

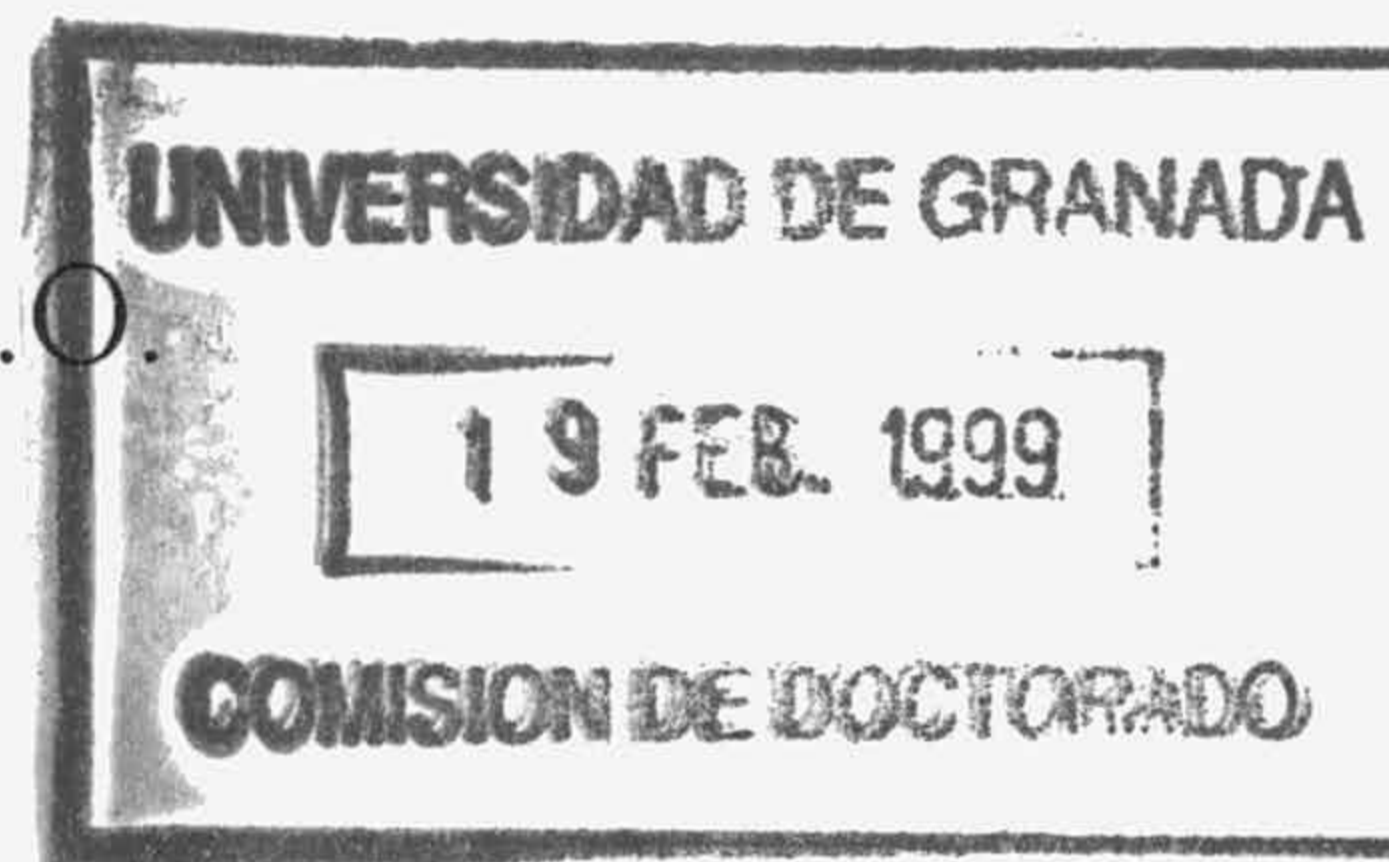
+ 1/90

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 4/3/99
ENTRADA NUM. 728

UNIVERSIDAD DE GRANADA



Dpto. de Estadística e I.O.



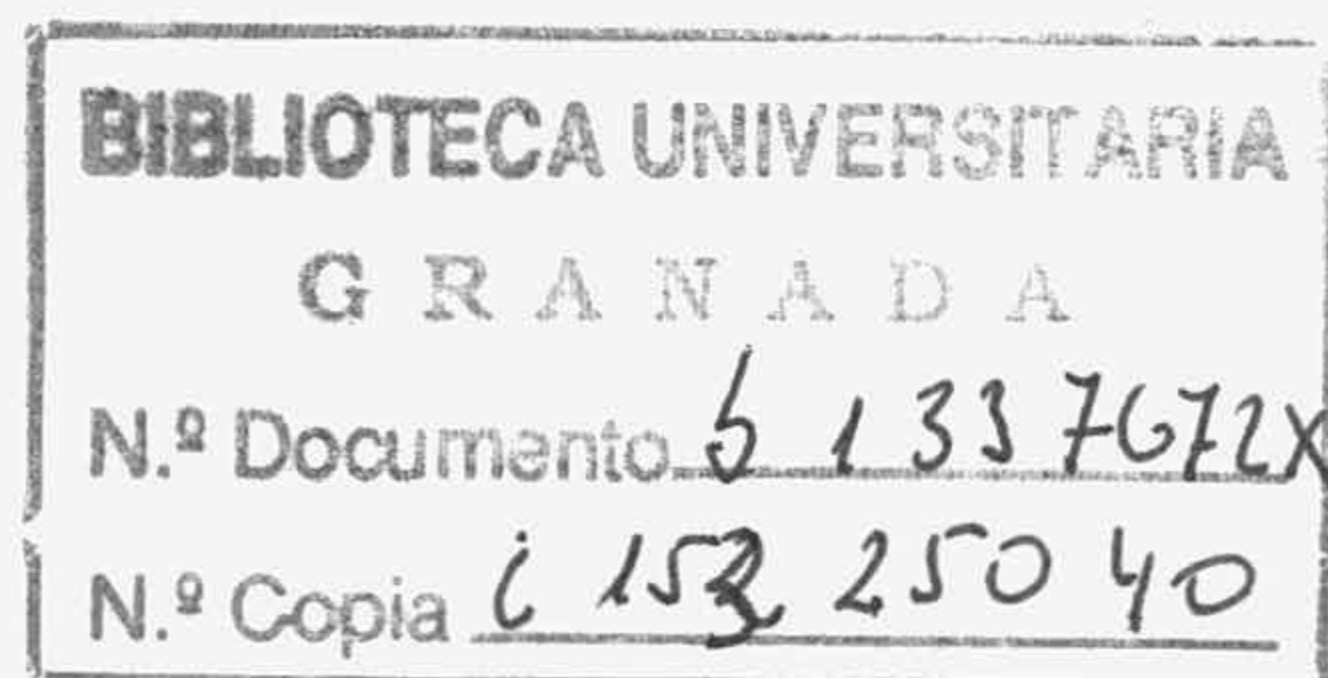
ESTUDIO DE FAMILIAS DE
DISTRIBUCIONES DISCRETAS
GENERADAS POR FUNCIONES
HIPERGEOMÉTRICAS

TESIS DOCTORAL

Antonio Conde Sánchez

Granada, 1999

ESTUDIO DE FAMILIAS DE
DISTRIBUCIONES DISCRETAS GENERADAS
POR FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS



Memoria presentada por
Antonio Conde Sánchez
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Vº. Bº de los Directores de la Tesis

Fdo: Dr. Ramón Gutiérrez Jáimez

Fdo: Dr. José Rodríguez Avi

Dpto. de Estadística e I.O.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1999

A Lina

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. D. José Rodríguez Avi, director de esta memoria, por su inestimable ayuda así como por su constante apoyo, tanto en el aspecto investigador así como, sobre todo, en el aspecto humano, y al Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez, codirector de esta memoria, por su asesoramiento científico y su constante disposición.

Asimismo, me gustaría agradecer a mi familia, compañeros de Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Jaén y amigos la confianza, apoyo y ánimo que de ellos he recibido.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Introducción histórica	1
1.2	Objetivos y desarrollo de la memoria	4
1.3	Futuras vías de investigación	6
2	Resultados previos	7
2.1	Introducción	7
2.2	Familias de distribuciones univariantes generadas por funciones hipergeométricas	8
2.3	Familias de distribuciones bivariantes generadas por funciones hipergeométricas	10
2.4	Resultados de sumación	15
2.4.1	Resultados para la ${}_2F_1$	15
2.4.2	Resultados para la ${}_3F_2$	16
2.4.3	Otras funciones	18
3	Distribuciones generadas por la función hipergeométrica	
	${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$	19
3.1	Introducción	19
3.2	Resultados generales	20
3.2.1	Funciones generatrices	21
3.2.2	Relación de recurrencia entre los momentos	23
3.2.3	Moda	24
3.3	Clasificación	25
3.4	Resultados parciales de sumación	29
3.5	Estudio de casos concretos	33
3.5.1	Familia de distribuciones para $\lambda = 1$	34
3.5.2	Familias de distribuciones para $\lambda = 1/2$	48
3.5.3	Otros resultados de sumación	55
4	Generación mediante funciones ${}_{p+1}F_p$ de cualquier orden	59
4.1	Introducción	59

4.2	Distribuciones generadas por la función hipergeométrica	
	${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$	60
4.2.1	Funciones generatrices	61
4.2.2	Relación de recurrencia entre los momentos	63
4.2.3	Clasificación	64
4.2.4	Resultados parciales de sumación	72
4.2.5	Estudios de casos concretos	74
4.3	Distribuciones generadas por la función hipergeométrica	
	${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$	93
4.3.1	Funciones generatrices	94
4.3.2	Relación de recurrencia entre los momentos	96
4.3.3	Resultado parcial de sumación	97
5	Distribuciones generadas por la función hipergeométrica	
	$F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)$	101
5.1	Introducción	101
5.2	Resultados generales	102
	5.2.1 Funciones generatrices	103
	5.2.2 Relación de recurrencia entre los momentos	104
5.3	Distribuciones condicionadas y marginales	105
5.4	Clasificación	109
5.5	Estudio de casos concretos	111
	5.5.1 Distribuciones Tipo VI	111
	5.5.2 Distribuciones Tipo I	115
	5.5.3 Distribuciones Tipo III y V	116
6	El problema de la estimación	123
6.1	Introducción	123
6.2	La estimación en el caso univariante	124
	6.2.1 El método de los momentos	124
	6.2.2 Método de máxima verosimilitud	127
	6.2.3 Otros métodos de estimación	130
	6.2.4 Aplicación a datos reales	133
6.3	La estimación en el caso bivariante	141
A	Programas en Matlab 5.1	145
A.1	Resultados de sumación	145
	A.1.1 ${}_2F_1$	145
	A.1.2 ${}_3F_2$	146
	A.1.3 ${}_{p+1}F_p$	148
	A.1.4 F_3	149
A.2	F.m.p. y función de distribución	150
	A.2.1 ${}_3F_2$	150
	A.2.2 ${}_{p+1}F_p$	152

A.2.3	F_3	153
A.2.4	Marginales de la F_3	155
A.3	Momentos	156
A.3.1	${}_3F_2$	156
A.3.2	${}_4F_3$	158
A.3.3	F_3	160
A.4	Estimación	162
A.4.1	${}_2F_1$	162
A.4.2	${}_3F_2$	163
A.4.3	${}_4F_3$	164
A.5	Gráficos	166
A.5.1	Unidimensionales	166
A.5.2	F_3	167
Bibliografía		173

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción histórica

Dentro de la Estadística, el Cálculo de Probabilidades es la Teoría Matemática que permite modelizar y sistematizar las poblaciones objeto de estudio. Por tanto, uno de sus objetivos básicos es el de encontrar modelos de los diversos fenómenos aleatorios. Esto lo logra mediante la determinación de distribuciones teóricas que permitan asignar una medida —la probabilidad— a todos y cada uno de los posibles sucesos que puedan interesar en la población estudiada.

A tal fin, en un primer momento, se comenzó trabajando sobre la generación de distribuciones continuas. Sin embargo, y debido al amplio campo de aplicación dentro de los fenómenos reales, se está profundizando cada vez más en la obtención de distribuciones teóricas discretas, con el consiguiente desarrollo de los métodos empleados para ello. Es en este campo de estudio donde se enmarca este trabajo, y por ello se ha creído conveniente dibujar una breve reseña histórica en donde se describan algunos métodos que se han empleado o se emplean para obtener distribuciones discretas. Dichos métodos tratan de establecer un modelo matemático, bien mediante una ecuación funcional, diferencial o en diferencias, que ha de ser resuelta para obtener de forma explícita la ley de probabilidades.

Ya en el año 1895, Pearson [41] propuso el estudio de una familia de distribuciones continuas caracterizadas por el hecho de que sus funciones de densidad verifican una ecuación diferencial del tipo:

$$y'(x) = \frac{x - a}{b_0 + b_1x + b_2x^2}y(x) \quad (1.1)$$

en donde a , b_0 , b_1 y b_2 son parámetros reales.

Este sistema de Pearson, que supuso el primer intento de sistematización de distribuciones de probabilidad a partir de la forma de generarlas, y que incluye a distribuciones tan importantes como la distribución Normal, desempeñó un papel destacado en la Estadística durante muchos años. Aún

en la actualidad, los sistemas generadores de distribuciones de probabilidad que han seguido esta línea son conocidos como *Pearsonianos*.

Debido a su primacía histórica este sistema ha sido muy estudiado, y así, sus propiedades más destacadas, como ocurre con las relaciones de recurrencia entre momentos, la ecuación diferencial que verifica la función característica de las distribuciones pertenecientes al sistema, la clasificación de las mismas, o el ajuste por el método de los momentos, han sido objeto de numerosos trabajos, de entre los que podemos destacar los de Cansado ([2], [3]), Elderton & Jhonson [7] y Kendall & Stuart [30], entre otros.

Como extensión de estos sistemas de Pearson, se pensó en estudiar otras opciones que condujesen a otras distribuciones no clasificables como Pearsonianas. Así, por ejemplo, se consideró la ecuación diferencial:

$$\frac{d \ln f(x)}{d(x)} = \frac{N(x)}{D(x)} \quad (1.2)$$

en donde N y D son polinomios en x , de órdenes n y d , en principio cualesquiera.

Otra generalización del sistema de Pearson fue presentada por Herreras [21], el cual introduce una ecuación diferencial análoga al de dicho sistema, pero con operadores derivadas más generales.

Para el caso multivariante, Pearson [42] propuso en el año 1923 una familia de distribuciones continuas que deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{L(x,y)}{G(x,y)} f(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{N(x,y)}{H(x,y)} f(x,y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

en donde L , N son funciones cúbicas y G , H son funciones cuárticas en x e y , tales que se verifica la condición

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \quad (1.4)$$

En particular, en 1947 y 1948, Van Uven [51] estudió con amplitud el caso en que L y N son funciones lineales, G y H son funciones cuadráticas en x e y respectivamente, para el cual obtuvo relaciones entre momentos, líneas de regresión y clasificación de las distribuciones pertenecientes al sistema. Otras extensiones más recientes se deben a Fernández [10] y Herreras [21].

Una aproximación interesante en el desarrollo de familias de distribuciones continuas, debido en gran parte a sus buenas propiedades para la estimación, viene dada por el estudio de familias exponenciales, cuyas funciones de densidad son de la forma:

$$\ln f(x, \theta) = t(x)q(\theta) + A(x) + B(\theta) \quad (1.5)$$

donde t y q son funciones monótonas en x y θ respectivamente, y $\theta \in \Omega$, con $\Omega = \{\theta \mid B(\theta) < \infty\}$.

Considerando el caso discreto, el estudio de familias de distribuciones de este tipo ha seguido un camino paralelo al ya expuesto, tomando como modelo el caso continuo. El propio Pearson en 1895 propuso el estudio de una ecuación en diferencias análoga al caso continuo, de la forma:

$$\Delta f_{r-1} = \frac{a-r}{b_0 + b_1 r + b_2 r(r-1)} f_{r-1} \quad r \in T \subseteq \mathbb{Z} \quad (1.6)$$

donde $a, b_i, i = 0, 1, 2$ son parámetros reales y f_r es la "función de densidad".

Pero al parecer, a Pearson sólo le interesaron las distribuciones continuas y nunca desarrolló un sistema análogo para el caso discreto. Esta vía quedó inexplorada hasta que en 1919 Carver usó la ecuación en diferencias para el suavizamiento de datos actuariales, aunque no llegó tampoco a investigar las distribuciones así definidas.

El primer análisis de las distribuciones cuya función de probabilidad verifican dicha ecuación no apareció hasta Katz (1946, 1948), aunque permaneció sin publicar hasta 1965. Posteriormente el sistema ha sido estudiado ampliamente por Ord ([37], [38], [39]), quien obtiene relaciones de recurrencias entre momentos factoriales y una clasificación de las distribuciones pertenecientes al sistema en diversos tipos atendiendo a los coeficientes de asimetría y curtosis, entre otras propiedades importantes.

En 1976, Herrerías [22] estudia una extensión del sistema de Pearson discreto, y obtiene distribuciones que no pertenecen al sistema de Ord.

Mención especial merece, dentro de la línea de sistemas discretos, el estudio de familias generadas a partir de series de potencias generalizadas, cuyas funciones de probabilidad vienen definidas por:

$$f_r = a(r) \frac{\theta^r}{A(\theta)} \quad (1.7)$$

donde $r \in \Omega$ que es el rango de la variable aleatoria R , y θ es un parámetro. El estudio de sus propiedades y estimaciones de los parámetros han sido discutidos en diversos trabajos, destacando entre ellos los de Patil.

El caso multivariante, cuyas funciones de probabilidad vienen definidas por:

$$f(r_1, \dots, r_m / \theta_1, \dots, \theta_m) = a(r) \frac{\theta_1^{r_1} \dots \theta_m^{r_m}}{A(\theta)} \quad (1.8)$$

a partir de series de potencias generalizadas multivariantes, ha sido también discutido por Patil.

Una revisión de todos estos trabajos puede verse en Conde [5], fundamentalmente los referidos al sistema de Pearson discreto y a la familia de distribuciones en series de potencias.

Nuestro estudio se centra fundamentalmente en el estudio de extensiones uni y bivariantes del sistema de Pearson discreto. En este sentido podemos citar, como antecedentes más inmediatos de este trabajo, las obras de Fajardo [9] y Rodríguez [44]. En el primero de ellos se desarrolla una metodología general para el estudio de los sistemas de Pearson discretos, tanto para la construcción en sí de dichas familias, como en el estudio de las propiedades probabilísticas y estadísticas de las distribuciones agrupadas en cada una de ellas. En el segundo, se continúa el desarrollo de esa metodología, así como su aplicación más general a extensiones de los sistemas de Pearson clásicos. En este ámbito se encuadran diversos trabajos de Gutiérrez y Rodríguez ([12], [13]) en los que se estudia la distribución de Waring bivalente a la luz de esta metodología, así como el empleo de coeficientes no polinomiales en la ecuación en diferencias. Una aplicación práctica de este tipo de distribuciones aparece en un trabajo de Dacey [6], en donde se usan estos modelos probabilísticos para el análisis de propiedades topológicas de drenaje de cuencas.

Otra vía de extensión interesante de los resultados obtenidos en los sistemas de Pearson es la abierta en el trabajo de Hermoso [20] en el cual se extiende la función hipergeométrica de Gauss y su generalización multivariante $F_D^{(n)}$ a funciones de argumento matricial, para lo que se emplea como herramienta el uso de polinomios zonales. Estas nuevas funciones hipergeométricas de argumento matricial sirven como generadores de distribuciones discretas de probabilidad. En este campo hay que destacar los recientes estudios de Sáez ([19], [47], [49]).

1.2 Objetivos y desarrollo de la memoria

Una vez enmarcado este trabajo en los estudios hasta ahora realizados, vamos a señalar los objetivos fundamentales del mismo. El primero de ellos consiste en un análisis en profundidad de aquellas familias de distribuciones discretas que son generadas por funciones hipergeométricas. Nos hemos centrados en aquellas funciones que extienden a la función hipergeométrica de Gauss, considerando en primer lugar la extensión univariante por medio de funciones hipergeométricas del tipo ${}_pF_p$, y finalizando con la extensión bivalente mediante la función hipergeométrica F_3 . El mejor conocimiento de estas familias de distribuciones ayuda a la hora de intentar modelizar situaciones reales, planteamiento que describe nuestro segundo objetivo. Para ello se han ajustado algunas variables observadas mediante funciones pertenecientes a estas familias, y se ha investigado el problema de la estimación.

En concreto el desarrollo de esta memoria comienza con una revisión de resultados y de la metodología empleada en trabajos anteriores (Fajardo y Rodríguez), y que se exponen brevemente en el capítulo 2. Asimismo, se han

considerado algunos resultados de sumación para funciones hipergeométricas, que son de especial interés para su posterior uso a la hora de conocer las funciones de masa de probabilidad de las distribuciones estudiadas.

En el tercer capítulo se aborda el desarrollo de la familia de distribuciones discretas generadas por la función hipergeométrica ${}_3F_2$, primera extensión univariante posible de la función ${}_2F_1$. Se recogen las propiedades más importantes de esta familia, dadas por la aplicación de los resultados del capítulo 2, y a través de un resultado de sumación, que nos permite obtener el valor de la constante f_0 , se realiza un análisis exhaustivo de estas distribuciones, mostrando la poligonal de frecuencias y los momentos de algunas de ellas. Esto nos ha proporcionado algunas relaciones entre los parámetros y la forma de la distribución, que resultan de bastante utilidad en el problema de la estimación.

El siguiente paso en la extensión univariante de las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas consiste en considerar la familia generada por la función ${}_4F_3$, para la cual se ha seguido un esquema similar al de la ${}_3F_2$, y que aparece en el capítulo cuarto. En dicha familia se han observado pautas que ya habían sido indicadas para las distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, y que se pueden generalizar a este tipo de distribuciones. Éstas están incluidas en la familia de distribuciones generada por la función ${}_{p+1}F_p$, cuyo estudio cierra el desarrollo de estas familias de distribuciones. Un importante resultado de sumación, que engloba a los anteriores, ha sido obtenido para el caso general, el cual proporciona la función de masa de probabilidad de una amplia clase de distribuciones.

El capítulo quinto trata la familia de distribuciones generadas por la F_3 que es una de las cuatro funciones de Appell, extensiones bivariantes de la ${}_2F_1$. Entre las propiedades más interesantes de esta familia hay que señalar el que sus distribuciones marginales pertenecen a la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$. Este hecho nos permite obtener un resultado de sumación para estas distribuciones basado en el ya indicado para la ${}_3F_2$, y a partir del cual hemos conseguido las funciones de masa de probabilidad bivariantes de algunas distribuciones que han sido representadas gráficamente.

Tras el estudio teórico de estas familias de distribuciones, proponemos algunos métodos de estimación dentro del sexto capítulo. El método que de forma natural se puede emplear en estas distribuciones es el de los momentos, gracias a que los mismos verifican una relación de recurrencia (propiedad que poseen todas las familias de distribuciones del sistema de Pearson), que nos facilita un sistema de ecuaciones cuya resolución nos proporciona las estimaciones de los parámetros. El problema que presenta es que al aumentar el número de parámetros, hay que utilizar momentos de mayor orden lo cual afecta a las soluciones del sistema. De ahí que se hayan investigado otros métodos de estimación, aunque la complejidad de cálculo de los mismos lo hacen poco prácticos. Para concluir el tema se han aplicado estos métodos para intentar modelizar algunas variables observadas obteniendo

ajustes bastante aceptables.

Por último, señalar que tanto los resultados de sumación como los programas necesarios para obtener las distribuciones de probabilidad, los momentos o los gráficos que aparecen en esta memoria se han implementado mediante el paquete matemático Matlab 5.1. Dichos programas se han recogido en un apéndice que se muestra al final de esta memoria.

1.3 Futuras vías de investigación

Por último vamos a reseñar algunas líneas de investigación que pueden abordarse tras el trabajo ya realizado, o bien aquellos puntos que están pendientes de ser mejorados sustancialmente. Entre los mismos podemos destacar:

- La generalización de los resultados obtenidos parece factible a familias de distribuciones multivariantes siguiendo la metodología dada por Fajardo y Rodríguez. En este sentido puede ser de interés considerar extensiones bi y multivariantes de distribuciones del tipo ${}_{p+1}F_p$, de modo análogo a lo que sucede en el estudio de la función de Gauss con las funciones F_1 , F_2 , F_3 y F_4 de Appell.
- La aplicación de estos estudios a situaciones reales requiere una profundización en los métodos de estimación que nos ayuden a superar algunos de los problemas encontrados y eliminen el inconveniente que supone estimar un número alto de parámetros.
- En relación con el punto anterior se puede llevar a cabo un estudio de las propiedades inferenciales de la familia.
- Un campo que está aún por estudiar es el estudio de familias de distribuciones en las que los parámetros puedan ser complejos. Esto resolvería aquellas situaciones prácticas en las que las estimaciones son números complejos, y generalizaría el estudio para cualquier posible expresión de los polinomios, coeficientes de la ecuación en diferencias, a cualquier polinomio de coeficientes reales de grado cualesquiera.

Capítulo 2

Resultados previos

2.1 Introducción

La familia de distribuciones discretas de Pearson surgen como un subconjunto del conjunto de soluciones de una ecuación en diferencias con coeficientes polinomiales de segundo orden. Dicha ecuación es la transposición al caso discreto de la ecuación diferencial, igualmente con coeficientes polinomiales de segundo orden, que conduce a la obtención de la distribución normal (en general, al sistema de Pearson continuo) como un elemento del conjunto de soluciones. De manera análoga, los sistemas de distribuciones discretas bivariantes y multivariantes pueden obtenerse como soluciones de sistemas de ecuaciones en diferencias de la dimensión adecuada.

En este capítulo, por tanto, recogemos una metodología empleada en la generación y estudio de los sistemas pearsonianos discretos, a partir del sistema de ecuaciones en diferencias que caracteriza dichos sistemas y que está basada en los trabajos de Fajardo [9] y Rodríguez [44]. En primer lugar presentamos la familia de distribuciones univariantes, para posteriormente pasar a describir el caso bivalente. En ambos casos enunciamos las propiedades más relevantes de las distribuciones incluidas en estas familias, en especial para aquellos sistemas en que los coeficientes de las ecuaciones en diferencias son polinomiales. Para estas familias, la función generatriz de probabilidad verifica una ecuación diferencial, a partir de la cual se obtienen unas relaciones de recurrencia entre los momentos, hecho éste característico de los sistemas pearsonianos y que nos permite utilizar el método de los momentos para estimar los parámetros.

La función de masa de probabilidad de las distribuciones obtenidas como solución del sistema de ecuaciones en diferencias con coeficientes polinomiales puede expresarse mediante los términos de funciones hipergeométricas ${}_pF_q$ en el caso univariante, o de las correspondientes extensiones multivariantes de dichas funciones para el caso multivariante. Para obtener de manera explícita las probabilidades, en consecuencia, es necesario conocer

la suma de dichas funciones, así como la suma de sus primeras derivadas, las cuales son también funciones hipergeométricas del mismo orden, se necesitan para el cálculo de los momentos. Desgraciadamente, excepto para la función hipergeométrica de Gauss, no existen resultados globales de sumación de funciones hipergeométricas. Por tanto, para finalizar el capítulo, presentamos algunos resultados de sumación parciales de dichas funciones que pueden, en principio, ayudarnos a resolver el problema.

2.2 Familias de distribuciones univariantes generadas por funciones hipergeométricas

Partimos de la ecuación en diferencias propuesta por Fajardo [9], que generaliza la familia de distribuciones discretas de Pearson expuesta por Ord [39],

$$G(r)f_{r+1} - L(r)f_r = 0 \quad r \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.1)$$

donde $L : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ son funciones, en principio, cualesquiera. Dicha ecuación está definida para todo $r \in \mathbb{Z}^+$.

En este caso (Guelfond, [11] y Jordan, [26]) la solución de la ecuación en diferencias (2.1), viene dada por:

$$f_r = \begin{cases} f_0 \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} & r \geq 1 \\ f_0 & r = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

siendo f_0 una constante que supondremos distinta de cero. Ahora bien, no toda función que sea solución de (2.1) será una función de probabilidad. El siguiente teorema nos indica bajo qué condiciones tendremos que trabajar.

Teorema 2.1. *Sea el conjunto $\mathcal{H} = \{r \in \mathbb{Z}^+ | L(r) = 0\}$. La condición necesaria y suficiente para que la función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, solución de la ecuación en diferencias (2.1), sea una función masa de probabilidad, es que verifique las siguientes condiciones:*

1. Condición de positividad

$$\begin{aligned} L(r)G(r) &> 0 && \forall r \in \mathbb{Z}^+, \quad \text{si } \mathcal{H} = \emptyset \\ L(r)G(r) &\geq 0 && r = 0, 1, \dots, m, \quad \text{si } \mathcal{H} \neq \emptyset, \quad \text{con } m = \min \mathcal{H} \end{aligned}$$

2. Condición de convergencia

$$\sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)} < \infty$$

3. Condición de normalización

$$f_0 = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t)}{G(t)}}$$

Es interesante destacar que este resultado impone unas condiciones a las funciones G y L , para que la solución (2.2) sea función de probabilidad.

Si bien este resultado es aplicable para cualquier tipo de funciones G y L , vamos a centrarnos ahora en el caso en que sean polinomios cualesquiera. Entonces las funciones generatrices de probabilidad se podrán caracterizar a través de la ecuación diferencial que verifican.

Teorema 2.2. Sean las funciones L y G polinomios en r y $r + 1$, respectivamente, de cualquier orden, y supongamos que se verifican las condiciones 1, 2 y 3 dadas en el teorema 2.1. Entonces la función generatriz de probabilidad asociada a la solución (2.2), $g(t)$, verifica la ecuación diferencial

$$G(\theta)g(t) - tL(\theta)g(t) = b_0 f_0 \quad (2.3)$$

para $|t| < 1$, siendo $\theta = t(d/dt)$ con $\theta^0 = 1$, el operador identidad, y b_0 el término independiente del polinomio $G(r + 1)$.

Mediante un cambio de variables se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 2.1. Bajo las condiciones del teorema 2.2,

1. la función generatriz de momentos, $M(t)$, verifica la ecuación diferencial

$$G(D)M(t) - e^t L(D)M(t) = b_0 f_0 \quad (2.4)$$

$$\text{con } D = \frac{d}{dt},$$

2. la función característica, $\phi(t)$, verifica la ecuación diferencial

$$G(\theta_i)\phi(t) - e^{it} L(\theta_i)\phi(t) = b_0 f_0 \quad (2.5)$$

$$\text{con } \theta_i = \frac{1}{i}D,$$

3. la función generatriz de cumulantes, $k(t) = \ln \phi(t)$, verifica la ecuación diferencial

$$G(\theta_i)e^{k(t)} - e^{it} L(\theta_i)e^{k(t)} = b_0 f_0 \quad (2.6)$$

A partir de las funciones consideradas anteriormente se pueden obtener los momentos no centrados. Así, si existen las derivadas y son finitas, en $t = 1$ en la función generatriz de probabilidad, y en $t = 0$ en las restantes, los momentos no centrados se definen de la siguiente forma:

$$\mu'_r = [\theta^r g(t)]_{t=1} = [D^r M(t)]_{t=0} = [\theta_i^r \phi(t)]_{t=0}$$

y nos encontramos con el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *En las condiciones del teorema 2.2 para L y G , y suponiendo que los momentos no centrados de orden k existen, con $k \geq q$ (q orden del polinomio G), se verifica la siguiente relación de recurrencia para dichos momentos,*

$$\sum_{j=0}^q b_j \mu'_{j+h} - \sum_{i=0}^p a_i \left(\sum_{m=0}^h \binom{h}{m} \mu'_{i+m} \right) = b_0 \theta^h f_0 \quad (2.7)$$

para $h = 0, 1, \dots, k - q$ y a_i, b_j coeficientes de los polinomios L y G respectivamente.

Notemos que el segundo miembro de la ecuación (2.7) únicamente es distinto de cero para $h = 0$, por lo que sólo aparecerá en esa primera ecuación. Así si $b_0 = 0$, la relación anterior será únicamente de momentos, y si $b_0 \neq 0$, aparecerá la probabilidad f_0 .

A partir de tales relaciones de recurrencia, es posible estimar los parámetros de la distribución perteneciente al sistema por el método de los momentos, de ahí su importancia. Para ello deben considerarse tantas relaciones como parámetros debamos estimar, de forma que el sistema sea compatible y determinado, y suponiendo que los momentos que empleamos existen y son finitos. Se resuelve entonces el sistema, encontrando soluciones de los parámetros en función de los momentos poblacionales, y sustituyendo éstos por los muestrales podemos obtener una estimación para los parámetros.

Aún cuando este método tiene grandes limitaciones en cuanto a la eficiencia del estimador, es el más cómodo que se puede utilizar en este caso, en que el método de máxima verosimilitud implica una enorme dificultad de cálculo, lo que lo hace impracticable.¹

2.3 Familias de distribuciones bivariantes generadas por funciones hipergeométricas

El siguiente paso en la generalización de los sistemas de Pearson consiste en aumentar el número de variables, de forma que haremos un estudio similar

¹El problema de la estimación será considerado más adelante.

al llevado a cabo para las distribuciones univariantes, pero para dos variables. Además se pueden estudiar algunos aspectos, como la regresión, las distribuciones condicionadas y marginales, que no existen en el caso univariante.

El modelo del que partimos es equivalente en su planteamiento al del caso univariante, pero considerando un sistema de ecuaciones en diferencias parciales de la siguiente forma

$$G(r, s)f_{r+1, s} - L(r, s)f_{r, s} = 0 \quad (2.8a)$$

$$H(r, s)f_{r, s+1} - N(r, s)f_{r, s} = 0 \quad (2.8b)$$

en donde

$$\begin{aligned} L, N &: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ G, H &: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

son funciones, en principio, cualesquiera, siendo $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, la función desconocida.

Hay que notar que no siempre el sistema tiene solución. Una condición necesaria para que la función $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, sea solución de dicho sistema es que se verifique la igualdad:

$$\frac{L(r, s+1) N(r, s)}{G(r, s+1) H(r, s)} = \frac{N(r+1, s) L(r, s)}{H(r+1, s) G(r, s)} \quad (2.9)$$

$\forall r, s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f_{r, s} \neq 0$.

En este caso, la solución está dada por:

Teorema 2.4. *Si la función $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, es solución del sistema formado por (2.8a) y (2.8b), entonces dicha función puede escribirse de la forma*

$$f_{r, s} = \begin{cases} f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t, s) N(0, t')}{G(t, s) H(0, t')} & r \geq 1, \quad s \geq 1 \\ f_{0,0} \prod_{t=0}^{r-1} \frac{L(t, 0)}{G(t, 0)} & r \geq 1, \quad s = 0 \\ f_{0,0} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{N(0, t')}{H(0, t')} & r = 0, \quad s \geq 1 \\ f_{0,0} & r = 0, \quad s = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

fijada $f_{0,0}$ que supondremos distinta de cero.

El siguiente teorema nos indica qué condiciones son necesarias para que la solución (2.10) sea f.m.p.

Teorema 2.5. *Sea el conjunto $\mathcal{H} = \{(r, s) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ | f_{r,s} \neq 0\}$. La condición necesaria y suficiente para que la función $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, solución del sistema formado por (2.8a) y (2.8b), dada por la expresión (2.10), sea una función de probabilidad, es que se verifiquen las siguientes condiciones:*

1. *Condición de positividad*

$$\begin{aligned} L(r, s)G(r, s) &\geq 0 \\ N(r, s)H(r, s) &\geq 0 \end{aligned} \quad \forall r, s \in \mathcal{H}$$

2. *Condición de convergencia*

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \neq 0 \\ (r,s) \in \mathcal{H}}}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t, s)}{G(t, s)} \frac{N(0, t')}{H(0, t')} < \infty$$

3. *Condición de normalización*

$$f_{0,0} = \frac{1}{1 + \sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \neq 0 \\ (r,s) \in \mathcal{H}}}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t, s)}{G(t, s)} \frac{N(0, t')}{H(0, t')}}}$$

Al igual que en el caso univariante vamos a centrarnos en el caso en que las funciones G , L , H y N sean polinomios cualesquiera. Entonces las funciones generatrices de probabilidad se podrán caracterizar a través de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que verifican.

Teorema 2.6. *Sean las funciones L y N , polinomios en las variables (r, s) , G polinomio en $(r+1, s)$ y H polinomio en $(r, s+1)$, de órdenes cualesquiera y tal que verifiquen las condiciones dadas en el teorema 2.5. Entonces su función generatriz de probabilidad $g(t_1, t_2)$ verifica el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2)g(t_1, t_2) - t_1 L(\theta_1, \theta_2)g(t_1, t_2) &= G(\theta_1, \theta_2) \sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s} t_2^s \\ H(\theta_1, \theta_2)g(t_1, t_2) - t_2 N(\theta_1, \theta_2)g(t_1, t_2) &= H(\theta_1, \theta_2) \sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0} t_1^r \end{aligned} \quad (2.11)$$

para $|t_1| < 1$, $|t_2| < 1$ y siendo $\theta_i = t_i \frac{\partial}{\partial t_i}$ $i = 1, 2$.

Mediante un cambio de variables se obtendrían los siguientes resultados.

Corolario 2.2. *Bajo las condiciones del teorema 2.6, se tiene que*

1. La función generatriz de momentos $M(t_1, t_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s} e^{t_1 r + t_2 s}$, verifica las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} G(D_1, D_2)M(t_1, t_2) - e^{t_1} L(D_1, D_2)M(t_1, t_2) &= G(D_1, D_2) \sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s} e^{t_2 s} \\ H(D_1, D_2)M(t_1, t_2) - e^{t_2} N(D_1, D_2)M(t_1, t_2) &= H(D_1, D_2) \sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0} e^{t_1 r} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{con } D_i = \frac{\partial}{\partial t_i} \quad i = 1, 2.$$

2. La función característica $\phi(t_1, t_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f_{r,s} e^{i(t_1 r + t_2 s)}$, verifica las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} G(\theta'_1, \theta'_2)\phi(t_1, t_2) - e^{it_1} L(\theta'_1, \theta'_2)\phi(t_1, t_2) &= G(\theta'_1, \theta'_2) \sum_{s=0}^{\infty} f_{0,s} e^{it_2 s} \\ H(\theta'_1, \theta'_2)\phi(t_1, t_2) - e^{it_2} N(\theta'_1, \theta'_2)\phi(t_1, t_2) &= H(\theta'_1, \theta'_2) \sum_{r=0}^{\infty} f_{r,0} e^{it_1 r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\text{con } \theta'_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_j} \quad j = 1, 2.$$

Al igual que en el caso univariante, los momentos no centrados de orden r y s , $\mu'_{r,s}$, pueden obtenerse a partir de cualquiera de las funciones anteriores, siempre que existan sus derivadas y sean finitas para $t_i = 1$, $i = 1, 2$, en el caso de la función generatriz de probabilidad y para $t_i = 0$, $i = 1, 2$ en las otras. Así, a través de los operadores D_i , θ_i y θ'_i se pueden definir los momentos de la forma:

$$\begin{aligned} \mu'_{r,s} &= [\theta_1 \theta_2 g(t_1, t_2)]_{t_1=t_2=1} = [D_1 D_2 M(t_1, t_2)]_{t_1=t_2=0} = \\ &= [\theta'_1 \theta'_2 \phi(t_1, t_2)]_{t_1=t_2=0} \end{aligned}$$

lo que permite obtener las siguientes relaciones de recurrencias:

Teorema 2.7. *En las condiciones dadas para las funciones L , N , G y H en el teorema 2.6 y suponiendo que existen los momentos no centrados $\mu'_{r,s}$*

de cualquier orden r, s , entonces éstos verifican las siguientes leyes de recurrencia,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1, k_2} \left[\sum_{m=0}^g \binom{g}{m} \mu'_{k_1+f, k_2+m} \right] - \\
& - \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1, i_2} \left[\sum_{n=0}^f \sum_{m=0}^g \binom{f}{n} \binom{g}{m} \mu'_{i_1+n, i_2+m} \right] = \\
& = \sum_{k_2=0}^{p_2} b_{0, k_2} \left[\sum_{m=0}^g \binom{g}{m} \theta_1^f \theta_2^{k_2+m} \left(\sum_{s=0}^{\infty} f_{0, s} t_2^s \right) \right]_{t_2=1} \\
& \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1, l_2} \left[\sum_{n=0}^g \binom{f}{n} \mu'_{l_1+n, l_2+g} \right] - \\
& - \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} c_{j_1, j_2} \left[\sum_{n=0}^f \sum_{m=0}^g \binom{f}{n} \binom{g}{m} \mu'_{j_1+n, j_2+m} \right] = \\
& = \sum_{l_1=0}^{q_1} d_{l_1, 0} \left[\sum_{n=0}^f \binom{f}{n} \theta_1^{l_1+n} \theta_2^g \left(\sum_{r=0}^{\infty} f_{r, 0} t_1^r \right) \right]_{t_1=1}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

para $f, g \in \mathbb{Z}^+$ y siendo:

$$\begin{aligned}
L(r, s) &= \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} a_{i_1, i_2} r^{i_1} s^{i_2} \\
N(r, s) &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} c_{j_1, j_2} r^{j_1} s^{j_2} \\
G(r, s) &= \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_2=0}^{p_2} b_{k_1, k_2} (r+1)^{k_1} s^{k_2} \\
H(r, s) &= \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} d_{l_1, l_2} r^{l_1} (s+1)^{l_2}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde $a_{i_1, i_2}, b_{k_1, k_2}, c_{j_1, j_2}, d_{l_1, l_2} \in \mathbb{R}$, y con $a_{m_1, m_2}, b_{p_1, p_2}, c_{n_1, n_2}, d_{q_1, q_2} \neq 0$

El segundo miembro de las expresiones (2.14) se anula excepto para $f = 0$ en la primera de ellas y $g = 0$ en la segunda. Además si los coeficientes b_{0, k_2} y $d_{l_1, 0}$ son iguales a cero, las relaciones son únicamente de momentos.

A partir de tales relaciones de recurrencia, y al igual que en el caso univariante, es posible estimar los parámetros de la distribución perteneciente al sistema por el método de los momentos. Como ya se comentó se tratará este problema posteriormente.

La novedad que presentan las distribuciones bivariantes es que en ellas aparecen las distribuciones condicionadas y marginales. Veamos que dichas

distribuciones pertenecen al sistema de Pearson univariante, por lo que se pueden aplicar los resultados expuestos en la sección anterior.

Teorema 2.8. *Si la función de probabilidad $f_{r,s}$, solución del sistema formado por (2.8a) y (2.8b), se puede escribir como producto de sus probabilidades condicionadas por sus correspondientes marginales, es decir,*

$$f_{r,s} = f_{r/s}f_s \quad y \quad f_{r,s} = f_{s/r}f_r$$

entonces:

- a) *Las funciones de probabilidad condicionadas verifican las ecuaciones en diferencias:*

$$\begin{aligned} G(r,s)f_{r+1/s} - L(r,s)f_{r/s} &= 0 \\ H(r,s)f_{s+1/r} - N(r,s)f_{s/r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

respectivamente.

- b) *Calculada las anteriores, las funciones de probabilidad marginales verifican las ecuaciones en diferencias:*

$$\begin{aligned} G(r,s)f_{s/r+1}f_{r+1} - L(r,s)f_{s/r}f_r &= 0 \\ H(r,s)f_{r/s+1}f_{s+1} - N(r,s)f_{r/s}f_s &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

respectivamente.

2.4 Resultados de sumación

Uno de los principales problemas a la hora de trabajar con funciones hipergeométricas de orden superior es la no existencia de resultados de sumación globales que desempeñan el mismo papel del teorema de Gauss para la ${}_2F_1$. No obstante, en la bibliografía existen numerosos resultados parciales de sumación, no todos válidos para nuestro propósito. A continuación presentamos algunos resultados parciales de interés (Slater, [50] y Prudnikov, [43]), que emplearemos en los capítulos siguientes.

2.4.1 Resultados para la ${}_2F_1$

Con los dos primeros resultados podemos sumar cualquier función hipergeométrica de Gauss para $\lambda = 1$, siempre que ésta sea convergente.

1. Teorema de Gauss:

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (2.18)$$

donde $a, b, c \notin \mathbb{Z}^-$ y $Re(c-a-b) > 0$.

2. Teorema de Vandermonde:

$${}_2F_1(a, -m; c; 1) = \frac{(c-a)_m}{(c)_m} \quad (2.19)$$

donde m es un número natural y c no es un entero negativo menor que a ó $-m$.

3. 2º Teorema de Gauss:

$${}_2F_1\left(a, b; \frac{1+a+b}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)} \quad (2.20)$$

4. Teorema de Bailey:

$${}_2F_1\left(a, 1-a; c; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right) \Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{c+a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+c-a}{2}\right)} \quad (2.21)$$

2.4.2 Resultados para la ${}_3F_2$

1. Teorema de Dixon:

$$\begin{aligned} & {}_3F_2(a, b, c; 1+a-b, 1+a-c; 1) = \\ & = \frac{\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b-c\right) \Gamma(1+a-b) \Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a) \Gamma(1+a-b-c) \Gamma\left(1+\frac{a}{2}-b\right) \Gamma\left(1+\frac{a}{2}-c\right)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $Re(a-2b-2c) > -2$.

2. Teorema de Watson:

$$\begin{aligned} & {}_3F_2\left(a, b, c; \frac{a+b+1}{2}, 2c; 1\right) = \\ & = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+c\right) \Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a-b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a}{2}+c\right) \Gamma\left(\frac{1-b}{2}+c\right)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $Re(1-a-b+2c) > 0$.

3. Teorema de Whipple:

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; 1) = 2^{1-2c} \pi \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)}{\Gamma\left(\frac{a+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+e}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+d}{2}\right)} \quad (2.24)$$

donde $a + b = 1$, $d + e = 1 + 2c$ y $\operatorname{Re}(c) > 0$.

Otros resultados de sumación que generalizan los que se acaban de enunciar aparecen en Lavoie ([32], [33], [34], [35] y [36]), y Arora [1]. Por ejemplo, el siguiente resultado es cercano al teorema de Watson:

4. Lavoie, Grondin y Rathie, 1992:

$$\begin{aligned} & {}_3F_2\left(a, b, c; \frac{a+b+2}{2}, 2c; 1\right) = \\ & = \frac{2^{a+b-1} \Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+b}{2} + 1\right) \Gamma\left(c - \frac{a+b}{2}\right)}{(a-b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad (2.25) \\ & \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{a}{2}\right)\Gamma\left(c - \frac{b-1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(c - \frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(c - \frac{b}{2}\right)} \right] \end{aligned}$$

con $\operatorname{Re}(2c - a - b) > -2$.

Y el siguiente es contiguo al teorema de Dixon:

5. Arora y Rathie, 1993:

$$\begin{aligned} & {}_3F_2(a, b, c; 2+a-b, 2+a-c; 1) = \\ & = \frac{2^{-2c+1} \Gamma(a-b+2)\Gamma(a-c+2)}{(b-1)(c-1)\Gamma(a-b-c+2)\Gamma(a-2c+2)} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}-b-c+2\right)\Gamma\left(\frac{a+3}{2}-c\right)\Gamma\left(\frac{a+5}{2}-b-c\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1-c\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-b+1\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+3}{2}-b\right)} \right] \quad (2.26) \end{aligned}$$

con $\operatorname{Re}(a - 2b - c) > -4$.

6. Gutiérrez y Rodríguez, 1997 ([18]):

$$\begin{aligned}
 & {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + 1; \gamma_1, \gamma_2; 1) = \\
 & \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i} {}_2F_1(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i; \gamma_1 + i; 1) \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

donde $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + 1$ y ninguno de los parámetros es entero negativo.

2.4.3 Otras funciones

1.

$$\begin{aligned}
 & {}_4F_3\left(a, 1 + \frac{a}{2}, b, c; \frac{a}{2}, 1 + a - b, 1 + a - c; 1\right) = \\
 & \frac{\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+a}{2} - b - c\right) \Gamma(1+a-b) \Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a) \Gamma(1+a-b-c) \Gamma\left(\frac{1+a}{2} - b\right) \Gamma\left(\frac{1+a}{2} - c\right)} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

En Exton [8] aparecen resultados para funciones hipergeométricas ${}_4F_3$ y de orden superior (${}_5F_4$, ${}_7F_6$ ó ${}_{q+1}F_q$). Por ejemplo, se tiene el siguiente resultado:

2. Exton, 1997

$$\begin{aligned}
 & {}_{q+1}F_q(a, a+2, \dots, a+2q; a+1, a+3, \dots, a+2q-1; 1) = \\
 & = \pi^{1/2} \Gamma(-a-q) \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{a}{2} - q\right)} + \right. \\
 & \left. + \frac{2(a/2)_q}{((a+1)/2)_{q-1} \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a}{2} - q\right)} \right\} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Distribuciones generadas por la función hipergeométrica

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$$

3.1 Introducción

Ya se ha comentado que en el caso en que las funciones L y G de la ecuación (2.1) sean polinomios, las soluciones pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas. El caso más estudiado es aquél en el que ambos polinomios son de segundo grado y además una de las raíces de G es -1 , en el que la solución viene dada en término de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$. Esto se debe, entre otras consideraciones, a que es la versión discreta de la solución de la ecuación diferencial que verifica entre otras la distribución Normal (Pearson, [41]). A esta familia pertenecen la mayoría de las distribuciones discretas más usuales como la Binomial, la Hipergeométrica, la Binomial Negativa, la Distribución Univariante Generalizada de Waring (Irwing, [23]; Xekalaki, [52]), las distribuciones de Kemp y Kemp [29], y en general la familia de Ord (Ord, [39]). Además destacan sus buenas propiedades matemáticas, como por ejemplo, la existencia de resultados globales de sumación y la posibilidad de obtener los momentos directamente a partir de los parámetros por la relación de recurrencia de momentos.

De igual forma que la función de Gauss surge de modo natural como solución en el caso en que los polinomios sean de grado 2, cuando los polinomios son de grado superior, las soluciones obtenidas vienen expresadas en términos de funciones hipergeométricas de orden superior. En general si los polinomios son de grado p , y siempre que una de las raíces de G sea -1 , la solución viene expresada en términos de una ${}_pF_{p-1}$, que es una extensión univariante de la función de Gauss. Concretamente, en este capítulo realizamos un análisis exhaustivo del caso en que los polinomios L y G son

ambos de tercer grado y una de las raíces de G es -1 , lo que conduce a la función hipergeométrica ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$.

Uno de los problemas que surgen para tal función es la no existencia de resultados globales de sumación equivalentes al teorema de Gauss para la ${}_2F_1$. En el capítulo anterior se han presentado precisamente algunos resultados parciales, los cuales no son del todo satisfactorios, puesto que si bien permiten obtener el valor de una función ${}_3F_2$ no nos facilitan el valor de su primera derivada, necesario para conocer los momentos de dichas distribuciones. De ahí que uno de nuestros objetivos haya sido la búsqueda de resultados de sumación que nos proporcionen tanto el valor de la función ${}_3F_2$ como el de sus derivadas para funciones de este tipo. El resultado obtenido ha posibilitado el estudio exhaustivo de una amplia subfamilia de distribuciones.

El esquema que seguiremos en el desarrollo de este capítulo es el siguiente: en principio presentamos las propiedades que verifican dichas distribuciones y que surgen, tras la definición de los polinomios coeficientes de la ecuación en diferencias (2.1), al aplicar los resultados presentados en el capítulo anterior. Se presenta también una clasificación de los tipos de distribuciones incluidos en esta familia atendiendo a los posibles valores de los parámetros. Posteriormente se han desarrollado algunos resultados parciales de sumación que permiten resolver el problema de conocer las distribuciones de probabilidad incluidas en esa familia. A partir de la implementación en Matlab se han obtenido las distribuciones de probabilidad y sus momentos, así como representaciones gráficas de las poligonales de frecuencias.

3.2 Resultados generales

Consideremos que las funciones G y L son polinomios cúbicos que podemos expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(r) &= (\gamma_1 + r)(\gamma_2 + r)(r + 1) \\ L(r) &= (\alpha_1 + r)(\alpha_2 + r)(\alpha_3 + r)\lambda \end{aligned} \quad (3.1)$$

con $\alpha_i, i = 1, 2, 3; \gamma_j, j = 1, 2$ y λ reales, en principio, cualesquiera.

Aplicando (2.2), la solución de la ecuación en diferencias (2.1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \quad (3.2)$$

Para que la función (3.2) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las condiciones del teorema 2.1, esto es,

1. Condición de positividad. Esta condición va a imponer unas restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$, de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!}$$

que es la función $f_0 \{ {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) - 1 \}$. Como esta función es un caso particular de las funciones ${}_pF_q$, será convergente cuando los parámetros cumplan las siguientes restricciones:

- (a) como $p = q + 1$, converge $\forall |\lambda| < 1$.
- (b) para $|\lambda| = 1$, llamando $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ se tiene que
 - i. si $\omega > 0$, entonces es absolutamente convergente.
 - ii. si $-1 < \omega \leq 0$, es condicionalmente convergente.
 - iii. si $\omega \leq -1$, es divergente.

3. Condición de normalización

$$f_0 = {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)^{-1} \quad (3.3)$$

De ésta última expresión se observa que para poder obtener las probabilidades de estas distribuciones es necesario conocer el valor de la función ${}_3F_2$.

3.2.1 Funciones generatrices

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (3.2) es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!}$$

esto es,

$$g(t) = \frac{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda t)}{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)} \quad (3.4)$$

y para que exista, debe ser convergente para $|t| \leq 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o bien $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o bien $|\lambda| = 1$ y $\gamma_1 + \gamma_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > 0$.

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica ${}_3F_2$, que es una extensión univariante de la conocida función hipergeométrica de Gauss, ${}_2F_1$.¹

¹De hecho si algún $\alpha_i = \gamma_j$ la función se reduce a una de tal tipo.

Para aplicar el teorema 2.2 es necesario expresar G en función de $r + 1$, esto es,

$$G(r) = \sum_{i=0}^3 b_i (r + 1)^i$$

por lo que los coeficientes b_i serán:

$$\begin{aligned} b_3 &= 1 \\ b_2 &= (\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) \\ b_1 &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

En el caso de

$$L(r) = \sum_{i=0}^3 a_i r^i$$

se tienen los siguientes valores para los coeficientes a_i ,

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda \\ a_2 &= \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ a_1 &= \lambda(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \\ a_0 &= \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

Así, la función generatriz de probabilidad verifica la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda t \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 g(t) &= (1 - \lambda t) \theta^3 g(t) + \\ &+ [(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) - \lambda t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] \theta^2 g(t) + \\ &+ [(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - \lambda t(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3)] \theta g(t) \end{aligned}$$

De igual forma, la función generatriz de momentos verifica la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda e^t \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 M(t) &= (1 - \lambda e^t) D^3 M(t) + \\ &+ [(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) - \lambda e^t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] D^2 M(t) + \\ &+ [(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - \lambda e^t(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3)] D M(t) \end{aligned}$$

y la función característica verifica:

$$\begin{aligned} \lambda e^{it} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \phi(t) &= (1 - \lambda e^{it}) \theta_i^3 \phi(t) + \\ &+ [(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) - \lambda e^{it}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] \theta_i^2 \phi(t) + \\ &+ [(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) - \lambda e^{it}(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3)] \theta_i \phi(t) \end{aligned}$$

3.2.2 Relación de recurrencia entre los momentos

Si aplicamos el resultado dado en el teorema 2.3 a la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$, nos encontramos con la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} & b_3\mu'_{3+h} + b_2\mu'_{2+h} + b_1\mu'_{1+h} = \\ & = \sum_{m=0}^h \binom{h}{m} \{a_3\mu'_{3+m} + a_2\mu'_{2+m} + a_1\mu'_{1+m} + a_0\mu'_m\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde a_i y b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, para $h = 0, 1, 2$ las relaciones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} b_3\mu'_3 + b_2\mu'_2 + b_1\mu'_1 &= a_3\mu'_3 + a_2\mu'_2 + a_1\mu'_1 + a_0 \\ b_3\mu'_4 + b_2\mu'_3 + b_1\mu'_2 &= a_3\mu'_4 + (a_3 + a_2)\mu'_3 + (a_2 + a_1)\mu'_2 + \\ & \quad + (a_1 + a_0)\mu'_1 + a_0 \\ b_3\mu'_5 + b_2\mu'_4 + b_1\mu'_3 &= a_3\mu'_5 + (2a_3 + a_2)\mu'_4 + (a_3 + 2a_2 + a_1)\mu'_3 + \\ & \quad + (a_2 + 2a_1 + a_0)\mu'_2 + (a_1 + 2a_0)\mu'_1 + a_0 \end{aligned}$$

Y si $\lambda = 1$, al ser $b_3 = a_3 = 1$ las expresiones anteriores se simplifican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (b_2 - a_2)\mu'_2 + (b_1 - a_1)\mu - a_0 &= 0 \\ (b_2 - a_2 - 1)\mu'_3 + (b_1 - a_2 - a_1)\mu'_2 - (a_1 + a_0)\mu - a_0 &= 0 \\ (b_2 - a_2 - 2)\mu'_4 + (b_1 - 2a_2 - a_1 - 1)\mu'_3 - (a_2 + 2a_1 + a_0)\mu'_2 - \\ & \quad - (a_1 + 2a_0)\mu - a_0 = 0 \end{aligned}$$

Así que si conocemos μ podemos obtener todos los momentos no centrados. En ese sentido, como la media es:

$$\mu = t \frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=1}$$

se obtiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) &= \frac{d}{dt} \frac{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; t)}{{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; 1)} = \\ &= {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; 1)^{-1} \frac{d}{dt} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r t^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \end{aligned}$$

esa derivada es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r r t^{r-1}}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r t^{r-1}}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (r-1)!} = \\ &= \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{\alpha_1 (\alpha_1 + 1)_{r'} \alpha_2 (\alpha_2 + 1)_{r'} \alpha_3 (\alpha_3 + 1)_{r'} t^{r'}}{\gamma_1 (\gamma_1 + 1)_{r'} \gamma_2 (\gamma_2 + 1)_{r'} r'!} \end{aligned}$$

con lo que sustituyendo para $t = 1$, se llega al siguiente resultado:

$$\mu = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; 1)}{\gamma_1 \gamma_2 {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; 1)} \quad (3.6)$$

El problema con el que nos encontramos es que no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica, por lo que no se puede calcular el valor explícito de la esperanza, ni de la constante f_0 . No obstante, se ha conseguido un resultado que se puede aplicar a una amplia clase de distribuciones dentro de esta familia, el cual veremos más adelante.

3.2.3 Moda

Una de las características de las distribuciones presentes en esta familia es la existencia de hasta dos modas locales, como tendremos ocasión de comprobar al estudiar algunas distribuciones concretas. Para analizar qué posibles valores pueden ser moda partimos de la siguiente caracterización de moda local: existe una moda en el punto m , $m > 0$, si se verifica que,

$$\frac{f_m}{f_{m-1}} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{f_m}{f_{m+1}} > 1$$

Sustituyendo por la expresión (3.2) y simplificando nos encontramos con el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha_1 + m - 1)(\alpha_2 + m - 1)(\alpha_3 + m - 1)}{(\gamma_1 + m - 1)(\gamma_2 + m - 1)m} &> 1 \\ \frac{(\gamma_1 + m)(\gamma_2 + m)(m + 1)}{(\alpha_1 + m)(\alpha_2 + m)(\alpha_3 + m)} &> 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para $m = 0$ hay que comprobar que $\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} > 1$.

La primera inecuación de (3.7) es:

$$\begin{aligned} m^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \gamma_1 - \gamma_2 - 1) + m[(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + (\alpha_1 - 1)(\alpha_3 - 1) + \\ + (\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) - (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)] + (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

si el denominador es positivo. En el caso en que fuera negativo el sentido de la desigualdad cambia. De la misma forma la segunda inecuación de (3.7) puede ser mayor o menor que 0 dependiendo del signo del denominador, siendo ésta:

$$\begin{aligned} -m^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \gamma_1 - \gamma_2 - 1) + m[\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2 - \\ - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3] + \gamma_1 \gamma_2 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 > 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nos quedan así dos parábolas que determinan la región en la que se encuentran las posibles modas, y que notaremos por:

$$\begin{aligned} Am^2 + Bm + C &= 0 \\ -Am^2 + B'm + C' &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Si la distribución es de rango infinito, entonces $A < 0$ por lo que la primera parábola tendría los brazos hacia abajo, mientras que la segunda los tendría hacia arriba. Dependiendo de que existan raíces reales y del sentido de las desigualdades (3.8) y (3.9) se obtienen unos intervalos en los que se encuentran las posibles modas.

Así, si las dos inecuaciones (3.8) y (3.9) son mayores que 0, las posibles modas pueden ser cualquier número natural situado dentro del intervalo determinado por las dos raíces reales de la primera parábola de (3.10), si éstas existen, y fuera del intervalo determinado por las dos raíces reales de la segunda parábola de (3.10); de forma que si éstas no existen nos quedamos sólo con las del intervalo determinado por la primera parábola. En todo caso si no existen raíces reales de la primera parábola, no hay ninguna moda.

En el caso de que las dos inecuaciones sean menores que 0, la argumentación es análoga, pero intercambiando la explicación referente a cada parábola. La única opción en todo caso es calcular las raíces de esas parábolas para unos parámetros concretos y comprobar cuáles son sus modas.

Por ejemplo, para una ${}_3F_2(-2.8, 6, 2.5; 15.2, -2.5; 1)$ se han obtenido las siguientes raíces de las parábolas (3.10): 1.2806 y 2.7819 para la primera; 0.2806 y 1.7819 para la segunda. La desigualdad (3.8) es menor que 0, para $m < 4$ (para $m \geq 4$ es mayor que 0), mientras que la desigualdad (3.9) es menor que 0, para $m < 3$ (siendo mayor que 0 para $m \geq 3$). Al ser una distribución de rango infinito el coeficiente A es negativo, por lo que las posibles modas han de estar fuera del intervalo $[1.2806, 2.7819]$ para $m < 4$ por el sentido de la desigualdad (3.8); y dentro del intervalo $[0.2806, 1.7819]$ para $m < 3$ y fuera de dicho intervalo para $m \geq 3$ por el sentido de la desigualdad (3.9). Esto nos deja como modas los puntos 1 y 3, lo cual se puede apreciar en la figura 3.3 donde aparece representado el polígono de frecuencias de dicha distribución.

3.3 Clasificación

Vamos a reestructurar la clasificación de los tipos de distribuciones que aparece en Gutiérrez y Rodríguez [18], de forma que se han agrupado dentro del mismo tipo aquellos en los que únicamente cambia el número de parámetros enteros negativos, pero que en definitiva son distribuciones con

rango finito. Así hemos reducido los veinte tipos iniciales en los quince que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.1: Tipos de distribuciones para la ${}_3F_2$

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
A) $\boxed{\gamma_i > 0, i = 1, 2}$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\alpha_j > 0, j = 1, 2, 3$	$\sum_{i=1}^2 \gamma_i > \sum_{j=1}^3 \alpha_j \quad (\lambda = 1)$	$[0, \infty)$	I
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k, \alpha_l \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \alpha_l \quad \text{y} \\ \sum_{i=1}^2 \gamma_i > \sum_{j=1}^3 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	II
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$ \alpha_l > \alpha_k - 1$	$[0, \alpha_k]$	III
(iii) $0 > \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$		$[0, \alpha_k]$	IV
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad \text{ó} \\ \alpha_l , \alpha_m > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	V

Tabla 3.1: Tipos de distribuciones para la ${}_3F_2$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
B) $\boxed{\begin{array}{l} \gamma_i > 0, \gamma_h < 0 \\ h, i = 1, 2; h \neq i \end{array}}$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ \sum_{i=1}^2 \gamma_i > \sum_{j=1}^3 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	VI
$\alpha_j \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-, j = 1, 2, 3$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right\} y$ $\left. \sum_{i=1}^2 \gamma_i > \sum_{j=1}^3 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \right\}$	$[0, \infty)$	VII
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$ \gamma_h > \alpha_k - 1$	$[0, \alpha_k]$	VIII
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$ $\left. \begin{array}{l} E \gamma_h = E \alpha_l \quad y \\ \alpha_m > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$ $ \alpha_l , \alpha_m , \gamma_h > \alpha_k - 1$	$[0, \alpha_k]$	IX
(iii) $0 > \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_h \quad \acute{o} \\ \alpha_l , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	X

Tabla 3.1: Tipos de distribuciones para la ${}_3F_2$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
C) $\boxed{\gamma_i < 0, i = 1, 2}$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\alpha_j > 0, j = 1, 2, 3$	$E \gamma_1 = E \gamma_2 \quad (\lambda < 1)$	$[0, \infty)$	XI
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k, \alpha_l \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E \gamma_1 = E \gamma_2 \quad y \\ E \alpha_k = E \alpha_l \end{array} \right\} \text{ó} \\ \left. \begin{array}{l} E \alpha_n = E \gamma_i \\ n = k, l; i = 1, 2 \end{array} \right\} \\ \sum_{i=1}^2 \gamma_i > \sum_{j=1}^3 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\} y$	$[0, \infty)$	XII
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E \gamma_1 = E \gamma_2 \quad y \\ \alpha_l > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \text{ó} \\ \left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_i \quad y \\ \gamma_h > \alpha_k - 1 \\ h, i = 1, 2; h \neq i \end{array} \right\} \text{ó} \\ \alpha_l , \gamma_1 , \gamma_2 > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XIII
(iii) $0 > \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m > 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_1 = E \gamma_2 \quad \text{ó} \\ \gamma_1 , \gamma_2 > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XIV

Tabla 3.1: Tipos de distribuciones para la ${}_3F_2$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ k, l, m = 1, 2, 3; \\ k \neq l \neq m \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_1 = E \gamma_2 \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \end{array} \right\} \acute{o}$	$[0, \alpha_k]$	XV
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_i = E \alpha_n \\ i = 1, 2; \quad n = l, m \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_1 = E \gamma_2 \quad y \\ \alpha_l , \alpha_m > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \gamma_1 , \gamma_2 > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_i = E \alpha_l \quad y \\ \gamma_h , \alpha_m > \alpha_k - 1 \\ i, h = 1, 2; \quad i \neq h \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$ \alpha_l , \alpha_m , \gamma_1 , \gamma_2 > \alpha_k - 1$		

Como esta familia de distribuciones incluye a la familia de distribuciones generadas por la ${}_2F_1$ se ha establecido la relación existente entre los tipos de distribuciones de ambas familias. La clasificación para la familia generada por la ${}_2F_1$ puede verse en Fajardo [9], y consiste en siete tipos que quedan englobados, como se observa en la tabla 3.2, en distintos tipos de la ${}_3F_2$.

Tabla 3.2: Relación entre tipos de distribuciones

${}_2F_1$	${}_3F_2$
I	I, VI
II	II, VII
III	III, IX
IV	IV, X
V	VI, XII
VI	VIII, XIII
VII	X, XV

3.4 Resultados parciales de sumación

Vamos a demostrar ahora, por inducción, un teorema que nos permite obtener la suma de una amplia clase de funciones hipergeométricas, en concreto

las del tipo

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$$

en donde n es un número natural y siempre que $\gamma_2 + n$ no sea el mayor valor entero negativo de los parámetros del numerador.²

La importancia de este resultado frente a otros ya existentes sobre funciones hipergeométricas, es que nos permite obtener el valor de los momentos de las distribuciones de probabilidad asociadas a estas funciones.

Teorema 3.1. *Sea la función hipergeométrica ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$ en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n . Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:*

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i} {}_2F_1(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i; \gamma_1 + i; \lambda) \quad (3.11)$$

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción. Empecemos con el caso $n = 1$, el cual generaliza el resultado (2.27) para $\lambda = 1$ que aparece en Gutiérrez y Rodríguez [18].

Lema 3.1.

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + 1; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i} {}_2F_1(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i; \gamma_1 + i; \lambda)$$

Demostración. Como

$$\frac{(\gamma_2 + 1)_r}{(\gamma_2)_r} = \frac{(\gamma_2 + r)}{\gamma_2}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + 1; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\gamma_2 + 1)_r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \gamma_2 r!} = \\ &= {}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \gamma_1; \lambda) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2} {}_2F_1(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1; \gamma_1 + 1; \lambda) \end{aligned}$$

y agrupando términos obtenemos la expresión buscada. \square

²En este caso, al ser la suma finita, se puede obtener el resultado de manera exacta por el ordenador.

Lema 3.2.

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + 2; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i} {}_2F_1(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i; \gamma_1 + i; \lambda)$$

Demostración. De forma análoga a la demostración anterior,

$$\frac{(\gamma_2 + 2)_r}{(\gamma_2)_r} = \frac{(\gamma_2 + r)(\gamma_2 + r + 1)}{(\gamma_2)(\gamma_2 + 1)} = \frac{\gamma_2(\gamma_2 + 1) + (2\gamma_2 + 1)r + r^2}{(\gamma_2)(\gamma_2 + 1)}$$

por tanto, sustituyendo en la función ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + 2; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$ y dado que $r^2 = r(r - 1) + r$, agrupando se obtiene el resultado deseado.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\gamma_2 + 2)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r r!} + \\ &+ \frac{2}{\gamma_2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{\gamma_1} {}_2F_1(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1; \gamma_1 + 1; \lambda) + \\ &+ \frac{(\alpha_1)_2 (\alpha_2)_2 \lambda^2}{(\gamma_1)_2 (\gamma_2)_2} {}_2F_1(\alpha_1 + 2, \alpha_2 + 2; \gamma_1 + 2; \lambda) \end{aligned}$$

□

Pasamos ahora a demostrar el teorema por inducción. Lo suponemos cierto para n y vamos a calcularlo para $n + 1$. Como

$$(\gamma_2 + n + 1)_r = (\gamma_2 + n)_r \frac{(\gamma_2 + n)_r r}{\gamma_2 + n}$$

la serie hipergeométrica se expresa:

$$\begin{aligned} &{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n + 1; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\gamma_2 + n)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\gamma_2 + n)_r r \lambda^r}{(\gamma_2 + n) (\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} = \\ &= {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) + \\ &+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2} {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \gamma_2 + n + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; \lambda) \end{aligned}$$

en donde en ambos términos se puede aplicar el principio de inducción, de

forma que:

$$\begin{aligned}
& {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n + 1; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) = \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i} {}_2F_1(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i; \gamma_1 + i; \lambda) + \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1 + 1)_i (\alpha_2 + 1)_i \lambda^i}{(\gamma_1 + 1)_i (\gamma_2 + 1)_i} {}_2F_1(\alpha_1 + 1 + i, \alpha_2 + 1 + i; \gamma_1 + 1 + i; \lambda) = \\
&= {}_2F_1(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i; \gamma_1 + i; \lambda) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right] \frac{(\alpha_1)_{i+1} (\alpha_2)_{i+1} \lambda^{i+1}}{(\gamma_1)_{i+1} (\gamma_2)_{i+1}} \cdot \\
&\quad \cdot {}_2F_1(\alpha_1 + 1 + i, \alpha_2 + 1 + i; \gamma_1 + 1 + i; \lambda) + \\
&\quad + \frac{(\alpha_1)_{n+1} (\alpha_2)_{n+1} \lambda^{n+1}}{(\gamma_1)_{n+1} (\gamma_2)_{n+1}} {}_2F_1(\alpha_1 + n + 1, \alpha_2 + n + 1; \gamma_1 + n + 1; \lambda)
\end{aligned}$$

y agrupando términos, se obtiene el resultado deseado. \square

Realmente este resultado también es aplicable para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita, únicamente habrá que tener cuidado en que el parámetro $\gamma_2 + n$ no sea el mayor entero negativo, pues en ese caso la expresión anterior es distinta al operar con sumas finitas. Ahora bien para poder utilizar dicho resultado de sumación es necesario conocer el valor de la función ${}_2F_1$ que en él aparece. Esto nos conduce a los siguientes corolarios en que $\lambda = 1$ y $\lambda = 1/2$ respectivamente.

Corolario 3.1. Para $\lambda = 1$, si no existen parámetros enteros negativos en el numerador podemos utilizar el resultado (2.18) en el teorema anterior, de donde:

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; 1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i \Gamma(\gamma_1 + i) \Gamma(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - i)}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i \Gamma(\gamma_1 - \alpha_1) \Gamma(\gamma_1 - \alpha_2)} \quad (3.12)$$

Corolario 3.2. Para $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\gamma_1 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_1 + \alpha_2)$, empleamos el resultado (2.20) en (3.11) obteniendo:

$$\begin{aligned}
& {}_3F_2 \left(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}, \gamma_2; \frac{1}{2} \right) = \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} + i\right)}{\left(\frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)_i (\gamma_2)_i 2^i \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_1 + i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_2 + i}{2}\right)} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Este teorema, como ya hemos comentado, permite obtener el correspondiente valor de la esperanza de las distribuciones así generadas, ya que en

la expresión (3.6) aparece una función hipergeométrica de las consideradas en el corolario 3.1, en concreto:

$$\mu = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\gamma_2 + n) \lambda {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \gamma_2 + n + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; \lambda)}{\gamma_1 \gamma_2 {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)} \quad (3.14)$$

Así, cuando $n = 1$, $\lambda = 1$ y no hay parámetros enteros negativos, la expresión de la esperanza queda como sigue, tras sustituir en (3.14) las funciones ${}_3F_2$ que en ella aparecen y operar:

$$\mu = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2} \left[\frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2) + (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1) + \alpha_1 \alpha_2} \right] \quad (3.15)$$

mientras que para $n = 1$ y $\lambda = 1/2$ se llega a la siguiente expresión:

$$\mu = 2 \frac{(\gamma_2 + 1) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_2}{2}\right) + 2 \Gamma\left(\frac{\alpha_1}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_2}{2} + 1\right)}{\gamma_2 \Gamma\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) + 2 \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_2}{2}\right)} \quad (3.16)$$

y para $n = 2$ con $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 3} \times \\ &\times \frac{1}{(\gamma_2)_2 (\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2)_2 + \alpha_1 \alpha_2 (\gamma_2 + 1) (\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2) + (\alpha_1)_2 (\alpha_2)_2} \times \\ &\times [(\gamma_2 + 1)_2 (\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 3)_2 + \\ &+ (\alpha_1 + 1) (\alpha_2 + 1) (\gamma_2 + 2) (\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 3) + (\alpha_1)_2 (\alpha_2)_2] \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.5 Estudio de casos concretos

A la luz del teorema 3.1 que nos proporciona la suma de una amplia clase de funciones hipergeométricas, podemos obtener la constante de normalización indicada en (3.3), así como el valor de la esperanza por (3.14) y del resto de los momentos tras la aplicación de la relación de recurrencia entre ellos. Esto nos permite obtener de manera explícita diferentes funciones de masa de probabilidad, y estudiar diversos aspectos probabilísticos de ellas. Es de destacar los diferentes perfiles que aparecen en función de los valores de los parámetros.

En muchos de los casos expuestos, las probabilidades obtenidas no pueden ser adecuadamente descritas por distribuciones pertenecientes a la familia de Ord, ya que el sistema resultante al estimar los parámetros por

el método de los momentos no tiene soluciones reales, o bien las soluciones encontradas no conducen a una f.m.p. En cuanto a otras propiedades, no se cumple en general la condición necesaria y suficiente de Katti (Katti, [28]; Chang, [4]) para que una distribución discreta pertenezca a la familia de leyes infinitamente divisibles.

A continuación desarrollamos el estudio de las distribuciones en que el parámetro λ es 1, para pasar posteriormente a mostrar algunos ejemplos de distribuciones en que dicho parámetro es $1/2$.

3.5.1 Familia de distribuciones para $\lambda = 1$

No todos los tipos dados en la tabla 3.1 pueden ser estudiados a partir del resultado del corolario 3.1, pero sí la mayoría. En concreto hay que desestimar aquellos en que λ no puede ser 1, que son los Tipos IV, V, X, XI, XIV y XV. Nos vamos a centrar en aquellos casos que resulten más llamativos en función de la forma de los polígonos de frecuencias resultantes, como muestra de la amplia versatilidad que presentan tales distribuciones. En dichos casos mostramos representaciones gráficas de los polígonos de frecuencias y tablas con los principales momentos.

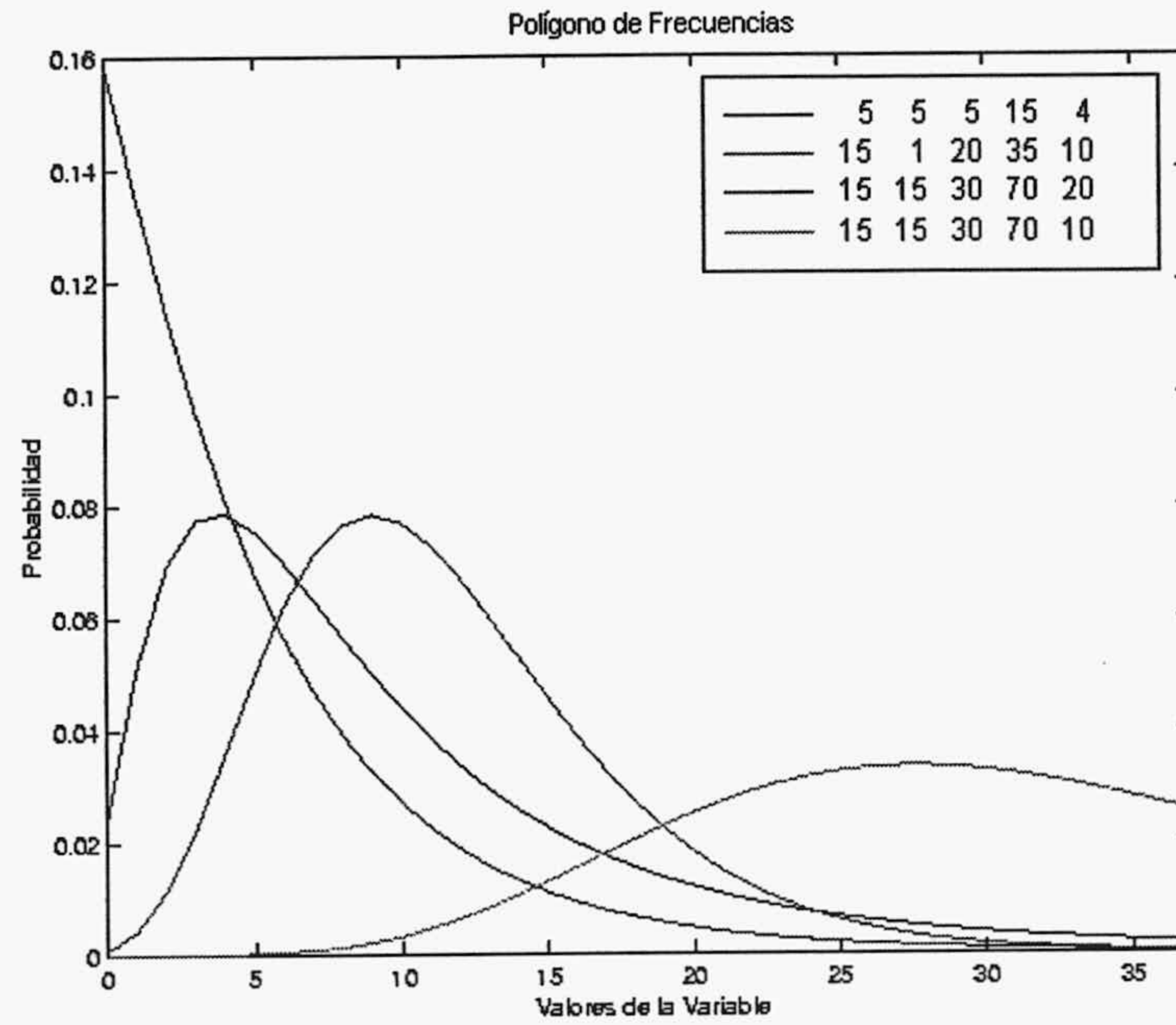
Las distribuciones de rango finito, esto es, las pertenecientes a los Tipos III, VII, IX y XIII no necesitan del corolario 3.1 para poder calcular sus funciones masa de probabilidad, por lo que no se ha tenido en cuenta la restricción que plantea dicho corolario, es decir, que no es necesario imponer que el tercer parámetro del numerador sea igual al segundo del denominador más un número natural.

Distribuciones Tipo I y Tipo II

Los parámetros para el Tipo I verifican: $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ y para el Tipo II: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$ con $E|\alpha_1| = E|\alpha_2|$, y $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. En ambos casos $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + n$, para que se produzca la convergencia.

Estos tipos de distribuciones tienen rango de valores infinito, y la forma que presentan va desde una J traspuesta con moda en cero a un perfil acampanado. Se ha observado que manteniendo constante los parámetros del denominador y aumentando los del numerador las probabilidades se desplazan a la derecha. Lo mismo ocurre si se mantienen constante los parámetros del numerador y disminuyen los del denominador, como se puede apreciar en la figura 3.1.

Esto conduce a que sea la diferencia de las sumas en valores absolutos de los parámetros tantos del numerador como del denominador la que marque la forma que tienen esas poligonales. A este respecto es bastante clarificador la representación dada en la figura 3.2, donde se muestran dos distribuciones en que dicha diferencia es la misma y sus poligonales son prácticamente iguales. No obstante, no siempre se produce este hecho, es decir, que dos

Figura 3.1: Tipo I ($\lambda = 1$)

distribuciones en las que esa diferencia sea la misma no tienen porqué tener la misma función masa de probabilidad, aunque bien es cierto que generalmente las distribuciones tienen formas parecidas.

La tabla 3.3 muestra los principales momentos de las distribuciones que se han representado, y en ella se observa que las correspondientes al Tipo II tienen curtosis negativa aunque muy cercana a cero y que son casi simétricas, lógico si se tiene en cuenta sus parecidos con la curva normal.

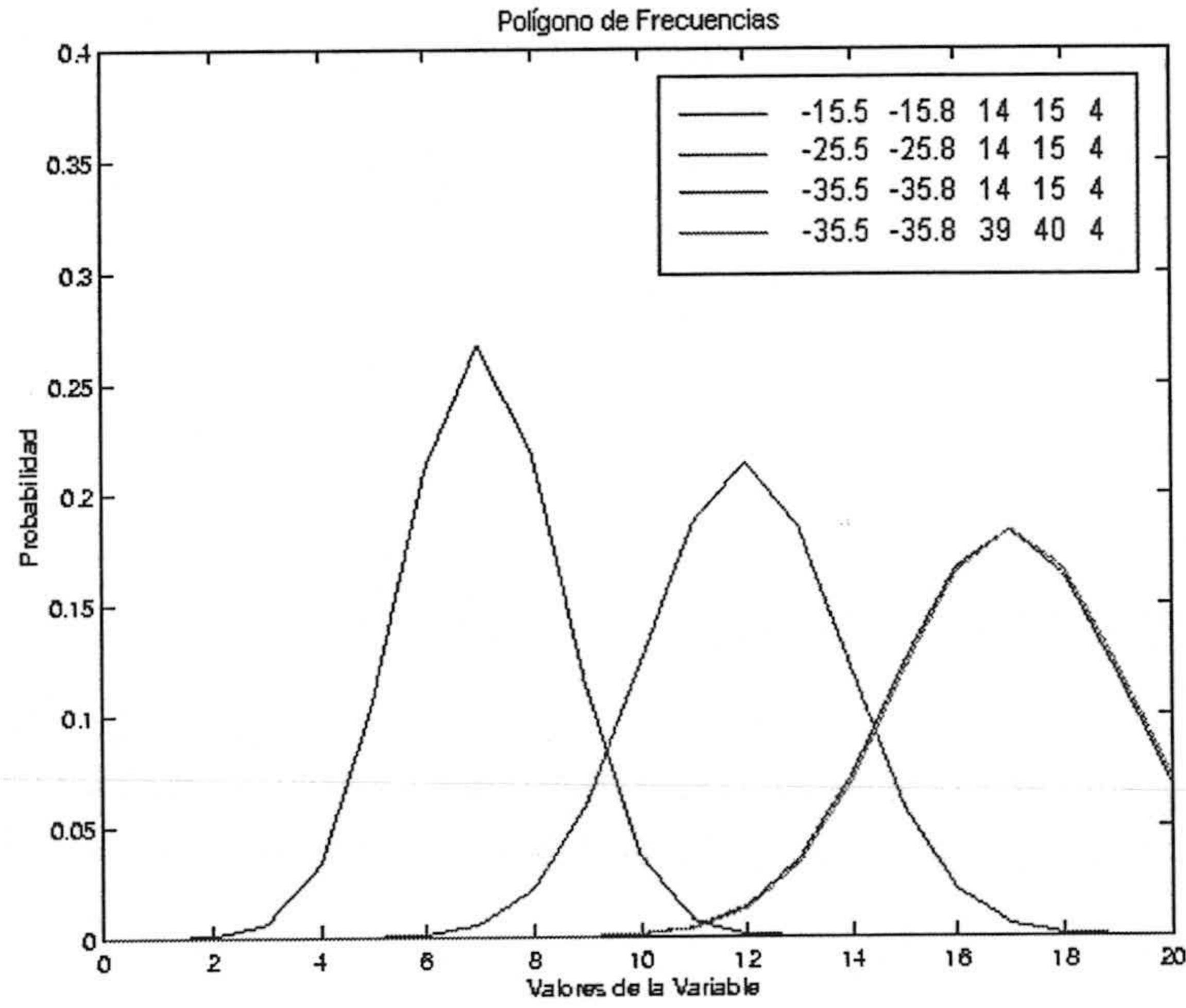
Distribuciones Tipo III

En estos casos α_1 o α_2 son negativos, con al menos uno de ellos entero (si es α_1 , entonces por la condición de positividad $|\alpha_2| > |\alpha_1| - 1$), y $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

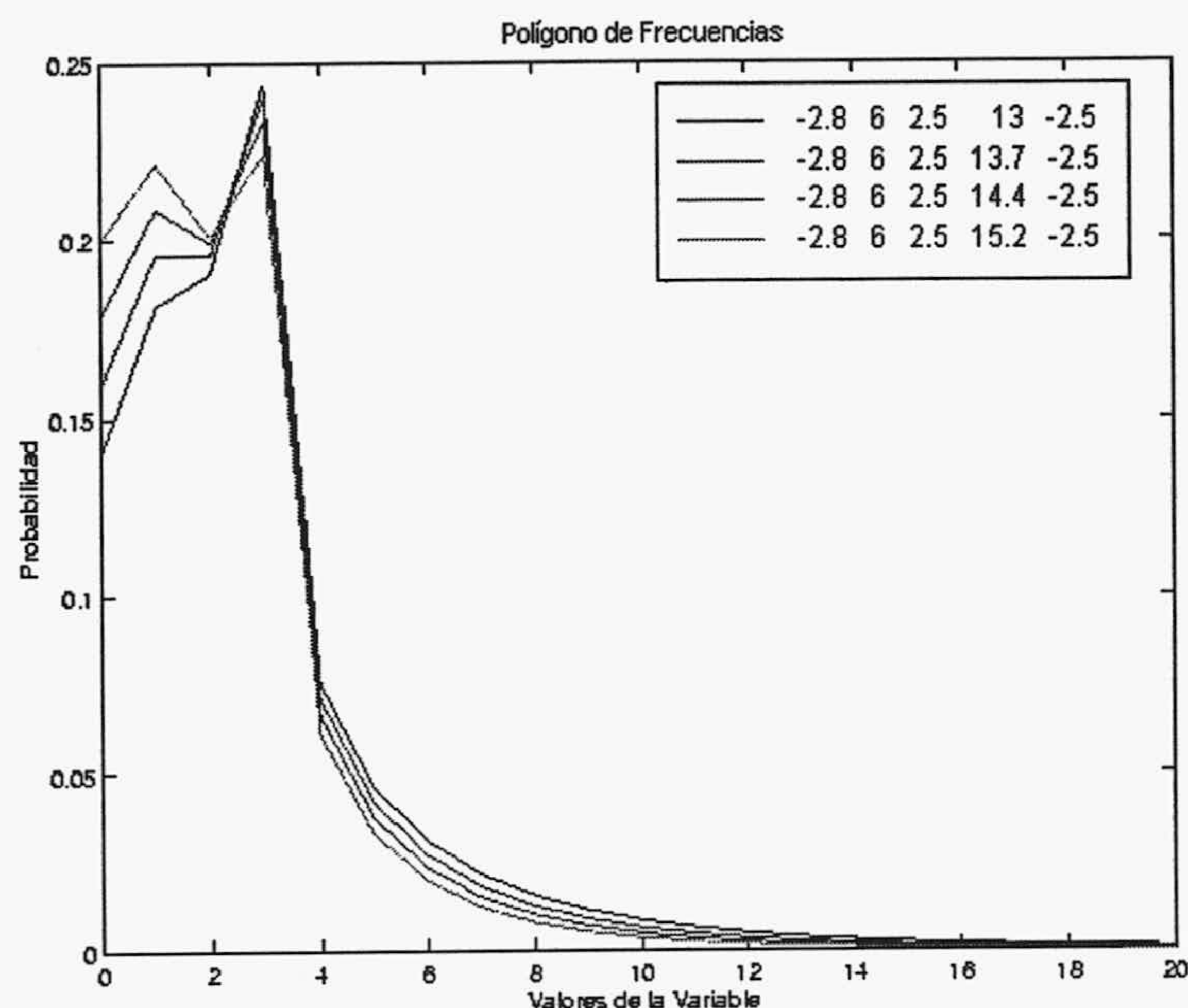
Estas distribuciones son finitas y los polígonos de frecuencia pueden tener forma de J traspuesta o acampanada, al igual que los tipos anteriores, de ahí que no se considere interesante mostrar ningún gráfico sobre este tipo de distribuciones.

Distribuciones Tipo VI

Los parámetros verifican que: $\alpha_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$ con $E|\alpha_1| = E|\gamma_2|$, y $\alpha_2, \gamma_2 + n, \gamma_1 > 0$, con $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + n$ para que exista convergencia.

Figura 3.2: Tipo II ($\lambda = 1$)Tabla 3.3: Distribuciones Tipo I y II ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(5, 5, 5, 15, 4)	10.366	126.09	5.9141	-
(15, 1, 20, 35, 10)	5.2924	36.774	2.6001	12.979
(15, 15, 30, 70, 20)	11.489	32.753	0.99608	1.7612
(15, 15, 30, 70, 10)	33.557	188.50	1.0779	2.2253
(-15.5, -15.8, 14, 15, 4)	7.0361	2.1835	0.0091370	-0.060870
(-25.5, -25.8, 14, 15, 4)	11.983	3.4529	0.0036741	-0.037321
(-35.5, -35.8, 14, 15, 4)	16.953	4.7141	0.0019964	-0.027043
(-35.5, -35.8, 39, 40, 4)	17.021	4.6983	0.0016996	-0.026976

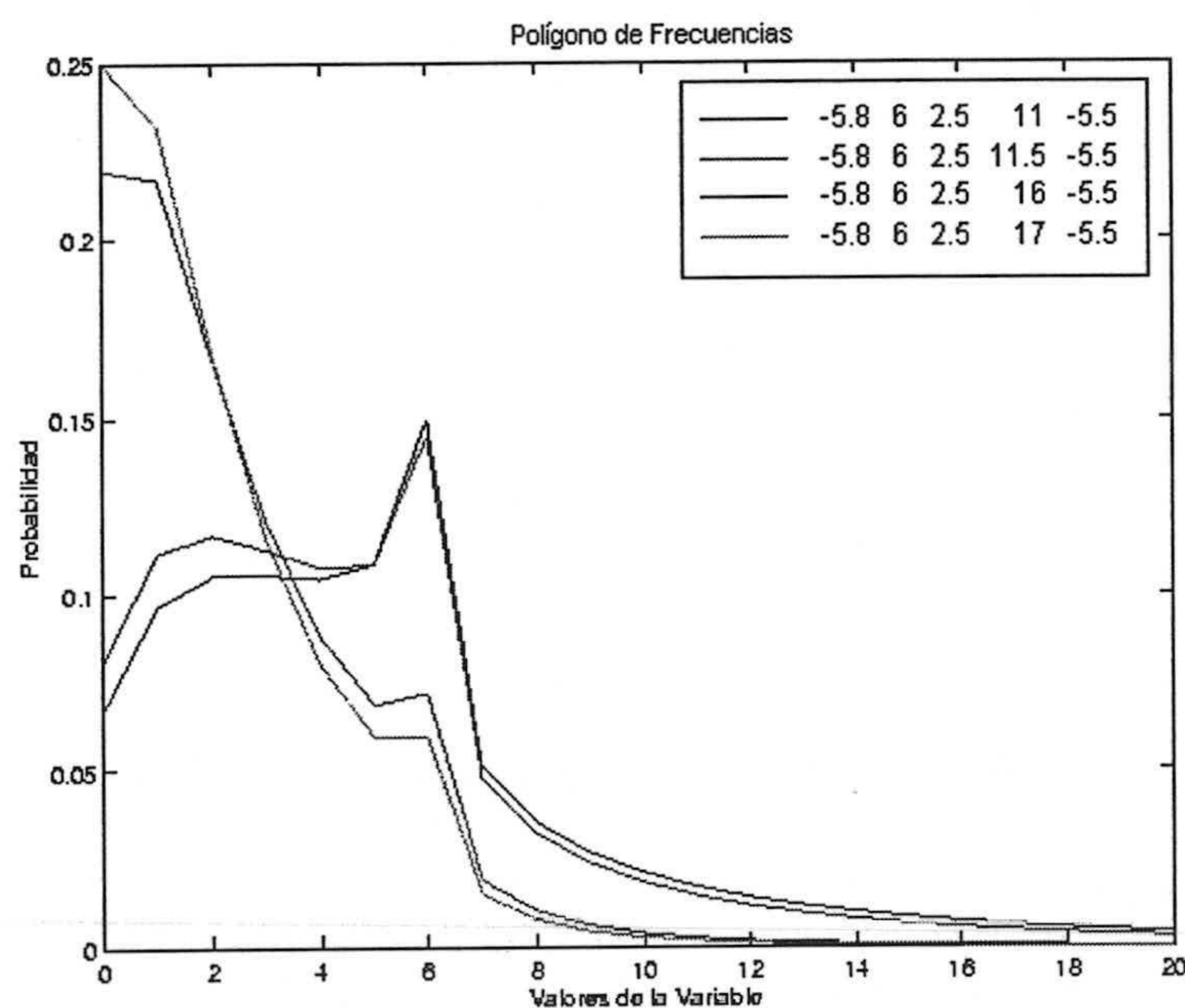
Figura 3.3: Tipo VI ($\lambda = 1$)

Dentro de las distribuciones encuadradas dentro del Tipo VI, hemos seleccionado algunos ejemplos que presentan dos modas locales.

Así, en la figura 3.3 se cambia el parámetro positivo del denominador, manteniendo los otros constantes, de forma que se ha pasado de una distribución unimodal a otra bimodal. Concretamente en torno al valor $\gamma_1 = 14$ se producen dos modas en los puntos 1 y 3.

En la figura 3.4 se ha actuado de forma similar, ya que únicamente hemos variado el parámetro positivo del denominador. En este caso, al incrementar dicho parámetro se pasa de una situación unimodal a otra bimodal, pero si se sigue aumentando se llega rápidamente a una distribución unimodal con moda en el punto 0. Hay que tener en cuenta que en todos estos casos una de las modas se situaría en el punto 6, justamente el valor siguiente en valor absoluto al que presentan los parámetros negativos. Esto mismo sucede en la figura 3.3 con el punto 3.

Por último en la figura 3.5 se muestran dos distribuciones que presentan una moda en el punto 23, pauta que como vemos se repite en muchas de las distribuciones de este tipo. Esto es debido, como se comprobó en el epígrafe sobre la moda, a que las desigualdades (3.8) y (3.9) son de sentido opuesto en ese punto y puede verificarlas ambas, con lo cual existiría una moda en él. Pero también aparecen dos distribuciones con una antimoda en dicho punto 23. Se observa entonces que en el punto cuyo valor es el siguiente

Figura 3.4: Tipo VI ($\lambda = 1$)

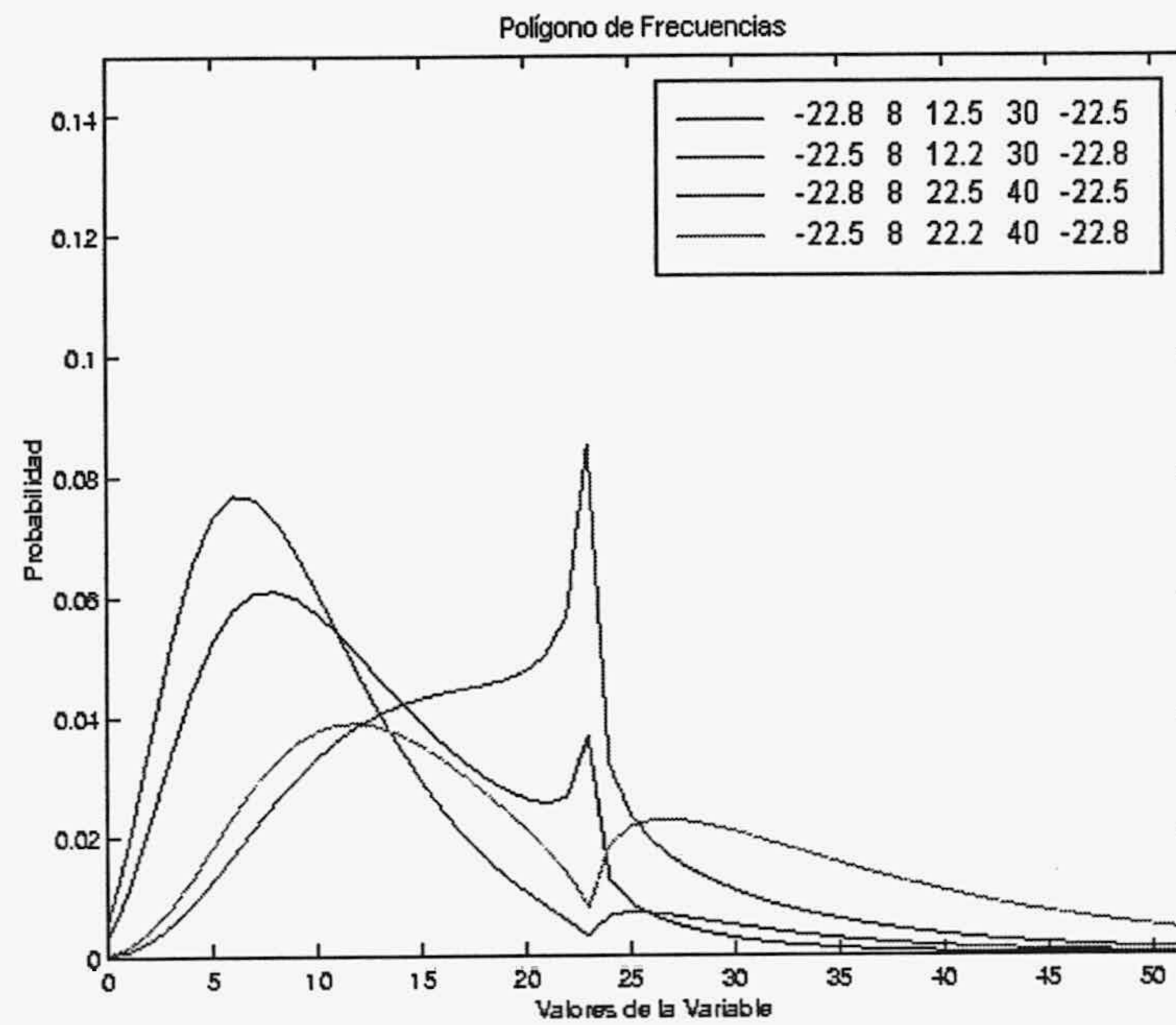
en valor absoluto al que presenta la pareja de parámetros negativos puede existir una moda o una antimoda. Existe una moda cuando el parámetro negativo del numerador es mayor en valor absoluto que el del denominador, y cuando ocurre lo contrario existe una antimoda. El comportamiento, no obstante, puede diferir bastante de una distribución a otra, encontrándonos con poligonales con moda en el cero y otras con forma más acampanada.

Por otra parte ya no sucede que distribuciones cuya diferencia entre la suma en valor absoluto de los parámetros del numerador y del denominador sea la misma tengan similares representaciones gráficas como se observa en la figura 3.5.

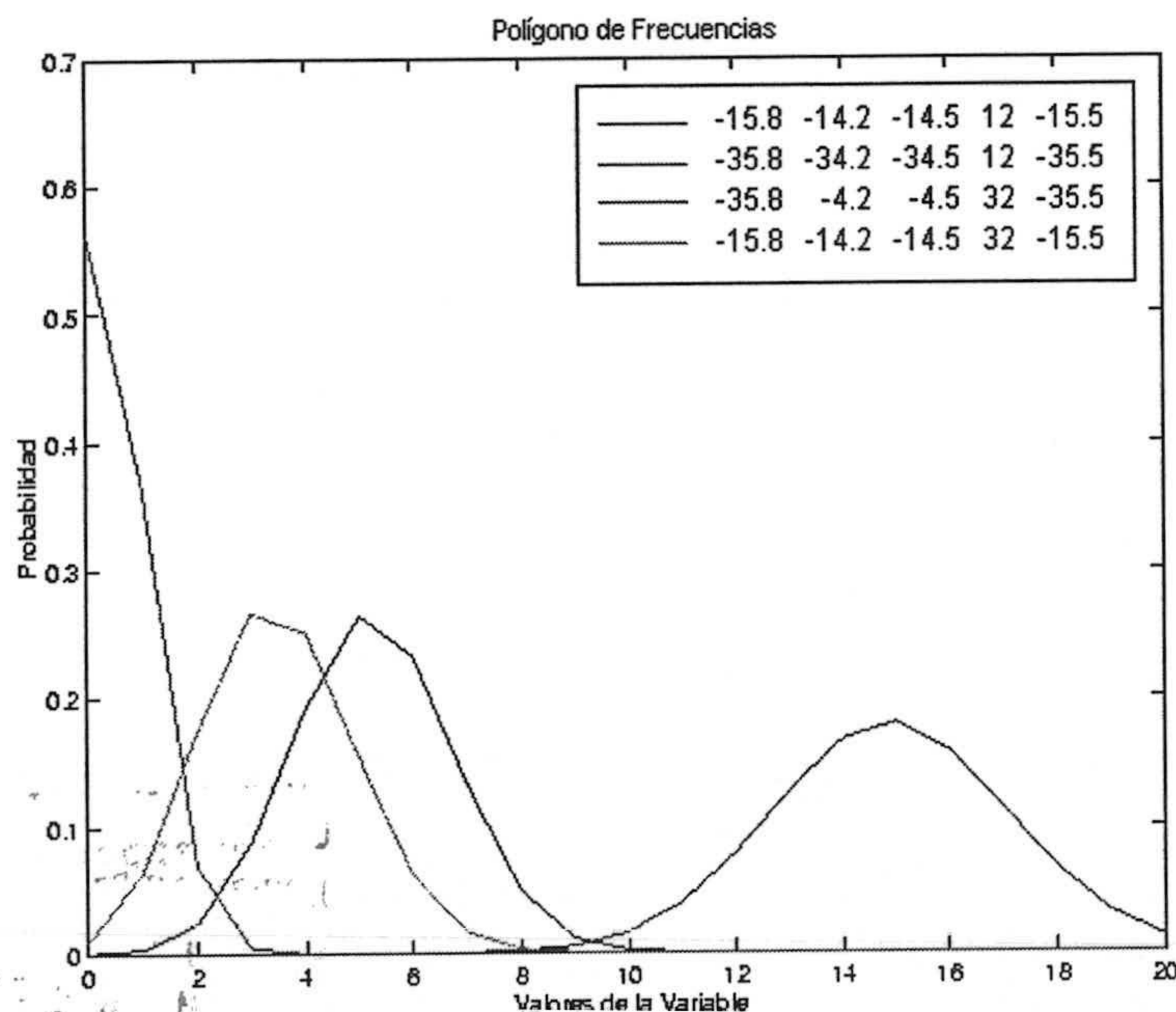
En la tabla 3.4 aparecen los momentos más usuales de las distribuciones representadas, si éstos existen. Todas ellas tienen asimetría a la derecha y presentan curtosis positiva. Dichos coeficientes nos muestran, que si bien la media va aumentando (esto es, las probabilidades se desplazan a la derecha) conforme los parámetros toman valores más grandes, no existe, en general, un comportamiento similar en cuanto a la dispersión o a la forma de la distribución.

Distribuciones Tipo VII

En este caso los parámetros verifican que $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2, \gamma_2 + n \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$ y $\gamma_1 > 0$, con $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + n$ por la condición de convergencia. Para satisfacer

Figura 3.5: Tipo VI ($\lambda = 1$)Tabla 3.4: Distribuciones Tipo VI ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-2.8, 6, 2.5, 13, -2.5)	3.0098	11.629	5.2084	102.86
(-2.8, 6, 2.5, 13.7, -2.5)	2.6705	8.0695	4.2171	52.430
(-2.8, 6, 2.5, 14.4, -2.5)	2.4178	6.0872	3.5648	34.459
(-2.8, 6, 2.5, 15.2, -2.5)	2.1946	4.7355	3.0237	24.123
(-5.8, 6, 2.5, 11, -5.5)	6.3223	93.897	-	-
(-5.8, 6, 2.5, 11.5, -5.5)	5.3178	43.674	19.066	-
(-5.8, 6, 2.5, 16, -5.5)	2.4633	5.7733	1.7721	8.4561
(-5.8, 6, 2.5, 17, -5.5)	2.1948	4.8852	1.6181	5.9823
(-22.8, 8, 12.5, 30, -22.5)	12.422	53.611	1.1400	3.5211
(-22.5, 8, 12.2, 30, -22.8)	10.960	74.137	2.3430	9.4727
(-22.8, 8, 22.5, 40, -22.5)	19.331	94.219	1.8655	9.3793
(-22.5, 8, 22.2, 40, -22.8)	23.573	251.40	1.5262	4.6700

Figura 3.6: Tipo VII ($\lambda = 1$)

la condición de positividad se tiene que $E|\alpha_1| = E|\gamma_2|$ y $E|\alpha_2| = E|\gamma_2 + n|$.

Estas distribuciones también son infinitas y pueden presentar forma de J traspuesta con moda en cero o forma acampanada, desplazándose hacia la derecha a medida que aumenta la suma de los parámetros del numerador o disminuye la del denominador, lo cual se muestra en la figura 3.6. El comportamiento, en general, es análogo al que ya se ha comentado para las distribuciones Tipos I y II, de forma que existen distribuciones similares entre sí, si las diferencias en la suma de los parámetros del numerador y del denominador es la misma. No se han encontrado distribuciones con dos modas.

Los momentos de dichas distribuciones aparecen en la tabla 3.5, apreciándose en la media lo comentado anteriormente. Todas ellas son asimétricas a la derecha y, excepto la que tiene forma de J traspuesta, curtosis negativa, esto es, son más aplastadas que la normal.

Distribuciones Tipo VIII

Aquí $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$ y $\gamma_2 < 0$ con $|\gamma_2| > |\alpha_1| - 1$, y el resto de parámetros son positivos, por lo que las distribuciones incluidas en este tipo son finitas.

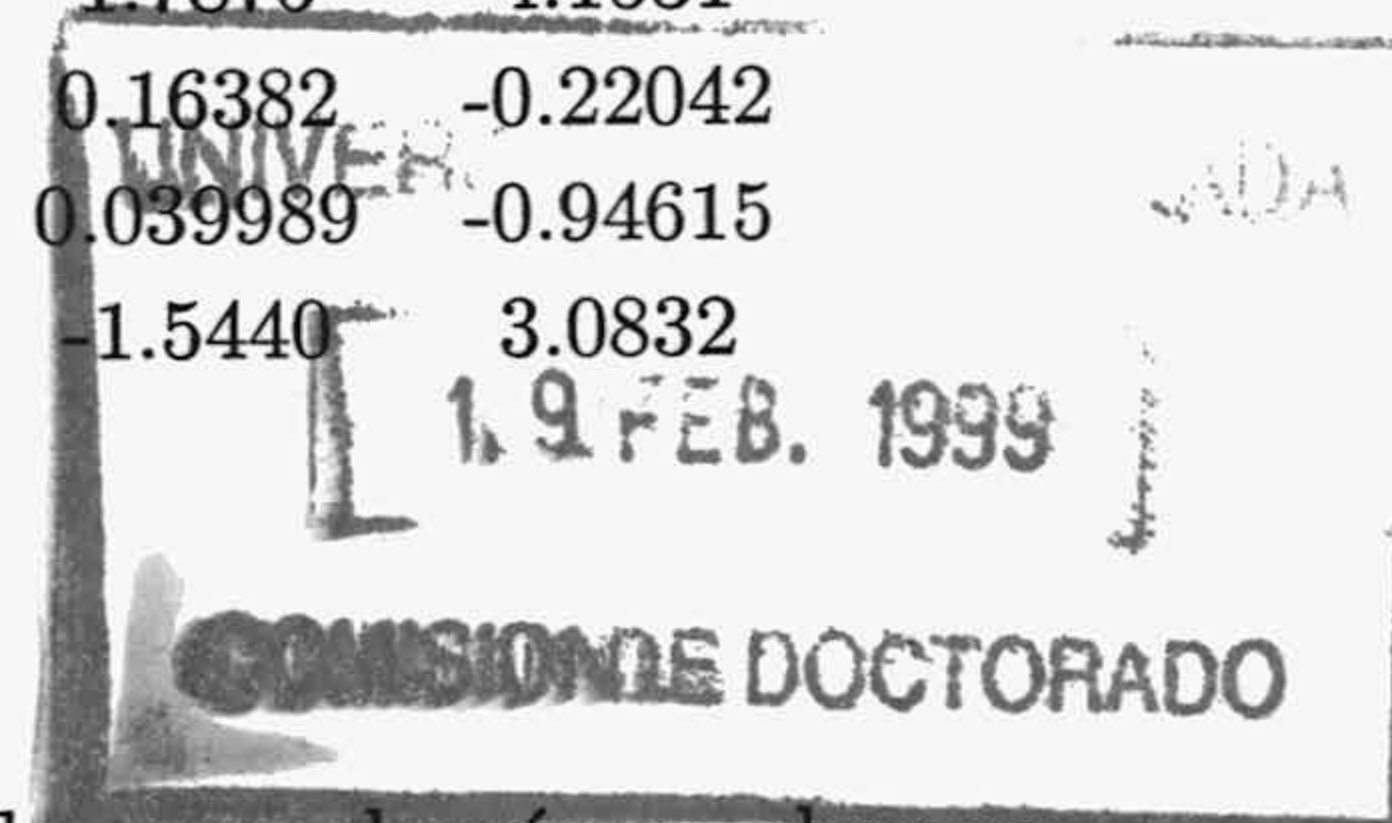
Éstas no presentan dos modas como las distribuciones del Tipo VI, pero sí aparecen formas bien distintas: poligonales con forma de J traspuesta, de J, cóncavas o acampanadas. Esto muestra la versatilidad de este tipo de

Tabla 3.5: Distribuciones Tipo VII ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-15.8, -14.2, -14.5, 12, -15.5)	5.2475	2.1863	0.053321	-0.080628
(-35.8, -34.2, -34.5, 12, -35.5)	14.873	4.8713	0.0086863	-0.028600
(-35.8, -4.2, -4.5, 32, -32.5)	0.47937	0.38934	1.0256	0.39559
(-15.8, -14.2, -14.5, 32, -15.5)	3.4982	2.0456	0.19285	-0.095242

Tabla 3.6: Distribuciones Tipo VIII ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-20, 10, 2.5, 30, -35.5)	0.59988	0.76861	1.7875	4.1531
(-20, 10, 42.5, 30, -35.5)	7.9601	8.1009	0.16382	-0.22042
(-20, 10, 2.5, 12, -20.5)	10.089	26.214	0.039989	-0.94615
(-20, 40, 2.5, 12, -20.5)	18.683	2.2779	-1.5440	3.0832



distribuciones.

En la figura 3.7 se representa este hecho, en la que además se observa que al aumentar alguno de los parámetros del numerador, o bien disminuir (en valor absoluto) alguno del denominador las probabilidades se desplazan a la derecha, como parece ser habitual. Cuando la diferencia entre la suma de los parámetros del numerador y del denominador es la misma para dos distribuciones, la forma de éstas es parecida aunque las probabilidades no sean tan cercanas como se ha observado en otros tipos de distribuciones.

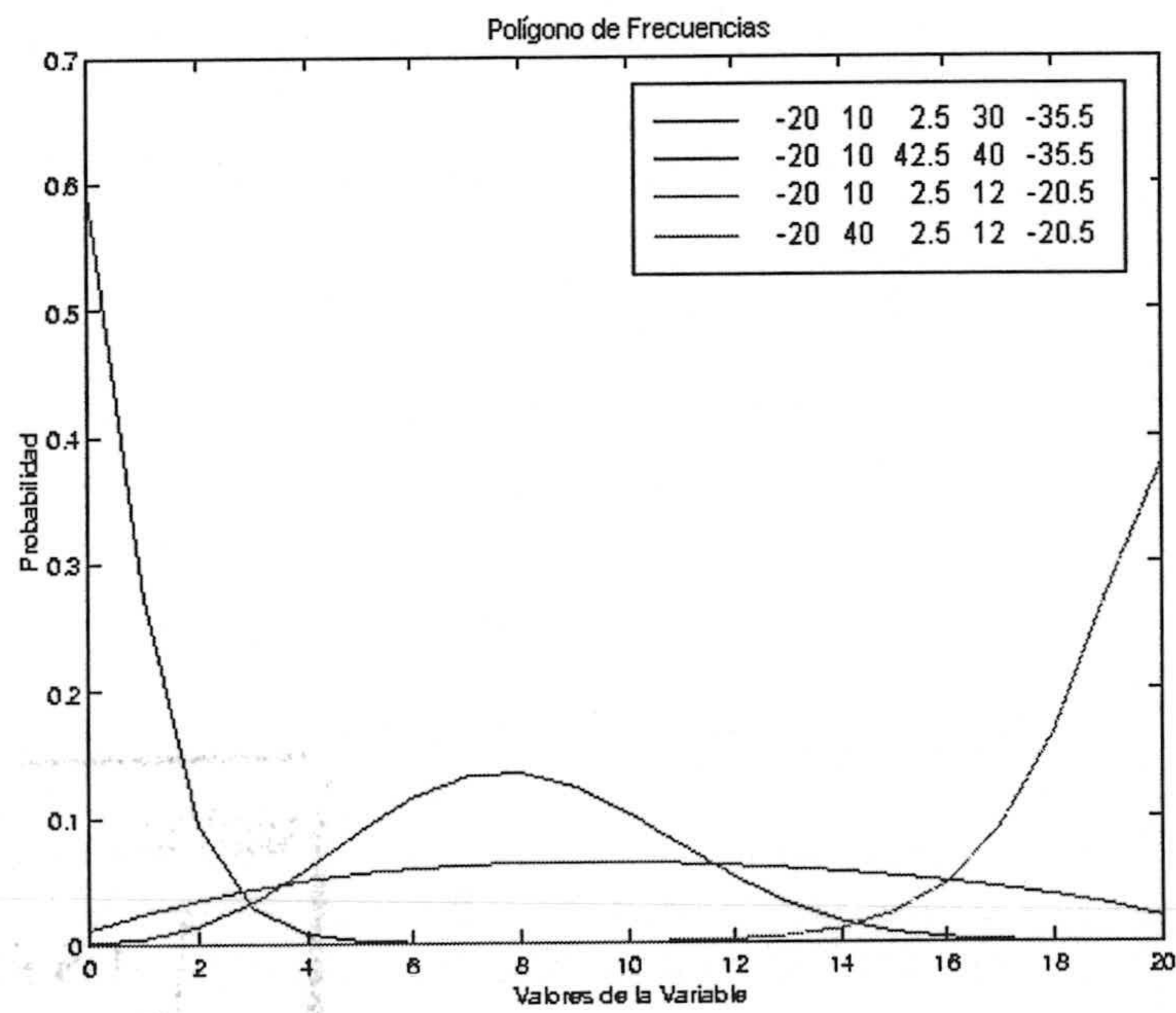
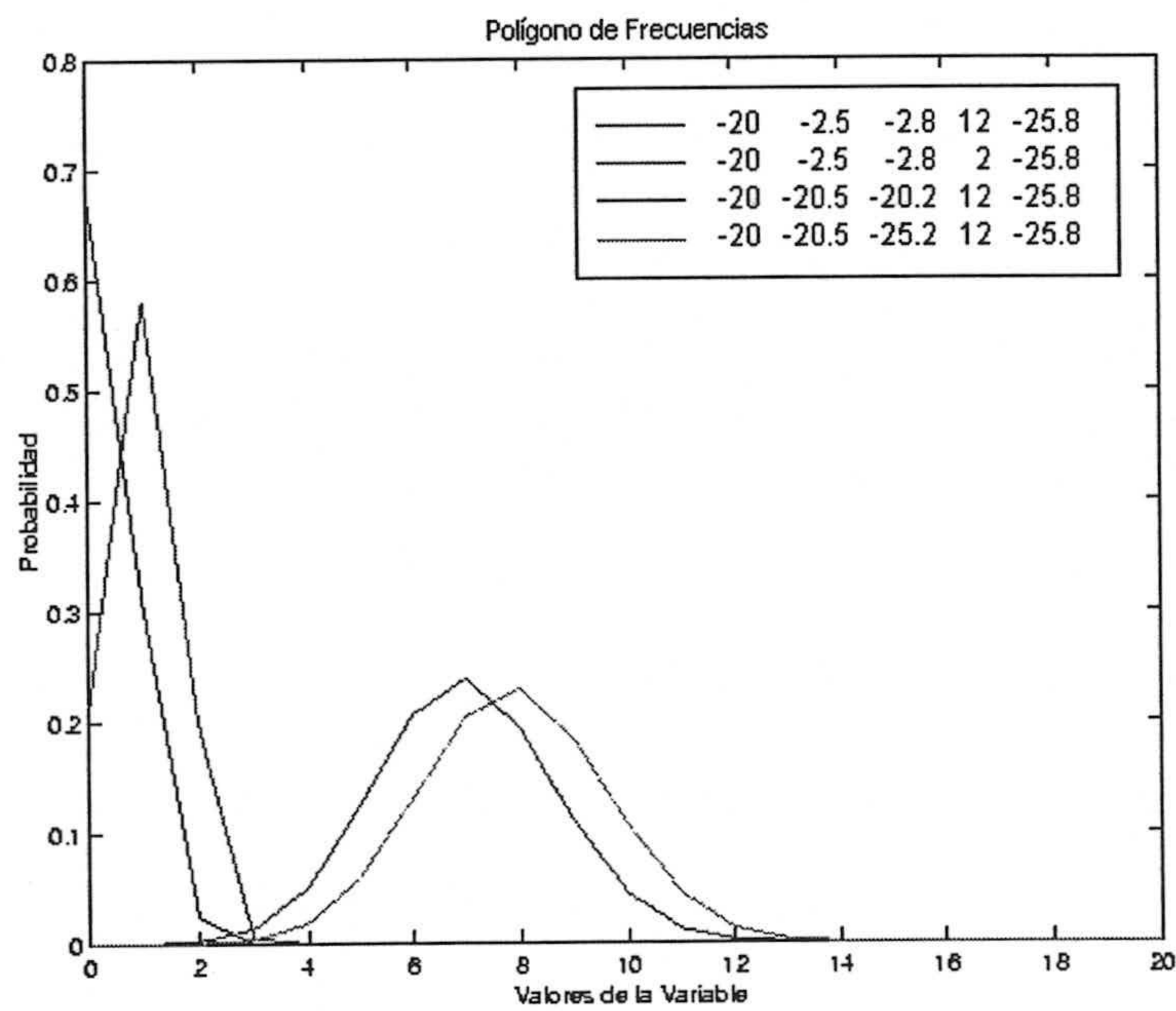
La tabla 3.6 muestra los momentos más significativos de dichas distribuciones. Como puede comprobarse, los coeficientes de asimetría y de curtosis vienen a corroborar lo ya comentado sobre la forma de las distribuciones.

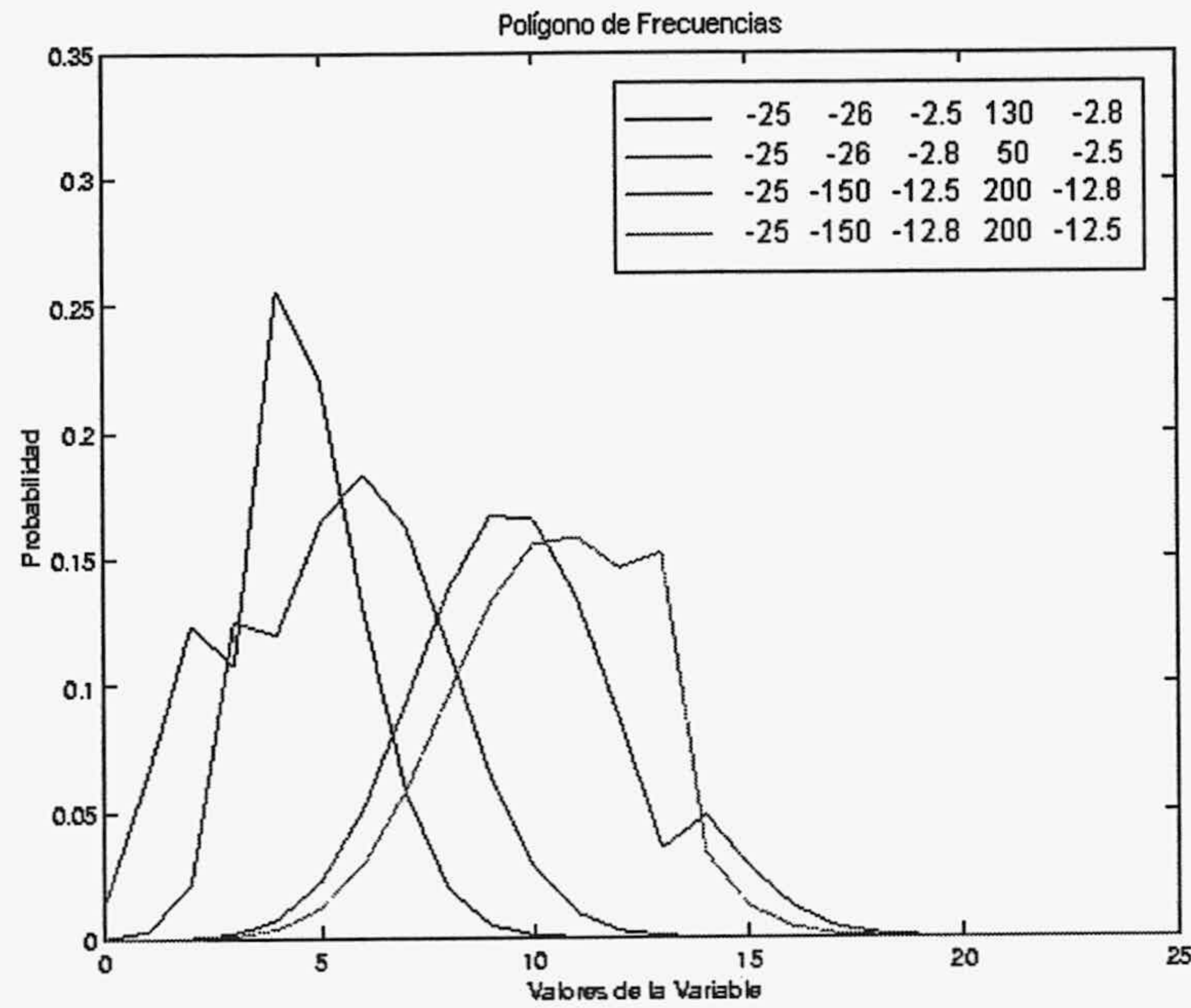
Distribuciones Tipo IX

Se tiene que $\gamma_1 > 0$, mientras que los otros parámetros son negativos, con al menos uno de ellos entero (con las restricciones que aparecen en la tabla 3.1 para que se verifique la condición de positividad).

Estas distribuciones por tanto son finitas, pero sus formas son similares a las del Tipo VII, como se aprecia en la figura 3.8. En ella se observa lo que ya hemos comentado para los tipos anteriores: al aumentar o disminuir alguno de los parámetros del numerador o denominador, respectivamente, y manteniendo los otros constantes, la distribución se desplaza hacia la derecha.

Además, algunas de ellas presentan dos modas, en concreto cuando uno de los parámetros del numerador y el del denominador que son negativos

Figura 3.7: Tipo VIII ($\lambda = 1$)Figura 3.8: Tipo IX ($\lambda = 1$)

Figura 3.9: Tipo IX ($\lambda = 1$)

no enteros tienen la misma parte entera y son menores que el menor entero negativo (en valor absoluto), siendo el parámetro del denominador que es positivo bastante grande. Es interesante comprobar que, al igual que ocurre en las distribuciones del Tipo VI, en el punto cuyo valor es el siguiente en valor absoluto al que presenta dicha pareja de parámetros negativos, existe una moda o una antimoda en las mismas circunstancias que se comentaban para ese tipo de distribuciones. Así, se observa en la figura 3.9 que en el punto 3 hay una moda y una antimoda para las dos primeras distribuciones representadas y en el punto 13 para las otras dos. Para estas dos últimas distribuciones únicamente se han intercambiado los parámetros negativos no enteros produciendo un cambio sustancial en la distribución.

Los momentos de dichas distribuciones aparecen en la tabla 3.7, en la que se aprecia que tanto el coeficiente de asimetría como el de curtosis pueden ser positivos o negativos.

Distribuciones Tipo XII

El único parámetro que es positivo es $\gamma_2 + n$, siendo los demás negativos y no enteros. Para que se produzca la convergencia se ha de verificar que $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + n$, y por las condiciones de positividad $E|\alpha_1| = E|\alpha_2|$ y $E|\gamma_1| = E|\gamma_2|$.

Este tipo de distribuciones tiene rango de valores infinito, presentando

Tabla 3.7: Distribuciones Tipo IX ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-20, -2.5, -2.8, 12, -25.8)	0.35267	0.27768	1.1224	0.24644
(-20, -2.5, -2.8, 2, -25.8)	0.99633	0.43459	0.11139	-0.36736
(-20, -20.5, -20.2, 12, -25.8)	6.9386	2.7418	0.043695	-0.056275
(-20, -20.5, -25.2, 12, -25.8)	7.8613	2.9679	0.029243	-0.052877
(-25, -26, -2.5, 130, -2.8)	4.1521	3.1217	-0.051740	-0.18105
(-25, -26, -2.8, 50, -2.5)	5.8751	4.2079	0.21129	-0.38016
(-25, -150, -12.5, 200, -12.8)	9.7589	6.3693	0.35320	0.13336
(-25, -150, -12.8, 200, -12.5)	10.430	5.0526	-0.26385	-0.21173

poligonales con forma de J traspuesta y acampanadas.

Distribuciones Tipo XIII

Las distribuciones de este tipo son también finitas y tienen 4 parámetros negativos, dos en el numerador y otros dos en el denominador, con $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$ y $\gamma_2 + n > 0$. Las restricciones debidas a la condición de positividad son las que aparecen en la tabla 3.1.

Las formas que presentan las poligonales de distribuciones de este tipo pueden llegar a ser realmente curiosas, como se puede observar en las figuras 3.10, 3.11 y 3.12.

En las figura 3.10 se observan poligonales con dos modas locales, con forma de J, o bien cóncavas, destacando en este caso la forma de la última distribución señalada. En cuanto a las distribuciones de la figura 3.11, se han mantenido todos los parámetros iguales, excepto uno de los del denominador que se ha aumentado en valor absoluto, con respecto a las distribuciones de la figura 3.10. Las curvas se desplazan hacia la izquierda (son asimétricas a la derecha, como se observa en la tabla 3.8 correspondiente a los momentos de dichas distribuciones) y pueden llegar a tener una forma parecida a la curva gaussiana como la segunda de las distribuciones dibujadas.

Por último, la figura 3.12 nos muestra un hecho que ya se apreciaba en otras distribuciones: que en aquéllas en las que existen dos modas hay una moda o una antimoda justamente en el entero superior en valor absoluto al valor de la pareja de parámetros negativos (con la misma parte entera). No ocurre en todas las distribuciones, como ejemplo la segunda distribución representada, pero para que existan dos modas es necesario que haya dos parámetros negativos no enteros, uno en el numerador y otro en el denominador, menores que el menor entero negativo (en valor absoluto). Esto es, tenemos una condición necesaria pero no suficiente de la existencia de dos modas.

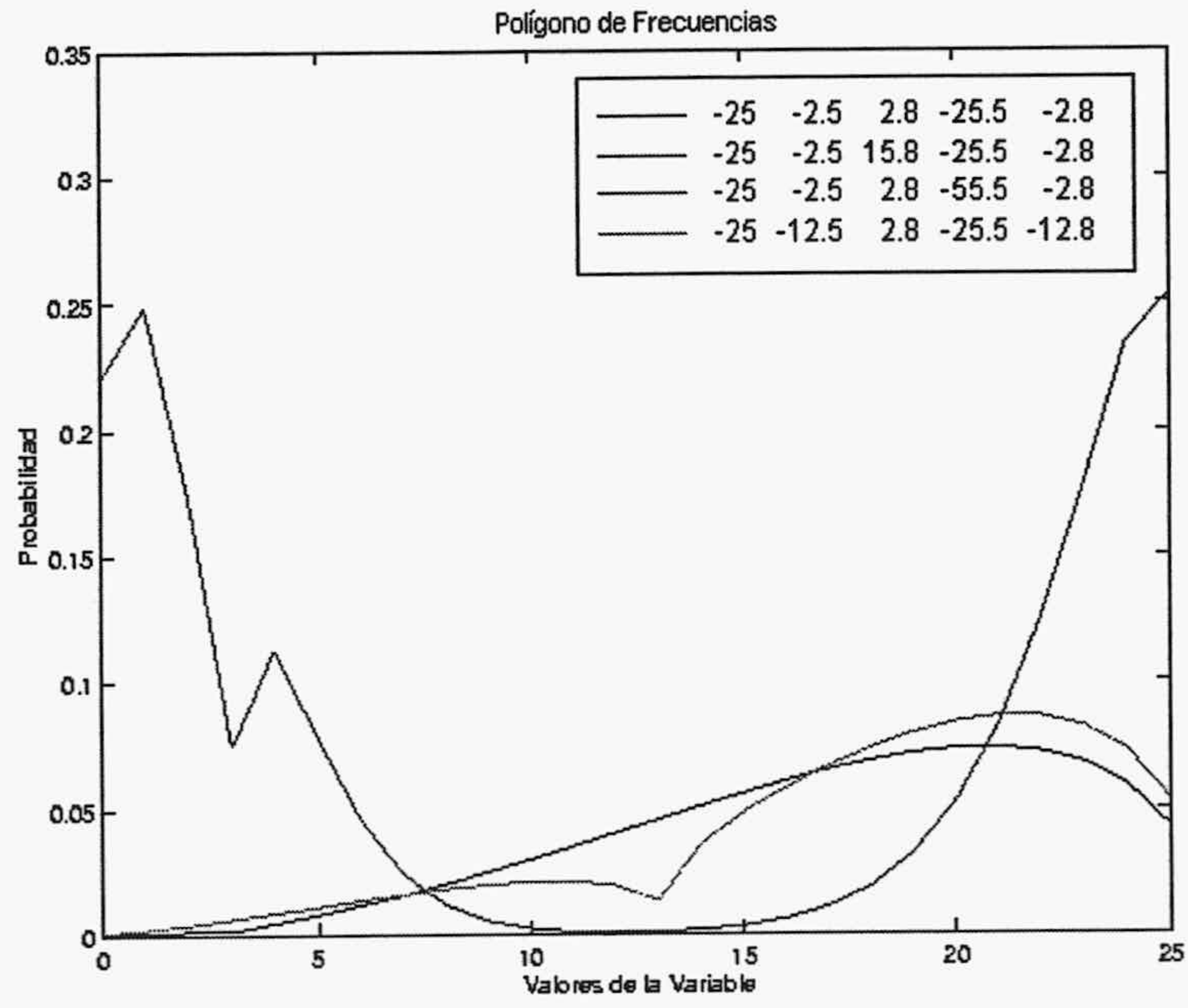


Figura 3.10: Tipo XIII ($\lambda = 1$)

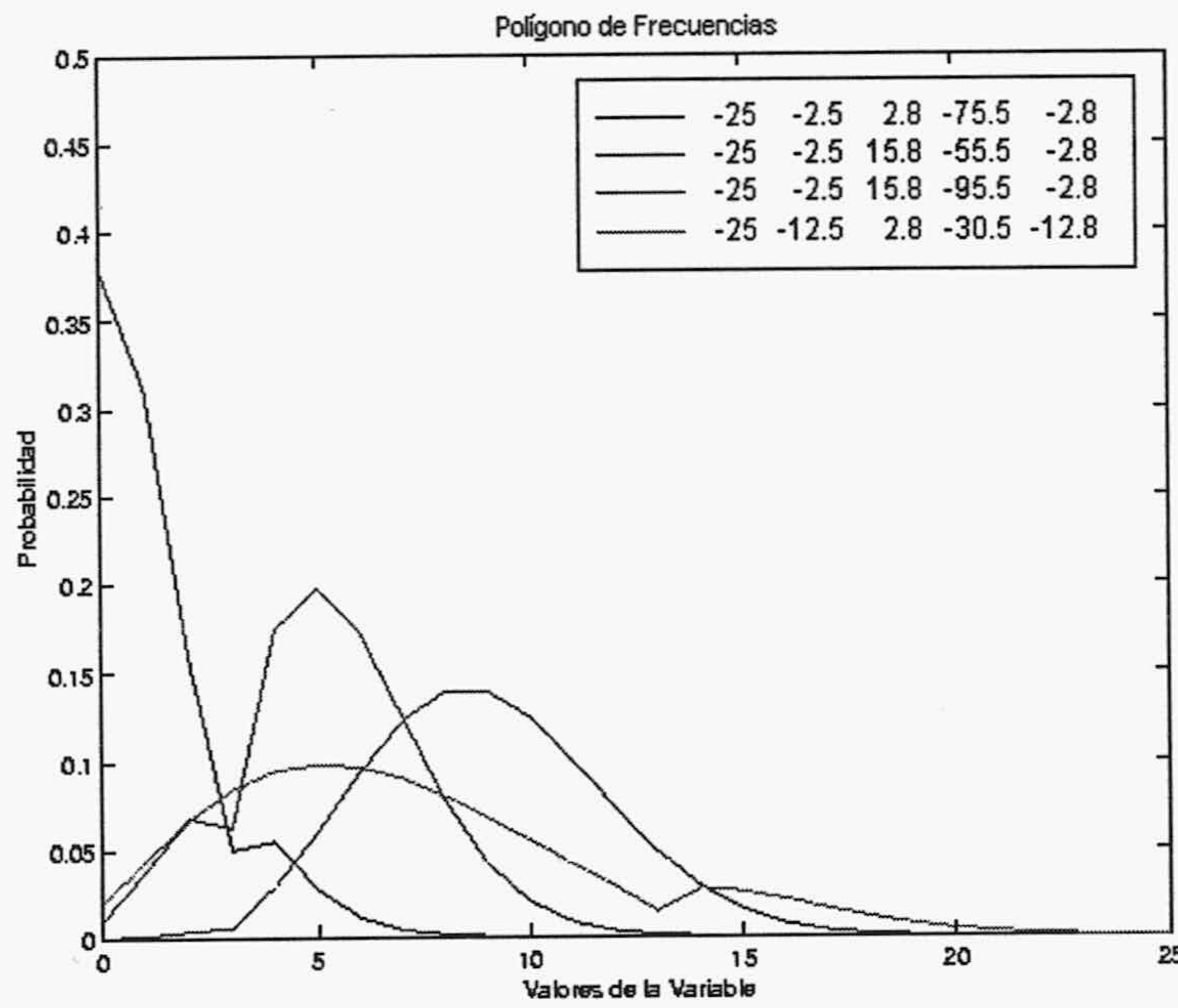
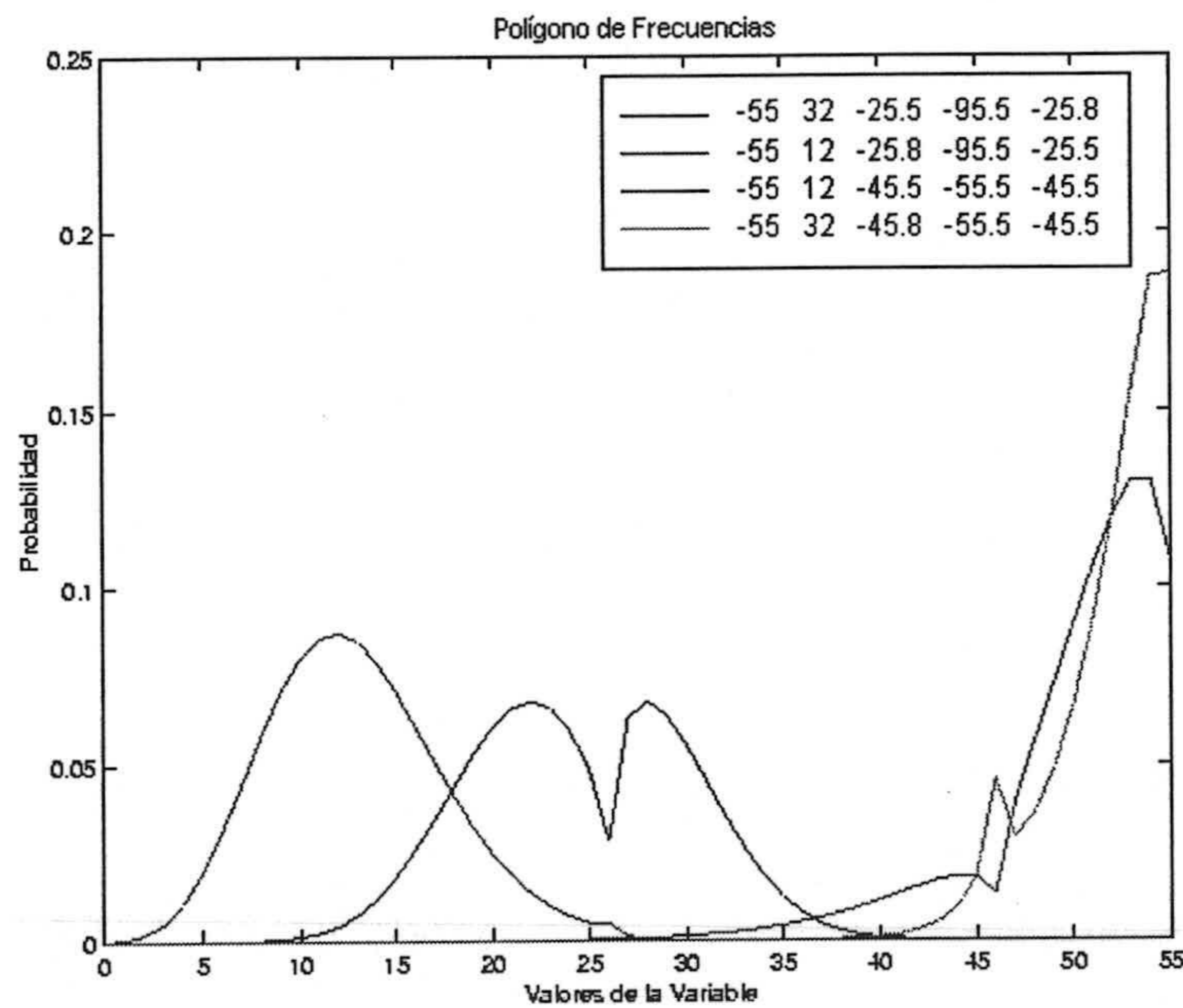


Figura 3.11: Tipo XIII ($\lambda = 1$)

Figura 3.12: Tipo XIII ($\lambda = 1$)

Las representaciones gráficas que aparecen en la figura 3.13 se corresponden con distribuciones en las que los dos parámetros negativos del numerador son enteros y no se producen las dos modas como antes.

En la tabla 3.8 se muestran los momentos de dichas distribuciones, en donde se aprecia que los coeficientes de forma son tan dispares como las representaciones de dichas distribuciones.

Por tanto, podemos deducir las siguientes pautas en las distribuciones estudiadas:

- Al aumentar el valor de uno de los parámetros del numerador (en valor absoluto) la distribución se desplaza hacia la derecha.
- Lo mismo ocurre si se disminuye el valor de uno de los parámetros del denominador (en valor absoluto).
- Como ya se ha señalado, una condición necesaria, aunque no suficiente para la existencia de dos modas, es que haya dos parámetros negativos no enteros, uno en el numerador y otro en el denominador, dentro del rango de valores que toma la distribución. Además, en esos casos nos encontramos con una moda o con una antimoda en el punto siguiente en valor absoluto a dichos parámetros negativos. La moda aparece cuando para esa pareja de parámetros negativos el del numerador es

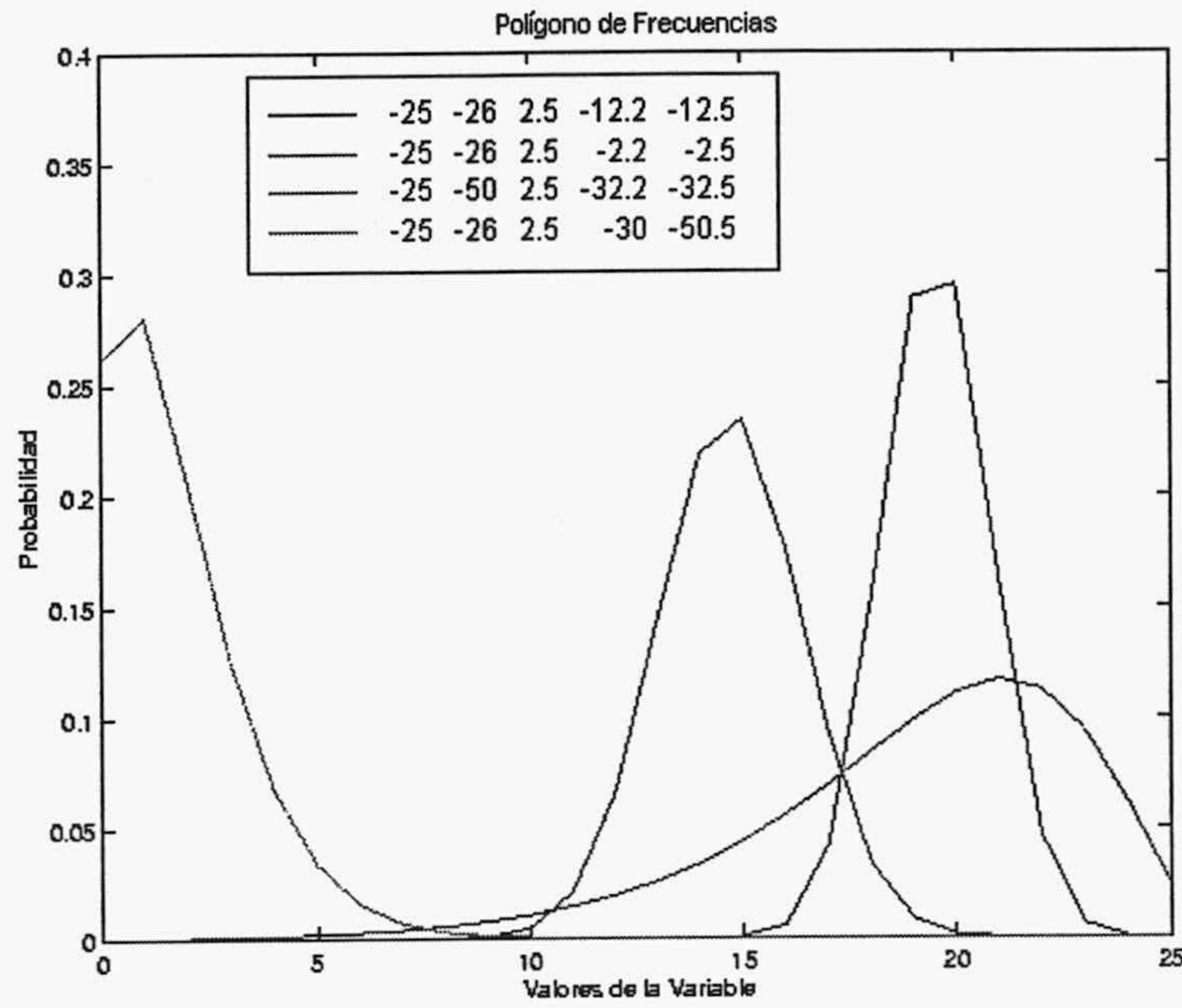


Figura 3.13: Tipo XIII ($\lambda = 1$)

Tabla 3.8: Distribuciones Tipo XIII ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -2.5, 2.8, -25.5, -2.8)	17.230	26.329	-0.52232	-0.43408
(-25, -2.5, 15.8, -25.5, -2.8)	22.907	4.3370	-1.3538	2.2229
(-25, -2.5, 2.8, -55.5, -2.8)	2.2913	4.5860	1.0032	0.57276
(-25, -12.5, 2.8, -25.5, -12.8)	17.923	28.844	-0.95999	0.35942
(-25, -2.5, 2.8, -75.5, -2.8)	1.2553	2.1674	1.5751	2.6752
(-25, -2.5, 15.8, -55.5, -2.8)	8.9419	7.6701	0.26285	-0.047995
(-25, -2.5, 15.8, -95.5, -2.8)	5.3016	4.9494	0.15221	0.17097
(-25, -12.5, 2.8, -30.5, -12.8)	7.1997	19.935	0.77892	0.17445
(-55, 32, -25.5, -95.5, -25.8)	24.503	31.206	0.033127	-0.59647
(-55, 12, -25.8, -95.5, -25.5)	12.895	21.038	0.38377	-0.011244
(-55, 12, -45.5, -55.5, -45.8)	50.069	23.361	-1.7835	3.7891
(-55, 32, -45.8, -55.5, -45.5)	51.855	8.9765	-1.1560	0.97119
(-25, -26, 2.5, -12.2, -12.5)	19.530	1.5690	-0.0079381	-0.079054
(-25, -26, 2.5, -2.2, -2.5)	14.689	2.7807	-0.0037440	-0.043944
(-25, -50, 2.5, -32.2, -32.5)	19.001	14.922	-0.95312	0.96540
(-25, -26, 2.5, -30, -50.5)	1.6828	2.5311	1.1856	1.7073

Tabla 3.9: Distribuciones Tipo I ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(1, 1, 50, 1.5, 30)	2.2354	8.3711	2.0670	5.8099
(15, 1, 50, 8.5, 30)	12.985	46.465	0.56667	0.31891
(15, 1, 50, 8.5, 37)	7.2549	26.543	0.89839	0.88565
(15, 1, 36, 8.5, 23)	10.060	34.993	0.66751	0.44918

mayor en valor absoluto que el del denominador y en el caso contrario aparece una antimoda.

- Por último, señalar la variedad de perfiles que presentan las distribuciones incluidas en esta familia.

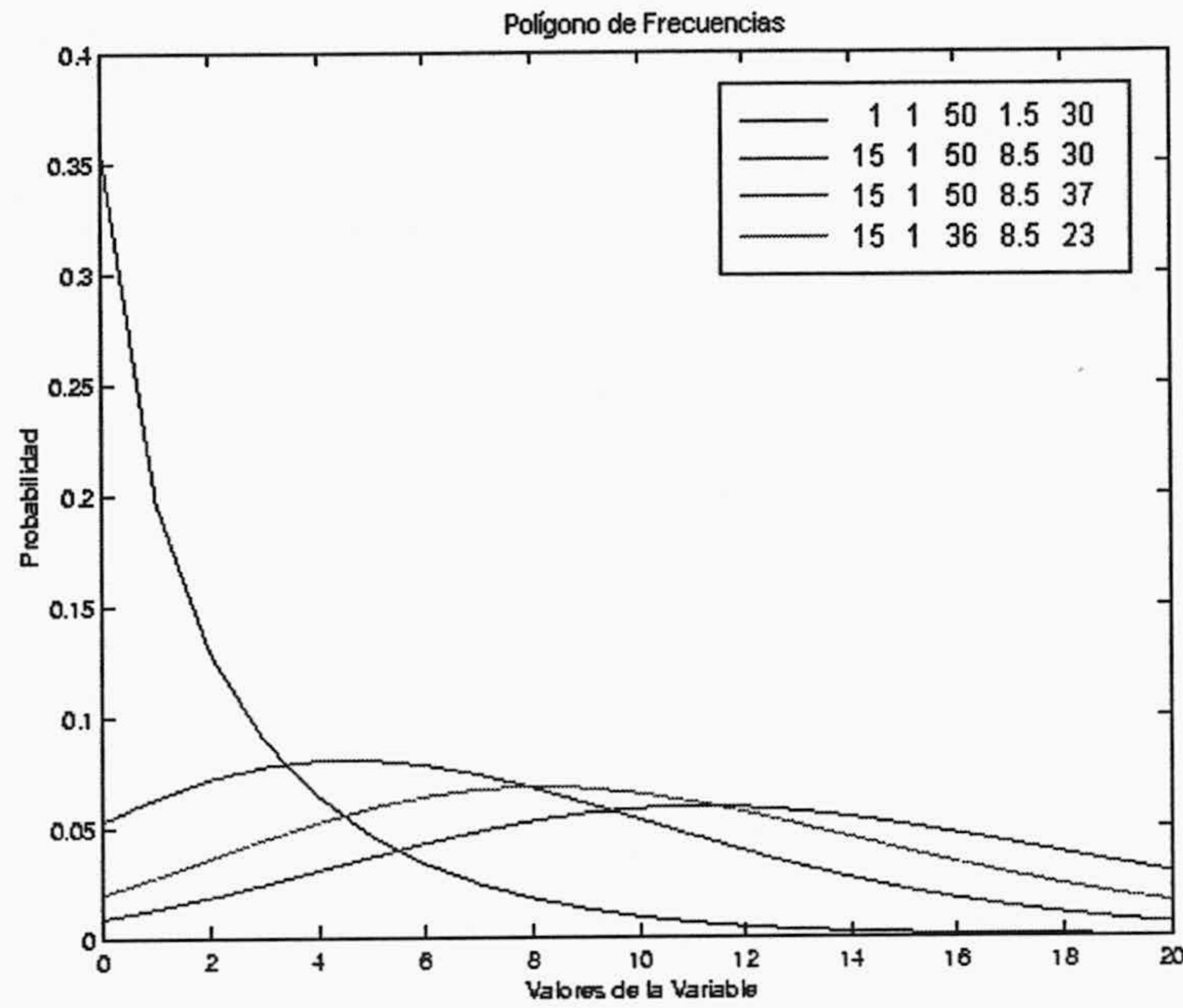
3.5.2 Familias de distribuciones para $\lambda = 1/2$

El resultado dado en el corolario 3.2 nos proporciona el valor de la función ${}_3F_2$ para una amplia clase de distribuciones en las que $\lambda = 1/2$; en concreto tenemos distribuciones del Tipo I, II, VI, VIII, XII y XIII. Además de aquellos tipos en que λ es negativo, no podemos trabajar con distribuciones del Tipo III, VII, IX y XI, porque sus parámetros no verifican las condiciones de positividad y las restricciones del corolario conjuntamente. Estas últimas son: $\gamma_1 = (1 + \alpha_1 + \alpha_2)/2$ y $\alpha_3 = \gamma_2 + n$, que tendremos en cuenta al estudiar estas distribuciones. No obstante, las distribuciones de los Tipo III y IX son de rango finito, por lo que siempre se puede obtener la función de masa de probabilidad de forma directa.

Distribuciones Tipo I

Todos los parámetros son positivos, por lo que las únicas restricciones son las ya comentadas.

En la figura 3.14 aparecen algunas poligonales cuyos perfiles van de una J traspuesta a un perfil acampanado. Esto se produce, al igual que para la subfamilia anterior al aumentar los valores dados a los parámetros del numerador o disminuir los del denominador. Presentamos también la tabla 3.9 en la que se muestran los momentos de dichas distribuciones, destacando la mayor dispersión sobre las distribuciones dadas para $\lambda = 1$, debido a que en este caso la suma de los parámetros γ_j es más pequeña que la suma de los parámetros α_i por las restricciones sobre el parámetro γ_1 y a que $\alpha_3 = \gamma_2 + n$. Esto es posible gracias a que no tiene que verificarse la condición de convergencia.

Figura 3.14: Tipo I ($\lambda = 0.5$)

Distribuciones Tipo II

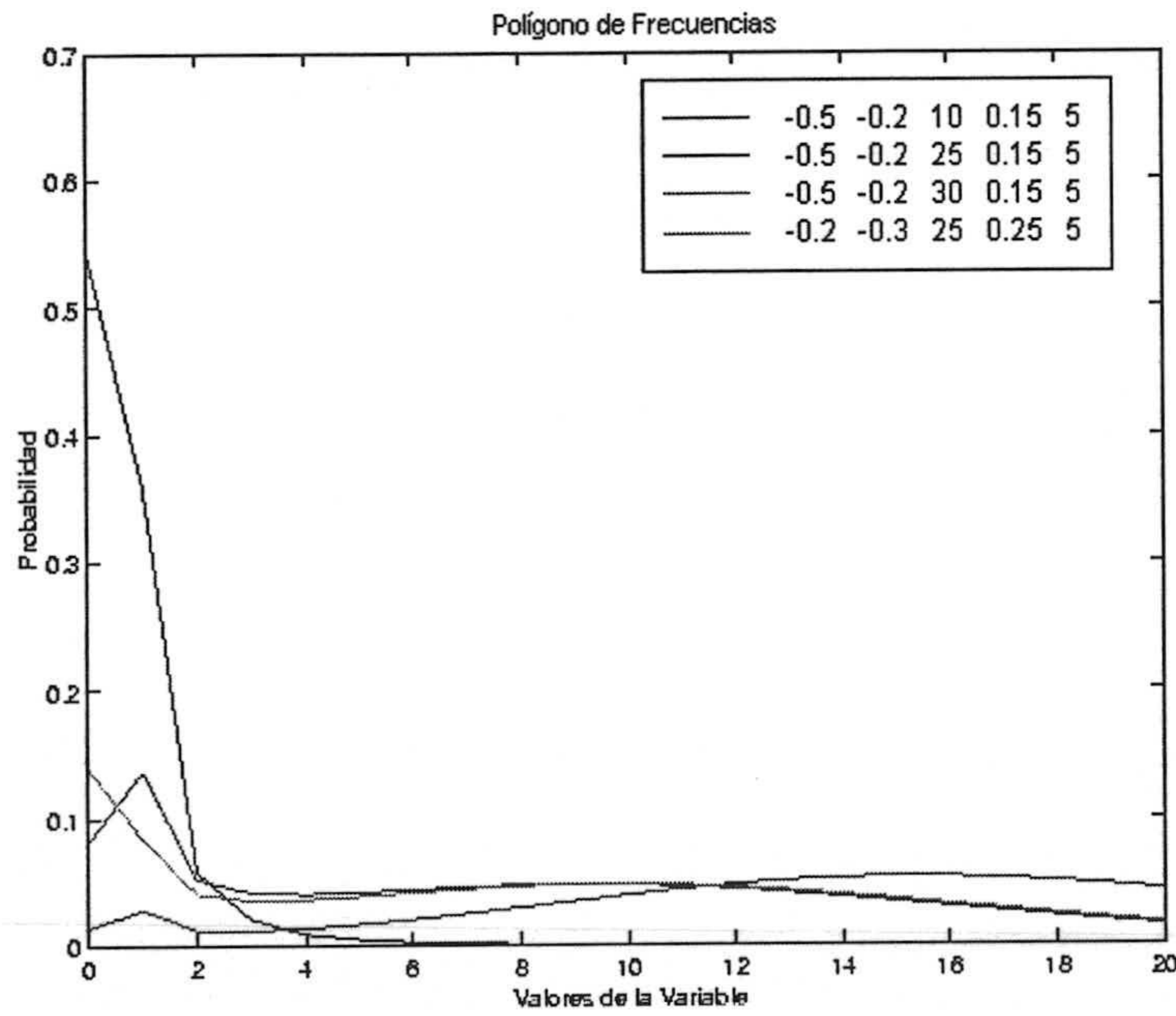
En este caso $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$, mientras que los demás parámetros son positivos. Para ello $-(\alpha_1 + \alpha_2) < 1$, por lo que $E|\alpha_1| = E|\alpha_2| = 0$.

La forma de las poligonales de las distribuciones incluidas en este tipo van de una J traspuesta con moda en cero y con la mayor parte de la probabilidad concentrada en este valor, a un perfil ligeramente cóncavo con probabilidades muy parecidas en un amplio rango de valores cuya dispersión es bastante elevada. Además para algunas de ellas se produce un hecho ciertamente curioso como es la existencia de dos modas locales, una de ellas en el punto 1, esto es el punto siguiente en valor absoluto al que presentan los parámetros negativos. Todo esto se puede apreciar tanto en la figura 3.15 como en la tabla 3.10 con los momentos de las distribuciones representadas.

Distribuciones Tipo VI

Los parámetros han de verificar que: $\alpha_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-$, y los demás son positivos, por lo que $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$. Además $E|\alpha_1| = E|\gamma_2|$.

Los perfiles de las distribuciones dependen del valor de los parámetros negativos. Así si éstos son superiores a -1, pueden presentar una moda en el cero ofreciendo un perfil de J traspuesta o presentar forma acampanada. Al aumentar el valor de dichos parámetros en valor absoluto, las probabilidades

Figura 3.15: Tipo II ($\lambda = 0.5$)

se desplazan hacia la derecha presentando los perfiles que aparecen en la figura 3.16. En ella se observa que además existen distribuciones con dos modas, existiendo en el punto 6 una moda o una antimoda, lo cual hemos visto también sucede para este mismo tipo de distribuciones con $\lambda = 1$.

En la tabla 3.11 se muestran los momentos como en los casos anteriores, observando que todas las distribuciones representadas son asimétricas a la derecha y presentan curtosis positiva. No obstante, aumentando el valor de los parámetros las distribuciones se desplazan hacia la derecha presentando asimetría a la izquierda.

Tabla 3.10: Distribuciones Tipo II ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-0.5, -0.2, 10, 0.15, 5)	0.63725	0.93043	3.2405	19.496
(-0.5, -0.2, 25, 0.15, 5)	8.6382	48.240	0.67961	-0.56750
(-0.5, -0.2, 30, 0.15, 5)	15.808	60.502	0.21186	0.015075
(-0.3, -0.2, 25, 0.25, 5)	8.9089	51.340	0.59165	-0.19196

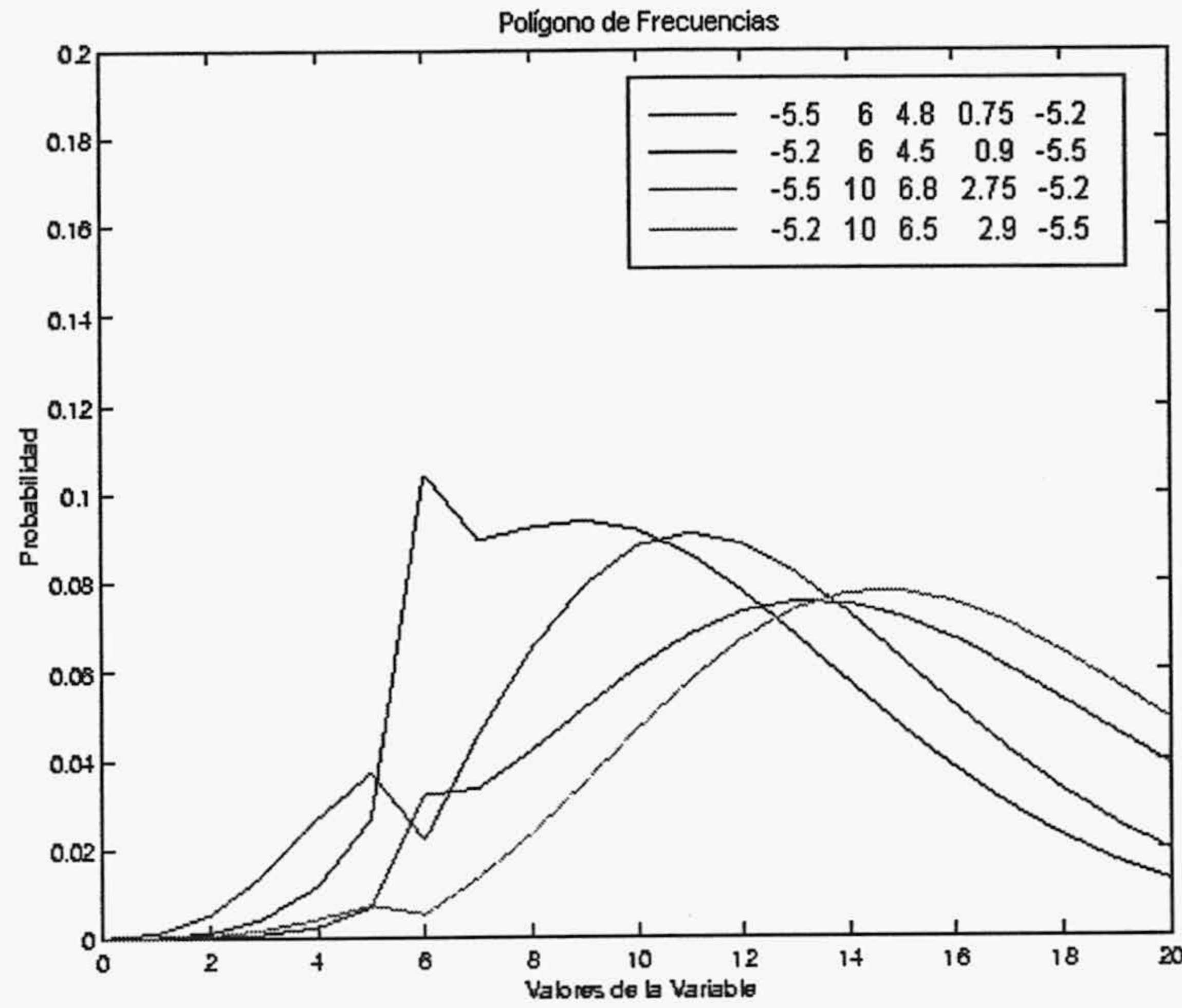


Figura 3.16: Tipo VI ($\lambda = 0.5$)

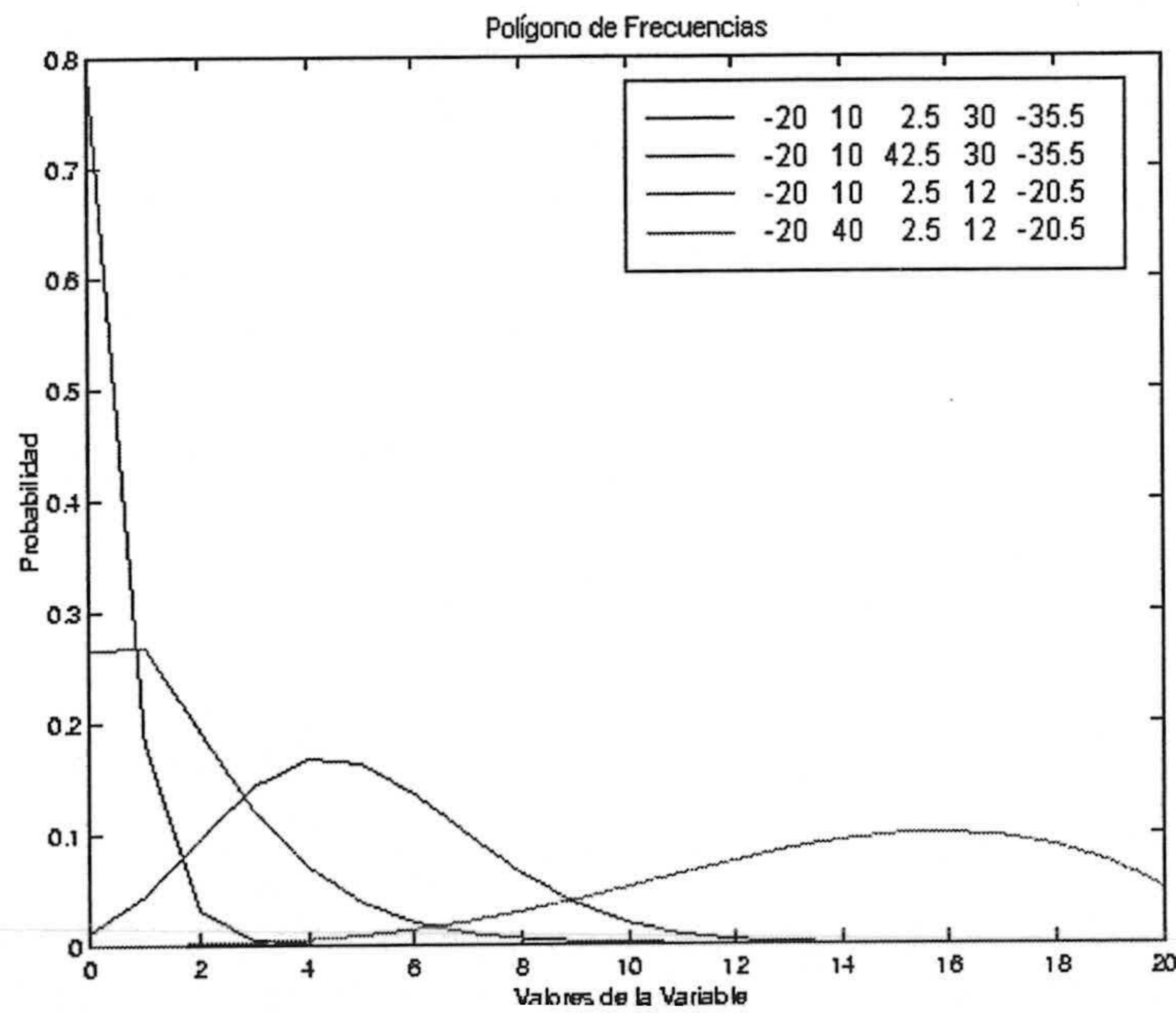
Distribuciones Tipo VIII

Se tiene que: $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$, $\gamma_2 < 0$ con $|\gamma_2| > |\alpha_1| - 1$, y $\alpha_2, \gamma_2 + n, \gamma_1 > 0$. Por tanto son distribuciones de rango finito, y no tendremos en cuenta las restricciones sobre los parámetros, salvo aquellos que nos aseguren la positividad de los valores de las funciones de masa de probabilidad.

En consecuencia hemos podido considerar los mismos parámetros que para las distribuciones con $\lambda = 1$. Así, para las distribuciones dadas en la figura 3.7 se han obtenido las poligonales que aparecen en la figura 3.17 observando que éstas últimas se han desplazado hacia la izquierda con respecto a las anteriores, debido a que al ser $\lambda = 0.5$ la convergencia se produce antes. Las formas de dichas poligonales son similares a las ya comentadas para el

Tabla 3.11: Distribuciones Tipo VI ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-5.5, 6, 4.8, 0.75, -5.2)	10.974	18.603	0.84879	0.82917
(-5.2, 6, 4.5, 0.9, -5.5)	12.115	22.316	0.45945	0.46804
(-5.5, 10, 6.8, 2.75, -5.2)	14.704	28.628	0.58758	0.38440
(-5.2, 10, 6.5, 2.9, -5.5)	14.082	28.484	0.50685	0.49617

Figura 3.17: Tipo VIII ($\lambda = 0.5$)

caso $\lambda = 1$.

En la tabla 3.12 mostramos sus momentos más significativos.

Distribuciones Tipo IX

Los parámetros del numerador son todos negativos con alguno de ellos entero (se ha considerado $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$), y uno de los del denominador es positivo y el otro negativo.

Procediendo de igual forma que en el Tipo VIII se ha observado un comportamiento similar, esto es, para los mismos parámetros α_i, γ_j las distribuciones con $\lambda = 0.5$ están más desplazadas a la izquierda que con $\lambda = 1$. Las distribuciones tienen así forma de J traspuesta o acampanada.

Tabla 3.12: Distribuciones Tipo VIII ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-20, 10, 2.5, 30, -35.5)	0.26315	0.29522	2.2917	6.1990
(-20, 10, 42.5, 30, -35.5)	4.8960	5.4683	0.43527	0.062153
(-20, 10, 2.5, 12, -20.5)	1.7930	3.1880	1.4385	2.9393
(-20, 40, 2.5, 12, -20.5)	14.153	14.030	-0.52206	-0.25442

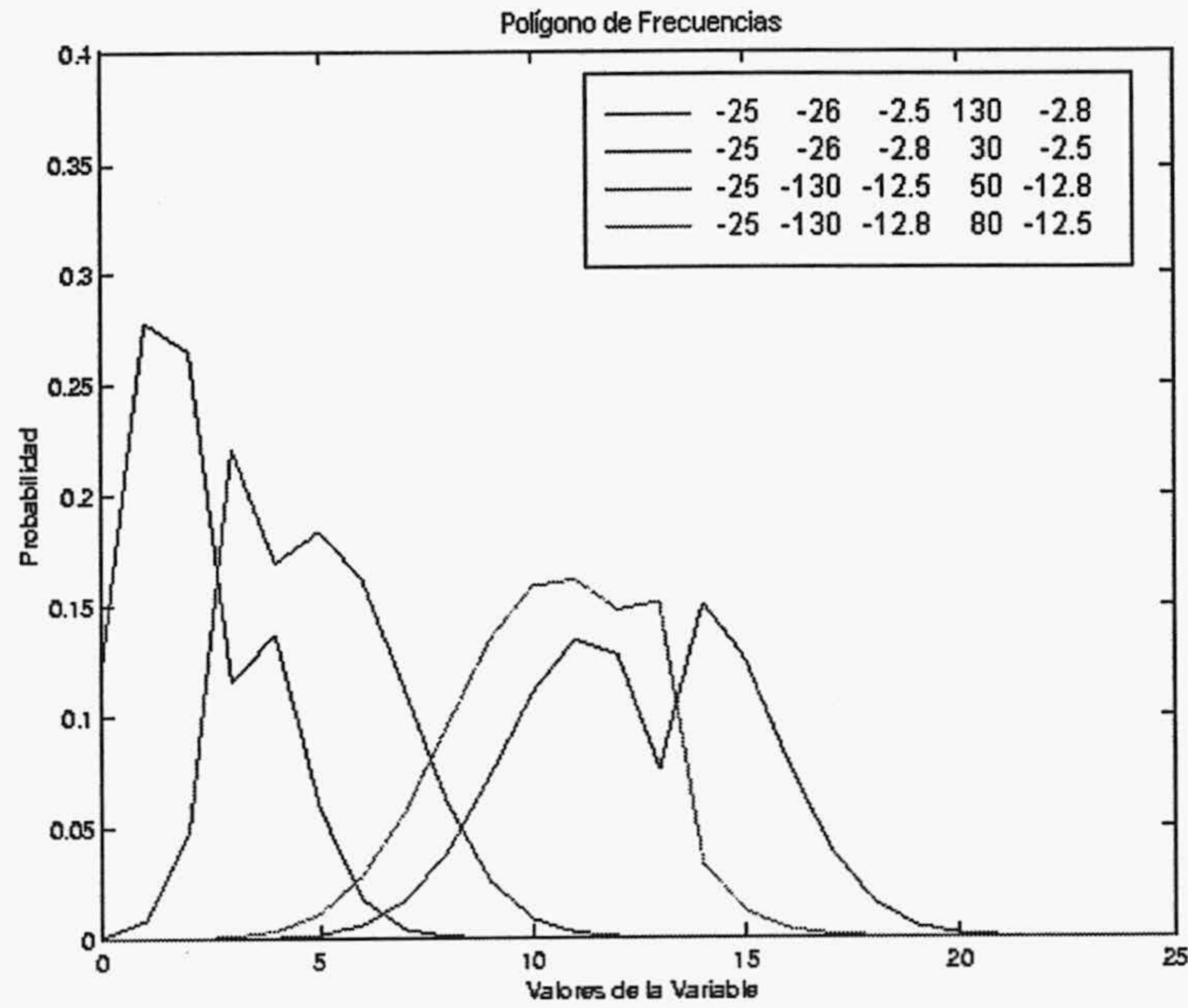


Figura 3.18: Tipo IX ($\lambda = 0.5$)

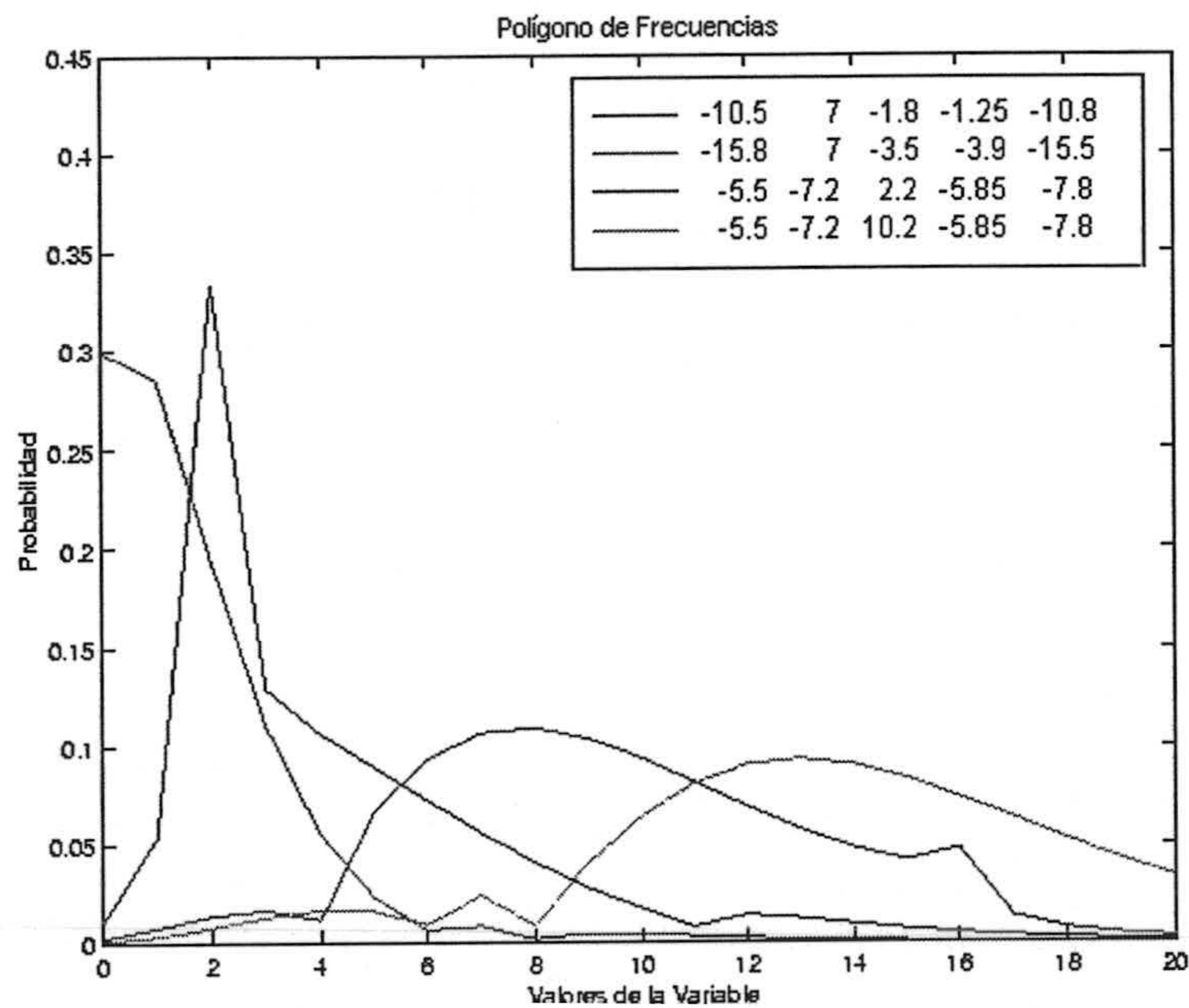
Para obtener distribuciones con dos modas ha sido necesario modificar los parámetros respecto a los ejemplos mostrados en la subfamilia $\lambda = 1$. Éstas se muestran en la figura 3.18, en las que existen una moda o una antimoda en los puntos 3 ó 13 dependiendo de los parámetros negativos no enteros, como ya sucedía con las distribuciones en que $\lambda = 1$. Los momentos de dichas distribuciones están en la tabla 3.13.

Distribuciones Tipo XII

Sólo hay un parámetro positivo entre los del numerador que vamos a considerar que es α_2 o bien $\gamma_2 + n$, siendo todos los demás parámetros negativos no enteros. Se han de verificar las condiciones dadas en la tabla 3.1 para

Tabla 3.13: Distribuciones Tipo IX ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -26, -2.5, 130, -2.8)	2.1339	2.3535	0.65034	-0.15733
(-25, -26, -2.8, 30, -2.5)	4.9359	3.5014	0.43861	-0.25043
(-25, -130, -12.5, 50, -12.8)	12.541	7.2747	-0.051446	-0.57415
(-25, -130, -12.8, 80, -12.5)	10.444	4.8837	-0.26280	-0.21710

Figura 3.19: Tipo XII ($\lambda = 0.5$)

obtener probabilidades positivas.

Este tipo de distribuciones puede llegar a presentar 3 modas como sucede en los gráficos que aparecen en la figura 3.19. El comportamiento de dichas distribuciones, por lo tanto difiere de los observados hasta ahora. Las dos últimas distribuciones presentan dos antimodas, en los puntos 6 y 8 (esto es, en aquellos puntos cuyo valor es el siguiente en valor absoluto al de los parámetros negativos de la distribución), mientras que la primera y la segunda presentan una moda y una antimoda (en los puntos 2 y 11, 16 y 4 respectivamente). Como ya se apuntó, la moda aparece cuando para cada pareja de parámetros negativos con la misma parte entera el del numerador es mayor en valor absoluto que el del denominador, y la antimoda en el caso contrario.

Distribuciones Tipo XIII

Hay 4 parámetros negativos, dos en el numerador y otros dos en el denominador, con $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$ y $\gamma_2 + n > 0$. Las restricciones debidas a la condición de positividad son las que aparecen en la tabla 3.1.

Hemos considerado distribuciones con los mismos parámetros que aquellas que presentábamos en la subfamilia $\lambda = 1$, y al igual que sucede con los Tipos VIII y IX las distribuciones se desplazan hacia la izquierda. No presentamos ningún gráfico puesto que no aparece ninguna característica de

Tabla 3.14: Distribuciones Tipo XII ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-10.5, 7, -1.8, -1.25, -10.8)	4.4412	11.571	1.7731	3.7784
(-15.8, 7, -3.5, -3.9, -15.5)	9.6054	14.282	0.35678	0.066797
(-5.5, -7.2, 2.2, -5.85, -7.8)	1.6353	3.727	2.7131	12.06
(-5.5, -7.2, 10.2, -5.85, -7.8)	14.091	25.005	0.17142	0.68175

especial interés (las formas que presentan son similares a las de la subfamilia $\lambda = 1$).

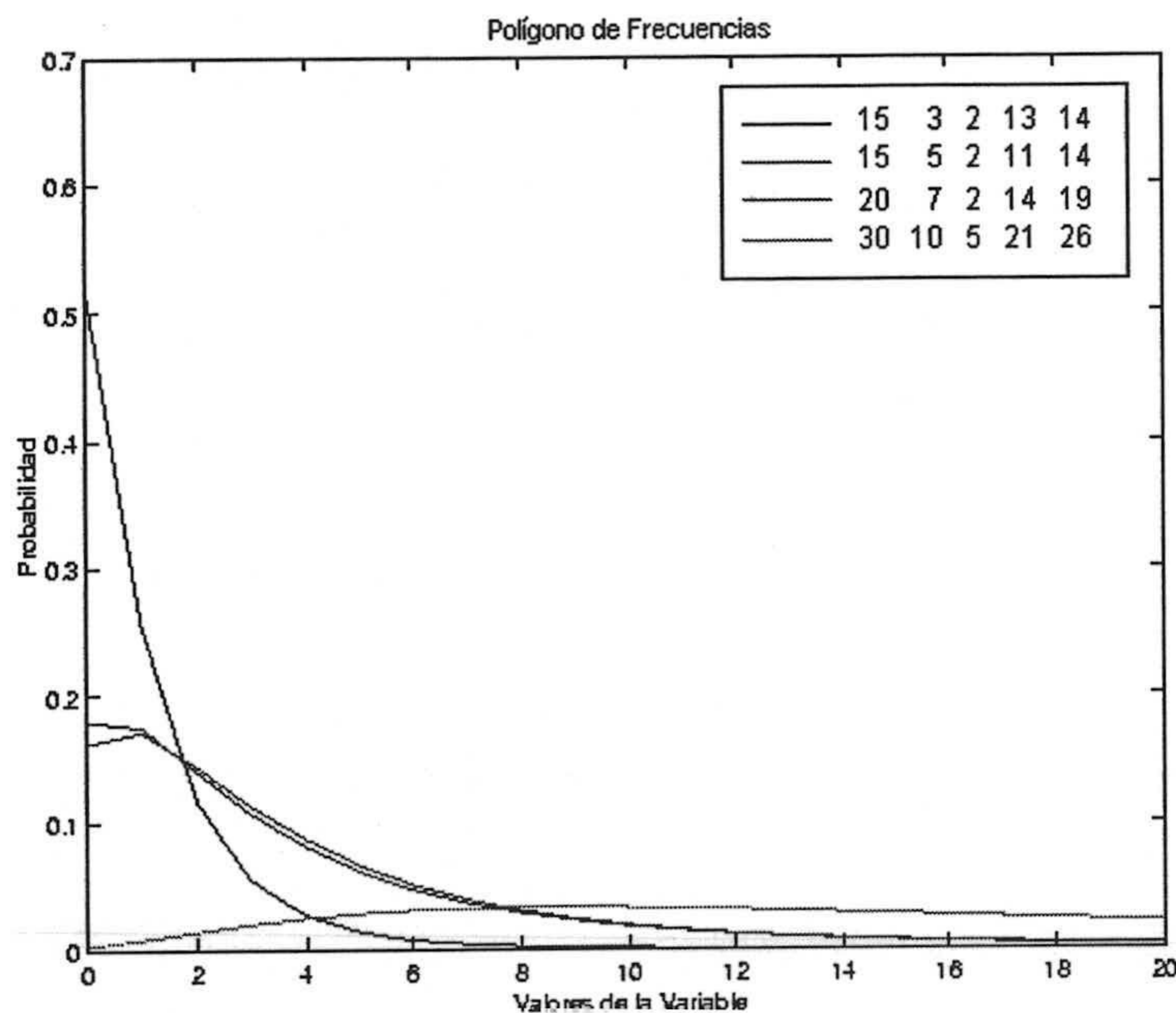
Podemos concluir, por tanto, que el comportamiento de esta familia de distribuciones es similar al de la familia de distribuciones con $\lambda = 1$. Sólomente se han encontrado poligonales diferentes dentro del Tipo II, en el que existen distribuciones con dos modas, y en el Tipo XII, donde hay distribuciones con tres modas.

3.5.3 Otros resultados de sumación

Además de los resultados anteriores que nos permiten sumar una amplia clase de funciones hipergeométricas del tipo ${}_3F_2$, se han revisado otros resultados que aparecen en la literatura, si bien no todos nos son útiles, pues o bien los parámetros no verifican las condiciones necesarias y suficientes para que dichas funciones proporcionen f.m.p., o bien no aportan ninguna ventaja.

Por ejemplo, existen diversos resultados en los que $\lambda = -1$, pero como hemos visto en la tabla 3.1, cuando $\lambda < 0$, la distribución asociada es de rango finito, y el valor de la ${}_3F_2$ se calcula sin problema al ser una suma finita. Por lo tanto nos vamos a limitar a aquellos resultados que nos interesan.

Otros resultados que nos permiten obtener el valor de la función hipergeométrica para $\lambda = 1$ son los teoremas de Dixon, Watson y Whipple cuyas expresiones eran (2.22), (2.23) y (2.24). Tienen la desventaja de que ninguno de ellos nos permite calcular la esperanza de las distribuciones asociadas, dado que los parámetros de la serie derivada no cumplen las condiciones de dichos teoremas. Esto imposibilita emplear la relación de recurrencia para el resto de los momentos, a diferencia de lo que ocurre con el resultado antes desarrollado. De partida sólo nos interesan aquellos tipos de distribuciones con rango infinito, pues para las que tienen un rango finito de valores podemos obtener su f.m.p. directamente.

Figura 3.20: Tipo I (T^a de Dixon)

Teorema de Dixon

Los parámetros son de la forma $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1 = 1 + \alpha_1 - \alpha_2, \gamma_2 = 1 + \alpha_1 - \alpha_3$, con $\alpha_1 + 2(1 - \alpha_2 - \alpha_3) > 0$. Además $\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2 \notin \mathbb{Z}^-$, puesto que la función gamma no está definida en los enteros negativos y dicha función aparece evaluada en esos parámetros en la expresión (2.22).

Así, de los tipos en que las distribuciones son de rango infinito y $\lambda = 1$ (esto es, Tipos I, II, VI, VII y XII), no podemos usar este teorema en el Tipo VII, pues los parámetros no cumplen las restricciones anteriores y las condiciones de positividad. Como muestra se presenta la figura 3.20 correspondiente a distribuciones del Tipo I. Los perfiles que se han encontrado van desde una J traspuesta hasta una forma acampanada.

Teorema de Watson

Los parámetros del denominador son de la forma $\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)/2, \gamma_2 = 2\alpha_3$, con $1 - \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 > 0$.

Al igual que el resultado anterior sólo se puede utilizar con distribuciones de los Tipos I, II, VI y XII, en muchos de ellos con condiciones muy restrictivas sobre los parámetros. Los perfiles de las poligonales representadas son, como para los casos anteriores, acampanados o bien con forma de J traspuesta. La figura 3.21 muestra también distribuciones del Tipo I.

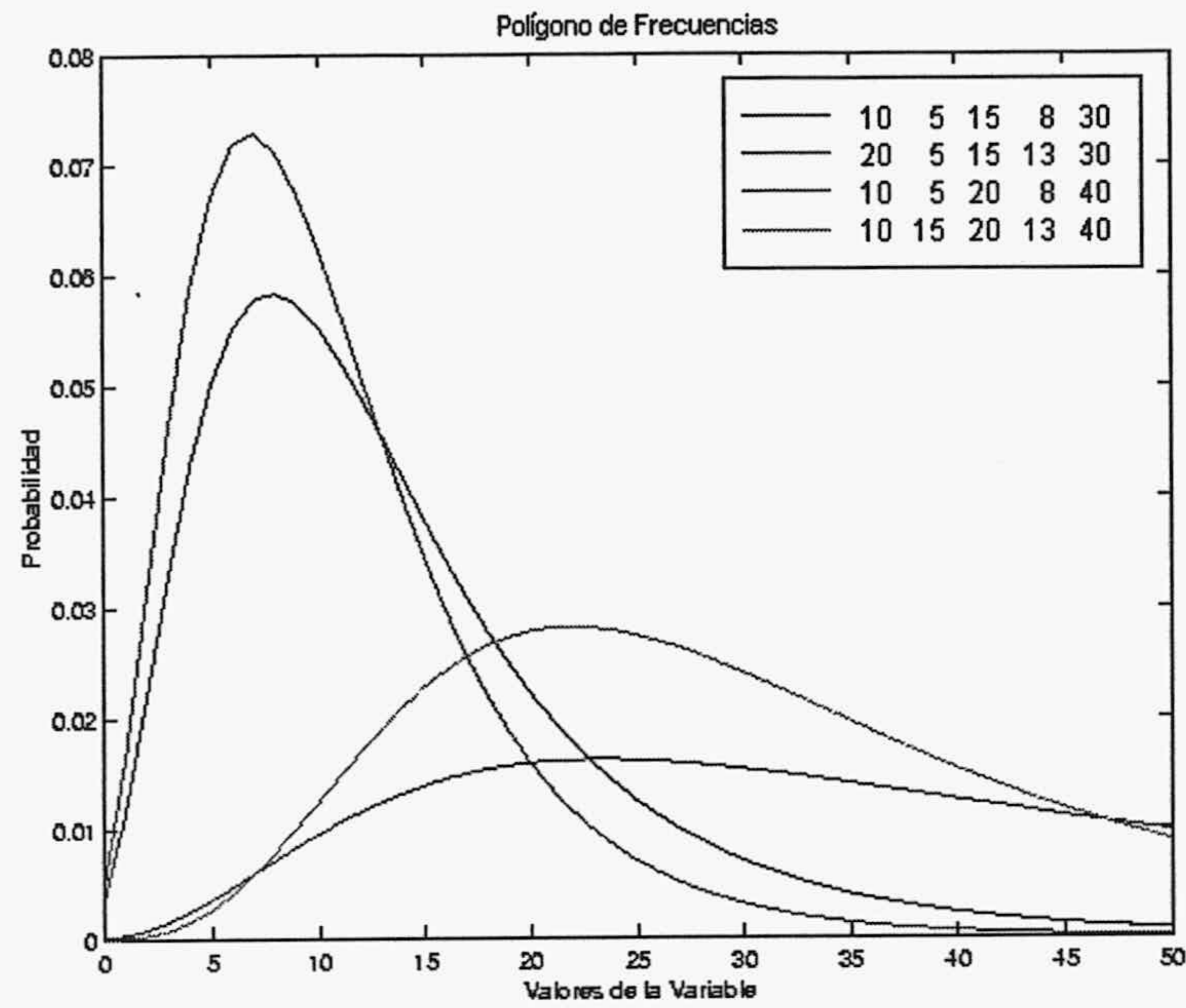


Figura 3.21: Tipo I (T^a de Watson)

Teorema de Whipple

Y por último el teorema de Whipple sólo se puede aplicar a distribuciones de los tipos I y VI, siendo los parámetros de la forma $\alpha_1, 1-\alpha_1, \alpha_2; \gamma, 1+2\alpha_2-\gamma$, con $\alpha_2 > 0$.



Capítulo 4

Generación mediante funciones ${}_{p+1}F_p$ de cualquier orden

4.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos estudiado la familia de distribuciones que se obtienen como solución de una ecuación en diferencias en el que los coeficientes son polinomios de grado tres. Dichas soluciones vienen dadas en término de funciones hipergeométricas ${}_3F_2$, primera extensión univariante natural de la función hipergeométrica de Gauss. Si continuamos el proceso de generalización, tiene sentido estudiar la familia de distribuciones discretas de Pearson que viene expresada como solución de la ecuación en diferencias (2.1) cuando los coeficientes son polinomios de cualquier orden, por ejemplo $p + 1$, siempre que sea el mismo para ambos y el primer polinomio tenga una raíz en el punto -1 . En este caso la función de masa de probabilidad puede expresarse en términos de funciones hipergeométricas ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$, y de este modo, los casos anteriores se traducen en situaciones particulares con $p = 1$ (función de Gauss) ó $p = 2$.

En este proceso, hemos creído de interés hacer una parada en el caso $p = 3$, esto es, tomando como funciones L y G polinomios de orden cuatro, siendo una de las raíces de G el valor -1 , lo que conduce a soluciones expresadas en términos de la función hipergeométrica ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$, en donde se pueden adivinar pautas de comportamiento que siguen todas las distribuciones de estas características. La metodología empleada es similar a la utilizada en el estudio de la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$. Así, tras enunciar las propiedades derivadas de la aplicación de los resultados dados en el capítulo 2, se ha realizado una clasificación de las distribuciones atendiendo a los valores admisibles para los parámetros. A continuación se presenta un resultado parcial de sumación, desarrollado a partir del teorema

3.1, el cual nos permite calcular las probabilidades y los momentos de una amplia subfamilia de distribuciones. Gracias, por tanto a dicho resultado, se muestran distintas distribuciones mediante la representación gráfica de la poligonal de frecuencias de la f.m.p., y a través de sus momentos más significativos.

Para terminar con el estudio de la generalización univariante natural de la función de Gauss, desarrollamos la familia de distribuciones generadas por la función ${}_{p+1}F_p$. Así, junto al estudio probabilístico global, hemos podido desarrollar una generalización del resultado parcial de sumación, del cual pueden verse los anteriores como casos particulares, y que ha sido implementado en el ordenador para el cálculo de la función de masa de probabilidad, momentos y representación gráfica de una amplia clase de distribuciones obtenidas para cualquier valor del parámetro p .

4.2 Distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$

Consideremos ahora las funciones G y L como los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} G(r) &= (\gamma_1 + r)(\gamma_2 + r)(\gamma_3 + r)(r + 1) \\ L(r) &= (\alpha_1 + r)(\alpha_2 + r)(\alpha_3 + r)(\alpha_4 + r)\lambda \end{aligned} \quad (4.1)$$

con $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4; \gamma_j, j = 1, 2, 3$ y λ reales, en principio, cualesquiera.

Aplicando (2.2), la solución de la ecuación en diferencias (2.1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\alpha_4)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!} \quad (4.2)$$

Para que la función (4.2) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las condiciones del teorema 2.1, esto es,

1. Condición de positividad. Esta condición va a imponer unas restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$, que detallaremos en la clasificación presentada para estas distribuciones, y de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\alpha_4)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!}$$

que es la función $f_0 \{ {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) - 1 \}$. Como esta función es un caso particular de las funciones ${}_pF_q$, será convergente cuando los parámetros cumplan las siguientes restricciones:

- (a) como $p = q + 1$, converge $\forall |\lambda| < 1$.
- (b) para $|\lambda| = 1$, llamando $\omega = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ se tiene que
- i. si $\omega > 0$, entonces es absolutamente convergente.
 - ii. si $-1 < \omega \leq 0$, es condicionalmente convergente.
 - iii. si $\omega \leq -1$, es divergente.

3. Condición de normalización

$$f_0 = {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)^{-1}$$

4.2.1 Funciones generatrices

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (4.2) es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\alpha_4)_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!}$$

esto es,

$$g(t) = \frac{{}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda t)}{{}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)} \quad (4.3)$$

y para que exista, debe ser convergente para $|t| \leq 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o $|\lambda| = 1$ y $\sum_j \gamma_j - \sum_i \alpha_i > 0$.

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica ${}_4F_3$, que es una extensión univariante de la conocida función hipergeométrica de Gauss, ${}_2F_1$.

Para aplicar el teorema 2.2 es necesario expresar G en función de $r + 1$, esto es,

$$G(r) = \sum_{i=0}^4 b_i (r + 1)^i$$

por lo que los coeficientes b_i serán:

$$b_4 = 1$$

$$b_3 = \sum_{i=1}^3 (\gamma_i - 1)$$

$$b_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 (\gamma_i - 1)(\gamma_j - 1)$$

$$b_1 = (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1)$$

$$b_0 = 0$$

En el caso de

$$L(r) = \sum_{i=0}^4 a_i r^i$$

se tienen los siguientes valores para los coeficientes a_i ,

$$a_4 = \lambda$$

$$a_3 = \lambda \sum_{i=1}^4 \alpha_i$$

$$a_2 = \lambda \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \alpha_i \alpha_j$$

$$a_1 = \lambda \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^4 \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

$$a_0 = \lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

Así, la función generatriz de probabilidad verifica la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda t \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 g(t) &= (1 - \lambda t) \theta^4 g(t) + \left[\sum_{i=1}^3 (\gamma_i - 1) - \lambda t \sum_{i=1}^4 \alpha_i \right] \theta^3 g(t) + \\ &+ \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 (\gamma_i - 1)(\gamma_j - 1) - \lambda t \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \alpha_i \alpha_j \right] \theta^2 g(t) + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) - \lambda t \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^4 \alpha_i \alpha_j \alpha_k \right] \theta g(t) \end{aligned}$$

De igual forma, la función generatriz de momentos verifica la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda e^t \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 M(t) &= (1 - \lambda e^t) D^4 M(t) + \left[\sum_{i=1}^3 (\gamma_i - 1) - \lambda e^t \sum_{i=1}^4 \alpha_i \right] D^3 M(t) + \\ &+ \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 (\gamma_i - 1)(\gamma_j - 1) - \lambda e^t \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \alpha_i \alpha_j \right] D^2 M(t) + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) - \lambda e^t \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^4 \alpha_i \alpha_j \alpha_k \right] D M(t) \end{aligned}$$

y la función característica verificaría:

$$\begin{aligned} \lambda e^{it} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \phi(t) &= (1 - \lambda e^{it}) \theta_i^4 \phi(t) + \left[\sum_{i=1}^3 (\gamma_i - 1) - \lambda e^{it} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \right] \theta_i^3 \phi(t) + \\ &+ \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 (\gamma_i - 1)(\gamma_j - 1) - \lambda e^{it} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \alpha_i \alpha_j \right] \theta_i^2 \phi(t) + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) - \lambda e^{it} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^4 \alpha_i \alpha_j \alpha_k \right] \theta_i \phi(t) \end{aligned}$$

4.2.2 Relación de recurrencia entre los momentos

Si aplicamos el resultado dado en el teorema 2.3 a la familia de distribuciones generadas por la ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$, nos encontramos con la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} &b_4 \mu'_{4+h} + b_3 \mu'_{3+h} + b_2 \mu'_{2+h} + b_1 \mu'_{1+h} = \\ &= \sum_{m=0}^h \binom{h}{m} \{ a_4 \mu'_{4+m} + a_3 \mu'_{3+m} + a_2 \mu'_{2+m} + a_1 \mu'_{1+m} + a_0 \mu'_m \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde a_i y b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, para distintos valores de h se obtienen relaciones como la siguiente en que $h = 0$ y $\lambda = 1$:

$$(b_3 - a_3) \mu'_3 + (b_2 - a_2) \mu'_2 + (b_1 - a_1) \mu - a_0 = 0$$

de forma que si se conocen los dos primeros momentos, se puede obtener el tercero a partir de la expresión anterior, y de ahí los siguientes momentos. En ese sentido, las expresiones de la media y del momento no centrado de orden 2 son:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\prod_{i=1}^4 \alpha_i \lambda \, {}_4F_3(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1, \alpha_4 + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1, \gamma_3 + 1; \lambda)}{\prod_{i=1}^3 \gamma_i \, {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)} \\ \mu'_2 &= \mu + \\ &+ \frac{\prod_{i=1}^4 (\alpha_i)_2 \lambda^2 \, {}_4F_3(\alpha_1 + 2, \alpha_2 + 2, \alpha_3 + 2, \alpha_4 + 2; \gamma_1 + 2, \gamma_2 + 2, \gamma_3 + 2; \lambda)}{\prod_{i=1}^3 (\gamma_i)_2 \, {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

El problema, como ya ocurría anteriormente, es que no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica,

por lo que no se pueden calcular los valores explícitos de (4.5), ni de la constante f_0 . No obstante, por la generalización del teorema 3.1 hemos conseguido un resultado que se puede aplicar a una amplia clase de distribuciones dentro de esta familia, como veremos en los apartados 4.2.4 y 4.2.5.

4.2.3 Clasificación

Vamos a clasificar la función masa de probabilidad de acuerdo a los posibles valores de los parámetros en los tipos que aparecen en la tabla 4.1. Dicha clasificación es similar a la llevada a cabo para la familia de distribuciones generada por la función ${}_3F_2$.

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
A) $\gamma_i > 0, i = 1, 2, 3$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\alpha_j > 0, j = 1, 2, 3, 4$	$\sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1)$	$[0, \infty)$	I
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k, \alpha_l \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \alpha_l \quad y \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	II
$\alpha_j \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-, j = 1, 2, 3, 4$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \alpha_l \quad y \\ E \alpha_m = E \alpha_n \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right\} y$	$[0, \infty)$	III
	$\sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1)$		
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$ \alpha_l > \alpha_k - 1$	$[0, \alpha_k]$	IV

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n < 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_m = E \alpha_n \quad y \\ \alpha_l > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \text{ ó } \left. \begin{array}{l} \\ \alpha_l , \alpha_m , \alpha_n > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	V
(iii) $0 > \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$		$[0, \alpha_k]$	VI
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad \text{ó} \\ \alpha_l , \alpha_m > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	VII
B) $\boxed{\begin{array}{l} \gamma_i, \gamma_j > 0, \gamma_h < 0 \\ h, i, j = 1, 2, 3; \\ h \neq i \neq j \end{array}}$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	VIII
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right\} y \left. \begin{array}{l} \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	IX

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$ \gamma_h > \alpha_k - 1$	$[0, \alpha_k]$	X
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$ $\left. \begin{array}{l} E \gamma_h = E \alpha_l \quad y \\ \alpha_m > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$ $ \alpha_l , \alpha_m , \gamma_h > \alpha_k - 1$	$[0, \alpha_k]$	XI
(iii) $0 > \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_h \quad \acute{o} \\ \alpha_l , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XII
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n < 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_m = E \alpha_n \end{array} \right\} \acute{o}$ $\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_m , \alpha_n > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$ $\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \alpha_n , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$ $\left. \begin{array}{l} \alpha_p , \gamma_h > \alpha_k - 1 \\ p = l, m, n \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XIII

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$C) \begin{cases} \gamma_i > 0, \gamma_j, \gamma_h < 0 \\ h, i, j = 1, 2, 3; \\ h \neq i \neq j \end{cases}$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\alpha_j > 0, j = 1, 2, 3, 4$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	XIV
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k, \alpha_l \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_k = E \alpha_l \end{array} \right\} \acute{o} \\ \left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \gamma_j \end{array} \right\} \end{array} \right\} y$ $\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	XV
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_k = E \alpha_l \quad y \\ E \alpha_m = E \alpha_n \end{array} \right\} \acute{o} \\ \left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \gamma_j \quad y \\ E \alpha_m = E \alpha_n \end{array} \right\} \end{array} \right\} y$ $\left. \begin{array}{l} k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\}$	$[0, \infty)$	XVI
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_l > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o} \\ \left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_j \quad y \\ \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o} \\ \alpha_l , \gamma_j , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XVII

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n < 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \alpha_n > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$	$[0, \alpha_k]$	XVIII
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \alpha_l \quad y \\ E \gamma_h = E \alpha_m \quad y \\ \alpha_n > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \alpha_l \quad y \\ E \alpha_m = E \alpha_n \quad y \\ \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_l , \alpha_m , \alpha_n > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \alpha_l \quad y \\ \alpha_m , \alpha_n , \gamma_h > \alpha_k - 1 \\ \alpha_p , \gamma_j , \gamma_h > \alpha_k - 1 \\ p = l, m, n \end{array} \right\} \acute{o}$		

(iii) $0 > \lambda$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad \acute{o} \\ \gamma_j , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XIX
--	---	-------------------	-----

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \end{array} \right\} \acute{o}$	$[0, \alpha_k]$	XX
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \alpha_l \quad y \\ E \gamma_h = E \alpha_m \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_l , \alpha_m > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \gamma_j , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \alpha_l \quad y \\ \alpha_m , \gamma_h > \alpha_k - 1 \\ \alpha_l , \alpha_m , \gamma_j , \gamma_h > \alpha_k - 1 \end{array} \right\} \acute{o}$		

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
D) $\gamma_i < 0, \quad i = 1, 2, 3$			
(i) $0 < \lambda \leq 1$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \left. \left. \begin{array}{l} E \alpha_k = E \gamma_h \quad y \\ E \gamma_i = E \gamma_j \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\} y \right\}$	$[0, \infty)$	XXI
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \left. \left. \left. \left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_k = E \gamma_i \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \\ E \gamma_h = E \alpha_k \quad y \\ E \gamma_i = E \alpha_l \quad y \\ E \gamma_j = E \alpha_m \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \\ \sum_{i=1}^3 \gamma_i > \sum_{j=1}^4 \alpha_j \quad (\lambda = 1) \end{array} \right\} \delta \right\} y \right\}$	$[0, \infty)$	XXII
(ii) $0 < \lambda$			
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \left. \left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \\ \gamma_i > \alpha_k - 1; i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \delta \right\}$	$[0, \alpha_k]$	XXIII

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m < 0; \\ \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$	$[0, \alpha_k]$	XXIV
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_h = E \alpha_l \quad y \\ E \gamma_j = E \alpha_m \quad y \\ \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_l , \alpha_m , \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_h = E \alpha_l \quad y \\ \alpha_m , \gamma_i , \gamma_j > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} \alpha_l , \alpha_m , \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$		
(iii) $0 > \lambda$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \gamma_i = E \alpha_l \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$	$[0, \alpha_k]$	XXV
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-, \alpha_l < 0; \\ \alpha_m, \alpha_n > 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_h = E \alpha_l \quad y \\ \gamma_i , \gamma_j > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_l , \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$ \alpha_l , \gamma_i > \alpha_k - 1; i = 1, 2, 3$		

Tabla 4.1: Tipos de distribuciones para la ${}_4F_3$ (continuación)

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_l, \alpha_m, \alpha_n < 0; \\ k, l, m, n = 1, 2, 3, 4; \\ k \neq l \neq m \neq n \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \gamma_i \quad y \\ E \alpha_m = E \alpha_n \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$	$[0, \alpha_k]$	XXVI
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_p = E \gamma_i \\ p = l, m, n; i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_l = E \gamma_i \quad y \\ \alpha_m , \alpha_n > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_h \quad y \\ E \alpha_m = E \gamma_i \quad y \\ \alpha_n , \gamma_j > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ E \alpha_n = E \gamma_h \quad y \\ \gamma_i , \gamma_j > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \gamma_j = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_p , \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \\ p = l, m, n \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \gamma_h \quad y \\ \alpha_m , \alpha_n , \gamma_i , \gamma_j > \alpha_k - 1 \\ h, i, j = 1, 2, 3; h \neq i \neq j \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_l = E \alpha_m \quad y \\ \alpha_n , \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \acute{o}$		
	$\left. \begin{array}{l} \alpha_p , \gamma_i > \alpha_k - 1 \\ p = l, m, n; i = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \acute{o}$		

Por otra parte, como ya se ha señalado, la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ está englobada en la familia generada por la ${}_4F_3$, por lo que se puede analizar la relación existente entre los tipos de distribuciones de ambas familias. Así, en la tabla 4.2 se muestran los tipos de la ${}_3F_2$ que quedan incluidos en los tipos de la ${}_4F_3$.

Tabla 4.2: Relación entre tipos de distribuciones

${}_3F_2$	${}_4F_3$
I	I, VIII
II	II, IX
III	IV, XI
IV	VI, XII
V	VII, XIII
VI	VIII, XV
VII	IX, XVI
VIII	X, XVII
IX	XI, XVIII
X	XII, XX
XI	XIV, XXI
XII	XV, XXII
XIII	XVII, XXIV
XIV	XIX, XXV
XV	XX, XXVI

4.2.4 Resultados parciales de sumación

Vamos a demostrar ahora, por inducción, un teorema que nos permite obtener la suma de una amplia clase de funciones hipergeométricas

$${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$$

en donde n es un número natural y siempre que $\gamma_3 + n$ no sea el mayor valor entero negativo de los parámetros del numerador.¹

Teorema 4.1. *Sea la función hipergeométrica ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$ en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n . Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:*

$$\begin{aligned} & {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda) = \\ & = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i (\alpha_3)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i (\gamma_3)_i} {}_3F_2(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i, \alpha_3 + i; \gamma_1 + i, \gamma_2 + i; \lambda) \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹En este caso, al ser la suma finita, se puede obtener el resultado de manera exacta por el ordenador.

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción. Empecemos con el caso $n = 1$, en el que la igualdad a comprobar es:

$$\begin{aligned} & {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + 1; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda) = \\ &= \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i (\alpha_3)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i (\gamma_3)_i} {}_3F_2(\alpha_1 + i, \alpha_2 + i, \alpha_3 + i; \gamma_1 + i, \gamma_2 + i; \lambda) \end{aligned}$$

lo cual es fácil teniendo en cuenta que,

$$\frac{(\gamma_3 + 1)_r}{(\gamma_3)_r} = \frac{\gamma_3 + r}{\gamma_3} = 1 + \frac{r}{\gamma_3}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + 1; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\gamma_3 + 1)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{r+1} (\alpha_2)_{r+1} (\alpha_3)_{r+1} \lambda^{r+1}}{(\gamma_1)_{r+1} (\gamma_2)_{r+1} \gamma_3 r!} = \\ &= {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda) + \\ &+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; \lambda) \end{aligned}$$

Ahora lo suponemos cierto para n y lo probamos para $n + 1$. Como

$$(\gamma_3 + n + 1)_r = (\gamma_3 + n)_r + \frac{(\gamma_3 + n)_r r}{\gamma_3 + n}$$

la serie hipergeométrica se expresa:

$$\begin{aligned} & {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + n + 1; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\gamma_3 + n)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r (\gamma_3 + n)_r \lambda^r r}{(\gamma_3 + n) (\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (\gamma_3)_r r!} = \\ &= {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda) + \\ &+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \lambda}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} {}_4F_3(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1, \gamma_3 + n + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1, \gamma_3 + 1; \lambda) \end{aligned}$$

en donde en ambos términos se puede aplicar el principio de inducción, y sumando y agrupando términos de forma similar a la demostración del teorema 3.1, se obtiene el resultado deseado. \square

El resultado anterior tiene utilidad práctica cuando se puede calcular el valor de la función hipergeométrica ${}_3F_2$, por lo que nos interesan funciones del tipo ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + m, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda)$ con m y n números naturales. Así,

Corolario 4.1. *En las condiciones del teorema anterior se verifica que:*

$$\begin{aligned} & {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + m, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \lambda) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i (\gamma_2 + m)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i (\gamma_3)_i} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(\alpha_1 + i)_j (\alpha_2 + i)_j \lambda^j}{(\gamma_1 + i)_j (\gamma_2 + i)_j} \cdot \\ & \quad \cdot {}_2F_1(\alpha_1 + i + j, \alpha_2 + i + j; \gamma_1 + i + j; \lambda) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Realmente este resultado es aplicable para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita, únicamente habrá que tener cuidado en que los parámetros $\gamma_2 + m, \gamma_3 + n$ no sean los mayores enteros negativos.

Tomando $\lambda = 1$ y $\lambda = 1/2$ obtenemos los siguientes resultados parciales:

Corolario 4.2.

$$\begin{aligned} & {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + m, \gamma_3 + n; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; 1) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i (\gamma_2 + m)_i}{(\gamma_1)_i (\gamma_2)_i (\gamma_3)_i} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(\alpha_1 + i)_j (\alpha_2 + i)_j}{(\gamma_1 + i)_j (\gamma_2 + i)_j} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{\Gamma(\gamma_1 + i + j) \Gamma(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - i - j)}{\Gamma(\gamma_1 - \alpha_1) \Gamma(\gamma_1 - \alpha_2)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Corolario 4.3.

$$\begin{aligned} & {}_4F_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + m, \gamma_3 + n; \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}, \gamma_2, \gamma_3; \frac{1}{2}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i (\alpha_2)_i (\gamma_2 + m)_i}{\left(\frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)_i (\gamma_2)_i (\gamma_3)_i 2^i} \cdot \\ & \quad \cdot \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{(\alpha_1 + i)_j (\alpha_2 + i)_j}{\left(\frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} + i\right)_j (\gamma_2 + i)_j 2^j} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} + i + j\right)}{\Gamma\left(\frac{1 + \alpha_1 + i + j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha_2 + i + j}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

El corolario 4.2 también permite obtener el correspondiente valor de la esperanza y del momento de orden 2 de las distribuciones así generadas, ya que en las expresiones (4.5) aparecen funciones hipergeométricas de las consideradas en dicho corolario.

4.2.5 Estudios de casos concretos

Al igual que hemos hecho para las distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_3F_2$, se han obtenido de manera explícita diferentes funciones masas de probabilidad, a partir del teorema 4.1. A continuación se

muestran representaciones gráficas de polígonos de frecuencias para distintos tipos de distribuciones a los que se puede aplicar dicho resultado. En concreto hay que restringirse a los casos en que $\lambda > 0$, lo cual elimina a los Tipos VI, VII, XII, XIII, XIX, XX, XXV y XXVI, y a aquellos tipos que no cumplan las condiciones del teorema 4.1 como son los Tipos III y XXI, este último sólo para $\lambda = 1$.

Para aquellas distribuciones que son de rango finito se ha obtenido el valor de f_0 y de ahí la f.m.p. de forma directa, lo cual evita las restricciones sobre los parámetros dados por el teorema 4.1.

Las pautas observadas en las distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ se mantienen para estas distribuciones como se puede observar a continuación con los ejemplos que se incluyen. Por tanto se hará más hincapié en aquellos comportamientos que sean más interesantes, mostrando fundamentalmente distribuciones en las que $\lambda = 1$.

Distribuciones Tipo I y II

Son distribuciones de rango infinito, donde los parámetros γ_j son todos positivos. En las distribuciones Tipo I, los parámetros del numerador son todos positivos, y en las distribuciones Tipo II, verifican que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$, con $E|\alpha_1| = E|\alpha_2|$. En cualquier caso, para $\lambda = 1$, por la condición de convergencia, $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + m + n$. Y con $\lambda = 0.5$, para poder utilizar el corolario 4.3, se ha de verificar que $-(\alpha_1 + \alpha_2) < 1$, por lo que $E|\alpha_1| = E|\alpha_2|$.

Presentan forma de J traspuesta con moda en cero o bien forma acampanada tendiendo a la simetría conforme el valor de los parámetros va aumentando, como se puede observar en la figura 4.1, que muestra distribuciones del Tipo I con $\lambda = 1$. Las gráficas de la figura 4.2 corresponden a distribuciones del Tipo II con $\lambda = 0.5$, las cuales presentan un comportamiento distinto, al igual que ocurre con las generadas por la ${}_3F_2$, apareciendo en algunos casos dos modas, una de ellas en el punto 1. En las tablas 4.3 y 4.4 se muestran los momentos de las distribuciones representadas, en las que se aprecia que los coeficientes de asimetría y de curtosis se van acercando a cero en las condiciones indicadas (para $\lambda = 1$), o la alta dispersión en otras (para $\lambda = 0.5$).

Tabla 4.3: Distribuciones Tipo I ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(2, 5, 10, 15, 40, 9, 14)	0.38720	0.51339	2.3797	7.9678
(2, 5, 10, 15, 40, 5, 10)	1.3636	2.3210	1.8980	2.7827
(20, 5, 10, 15, 70, 9, 14)	2.8764	5.1013	1.2051	2.2760
(20, 5, 10, 15, 70, 5, 10)	8.8235	20.808	0.95425	1.5772

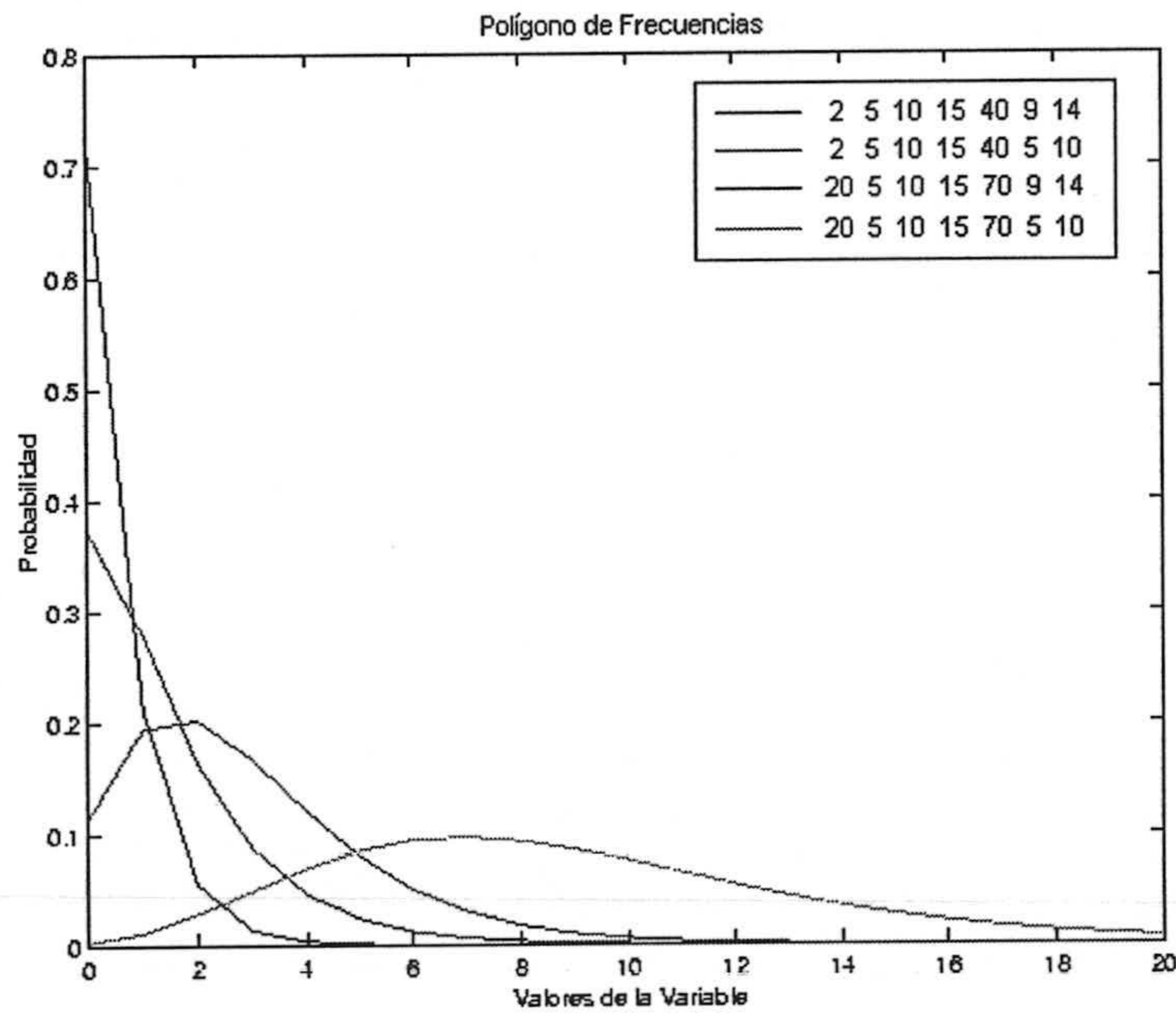
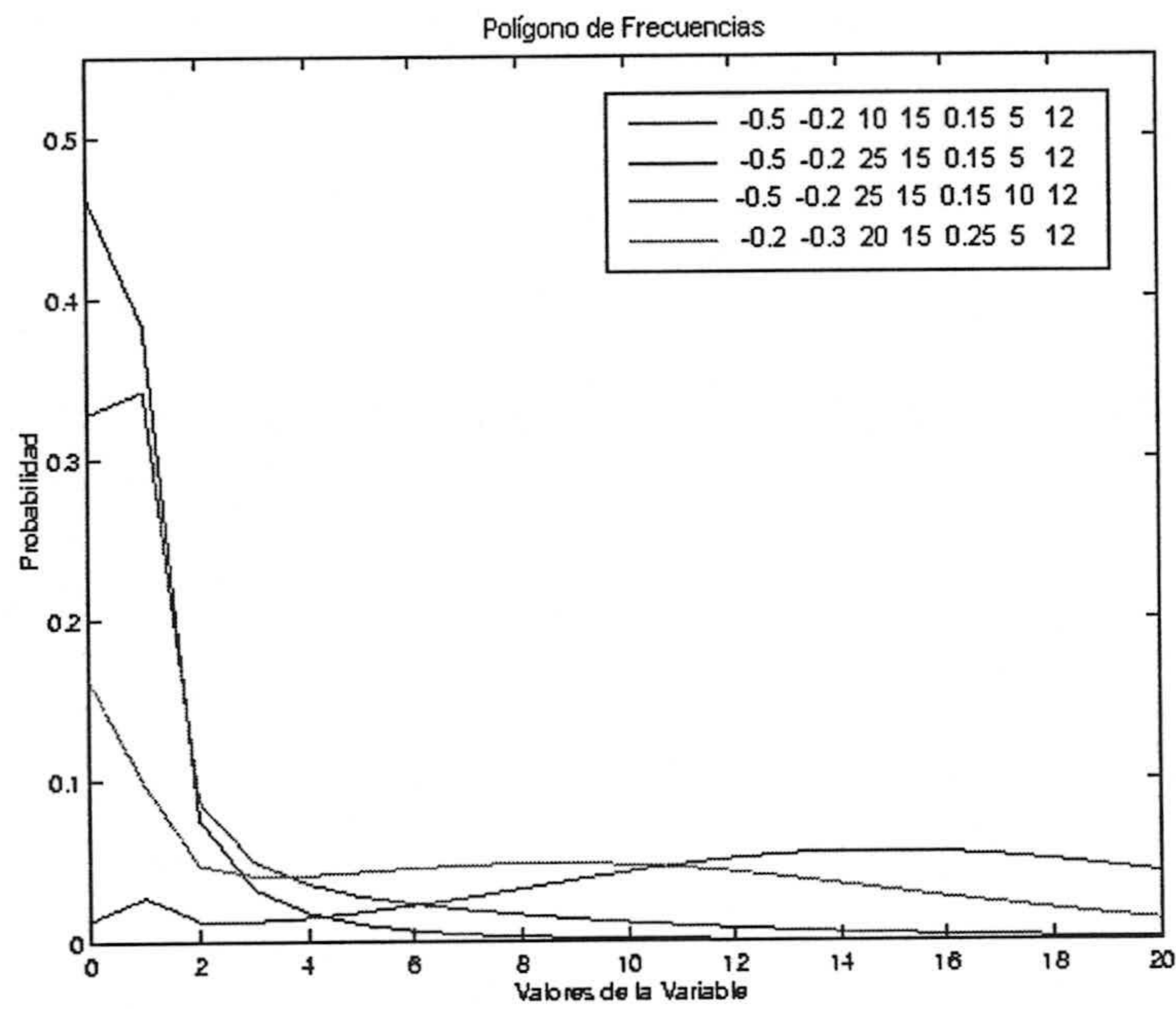
Figura 4.1: Tipo I ($\lambda = 1$)Figura 4.2: Tipo II ($\lambda = 0.5$)

Tabla 4.4: Distribuciones Tipo II ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-0.5, -0.2, 10, 15, 0.15, 5, 12)	0.89339	1.8549	4.5554	13.513
(-0.5, -0.2, 25, 15, 0.15, 5, 12)	15.271	55.970	0.33362	-0.69797
(-0.5, -0.2, 25, 15, 0.15, 10, 12)	2.2463	12.469	2.8278	8.1923
(-0.2, -0.3, 20, 15, 0.25, 5, 12)	7.8149	45.136	0.77956	-0.34740

Tabla 4.5: Distribuciones Tipo V ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -2.5, -2.8, -25.8, 20, 1, 1)	2.2087	0.37209	1.2755	8.4912
(-25, -2.5, -2.8, -25.8, 20, 30, 40)	0.16711	0.14874	2.0329	2.9115
(-25, -35.5, -30.8, -45.8, 20, 1, 1)	14.706	2.1627	-0.0056970	-0.019727
(-25, -35.5, -30.8, -45.8, 20, 30, 40)	8.1685	2.7224	0.043288	-0.026857

Distribuciones Tipo IV y V

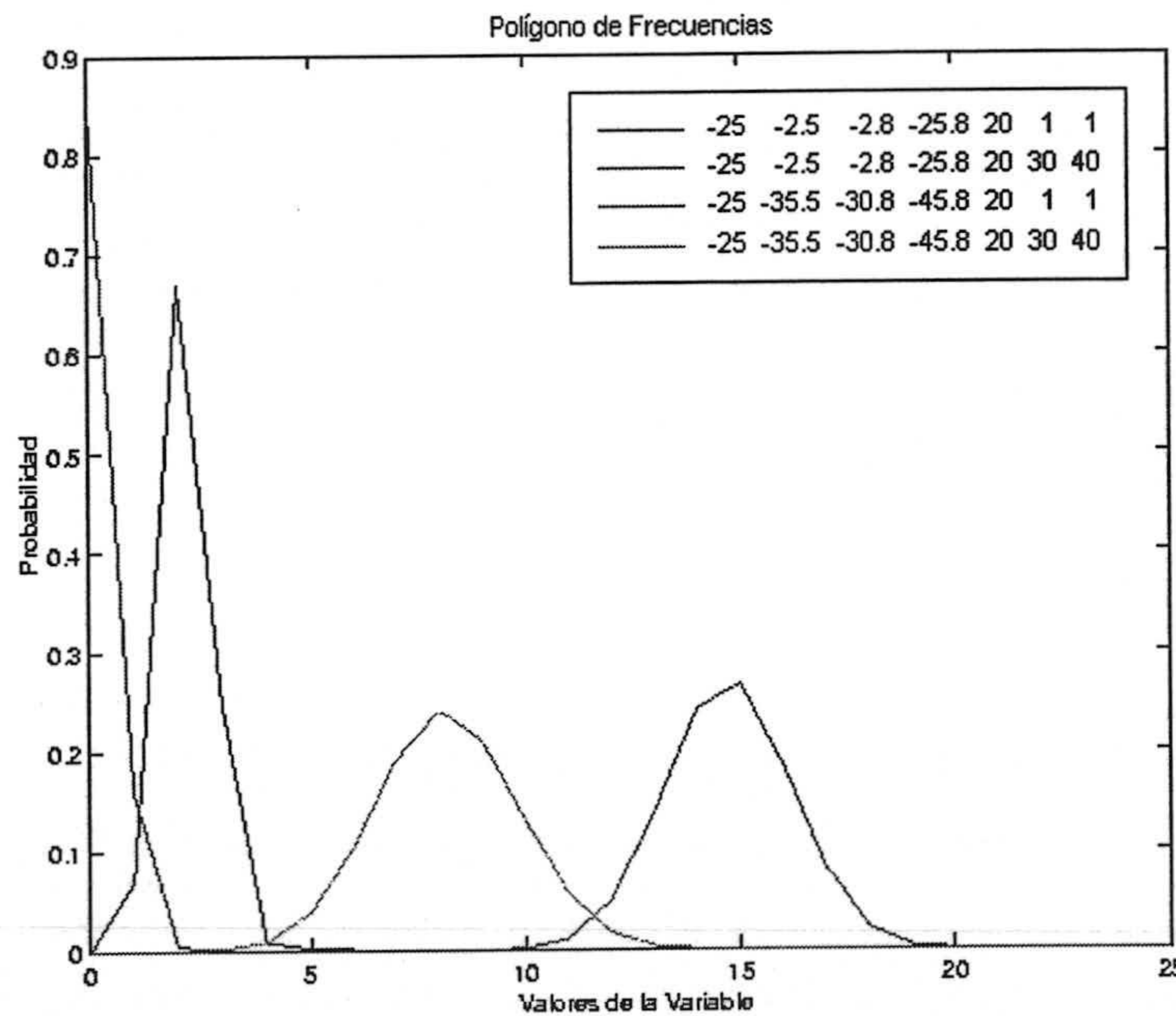
Son distribuciones de rango finito. En ambas se verifica que $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$ y $\gamma_j > 0$. La diferencia está en que en las distribuciones Tipo IV hay otro parámetro negativo entre los del numerador (si se toma α_2 , entonces $|\alpha_2| > |\alpha_1| - 1$), y en las distribuciones Tipo V todos son negativos (con las condiciones de positividad dadas por la tabla 4.1).

Las distribuciones del Tipo IV presentan forma acampanada y prácticamente simétrica. Las del Tipo V en su mayoría tienen forma acampanada, aunque alguna tiene forma de J traspuesta como se observa en la figura 4.3. Aquellas que presentan forma acampanada tienen unos coeficientes de asimetría y curtosis muy cercanos a cero, los cuales aparecen en la tabla 4.5 junto con los restantes momentos calculados.

Distribuciones Tipo VIII

Los parámetros verifican que: $\alpha_1, \gamma_3 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$, con $E|\alpha_1| = E|\gamma_3|$, siendo todos los demás parámetros positivos. Por la condición de convergencia se ha de verificar que $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + m + n$ (para $\lambda = 1$).

Ya presentan formas más interesantes, y aparte de distribuciones con forma de J traspuesta o acampanada, las hay con dos modas. Como este tipo de distribuciones incluye a las distribuciones Tipo VI de las generadas por la función ${}_3F_2$ era previsible que se diera esta circunstancia. En la figura 4.4 se muestran poligonales de forma muy diversa. Además sucede que precisamente en el entero siguiente en valor absoluto a los parámetros

Figura 4.3: Tipo V ($\lambda = 1$)

negativos puede haber una moda o una antimoda, dependiendo como ya se dijo en el capítulo anterior de cuál de los parámetros negativos fuese mayor en valor absoluto (si es el del numerador hay una moda, y si es el del denominador hay una antimoda). Esto puede ser observado en la figura 4.5, donde se aprecia que dichas distribuciones tienen probabilidades bastante bajas con una alta dispersión.

La tabla 4.6 muestra los momentos de las distribuciones anteriores, donde queda reflejada en la varianza la alta dispersión de las distribuciones representadas en la figura 4.5.

Distribuciones Tipo IX

Los parámetros verifican que: $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_3 + n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ y $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ con las condiciones de positividad dadas en la tabla 4.1, además de que $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + m + n$. Son distribuciones con forma de J traspuesta o acampanada.

Distribuciones Tipo X

Son distribuciones de rango finito con $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$ y todos los demás parámetros positivos excepto uno de los del denominador (sin pérdida de generalidad hemos considerado $\gamma_3 < 0$ de forma que $|\gamma_3| > |\alpha_1| - 1$).

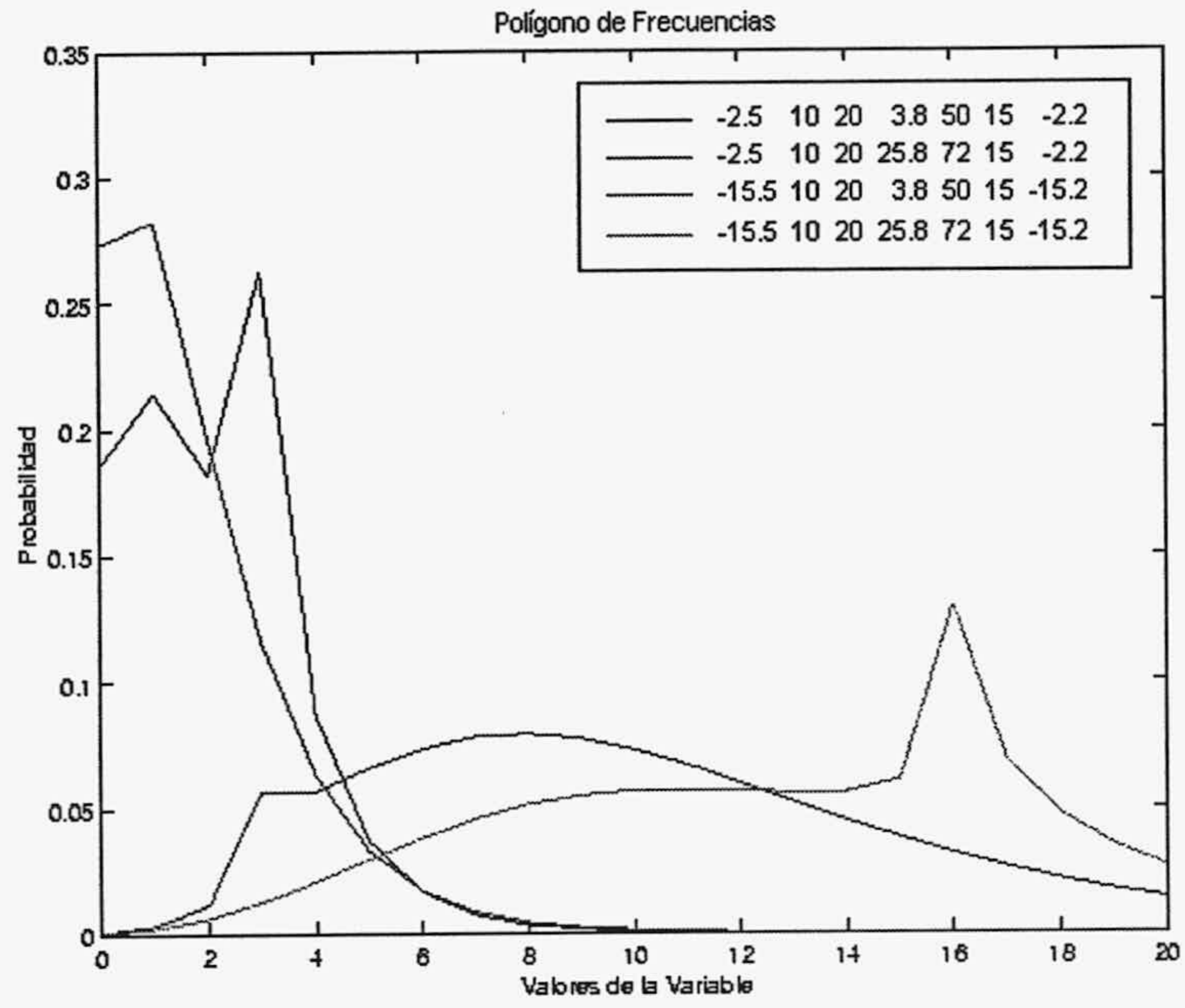


Figura 4.4: Tipo VIII ($\lambda = 1$)

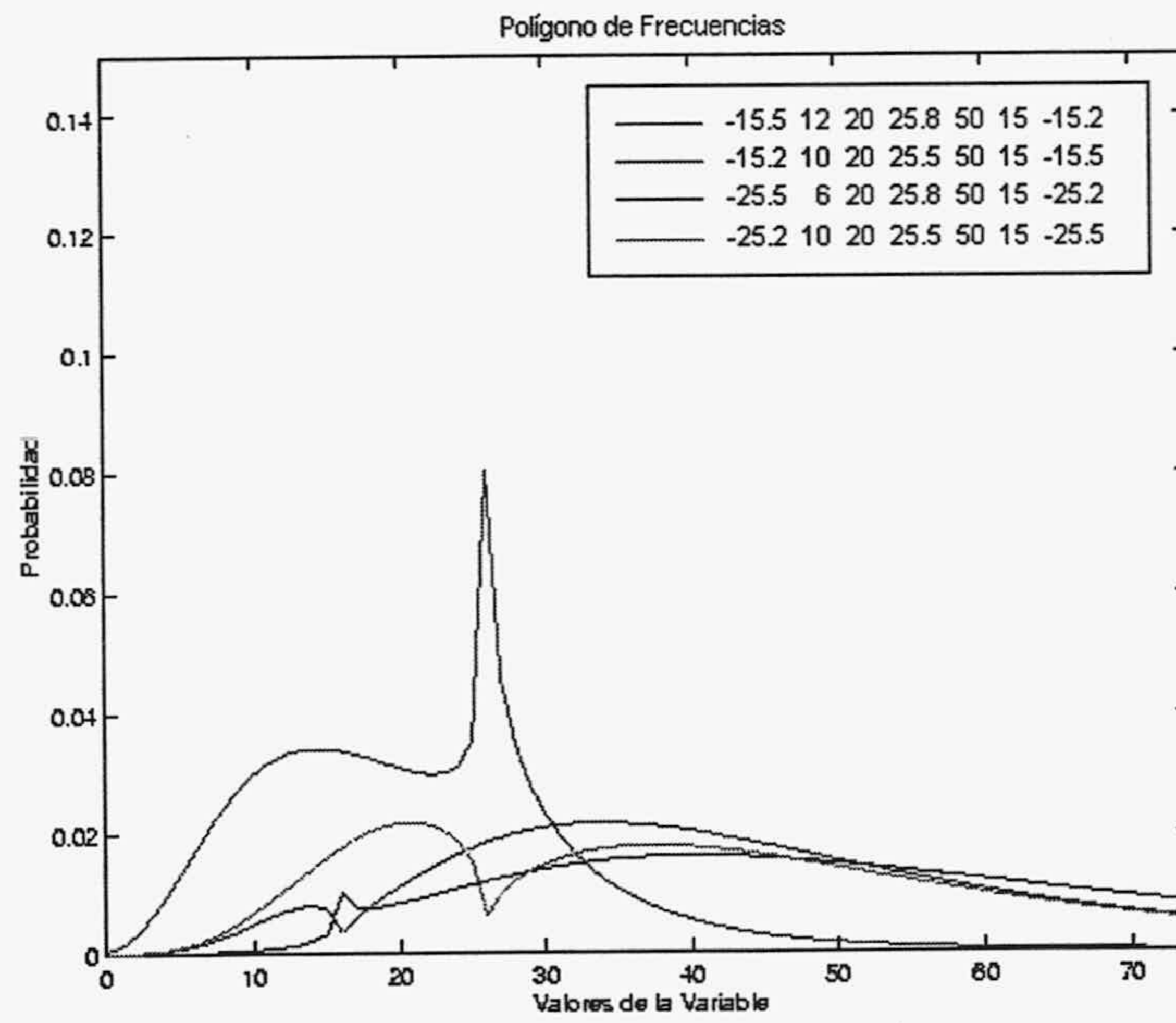


Figura 4.5: Tipo VIII ($\lambda = 1$)

Tabla 4.6: Distribuciones Tipo VIII ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-2.5, 10, 20, 3.8, 50, 15, -2.2)	2.1137	2.6818	0.88630	1.9177
(-2.5, 10, 20, 25.8, 72, 15, -2.2)	10.341	30.617	1.0484	1.7561
(-15.5, 10, 20, 3.8, 50, 15, -15.2)	1.6925	2.9664	1.6303	4.5187
(-15.5, 10, 20, 25.8, 72, 15, -15.2)	13.448	31.068	0.44295	0.90262
(-15.5, 12, 20, 25.8, 50, 15, -15.2)	59.819	1238.1	2.1272	10.382
(-15.2, 10, 20, 25.5, 50, 15, -15.5)	46.487	622.08	1.7136	6.5912
(-25.5, 6, 20, 25.8, 50, 15, -25.2)	21.349	108.01	0.89156	2.6221
(-25.2, 10, 20, 25.5, 50, 15, -25.5)	44.185	688.69	1.5799	5.5250

Tabla 4.7: Distribuciones Tipo X ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, 2, 5, 10, 20, 15, -30.5)	0.34958	0.45447	2.4365	8.1795
(-25, 2, 5, 50, 20, 15, -30.5)	8.6170	28.571	0.31649	-0.72315
(-25, 2, 5, 75, 20, 15, -30.5)	17.064	16.115	-0.69206	0.48343
(-25, 20, 55, 50, 60, 15, -30.5)	22.352	3.2595	-0.75781	0.60594

Como se observa en la figura 4.7 éstas ya tienen forma de J traspuesta, acampanada, de J o incluso tendiendo a una uniforme, con una alta dispersión relativa, como ocurre con la segunda de las distribuciones representadas, dato que podemos obtener a partir de la media y la varianza de dichas distribuciones, las cuales aparecen en la tabla 4.7 junto con los demás momentos de interés.

Distribuciones Tipo XI

Son también distribuciones de rango finito en las que hay tres parámetros negativos de entre los del numerador, con al menos uno de ellos entero (se ha tomado $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$), y con $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Las condiciones de positividad son las dadas en la tabla 4.1.

Este tipo generaliza al Tipo IX de las distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, por lo que de nuevo aparecen distribuciones con dos modas, y como ya ocurría entonces con una antimoda o una moda en el punto siguiente al valor de los parámetros negativos. Todo lo comentado en el capítulo anterior, por tanto, es válido para este tipo de distribuciones. En la tabla 4.8 aparecen los momentos de dichas distribuciones.

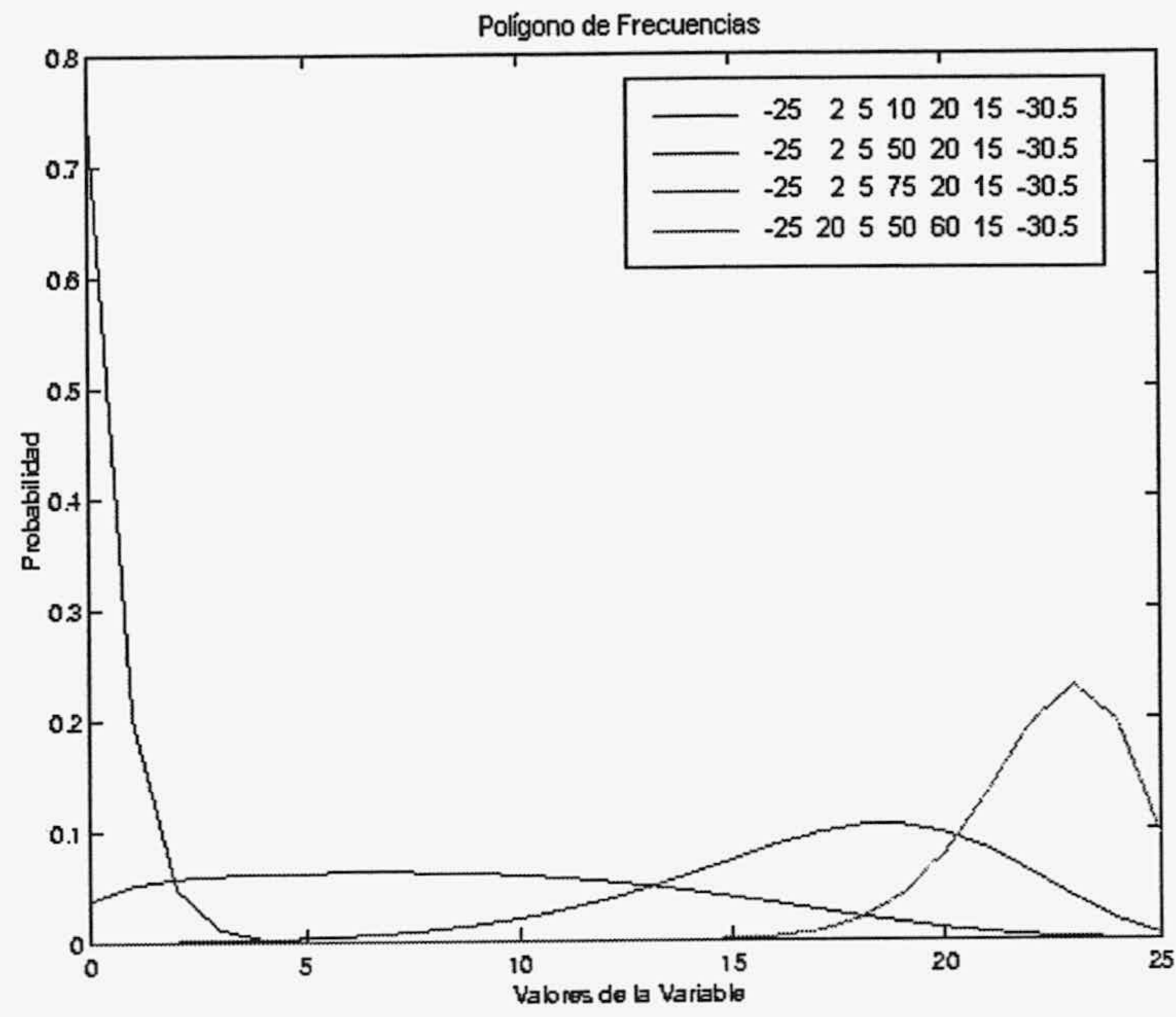


Figura 4.6: Tipo X ($\lambda = 1$)

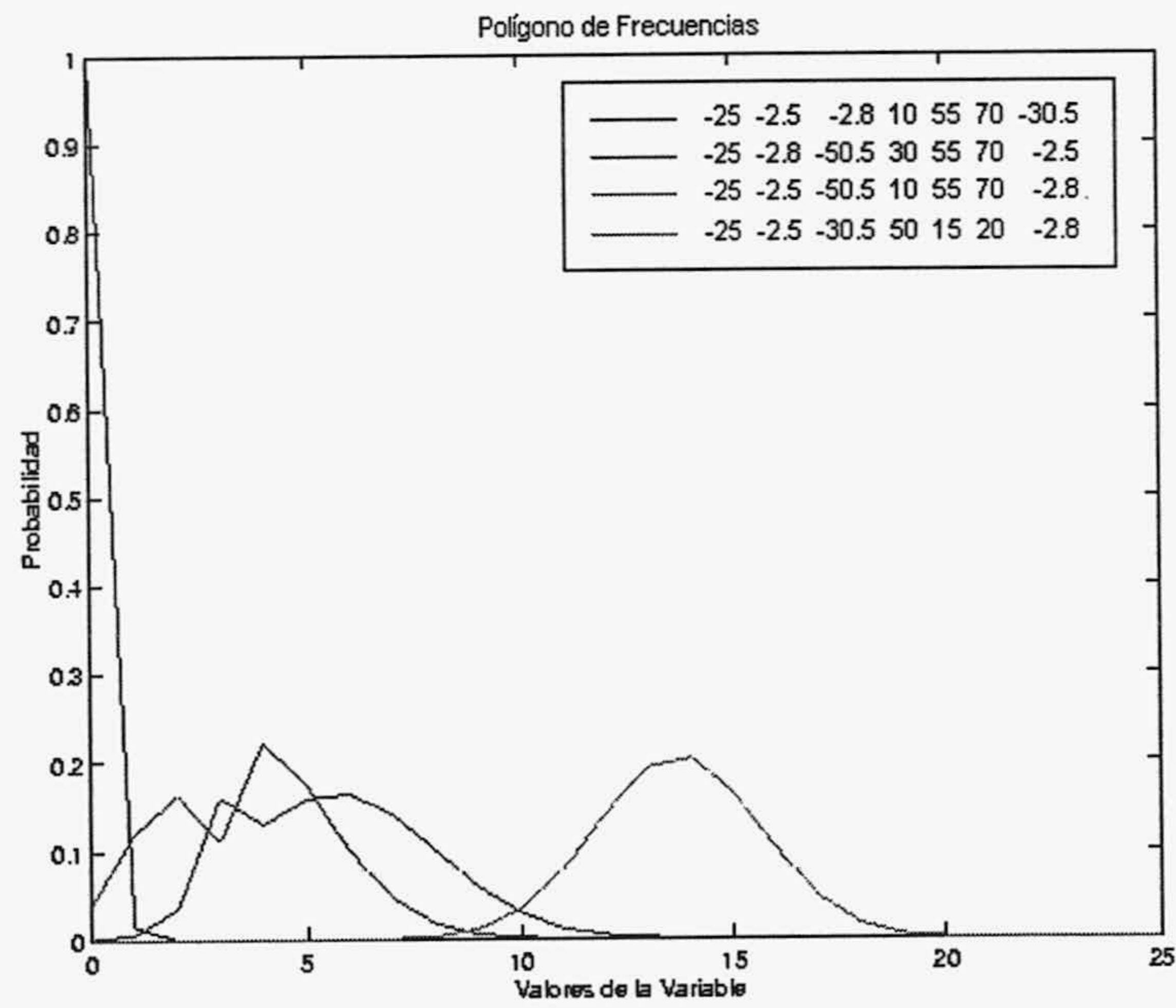


Figura 4.7: Tipo XI ($\lambda = 1$)

Tabla 4.8: Distribuciones Tipo XI ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -2.5, -2.8, 10, 55, 70, -30.5)	0.014773	0.014644	8.1186	64.752
(-25, -2.8, -50.5, 30, 55, 70, -2.5)	5.6531	4.7667	0.34911	-0.32414
(-25, -2.5, -50.5, 10, 55, 70, -2.8)	3.6590	3.8294	1.4923	-0.43547
(-25, -2.5, -30.5, 50, 15, 20, -2.8)	13.672	3.7008	-0.022578	-0.037007

Tabla 4.9: Distribuciones Tipo XIV ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(2, 5, 10.5, 15.2, 50, -2.5, -2.8)	57.614	537.37	1.4478	4.2892
(2, 5, 10.5, 15.2, 120, -10.5, -10.8)	38.632	55.571	0.60944	0.66433
(2, 5, 5.5, 10.2, 40, -2.5, -2.8)	36.052	223.18	1.4686	4.3933
(2, 5, 5.5, 10.2, 110, -10.5, -10.8)	31.746	36.339	0.63116	0.70537

Distribuciones Tipo XIV

Ahora los parámetros verifican que $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$, con $E|\gamma_2| = E|\gamma_3|$, con todos los demás parámetros positivos, y por la condición de convergencia es necesario que $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + m + n$.

Tienen forma acampanada, con una alta dispersión y probabilidades muy bajas como se aprecia en la figura 4.8. En ella se observa que disminuyendo los parámetros tanto del numerador como los del denominador, de forma que la diferencia entre la suma de los parámetros del numerador y la de los del denominador se mantenga constante (como se ha hecho con las distribuciones tercera y cuarta respecto a las dos primeras) no nos lleva a distribuciones similares, a diferencia de lo que ocurre en otro tipo de distribuciones. De nuevo presentamos los momentos en la tabla 4.9.

Distribuciones Tipo XV

Estas distribuciones tienen dos parámetros negativos no enteros en el numerador y otros dos en el denominador (estos últimos se han tomado γ_2 y γ_3), con $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + m + n$, y las condiciones de positividad dadas en la tabla 4.1.

En la figura 4.9 se muestran algunas distribuciones que presentan una gran versatilidad. Así, la primera de ellas tiene una moda en cero, pero con una forma bastante curiosa ya que la cola vuelve a tener probabilidades significativas. Las dos últimas tienen dos modas (incluyen a las distribuciones Tipo VI de la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$) con modas en

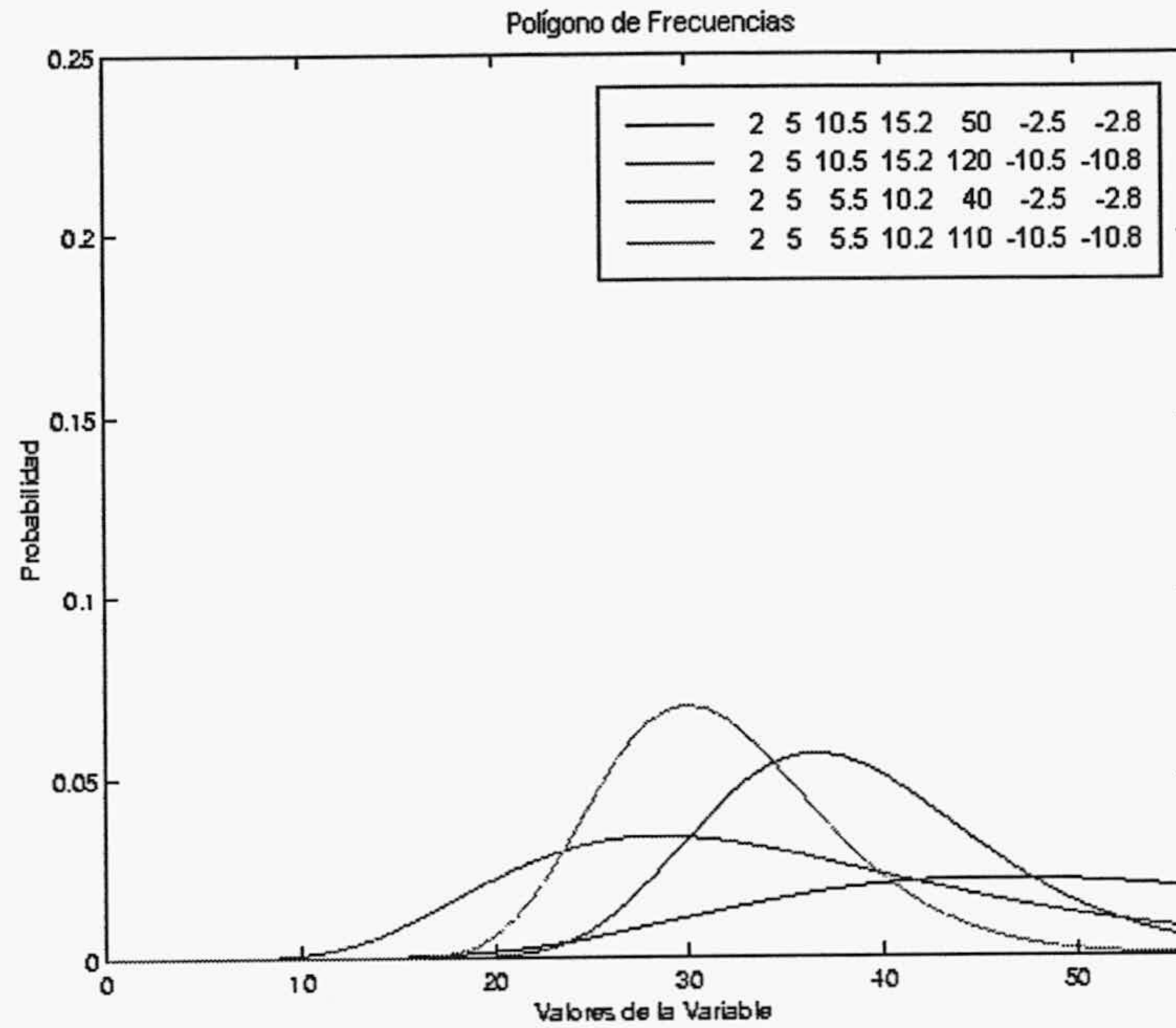


Figura 4.8: Tipo XIV ($\lambda = 1$)

los puntos 3 y 6, y antimoda en los puntos 6 y 11, respectivamente. Y la segunda presenta tres modas con una moda en el punto 3 y una antimoda en el punto 6. Es decir, que estas distribuciones pueden tener una moda o una antimoda en los puntos cuyos valores son los siguientes a cada una de las parejas de parámetros negativos (ya se ha indicado cuando surge una moda y cuando una antimoda).

Por otra parte, la figura 4.10 muestra distribuciones con forma acampanada o forma de J traspuesta, si bien, como sucede con la segunda distribución (aunque en el gráfico no se llegue a apreciar) la cola tiene probabilidades significativas, o la cuarta distribución que presenta probabilidades distintas de cero en los tres o cuatro primeros valores.

En la tabla 4.10 aparecen los momentos de dichas distribuciones destacando la diferente variabilidad que presenta cada una de ellas (alta varianza para la primera distribución y muy baja para la quinta, sexta y séptima).

Distribuciones Tipo XVI

Para este tipo de distribuciones se tiene que $\gamma_1 > 0$ con los demás parámetros negativos no enteros con las condiciones de positividad dadas en la tabla 4.1 y con $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + m + n$.

Generalmente presentan forma de J traspuesta con moda en cero o acampanada, si bien algunas de ellas tienen poligonales como las dos últimas de la

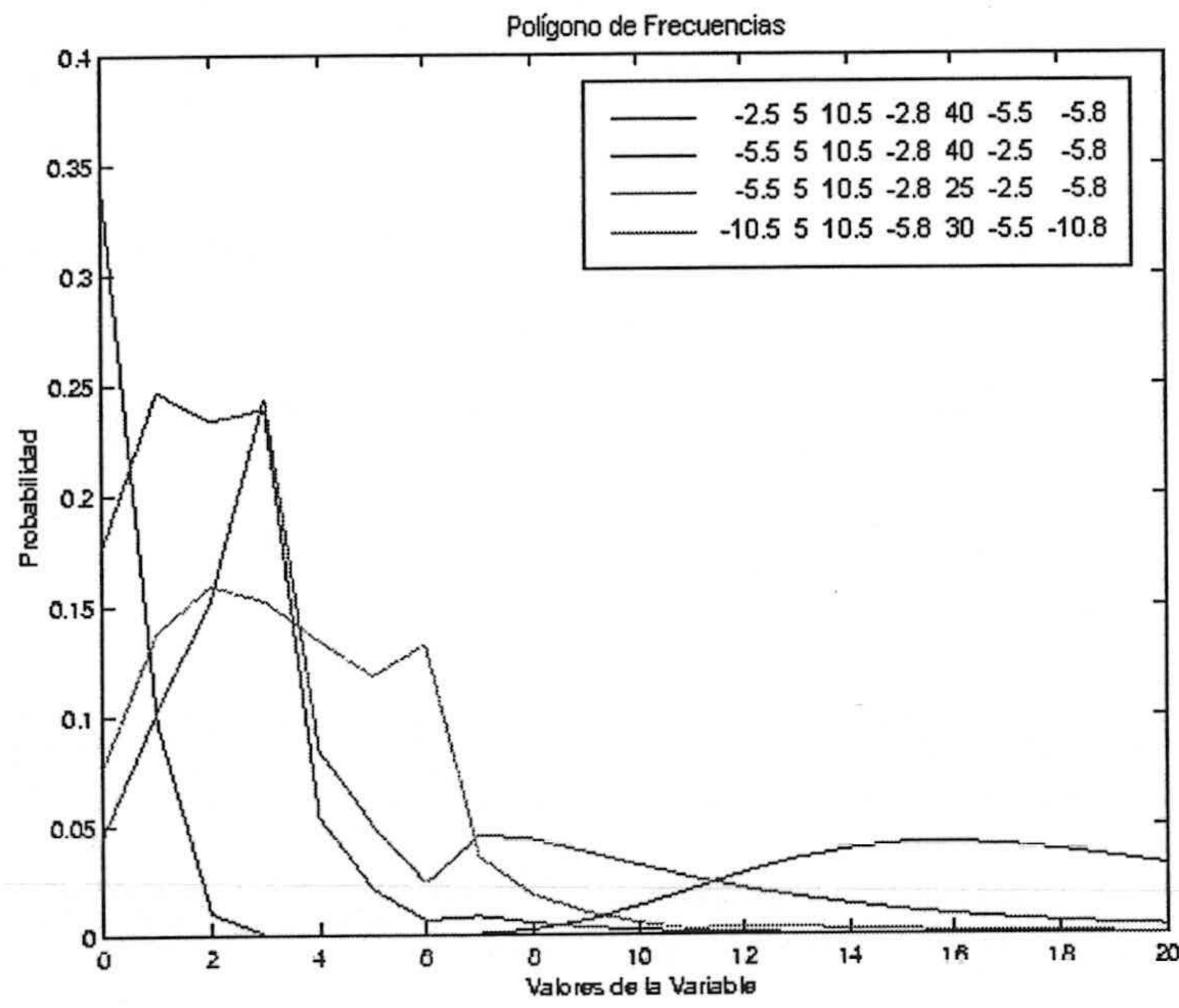


Figura 4.9: Tipo XV ($\lambda = 1$)

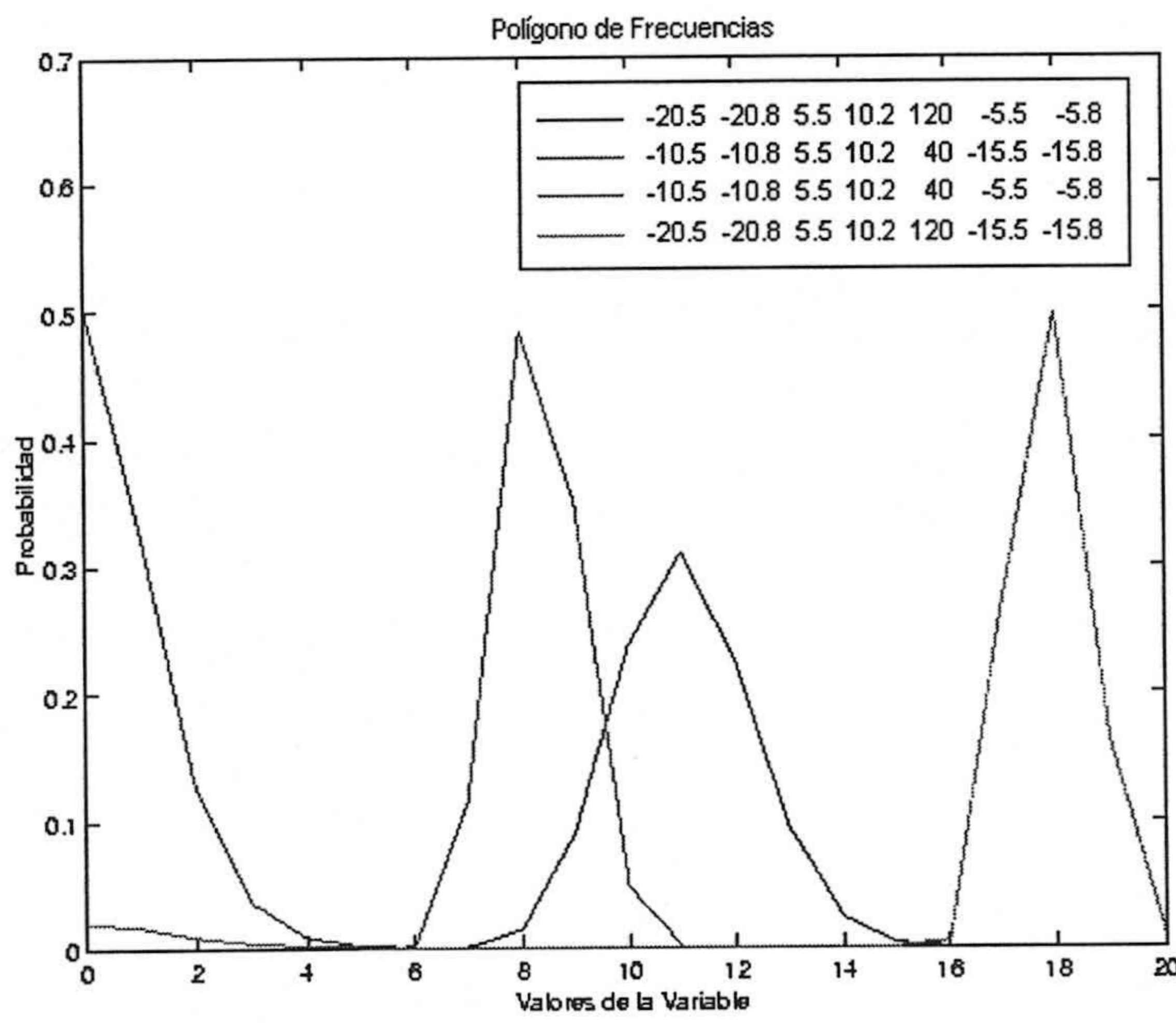


Figura 4.10: Tipo XV ($\lambda = 1$)

Tabla 4.10: Distribuciones Tipo XV ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-2.5, 5, 10.5, -2.8, 40, -5.5, -5.8)	10.566	107.13	0.48250	-0.62403
(-5.5, 5, 10.5, -2.8, 40, -2.5, -5.8)	1.9794	2.7088	1.7766	7.3407
(-5.5, 5, 10.5, -2.8, 25, -2.5, -5.8)	5.3053	25.583	2.2409	8.4104
(-10.5, 5, 10.5, -5.8, 30, -5.5, -10.8)	3.6437	7.0577	1.7188	7.9767
(-20.5, -20.8, 5.5, 10.2, 120, -5.5, -5.8)	11.037	1.6192	0.15050	-0.047802
(-10.5, -10.8, 5.5, 10.2, 40, -15.5, -15.8)	0.7445	1.4807	22.127	115.75
(-10.5, -10.8, 5.5, 10.2, 40, -5.5, -5.8)	8.3321	0.55671	0.089019	-0.19517
(-20.5, -20.8, 5.5, 10.2, 120, -15.5, -15.8)	16.978	14.997	-3.7451	12.731

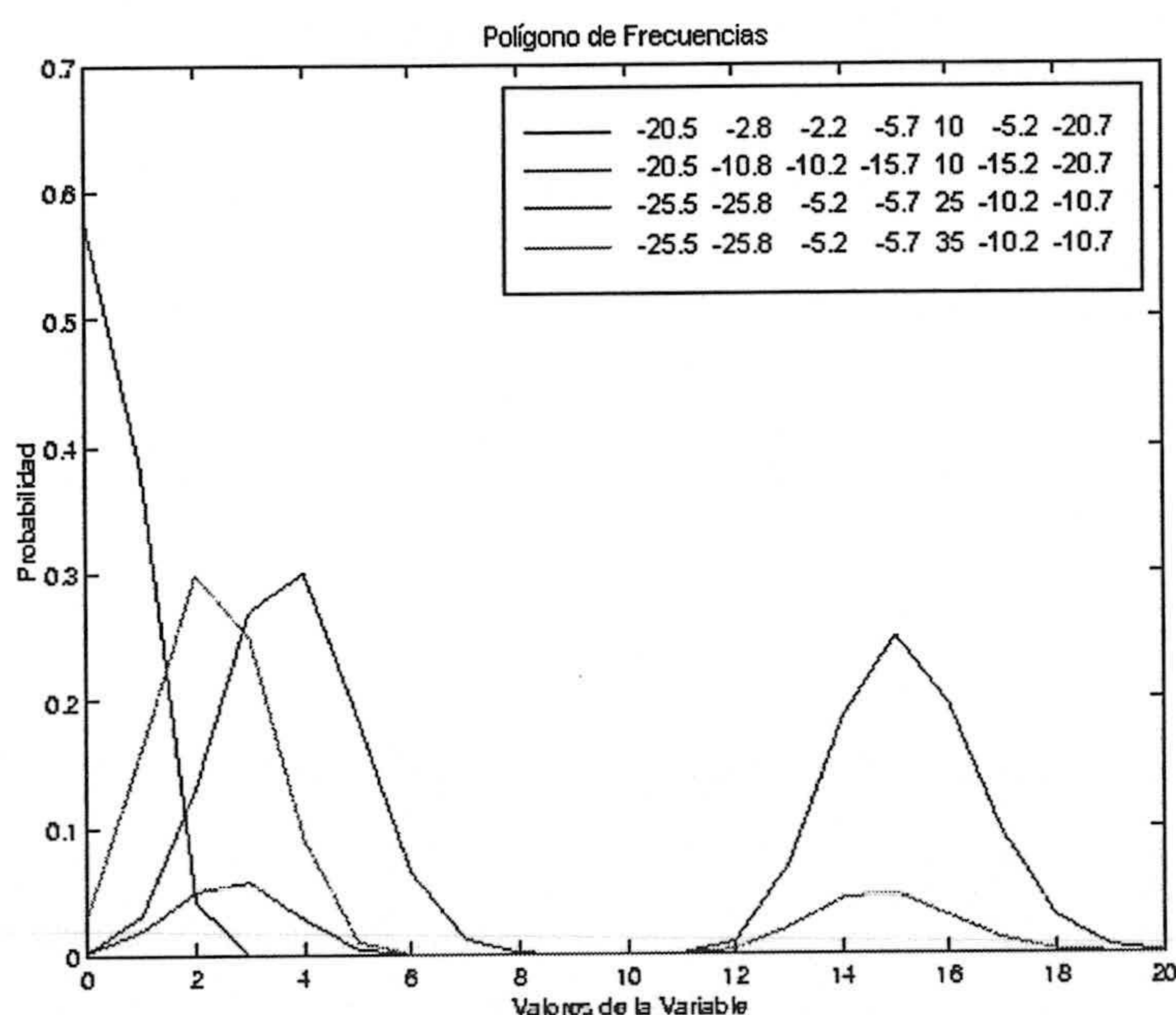
Tabla 4.11: Distribuciones Tipo XVI ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-20.5, -2.8, -2.2, -5.7, 10, -5.2, -20.7)	0.46806	0.33377	0.79090	-0.33288
(-20.5, -10.8, -10.2, -15.7, 10, -15.2, -20.7)	3.7200	1.6159	0.072549	-0.11478
(-25.5, -25.8, -5.2, -5.7, 25, -10.2, -10.7)	13.155	22.881	-1.6149	1.1082
(-25.5, -25.8, -5.2, -5.7, 35, -10.2, -10.7)	4.2584	21.961	1.72552	1.4684

figura 4.11 con dos trozos acampanados. Se puede observar que para dichas distribuciones las parejas de parámetros negativos (aquellos que tienen la misma parte entera) están compuestas de dos parámetros bien del numerador, bien del denominador. En concreto los valores siguientes en valor absoluto a los que presentan dichas parejas de parámetros son 11 y 16, y es precisamente el intervalo determinado por dichos puntos en donde las distribuciones toman probabilidades prácticamente nulas. Por otra parte, los parámetros de las dos primeras figuras representadas, cumplen la condición necesaria para la existencia de moda o antimoda en los puntos siguientes a los valores que presentan las parejas de parámetros negativos, y sin embargo no se da esta circunstancia. De hecho, no hemos encontrado para este tipo de distribuciones ninguna que presente esta característica. Como es habitual presentamos los momentos de los ejemplos en la tabla 4.11.

Distribuciones Tipo XVII

Son distribuciones de rango finito, en las que $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$, existiendo otro parámetro negativo en el numerador (se ha tomado $\alpha_2 < 0$) y dos parámetros negativos en el denominador (se han considerado $\gamma_2, \gamma_3 < 0$, sin pérdida de

Figura 4.11: Tipo XVI ($\lambda = 1$)

generalidad), con las condiciones dadas en la tabla 4.1.

Hay gran variedad de formas: J traspuesta, J, acampanada y con dos modas, que podemos observar en las figuras 4.12 y 4.13. Este tipo generaliza el Tipo XIII de las distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, y presentan como ellas una moda o una antimoda en el punto siguiente en valor absoluto a la de la pareja de parámetros negativos.

Podemos ver que entre las dos últimas distribuciones representadas en ambas figuras sólo se ha aumentado uno de los parámetros del denominador y esto ha hecho que la forma de las poligonales cambie bastante. Esto confirma de nuevo que, aunque es necesario para que existan dos modas que los dos parámetros negativos de la misma parte entera estén uno en el numerador y otro en el denominador, dicha condición no es suficiente.

Distribuciones Tipo XVIII

Excepto uno de los parámetros del denominador que es positivo (sin que suponga ninguna restricción se ha considerado $\gamma_1 > 0$), todos los demás parámetros son negativos con $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$, y las condiciones de positividad dadas en la tabla 4.1.

Estas distribuciones pueden presentar tres modas, además de las poligonales con forma de J traspuesta o acampanadas que se encuentran en prácticamente todos los tipos estudiados. Llamen la atención, de nuevo,

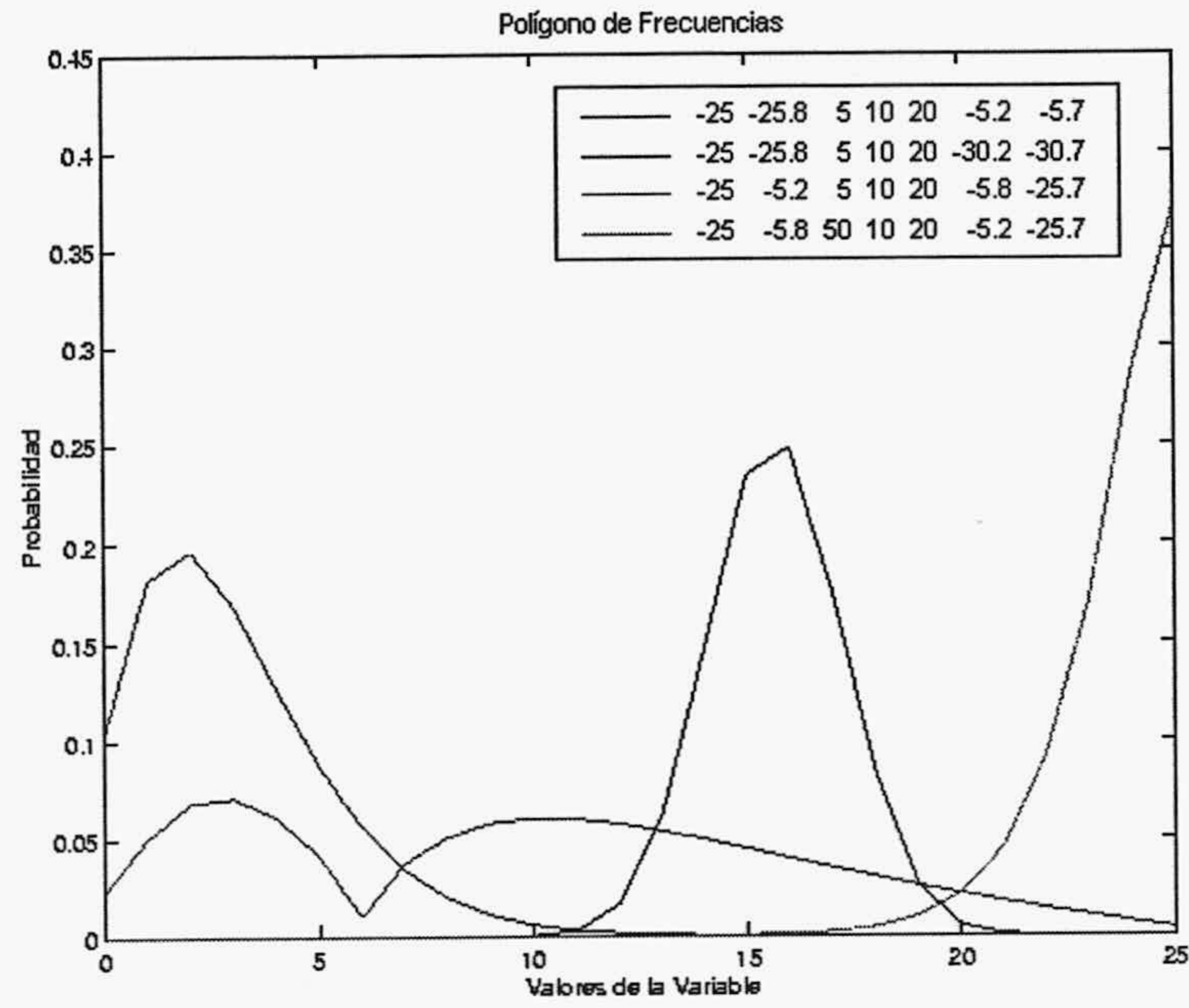


Figura 4.12: Tipo XVII ($\lambda = 1$)

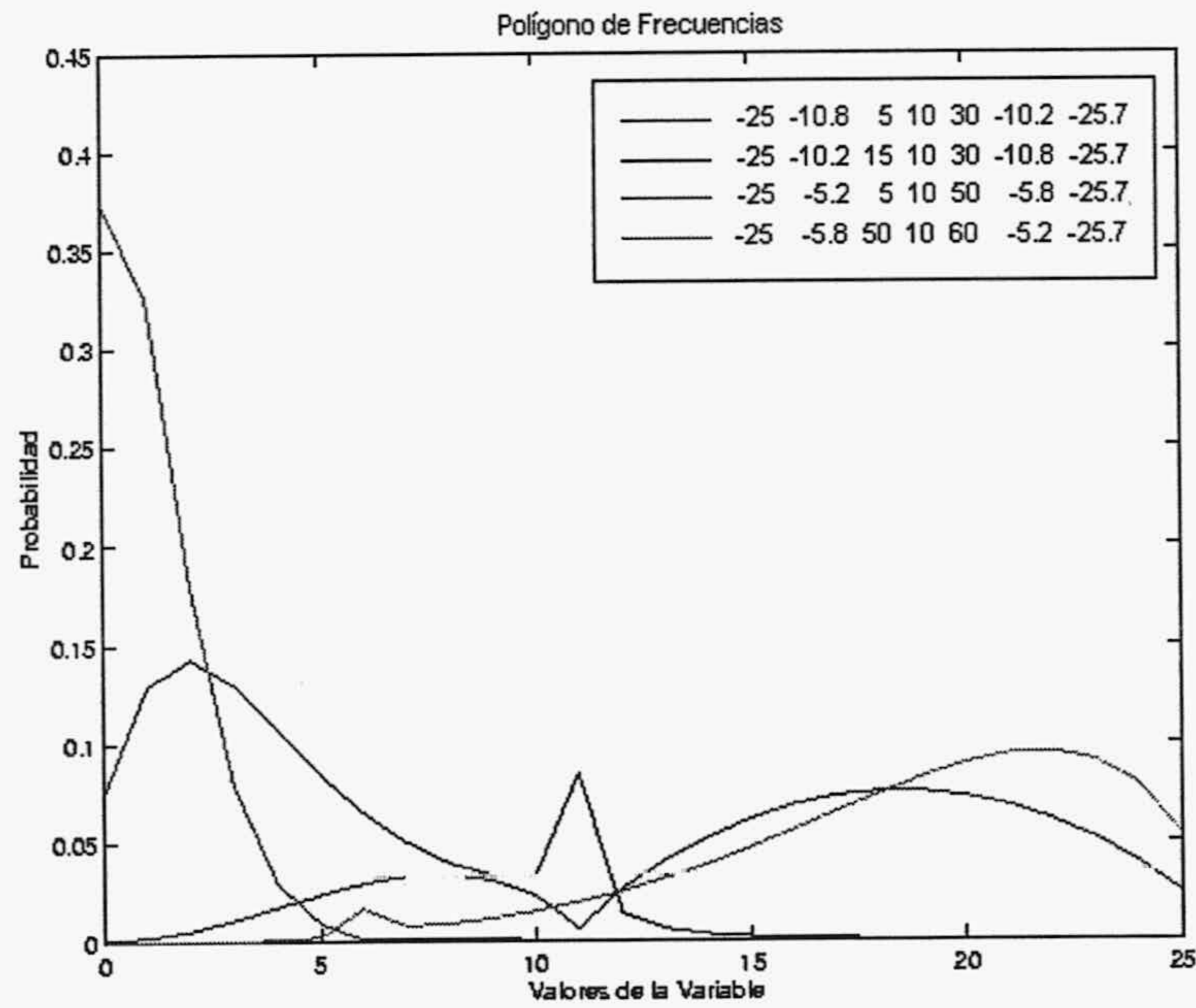


Figura 4.13: Tipo XVII ($\lambda = 1$)

Tabla 4.12: Distribuciones Tipo XVII ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -25.8, 5, 10, 20, -5.2, -5.7)	15.648	2.4215	0.011082	-0.051856
(-25, -25.8, 5, 10, 20, -30.2, -30.7)	2.9916	5.0483	1.0023	1.2420
(-25, -5.2, 5, 10, 20, -5.8, -25.7)	9.9396	38.278	0.23054	-0.86678
(-25, -5.8, 50, 10, 20, -5.2, -25.7)	23.696	2.1521	-1.5037	2.9578
(-25, -10.8, 5, 10, 30, -10.2, -25.7)	4.6092	12.517	0.76897	-0.25085
(-25, -10.2, 15, 10, 30, -10.8, -25.7)	15.982	33.020	-0.59155	-0.53127
(-25, -5.2, 5, 10, 50, -5.8, -25.7)	1.1206	1.4970	1.6634	5.6478
(-25, -5.8, 50, 10, 60, -5.2, -25.7)	18.685	20.499	-0.81916	0.20024

las dos primeras distribuciones que aparecen en la figura 4.14 que están compuestas de dos trozos acampanados. Al igual que ya sucedía en las distribuciones del Tipo XVI, el intervalo en el que las probabilidades son prácticamente nulas está determinado por los puntos cuyos valores son los siguientes en valor absoluto al que presentan las parejas de parámetros negativos. En este caso dichos puntos son 6 y 11 para la primera distribución; 6 y 16 para la segunda. Sin embargo, el hecho de que existan parámetros negativos en estas condiciones no asegura que la distribución tenga esta forma, como ocurre con la primera de las distribuciones representadas en la figura 4.15.

En las otras dos distribuciones representadas en la figura 4.14 existe una moda y una antimoda en los puntos 16 y 11, respectivamente, que son los siguientes a los valores de los parámetros negativos, dando como resultado distribuciones con tres modas. Poseen también tres modas las dos últimas distribuciones de la figura 4.15, para las cuales hay dos modas en los puntos 11 y 16, ó 31 y 41 que son los siguientes a los valores de los parámetros negativos. Como ya se ha indicado la existencia de una moda o una antimoda viene determinada por cuál de los parámetros dentro del par es mayor.

Distribuciones Tipo XXI

Este tipo de distribuciones permite utilizar el corolario 4.3 (donde $\lambda = 0.5$), pero no el corolario 4.2 (donde $\lambda = 1$) debido a que los parámetros no cumplen la condición de convergencia. Son, por tanto, distribuciones de rango infinito, con todos los parámetros γ_j negativos y bien α_1 ó α_2 negativo no entero (se ha considerado α_1), de forma que $-(\alpha_1 + \alpha_2) > 1$. Dichas distribuciones presentan poligonales acampanadas.

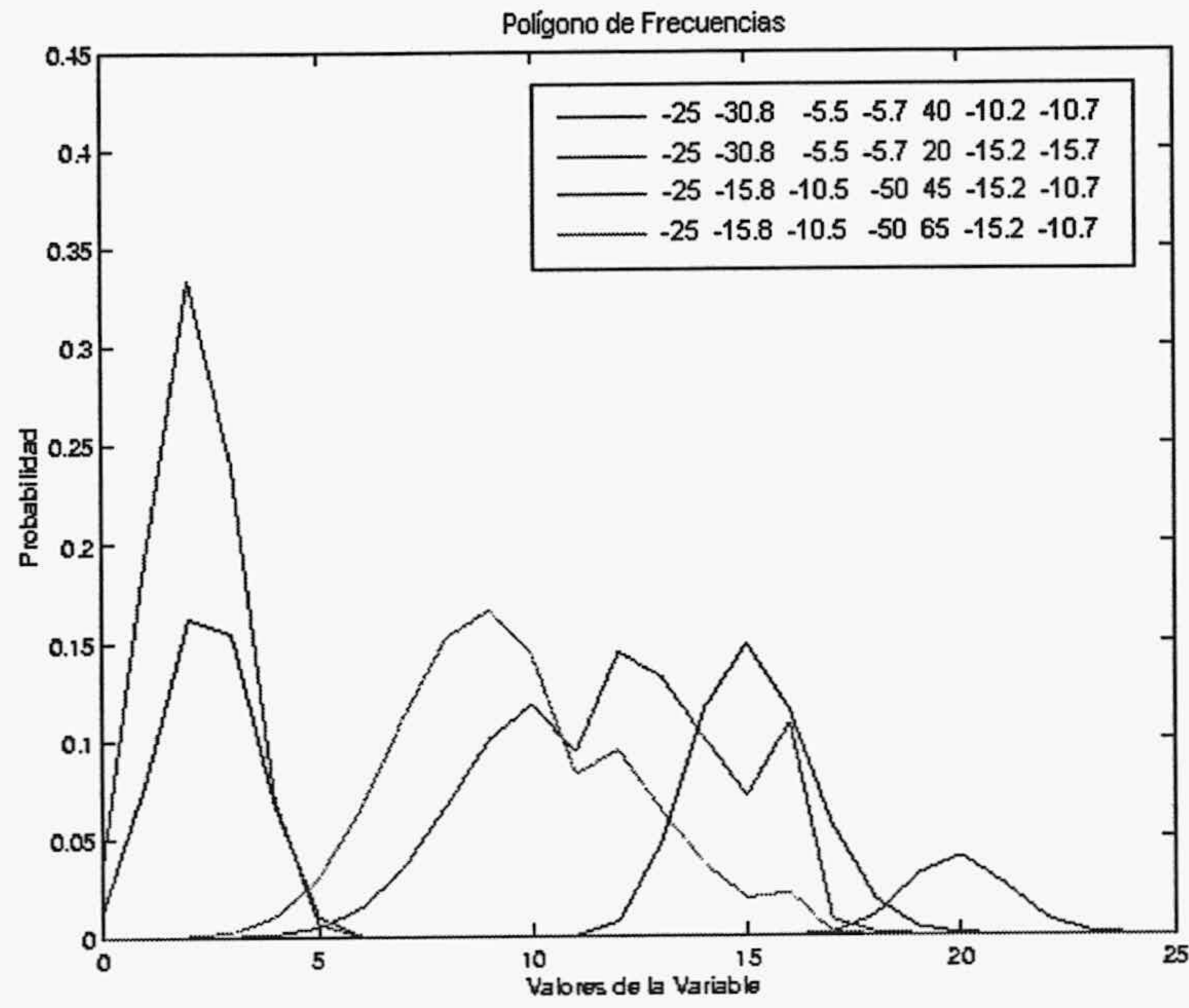


Figura 4.14: Tipo XVIII ($\lambda = 1$)

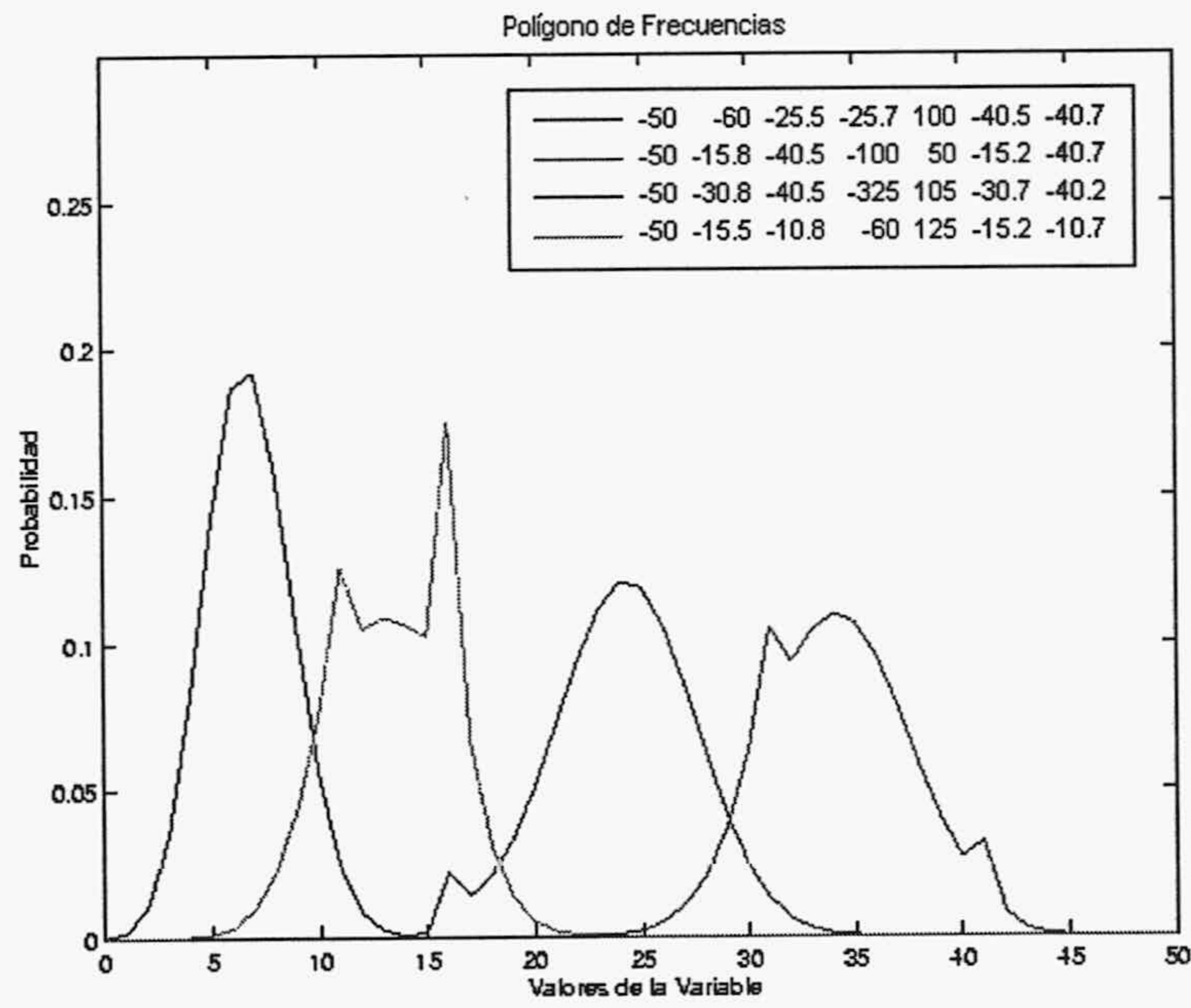


Figura 4.15: Tipo XVIII ($\lambda = 1$)

Tabla 4.13: Distribuciones Tipo XVIII ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -30.8, -5.5, -5.7, 40, -10.2, -10.7)	8.9490	41.759	-0.022576	-1.8533
(-25, -30.8, -5.5, -5.7, 20, -15.2, -15.7)	4.2609	34.235	2.2557	3.3714
(-25, -15.8, -10.5, -50, 45, -15.2, -10.7)	11.819	7.4290	-0.14263	-0.71654
(-25, -15.8, -10.5, -50, 65, -15.2, -10.7)	9.5406	6.8370	0.34928	-0.18068
(-50, -60, -25.5, -25.7, 100, -40.5, -40.7)	6.7549	4.0841	0.14259	-0.055778
(-50, -15.8, -40.5, -100, 50, -15.2, -40.7)	24.047	11.441	-0.15636	-0.054774
(-50, -30.8, -40.5, -325, 105, -30.7, -40.2)	34.118	11.765	0.11638	-0.31919
(-50, -15.5, -10.8, -60, 125, -15.2, -10.7)	13.426	7.8933	-0.13216	-0.49925

Tabla 4.14: Distribuciones Tipo XXII ($\lambda = 0.5$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-7.5, 5, -0.7, -5.6, -0.75, -5.7, -7.6)	5.2652	12.144	1.3708	1.5476
(-7.5, -5.2, 10.2, -0.7, -5.85, -0.8, -7.7)	13.839	23.173	0.69774	-1.0781
(-7.2, -5.5, 6.2, -2.5, -5.85, -2.8, -7.5)	8.6567	21.714	0.64348	-0.34758
(-7.2, -5.5, 3.2, -2.5, -5.85, -2.8, -7.5)	3.4924	11.601	1.6486	2.9116

Distribuciones Tipo XXII

Son distribuciones de rango infinito con un único parámetro positivo de entre los del numerador, y todos los demás parámetros negativos y no enteros. Por la condición de convergencia (para $\lambda = 1$) se ha de verificar que $\gamma_1 > \alpha_1 + \alpha_2 + n + m$, por lo que o bien $\gamma_2 + m$ o bien $\gamma_3 + n$ ha de ser el parámetro positivo. Dicha condición no es necesaria si $\lambda = 0.5$, y esto hace que las distribuciones tengan perfiles más variados, como ahora mostraremos.

En general estas distribuciones presentan poligonales con forma acampanada. Pero si $\lambda = 0.5$ y tomamos los parámetros de forma que se emparejen los del numerador con los del denominador, esto es, $E|\alpha_i| = E|\gamma_j|$, es posible encontrar distribuciones con varias modas, puesto que en los puntos siguientes a los valores de dichas parejas de parámetros negativos, puede existir una moda o una antimoda. En la figura 4.16 se muestran distribuciones que presentan algunas antimodas en los puntos indicados, llegando a tener 4 modas como las dos últimas distribuciones representadas. Este hecho es similar a lo que sucede con el Tipo XII de las distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ a las que por cierto incluye.

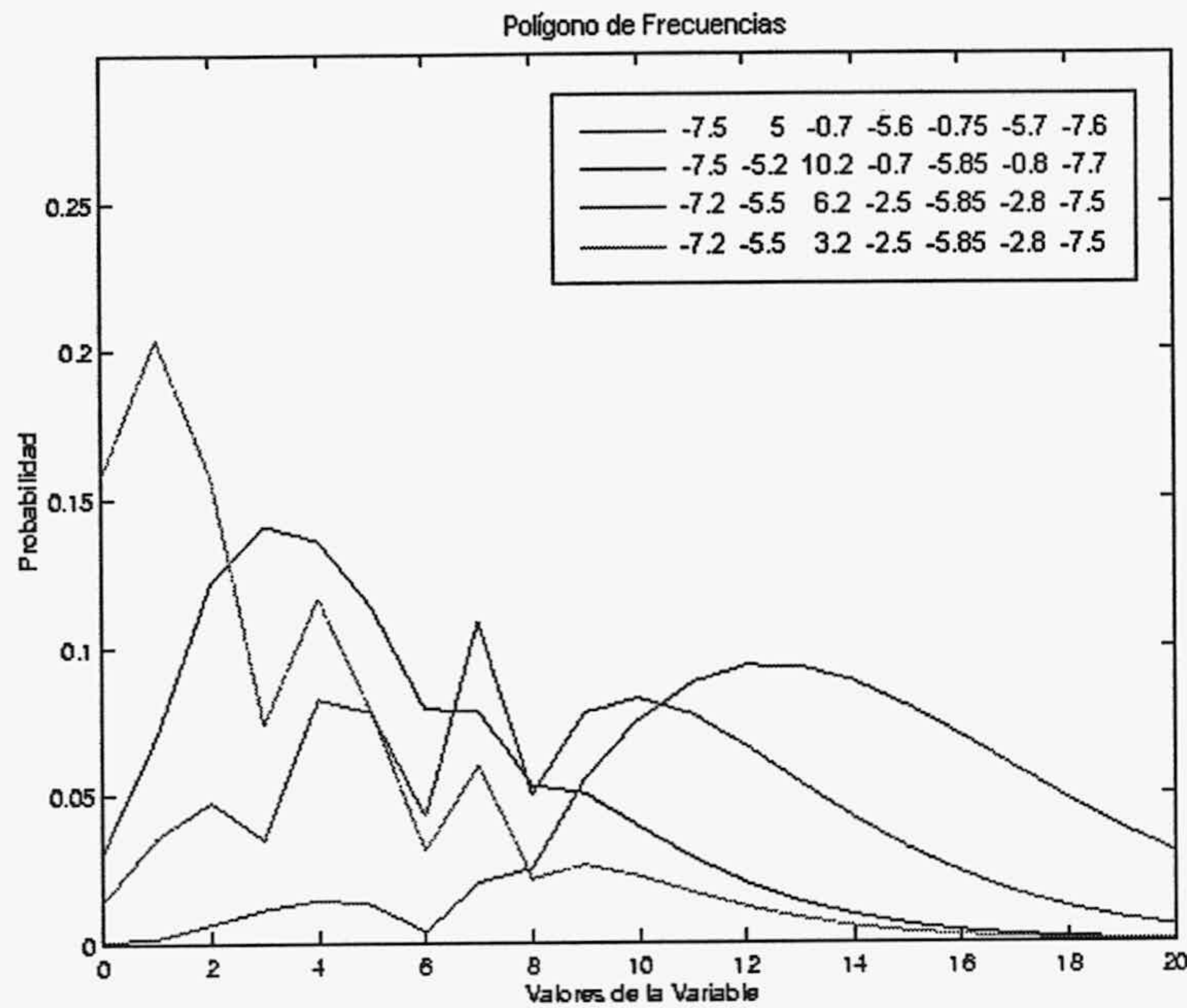


Figura 4.16: Tipo XXII ($\lambda = 0.5$)

Distribuciones Tipo XXIII

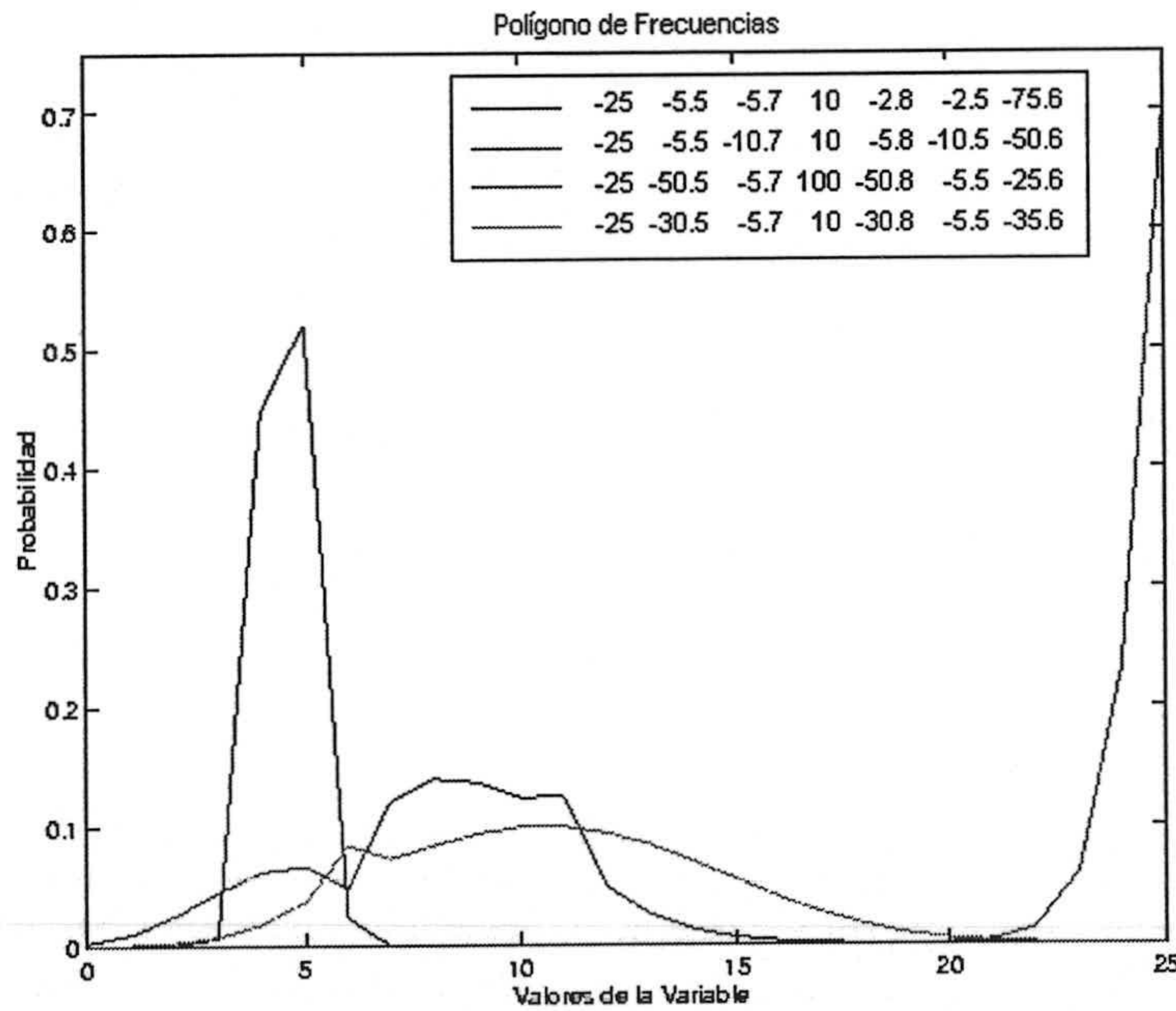
Son distribuciones de rango finito con $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$, los demás parámetros del numerador positivos y los del denominador negativos, con las condiciones de positividad dadas en la tabla 4.1.

Estas distribuciones pueden presentar forma de J, de J traspuesta y acampanada.

Distribuciones Tipo XXIV

También son distribuciones de rango finito con un único parámetro positivo de entre los del numerador y los demás negativos, siendo $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$, y con las condiciones de positividad dadas en la tabla 4.1.

Nos encontramos con distribuciones con forma de J, de J traspuesta, acampanada, con dos o tres modas. Una muestra de la diversidad de poligonales encontradas se recoge en la figura 4.17. Además de las distribuciones que presentan una moda o antimoda en los puntos ya señalados en otras ocasiones, resulta interesante comprobar cómo la primera distribución presenta prácticamente toda la función masa de probabilidad concentrada entre los puntos 3 y 6, aquellos inmediatamente superiores en valor absoluto a los de las parejas de parámetros negativos, justamente lo contrario de lo observado en otras distribuciones (como son las distribuciones del Tipo XVI o del Tipo

Figura 4.17: Tipo XXIV ($\lambda = 1$)

XVIII). Las diferentes formas que presentan estas distribuciones se reflejan en los coeficientes calculados, los cuales se muestran en la tabla 4.15 con valores muy dispares entre sí.

Se ha comprobado que el hecho de que los parámetros de dos distribuciones difieran, no determina que éstas sean distintas entre sí. De hecho la tercera distribución representada en la figura 4.17 es muy similar a la distribución dada por los parámetros $(-25, -5.5, -5.7, 100, -2.8, -2.5, -25.6)$. Y se observa que dichos parámetros son casi iguales a los de la primera distribución representada, la cual se concentra entre los puntos 3 y 6. Lo mismo sucede con las distribuciones ${}_4F_3(-25, -2.5, -5.7, 10, -2.8, -5.5, -25.6)$ y ${}_4F_3(-25, -30.5, -5.7, 10, -30.8, -5.5, -25.6)$, aunque en este caso los parámetros sí son parecidos, puesto que sólo se han incrementado un parámetro del numerador y otro del denominador en la misma cantidad. En definitiva, variaciones de los parámetros pueden significar que las distribuciones sean distintas o parecidas, y no hay una pauta que nos indique la forma que van a presentar.

Por tanto, se puede señalar que las pautas observadas para las distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ se mantienen para las generadas por la ${}_4F_3$. Ocurre, que al tener más parámetros, las posibilidades aumentan y así aparecen distribuciones con trozos separados o incluso con tres modas o cuatro modas.

Tabla 4.15: Distribuciones Tipo XXIV ($\lambda = 1$)

Parámetros	Esperanza	Varianza	Asimetría	Curtosis
(-25, -5.5, -5.7, 10, -2.8, -2.5, -75.6)	4.5618	0.30915	0.050191	-0.066590
(-25, -5.5, -10.7, 10, -5.8, -10.5, -50.6)	8.1154	8.7462	-0.24757	-0.23026
(-25, -50.5, -5.7, 100, -50.8, -5.5, -25.6)	2.4595	0.49366	-2.0330	5.0975
(-25, -30.5, -5.7, 10, -30.8, -5.5, -35.6)	10.629	13.352	0.21290	-0.42648

4.3 Distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$

Vamos a generalizar el caso univariante a través de la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$, para lo cual consideramos las funciones G y L siguientes:

$$\begin{aligned} G(r) &= (\gamma_1 + r) \cdots (\gamma_p + r)(r + 1) \\ L(r) &= (\alpha_1 + r) \cdots (\alpha_{p+1} + r)\lambda \end{aligned} \quad (4.10)$$

con $\alpha_i, i = 1, \dots, p+1; \gamma_j, j = 1, \dots, p$ y λ reales, en principio, cualesquiera.

Aplicando (2.2), la solución de la ecuación en diferencias (2.1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r \cdots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \cdots (\gamma_p)_r r!} \quad (4.11)$$

Para que la función (4.11) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las condiciones del teorema 2.1, esto es,

1. Condición de positividad. Esta condición va a imponer restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$, de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r \cdots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \cdots (\gamma_p)_r r!}$$

que es la función $f_0 \{ {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) - 1 \}$, la cual converge para $|\lambda| < 1$, mientras que para $|\lambda| = 1$ los parámetros han de cumplir las siguientes restricciones:

- (a) si $\omega > 0$, entonces es absolutamente convergente.
- (b) si $-1 < \omega \leq 0$, es condicionalmente convergente.

(c) si $\omega \leq -1$, es divergente.

donde $\omega = \sum_{j=1}^p \gamma_j - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i$

3. Condición de normalización

$$f_0 = {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)^{-1}$$

4.3.1 Funciones generatrices

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (4.11) es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \cdots (\alpha_{p+1})_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r \cdots (\gamma_p)_r r!}$$

esto es,

$$g(t) = \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda t)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \quad (4.12)$$

y para que exista, debe ser convergente para $|t| \leq 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o $|\lambda| = 1$ y $\omega > 0$.

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$, que es una extensión univariante de la conocida función hipergeométrica de Gauss o ${}_2F_1$.

Para aplicar el teorema 2.2 es necesario expresar G en función de $r + 1$, esto es,

$$G(r) = \sum_{i=0}^p b_i (r + 1)^i$$

por lo que los coeficientes b_i serán:

$$b_{p+1} = 1$$

$$b_p = \sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1)$$

$$b_{p-1} = \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^p (\gamma_{i_1} - 1) (\gamma_{i_2} - 1)$$

\vdots

$$b_2 = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{p-1}=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_{p-1}}}^p (\gamma_{i_1} - 1) \cdots (\gamma_{i_{p-1}} - 1)$$

$$b_1 = (\gamma_1 - 1) \cdots (\gamma_p - 1)$$

$$b_0 = 0$$

En el caso de

$$L(r) = \sum_{i=0}^p a_i r^i$$

se tienen los siguientes valores para los coeficientes a_i ,

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= \lambda \\ a_p &= \lambda \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \\ a_{p-1} &= \lambda \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{p+1} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ &\vdots \\ a_1 &= \lambda \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} \\ a_0 &= \lambda \alpha_1 \cdots \alpha_{p+1} \end{aligned}$$

Así, la función generatriz de probabilidad verifica la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda t \alpha_1 \cdots \alpha_{p+1} g(t) &= (1 - \lambda t) \theta^{p+1} g(t) + \\ &+ \left[\sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda t \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] \theta^p g(t) + \cdots + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1) \cdots (\gamma_p - 1) - \lambda t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} \right] \theta g(t) \end{aligned}$$

De igual forma, la función generatriz de momentos verifica la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda e^t \alpha_1 \cdots \alpha_{p+1} M(t) &= (1 - \lambda e^t) D^{p+1} M(t) + \\ &+ \left[\sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda e^t \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] D^p M(t) + \cdots + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1) \cdots (\gamma_p - 1) - \lambda e^t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} \right] D M(t) \end{aligned}$$

y la función característica verificaría:

$$\begin{aligned} \lambda e^{it} \alpha_1 \cdots \alpha_{p+1} \phi(t) &= (1 - \lambda e^{it}) \theta_i^{p+1} \phi(t) + \\ &+ \left[\sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda e^{it} \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] \theta_i^p \phi(t) + \cdots + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1) \cdots (\gamma_p - 1) - \lambda e^{it} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} \right] \theta_i \phi(t) \end{aligned}$$

4.3.2 Relación de recurrencia entre los momentos

Si aplicamos el resultado dado en el teorema 2.3 a la familia de distribuciones generadas por la ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$, nos encontramos con la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} &b_{p+1} \mu'_{p+1+h} + b_p \mu'_{p+h} + \cdots + b_1 \mu'_{1+h} = \\ &= \sum_{m=0}^h \binom{h}{m} \{ a_{p+1} \mu'_{p+1+m} + a_p \mu'_{p+m} + \cdots + a_0 \mu'_m \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde a_i y b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r+1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, para distintos valores de h se obtienen relaciones como la siguiente en que $h = 0$ y $\lambda = 1$:

$$(b_p - a_p) \mu'_p + \cdots + (b_1 - a_1) \mu - a_0 = 0$$

de forma que si se conocen los $p-1$ primeros momentos, se puede obtener el momento de orden p a partir de la expresión anterior, y de ahí los siguientes momentos. En ese sentido, el momento de orden r se define, como ya se señaló en el capítulo 2, como:

$$\mu'_r = [\theta^r g(t)]_{t=1}$$

de donde las expresiones de la media y del momento no centrado de orden 2 son:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\prod_{i=1}^{p+1} \alpha_i \lambda}{\prod_{i=1}^p \gamma_i} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{p+1} + 1; \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_p + 1; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \\ \mu'_2 &= \mu + \frac{\prod_{i=1}^{p+1} (\alpha_i)_2 \lambda^2}{\prod_{i=1}^p (\gamma_i)_2} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1 + 2, \dots, \alpha_{p+1} + 2; \gamma_1 + 2, \dots, \gamma_p + 2; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A partir de las derivadas de la función generatriz de probabilidad se obtienen los momentos factoriales, cuya expresión general es:

$$\mu'_{[r]} = \frac{\prod_{i=1}^{p+1} (\alpha_i)_r \lambda^r}{\prod_{i=1}^p (\gamma_i)_r} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1 + r, \dots, \alpha_{p+1} + r; \gamma_1 + r, \dots, \gamma_p + r; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \quad (4.15)$$

y mediante los que se pueden obtener los momentos no centrados a través de las relaciones que ligan los dos tipos de momentos (Kendall y Stuart, [30]).

El problema, como ya ocurría anteriormente, es que no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica, por lo que no se pueden calcular los valores explícitos de (4.14) o de (4.15), ni de la constante f_0 . No obstante, se ha conseguido un resultado que se puede aplicar a una amplia clase de distribuciones dentro de esta familia, el cual veremos a continuación.

4.3.3 Resultado parcial de sumación

Vamos a demostrar ahora, por inducción, un teorema que nos permite obtener la suma de una amplia clase de funciones hipergeométricas

$${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$$

en donde n es un número natural y siempre que $\gamma_p + n$ no sea el mayor valor entero negativo de los parámetros del numerador.²

Teorema 4.2. *Sea la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$ en la que la diferencia entre uno de los parámetros del numerador y uno del denominador es un número natural n . Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:*

$$\begin{aligned} & {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) = \\ & = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i \cdots (\alpha_p)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i \cdots (\gamma_p)_i} \times \\ & \times {}_pF_{p-1}(\alpha_1 + i, \dots, \alpha_p + i; \gamma_1 + i, \dots, \gamma_{p-1} + i; \lambda) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 4.1. \square

El resultado anterior tiene utilidad práctica cuando se puede calcular el valor de la función hipergeométrica ${}_pF_{p-1}$, por lo que nos interesan funciones

²En este caso, al ser la suma finita, se puede obtener el resultado de manera exacta por el ordenador.

del tipo ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n_1, \dots, \gamma_p + n_{p-1}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p; \lambda)$ con n_j , $j = 1, \dots, p-1$ números naturales, de forma que se llega al siguiente corolario, aplicando el teorema 4.2 recurrentemente,

Corolario 4.4. *En las condiciones del teorema anterior se tiene que:*

$$\begin{aligned}
& {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n_1, \dots, \gamma_p + n_{p-1}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p; \lambda) = \\
& = \sum_{i_1=0}^{n_{p-1}} \binom{n_{p-1}}{i_1} \frac{(\alpha_1)_{i_1} (\alpha_2)_{i_1} (\gamma_2 + n_1)_{i_1} \cdots (\gamma_{p-1} + n_{p-2})_{i_1} \lambda^{i_1}}{(\gamma_1)_{i_1} (\gamma_2)_{i_1} \cdots (\gamma_p)_{i_1}} \times \\
& \times \sum_{i_2=0}^{n_{p-2}} \binom{n_{p-2}}{i_2} \frac{(\alpha_1 + i_1)_{i_2} (\alpha_2 + i_1)_{i_2} (\gamma_2 + i_1 + n_1)_{i_2} \cdots (\gamma_{p-2} + i_1 + n_{p-3})_{i_2} \lambda^{i_2}}{(\gamma_1 + i_1)_{i_2} (\gamma_2 + i_1)_{i_2} \cdots (\gamma_{p-1} + i_1)_{i_2}} \cdots \\
& \cdots \sum_{i_{p-1}=0}^{n_1} \binom{n_1}{i_{p-1}} \frac{(\alpha_1 + i_1 + \cdots + i_{p-2})_{i_{p-1}} (\alpha_2 + i_1 + \cdots + i_{p-2})_{i_{p-1}} \lambda^{i_{p-1}}}{(\gamma_1 + i_1 + \cdots + i_{p-2})_{i_{p-1}} (\gamma_2 + i_1 + \cdots + i_{p-2})_{i_{p-1}}} \times \\
& \times {}_2F_1(\alpha_1 + i_1 + \cdots + i_{p-1}, \alpha_2 + i_1 + \cdots + i_{p-1}; \gamma_1 + i_1 + \cdots + i_{p-1}; \lambda)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Realmente este resultado es aplicable para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita, únicamente habrá que tener cuidado en que el parámetro mayor entero negativo sea α_1 ó α_2 .

De nuevo se obtienen resultados parciales de sumación al considerar $\lambda = 1$ y $\lambda = 1/2$, haciendo uso en el corolario 4.4 de las expresiones (2.18) y (2.20). Dichos resultados han sido también implementados en Matlab consiguiendo de esta forma una herramienta bastante potente en el estudio de distribuciones generadas por funciones del tipo ${}_{p+1}F_p$. En la figura 4.18 se representan distribuciones generadas por las funciones ${}_7F_6(5, 10, 15, 20, 25, 30, 35; 50, 12, 17, 22, 27, 32; 1)$, ${}_7F_6(-22.5, 12, 2.8, -5.5, -10.8, 12.3, -15.7; 20, -5.2, -10.5, -12.8, -15.3, -22.7; 1)$, ${}_7F_6(-22.5, 12, 22.8, 5.5, 5.2, -2.3, -12.7; 50, 12.8, 2.5, -2.8, -12.3, -22.7; 1)$ y ${}_7F_6(-25, 12, 2.8, -5.5, -10.8, 12.3, -15.7; 20, -5.2, -10.5, -12.8, -15.3, -30.7; 1)$ como muestra de la aplicación de este resultado. En ella se observa algunas de las pautas expuestas en las familias de distribuciones anteriores, aumentando el número posible de modas que presentan.

Este teorema también permite obtener el correspondiente valor de la esperanza y del momento de orden 2 de las distribuciones así generadas, ya que en las expresiones (4.14) aparecen funciones hipergeométricas de las consideradas en el teorema 4.2.

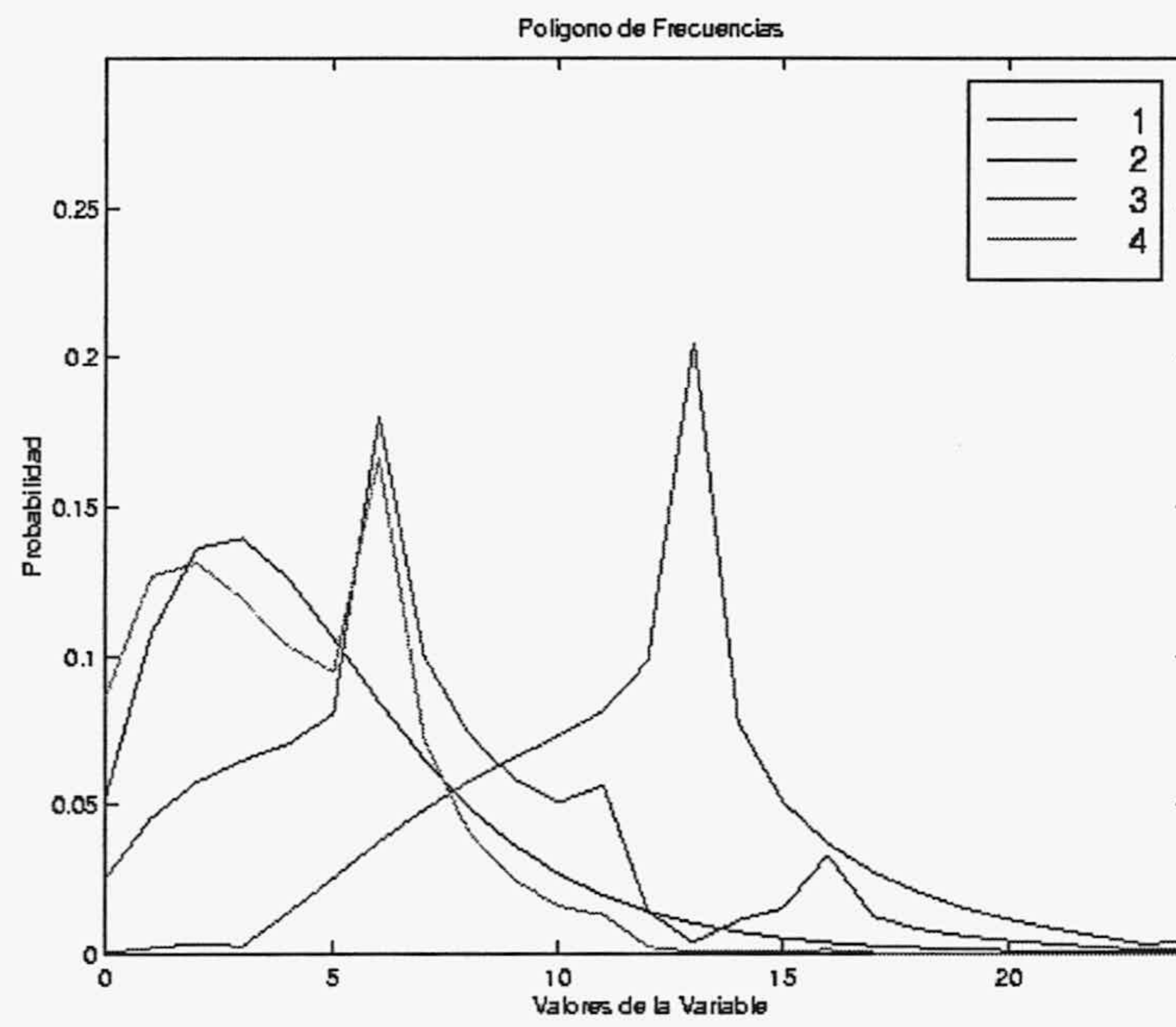
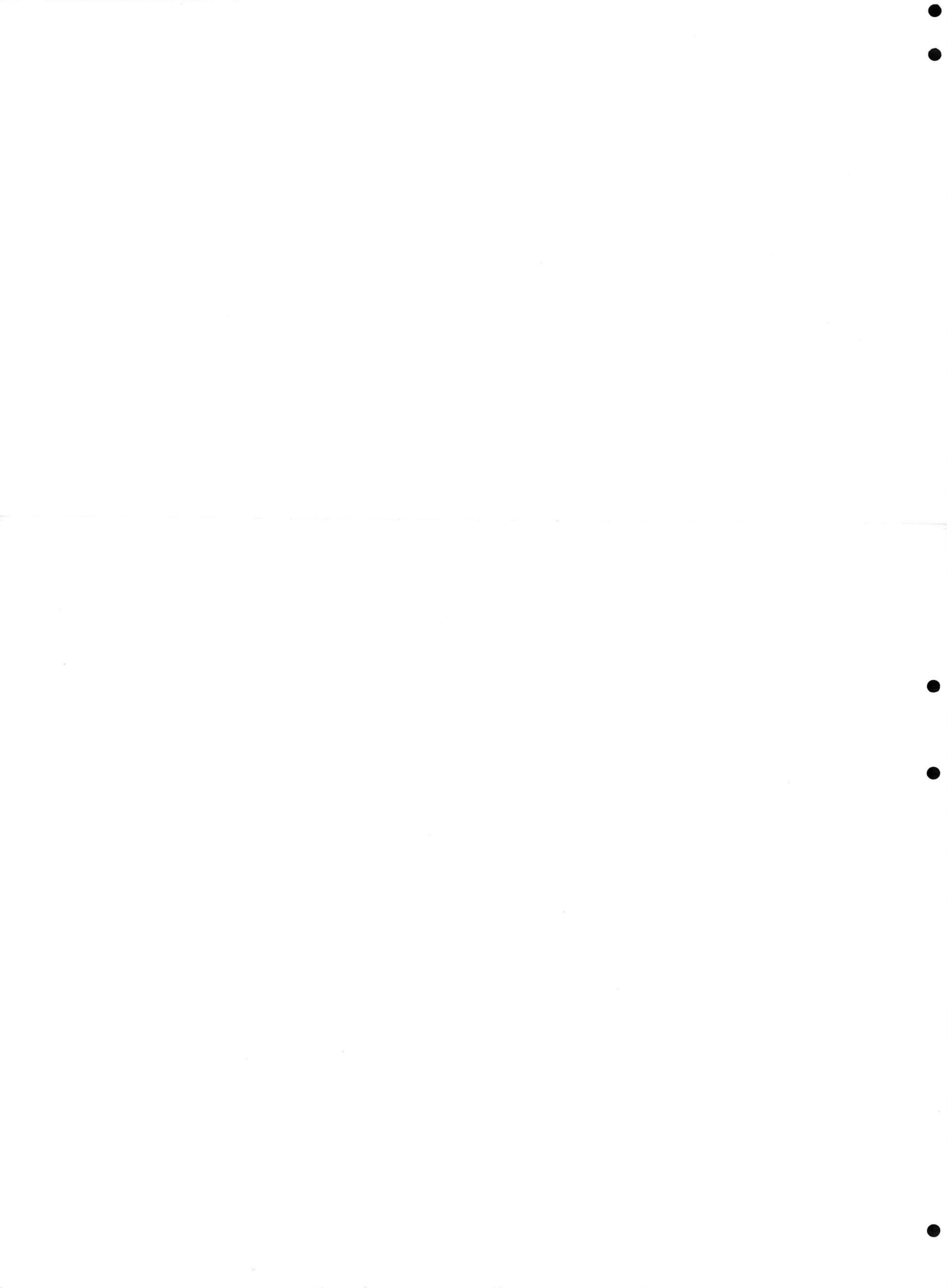


Figura 4.18: Distribuciones generadas por la ${}_7F_6$ ($\lambda = 1$)



Capítulo 5

Distribuciones generadas por la función hipergeométrica

$$F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)$$

5.1 Introducción

La extensión al caso bivalente de las distribuciones generadas por funciones hipergeométricas se ha llevado a cabo mediante las cuatro funciones hipergeométricas de Appell, que son las extensiones bivariantes de la función hipergeométrica de Gauss. De ellas, las familias de distribuciones generadas por la $F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)$ y por la $F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \lambda_1, \lambda_2)$ han sido las más estudiadas, ya que en ellas están incluidas algunas de las distribuciones discretas bivariantes más conocidas, como pueden ser la Hipergeométrica Bivalente, la Hipergeométrica Negativa Bivalente o la Distribución Bivalente Generalizada de Waring en la primera de ellas y la Trinomial y la Binomial Negativa Bivalente en la segunda.

En este capítulo nos centramos en las distribuciones generadas por la función hipergeométrica $F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)$ que presentan la particularidad de que, si bien sus distribuciones condicionadas pertenecen a la familia de distribuciones generadas por la ${}_2F_1$ al igual que para las otras familias de distribuciones bivariantes, sus distribuciones marginales pertenecen a la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, hecho que no ocurre con las otras. Esto nos va a permitir obtener un resultado de sumación para la F_3 cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, basado precisamente en el resultado dado en el teorema 3.1 para la ${}_3F_2$. Dicho resultado nos va a facilitar el valor de la constante normalizadora y a partir de ella podemos conocer explícitamente las probabilidades de una amplia subfamilia de distribuciones. Como consecuencia de la implementación en Matlab de este resultado se pueden obtener las funciones de masa de probabilidad, así como los momentos más usuales de las distribuciones de esta familia.

Previamente se exponen las propiedades de esta familia de distribuciones obtenidas como resultado de aplicar los correspondientes teoremas dados en el capítulo 2. Entre ellas se encuentran las relativas a las distribuciones condicionadas y marginales, dando una expresión para las curvas de regresión. Tras desarrollar el resultado de sumación, se ofrece una clasificación de las distribuciones incluidas en esta familia en función de los valores admisibles para los parámetros. Por último, se muestran algunas distribuciones concretas ofreciendo su representación gráfica, las de sus marginales y las curvas de regresión.

5.2 Resultados generales

Si en el sistema de ecuaciones en diferencias formado por (2.8a) y (2.8b) se consideran los siguientes polinomios, los cuales verifican la ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} L(r, s) &= (\alpha_1 + r)(\beta_1 + r)\lambda_1 & G(r, s) &= (\gamma + r + s)(r + 1) \\ N(r, s) &= (\alpha_2 + s)(\beta_2 + s)\lambda_2 & H(r, s) &= (\gamma + r + s)(s + 1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \lambda_1, \lambda_2$ parámetros reales no nulos y γ no entero negativo, se obtiene como solución, tras aplicar el teorema 2.4, la siguiente función:

$$f_{r,s} = \begin{cases} f_{0,0} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_s (\beta_1)_r (\beta_2)_s \lambda_1^r \lambda_2^s}{(\gamma)_{r+s} r! s!} & r, s \geq 1 \\ f_{0,0} \frac{(\alpha_1)_r (\beta_1)_r \lambda_1^r}{(\gamma)_r r!} & r \geq 1, s = 0 \\ f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s \lambda_2^s}{(\gamma)_s s!} & s \geq 1, r = 0 \\ f_{0,0} & \end{cases} \quad (5.2)$$

Para que la función (5.2) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las condiciones del teorema 2.5, esto es,

1. Condición de positividad. Esta condición va a imponer unas restricciones a los parámetros $\alpha_i, \beta_j, \gamma, \lambda_k$. Posteriormente estudiaremos los tipos de distribuciones en función del rango de valores de los parámetros.
2. Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{\substack{r,s=0 \\ r+s \neq 0 \\ (r,s) \in \mathcal{H}}}^{\infty} \prod_{t=0}^{r-1} \prod_{t'=0}^{s-1} \frac{L(t, s) N(0, t')}{G(t, s) H(0, t')} = f_{0,0} \{F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2) - 1\}$$

y esta suma es convergente para $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$, y si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, lo es cuando $\gamma > \max\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\}$.

3. Condición de normalización

$$f_{0,0} = F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)^{-1} \quad (5.3)$$

donde $F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)$ es una de las funciones hipergeométricas de Appell que generaliza la función hipergeométrica de Gauss.

5.2.1 Funciones generatrices

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (5.2) es:

$$g(t_1, t_2) = \frac{F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1 t_1, \lambda_2 t_2)}{F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)}$$

que converge para $|t_1| \leq 1$, $|t_2| \leq 1$ si $|\lambda_1| \leq 1$, $|\lambda_2| \leq 1$ (con $\gamma > \max\{(\alpha_1 + \beta_1), (\alpha_2 + \beta_2)\}$ para el caso en que $\lambda_1 = 1$ o $\lambda_2 = 1$).

A esta familia de distribuciones se le conoce como la generada por la función hipergeométrica F_3 , que es una extensión bivariante de la conocida función hipergeométrica de Gauss o ${}_2F_1$.

Para aplicar el teorema 2.6 es necesario expresar los coeficientes polinomiales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(r, s) &= (\gamma - 1)(r + 1) + (r + 1)s + (r + 1)^2 \\ H(r, s) &= (\gamma - 1)(s + 1) + r(s + 1) + (s + 1)^2 \\ L(r, s) &= \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 + (\alpha_1 + \beta_1) \lambda_1 r + \lambda_1 r^2 \\ N(r, s) &= \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 + (\alpha_2 + \beta_2) \lambda_2 s + \lambda_2 s^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Así, la función generatriz de probabilidad verifica el sistema de ecuaciones diferenciales parciales siguiente,

$$\begin{aligned} t_1 \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 g(t_1, t_2) &= (1 - \lambda_1 t_1) \theta_1^2 g(t_1, t_2) + \\ &+ [\gamma - 1 - \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) t_1] \theta_1 g(t_1, t_2) + \theta_1 \theta_2 g(t_1, t_2) \\ t_2 \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 g(t_1, t_2) &= (1 - \lambda_2 t_2) \theta_2^2 g(t_1, t_2) + \\ &+ [\gamma - 1 - \lambda_2 (\alpha_2 + \beta_2) t_2] \theta_2 g(t_1, t_2) + \theta_1 \theta_2 g(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

De igual forma, la función generatriz de momentos verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales,

$$\begin{aligned} e^{t_1} \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 M(t_1, t_2) &= (1 - \lambda_1 e^{t_1}) D_1^2 M(t_1, t_2) + \\ &+ [\gamma - 1 - \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) e^{t_1}] D_1 M(t_1, t_2) + D_1 D_2 M(t_1, t_2) \\ e^{t_2} \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 M(t_1, t_2) &= (1 - \lambda_2 e^{t_2}) D_2^2 M(t_1, t_2) + \\ &+ [\gamma - 1 - \lambda_2 (\alpha_2 + \beta_2) e^{t_2}] D_2 M(t_1, t_2) + D_1 D_2 M(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

y la función característica verificaría:

$$\begin{aligned}
e^{it_1} \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 \phi(t_1, t_2) &= (1 - \lambda_1 e^{it_1}) \theta_1'^2 \phi(t_1, t_2) + \\
&\quad + [\gamma - 1 - \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) e^{it_1}] \theta_1' \phi(t_1, t_2) + \theta_1' \theta_2' \phi(t_1, t_2) \\
e^{it_2} \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 \phi(t_1, t_2) &= (1 - \lambda_2 e^{it_2}) \theta_2'^2 \phi(t_1, t_2) + \\
&\quad + [\gamma - 1 - \lambda_2 (\alpha_2 + \beta_2) e^{it_2}] \theta_2' \phi(t_1, t_2) + \theta_1' \theta_2' \phi(t_1, t_2)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2.2 Relación de recurrencia entre los momentos

Para obtener las relaciones de recurrencia entre momentos, empleamos el teorema 2.7. En este caso, y expresando los polinomios como en (5.4), la primera relación es:

$$\begin{aligned}
(\gamma - 1) \sum_{m=0}^g \binom{g}{m} \mu'_{1+f,m} + \sum_{m=0}^g \binom{g}{m} \mu'_{1+f,1+m} + \sum_{m=0}^g \binom{g}{m} \mu'_{2+f,m} = \\
= \sum_{n=0}^f \sum_{m=0}^g \binom{f}{n} \binom{g}{m} \{ \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 \mu'_{n,m} + (\alpha_1 + \beta_1) \lambda_1 \mu'_{1+n,m} + \lambda_1 \mu'_{2+n,m} \}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Reemplazando en esta expresión para distintos valores de f y g obtenemos relaciones como las que siguen, en donde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \beta_1 &= [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)] \mu'_{1,0} + \mu'_{1,1} \\
\alpha_1 \beta_1 &= [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)] \mu'_{1,0} + [\gamma - (\alpha_1 + \beta_1)] \mu'_{1,1} + \mu'_{1,2} - \alpha_1 \beta_1 \mu'_{0,1} \\
\alpha_1 \beta_1 &= [\gamma - 2 - (\alpha_1 + \beta_1)] \mu'_{2,0} + \mu'_{2,1} + [\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 + \beta_1] \mu'_{1,0}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

La segunda relación de recurrencia entre momentos es:

$$\begin{aligned}
(\gamma - 1) \sum_{n=0}^f \binom{f}{n} \mu'_{n,1+g} + \sum_{n=0}^f \binom{f}{n} \mu'_{1+n,1+g} + \sum_{n=0}^f \binom{f}{n} \mu'_{n,2+g} = \\
= \sum_{n=0}^f \sum_{m=0}^g \binom{f}{n} \binom{g}{m} \{ \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 \mu'_{n,m} + (\alpha_2 + \beta_2) \lambda_2 \mu'_{n,1+m} + \lambda_2 \mu'_{n,2+m} \}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

De igual forma para distintos valores de f y g obtenemos las siguientes relaciones, en donde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 \beta_2 &= [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)] \mu'_{0,1} + \mu'_{1,1} \\
\alpha_2 \beta_2 &= [\gamma - 1 - (\alpha_2 + \beta_2)] \mu'_{0,1} + [\gamma - (\alpha_2 + \beta_2)] \mu'_{1,1} + \mu'_{2,1} - \alpha_2 \beta_2 \mu'_{1,0} \\
\alpha_2 \beta_2 &= [\gamma - 2 - (\alpha_2 + \beta_2)] \mu'_{0,2} + \mu'_{1,2} + [\alpha_2 \beta_2 + \alpha_2 + \beta_2] \mu'_{0,1}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Así, si conocemos una de las medias marginales podemos obtener todos los momentos no centrados. En ese sentido, como las medias marginales son:

$$\mu'_{1,0} = t_1 \frac{d}{dt_1} g(t_1, t_2) \Big|_{t_1=1}$$

$$\mu'_{0,1} = t_2 \frac{d}{dt_2} g(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1}$$

se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mu'_{1,0} &= f_{0,0} \frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma} F_3(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \beta_1 + 1, \beta_2; \gamma + 1; 1, 1) \\ \mu'_{0,1} &= f_{0,0} \frac{\alpha_2 \beta_2}{\gamma} F_3(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \beta_1, \beta_2 + 1; \gamma + 1; 1, 1) \\ \mu'_{1,1} &= \alpha_1 \beta_1 - [\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1)] \mu'_{1,0} \\ \mu'_{2,1} &= \alpha_2 \beta_2 \mu'_{1,0} - [\gamma - (\alpha_2 + \beta_2)] \mu'_{1,1} \\ \mu'_{1,2} &= \alpha_1 \beta_1 \mu'_{0,1} - [\gamma - (\alpha_1 + \beta_1)] \mu'_{1,1} \\ \mu'_{2,0} &= \frac{1}{\gamma - 2 - (\alpha_1 + \beta_1)} \{ \alpha_1 \beta_1 - \mu'_{2,1} + [\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 + \beta_1] \mu'_{1,0} \} \\ \mu'_{0,2} &= \frac{1}{\gamma - 2 - (\alpha_2 + \beta_2)} \{ \alpha_2 \beta_2 - \mu'_{1,2} + [\alpha_2 \beta_2 + \alpha_2 + \beta_2] \mu'_{0,1} \} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como vemos las medias marginales aparecen expresadas en términos de la función hipergeométrica F_3 , la cual para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ es una serie. El valor de dicha serie no es conocido en general, de ahí que sea interesante obtener algunos resultados que nos permitan sumar esa serie. Precisamente al estudiar las distribuciones marginales y condicionadas nos encontramos con una expresión que nos da el valor de esa suma en una amplia clase de funciones.

5.3 Distribuciones condicionadas y marginales

Para obtener las distribuciones condicionadas y marginales aplicamos el teorema 2.8 que nos da la ecuación en diferencias que verifica la función de densidad condicionada, que en este caso son unidimensionales. Las soluciones, de acuerdo a los correspondientes valores de los coeficientes polinomiales en cada caso están dadas por:

$$f_{r/s} = \begin{cases} f_{0/s} \frac{(\alpha_1)_r (\beta_1)_r \lambda_1^r}{(\gamma + s)_r r!} & r \geq 1 \\ f_{0/s} & r = 0 \end{cases}$$

$$f_{s/r} = \begin{cases} f_{0/r} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s \lambda_2^s}{(\gamma + r)_s s!} & s \geq 1 \\ f_{0/r} & s = 0 \end{cases}$$

donde $f_{0/s} = {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma + s; \lambda_1)^{-1}$ y $f_{0/r} = {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma + r; \lambda_2)^{-1}$.

Las funciones generatrices de probabilidad, por tanto, son:

$$\begin{aligned} g(t) &= f_{0/s} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma + s; \lambda_1 t) \\ g(t) &= f_{0/r} {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma + r; \lambda_2 t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

con $r, s \in \mathbb{Z}^+$. De ahí que las distribuciones condicionadas pertenezcan a la familia de distribuciones univariantes generada por la función hipergeométrica de Gauss.

Por otra parte, las curvas de regresión están dadas por la media de las distribuciones condicionadas y son no lineales. Así si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 = E[\xi_1 = r/\xi_2 = s] &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{\gamma + s - \alpha_1 - \beta_1 - 1} \\ \hat{\xi}_2 = E[\xi_2 = s/\xi_1 = r] &= \frac{\alpha_2 \beta_2}{\gamma + r - \alpha_2 - \beta_2 - 1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se observa que las curvas son decrecientes, es decir, que al aumentar el valor de una de las variables la otra disminuye, de ahí que la covarianza para esta familia sea negativa y también su coeficiente de correlación.

En cuanto a las distribuciones marginales, para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.1. *Las funciones generatrices de probabilidad de las distribuciones marginales son:*

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{{}_3F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma - \alpha_2 - \beta_2; \gamma - \alpha_2, \gamma - \beta_2; t)}{{}_3F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma - \alpha_2 - \beta_2; \gamma - \alpha_2, \gamma - \beta_2; 1)} \\ g_2(t) &= \frac{{}_3F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma - \alpha_1 - \beta_1; \gamma - \alpha_1, \gamma - \beta_1; t)}{{}_3F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma - \alpha_1 - \beta_1; \gamma - \alpha_1, \gamma - \beta_1; 1)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por lo que dichas distribuciones pertenecen a la familia de distribuciones univariantes generadas por la función hipergeométrica ${}_3F_2$

Demostración. Empezamos calculando la función masa de probabilidad de una de ellas, por ejemplo la relativa a la segunda variable,

$$\begin{aligned} f_s &= f_{0,0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_s (\beta_1)_r (\beta_2)_s}{(\gamma)_{r+s} r! s!} = \\ &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s}{(\gamma)_s s!} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma + s; 1) \end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha_1, \beta_1 \notin \mathbb{Z}^-$ en cuyo caso podemos aplicar el teorema

de sumación de Gauss para la ${}_2F_1$ y tenemos:

$$\begin{aligned} f_s &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s \Gamma(\gamma + s) \Gamma(\gamma + s - \alpha_1 - \beta_1)}{(\gamma)_s s! \Gamma(\gamma + s - \alpha_1) \Gamma(\gamma + s - \beta_1)} = \\ &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s \Gamma(\gamma) (\gamma - \alpha_1 - \beta_1)_s \Gamma(\gamma - \alpha_1 - \beta_1)}{s! (\gamma - \alpha_1)_s \Gamma(\gamma - \alpha_1) (\gamma - \beta_1)_s \Gamma(\gamma - \beta_1)} = \\ &= f_{0,0} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma; 1) \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s (\gamma - \alpha_1 - \beta_1)_s}{(\gamma - \alpha_1)_s (\gamma - \beta_1)_s s!} \end{aligned}$$

Si consideramos el caso en que $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^-$ tenemos:

$$\begin{aligned} f_s &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s (\gamma + s - \beta_1)_{-\alpha_1}}{(\gamma)_s s! (\gamma + s)_{-\alpha_1}} = \\ &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s \Gamma(\gamma + s - \beta_1 - \alpha_1) \Gamma(\gamma + s)}{(\gamma)_s s! \Gamma(\gamma + s - \beta_1) \Gamma(\gamma + s - \alpha_1)} = \\ &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s (\gamma - \beta_1 - \alpha_1)_s \Gamma(\gamma - \alpha_1 - \beta_1) \Gamma(\gamma)}{s! (\gamma - \beta_1)_s \Gamma(\gamma - \beta_1) (\gamma - \alpha_1)_s \Gamma(\gamma - \alpha_1)} = \\ &= f_{0,0} \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s (\gamma - \beta_1 - \alpha_1)_s (\gamma - \beta_1)_{-\alpha_1}}{(\gamma - \alpha_1)_s (\gamma - \beta_1)_s s! (\gamma)_{-\alpha_1}} \end{aligned}$$

que coincide con el resultado anterior. De la misma forma si consideramos $\beta_1 \in \mathbb{Z}^-$ se llega a la misma expresión.

Para que f_s sea función masa de probabilidad ha de verificarse que $\sum_s f_s = 1$, con lo cual:

$$1 = f_{0,0} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma; 1) \sum_s \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s (\gamma - \alpha_1 - \beta_1)_s}{(\gamma - \alpha_1)_s (\gamma - \beta_1)_s s!}$$

es decir,

$${}_3F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma - \alpha_1 - \beta_1; \gamma - \alpha_1, \gamma - \beta_1; 1) = \{f_{0,0} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma; 1)\}^{-1} \quad (5.16)$$

Nos queda calcular únicamente la función generatriz de probabilidad, que es,

$$g_2(t) = \sum_s t^s f_s = f_{0,0} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma; 1) \sum_s \frac{(\alpha_2)_s (\beta_2)_s (\gamma - \alpha_1 - \beta_1)_s t^s}{(\gamma - \alpha_1)_s (\gamma - \beta_1)_s s!}$$

y utilizando la igualdad (5.16) llegamos a la expresión buscada. De igual forma se calcula la función generatriz de probabilidad para la primera variable. \square

La igualdad (5.16) tiene además bastante importancia, pues nos permite obtener un resultado mediante el cual podemos calcular el valor de la serie F_3 siempre con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Dicho resultado es enunciado a continuación.

Corolario 5.1. *La función bivalente F_3 toma el siguiente valor para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:*

$$\begin{aligned} F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; 1, 1) &= {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma; 1) \times \\ &\quad \times {}_3F_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma - \alpha_1 - \beta_1; \gamma - \alpha_1, \gamma - \beta_1; 1) \\ F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; 1, 1) &= {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma; 1) \times \\ &\quad \times {}_3F_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma - \alpha_2 - \beta_2; \gamma - \alpha_2, \gamma - \beta_2; 1) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Demostración. La primera igualdad se obtiene a partir de (5.15) y de (5.16), mientras que la segunda aparece al trabajar con la función generatriz de probabilidad marginal de la primera variable. \square

El resultado anterior es interesante cuando se puede aplicar en la práctica, que en nuestro caso es cuando podemos obtener el valor de la ${}_3F_2$ que en ella aparece. Considerando que la serie no es finita, pues en ese caso siempre podremos sumarla, se ha de verificar que alguna de las siguientes expresiones sea un entero positivo, para poder aplicar el teorema 3.1:

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 - \gamma + \alpha_1 & \alpha_1 - \gamma + \alpha_2 \\ \alpha_2 - \gamma + \beta_1 & \alpha_1 - \gamma + \beta_2 \\ \beta_2 - \gamma + \alpha_1 & \beta_1 - \gamma + \alpha_2 \\ \beta_2 - \gamma + \beta_1 & \beta_1 - \gamma + \beta_2 \end{array} \quad (5.18)$$

utilizando la primera de las expresiones de (5.17) si se da alguna de las condiciones de la izquierda y la segunda para las de la derecha.

También ha de considerarse el caso en que esa función ${}_3F_2$ se simplifique en una ${}_2F_1$, esto es, cuando uno de los parámetros del numerador coincida con uno de los del denominador. Esto sucede, por ejemplo, cuando $\alpha_2 = \gamma - \alpha_1$ o $\beta_2 = \gamma - \beta_1$. Así nos encontramos con el siguiente resultado que simplifica el corolario 5.1 en unas condiciones concretas que se enuncian a continuación:

Corolario 5.2. *La función $F_3(\alpha, \gamma - \alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma; 1, 1)$ donde $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma - \alpha - \beta_1, \gamma - \beta_1 \notin \mathbb{Z}^-$ toma el siguiente valor:*

$$F_3(\alpha, \gamma - \alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma; 1, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta_1)\Gamma(\alpha - \beta_2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2)} \quad (5.19)$$

Demostración. La demostración es muy simple, pues basta aplicar el corolario 5.1 y operar para llegar a la expresión (5.19). \square

Este resultado ya fue comprobado por Rodríguez, [44], aunque aquí lo presentamos como un caso particular del expresado en el corolario 5.1.

Dichos resultados se han implementado en Matlab lo cual nos ha permitido calcular la distribución de probabilidad de una amplia clase de distribuciones generadas por la F_3 , así como representarlas gráficamente. Antes de ver algunos ejemplos, vamos a presentar los distintos tipos de distribuciones atendiendo a los valores que pueden tomar los parámetros.

5.4 Clasificación

La tabla que a continuación aparece, 5.1, es una reclasificación de los tipos de distribuciones incluidos en esta familia, que simplifica y resume la que aparece en Rodríguez, [44]. En este caso el parámetro γ ha de ser siempre positivo, para que se verifique la condición de positividad.

Como hemos visto en la sección anterior, las marginales están incluidas en la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, por lo que podemos indicar de qué tipo van a ser las marginales para los seis tipos de distribuciones bivariantes de la tabla 5.1. Sucede que:

- si $\alpha_i, \beta_i > 0$ entonces por las condiciones de convergencia $\gamma - \alpha_i - \beta_i > 0$ y de igual forma $\gamma - \alpha_i, \gamma - \beta_i > 0$.
- si $\alpha_i, \beta_i < 0$ y como $\gamma > 0$, cualquier diferencia entre éste y los anteriores nos da un resultado positivo.

De ahí que en cualquier caso los dos parámetros del denominador y uno del numerador sean positivos en las distribuciones marginales, lo cual nos reduce los posibles tipos de éstas a los tipos I, II y III.

Tipo I: Como los parámetros $\alpha_i, \beta_i > 0$; $i = 1, 2$, las dos marginales son del Tipo I.

Tipo II: Aquí dos son positivos y otros dos negativos no enteros, por lo que una de las marginales es del Tipo I y la otra del Tipo II.

Tipo III: Con dos parámetros positivos tenemos una marginal del Tipo I, mientras que la otra será del Tipo III.

Tipo IV: Como los parámetros $\alpha_i, \beta_i < 0$; $i = 1, 2$, y no enteros, las dos marginales son del Tipo II.

Tipo V: De los dos parámetros negativos no enteros tenemos una marginal del Tipo II, y la otra es del Tipo III.

Tipo VI: Las dos marginales son del Tipo III.

Tabla 5.1: Tipos de distribuciones para la F_3

Parámetros	Condiciones	Rango	Tipo
$\boxed{\gamma > 0}$			
(i) $\alpha_i, \beta_i > 0, i = 1, 2$			
$\alpha_i, \beta_i > 0, i = 1, 2$	$\gamma > \max\{\alpha_i + \beta_i\}$	$r_i \in [0, \infty)$	I
(ii) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i > 0; \alpha_j, \beta_j < 0; \\ i, j = 1, 2; i \neq j \end{array} \right.$			
$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-;$	$\left. \begin{array}{l} \gamma > \alpha_i + \beta_i \text{ y} \\ E \alpha_j = E \beta_j \end{array} \right\}$	$r_i, r_j \in [0, \infty)$	II
$\alpha_j \text{ ó } \beta_j \in \mathbb{Z}^-$	$\left. \begin{array}{l} \gamma > \alpha_i + \beta_i \text{ y} \\ \alpha_j > \beta_j - 1 \text{ ó} \\ \beta_j > \alpha_j - 1 \end{array} \right\} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \gamma > \alpha_i + \beta_i \text{ y} \\ \alpha_j > \beta_j - 1 \text{ ó} \\ \beta_j > \alpha_j - 1 \end{array}} \right\}$	$r_i \in [0, \infty)$ $r_j \in [0, \min\{ \alpha_j , \beta_j \}]$	III
(iii) $\alpha_i, \beta_i < 0, i = 1, 2$			
$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-, i = 1, 2$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_i = E \beta_i \text{ y} \\ E \alpha_j = E \beta_j \end{array} \right\}$	$r_i \in [0, \infty)$	IV
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_j \text{ ó } \beta_j \in \mathbb{Z}^-; \\ i, j = 1, 2; i \neq j \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} E \alpha_i = E \beta_i \text{ y} \\ \alpha_j > \beta_j - 1 \text{ ó} \\ \beta_j > \alpha_j - 1 \end{array} \right\} \left. \vphantom{\begin{array}{l} E \alpha_i = E \beta_i \text{ y} \\ \alpha_j > \beta_j - 1 \text{ ó} \\ \beta_j > \alpha_j - 1 \end{array}} \right\}$	$r_i \in [0, \infty)$ $r_j \in [0, \min\{ \alpha_j , \beta_j \}]$	V
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \text{ ó } \beta_i \in \mathbb{Z}^-; \\ \alpha_j \text{ ó } \beta_j \in \mathbb{Z}^-; \\ i = 1, 2; i \neq j \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \alpha_i > \beta_i - 1 \text{ ó} \\ \beta_i > \alpha_i - 1 \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{l} \alpha_j > \beta_j - 1 \text{ ó} \\ \beta_j > \alpha_j - 1 \end{array} \right\} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_i > \beta_i - 1 \text{ ó} \\ \beta_i > \alpha_i - 1 \\ \alpha_j > \beta_j - 1 \text{ ó} \\ \beta_j > \alpha_j - 1 \end{array}} \right\}$	$r_i \in [0, \min\{ \alpha_i , \beta_i \}]$ $r_j \in [0, \min\{ \alpha_j , \beta_j \}]$	VI

5.5 Estudio de casos concretos

El resultado que aparece en el corolario 5.1 se puede aplicar a los Tipos I, III, V y VI, mientras que los Tipos II y IV presentan parámetros que no verifican ninguna de las expresiones (5.18), por lo que no podemos utilizar dicho resultado con los mismos. Éste ha sido programado para el caso en que $\beta_2 - \gamma + \beta_1$ es un número natural, esto es $\beta_2 = \gamma - \beta_1 + n$.

A continuación presentamos los gráficos de algunas distribuciones bivalentes, mostrando para algunas de ellas las distribuciones marginales y las curvas de regresión. Por último, se ha incluido una tabla con los principales momentos de las distribuciones representadas.

Como las distribuciones pertenecientes en los Tipos I, II y III de la familia generada por la ${}_3F_2$ tienen un perfil de J traspuesta con moda en cero o acampanado, las distribuciones bivalentes presentarán una forma también acampanada o con las probabilidades concentradas en el valor cero en alguno de los ejes del plano formado por las dos variables. Esto se podrá observar en los gráficos que mostramos de los distintos tipos.

5.5.1 Distribuciones Tipo VI

Estas distribuciones son de rango finito en ambas variables, por lo que no es necesario utilizar el corolario 5.1, lo cual evita tener que imponer las restricciones de dicho resultado a los parámetros. Así los parámetros verifican que: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}^-, \beta_1, \beta_2 < 0$ con $|\beta_1| > |\alpha_1| - 1$ y $|\beta_2| > |\alpha_2| - 1$.

En primer lugar se presenta mediante un estereograma y un retículo la misma distribución; éstas son las figuras 5.1 y 5.2. Consideramos que este último tipo de representación es mucho más claro sobre todo cuando el rango de valores es muy alto, por lo que será el que utilizemos de aquí en adelante.

La figura 5.3 muestra las distribuciones marginales correspondientes a la distribución anterior. Son distribuciones pertenecientes al Tipo III estudiado en el capítulo 3, presentando en este caso concreto un perfil acampanado.

La figura 5.4 por su parte muestra las curvas de regresión para esa misma distribución bivalente y que vienen dadas por las expresiones (5.12). Dichas curvas son casi lineales, pero muestran poca asociación entre las variables implicadas, lo cual se refleja también en el coeficiente de correlación lineal que aparece en la tabla 5.2.

Las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 muestran un hecho bastante previsible: al aumentar el valor del parámetro γ la distribución se desplaza hacia el punto (0,0), mientras que si se aumenta el valor de alguno de los parámetros del numerador entonces se aleja de dicho punto. La forma de las distribuciones representadas, en todo caso, es similar a la de una normal bivalente.

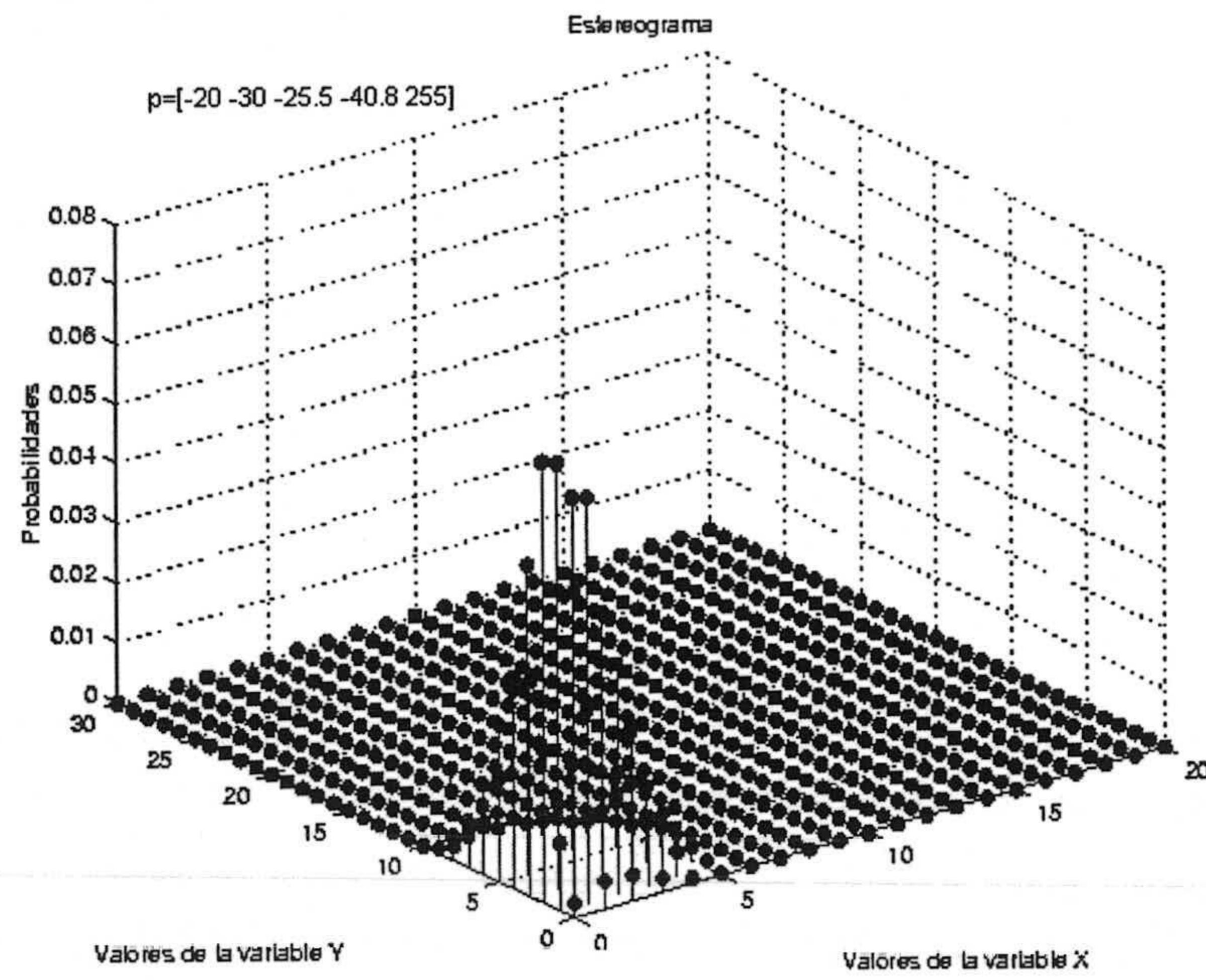


Figura 5.1: Tipo VI

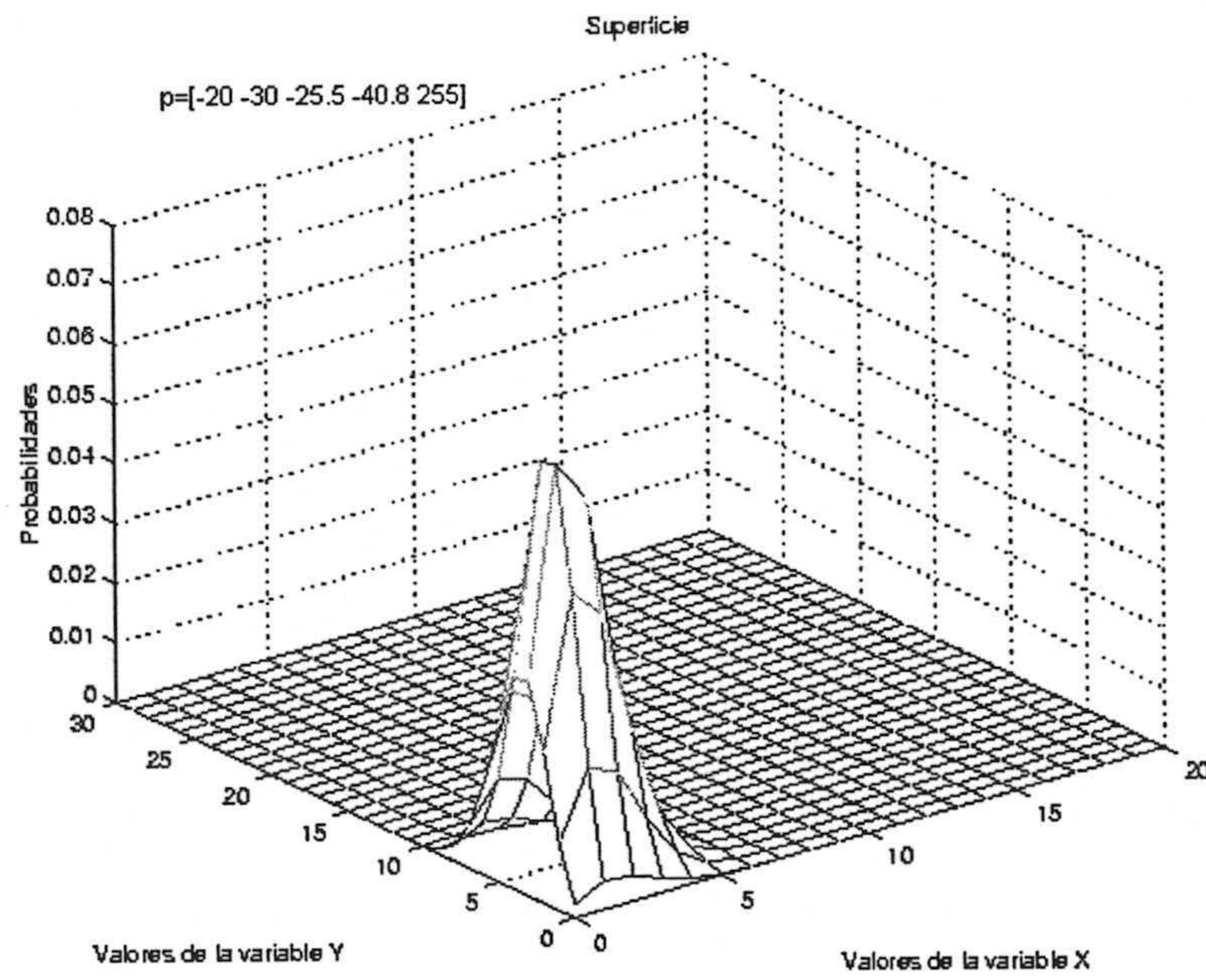


Figura 5.2: Tipo VI

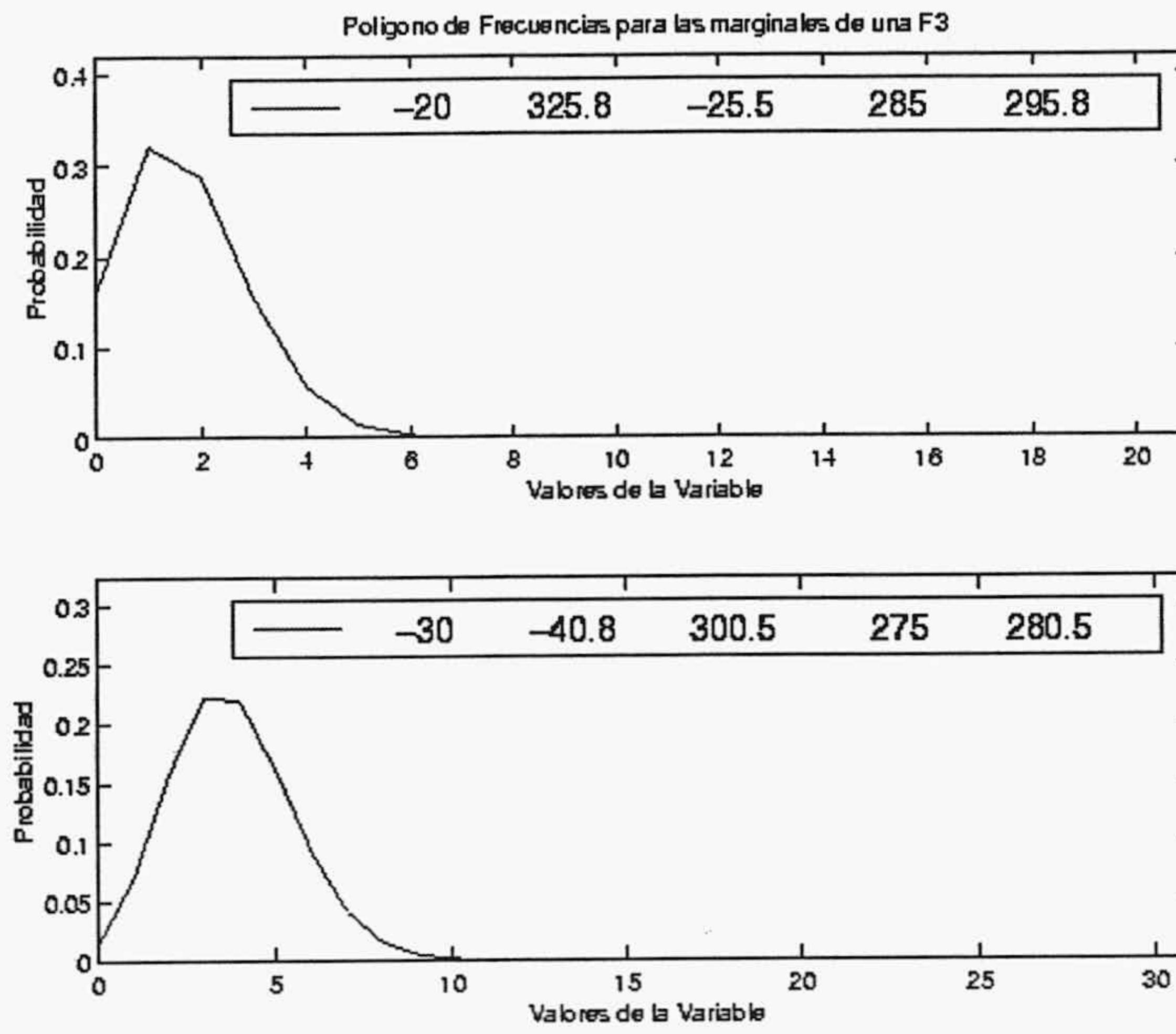


Figura 5.3: Tipo VI

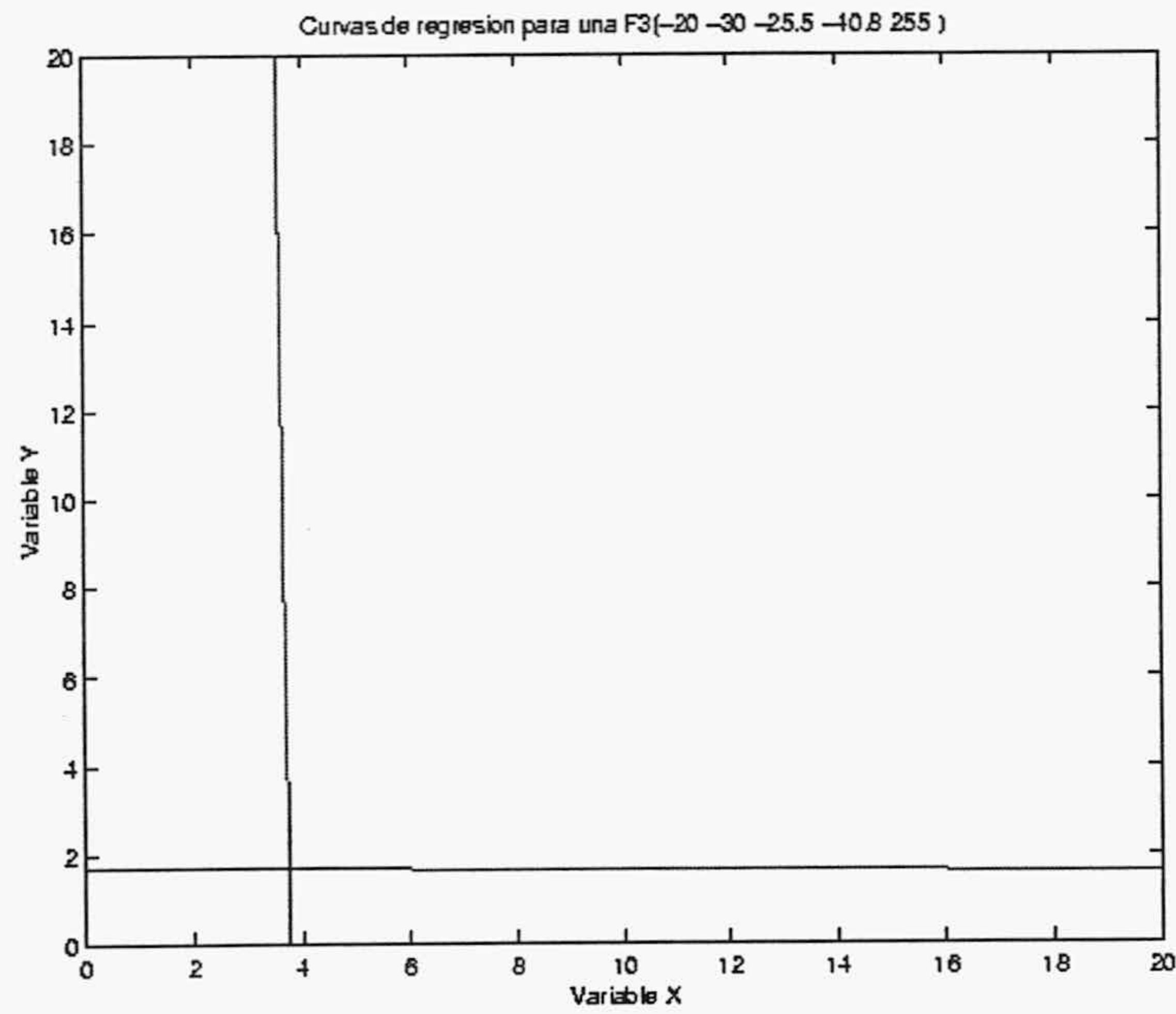


Figura 5.4: Tipo VI

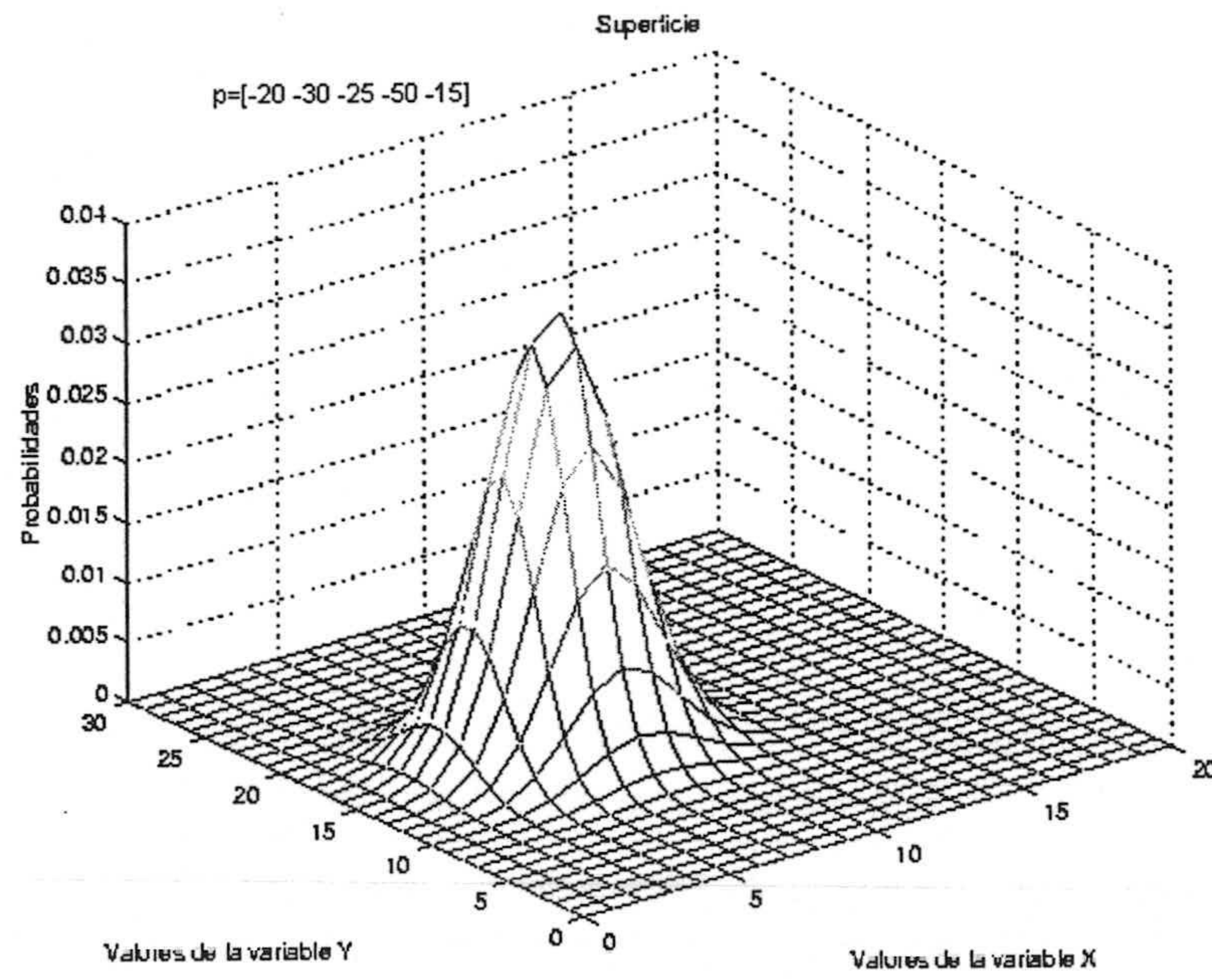


Figura 5.5: Tipo VI

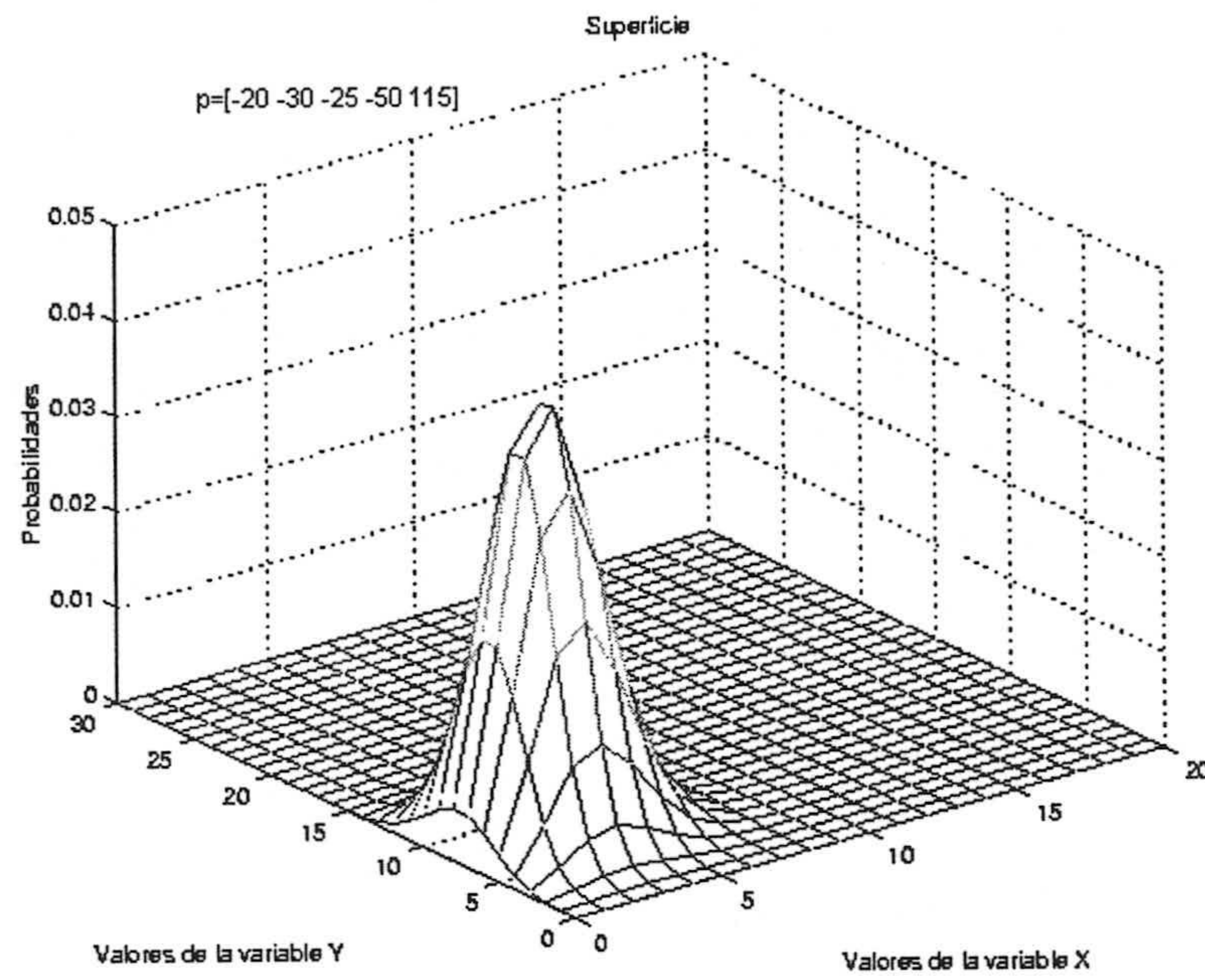


Figura 5.6: Tipo VI

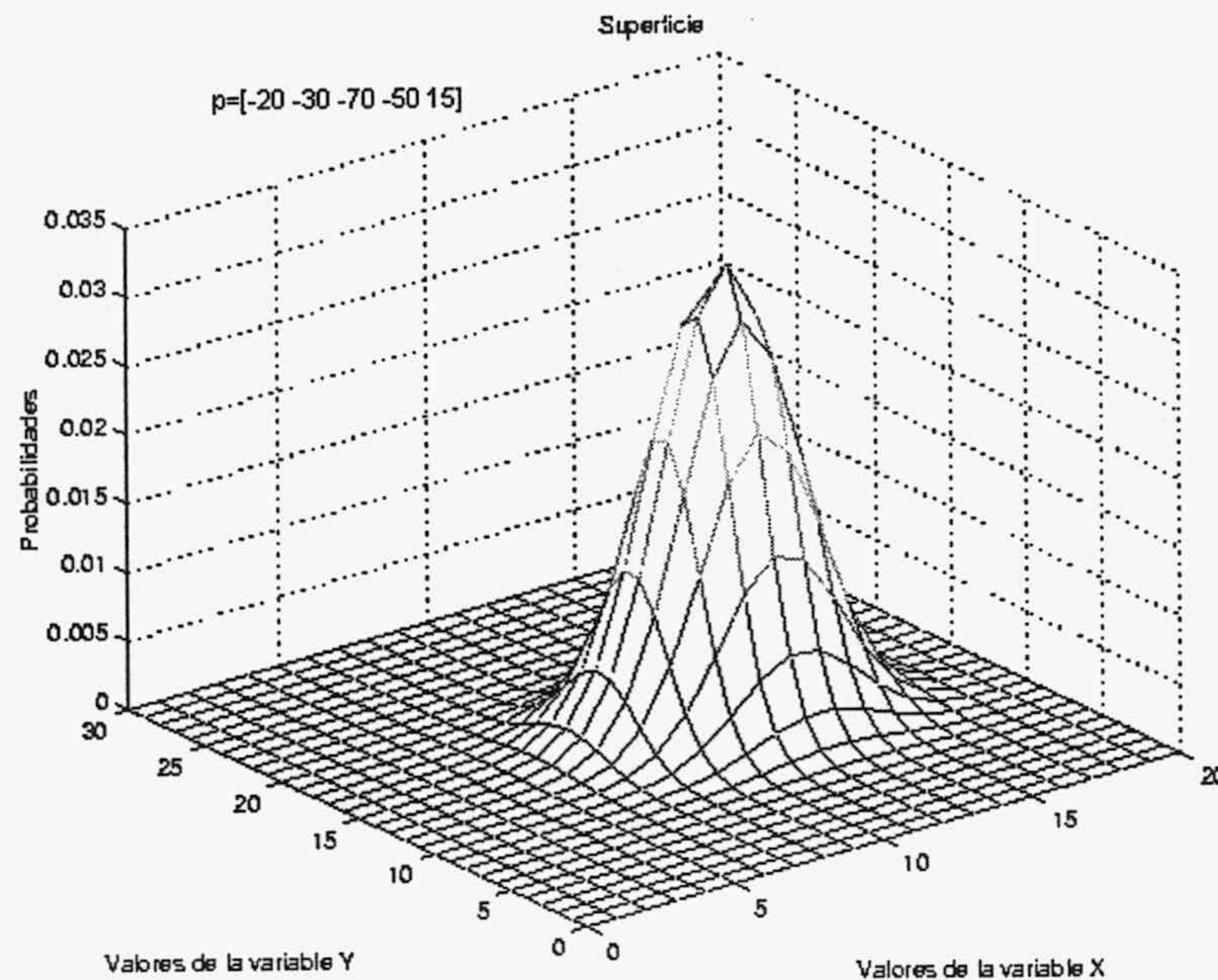


Figura 5.7: Tipo VI

5.5.2 Distribuciones Tipo I

Estas distribuciones son de rango infinito. Todos los parámetros son positivos y por la condición de convergencia se ha de verificar que $\gamma > \alpha_1 + \beta_1$ y $\beta_1 > \alpha_2 + n$.

Presentan una fuerte concentración de las probabilidades en torno al punto (0,0), como se observa en las figuras 5.8 y 5.11, o bien forma acampanada. El rango de valores es mucho mayor para la segunda variable que para la primera en ambos casos, pero se hace más acusado en la segunda distribución (la correspondiente a la figura 5.11). Esto se debe a que se incrementado el valor del parámetro γ , que desplaza las probabilidades al punto (0,0), y el de β_2 que actúa de forma contraria sobre la segunda marginal. Como el rango de pares de valores que toma esta distribución es muy amplio, las probabilidades en esos puntos son muy bajas.

En relación a lo que estamos comentado se observa en la tabla 5.2 que la media marginal de la primera variable ha disminuido de una distribución a otra, mientras que la de la segunda variable ha aumentado considerablemente.

Las figuras 5.9 y 5.12 muestran las distribuciones marginales de dichas distribuciones bivalentes, las cuales son del Tipo I y tienen forma de J traspuesta o acampanada. Por su parte, la figura 5.10 representa las curvas de regresión de la primera de las distribuciones consideradas. El coeficiente

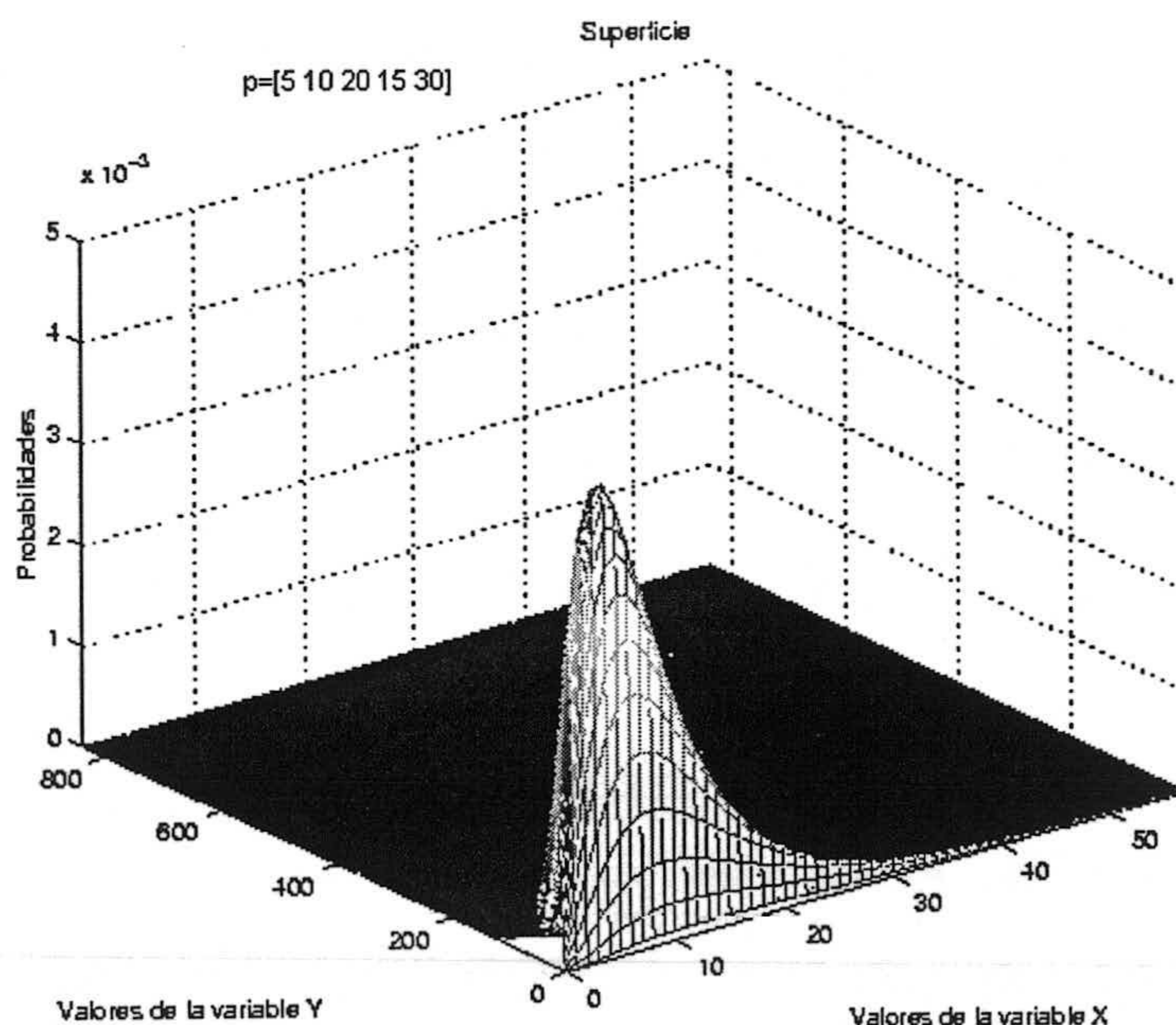


Figura 5.8: Tipo I

de correlación lineal en este caso es el más alto de las distribuciones representadas.

5.5.3 Distribuciones Tipo III y V

Estas distribuciones presentan una marginal de rango finito y otra de rango infinito. Así se ha considerado que $\alpha_2 \in \mathbb{Z}^-$, $\beta_2 < 0$ con $|\beta_2| > |\alpha_2| - 1$, siendo α_1, β_1 positivos para el Tipo III y negativos para el Tipo V con $E|\alpha_1| = E|\beta_1|$. Además $\gamma > \alpha_1 + \beta_1$.

Las figuras 5.13 y 5.15 se corresponden con distribuciones del Tipo III donde las formas presentadas y el comportamiento ante variaciones de los parámetros se corresponden con las ya vistas y comentadas para los tipos anteriores. La figura 5.14 muestra las distribuciones marginales de la primera distribución bivalente considerada. Una de las marginales es del Tipo I, que presenta forma de J traspuesta, y la otra del Tipo III, que presenta forma acampanada. También se muestran las curvas de regresión para esa distribución, figura 5.15, que al ser casi paralelas a los ejes nos da un coeficiente de correlación lineal muy bajo.

Por último, una distribución del Tipo V se muestra en la figura 5.17, la cual presenta un perfil acampanado.

Asimismo se incluyen en la tabla 5.2 los momentos de las distribuciones representadas.

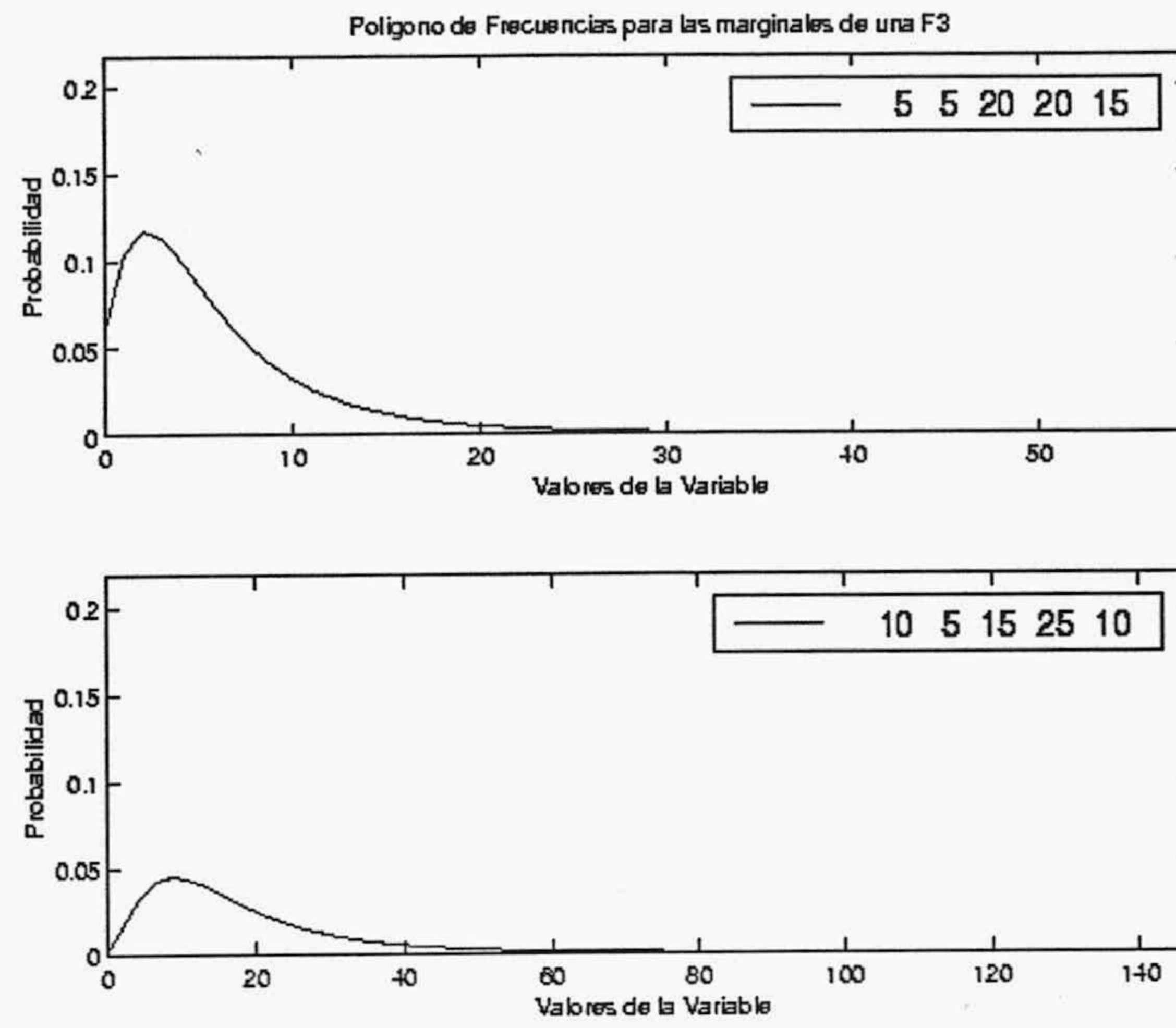


Figura 5.9: Tipo I

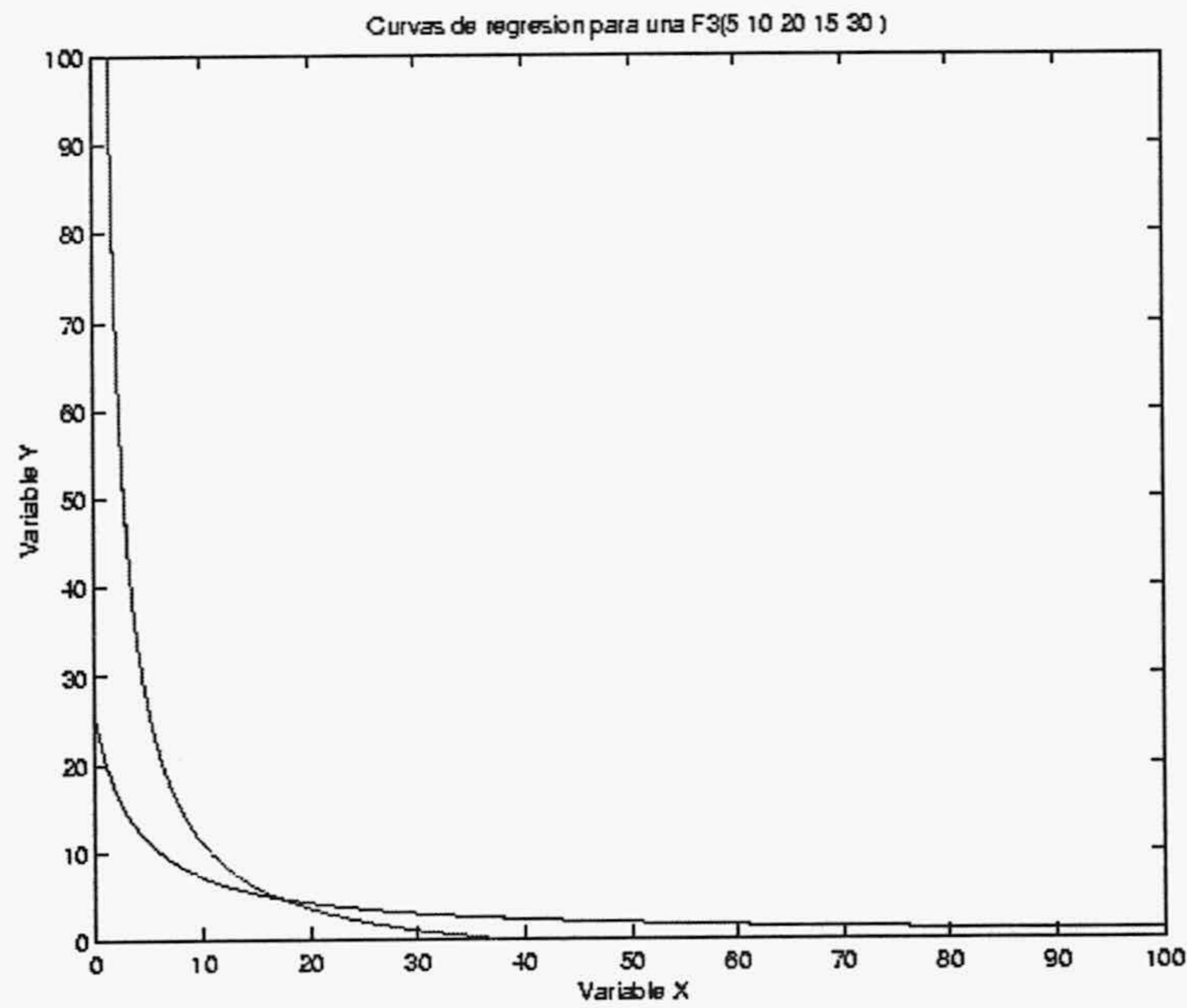


Figura 5.10: Tipo I

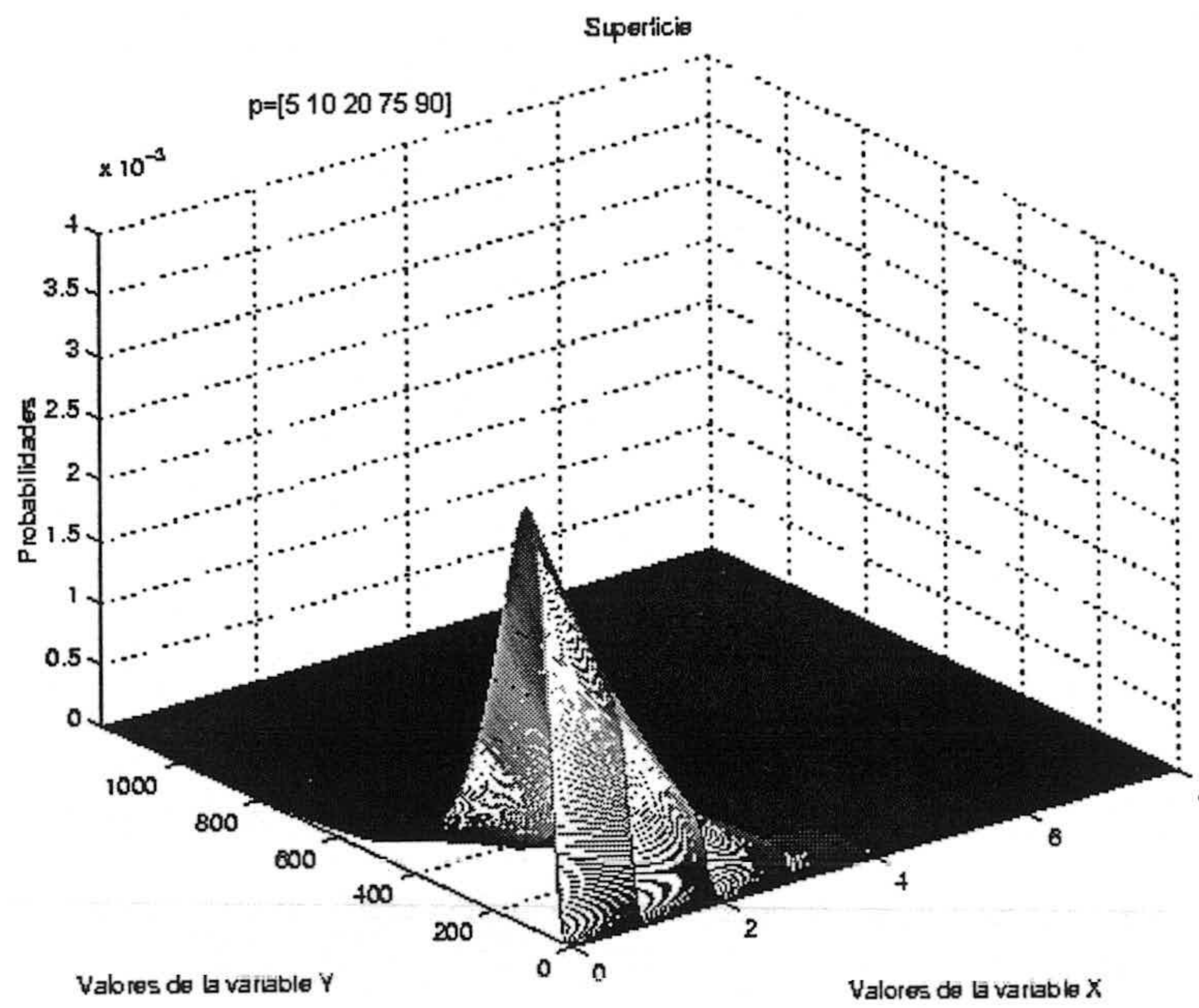


Figura 5.11: Tipo I

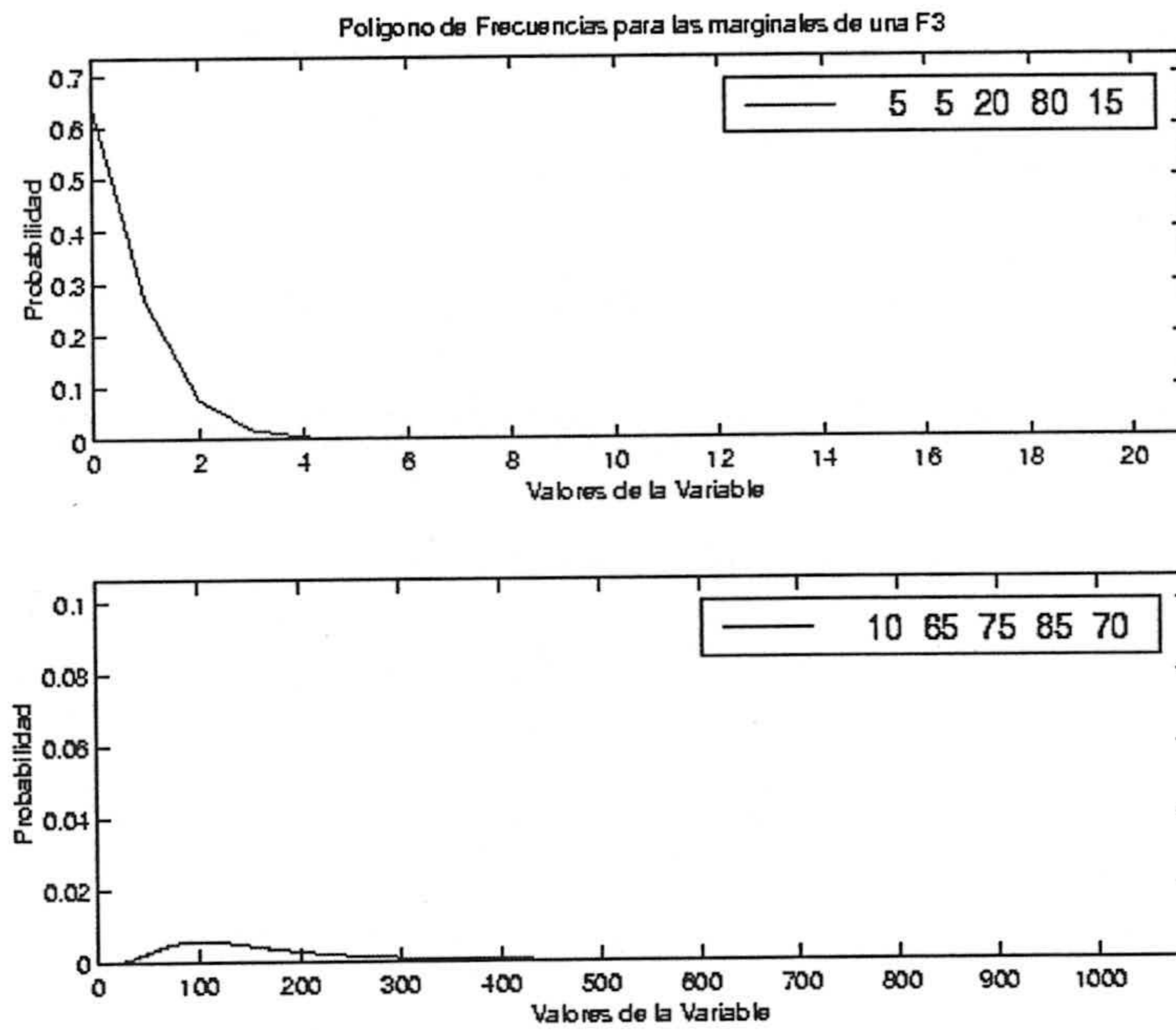


Figura 5.12: Tipo I

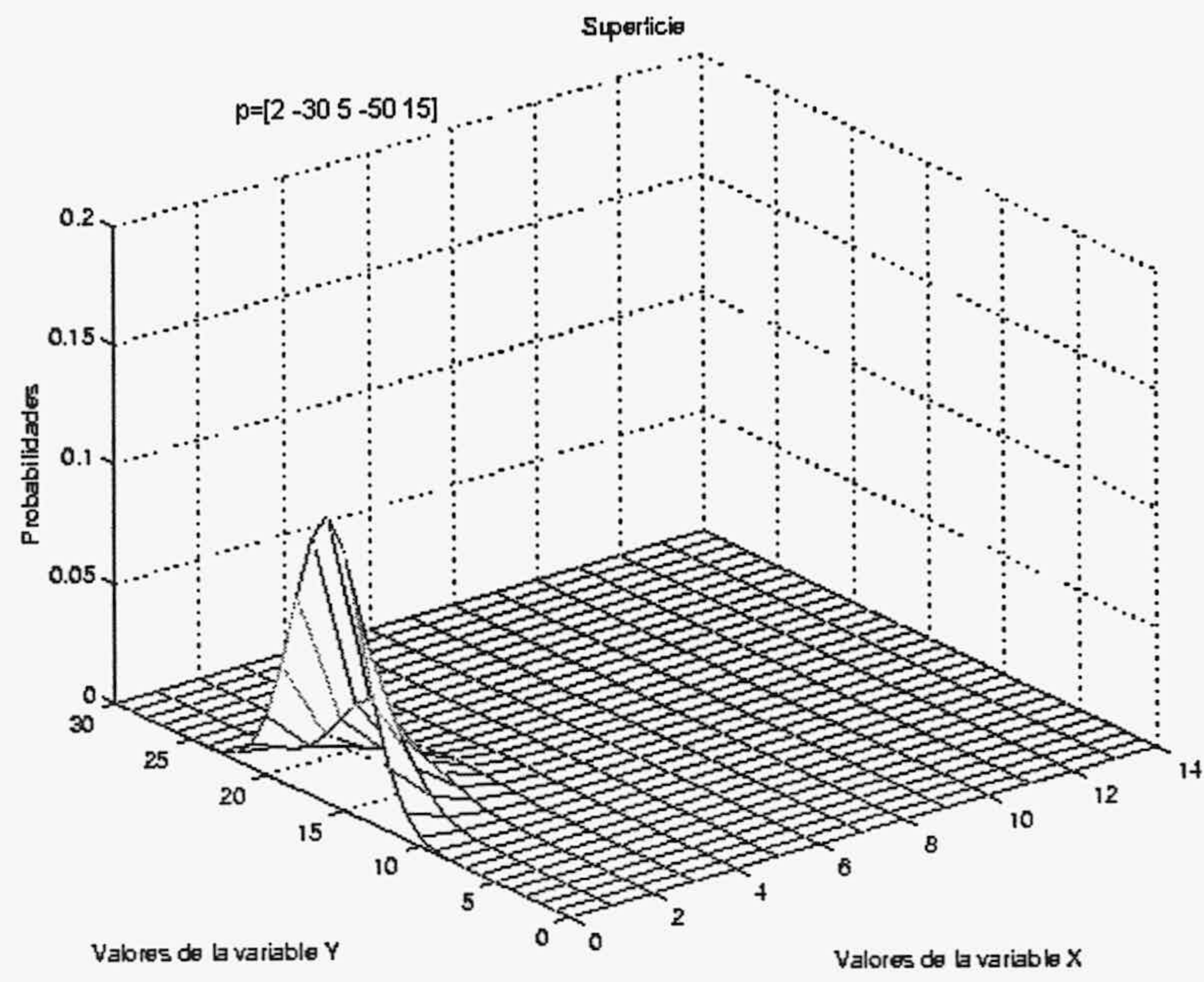


Figura 5.13: Tipo III

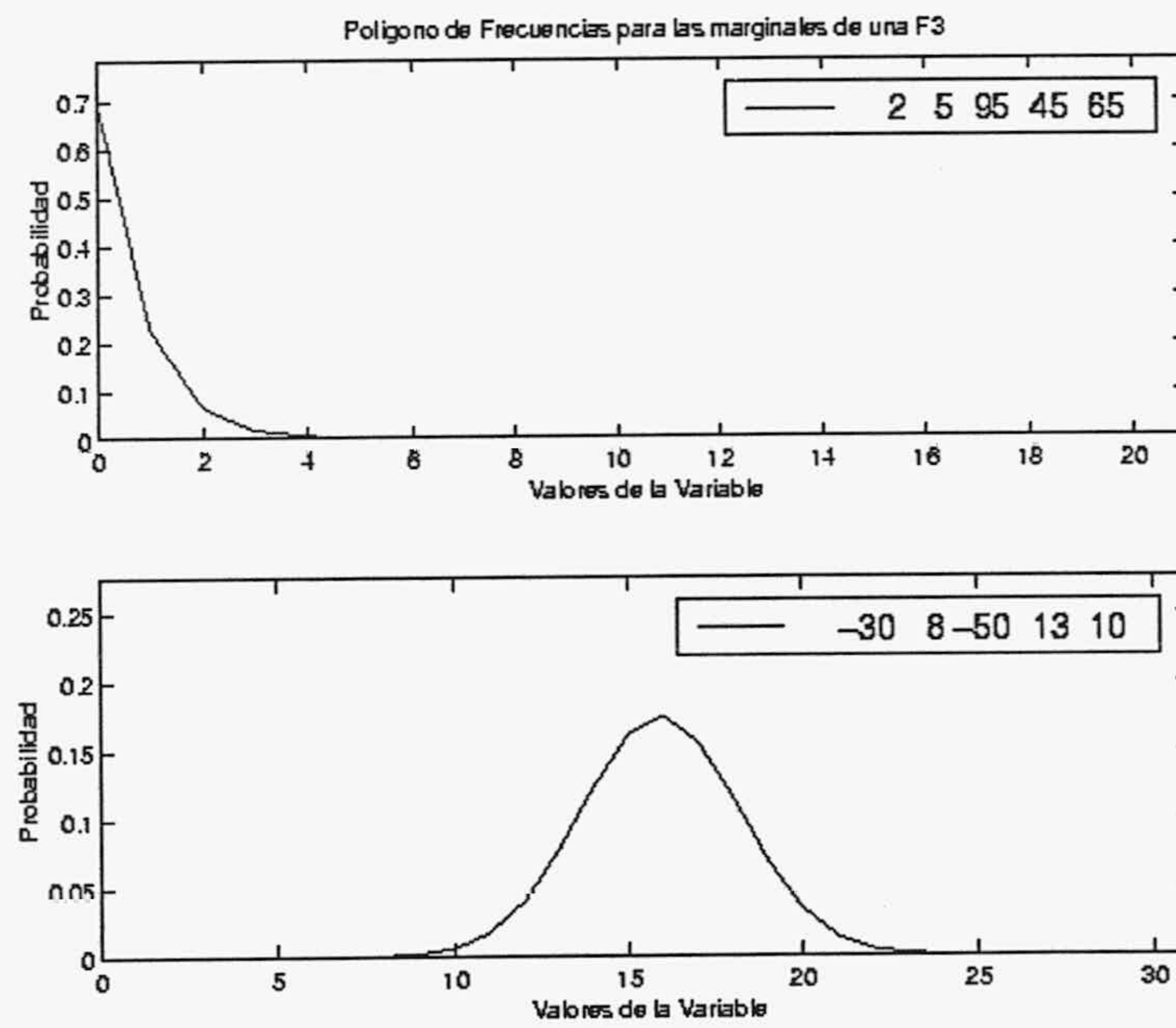


Figura 5.14: Tipo III

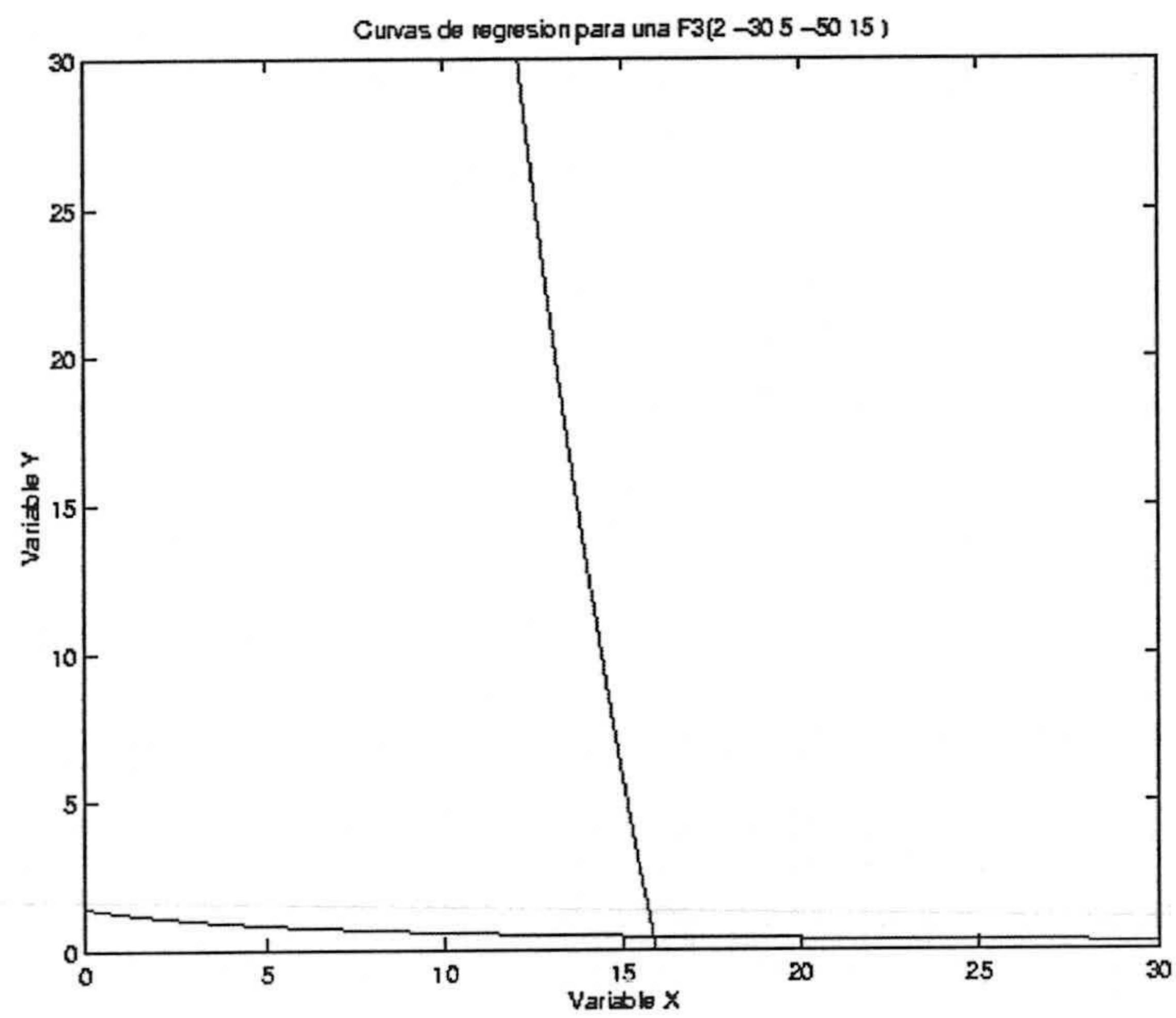


Figura 5.15: Tipo III

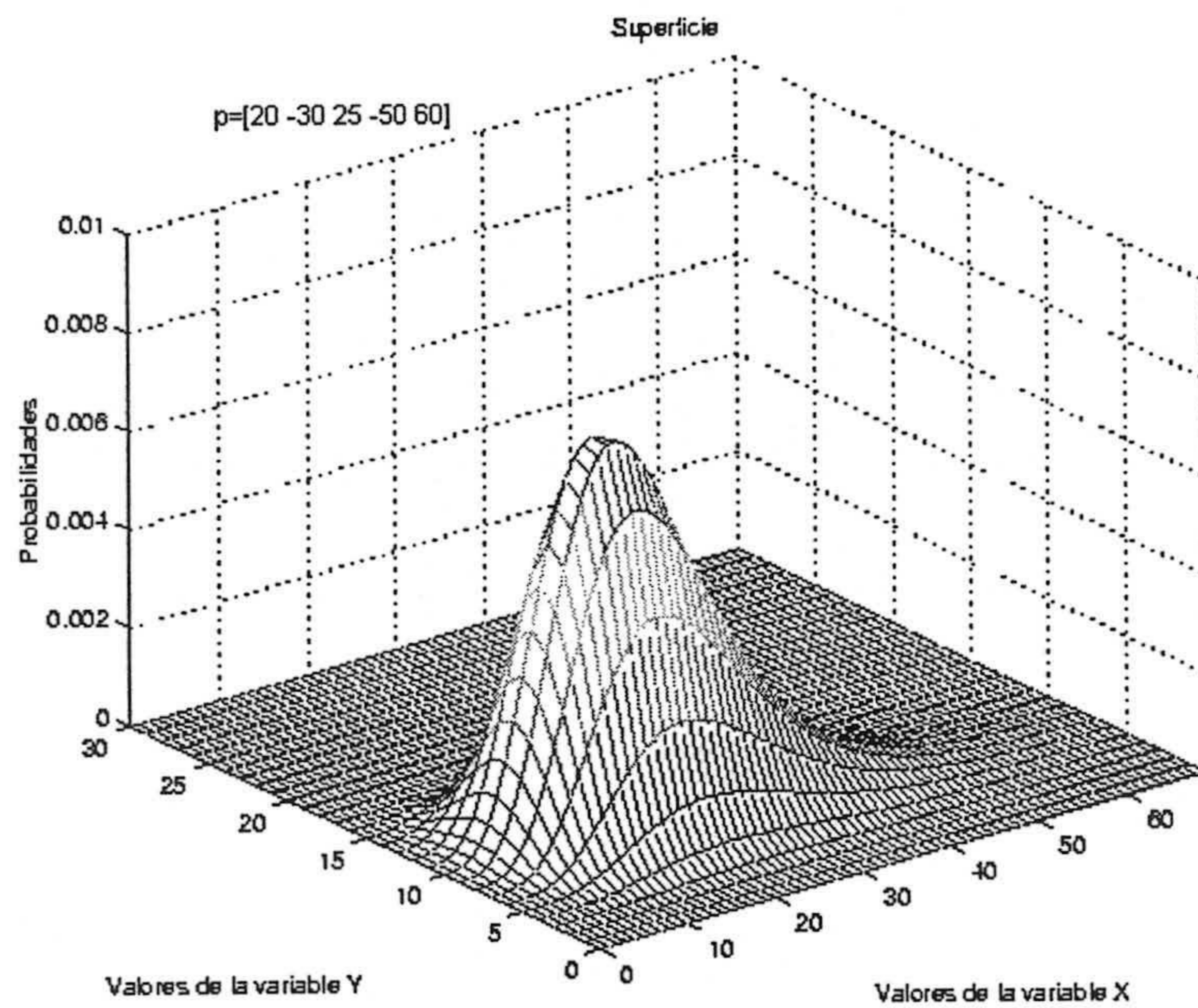


Figura 5.16: Tipo III

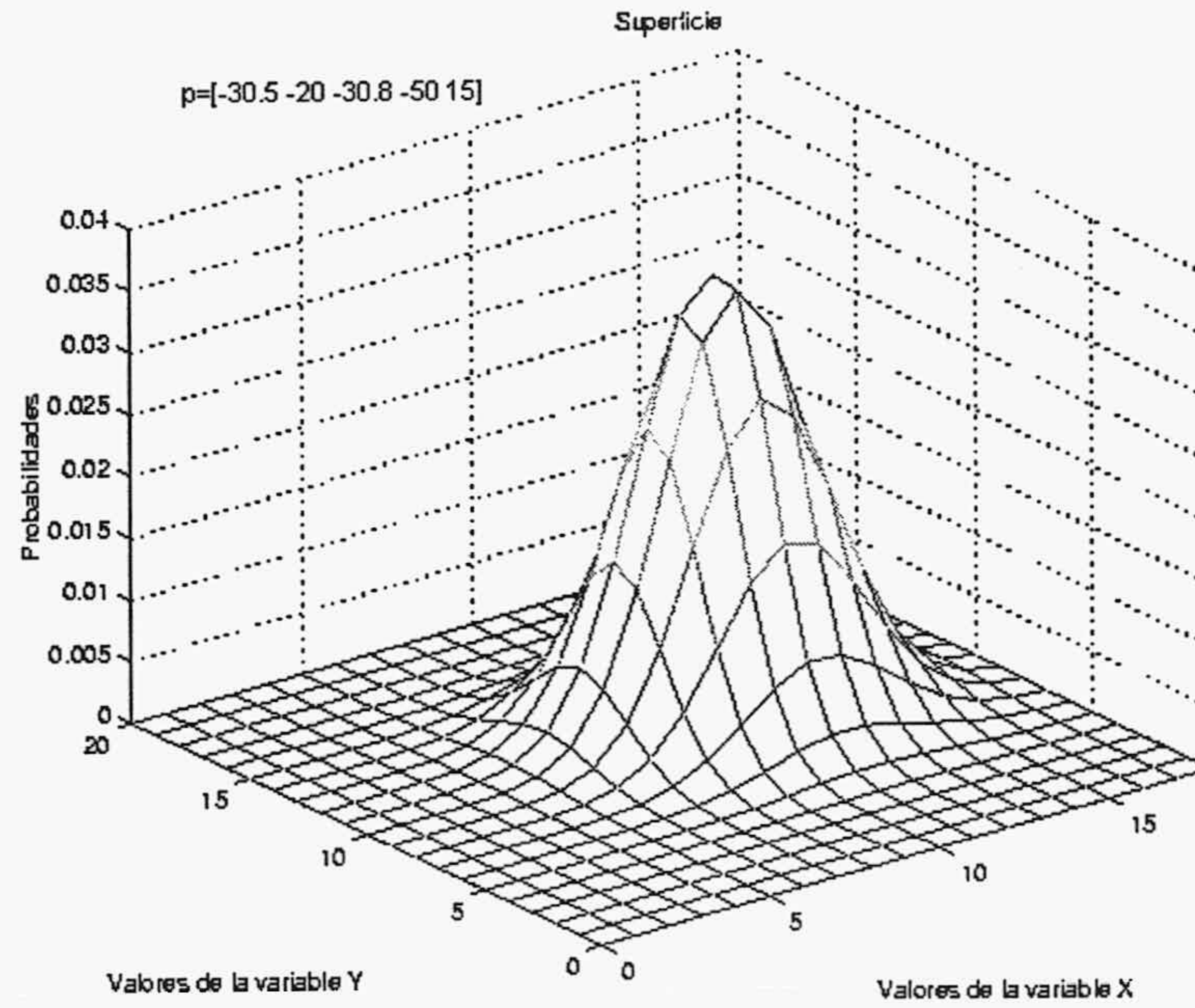


Figura 5.17: Tipo V

Tabla 5.2: Momentos para las distribuciones de los ejemplos

Parámetros	$\mu'_{1,0}$	$\mu'_{0,1}$	$\mu_{2,0}$	$\mu_{0,2}$	$\mu_{1,1}$	ρ
Tipo I						
(5, 10, 20, 15, 30)	6.25	18.75	67.187	292.19	-4.2188	-0.3011
(5, 10, 20, 75, 90)	0.50506	170.58	1.6928	1.4411	-18.478	-0.11831
Tipo III						
(2, -30, 5, -50, 15)	0.44149	15.884	1.7694	5.245	-0.1019	-0.033448
(20, -30, 25, -50, 60)	21.615	9.3713	109.01	6.978	-5.1811	-0.18786
Tipo V						
(-30.5, -20, -30.8, -50, 15)	10.95	10.537	6.1867	5.4157	-0.51509	-0.088986
Tipo VI						
(-20, -30, -25.5, -40.8, 255)	1.6818	3.7491	1.4647	3.0079	-0.016542	-0.078808
(-20, -30, -25, -50, 15)	6.7335	1.489	5.0843	6.4696	-0.49513	-0.08633
(-20, -30, -25, -50, 115)	3.0015	7.6146	2.4039	4.9623	-0.087117	-0.025223
(-20, -30, -70, -50, 15)	11.851	14.176	5.7242	7.2811	-0.54994	-0.085185



Capítulo 6

El problema de la estimación

6.1 Introducción

El estudio de familias de distribuciones discretas amplía nuestro conocimiento sobre nuevos modelos de distribuciones, las cuales permiten ajustar de forma adecuada un mayor número de conjuntos de observaciones con diferentes perfiles y propiedades. Se ha mostrado en los capítulos correspondientes a las familias de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ y por la ${}_4F_3$ la versatilidad de estas distribuciones, tanto más amplia cuanto mayor es el número de parámetros. Esto conlleva, no obstante, una mayor dificultad a la hora de estimar los parámetros a partir de un conjunto de datos.

El método de estimación más fácil de utilizar en principio es el método de los momentos, puesto que la relación de recurrencia que verifican éstos en la familia de distribuciones de Pearson proporciona un sistema de ecuaciones, que en el caso univariante es lineal, con tantas ecuaciones como número de parámetros hay que estimar. El problema en este caso es que al aumentar el número de parámetros, el número de ecuaciones del sistema es mayor y los momentos muestrales que en él aparece son de orden superior, lo cual hace que los parámetros estimados sean más inestables. Incluso el hecho de exigir la existencia de momentos de órdenes elevados invalida este método a la hora de estimar distribuciones en las que tales momentos no existan. Es decir, cuando la suma de los parámetros del denominador sea inferior a la suma de los parámetros del numerador más el orden del mayor momento necesario, el método se hace impracticable. Y si bien este problema no es especialmente grave para valores de $p = 0, 1$ ya empieza a ser importante para $p = 2$ y superiores. Esto nos ha llevado a examinar otros métodos de estimación, como el de máxima verosimilitud, que nos lleva a unas ecuaciones que no son resolubles, o bien se ha propuesto uno basado en los cocientes de probabilidades, que presenta como principal inconveniente la complejidad del sistema de ecuaciones que hay que resolver para estimar los parámetros.

A continuación hemos aplicado estos métodos para intentar ajustar un

conjunto de observaciones reales y procedentes de campos de aplicación tan diversos como deporte y economía, mediante distribuciones pertenecientes a estas familias. En todos los ejemplos propuestos se ha comenzado con una distribución generada por la ${}_2F_1$ con $\lambda = 1$, cuyos parámetros pueden ser estimados por el método de los momentos sin problema, para pasar al ajuste mediante una distribución generada por la función ${}_3F_2$ también con $\lambda = 1$. En ese caso el método de los momentos no ha proporcionado buenas estimaciones como tendremos ocasión de comprobar. El uso de otros métodos se ha combinado con el de los momentos en un intento de encontrar una distribución dentro de esta familia que mejore el ajuste obtenido con la generada por la ${}_2F_1$. Por su parte el ajuste con distribuciones de la familia de la ${}_4F_3$ no ha sido fructífero debido a que son siete los parámetros (tomando $\lambda = 1$) que hay que estimar, y para las variables consideradas no presentaban una mejora en relación a la complejidad que supone introducir tantos parámetros.

En el caso bivalente el sistema no es lineal, por lo que ha sido necesario resolverlo para dar una expresión de los parámetros en función de los momentos.

6.2 La estimación en el caso univariante

6.2.1 El método de los momentos

Como ya se comentó en el capítulo 2 a partir de la relación de recurrencia (2.7) es teóricamente fácil estimar los parámetros mediante el método de los momentos.

En general, el proceso de estimación por el método de los momentos para la familia ${}_{p+1}F_p$ con $\lambda = 1$ se realiza en dos pasos:

- Planteamiento de un sistema lineal con $2p + 1$ ecuaciones (número de parámetros estimables) en donde las incógnitas son los coeficientes de los polinomios $L(r)$ y $G(r + 1)$.
- Obtención de los parámetros a través de su relación con los coeficientes hallados anteriormente.

Si nos centramos en la familia de distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, considerando que $\lambda = 1$, hay cinco parámetros para estimar, y en este caso, las dos etapas anteriores son, concretamente:

1. Utilizando la relación de recurrencia entre momentos dada por (3.5), para $h = 0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, que son los coeficientes de los polinomios L y G .

Dicho sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 (b_2 - a_2)\mu'_2 + (b_1 - a_1)\mu - a_0 &= 0 \\
 (b_2 - a_2 - 1)\mu'_3 + (b_1 - a_2 - a_1)\mu'_2 - (a_1 + a_0)\mu - a_0 &= 0 \\
 (b_2 - a_2 - 2)\mu'_4 + (b_1 - 2a_2 - a_1 - 1)\mu'_3 - (a_2 + 2a_1 + a_0)\mu'_2 - \\
 - (a_1 + 2a_0)\mu - a_0 &= 0 \\
 (b_2 - a_2 - 3)\mu'_5 + (b_1 - 3a_2 - a_1 - 3)\mu'_4 - (3a_2 + 3a_1 + a_0 + 1)\mu'_3 - \\
 - (a_2 + 3a_1 + 3a_0)\mu'_2 - (a_1 + 3a_0)\mu - a_0 &= 0 \\
 (b_2 - a_2 - 4)\mu'_6 + (b_1 - 4a_2 - a_1 - 6)\mu'_5 - (6a_2 + 4a_1 + a_0 - 4)\mu'_4 - \\
 - (4a_2 + 6a_1 + 4a_0 + 1)\mu'_3 - (a_2 + 4a_1 + 6a_0)\mu'_2 - (a_1 + 4a_0)\mu - \\
 - a_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

2. A continuación se despejan los parámetros de las relaciones siguientes,

$$\begin{aligned}
 b_2 &= (\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) \\
 b_1 &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) \\
 a_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
 a_1 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\
 a_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

es decir, que los parámetros $\gamma_j - 1$ se obtienen como raíces del polinomio de segundo grado $x^2 + b_2x + b_1$, mientras que los parámetros α_i son las raíces del polinomio de tercer grado dado por $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

La solución a los pasos anteriores se ha llevado a cabo en la práctica utilizando el programa Matlab. Obsérvese que es necesaria la existencia de al menos el momento no centrado de orden 6, para plantear el sistema anterior. Esto hace que para valores relativamente grandes de la muestra, los momentos de mayor orden sean muy elevados e introduzcan distorsiones en las ecuaciones del sistema que llevan a malas estimaciones, o incluso a que no existan dichas estimaciones. No obstante, se ha comprobado que si se introducen los momentos de una distribución concreta, por lo general, se obtienen exactamente los parámetros de la misma.

Dicho problema es mayor en la familia de distribuciones generadas por la ${}_4F_3$, puesto que es necesaria la existencia de al menos el momento de orden 9. Para estimar los 7 parámetros de estas distribuciones (considerando que $\lambda = 1$) se siguen los pasos ya citados anteriormente, esto es:

1. Utilizando la relación de recurrencia entre momentos dada por (4.4), para $h = 0, \dots, 6$ obtenemos un sistema de siete ecuaciones con siete

incógnitas, que son los coeficientes de los polinomios L y G . Dicho sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& (b_3 - a_3)\mu'_3 + (b_2 - a_2)\mu'_2 + (b_1 - a_1)\mu - a_0 = 0 \\
& (b_3 - a_3 - 1)\mu'_4 + (b_2 - a_3 - a_2)\mu'_3 + (b_1 - a_2 - a_1)\mu'_2 - (a_1 + a_0)\mu - \\
& \quad - a_0 = 0 \\
& (b_3 - a_3 - 2)\mu'_5 + (b_2 - 2a_3 - a_2 - 1)\mu'_4 + (b_1 - a_3 - 2a_2 - a_1)\mu'_3 - \\
& \quad - (a_2 + 2a_1 + a_0)\mu'_2 - (a_1 + 2a_0)\mu - a_0 = 0 \\
& (b_3 - a_3 - 3)\mu'_6 + (b_2 - 3a_3 - a_2 - 3)\mu'_5 + \\
& \quad + (b_1 - 3a_3 - 3a_2 - a_1 - 1)\mu'_4 - (a_3 + 3a_2 + 3a_1 + a_0)\mu'_3 - \\
& \quad - (a_2 + 3a_1 + 3a_0)\mu'_2 - (a_1 + 3a_0)\mu - a_0 = 0 \\
& (b_3 - a_3 - 4)\mu'_7 + (b_2 - 4a_3 - a_2 - 6)\mu'_6 + \\
& \quad + (b_1 - 6a_3 - 4a_2 - a_1 - 4)\mu'_5 - (4a_3 + 6a_2 + 4a_1 + a_0 + 1)\mu'_4 - \\
& \quad - (a_3 + 4a_2 + 6a_1 + 4a_0)\mu'_3 - (a_2 + 4a_1 + 6a_0)\mu'_2 - (a_1 + 4a_0)\mu - \\
& \quad - a_0 = 0 \\
& (b_3 - a_3 - 5)\mu'_8 + (b_2 - 5a_3 - a_2 - 10)\mu'_7 + \\
& \quad + (b_1 - 10a_3 - 5a_2 - a_1 - 10)\mu'_6 - \\
& \quad - (10a_3 + 10a_2 + 5a_1 + a_0 + 5)\mu'_5 - \\
& \quad - (5a_3 + 10a_2 + 10a_1 + 5a_0 + 1)\mu'_4 - \\
& \quad - (a_3 + 5a_2 + 10a_1 + 10a_0)\mu'_3 - (a_2 + 5a_1 + 10a_0)\mu'_2 - \\
& \quad - (a_1 + 5a_0)\mu - a_0 = 0 \\
& (b_3 - a_3 - 6)\mu'_9 + (b_2 - 6a_3 - a_2 - 15)\mu'_8 + \\
& \quad + (b_1 - 15a_3 - 6a_2 - a_1 - 20)\mu'_7 - \\
& \quad - (20a_3 + 15a_2 + 6a_1 + a_0 + 15)\mu'_6 - \\
& \quad - (15a_3 + 20a_2 + 15a_1 + 6a_0 + 6)\mu'_5 - \\
& \quad - (6a_3 + 15a_2 + 20a_1 + 15a_0 + 1)\mu'_4 - \\
& \quad - (a_3 + 6a_2 + 15a_1 + 20a_0)\mu'_3 - (a_2 + 6a_1 + 15a_0)\mu'_2 - \\
& \quad - (a_1 + 6a_0)\mu - a_0 = 0
\end{aligned}
\tag{6.3}$$

2. A continuación se despejan los parámetros de las relaciones siguientes,

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \sum_{i=1}^3 (\gamma_i - 1) \\
 b_2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 (\gamma_i - 1)(\gamma_j - 1) \\
 b_1 &= (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)(\gamma_3 - 1) \\
 a_3 &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i \\
 a_2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \alpha_i \alpha_j \\
 a_1 &= \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^4 \alpha_i \alpha_j \alpha_k \\
 a_0 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

por lo que los parámetros $\gamma_j - 1$ son las raíces del polinomio de grado tres dado por $x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1$ y α_i lo son del polinomio de cuarto grado $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Hemos simulado muestras para algunas distribuciones y los resultados, por lo general, no son satisfactorios, debido, en parte, al problema de cálculo que plantea la utilización del valor del momento respecto al origen de orden 9 en distribuciones con asimetría positiva y varianza elevada. En consecuencia hemos intentado otros métodos alternativos de estimación, entre ellos el de máxima verosimilitud, que detallamos a continuación.

6.2.2 Método de máxima verosimilitud

Consideramos las distribuciones generadas por la función ${}_3F_2$. La función de verosimilitud para una muestra de tamaño n de distribuciones dadas por (3.2) es:

$$L_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \lambda}(r_1, \dots, r_n) = \prod_{i=1}^n f_0 \frac{(\alpha_1)_{r_i} (\alpha_2)_{r_i} (\alpha_3)_{r_i} \lambda^{r_i}}{(\gamma_1)_{r_i} (\gamma_2)_{r_i} r_i!} \tag{6.5}$$

de donde tomando logaritmos:

$$\begin{aligned} \ln L &= n \ln f_0 + \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \left[\ln(\alpha_1)_{r_i} + \ln(\alpha_2)_{r_i} + \ln(\alpha_3)_{r_i} - \right. \\ &\quad \left. - \ln(\gamma_1)_{r_i} - \ln(\gamma_2)_{r_i} - \ln r_i! \right] = \\ &= n \ln f_0 + \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \left[\ln \Gamma(\alpha_1 + r_i) - \ln \Gamma(\alpha_1) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \Gamma(\alpha_2 + r_i) - \ln \Gamma(\alpha_2) + \ln \Gamma(\alpha_3 + r_i) - \ln \Gamma(\alpha_3) - \ln \Gamma(\gamma_1 + r_i) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \Gamma(\gamma_1) - \ln \Gamma(\gamma_2 + r_i) + \ln \Gamma(\gamma_2) - \ln r_i! \right] \end{aligned}$$

y derivando con respecto a los parámetros, e igualando a cero:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n r_i = 0 \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_j} = \frac{n}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j + r_i)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right) = 0 \quad (6.6b)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_k} = \frac{n}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma_k} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln \Gamma(\gamma_k + r_i)}{\partial \gamma_k} - \frac{\partial \ln \Gamma(\gamma_k)}{\partial \gamma_k} \right) = 0 \quad (6.6c)$$

con $j = 1, 2, 3$ y $k = 1, 2$.

Como $f_0 = {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)^{-1}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \lambda} &= -f_0^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r r \lambda^{r-1}}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} = \\ &= -f_0^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\gamma_1 \gamma_2} {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; \lambda) \end{aligned}$$

de forma que (6.6a) queda,

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n r_i = n f_0 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\gamma_1 \gamma_2} {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; \lambda)$$

esto es,

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} (n f_0 {}_3F_2(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1; \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1; \lambda))^{-1} \quad (6.7)$$

ecuación que no es posible resolver, aún conociendo el valor de los otros parámetros, pues aparece λ en el segundo miembro.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_1} &= -f_0^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\frac{\partial(\alpha_1)_r}{\partial \alpha_1} (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} = \\ &= -f_0^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \left(\frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_1 + r)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right) \\ \frac{\partial f_0}{\partial \gamma_1} &= -f_0^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r^2 (\gamma_2)_r r!} \frac{-\partial(\gamma_1)_r}{\partial \gamma_1} = \\ &= f_0^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \left(\frac{\partial \ln \Gamma(\gamma_1 + r)}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial \ln \Gamma(\gamma_1)}{\partial \gamma_1} \right) \end{aligned}$$

de donde la expresión (6.6b) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j + r_i)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right) = \\ &= n f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \left(\frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j + r)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j)}{\partial \alpha_j} \right) \end{aligned}$$

que simplificada es:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j + r_i)}{\partial \alpha_j} = n f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha_j + r)}{\partial \alpha_j} \right\} \quad (6.8)$$

con $j = 1, 2, 3$. De igual forma la ecuación (6.6c) se transforma en:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln \Gamma(\gamma_k + r_i)}{\partial \gamma_k} = n f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r r!} \frac{\partial \ln \Gamma(\gamma_k + r)}{\partial \gamma_j} \right\} \quad (6.9)$$

con $k = 1, 2$.

Tanto (6.8) como (6.9) no se pueden resolver directamente, debido a que la derivada del logaritmo de la función gamma, también conocida como función ψ , no tiene una expresión explícita. De hecho es necesario conocer la inversa de dicha función, que no es la misma en todo el rango de valores, puesto que para el eje positivo la función va desde $-\infty$ a ∞ sin ninguna discontinuidad, y para el eje negativo existen asíntotas en cada entero negativo, con un rango de variación entre cada una de ellas también de $-\infty$ a ∞ . Esto nos lleva a que la inversa tiene infinitas soluciones, con lo cual resolver estas ecuaciones parece mas bien imposible. Obsérvese que además las cinco ecuaciones que aparecen son idénticas, con lo que las soluciones son intercambiables, lo que no es muy lógico. Todo esto apunta a que el método de máxima verosimilitud no es adecuado para estimar los parámetros de esta familia de distribuciones.

6.2.3 Otros métodos de estimación

Debido a los problemas anteriores con los métodos de estimación más usuales hemos investigado otras posibilidades. La primera de ella consistiría en calcular cocientes de probabilidades, lo cual para la ${}_3F_2$ significa que:

$$\frac{f_{r+1}}{f_r} = \frac{(\alpha_1 + r)(\alpha_2 + r)(\alpha_3 + r)\lambda}{(\gamma_1 + r)(\gamma_2 + r)(r + 1)} \quad (6.10)$$

por lo que para distintos valores de r se plantea un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, a partir del cual se obtienen las estimaciones de los parámetros, sin más que sustituir las probabilidades f_r por las frecuencias observadas en la muestra n_r . Para las distribuciones en las que $\lambda = 1$, es suficiente un sistema de cinco ecuaciones.

Dichos cocientes determinan la pendiente que existe en la recta que une esos dos puntos, luego los parámetros vienen expresados en función de las pendientes de la curva observada.

El principal inconveniente de este método es que no se tiene en cuenta toda la información muestral y dependiendo de los valores de r que se consideren, las ecuaciones que se obtienen son distintas, y por ende las estimaciones de los parámetros también lo son. Además nada nos dice que unas estimaciones sean mejores que otras.

Como posible solución a dicho inconveniente proponemos el procedimiento de tomar tantos grupos de cocientes como parámetros queremos estimar y sumar los cocientes dentro de cada grupo. Dicho método, en el caso de una ${}_3F_2$ proporciona la siguientes 6 ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{h-1} \frac{f_{k+1}}{f_k} &= \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(\alpha_1 + k)(\alpha_2 + k)(\alpha_3 + k)\lambda}{(\gamma_1 + k)(\gamma_2 + k)(k + 1)} \\ \sum_{k=h}^{2h-1} \frac{f_{k+1}}{f_k} &= \sum_{k=h}^{2h-1} \frac{(\alpha_1 + k)(\alpha_2 + k)(\alpha_3 + k)\lambda}{(\gamma_1 + k)(\gamma_2 + k)(k + 1)} \\ \sum_{k=2h}^{3h-1} \frac{f_{k+1}}{f_k} &= \sum_{k=2h}^{3h-1} \frac{(\alpha_1 + k)(\alpha_2 + k)(\alpha_3 + k)\lambda}{(\gamma_1 + k)(\gamma_2 + k)(k + 1)} \\ \sum_{k=3h}^{4h-1} \frac{f_{k+1}}{f_k} &= \sum_{k=3h}^{4h-1} \frac{(\alpha_1 + k)(\alpha_2 + k)(\alpha_3 + k)\lambda}{(\gamma_1 + k)(\gamma_2 + k)(k + 1)} \\ \sum_{k=4h}^{5h-1} \frac{f_{k+1}}{f_k} &= \sum_{k=4h}^{5h-1} \frac{(\alpha_1 + k)(\alpha_2 + k)(\alpha_3 + k)\lambda}{(\gamma_1 + k)(\gamma_2 + k)(k + 1)} \\ \sum_{k=5h}^{p-1} \frac{f_{k+1}}{f_k} &= \sum_{k=5h}^{p-1} \frac{(\alpha_1 + k)(\alpha_2 + k)(\alpha_3 + k)\lambda}{(\gamma_1 + k)(\gamma_2 + k)(k + 1)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde h es el número de cocientes en cada grupo y p el número de valores

totales. Así, estamos efectuando un promedio de esos cocientes, esto es, de las pendientes relativas a ese conjunto de valores.

En la práctica es fácil que existan en las colas valores cuya frecuencia observada sea cero, por lo que no podríamos considerarlos a la hora de calcular esos cocientes. Además, en las colas, pequeñas variaciones significan pendientes muy dispares; por ejemplo, si un valor se ha observado una vez y el siguiente dos veces, el cociente nos da una pendiente igual a 2, que no se corresponde con la tendencia general de decrecimiento paulatino hacia el cero. De ahí que se haya considerado interesante agrupar en clases aquellos valores con frecuencia muy baja, por ejemplo, obteniendo clases con frecuencia al menos igual a cinco. Así nos evitamos también aquellos casos en que las frecuencias son nulas.

En ese caso, al tomar cocientes entre valores no consecutivos la expresión (6.10) cambia, de forma que si consideramos las probabilidades de dos clases consecutivas resultantes del agrupamiento f_{r+p} y f_r , se tiene que su cociente es:

$$\begin{aligned} \frac{f_{r+p}}{f_r} &= \frac{f_{r+1} + f_{r+2} + \dots + f_{r+p}}{f_r} = \\ &= \frac{f_{r+1}}{f_r} + \frac{f_{r+1} f_{r+2}}{f_r f_{r+1}} + \dots + \frac{f_{r+1} f_{r+2} \dots f_{r+p}}{f_r f_{r+1} f_{r+2} \dots f_{r+p-1}} = \\ &= \frac{f_{r+1}}{f_r} \left(1 + \frac{f_{r+2}}{f_{r+1}} \left(1 + \frac{f_{r+3}}{f_{r+2}} \left(\dots \left(1 + \frac{f_{r+p}}{f_{r+p-1}} \right) \dots \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como es muy posible que no haya el mismo número de clases para cada grupo es preferible tomar más cocientes en el grupo correspondiente a las colas. El problema es que las ecuaciones obtenidas son difíciles de resolver incluso utilizando el software matemático existente.

Otra posibilidad que sí utiliza toda la información muestral, nos lleva a un sistema que se podría utilizar de forma iterativa. Las ecuaciones que forman el sistema parten de las siguientes igualdades:

- La primera es la expresión de la esperanza.

- Las siguientes son las esperanzas $E \left[\prod_{j=1}^k \frac{1}{r+j} \right]$, con $k = 1, \dots, 4$, que

son:

$$\begin{aligned}
 E \left[\prod_{j=1}^k \frac{1}{r+j} \right] &= \sum_{r=0}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{1}{r+j} f_r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r (\alpha_3)_r}{(\gamma_1)_r (\gamma_2)_r (r+k)!} = \\
 &= f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 - k)_{r+k} (\alpha_2 - k)_{r+k} (\alpha_3 - k)_{r+k}}{(\gamma_1 - k)_{r+k} (\gamma_2 - k)_{r+k} (r+k)!} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(\gamma_1 - k)_k (\gamma_2 - k)_k}{(\alpha_1 - k)_k (\alpha_2 - k)_k (\alpha_3 - k)_k} = \\
 &= f_0 \frac{(\gamma_1 - k)_k (\gamma_2 - k)_k}{(\alpha_1 - k)_k (\alpha_2 - k)_k (\alpha_3 - k)_k} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ {}_3F_2(\alpha_1 - k, \alpha_2 - k, \alpha_3 - k; \gamma_1 - k, \gamma_2 - k; 1) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\alpha_1 - k)_j (\alpha_2 - k)_j (\alpha_3 - k)_j}{(\gamma_1 - k)_j (\gamma_2 - k)_j} \right\}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las probabilidades por las frecuencias observadas, esto es, $f_r = n_r/n$, obtenemos el sistema ya referido. En él podemos calcular las expresiones de la función ${}_3F_2$ a partir de una estimación de los parámetros, lo cual no siempre es posible, y utilizar dichas ecuaciones de forma iterativa. El problema es que no tenemos asegurada la convergencia a una buena estimación.

Otro sistema que se puede utilizar surge a partir de las expresiones de los momentos factoriales, puesto que (para la ${}_3F_2$ con $\lambda = 1$):

$$\mu'_{[k]} = f_0 \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k (\alpha_3)_k}{(\gamma_1)_k (\gamma_2)_k} {}_3F_2(\alpha_1 + k, \alpha_2 + k, \alpha_3 + k; \gamma_1 + k, \gamma_2 + k; 1) \quad (6.13)$$

por lo que tomando $k = 1, \dots, 5$ llegamos a un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas en el que hay que calcular también el valor de la función hipergeométrica ${}_3F_2$. Esto hace que no se pueda resolver directamente a menos que consideremos que $\alpha_3 = \gamma_2 + n$ con un n concreto. Así, para $n = 1$ se tienen las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \mu'_{[1]} &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2} \left\{ \frac{(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2) + (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1) + \alpha_1 \alpha_2} \right\} \\
 \mu'_{[2]} &= \frac{(\alpha_1)_2 (\alpha_2)_2}{(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 3)_2} \left\{ \frac{(\gamma_2 + 2)(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 3) + (\alpha_1 + 2)(\alpha_2 + 2)}{\gamma_2(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1) + \alpha_1 \alpha_2} \right\} \\
 \mu'_{[3]} &= \frac{(\alpha_1)_3 (\alpha_2)_3}{(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 4)_3} \left\{ \frac{(\gamma_2 + 3)(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 4) + (\alpha_1 + 3)(\alpha_2 + 3)}{\gamma_2(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1) + \alpha_1 \alpha_2} \right\} \\
 \mu'_{[4]} &= \frac{(\alpha_1)_4 (\alpha_2)_4}{(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 5)_4} \left\{ \frac{(\gamma_2 + 4)(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 5) + (\alpha_1 + 4)(\alpha_2 + 4)}{\gamma_2(\gamma_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1) + \alpha_1 \alpha_2} \right\} \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

De nuevo el problema vuelve a ser la complejidad del sistema de ecuaciones propuesto.

Un procedimiento mixto, que proporciona buenos resultados en ciertos casos para distribuciones generadas por la ${}_3F_2$, consiste en partir de la estimación por el método de los momentos de una distribución del tipo de la ${}_2F_1$ e imponer los otros dos parámetros restantes a partir del conocimiento del polígono de frecuencias empírico.

6.2.4 Aplicación a datos reales

Vamos a modelizar algunas variables observadas mediante distribuciones generadas por funciones hipergeométricas. Para ello utilizaremos los métodos propuestos anteriormente, principalmente el de los momentos, por su menor complejidad de cálculo.

Aplicación al deporte

Comenzamos con una variable relativa al número de goles conseguidos en la liga española 89/90. Dado que la distribución de Waring se ha utilizado con buenos resultados para modelizar situaciones de accidentes, esto es, situaciones que no ocurren a una gran parte de la población, mientras que sí sucede a unos pocos individuos de ella un gran número de veces (Xekalaki, [52]), se ha considerado que es un modelo aplicable para modelizar el número de goles marcado por futbolista. Así se han tomado datos relativos al número de goles conseguidos por 424 jugadores de la liga española 89/90, que jugaron al menos un partido y excluyendo los porteros¹. Dichos datos aparecen en la tabla 6.1.

Analizando la tabla 6.1 se observa que los datos presentan una fuerte asimetría a la derecha, con la presencia de varios valores muy lejanos al resto de los datos, cuando la moda y la mediana son el valor 0. Además, aunque las frecuencias tienen tendencia decreciente, presenta algunas modas relativas (especialmente en los puntos 6 y 10).

La distribución de Waring pertenece a la familia de distribuciones generadas por la función ${}_2F_1$, en concreto la distribución univariante generalizada de Waring que notaremos por $UGWD(a, k, \rho)$ con $a, k, \rho > 0$ está generada por la función ${}_2F_1(a, k; a + k + \rho; 1)$ (Rodríguez, [44]). Para estimar los parámetros de dicha distribución utilizamos el método de los momentos, para lo cual hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1)\mu - a_0 &= 0 \\ (b_1 - a_1 - 1)\mu'_2 - (a_1 + a_0)\mu - a_0 &= 0 \\ (b_1 - a_1 - 2)\mu'_3 - (2a_1 + a_0 + 1)\mu'_2 - (a_1 + 2a_0)\mu - a_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

¹Fuente: Calendario Superdinámico de fútbol número 20 (Suplemento). T. Tocino e Hijos, Zaragoza, 1990.

Tabla 6.1: Número de goles por jugador

Nº de goles, x_i	Nº de futbolistas, n_i	f_i	F_i
0	203	0.4788	0.4788
1	76	0.1792	0.6580
2	40	0.0943	0.7524
3	23	0.0542	0.8066
4	13	0.0307	0.8373
5	13	0.0307	0.8679
6	17	0.0401	0.9080
7	8	0.0189	0.9269
8	4	0.0094	0.9363
9	5	0.0118	0.9481
10	8	0.0189	0.9670
11	1	0.0024	0.9693
12	2	0.0047	0.9741
13	3	0.0071	0.9811
14	2	0.0047	0.9858
15	2	0.0047	0.9906
16	1	0.0024	0.9929
18	1	0.0024	0.9953
33	1	0.0024	0.9976
38	1	0.0024	1

de donde:

$$\begin{aligned} b_1 &= a + k + \rho - 1 \\ a_1 &= a + k \\ a_0 &= ak \end{aligned} \tag{6.16}$$

Se calculan los primeros momentos no centrados:

$$\begin{aligned} \mu &= 2.10849 \\ \mu'_2 &= 19.60377 \\ \mu'_3 &= 348.90566 \end{aligned}$$

que sustituidos en el sistema (6.15) nos da las siguientes soluciones a dicho sistema:

$$\begin{aligned} b_1 &= 49.3342 \\ a_1 &= 41.1785 \\ a_0 &= 17.1962 \end{aligned}$$

y se obtienen los parámetros resolviendo el sistema de ecuaciones (6.16) con los valores anteriores. Los parámetros estimados son:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 0.4219 \\ \hat{k} &= 40.7566 \\ \hat{\rho} &= 9.1557 \end{aligned}$$

Se han realizado a su vez los contrastes de bondad de ajuste usuales. En la tabla 6.2 se recogen las frecuencias observadas junto con las esperadas, agrupando los valores en clases, de forma que las frecuencias esperadas no sean inferiores a cinco en la mayor parte de ellas. El contraste de la χ^2 nos da un valor para el estadístico de contraste de 9.59923 con un p-valor igual a 0.3889 que es superior a 0.05, centrándose la mayor carga de los residuos en el punto 6 (supone un 47.05177 % del valor del estadístico), y presentando un comportamiento muy aceptable en el resto de valores.

Del mismo modo se ha realizado el test de Kolmogorov-Smirnov con un valor para el estadístico de 0.01596, el cual proporciona un p-valor superior a 0.4, lo que confirma que los datos se pueden ajustar mediante esta distribución.

Nuestra intención ahora es ajustarla mediante una distribución generada por la función ${}_3F_2$. Si observamos que existe una moda local en el punto 6, por lo estudiado en el capítulo 3 debe existir alguna distribución incluida en esta familia que se ajuste mejor que la distribución de Waring anterior.

Sin embargo, para una ${}_3F_2$ los parámetros estimados son complejos, por lo que no es posible encontrar una distribución de este tipo por el método

Tabla 6.2: Contraste de la χ^2

x_i	O_i	E_i	residuos
0	203	205.05706	0.02064
1	76	70.05588	0.50435
2	40	40.51439	0.00653
3	23	26.72182	0.51838
4	13	18.75487	1.76586
5	13	13.66278	0.03215
6	17	10.20942	4.51661
7	8	7.77390	0.00658
8	4	6.00738	0.67077
9	5	4.69855	0.01934
10-11	9	6.67126	0.81289
12-14	7	5.86254	0.22069
> 14	6	8.01015	0.50445

de los momentos. Ahora bien si la ${}_2F_1$ obtenida se comportaba muy bien excepto en el punto 6, podemos considerar una ${}_3F_2$ con los tres parámetros estimados de la ${}_2F_1$ y añadiendo otros dos parámetros cuya parte entera sea -5 con el del numerador mayor en valor absoluto que el del denominador, puesto que ya hemos visto que en esas condiciones es posible encontrar una distribución con una moda local en el punto 6.

Así se han considerado distintas distribuciones con esas características y por ejemplo, para la distribución ${}_3F_2(-5.7, 40.7566, 0.4219; 50.3342, -5.5781; 1)$ se ha obtenido un valor para la χ^2 igual a 9.27146 con probabilidad 0.2337. Es decir, que en su conjunto se han reducido los residuos. El hecho de que el p-valor haya disminuido se debe a la presencia de un mayor número de parámetros estimados. En la tabla 6.3 se muestran las frecuencias observadas y esperadas agrupando en clases para aquellos valores cuyas frecuencias esperadas eran sensiblemente inferiores a cinco.

El residuo en el punto 6 es casi insignificante, aunque por contra se produce un peor ajuste en el punto 4 y en las clases correspondiente a los valores 10-11 y 12-14.

En cuanto al contraste de Kolmogorov-Smirnov el valor obtenido para el estadístico es de 0.023944 con un p-valor muy superior a 0.2. En la figura 6.1 se dibujan tanto la poligonal de las frecuencias observadas y de las estimadas por las distribuciones obtenidas. Se observa que la poligonal para la ${}_2F_1$ es muy similar a la de las frecuencias observadas, excepto en los puntos 6 y

Tabla 6.3: Contraste de la χ^2

x_i	O_i	E_i	residuos
0	203	199.27817	0.06951
1	76	69.56969	0.59435
2	40	41.30473	0.04121
3	23	28.17143	0.94932
4	13	20.70738	2.86872
5	13	16.25067	0.65024
6	17	14.70440	0.35838
7	8	7.96106	0.00019
8	4	5.62450	0.46919
9	5	4.17762	0.16188
10-11	9	5.65032	1.98579
12-14	7	4.70382	1.12088
> 14	6	5.89617	0.00183

9, mientras que la relativa a la ${}_3F_2$ presenta un mejor ajuste en el punto 6, pero se aleja algo más en los puntos anteriores de las frecuencias observadas, como ya se ha comentado.

Queda por determinar un criterio que nos proporcione esos valores en función de la muestra observada. Por ejemplo, se puede considerar un sistema de dos ecuaciones como el dado por (6.11) para determinar esos dos parámetros utilizando los estimados previamente para la ${}_2F_1$. Dicho sistema está aún por resolver.

Aplicación a datos económicos

La siguiente variable observada corresponde a las entidades bancarias por municipio en Andalucía (excluyendo las capitales de provincia y Torremolinos)². Los datos de partida aparecen reflejados en la tabla 6.4, en la que se muestra el conteo de frecuencias para los 758 municipios de Andalucía, una vez excluidos los nueve municipios señalados anteriormente.

De nuevo se observa que los datos presentan una fuerte asimetría a la derecha, con la presencia de varios valores superiores a 21, cuando la moda y la mediana son el valor 0.

Para ajustar los datos a una ${}_2F_1$, calculamos los primeros momentos no

²Fuente: Anuario Banesto, 1992

Tabla 6.4: Número de entidades bancarias

x_i	n_i	f_i	F_i
0	411	0.5422	0.5422
1	121	0.1596	0.7018
2	74	0.0976	0.7995
3	40	0.0528	0.8522
4	32	0.0422	0.8945
5	14	0.0185	0.9129
6	23	0.0303	0.9433
7	16	0.0211	0.9644
8	3	0.0040	0.9683
9	5	0.0066	0.9749
10	4	0.0053	0.9802
11	2	0.0026	0.9828
13	2	0.0026	0.9855
14	2	0.0026	0.9881
15	1	0.0013	0.9894
16	1	0.0013	0.9908
18	1	0.0013	0.9921
20	2	0.0026	0.9947
21	1	0.0013	0.9960
30	1	0.0013	0.9974
33	1	0.0013	0.9987
39	1	0.0013	1

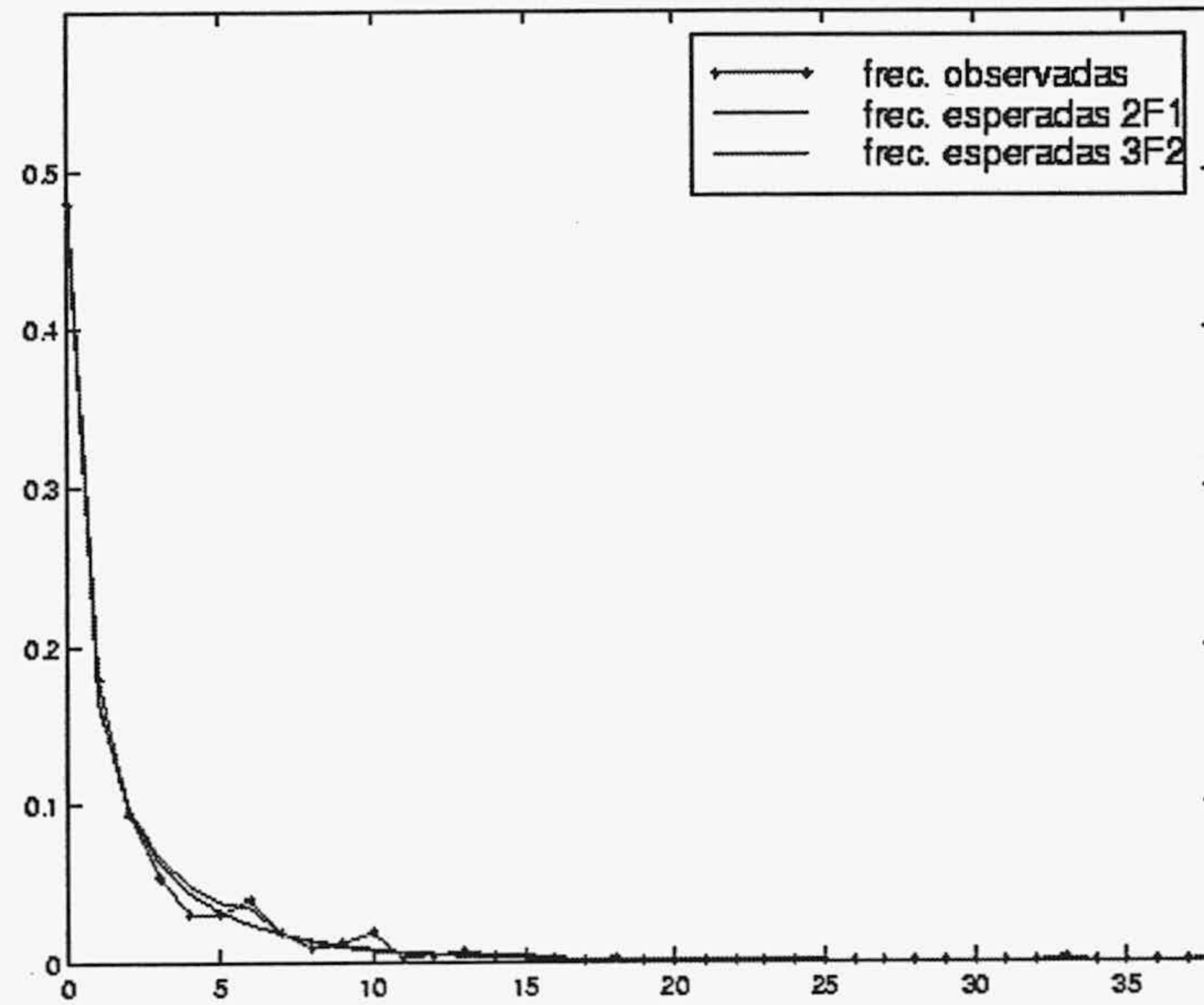


Figura 6.1: Frecuencias observadas y esperadas

centrados:

$$\begin{aligned}\mu &= 1.62797 \\ \mu'_2 &= 14.21636 \\ \mu'_3 &= 261.99472\end{aligned}$$

que sustituidos en el sistema (6.15) nos da las siguientes soluciones a dicho sistema:

$$\begin{aligned}b_1 &= 31.7256 \\ a_1 &= 26.031 \\ a_0 &= 9.2707\end{aligned}$$

y se obtienen los parámetros resolviendo el sistema de ecuaciones (6.13) con los valores anteriores. Los parámetros estimados son:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= 25.6698 \\ \hat{\alpha}_2 &= 0.3612 \\ \hat{\gamma} &= 32.7256\end{aligned}$$

Se ha comprobado nuevamente la bondad del ajuste mediante los contrastes de la χ^2 y de Kolmogorov-Smirnov. Para el primero el valor del

Tabla 6.5: Contraste de la χ^2

x_i	O_i	E_i	residuos
0	411	423.19422	0.35137
1	121	119.88481	0.01037
2	74	64.52097	1.39260
3	40	40.46317	0.00530
4	32	27.28559	0.81456
5	14	19.22695	1.42097
6	23	13.96665	5.84260
7	16	10.37952	3.04348
8	3	7.85433	3.00019
9	5	6.03262	0.17676
10	4	4.69228	0.10214
11	2	3.68988	0.77393
12-13	2	5.27599	2.03414
14-16	4	4.69225	0.10213
> 16	7	7.00136	0.0000002

estadístico de contraste es 19.0705 con un p-valor igual a 0.059858 que es superior a 0.05, pero muy próximo a él. No obstante hay que destacar, por una parte el gran tamaño de la muestra, así como el hecho de que la mayor carga de los residuos se deba a los puntos 6, 7 y 8 (un 62.328 % del total), comportándose muy bien en los otros valores, en especial en las colas, como se puede comprobar en la tabla 6.5 donde aparecen los cálculos realizados para dicho test.

Del mismo modo se ha realizado el test de Kolmogorov-Smirnov con un valor para la diferencia entre las distribuciones de frecuencias (teórica y empírica) de 0.016087 el cual proporciona un p-valor bastante superior a 0.2, lo que confirma que los datos se pueden ajustar mediante esta distribución.

Para ajustarla mediante una distribución ${}_3F_2$ son necesarios los seis primeros momentos no centrados, tomando del cuarto al sexto los siguientes valores:

$$\mu'_4 = 7101.695$$

$$\mu'_5 = 226004.7282$$

$$\mu'_6 = 7723214.6121$$

Sustituyendo en el sistema (6.1) nos da las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} b_2 &= 37.0409 \\ b_1 &= -2578.5045 \\ a_2 &= 19.6999 \\ a_1 &= -1925.6424 \\ a_0 &= -81.6313 \end{aligned}$$

y resolviendo (6.2) con los coeficientes obtenidos, los parámetros estimados son:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= 54.6576 \\ \hat{\alpha}_2 &= -35.3798 \\ \hat{\alpha}_3 &= 0.422 \\ \hat{\gamma}_1 &= 73.5714 \\ \hat{\gamma}_2 &= -34.5305 \end{aligned}$$

que no nos proporciona una función de masa de probabilidad. Actuando de igual forma que en el ejemplo anterior, si imponemos que haya una moda local en el punto 6, podemos considerar la distribución ${}_3F_2(-5.75, 25.6698, 0.3612; 32.7256, -5.6388; 1)$ que nos da un valor de la χ^2 igual a 12.40015, muy inferior al obtenido con la distribución ${}_2F_1$ anteriormente estimada, y con un p-valor de 0.08814 con lo que la mejora es evidente. Los cálculos relativos a dicho test aparecen en la tabla 6.6, en la que se aprecia un mejor ajuste en el punto 6, y algo peor en los puntos 5 y 7, pero en la que hay que destacar que en los valores más pequeños, que es donde se concentra la mayor parte de la masa de probabilidad, hay un ajuste casi perfecto.

En cuanto al test de Kolmogorov-Smirnov también se reduce la diferencia entre distribuciones de frecuencias obteniendo un valor de 0.00776 con un p-valor evidentemente superior a 0.2 y que mejora de manera considerable el anterior.

En la figura 6.2 se dibujan tanto la poligonal de las frecuencias observadas como las de las estimadas por las distribuciones obtenidas. El gráfico nos muestra un hecho similar al del ejemplo anterior, donde la poligonal relativa a la ${}_2F_1$ se ajusta bastante bien a todos los puntos observados, excepto en el punto 6, mientras que la poligonal de la ${}_3F_2$, aún sin presentar una moda local en dicho punto, sí se ajusta mejor a él aunque para ello se aleje de la frecuencia observada en el punto 5.

6.3 La estimación en el caso bivalente

En el caso bivalente nos hemos centrado en la familia de distribuciones generadas por la función hipergeométrica F_3 , que posee 7 parámetros, si

Tabla 6.6: Contraste de la χ^2

x_i	O_i	E_i	residuos
0	411	415.98827	0.05982
1	121	120.16637	0.00578
2	74	66.22212	0.91352
3	40	42.79858	0.18300
4	32	30.07607	0.12307
5	14	22.63066	3.29148
6	23	19.29934	0.70960
7	16	9.92837	3.71306
8	3	6.89944	2.20389
9	5	5.04974	0.00049
10-11	6	6.70833	0.07479
12-14	4	5.45900	0.38994
> 14	9	6.77371	0.73171

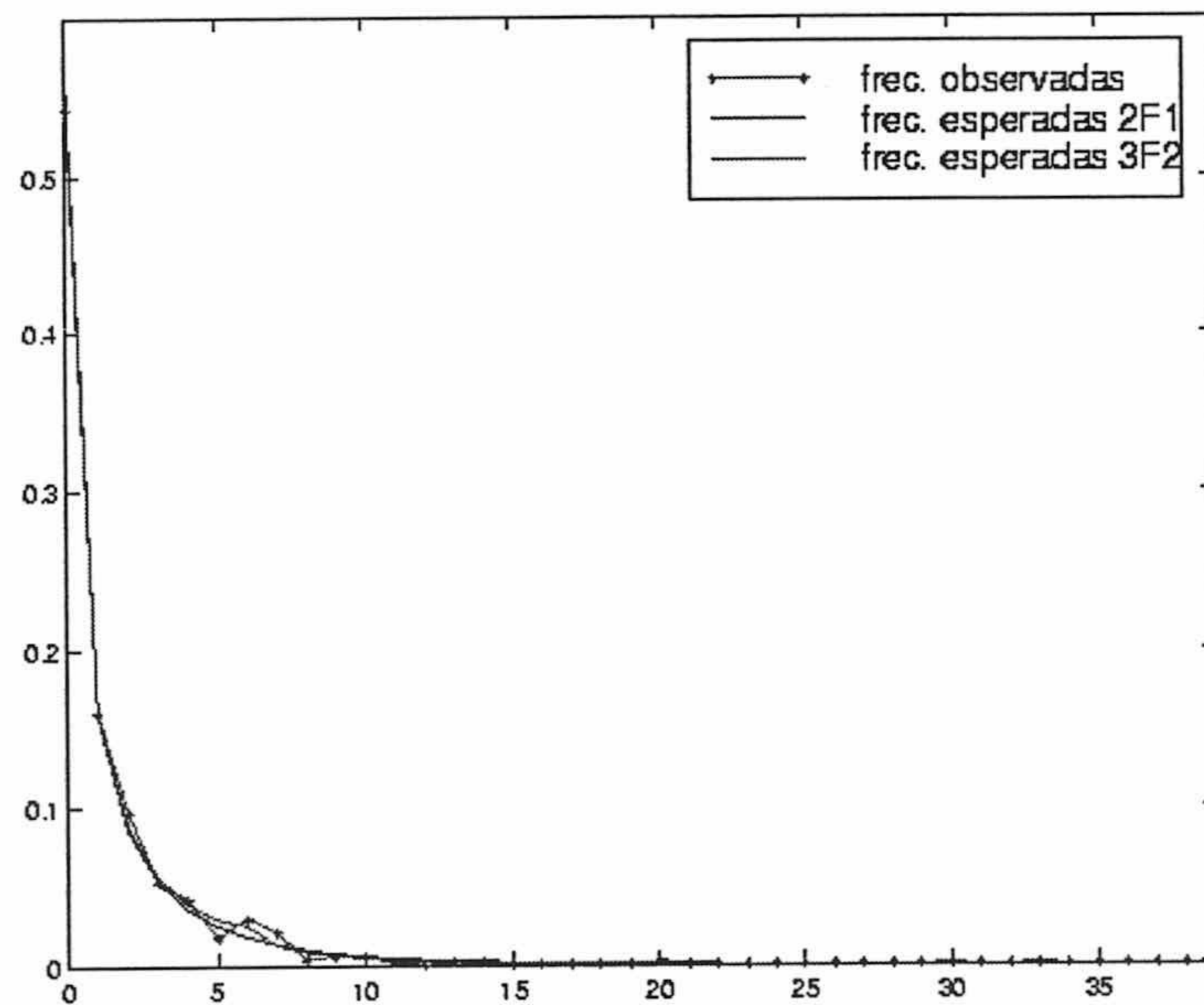


Figura 6.2: Frecuencias observadas y esperadas

bien considerando que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, nos quedan 5 parámetros que vamos a estimar por el método de los momentos. Para ello utilizamos las relaciones de recurrencia dadas en el capítulo 5, en concreto las expresiones (5.9) y (5.11).

Así, sustituyendo la primera de las ecuaciones de (5.9) en la segunda ecuación y operando se tiene que:

$$\gamma - 1 - (\alpha_1 + \beta_1) = \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}} \quad (6.17)$$

y si reemplazamos de nuevo la primera expresión de (5.9) y (6.17) en la tercera ecuación, nos queda una ecuación en γ , y despejando ésta se llega a:

$$\begin{aligned} \gamma = 1 + \frac{1}{\mu'_{1,0}} \left\{ \frac{\mu'_{1,1}\mu'_{0,1} - \mu'_{1,2}}{\mu_{1,1}} [\mu'_{1,0}(2 - \mu'_{1,0}) - \mu'_{2,0}] + \right. \\ \left. + \mu'_{1,1}(1 - \mu'_{1,0}) + \mu'_{2,0} - \mu'_{2,1} \right\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Además, de la primera expresión, si sustituimos en ella (6.17) y operamos se tiene que:

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{\mu'^2_{1,1} - \mu'_{1,2}\mu'_{1,0}}{\mu_{1,1}} \quad (6.19)$$

y de (6.17),

$$\alpha_1 + \beta_1 = \gamma - 1 + \frac{\mu'_{1,2} - \mu'_{1,1}\mu'_{0,1}}{\mu_{1,1}} \quad (6.20)$$

Por lo tanto las estimaciones de los parámetros α_1, β_1 se obtienen como las raíces del polinomio $x^2 + (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_1\beta_1$.

De igual forma se obtienen las estimaciones de los parámetros α_2 y β_2 , utilizando las dos primeras expresiones de (5.11) llegando a las siguientes expresiones:

$$\alpha_2\beta_2 = \frac{\mu'^2_{1,1} - \mu'_{2,1}\mu'_{0,1}}{\mu_{1,1}} \alpha_2 + \beta_2 = \gamma - 1 + \frac{\mu'_{2,1} - \mu'_{1,1}\mu'_{1,0}}{\mu_{1,1}} \quad (6.21)$$

por lo que dichas estimaciones se obtienen como raíces del polinomio $x^2 + (\alpha_2 + \beta_2)x + \alpha_2\beta_2$.



Apéndice A

Programas en Matlab 5.1

A.1 Resultados de sumación

A.1.1 ${}_2F_1$

```
function y = sum2f1(p);

% esta funcion aplica la formula de Gauss para obtener la
% suma de una funcion hipergeometrica 2F1(a,b;c;d) con d=1
% o d=0.5 y c=(1+a+b)/2

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);

if abs(c-(1+a+b)/2)<1e-15
    sigue=1;
else
    sigue=0;
end

if d==1;
% si alguno de los parametros es entero negativo, el mayor
% de ellos ha de ser a
    if a<0 & a == fix(a)
% utilizamos el teorema de Vandermonde
y = poc(c-b,-a)/poc(c,-a);
        elseif c<a+b
error('No es f.m.p.')
        elseif c<171.6
```



```

% utilizamos el teorema de Gauss
y = (gamma(c)/gamma(c-a))*(gamma(c-a-b)/gamma(c-b));
    else
% aproximamos
i = 1;
coc = 1;
y = 1;
while coc > 0.000000000001 | i <= 100
    y = y+(poc(a,i)/poc(c,i))*(poc(b,i)/gamma(i+1))*d^i;
    coc = ((poc(a,i)/poc(c,i))*(poc(b,i)/gamma(i+1))*d^i)/y;
    i = i+1;
end
    end
elseif d==0.5 & sigue==1
% utilizamos el segundo teorema de Gauss
y = (gamma(0.5)/gamma((1+a)/2))*(gamma(c)/gamma((1+b)/2));
else
    error('Parametros inadecuados')
end

```

A.1.2 ${}_3F_2$

1. function y = sum3f2n(p)

```

% esta funcion permite calcular la suma de una funcion
% hipergeometrica 3F2 finita, o de una 3F2(a,b,c+n;d,c;1)
% de forma que si hay algun entero negativo en el
% numerador, el mayor es a,
% o de una 3F2(a,b,c+n;d,c;0.5) con d=(1+a+b)/2

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);
f=p(6);
n = c-e;
    if abs(n-fix(n))<1e-10
n = round(n);
    end
q=[a,b,d];

```



```

y = 0;
if a<0 & a == fix(a)
    for r = 0:-a
        y = y+(poc(a,r)/poc(d,r))*(poc(b,r)/poc(e,r))*...
            ... (poc(c,r)/gamma(r+1))*f^r;
    end
elseif n>0 & n == fix(n)
    for i = 0:n
        y = y+cb(n,i)*sum2f1([q+i,f])*(poc(a,i)/poc(e,i))*...
            ... (poc(b,i)/poc(d,i))*f^i;
    end
else
    error('el tercer parametro del numerador ha de ser
        igual al segundo del denominador mas un numero
        natural')
end

```

2. function y = sum3f2(p)

```

% esta funcion permite calcular la suma de una funcion
% hipergeometrica 3F2 utilizando los teoremas de Dixon,
% Watson y Whipple.

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);
f=p(6);

if f == 1
% Teorema de Dixon
    if d == 1+a-b & e == 1+a-c & a+2*(1-b-c)>0
y=(gamma(1+a/2)/gamma(1+a))*(gamma(1+a/2-b-c)/...
    ...gamma(d-c))*(gamma(d)/gamma(1+a/2-b))*(gamma(e)/...
    ...gamma(1+a/2-c));
% Teorema de Watson
    elseif d == (a+b+1)/2 & e == 2*c & 1-a-b+2*c>0
y=(gamma(1/2)/gamma((1+a)/2))*(gamma(1/2+c)/...
    ...gamma((1+b)/2))*(gamma(d)/gamma((1-a)/2+c))*...
    ... (gamma((1-a-b)/2+c)/gamma((1-b)/2+c));
% Teorema de Whipple
    elseif b == 1-a & e == 1+2*c-d & c>0

```



```

y=2^(1-2*c)*pi*gamma(d)*gamma(e)/(gamma(a+e)/2)*...
  gamma((a+d)/2)*gamma((b+e)/2)*gamma((b+d)/2);
  else
error('Los parametros no verifican las condiciones que
imponen estos teoremas')
  end
else
  error('El parametro lambda ha de ser igual a 1')
end

```

A.1.3 ${}_{p+1}F_p$

```

function y = sumqfp(p)

% esta funcion permite calcular la suma de una funcion
% hipergeometrica pFp-1 finita, o de una
% pFp-1(a1,a2,b1+m,...,b{p-1}+n1;b1,...,b{p-1};1)
% de forma que si hay algun entero negativo en el numerador,
% el mayor es a, o de una
% pFp-1(a1,a2,b1+m,...,b{p-1}+n1;b1,...,b{p-1};0.5)
% con b1=(1+a1+a2)/2

t = size(p);
t2 = t(2);
s = t2/2;
  if abs(s-fix(s))<1e-10
s = round(s);
  end
n1 = p(s)-p(t2-1);
  if abs(n1-fix(n1))<1e-10
n1 = round(n1);
  end

y = 0;
if p(1)<0 & p(1) == fix(p(1))
  for r = 0:-p(1)
prod = 1;
for i = 1:s-1
  prod = prod*(poc(p(i),r)/poc(p(i+s),r));
end
y = y+prod*(poc(p(s),r)/gamma(r+1))*p(t2)^r;
  end
end

```



```

elseif n1>0 & n1==fix(n1)
    for j = 0:n1
    prod = 1;
    for i = 1:s-1
        prod = prod*(poc(p(i),j)/poc(p(i+s),j));
        q1(i) = p(i);
        q2(i) = p(i+s);
    end
    if s == 4
        y = y+cb(n1,j)*sum3f2n([q1+j,q2(1:s-2)+j,p(t2)])*...
            ...prod*p(t2)^j;
    else
        y = y+cb(n1,j)*sumqfp([q1+j,q2(1:s-2)+j,p(t2)])*...
            ...prod*p(t2)^j;
    end
    end
else
    error('La diferencia entre los ultimos parametros de
    numerador y denominador ha de ser igual a un numero
    natural')
end

```

A.1.4 F_3

```

function y = sumf3(p)

% esta funcion permite calcular la suma
% de una funcion hipergeometrica bivariante
% F3(a,b,c,d;e;1,1) con d=e-c+n
% de forma que si hay algun entero negativo en el numerador,
% los mayores son a y b.

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);
q=[a,c,e,1];

if a<0 & a==fix(a)
    t = [p(2), p(4), p(5)-p(1)-p(3), p(5)-p(1), p(5)-p(3), 1];

```



```

else
    t = [p(2), p(5)-p(1)-p(3), p(4), p(5)-p(1), p(5)-p(3), 1];
end

y = 0;
if a<0 & a == fix(a) & b<0 & b == fix(b)
    for r = 0:-a
        for s = 0:-b
            y = y+(poc(a,r)*poc(b,s)/poc(e,r+s))*(poc(c,r)/...
                ...gamma(r+1))*(poc(d,s)/gamma(s+1));
        end
    end
end
else
    y = sum2f1(q)*sum3f2n(t);
end

```

A.2 F.m.p. y función de distribución

A.2.1 ${}_3F_2$

```

function Y = p3f2(p)

% esta funcion permite la suma de una 3f2 con p el vector de
% parametros, en el mismo orden.
% NOTAS: p(3) = p(5)+n (si no es finita) y, en todo caso,
% si alguno de los parametros del numerador es entero
% negativo, ha de serlo p(1).

if (p(4) == 1+p(1)-p(2) & p(5) == 1+p(1)-p(3) & p(1)+2*...
    ... (1-p(2)-p(3))>0) | (p(4) == (p(1)+p(2)+1)/2 & p(5) ==...
    ... 2*p(3) & 1-p(1)-p(2)+2*p(3)>0) | (p(2) == 1-p(1) &...
    ... p(5) == 1+2*p(3)-p(4) & p(3)>0)
    suma = sum3f2(p);
else
    suma = sum3f2n(p);
end

i = 1;

A(1,1) = 0;
A(1,2) = 1/suma;

```



```
A(1,3) = A(1,2);
A(1,4) = 0;

if p(1)<0 & p(1) == fix(p(1))
r = -p(1);
else
r=20
end

while A(i,3) < 0.999 | i <= r
mn = 1;
md = 1;
suma = 0;

A(i+1,1) = A(i,1)+1;

for j = 1 : 3
mn = mn*(p(j)+(i-1));
end

for j= 4:5
md = md * (p(j) + (i-1));
end

A(i+1,2) = (A(i,2)*mn*p(6))/(md * i);
A(i+1,3) = A(i,3) + A(i+1,2);

% para comprobar si es ley infinitamente divisible
for k = 2:i
suma = suma + A(i+2-k,4)*A(k,2)/A(1,2);
end

A(i+1,4) = A(i+1,1) * A(i+1,2)/A(1,2) - suma;

if mn==0, break, end

i = i+1;
end
Y = A;
```


A.2.2 ${}_{p+1}F_p$

```

function Y = pqfp(p)

% esta funcion permite calcular las probabilidades
% de una  $\{p+1\}f_p$  con p el vector de parametros, en el mismo
% orden.
% NOTAS: si no es finita, la diferencia entre los ultimos
% parametros de numerador y denominador ha de ser un numero
% natural; si alguno de los parametros del numerador es
% entero negativo, ha de serlo p(1).

t = size(p);
t2 = t(2);
s = t2/2;

i = 1;

A(1,1) = 0;
A(1,2) = 1/sumqfp(p);
A(1,3) = A(1,2);
A(1,4) = 0;

if p(1)<0 & p(1) == fix(p(1))
r = -p(1);
else
r=20
end

while A(i,3) < 0.999 | i <= r
mn = 1;
md = 1;
suma = 0;

A(i+1,1) = A(i,1)+1;

for j = 1 : s
mn = mn*(p(j)+(i-1));
end

for j= s+1 : t2-1
md = md*(p(j)+(i-1));
end

```



```

A(i+1,2) = (A(i,2)*mn*p(t2))/(md * i);
A(i+1,3) = A(i,3) + A(i+1,2);

% para comprobar si es ley infinitamente divisible
for k = 2:i
suma = suma + A(i+2-k,4)*A(k,2)/A(1,2);
end

A(i+1,4) = A(i+1,1) * A(i+1,2)/A(1,2) - suma;

if mn==0, break, end

i = i+1;
end
Y = A;

```

A.2.3 F_3

```

function Y = pf3(p)

% esta funcion permite calcular las probabilidades de una F3
% con p el vector de parametros, en el mismo orden.
% NOTAS: p(4) = p(5)-p(3)+n y, en todo caso, si alguno de los
% parametros del numerador es entero negativo,
% ha de serlo p(1) p(2).

[Y1, Y2] = margpf3(p);
nf1 = size(Y1,1);
nf2 = size(Y2,1);

i = 0;
j = 1;
k = 0;
h = 0;

A(1,1) = 0;
A(1,2) = 0;
A(1,3) = 1/sumf3(p);
A(1,4) = A(1,3);
A(1,5) = A(1,3);

```



```

if p(1)<0 & p(1)==fix(p(1))
    stop = 1;
else
    stop = 0.999*Y2(1,2);
end

while A(k+1,5) < stop & i < nf1
while A(j,4) < 0.999*Y1(i+1,2) | j < nf2
mn = 1;
md = 1;

A(k+j+1,1) = A(k+j,1);
A(k+j+1,2) = A(k+j,2)+1;

mn = mn*(p(2)+(j-1))*(p(4)+(j-1));
md = md * (p(5)+(i+j-1));

A(k+j+1,3) = (A(k+j,3)*mn)/(md * j);
A(k+j+1,4) = A(k+j,4) + A(k+j+1,3);
A(k+j+1,5) = A(k+j+1,5) + A(k+j+1,4);

if mn==0, break, end

j = j+1;
end

A(k+j+1,1) = A(k+1,1)+1;
A(k+j+1,2) = 0;

i = i+1;

mn = 1;
md = 1;
mn = mn*(p(1)+(i-1))*(p(3)+(i-1));
md = md * (p(5) + (i-1));

A(k+j+1,3) = (A(k+1,3)*mn)/(md * i);
A(k+j+1,4) = A(k+1,4);
A(k+j+1,5) = A(k+1,5) + A(k+j+1,3);

if mn==0, break, end

h = k;

```



```

k = k+j;
j = 1;
end

```

```

Y = A;

```



A.2.4 Marginales de la F_3

```

function [Y1, Y2, q, t] = margpf3(p)

% esta funcion permite calcular las probabilidades de las
% marginales de una F3
% con p el vector de parametros, en el mismo orden.
% NOTAS: p(4) = p(5)-p(3)+n y, en todo caso, si alguno de los
% parametros del numerador es entero negativo,
% ha de serlo p(1) o p(2).

% primero determinamos los parametros de las distribuciones
% marginales.
if p(1)<0 & p(1)==fix(p(1))
    q = [p(1), p(5)-p(2)-p(4), p(3), p(5)-p(2), p(5)-p(4), 1]
    t = [p(2), p(4), p(5)-p(1)-p(3), p(5)-p(1), p(5)-p(3), 1]
elseif p(2)<0 & p(2)==fix(p(2))
    q = [p(1), p(3), p(5)-p(2)-p(4), p(5)-p(2), p(5)-p(4), 1]
    t = [p(2), p(5)-p(1)-p(3), p(4), p(5)-p(1), p(5)-p(3), 1]
else
    q = [p(1), p(5)-p(2)-p(4), p(3), p(5)-p(2), p(5)-p(4), 1]
    t = [p(2), p(5)-p(1)-p(3), p(4), p(5)-p(1), p(5)-p(3), 1]
end

% Marginal de X:
Y1 = p3f2(q);

% Marginal de Y:
Y2 = p3f2(t);

```


A.3 Momentos

A.3.1 ${}_3F_2$

```
function M = momen3f2(p)

% esta funcion calcula los momentos de la 3f2 corresp.
% en donde o la distribucion es finita o o si es infinita
% se tiene que c=e+n con n natural. El parametro lambda es
% 1 o 0.5.

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);
f=p(6);

% calculamos los momentos no centrados para una 3f2 finita.
if a<0 & a == fix(a)
    for i = 1:6
        M(i,1)=0;
        for r=1:-a
            l(r)=poc(a,r)*poc(b,r)*poc(c,r)*f^r/(poc(d,r)*...
                ...poc(e,r)*gamma(r+1));
            M(i,1)=M(i,1)+(r^i)*l(r);
        end;
        M(i,1)=M(i,1)/sum3f2n(p);
    end;

else
    n = c-e;
    ac = a*b*c*f;
    au = (a*b+a*c+b*c)*f;
    ad = (a+b+c)*f;
    bu = d*e-d-e+1;
    bd = d+e-2;
    q = [a+1 b+1 c+1 d+1 e+1 f];

% para una infinita con n entero.
M(1,1) = (sum3f2n(q)*a*b*c*f)/(d*e*sum3f2n(p));

% con lambda=1.
```



```

    if f==1
M(2,1) = (ac-(bu-au)*M(1,1))/(bd-ad);
M(3,1) = (ac+(au+ac)*M(1,1)-(bu-ad-au)*M(2,1))/(bd-ad-1);
M(4,1) = (ac+(au+2*ac)*M(1,1)+(ad+2*au+ac)*M(2,1)-...
    (bu-1-2*ad-au)*M(3,1))/(bd-ad-2);
M(5,1) = (ac+(au+3*ac)*M(1,1)+(ad+3*au+3*ac)*M(2,1)+...
    (3*ad+3*au+ac+1)*M(3,1)-(bu-3-3*ad-au)*...
    M(4,1))/(bd-ad-3);
M(6,1) = (ac+(au+4*ac)*M(1,1)+(ad+4*au+6*ac)*M(2,1)+...
    (4*ad+6*au+4*ac+1)*M(3,1)+(4+ac+6*ad+4*au)*M(4,1)-...
    (bu-6-4*ad-au)*M(5,1))/(bd-ad-4);

% y con lambda=0.5
    elseif f==0.5
t=[a+2 b+2 c+2 d+2 e+2 f]
M(2,1) = M(1,1) + (sum3f2n(t)*poc(a,2)*poc(b,2)*poc(c,2)*...
    f^2)/(poc(d,2)*poc(e,2)*sum3f2n(p));
M(3,1) = 2*(ac-(bu-au)*M(1,1)-(bd-ad)*M(2,1));
M(4,1) = 2*(ac+(au+ac)*M(1,1)-(bu-ad-au)*M(2,1)-...
    (bd-ad-0.5)*M(3,1));
M(5,1) = 2*(ac+(au+2*ac)*M(1,1)+(ad+1*au+ac)*M(2,1)-...
    (bu-0.5-2*ad-au)*M(3,1)-(bd-ad-1)*M(4,1));
M(6,1) = 2*(ac+(au+3*ac)*M(1,1)+(ad+3*au+3*ac)*M(2,1)+...
    (3*ad+3*au+ac+0.5)*M(3,1)-(bu-1.5-3*ad-au)*M(4,1)-...
    (bd-ad-1.5)*M(5,1));

    else
error('Parametros inadecuados')
    end
end

% los momentos centrados se obtienen a partir de los no
% centrados.
M(1,2) = 0;
M(2,2) = M(2,1) - M(1,1)^2;
M(3,2) = M(3,1) - 3*M(2,1)*M(1,1) + 2*M(1,1)^3;
M(4,2) = M(4,1) - 4*M(3,1)*M(1,1) + 6*M(2,1)*M(1,1)^2 -...
...3*M(1,1)^4;

% coeficientes de asimetria y de curtosis.
asim = M(3,2)/(sqrt(M(2,2)))^3
curt = M(4,2)/M(2,2)^2-3

```


A.3.2 ${}_4F_3$

```

function M = momen4f3(p)

% esta funcion calcula los momentos de la 4f3 corresp.
% en donde o la distribucion es finita o si es infinita
% se tiene que c=f+m y d=g+n con m y n naturales.
% El parametro lambda es 1 o 0.5

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);
f=p(6);
g=p(7);
h=p(8);

% calculamos los momentos no centrados para una 4f3 finita.
if a<0 & a == fix(a)
    for i = 1:9
        M(i,1)=0;
        for r=1:-a
            l(r)=poc(a,r)*poc(b,r)*poc(c,r)*poc(d,r)*h^r/(poc(e,r)*...
                poc(f,r)*poc(g,r)*gamma(r+1));
            M(i,1)=M(i,1)+(r^i)*l(r);
        end;
        M(i,1)=M(i,1)/sum4f3mn(p);
    end;

else
    m = c-f;
    n = d-g;
    ac = a*b*c*d*h;
    au = (a*b*c+a*b*d+a*c*d+b*c*d)*h;
    ad = (a*b+a*c+a*d+b*c+b*d+c*d)*h;
    at = (a+b+c+d)*h;
    bu = (e+f+g)-(e*f+e*g+f*g)+(e*f*g)-1;
    bd = (e*f+e*g+f*g)+3-2*(e+f+g);
    bt = e+f+g-3;
    q = [a+1 b+1 c+1 d+1 e+1 f+1 g+1 h];
    t = [a+2 b+2 c+2 d+2 e+2 f+2 g+2 h];

```



```

% para una infinita con m y n enteros.
M(1,1) = (sum4f3mn(q)*a*b*c*d*h)/(e*f*g*sum4f3mn(p));
M(2,1) = M(1,1) + (sum4f3mn(t)*poc(a,2)*poc(b,2)*...
poc(c,2)*poc(d,2)*h^2)/(poc(e,2)*poc(f,2)*poc(g,2)*...
sum4f3mn(p));

% con lambda=1.
if h==1
M(3,1) = (ac-(bu-au)*M(1,1)-(bd-ad)*M(2,1))/(bt-at);
M(4,1) = (ac+(au+ac)*M(1,1)-(bu-ad-au)*M(2,1)-(bd-at-ad)*...
M(3,1))/(bt-at-1);
M(5,1) = (ac+(au+2*ac)*M(1,1)+(ad+2*au+ac)*M(2,1)-(bu-at-2*...
ad-au)*M(3,1)-(bd-2*at-ad-1)*M(4,1))/(bt-at-2);
M(6,1) = (ac+(au+3*ac)*M(1,1)+(ad+3*au+3*ac)*M(2,1)+(at+...
3*ad+3*au+ac)*M(3,1)-(bu-1-3*at-3*ad-au)*M(4,1)-...
(bd-3-3*at-ad)*M(5,1))/(bt-at-3);
M(7,1) = (ac+(au+4*ac)*M(1,1)+(ad+4*au+6*ac)*M(2,1)+(at+...
4*ad+6*au+4*ac)*M(3,1)+(1+4*at+6*ad+4*au+ac)*M(4,1)-...
(bu-4-6*at-4*ad-au)*M(5,1)-(bd-6-4*at-ad)*...
M(6,1))/(bt-at-4);
M(8,1) = (ac+(au+5*ac)*M(1,1)+(ad+5*au+10*ac)*M(2,1)+(at+5*...
ad+10*au+10*ac)*M(3,1)+(1+5*at+10*ad+10*au+5*ac)*...
M(4,1)+(5+10*at+10*ad+5*au+ac)*M(5,1)-(bu-10-10*at-5*...
ad-au)*M(6,1)-(bd-10-5*at-ad)*M(7,1))/(bt-at-5);
M(9,1) = (ac+(au+6*ac)*M(1,1)+(ad+6*au+15*ac)*M(2,1)+(at+6*...
ad+15*au+20*ac)*M(3,1)+(1+6*at+15*ad+20*au+15*ac)*...
M(4,1)+(6+15*at+20*ad+15*au+6*ac)*M(5,1)+(15+20*...
at+15*ad+6*au+ac)*M(6,1)-(bu-20-15*at-6*ad-au)*M(7,1)...
-(bd-15-6*at-ad)*M(8,1))/(bt-at-6);

% y con lambda=0.5.
elseif h==0.5
s = [a+3 b+3 c+3 d+3 e+3 f+3 g+3 h];
M(3,1) = M(1,1) + 3*M(2,1) + (sum4f3mn(s)*poc(a,3)*...
poc(b,3)*poc(c,3)*poc(d,3)*h^3)/(poc(e,3)*poc(f,3)*...
poc(g,3)*sum4f3mn(p));
M(4,1) = 2*(ac-(bu-au)*M(1,1)-(bd-ad)*M(2,1)-(bt-at)*M(3,1));
M(5,1) = 2*(ac+(au+ac)*M(1,1)-(bu-ad-au)*M(2,1)-(bd-at-ad)*...
M(3,1)-(bt-at-0.5)*M(4,1));
M(6,1) = 2*(ac+(au+2*ac)*M(1,1)+(ad+2*au+ac)*M(2,1)-(bu-at-...
2*ad-au)*M(3,1)-(bd-2*at-ad-0.5)*M(4,1)-(bt-at-1)*...
M(5,1));
M(7,1) = 2*(ac+(au+3*ac)*M(1,1)+(ad+3*au+3*ac)*M(2,1)+...
(at+3*ad+3*au+ac)*M(3,1)-(bu-0.5-3*at-3*ad-au)*...

```



```

M(4,1)-(bd-1.5-3*at-ad)*M(5,1)-(bt-at-1.5)*M(6,1));
M(8,1) = 2*(ac+(au+4*ac)*M(1,1)+(ad+4*au+6*ac)*M(2,1)+...
(at+4*ad+6*au+4*ac)*M(3,1)+(0.5+4*at+6*ad+4*au+ac)*...
M(4,1)-(bu-2-6*at-4*ad-au)*M(5,1)-(bd-3-4*at-ad)...
*M(6,1)-(bt-at-2)*M(7,1));
M(9,1) = 2*(ac+(au+5*ac)*M(1,1)+(ad+5*au+10*ac)*M(2,1)+...
(at+5*ad+10*au+10*ac)*M(3,1)+(0.5+5*at+10*ad+10*au+...
5*ac)*M(4,1)+(2.5+10*at+10*ad+5*au+ac)*M(5,1)-...
(bu-5-10*at-5*ad-au)*M(6,1)-(bd-5-5*at-ad)*M(7,1)-...
(bt-at-2.5)*M(8,1));
    else
error('Parametros inadecuados')
    end
end

% los momentos centrados se obtienen a partir de los no
% centrados.

M(1,2) = 0;
M(2,2) = M(2,1) - M(1,1)^2;
M(3,2) = M(3,1) - 3*M(2,1)*M(1,1) + 2*M(1,1)^3;
M(4,2) = M(4,1) - 4*M(3,1)*M(1,1) + 6*M(2,1)*M(1,1)^2 -...
...3*M(1,1)^4;

% coeficientes de asimetra y de curtosis.

asim = M(3,2)/(sqrt(M(2,2)))^3
curt = M(4,2)/M(2,2)^2-3

```

A.3.3 F_3

```

function M = momentf3(p)

% esta funcion calcula los momentos de la f3 corresp.
% NOTAS: p(4) = p(5)-p(3)+n y, en todo caso, si alguno de los
% parametros del numerador es entero negativo,
% ha de serlo p(1) o p(2).

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);

```



```

d=p(4);
e=p(5);

% calculamos la media para una f3 finita con a o b
% iguales a -1
if a==-1
    q=[a,e-b-d,c,e-b,e-d,1];
    M(1,1)=0;
    for r=1:-a
        f(r)=poc(a,r)*poc(c,r)*poc(e-b-d,r)/(poc(e-b,r)*...
        poc(e-d,r)*gamma(r+1));
        M(1,1)=M(1,1)+r*f(r);
    end
    M(1,1)=M(1,1)/sum3f2n(q);

elseif b==-1
    q=[b,e-a-c,d,e-a,e-c,1];
    M(1,2)=0;
    for r=1:-b
        f(r)=poc(b,r)*poc(d,r)*poc(e-a-c,r)/(poc(e-a,r)*...
        ..poc(e-c,r)*gamma(r+1));
        M(1,2)=M(1,2)+r*f(r);
    end
    M(1,2)=M(1,2)/sum3f2n(q);

% y ahora para una infinita o finita no incluida en los casos
% anteriores.
else
    q=[a+1,b,c+1,d,e+1,1];
    t=[a,b+1,c,d+1,e+1,1];
end

% media de X
M(1,1) = (a*c*sumf3(q))/(e*sumf3(p));
% media de Y
M(1,2) = (b*d*sumf3(t))/(e*sumf3(p));

% calculo de los momentos no centrados
% momento de orden 1,1
M(1,3) = a*c-(e-1-(a+c))*M(1,1);
% momento de orden 1,2
M(2,3) = a*c*M(1,2)-(e-(a+c))*M(1,3);
% momento de orden 2,1

```



```

    M(3,3) = b*d*M(1,1)-(e-(b+d))*M(1,3);
% momento de orden 2,0
    M(2,1) = (a*c-M(3,3)+(a*c+a+c)*M(1,1))/(e-2-(a+c));
% momento de orden 0,2
    M(2,2) = (b*d-M(2,3)+(b*d+b+d)*M(1,2))/(e-2-(b+d));

% calculo de los momentos centrados
% varianza de X
    M(3,1) = M(2,1)-M(1,1)^2;
% varianza de Y
    M(3,2) = M(2,2)-M(1,2)^2;
% covarianza
    M(4,3) = M(1,3)-M(1,1)*M(1,2);

% calculo del coeficiente de correlacin
    M(1,4) = M(4,3)/(sqrt(M(3,1)*M(3,2)));

```

A.4 Estimación

A.4.1 ${}_2F_1$

```

function [es,Y] = estim2f1(x)

% Esta funcion permite estimar los parametros de una 2F1 con
% lambda=1 para unos datos observados. Para ello se calculan
% los 3 primeros momentos no centrados.

m = [mean(x) mean(x.^2) mean(x.^3)]

% m es el vector de momentos de los datos.

% pasamos a estimar los parametros
% primer paso: resolucio del sistema lineal.

% M es la matriz de coeficientes
M = [m(1) -m(1) -1 ; m(2) -(m(2)+m(1)) -(m(1)+1) ;...
     ...m(3) -(m(3)+2*m(2)+m(1)) -(m(2)+2*m(1)+1)];

% tindep es el vector de terminos independientes
tindep = [0 m(2) 2*m(3)+m(2)];

```



```

% los coeficientes de L y G son:
theta = inv(M)*tindep'

% obtenemos alfa y beta
se = [1 -theta(2) theta(3)];
r = roots(se);

% por tanto los parametros son
p = [r(1) r(2) theta(1)+1 1];

% p es el vector de parametros
es = p;

% ahora calculamos las probabilidades de la distribucion
Y = p2f1(p);

```

A.4.2 ${}_3F_2$

```

function [es,Y] = estim3f2(x)

% Esta funcion permite estimar los parametros de una 3F2 con
% lambda=1 para unos datos observados. Para ello se calculan
% los 6 primeros momentos no centrados.

m = [mean(x) mean(x.^2) mean(x.^3) mean(x.^4) mean(x.^5)...
     ...mean(x.^6)]

% m es el vector de momentos de los datos.

% pasamos a estimar los parametros
% primer paso: estimacion del modelo lineal.

% M es la matriz de coeficientes
M=[m(2) m(1) -m(2) -m(1) -1;...
   m(3) m(2) -(m(3)+m(2)) -(m(2)+m(1)) -(m(1)+1);...
   m(4) m(3) -(m(4)+2*m(3)+m(2)) -(m(3)+2*m(2)+m(1))...
   ...-(m(2)+2*m(1)+1);...
   m(5) m(4) -(m(5)+3*m(4)+3*m(3)+m(2)) -(m(4)+3*m(3)+...
   ...3*m(2)+m(1)) -(m(3)+3*m(2)+3*m(1)+1);...
   m(6) m(5) -(m(6)+4*m(5)+6*m(4)+4*m(3)+m(2)) -(m(5)+...
   ...4*m(4)+6*m(3)+4*m(2)+m(1)) -(m(4)+4*m(3)+6*m(2)+...

```



```

...4*m(1)+1)];

% tindep es el vector de terminos independientes
tindep = [0 m(3) 2*m(4)+m(3) 3*m(5)+3*m(4)+m(3) 4*m(6)+...
...6*m(5)+4*m(4)+m(3)];

% los coeficientes de L y G son:
theta = inv(M)*tindep'

% obtenemos gamma1 y gamma2 como solucion de la siguiente
% ecuacion de segundo grado.
g = [1 -theta(1) theta(2)]
rden = roots(g);

p(4) = rden(1)+1;
p(5) = rden(2)+1;

% obtenemos alfa1, alfa2 y alfa3 como solucion de la siguiente
% ecuacion de tercer grado.
pol = [1 -theta(3) theta(4) -theta(5)]
rnum = roots(pol);

p(1) = rnum(1);
p(2) = rnum(2);
p(3) = rnum(3);

% los parametros estimados son:
p(6) = 1;
es = p;

% y la matriz de probabilidades:
Y = p3f2(p);

```

A.4.3 ${}_4F_3$

```
function [es,Y] = estim4f3(x)
```

```

% Esta funcion permite estimar los parametros de una 4F3 con
% lambda=1 para unos datos observados. Para ello se calculan
% los 9 primeros momentos no centrados.

```



```

m = [mean(x) mean(x.^2) mean(x.^3) mean(x.^4) mean(x.^5)...
     ...mean(x.^6) mean(x.^7) mean(x.^8) mean(x.^9)]

% m es el vector de momentos de los datos.

% pasamos a estimar los parametros
% primer paso: resolucio n del sistema lineal.

% M es la matriz de coeficientes
M=[m(3) m(2) m(1) -m(3) -m(2) -m(1) -1;
   m(4) m(3) m(2) -(m(4)+m(3)) -(m(3)+m(2)) -(m(2)+m(1))...
   ...-(m(1)+1);
   m(5) m(4) m(3) -(m(5)+2*m(4)+m(3)) -(m(4)+2*m(3)+m(2))...
   ...-(m(3)+2*m(2)+m(1)) -(m(2)+2*m(1)+1);
   m(6) m(5) m(4) -(m(6)+3*m(5)+3*m(4)+m(3))...
   ...-(m(5)+3*m(4)+3*m(3)+m(2)) -(m(4)+3*m(3)+3*m(2)+m(1))...
   ...-(m(3)+3*m(2)+3*m(1)+1);
   m(7) m(6) m(5) -(m(7)+4*m(6)+6*m(5)+4*m(4)+m(3))...
   ...-(m(6)+4*m(5)+6*m(4)+4*m(3)+m(2))...
   ...-(m(5)+4*m(4)+6*m(3)+4*m(2)+m(1))...
   ...-(m(4)+4*m(3)+6*m(2)+4*m(1)+1);
   m(8) m(7) m(6) -(m(8)+5*m(7)+10*m(6)+10*m(5)+5*m(4)+...
   ...m(3)) -(m(7)+5*m(6)+10*m(5)+10*m(4)+5*m(3)+m(2))...
   ...-(m(6)+5*m(5)+10*m(4)+10*m(3)+5*m(2)+m(1))...
   ...-(m(5)+5*m(4)+10*m(3)+10*m(2)+5*m(1)+1);
   m(9) m(8) m(7)...
   ...-(m(9)+6*m(8)+15*m(7)+20*m(6)+15*m(5)+6*m(4)+m(3))...
   ...-(m(8)+6*m(7)+15*m(6)+20*m(5)+15*m(4)+6*m(3)+m(2))...
   ...-(m(7)+6*m(6)+15*m(5)+20*m(4)+15*m(3)+6*m(2)+m(1))...
   ...-(m(6)+6*m(5)+15*m(4)+20*m(3)+15*m(2)+6*m(1)+1)];

% tindep es el vector de terminos independientes
tindep = [0 m(4) 2*m(5)+m(4) 3*m(6)+3*m(5)+m(4)...
         ...4*m(7)+6*m(6)+4*m(5)+m(4)
         ...5*m(8)+10*m(7)+10*m(6)+5*m(5)+m(4)
         ...6*m(9)+15*m(8)+20*m(7)+15*m(6)+6*m(5)+m(4)];

% los coeficientes de L y G son:
theta = inv(M)*tindep'

% obtenemos gamma1, gamma2 y gamma3 como solucio n de la
% siguiente ecuacion de tercer grado
g = [1 -theta(1) theta(2) -theta(3)]
rden = roots(g);

```



```

p(5) = rden(1)+1;
p(6) = rden(2)+1;
p(7) = rden(3)+1;

% obtenemos alfa1, alfa2, alfa3 y alfa4 como solucion de la
% siguiente ecuacion de cuarto grado
pol = [1 -theta(4) theta(5) -theta(6) theta(7)]
rnum = roots(pol);

p(1) = rnum(1);
p(2) = rnum(2);
p(3) = rnum(3);
p(4) = rnum(4);

% los parametros estimados son:
p(8) = 1;
es = p;

% y la matriz de probabilidades:
Y = p4f3(p);

```

A.5 Gráficos

A.5.1 Unidimensionales

```

function G = grafico(P,n)

% Esta funcion realiza graficos en color de distribuciones
% incluidas en las familias generadas por la 2F1, 3F2
% y en general por la pFp-1.

% nv determina el numero de poligonales a dibujar.
nv = size(P);

for i=1:nv(1)
    p = P(i,:)

% tipo de distribucion que se representa:
    if nv(2)==4
        A = p2f1(p)

```



```

elseif nv(2)==6
A = p3f2(p)
else
A = pqfp(p)
end

% G es la matriz con las probabilidades puntuales.
G(:,i) = A(1:n,2)
end

% x es el vector con los valores que toma la variable.
x = [0:n-1];

% para poner fondo blanco:
whitebg('w')

% se dibujan las graficas
plot(x,G)

% etiquetas y titulos:
xlabel('Valores de la Variable')
ylabel('Probabilidad')
title('Poligono de Frecuencias')
legend(num2str(P))

G;

```

A.5.2 F_3

1. Bidimensionales

```

function G = grafico2(p)

% Esta funcion realiza graficos para distribuciones
% bidimensionales generada por la F3. Dibuja tanto el
% estereograma como un reticulo que une
% las probabilidades semeando una superficie.

A = pf3(p)

% Determinamos la matriz de probabilidades:

```



```
k = 0;
h = 0;
n = max(A(:,1));
m = max(A(:,2))+1;
nf = size(A,1);

for i = 1:n
    for j = 1:m
        if k+j<nf & A(k+j,1)==i-1
            G(j,i) = A(k+j,3);
            h = h+1;
        else
            G(j,i) = 0;
        end
    end
    k=k+h;
    h=0;
end

% x e y son los vectores con los valores para las
% variables X e Y.
x = [0:n-1];
y = [0:m-1];

% para poner el fondo blanco.
whitebg('w')

% dibuja el estereograma:
stem3(x,y,G,'Fill')

% etiquetas y titulos:
xlabel('Valores de la variable X')
ylabel('Valores de la variable Y')
zlabel('Probabilidades')
title('Estereograma')

% dibuja la superficie:
figure
mesh(x,y,G)

% etiquetas y titulos:
%xlabel('Variable's Value')
xlabel('Valores de la variable X')
%ylabel('Probability')
```



```
ylabel('Valores de la variable Y')
xlabel('Probabilidades')
title('Superficie')

%legend(num2str(p))

G;
```

2. Marginales

```
function marggraf(p)

% esta funcion permite dibujar los poligonos de
% frecuencias de las distribuciones marginales de un F3,
% siempre que estas sean sumables por el teorema de la
% 3f2 o finitas.

% calculo de las marginales

[Y1, Y2, q, t] = margpf3(p);

nf1 = size(Y1,1);
nf2 = size(Y2,1);
m1 = max(Y1(:,2));
m2 = max(Y2(:,2));

x = [0:nf1-1];
y = [0:nf2-1];

% para poner el fondo blanco.
whitebg('w')

% grafico de la primera marginal
subplot(2,1,1); plot(x,Y1(:,2))
axis([0 nf1 0 m1+0.1])

% etiquetas y titulos:
xlabel('Valores de la Variable')
ylabel('Probabilidad')
title('Poligono de Frecuencias para las marginales de...
...una F3')
legend(num2str(q))
```



```
% grafico de la segunda marginal
subplot(2,1,2); plot(y,Y2(:,2))
axis([0 nf2 0 m2+0.1])

% etiquetas y titulos:
xlabel('Valores de la Variable')
ylabel('Probabilidad')
legend(num2str(t))
```

3. Curvas de regresión

```
function regresf3(p)

% esta funcion permite calcular las curvas de regresion
% para una funcion hipergeometrica bivariante
% F3(a,b,c,d;e;1,1).

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);

if a<0 & a==fix(a)
n = -a;
else
n = 100;
end

if b<0 & b==fix(b)
m = -b;
else
m = 100;
end

h=min(n,m);
x=[0:h];
y=[0:h];

for s=1:h+1
z1(s)=(a*c)/(e+s-a-c-2);
```



```
end
for r=1:h+1
z2(r)=(b*d)/(e+r-b-d-2);
end

plot(x,z1,z2,y)
xlabel('Variable X')
ylabel('Variable Y')
title(['Curvas de regresion para una...
...F3(',sprintf('%g ',p),')'])
```




Bibliografía

- [1] ARORA, K. AND RATHIE, A.K. (1993). *Some results involving hypergeometric functions and the H function*. The Mathematics Education, XXVII, 14-20.
- [2] CANSADO, E. (1947). *Funciones características de las distribuciones de Pearson*. Hispano-americana. Vol. 7, nº 3, 117-127.
- [3] CANSADO, E. (1950). *Exposición sistemática de las distribuciones de Pearson*. Trabajos de Estadística, Vol. 1, cuaderno III, 279-287.
- [4] CHANG, D.K. (1989). *On infinitely divisible discrete distributions*. Utilitas Math., 36, 215-217.
- [5] CONDE, A. (1997). *Estudio de los métodos de generación de familias de distribuciones discretas*. Memoria de Licenciatura. Universidad de Granada.
- [6] DACEY, M.F. (1975). *Probability laws for topological properties of drainage basins*. Statistical Distributions in Scientific Work, vol. 2, 327-341.
- [7] ELDERTON, W.P. AND JOHNSON, N.L. (1969). *Systems of frequency curves*. Cambridge University Press.
- [8] EXTON, H. (1997). *Some new formulae for the generalised hypergeometric function of higher order*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 79, 183-187.
- [9] FAJARDO, M.A. (1985). *Generalizaciones de los sistemas de Pearson discretos*. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.
- [10] FERNANDEZ, F. (1979). *Una extensión del sistema de Pearson bivariante o sistema de Van Uven*. Public. Facultad de Ciencias de Granada.
- [11] GUELFOND, A.O. (1963). *Calcul des différences finies*. Dunod.
- [12] GUTIÉRREZ, R. Y RODRÍGUEZ, J. (1994a). *Generación de la distribución de Waring Bidimensional a partir del sistema de Pearson discreto*

- bivariante*. XXI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 35-36.
- [13] GUTIÉRREZ, R. Y RODRÍGUEZ, J. (1994b). *L'Enseignement des familles de distributions discrètes de Pearson à travers une méthodologie constructive. Application à un cas particulier*. Proceedings of the Fourth International Conference on Teaching Statistics, ICOTS IV, vol. 2, pag 471.
- [14] GUTIÉRREZ, R. Y RODRÍGUEZ, J. (1995a). *Family of Pearson's discrete distributions generated by the univariate hypergeometric function ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$* . Proceedings of the Sevent International Symposium of Applied Stochastic Models and Data Analysis, 274-283.
- [15] GUTIÉRREZ, R. Y RODRÍGUEZ, J. (1995b). *Ejemplos de distribuciones discretas de Pearson generadas por la función hipergeométrica univariante ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$* . XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 37-38.
- [16] GUTIÉRREZ, R. Y RODRÍGUEZ, J. (1997a). *Generation of multivariate generalized Waring distribution from Pearson's discrete multidimensional system*. Remitido a Communication in Statistics.
- [17] GUTIÉRREZ, R., RODRÍGUEZ, J. Y CONDE, A. (1997b). *Estudio de una subclase de la familia de distribuciones discretas generadas por la función hipergeométrica ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; 1)$* . XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 46.5-46.6.
- [18] GUTIÉRREZ, R. Y RODRÍGUEZ, J. (1997c). *Family of Pearson discrete distributions generated by the univariate hypergeometric function ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; 1)$* . Applied Stochastics Models and Data Analysis, vol. 13, 115-125.
- [19] GUTIÉRREZ, R., RODRÍGUEZ, J. Y SÁEZ, A. J. (1999). *Construction of multivariate discrete distribution throught the ${}_2F_1$ function of matricial argument*. Admitido para su presentación en el IX International Symposium of Applied Stochastic Models and Data Analysis.
- [20] HERMOSO, J.A. (1987). *Estudio sobre distribuciones generadas por distribuciones hipergeométricas de argumento matricial*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [21] HERRERÍAS, R. (1975). *Sobre las estructuras estadísticas de Pearson y exponenciales; problemas asociados*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

- [22] HERRERÍAS, R. (1976). *Extensión del sistema de distribuciones discretas de Pearson*. Cuad. de Estad. Matemática Serie A, nº 3. Fac. Ciencias Granada.
- [23] IRWING, J.O. (1975). *The generalized Waring distribution*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 138, 18-31 (part I), 204-227 (part II), 374-378 (part III).
- [24] JOHNSON, N.L. AND KOTZ, S. (1969, 1970). *Distributions in Statistics. Vol. 1: Discrete Distributions; Vol. 2: Continuous Distributions*. Wiley, New York.
- [25] JOHNSON, N.L., KOTZ, S. AND KEMP A.W. (1992). *Univariate Discrete Distributions*. Wiley, New York. Second edition.
- [26] JORDAN, C. (1965). *Calculus on finite differences*. Chelsea.
- [27] KALLA, S.L. AND GALUÉ, L. (1994). *Simple algorithms for the approximation of the hypergeometric functions*. Algebras, Groups and Geometries, 11, 347-358.
- [28] KATTI, S.K. (1967). *Infinite divisibility of Integer-Valued random variables*. Annals of Mathematical Statistics, 38, 1306-1308.
- [29] KEMP, A.W. (1968). *A wide class of discrete distributions and the associated differential equations*. Sankhya, serie A, 30, 401-410.
- [30] KENDALL, M.G. AND STUART, A. (1967, 1969). *The advanced theory of statistic, vol. I and II*. Griffin, London.
- [31] KRUPNIKOV, E.D. AND KÖLBIG, K.S. (1997). *Some special cases of the generalized hypergeometric function ${}_qF_q$* . Journal of Computational and Applied Mathematics, 78, 79-95.
- [32] LAVOIE, J.L. (1986). *Some evaluations for the generalized hypergeometric series*. Mathematics of Computation, 46, 215-218.
- [33] LAVOIE, J.L. (1987). *Some summation formulas for the series ${}_3F_2(1)$* . Mathematics of Computation, 49, 269-274.
- [34] LAVOIE, J.L., GRONDIN, F. AND RATHIE, A.K. (1992). *Generalizations of Watson's theorem on the sum of a ${}_3F_2$* . Indian Journal of Mathematics, 34, 23-32.
- [35] LAVOIE, J.L., GRONDIN, F., RATHIE, A.K. AND ARORA, K. (1994). *Generalizations of Dixon's theorem on the sum of a ${}_3F_2$* . Mathematics of Computation, 62, 267-276.

- [36] LAVOIE, J.L., GRONDIN, F. AND RATHIE, A.K. (1996). *Generalizations of Whipple's theorem on the sum of a ${}_3F_2$* . Journal of Computational and Applied Mathematics, 72, 293-300.
- [37] ORD, J.K. (1967a). *Graphical methods for a class of discrete distributions*. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 130, 232-238.
- [38] ORD, J.K. (1967b). *On a system of discrete distributions*. Biometrika, n^o 54, 649-656.
- [39] ORD, J.K. (1972). *Families of frequency distributions*. Griffin, London.
- [40] PEARSON, E.S. (1948). *Karl Pearson's early statistical papers*. London: Cambridge University Press.
- [41] PEARSON, K. (1895). *Memoir on skew variation in homogeneous material*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 186, 343-414.
- [42] PEARSON, K. (1923). *Notes on skew frequency surfaces*. Biometrika, n^o 54, 649-656.
- [43] PRUDNIKOV, A.P., BRYCHOV, YU.A. AND MARICHEV, O.I. (1990). *Integrals and Series, vol. 3, More Special Functions*. Gordon and Breach, New York.
- [44] RODRÍGUEZ, J. (1994). *Contribución a los métodos de generación de distribuciones multivariantes discretas*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [45] RODRÍGUEZ, J., GUTIÉRREZ, R. Y CONDE, A. (1998a). *Study of a wide class of univariate discrete distributions generated by the hypergeometric function ${}_3F_2$* . Remitido a Applied Stochastic Models and Data Analysis.
- [46] RODRÍGUEZ, J., CONDE, A. Y GUTIÉRREZ, R. (1998b). *Distribuciones bivariantes discretas generadas por la función hipergeométrica $F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; \lambda_1, \lambda_2)$* . XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 587-588.
- [47] RODRÍGUEZ, J. Y SÁEZ A.J. (1998c). *Generación de distribuciones multivariantes mediante el uso de polinomios zonales*. XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, 589-590.
- [48] RODRÍGUEZ, J., GUTIÉRREZ, R. Y CONDE, A. (1999). *Discrete distributions generated by the hypergeometric function ${}_4F_3$* . Admitido para su presentación en el IX International Symposium of Applied Stochastic Models and Data Analysis.

- [49] SÁEZ, A.J. (1997). *Polinomios zonales y funciones hipergeométricas de argumento matricial*. Memoria de Licenciatura. Universidad de Granada.
- [50] SLATER, L.J. (1966). *Generalized Hypergeometric Functions*. London: Cambridge University Press.
- [51] VAN UVEN, M.J. (1947, 1948) *Extensions of Pearson's probability distributions to two variables*. Proceedings of the Royal Academy of Sciences. Amsterdam, Vol. 50, 1063-1070 y 1252-1264; Vol. 51, 41-52 y 191-196.
- [52] XEKALAKI, E. (1983). *The Univariate Generalized Waring distribution in relation to accident theory: proneness, spells or contagion?*. Biometrics, 39, 887-895.