, junto con la propiedad [&], nos proporcionan el siguiente cuadro de relaciones.

PROPIEDAD 1.2

Para toda f en $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$, se tiene

$$
\begin{array}{ccccccc}
I_1^+\circ I_2^+(f) & \le & I_1^+\circ \underline{I}_2(f) & \le & I_1^+\circ \bar{I}_2(f) & \le & I_1^+\circ I_2^-(f) \\
\text{I}\wedge & & \text{I}\wedge & & \text{I}\wedge & & \text{I}\wedge \\
\underline{I}_1\circ I_2^+(f) & \le & \underline{I}_1\circ \underline{I}_2(f) & \le & \underline{I}_1\circ \bar{I}_2(f) & \le & \underline{I}_1\circ I_2^-(f) \\
\text{I}\wedge & & \text{I}\wedge & & \text{I}\wedge & & \text{I}\wedge \\
\bar{I}_1\circ I_2^+(f) & \le & \bar{I}_1\circ \underline{I}_2(f) & \le & \bar{I}_1\circ \bar{I}_2(f) & \le & \bar{I}_1\circ I_2^-(f) \\
\text{I}\wedge & & \text{I}\wedge & & \text{I}\wedge & & \text{I}\wedge \\
I_1^-\circ I_2^+(f) & \le & I_1^-\circ \underline{I}_2(f) & \le & I_1^-\circ \bar{I}_2(f) & \le & I_1^-\circ I_2^-(f).
\end{array}
$$

En todo lo que sigue jugará un papel importante el próximo resultado, el cual establece la relación entre las primeras extensiones integrales relativas a los tres espacios que intervienen en el concepto de sistema producto de Loomis. También se dan acotaciones superior e inferior (mediante I_3^- e I_3^+, respectivamente) a las diferentes integrales iteradas descritas en la propiedad 1.2.

LEMA 1.2

Si f está en $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$, entonces

$$I_3^+(f) \le I_1^+(I_2^+f) \quad e \quad I_3^-(f) \ge I_1^-(I_2^-f).$$

DEMOSTRACION.

Probaremos que $I_3^-(f) \ge I_1^-(I_2^-f)$. Si $I_3^-(f) = +\infty$, es cierto. Supongamos que $I_3^-(f) \ne +\infty$, entonces, se verifica que

$$I_3^-(f) := inf \{ I_3(g) \ ; \ f \le g \in \mathbf{B}_3 \} =$$

$$= inf \{ I_1(I_2g) \ ; \ f \le g \in \mathbf{B}_3 \} \ge$$

(nótese que $\{ g \in \mathbf{B}_3 \ ; \ f \le g \} \subseteq \{ g \in \mathbf{B}_3 \ ; \ I_2^-f \le I_2^-g = I_2g \}$)

$$\geq \ inf \ \{ \ \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 g) \ ; \ \mathbf{I}_2^- f \leq \mathbf{I}_2^- g = \mathbf{I}_2 g \ , \ g \in \mathbf{B}_3 \ \} \ \geq$$

(por la condición $\mathbb{I}_2(\mathbf{B}_3) \subseteq \mathbf{B}_1$, ii.b), def. 1.3)

$$\geq \ inf \ \{ \ \mathbf{I}_1(h) \ ; \ \mathbf{I}_2^- f \leq h \in \mathbf{B}_1 \ \} \ =: \ \mathbf{I}_1^-(\mathbf{I}_2^- f).$$

Teniendo presente que para cada f en $\bar{\mathbb{R}}^{X_i}$, $\mathbf{I}_i^+(f) := -\mathbf{I}_i^-(-f)$, i = 1, 2, 3, la otra desigualdad se sigue directamente. ∎

Como consecuencia de la propiedad 1.2 y del lema 1.2, se siguen los siguientes resultados:

i) Si $\underline{\mathbf{I}}_1 \circ \underline{\mathbf{I}}_2(f) = \overline{\mathbf{I}}_1 \circ \overline{\mathbf{I}}_2(f) \Rightarrow \underline{\mathbf{I}}_2 f$ *e* $\overline{\mathbf{I}}_2 f \in \bar{\mathbf{B}}_1$.

ii) Para toda f *en* $\mathbf{B}_{3+}$, *se verifica que*

$$\overline{\mathbf{I}}_3(f) = \mathbf{I}_3^+(f) \leq \mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(f) \leq \underline{\mathbf{I}}_1 \circ \underline{\mathbf{I}}_2(f) \leq \overline{\mathbf{I}}_1 \circ \overline{\mathbf{I}}_2(f).$$

iii) Dualmente, para toda f *en* $\mathbf{B}_{3-}$, *se verifica que*

$$\underline{\mathbf{I}}_3(f) = \mathbf{I}_3^-(f) \geq \mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-(f) \geq \overline{\mathbf{I}}_1 \circ \overline{\mathbf{I}}_2(f) \geq \underline{\mathbf{I}}_1 \circ \underline{\mathbf{I}}_2(f).$$

iv) Si $f \in \mathbf{B}_{3+}$ *e* $\mathbf{I}_3^+(f) = \mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(f)$, *entonces* $f \in \bar{\mathbf{B}}_3$.

(Véanse los lemas 6.1, 6.2 y 6.3 de [*Mu*].*)*

Probaremos ii): es $\overline{\mathbf{I}}_3(f) := inf \ \{ \ \mathbf{I}_3^+(g) \ ; \ f \leq g \in \mathbf{B}_{3+}\}$; luego $\mathbf{I}_3^+(f) = \overline{\mathbf{I}}_3(f)$, si $f \in \mathbf{B}_{3+}$.

Con ello, $\mathbf{I}_3^+(f) = \overline{\mathbf{I}}_3(f) \leq inf \ \{ \ \mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(g) \ ; \ f \leq g \in \mathbf{B}_{3+}\}$, por el lema 1.2; luego, por estar f en $\mathbf{B}_{3+}$, es

$$\mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(f) = inf \ \{ \ \mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(g) \ ; \ f \leq g \in \mathbf{B}_{3+}\}.$$

Finalmente, y por ser $\mathbf{I}_i^+ \leq \underline{\mathbf{I}}_i \leq \overline{\mathbf{I}}_i$, se sigue

$$\mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(f) \leq \underline{\mathbf{I}}_1 \circ \underline{\mathbf{I}}_2(f) \leq \overline{\mathbf{I}}_1 \circ \overline{\mathbf{I}}_2(f). \ ∎$$

La segunda desigualdad en la demostración del lema 1.2,

"$inf\{\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 g); \ \mathbf{I}_2^- f \leq \mathbf{I}_2 g, \ g \in \mathbf{B}_3\} \geq inf\{\mathbf{I}_1(h); \ \mathbf{I}_2^- f \leq h \in \mathbf{B}_1\}$", es, de hecho, una igualdad, como prueba la siguiente caracterización de la clase $\mathbf{B}_1$.

PROPIEDAD 1.3

Dado un sistema producto de Loomis, se tiene que

$$\mathbf{B}_1 = \{ h \in \mathbb{R}^{X_1} ; \exists\, g \in \mathbf{B}_3 \text{ con } \mathbf{I}_2 g = h \}.$$

DEMOSTRACION.

En efecto, es inmediato que

$$\mathbf{B}_1 \supseteq \{ h \in \mathbb{R}^{X_1} ; \exists\, g \in \mathbf{B}_3 ,\ \mathbf{I}_2 g = h \}.$$

Probemos la otra inclusión. Para ello, sea h arbitraria en $\mathbf{B}_1$. Como en $\mathbf{B}_2$ existe k tal que $\mathbf{I}_2(k) \neq 0$, se considera la función

$$g_0 : X_3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) := h(\mathbf{x})k(\mathbf{y}), \text{ para } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in X_3.$$

Claramente es $g_0 \in \mathbf{B}_3$ y tomando $g := \dfrac{1}{\mathbf{I}_2(k)}\, g_0$ se tiene lo deseado. ■

Es importante destacar que, en general, no es cierto que, por ejemplo, $\mathbf{I}_3^+(f) \geq \mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+(f)$, para f en $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$. Es decir, en el lema 1.2 las desigualdades pueden ser estrictas, como prueba el siguiente

(2) EJEMPLO 1.2 ([Ho], beispiel 2, pg. 144)

Intercambiando los papeles de $(X_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ y $(X_2,\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$ en el ejemplo 1.1, sea f la función dada por

$$f := \sum_{n\in\mathbb{N}} n\chi_{(n)\times]n,n+1]}.$$

Se tiene que $f_x = x\chi_{]x,x+1]} \in \mathbf{B}_2$, $\forall\ x \in \mathbb{N} = X_1$.

Con ello, la función $I_2^+ f = I_2 f : X_1 = \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada, en cada punto $\mathbf{n}$ de $\mathbb{N}$, por

$$I_2^+ f(\mathbf{n}) := I_2^+(f_n) = I_2^+(\mathbf{n}\chi_{]n,n+1]}) = \mathbf{n} I_2(\chi_{]n,n+1]}) = \mathbf{n}.$$

Ahora, $I_1^+ \circ I_2^+(f) = I_1^+(I_2^+ f) = I_1^+(\sum\limits_n \mathbf{n}\chi_{\{n\}}) \geq I_1^+(\chi_{\mathbb{N}}) = 1.$

Por otro lado, si para cada natural $\mathbf{n}$ se define

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{k}\chi_{\{k\}\times]k,k+1]} \in \mathbf{B}_3,$$

se tiene que f es límite uniforme de la sucesión (h_n); así, $f \in \mathbf{B}_3^+$ e $I_3^+(f) = 0 = \text{Lím } I_3(h_n)$. Luego, $I_3^+(f) < I_1^+ \circ I_2^+(f)$.

Una condición suficiente para que se alcance la igualdad en las relaciones del lema 1.2 se establecerá más adelante en el estudio de los sistemas amplios (cap. IV). De hecho, que sean ciertas o no las relaciones similares a las del lema 1.2, para las diferentes extensiones integrales, determinará la posibilidad de establecer teoremas tipo Fubini en la línea de esta memoria, para las correspondientes clases de funciones integrables. En la primera de las siguientes notas comentamos con más detalle esta cuestión.

<u>NOTAS 1.1:</u>

A) En general, el lema 1.2 no se verifica para las integrales $\bar{I}$. El mismo ejemplo 1.2 lo pone de manifiesto.

Sin embargo, sí es cierto para funcionales del tipo Daniell o Bourbaki-continuos (σ ó τ-continuos, respectivamente). En concreto, se tiene que si I_1 e I_2 son σ ó τ-continuos, entonces I_3 es σ ó τ-continuo en $\mathbf{B}_3$. (Véanse, por ejemplo, [Fl], pág. 43 ó [Pf], pág. 186.)

Se tiene entonces que

$$(I_1 \circ I_2)^{\sigma} \geq I_1^{\sigma} \circ I_2^{\sigma} \quad \text{e} \quad (I_1 \circ I_2)^{\tau} \geq I_1^{\tau} \circ I_2^{\tau}.$$

En general, $I^{+} \leq I^{\tau} \leq I^{\sigma}$ en $\bar{\mathbb{R}}^{X}$.

Si I es σ-continuo, es $\bar{I} \neq I^{\sigma}$. Si I es τ-continuo, es $\bar{I} = I^{\tau} \leq I^{\sigma}$; y, en general, $I^{+} \neq I^{\sigma}$, incluso si I es σ-continuo (véanse [Bo-Dí.1] y [Gü.2]).

Señalemos también que el ejemplo 1.2 no sólo prueba que el lema 1.2 es falso, en general, para $\bar{I}$; sino que, además, establece que la desigualdad $I_3^{+}(f) \geq I_1^{+}(I_2^{+}f)$ no es cierta, en general, en B_3^{+}. (Realmente es $f \in B_{3+}$, como más tarde veremos en el ejemplo 3.1.)

B) El tratamiento hecho por Hoffmann [Ho] de los sistemas producto, mediante el uso de "seminormas integrales", difiere del aquí presentado.

Brevemente, en [Ho] se asume, para el caso de funciones evaluadas en $\mathbb{R}$, las condiciones de la definición 1.3; además, se consideran, para i = 1, 2, las seminormas integrales

$$\|\circ\|_i \text{ ó } q_i : \bar{\mathbb{R}}_{+}^{X_i} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_{+}, \text{ tales que}$$

$$q_i(0) = 0, \; q_i(h) \leq q_i(k) + q_i(l), \text{ si } h \leq k + l.$$

Se define, para toda f en $\bar{\mathbb{R}}_{+}^{X_3}$,

$$(q_2 f)(x) := q_2(f_x), \; \forall\, x \in X_1,$$

y los funcionales I_1 de B_1 en $\mathbb{R}$ lineal y $q_1(|\circ|)$-continuo, e I_2 de B_2 en $\mathbb{R}$ lineal y tal que $|I_2(g)| \leq q_2(g)$, $\forall\, g \in B_2$.

Con ello, se da la "seminorma integral producto" $q_3 := q_1 \circ q_2$.

Se tiene que el funcional $I_3 := I_1 \circ I_2$ es lineal en B_3 y

$q_3(|\circ|)$-continuo.

En particular, con i = 1, 2, 3, para cualquier $f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{X_i}$, $I_i^-(f) := inf \{ I_i(g) ; f \leq g \in B_i \}$, es una seminorma integral en $\bar{\mathbb{R}}_+^{X_i}$.

Por tanto, siguiendo a [Ho] y [Ho-Sch], con $q_1 := I_1^-$, $q_2 := I_2^-$, es $q_3 := I_1^- \circ I_2^-$ una seminorma integral en $\bar{\mathbb{R}}_+^{X_i}$. De hecho, [Ho] sólo es aplicable para $q_1 \circ q_2$.

Con el lema 1.2, se tiene probado que

$$I_3^- := (I_1 \circ I_2)^- \geq I_1^- \circ I_2^- =: q_3,$$

pudiéndose dar la desigualdad estricta, como pone de manifiesto el ejemplo 1.2.

1.4 INTEGRAL INDUCIDA POR UNA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA. ESPACIO DE MEDIDA PRODUCTO.

Recogemos, en primer lugar, las nociones y propiedades previas que necesitaremos sobre los sistemas (X, B_U, I_μ) inducidos a partir de un semianillo **U** de partes de X y una medida μ finitamente aditiva definida sobre el semianillo **U**. Referencias básicas para estos preliminares son [Be] y [Pf].

Sea X $\neq \emptyset$ un conjunto arbitrario. Una familia **U** $\subseteq$ **P**(X) se dice *semianillo en* X sii se verifica que:

(i) $\forall$ A, B $\in$ **U**, A$\cap$B $\in$ **U**, y

(ii) $\forall$ A, B $\in$ **U** $\exists$ $A_1,\ldots,A_n \in$ **U** ; $A-B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donde los A_k son disjuntos dos a dos. Nótese que si $\mathbf{U} \neq \varnothing$, entonces $\varnothing$ está en $\mathbf{U}$.

Por $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ notaremos el anillo generado por $\mathbf{U}$; es decir, $A \in \mathbf{R}(\mathbf{U}) \Leftrightarrow \exists\ A_1,\ldots, A_n \in \mathbf{U}$ con $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donde esta unión puede lograrse disjunta.

Se llama *traza de una función* f, y escribiremos tr$f$, al conjunto $\{\ \mathbf{x} \in X\ ;\ f(\mathbf{x}) \neq 0\ \}$.

Una función h se dice *escalonada en* $\mathbf{U}$ sii existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ y $A_1,\ldots,A_n \in \mathbf{U}$ tales que $h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{F_k}(\mathbf{x})$, $\forall\ \mathbf{x} \in X$. Notaremos por $\mathbf{B}_U$ al conjunto de todas las funciones escalonadas en $\mathbf{U}$.

La siguiente proposición establece las propiedades fundamentales de $\mathbf{B}_U$. (Véase [Be].)

<u>PROPOSICION 1.1</u>

i) $\mathbf{B}_U$ *es retículo vectorial estoniano de funciones acotadas.*

ii) Si $h \in \mathbf{B}_U$, *entonces* $h(X)$ *es finito y* $\forall\ \mathbf{x} \in trh$ $\exists\ A_{\mathbf{x}} \in \mathbf{U}$ *tal que* $\mathbf{x} \in A_{\mathbf{x}}$.

iii) Si $F \subseteq X$, *entonces* $F \in \mathbf{R}(\mathbf{U}) \Leftrightarrow \chi_F \in \mathbf{B}_U$.

El siguiente objetivo será, ahora, presentar un funcional lineal no negativo en el retículo vectorial $\mathbf{B}_U$, definido de la forma habitual. Los siguientes resultados nos garantizarán la buena definición de tal funcional.

LEMA 1.3

Dados $A_1,\dots, A_n \in U$, *existen* $B_1,\dots, B_m \subseteq X$, *donde* $m = 2^n - 1$, *tales que:*

i) $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$;

ii) $B_i \in \mathbf{R}(U)$, $\forall\ i \in \{1,\dots,m\}$;

iii) $\forall\ i \in \{1,\dots,m\}\ \exists\ j \in \{1,\dots,n\}\ ;\ B_i \subseteq A_j$;

iv) $\forall\ k \in \{1,\dots,n\}\ \exists\ B_{\sigma(1)},\dots,B_{\sigma(r)}$ $(r \leq m)$ *tales que* $A_k \overset{\circ}{=} \bigcup_{j=1}^{r} B_{\sigma(j)}$ *("$\overset{\circ}{=}$" es unión disjunta).*

LEMA 1.4

Si $h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(\mathbf{x}) = 0$, $\forall\ \mathbf{x} \in X$, *con* $h \in \mathbf{B}$, *entonces es* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k) = 0$.

DEFINICION 1.4

Como es usual, se define la *integral elemental de una función escalonada* $h = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ como el número real $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k)$, que se notará por $\int h d\mu$ o, también, $\mathbf{I}_\mu(h)$.

Se tiene que $\int \circ d\mu$ es un funcional lineal no negativo de $\mathbf{B}_U$ en $\mathbb{R}$. La aplicación $\|\circ\|_\mu$ de $\mathbf{B}_U$ en $\mathbb{R}$, definida por $\|h\|_\mu := \int |h| d\mu$, es una seminorma integral en $\mathbf{B}_U$, esto es,

$$\|h+k\|_\mu \leq \|h\|_\mu + \|k\|_\mu \quad \text{y} \quad \|\alpha h\|_\mu = |\alpha|\,\|h\|_\mu,$$

y verifica, además, la propiedad modular, es decir, $|\int h d\mu| \leq \|h\|_\mu$. Por tanto, la terna $(\mathbf{X},\mathbf{B}_U,\int \circ d\mu)$ es un sistema de Loomis estoniano de funciones acotadas, que se dice inducido por el espacio de medida finitamente aditiva $(\mathbf{X},\mathbf{U},\mu)$.

$(X, \mathbf{B}_U, \int \circ d\mu)$ sastisface, además, los dos conocidos axiomas débiles de continuidad siguientes (véanse, por ejemplo, [He], pág. 211 y [Gü.4]):

$$\mathbf{c}_0 : \int (f \wedge \varepsilon) d\mu \longrightarrow 0, \text{ si } \varepsilon \to 0, \ \forall \ f \in \mathbf{B}_U.$$

$$\mathbf{c}_\infty : \int (f \wedge n) d\mu \longrightarrow \int f d\mu, \text{ si } n \to +\infty, \ \forall \ 0 \le f \in \mathbf{B}_U.$$

Indiquemos que, en lo que sigue, notaremos por *(μ/U)* la situación en la que el sistema de Loomis considerado está construido a partir de una medida μ sobre un semianillo $\mathbf{U}$.

Finalmente, completamos esta sección con la presentación usual de la medida producto; y analizamos con más detalle las propiedades básicas de las aplicaciones "medidas sección" inducidas por las correspondientes medidas. (Véanse [Fl] y [Va].)

PROPOSICION 1.2

Si X_1, X_2 *son conjuntos arbitrarios no vacíos y* $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ *semianillos sobre* X_1 *y* X_2, *respectivamente, entonces el conjunto* $\mathbf{U}_3 := \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 := \{ A \times B \ ; \ A \in \mathbf{U}_1, \ B \in \mathbf{U}_2 \}$ *es un semianillo en* $X_1 \times X_2$.

Si Z es de la forma $Z = A \times B \subseteq X_1 \times X_2$ y $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Z$, se definen las $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$-secciones de Z, respectivamente, como:

$$Z_x := \{ \mathbf{y} \in X_2 \ ; \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Z \},$$

$$Z^y := \{ \mathbf{x} \in X_1 \ ; \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Z \}.$$

Se observa que $Z_x = B \Leftrightarrow \mathbf{x} \in A$ y $Z_x = \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{x} \notin A$. Además, $Z^y = A \Leftrightarrow \mathbf{y} \in \mathbf{B}$ y $Z^y = \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{y} \notin B$. Como consecuencia, se tiene la siguiente

PROPOSICION 1.3

Si $Z \in U_3 := U_1 \times U_2$, *entonces* $Z_x \in U_2$, *para todo* $\mathbf{x} \in X_1$, *y* $Z^{\mathbf{y}} \in U_2$, *para todo* $\mathbf{y} \in X_2$.

Si μ_1 y μ_2 son dos medidas finitamente aditivas sobre los semianillos U_1 y U_2, respectivamente, la proposición 1.3 induce las siguientes aplicaciones *medida sección*, para $Z \in U_3$,

$$\mu_{1,Z} : X_2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } \mu_{1,Z}(\mathbf{y}) := \mu_1(Z^{\mathbf{y}}),\ \forall\ \mathbf{y} \in X_2;$$

$$\mu_{2,Z} : X_1 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } \mu_{2,Z}(\mathbf{x}) := \mu_2(Z_{\mathbf{x}}),\ \forall\ \mathbf{x} \in X_1.$$

Para $g \in \mathbf{B}_{U_1}$ y $h \in \mathbf{B}_{U_2}$ se define la función *producto tensor* de g por h como $g \otimes h(\mathbf{x},\mathbf{y}) := g(\mathbf{x})h(\mathbf{y}),\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in X_3$. Este concepto nos será dc utilidad para probar que las medidas sección verifican la siguiente

PROPOSICION 1.4

Sean $\mathbf{B}_{U_1}$ *y* $\mathbf{B}_{U_2}$ *los retículos vectoriales inducidos por los semianillos* U_1 *y* U_2, *respectivamente. Entonces se tiene que* $\mu_{2,Z} \in \mathbf{B}_{U_1}$ *y* $\mu_{1,Z} \in \mathbf{B}_{U_2}$, *cualquiera que sea* Z *en el semianillo* U_3. *Además,* $\mathbf{I}_{\mu_1}(\mu_{2,Z}) = \mathbf{I}_{\mu_2}(\mu_{1,Z})$; *es decir,* $\int \mu_{2,Z} d\mu_1 = \int \mu_{1,Z} d\mu_2$.

DEMOSTRACION.

Para $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{X}_3$, se tiene:

i) $Z^y \in \mathbf{U}_1 \Rightarrow \chi_{Z^y} \in \mathbf{B}_{U_1}$; y ii) $Z_x \in \mathbf{U}_2 \Rightarrow \chi_{Z_x} \in \mathbf{B}_{U_2}$;

y así, como es usual, se definen, respectivamente:

$$\mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_{Z^y}) := \mu_1(Z^y) \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{\mu_2}(\chi_{Z_x}) := \mu_2(Z_x).$$

Ahora, si $Z = A\mathrm{x}B \in \mathbf{U}_3$, es: $\chi_Z = \chi_{A\mathrm{x}B} = \chi_A \otimes \chi_B$.

Para $\mathbf{y} \in \mathbf{X}_2$, $\mu_{1,Z}(\mathbf{y}) := \mu_1(Z^y) = \mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_A \otimes \chi_B(\mathbf{y})) = \mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_A)\chi_B(\mathbf{y})$; de donde se sigue que $\mu_{1,Z} = \mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_A)\chi_B \in \mathbf{B}_{U_2}$. Análogamente, $\mu_{2,Z} = \mathbf{I}_{\mu_2}(\chi_B)\chi_A \in \mathbf{B}_{U_1}$.

Con ello, se tiene la existencia de $\mathbf{I}_{\mu_2}(\mu_{1,Z})$ e $\mathbf{I}_{\mu_1}(\mu_{2,Z})$ tales que

$$\mathbf{I}_{\mu_1}(\mu_{2,Z}) = \mathbf{I}_{\mu_1}(\mathbf{I}_{\mu_2}(\chi_B)\chi_A) = \mathbf{I}_{\mu_2}(\chi_B)\mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_A), \text{ e}$$

$$\mathbf{I}_{\mu_2}(\mu_{1,Z}) = \mathbf{I}_{\mu_2}(\mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_A)\chi_B) = \mathbf{I}_{\mu_1}(\chi_A)\mathbf{I}_{\mu_2}(\chi_B),$$

como queríamos probar. ■

DEFINICION 1.5

Para $Z \in \mathbf{U}_3$, con $Z = A \times B$, se define la *medida producto* de μ_1 y μ_2 por la expresión $(\mu_1 \otimes \mu_2)(Z) := \mu_1(A)\mu_2(B)$.

Nótese que si $A_1 \times B_1$ y $A_2 \times B_2 \in \mathbf{U}_3$ disjuntos y tales que $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \in \mathbf{U}_3$, entonces,

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)[(A_1 \times B_1) \mathring{\cup} (A_2 \times B_2)] = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times B_1) + (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_2 \times B_2),$$

ya que $(A_1 \times B_1) \mathring{\cup} (A_2 \times B_2) \in \mathbf{R}(\mathbf{U}_3)$ = anillo generado por $\mathbf{U}_3$.

Con ello,

la aplicación $\mu_1 \otimes \mu_2$ es una medida finitamente aditiva en el semianillo $\mathbf{U}_3 := \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$.

Señalemos que, si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{U}_3} = \mathbf{S}(\mathbf{U}_3,\mathbb{R})$, donde $\mathbf{U}_3 := \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$, entonces $f_x \in \mathbf{B}_{\mathrm{U}_2} = \mathbf{S}(\mathbf{U}_2,\mathbb{R})$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$ e $\mathbf{I}_{\mu_2} f \in \mathbf{B}_{\mathrm{U}_1} = \mathbf{S}(\mathbf{U}_1,\mathbb{R})$; además, $\mathbf{I}_{\mu_1 \otimes \mu_2}(f) = \mathbf{I}_{\mu_1}(\mathbf{I}_{\mu_2} f)$. Se satisfacen, por tanto, las condiciones de sistema producto de Loomis.

La situación aquí descrita permitirá obtener, como casos particulares de los resultados dados para sistemas de Loomis arbitrarios, los correspondientes al caso $\mu_1 \otimes \mu_2$-aditivo; que es, a su vez, el campo más conocido para ofrecer ejemplos y contraejemplos a lo largo de toda la memoria.

CAPITULO II:

TEOREMAS DE FUBINI PARA LA INTEGRACION PROPIA DE RIEMANN.

2.1 *La clase* $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *de las funciones propiamente integrables. Funciones y conjuntos nulos.*

2.2 *Teoremas de Fubini para la integral propia de Riemann.*

Es abundante, y clásica, la literatura en la que se estudia la integración propia de Riemann. Este estudio se puede encontrar desarrollado a partir de un sistema integral de Loomis arbitrario (X,B,I), como hacen Loomis [Lo], Aumann [Au] y Bourbaki [Bou], entre otros; o bien, a partir de una medida finitamente aditiva definida sobre un semianillo (o anillo) de partes de un conjunto arbitrario no vacío, como es el caso también de [Lo], Luxemburg [Lu], Günzler [Gü.2] y Elsner [El], entre las referencias de mayor utilidad directa para nosotros.

En [El] se prueba un teorema de tipo Fubini para las funciones propiamente integrables respecto de una medida finitamente aditiva. El objetivo de este capítulo es generalizar este resultado para el caso de sistemas integrales de Loomis arbitrarios. En esta dirección se consigue, por una parte, dar una demostración directa del resultado central de [El] (satzs 3 y 4, pgs. 268-269), para el caso de sistemas producto de Loomis inducidos por una medida producto finitamente aditiva; y, por otro, probar un teorema general abstacto de Fubini, con una demostración sencilla, que hace uso de la caracterización clásica de las funciones propiamente integrables (como aquellas funciones para las que se da la igualdad de las integrales superior I^- e inferior I^+), y la relación de tales integrales con la integal producto dada en el lema 1.2 del capítulo anterior, todo ello en la línea trazada por Pfeffer [Pf].

En la primera sección del presente capítulo recopilamos los conceptos y algunos resultados conocidos sobre la integración propia de Riemann que son relevantes para probar los teoremas de Fubini correspondientes. También, nos ocupamos de establecer varios resultados relativos a las funciones I^--nulas y a los conjuntos I^--nulos e numerablemente I^--nulos, en el contexto de los sistemas producto.

2.1 LA CLASE $R_{PROP}(B,I)$ DE LAS FUNCIONES PROPIAMENTE INTEGRABLES. FUNCIONES Y CONJUNTOS NULOS.

En todo lo que sigue, para esta sección, asumiremos un sistema de Loomis (X,B,I) arbitrario, o, en su caso, un sistema producto de Loomis (X_3,B_3,I_3) respecto de los sistemas de Loomis (X_1,B_1,I_1) y (X_2,B_2,I_2).

Aparte de las referencias arriba citadas, un estudio detallado de la integración propia de Riemann relativa a un sistema de Loomis (X,B,I), puede encontrarse en [Bo-Dí.2], [Gü.2] y [Dí-Mu.1].

DEFINICION 2.1

Una función $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ se dice **I**-*integrable en el sentido propio de Riemann*, o bien, *propiamente* **I**-*integrable Riemann* sii para cada número real positivo ε existen funciones g y h en **B** tales que $g \leq f \leq h$ e $\mathbf{I}(h-g) < \varepsilon$. La clase de tales funciones se notará por $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$.

Se tiene, en general, que $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I}) \subseteq \bar{\mathbf{B}}$ (= clase de las funciones **I**-sumables en [Bo-Dí.1]).

Varias definiciones equivalentes, y utilizadas según los autores, quedan recogidas en el siguiente teorema de caracterización.

TEOREMA 2.1

Para $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, *son equivalentes:*

i) $f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$.

ii) $\exists\ (t_n)$ y $(\varphi_n) \subseteq \mathbf{B}$; $|f-t_n| \leq \varphi_{n+1} \leq \varphi_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{I}(\varphi_n) \to 0$, si $n \to +\infty$.

iii) $\exists\ (h_n)$ y $(g_n) \subseteq \mathbf{B}$; $h_n \leq f \leq g_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{I}(g_n-h_n) \to 0$, si $n \to +\infty$.

iv) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ h, g \in \mathbf{B}$; $|f-h| \leq g$ e $\mathbf{I}(g) < \varepsilon$.

v) $\mathbf{I}^+(f) = \mathbf{I}^-(f)$; *es decir,*

$sup\ \{\ \mathbf{I}(h) : f \geq h \in \mathbf{B}\ \} = inf\ \{\ \mathbf{I}(g) : f \leq g \in \mathbf{B}\ \}$.

Además, si $f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *se define* $\mathbf{I}(f) := \mathbf{I}^+(f) = \mathbf{I}^-(f)$, *y se verifica que*

$\mathbf{I}(f) = Lím\ \mathbf{I}(t_n) = Lím\ \mathbf{I}(h_n) = Lím\ \mathbf{I}(g_n)$.

La siguiente definición de convergencia de sucesiones de funciones numéricas generaliza el concepto de convergencia μ-local introducido por [Gü.1] que, a su vez, contiene, entre otros, la convergencia de Dundford-Schwarzt [Du-Sc]. Esta generalización representa una adecuada convergencia en medida, útil para obtener teoremas de convergencia tipo Lebesgue para el caso de funcionales no necesariamente continuos. (Véanse [Gü.3], [Dí-Mu.1] y [Dí-Gü.1].)

DEFINICION 2.2

Sean f, $f_n \in \bar{\mathbb{R}}^X$, para cada natural n. Se dice que la sucesión (f_n) *converge a* f *en* $\mathbf{I}^-$, y se nota por $f_n \longrightarrow f \ (\mathbf{I}^-)$, sii para cada real positivo ε existen $0 \le h$ y (k_n) en $\mathbf{B}$ y m en $\mathbb{N}$, tales que si $n \ge m$, entonces $|f-f_n| \wedge h \le k_n$ e $\mathbf{I}(k_n) < \varepsilon$.

Equivalentemente, $f_n \longrightarrow f \ (\mathbf{I}^-)$ si, y sólo si, para cada $0 \le h \in \mathbf{B}$ es $\mathbf{I}^-(|f_n - f| \wedge h) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$.

La propiedad *iv)* del teorema 2.1, junto con la definición 2.2, permite formular el siguiente resultado (véase, por ejemplo, Aumann [Au]).

TEOREMA 2.2

La clase $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *de las funciones propiamente* $\mathbf{I}$-*integrables es la clausura de* $\mathbf{B}$ *en* $\bar{\mathbb{R}}^X$ *respecto de la seminorma integral* $\mathbf{I}^-(|\circ|)$.

Las definiciones que siguen sobre funciones y conjuntos nulos, son las usuales en la literatura ya referida sobre la integración propia de Riemann para sistemas de Loomis arbitrarios. (Véase, por ejemplo, [Dí-Mu.2], y con carácter más general para seminormas integrales, [Dí-Gü.1]).

DEFINICION 2.3

Una función f numérica cualquiera en un conjunto arbitrario no vacío X se dice I^--*nula*, y se notará por $f = 0$ (I^-), sii $I^-(|f|\wedge h) = 0$, $\forall\ 0 \le h \in \mathbf{B}$. A la clase de todas las funciones I^--nulas se notará por $\mathbf{N}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$. Un subconjunto N de X se dice I^--*nulo* sii $\chi_N \in \mathbf{N}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$. Un conjunto N se dice *numerablemente* I^--*nulo* sii existe una sucesión (N_n) de conjuntos I^--nulos tal que:

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Es evidente que todo conjunto I^--nulo es numerablemente I^--nulo; pero el recíproco no es cierto, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

(3) EJEMPLO 2.1

Sea el espacio de medida $(\mathbf{X},\mathbf{U},\mu)$ dado por: $X := \mathbb{N}$,

$$U := \{ E \subseteq \mathbb{N} \ ;\ E \text{ ó } \mathbb{N}\text{-}E \text{ es finito} \}$$

y $\mu(E) := 0$, si E es finito; $:= 1$, si $\mathbb{N}$-E es finito. Podemos considerar el sistema de Loomis inducido $(\mathbf{X},\mathbf{B}_U,\mathbf{I}_\mu)$.

Se tiene que $\mu(\mathbb{N}) = 1$, y, sin embargo, $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1,\ldots,n\}$, donde todos los conjuntos que aparecen en la unión son finitos; luego $\mathbb{N}$ es numerablemente I_μ^--nulo, pero no I_μ^--nulo.

Las propiedades usuales referidas a conjuntos y funciones nulas en la integración respecto de una medida finitamente aditiva, pueden ahora generalizarse en el contexto de la I^--convergencia.

PROPOSICION 2.1

La traza de cualquier función f I^--nula es un conjunto numerablemente I^--nulo. Es decir, existe una sucesión (N_n) de subconjuntos I^--nulos de X tal que

$$tr(f) := \{ x \in X \ ; \ f(x) \neq 0 \} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k .$$

DEMOSTRACION.

Sea, para $k \in \mathbb{N}$, $N_k := \{ x \in X \ ; \ f(x) \geq 1/k \}$. Claramente, se tiene que $\{ x \in X \ ; \ f(x) > 0 \} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k$; luego resta probar que cada N_k es I^--nulo, con k arbitrario en $\mathbb{N}$.

Siendo χ_{N_k} la función característica de N_k, se tiene que $\chi_{N_k} \leq kf$. Si tomamos $h \in \mathbf{B}$, $0 \leq h$, entonces $\chi_{N_k} \wedge h \leq kf \wedge h = k(f \wedge \frac{h}{k})$; y, por la monotonía y homogeneidad positiva de I^-, se sigue que $I^-(\chi_{N_k} \wedge h) \leq kI^-(f \wedge \frac{h}{k}) = 0$; luego, N_k es I^--nulo. ■

En la línea de [El], lemma 8, probamos la siguiente propiedad de interés.

PROPIEDAD 2.1

Sea (h_n) una sucesión decreciente de funciones no negativas del retículo vectorial **B**. *Si* $\mathbf{I}(h_n) \longrightarrow 0$, *si* $n \to +\infty$, *entonces existe una sucesión* (P_n) *de subconjuntos* $\mathbf{I}^-$*-nulos, tal que si* $x \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, *entonces* $h_n(x) \longrightarrow 0$, *si* $n \to +\infty$.

DEMOSTRACION.

Definamos $P_m := \{ x \in X \; ; \; h_n(x) \geq 1/m, \; \forall \; n \in \mathbb{N} \} =$

$= \{ x \in X : \text{Lím}_n \; h_n(x) \geq 1/m \}$.

Entonces, $\chi_{P_m} \leq m h_n, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe n_0 natural tal que

$$0 \leq \mathbf{I}^-(\chi_{P_m} \wedge h) \leq \mathbf{I}^-(\chi_{P_m}) \leq m\mathbf{I}^-(h_n) < m\varepsilon, \quad \forall \; 0 \leq h \in \mathbf{B} \quad \text{y} \; \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Luego $\chi_{P_m} = 0 \; (\mathbf{I}^-), \; \forall \; m \in \mathbb{N}$; de donde se sigue que si $x \in X - \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$, entonces $h_n(x) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$. ∎

En el ambiente de la propiedad 2.1, el siguiente ejemplo prueba que existen sucesiones de funciones para las que no se verifica la tesis para ningún x de X.

(4) EJEMPLO 2.2

Con el mismo espacio de medida (X,U,μ) dado en el ejemplo 2.1, sea, para cada natural n, la función h_n dada por

$$h_n(m) := \begin{cases} 1/m & \text{si } 1 \le m \le n \\ 1/n & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Es claro que:

$$0 \le h_{n+1} \le h_n \in \mathbf{B}_U,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \text{con } \mathbf{I}_\mu(h_n) \longrightarrow 0,\ \text{si } n \to +\infty.$$

Pero, para m fijo, se tiene $\text{Lím}\, h_n(m) = 1/m, \quad \forall\ m \in \mathbb{N}$; luego $(h_n(\mathbf{x}))$ no converge a 0, para ningún $\mathbf{x}$ en $X = \mathbb{N}$.

Con análoga demostración a la de la propiedad 2.1, y asumiendo dado un sistema producto (X_3,B_3,I_3), se obtiene, para la integración iterada, la siguiente

PROPIEDAD 2.2

Sea (h_n) una sucesión decreciente de funciones no negativas del retículo vectorial $\mathbf{B}_3$ tal que $\mathbf{I}_3(h_n) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$. Entonces existe una sucesión de subconjuntos $\mathbf{I}_1^-$-nulos (P_n), tal que si $\mathbf{x} \in X- \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, se tiene que

$$(\mathbf{I}_2 h_n)(\mathbf{x}) \longrightarrow 0,\ \text{si } n \to +\infty.$$

Para sucesiones de funciones arbitrarias en $\mathbf{B}_3$ puede lograrse la tesis de la propiedad 2.2 para una cierta sucesión parcial, tal y como establece la siguiente

PROPIEDAD 2.3

Sea (h_n) una sucesión de funciones no negativas del retículo vectorial $\mathbf{B}_3$ tal que $\mathrm{I}_3(h_n) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$. Entonces, existe una sucesión (P_n) de subconjuntos I_1^--nulos y una aplicación creciente σ de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, tal que si $\mathbf{x} \in \mathrm{X}_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_n$, entonces $\mathrm{I}_2(h_{\sigma(n)}(\mathbf{x})) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$.

DEMOSTRACION.

Consideremos una parcial decreciente $(\mathrm{I}_3(h_{\sigma(n)}))$ que también convergerá a cero. Definamos los conjuntos

$$\mathrm{P}_m := \{\ \mathbf{x} \in \mathrm{X}_1\ ;\ \mathrm{Lím}\ h_{\sigma(n)}(\mathbf{x}) \geq 1/m\ \},\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Con ello, $\chi_{\mathrm{P}_m} \leq m\mathbf{I}_2 h_{\sigma(n)}$; y, en consecuencia, se tiene, para $0 \leq h \in \mathbf{B}_1$ arbitraria, que $0 \leq \mathrm{I}_1^-(\chi_{\mathrm{P}_m} \wedge h) \leq \mathrm{I}_1^-(\chi_{\mathrm{P}_m}) \leq$

$\leq m(\mathrm{I}_1^- \circ \mathrm{I}_2)(h_{\sigma(n)}) = m(\mathrm{I}_1^- \circ \mathrm{I}_2^-)(h_{\sigma(n)}) \leq m\mathrm{I}_3^-(h_{\sigma(n)}) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$.

De la arbitrariedad de h se sigue que P_m es I_1^--nulo para cualquier m en $\mathbb{N}$; luego, con $\mathbf{P} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_n$ numerablemente I_1^--nulo, si $\mathbf{x} \in \mathrm{X}_1 - \mathbf{P}$, se cumple que $\mathrm{I}_2(h_{\sigma(n)}(\mathbf{x})) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$. ∎

2.2 TEOREMAS DE FUBINI PARA LA INTEGRAL PROPIA DE RIEMANN.

El primer objetivo de esta sección es describir y probar los principales pasos y resultados que conducen a establecer un teorema de Fubini para la integración propia de Riemann. Todo ello se hace en el ambiente más general de los sistemas producto de Loomis, que subsume la situación ya conocida del caso $\lambda x\mu$-aditivo.

Así, para una función propiamente integrable se van a describir los conjuntos de puntos que dan secciones integrables, y se evaluará la integral de tal función mediante ciertas integrales iteradas.

La forma de abordar estas cuestiones difiere según qué condición equivalente se considere de partida para definir a las funciones propiamente integrables. En concreto, la condición ii) del teorema 2.1, por [El]; el teorema 2.2, por [Ho] y [Ho-Sch]; y la condición v), en esta memoria.

Estudiamos y comparamos con detalle, en un ambiente general, los siguientes planteamientos.

Si f es propiamente $\mathbf{I}_3$-integrable, $f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$, por el teorema 2.1 ii), existen sucesiones (h_n) y (φ_n) en $\mathbf{B}_3$ tales que $|h_n - f| \leq \varphi_n \leq \varphi_{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, en X_3 e $\mathbf{I}_3(\varphi_n) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$.

Con ello, se tiene que

$$|h_{n,x} - f_x| \leq \varphi_{n,x} \leq \varphi_{n-1,x},\ \varphi_{n,x} \in \mathbf{B}_2,\ \forall\ x \in \mathrm{X}_1 \text{ y } \forall\ n \in \mathbb{N};$$

además, por la monotonía de $\mathbf{I}_2$, para todo x en X_1, se obtiene que

$$\mathbf{I}_2(\varphi_{n,x}) \geq \mathbf{I}_2(\varphi_{n+1,x}) \geq 0, \text{ y existe } \operatorname{Lím}\mathbf{I}_2(\varphi_{n,x}) \geq 0.$$

Este hecho nos permitirá dar, para $f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$, una condición suficiente para la $\mathbf{I}_2$-integrabilidad propia de las x-secciones de f, $f_x \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, tal y como se establece en el siguiente

LEMA 2.1

Si $\text{Lím}\,I_2(\varphi_{n,x}) = 0$, *entonces* $f_x \in R_{prop}(B_2,I_2)$.

Además, el conjunto $\{ x \in X_1 \; ; \; f_x \notin R_{prop}(B_2,I_2) \}$ *es numerablemente* I_1^-*-nulo.*

DEMOSTRACION.

Por el teorema 2.1, es suficiente probar la condición $\text{Lím}\,I_2(\varphi_{n,x}) = 0$, para concluir la I_2-integrabilidad propia de f_x.

En efecto, obsérvese que

$$\{ x \in X_1 \; ; \; f_x \notin R_{prop}(B_2,I_2) \} \subseteq \{ x \in X_1 \; ; \; \text{Lím}\,I_2(\varphi_{n,x}) > 0 \}.$$

Veamos que este último conjunto es I_1^--numerablemente nulo. Sea, para $k \in \mathbb{N}$, $A_k := \{ x \in X_1 \; ; \; \text{Lím}\,I_2(\varphi_{n,x}) \geq 1/k \}$. Claramente, se tiene que $\{ x \in X_1 \; ; \; \text{Lím}\,I_2(\varphi_{n,x}) > 0 \} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$; luego resta probar que cada A_k es I_1^--nulo, con k arbitrario en $\mathbb{N}$. Siendo χ_{A_k} la función característica de A_k, tomando $h \in \mathbf{B}$, $0 \leq h$, tendremos que

$$\chi_{A_k} \wedge h \leq \chi_{A_k} \leq k\text{Lím}\,I_2(\varphi_n) \leq kI_2(\varphi_n), \; \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Luego por la monotonía y homogeneidad positiva de I_1^-, se sigue que

$$I_1^-(\chi_{A_k} \wedge h) \leq I_1^-(\chi_{A_k}) \leq I_1^-(I_2(\varphi_n)) = I_1(I_2(\varphi_n)) = I_3(\varphi_n) \longrightarrow 0,$$

si $n \to +\infty$. Por tanto, A_k es I_1^--nulo, y con ello se concluye la prueba del resultado. ∎

Ahora, si notamos $A := \{ x \in X_1 \; ; \; f_x \notin R_{prop}(B_2,I_2) \}$, claramente $\text{Lím}\; I_2(\varphi_{n,x}) > 0$, si, y sólo si, $x \notin A$. Se tiene, como se pone de manifiesto durante la demostración del lema 2.1, que

$$\{ \mathbf{x} \in X_1 \ ; \ \text{Lím} I_2(\varphi_{n,\mathbf{x}}) > 0 \} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{A}_k,$$

siendo los $\mathbf{A}_k$ los conjuntos considerados en dicho lema.

Con todo ello, y en virtud del lema 2.1, podemos enunciar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3

Si $f \in \mathbf{R}_{prop}(B_3,\mathbf{I}_3)$, entonces existe una sucesión $(\mathbf{A}_k)$ de conjuntos numerablemente $\mathbf{I}^-$-nulos, tal que

$$f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_{prop}(B_2,\mathbf{I}_2), \ \textit{para todo } \mathbf{x} \in X_1 - \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbf{A}_k.$$

A continuación, y siguiendo la misma línea de demostración trazada en [El], se prueba que la $\mathbf{I}_3$-integral de una función f propiamente integrable, puede evaluarse como la $\mathbf{I}_1$-integral de una función en $\mathbf{R}_{prop}(B_1,\mathbf{I}_1)$, dada por la $\mathbf{I}_2$-integral de las funciones $\mathbf{x}$-sección de f.

TEOREMA 2.4

Si $f \in \mathbf{R}_{prop}(B_3,\mathbf{I}_3)$, existe una función $g \in \mathbf{R}_{prop}(B_1,\mathbf{I}_1)$ tal que

i) $g(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}})$, *si* $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_{prop}(B_2,\mathbf{I}_2)$.

ii) $\mathbf{I}_1(g) = \mathbf{I}_3(f)$.

DEMOSTRACION.

Si f es propiamente $\mathbf{I}_3$-integrable, entonces, por el teorema 2.1, se tiene que existen sucesiones (h_n) y (φ_n) en B_3

tales que $|h_n - f| \le \varphi_n \le \varphi_{n-1}$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, en $\mathbf{X}_3$ e $\mathbf{I}_3(\varphi_n) \longrightarrow 0$, si n $\to +\infty$.

Sean $\mathbf{A} := \{ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1 : f_\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2) \}$ y

$$g(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(f_\mathbf{x}),\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{A}.$$

α) Si $\mathbf{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow |\mathbf{I}_2(h_{n,x}) - g(\mathbf{x})| \le \mathbf{I}_2(|h_n - f|_\mathbf{x}) \le \mathbf{I}_2(\varphi_{n,x})$.

β) Si $\mathbf{x} \notin \mathbf{A}$, equivale a que $\text{Lím}\ \mathbf{I}_2(\varphi_{n,x}) > 0$. Así, para n y k naturales: $|h_n - h_{n+k}| \le 2\varphi_n$, en $\mathbf{X}_3$; y en consecuencia,

$$|\mathbf{I}_2(h_n - h_{n+k})|_\mathbf{x} \le 2\varphi_{n,x}, \quad \text{si } \mathbf{x} \notin \mathbf{A}.$$

Por definición de límite, existirá m = m($\mathbf{x}$) $\in \mathbb{N}$ tal que si n $\ge$ m, entonces: $\text{Lím}\mathbf{I}_2(\varphi_{n,x}) \le \mathbf{I}_2(\varphi_{n,x}) \le 2\text{Lím}\mathbf{I}_2(\varphi_{n,x})$.

Ahora definamos

$$g(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(h_{m,x}),\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1 - \mathbf{A}.$$

Con ello, tendremos que

$$|\mathbf{I}_2(h_{n,x}) - g(\mathbf{x})| \le 4\mathbf{I}_2(\varphi_{n,x}), \quad \text{si } \mathbf{x} \notin \mathbf{A}.$$

En consecuencia, $|\mathbf{I}_2(h_{n,x}) - g(\mathbf{x})| \le 4\mathbf{I}_2(\varphi_{n,x})$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$.

Además, $\mathbf{I}_1(4\mathbf{I}_2(\varphi_n)) = 4(\mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2)(\varphi_n) = 4\mathbf{I}_3(\varphi_n) \longrightarrow 0$, si n $\to +\infty$.

Luego, $g \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$.

Finalmente, se tiene que

$$\mathbf{I}_3(f) = \text{Lím}\mathbf{I}_3(h_n) = \text{Lím}\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 h_n) = \mathbf{I}_1(g). \ \blacksquare$$

<u>NOTA</u> <u>2.1:</u>

Como ya hemos comentado más arriba, los teoremas 2.3 y 2.4 se presentan con las mismas técnicas usadas en los correspondientes teoremas (satz 3 y 4) de [El], para el caso

$\lambda x\mu$-aditivo. Los resultados aquí presentados suponen una generalización para sistemas de Loomis arbitrarios, dada la equivalencia entre la convergencia μ-local (véase la definición 3.1) y la convergencia en integral I^{-}_{μ} (véase [Gü.3], lemma 9).

Recuérdese que en el caso $\lambda x\mu$-aditivo, y para la correspondiente $I_{\lambda x\mu}$ inducida, se tiene que si $f \in \mathbf{S}(U_3,\mathbb{R})$, $U_3 := U_1 \times U_2$, entonces $f_x \in \mathbf{S}(U_2,\mathbb{R})$, $\forall\ x \in X_1$, $I_{\mu}(f) \in \mathbf{S}(U_1,\mathbb{R})$, e $I_{\lambda x\mu}(f) = I_{\lambda}(I_{\mu}f)$. (Véase la sección 1.4 y el lemma 5 de [El].)

Se satisfacen, por tanto, las condiciones de sistema producto de Loomis (def. 1.3).

En otra dirección, haciendo uso del teorema 2.2, que caracteriza a las funciones propiamente I-integrables como aquellas que pertenecen a la clausura de **B** en $\bar{\mathbb{R}}^{X}$ respecto de la seminorma integral $I^{-}(|\circ|)$, se pueden probar, para la clase $R_{prop}(B_3,I_3)$, los resultados anteriores utilizando las correspondientes seminormas integrales iteradas, en la línea trazada por [Ho-Sch].

En este ambiente, un resultado análogo al lema 2.1 sería el siguiente

LEMA 2.2

Sean $f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ *y* φ *en* $\mathbf{X}_1$ *dada por*

$$\varphi(\mathbf{x}) := Inf \{ \mathbf{I}_2^-|f_{\mathbf{x}}-h| \ ; h \in \mathbf{B}_2 \}.$$

Entonces $\mathbf{I}_1^-(\varphi) = 0$ *y* $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, *salvo para un conjunto numerablemente* $\mathbf{I}_1^-$*-nulo.*

Además, existe $g \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$, *tal que* $g(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}})$, *si* $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, *con* $\mathbf{I}_1(g) = \mathbf{I}_3(f)$.

Ahora, a partir del lema 2.2, se tiene:

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$, $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, sea $g(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2^-(f_{\mathbf{x}})$. Entonces, $|\mathbf{I}_2^-(h_{n,\mathbf{x}})-g(\mathbf{x})| \leq \mathbf{I}_2^-(|h_n-f|_{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{I}_2^-(|h_n-f|)(\mathbf{x})$, donde $(h_n) \subseteq \mathbf{B}_3$ con $\mathbf{I}_3^-(|h_n-f|) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$.

Si $f_{\mathbf{x}} \notin \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, sea $g(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2^-(k)$, con $k \in \mathbf{B}_2$. Entonces, $|\mathbf{I}_2^-(h_{n,\mathbf{x}})-g(\mathbf{x})| \leq \mathbf{I}_2^-(|h_n-f|_{\mathbf{x}}) + 2\varphi(\mathbf{x}) < 3\mathbf{I}_2^-(|h_n-f|)(\mathbf{x})$.

En cualquier caso, $\mathbf{I}_1^-(|\mathbf{I}_2^-(h_n)-g|) \leq 3\mathbf{I}_3^-(|h_n-f|) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$; luego $g \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$.

Además,

$$\mathbf{I}_1(g) = \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f) = \text{Lím}\ \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 h_n) = \text{Lím}\ \mathbf{I}_3 h_n = \mathbf{I}_3(f).$$

Por otro lado, usando la caracterización de la integrabilidad propia de Riemann del teorema 2.1 v) (véanse, por ejemplo, [Bo-Dí.1] y [Dí-Mu.2]), probamos el correspondiente teorema de Fubini con una demostración más sencilla y directa que mantiene el paralelismo formal con el caso de la integral de Bourbaki o Daniell para funciones sumables (véanse [Pf] y [Fl]).

El siguiente teorema constituye el principal resultado de esta sección.

TEOREMA 2.5 (Teorema de Fubini para $\mathbf{R}_{prop}(B_3,I_3)$)

Si f es una función propiamente I_3-integrable, $f \in \mathbf{R}_{prop}(B_3,I_3)$, entonces:

i) $I_2^+f,\ I_2^-f \in \mathbf{R}_{prop}(B_1,I_1)$.

ii) Existe una sucesión (N_n) de subconjuntos de X_n I_1^--nulos tal que $f_x \in \mathbf{R}_{prop}(B_2,I_2)$, $\forall\ x \in X_1 - \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k$.

iii) Existe $g \in \mathbf{R}_{prop}(B_1,I_1)$, con $g(x) := I_2(f_x)$, si $f_x \in \mathbf{R}_{prop}(B_2,I_2)$, tal que $I_1(g) = I_3(f)$.

DEMOSTRACION.

Usando la monotonía de los operadores $\mathbb{I}_2^{\pm}$, que $I_i^- \geq I_i^+$, $i = 1, 2, 3$, y el lema 1.2, se tiene:

$$I_3(f) = I_3^-(f) \geq I_1^-(I_2^-f) \geq \left\{ \begin{array}{c} I_1^-(I_2^+f) \\ I_1^+(I_2^-f) \end{array} \right\} \geq I_1^+(I_2^+f) \geq I_3^+(f) = I_3(f).$$

En consecuencia:

$\alpha)$ $I_3(f) = I_1^-(I_2^-f) = I_1^+(I_2^-f) \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que I_2^-f es propiamente I_1-integrable con $I_1(I_2^-f) = I_3(f)$.

Análogamente se tiene

$\beta)$ $I_3(f) = I_1^+(I_2^+f) = I_1^-(I_2^+f) \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que I_2^+f es propiamente I_1-integrable con $I_1(I_2^+f) = I_3(f)$.

Ahora, definamos h de X_1 en $\bar{\mathbb{R}}$ por la expresión

$$h(x) := I_2^-(f_x) - I_2^+(f_x) \geq 0,\ \forall\ x \in X_1.$$

Es claro que $h \in \mathbf{R}_{prop}(B_1,I_1)$ e $I_1(h) = I_1(I_2^-f) - I_1(I_2^+f) = 0$; luego, por ser $I_1(|h|) = I_1(h)$, setiene que $h = 0$ (I_1^-); o, lo que es equivalente, $I_2^- f = I_2^+ f \ (I_1^-)$.

Aplicando el lema 2.1, se tiene que $I_2^-(f_x) = I_2^+(f_x)$, para todo x en X_1, salvo para un conjunto N numerablemente I_1-nulo. En consecuencia, $f_x \in R_{prop}(B_2,I_2)$, $\forall\ x \in X_1$-N.

Definiendo ahora la función g de X_1 en $\bar{\mathbb{R}}$ por

$$g(x) := I_2^-(f_x),\ \forall\ x \in X_1,$$

tenemos, por α), que $g \in R_{prop}(B_1,I_1)$ e $I_1(g) = I_3(f)$, como queríamos probar. ■

NOTAS 2.2:

A) De forma análoga se podría haber definido g apoyándonos en β). Lo que no es posible es definir g a partir de la integral I_2, ya que aunque f y g coincidan, salvo en un conjunto N numerablemente I_1^--nulo, puede que este sea el espacio total. (Véase el ejemplo 2.1.)

B) El ejemplo 2.2 prueba que, en general, la unión numerable de conjuntos I^--nulos no es otro conjunto I^--nulo.

Si I^σ es σ-continuo, la unión numerable de conjuntos I^σ-nulos sí es otro conjunto I^σ-nulo, aunque no sea I^--nulo.

C) Señalemos que, con la terminología de [Ho], si $q_3 := I_1^- \circ I_2^-$, $I_3^- := (I_1 \circ I_2)^-$, se tiene que

$$R_{prop}(B_3,I_3) := B_3^{I_3^-} \subseteq B_3^{q_3}$$

(:= clausura de B_3 respecto de la seminorma integral q_3), en virtud del lema 1.2, ya que $I_3^- \geq q_3$.

El teorema 2.4 se establece directamente para la clase

$R_{prop}(B_3,I_3)$, siendo su demostración fácilmente generalizable al ambiente de "seminormas integrales de Fubini", imponiendo la condición $q_3 \geq q_1 \circ q_2$, para espacios más generales tales que $q_i(f) = -q_i(-f)$, $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, i = 1, 2, 3. Tales espacios contienen estrictamente a los correspondientes espacios B^{q_i}.

El siguiente ejemplo describe los espacios concretos que se obtienen en las diferentes situaciones mencionadas en el apartado C) de la nota anterior.

(5) EJEMPLO 2.3

Consideremos el espacio de medida finitamente aditiva (X,U,μ) del ejemplo 2.1; y sean (X_1,U_1,μ_1) y (X_2,U_2,μ_2) dos espacios de medida finitamente aditiva tales que $(X,U,\mu) = (X_1,U_1,\mu_1) = (X_2,U_2,\mu_2)$ y $X_3 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $U_3 := \{ E \,;\, E$ ó X_3-E finito$\}$. Sea $\mu_3(E) := 0$, si E es finito; $:= 1$, si X_3-E finito.

Notaremos por (X_1,B_1,I_1), (X_2,B_2,I_2) y (X_3,B_3,I_3) a los sistemas integrales inducidos por estos espacios.

Si notamos $q_i := I^-_{\mu_i}$, i = 1, 2, y $q_3 := q_1 \circ q_2$, entonces se tiene que $I^-_{\mu_3} \geq I^-_{\mu_1 x \mu_2} \geq I^-_{\mu_1} \circ I^-_{\mu_2} = q_3$; y, por tanto,

$$R_{prop}(\mu_3,\mathbb{R}) \subseteq R_{prop}(\mu_1 x \mu_2,\mathbb{R}) := B_3^{I^-_{\mu_1 x \mu_2}} \subseteq B_3^{q_3}.$$

Aquí se tiene:

$$R_{prop}(\mu_3,\mathbb{R}) := \{ f : X_3 \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ acotada y } \lim_{m+n \to +\infty} f(m,n) \in \mathbb{R} \},$$

$$R_{prop}(\mu_1 x \mu_2,\mathbb{R}) := \{ f : X_3 \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ acotada y } \lim_{m \wedge n \to +\infty} f(m,n) \in \mathbb{R} \},$$

$$\mathbf{B}_3^{q_3} := \{ f : X_3 \longrightarrow \mathbb{R};\ \exists\ \lambda \in \mathbb{R};\ \underset{m}{\mathrm{Lím}}\ \overline{(\underset{n}{\mathrm{Lím}}}\ |f(m,n)-\lambda| = 0 \} \supsetneqq$$

$$\supsetneqq \{ f : X_3 \longrightarrow \mathbb{R};\ \forall\ m \in \mathbb{N},\ \underset{n}{\mathrm{Lím}} f(m,n) \in \mathbb{R} \text{ y } \underset{n}{\mathrm{Lím}}\ \underset{m}{\mathrm{Lím}}\ f(m,n) \in \mathbb{R} \}.$$

Además,

i) $\mathbf{R}_{prop}(\mu_3,\mathbb{R}) \subsetneqq \mathbf{R}_{prop}(\mu_1 \times \mu_2,\mathbb{R})$;

pues la función f dada por $f(m,n) := \dfrac{1}{m \wedge n}$ está en $\mathbf{R}_{prop}(\mu_1 \times \mu_2,\mathbb{R})$, pero no en $\mathbf{R}_{prop}(\mu_3,\mathbb{R})$.

ii) $\mathbf{R}_{prop}(\mu_1 \times \mu_2,\mathbb{R}) \subsetneqq \mathbf{B}_3^{q_3}$;

pues la función f dada por $f(m,n) := 1 \wedge m/n$, satisface $q_3(f) = 0$, pero, $f \notin \mathbf{R}_{prop}(\mu_1 \times \mu_2,\mathbb{R})$. ($q_3(f) = 0$, también se puede dar para funciones no acotadas, por ejemplo $f(m,n) := m/n$.)

Podemos afirmar que una versión análoga del teorema de Fubini no es posible para la clase $\bar{\mathbf{B}}_3$ de las funciones $\mathbf{I}_3$-sumables (véase [Bo-Dí.1]) como prueba el siguiente

(6) <u>EJEMPLO</u> <u>2.4</u>

Con $(X_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ y $(X_2,\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$ como en el ejemplo 1.1, sea

$$g := \sum_{n \text{ par}} \chi_{]n,n+1]\times(n)} \text{ de } \mathbb{R} \times \mathbb{N} \text{ en } \mathbb{R}.$$

Con f como en el ejemplo 1.1, es decir, $f := \sum_{n} \chi_{]n,n+1]\times(n)}$, es $g \le f$, $f \in \mathbf{B}_3$.

Para cada n natural, se tiene

$$g^n = \begin{cases} \chi_{]n,n+1]} & \in \mathbf{B}_1, \text{ si n es par} \\ 0 & \in \mathbf{B}_1, \text{ si n impar} \end{cases}.$$

Así,

$$\mathbf{I}_1 g(n) := \mathbf{I}_1(g^n) = \begin{cases} 1 \ldots \text{ si n es par} \\ 0 \ldots \text{ si n impar} \end{cases}.$$

Además, en nuestro caso, es $\bar{\mathbf{B}}_2 = \{ h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \exists \text{ Lím } h \in \mathbb{R} \}$, luego la función $\mathbf{I}_1 g \notin \bar{\mathbf{B}}_2$; sin embargo g es $\mathbf{I}_3$-sumable:

$$0 \leq \underline{\mathbf{I}}_3(g) \leq \bar{\mathbf{I}}_3(g) \leq \bar{\mathbf{I}}_3(f) = \mathbf{I}_3(f) = \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f) = 0;$$

luego $g \in \bar{\mathbf{B}}_3$, con $\mathbf{I}_3(g) = 0$.

En relación con este último problema, cabe insistir, en que no es posible dar para las funciones sumables $\bar{\mathbf{B}}$ un resultado análogo al lema 1.2 (que resulta ser la base para la prueba del correspondiente teorema de Fubini, teorema 2.5), en virtud del contraejemplo 1.2: no existe un teorema tipo Fubini para las clases $\mathbf{B}_+$ que intervienen en la definición de las integrales $\bar{\mathbf{I}}$ (respectivamente, $\mathbf{B}_-$ e $\underline{\mathbf{I}}$).

CAPITULO III:

TEOREMAS DE FUBINI PARA LA INTEGRACION DE RIEMANN-LOOMIS.

3.1 *La clase* $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *de las funciones integrables. Convergencias* μ- *e* $\mathbf{I}_{\mu}^{-}$*-localizadas.*

3.2 *Teoremas de Fubini para la integral localizada.*

3.3 *Teorema de Fubini para la integral inducida para espacios de medida producto.*

3.4 *Medibilidad para sistemas de Loomis. Un reciproco para el teorema de Fubini.*

En el presente capítulo, central en esta memoria, después de estudiar generalizaciones directas de resultados ya conocidos para la integración de Riemann-Loomis, se analizan las condiciones habituales exigidas para la validez de teoremas del tipo Fubini, y se establecen nuevas condiciones más débiles para que dichos teoremas continúen siendo ciertos. Con ello, gran parte de los resultados conocidos por nosotros, en este contexto, se contienen en los aquí dados.

También, con el estudio previo de la **I**-medibilidad de funciones numéricas, en el sentido de Stone, se prueba un recíproco del teorema de Fubini.

3.1 LA CLASE $R_1(B,I)$ DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES. CONVERGENCIAS μ- E $\bar{I}_\mu$-LOCALIZADAS.

Un proceso de extensión integral tipo Daniell-Bourbaki, sin condiciones de continuidad sobre la integral elemental, ha sido desarrollado en [Bo-Dí.1], construyéndose la clase $\bar{\mathbf{B}}$ de las funciones sumables. Teoremas de convergencia para esta clase, ejemplos, así como su relación con otras integrales pueden verse en [Gü.3] y [Bo-Dí.2].

En [Dí-Mu.2] se generaliza dicho proceso de extensión a la clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ de las funciones $\mathbf{I}$-integrables, a la que también se llama integral de Riemann-Loomis. La clave de tal generalización reside en el uso de una adecuada convergencia localizada de sucesiones de funciones ($\mathbf{I}^-$-convergencia), que extiende la convergencia μ-local de [Gü.2] y la "convergencia en medida" de [Du-Sc]. Con este nuevo concepto de convergencia, dado que para el caso finitamente aditivo la convergencia c. p. d. no es suficiente, se consiguen teoremas de convergencia del tipo Lebesgue, y se describen los elementos de $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ por alguno de los tres métodos clásicos: límites de funciones elementales, igualdad de integrales superiores e inferiores y como elementos de la clausura de $\mathbf{B}$ en $\bar{\mathbb{R}}^X$ respecto de una cierta seminorma integral.

En consecuencia, la integración de Riemann-Loomis, la clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, subsume la μ-integración abstracta de Riemann ([Gü.2] y [Gü.3]), la integración abstracta de Loomis [Lo] y la integración de Dunford-Schwartz [Du-Sc].

En esta primera sección del capítulo recopilamos los principales resultados acerca de la integración de Riemann-Loomis, con el objetivo de enmarcar el contexto en el que trabajamos y dar las propiedades ya conocidas, y algunas nuevas, que se usarán en nuestros desarrollos.

Además, probaremos en este estudio preliminar algunas propiedades de relación entre distintos tipos de convergencia.

En lo que sigue, se considera un sistema de Loomis $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$ arbitrario. Recordamos la definición 2.2:

Si (f_n), $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, se dice que (f_n) converge a f en $\mathbf{I}^-$-integral, y se nota por $f_n \longrightarrow f$ $(\mathbf{I}^-)$, sii $\forall\ 0 \leq h \in \mathbf{B}$, $\mathbf{I}^-(|f_n - f| \wedge h) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$.

La clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ de las funciones $\mathbf{I}$-integrables se define como el conjunto de las funciones $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ tales que existe una sucesión $(h_n) \subseteq \bar{\mathbb{R}}^X$ que es de Cauchy respecto de la norma integral $\mathbf{I}(|\circ|)$ y con $h_n \longrightarrow f$ $(\mathbf{I}^-)$. Entonces, $\mathbf{I}(f) := \text{Lím}\,\mathbf{I}(h_n)$.

$\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ es cerrado respecto de las operaciones $\pm$, $\dot{\pm}$, α $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|\circ|$, $\wedge$ y $\vee$; e $\mathbf{I}$ es un funcional lineal no negativo en $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ que extiende a $\mathbf{I}$ en $\mathbf{B}$.

Se tiene que $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I}) \subseteq \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, y $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I}) \subseteq \bar{\mathbf{B}}$ módulo funciones $\mathbf{I}^-$-nulas.

A continuación formulamos los teoremas más importantes de las funciones $\mathbf{I}$-integrables en relación con la clase de las funciones propiamente $\mathbf{I}$-integrables y los teoremas de convergencia tipo Lebesgue (carácter $\mathbf{I}^-$-cerrado de $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ y de covergencia monótona y dominada).

Teorema 1.6 de [Dí-Mu.1]:

Si $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$.

ii) $\mathbf{I}^+(|f|) < +\infty$ *y* $f^{\pm} \wedge h \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$, $\forall\ 0 \leq h \in \mathbf{B}$.

Con ello, se tiene que si $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, entonces

"$f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *si, y sólo si,* $|f| \leq h \in \mathbf{B}$".

Teoremas 2.3, 2.4 y 2.7 de [Dí-Mu.1]:

Sean $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ *y* $(f_n) \subseteq \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, *con* $f_n \longrightarrow f\ (\mathbf{I}^-)$.

Consideremos alguna de las siguientes afirmaciones:

i) (f_n) *es* $\mathbf{I}$-*Cauchy*.

ii) $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *y* $\beta := sup\ \{\ \mathbf{I}(f_n)\ \} < +\infty$.

iii) Existe $g \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *tal que* $|f_n| \leq g$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ *y* $\beta = Lím\mathbf{I}(f_n) = \mathbf{I}(f)$.

Completamos esta sección con una breve presentación de la μ-integración abstracta de Riemann y la equivalencia que existe entre la convergencia μ-local y la $\mathbf{I}_\mu^-$-convergencia, donde $\mathbf{I}_\mu$ es la integral elemental inducida por la medida μ finitamente aditiva.

Estos estudios, así como las relaciones y propiedades que se prueban acerca de los conjuntos y funciones $\mathbf{I}^-$-nulos, nos permitirán obtener resultados particulares (para el caso μ-aditivo) de los teoremas más generales de Fubini desarrollados en esta memoria.

Asumiremos, en lo que sigue, la situación $(\mu/\mathbf{U})$ del capítulo I, sección 1.4; ésto es, μ es una medida finitamente aditiva sobre un semianillo $\mathbf{U}$ de partes de $\mathbf{X}$.

DEFINICION 3.1 ([Gü.1], pág. 172)

Dados $(\mathbf{X},\mathbf{U},\mu)$ espacio de medida y f, $(f_n) \subseteq \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$, se dice que la sucesión (f_n) *converge μ-localmente* a la función f, y se nota por $f_n \longrightarrow f\ (\mu)$, sii $\forall\ \varepsilon > 0$ y $\forall$ A $\in$ $\mathbf{U}$, $\exists$ n $\in \mathbb{N}$ y M $\in \mathbf{R(U)}$ tales que $|f-f_n| < \varepsilon$ en A-M e $\int\chi_M d\mu < \varepsilon$.

La relación entre la convergencia localizada $\mathbf{I}^-$ y la convergencia μ-local se establece en [Gü.3], lemma 9 (ver también [Gü.2], pág. 270, A. 2.72):

En la situación $(\mu/\mathbf{U})$ y dadas f, $f_n \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

son equivalentes:

i) $f_n \longrightarrow f\ (\mathbf{I}^-_\mu)$ y *ii)* $f_n \longrightarrow f\ (\mu)$.

Con $(\mu/\mathbf{U})$, sea $\mathbf{B}_U$ el retículo vectorial estoniano de las funciones escalonadas, y sea $\|f\| := \int|f|d\mu$, si $f \in \mathbf{B}_U$.

DEFINICION 3.2

Se llaman *funciones μ-integrables* a los elementos del conjunto:

$$\left\{ f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}} : \exists\ \{f_n\} \subseteq \mathbf{B}_U\ /\ \|f_n-f_m\|_\mu \longrightarrow 0 \text{ y } f_n \longrightarrow f(\mu) \right\}.$$

Notaremos por $\mathbf{R}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ ó $\mathbf{R}_1(\mu)$ a tal conjunto.

LEMA 3.1

La clase $\mathbf{R}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ *tiene estructura de retículo vectorial y la aplicación* $f \longrightarrow$ *lím* $\int f_n d\mu$ *está bien definida.*

DEMOSTRACION.

Dadas f y g en $\mathbf{R}_1(\mu)$, existirán (f_n) y (g_n) en $\mathbf{B}_U$ $\|\circ\|_\mu$-Cauchy e $\mathbf{I}_\mu$-convergentes a f y g, respectivamente. Dados $\varepsilon > 0$ y $0 \le h \in \mathbf{B}_U$ existirán (h_n) y (k_n) en $\mathbf{B}_U$ tales que $|f-f_n| \wedge h \le h_n$, $|g-g_n| \wedge h \le k_n$, $\mathbf{I}_\mu(h_n) < \varepsilon/2$ e $\mathbf{I}_\mu(k_n) < \varepsilon/2$, $\forall\ n \ge n_0$. Considerando $l_n := h_n + k_n \in \mathbf{B}_U$, es claro que $f + g$ está en $\mathbf{R}_1(\mu)$, pues (f_n+g_n) es de Cauchy; y, como $|f+g-f_n-g_n| \wedge h \le$ $\le |f-f_n| \wedge h + |g-g_n| \wedge h \le l_n$, con $\mathbf{I}_\mu(l_n) < \varepsilon$, por el lema 9 de [Gü.3], se tiene que, $f_n + g_n \longrightarrow f + g\ (\mu)$.

Con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathbf{R}_1(\mu)$ es $\alpha f \in \mathbf{R}_1(\mu)$; en efecto, es claro que (αf_n) es de Cauchy, y que dados $\varepsilon > 0$ y $0 \le h \in \mathbf{B}_U$ existirán n_0 en $\mathbb{N}$ y (t_n) en $\mathbf{B}_U$ verificando que $|f-f_n| \wedge h \le$ $\le t_n$ e $\mathbf{I}_\mu(t_n) \le \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|+1}$, $\forall\ n \ge n_0$. Así, con $k_n := (|\alpha|+1)t_n$, tenemos lo deseado.

Veamos que es modular. En efecto, no hay más que observar que si (f_n) es de Cauchy en $\mathbf{B}_U$ también lo será $(|f_n|)$, pues $||f_n|-|f_m|| \le |f_n-f_m|$; y, por la misma razón, se tiene que $|f_n| \longrightarrow |f|\ (\mathbf{I}_\mu^-)$.

Que $(\int f_n d\mu)$ converge se sigue de la condición de Cauchy:

$$0 \le |\int f_n d\mu - \int f_m d\mu| \le \int |f_n - f_m| d\mu = \|f_n - f_m\| \longrightarrow 0,$$

luego, es convergente en $\mathbb{R}$. Probada la existencia del límite, resta probar su unicidad. Por ello, en [Gü.2] se demuestra que si

(f_n) es una sucesión de funciones sumables, $(f_n) \subseteq \bar{\mathbf{B}}$, en el sentido de [Bo-Dí.1], entonces la μ-convergencia a cero implica la $\|\circ\|_\mu$-convergencia a cero; luego si (f_n) y (g_n) son sucesiones en $\mathbf{B}$ $(\subseteq \bar{\mathbf{B}})$ $\|\circ\|_\mu$-Cauchy y μ-convergentes a una misma f; entonces $f_n - g_n$ es μ-convergente a cero, luego $\|\circ\|_\mu$-converge a cero, $\|f_n - g_n\|_\mu \longrightarrow 0$. Finalmente, como $|\int f d\mu - \int g d\mu| \leq \|f_n - g_n\|_\mu$, resulta la unicidad. ∎

Con (μ/U), A $\subseteq$ X se dice I^-_μ-nulo si su función característica χ_A es una función nula; ésto es, si, y sólo si, χ_A es de $\mathbf{R}_1(\mu)$ con $\int \chi_A d\mu = 0$.

<u>PROPOSICION</u> <u>3.1</u>

Sea (X,U,μ) *un espacio de medida finitamente aditiva y sea* (X,B_U,I_μ) *el sistema de Loomis inducido por éste. Entonces,* $f \in \mathbf{R}_1(\mu,\bar{\mathbb{R}})$ *si, y sólo si,* $f \in \mathbf{R}_1(B_U,I_\mu)$*; verificándose que* $\int f d\mu = I_\mu(f)$.

De la proposición 3.1 se desprende el siguiente

<u>COROLARIO</u> <u>3.1</u>

Si (μ/U) *entonces, para* A $\subseteq$ X*, equivalen:*

i) A *es* μ*-nulo.*

ii) A *es* I^-_μ*-nulo.*

Señalemos ahora que, a partir del concepto de funciones I^--nulas para un sistema de Loomis arbitrario (def. 2.3, cap. II),

$$N_1(\mathbf{B},\mathbf{I}) := \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^X ; f = 0 \ (\mathbf{I}^-) \} =$$
$$= \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^X ; \mathbf{I}^-(f \wedge h) = 0, \ \forall \ 0 \le h \in \mathbf{B} \},$$

se establece la siguiente relación de equivalencia en $\bar{\mathbb{R}}^X$ (véase, por ejemplo, [Dí-Mu.1]):

con $f, g \in \bar{\mathbb{R}}^X$, $f = g \ (\mathbf{I}^-)$ (resp. $f \le g \ (\mathbf{I}^-)$), si, y sólo si, $f-g \in N_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ (resp. $(g-f)^+ \in N_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$).

Dado que si $|f| \le g$, con $g \in N_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, entonces $f \in N_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, y usando la relación $\mathbf{a} \le \mathbf{b} + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^+$, para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bar{\mathbb{R}}$, se cumple que

$$f \le g \ (\mathbf{I}^-) \text{ si, y sólo si, existe } h \in N_1(\mathbf{B},\mathbf{I}) \text{ tal que}$$
$$f \le g \dot{+} h \text{ en } \mathbf{X}.$$

La relación "$\le (\mathbf{I}^-)$" es compatible con las operaciones $+$, $\dot{+}$, $\alpha\cdot$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$.

Con ello, los teoremas de convergencia para $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ pueden mejorarse debilitando las acotaciones con la condición "$\le (\mathbf{I}^-)$".

Referencias completas para la integración de Riemann-Loomis a partir de una medida finitamente aditiva ó a partir de un sistema de Loomis arbitrario, son, respectivamente, [Gü.1] y [Gü.2]; y [Dí-Mu.1] y [Dí-Mu.2].

3.2 TEOREMAS DE FUBINI PARA LA INTEGRAL LOCALIZADA.

En Elsner [El] se desarrolla un estudio muy completo del teorema de Fubini para la μ-integración abstracta de Riemann. En concreto, en el satz 5, pág. 270, se establecen condiciones naturales, en el caso μ-aditivo, para que dicho teorema sea cierto.

Para una función f $\lambda x\mu$-integrable, $f \in \mathbf{R}_1(U\times V,\lambda x\mu)$, se exigen las siguientes condiciones:

i) $\exists\ M > 0\ ;\ |f(z)| \leq M,\ \forall\ z \in X_3.$

ii) $\exists\ (A_n) \subseteq U$ y $\exists\ B \in \mathbf{R}(V)\ ;\ \mathbf{tr}(f) \subseteq (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \times B.$

Pues bien, dado que el espacio $\mathbf{R}_1(\mu)$ se generaliza para sistemas de Loomis arbitrarios $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$ al espacio $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ de las funciones $\mathbf{I}$-integrables, nuestro primer objetivo, en el contexto de este último espacio, es obtener una generalización del teorema de Fubini dado en Elsner, [El]. Por ello, las "condiciones conjuntistas" impuestas en [El], se traducen ahora en las siguientes condiciones más generales:

Dada una función f $\mathbf{I}_3$-integrable, $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$, se consideran

α) $\exists\ g \in \mathbf{B}_{3+}$ (ó $\mathbf{B}_3^+$) : $|f(z)| \leq g(z),\ \forall\ z \in X_3$; ó

β) $\exists\ h \in \mathbf{B}_2 : h \geq |f_x|,\ \forall\ x \in X_1.$

También, de manera natural, aparece la siguiente condición adicional (véase [Ho]):

[*] *Dadas* $0 \le g \in \mathbf{B}_1$ *y* $h \in \mathbf{B}_2$ *existe* $k \in \mathbf{B}_3$ *tal que*

$$h \le k_{\mathrm{x}}, \quad si\ g(\mathbf{x}) > o.$$

La condición [*] se tornará supérflua para una amplia gama de sistemas producto (véanse los sistemas amplios en el capítulo IV).

En el resultado que presentamos a continuación, jugarán un papel esencial la definición 3.1 de función I_3-integrable (como I_3^--límite de una sucesión I_3-Cauchy de elementos de $\mathbf{B}_3$), y el lema 1.2, que establece la relación entre la extensión integral I_3^- y la iteración de las extensiones de I_1 e I_2; ésto es, $\mathrm{I}_3^- \ge \mathrm{I}_1^- \circ \mathrm{I}_2^-$, en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}_3}$.

También se precisa usar el concepto de función I-integrable como elemento de la clausura de $\mathbf{B}$ en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}$ respecto de una cierta seminorma integral. Presentamos, entonces, el concepto de integral localizada en el sentido de [Sch], dado en [Dí-Gü.1] (véase también [Dí-Gü.2]), y estudiamos las integrales iteradas en paralelo con el desarrollo realizado en el capítulo I, sección 1.3, sobre las extensiones integrales para sistemas producto de Loomis.

Se considera un sistema producto de Loomis $(\mathrm{X}_3,\mathbf{B}_3,\mathrm{I}_3)$

respecto de los sistemas (X_1,B_1,I_1) y (X_2,B_2,I_2) dados.

DEFINICION 3.4

Para cualquier función $f \in \bar{\mathbb{R}}^{X_i}$, $i = 1, 2, 3$, se definen sus correspondientes *integrales localizadas* $I^-_{i,\ell}$, como

$$I^-_{i,\ell}(f) := sup \left\{ I^-_i(f \wedge h) \ : \ 0 \le h \in B_i \right\}.$$

Para funciones I_i-integrables, $f \in R_1(B_i,I_i)$, se verifica que $I^-_{i,\ell}(f) = I_i(f)$. En general, para f numérica cualquiera, se tiene que $I^-_{i,\ell}(f) \le I^-_i(f)$.

Para $f \in \bar{\mathbb{R}}^{X_3}$ se define la aplicación $I^-_{2,\ell}f$ de X_1 en $\bar{\mathbb{R}}$ por $(I^-_{2,\ell}f)(\mathbf{x}) := I^-_{2,\ell}(f_{\mathbf{x}})$, $\forall\ \mathbf{x} \in X_1$.

Esta aplicación es monótona, subaditiva y verifica que $(I^-_{2,\ell})_\ell = I^-_{2,\ell} \le I^-_2$, en $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$.

En efecto, $(I^-_{2,\ell}f)(\mathbf{x}) := I^-_{2,\ell}(f_{\mathbf{x}}) :=$

$$:= sup \left\{ I^-_2(f_{\mathbf{x}} \wedge h) \ : \ 0 \le h \in B_2 \right\} \le$$

$$\le sup \left\{ I^-_2(f_{\mathbf{x}}) \ : \ 0 \le h \in B_2 \right\} = I^-_2(f_{\mathbf{x}}) =: I^-_2 f(\mathbf{x}).$$

Para que se alcance la igualdad en la expresión anterior es suficiente que exista $g \in B_2$ tal que $g \ge f_{\mathbf{x}}$, cualquiera que sea $\mathbf{x} \in X_1$, ya que, entonces

$$I^-_2 f(\mathbf{x}) := I^-_2(f_{\mathbf{x}}) = I^-_2(f_{\mathbf{x}} \wedge g) \le I^-_{2,\ell}(f_{\mathbf{x}}) =: I^-_{2,\ell}f(\mathbf{x}).$$

Siguiendo a [Dí-Gü.1], con la integral localizada $I^-_{i,\ell}$,

$i = 1, 2, 3$, se establece que la clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_i,\mathbf{I}_i)$ es la clausura de $\mathbf{B}_i$ en $\bar{\mathbb{R}}^{X_i}$ respecto de la seminorma integral $\mathbf{I}^-_{i,\ell}(|\circ|)$.

TEOREMA 3.1

Sea $(X_3,\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ *un sistema producto de Loomis tal que se verifica la condición* [*]. *Si* f *es una función* $\mathbf{I}_3$*-integrable,* $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$, *tal que verifica la condición* β), *entonces:*

i) f_x *es* $\mathbf{I}_2$*-integrable salvo, en un conjunto* $\mathbf{N} \subseteq X_1$ *numerablemente* $\mathbf{I}_1^-$*-nulo; es decir:*

$$f_x \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2),\ \forall\ \mathbf{x} \in X_1\text{-}\mathbf{N}.$$

ii) *Existe una función* F $\mathbf{I}_1$*-integrable tal que* F *coincide con* $\mathbf{I}_2 f$, *salvo en un conjunto numerablemente* $\mathbf{I}_1^-$*-nulo.*

iii) $\mathbf{I}_3(f) = \mathbf{I}_1(F)$.

DEMOSTRACION.

Para cada $\mathbf{x}$ en X_1, definimos la función

$$\Phi(\mathbf{x}) := \inf \{\ \mathbf{I}_2^-(|f_x-h|)\ :\ 0 \le h \in \mathbf{B}_2\ \}.$$

Si $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, entonces $f_x \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$. En efecto, por ser $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, existirá una sucesión $0 \le (h_n)$ en $\mathbf{B}_2$ verificando:

$$\mathbf{I}_2^-(|f_x-h_n|\wedge h) \le \mathbf{I}_2^-(|f_x-h_n|) \longrightarrow 0,\ \forall\ h \in \mathbf{B}_2,\ h \ge 0;$$

luego (h_n) converge localmente a f_x en $\mathbf{I}_2^-$. Pero, además, es $\mathbf{I}_2$-Cauchy (evidéntemente).

En consecuencia, para concluir i) nos resta probar que $\Phi(\mathbf{x}) \ne 0$, a lo más, en un conjunto numerablemente $\mathbf{I}_1^-$-nulo.

Para k $\in \mathbb{N}$, se definen los conjuntos

$$A_k := \{ \mathbf{x} \in X_1 : \Phi(\mathbf{x}) \geq 1/k \}.$$

Veamos que A_k es $\mathbf{I}_1^-$-nulo para todo k; y como

$$\{ \mathbf{x} \in X_1 : \Phi(\mathbf{x}) > 0 \} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

se tendrá lo deseado.

Por ser f $\mathbf{I}_3$-integrable existirá (f_n) en $\mathbf{B}_3$ tal que

$$\mathbf{I}_{3,\ell}^-(|f-f_n|) \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty.$$

Claramente, se tiene

$$0 < \Phi(\mathbf{x}) \leq \mathbf{I}_2^-(|f_{\mathbf{x}}-f_{n,\mathbf{x}}|), \ \forall \ \mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ahora, para $\mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, se verifica que

$$0 \leq \chi_{A_k}(\mathbf{x}) \leq k\Phi(\mathbf{x}) \leq k\mathbf{I}_2^-(|f_{\mathbf{x}}-f_{n,\mathbf{x}}|) = k\mathbf{I}_2^-(|f-f_n|_{\mathbf{x}}), \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Dada $g \in \mathbf{B}_1$, por β) y [*], existen h en $\mathbf{B}_2$ y $k \in \mathbf{B}_3$, tales que

$$|f-f_n|_{\mathbf{x}} \leq h+|f_n|_{\mathbf{x}} \leq (k+|f_n|)_{\mathbf{x}}, \ \forall \ \mathbf{x} \in X_1, \text{ con } g(\mathbf{x}) > 0.$$

Luego, $0 \leq \chi_{A_k}(\mathbf{x}) \leq k\Phi(\mathbf{x}) \leq \mathbf{I}_2^-\left\{\left(|f-f_n| \wedge (k+|f_n|)\right)_{\mathbf{x}}\right\}$; y, aplicando el lema 1.2, finalmente, es

$$0 \leq \mathbf{I}_1^-(\chi_{A_k} \wedge g) \leq \mathbf{I}_1^-(\chi_{A_k}) \leq k\mathbf{I}_1^-(\Phi) \leq k(\mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-)\Big(|f-f_n| \wedge (k+|f_n|)\Big) \leq$$

$$\leq k\mathbf{I}_3^-\Big(|f-f_n| \wedge (k+|f_n|)\Big) \leq k\mathbf{I}_{3,\ell}^-(|f-f_n|) \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty, \text{ para todo}$$

k en $\mathbb{N}$.

Así, $\mathbf{I}_1^-(\chi_{A_k} \wedge g) = 0$, $\forall \ 0 \leq g \in \mathbf{B}_1$, luego χ_{A_k} es $\mathbf{I}_1^-$-nulo, y i) queda probado.

Si $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, es $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$; y podemos definir

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}}).$$

En esta situación, para $0 \leq g \in \mathbf{B}_1$, arbitraria, tendremos

$$|\mathbf{I}_2(f_{n,\mathbf{x}})-F(\mathbf{x})|\wedge g(\mathbf{x}) = |\mathbf{I}_2(f_{n,\mathbf{x}})-\mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}})|\wedge g(\mathbf{x}) \leq$$

$$\leq \{\mathbf{I}_2(|f-f_n|_{\mathbf{x}})\}\wedge g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{I}_2(|f-f_n|_{\mathbf{x}}) =$$

$$= \mathbf{I}_2\{\left(|f-f_n|\wedge(k+|f_n|)\right)_{\mathbf{x}}\} = \mathbf{I}_2\left(|f-f_n|\wedge(k+|f_n|)\right)(\mathbf{x}).$$

Por otro lado, para $\Phi(\mathbf{x}) > 0$, existirá $q \in \mathbf{B}_2$ tal que

$$\mathbf{I}_2^-(|f_{\mathbf{x}}-q|) \leq 2\Phi(\mathbf{x}),$$

y, en este caso, definimos: $F(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(q)$.

Con ello, se tiene

$$|\mathbf{I}_2(f_{n,\mathbf{x}})-F(\mathbf{x})|\wedge g(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{I}_2(f_{n,\mathbf{x}})-\mathbf{I}_2^-(f_{\mathbf{x}})|\wedge g(\mathbf{x}) +$$

$$+ |\mathbf{I}_2^-(f_{\mathbf{x}})-\mathbf{I}_2(q)|\wedge g(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{I}_2^-((f_n-f)_{\mathbf{x}})| + |\mathbf{I}_2^-(f_{\mathbf{x}}-q)| \leq$$

$$\leq \mathbf{I}_2^-(|f_n-f|_{\mathbf{x}}) + 2\Phi(\mathbf{x}) \leq 3\mathbf{I}_2^-(|f_n-f|_{\mathbf{x}}) = 3\mathbf{I}_2^-(|f_n-f|_{\mathbf{x}}\wedge k_{\mathbf{x}}).$$

En cualquier caso: $|\mathbf{I}_2 f_n-F|\wedge g \leq 3\mathbf{I}_2^-\left(|f-f_n|\wedge(k+|f_n|)\right)$. En consecuencia, aplicando el lema 1.2, se concluye que

$$\mathbf{I}_1^-(|\mathbf{I}_2 f_n-F|\wedge g) \leq 3(\mathbf{I}_1^-\circ\mathbf{I}_2^-)\left(|f-f_n|\wedge(k+|f_n|)\right) \leq$$

$$\leq 3\mathbf{I}_3^-\left(|f-f_n|\wedge(k+|f_n|)\right) \leq 3\mathbf{I}_{3,\ell}^-(|f-f_n|) \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty;$$

luego $F \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ e $\mathbf{I}_1(F) = \text{Lím}\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f_n) = \text{Lím}\mathbf{I}_3(f_n) = \mathbf{I}_3(f)$. ■

<u>NOTAS</u> <u>3.1:</u>

A) La condición β): $|f_{\mathbf{x}}| \leq h \in \mathbf{B}_2$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$, para el caso abstracto equivale en el caso $\lambda\times\mu$-aditivo a las siguientes condiciones:

i) $|f|$ es acotada.

ii) $\exists\ \mathbf{V} \in \mathbf{R}(\mathbf{U}_2)$ = anillo generado por $\mathbf{U}_2$, tal que $\text{tr}(f) \subseteq \mathbf{X}_1\times\mathbf{V}$.

En [El], los ejemplos de la página 270 (Bem. 4.b y 4.c), prueban que las condiciones i) y ii) son necesarias. Aquí, ninguna sección f_x de la función utilizada pertenece a $\mathbf{R}_1(\mu)$.

Igualmente, con el ejemplo de [El], bem. 4.a, se tiene que no basta la $\mathbf{B}_2$-acotación superior ó inferior de las $\mathbf{x}$-secciones de f. Así, la condición $|f_x| \leq h \in \mathbf{B}_2$ es necesaria.

B) Señalemos también que la condición [*] de arriba, no puede sustituirse por la siguiente condición más simple:

$$[*'] \ \forall\ h \in \mathbf{B}_2,\ 0 \leq h,\ \exists\ k \in \mathbf{B}_3\ ;\ h \leq k_x,\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1;$$

pues, junto con la condición β) también asumida, se tendría que $f \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ en virtud de la proposición 1.6 de [Dí-Mu.1].

C) Obsérvese que la prueba del teorema 3.1, junto con el teorema 2.2 aplicado a la sucesión $(h_n) \subseteq \mathbf{B}_2$, concluye que las $\mathbf{x}$-secciones de f, son funciones propiamente $\mathbf{I}_2$-integrables, $f_x \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, salvo, a lo más, para un conjunto numerablemente $\mathbf{I}_1^-$-nulo de $\mathbf{x}$ en $\mathbf{X}_1$.

Por otra parte el tratamiento de las funciones $\mathbf{I}$-integrables como elementos de la clausura en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{B}$ respecto de una cierta seminorma integral, nos permitirá ofrecer una nueva prueba del teorema 3.1, en la línea del correspondiente teorema de Fubini dado por Hoffmann [Ho] para el caso de "seminormas integrales de Fubini"; y lo que es más importante, probar nuestro teorema principal de Fubini bajo condiciones más débiles que subsume los resultados anteriores (por ejemplo, el caso $\lambda x\mu$-aditivo), y marca una línea de generalización inmediata de los resultados de [Ho], bajo las condiciones aquí consideradas.

A partir de la localización de las extensiones integrales I_i^- (i = 1, 2, 3) y de las definiciones de las adecuadas integrales iteradas, de nuevo, la clave de nuestros resultados reside en obtener condiciones bajo las cuales es posible obtener la relación entre la I_3-integral localizada de una función y la iteración de las integrales sección localizadas (ésto es, un resultado análogo al lema 1.2, ahora en el contexto de la integración localizada).

En primer lugar, introducimos las siguientes condiciones previas o hipótesis, que se usan en algunos de los trabajos conocidos sobre el tema:

[1] $\forall\ f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{X_3}\ \exists\ g \in \mathbf{B}_2\ ;\ f_x \leq g,\ \forall\ x \in X_1.$

[2] $\forall\ f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{X_i}\ \exists\ k \in \mathbf{B}_i\ ;\ f \leq k,\ i = 1, 2, 3.$

Un comentario sobre las condiciones anteriores es oportuno para desarrollar el tema.

i) Aunque fuese $f \in \mathbf{B}_3$, la definición 1.3 no nos dice que la hipótesis [1] sea supérflua. En efecto, si se toma $g := f_x$, g dependería de cada $\mathbf{x}$ en X_1, mientras que [1] exige *uniformidad* en la $\mathbf{B}_2$-acotación de las $\mathbf{x}$-secciones de f.

La formulación suficiente de [1] para nuestro estudio será:

$$[1'] \qquad \forall\ f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)\ \exists\ g \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)\ ;\ |f_{\mathbf{x}}| \le g,\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1.$$

En el capítulo IV, propiedad 4.1, se pone de manifiesto que también se verifica la condición:

$$[1''] \qquad \forall\ k \in \mathbf{B}_2 \text{ y } \forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1\ \exists\ f \in \mathbf{B}_3\ ;\ f_{\mathbf{x}} = k.$$

ii) A la condición [2] la llamaremos $\mathbf{B}_i$-acotación. Recordemos que, por la proposición 1.6 de [Dí-Mu.1], *las funciones* $\mathbf{I}_i$*-integrables que están* $\mathbf{B}_i$*-acotadas, son propiamente* $\mathbf{I}_i$*-integrables.*

La anterior condición [*] también será asumida:

[*] *Dadas* $0 \le g \in \mathbf{B}_1$ *y* $h \in \mathbf{B}_2$, *existe* $k \in \mathbf{B}_3$ *tal que*

$$h \le k_{\mathbf{x}}, \quad si\ g(\mathbf{x}) > o.$$

Obsérvese que dada $f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbf{X}_3}$, si se satisface la condición [1], se tiene que $(\mathbf{I}^-_{2,\ell}f)(\mathbf{x}) = (\mathbf{I}^-_2 f)(\mathbf{x}) := \mathbf{I}^-_2(f_{\mathbf{x}})$, para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbf{X}_1$.

Además, dada $0 \le g \in \mathbf{B}_1$, $(\mathbf{I}^-_2 f)\wedge g \le \mathbf{I}^-_2 f$.

Ahora, con la condición [*], para $0 \le g \in \mathbf{B}_1$ y $h \in \mathbf{B}_2$, existe $k \in \mathbf{B}_3$ tal que $h \le k_{\mathbf{x}}$ cuando $g(\mathbf{x}) > 0$. Por tanto, con [1], si existe $0 \le h \in \mathbf{B}_2$ tal que $f_{\mathbf{x}} \le h$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$, se tiene

$$f_{\mathbf{x}} \le h \le k_{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad f_{\mathbf{x}} = (f\wedge g)_{\mathbf{x}},$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$ tal que $g(\mathbf{x}) > 0$.

En consecuencia, $(\mathbf{I}_2^- f)\wedge g \leq \mathbf{I}_2^- f = \mathbf{I}_2^- f\wedge k$.

Pues bien, a partir del supuesto de verificarse las condiciones [1] y [*] para $f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbf{X}_3}$, se presenta, en la misma línea de [Ho], (3) Bem., el siguiente lema fundamental.

<u>LEMA</u> <u>3.2</u>

Sea $f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbf{X}_3}$ una función verificando [1] y [*]. Entonces:

$$\mathbf{I}_{3,\ell}^-(f) \geq (\mathbf{I}_{1,\ell}^- \circ \mathbf{I}_{2,\ell}^-)(f).$$

<u>DEMOSTRACION.</u>

$\mathbf{I}_{3,\ell}^-(f) := sup\ \{\ \mathbf{I}_3^-(f\wedge k)\ ;\ 0 \leq k \in \mathbf{B}_3\ \} \geq$ (lema 1.2)

$\geq sup\ \{\ (\mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-)(f\wedge k)\ ;\ 0 \leq k \in \mathbf{B}_3\ \} =: (\mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-)_\ell(f)$

$\geq$ (condición [*]) $\geq sup\ \{\ \mathbf{I}_1^-((\mathbf{I}_2^- f)\wedge g)\ ;\ 0 \leq g \in \mathbf{B}_1\ \}$

$=: \mathbf{I}_{1,\ell}^-(\mathbf{I}_2^- f) =$ (por la condición [1]) $= \mathbf{I}_{1,\ell}^-(\mathbf{I}_{2,\ell}^- f) =:$

$=: (\mathbf{I}_{1,\ell}^- \circ \mathbf{I}_{2,\ell}^-)(f)$. ■

Nótese que, por el lema 1.2, para cualquier $f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbf{X}_3}$ se tiene directamente, por la definición 3.4, que

$$\mathbf{I}_{3,\ell}^-(f) \geq (\mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-)_\ell(f).$$

Con la notación de [Ho], para el caso particular $p_1 := \mathbf{I}_1^-$, $p_2 := \mathbf{I}_2^-$, $p_3 := p_1 \circ p_2 = \mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-$, $p_{3,\ell} := (\mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-)_\ell$, $p_{\ell,3} := p_{1,\ell} \circ p_{2,\ell} = \mathbf{I}_{1,\ell}^- \circ \mathbf{I}_{2,\ell}^-$, se tiene que $(\mathbf{I}_1^- \circ \mathbf{I}_2^-)_\ell \geq \mathbf{I}_{1,\ell}^- \circ \mathbf{I}_{2,\ell}^-$, en $\bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbf{X}_3}$

(con las condiciones [1] y [*]).

Si notamos, para simplificar, $\mathbf{B}^p$:= clausura de $\mathbf{B}$ en $\bar{\mathbb{R}}^X$ respecto de la seminorma integral p, se tiene la siguiente relación entre los diferentes espacios producto que se pueden considerar:

Como, en general, $(I_1^- \circ I_2^-)_\ell \leq I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-$, en $\bar{\mathbb{R}}_+^{X_3}$ ((2), pág. 141 de [Ho]), se satisface que

$$R_1(B_3,I_3) \subseteq \mathbf{B}^{(I_1^- \circ I_2^-)_\ell} \supseteq \mathbf{B}^{I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-}.$$

En general, por el ejemplo dado en [Ho], 2, beispiel, pág. 144, se tiene que $(I_1^- \circ I_2^-)_\ell \neq I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-$.

En (3), bemerkung, de [Ho], se dan condiciones para que

$$(I_1^- \circ I_2^-)_\ell = I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-.$$

El teorema de Fubini dado en [Ho], satz (1"), es para el espacio $\mathbf{B}^{I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-}$. En consecuencia, y dado que bajo las condiciones [1] y [*] se tiene la relación

$$R_1(B_3,I_3) \subseteq \mathbf{B}^{(I_1^- \circ I_2^-)_\ell} = \mathbf{B}^{I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-},$$

se puede probar un teorema de Fubini para la clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ de forma amnáloga al satz (1") de [Ho].

Con los resultados precedentes, estamos en condiciones de probar el principal teorema de este capítulo, para el que se establecen condiciones, más débiles que las asumidas hasta ahora, para que el teorema de Fubini continúe siendo cierto.

Recordemos la siguiente condición de *continuidad en el cero* o *axioma* $\mathbf{c}_0$ *de continuidad inferior*:

DEFINICION 3.5

Se dice que un sistema de Loomis $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$ verifica el *axioma* $\mathbf{c}_0(\mathbf{I})$ *de continuidad inferior* sii para toda $0 \le h \in \mathbf{B}$, es $h \wedge 1 \in \mathbf{B}$ e $\mathbf{I}(h \wedge \varepsilon) \longrightarrow 0$, si $\varepsilon \to 0$.

Ahora, la condición [1] de $\mathbf{B}_2$-acotación de la sección f_x puede debilitarse por una condición de acotación por funciones $\mathbf{I}_2$-integrables.

Señalemos que, en todo lo que sigue, seguiremos asumiendo la condición [*].

Así, el lema 3.2 admite la siguiente generalización:

LEMA 3.3

Sea un sistema producto de Loomis $(\mathbf{X}_3,\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ *donde el sistema* $(\mathbf{X}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ *verifica el axioma de continuidad* $\mathbf{c}_0$. *Supongamos que para cada* $f \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathbf{X}_3}$ *existe una función* φ_0 $\mathbf{I}_2$*-integrable,* $\varphi_0 \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, *tal que* $f_x \le \varphi_0$, $\forall\ x \in \mathbf{X}_1$. Entonces, $\mathbf{I}^-_{3,\ell}(f) \ge (\mathbf{I}^-_{1,\ell} \circ \mathbf{I}^-_{2,\ell})(f)$.

DEMOSTRACION.

Por ser $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$ la clausura de $\mathbf{B}_2$ respecto de la seminorma integral $\mathbf{I}^-_2(|\circ|)$, dado $\varepsilon > 0$, existirá $\varphi_\varepsilon \in \mathbf{B}_2$ tal que

$I_2^-(|\varphi_0-\varphi_\varepsilon|) < \varepsilon.$

Obsérvese que $|\varphi_0| \leq |\varphi_0-\varphi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|.$

En consecuencia, para $\mathbf{x}$ arbitraria en X_1 y $0 \leq h \in \mathbf{B}_3$, se tiene

$$\begin{aligned} f_x = f_x\wedge\varphi_0 &\leq f_x\wedge(|\varphi_0-\varphi_\varepsilon|+|\varphi_\varepsilon|) \leq f_x\wedge|\varphi_0-\varphi_\varepsilon| + f_x\wedge|\varphi_\varepsilon| \leq \\ &\leq |\varphi_0-\varphi_\varepsilon| + f_x\wedge|\varphi_\varepsilon| \leq |\varphi_0-\varphi_\varepsilon| + f_x\wedge\varphi_x = \\ &= |\varphi_0-\varphi_\varepsilon| + (f\wedge\varphi)_x, \text{ donde } \varphi \in \mathbf{B}_3, \text{ aplicando } [*]. \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} I_1^-((I_{2,\ell}^- f)\wedge h) &\leq I_1^-\{I_{2,\ell}^-[(|\varphi_0-\varphi_\varepsilon|+(f\wedge\varphi))\wedge h]\} \leq \\ &\leq I_1^-[(I_{2,\ell}^-(|\varphi_0-\varphi_\varepsilon|) + I_{2,\ell}^-(f\wedge\varphi))\wedge h] \leq \\ &\leq I_1^-[(I_{2,\ell}^-(|\varphi_0-\varphi_\varepsilon|))\wedge h + (I_{2,\ell}^-(f\wedge\varphi))\wedge h] \leq \\ &\leq I_1^-(\varepsilon\wedge h) + I_1^-[(I_{2,\ell}^-(f\wedge\varphi))\wedge h] \leq \\ &\leq I_1^-(\varepsilon\wedge h) + I_1^-(I_{2,\ell}^-(f\wedge\varphi)) = I_1^-(\varepsilon\wedge h) + I_1^-(I_2^-(f\wedge\varphi)) \leq \\ &\leq I_1^-(\varepsilon\wedge h) + I_3^-(f\wedge\varphi) \leq I_1^-(\varepsilon\wedge h) + I_{3,\ell}^-(f), \end{aligned}$$

de donde por ser $\mathbf{c}_0(I_1)$ cierto, se sigue que si $\varepsilon \to 0$, entonces es $I_1^-(\varepsilon\wedge h) = I_1(\varepsilon\wedge h) \longrightarrow 0$, para cualquier $0 \leq h \in \mathbf{B}_1$.

Por tanto, $I_1^-((I_{2,\ell}^- f)\wedge h) \leq I_{3,\ell}^-(f)$; y dada la arbitrariedad de $0 \leq h \in \mathbf{B}_1$, se tiene lo deseado. ■

Recordemos, para los próximos resultados, la hipótesis [1'] expresada más arriba:

[1'] $\quad \forall\ f \in R_1(\mathbf{B}_3,I_3)\ \exists\ g \in R_1(\mathbf{B}_2,I_2)\ ;\ |f_x| \leq g,\ \forall\ \mathbf{x} \in X_1.$

El lema 3.3 permite probar el siguiente teorema más general.

TEOREMA 3.2

Sea (X_3,B_3,I_3) *un sistema producto de Loomis verificando [1'] y tal que el sistema* (X_1,B_1,I_1) *verifica el axioma de continuidad inferior* $c_0(I_1)$*. Entonces, para cada* f*, función* I_3*-integrable, se verifica que:*

i) f_x *es* I_2*-integrable,* $f_x \in R_1(B_2,I_2)$*, salvo, a lo más, en un conjunto numerablemente* $I^-_{1,\ell}$*-nulo.*

ii) existe una función F I_1*-integrable tal que* F *coincide con* $I_2 f$ *si* $f_x \in R_1(B_2,I_2)$*.*

iii) $I^-_{3,\ell}(f) = I^-_{1,\ell}(F)$*.*

DEMOSTRACION.

Por ser $R_1(B_3,I_3)$ la clausura de B_3 respecto de la seminorma integral $I^-_{3,\ell}(|\circ|)$, dado $\varepsilon > 0$ existirá g en B_3 tal que $I^-_{3,\ell}(|f-g|) < \varepsilon$. (Recordemos que será $g_x \in B_2$, $\forall\ x \in X_1$.)

Para cada x en X_1 definamos

$$\phi(x) := inf\ \{\ I^-_{2,\ell}(|f_x-h|)\ :\ 0 \le h \in B_2\ \},$$

y, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k := \{\ x \in X_1\ :\ \phi(x) \ge 1/k\ \}.$$

Se tiene: $\chi_{A_k}(x) \le k\phi(x) \le k(I^-_{2,\ell}|f-g|)(x)$, $\quad \forall\ x \in X_1$.

Aplicando el lema 3.3 a la función $|f-g|$ tendremos que

$$0 \le I^-_{1,\ell}(|\chi_{A_k}|) \le kI^-_{1,\ell}(I^-_{2,\ell}|f-g|) \le kI^-_{3,\ell}(|f-g|) < k\varepsilon;$$

y, en consecuencia, los conjuntos A_k son todos $I^-_{1,\ell}$-nulos.

En consecuencia, si $x \in X_1 - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ se cumplirá que

$\phi(\mathbf{x}) = 0$ y $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, y se tiene i). Definiremos F como $F(\mathbf{x}) := \mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(f_{\mathbf{x}}) = = \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}})$, en este caso.

Por análogos argumentos a los usados arriba, existe una sucesión (g_n) en $\mathbf{B}_3$ tal que $\mathbf{I}^{-}_{3,\ell}(|g_n - f|) \longrightarrow 0$, si $n \to +\infty$. En esta situación se tiene

$$| \mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(g_{n,x}) - F(\mathbf{x}) | \leq \mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(|g_{n,x} - f_{x}|).$$

Por otro lado, si $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$ con $\phi(\mathbf{x}) > 0$, existirá k en $\mathbf{B}_2$ tal que $\mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(|f_{x} - k|) < 2\phi(\mathbf{x})$. En este caso, con f_{x} no $\mathbf{I}_2$-integrable, definimos $F(\mathbf{x}) := \mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(k)$; y se tiene

$$| \mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(g_{n,x}) - F(\mathbf{x}) | \leq 3\mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(|g_{n,x} - f_{x}|).$$

En cualquier caso, con $n \to +\infty$, se cumple que

$$\mathbf{I}^{-}_{1,\ell}|(\mathbf{I}^{-}_{2,\ell}g_n) - F| \leq 3\mathbf{I}^{-}_{1,\ell}(\mathbf{I}^{-}_{2,\ell}|g_n - f|) \leq \mathbf{I}^{-}_{3,\ell}(|g_n - f|) \longrightarrow 0,$$

donde $\mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(g_{n,x}) = \mathbf{I}_2(g_{n,x}) \in \mathbf{B}_1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$; y, por tanto, F es $\mathbf{I}_1$-integrable.

Además, claramente se tiene que

$$\mathbf{I}^{-}_{1,\ell}(\mathbf{I}^{-}_{2,\ell}(g_n)) \longrightarrow \mathbf{I}^{-}_{1,\ell}(F), \text{ si } n \to +\infty,$$

$$\text{e } \mathbf{I}^{-}_{1,\ell}(F) = \mathbf{I}^{-}_{3,\ell}(f). \ \blacksquare$$

Nótese que para funciones cualesquiera $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}_3}$, la condición

$$"|f_{x}| \leq g \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1",$$

es equivalente a

$$"|f_{x}| \leq g \in \mathbf{B}_2, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1",$$

(condición usada en [Ho]).

3.3 FUBINI PARA LA INTEGRAL INDUCIDA POR UNA MEDIDA Y ESPACIOS DE MEDIDA PRODUCTO.

Dedicamos esta sección a presentar situaciones particulares del teorema principal 3.2.

A partir de medidas finitamente aditivas, la consideración de los correspondientes sistemas integrales de Loomis inducidos permite formular los oportunos teoremas de Fubini clásicos para espacios de medida finitamente aditiva. Para el caso de medidas σ-aditivas existe un estudio muy completo en [Pf], capítulo 16.

En primer lugar, ponemos de manifiesto que la condición $\mathbf{c}_0$ de continuidad inferior para un sistema de Loomis $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$, es una condición que se satisface automáticamente cuando el funcional lineal $\mathbf{I}$ está inducido por una medida μ.

Véanse la notación y la terminología de la seccción 1.4.

Claramente, $\mathbf{B}_U$ es estoniano: $h\wedge 1 \in \mathbf{B}_U$, $\forall\ 0 \le h \in \mathbf{B}_U$. Además, para $\varepsilon > 0$ y $0 \le h \in \mathbf{B}_U$, arbitrarios, existen $\alpha_1,\dots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$ y $C_1,\dots, C_n$ en U, tales que $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\chi_{C_i}$. Entonces,

$\varepsilon\wedge h = \varepsilon\wedge\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\chi_{C_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\chi_{C_i} \in \mathbf{B}_\mu$. Luego, $\mathbf{I}_\mu^-(\varepsilon\wedge h) = \mathbf{I}_\mu(\varepsilon\wedge h) =$

$= \mathbf{I}_\mu\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\chi_{C_i} \right) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \longrightarrow 0$, si $\varepsilon \to 0$.

Y podemos enunciar la siguiente

PROPOSICION 3.2

Si $\mathbf{I} = \mathbf{I}_\mu$ *para alguna medida* μ, *entonces el sistema de Loomis* $(\mathbf{X},\mathbf{B}_U,\mathbf{I}_\mu)$ *es* c_0*-continuo inferiormente, es decir,*

$$\mathbf{I}_\mu^-(\varepsilon\wedge h) \longrightarrow 0, \text{ si } \varepsilon \to 0, \ \forall\ 0 \le h \in \mathbf{B}_U.$$

En consecuencia, el teorema 3.2 admite la siguiente formulación particular:

TEOREMA 3.3

Sea $(\mathbf{X}_3,\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ *un sistema producto de Loomis verificando [1'] y tal que* $(\mathbf{X}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ *es un sistema inducido por un espacio de medida* $(\mathbf{X}_1,\mathbf{U},\mu)$. *Entonces, para cada* f, *función* $\mathbf{I}_3$*-integrable, se verifica que:*

i) f_x *es* $\mathbf{I}_2$*-integrable,* $f_x \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, *salvo, quizás, en un conjunto numerablemente* $\mathbf{I}_{1,\ell}^-$*-nulo.*

ii) Existe una función F $\mathbf{I}_1$*-integrable tal que* F *coincide con* $\mathbf{I}_2 f$, *si* $f_x \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$.

iii) $\mathbf{I}_{3,\ell}^-(f) = \mathbf{I}_{1,\ell}^-(F)$.

La necesidad de la $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$-acotación de las x-secciones de f se pone de manifiesto gracias al siguiente

(7) EJEMPLO 3.1 ([Ho], beispiel 2, pg. 144)

Con (X_1,B_1,I_1), (X_2,B_2,I_2) y f como en el ejemplo 1.2, es decir, $f := \sum n\chi_{(n)\times]n,n+1]}$, se tiene que

$$f \in R_1(B_3,I_3)-R_{prop}(B_3,I_3).$$

Se tiene que:

$$f_x = x\chi_{]x,x+1]} \in B_2,\ \forall\ x \in \mathbb{N} = X_1;$$

pero, no existe k I_2-integrable tal que $k \geq f_x$, $\forall\ x \in \mathbb{N}$.

Además, $I^-_{3,\ell}(f) = 0 < +\infty = I^-_{1,\ell}(I^-_{2,\ell}f)$.

En lo que sigue de esta sección tendremos presente la notación y la terminología ya introducidas en la sección 1.4 del capítulo I. Así, dados dos espacios de medida finitamente aditiva (X_1,U_1,μ_1) y (X_2,U_2,μ_2), por (X_3,U_3,μ_3) notaremos al espacio de medida finitamente aditiva producto (proposición 1.3 y definición 1.5).

Nótese que si $Z = A\times B \in U_3$, $(\mu_1\otimes\mu_2)(Z) = (\mu_1\otimes\mu_2)(A\times B) = = \mu_1(A)\mu_2(B) =: I_{\mu_1}(\chi_A)I_{\mu_2}(\chi_B)$, por la proposición 1.4; con ello, se tiene la siguiente

PROPOSICION 3.3

Para cualquier Z en el semianillo U_3 *se verifica:*

$$(\mu_1\otimes\mu_2)(Z) = \int\mu_{1,Z}d\mu_2 = \int\mu_{2,Z}d\mu_1.$$

Las propiedades anteriores nos permiten probar, con un cálculo también elemental, que el retículo vectorial B_{U_3} y el funcional $\mathbf{I}_{\mu_1\otimes\mu_2}$ inducidos, respectivamente, por el semianillo $\mathbf{U}_3$ y la medida finitamente aditiva $\mu_1\otimes\mu_2$, satisfacen las condiciones de los sistemas producto exigidas en la definición 1.3.

PROPOSICION 3.4

Si f está en $\mathbf{B}_{U_3}$, entonces:

i) $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_{U_2}$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$.

ii) $\mathbf{I}_{\mu_2} f \in \mathbf{B}_{U_1}$, *donde* $\mathbf{I}_{\mu_2} f(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_{\mu_2}(f_{\mathbf{x}})$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$.

iii) $\mathbf{I}_{\mu_1}(\mathbf{I}_{\mu_2} f) = \mathbf{I}_{\mu_1\otimes\mu_2}(f)$.

DEMOSTRACION.

i) Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$. Si $f \in \mathbf{B}_{U_3}$, será: $f = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{Z_i}$, con Zi = $= A_i \times B_i \in \mathbf{U}_3$, cualquiera que sea i $\in \{ 1, 2, \ldots, n \}$. Así,

$$f_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{Z_i}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{A_i \times B_i}(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{A_i}(\mathbf{x}) \chi_{B_i} =: \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i} \in \mathbf{B}_{U_2}.$$

ii) Con $\mathbf{x}$ arbitrario en $\mathbf{X}_1$, se tiene que

$$\mathbf{I}_{\mu_2} f(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_{\mu_2}(f_{\mathbf{x}}) = \mathbf{I}_{\mu_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{I}_{\mu_2}(\chi_{B_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_2(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{A_i}(\mathbf{x}) \mu_2(B_i) =: \sum_{i=1}^{n} \delta_i \chi_{A_i}(\mathbf{x}).$$

Luego, $\mathbf{I}_{\mu_2} f = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \chi_{A_i} \in \mathbf{B}_{U_1}$.

Finalmente, se cumple que

$$\mathbf{I}_{\mu_1}(\mathbf{I}_{\mu_2} f) = \mathbf{I}_{\mu_1}\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{A_i} \mu_2(B_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mu_1(A_i) \mu_2(B_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{I}_{\mu_1\otimes\mu_2}(\chi_{A_i} \otimes \chi_{B_i}) = \mathbf{I}_{\mu_1\otimes\mu_2}\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \chi_{Z_i} \right) = \mathbf{I}_{\mu_1\otimes\mu_2}(f). \blacksquare$$

DEFINICION 3.6

La aplicación $\mathbf{I}_{\mu_1 \otimes \mu_2}$ de $\mathbf{B}_{U_3}$ en $\mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$\mathbf{I}_{\mu_1 \otimes \mu_2}(f) := \mathbf{I}_{\mu_1}(\mathbf{I}_{\mu_2} f), \ \forall \ f \in \mathbf{B}_{U_3},$$

se llamará *integral producto inducida* por las integrales $\mathbf{I}_{\mu_1}$ e $\mathbf{I}_{\mu_2}$.

La definición 3.6 queda justificada por la proposición 3.4 y la siguiente propiedad, de inmediata comprobación.

PROPOSICION 3.5

La terna $(X_3, B_{U_3}, I_{\mu_1 \otimes \mu_2})$ *es un sistema de Loomis, donde la aplicación* $I_{\mu_1 \otimes \mu_2}$ *es lineal sobre* B_{U_3}.

A partir de las proposiciones 3.5 y 3.4 se tiene entonces que

la terna $(X_3, B_{U_3}, I_{\mu_1 \otimes \mu_2})$ *es un sistema de Loomis producto para los sistemas de Loomis* $(X_1, B_{U_1}, I_{\mu_1})$ *y* $(X_2, B_{U_2}, I_{\mu_2})$.

Y en consecuencia, dado que $R_1(\mu_1 \otimes \mu_2) = R_1(B_{U_3}, I_{\mu_1 \otimes \mu_2})$, por la proposición 3.1, se puede establecer el siguiente teorema de Fubini para espacios de medida producto finitamente aditiva:

TEOREMA 3.4

Supongamos que en $\mathbf{R}_1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ *se verifica [1']. Si* f *es de* $\mathbf{R}_1(\mu_1 \otimes \mu_2)$*, entonces:*

i) f_x *es una función* μ_2*-integrable salvo, a lo sumo, para un conjunto numerablemente* μ_1*-nulo de* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$*.*

ii) Existe una función F *en* $\mathbf{X}_1$*,* μ_1*-integrable, tal que* $F(\mathbf{x}) = \int f_x \mathrm{d}\mu_2$*, si* $f_x \in \mathbf{R}_1(\mu_2)$*.*

iii) $\int F \mathrm{d}\mu_1 = \int f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)$*.*

NOTA 3.2:

Obsérvese que para el espacio $\mathbf{R}_1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ de las funciones $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrables considerado en [El], se tiene que $\mathbf{R}_1(\mu_1 \otimes \mu_2) := \mathbf{B}_3^p$, con $p := \mathbf{I}^-_{3,\ell}$ definida en $\bar{\mathbb{R}}^{X_3}$, $\mathbf{I}_3 := \mathbf{I}_1 \circ \mathbf{I}_2$, $\mathbf{B}_3 := \mathbf{B}_{U_3}$, e $\mathbf{I}_1 := \mathbf{I}_{\mu_1}$, $\mathbf{I}_2 := \mathbf{I}_{\mu_2}$, definidos en $\mathbf{B}_{U_1}$ y $\mathbf{B}_{U_2}$, respectivamente.

Con ello, $\mathbf{R}_1(\mu_1 \otimes \mu_2) \subseteq \mathbf{B}^{(\mathbf{I}^-_1 \circ \mathbf{I}^-_2)_\ell} = \mathbf{B}^{\mathbf{I}^-_{1,\ell} \circ \mathbf{I}^-_{2,\ell}}$, si se consideran las condiciones establecidas en [Ho], (4),Folgerung.

Si $\mathbf{I}_{\mu_1}$ e $\mathbf{I}_{\mu_2}$ son σ-continuos, entonces $\mathbf{I}^\sigma_{\mu_1} \circ \mathbf{I}^\sigma_{\mu_2} \leq \mathbf{I}^\sigma_{\mu_1 \otimes \mu_2}$, y se obtiene $\mathbf{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2, \bar{\mathbb{R}})$ (:= la clase de las funciones $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrables en el sentido de Lebesgue) $\subseteq \mathbf{B}^p_{U_3}$, con $p := \mathbf{I}^\sigma_{\mu_1} \circ \mathbf{I}^\sigma_{\mu_2}$.

Con las condiciones [*] y β) del teorema 3.6, el resultado de [El], satz 5, puede reformularse, brevemente, así:

$\int d(\mu_1 \otimes \mu_2) = q_{3,\ell} = q_{\ell,3}$, en $\mathbf{R}_1(\mu_1 \otimes \mu_2)$, donde $q_{3,\ell} := (\mathbf{I}^-_{\mu_1} \circ \mathbf{I}^-_{\mu_2})_\ell$ y $q_{\ell,3} := \mathbf{I}^-_{\mu_1,\ell} \circ \mathbf{I}^-_{\mu_2,\ell}$.

Entonces $q_{3,\ell}(f) = \mathbf{I}^-_{\mu_1,\ell}(\mathbf{I}^-_{\mu_2,\ell} f)$, siendo $\mathbf{I}^-_{\mu_2,\ell} f \in \mathbf{R}_1(\mu_1) := \mathbf{B}_{U_1}^{\mathbf{I}^-_{\mu_2,\ell}}$.

Con el teorema 3.4 anterior, la condición β) de "$\mathbf{B}_2$-acotación", se ha debilitado a una condición de "$\mathbf{R}_1(\mu_2)$-acotación".

3.4 MEDIBILIDAD EN SISTEMAS DE LOOMIS. UN RECIPROCO PARA EL TEOREMA DE FUBINI.

En [Dí-Gü.1] para el estudio más general de la integración con métricas integrales localizadas q, se introducen los conceptos y propiedades más importantes relativos a la q-medibilidad.

Estos resultados nos permiten abordar la $\mathbf{I}$-medibilidad en el contexto de la integración abstracta de Riemann-Loomis, y estudiar algunas propiedades nuevas que nos servirán para probar un teorema del tipo de Tonelli, como recíproco del teorema de Fubini.

DEFINICION 3.7

Una función $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$ se dice I-*medible*, y notaremos $f \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$, sii $f\cap h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, para toda $h \in \mathbf{B}$, $h \geq 0$.

Si f, $g \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$|f|,\ f^+,\ f^-,\ \alpha f,\ f\wedge g,\ f\vee g,\ f\cap|g| \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I}).$$

Además, $f+g \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$, si f, $g \geq 0$, f, $g \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$. Si solamente $f \geq 0$, por ejemplo, en general, $f+g \notin \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$ (véase [Gü.2], A5.100).

La clase $\mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$ de las funciones I-medibles es "cerrada" para la I^--convergencia (ver [Dí-Gü.1], lemma 3). Esto es,

Si (f_n) una sucesión de funciones I-*medibles y f es una función en* X *tal que $f_n \longrightarrow f$ (I^-), entonces f es* I-*medible.*

En nuestra situación, puede darse la siguiente condición suficiente para la I-integrabilidad de una función I-medible.

LEMA 3.4

Para que una función f I-*medible sea* I-*integrable es suficiente que $\mathrm{I}^+(|f|) < +\infty$.*

DEMOSTRACION.

La demostración puede reducirse al caso $f \geq 0$; en efecto, de las hipótesis se deduce que f^+ y f^- son medibles y que

$\mathbf{I}^+(f^+) < +\infty$ e $\mathbf{I}^+(f^-) < +\infty$; pero como $f = f^+ - f^-$ y $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ es un $\bar{\mathbb{R}}$-retículo vectorial, basta resolver el problema para $f^{\pm}$.

Sea pues f como en la hipótesis, pero no negativa. Por definición de $\mathbf{I}^+$, al ser $\mathbf{I}^+(f) < +\infty$, se tiene que existe (g_n) una sucesión creciente en $\mathbf{B}$ tal que:

$$0 \le g_n \le g_{n+1} \le f,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \text{con } \mathbf{I}^+(f) = \lim \mathbf{I}(g_n).$$

Veamos que (g_n) es i) $\mathbf{I}$-Cauchy y ii) $\mathbf{I}$-convergente a f.

i) $\mathbf{I}(|g_{n+k}-g_n|) = \mathbf{I}(g_{n+k}-g_n) =$

$$= \mathbf{I}(g_{n+k}) - \mathbf{I}(g_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{I}^+(f) - \mathbf{I}(g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ii) Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $0 \le h \in \mathbf{B}$, $\delta_0 > 0$, y $(g_{\sigma(n)})$ parcial de (g_n) tales que

$$\mathbf{I}^-(|f-g_{\sigma(n)}|\wedge h) \ge \delta_0.$$

Se tiene que $l := |f-g_{\sigma(n)}|\wedge h$ está en $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$. En efecto, l es una función integrable (ya que $|f-g_{\sigma(n)}|\wedge h =$ $= f\wedge(g_{\sigma(n)}+h) - g_{\sigma(n)}$, con $f\wedge(g_{\sigma(n)}+h) = f\cap(g_{\sigma(n)}+h) \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, por ser f medible) y estar $\mathbf{B}$-acotada.

Con ello, $\mathbf{I}^+(|f-g_{\sigma(n)}|\wedge h) = \mathbf{I}^-(|f-g_{\sigma(n)}|\wedge h) \ge \delta_0$.

Luego existe, por definición de $\mathbf{I}^+$, una sucesión $(l_n) \subseteq \mathbf{B}$ tal que

$$|f-g_{\sigma(n)}|\wedge h \ge l_n \ge 0, \quad \text{e} \quad \mathbf{I}^+(l_n) \ge \delta_0/2. \qquad (*)$$

Por otro lado, se tiene que

$$f-g_{\sigma(n)} = |f-g_{\sigma(n)}| \ge |f-g_{\sigma(n)}|\wedge h \ge l_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Luego, $f \ge g_{\sigma(n)}+l_n \ge g_{\sigma(n)}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ahora, por la monotonía de $\mathbf{I}^+$, se obtiene

$$\mathbf{I}^+(g_{\sigma(n)}) = \mathbf{I}(g_{\sigma(n)}) \le \mathbf{I}(g_{\sigma(n)}) + \mathbf{I}(l_n) = \mathbf{I}^+(g_{\sigma(n)}+l_n) \le \mathbf{I}^+(f);$$

y como $\mathbf{I}^+(g_{\sigma(n)}) \longrightarrow \mathbf{I}^+(f)$, se sigue que $\mathbf{I}(l_n) \longrightarrow 0$, lo cual es absurdo por (*). Luego, $g_n \longrightarrow f(\mathbf{I}^-)$.

En consecuencia, de i) y ii), se deduce la integrabilidad de f. ■

Obsérvese que el recíproco del lema 3.4 es trivialmente cierto.

COROLARIO 3.2

La extensión integral $\mathbf{I}^+$ *es aditiva en* $+\mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I}) :=$

$$:= \{ f \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I}) : f \geq 0 \}.$$

DEMOSTRACION.

Por la superaditividad de $\mathbf{I}^+$ bastará probar que $\mathbf{I}^+(f+g) \leq \mathbf{I}^+(f) + \mathbf{I}^+(g)$, con f y g en $+\mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{I}^+(f)$ e $\mathbf{I}^+(g)$ son finitos (pues en caso contrario se verifica la desigualdad deseada de manera evidente). Pero, por el lema 3.4, f y g serán integrables; y como $\mathbf{I}^+ = \mathbf{I}$ en $+\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, de la aditividad de $\mathbf{I}$ se seguirá que:

$$\mathbf{I}^+(f+g) = \mathbf{I}(f+g) = \mathbf{I}(f) + \mathbf{I}(g) = \mathbf{I}^+(f) + \mathbf{I}^+(g). ■$$

Los resultados usuales en medibilidad de funciones son también ciertos para el caso de considerar este concepto a partir de sistemas de Loomis arbitrarios. En concreto, se tienen:

Toda función I-*medible acotada por una* I-*integrable es, también,* I-*integrable.* (Corollary XI de [Dí-Gü.1]).

En virtud del anterior resultado y teniendo en cuenta el teorema de la convergencia acotada de Lebesgue para funciones de $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ (teorema 2.7 de [Dí-Mu.1]), se cumple que

Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles $\mathbf{I}^-$-convergente a una función f y existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$, para todo n natural, entonces f es integrable.

Las "acotaciones" empleadas en los resultados anteriores pueden mejorarse mediante "$\mathbf{I}^-$-acotaciones" (en el mismo sentido del indicado al final de la sección 3.1; esto es, usando que para k y l en $\bar{\mathbb{R}}^X$, $k \leq l$ $(\mathbf{I}^-)$ significa que $\mathbf{I}^-((k-l)^+) = 0$). La relación "$\leq$ $(\mathbf{I}^-)$" es de equivalencia y compatible con las operaciones suma y producto por escalares. (Véase, por ejemplo, el lemma 2, de [Dí-Gü.1]).

En este ambiente, se cumple que

Si $f \in \bar{\mathbb{R}}^X$, $g \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ y $f = g$ $(\mathbf{I}^-)$, entonces $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$.
(Véanse [Mu], proposición 3.20 ó [Dí-Gü.1], corollary I).

A continuación vamos a presentar los resultados principales de esta sección, en los que se involucra la medibilidad para obtener un recíproco para Fubini.

La siguiente definición, introducida en [Mu.1] y [Dí-Gü.2], nos resultará de utilidad en la prueba de este resultado.

Con $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$ sistema de Loomis arbitrario, se define la *integral de Darboux* de f, para f arbitraria en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$, por

$$\mathbf{I}_*(f) := sup \{ \mathbf{I}(g) : f \geq g \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I}) \}.$$

Es claro que $\mathbf{I}_*(f) = \mathbf{I}(f)$, si $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$.

Sean $(\mathbf{X}_i,\mathbf{B}_i,\mathbf{I}_i)$, $i = 1, 2$, sistemas de Loomis arbitrarios; y sea $(\mathbf{X}_3,\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ un sistema producto para ellos.

TEOREMA 3.5 (Teorema de Hobson-Tonelli)

Sea f una función $\mathbf{I}_3$-medible. Supongamos que existe la integral iterada $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2|f|)$.

Entonces, f es $\mathbf{I}_3$-integrable.

DEMOSTRACION.

Si existe la integral iterada $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2|f|)$ es porque existe g en $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ tal que $g = \mathbf{I}_2|f|$ $(\mathbf{I}^-)$, de donde se sigue, por la proposición 3.20 ii) de [Mu.1], que $\mathbf{I}_2|f|$ es $\mathbf{I}_1$- integrable con:

$$\mathbf{I}_1(g) = \mathbf{I}_{1,*}(g) = \mathbf{I}_{1,*}(\mathbf{I}_2|f|) = \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2|f|) < +\infty.$$

Así,

$$\mathbf{I}_{1,*}(\mathbf{I}_2|f|) := sup \left\{ \mathbf{I}_1(h) : \mathbf{I}_2(|f|) \geq h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1) \right\} < +\infty;$$

y, en consecuencia, se tienen las relaciones:

$$\mathbf{I}_3^+(|f|) := sup \left\{ \mathbf{I}_3(k) : |f| \geq k \in \mathbf{B}_3 \right\} =$$

$$= sup \left\{ \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 k) : |f| \geq k \in \mathbf{B}_3 \right\} \leq$$

$$\leq sup \left\{ \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 k) : \mathbf{I}_2|f| \geq \mathbf{I}_2 k,\ k \in \mathbf{B}_3 \right\} =$$

$$= sup \left\{ \mathbf{I}_1(h) : \mathbf{I}_2|f| \geq h \in \mathbf{B}_1 \right\} \leq$$

$$= sup \left\{ \mathbf{I}_1(h) : \mathbf{I}_2|f| \geq h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1) \right\} =:$$

$$=: \mathbf{I}_{1,*}(\mathbf{I}_2|f|) < +\infty.$$

Luego, por el lema 3.4, se tiene que $f \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$. ■

El teorema 3.5 se puede completar, con el objeto de obtener la integral $\mathbf{I}_3(f)$, con las hipótesis adicionales de los teoremas 3.2, 3.3 y 3.4:

TEOREMA 3.6

Para f $\mathbf{I}_3$-medible, si $(\mathbf{X}_3,\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ es un sistema producto de Loomis verificando [1'] y, además, $(\mathbf{X}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ es $\mathbf{c}_0(\mathbf{I}_1)$, entonces, $\mathbf{I}_3(f) = \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f)$.

En efecto, nótese que $\mathbf{I}_3(f) = \mathbf{I}^-_{3,\ell}(f) = \mathbf{I}^-_{1,\ell}(\mathbf{I}^-_{2,\ell}f) = \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f)$.

Cabe señalar que en el lema 3.6 se ofrece una prueba directa con la condición suficiente ($\mathbf{I}^+(|f|) < +\infty$) para que una función **I**-medible sea **I**-integrable.

Por otra parte, particularizando el teorema 5 de [Dí-Gü.1] al caso $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, se tiene si f, $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$, es una función **I**-medible tal que $\mathbf{I}^-_\ell(|f|) < +\infty$, entonces f es **I**-integrable.

Ahora, obsérvese que para cualquier función $f \in \mathbf{M}_\cap(\mathbf{B},\mathbf{I})$, se tiene que $|f \wedge h| = |f| \wedge h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$, $\forall\ 0 \leq h \in \mathbf{B}$. Por tanto,

$|f| \wedge h \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B},\mathbf{I})$, luego $\mathbf{I}_{\ell}^{-}(|f|\wedge h) = \mathbf{I}^{-}(|f|\wedge h) = \mathbf{I}^{+}(|f|\wedge h) \leq$ $\leq \mathbf{I}^{+}(|f|)$, de donde se sigue de la definición 3.4 que

$$\mathbf{I}_{\ell}^{-}(|f|) \leq \mathbf{I}^{+}(|f|).$$

Finalmente, incluimos una aplicación obligada del teorema de Fubini (teorema 3.2), en la que se establecen condiciones para que los conjuntos sección de un conjunto $\mathbf{I}^{-}$-nulo hereden el carácter $\mathbf{I}^{-}$-nulo.

Ya hemos señalado, con el ejemplo 2.1, que existen conjuntos numerablemente $\mathbf{I}^{-}$-nulos que no son $\mathbf{I}^{-}$-nulos. En esta línea, resultados como el de J. Oxtoby [Ox], teorema 14.2, (donde se prueba que: "*las* **x**-*secciones de conjuntos nulos del plano son conjuntos 'lineales' nulos, salvo para un conjunto 'lineal' nulo*"), no se pueden obtener; aunque sí se puede alcanzar un resultado satisfactorio análogo al anterior.

Recordemos la siguiente notación usual ya usada en la sección 1.4.

Dados $\mathbf{A} \subseteq X_3$ y $\mathbf{x} \in X_1$, llamaremos **x**-*sección* de **A** al conjunto $\mathbf{A}_{\mathbf{x}} := \{ \mathbf{y} \in X_2 \ ; \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in X_3 \}$.

PROPOSICION 3.7

Si $\mathbf{A}$ *es un conjunto* I_3^-*-nulo, entonces para que* $\mathbf{A}_x$ *sea* I_2^-*-nulo para* $x \in X_1 - \mathbf{N}$*, donde* $\mathbf{N}$ *es un conjunto numerablemente* I_1^-*-nulo,* $\mathbf{N} \subseteq X_1$*, es suficiente que:*

i) (X_1, B_1, I_1) *sea* c_0*, y*

ii) existe φ *en* $R_1(B_2, I_2)$ *tal que* $\chi_{A_x} \leq \varphi$*,* $\forall\, x \in X_1$.

DEMOSTRACION.

Por [Dí-Mu.1], (17), p. 4, se tiene que $\mathbf{A}$ es I_3^--nulo si, y sólo si, $\chi_A \in R_1(B_3, I_3)$ e $I_3(\chi_A) = I_{3,\ell}^-(\chi_A) = 0$.

Como $0 \leq (I_{1,\ell}^- \circ I_{2,\ell}^-)(\chi_A) \leq I_{3,\ell}^-(\chi_A) = 0$, se tiene que

$$I_{2,\ell}^-(\chi_{A_x}) = 0, \ \forall\, x \in X_1 \backslash \mathbf{N},$$

donde $\mathbf{N}$ es un conjunto numerablemente I_1^--nulo (proposición 2.1).

Por otro lado, aplicando el teorema 3.2, se sigue que χ_{A_x} es I_2-integrable, salvo, a lo más, para un conjunto $\mathbf{M} \subseteq X_1$ numerablemente I_1^--nulo.

Por tanto,

$$\chi_{A_x} \in R_1(B_2, I_2) \text{ e } I_2(\chi_{A_x}) = I_{2,\ell}^-(\chi_{A_x}) = 0, \ \forall\, x \in X_1 - (\mathbf{N} \cup \mathbf{M}).$$

Luego, $\mathbf{A}_x$ es I_2^--nulo, salvo, a lo más, para un conjunto $\mathbf{N} \cup \mathbf{M}$ numerablemente I_1^--nulo. ■

(8) EJEMPLO 3.2

Las condiciones adicionales *i)* y *ii)* de la proposición 3.7 se satisfacen automáticamente cuando I_1 sea una integral inducida por alguna medida μ_1 y el sistema de Loomis

(X_2,B_2,I_2) sea el dado por $X_2 := \mathbb{N}$, $B_2 := B_{U_2}$, donde en U_2 estén las partes finitas y cofinitas de $\mathbb{N}$, e I_2 sea la integral inducida por la medida μ que asigna 0 a los conjuntos finitos y 1 a los cofinitos.

El ejemplo 1.2 del capítulo I nos proporciona nueva información acerca de las condiciones exigidas para la validez de los teoremas de Fubini.

(9) <u>EJEMPLO 3.3</u>

En el ejemplo 3.1 se tiene $f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$, con $h_n \in B_3$, por tanto $f \in B_3^+$. Además,

$$0 \le f \in R_1(\lambda\otimes\mu,\mathbb{R}) \cap (B_3)_+.$$

(Aquí, $R_1(\lambda\otimes\mu,\mathbb{R}) \subseteq \bar{B}_3$, luego $f \in B_3^+ \cap \bar{B}_3 \subseteq (B_3)_+$).

Allí, en el ejemplo 1.2 se probaba que

$$0 = I_3^+(f) < 1 \le I_1^+ \circ I_2^+(f).$$

Con ello, Fubini es, en general, falso para la clase $(B_3)_+$.

También en el ambiente del ejemplo 1.2, la condición [1] (sección 3.2) es cierta para B_3: para cada $l \in B_3$, existen $h \in B_1$ y $k \in B_2$ tales que $|l| \le h \wedge k$, en $X_1 \times X_2$. Pero la función f no satisface [1].

Podemos así concluir que la condición [1] no es hereditaria de B_3 a $R_1(B_3,I_3)$ y que la validez de [1] para B_3 no implica la validez del teorema de Fubini para $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$ o desigualdades del tipo

$$\mathbf{I}_3^+ \geq \mathbf{I}_1^+ \circ \mathbf{I}_2^+, \quad \bar{\mathbf{I}}_3 \geq \bar{\mathbf{I}}_1 \circ \bar{\mathbf{I}}_2 \quad \text{ó} \quad \mathbf{I}_{3,\ell}^- \geq \mathbf{I}_{1,\ell}^- \circ \mathbf{I}_{2,\ell}^-.$$

Nótese que para $\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_3,\mathbf{I}_3)$, [1] es trivialmente cierto si [1] se satisface para $\mathbf{B}_3$.

CAPITULO IV:

EL SISTEMA PRODUCTO: LOS SISTEMAS AMPLIOS.

Es claro que la familia de los sistemas producto de Loomis respecto de dos sistemas integrales (X_1,B_1,I_1) y (X_2,B_2,I_2) dados, es no vacía (por ejemplo, considérense $B_3 := \{ 0 \}$ e $I_3 := 0$). Interesa, no obstante, estudiar la existencia de sistemas integrales producto no triviales. De hecho, ya hemos trabajado con los sistemas de medida producto (sección 3.4).

Dedicamos este capítulo a presentar, a partir del concepto de espacio producto tensor, una clase importante de sistemas producto: los sistemas amplios. Con frecuencia, la bibliografía conocida sobre la expresión de las "integrales múltiples" como integrales iteradas, utiliza sistemas amplios para el caso de medidas σ-aditivas o funcionales monótonamente continuos (véanse, por ejemplo, [Fl] y [Pf]). Analizamos aquí las propiedades más interesantes de los sistemas amplios, en el contexto de la integración finitamente aditiva, y las situaciones particulares que en ellos se contienen.

4.1 EL SITEMA PRODUCTO TENSOR E INTEGRACION.

En la siguiente definición, siguiendo la terminología de [Pf], recogemos los conceptos básicos de producto tensor y sistema producto amplio.

DEFINICION 4.1

La función f de $X_1 \times X_2$ en $\mathbb{R}$ es un elemento de la clase *producto tensor* $\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2$ sii existen $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathbf{B}_1$, $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathbf{B}_2$, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tales que $f = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes h_k$, siendo $g_k \otimes h_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) := g_k(\mathbf{x}) h_k(\mathbf{y})$, $\forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in X_1 \times X_2$. Se notará $\mathbf{B}_\otimes = \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2$ (isomorfo al producto tensorial de los espacios vectoriales $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$).

Dados los sitemas integrales de Loomis $(X_1, \mathbf{B}_1, I_1)$ y $(X_2, \mathbf{B}_2, I_2)$, se llama *sistema producto amplio de Loomis* a todo sistema producto de Loomis $(X_3, \mathbf{B}_3, I_3)$ donde el retículo vectorial $\mathbf{B}_3 \subseteq \bar{\mathbb{R}}^{X_3}$ verifique $\mathbf{B}_\otimes \subseteq \mathbf{B}_3$.

El producto tensor $\mathbf{B}_\otimes$ resulta ser, trivialmente, un espacio vectorial; aunque no será, en general, modular; de ahí la dificultad de materializar, en cada caso, los sistemas producto.

Sin embargo, si $\mathbf{B}_\otimes$ es modular, se obtiene que es un sistema integral de Loomis (definición 1.3), tal y como se enuncia en la siguiente proposición de fácil demostración.

PROPOSICION 4.1

Una condición suficiente para que el sistema producto tensor $\mathbf{B}_{\otimes}$ *sea un sistema producto de Loomis es que sea modular; es decir, es suficiente que* $|f| \in \mathbf{B}_{\otimes}$, *para toda* $f \in \mathbf{B}_{\otimes}$.

En esta dirección, nos limitaremos a poner de manifiesto que podemos encontrarnos con productos tensores $\mathbf{B}_{\otimes}$ que no sean de Loomis, como muestra el siguiente ejemplo indicado en [Pf], ex. 15-6 y 15-8, p. 192.

(10) EJEMPLO 4.1

Sean $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n \in]0,1[$ distintos dos a dos. Para $\mathbf{x} \in [0,\Pi]$ sea $f_i(\mathbf{x}) := |sen(\mathbf{x}+\alpha_i)|$, con $i \in \{ 1, 2,\ldots,n \}$. Es fácil comprobar, por inducción sobre n, que

la familia $\{ f_i;\ 1 \leq i \leq n \}$ *es linealmente independiente* [&]

por ser el Wronskiano de dicha familia no idénticamente nulo.

Consideremos, entonces, el espacio generado por las f_i: $\mathbf{B}_i := \mathbf{B}_1 := \mathbf{B}_2 := \mathbf{Lin}\ \{ f_i : n \in \mathbb{N} \}$.

Sea la función $g : [0,\Pi] \times [0,\Pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := sen(\mathbf{x}+\mathbf{y}),\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in [0,\Pi] \times [0,\Pi].$$

Es claro que $g \in \mathbf{B}_{\otimes}$, pues $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := sen(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = sen\mathbf{x}cos\mathbf{y}+cos\mathbf{x}sen\mathbf{y} = sen\mathbf{x}sen(\mathbf{y}+\pi/2) + sen\mathbf{x}sen(\mathbf{y}+\pi/2)$.

Sin embargo, $f := |g| \notin \mathbf{B}_{\otimes}$.

En efecto, razonemos por reducción al absurdo. Se tiene que $f_{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_2$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1 := [0,\Pi]$; pero también, $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$

$\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{x})h_k(\mathbf{y})$, con $g_k \in \mathbf{B}_1$ y $h_k \in \mathbf{B}_2$, con $1 \leq k \leq n$.

Si se toma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$, entonces $f_{\mathbf{x}_j} = \sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{x}_j)h_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}h_k$, donde algún α_{kj} es no nulo para algún k.

Consideremos, ahora, $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1} \in X_2 := [0,\Pi]$ distintos dos a dos; y tomemos $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, tales que $\sum_{j=1}^{n+1} a_j f_j = 0$. Veamos que no necesariamente han de ser todos los coeficientes a_j nulos, y, por tanto, llegaremos a contradicción con [&].

Por unos sencillos cálculos,

$$0 = \sum_{j=1}^{n+1} a_j f_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_j\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} h_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n+1} a_j \alpha_{kj}\Big)h_k; \qquad (1)$$

de donde, por ser las h_k linealmente independientes, se tiene que $\sum_{j=1}^{n+1} a_j \alpha_{kj} = 0$, para todo k, $1 \leq k \leq n$. Es decir, podemos tomar, en este sistema de n ecuaciones con n+1 incógnitas, algún $a_j \neq 0$ y, aún así, se seguirá verificando (1); luego $|g| \notin \mathbf{B}_\otimes$ y, con ello, $\mathbf{B}_\otimes$ no es modular.

A continuación presentamos dos propiedades que involucran la naturaleza del producto tensor $\mathbf{B}_\otimes$. En la primera de ellas logramos materializar, dados k en $\mathbf{B}_2$ y $\mathbf{x}$ en X_1, al elemento h de $\mathbf{B}_3$ cuya $\mathbf{x}$-sección es, precisamente, k; este h, realmente, está en $\mathbf{B}_\otimes$. La siguiente propiedad ofrece cierta similitud a la propiedad 1.2; allí se probaba, entre otras cosas, que para cada elemento h de $\mathbf{B}_1$ existe un elemento g de $\mathbf{B}_3$ tal que $\mathbf{I}_2 g = h$. Ahora, gracias al producto tensor, podemos extender esta propiedad a las clases $\mathbf{B}_i^+$ y el funcional $\mathbf{I}_i^+$.

PROPIEDAD 4.1

Dados $k \in \mathbf{B}_2$ *y* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_1$ *existe* h *en el sitema amplio* $\mathbf{B}_3$ *tal que* $h_{\mathbf{x}_0} = k$.

DEMOSTRACION.

Sea g en $\mathbf{B}_1$ tal que $g(\mathbf{x}) \neq 0$. Definiendo ahora

$$h : \mathbf{X}_3 \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ h(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})}{g(\mathbf{x}_0)}, \ \forall \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{X}_3.$$

Se tiene, claramente, que $h \in \mathbf{B}_\otimes \subseteq \mathbf{B}_3$ y $h_{\mathbf{x}_0} = k$. ■

PROPIEDAD 4.2

Para cada $k \in \mathbf{B}_1^+$ *existe* $g \in \mathbf{B}_3^+$ *tal que* $\mathbf{I}_2^+ g = k$.

DEMOSTRACION.

Por definición, para $h \in \mathbf{B}_1^+$ y para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1$, existe una sucesión creciente (k_n) en $\mathbf{B}_1$ tal que $\text{Lím}_n\, k_n(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})$. Sea ahora h en $\mathbf{B}_2$ tal que $\mathbf{I}_2(h) \neq 0$. (En particular, vamos a suponer $\mathbf{I}_2(h) > 0$.) Definamos la nueva función $g := (\mathbf{I}_2 h)^{-1} k \otimes h$.

Resulta que, cualquiera que sea $\mathbf{x}$ en $\mathbf{X}_1$, se verifica que

$$\mathbf{I}_2^+ g(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_2^+(g(\mathbf{x})) = (\mathbf{I}_2 h)^{-1} \mathbf{I}_2^+(h) k(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}).$$

Pero, además, observamos que tomando $g_n := (\mathbf{I}_2 h)^{-1} k_n \otimes h$, para cada n natural, obtenemos una sucesión en $\mathbf{B}_\otimes$ ($\subseteq \mathbf{B}_3$) creciente tal que $\text{Lím}_n\, g_n(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Por tanto, $g \in \mathbf{B}_3^+$. ■

En todo lo que sigue se asumirá que $\mathbf{B}_3$ es un sistema amplio, es decir, $\mathbf{B}_\otimes \subseteq \mathbf{B}_3$.

PROPOSICION 4.2

Si $0 \le g \in \bar{\mathbb{R}}^{X_1}$ *y* $0 \le h \in \bar{\mathbb{R}}^{X_2}$, *entonces*

$$\mathbf{I}_3^-(g\otimes h) = \mathbf{I}_1^-(g)\mathbf{I}_2^-(h).$$

Es de hacer notar que este resultado (véase también [Pf], prop. 15.8, pg. 188) nos da una condición suficiente para que se alcance la igualdad en el lema 1.2. Para su demostración precisamos de dos lemas previos:

LEMA 4.1

Sean $0 \le g \in \bar{\mathbb{R}}^{X_1}$ *y* $0 \le h \in \bar{\mathbb{R}}^{X_2}$; *si* $\mathbf{I}_1^-(g) = \mathbf{I}_2^-(h) = 0$, *entonces* $\mathbf{I}_3^-(g\otimes h) = 0$.

DEMOSTRACION.

Dado $\varepsilon > 0$ existen $g_0 \in \mathbf{B}_1$ y $h_0 \in \mathbf{B}_2$ tales que

$$g \le g_0 \text{ e } \mathbf{I}_1(g_0) < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{y} \quad h \le h_0 \text{ e } \mathbf{I}_2(h_0) < \sqrt{\varepsilon}.$$

Así, $g\otimes h \le g_0\otimes h_0 \in \mathbf{B}_\otimes \subseteq \mathbf{B}_3$; luego,

$$\mathbf{I}_3^-(g\otimes h) \le \mathbf{I}_3(g_0\otimes h_0) = \mathbf{I}_1(g_0)\mathbf{I}_2(h_0) < \varepsilon;$$

y, en consecuencia, de la arbitrariedad de ε, se sigue el resultado. ■

LEMA 4.2

Sean $0 \le g \in \bar{\mathbb{R}}^{X_1}$, $0 \le h \in \bar{\mathbb{R}}^{X_2}$, *tales que* $\mathbf{I}_1^-(g)\mathbf{I}_2^-(h) = 0$, *entonces* $\mathbf{I}_3^-(g\otimes h) = 0$.

DEMOSTRACION.

Supondremos que es $I_1^-(g) > 0$. (Si ambos fuesen cero volveríamos a aplicar el lema 4.1.) Dado $\varepsilon > 0$, existe

$$q \in \mathbf{B}_2 \text{ tal que } q \geq h \text{ e } I_2^-(h) = 0 \leq I_2(q) < \varepsilon/I_1(p),$$

donde $p \in \mathbf{B}_1$ y $p \geq g$. Así, $I_3^-(g\otimes h) \leq I_3(p\otimes q) = I_1(p)I_2(q) < \varepsilon$; luego, $I_3^-(g\otimes h) = 0$. ■

DEMOSTRACION (de la proposicion 4.2).

En general, sabemos, por el lema 1.2, que

$$I_3^- \geq I_1^- \circ I_2^-, \text{ en } \bar{\mathbb{R}}^{X_3},$$

luego, $I_3^-(g\otimes h) \geq I_1^- \circ I_2^-(g\otimes h) = I_1^-(g)I_2^-(h)$; y, por tanto, bastará probar la otra desigualdad.

Supondremos $I_1^-(g)I_2^-(h) > 0$ sin pérdida de generalidad, pues si se hace cero, el lema 4.2 nos dará lo pedido.

Existen p y q en $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, respectivamente, tales que

$$p \geq g, \quad q \geq h, \quad I_1(p) \geq I_1^-(g) \quad \text{e} \quad I_2(q) \geq I_2^-(h).$$

Nótese que $g\otimes h \leq p\otimes q \in \mathbf{B}_\otimes \subseteq \mathbf{B}_3$. Así,

$$I_3^-(g\otimes h) \leq I_3(p\otimes q) = I_1(p)I_2(q).$$

Luego, con p fijo, pero arbitrario, en $\mathbf{B}_1$, se tiene que

$$\frac{I_3^-(g\otimes h)}{I_1(p)} \leq I_2(q), \qquad \forall\ q \in \mathbf{B}_2,\ q \geq h.$$

Con ello, $\dfrac{I_3^-(g\otimes h)}{I_1(p)} \leq I_2^-(h)$. Es decir,

$$I_3^-(g\otimes h)/I_2^-(h) \leq I_1(p), \qquad \forall\ p \in \mathbf{B}_1,\ p \geq g;$$

y, en consecuencia, se tiene la desigualdad

$$I_3^-(g\otimes h)/I_2^-(h) \leq I_1^-(g). \ ■$$

NOTAS 4.1:

A) Para i = 1, 2, la restricción $\mathbf{J}_i$ a $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_i)$ (= espacio de las funciones continuas de soporte compacto en el espacio de Hausdorff localmente compacto X_i) de la integral $\mathbf{I}_i$ inducida por la medida μ_i (véase [Pf], cap. 13), es una integral de Bourbaki en $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_i)$. $\mathbf{J}_3$, restricción a $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_3)$ de la integral producto $\mathbf{I}_3$, también es de Bourbaki en $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_3)$.

Con ello, $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_3)$ es un sistema producto amplio respecto de $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_1)$ y $\mathbf{C}_0(\mathrm{X}_2)$.

B) Siguiendo la terminología de [Fl], pp. 180-181, se puede describir la integral producto tensor de la siguiente forma:

Sean $\mathbf{I}_i : \mathbf{B}_i \longrightarrow \mathbb{R}$, i = 1, 2, lineales y no negativos, y $\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2$ como es usual. Se deine $\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_2 : \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$(\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_2)(g \otimes h) := \mathbf{I}_1(g)\mathbf{I}_2(h), \ \forall \ g \in \mathbf{B}_1 \text{ y } \forall \ h \in \mathbf{B}_2.$$

Si $f = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i \in \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2$, para cada $\mathbf{x} \in \mathrm{X}_1$, se tiene

$$f_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x}) \otimes h_i \in \mathbf{B}_2.$$

Se considera entonces el funcional $\mathbf{I}_2 f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathbf{I}_2 f(\mathbf{x}) := \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}}), \text{ donde } \mathbf{I}_2(f_{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x})\mathbf{I}_2(h_i),$$

siendo, por tanto, $\mathbf{I}_2 f \in \mathbf{B}_1$.

Con ello, en $\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2$, se tiene $\mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2(g \otimes h)) = \mathbf{I}_1(g)\mathbf{I}_2(h)$. Luego,

$$\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{I}_2(f) = \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 f).$$

Un planteamiento similar se ha desarrollado en el estudio de los sistemas producto inducidos por medidas finitamente aditivas, en la sección 3.4 del capítulo III.

C) En [Pf], p. 191, ex. 15-5, ante el problema de encontrar sistemas integrales producto no triviales, se sugiere un mecanismo de obtención de un conveniente sistema integral a partir de una familia arbitraria $\mathbf{F}$ de funciones reales. Su método se puede resumir así:

Si $\mathbf{F}$ es una familia cualquiera de funciones reales definidas sobre un conjunto arbitrario X, se considerará

$$|\mathbf{F}| := \{ \, |f| \; ; \; f \in \mathbf{F} \, \}$$

y, de modo inductivo, se definirán los espacios vectoriales

$\mathbf{F}_1 := \mathrm{Lin}\,\{ \mathbf{F} \cup |\mathbf{F}| \}$, $\mathbf{F}_{n+1} := \mathrm{Lin}\,\{ \mathbf{F}_n \cup |\mathbf{F}_n| \}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con ello, notando $\mathbf{F}_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n$, se tienen

i) $\mathbf{F}_\infty$ es un retículo vectorial modular.

ii) Si $\mathbf{B}$ es otro retículo vectorial en X con $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{F}_\infty \subseteq \mathbf{B}$.

Por ello, a $\mathbf{F}_\infty$ se le dice "el retículo vectorial en X generado" por $\mathbf{F}$.

4.2 PRODUCTO TENSOR DE FUNCIONES INTEGRABLES.

Abordamos en esta sección el problema del producto tensor de funciones integrables. Los resultados que se obtienen justifican la importancia de los sistemas integrales producto que son amplios.

En primer lugar, damos algunos lemas elementales.

LEMA 4.3

Supongamos que $\mathbf{B}_\otimes$ *es modular (luego sistema integral de Loomis). Sea* k *es una función no negativa de* $\mathbf{B}_\otimes$. *Entonces existen funciones* k_1 *y* k_2 *en* $\mathbf{B}_1$ *y* $\mathbf{B}_2$, *respectivamente, tales que* $k \le k_1 \otimes k_2$.

DEMOSTRACION.

Podemos escribir, $k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \otimes h_k$, donde $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathbf{B}_1$, $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathbf{B}_2$, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Así, $k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \otimes h_k \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, |g_k| \otimes |h_k| \le$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^{1/2} |g_k| \otimes \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^{1/2} |g_k| =: k_1 \otimes k_2 \in \mathbf{B}_\otimes. \ \blacksquare$$

Obsérvese que la propiedad anterior es cierta para funciones escalonadas o para funciones continuas de soporte compacto.

LEMA 4.4

Si (g_n) *y* (h_n) *son dos sucesiones* $\mathbf{I}_1$ *e* $\mathbf{I}_2$*-Cauchy en* $\mathbf{B}_1$ *y* $\mathbf{B}_2$, *respectivamente, entonces* $(g_n \otimes h_n)$ *es una sucesión* $\mathbf{I}_3$*-Cauchy en* $\mathbf{B}_\otimes$.

DEMOSTRACION.

Se tiene, $\mathbf{I}_3(|g_n \otimes h_n - g_m \otimes h_m|) := \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2 |g_n \otimes h_n - g_m \otimes h_m|) \le$

$\le \mathbf{I}_1(|\mathbf{I}_2(g_n \otimes h_n - g_m \otimes h_m)|) \le |\mathbf{I}_1(g_n)\mathbf{I}_2(h_n) - \mathbf{I}_2(h_m)\mathbf{I}_1(g_m)| \le$

$$\leq \left|\mathbf{I}_1(g_n)(\mathbf{I}_2(h_n)-\mathbf{I}_2(h_m))\right| + \left|\mathbf{I}_2(h_m)(\mathbf{I}_1(g_n)-\mathbf{I}_1(g_m))\right| \leq$$

$$\leq M_1\left|\mathbf{I}_2(h_n)-\mathbf{I}_2(h_m)\right| + M_2\left|\mathbf{I}_1(g_n)-\mathbf{I}_1(g_m)\right| \longrightarrow 0, \text{ si } n,\ m \to +\infty,$$

donde M_1 y M_2 son constantes que acotan a las sucesiones de Cauchy de números reales $(\mathbf{I}_1(g_n))$ e $(\mathbf{I}_2(h_n))$. ■

Cuando $\mathbf{B}_\otimes$ sea modular estaremos, como ya dijimos arriba, ante un sistema producto amplio de Loomis; en esta situación, si hacemos $\mathbf{B}_3 := \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2$, también notaremos $\mathbf{I}_\otimes$ al funcional producto $\mathbf{I}_3$ correspondiente. En este ambiente resulta el

LEMA 4.5

Sean (g_n) y (h_n) son dos sucesiones en $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, respectivamente $\mathbf{I}_1^-$ e $\mathbf{I}_2^-$-convergentes a funciones $g \in \bar{\mathbb{R}}^{X_1}$ y $h \in \bar{\mathbb{R}}^{X_2}$. Supongamos que $\mathbf{I}_1^-(|g|) < +\infty$ O $\mathbf{I}_2^-(|h|) < +\infty$; entonces $(g_n \otimes h_n)$ es una sucesión $\mathbf{I}_3^-$-convergente a $g \otimes h$.

DEMOSTRACION.

Sea $0 \leq k \in \mathbf{B}_\otimes$ arbitraria. Se tiene que,

$$\mathbf{I}_3^-(|g_n \otimes h_n - g \otimes h| \wedge k) = \mathbf{I}_3^-(|g_n \otimes h_n - g_n \otimes h + g_n \otimes h - g \otimes h| \wedge k) \leq$$

$$\leq \mathbf{I}_3^-(|g_n \otimes h_n - g_n \otimes h| \wedge k) + \mathbf{I}_3^-(|g_n \otimes h - g \otimes h| \wedge k) \leq$$

(aplicando ahora el lema 4.3 a k, existen convenientes k_1 y k_2)

$$\leq \mathbf{I}_3^-\{((|g_n|+k_1)\otimes|h_n-h|)\wedge((|g_n|+k_1)\otimes k_2)\} +$$

$$+ \mathbf{I}_3^-\{(|g_n-g|\otimes(|h|+k_2))\wedge(k_1\otimes(|h|+k_2))\} \leq$$

$$\leq \mathbf{I}_3^-\{(|g_n|+k_1)\otimes(|h_n-h|\wedge k_2)\} +$$

$$+ \mathbf{I}_3^-\{(|g_n-g|\wedge k_1)\otimes(|h|+k_2)\} =$$

(aplicando ahora la proposición 4.3:)

$$= \mathbf{I}_1(|g_n|+k_1)\mathbf{I}_2^-(|h_n-h|\wedge k_2) +$$

$$+\ \mathrm{I}_1^-(|g_n-g|\wedge k_1)\mathrm{I}_2^-(|h|+k_2) \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty,$$

pues $\mathrm{I}_1^-(|g_n|+k_1) = \mathrm{I}_1(|g_n|+k_1) \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I}_2^-(|h|+k_2) < +\infty$, $\mathrm{I}_2^-(|h_n-h|\wedge k_2) \longrightarrow 0$ e $\mathrm{I}_1^-(|g_n-g|\wedge k_1) \longrightarrow 0$, por hipótesis, si $n \to +\infty$. ■

Ahora, apartir de los lemas 4.4 y 4.5, se desprende el siguiente teorema (véanse [Pf], cor. 15.9, pg. 189 y [Gü.2], satz 2, pg. 100).

TEOREMA 4.1

Sean $g \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ *y* $h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$. *Supongamos que* $\mathrm{I}_1^-(|g|) < +\infty$ *ó* $\mathrm{I}_2^-(|h|) < +\infty$. *Entonces* $g\otimes h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_\otimes,\mathbf{I}_\otimes)$ *con* $\mathrm{I}_3(g\otimes h) := \mathrm{I}_\otimes(g\otimes h) = \mathrm{I}_1(g)\mathrm{I}_2(h)$.

El resultado anterior, para el caso de sistemas de Loomis arbitrarios, se corresponde con el corolario 15.9 en [Pf], con sistemas Daniell-continuos:

Si $\mathbf{B}_1\otimes\mathbf{B}_2 \subseteq \mathbf{B}_3$, $g \in \mathbf{L}_1$, $h \in \mathbf{L}_2$ *(*$\mathbf{L}$ *:= funciones Daniell integrables), y* $f = g\otimes h$, *entonces* $f \in \mathbf{L}_3$ *e* $\mathrm{I}_3(f) = \mathrm{I}_1(g)\mathrm{I}_2(h)$.

Y, como consecuencia directa, se obtiene el siguiente

COROLARIO 4.1

Si $g \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1)$ *y* $h \in \mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2)$, *entonces* $g{\otimes}h \in \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_{\otimes},\mathbf{I}_{\otimes})$, *con* $\mathbf{I}_3(g{\otimes}h) := \mathbf{I}_{\otimes}(g{\otimes}h) = \mathbf{I}_1(g)\mathbf{I}_2(h)$.

Brevemente, $\mathbf{R}_1(\mathbf{B}_1,\mathbf{I}_1){\otimes}\mathbf{R}_{prop}(\mathbf{B}_2,\mathbf{I}_2) \subseteq \mathbf{R}_1(\mathbf{B}_{\otimes},\mathbf{I}_{\otimes})$.

Se prueba a continuación que tal hipótesis, $\mathbf{I}_1^-(|g|) < +\infty$ ó $\mathbf{I}_2^-(|h|) < +\infty$, es condición suficiente para que el conjunto de puntos donde la función g ó h tome valor infinto sea un conjunto nulo. Este resultado es consecuencia del siguiente más general. (Véase, por ejemplo, [Bo], th. 9, pg. 22).

PROPOSICION 4.3 (Desigualdad de Tchebicheff)

Para $(\mathbf{X},\mathbf{B},\mathbf{I})$ *sistema de Loomis arbitrario sean* $f \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbf{X}}$ *y* $\mathbf{A}_{\infty} := \{\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} : f(\mathbf{x}) = +\infty\ \}$. *Entonces:*

$$\mathbf{n}\mathbf{I}^-(\chi_{\mathbf{A}_{\infty}} \wedge h) \le \mathbf{I}^-(f), \quad \forall\ 0 \le h \in \mathbf{B} \quad y \quad \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

DEMOSTRACION.

Llamemos $\mathbf{A}_n := \{\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} : f(\mathbf{x}) \ge \mathbf{n}\ \}$, para cada $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Es claro que $\mathbf{A}_{\infty} \subseteq \mathbf{A}_n$, $\forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\chi_{\mathbf{A}_{\infty}} \wedge h \le \chi_{\mathbf{A}_{\infty}} \le \chi_{\mathbf{A}_n} \le f/\mathbf{n},$$

luego de la monotonía y homogeneidad positiva de $\mathbf{I}^-$, se sigue, para $0 \le h \in \mathbf{B}$, que $\mathbf{I}^-(\chi_{\mathbf{A}_{\infty}} \wedge h) \le \mathbf{I}^-(f)/\mathbf{n}$. ■

COROLARIO 4.2

Con la notación anterior, si $I^-(f) < +\infty$, *entonces el conjunto* A_∞ *es* I^-*-nulo.*

En particular, se tiene que:

"Para cada función f propiamente integrable, $f \in R_{prop}(B,I)$, *su conjunto* A_∞ *asociado es* I^-*-nulo."*

En integración iterada resulta de interés el siguiente

COROLARIO 4.3

Para $f \in \bar{\mathbb{R}}^{X_3}$, *si* $I_3^-(|f|) < +\infty$, *entonces el conjunto* $\{ x \in X_1 : I_2^-(f_x) = +\infty \}$ *es un conjunto* I_1^-*-nulo.*

DEMOSTRACION.

Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos

$$A := \{ x \in X_1 \ ; \ I_2^-(f_x) = +\infty \} \subseteq \{ x \in X_1 \ ; \ I_2^-(f_x) \geq n \} =: A_n .$$

Con $0 \leq h \in B_1$ arbitraria, se tiene $\chi_A \wedge h \leq \chi_A \leq \chi_{A_n} \leq I_2^-(f)/n$. Luego, $I_1^-(\chi_A \wedge h) \leq I_1^-(I_2^-(f))/n \leq I_3^-(f)/n \in \mathbb{R}$, de donde haciendo $n \to +\infty$, se sigue que A es I_1^--nulo. ■

Vamos a completar esta sección con unos resultados que establecen la relación que hay entre el producto cartesiano y sus factores en términos de conjuntos nulos. Enunciamos dos relaciones de sencilla comprobación que nos serán de utilidad en lo que sigue.

a) *Para* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \bar{\mathbb{R}}_+$, *se tiene que*

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c})(\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}) \le \mathbf{ab}\wedge\mathbf{cd}.$$

b) *Para* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_1,\dots,\ \mathbf{b}_n \in \bar{\mathbb{R}}_+$, *se tiene que*

$$\mathbf{a}\wedge\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{b}_k\Big) \le \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}_k).$$

PROPOSICION 4.4

Si $\mathbf{A}\times\mathbf{C} \subseteq \mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2$ *es* $\mathbf{I}_3^-$*-nulo, entonces* $\mathbf{A}$ *es* $\mathbf{I}_1^-$*-nulo o* $\mathbf{C}$ *es* $\mathbf{I}_2^-$*-nulo.*

DEMOSTRACION.

Sean $0 \le g \in \mathbf{B}_1$ y $0 \le h \in \mathbf{B}_2$. Se tiene, $g\otimes h \in \mathbf{B}_\otimes \subseteq \mathbf{B}_3$; y en consecuencia, $0 \le \mathbf{I}_1^-(\chi_A\wedge g)\mathbf{I}_2^-(\chi_C\wedge h)$ = (por la proposición 4.3) =

$= \mathbf{I}_3^-((\chi_A\wedge g)(\chi_C\wedge h)) \le$ (por a) y la monotonía de $\mathbf{I}_3^-$) $\le$

$\le \mathbf{I}_3^-((\chi_A\otimes\chi_C)\wedge(g\otimes h)) = \mathbf{I}_3^-(\chi_{A\times C}\wedge(g\otimes h)) = 0.$ ■

PROPOSICION 4.5

Supongamos que $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_\otimes$. *Si* $\mathbf{A}$ *es un conjunto* $\mathbf{I}_1^-$*-nulo en* $\mathbf{X}_1$ *tal que* $\chi_A \le k$, *para algún* $k \in \mathbf{B}_1$, *entonces* $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ *es un conjunto* $\mathbf{I}_3^-$*-nulo cualquiera que sea* $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{X}_2$.

DEMOSTRACION.

Sea $f \in \mathbf{B}_\otimes$; así, existirán g_i y h_i, $1 \le i \le n$, en $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, respectivamente, tales que $f = \sum_{i=1}^{n} g_i\otimes h_i$.

Para $\mathbf{C}$, conjunto arbitrario en $\mathbf{X}_2$, se tiene,

$$0 \le \mathbf{I}_3^-(\chi_{A\times C} \wedge \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i) \le \text{(por b))} \le \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_3^-((\chi_A \otimes \chi_C) \wedge (g_i \otimes h_i)) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_3^-\{(\chi_A \otimes \chi_C) \wedge ((\chi_A + g_i) \otimes (\chi_C + h_i))\} \le \text{(por a))} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_3^-\{((\chi_A \wedge (\chi_A + g_i)) \otimes (\chi_C \wedge (\chi_C + h_i))\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_3^-\{((\chi_A \wedge (k + g_i)) \otimes (\chi_C \wedge (\chi_C + h_i))\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_3^-\{(\chi_A \wedge (k + g_i)) \otimes \chi_C\} =$$

$$= \text{(por la proposición 4.3:)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_1^-(\chi_A \wedge k)\mathbf{I}_2^-(\chi_C) = 0. \blacksquare$$

NOTAS FINALES:

A) Los teoremas de Fubini aquí presentados pueden reformularse para funciones evaluadas en espacios de Banach, usando la definición $f \cap g := \|f\|^{-1}(\|f\| \wedge g)f$, para toda $f \in \mathbf{E}^{\mathrm{X}}$, con $\mathbf{E}$ un espacio de Banach, y $g \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathrm{X}}$. ([Gü.2], pg. 327).

La clase $\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I})$ puede extenderse sin dificultad a funciones de $\mathbf{E}^{\mathrm{X}}$ mediante un funcional $\mathbf{I}^\circ : \mathbf{B}^\circ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\mathbf{B}^\circ \subseteq \mathbb{R}_+^{\mathrm{X}}$, con la condición $\|\mathbf{I}(h)\| \le \mathbf{I}^\circ(|h|)$, siguiendo la línea trazada por [Sch.2].

B) El reciente texto de Anger-Porteimer [An-Po] sobre las integrales de Radon sugiere la consideración de espacios abstractos de funciones integrables

$$\mathrm{X}^q := \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}};\ q(f) = q_*(f) \in \mathbb{R} \},$$

donde q es una integral superior de $\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}$ en $\bar{\mathbb{R}}$ y $q_*(f) := -q(-f)$, para $f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}$.

Si se consideran métricas integrales p (nota 1.1 B), se tienen los correspondientes espacios $\mathbf{B}^p$ (:= clausura de $\mathbf{B}$ en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}$

respecto de p) con $p := q_{|\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}_{+}}$ y $q = q_*$ en $\mathbf{B}$ (o, equivalentemente, q lineal en $\mathbf{B}$, subespacio vectorial en $\mathbb{R}^{\mathrm{X}}$), están contenidos en X^q.

Es una cuestión abierta la existencia para cada métrica integral $p : \bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}_{+} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_{+}$ de una integral superior $q : \bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, con $q = p$ en $\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}_{+}$.

En este sentido, en las condiciones bajo las cuales $\mathbf{B}^{q_{|\bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}}_{+}}} = \mathrm{X}^q$, se tendría como caso particular el reciente resultado de Günzler:

$$"\mathbf{R}_1(\mathbf{B},\mathbf{I}) = \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}} \ ; \ \mathbf{I}^-_{\ell}(f) = (\mathbf{I}^-_{\ell})_*(f) \in \mathbb{R} \}";$$

y, probablemente, el análogo para la integración de Daniell-Loomis [Dí-Gü.2]:

$$"\mathbf{L}(\mathbf{B},\mathbf{I}) = \{ f \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathrm{X}} \ ; \ \bar{\mathbf{I}}_{\ell}(f) = (\bar{\mathbf{I}}_{\ell})_*(f) \in \mathbb{R} \}",$$

pudiéndose obtener teoremas de Fubini para los espacios X^p en la línea del teorema 2.5 de esta memoria (o teorema 1 de [Am-Dí.1]).

BIBLIOGRAFIA

[Am-Dí.1] **de Amo, E. y Díaz Carrillo, M.;** On Abstract Fubini Theorem for Finitely Additive Integration. *Aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.*

[Am-Dí.2] **de Amo, E. y Díaz Carrillo, M.;** Fubini and Tonelli Theorems for the Riemann-Loomis integrals. *Preprint.*

[An-Po] **Anger, B. y Porteimer, C.;** Radon Integrals. *Birkhäuser,* Boston, 1992.

[Au] **Aumann, G.;** Integralerweirterungen mittels Normen. *Archiv der Mathematik, 3, 441-450* (1952).

[Ba] **Bandyopadhyay, U. K.;** On products of vector measures. *J. Austral. Math. Soc. 19 (A), 91-96* (1975).

[Be] **Berberian, S. K.;** Measure and integration. *Chelsea P. C.,* New York, 1970.

[Bo-Dí.1] **Bobillo Guerrero, P. y Díaz Carrillo, M.** ; Summable and integrable functions with respect to any Loomis system. *Arch. der Math., 49, 245-256* (1987).

[Bo-Dí.2] **Bobillo Guerrero, P. y Díaz Carrillo, M.** ; On the summability of certain μ-integrable functions. *Arch. der Math., 52, 258-264* (1989).

[Boc] **Boccara, N.**; Functional Analysis. *Academic Press,* London, 1990.

[Dí-Gü.1] **Díaz Carrillo, M. and Günzler, H.**; Local integral metrics and Daniell loomis integrals. *Bull. Austral. Math. Soc., 48, 411-426* (1993).

[Dí-Gü.2] **Díaz Carrillo, M. and Günzler, H.**; Daniell- Loomis Integrals. *Sometido a publicación.*

[Dí-Mu.1] **Díaz Carrillo, M. y Muñoz Rivas, P.**; Locally-integral extension for linear functionals. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, XII/1* (1990).

[Dí-Mu.2] **Díaz Carrillo, M. y Muñoz Rivas, P.**; Finitely additive integration: integral extension with local convergence. *Ann. Sci. Math. Québec, 17 (2), 145-154* (1993).

[Do] **van Dowen, E. K.;** Fubini's Theorem for Null Sets. *Amer. Math. Monthly, 96 (8) 718-721* (1989).

[Du-Sc] **Dundord, N. y Schwartz, J. T.;** Linear Operators. Part I: General Theory. *Interscience,* New York, 1958.

[El] **Elsner, J.;** Zum "satz von Fubini" für ein abstractes Riemann integral. *Mat. Z., 141, 265-278* (1975).

[Fl] **Floret, K.;** Mass-und Integration Theorie. *Teubner,* Stuttgart, 1981.

[Fu] **Fubini, G.;** Sugli integrali multipli, *Rendic. Acc. dei Lincei, 5 (16),* (1907).

[Go] **Gould, G. G.;** The Daniell-Bourbaki integral for finitely additive measures. *Proc. London Math. Soc., 297-320* (1966).

[Gü.1] **Günzler, H.;** Linear Functionals which are Integrals. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, XLIII, pp. 167-176* (1974).

[Gü.2] **Günzler, H.;** Integration. *Bibliogr. Institut,* Mannheim, 1985.

[Gü.3] **Günzler, H.;** Convergence theorems for a Daniell-Loomis integral. *Mathematica Pannonica, 2/2, 77-94* (1991).

[Gü.4] **Günzler, H.;** Stonean lattices, measures and completeness. *Intern. Series Numer. Math. 25, 113-126, Birkhäuser Verl., Besel* (1974).

[Ha] **Halmos, P. R.;** Measure theory. *Springer-Verlag* 1974.

[He] **an der Heiden, U.;** On the representation of linear functionals by additive set functions. *Archiv der Mathematik, 30 210-214* (1978).

[Hew-Str] **Hewitt, E. y Stromberg, K.;** Real and Abstract Analysis. *Berlín-Heidelberg-New York,* 1965.

[Ho] **Hoffmann, D.;** Zum "satz von Fubini". *J. Reine Angew Math., 292, 138-145* (1977).

[Ho-Sch] **Hoffmann, D. y Schäfke, F. W.;** Integrale. *Wissenschaftsverlag,* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992.

[Kö] **Köning, H.;** Daniell-Stone integration without the lattice condition and its application to uniform algebras. *Ann. Univ. Saraviensis, Series Math., 4 (1),* (1992).

[Lo] **Loomis, L. H.**; Linear functionals and content. *Amer. J. Math., 76, 168-182* (1952).

[Liu] **Liubicich, P.**; Sul prolongamento dell' integrale. *Rend. Math. Univ. Trieste, 8 (1), 108-121* (1976).

[Lu] **Luxemburg, W. A. J**; The abstract Riemann integral and a theorem of G Fichtenholz on equality of repeated Riemann integrals IA and IB. *Indag. Math., 23, 516-545* (1961).

[Me] **Mertens, J. F.**; Intégration des measures non denombrablement additives: Une généralisation du lemma de Fatou et du théoreme de convergence de Lebesgue. *Ann. Soc. Sci. de Bruxelles, 84 (2), 231-239* (1970).

[Mu] **Muñoz Rivas, P.**; Integración finitamente aditiva con convergencia I-local. *Tesis doctoral, Universidad de Granada* (1990).

[Ox] **Oxtoby, J. C.**; Measure and Category. *Springer Verlag,* New York, 1971.

[Pf] **Pfeffer, W. F.**; Integrals and measures. *Marcel Dekker Inc.,* New York, 1977.

[Ro] **Royden, H. L.**; Real analysis. *McMillan,* New York, 1963.

[Sch.1] **Schäfke, F. W.;** Der "satz von Fubini" in der allgemeinen integrationstheorie. *J. reine angew. Math., 256, 58-70* (1972).

[Sch.2] **Schäfke, F. W.;** Lokale integral normen und verallgemeinerte uneigantliche Riemann- Stieljes-Integrale. *Journal für die reine und angew Mathematik, 289, 118-134* (1977).

[Sch.3] **Schäfke, F. W.;** Integrations theorie II. *J. reine angew. Math. 248, 147-171* (1971).

[Sh-Gur] **Shilov, G. E. y Gurevich, B. L.;** Integral, Measure and Derivate: an Unified Approach. *Prentice Hall Inc.* 1966.

[Shi] **Shipman, J.;** Cardinal conditions for strong Fubini theorems. *Trans. Amer. Math. Soc. 321 (2), 465-481* (1990).

[Si] **Sinclair, G. E.;** A finite additive generalization of the Fichtenholz-Lichtenstein theorem. *Trans. Amer. Math. Soc. 193, 359-374* (1974).

[St] **Stone, M. H.;** Notes on integration, II. *Proccedings of the Nat. Acad. of Sci. USA, 34, 447-455* (1948).

[Va] **Valdivia, M.**; Análisis Matemático V, vol. 2. *U.N.E.D.*, Madird, 1985.

[Yo-Hew] **Yosida, K. y Hewitt, E.**; Finitely additive measure. Trans. Amer. Math. Soc., *72, 46-66* (1952).