

Prov. T/20-183

T  
15  
133

# UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada



UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha 23-7-96  
ENTRADA NUM. 1569

## ESPECTRO DE FUČÍK PARA OPERADORES ELÍPTICOS

JUAN CAMPOS RODRÍGUEZ

TESIS DOCTORAL

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
GRANADA  
Nº Documento 519684162  
Nº Copia 21234760

Granada, Julio de 1996

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
17 JUL. 1996  
COMISION DE DOCTORADO



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Matemática Aplicada

**ESPECTRO DE FUČÍK PARA  
OPERADORES ELÍPTICOS**

JUAN CAMPOS RODRÍGUEZ

TESIS DOCTORAL

Granada, Julio de 1996.



Memoria realizada en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, bajo la dirección de la Prof. Dra. Dña. *Margarita Arias López*, para la obtención del grado de doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº Bº de la directora: Margarita Arias López.

A handwritten signature in black ink, enclosed in a hand-drawn oval. The signature appears to be 'M. Arias López'.

Aspirante a doctor: Juan Campos Rodríguez.

A handwritten signature in black ink, consisting of the name 'Juan Campos Rodríguez' written in a cursive style.



A la memoria de mi tía Teresa,  
a quien le hubiera gustado ver  
terminado este trabajo.



## *Agradecimientos:*

Quisiera agradecer a la Profesora Margarita Arias el haberme dirigido en la realización de esta memoria, así como la confianza depositada en mí desde el principio. También tendría que agradecer al Profesor Rafael Ortega, no sólo sus numerosas sugerencias en el tema de mi tesis, sino también el haberme introducido y guiado en otras líneas de investigación de la cuales tengo muy buen recuerdo.

Hago extensivo este agradecimiento al resto de los integrantes del grupo de ecuaciones diferenciales, en especial al Profesor Pedro Martínez, por su apoyo e interés, y a José Miguel Alonso, por sus numerosos comentarios de utilidad.

Agradezco al Profesor Norm Dancer el haberme acogido en la Universidad de Sydney, así como su amabilidad durante mi estancia.

También quisiera agradecer la colaboración en materia informática a los Profesores Teresa Pérez y Miguel Piñar, y de mi amigo Francisco Martín.

Por último mostrar mi gratitud a mi familia, la cual me mostró su apoyo desde mis comienzos en la realización de mis estudios.



# Índice de contenidos

Introducción	1
<b>1 La ecuación lineal.</b>	<b>9</b>
1.1 Ceros consecutivos de una solución. . . . .	10
1.2 La condición en frontera. . . . .	21
1.3 El problema de valores propios. . . . .	33
<b>2 El problema no lineal.</b>	<b>39</b>
2.1 Resultados principales. . . . .	39
2.2 Ejemplos. . . . .	64
<b>3 Un problema no homogéneo.</b>	<b>81</b>
3.1 La ecuación límite. . . . .	87
3.2 Persistencia de las soluciones. . . . .	92
3.3 Número exacto de soluciones. . . . .	100
3.4 Estudio asintótico de una ecuación con un parámetro. . .	109
Apéndice	117
Bibliografía	125



# Introducción

El propósito principal de esta memoria es proporcionar un mejor entendimiento del fenómeno de la resonancia no lineal en ecuaciones elípticas. Para fijar ideas, consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = f, & \text{en } \Omega, \\ Bu = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

donde  $\Omega$  es un abierto acotado y regular de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Delta$  denota el operador de Laplace en  $\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que representa la no linealidad y  $B$  son las condiciones de contorno (usualmente, condiciones de Dirichlet,  $Bu \equiv u$ , o de Neumann,  $Bu \equiv \frac{\partial u}{\partial n}$ ). Se trata de estudiar la estructura del conjunto de soluciones de (0.1) cuando la no linealidad,  $g$ , tiene un comportamiento lineal en infinito, esto es, existen

$$\lim_{u \rightarrow +(-)\infty} g'(u) = a(b).$$

Este tipo de no linealidades se conocen en la literatura sobre el tema como no linealidades de tipo *jumping* o de *salto*. Existen numerosos trabajos dedicados a este tipo de no linealidades (véase por ejemplo, [A-P], [A-M], [He], [D1], [Ru2] y las referencias en ellos incluidas).

La estructura del conjunto de soluciones de (0.1) está íntimamente relacionada con la posición del par  $(a, b)$  en  $\mathbb{R}^2$ , ver [D1]. De hecho, la existencia de cotas a priori (es decir, la no posibilidad de que existan ramas de soluciones que provengan del infinito) para las soluciones de (0.1), que resulta tan útil a la hora de demostrar que dicho problema posee solución, depende de la existencia o no de soluciones no triviales de

$$\begin{cases} \Delta u + au^+ - bu^- = 0, & \text{en } \Omega, \\ Bu = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$



Juan Campos Rodríguez.

donde  $u^+ = \max\{u, 0\}$  y  $u^- = u^+ - u$ , (ver Lema 2 en [C] para la demostración de este hecho en el caso escalar,  $N = 1$ ; la demostración en el caso general, se puede realizar de forma similar pero olvidándose del número de ceros, teniendo en cuenta la segunda nota después del citado Lema).

Resulta pues de interés conocer los valores de  $(a, b)$  para los que (0.2) tiene solución no trivial. El conjunto

$$\Sigma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (0.2) \text{ tiene solución no trivial}\}$$

se conoce como **espectro de Fučík** asociado a dicho problema ya que fue Fučík quien lo introdujo en 1980 (ver [F]) para el caso escalar ( $N = 1$ ). El estudio de este conjunto es el tema central de la memoria.

Son pocas las propiedades que se conocen de  $\Sigma$  cuando  $N > 1$  incluso en casos de dominios concretos y en apariencia sencillos como pueden ser bolas o cuadrados en  $\mathbb{R}^2$ . En principio,  $\Sigma$  contiene a todos los pares  $(\lambda, \lambda)$ , donde  $\lambda$  es un valor propio del problema lineal asociado, esto es,  $\lambda$  es un número para el que

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \text{en } \Omega, \\ Bu = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene solución no trivial; en este sentido, se puede considerar  $\Sigma$  como una generalización del espectro usual. Además, como el primer valor propio,  $\lambda_1$ , tiene una función propia asociada positiva, las rectas  $\{(\lambda_1, b) : b \in \mathbb{R}\}$  y  $\{(a, \lambda_1) : a \in \mathbb{R}\}$  están contenidas en  $\Sigma$ .

Fučík, [F], describió por completo el conjunto  $\Sigma$  para (0.2) cuando  $N = 1$ , mostrando que si  $\Omega = (0, \pi)$ , está formado, además de por las rectas anteriormente citadas, por una unión de hipérbolas que pasan por  $(n^2, n^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ( $n > 1$ , si las condiciones son de Dirichlet). Es de observar que  $\lambda_n = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ( $n > 1$ , si las condiciones son de Dirichlet) se corresponde con los valores propios del problema lineal cuya correspondiente función propia cambia de signo.

El conocimiento del espectro de Fučík correspondiente a (0.2) cuando  $N > 1$  se muestra como un problema complicado. De hecho, no se conoce la descripción completa de  $\Sigma$  en ningún caso si  $N > 1$ . Sin embargo, existen algunos resultados parciales de gran interés. Destacamos los siguientes:



•DeFigueiredo y Gossez, en [F-G], prueban mediante técnicas variacionales la existencia de una primera curva no acotada en  $\Sigma$  que parte de  $(\lambda_2, \lambda_2)$ , siendo  $\lambda_2$  el segundo valor propio del correspondiente problema lineal.

•Varios autores (ver, por ejemplo, [G-K], [Ru], [S]) han probado la existencia de curvas contenidas en  $\Sigma$  cerca de la diagonal y partiendo de  $(\lambda, \lambda)$ , donde  $\lambda$  es un valor propio. Sin embargo, no se conoce si estas curvas son o no las únicas que pasan por  $(\lambda, \lambda)$  cuando  $\lambda$  no es un valor propio simple. En esta dirección, Micheletti, [Mi], demuestra que si  $\lambda$  es un valor propio doble entonces, existen dos curvas en  $\Sigma$  definidas cerca de la diagonal, pasando por  $(\lambda, \lambda)$  y de forma que el conjunto de puntos de  $\Sigma$  contenido entre esas dos curvas tiene medida cero.

•Dancer, [D3], demuestra que de cada  $(\lambda, \lambda)$  con  $\lambda$  un valor propio, parte una componente conexa no acotada de  $\Sigma$ . Un problema todavía sin resolver es si toda componente conexa de  $\Sigma$  toca la diagonal.

•Por último, Dancer, [D5], también demuestra que genéricamente el interior de  $\Sigma$  es vacío, es decir,  $\Sigma$  no contiene conjuntos abiertos. Sin embargo, no se sabe si esta propiedad genérica es cierta para cualquier abierto de  $\mathbb{R}^N$ . Resaltar que todos los resultados conocidos hasta ahora son sobre curvas contenidas en  $\Sigma$ .

La contribución de esta memoria al problema del espectro de Fučík se puede centrar en dos puntos:

•La descripción exacta del espectro de Fučík en una gama muy amplia de problemas escalares con coeficientes variables que engloban a ciertos problemas de Sturm-Liouville singulares, resultados que se encuentran recogidos en [A-C2].

•La utilización de los resultados obtenidos en los problemas escalares para mostrar la estructura de ciertos subconjuntos especiales del espectro de Fučík en dimensiones superiores.

En este sentido, se utilizan los resultados del caso escalar, por ejemplo, para describir lo que denominamos *espectro de Fučík radial del Laplaciano* en una bola, esto es, el conjunto de pares  $(a, b)$  para los que

$$\begin{cases} \Delta u + au^+ - bu^- = 0, & \text{en } B \\ u = 0, & \text{en } \partial B \end{cases}$$

con  $B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ , siendo  $|\cdot|$  la norma euclídea, tiene solución no trivial que es radial, es decir, tal que  $u(x) = u(|x|)$ , ver [A-C1]. En



ningún caso (no escalar) controlamos totalmente el espectro; nuestros resultados se limitan a describir una parte de  $\Sigma$  que nunca es el total.

En la bibliografía existen otros resultados acerca de Espectros de Fučík para otro tipo de operadores. En [P] se efectúan cálculos explícitos de espectros de Fučík para el operador  $u''$  con condiciones de contorno no autoadjuntas; en [F-R] se estudia el caso periódico para la misma ecuación y se da también una descripción variacional de dicho espectro. En [G-H] se hace una descripción para una ecuación de tercer orden, y por último en [P] se obtienen algunas propiedades en el caso de la ecuación de la viga (operador de cuarto orden).

Volviendo de nuevo a nuestro problema de partida, esto es, al estudio de la estructura del conjunto de soluciones de (0.1), observamos que el grado topológico del operador asociado (ver sección 3.2), que está definido si  $(a, b) \notin \Sigma$ , depende únicamente de la componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  en donde se localice el par  $(a, b)$ . Sin embargo, este control sobre el grado no es más que una primera aproximación. Si consideramos el problema

$$\begin{cases} u'' + au^+ - bu^- = f, & \text{en } (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

pese a conocer explícitamente  $\Sigma$  en este caso, no se tiene una descripción completa de la estructura del conjunto de soluciones de (0.3).

Cuando  $f(t) = \sin t$ , Castro, DeFigueiredo y Srikanth, [C-F-S], estudian el conjunto de soluciones de (0.3) para  $a < \lambda_1 < b$ . Mediante un diagrama de bifurcación, los autores obtienen el número exacto de soluciones de (0.3) dependiendo del número de valores propios,  $\lambda_n$ , que atraviesa la no linealidad. En concreto, demuestran que si  $n^2 < b < (n+1)^2$ , (0.3) tiene exactamente  $2n$  soluciones.

Hay que observar que el conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b < \lambda_1 < a\}$$

no interseca el espectro de Fučík,  $\Sigma$ . Además, en este caso el operador asociado presenta ciertas propiedades de monotonía que ya habían sido utilizadas por Ambrosetti y Prodi [A-P] y Dancer, [D2], para obtener la estructura del rango del operador.



Cuando  $(a, b) \in (\lambda_1, +\infty) \times (\lambda_1, +\infty)$  la monotonía a la que antes nos referíamos desaparece y la situación se muestra diferente. Castro, [C] intenta continuar los resultados de [C-F-S] en este caso, pero no puede obtener el número exacto de soluciones si no que se limita a obtener estimaciones sobre el número de soluciones dependiendo de la posición del par  $(a, b)$  respecto de  $\Sigma$ . La razón es que el número de soluciones no depende únicamente de la posición de  $(a, b)$  respecto de  $\Sigma$ . Para ciertos valores de  $(a, b)$ , aparecen soluciones degeneradas que el autor no controla y que influyen también en el número de soluciones de (0.3).

En esta línea, la contribución de esta memoria es el estudio del número de soluciones de (0.3) cuando  $f(t) \equiv 1$  y  $(a, b) \in (1, +\infty) \times (1, +\infty)$  (en este caso  $\lambda_1 = 1$ ). Es de observar que  $f(t) \equiv 1$  no es una función propia del problema lineal asociado ( $f(t) = \sin t$  si lo es), por tanto, el comportamiento que cabe esperar es ya distinto incluso para los valores de  $(a, b)$  que estén en la diagonal. Por otro lado, cuando  $f(t) = \sin t$ , la función  $\frac{1}{a-1} \sin t$  es siempre una solución de (0.3) ( $a > \lambda_1 = 1$ ), solución que permite en [C-F-S] y [C] contar el número de soluciones que van ramificando de esta. En nuestro caso, existen incluso valores de  $(a, b)$  para los que (0.3) no tiene solución (ver [A-C3]).

La técnica usada es esencialmente el método de tiro, ayudado por el carácter autónomo de la ecuación en (0.3). Este método nos permite ver con claridad la estructura del conjunto de soluciones, mostrando la existencia de ramas correspondientes a soluciones degeneradas en sentido topológico y también en sentido geométrico. (Ver sección 3.2 para la definición de solución degenerada). No conocemos el motivo de la aparición de estas ramas; únicamente sabemos que en ellas la ecuación variacional (que tiene sentido en este caso, aunque la ecuación no es regular) es resonante.

Existen otros resultados en la bibliografía referentes al número de soluciones de problemas de contorno para operadores elípticos generales similares a (0.1). Sin embargo, debido a la poca información que se tiene sobre  $\Sigma$ , todos ellos se reducen a valores de  $(a, b)$  cerca de la diagonal (ver, por ejemplo, [Ru2], [Ma]). Como veremos en el último capítulo, la complicación en el número de soluciones aparece cuando  $(a, b)$  se aleja de la diagonal.



Juan Campos Rodríguez.

En el caso escalar resulta también interesante el estudio de la ecuación

$$u'' + au^+ - bu^- = 1$$

con condiciones periódicas. La bibliografía sobre este tema es muy amplia. Por ejemplo, en [G-L-K], se considera exactamente dicha ecuación. Otros muchos autores han continuado en muy diversas líneas con otras ecuaciones más generales del tipo

$$u'' + au^+ - bu^- = f(t)$$

donde  $f$  es  $T$ -periódica, ver por ejemplo, [F-R],[L-K], [O] y las referencias incluidas.

Pasamos ya a la descripción por capítulos de esta memoria.

Los dos primeros capítulos están dedicados al estudio del espectro de Fučík de ciertos problemas de contorno para la ecuación

$$(p(t)u')' + q(t)(au^+ - bu^-) = 0 \text{ en } (T_1, T_2), \quad (0.4)$$

donde  $-\infty < T_1 < T_2 < \infty$  y  $p, q$  son funciones analíticas en  $(T_1, T_2)$ ,  $p(t) > 0$ ,  $t \in (T_1, T_2)$ , esto es, el estudio del conjunto

$$\Sigma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (0.4) \text{ tiene solución no trivial verificando ciertas condiciones de contorno,}\}$$

las condiciones de contorno consideradas se precisan en la sección 1.2. El procedimiento para este estudio consiste en ir controlando los sucesivos cambios de signo de las soluciones de (0.4). Observar que entre dos ceros consecutivos de una solución de (0.4), dicha solución lo es de la ecuación lineal

$$(p(t)u')' + \lambda q(t)u = 0, \quad (0.5)$$

con  $\lambda = a$ , si  $u$  es positiva en el intervalo considerado o  $\lambda = b$ , si es negativa. Por ello, dedicamos el primer capítulo al estudio de la ecuación lineal (0.5).

Dicho capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección, siguiendo la idea original de Fučík, [F], estudiamos la función que asocia a cada cero de una solución de la ecuación (0.5), el siguiente cero. Esta función no se puede obtener de forma explícita, salvo que los coeficientes



$p(t)$  y  $q(t)$  sean constantes, pero el estudio de sus propiedades resulta de gran utilidad para las secciones posteriores. La "función de ceros" nos permite obtener estimaciones de la distancia entre dos ceros consecutivos de una solución de (0.5), estimaciones que se pueden considerar como una generalización y cuantificación de la conocida Teoría de Sturm (ver por ejemplo, [C-L]).

En la segunda sección entran ya en juego las condiciones en frontera. Se presentan los distintos tipos de condición en frontera (condición de contorno en uno solo de los extremos del intervalo  $(T_1, T_2)$ ) que vamos a tratar y se prueba que las soluciones de la ecuación (0.5) que verifican una de estas condiciones en frontera quedan caracterizadas (salvo constantes) por la ubicación de sus ceros. Veremos también como influyen las condiciones en frontera sobre las funciones definidas en la sección anterior.

La tercera sección se dedica al problema de valores propios, esto es, al estudio de los valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  para los que (0.5) tiene solución no trivial verificando las condiciones en frontera en los dos extremos. Como ya hemos dicho, si  $\lambda$  es un valor propio, el par  $(\lambda, \lambda)$  pertenece al espectro de Fučík correspondiente al problema considerado, por tanto, la existencia de valores propios superiores al primero se puede obtener como consecuencia de los resultados en la sección 2.2. El primer (o primeros, porque no tiene por qué ser único) valor propio tiene una función propia asociada que no cambia de signo y, dado que nuestro análisis se basa en el estudio de los ceros de una solución de (0.4), esta teoría se muestra insuficiente para su estudio. Por esta razón, dedicamos esta última sección principalmente al primer valor propio.

En el segundo capítulo analizamos ya el problema no lineal asociado a una ecuación del tipo (0.4). El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección obtenemos los teoremas principales sobre el espectro de Fučík, esto es, sobre el conjunto

$$\Sigma = \{(a, b) : (0.4) \text{ tiene solución no trivial verificando las condiciones de contorno exigidas}\}.$$

En particular, obtenemos que  $\Sigma$  es la unión de las rectas  $\{(a, \lambda) : a \in \mathbb{R}\}$ ,  $\{(\lambda, b) : b \in \mathbb{R}\}$  con  $\lambda$  un valor propio con función propia que no cambia de signo y una colección numerable de curvas analíticas, estrictamente decrecientes, todas ellas cortando a la diagonal y contenidas en



*Juan Campos Rodríguez.*

$(\lambda_1, +\infty) \times (\lambda_1, +\infty)$  donde  $\lambda_1$  es el máximo de estos valores propios cuya función propia es positiva. Además, se estudia el comportamiento asintótico de dichas curvas y sus posibles intersecciones.

En la segunda sección se aplican los resultados de la sección anterior a diferentes ejemplos escalares, poniendo de manifiesto las peculiaridades de cada uno de los ejemplos. También se utilizan los resultados anteriores para obtener información sobre subconjuntos especiales del espectro de Fučík de algunos problemas no escalares. En concreto, se estudian subconjuntos del espectro de Fučík del laplaciano en una bola o en una corona o del operador de Laplace-Beltrami sobre ciertas superficies de revolución.

En todos los ejemplos se comprueban las hipótesis y se hace un análisis de los diferentes resultados obtenidos en las distintas líneas, comparándolos con los resultados ya conocidos.

En el tercer y último capítulo se analiza la estructura del conjunto de soluciones del problema no homogéneo (0.3). La primera sección se dedica esencialmente a la obtención de resultados técnicos a cerca de las soluciones de (0.3) cuando  $f(t) \equiv 1$ . En la segunda sección se estudia la naturaleza de dichas soluciones en el sentido de su estabilidad frente a pequeñas perturbaciones y su comportamiento frente a tales perturbaciones. En la tercera sección se estudia el número exacto de soluciones de (0.3) con  $f(t) \equiv 1$ , mostrando un método para contarlas. Por último, en la sección cuarta se analiza el número de soluciones de (0.3) con  $f(t) = g(t) + h$  con  $g$  una función dada y  $h$  un parámetro.

Al final de la memoria se incluye un apéndice en el que obtenemos algunos resultados de dependencia continua y diferenciabilidad respecto de condiciones iniciales y parámetros para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u'' + au^+ - bu^- = 1 + \mu f(t), & \text{en } (0, \pi), \\ u(0) = 0, u'(0) = s, \end{cases}$$

donde  $f \in L^2(0, \pi)$ , que son necesarios para el desarrollo del capítulo 3. Tales resultados parecen claros formalmente. Sin embargo, el hecho de que la función  $f \in L^2(0, \pi)$  o que la función  $u \mapsto au^+ - bu^-$  no sea  $C^1$ , hace que no se deduzcan inmediatamente de los resultados clásicos de todos conocidos sobre dependencia continua y diferenciabilidad. La demostración de la diferenciabilidad de la solución general respecto a  $\mu$  y  $s$  se ha efectuado siguiendo las líneas de [L-K].



# Capítulo 1

## La ecuación lineal.

En este capítulo vamos a hacer un estudio detallado de la ecuación lineal de segundo orden

$$(p(t)u')' + aq(t)u = 0. \quad (L_a)$$

donde  $p, q : (T_1, T_2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , son dos funciones analíticas estrictamente positivas en el intervalo  $(T_1, T_2)$  que vamos a suponer acotado, es decir  $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$  y  $a$  es un parámetro real. A esta ecuación diferencial se le añaden condiciones de contorno a las cuales, dado que no se exige nada acerca del comportamiento asintótico de las funciones  $p$  y  $q$  en los extremos, se le imponen ciertas limitaciones que realmente van a depender del comportamiento asintótico de las funciones  $p$  y  $q$ , y que se van a expresar en términos de la geometría de las soluciones de  $(L_a)$ , que verifican sólo una de las condiciones de contorno (en  $T_1$  o bien en  $T_2$ ).

Nuestro objetivo es analizar cuando las soluciones de la ecuación  $(L_a)$  cambian de signo, como se comportan dichos cambios de signo al variar el parámetro  $a$  y como se relacionan estos cambios de signo con la verificación de la condición en frontera. Los ceros de una solución de  $(L_a)$  juegan un papel esencial en esta memoria, pues el carácter no lineal de la ecuación estudiada en el segundo capítulo aparece cuando las soluciones se anulan.

Destacamos que la forma especial de la ecuación  $(L_a)$  no es restrictiva, en el sentido de que cualquier ecuación del tipo

$$u'' + c(t)u' + ad(t)u = 0,$$



puede ser escrita de forma equivalente como una del tipo  $(L_a)$  siempre que  $c$  y  $d$  sean analíticas y  $d$  estrictamente positiva. La regularidad que se impone a las funciones  $p$  y  $q$  es la que aparece en los ejemplos de la sección 2.2. No obstante, sería posible partir de hipótesis menos restrictivas sobre regularidad obteniendo, por supuesto, menos regularidad en las tesis de los teoremas. Nosotros no nos vamos a preocupar de analizar este tipo de cuestiones.

Una descripción de este capítulo es la siguiente:

En la primera sección nos vamos a interesar por los cambios de signo (ceros) de las soluciones de la ecuación  $(L_a)$ , olvidándonos de la condición en frontera. En la segunda sección introducimos las diversas condiciones en frontera que vamos a considerar. Se trata de condiciones de tipo Dirichlet, Neumann o de acotación, que deben de cumplir ciertas condiciones de admisibilidad que garanticen el "buen" comportamiento de las soluciones de  $(L_a)$  que verifican una de estas condiciones en uno de los extremos de intervalo de definición. Todas estas cuestiones serán precisadas en dicha sección

En la tercera y última sección estudiamos la existencia de solución de  $(L_a)$  verificando la condición de frontera en ambos extremos en lo que se conoce como el problema de valores propios. Cuando el problema de valores propios tiene estructura variacional, los resultados que se exponen en esta sección pueden obtenerse de la teoría variacional de valores propios. Sin embargo, hemos preferido incluir esta sección porque, además de mostrar otra forma de obtener los resultados en el caso variacional, las hipótesis impuestas, tanto a la ecuación, como a la condición en frontera no parecen en principio implicar la estructura variacional del problema.

## 1.1 Ceros consecutivos de una solución.

Sea  $u(t; a, s)$  la solución de  $(L_a)$  que verifica la condición inicial

$$u(s; a, s) = 0, \quad u'(s; a, s) = 1. \quad (1.1)$$

Observamos que la función  $u : (t; a, s) \rightarrow u(t; a, s)$  está definida en  $\mathbb{R}^3$  y, como consecuencia de los teoremas de dependencia analítica con respecto a condiciones iniciales y parámetros (ver [Ha]), es analítica en todas sus variables.



**Definición 1.1.** Sea  $\Omega_I$  el siguiente conjunto

$$\Omega_I := \{(a, s) \in \mathbb{R} \times (T_1, T_2) / u(\cdot; a, s) \text{ se anula en } (s, T_2)\}.$$

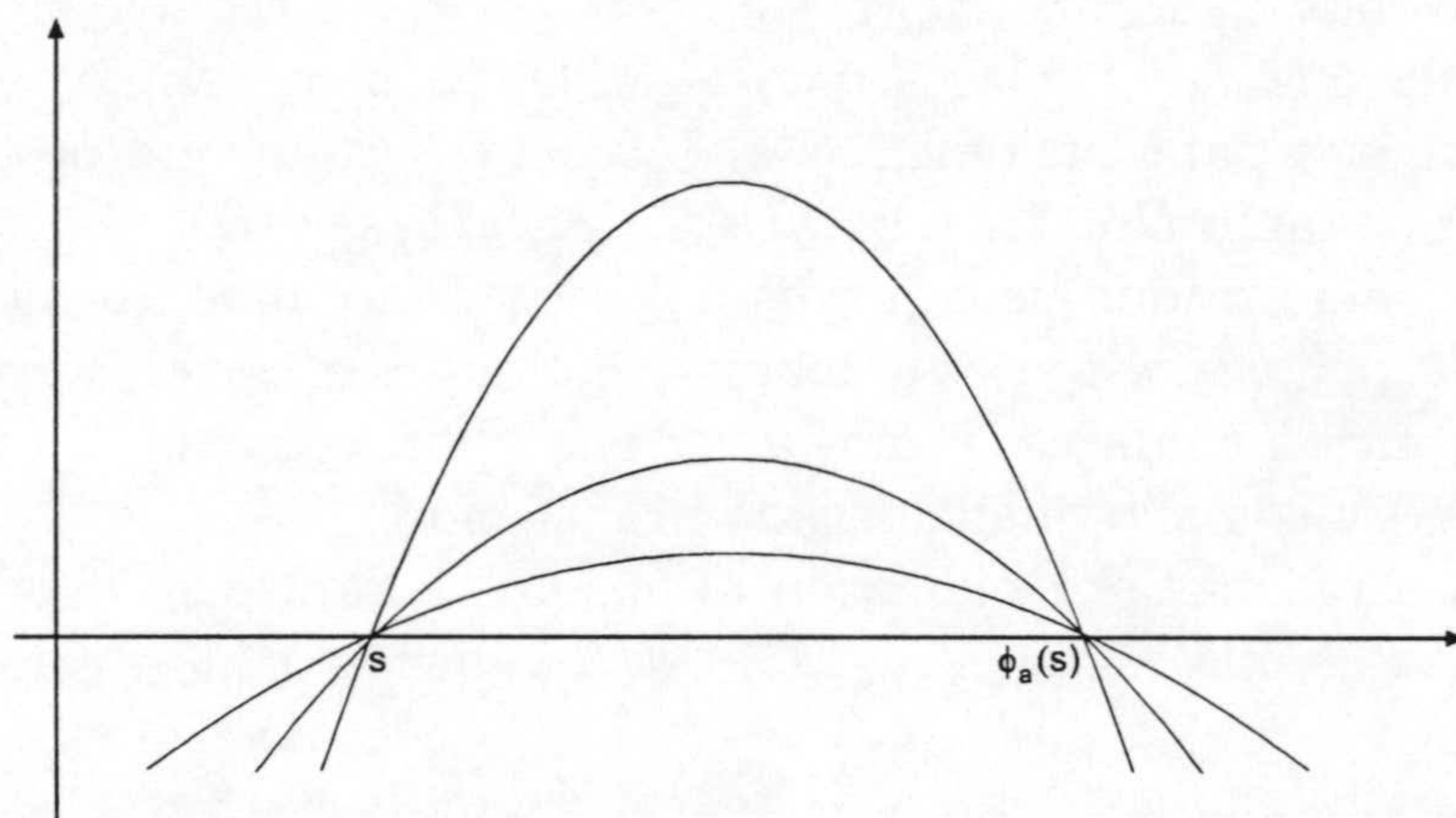
Dado  $(a, s) \in \Omega_I$  definimos  $\phi_a(s)$  como

$$\phi_a(s) := \min\{t \in (s, T_2) / u(t; a, s) = 0\}.$$

**Notas.** 1.- Si dos soluciones no triviales de  $(L_a)$  son linealmente dependientes, entonces tienen los mismos ceros. Por tanto, dado  $s \in (T_1, T_2)$  las distintas soluciones de  $(L_a)$  que se anulan en un punto  $s$ , por unicidad del problema de valores iniciales para la ecuación lineal, son de la forma  $u(t) = \lambda u(t; a, s)$ , con  $\lambda = u'(s)$ , y por tanto tienen los mismos ceros que  $u(t; a, s)$ . Es por ello que esta función controla los ceros de cualquier solución de la ecuación  $(L_a)$ , pues necesariamente siempre que  $s_1 < s_2$  sean dos ceros consecutivos de una solución no idénticamente nula de  $(L_a)$ , se tendrá entonces

$$\phi_a(s_1) = s_2.$$

Nos referiremos a ella como **función de ceros** de  $(L_a)$ .



Definición de función de ceros asociada a  $(L_a)$ .

2. Los ceros de una solución  $u$  no trivial de  $(L_a)$  (es el caso de  $u(\cdot; a, s)$ ) son siempre aislados por la siguiente razón: si en un instante  $t$ ,  $u(t) = 0$ , entonces,  $u'(t) \neq 0$ , pues si  $u'(t) = 0$  la unicidad del problema de valores iniciales implicaría que  $u \equiv 0$ . Además observamos que en cualquier cero



Juan Campos Rodríguez.

de una solución no trivial de  $(L_a)$  dicha solución cambia de signo. Notar que si el cambio de signo es de menos a más, entonces  $u'(t) > 0$ , y si el cambio de signo es de más a menos,  $u'(t) < 0$ .

**Proposición 1.2.** *El conjunto  $\Omega_I$  es un abierto y  $\phi : \Omega_I \rightarrow (T_1, T_2)$  es una función analítica.*

Demostración. Sea  $(a_0, s_0) \in \Omega_I$ , entonces  $t = \phi_{a_0}(s_0)$  resuelve la ecuación

$$u(t; a, s) = 0, \quad (1.2)$$

además, dado que  $u$  es no trivial

$$u'(\phi_{a_0}(s_0); a_0, s_0) \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita aplicado a (1.2), se obtiene un entorno  $U$  de  $(a_0, s_0)$ , un entorno  $V$  de  $\phi_{a_0}(s_0)$  y una función  $\tilde{\phi} : U \rightarrow V$  analítica por serlo  $u$ , definida por:  $t = \tilde{\phi}_a(s)$  si y sólo si  $(t; a, s) \in V \times U$  y

$$u(t; a, s) = 0.$$

Es posible, dado que  $\tilde{\phi}_{a_0}(s_0) = \phi_{a_0}(s_0) > s_0$ , reducir el entorno  $U$  y suponer que  $\tilde{\phi}_a(s) > s$ ,  $\forall (a, s) \in U$ . De aquí obtenemos la siguiente consecuencia: para cualquier  $(a, s) \in U$ ,  $\tilde{\phi}_a(s)$  es un cero de  $u(\cdot; a, s)$  en  $(s, T_2)$ , por tanto  $U \subset \Omega_I$  y  $\phi_a(s) \leq \tilde{\phi}_a(s)$ ,  $\forall (a, s) \in U$ .

Se ha demostrado que dado  $(a_0, s_0) \in \Omega_I$  existe un entorno  $U$ , tal que  $(a_0, s_0) \in U \subset \Omega_I$ , esto nos demuestra que  $\Omega_I$  es abierto. Para ver que  $\phi$  es una función analítica, vamos a ver que  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  coinciden en un entorno de  $(a_0, s_0)$  y con ello finalizamos la proposición.

Se va a razonar por reducción al absurdo. Para ello, supongamos la existencia de una sucesión  $(a_n, s_n) \in U$  tendiendo a  $(a_0, s_0)$  tal que

$$s_n < \phi_{a_n}(s_n) < \tilde{\phi}_{a_n}(s_n).$$

Usando la continuidad de  $\tilde{\phi}$ , es posible suponer (tomando una parcial si fuera necesario) que  $\phi_{a_n}(s_n) \rightarrow L$  donde  $L$  es un punto en el intervalo  $[s_0, \phi_{a_0}(s_0)]$ . Si  $L = \phi_{a_0}(s_0) \in V$ , a partir de un término  $\phi_{a_n}(s_n)$  se quedará en  $V$ , y por definición de  $\tilde{\phi}$  se obtiene que  $\phi_{a_n}(s_n) = \tilde{\phi}_{a_n}(s_n)$ , para  $n$  avanzado. Por otro lado, dado que  $\phi_{a_n}(s_n)$  son ceros de  $u(\cdot; a_n, s_n)$ ,



por la continuidad de esta última función en sus tres variables,  $L$  es necesariamente otro cero de  $u(\cdot; a_0, s_0)$ .

Luego sólo es posible que  $L = s_0$ . Veamos que esto tampoco es posible: por el teorema de Rolle, en el intervalo  $(s_n, \phi_{a_n}(s_n))$  existe  $\xi_n$  tal que  $u'(\xi_n; a_n, s_n) = 0$ , además  $s_n < \xi_n < \phi_{a_n}(s_n)$ , y por el criterio de encaje  $\xi_n \rightarrow s_0$ , lo que es contradictorio pues  $u'(\xi_n; a_n, s_n) \rightarrow u'(s_0; a_0, s_0) = 1$ , por dependencia continua.

(♣)

**Proposición 1.3.** Sea  $(a_n, s_n) \in \Omega_I$ , tal que  $(a_n, s_n) \rightarrow (a_0, s_0)$ , con  $(a_0, s_0) \notin \Omega_I$ ,  $s_0 > T_1$ , entonces  $\phi_{a_n}(s_n) \rightarrow T_2$ .

Demostración. Observamos en primer lugar que si  $s_0 = T_2$  el resultado es evidente pues

$$s_n < \phi_{a_n}(s_n) < T_2,$$

por tanto vamos a suponer que  $T_1 < s_0 < T_2$ . Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que  $\phi_{a_n}(s_n) \not\rightarrow T_2$ . Tomando una parcial si es necesario, podemos suponer que  $\phi_{a_n}(s_n) \rightarrow L < T_2$ . Dado que  $s_n < \phi_{a_n}(s_n)$  se tiene que  $s_0 \leq L$  y tomando límite en la expresión

$$u(\phi_{a_n}(s_n); a_n, s_n) = 0,$$

obtenemos que  $u(L; a_0, s_0) = 0$ . Por último, dado que  $\phi_{a_0}(s_0)$  no está definida,  $u(\cdot, a_0, s_0)$  no se anula después de  $s_0$ , con lo que  $L = s_0$ . Veamos ahora que esta hipótesis no es posible.

Tenemos ahora una sucesión  $\{(a_n, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $s_n$  y  $\phi_{a_n}(s_n)$  tienden al mismo límite  $s_0 \in (T_1, T_2)$ . El mismo razonamiento realizado en el último párrafo de la demostración anterior nos lleva a una contradicción.

(♣)

La teoría de Sturm nos proporciona el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.** Sea  $(a, s) \in \Omega_I$ , entonces si  $(\tilde{a}, \tilde{s}) \in \mathbb{R} \times (T_1, T_2)$ , verifica  $a \leq \tilde{a}$ ,  $\tilde{s} \leq s$  y  $(\tilde{a}, \tilde{s}) \neq (a, s)$  se tiene que:  $(\tilde{a}, \tilde{s}) \in \Omega_I$ , y  $\phi_{\tilde{a}}(\tilde{s}) < \phi_a(s)$ . Además,  $\Omega_I \subset \mathbb{R}^+ \times (T_1, T_2)$ .



Juan Campos Rodríguez.

Demostración. Si  $\tilde{a} > a$ , el primer teorema de comparación de Sturm asegura que toda solución de  $(L_{\tilde{a}})$  tiene un cero en  $(s, \phi_a(s))$ , por tanto, dado  $\tilde{s} \leq s$ ,  $u(\cdot; \tilde{a}, \tilde{s})$  se anula en dicho intervalo, luego  $(\tilde{a}, \tilde{s}) \in \Omega_I$  y  $\phi_{\tilde{a}}(\tilde{s}) < \phi_a(s)$ .

Si  $\tilde{a} = a$ , el segundo teorema de comparación de Sturm asegura que  $u(\cdot; a, \tilde{s})$  tiene un cero en  $[s, \phi_a(s))$ . (Si  $u(\cdot; a, \tilde{s})$  es proporcional a  $u(\cdot; a, s)$  entonces se anula en  $s$ .) Por tanto, dado que  $\tilde{s} < s$ , dicho cero de  $u(\cdot; a, \tilde{s})$  es posterior a  $\tilde{s}$ , de donde  $(a, \tilde{s}) \in \Omega_I$  y  $\phi_a(\tilde{s}) < \phi_a(s)$ .

Para ver que  $\Omega_I \subset \mathbb{R}^+ \times (T_1, T_2)$ , observar que si  $a = 0$ , existen soluciones constantes y las soluciones de  $(L_0)$  tienen a lo sumo un cero.

(♣)

**Nota.** Dado  $(a, s) \in \Omega_I$  las funciones  $\phi_a(\cdot)$  y  $\phi_a(s)$  son estrictamente monótonas.

**Proposición 1.5.** Para cualquier  $s \in (T_1, T_2)$ , existe  $a_0$  tal que  $(a, s) \in \Omega_I$  para todo  $a \geq a_0$  y

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \phi_a(s) = s.$$

Demostración. Antes de empezar la demostración, observamos que el cambio de variable  $v = \sqrt{p(t)}u$  transforma la ecuación  $(L_a)$  en la ecuación

$$v'' + \left\{ a \frac{q(t)}{p(t)} + \frac{2p''(t)p(t) - p'(t)^2}{4p(t)^2} \right\} v = 0. \quad (1.3)$$

Sean  $s \in (T_1, T_2)$ , y  $\varepsilon > 0$  tales que  $[s, s + \varepsilon] \subset (T_1, T_2)$  y sea  $a_0$  tal que

$$a \frac{q(t)}{p(t)} + \frac{2p''(t)p(t) - p'(t)^2}{4p(t)^2} \geq \left( \frac{\pi}{\varepsilon} \right)^2 \quad (1.4)$$

para cualquier  $a \geq a_0$ ,  $t \in [s, s + \varepsilon]$ . En estas condiciones si  $a \geq a_0$ , aplicando el primer Teorema de comparación de Sturm a las ecuaciones (1.3) y

$$v'' + \left( \frac{\pi}{\varepsilon} \right)^2 v = 0, \quad (1.5)$$

en virtud de (1.4), obtenemos que toda solución de (1.3) tiene un cero entre  $s$  y  $s + \varepsilon$ , que son ceros consecutivos de  $v(t) = \sin(\pi \frac{t-s}{\varepsilon})$ . En



particular,  $\sqrt{p(t)}u(t; a, s)$  se anula en el intervalo  $(s, s + \varepsilon)$  luego  $(a, s) \in \Omega_I$  y  $s < \phi_a(s) < s + \varepsilon$ . Además, hemos visto que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $a_0$  tal que si  $a \geq a_0$ ,  $s < \phi_a(s) < s + \varepsilon$ , es decir,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \phi_a(s) = s.$$

(♣)

**Definición 1.6.** Se define  $\mu := \inf\{a / (a, s) \in \Omega_I \text{ para algún } s\}$ .

Dado que  $\Omega_I$  es un abierto contenido en  $\mathbb{R}^+ \times (T_1, T_2)$ ,  $\mu \geq 0$  y es un ínfimo que nunca se alcanza.

**Teorema 1.7.** Existen

$$h_1, h_2 : (\mu, +\infty) \rightarrow [T_1, T_2],$$

tales que

- 1.-  $h_1$  es monótona decreciente,
- 2.-  $h_2$  es monótona creciente,
- 3.-  $\Omega_I = \{(a, s) / a > \mu, T_1 < s < h_2(a)\}$ ,
- 4.- Para cada  $a > \mu$ , la función  $s \rightarrow \phi_a(s)$  es un difeomorfismo analítico estrictamente creciente de  $(T_1, h_2(a))$  en  $(h_1(a), T_2)$ .

Demostración. Dado  $a > \mu$  en virtud de las Proposiciones 1.2 y 1.4, el conjunto

$$\{s \in (T_1, T_2) / (a, s) \in \Omega_I\}$$

es un abierto no vacío donde uno de los extremos es  $T_1$ . Notamos por  $h_2(a)$  al extremo superior de este intervalo, es decir

$$h_2(a) := \sup\{s \in (T_1, T_2) / (a, s) \in \Omega_I\}.$$

Por otro lado, si  $a > \mu$  el conjunto

$$\{\phi_a(s) / s \in (T_1, h_2(a))\},$$

es un intervalo abierto pues, como hemos visto,  $\phi_a(\cdot)$  es continua y estrictamente creciente. Sea  $h_1(a)$  el extremo inferior de dicho intervalo, es decir

$$h_1(a) := \inf\{\phi_a(s) / s \in (T_1, h_2(a))\}.$$



Veamos que el extremo superior es  $T_2$ . En efecto, sea  $s > h_1(a)$ ; por definición de  $h_1(a)$ , existe  $s_1 \in (T_1, h_2(a))$  tal que  $\phi_a(s_1) < s$ . Por el segundo teorema de comparación de Sturm,  $u(\cdot; a, s)$  tiene un cero en  $[s_1, \phi_a(s_1)]$ , así  $u(\cdot; a, s)$  tiene ceros anteriores a  $s$ . Por fin, eligiendo  $s_3$  el cero inmediatamente anterior a  $s$ , tenemos  $s_3 < s$  son dos ceros consecutivos de una solución de  $(L_a)$ , luego

$$\phi_a(s_3) = s.$$

Hemos visto las tesis 3 y 4 del teorema, veamos las tesis 1 y 2, es decir la monotonía de dichas funciones.

Sea  $a < \tilde{a}$ , entonces por la Proposición 1.4, si  $(a, s) \in \Omega_I$ , entonces  $(\tilde{a}, s) \in \Omega_I$ , luego si  $s < h_2(a)$ , entonces  $s < h_2(\tilde{a})$ , y tomando  $s$  próximo a  $h_2(a)$ ,  $h_2(a) \leq h_2(\tilde{a})$ , de donde  $h_2(a)$  es creciente. Por otro lado si  $s > h_1(a)$ , entonces existe  $s_0$  tal que  $\phi_a(s_0) = s$ , aplicamos la Proposición 1.4 y obtenemos que  $\phi_{\tilde{a}}(s_0) < \phi_a(s_0) = s$ , ahora aplicando la tesis 4 ya demostrada,  $h_1(\tilde{a}) < \phi_{\tilde{a}}(s_0) < s$ . Estamos en las condiciones de antes, para cualquier  $s > h_1(a)$ , tenemos  $h_1(\tilde{a}) < s$ , por tanto  $h_1(\tilde{a}) \leq h_1(a)$ , luego  $h_1$  es decreciente.

(♣)

**Notas.** 1.- Es de resaltar que las funciones  $h_1$  y  $h_2$  guardan entre si cierta simetría.  $h_2(a)$  es por definición el supremo de los valores  $s$  para los cuales la función  $t \rightarrow u(t; a, s)$  tiene un cero después de  $s$ . Como puede verse en esta última demostración, la función  $t \rightarrow u(t; a, s)$  tiene un cero antes de  $s$ , si  $s > h_1(a)$ . El recíproco es también cierto si la función  $t \rightarrow u(t; a, s)$  se anula antes de  $s$ , tomando un cero  $s_1$  anterior pero consecutivo,  $\phi_a(s_1) = s$  y por este último teorema  $s \in (h_1(a), T_2)$ .

2.- Hemos visto en la demostración de este último teorema que dado  $a > \mu$ , el intervalo  $(T_1, h_2(a))$  es no vacío. También es no vacío el intervalo  $(h_1(a), T_2)$ , luego  $h_1(a) \neq T_2$  y  $h_2(a) \neq T_1$ . Es posible que para determinadas ecuaciones se encuentren valores  $a > \mu$  para los que  $h_1(a) = T_1$  o bien  $h_2(a) = T_2$ . Sin embargo, imponiendo ciertas hipótesis en la frontera del intervalo a las cuales haremos mención posteriormente, se obtiene que para cualquier  $a > \mu$ ,  $h_1(a)$  y  $h_2(a)$  son dos números en el intervalo  $(T_1, T_2)$ . Dejamos pendiente esta cuestión hasta la Proposición 1.13 y el Teorema 1.22 parte a).



**Corolario 1.8.** Con la notación del Teorema

$$\lim_{a \rightarrow \infty} h_1(a) = T_1,$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} h_2(a) = T_2.$$

Demostración. Por la Proposición 1.5, dado  $s \in (T_1, T_2)$  existe  $a_0$  tal que si  $a \geq a_0$ ,  $\phi_a(s)$  existe y por tanto  $h_2(a) > s$ . A partir de aquí es fácil obtener que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} h_2(a) = T_2,$$

tomando  $s$  próximo a  $T_2$ . Para el primer límite, observar que también por la Proposición 1.5, dado  $s \in (T_1, T_2)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe un  $a_0$  tal que si  $a > a_0$ , entonces  $s < \phi_a(s) < s + \varepsilon$ , por tanto  $h_1(a) < s + \varepsilon$ . Tomando  $s$  próximo a  $T_1$  y haciendo  $\varepsilon$  tender a cero, obtenemos el primer límite.

(♣)

Veamos algunas estimaciones en las derivadas de  $\phi$ .

**Teorema 1.9.** Para cualquier  $(a, s) \in \Omega_I$  se verifica:

$$\frac{\partial}{\partial a} \phi_a(s) < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi_a(s) > 0.$$

Para demostrar este Teorema vamos a utilizar el siguiente Lema.

**Lema 1.10.** Sea  $u(t) = u(t; a, s, x_0, v_0)$  la solución  $(L_a)$ , que verifica la condición inicial

$$\begin{aligned} u(s) &= x_0 \geq 0, \\ u'(s) &= v_0. \end{aligned}$$

Sea  $t_0 > s$  tal que  $u(t_0) = 0$  y  $u(t) > 0$  en  $(s, t_0)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t_0) &< 0, \\ \frac{\partial u}{\partial a}(t_0) &< 0, \end{aligned}$$



Juan Campos Rodríguez.

además

$$\frac{\partial u}{\partial s}(t_0) > 0, \text{ siempre que } x_0 = 0, v_0 > 0,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial v_0}(t_0) > 0, \text{ siempre que } x_0 > 0.$$

Demostración. Observar que por los Teoremas de dependencia analítica con respecto a valores iniciales y parámetros,  $u$  es una función analítica de todas sus variables, por tanto, nos es lícito derivar esta función con respecto de cualquiera de sus variables. En toda la demostración vamos a evaluar en valores para  $a, s, x_0, v_0$  fijos, sin embargo en la variable  $t$  si va a ser necesario evaluar en distintos puntos, por tanto, vamos a considerar a  $u$ , y todas la funciones que de ella derivan como función sólo de  $t$ . Para estructurar la demostración vamos a ver cada una de las desigualdades por separado.

**Primera desigualdad:**  $\frac{\partial u}{\partial t}(t_0) < 0$ .

Si suponemos que dicha parcial es positiva  $u$  sería creciente como función de  $t$  en un entorno de  $t_0$  pero  $u$  en  $(s, t_0)$  es positiva y  $u(t_0) = 0$ . Si  $\frac{\partial u}{\partial t}(t_0) = 0$ , los teoremas de unicidad para la ecuación lineal nos darían que  $u(t) = 0, \forall t \in (T_1, T_2)$ , en contradicción con que  $u(t) > 0$  en  $(s, t_0)$ .

**Segunda desigualdad:**  $\frac{\partial u}{\partial a}(t_0) < 0$ .

Sea  $w(t) = \frac{\partial u}{\partial a}(t)$ , derivando las expresiones

$$u(s) = x_0, \frac{\partial u}{\partial t}(s) = v_0,$$

con respecto a  $a$ , en este caso se obtiene

$$w(s) = 0 = w'(s),$$

derivando ahora  $(L_a)$  también con respecto a  $s$ , se obtiene

$$(p(t)w'(t))' + aq(t)w(t) = -q(t)u(t). \quad (1.6)$$



Multiplicando (1.6) por  $u(t)$ , e integrando sobre  $(s, t_0)$ , obtenemos:

$$\int_s^{t_0} (p(t)w'(t))'u(t)dt + \int_s^{t_0} aq(t)w(t)u(t)dt = - \int_s^{t_0} q(t)u(t)u(t)dt. \quad (1.7)$$

Ahora bien, puesto que  $u(t_0) = 0$  y  $w'(s) = 0$ ,

$$\int_s^{t_0} (p(t)w'(t))'u(t)dt = - \int_s^{t_0} p(t)w'(t)u'(t)dt,$$

usando ahora que  $w(s) = 0$ ,

$$\int_s^{t_0} p(t)w'(t)u'(t)dt = p(t_0)u'(t_0)w(t_0) - \int_s^{t_0} (p(t)u'(t))'w(t)dt,$$

y dado que  $u$  es solución de  $(L_a)$ ,

$$\int_s^{t_0} (p(t)u'(t))'w(t)dt = - \int_s^{t_0} aq(t)w(t)u(t)dt.$$

Teniendo en cuenta todas estas igualdades en (1.7) queda

$$-p(t_0)u'(t_0)w(t_0) = - \int_s^{t_0} q(t)u(t)^2 dt.$$

Pero por la primera estimación  $u'(t_0) < 0$ , luego  $w(t_0) < 0$ , que es lo que necesitamos para esta estimación.

**Tercera desigualdad:**  $\frac{\partial u}{\partial s}(t_0) > 0$ .

Pongamos  $w(t) = \frac{\partial u}{\partial s}(t)$ . Derivando la expresión  $u(s) = x_0$  con respecto a  $s$ , y teniendo en cuenta que  $u(s) = u(s; a, s, x_0, v_0)$ , obtenemos que  $w(s) = -\frac{\partial u}{\partial t}(s) = -v_0 < 0$ , además, derivando ahora  $(L_a)$ ,  $w$  es también solución de la misma ecuación que  $u$ , luego dado que  $u(s) = x_0 = 0 = u(t_0)$ , por el segundo teorema de comparación de Sturm, obtenemos que  $w$  tiene exactamente un cambio de signo en  $(s, t_0)$ , por tanto  $w(t_0) > 0$ , o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial u}{\partial s}(t_0) > 0.$$



**Cuarta desigualdad:**  $\frac{\partial u}{\partial v_0}(t_0) > 0$ .

Para demostrar esta estimación consideramos  $u$  como función de todas sus variables, entonces dado  $v \in \mathbb{R}$ , la unicidad de la ecuación lineal permite demostrar que

$$u(t; a, s, x_0, v) = u(t; a, s, x_0, v_0) + (v - v_0)u(t; a, s).$$

Dado que  $x_0 > 0$ , el segundo teorema de comparación de Sturm, implica que  $u(t; a, s, x_0, v_0)$  se anula antes que  $u(t; a, s)$ , y como esta última no se anula en  $(s, t_0)$ ,  $u(t_0; a, s) > 0$ , ahora derivando con respecto a  $v$  y evaluando en  $v = v_0$ ,  $t = t_0$  se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial v_0}(t_0) = u(t_0; a, s) > 0.$$

(♣)

Demostración del Teorema 1.9. Del Lema anterior se tienen las siguientes tres desigualdades:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\phi_a(s); a, s) &< 0, \\ \frac{\partial u}{\partial s}(\phi_a(s); a, s) &> 0, \\ \frac{\partial u}{\partial a}(\phi_a(s); a, s) &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Luego tras derivar la expresión

$$u(\phi_a(s); a, s) = 0 \quad (1.9)$$

con respecto a  $a$  se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\phi_a(s); a, s) \frac{\partial}{\partial a} \phi_a(s) + \frac{\partial u}{\partial a}(\phi_a(s); a, s) = 0,$$

combinando las estimaciones primera y tercera de (1.8) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial a} \phi_a(s) < 0.$$

Derivando (1.9) con respecto a  $s$  se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\phi_a(s); a, s) \frac{\partial}{\partial s} \phi_a(s) + \frac{\partial u}{\partial s}(\phi_a(s); a, s) = 0,$$

y utilizando la primera y segunda estimación de (1.8)

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi_a(s) > 0.$$

(♣)



## 1.2 La condición en frontera.

En un problema de contorno junto a una ecuación diferencial, aparecen condiciones en la frontera, condiciones acerca del comportamiento de las soluciones en el borde o frontera del abierto en el que se considera la ecuación diferencial. Cuando tratamos con problemas escalares, dicha frontera se reduce a los extremos del intervalo, ( $T_1$  y  $T_2$  en nuestro caso), y podemos considerar soluciones que sólo verifiquen una condición en uno de los extremos. Nos referiremos a estas condiciones como condición en frontera y las notaremos  $F(T_1)$  para la condición en  $T_1$  y  $F(T_2)$  para la condición en  $T_2$ .

El propósito de esta sección es estudiar la forma de las soluciones que sólo verifican una de las condiciones en la frontera,  $F(T_1)$  o  $F(T_2)$ . Es de observar que un razonamiento totalmente simétrico permite trasladar resultados obtenidos acerca de las soluciones que verifican  $F(T_1)$  en resultados acerca de las soluciones que verifican  $F(T_2)$ .

A estas condiciones de frontera se le añaden ciertas hipótesis de admisibilidad y regularidad, hipótesis que permiten una compatibilidad entre la condición en frontera y la ecuación diferencial.

De ahora en adelante,  $F(T_1)$  indicará indistintamente una cualquiera de las siguientes condiciones en frontera:

$$D(T_1) \equiv \lim_{t \rightarrow T_1} u(t) = 0 \equiv u(T_1) = 0,$$

$$B(T_1) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow T_1} |u(t)| < \infty \equiv |u(T_1)| < \infty,$$

$$N(T_1) \equiv \lim_{t \rightarrow T_1} u'(t) = 0 \equiv u'(T_1) = 0.$$

Las condiciones  $D(T_1)$  y  $N(T_1)$  son las que habitualmente se conocen como condiciones de Dirichlet y Neumann, respectivamente. La condición  $B(T_1)$  aparece en la reducción al caso escalar de ciertos problemas elípticos no escalares.

**Definición 1.11.** Diremos que la condición en frontera  $F(T_1)$  es **admisibile** si se verifican las siguientes hipótesis:

1.- Para cada  $a \in \mathbb{R}$  el espacio vectorial de las soluciones de  $(L_a)$  que verifican  $F(T_1)$ , es un espacio vectorial unidimensional.



Juan Campos Rodríguez.

2.-Dicho espacio vectorial depende regularmente del parámetro  $a$  en el siguiente sentido: para cada  $a \in \mathbb{R}$ , se puede tomar  $u_a^1 : (T_1, T_2) \rightarrow \mathbb{R}$ , solución no trivial de  $(L_a)$  verificando la condición  $F(T_1)$ , de forma que la función  $\mathbb{R} \times (T_1, T_2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, t) \rightarrow u_a^1(t)$ , es analítica como función de sus dos variables.

3.- Los ceros de  $u_a^1$  (y en consecuencia los de cualquier solución de  $(L_a)$  verificando  $F(T_1)$ ) no se acumulan entorno a  $T_1$ .

**Nota.** Se deduce de la definición que si  $F(T_1)$  es admisible, dado  $a \in \mathbb{R}$ , toda solución  $u$  de  $(L_a)$  que verifica  $F(T_1)$  es de la forma

$$u(t) = \lambda u_a^1(t) \quad t \in (T_1, T_2)$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por tanto tiene los mismos ceros que  $u_a^1$  (véase nota después de Definición 1.1). No obstante aquí tenemos (al igual que en la Definición 1.1) una especie de recíproco. Sea  $a$  tal que  $u_a^1$  se anula; entonces  $u$  verifica  $F(T_1)$  si y sólo si  $u$  se anula en los mismos puntos que  $u_a^1$ , si y sólo si se anula en alguno de los puntos en los que se anula  $u_a^1$ .

**Definición 1.12.** Dado  $F(T_1)$  una condición de frontera en  $T_1$  admisible,  $a \in \mathbb{R}$ , tal que  $u_a^1$  se anule en  $(T_1, T_2)$ , se define

$$J_1(a) := \min\{t \in (T_1, T_2) / u_a^1(t) = 0\}.$$

**Proposición 1.13.** Para todo  $a > \mu$ ,  $u_a^1$  se anula en el intervalo  $(T_1, T_2)$ . Además se verifica

$$J_1(a) \leq h_1(a).$$

Demostración. Sea  $a > \mu$ , y sea  $s > h_2(a)$ . Por el Teorema 1.7,  $s$  y  $\phi_a(s)$  son dos ceros consecutivos de una solución de  $(L_a)$  y por el segundo Teorema de comparación de Sturm,  $u_a^1$  tiene que anularse en  $[s, \phi_a(s)]$ . De aquí obtenemos que  $u_a^1$  se anula en  $(T_1, T_2)$ , además dado que se anula en  $[s, \phi_a(s)]$ , y que  $J_1(a)$  es el primer cero de  $u_a^1$ ,  $\phi_a(s) \geq J_1(a)$ . El resultado se obtiene ahora, tomando límite cuando  $s \rightarrow T_1$ .

(♣)

**Nota.** Como consecuencia de esta Proposición para cualquier  $a > \mu$ ,  $T_1 < J_1(a) \leq h_1(a)$ , por tanto  $h_1(a) \neq T_1$ . Se tiene entonces que si existe en  $T_1$  alguna condición de frontera admisible para cualquier  $a > \mu$ ,  $h_1(a) \in (T_1, T_2)$ . (Ver nota 2 a continuación del Teorema 1.7.)



**Definición 1.14.** Dada una condición en frontera admisible  $F(T_1)$ , diremos que dicha condición es **regular** si  $J_1$  está definida en una semirrecta de la forma  $(\alpha_1, +\infty)$ ,  $\alpha_1 > -\infty$  y  $J_1$  es una función analítica estrictamente decreciente con derivada no nula.

**Notas.** 1.- El que  $J_1$  este definida en una semirrecta de la forma  $(\alpha_1, +\infty)$ , se traduce en que si  $u_a^1$  se anula para un cierto valor  $a = a_0$ , entonces se anula para cualquier valor  $a > a_0$ . Además, existe un valor crítico  $\alpha_1$  debajo del cual  $u_a^1$  no se anula, es decir, si  $a \leq \alpha_1$ ,  $u_a^1(t) \neq 0$ ,  $t \in (T_1, T_2)$ .

2.- Resultados que demostraremos más adelante, muestran que en los casos  $D(T_1)$ ,  $B(T_1)$ ,  $\alpha_1 = \mu$ . En general, en el caso  $N(T_1)$  esto no es cierto; no obstante podemos dar ciertas estimaciones para este caso particular. Por ejemplo, por la Proposición anterior,  $\alpha_1 \leq \mu$ , además en el caso particular,  $N(T_1)$ ,  $u_0^1$  es constante y, por tanto,  $\alpha_1 \geq 0$ .

3.- Se deduce de la demostración de la Proposición siguiente que la admisibilidad de  $F(T_1)$  es suficiente para demostrar que el conjunto donde  $J_1$  está definido es abierto. Sin embargo, no sabemos si, en general, la admisibilidad por si sola permite demostrar que es un intervalo.

La siguiente Proposición nos va a ser muy útil cuando tratemos de demostrar la analiticidad de  $J_1$ ; como puede verse bastará que  $J_1$  sea monótona.

**Proposición 1.15.** Sea  $F(T_1)$  una condición en frontera admisible, tal que la función  $J_1$  está definida en una semirrecta y es decreciente en dicha semirrecta, entonces  $J_1$  es una función analítica.

Demostración. Esta demostración es muy semejante a la que se hizo para demostrar que  $\Omega_I$  es abierto y  $\phi : \Omega_I \rightarrow (T_1, T_2)$  una función analítica dentro de Proposición 1.2.

Sea  $a_0$  tal que  $J_1(a_0)$  está definido, entonces, al igual que en dicha Proposición,  $t_0 = J_1(a_0)$  resuelve la ecuación  $u_a^1(t_0) = 0$ , ahora usamos la admisibilidad de la condición en frontera, junto con que  $\frac{\partial}{\partial t} u_a^1(J_1(a_0)) \neq 0$ , ( $u_a^1(t)$  tiene necesariamente un cambio de signo en  $J_1(a)$ ), aplicamos el Teorema de la función implícita y obtenemos  $V$  y  $U$  dos entornos abiertos



Juan Campos Rodríguez.

de  $a_0$  y  $J_1(a_0)$  respectivamente, y una función  $\tilde{J} : V \rightarrow U$  analítica, definida por  $t = \tilde{J}_1(a)$ , si y sólo si  $(a, t) \in V \times U$  y  $u_a^1(t) = 0$ .

Por tanto, para todo  $a \in V$ ,  $u_a^1$  se anula en  $\tilde{J}_1(a)$ , luego,  $J_1(a)$  está definido y  $J_1(a) \leq \tilde{J}_1(a)$ . De aquí obtenemos que  $J_1$  está definido en un abierto. Veamos que en un entorno de  $a_0$  dentro de  $V$ ,  $J_1$  y  $\tilde{J}_1$  coinciden, con lo cual  $J_1$  es analítica.

Razonamos por reducción al absurdo; supongamos que existe una sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset V$ ,  $a_n \rightarrow a_0$ , que podemos suponer monótona, tal que  $J_1(a_n) < \tilde{J}_1(a_n)$ . Necesariamente para que esto ocurra  $J_1(a_n) \notin U$ . Pero como  $J_1(a_n)$  es monótona, tendrá un límite  $L$ , además como  $U$  es abierto y  $J_1(a_n) \notin U$ ,  $L \notin U$  y, por tanto,  $L < J_1(a_0) = \tilde{J}_1(a_0)$ , por último dado que

$$u_{a_n}^1(J_1(a_n)) = 0$$

y usando la continuidad de  $u_a^1$  se demuestra que  $L$  es también un cero de  $u_a^1$ , con lo que se llega a una contradicción, pues  $J_1(a_0)$  es el primer cero de  $u_a^1$ .

(♣)

**Definición 1.16.** El extremo  $T_1$  se dirá **regular** para la ecuación  $(L_a)$ , si  $p$  y  $q$  admiten extensiones analíticas  $\bar{p}$  y  $\bar{q} : (T_1 - \varepsilon, T_2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , para un cierto  $\varepsilon > 0$ .

**Proposición 1.17.** Sea  $F(T_1)$  una condición del tipo  $D(T_1)$  ó  $N(T_1)$ , donde  $T_1$  es un extremo regular para la ecuación  $(L_a)$ , entonces dicha condición es admisible regular.

Demostración. Si  $F(T_1)$  es una condición de tipo  $D(T_1)$ , entonces tomamos

$$u_a^1(t) = \bar{u}(t; a, T_1),$$

donde  $\bar{u}$  es la solución de la ecuación

$$(\bar{p}(t)u')' + a\bar{q}(t)u = 0. \quad (\bar{L}_a)$$

que verifica  $\bar{u}(T_1; a, T_1) = 0$ ,  $\bar{u}'(T_1; a, T_1) = 1$ .

Es trivial que toda solución de  $(L_a)$  verificando  $D(T_1)$  es un múltiplo de  $u_a^1$ . La segunda condición de admisibilidad se obtiene de los Teoremas



de dependencia analítica con respecto a parámetros. La última condición de admisibilidad se obtiene por la condición inicial en  $T_1$  que verifica  $\bar{u}_a^1$ .

Para ver la regularidad de dicha condición observar que  $J_1(a) = \bar{\phi}_a(T_1)$ , donde  $\bar{\phi}$  es la correspondiente función de ceros para  $(\bar{L}_a)$ . El que  $J_1$  este definido en una semirrecta es consecuencia de la Proposición 1.4, el que dicha semirrecta es abierta junto con la analiticidad de  $J_1$  es consecuencia de la Proposición 1.2 y el resto se deduce del Teorema 1.9, todos ellos aplicados a  $(\bar{L}_a)$ .

Si tenemos  $N(T_1)$ ,  $u_a^1$  puede tomarse como la solución del problema  $(\bar{L}_a)$  que verifica

$$u(T_1) = 1, u'(T_1) = 0.$$

La admisibilidad de dicha condición en frontera es algo totalmente análogo al caso  $D(T_1)$ . Para ver la regularidad de la condición en frontera es necesario trabajar algo más. Veamos primeramente que si  $\tilde{a} > a$  y  $u_a^1$  se anula, entonces también lo hace  $u_{\tilde{a}}^1$ . Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que  $u_{\tilde{a}}^1$  es positiva en  $[T_1, J_1(a)]$ , veamos que llegamos a contradicción.

Sean las funciones  $v_a(t) = \frac{(u_a^1)'(t)}{u_a^1(t)}$  y  $v_{\tilde{a}}(t) = \frac{(u_{\tilde{a}}^1)'(t)}{u_{\tilde{a}}^1(t)}$ . Ambas funciones están definidas al menos en  $[T_1, J_1(a))$ , y son, respectivamente, solución de los problemas

$$v' = -\frac{\bar{p}'(t)}{\bar{p}(t)}v - a\frac{\bar{q}(t)}{\bar{p}(t)} - v^2, v(T_1) = 0,$$

$$v' = -\frac{\bar{p}'(t)}{\bar{p}(t)}v - \tilde{a}\frac{\bar{q}(t)}{\bar{p}(t)} - v^2, v(T_1) = 0.$$

Usando desigualdades diferenciales se obtiene que  $v_{\tilde{a}}(t) < v_a(t)$ ,  $t > T_1$ . Por otro lado,  $u_a^1(t) > 0$ ,  $\forall t \in (T_1, J_1(a))$ , de donde  $(u_a^1)'(J_1(a)) < 0$ . Combinando estas dos cosas se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow J_1(a)} v_a(t) = -\infty,$$

por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow J_1(a)} v_{\tilde{a}}(t) = -\infty,$$

y necesariamente

$$u_{\tilde{a}}^1(J_1(a)) = 0,$$



Juan Campos Rodríguez.

lo que nos da una contradicción pues  $u_a^1$  es positiva en  $[T_1, J_1(a)]$ .

Como consecuencia de esta demostración, si  $J_1(a)$  está definido, también lo está  $J_1(\tilde{a})$ , para cualquier  $\tilde{a} > a$ , pero también puede observarse que  $u_{\tilde{a}}^1$  se anula antes de  $J_1(a)$ , por tanto  $J_1(\tilde{a}) \leq J_1(a)$  y  $J_1$  es monótona decreciente. Aplicamos ahora la Proposición 1.15 y obtenemos que  $J_1$  es una función analítica.

Por último veamos que  $J_1'(a) < 0$ , para ello derivamos la expresión

$$u_a^1(J_1(a)) = 0,$$

obteniendo

$$\frac{\partial u_a^1}{\partial a}(J_1(a)) + \frac{\partial u_a^1}{\partial t}(J_1(a))J_1'(a) = 0.$$

Por el Lema 1.10, se tiene que  $\frac{\partial u_a^1}{\partial a}(J_1(a)) < 0$  y  $\frac{\partial u_a^1}{\partial t}(J_1(a)) < 0$ , con lo que se obtiene  $J_1'(a) < 0$  y se concluye la regularidad de  $N(T_1)$ .

(♣)

**Teorema 1.18.** *Toda condición en frontera de los tipos  $D(T_1)$  y  $B(T_1)$  admisible es regular.*

Demostración. Por la Proposición 1.13, para todo  $a > \mu$ ,  $J_1(a)$  está definida y  $J_1(a) \leq h_1(a)$ . Veamos primeramente que en este caso se puede demostrar lo siguiente: si  $a$  es tal que  $J_1(a)$  está definida, entonces  $a > \mu$  y  $h_1(a) = J_1(a)$ , con lo cual  $J_1$  estaría definido en la semirrecta  $(\mu, +\infty)$ ,  $\alpha_1 = \mu$  y quedaría que  $J_1 \equiv h_1$ .

Sea  $a$  tal que  $u_a^1$  se anule en un punto del intervalo  $(T_1, T_2)$ , veamos que  $a > \mu$  y que  $J_1(a) = h_1(a)$ . Razonamos por reducción al absurdo y elegimos  $s$  tal que

$$J_1(a) < s < h_1(a),$$

si  $a > \mu$ , o simplemente  $J_1(a) < s < T_2$ , si  $a \leq \mu$ . En cualquier caso  $u(t; a, s)$  no se anula en  $(T_1, s)$ , (véase nota 1 después del Teorema 1.7). Además  $u_a^1(t)$  no se anula en  $(T_1, J_1(a))$  de donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $u_a^1(t) > 0$ ,  $\forall t \in (T_1, J_1(a))$ , si no razonaríamos con  $-u_a^1$ .

Sea  $s_1 < J_1(a)$  y sea  $v(t) = u_a^1(t) + \lambda u(t; a, s)$  donde  $\lambda = -\frac{u_a^1(s_1)}{u(s_1; a, s)}$ , dado que  $s < h_1(a)$ ,  $u(t; a, s)$  no se anula en  $(T_1, s)$  y es negativa, luego



$\lambda > 0$ . Tal y como se ha elegido  $\lambda$ , se obtiene que  $v(s_1) = 0$ , por tanto aplicando el segundo Teorema de comparación de Sturm,  $v$  no puede volver a anularse en  $(T_1, h_1(a))$ , es decir,  $v$  tiene un cambio de signo en  $s_1$  y es el único en  $(T_1, J_1(a))$ , además como  $v(J_1(a)) = \lambda u(J_1(a); a, s) < 0$ , entonces  $v(t) > 0$ ,  $\forall t \in (T_1, s_1)$ , de donde  $u_a^1(t) > -\lambda u(t; a, s)$ ,  $t \in (T_1, s_1)$ .

Por otro lado usando que  $u(t; a, s)$  es negativa en  $(T_1, s)$ ,  $-\lambda u(t; a, s) > 0$ , y para todo  $t \in (T_1, s_1)$  tenemos que

$$0 < -\lambda u(t; a, s) < u_a^1(t).$$

Esta desigualdad implica que  $-\lambda u(t; a, s)$  es también solución a  $D(T_1)$  ó  $B(T_1)$  y esto es una contradicción con la admisibilidad pues la únicas soluciones a la condición en frontera son múltiplos de  $u_a^1$  y  $-\lambda u(t; a, s)$  no lo es pues  $u_a^1(s) \neq 0$ .

Continuamos con la regularidad de  $F(T_1)$  y observamos que a consecuencia de esta condición,  $J_1$  esta definida en el intervalo  $(\mu, +\infty)$ , además es decreciente pues  $h_1$  lo era por el Teorema 1.7, luego por la Proposición 1.15,  $J_1(a)$  es analítica. Veamos que  $J_1'(a) < 0$ , con lo que se finaliza la demostración.

Para ello tomamos  $a_0 > \mu$  y vamos a demostrar que  $J_1'(a_0) < 0$ . Sea  $s \in (T_1, J_1(a_0))$ , sea  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $a \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ ,  $J_1(a) > s$  y sea  $v(a) = \frac{(u_a^1)'(s)}{u_a^1(s)}$ .

**Lema 1.19.** *En las condiciones anteriores, la función  $v(a) = \frac{(u_a^1)'(s)}{u_a^1(s)}$  es decreciente en  $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ .*

Supuesto cierto este resultado, veamos como se demuestra a partir de él que  $J_1'(a_0) < 0$ .

Se observa que  $u_a^1(t) = u(t; a, s, 1, v(a))u_a^1(s)$ , por unicidad de los problemas de valores iniciales en  $s$ , y, por tanto,  $u(J_1(a); a, s, 1, v(a)) = 0$ , derivando con respecto a  $a$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} J_1'(a) + \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial v} v'(a) = 0.$$

Por el Lema 1.10,  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial a} < 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial v} > 0$  y por el Lema 1.19  $v'(a) \leq 0$ , de donde  $J_1'(a) < 0$ , como se quería probar.

(♣)



Demostración del lema 1.19. Veamos primero lo siguiente

$$v(a) = \inf\{v / u(t; a, s, 1, v) \text{ tiene un cero en } (T_1, s)\}. \quad (1.10)$$

Sea  $x(t) = u(t; a, s, 1, v(a))$ , entonces  $x$  es proporcional a  $u_a^1(t)$  (como ya hemos dicho  $x(t) = \frac{1}{u_a^1(s)} u_a^1(t)$ ) y verifica la condición en frontera. Además  $x$  no se anula en  $(T_1, s)$ . Sea  $y(t) = u(t; a, s, 1, v)$ , entonces si  $v > v(a)$ ,  $x'(s) > y'(s)$ , luego para  $t < s$  y próximo a  $s$ ,  $y(t) < x(t)$ . Ahora, observamos que  $y$  no puede tener más cortes con  $x$  en  $(T_1, s)$  ya que la diferencia tendría dos ceros en dicho intervalo pero  $x$  en dicho intervalo no se anula pues es proporcional a  $u_a^1$  y  $s < J_1(a)$ . Luego, para que  $y$  no quede atrapada entre 0 y  $x(t)$ , es necesario que  $y$  se anule en  $(T_1, s)$  y por último observamos que en este tipo de condiciones en frontera ( $D(T_1)$  y  $B(T_1)$ ) la situación  $0 < y(t) < x(t)$ ,  $t \in (T_1, s)$ , implicaría que  $y$  verifica la condición en frontera, pero,  $y$  no es proporcional a  $x$  pues  $y$  se anula en  $s$  y  $x$  no.

Si  $v < v(a)$ , la situación sería  $x(t) < y(t)$  para  $t$  cercano a  $s$  y menor que él. Además, como se ha dicho antes,  $x$  e  $y$  no pueden volver a cortarse en  $(T_1, s)$ , por tanto  $y(t)$  queda por encima de  $x$  y no vuelve a anularse. Queda probado (1.10).

A partir de la estimación (1.10) es evidente que para ver la tesis del Lema bastaría ver que el conjunto

$$\{v / u(t; a, s, 1, v) \text{ tiene un cero en } (T_1, s)\}$$

se hace más grande cuando el parámetro  $a$  aumenta, esto es consecuencia inmediata del Lema de comparación siguiente, y con esto se acaba la demostración del Lema (1.19).

(♣)

**Lema 1.20.** Para cada  $i = 1$  ó  $2$ , sea  $u_i$  solución de las ecuación diferencial

$$(p(t)u')' + q_i(t)u = 0, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Supongamos que existe un  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  tal que  $u_1(t_0) = u_2(t_0) > 0$ ,  $u_1'(t_0) = u_2'(t_0)$  y además  $q_1(t) < q_2(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ . Entonces si,  $u_1(t_1) = 0$ , para un cierto  $t_1 \in (T_1, t_0)$ , necesariamente existe un  $t_2 \in (t_1, t_0)$  tal que  $u_2(t_2) = 0$ . De forma análoga, si  $u_1(t_1) = 0$  para un cierto  $t_1 \in (t_0, T_2)$ , necesariamente existe un  $t_2 \in (t_0, t_1)$  tal que  $u_2(t_2) = 0$ .



Demostración. Efectuaremos únicamente la demostración del primer caso; la del segundo es similar. Razonamos por reducción al absurdo. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $t_1$  es el cero de  $u_1$  inmediatamente anterior a  $t_0$  y vamos a suponer que  $u_2$  es positiva en  $[t_1, t_0)$ ; así  $u_1$  y  $u_2$  son positivas en  $(t_1, t_0)$ . Veamos que llegamos a una contradicción.

Multiplicamos por  $u_2$  la ecuación diferencial que verifica  $u_1$  e integramos por partes en  $(t_1, t_0)$ , obteniendo

$$p(t_0)u_1'(t_0)u_2(t_0) - p(t_1)u_1'(t_1)u_2(t_1) - \int_{t_1}^{t_0} p(s)u_1'(s)u_2'(s)ds + \int_{t_1}^{t_0} q_1(s)u_1(s)u_2(s)ds = 0.$$

Si repetimos ahora el proceso con  $u_2$ , es decir, multiplicamos por  $u_1$  la ecuación diferencial que verifica  $u_2$  e integramos por partes en  $(t_1, t_0)$ , considerando ahora que  $u_1(t_1) = 0$ , obtenemos

$$p(t_0)u_2'(t_0)u_1(t_0) - \int_{t_1}^{t_0} p(s)u_2'(s)u_1'(s)ds + \int_{t_1}^{t_0} q_2(s)u_1(s)u_2(s)ds = 0.$$

Restando estas dos expresiones y considerando la condición que verifican en  $t_0$ , obtenemos

$$p(t_1)u_1'(t_1)u_2(t_1) = - \int_{t_1}^{t_0} (q_2(s) - q_1(s))u_1(s)u_2(s)ds.$$

Ahora bien,  $u_1'(t_1) > 0$ , pues  $u_1(t_1) = 0$  y  $u_1(t) > 0$ ,  $t \in (t_1, t_0)$ , por tanto el primer miembro de la igualdad es positivo y el segundo estrictamente negativo, por tanto llegamos a una contradicción.

(♣)

**Nota.** Como puede observarse en la demostración de este Teorema, cuando tenemos condiciones de tipo  $D(T_1)$  o  $B(T_1)$ , se tiene que  $\alpha_1 = \mu$  y  $J_1 \equiv h_1$ .

En el resto de la sección, vamos a ver como se trasladan los resultados de  $T_1$  a  $T_2$ .

En  $T_2$  se van a admitir por analogía cualquiera de estos tres tipos de condiciones en frontera:

$$D(T_2) \equiv \lim_{t \rightarrow T_2} u(t) = 0 \equiv u(T_2) = 0,$$



$$B(T_2) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow T_2} |u(t)| < \infty \equiv |u(T_2)| < \infty,$$

$$N(T_2) \equiv \lim_{t \rightarrow T_2} u'(t) = 0 \equiv u'(T_2) = 0.$$

**Definición 1.21.** Sea  $F(T_2)$  una cualquiera de estos tres tipos de condición en frontera. Diremos que dicha condición en frontera es **admisibile** si se verifican las siguientes hipótesis:

1.- Para cada  $a \in \mathbb{R}$  el espacio vectorial de las soluciones de  $(L_a)$  que verifican  $F(T_2)$ , es un espacio vectorial unidimensional.

2.- Dicho espacio vectorial depende regularmente del parámetro  $a$  en el siguiente sentido: para cada  $a \in \mathbb{R}$ , es posible tomar  $u_a^2 : (T_1, T_2) \rightarrow \mathbb{R}$ , solución no trivial de  $(L_a)$  verificando la condición  $F(T_2)$  de forma que la función  $\mathbb{R} \times (T_1, T_2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, t) \rightarrow u_a^2(t)$ , es analítica como función de sus dos variables.

3.- Los ceros de  $u_a^2$  (y en consecuencia los de cualquier solución de  $(L_a)$  verificando  $F(T_2)$ ) no se acumulan entorno a  $T_2$ .

Dado  $F(T_2)$  una condición de frontera en  $T_2$  admisible,  $a \in \mathbb{R}$ , tal que  $u_a^2$  se anule en  $(T_1, T_2)$ , se define

$$J_2(a) := \max\{t \in (T_1, T_2) / u_a^2(t) = 0\}.$$

Dada una condición en frontera  $F(T_2)$  admisible, diremos que dicha condición es **regular** si  $J_2$  está definida en una semirrecta de la forma  $(\alpha_2, +\infty)$ ,  $\alpha_2 > -\infty$  y  $J_2$  es una función analítica estrictamente creciente con derivada no nula.

Por último, el extremo  $T_2$  se dirá, **regular** para la ecuación  $(L_a)$ , si,  $p$  y  $q$  admiten extensiones analíticas  $\bar{p}$  y  $\bar{q} : (T_1, T_2 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , para un cierto  $\varepsilon > 0$ .

Con estas definiciones vamos a preparar un marco en donde demostraremos el siguiente Teorema.

**Teorema 1.22.** a) Para todo  $a > \mu$ ,  $u_a^2$  se anula en el intervalo  $(T_1, T_2)$ , además se verifica

$$J_2(a) \geq h_2(a).$$

b) Sea  $F(T_2)$  una condición del tipo  $D(T_2)$  o  $N(T_2)$ , donde  $T_2$  es un extremo regular para la ecuación  $(L_a)$ , entonces dicha condición es **admisibile regular**.



c) Toda condición en frontera de los tipos  $D(T_2)$  y  $B(T_2)$  admisible es regular.

**Nota.** Resaltamos aquí varias cosas importantes a tener en cuenta entorno a la condición de frontera.

1.- Al igual que en la otra condición en frontera toda solución de  $(L_a)$  verificando  $F(T_2)$  es un múltiplo de  $u_a^2$ , y caso de anularse esta última, una solución de  $(L_a)$  verifica la condición  $F(T_2)$  si y sólo si se anula en alguno (o en todos) los puntos en los que se anula  $u_a^2$ .

2.- La primera tesis del Teorema es importante, al igual que la Proposición 1.13, muestra que  $h_2(a) \neq T_2$  para cualquier  $a > \mu$ , luego  $h_2(a) \in (T_1, T_2)$ .

Demostración del Teorema 1.22. La demostración la vamos a hacer mediante el cambio de escala  $\hat{t} = -t$ , este cambio lleva una ecuación diferencial en  $(T_1, T_2)$  en una ecuación diferencial  $(-T_2, -T_1)$ . Vamos a comprobar como este cambio lleva una condición en  $T_2$  a una condición en  $-T_2$ , que es ahora el primer extremo del intervalo. Veamos con más detalle el efecto del cambio de variable. Llamando  $\hat{u}(\hat{t}) = u(-\hat{t})$ , entonces  $\hat{u}$  es solución de

$$(p(-\hat{t})\hat{u}')' + a q(-\hat{t})\hat{u} = 0. \quad (\hat{L}_a)$$

Las diversas funciones que aparecen al considerar esta ecuación las vamos a notar por  $\hat{\cdot}$ . Es evidente que

$$\hat{u}(\hat{t}; a, \hat{s}) = -\hat{u}(-\hat{t}; a, -\hat{s})$$

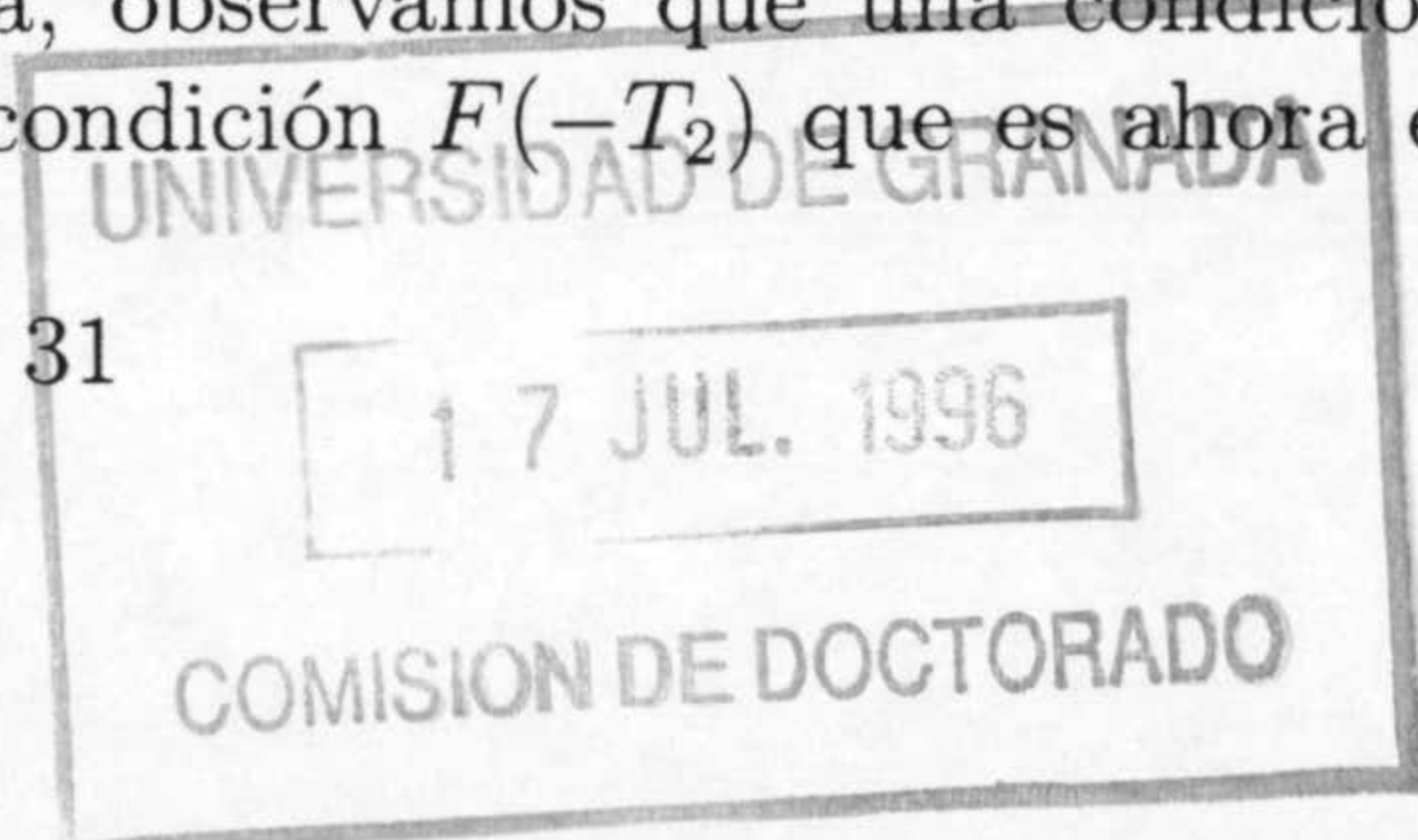
así como

$$\hat{\phi}_a(\hat{s}) = -(\phi_a)^{-1}(-\hat{s})$$

donde  $(\phi_a)^{-1}$  es la inversa de  $\phi_a$  en el intervalo  $(T_1, h_2(a))$ , inversa que existe por el Teorema 1.7. Con ello se obtiene que

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(a) &= -h_2(a), \\ \hat{h}_2(a) &= -h_1(a). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Respecto a la condición en frontera, observamos que una condición en frontera  $F(T_2)$  se traduce en una condición  $F(-T_2)$  que es ahora el





Juan Campos Rodríguez.

primer extremo, de la forma más natural: si  $u$  verifica  $F(T_2)$ ,  $\hat{u}$  verifica  $F(-T_2)$ .

La admisibilidad de  $F(T_2)$  se traduce en la admisibilidad de  $F(-T_2)$ , considerando  $\hat{u}_a^1(\hat{t}) = u_a^2(-\hat{t})$ , además

$$J_2(a) = -\hat{J}_1(a) \quad (1.12)$$

y la regularidad de  $F(T_2)$  equivale a la regularidad de  $F(-T_2)$ . Por último la regularidad del extremo  $T_2$  es equivalente a la regularidad de  $-T_2$  como extremo del intervalo donde está definida ( $\hat{L}_a$ ).

Llegado aquí la tesis del Teorema se obtiene al traducir las tesis de las Propositiones 1.13 y 1.17 y el Teorema 1.18, para lo cual las fórmulas (1.11), y (1.12) son muy convenientes.

(♣)

**Nota.** Dentro de la demostración del Teorema está implícito que  $\alpha_2 = \hat{\alpha}_1$  de donde  $0 \leq \alpha_2 \leq \mu$ . Además, al igual que en  $T_1$ , las condiciones de frontera  $D(T_2)$  y  $B(T_2)$  obligan a que  $\alpha_2 = \mu$  y  $J_2 \equiv h_2$ .

Para terminar la sección, damos un resultado acerca del comportamiento asintótico de estas funciones  $J_1$  y  $J_2$ .

**Teorema 1.23.** Sean  $F(T_1)$  y  $F(T_2)$  dos condiciones en frontera, ambas admisibles y regulares, entonces

1.-

$$\lim_{a \rightarrow \alpha_1} J_1(a) = T_2, \quad \lim_{a \rightarrow \alpha_2} J_2(a) = T_1,$$

2.-

$$\lim_{a \rightarrow \infty} J_1(a) = T_1, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} J_2(a) = T_2.$$

Demostración. Los límites en 1) son ambos iguales de demostrar. Demostraremos, por ejemplo el primero. Dado que  $J_1$  es decreciente

$$\lim_{a \rightarrow \alpha_1} J_1(a),$$



existe y es un número mayor estricto que  $T_1$ , (al ser decreciente es el superior de los valores  $J_1(a)$  con  $a > \alpha_1$ ). Si dicho límite fuera menor estricto que  $T_2$  al tomar límite en la expresión

$$u_a^1(J_1(a)) = 0,$$

obtendríamos que dicho límite sería un cero de  $u_{\alpha_1}^1$ , pero esta función no se anula en  $(T_1, T_2)$ , luego dicho límite debe ser  $T_2$ .

Los límites en 2) se obtienen al usar las desigualdades que aparecen en la Proposición 1.13 y el Teorema 1.22 (parte 1) junto con los límites en el Corolario 1.8.

(♣)

### 1.3 El problema de valores propios.

En esta sección vamos a estudiar las soluciones que verifican la condición en frontera en ambos extremos, o sea dado  $F(T_1)$  y  $F(T_2)$  dos condiciones en frontera admisibles regulares (no necesariamente del mismo tipo) estudiamos la existencia de valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  para los cuales la ecuación  $(L_\lambda)$  tiene una solución no trivial verificando simultáneamente  $F(T_1)$  y  $F(T_2)$ , problema que se conoce como problema de valores propios.

**Definición 1.24.** Diremos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un valor propio para el problema

$$\begin{cases} (p(t)u')' + \lambda q(t)u = 0, & t \in (T_1, T_2), \\ F(T_1), F(T_2) \end{cases} \quad (LP)_\lambda$$

si  $(LP)_\lambda$  tiene una solución  $u$  no trivial. Dicha solución, si existe, se denomina función propia asociada al valor propio  $\lambda$ .

Si el problema  $(LP)_\lambda$  tiene una estructura variacional, la cual en principio no se deduce de las hipótesis impuestas (salvo casos particulares), la teoría variacional de valores propios permite demostrar que el conjunto de los valores propios es una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  estrictamente monótona, que tiende a infinito, además cada función propia asociada a un valor propio  $\lambda_n$  tiene  $n - 1$  cambios de signo.

Usando las condiciones de admisibilidad y regularidad vamos a demostrar algunos resultados parciales. En concreto vamos a demostrar



que en las hipótesis que venimos considerando, el conjunto de valores propios de  $(LP)_\lambda$  está compuesto por la unión de un conjunto no vacío de valores propios para los que hay una función propia positiva en  $(T_1, T_2)$  y después una sucesión de valores propios  $\lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$  tendiendo a infinito, caracterizados porque la función propia asociada al valor propio  $\lambda_n$  tienen  $n - 1$  cambios de signo. En general, no vamos a poder demostrar que exista un único valor propio cuya correspondiente función propia es positiva.

**Nota.** Es evidente que si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un valor propio, la correspondiente función propia es simultáneamente proporcional a  $u_\lambda^1$  y  $u_\lambda^2$ , por tanto,  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un valor propio si y sólo si  $u_\lambda^1$  y  $u_\lambda^2$  son linealmente dependientes. Por otro lado, de la admisibilidad de las condiciones de frontera, se deduce que la dimensión del espacio de las funciones que verifican  $(LP)_\lambda$  (dimensión del espacio propio) es 1.

Empezamos estudiando la existencia de funciones propias que no cambian de signo.

**Proposición 1.25.** *El problema  $(LP)_\lambda$  tiene al menos un valor propio  $\lambda \geq 0$  tal que la correspondiente función propia es positiva.*

Demostración. Sea  $s \in (T_1, T_2)$  un punto auxiliar y sean  $v_1(a) = \frac{(u_a^1)'(s)}{u_a^1(s)}$ ,  $v_2(a) = \frac{(u_a^2)'(s)}{u_a^2(s)}$ . El valor  $v_1(a)$  es la pendiente  $v$  que hay que poner en la condición inicial  $u(s) = 1$ ,  $u'(s) = v$ , para que la solución de  $(L_a)$  que verifique dicha condición inicial sea proporcional a  $u_a^1$  y, por tanto verifique,  $F(T_1)$ , algo muy semejante puede decirse de  $v_2(a)$ .

De esta forma las soluciones de la ecuación  $v_1(a) = v_2(a)$  nos darán los valores propios, salvo que  $u_a^1(s)$  o  $u_a^2(s)$  sea cero. Dado que buscamos funciones propias que no se anulen, estamos interesados en que  $u_a^1(t)$  y  $u_a^2(t)$  sean no nulas, para cualquier  $t \in (T_1, T_2)$ . Para nuestra conveniencia vamos suponer  $v_1(a)$  definida en todos los valores  $a$  tales que  $u_a^1(t) \neq 0$ , para todo  $t \in (T_1, s)$ , y a  $v_2(a)$  en todos los valores  $a$  tal que  $u_a^2(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in (s, T_2)$ .

Analizamos  $v_1(a)$ . Dicha función, como hemos dicho, la vamos a considerar definida en los valores  $a$  tales que  $u_a^1(t) \neq 0$ , para todo  $t \in (T_1, s)$ , es decir, o bien  $a \leq \alpha_1$ , o bien  $J_1(a) > s$ . Elijo el valor  $\beta_1$  tal que  $J_1(\beta_1) = s$ , es de observar que por el Teorema 1.23,  $J_1$  recorre todo el intervalo  $(T_1, T_2)$ , luego dicho valor  $\beta_1$  existe; además, es único por



la regularidad de  $F(T_1)$ . Con este valor,  $v_1$  tiene sentido en  $(-\infty, \beta_1)$ . Veamos que  $v_1(0) \geq 0$ , y que

$$\lim_{a \rightarrow \beta_1^-} v_1(a) = -\infty. \quad (1.13)$$

Para ver que  $v_1(0) \geq 0$ , observar primeramente que si  $F(T_1)$  es una condición tipo  $B(T_1)$  o  $N(T_1)$ , la función  $u_0^1$  es constante y por tanto,  $v_1(0) = 0$ , sólo nos quedaría el caso  $D(T_1)$ , para lo cual vamos a ver que, en este caso,  $u_0^1(t)$  no se anula en  $(T_1, T_2)$  y además  $(u_0^1)'(t)$  tiene el mismo signo que  $u_0^1(t)$ . Observar que con esto tendríamos que  $v_1(0)$  está definido y es positivo.

Primeramente, si para algún  $t$ ,  $(u_0^1)'(t) = 0$ , por unicidad del problema de valores iniciales  $u_0^1$  tendría que ser constante en todo el intervalo, cosa que no es posible pues no verificaría  $D(T_1)$ , luego  $u_0^1$  es estrictamente monótona y por tanto, dado que

$$\lim_{t \rightarrow T_1} u_0^1(t) = 0,$$

si  $u_0^1$  es estrictamente creciente necesariamente será positiva y si es estrictamente decreciente será negativa, en cualquier caso, no se anula y tanto dicha función como su derivada tienen el mismo signo como estábamos buscando.

Ahora vamos a estudiar el comportamiento en  $a \rightarrow \beta_1^-$ . Observar que si  $a \leq \beta_1$ ,  $u_a^1(t) \neq 0$  para todo  $t \in (T_1, s)$  y, por tanto, hay dos posibilidades semejantes: que sea positiva o que sea negativa. Si  $u_a^1(t) > 0$ , el denominador de  $v_1(a)$  al acercarse a  $\beta_1$ , tiende a cero por números positivos. Por otro lado en  $t = s$ ,  $u_{\beta_1}^1(t)$  tiene un cambio de signo de positivo a negativo por tanto  $(u_{\beta_1}^1)'(s) < 0$  luego el numerador de  $v_1(a)$ , tiende a un número negativo ( $u_a^1(s)$  es analítica en sus dos variables), cuando  $a \rightarrow \beta_1^-$  y, por tanto, tenemos (1.13).

Si  $u_a^1(t) < 0$  se cambiará el signo del denominador, pero además el cambio de signo que hay en  $t = s$ , va a ser de negativo a positivo, con lo cual obtenemos la misma conclusión.

Para analizar el comportamiento de  $v_2(a)$ , es conveniente quedarnos dentro del marco creado para la demostración del Teorema 1.22. En el se hace un cambio de escala  $\hat{t} = -t$  pasando a la ecuación

$$(\hat{p}(\hat{t})\hat{u}')' + a \hat{q}(\hat{t})\hat{u} = 0.$$



Juan Campos Rodríguez.

Con este cambio de variable se transforman condiciones de frontera en  $T_2$  a condiciones en frontera a  $T_1$ , con las anotaciones hechas en dicha demostración,

$$(\hat{u}_a^1)'(\hat{t}) = -u_a^2(-t).$$

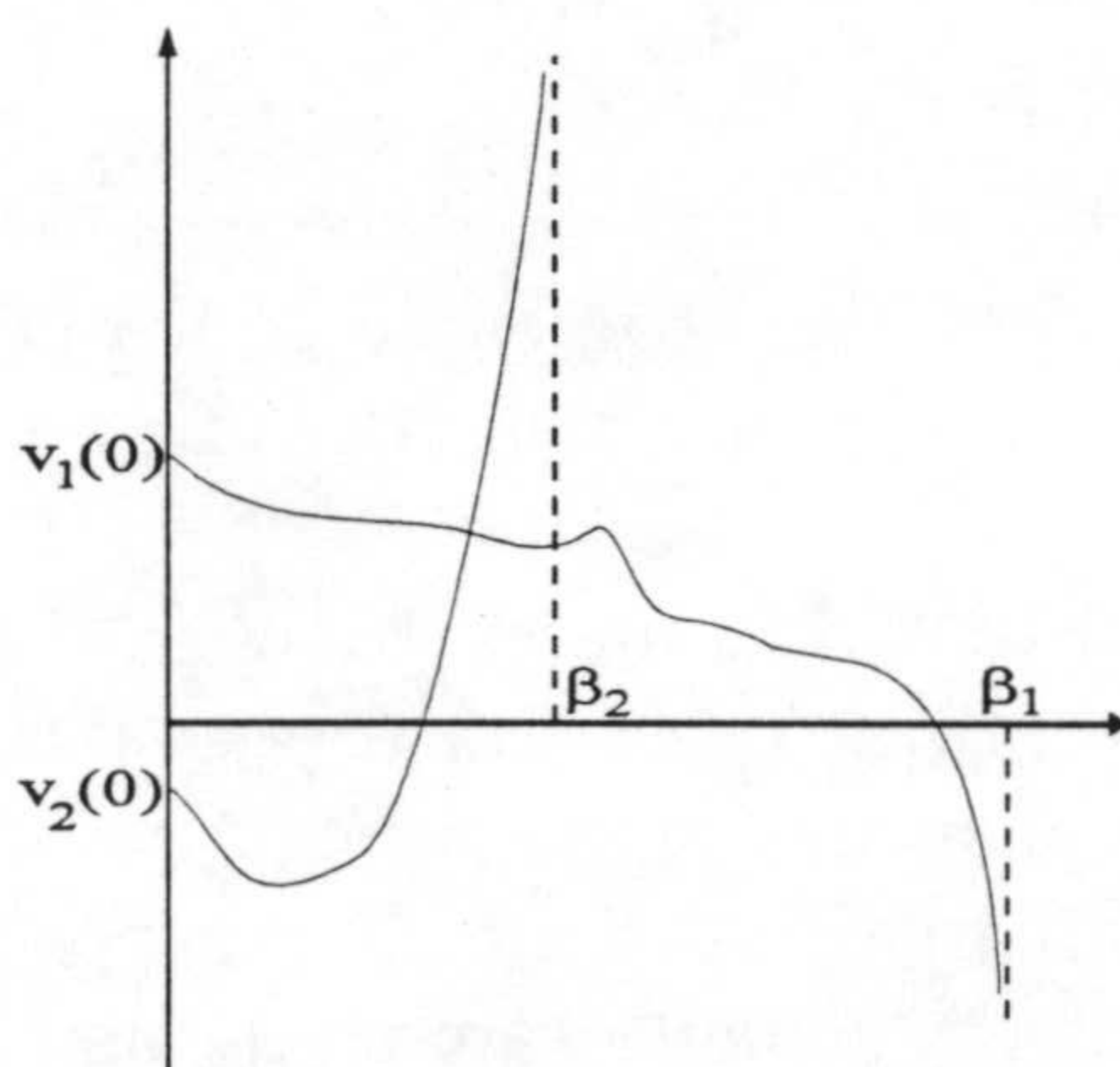
Tomo ahora  $\hat{s} = -s$  como punto auxiliar en  $\hat{L}_a$  y obtenemos que  $\beta_2 = \hat{\beta}_1$

$$v_2(a) = \frac{(u_a^2)'(s)}{u_a^2(s)} = \frac{-(\hat{u}_a^1)'(\hat{s})}{\hat{u}_a^1(\hat{s})} = -\hat{v}_1(a)$$

y aplicando lo que conocemos para  $v_1$ ,

$$\begin{aligned} v_2(0) &\leq 0, \\ \lim_{a \rightarrow \beta_2} v_2(a) &= +\infty. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos gráficamente la situación,



necesariamente hay una solución de  $v_1(a) = v_2(a)$ , como queríamos demostrar.

(♣)

Según acabamos de ver, en principio podría haber casos en que  $v_1(a) = v_2(a)$  tenga dos o más soluciones. Sin embargo, en los casos que vamos a considerar, normalmente  $v_1$  es estrictamente creciente y  $v_2$  es estrictamente decreciente y por tanto el corte es único. Por ejemplo:

1.- Si  $F(T_1)$  es de la forma  $D(T_1)$  ó  $B(T_1)$  el Lema 1.19, demuestra que  $v_1$  es monótona decreciente, además como es analítica y no es constante es estrictamente decreciente, como consecuencia, y usando que  $\hat{v}_1(a) =$



— $v_2(a)$  obtenemos que caso de tener  $F(T_2)$  del tipo  $D(T_2)$  ó  $B(T_2)$ ,  $v_2$  es estrictamente creciente.

2.- Si  $F(T_1)$  es de la forma  $N(T_1)$ , la admisibilidad y regularidad no va a ser suficiente (en principio) para asegurar la monotonía de  $v_1$ , sin embargo puede observarse en la demostración de la Proposición 1.17 (cuando se demuestra la regularidad de  $N(T_1)$ ) que en el caso de tener en  $T_1$  un extremo regular,  $v_1(a)$  es estrictamente decreciente. De igual forma, que antes si tenemos  $F(T_2)$  una condición  $N(T_2)$  con  $T_2$  un extremo regular  $v_2$  es una función estrictamente creciente.

Por último veamos que en ciertos caso  $\lambda_1 = \mu$ .

**Proposición 1.26.** Sean  $F(T_1)$  y  $F(T_2)$  condiciones del tipo  $B(T_i)$  ó  $D(T_i)$ , entonces  $\mu$  es el único valor propio cuya función propia es positiva.

Demostración. Si  $a > \alpha_1$ ,  $u_a^1$  se anula por tanto si  $\lambda$  es un valor propio cuya correspondiente función propia no se anula  $\lambda \leq \alpha_1 = \mu$ . Para ver la otra desigualdad vamos a hacer uso de la estimación (1.10) dentro del Lema 1.19. Primeramente dado que

$$u(t; \mu, s, 1, \frac{(u_\mu^2)'(s)}{u_\mu^2(s)}) = \frac{1}{u_\mu^2(s)} u_\mu^2(t)$$

y que  $u_\mu^2$  no se anula, obtenemos en virtud de la estimación (1.10) que

$$v_1(\mu) \geq \frac{(u_\mu^2)'(s)}{u_\mu^2(s)} = v_2(\mu),$$

esto implicaría que  $\mu \leq \lambda$  pues  $\mu$  estaría antes del corte de  $v_1(a)$  con  $v_2(a)$ . (Recordar la demostración de la Proposición 1.25)

(♣)

**Nota.** En esta demostración se ha usado fuertemente la analiticidad para ver que en los casos  $D(T_i)$  y  $B(T_i)$ ,  $v_1$  es estrictamente monótona y por tanto  $\mu$  es el único valor propio. Esto podría pensarse que no sería fácilmente generalizable suponiendo por ejemplo que  $p$  y  $q$  fueran de clase infinito. No obstante, en la demostración original en el apéndice de [A-C2] se demostró que  $v_1'(a) < 0$ , demostración que puede generalizarse a funciones  $p$  y  $q$  no analíticas.



Para acabar esta sección, comentar que el estudio del resto de los valores propios, es decir, el estudio de los valores propios cuya función propia cambia de signo, será tratado en la sección 2.1. En esta sección se demostrará la existencia de una sucesión creciente  $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots < \lambda_n < \dots$  tendiendo a infinito de valores propios y que cada uno de los valores  $\lambda_n$  se caracteriza por tener una función propia con  $n - 1$  cambios de signo. Todos estos resultados se obtienen en la Proposición 2.7 y serán consecuencia del análisis no lineal que se hará en el Teorema 2.2.

Por último una observación: si  $\lambda \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , alguna de las funciones  $u_\lambda^1$  ó  $u_\lambda^2$  no se anula y  $\lambda$  no puede ser un valor propio cuya función propia cambia de signo, si  $\lambda > \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$  alguna de dichas funciones se anula y por tanto  $\lambda$  no puede ser un valor propio cuya función propia es positiva, luego si  $\lambda$  es un valor propio cuya función propia es positiva se tienen las siguientes desigualdades

$$\lambda \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\} < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots \quad (1.14)$$

Por tanto, los términos de la sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \geq 2}$  son los únicos valores propios en el intervalo  $(\min\{\alpha_1, \alpha_2\}, +\infty)$ .



# Capítulo 2

## El problema no lineal.

En este capítulo vamos a entrar en el problema no lineal, contiene dos secciones con contenidos totalmente distintos.

En la primera sección, vamos a enunciar y demostrar los Teoremas principales, para ello hemos preparado el camino en el primer capítulo, ahora sólo falta contar los ceros de una solución, aplicar los Teoremas demostrados en el primer capítulo, y obtener las conclusiones que de estos se derivan.

En la segunda sección se aplican los resultados generales demostrados en la sección anterior a casos particulares, verificando las hipótesis de admisibilidad y regularidad de la sección 1.2, además se comentan algunas peculiaridades de los casos particulares y se muestran los problemas que, aún en los casos particulares, quedan sin resolver.

### 2.1 Resultados principales.

Sean, como es habitual,  $p, q : (T_1, T_2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  dos funciones analíticas y estrictamente positivas sobre un intervalo acotado, y sean  $a$  y  $b$  dos parámetros reales. Consideramos la ecuación no lineal

$$(p(t)u')' + q(t)(au^+ - bu^-) = 0, \quad t \in (T_1, T_2), \quad (E_{a,b})$$

donde  $u^+ = \max\{u, 0\}$  y  $u^- = u^+ - u$ . A esta ecuación añadimos condiciones de frontera  $F(T_1)$  y  $F(T_2)$ , que vamos a suponer admisibles y regulares, con lo que tenemos el problema de contorno



$$\begin{cases} (p(t)u')' + q(t)(au^+ - bu^-) = 0 \\ F(T_1), F(T_2). \end{cases} \quad (P_{a,b})$$

En esta sección vamos a analizar la región del plano  $\mathbb{R}^2$

$$\Sigma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (P_{a,b}) \text{ tiene solución no trivial,}\}$$

región  $\Sigma$  que se denomina habitualmente **espectro de Fučík** del problema  $(P_{a,b})$ . Es de observar que en  $\Sigma$  es posible encontrar pares  $(a, b)$  para los cuales el problema  $(P_{a,b})$  tiene una solución que no cambia de signo. En este caso, realmente esa solución es una solución de un problema lineal. Dado que las soluciones que no cambian de signo las tenemos analizadas (véase la sección 1.3), vamos a descomponer  $\Sigma$  en tres subconjuntos:

$$\Sigma = \{(a, \lambda) / a \in \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda\} \cup \{(\lambda, b); \lambda \in \Lambda, b \in \mathbb{R}\} \cup \Sigma^*,$$

donde

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \left/ \begin{array}{l} (LP_\lambda) \text{ tiene solución no trivial} \\ \text{que no cambia de signo.} \end{array} \right. \right\}$$

y

$$\Sigma^* = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \left/ \begin{array}{l} (P_{a,b}) \text{ tiene solución no trivial} \\ \text{que cambia de signo} \end{array} \right. \right\}$$

En estas condiciones tenemos lo siguiente:

**Teorema 2.1.** *El problema  $(P_{a,b})$  tiene solución no trivial que cambia de signo, esto es,  $(a, b) \in \Sigma^*$  si y sólo si se verifican alguna de las ecuaciones*

$$\begin{array}{ll} J_1(a) = J_2(b); & J_1(b) = J_2(a); \\ \phi_b(J_1(a)) = J_2(a); & \phi_a(J_1(b)) = J_2(b); \\ \phi_a(\phi_b(J_1(a))) = J_2(b); & \phi_b(\phi_a(J_1(b))) = J_2(a); \\ \text{etc...} & \end{array}$$

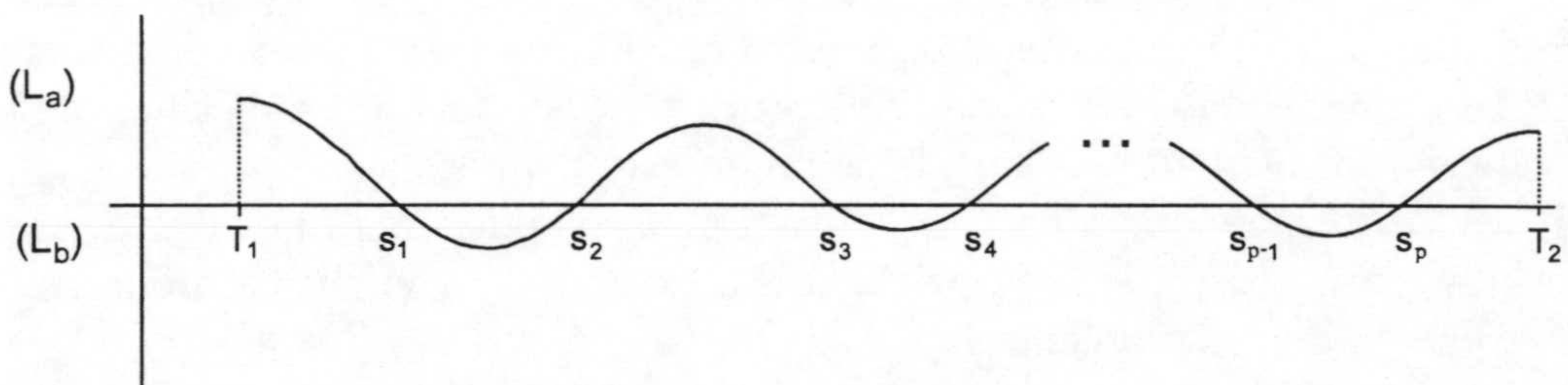
Demostración. En primer lugar observar que si  $s_1 < s_2$ , son dos ceros consecutivos de una solución de  $(E_{a,b})$ , entonces, o bien  $\phi_a(s_1) = s_2$ , o bien  $\phi_b(s_1) = s_2$ , dependiendo de que dicha solución en  $(s_1, s_2)$  sea positiva o negativa. Por el Teorema 1.7 tendríamos que  $s_2 > h_1(a) \geq$



$J_1(a)$  en el primer caso, y  $s_2 > h_1(b) \geq J_1(b)$  en el segundo caso. Por tanto, en el intervalo  $(T_1; \min\{J_1(a), J_1(b)\})$  no es posible tener dos ceros consecutivos de una solución de  $(E_{a,b})$ , luego los ceros de una solución de  $(E_{a,b})$  no se acumulan entorno a  $T_1$ . Razonando simétricamente, y también por el Teorema 1.7 se obtiene que, o bien  $s_1 < h_2(a) \leq J_2(a)$ , o bien  $s_1 < h_2(b) \leq J_2(b)$ , de donde en el intervalo  $(\max\{J_2(a), J_2(b)\}, T_2)$  tampoco es posible encontrar dos ceros consecutivos de una solución de  $(E_{a,b})$  y mucho menos una sucesión tendiendo a  $T_2$ . Así, toda solución de  $(E_{a,b})$  tiene un número finito de ceros.

Después de esta observación veamos que la condición en este Teorema es necesaria.

Sea  $u$  solución de  $(P_{a,b})$  que cambia de signo y sean  $T_1 < s_1 < s_2 < \dots < s_p < T_2$  los sucesivos ceros de  $u$ .



Esquema de una solución de  $(P_{a,b})$ .

Dependiendo del signo de  $u$  en  $(T_1, s_1)$ , tenemos dos posibilidades; veamos que si  $u$  en  $(T_1, s_1)$  es positiva entonces verifica una ecuación de las de la columna derecha y si es negativa verifica una ecuación de las de la izquierda.

Si  $u$  en  $(T_1, s_1)$  es positiva, por la admisibilidad de la condición en frontera,  $u$  en dicho intervalo será múltiplo de  $u_a^1$  y se anulará en  $J_1(a)$ , luego  $J_1(a) = s_1$ . En el siguiente intervalo necesariamente será negativa y tenemos dos posibilidades: o bien  $p = 1$ , y estamos en el último intervalo, o bien  $p > 1$  y  $s_1$  y  $s_2$  son dos ceros consecutivos de una solución de la ecuación  $(L_b)$ . Si  $p = 1$ ,  $u$  en  $(s_1, T_2)$  es un múltiplo de  $u_b^2$ , luego  $s_1 = J_2(b)$  y  $J_1(a) = J_2(b)$ . Si  $p > 1$ ,  $s_2 = \phi_b(s_1) = \phi_b(J_1(a))$  y en el siguiente intervalo a  $s_2$ , la función  $u$  es positiva y, por tanto, solución de la ecuación  $(L_a)$ .

Aquí nos encontramos en la misma situación, si  $p = 2$  y  $s_2$  es el último



cero de  $u$ , necesariamente  $s_2 = J_2(a)$  pues  $u$  será múltiplo de  $u_a^2$  en  $(s_2, T_2)$ , de donde  $\phi_b(J_1(a)) = J_2(a)$ .

Si  $p > 2$ , al igual que antes,  $s_3 = \phi_a(s_2) = \phi_a(\phi_b(J_1(a)))$  y continuaríamos analizando la situación en el siguiente intervalo.

Si suponemos que  $u$  es negativa en  $(T_1, s_1)$ , los papeles de  $a$  y  $b$  se intercambian totalmente y la sucesión de cambios de signos será la opuesta; con estas consideraciones en mente, el razonamiento es idéntico.

Para ver que las ecuaciones que aparecen en el teorema son suficientes, elegimos una ecuación cualquiera de toda la gama y tomamos un par  $(a, b)$  verificando dicha ecuación.

Vamos a suponer que la ecuación es una de las de la derecha, entonces construimos  $u$  una solución de la siguiente forma: definimos  $u$  en  $(T_1, J_1(a))$  como un múltiplo de  $u_a^1$  positivo (basta tomar  $u = u_a^1$  si dicha función es ya positiva o  $u = -u_a^1$ , si  $u_a^1$  es negativa), es trivial que la función  $u$  así definida es solución de  $(E_{a,b})$  en  $(T_1, J_1(a))$  y prolongamos  $u$  a todo  $(T_1, T_2)$  imponiendo que sea solución de  $(E_{a,b})$ . Por construcción  $u$  es una solución no trivial que verifica  $F(T_1)$ , luego si  $u$  verifica  $F(T_2)$  habremos acabado la demostración en este primer caso.

Observamos que  $u$  en  $J_1(a)$  tiene un cambio de signo; por tanto, hasta el siguiente cero, si este existe, o hasta  $T_2$ , si no vuelve a anularse, es solución de un problema lineal  $(L_b)$ .

Si se verifica la primera ecuación

$$J_1(a) = J_2(b),$$

por el Teorema 1.22 parte a),  $J_1(a) \geq h_2(b)$  y por tanto  $\phi_b(J_1(a))$  no está definido, luego  $u$ , que a partir de  $J_1(a)$  es solución de  $(L_b)$ , no puede volver a anularse. Además, dado que  $J_1(a) = J_2(b)$ ,  $u$  es una solución de  $(L_b)$  en  $(J_2(b), T_2)$  que se anula en  $J_2(b)$ ; necesariamente es proporcional en este intervalo a  $u_b^1$  y verifica  $F(T_2)$ . Si se cumple cualquiera de las restantes ecuaciones  $\phi_b(J_1(a))$  está siempre definida y, por definición, toda solución de la ecuación  $(L_b)$  que se anule en  $J_1(a)$ , se anula en  $\phi_b(J_1(a))$ . En particular, la función  $u$  construida anteriormente se anula en  $\phi_b(J_1(a))$  y cambia de signo en ese punto, por tanto, pasa a ser solución de  $(L_a)$  hasta el siguiente cero si existe, o hasta  $T_2$ .

Si la ecuación que se verifica es la segunda,

$$\phi_b(J_1(a)) = J_2(b).$$



Entonces, por el Teorema 1.22 parte a),  $\phi_b(J_1(a)) \geq h_2(b)$  y  $\phi_a(\phi_b(J_1(a)))$  no está definida, luego  $u$ , que a partir de  $\phi_b(J_1(a))$  es solución de  $(L_a)$ , no puede volver a anularse en  $(\phi_b(J_1(a)), T_2)$ . De esta forma  $u$  es una solución de  $(L_a)$  en  $(J_2(a), T_2)$  y se anula en  $J_2(a)$ , luego es proporcional a  $u_a^2$  y verifica  $F(T_2)$ . Si no se verifican ninguna de las dos primeras ecuaciones (de la derecha) entonces

$$\phi_a(\phi_b(J_1(a)))$$

siempre está definida... Reiterando este proceso, en un número finito de pasos llegaremos a la ecuación de partida.

Si la ecuación es de la izquierda, la solución se toma de forma análoga (no vamos a entrar en detalles) como la prolongación de un múltiplo  $u$  de  $u_b^1$  que sea negativo en  $(T_1, J_1(b))$ . La demostración de que  $u$  así construida es solución de  $(P_{a,b})$  es totalmente análoga.

(♣)

**Nota.** Para que estas expresiones tengan sentido es necesario que el par  $(a, b)$  este dentro del cuadrante  $(\min\{\alpha_1, \alpha_2\}, +\infty)^2$  y por tanto, teniendo en consideración las desigualdades en (1.14),  $\Sigma \cap (\min\{\alpha_1, \alpha_2\}, +\infty)^2 = \Sigma^*$ . (Recordar que si  $\phi_a$  (o  $\phi_b$ ) está definida entonces  $a$  (o  $b$ ) será mayor que  $\mu$  y este último número es siempre mayor o igual que  $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ .)

Por conveniencia vamos a denotar las ecuaciones del Teorema anterior del siguiente modo:

$$\begin{aligned} C_1^1 &\equiv J_1(a) = J_2(b); & C_1^2 &\equiv J_1(b) = J_2(a); \\ C_2^1 &\equiv \phi_a(J_1(b)) = J_2(b); & C_2^2 &\equiv \phi_b(J_1(a)) = J_2(a); \\ C_3^1 &\equiv \phi_a(\phi_b(J_1(a))) = J_2(b); & C_3^2 &\equiv \phi_b(\phi_a(J_1(b))) = J_2(a); \\ C_4^1 &\equiv \phi_a(\phi_b(\phi_a(J_1(b)))) = J_2(b); & C_4^2 &\equiv \phi_b(\phi_a(\phi_b(J_1(a)))) = J_2(a); \\ &etc... \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} R_1(a, b) &= J_1(a), \\ R_{p+1}(a, b) &= \phi_a(R_p(b, a)), \quad p \geq 1, \end{aligned}$$

podemos observar que cada ecuación  $C_p^j$  se obtiene cómo

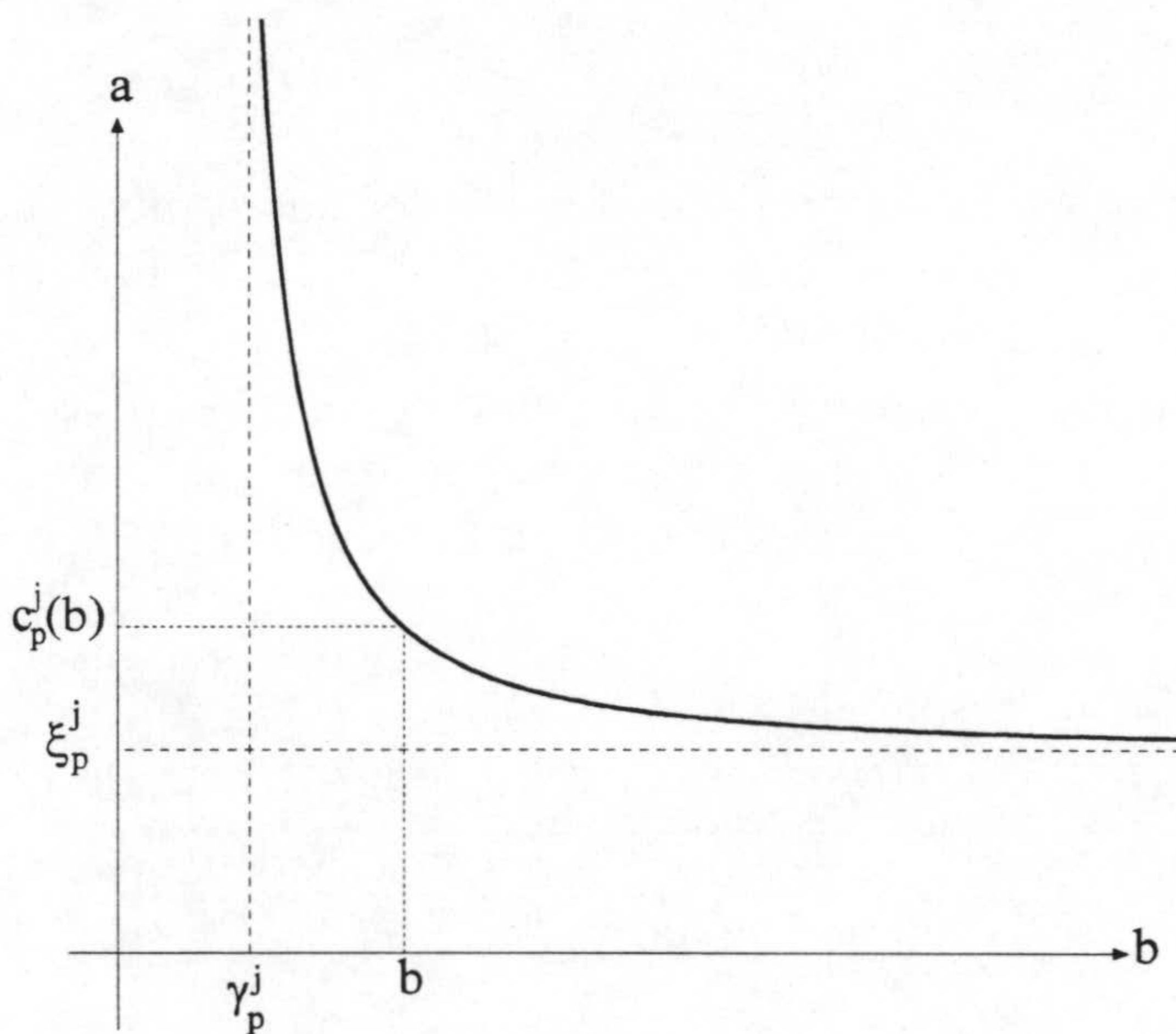
$$C_p^1 \equiv R_p(a, b) = J_2(b) \quad C_p^2 \equiv R_p(b, a) = J_2(a).$$



**Nota.** El subíndice  $p$  de cada ecuación  $C_p^j$  nos da el número de cambios de signo que tiene la correspondiente solución, además  $j$  representa el signo de dicha solución en el último intervalo (1, si es positiva y 2, si es negativa).

**Teorema 2.2.** Para cada  $p \in \mathbb{N}$  y  $j \in \{1, 2\}$ , existen números reales  $\gamma_p^j, \xi_p^j \in \mathbb{R}_0^+$  y  $c_p^j$  un difeomorfismo analítico entre los intervalos  $(\gamma_p^j, +\infty)$  y  $(\xi_p^j, +\infty)$  de forma que el conjunto de los pares  $(a, b)$  que verifican la ecuación  $C_p^j$  se expresa como el conjunto de pares  $(c_p^j(b), b)$  con  $b \in (\gamma_p^j, +\infty)$ .

**Notas.** 1.- Este Teorema muestra el espectro de Fučík como una unión de curvas que se parecen a las ramas de hipérbola que son conocidas cuando  $p(t) = q(t) = 1$  y  $F(T_1), F(T_2)$  condiciones de tipo  $D(T_i)$  o  $N(T_i)$ , (Véase [F] o la sección 2 de este capítulo).



Forma de las soluciones de la ecuación  $C_p^j$ .

2.- Si el problema tiene una estructura variacional, es decir, si es posible definir un apropiado "espacio de Sobolev" que incluya la condición de frontera (observar que la ecuación diferencial puede tener singularidades en los extremos), se puede llegar también a demostrar, utilizando un



resultado en [P] (Teorema 3.3.1), que el espectro está formado por curvas aunque con su argumento se obtiene únicamente que las curvas son de clase 1. El argumento en [P] es general pero no se encuentra ningún ejemplo no escalar que verifique las hipótesis exigidas en dicho Teorema.

3.- Las ramas  $C_p^1$  y  $C_p^2$  guardan una simetría con respecto a la bisectriz del primer cuadrante, lo cual se observa claramente por la ecuación que verifican, esto se traduce con nuestra notación en que  $c_p^1$  y  $c_p^2$  son difeomorfismos inversos y, por tanto,

$$\begin{aligned}\gamma_p^1 &= \xi_p^2, \\ \gamma_p^2 &= \xi_p^1.\end{aligned}$$

Antes de pasar a la demostración del Teorema vamos a demostrar unos Lemas que vamos a utilizar.

**Lema 2.3.** *Sea  $(a, b)$  tal que  $R_p(a, b)$  está definido. Entonces, para cualquier  $\tilde{a} \geq a$ ,  $\tilde{b} \geq b$ ,  $R_p(\tilde{a}, \tilde{b})$  está definido y  $R_p(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq R_p(a, b)$ .*

Demostración. Veámoslo por inducción. Si  $p = 1$  la propiedad es evidente pues viene a decir que si  $a > \alpha_1$  y  $\tilde{a} \geq a$ , entonces  $J_1(\tilde{a}) \leq J_1(a)$ , y esto se deduce de la regularidad de  $F(T_1)$ .

Suponemos cierto para  $p$  y veamos el caso  $p + 1$ . Sea  $(a, b)$  tal que  $R_{p+1}(a, b)$  está definida entonces, aplicando la hipótesis de inducción a  $(b, a)$  en  $R_p$ , obtenemos que  $R_p(\tilde{b}, \tilde{a}) \leq R_p(b, a)$ . Pero por la Proposición 1.4, como  $\tilde{a} \geq a$  y  $\phi_a(R_p(b, a))$  está definido, se tiene

$$R_{p+1}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \phi_{\tilde{a}}(R_p(\tilde{b}, \tilde{a})) \leq \phi_a(R_p(b, a)) = R_{p+1}(a, b),$$

y esto es lo que queríamos probar.

(♣)

**Lema 2.4.** *La función  $R_p$  es una función analítica definida en un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , y verifica*

$$\frac{\partial R_p}{\partial a}(a_0, b_0) < 0, \quad \frac{\partial R_p}{\partial b}(a_0, b_0) \leq 0,$$

en cualquier punto  $(a_0, b_0)$  donde esté definida.



Juan Campos Rodríguez.

Demostración. Veámoslo por inducción. Si  $p = 1$ , queda  $R_1(a, b) = J_1(a)$  y en este caso  $R_1$  está definida en  $(\alpha_1, +\infty) \times \mathbb{R}$ , es analítica y verifica

$$\frac{\partial R_1}{\partial a}(a_0, b_0) = J_1'(a_0) < 0$$

por la regularidad de  $F(T_1)$  y

$$\frac{\partial R_1}{\partial b}(a_0, b_0) = 0.$$

Supongamos ahora cierto el resultado para  $p$  y veamos que es cierto para  $p + 1$ . Si  $R_{p+1}(a_0, b_0)$  está definido, también lo está  $R_p(a_0, b_0)$ ; aplicando la hipótesis de inducción, encontramos un entorno  $V$ , tal que  $R_p(a, b)$  está definido (es trivial que  $R_p(b, a)$  está definido en el abierto que es la reflexión especular respecto a la bisectriz del primer cuadrante), además por la continuidad de  $R_p$ , para todo  $(a, b) \in V$ ,  $(a, R_p(a, b)) \in \Omega_I$ , ya que  $(a_0, R_p(b_0, a_0)) \in \Omega_I$ , por estar definido  $\phi_{a_0}(R_p(b_0, a_0))$ . En estas condiciones  $R_{p+1}(a, b)$  está definido en  $V$  y dado que  $(a_0, b_0)$  era general, el recinto donde  $R_{p+1}$  está definido es un abierto. Por otro lado, es absolutamente trivial que  $R_{p+1}$  es analítica por ser composición de analíticas en ese abierto  $V$ . Derivando la expresión de  $R_{p+1}$  respecto a las variables  $a$  y  $b$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{p+1}}{\partial a}(a_0, b_0) &= \frac{\partial}{\partial a} \phi_{a_0}(R_p(b_0, a_0)) + \frac{\partial}{\partial s} \phi_{a_0}(R_p(b_0, a_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial b} R_p(b_0, a_0), \\ \frac{\partial R_{p+1}}{\partial b}(a_0, b_0) &= \frac{\partial}{\partial s} \phi_{a_0}(R_p(b_0, a_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial a} R_p(b_0, a_0). \end{aligned}$$

Usando el Lema 1.9, junto con la hipótesis de inducción se obtienen fácilmente las estimaciones (Nótese que en la primera expresión tenemos una suma de términos negativos pero el primero es estrictamente negativo).

(♣)

**Nota.** Se observa que, salvo para  $p = 1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial b} R_p(a, b) < 0.$$



**Lema 2.5.** Sea  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión convergente a  $(a_0, b_0)$  tal que  $R_p(a_n, b_n)$  está definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero  $R_p(a_0, b_0)$  no está definida. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_p(a_n, b_n)$$

existe y vale  $T_2$ .

Demostración. Veámoslo de nuevo por inducción. En el caso  $p = 1$ , la única posibilidad es que  $a_n \rightarrow \alpha_1$  y el resultado es consecuencia del Teorema 1.23.

Supongamos el resultado cierto para  $p$  y veamos el caso  $p + 1$ . Sea  $(a_n, b_n)$  la sucesión dada por hipótesis. Aplicando la hipótesis de inducción a la sucesión  $(b_n, a_n)$ , puede ocurrir: Si  $R_p(b_0, a_0)$  no está definido, entonces  $R_p(b_n, a_n)$  tiende a  $T_2$  y como

$$R_p(b_n, a_n) < \phi_{a_n}(R_p(b_n, a_n)) = R_{p+1}(a_n, b_n) < T_2,$$

se obtiene el resultado.

Si  $R_p(a_0, b_0)$  está definido, entonces aplicando la Proposición 1.3 con  $s_n = R_p(b_n, a_n)$ , se tiene, dado que  $s_0 = R_p(b_0, a_0) \in (T_1, T_2)$  y que

$$\phi_{a_0}(s_0) = \phi_{a_0}(R_p(b_0, a_0))$$

no está definido,  $\phi_{a_n}(R_p(b_n, a_n)) \rightarrow T_2$ .

(♣)

**Lema 2.6.** Sean  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones tendiendo a  $+\infty$ . Entonces, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $R_p(a_n, b_n)$  está definido si  $n \geq n_0$  y tiende a  $T_1$ .

Demostración. Veámoslo también por inducción. Si  $p = 1$  el resultado es consecuencia del Teorema 1.23.

Si suponemos cierto el resultado para un  $p \in \mathbb{N}$ , obtenemos que si  $n \geq n_0$ ,  $R_p(a_n, b_n)$  está definido y tiende a  $T_1$ . Sea  $T_1 < s < T_2$  un número auxiliar. Dado que  $R_p(a_n, b_n) \rightarrow T_1$  existe un  $n_1$  tal que si  $n \geq n_1 \geq n_0$ ,  $R_p(a_n, b_n) \leq s$ . Tomamos ahora  $\varepsilon > 0$ ; por el Lema 1.5 se obtiene que existe  $n_2$  tal que si  $n \geq n_2$ ,  $\phi_{a_n}(s)$  está definido y



Juan Campos Rodríguez.

$\phi_{a_n}(s) \leq s + \varepsilon$ . Por tanto, si  $n \geq \max(n_2, n_1)$ , en función del Lema 1.4, se obtiene que  $\phi_{a_n}(R_p(a_n, b_n))$  está definido y

$$\phi_{a_n}(R_p(a_n, b_n)) \leq \phi_{a_n}(s) \leq s + \varepsilon,$$

esto es, si  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ ,  $R_{p+1}(a_n, b_n)$  está definido y además

$$T_1 \leq \liminf R_{p+1}(a_n, b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} R_{p+1}(a_n, b_n) \leq s + \varepsilon.$$

Tomando  $s$  próximo a  $T_1$  y  $\varepsilon$  próximo a cero, se obtiene fácilmente la tesis del Lema.

(♣)

Pasamos a la demostración del Teorema 2.2.

Demostración. Dada la simetría entre las ecuaciones  $C_p^1$  y  $C_p^2$  se observa que si demostramos que las soluciones de  $C_p^1$  son de la forma

$$\{(c_p^1(b), b); b > \gamma_p^1\},$$

entonces las soluciones de  $C_p^2$  son de la forma

$$\{(a, c_p^1(a)); a > \gamma_p^1\}.$$

Como  $c_p^1$  es un difeomorfismo entre  $(\gamma_p^1, +\infty)$  y  $(\zeta_p^1, +\infty)$ , eligiendo  $c_p^2(b) = (c_p^1)^{-1}(b)$ , donde  $(c_p^1)^{-1} : (\zeta_p^1, +\infty) \rightarrow (\gamma_p^1, +\infty)$ , es el difeomorfismo inverso, y tomando  $\gamma_p^2 = \zeta_p^1$  y  $\zeta_p^2 = \gamma_p^1$ , es obvio que las soluciones se obtienen como

$$\{(c_p^2(b), b); b > \gamma_p^2\}.$$

Lo primero que vamos a demostrar es que el conjunto de las soluciones de  $C_p^1$  es no vacío. Para ello vamos a dar un apropiado  $b_0$  para el cual existen  $a_0, a_1$  tales que  $R_p(a_0, b_0) < J_2(b_0) < R_p(a_1, b_0)$ , en virtud de Lema 2.3, la función  $a \rightarrow R_p(a, b_0)$  está definida en un intervalo, y el resultado es consecuencia del Teorema de Bolzano. Veamos la construcción de estos números.

En principio para cualquier  $b$  es posible encontrar  $a_1$  tal que  $R_p(a_1, b) > J_2(b)$ . En efecto, por el Lema 2.3, la función  $a \rightarrow R_p(a, b)$  ( $b$  fijo) está definida en un intervalo no acotado por la derecha y, como consecuencia



del Lema 2.4, dicho intervalo es abierto, por tanto, es de la forma  $(\alpha, +\infty)$  ( $\alpha$  por supuesto depende de  $b$ ). Además, por el Lema 2.5,

$$\lim_{a \rightarrow \alpha} R_p(a, b) = T_2 > J_2(b)$$

de donde obtenemos la conclusión.

Por tanto, el problema se reduce a encontrar  $(a_0, b_0)$  tal que

$$R_p(a_0, b_0) < J_2(b_0).$$

Esto se puede conseguir si  $a_0$  y  $b_0$  son suficientemente grandes pues, por el Lema 2.6

$$\lim_{a, b \rightarrow \infty} R_p(a, b) = T_1$$

y por el Lema 1.23,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} J_2(b) = T_2.$$

Con todo esto concluimos que el conjunto de las soluciones de  $C_p^1$  es no vacío.

En principio no siempre dado  $b$  es posible encontrar  $a$  tal que

$$R_p(a, b) = J_2(b); \tag{2.1}$$

no obstante, como consecuencia del Lema 2.4, la función  $a \rightarrow R_p(a, b)$  es estrictamente decreciente, y la solución de (2.1), si existe, es única.

Sea  $I = \{b \in \mathbb{R} / \text{existe } a \text{ tal que } R_p(a, b) = J_2(b)\}$ . Hemos visto que  $I \neq \emptyset$  y podemos definir  $c_p^1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  dado por la relación

$$R_p(c_p^1(b), b) = J_2(b). \tag{2.2}$$

Como consecuencia del Teorema de la Función Implícita junto con el Lema 2.4 se obtiene que  $I$  es un abierto de  $\mathbb{R}$  y  $c_p^1$  una función analítica. Además, derivando la expresión (2.2)

$$\frac{\partial R_p}{\partial a}(c_p^1(b), b)(c_p^1)'(b) + \frac{\partial R_p}{\partial b}(c_p^1(b), b) = J_2'(b)$$

de donde



$$(c_p^1)'(b) = \frac{J_2'(b) - \frac{\partial R_p}{\partial a}(c_p^1(b), b)}{\frac{\partial R_p}{\partial b}(c_p^1(b), b)}.$$

Observar que por la regularidad de  $F(T_2)$ ,  $J_2'(b) > 0$  y por el Lema 2.4, las otras parciales son negativas. En conjunto  $(c_p^1)'(b) < 0$ .

Nos queda probar que:

- 1.- El conjunto  $I$  es un intervalo no acotado por la derecha.
- 2.- Si tomamos  $\gamma_p^1 = \inf(I)$ , entonces

$$\lim_{b \rightarrow \gamma_p^1} c_p^1(b) = +\infty.$$

Con esto, el número  $\xi_p^1$  viene definido por

$$\lim_{b \rightarrow \infty} c_p^1(b) = \xi_p^1,$$

que existe puesto que  $(c_p^1)'(b) < 0$  y  $c_p^1$  es decreciente.

1.- Veamos que  $I$  es un intervalo no acotado por la derecha. Sea  $b_0 \in I$  y sea  $b_1 > b_0$ ; dado que  $b_0 \in I$ , existe  $a_0$  tal que  $R_p(a_0, b_0) = J_2(b_0)$ . Ahora bien, como  $b_1 > b_0$ ,  $J_2(b_1) > J_2(b_0)$  y, por Lema 2.3,

$$R_p(a_0, b_0) \geq R_p(a_0, b_1),$$

luego

$$R_p(a_0, b_1) < J_2(b_1).$$

Además, como hemos visto anteriormente, para cualquier  $b_1$  es posible encontrar  $a_1$  tal que  $R_p(a_1, b_1) > J_2(b_1)$ , luego existe un valor intermedio  $a_2$ , tal que  $R_p(a_2, b_1) = J_2(b_1)$  y  $b_1 \in I$ .

2.- Veamos que

$$\lim_{b \rightarrow \gamma_p^1} c_p^1(b) = +\infty. \quad (2.3)$$

En principio, dado que  $I$  es un intervalo y  $(c_p^1)'(b) < 0$ ,  $c_p^1$  es estrictamente decreciente, luego, caso de no verificarse (2.3), dicho limite existiría y sería finito. Sea  $L$  dicho limite y veamos que esto implica una contradicción.

Sea  $b_n \rightarrow \gamma_p^1$  una sucesión monótona estrictamente decreciente, sea  $a_n = c_p^1(b_n)$ , observamos que  $R_p(a_n, b_n) = J_2(b_n)$  y que  $(a_n, b_n) \rightarrow (L, \gamma_p)$ .



Entonces, si  $R_p(L, \gamma_p^1)$  no está definido, por el Lema 2.5,  $R_p(a_n, b_n) \rightarrow T_2$ . Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_2(b_n) = T_2$ , pero  $J_2(b_n)$  tiende a  $J_2(\gamma_p^1)$ , si  $\gamma_p^1 > \alpha_2$ , y a  $T_1$ , si  $\gamma_p^1 = \alpha_2$ .

Si  $R_p(L, \gamma_p^1)$  está definido,  $J_2(b_n)$  tiende a  $R_p(L, \gamma_p^1)$  que es un número en  $(T_1, T_2)$ . Al igual que antes, si  $\gamma_p^1 = \alpha_2$ ,  $J_2(b_n) \rightarrow T_1$ , y si  $\gamma_p^1 > \alpha_2$ ,  $J_2(\gamma_p^1)$  está definido y por la continuidad de las funciones implicadas

$$R_p(L, \gamma_p^1) = J_2(\gamma_p^1),$$

de donde  $\gamma_p^1 \in I$ , pero esto es imposible pues  $I$  es abierto.

(♣)

Una consecuencia de este Teorema es el siguiente resultado. En él tenemos que recordar el termino "valor propio" de la Definición 1.24 de la sección 1.3, así como las anotaciones hechas en dicha sección. Es de observar que originariamente en [A-C2], este resultado era utilizado para la demostración del Teorema 2.2 y tenía que ser probado por otra técnica.

**Proposición 2.7.** *El conjunto de los valores  $\lambda$  tales que su correspondiente función propia cambia de signo forman una sucesión  $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots$  tendiendo a infinito. Además la función propia correspondiente al valor propio  $\lambda_p$  tiene  $p - 1$  cambios de signo.*

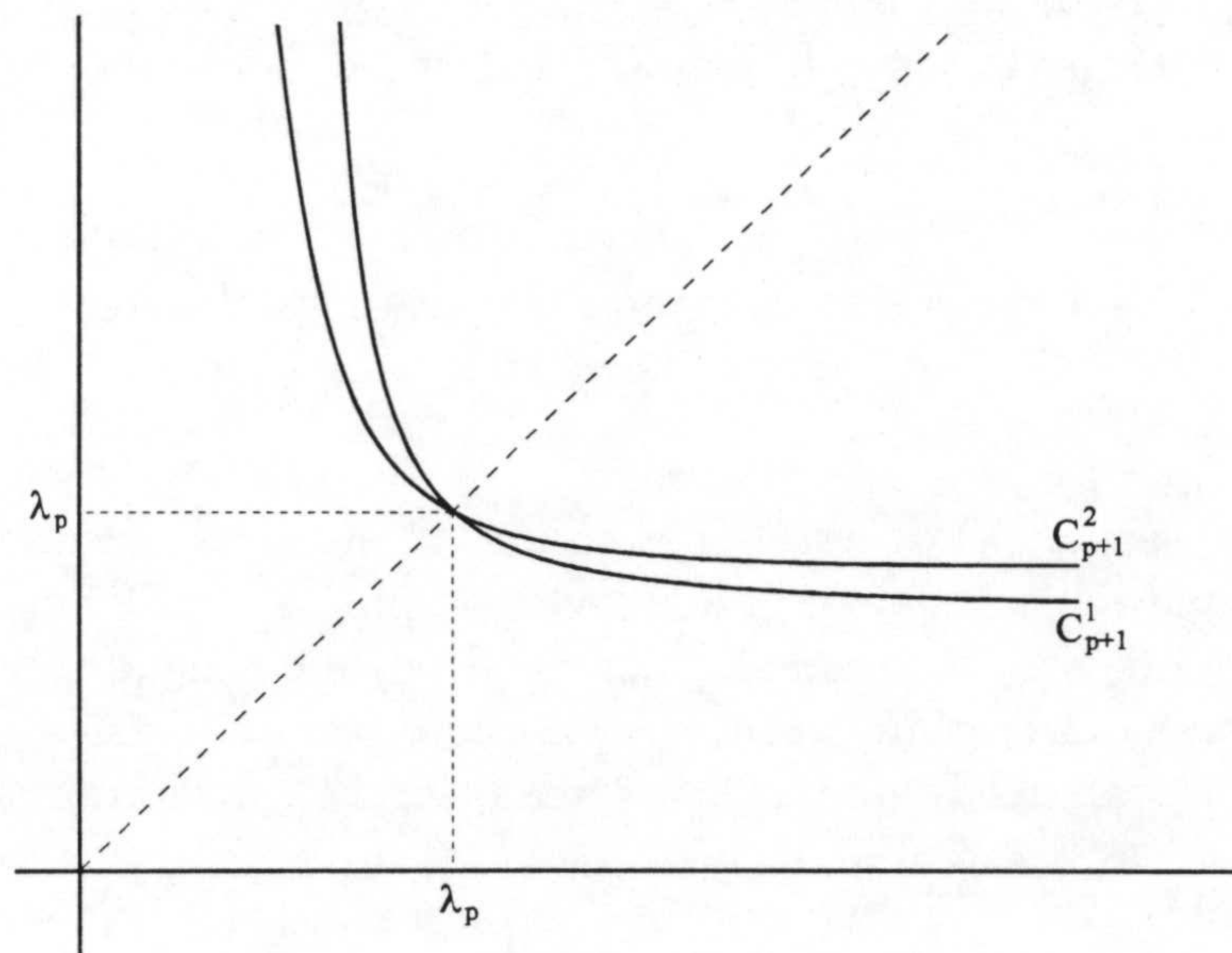
Demostración. Si observamos que  $u = u^+ - u^-$ , obtenemos que el problema  $(P_{\lambda, \lambda})$  es el mismo que  $(PL)_\lambda$  y el problema de la existencia de valores propios cuya correspondiente función propia cambie de signo se convierte en obtener los cortes de  $\Sigma^*$  con la bisectriz del primer cuadrante

$$\{(\lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Según la descripción que tenemos de  $\Sigma^*$ , cada una de las curvas de soluciones de  $C_p^j$  tiene que cortar a la diagonal en un único punto. Además, dada la simetría entre  $C_p^1$  y  $C_p^2$ , el punto de corte entre las correspondientes curvas de soluciones es el mismo, luego existe un único valor de  $\lambda$  para el cual  $(LP)_\lambda$  tenga una solución no trivial con  $p$  cambios de signo.



Dado  $p = 2, 3, 4, \dots$  defino  $\lambda_p$ , como el único valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $(LP)_\lambda$  tiene una solución con  $(p - 1)$  cambios de signo.



*Definición del valor propio  $\lambda_p$*

Veamos que dicha sucesión es estrictamente creciente y tiende a infinito. Para ver que dicha sucesión es creciente vamos a necesitar el siguiente Lema, el cual se enuncia en condiciones más generales pues lo vamos a necesitar de nuevo más adelante.

**Lema 2.8.** *Sea  $p$  un número natural y  $a, b$  dos números reales tales que  $R_{p+1}(a, b)$  está definido. Entonces,  $R_p(a, b)$  está definido y verifica*

$$R_p(a, b) < R_{p+1}(a, b).$$

Demostración. Veámoslo por inducción en  $p$ . Para  $p = 1$ , tenemos que probar

$$J_1(a) = R_1(a, b) < R_2(a, b) = \phi_a(R_1(b, a)) = \phi_a(J_1(b)).$$

Pero por la Proposición 1.13,  $J_1(a) \leq h_1(a)$ , y por el Teorema 1.7,  $h_1(a) < \phi_a(s)$  para cualquier  $s$ , en particular para  $s = J_1(b)$ , con lo que se tiene el resultado.



Si suponemos el resultado cierto para  $p$  y además  $R_{p+2}(a, b)$  está definido, entonces, por hipótesis de inducción,  $R_{p+1}(a, b)$  está definido y aplicando la hipótesis de inducción al par  $(b, a)$ ,  $R_p(b, a)$  está definido y  $R_p(b, a) < R_{p+1}(b, a)$ . De la Proposición 1.4 junto con el hecho de que  $\phi_a(R_{p+1}(b, a))$  está definido, se obtiene

$$\phi_a(R_p(b, a)) < \phi_a(R_{p+1}(b, a)),$$

que es lo que queríamos probar.

(♣)

Como consecuencia de este Lema, vamos a ver que  $\lambda_{p-1} < \lambda_p$ . Si suponemos que  $\lambda_{p-1} \geq \lambda_p$ , entonces dado que  $(\lambda_p, \lambda_p)$  verifica  $C_p^1$

$$J_2(\lambda_p) = R_{p+1}(\lambda_p, \lambda_p),$$

pero por el Lema 2.8

$$R_{p+1}(\lambda_p, \lambda_p) > R_p(\lambda_p, \lambda_p),$$

y usando el Lema 2.3,

$$R_p(\lambda_p, \lambda_p) \geq R_p(\lambda_{p-1}, \lambda_{p-1}).$$

Ahora bien  $(\lambda_{p-1}, \lambda_{p-1})$  verifica  $C_{p-1}^1$  luego

$$R_p(\lambda_{p-1}, \lambda_{p-1}) = J_2(\lambda_{p-1})$$

como  $F(T_2)$  es regular

$$J_2(\lambda_{p-1}) \geq J_2(\lambda_p).$$

Encadenando todas las desigualdades, llegamos a una contradicción pues una de las desigualdades es estricta.

Para acabar la demostración de esta Proposición supongamos que la sucesión de valores propios está acotada, es decir, existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_p < m$ , entonces por el Lema 2.3,  $R_p(m, m)$  está definido para cualquier  $p$ . Sea  $r_p = R_p(m, m)$  entonces  $\phi_m(r_p) = r_{p+1}$  y por tanto  $r_p$  es estrictamente creciente. Dado que para cualquier  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_m(r_p)$  está definida, de los Teoremas 1.7, 1.22 se obtiene

$$r_p < h_2(m) \leq J_2(m) < T_2,$$



Juan Campos Rodríguez.

luego  $r_p$  converge a un punto  $r_L \in (T_1, T_2)$  (en principio  $r_L > r_p > T_1$ ), lo cual entra en contradicción con la Proposición 1.3 pues a consecuencia de ella, si  $\phi_m(r_L)$  esta definido,

$$\phi_m(r_L) = r_L,$$

y si no,  $\phi_m(r_p) = r_{p+1} \rightarrow T_2$ .

(♣)

**Notas.** 1.- Hemos dejado el símbolo  $\lambda_1$ , para el valor propio cuya función propia no cambia de signo que, como hemos visto en la sección 1.3, suele ser único. Recordar que en dicha sección, en la estimación (1.14), se muestra que si  $\lambda$  es un valor propio cuya función propia es positiva

$$\lambda < \lambda_2.$$

2.- Observad que cada  $\lambda_p$  se obtiene como la solución (que es única) de

$$\overbrace{\phi_\lambda(\phi_\lambda(\cdots \phi_\lambda(J_1(\lambda))\cdots))}^{p-2 \text{ veces}} = J_2(\lambda).$$

Identificando  $C_p^j$  con el conjunto de las soluciones de la ecuación  $R_p(a, b) = J_2(b)$ , si  $j = 1$  o  $R_p(b, a) = J_2(a)$ , si  $j = 2$ , obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.9.** Sean  $p$  y  $q$  dos números naturales distintos y  $j_1, j_2 \in \{1, 2\}$ , entonces

$$C_p^{j_2} \cap C_q^{j_2} = \emptyset$$

Demostración. Para obtener la tesis del Teorema es obvio que es suficiente demostrar la siguiente afirmación:

”Sea  $j_1, j_2 \in \{1, 2\}$  y  $p \in \mathbb{N}$ ; entonces,  $\gamma_p^{j_1} \leq \gamma_{p+1}^{j_2}$  y  $c_p^{j_1}(b) < c_{p+1}^{j_2}(b)$ , para cualquier  $b \geq \gamma_{p+1}^{j_2}$ .”

Dadas las formas de elegir  $j_1$  y  $j_2$  en  $\{1, 2\}$  tenemos que analizar 4 casos.



**Primer caso:**  $j_1 = 1 = j_2$ . Sea  $b > \max\{\gamma_p^1, \gamma_{p+1}^1\}$  y supongamos que  $c_p^1(b) \geq c_{p+1}^1(b)$  para algún  $b$ . Por definición de  $c_{p+1}^1$

$$R_{p+1}(c_{p+1}^1(b); b) = J_2(b).$$

Pero por el Lema 2.3,

$$R_{p+1}(c_p^1(b), b) \geq R_{p+1}(c_{p+1}^1(b), b),$$

por el Lema 2.8,

$$R_{p+1}(c_p^1(b), b) > R_p(c_p^1(b), b),$$

y por definición de  $c_p^1$

$$R_p(c_p^1(b), b) = J_2(b).$$

Después de encadenar estas desigualdades llegamos a una contradicción, pues una de ellas es estricta. Por tanto, para todo  $b > \max\{\gamma_p^1, \gamma_{p+1}^1\}$ , (intervalo donde ambas están definidas)

$$c_p^1(b) < c_{p+1}^1(b),$$

y a partir de ahí se observa que la asíntota de  $c_p^1$  está necesariamente antes de la asíntota de  $c_{p+1}^1$ , luego  $\gamma_p^1 \leq \gamma_{p+1}^1$ .

**Segundo caso:**  $j_1 = 1, j_2 = 2$ . Sea como antes  $b > \max\{\gamma_p^1, \gamma_{p+1}^2\}$  y supongamos que, para una elección particular de  $b$ ,

$$c_{p+1}^2(b) \leq c_p^1(b).$$

Observamos que  $c_{p+1}^2(b)$  está definido por

$$R_{p+1}(b, c_{p+1}^2(b)) = J_2(c_{p+1}^2(b))$$

de donde, usando el Lema 2.3,

$$R_{p+1}(b, c_p^1(b))$$

está definido. Veamos que esta expresión es contradictoria. Por definición de  $R_{p+1}$

$$R_{p+1}(b, c_p^1(b)) = \phi_b(R_p(c_p^1(b), b));$$



Juan Campos Rodríguez.

usando que  $R_p(c_p^1(b), b) = J_2(b)$ , nos queda

$$R_{p+1}(b, c_p^1(b)) = \phi_b(J_2(b))$$

lo cual no tiene sentido, pues  $h_2(b) \leq J_2(b)$ .

Por último, una vez que hemos demostrado que

$$c_p^1(b) < c_{p+1}^2(b)$$

para cualquier  $b > \max\{\gamma_p^1, \gamma_{p+1}^2\}$ , razonamos como antes para obtener  $\gamma_p^1 < \gamma_{p+1}^2$ .

**Tercer caso:**  $j_2 = 1, j_1 = 2$ . Este caso se puede reducir al segundo caso por el siguiente procedimiento. Sea  $\lambda \in (\gamma_{p+1}^1, +\infty)$  entonces

$$c_{p+1}^1(\lambda) > \xi_{p+1}^1 = \gamma_{p+1}^2 \geq \gamma_p^1$$

luego  $c_p^1(c_{p+1}^1(\lambda))$  está definido. Aplicando el caso 2,

$$c_p^1(c_{p+1}^1(\lambda)) < c_{p+1}^2(c_{p+1}^1(\lambda)) = \lambda,$$

como  $c_p^2(c_p^1(c_{p+1}^1(\lambda)))$  está definida, también  $c_p^2(\lambda)$  lo está ( $c_p^2$  está definida en una semirrecta) y usando que  $c_p^2$  es estrictamente decreciente,

$$c_p^2(\lambda) < c_p^2(c_p^1(c_{p+1}^1(\lambda))) = c_{p+1}^1(\lambda),$$

y en particular, para cualquier  $\lambda \in (\gamma_{p+1}^1, +\infty)$ ,  $c_p^2(\lambda)$ , está definida y por tanto  $\gamma_p^2 \leq \gamma_{p+1}^1$ .

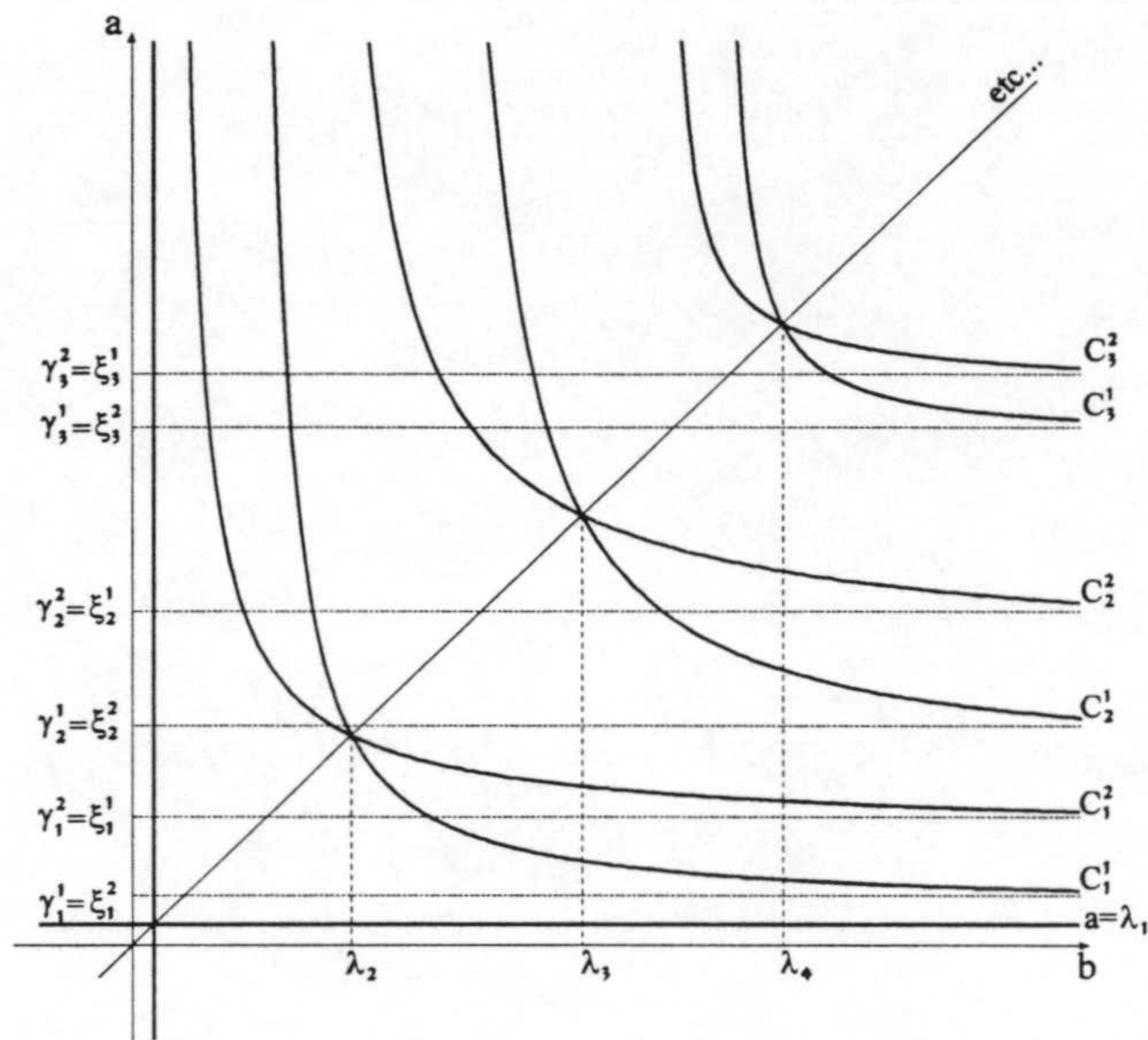
**Cuarto caso:**  $j_2 = 2 = j_1$ . Este caso se reduce al primero por un procedimiento semejante al que se hizo en el tercer caso.

(♣)

**Nota.** Como puede verse en la demostración curvas de índice  $p$  más alto están por encima de otras de índice más bajo.

Como consecuencia de los resultados anteriores, el espectro de Fučík tiene la apariencia representada en la siguiente figura





Como hemos dicho en la sección 1.3, puede ser que el valor  $\lambda_1$  no sea único. Así pueden aparecer más rectas paralelas a las rectas de trazo grueso que se corresponden con  $\Lambda \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \Lambda$  ( $\Lambda$  es el conjunto definido al principio de esta sección). Por supuesto, si aparecen más rectas, estarán necesariamente debajo y a la izquierda de  $C_1^1$  ó  $C_1^2$ . La ordenación de las curvas es la siguiente: curvas que procedan de valores propios más avanzados estarán siempre por encima, pero no se puede decir nada de curvas que procedan del mismo valor propio. Es posible incluso que las curvas  $C_p^1$  y  $C_p^2$  sean iguales.

Para acabar la sección vamos a estudiar los comportamientos asintóticos de las curvas  $C_p^j$  cuando imponemos condiciones de frontera de tipo  $D(T_i)$  ó  $B(T_i)$ . En este caso sendas notas hechas después de las demostraciones de los Teoremas 1.18 y 1.22 nos muestran las siguientes coincidencias

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \mu,$$

$$J_1 \equiv h_1, J_2 \equiv h_2,$$

con ellas se simplifica las ecuaciones que aparecen al tomar limite cuando una de las variables  $a$  ó  $b$  tiende a infinito en las ecuaciones  $C_p^j$ , y es posible establecer una relación entre los números  $\gamma_p^j$ ,  $\xi_p^j$  y los valores propios.



**Teorema 2.10.** Sean  $F(T_1)$  y  $F(T_2)$  condiciones de tipo  $D(T_i)$  ó  $B(T_i)$ . Entonces, para cualquier  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\xi_{2p-1}^1 &= \gamma_{2p-1}^1 = \xi_{2p}^1 = \lambda_p, \\ \gamma_{2p}^1 &= \lambda_{p+1}.\end{aligned}$$

( $\lambda_1 = \mu = \alpha_1 = \alpha_2$  en este caso.)

**Nota.** Recordar que como consecuencia de la simetría entre  $C_p^1$  y  $C_p^2$ ,  $\gamma_p^1 = \xi_p^2$  y  $\xi_p^1 = \gamma_p^2$ , por tanto este Teorema da todos los comportamientos asintóticos.

Demostración. Definimos por recurrencia las funciones  $\psi^r$

$$\begin{aligned}\psi^1(a) &= J_1(a) = h_1(a), \\ \psi^{r+1}(a) &= \phi_a(\psi^r(a)),\end{aligned}$$

esta función  $\psi^r$  controla el  $r$ -ésimo cero de la solución de  $(LP)_a$ , verificando  $F(T_1)$ .

Con estas funciones vamos a demostrar el siguiente Lema.

**Lema 2.11.** Sea  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , sea  $(a_n, b_n)$  una sucesión tal que  $R_p(a_n, b_n)$  está definido y  $R_p(a_n, b_n) \rightarrow T_2$

1.- Si  $a_n \rightarrow a_0 \in \mathbb{R}$  y  $b_n \rightarrow \infty$ , entonces

$$R_p(a_n, b_n) \rightarrow \psi^{E[\frac{p+1}{2}]}(a_0).$$

2.- Si  $a_n \rightarrow \infty$  y  $b_n \rightarrow b_0 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$R_p(a_n, b_n) \rightarrow \psi^{E[\frac{p}{2}]}(b_0).$$

(Como es habitual,  $E[u]$  indica la parte entera de  $u$ .)

Demostración. Veamos simultáneamente ambos resultados por inducción.

Sea  $p = 2$  entonces  $R_2(a, b) = \phi_a(h_1(b))$ . Comencemos con la tesis 1 del Lema. Sean  $a_n \rightarrow a_0 \in \mathbb{R}$  y  $b_n \rightarrow \infty$ . Como  $h_1 = J_1$  (ver nota después de la demostración del Teorema 1.18), por el Teorema 1.7,

$$J_1(a_n) = h_1(a_n) < \phi_{a_n}(J_1(b_n)) = R_2(a_n, b_n)$$



luego, tomando limite cuando  $n \rightarrow \infty$

$$h_1(a_0) = J_1(a_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} R_2(a_n, b_n).$$

Para obtener la otra desigualdad, consideramos  $s \in (T_1, h_2(a_0))$ ; dado que  $(a_0, s) \in \Omega_I$ , por la Proposición 1.2, obtenemos que  $\phi_{a_n}(s)$  está definido para  $n$  avanzado.

Por otro lado, dado que  $b_n \rightarrow \infty$ , por el Teorema 1.22,  $J_2(b_n) \rightarrow T_1 < s$ , luego para  $n$  avanzado, por la Proposición 1.4,  $\phi_{a_n}(J_1(b_n))$  está definido y

$$\phi_{a_n}(J_1(b_n)) < \phi_{a_n}(s),$$

tomando limite en esta expresión

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_2(a_n, b_n) \leq \phi_{a_0}(s).$$

Como  $s$  se puede tomar próximo a  $T_1$ , del Teorema 1.7 obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_2(a_n, b_n) \leq h_1(a_0).$$

Continuamos con la segunda tesis del Lema dentro del caso  $p = 2$ . Sea  $a_n \rightarrow \infty$  y  $b_n \rightarrow b_0$ . Si  $b_0 = \mu = \alpha_2$ , por el Teorema 1.23,  $J_1(b_n) \rightarrow T_2$ , y por tanto

$$J_1(b_n) < \phi_{a_n}(J_1(b_n)) \rightarrow T_2,$$

es decir,  $R_2(a_n, b_n) \rightarrow T_2$  lo que contradice la hipótesis del Lema.

Luego  $J_1(b_n) \rightarrow J_1(b_0)$ , con  $b_0 \in (T_1, T_2)$ . Sea  $s_1 < J_1(b_0) < s_2$  dos números en el intervalo  $(T_1, T_2)$ . Aplicando la Proposición 1.5 y para  $n$  avanzado,  $\phi_{a_n}(s_1)$  y  $\phi_{a_n}(s_2)$  están definidas; además, por la Proposición 1.4, obtenemos que

$$\phi_{a_n}(s_1) < R_2(a_n, b_n) < \phi_{a_n}(s_2),$$

tomando limite y usando de nuevo la Proposición 1.5

$$s_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} R_2(a_n, b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} R_2(a_n, b_n) \leq s_2.$$

Por último, tomando  $s_1$  y  $s_2$  próximos a  $J_1(b_0)$ , obtenemos la tesis del Lema. Hemos completado la demostración del Lema para  $p = 2$ .



Juan Campos Rodríguez.

Consideremos que el Lema es cierto para el caso  $p$ , y estudiamos su veracidad para  $p+1$ . Comenzamos con la primera parte, sea  $a_n \rightarrow a_0 \in \mathbb{R}$  y  $b_n \rightarrow +\infty$ , entonces

$$R_{p+1}(a_n, b_n) = \phi_{a_n}(R_p(b_n, a_n)).$$

Ahora, si  $R_p(b_n, a_n)$  tiende a  $T_2$ , también lo hace  $R_{p+1}(a_n, b_n)$ , luego  $R_p(b_n, a_n) \rightarrow T_2$  y aplicando la hipótesis de inducción,  $R_p(b_n, a_n)$  tiende a  $\psi^{E[p/2]}(a_0)$ . Ahora tenemos dos posibilidades: si  $\phi_{a_0}(\psi^{E[p/2]}(a_0))$  no está definido, del Lema 1.3, obtenemos que  $\phi_{a_n}(R_p(b_n, a_n)) \rightarrow T_2$ , cosa que hemos evitado por hipótesis.

Si  $\phi_{a_0}(\psi^{E[p/2]}(a_0))$  está definido,  $R_{p+1}(a_n, b_n)$  tenderá a dicho número y por definición de  $\psi$

$$\phi_{a_0}(\psi^{E[p/2]}(a_0)) = \psi^{E[\frac{(p+1)+1}{2}]}(a_0).$$

Veamos ahora la segunda parte del Lema. Sea  $a_n \rightarrow \infty$  y  $b_n \rightarrow b_0$ . Si  $R_p(b_n, a_n) \rightarrow T_2$  al igual que antes implicaría que  $R_{p+1}(b_n, a_n) \rightarrow T_2$ . Si  $R_p(b_n, a_n)$  no tiende a  $T_2$ , por la hipótesis de inducción, lo hará a  $\psi^{E[\frac{(p+1)}{2}]}(b_0)$ . Sea  $s_1 < \psi^{E[\frac{(p+1)}{2}]}(b_0) < s_2$ , dos números en  $(T_1, T_2)$  entonces para  $n$  avanzado

$$s_1 < R_p(b_n, a_n) < s_2.$$

Combinando las Proposiciones 1.4 y 1.5 obtenemos que si  $n$  es suficientemente avanzado

$$\phi_{a_n}(s_1) < \phi_{a_n}(R_p(b_n, a_n)) < \phi_{a_n}(s_2),$$

y tomando límite,

$$s_1 \leq \liminf R_{p+1}(a_n, b_n) \leq \limsup R_{p+1}(a_n, b_n) \leq s_2.$$

Basta tomar  $s_1$  y  $s_2$  tan próximos a  $\psi^{E[\frac{(p+1)}{2}]}(b_0)$  como se quiera para concluir el resultado.

(♣)

Continuamos ahora con la demostración del Teorema. Es de observar que cada valor propio  $\lambda_r$  ( $r > 1$ ) viene caracterizado por la ecuación

$$\psi^{r-1}(\lambda) = h_2(\lambda).$$



Vamos a estimar en primer lugar los números  $\gamma_p^1$ . Para ello, sea  $b_n \rightarrow \gamma_p^1$ ,  $b_n > \gamma_p^1$  y  $a_n = c_p^1(b_n)$ , entonces, por el Teorema 2.2,  $a_n \rightarrow +\infty$ , y por construcción de dichas sucesiones, se verifica

$$R_p(a_n, b_n) = J_2(b_n). \quad (2.4)$$

Si  $\gamma_p^1 = \alpha_2$ , por el Teorema 1.23,  $J_2(b_n) \rightarrow T_1$ , y si  $\gamma_p^1 > \alpha_2$ ,  $J_2(b_n) \rightarrow J_2(\gamma_p^1)$  que es un número entre  $T_1$  y  $T_2$ , luego en cualquiera de los casos  $J_2(b_n) \not\rightarrow T_2$  y tampoco  $R_p(a_n, b_n)$  luego, aplicando el Lema 2.11, si  $p \geq 2$  se puede tomar límite en (2.4) y obtenemos

$$\psi^{E[p/2]}(\gamma_p^1) = J_2(\gamma_p^1),$$

(en principio  $\psi^{E[p/2]}(\gamma_p^1)$  es un número entre  $T_1$  y  $T_2$  por lo que  $J_2(b_n) \not\rightarrow T_1$  y  $\gamma_p^1 > \alpha_2$ ) y esta es la ecuación del valor propio que dice el Teorema ( $h_2 = J_2$  en este caso).

Queda por analizar  $p = 1$ , es decir que pasa con  $\gamma_1^1$ . En principio la ecuación (2.4) se transforma en

$$J_1(a_n) = J_2(b_n),$$

y ahora usando el Teorema 1.23,  $J_1(a_n) \rightarrow T_1$ , por tanto  $J_2(b_n) \rightarrow T_2$ , con lo que necesariamente  $\gamma_1^1 = \alpha_2$ .

Consideremos ahora  $\xi_p^1$ . Sea  $b_n \rightarrow \infty$  tal que  $a_n = c_p^1(b_n)$  está definida, entonces  $a_n \rightarrow \xi_p^1$ ; pretendemos tomar límite en (2.4). Para ello vamos a demostrar el siguiente resultado:

**Lema 2.12.** *Sea  $(a_n, s_n) \in \Omega_I$  tal que  $a_n \rightarrow a_0 > \mu$ ,  $\phi_{a_n}(s_n) \rightarrow T_2$  y  $h_2$  es continua, entonces*

$$s_n \rightarrow h_2(a_0)$$

Demostración. En primer lugar, como  $(a_n, s_n) \in \Omega_I$ , por el Teorema 1.7,

$$s_n < h_2(a_n).$$

Tomando límite y utilizando la continuidad de  $h_2$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq h_2(a_0).$$



Juan Campos Rodríguez.

Ahora bien, si existe una parcial  $\{s_{\sigma(n)}\}$  con  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente monótona, tal que  $s_{\sigma(n)} \rightarrow s_0 \in (T_1, h_2(a_0))$ , entonces  $(a_0, s_0) \in \Omega_I$  y por la continuidad de  $\phi$ ,

$$\phi_{a_{\sigma(n)}}(s_{\sigma(n)}) \rightarrow \phi_{a_0}(s_0)$$

que es un número estrictamente entre  $T_1$  y  $T_2$ . Si  $s_{\sigma(n)} \rightarrow T_1$  entonces, tomando  $\tilde{s} \in (T_1, h_2(a_0))$ , se tiene que para  $n$  avanzados  $s_{\sigma(n)} < \tilde{s}$  y

$$\phi_{a_{\sigma(n)}}(s_{\sigma(n)}) < \phi_{a_{\sigma(n)}}(\tilde{s});$$

y al tomar límite se tiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_{a_{\sigma(n)}}(s_{\sigma(n)}) \leq \phi_{a_0}(\tilde{s}) < T_2.$$

En ambos casos se obtiene una contradicción con la hipótesis de que  $\phi_{a_n}(s_n) \rightarrow T_2$ . Por tanto, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = h_2(a_0)$ .

(♣)

Continuamos con la demostración del Teorema para  $p \geq 3$ . Los casos  $p = 1$  y  $p = 2$ , los consideraremos más tarde. Si  $p \geq 3$  la ecuación (2.4) se escribe de la siguiente forma

$$\phi_{a_n}(R_{p-1}(b_n, a_n)) = J_2(b_n).$$

Con esta expresión, veamos que  $\xi_p^1 > \mu$ . Si  $\xi_p^1 = \mu$  entonces,  $a_n \rightarrow \mu = \alpha_2$  y  $h_2(a_n) = J_2(a_n) \rightarrow T_1$ , por el Teorema 1.23. Pero por el Teorema 1.7, como  $\phi_{a_n}(R_{p-1}(b_n, a_n))$  está definido,

$$R_{p-1}(b_n, a_n) < h_2(a_n),$$

con lo que  $R_{p-1}(b_n, a_n) \rightarrow T_1$ . Ahora bien,  $b_n \rightarrow \infty$  y  $a_n \rightarrow \xi_p^1$ , luego, por el Lema 2.11 si  $R_p(a_n, b_n)$  no converge a  $T_2$ , lo hace a  $\psi^{E[\frac{p}{2}]}(\xi_p^1) > T_1$ . Por tanto, necesariamente  $\xi_p^1 > \mu$ . Del Teorema 1.23 se obtiene que  $J_2(b_n) \rightarrow T_2$  (recordar que  $b_n \rightarrow \infty$ ) y estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.12 pues

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow \xi_p^1 > \mu, \\ \phi_{a_n}(R_{p-1}(b_n, a_n)) &= J_2(b_n) \rightarrow T_2, \end{aligned}$$



con lo que obtenemos

$$R_{p-1}(b_n, a_n) \rightarrow h_2(\xi_p^1).$$

Por otro lado, como  $p \geq 3$ ,  $p - 1 \geq 2$  y podemos aplicar el Lema 2.11 obteniendo

$$R_{p-1}(b_n, a_n) \rightarrow \psi^{E[\frac{p-1}{2}]}(\xi_p^1),$$

de donde

$$\psi^{E[\frac{p-1}{2}]}(\xi_p^1) = h_2(\xi_p^1),$$

que es la ecuación correspondiente al valor propio que dice el Teorema.

Nos quedan 2 casos: Si  $p = 1$  la ecuación (2.4) queda

$$J_1(a_n) = J_2(b_n).$$

si  $b_n \rightarrow \infty$ , por el Teorema 1.23,  $J_2(b_n) \rightarrow T_2$ , con lo que  $J_1(a_n) \rightarrow T_2$  y esto implica fácilmente por la continuidad de  $J_1$  que  $a_n \rightarrow \alpha_1 = \mu = \lambda_1$ .

Si  $p = 2$  la ecuación (2.4) queda

$$\phi_{a_n}(J_1(b_n)) = J_2(b_n),$$

como,  $J_2(b_n) \rightarrow T_2$

$$\phi_{a_n}(J_1(b_n)) \rightarrow T_2$$

y ahora, si  $\xi_2^1 > \mu$  por el Lema 2.12,  $J_1(b_n)$  tendería a  $h_2(\xi_2^1)$ , pero por el Teorema 1.23, lo hace a  $T_2$ . Tenemos, pues que  $\xi_2^1 = \mu = \lambda_1$ .

(♣)

**Nota.** Si  $F(T_1)$  ó  $F(T_2)$  ó ambas son de tipo  $N(T_i)$  se puede llegar a la ecuación que verifican los  $\gamma_p^1$  y  $\xi_p^j$ , mediante una técnica similar, suponiendo una hipótesis adicional: "  $h_1$  y  $h_2$  son funciones continuas y verifican

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \mu} h_1(a) &= T_2 \\ \lim_{a \rightarrow \mu} h_2(a) &= T_1". \end{aligned}$$

Aunque esta hipótesis se verifica en los ejemplos, calcular en general los comportamientos asintóticos obligaría a considerar muchos más casos y muchos de ellos no tienen nada que ver con los valores propios.



## 2.2 Ejemplos.

En esta sección vamos a aplicar los resultados obtenidos en la sección anterior a algunos ejemplos concretos. El conocimiento del espectro de Fučík para problemas de Sturm-Liouville unidimensionales nos va a permitir obtener información sobre como es este espectro para ciertos problemas de contorno en dimensiones superiores. Conectaremos los resultados obtenidos con los ya existentes en la literatura sobre este tema. En concreto, si  $\lambda$  es un valor propio de un problema de contorno para un operador elíptico, el par  $(\lambda, \lambda)$  pertenece al correspondiente espectro de Fučík; es conocido (ver [D3]), que del punto  $(\lambda, \lambda)$  parte una componente conexa no acotada del espectro. En general, no se conoce mucho sobre estas ramas. No se sabe si contienen recintos con interior o si se trata de curvas regulares. Únicamente se sabe que son curvas regulares en ciertos cuadrados cerca de la diagonal (ver, por ejemplo [Ru]). En todos los ejemplos que expondremos a continuación se observa que, al menos en una parte del espectro de Fučík del problema considerado (solo en el caso unidimensional se tiene una descripción completa) estas componentes conexas son dos curvas analíticas.

Veremos también en esta sección como se obtienen las condiciones de admisibilidad y regularidad en cada uno de los ejemplos.

### El operador de Laplace unidimensional.

Sean  $p(t) \equiv q(t) \equiv 1$  en el intervalo  $(T_1, T_2) = (0, \pi)$  esto es, consideramos la ecuación

$$u'' + au^+ - bu^- = 0, \quad t \in (0, \pi). \quad (2.5)$$

Vamos a considerar en primer lugar el problema Dirichlet, es decir, las condiciones de frontera que vamos a tratar son

$$u(0) = u(\pi) = 0. \quad (2.6)$$

En este caso tenemos dos condiciones de tipo  $D(T_i)$  y además ambos extremos son regulares pues  $p$  y  $q$  son la restricción de dos funciones analíticas sobre toda la recta real, por tanto, aplicando la Proposición



1.17 y el Teorema 1.22 parte b), tenemos que las condiciones en frontera son admisibles y regulares. Podemos pues aplicar los tres teoremas de la sección anterior para obtener una descripción del espectro de Fučík para este problema.

Dada la sencillez de la ecuación es posible obtener explícitamente la función de ceros, en este caso,

$$\phi_a(s) = s + \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

Además estimando cuando  $\phi_a(s)$  se queda en  $(0, \pi)$  obtenemos que  $\mu = 1$ ,  $h_1(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}}$ ,  $h_2(a) = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{a}}$ .

Respecto a las funciones en frontera, dado que estamos en una condición de tipo  $D(T_i)$  es fácil ver que dichas condiciones en frontera son admisibles pues se trata de puntos regulares. No obstante, como conocemos la función de ceros, obtenemos que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \mu = 1$  y  $J_1(a) = h_1(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}}$ ,  $J_2(a) = h_2(a) = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{a}}$ .

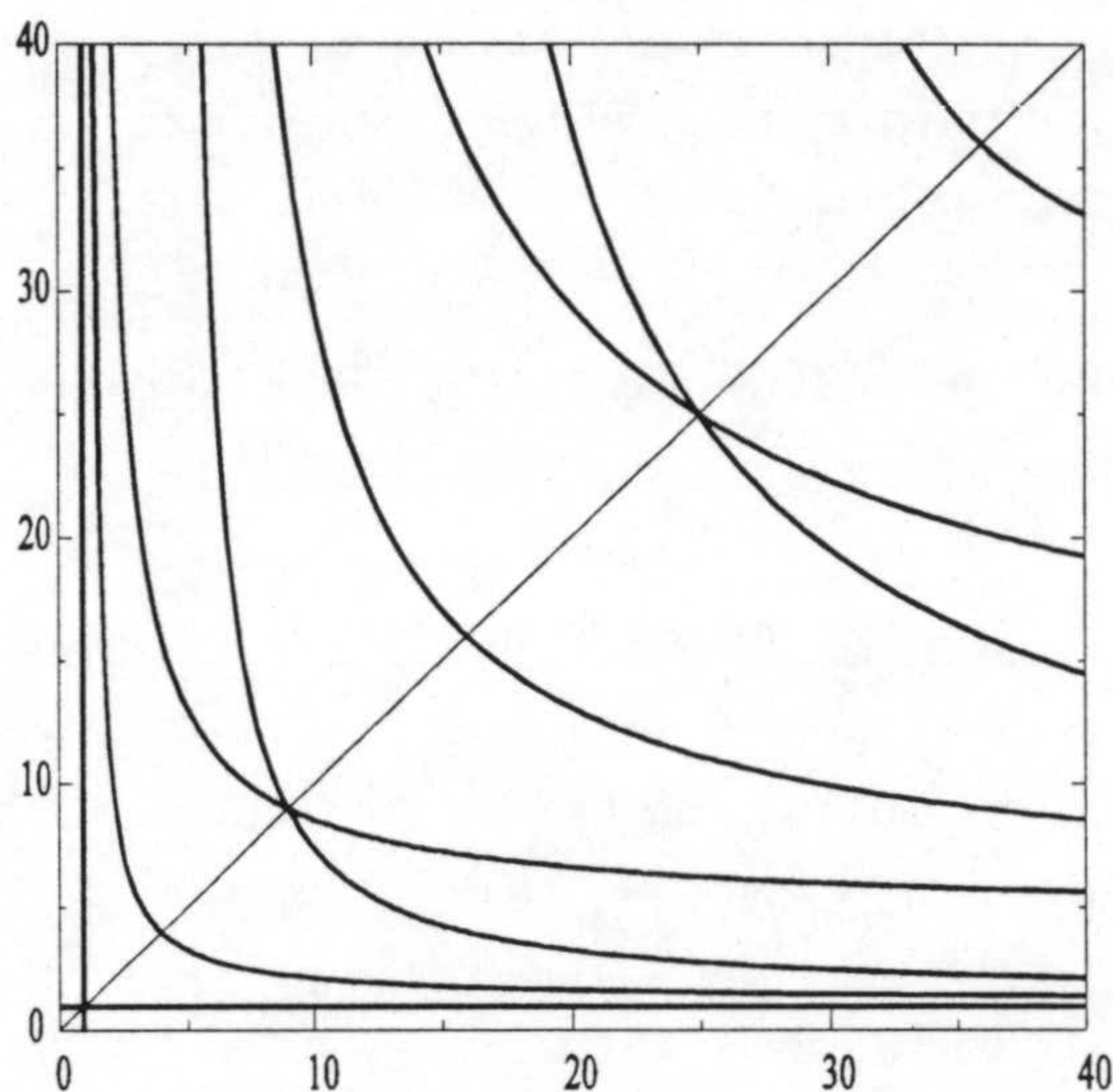
Conociendo ya todas las funciones que entran en juego en el Teorema 2.1 se pueden calcular las ecuaciones que verifican cada curva  $C_p^j$ , obteniendo, después de simplificar

$$\begin{aligned} C_1^1 &\equiv C_1^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = 1; \\ C_2^1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{b}} = 1; \quad C_2^2 \equiv \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = 1; \\ C_3^1 &\equiv C_3^2 \equiv \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{b}} = 1; \\ C_4^1 &\equiv \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{b}} = 1; \quad C_4^2 \equiv \frac{3}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{b}} = 1; \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

A estas curvas hay que añadir las rectas  $a = 1$ ,  $b = 1$  puesto que  $\lambda_1 = 1$  es en este caso el único valor propio cuya función propia no cambia de signo.

Con todo lo anterior, el espectro de Fučík para (2.5) y (2.6), es el representado en la siguiente figura





Si consideramos ahora el problema de Neumann

$$\begin{cases} u'' + au^+ - bu^- = 0, \\ u'(0) = u'(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

al igual que antes,  $\phi_a(s) = s + \frac{\pi}{\sqrt{a}}$ , pero en este caso tenemos  $N(0)$  y  $N(\pi)$ , por tanto las funciones  $J$  y  $h$  no tienen porque coincidir. Las funciones  $u_a^1$  y  $u_a^2$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} u_a^1(t) &= \cos(\sqrt{a}t) \\ u_a^2(t) &= \cos(\sqrt{a}(t - \pi)) \end{aligned}$$

de donde

$$J_1(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}, \quad J_2(a) = \pi - \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

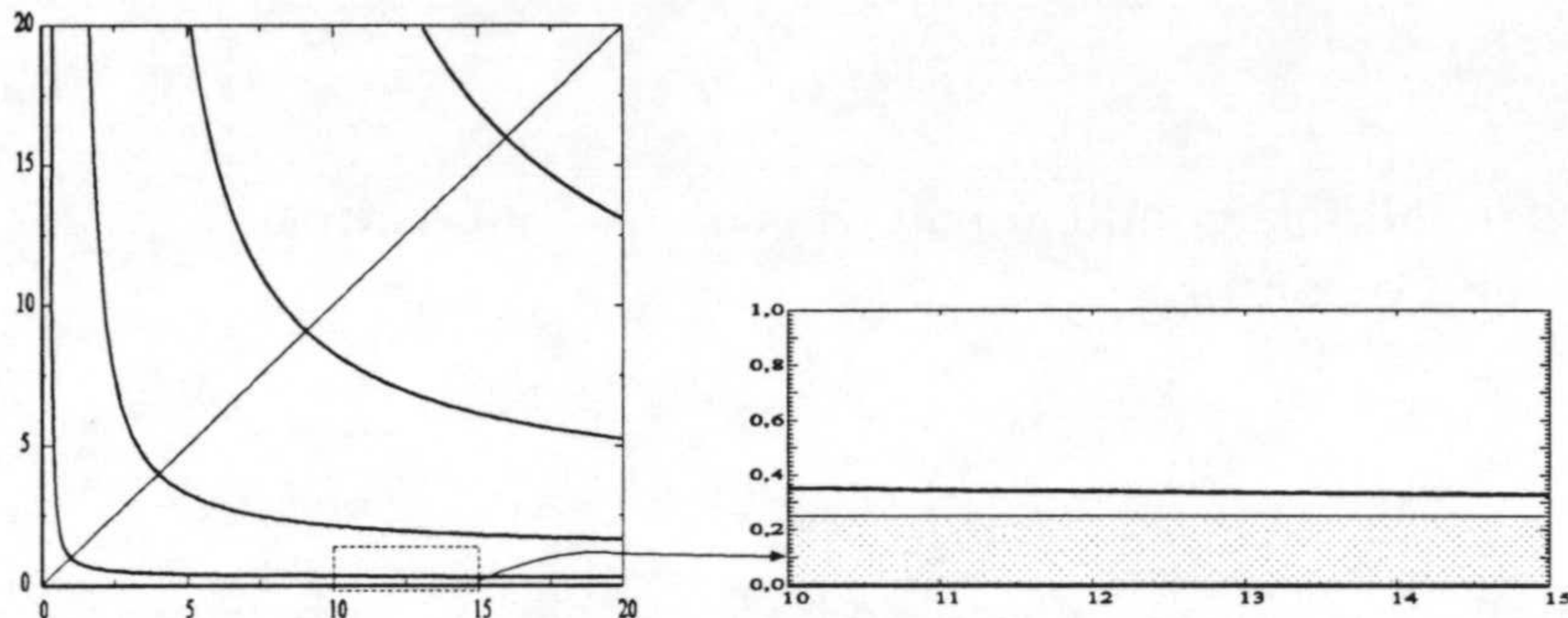
y  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . Las ecuaciones que resultan en este caso son

$$\begin{aligned} C_1^1 &\equiv C_1^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = 2 \\ C_2^1 &\equiv C_2^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = 1 \\ C_3^1 &\equiv C_3^2 \equiv \frac{3}{\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{b}} = 2 \\ C_4^1 &\equiv C_4^2 \equiv \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{b}} = 1 \end{aligned}$$

*etc...*



Añadiendo las rectas  $a = 0$  y  $b = 0$  que corresponden a los únicos valores para los que hay solución que no cambia de signo, nos queda



Observar que, a diferencia de lo que ocurre en el problema de Dirichlet, en el que la primera curva del espectro converge a las rectas  $a = 1$  y  $b = 1$ , respectivamente en este caso aparecen las franjas  $(0, \frac{1}{4}) \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^+ \times (0, \frac{1}{4})$ , que están libres de espectro.

Estos casos escalares ya habían sido analizados por Fučík en [F].

### El operador de Laplace en una bola.

Consideramos primeramente el caso de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v + av^+ - bv^- = 0, & \text{en } B = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| < 1\}, \\ v = 0, & \text{en } \partial B = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| = 1\}, \end{cases} \quad (2.8)$$

( $|x|$  denota la usual norma euclídea,  $N \geq 2$ ). Vamos a estudiar la parte del espectro de Fučík, correspondiente a soluciones radiales, esto es, a soluciones de (2.8) que sean de la forma  $v(x) = u(|x|)$ .

Se trata pues de determinar el conjunto

$$\Sigma^r = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (2.8) \text{ tiene una solución radial que cambia de signo}\}.$$

Haciendo los cálculos se observa que  $v(x) = u(|x|)$  es una solución de (2.8) para todo  $x \neq 0$  si y sólo si  $u$  es solución de

$$(t^N u')' + t^N (au^+ - bu^-) = 0, \quad t \in (0, 1), \text{ donde } t = |x|.$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
67

17 JUL. 1996

COMISION DE DOCTORADO



Además, para que  $v$  sea regular en  $x = 0$ , ver [B], basta con que  $v$  sea acotada en un entorno de cero, es decir,

$$|u(0)| < \infty.$$

Por otro lado, la condición de Dirichlet implica que  $u(1) = 0$ , quedando el problema de contorno

$$\begin{cases} (t^N u')' + t^N (au^+ - bu^-) = 0, \\ |u(0)| < \infty, u(1) = 0. \end{cases}$$

Al analizar la admisibilidad de las condiciones en frontera, observamos que  $F(1)$  es una condición de tipo  $D(T_2)$ , donde  $T_2 = 1$  es un extremo regular. En virtud del Teorema 1.22 parte b) es admisible y regular.

Para la otra condición en frontera es conocido que toda solución del problema

$$\begin{cases} (t^N u')' + at^N u = 0, \\ |u(0)| < \infty, \end{cases}$$

es un múltiplo de la función

$$t \rightarrow t^{1-\frac{N}{2}} J_\eta(\sqrt{at})$$

donde ahora  $J_\eta$  denota la función de Bessel de primera especie y de índice  $\eta = \frac{N-2}{2}$ . Es fácil comprobar la admisibilidad dado que tenemos controlada la función  $u_a^1$ , la regularidad se obtiene de la Proposición 1.17. Con todo esto concluimos que el conjunto  $\Sigma^r$  es una unión de curvas como describen los Teoremas 2.2, 2.9, y 2.10.

Sería interesante determinar también la parte del espectro del problema (2.8) correspondiente a soluciones no radiales. Es conocido (véase [D3]), que de cada valor propio no radial parte un continuo no acotado de  $\Sigma$ . Sin embargo no se conocen explícitamente ninguna solución no trivial con  $a \neq b$  que no sea radial.

Si consideramos el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta v + av^+ - bv^- = 0 & \text{en } B \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \partial B \end{cases} \quad (2.9)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  denota la derivada respecto a la normal exterior en  $\partial B$ , y volvemos a considerar soluciones que sólo dependan del radio, obtenemos



la ecuación

$$\begin{cases} (t^N u')' + t^N (au^+ - bu^-) = 0, & t \in (0, 1), \\ |u(0)| < \infty, u'(1) = 0. \end{cases}$$

Observamos que se ha cambiado la condición  $D(1)$  por una  $N(1)$ . La admisibilidad y regularidad de las condiciones en frontera se obtienen fácilmente pues  $B(0)$  es la misma que en el problema de Dirichlet y  $N(1)$  es una condición en un extremo regular, luego, por el Teorema 1.22 parte b) es admisible y regular. Tenemos por tanto, la descripción que nos dan los Teoremas 2.2 y 2.9. Respecto al comportamiento asintótico. Es de notar las diferencias que presenta respecto al caso escalar. El caso de Dirichlet y el caso Neumann difieren sólo en la condición de contorno  $F(1)$ , por tanto, las funciones  $\phi$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , que sólo dependen de la ecuación, y  $J_1$ , que depende de  $F(0)$ , son las mismas que en el caso de Dirichlet. Luego,  $\mu$  es el primer valor propio (radial y no radial) del problema de Dirichlet y es necesariamente  $\mu > 0$ , además,  $\alpha_1 = \mu$ ,  $h_1(a) = J_1(a)$ , y  $h_2$  coincide con la función  $J_2$ , pero para la condición  $D(1)$ ; con esto, es fácil comprobar que  $h_2$  es continua y

$$\lim_{a \rightarrow \mu} h_2(a) = T_1 = 0.$$

Por último  $\lambda_1 = 0$ , pues es el primer valor propio del problema

$$\begin{cases} (t^N u')' + at^N u = 0, \\ |u(0)| < \infty, u'(1) = 0, \end{cases}$$

y la primera función propia (radial y no radial) de la ecuación lineal correspondiente a (2.9) es constante, y es el único valor propio cuya función propia es positiva. Respecto a  $J_2$  no se puede decir nada aparte de la teoría general del Teorema 1.22. Vamos a demostrar que  $\alpha_2 = 0$ .

Sea  $u_a^2$  definido como es usual; en este caso particular, por

$$\begin{cases} (t^N u')' + at^N u = 0 \\ u(1) = 1, u'(1) = 0. \end{cases}$$

En principio por la teoría general  $\alpha_2 \geq 0$  y  $u_{\alpha_2}^2(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in (0, 1)$ , luego dado que en 1 es positiva  $u_{\alpha_2}^2(t) > 0$ . Suponemos por reducción al absurdo que  $\alpha_2 > 0$ . Usando la ecuación diferencial obtenemos

$$(t^N (u_{\alpha_2}^2)'(t))' < 0$$



Juan Campos Rodríguez.

luego la función  $t \rightarrow t^N (u_{\alpha_2}^2)'(t)$  es estrictamente decreciente y, como  $(u_{\alpha_1}^2)'(1) = 0$ , se tiene que  $t^N (u_{\alpha_2}^2)'(t) > 0$ ,  $t \in (0, 1)$ , luego  $(u_{\alpha_2}^2)'(t) > 0$  y por tanto  $u_{\alpha_2}^2$  es estrictamente creciente, con lo cual

$$u_{\alpha_2}^2(t) < 1, \quad t \in (0, 1).$$

Según esto, para cualquier  $t \in (0, 1)$

$$0 < u_{\alpha_2}^2(t) < 1$$

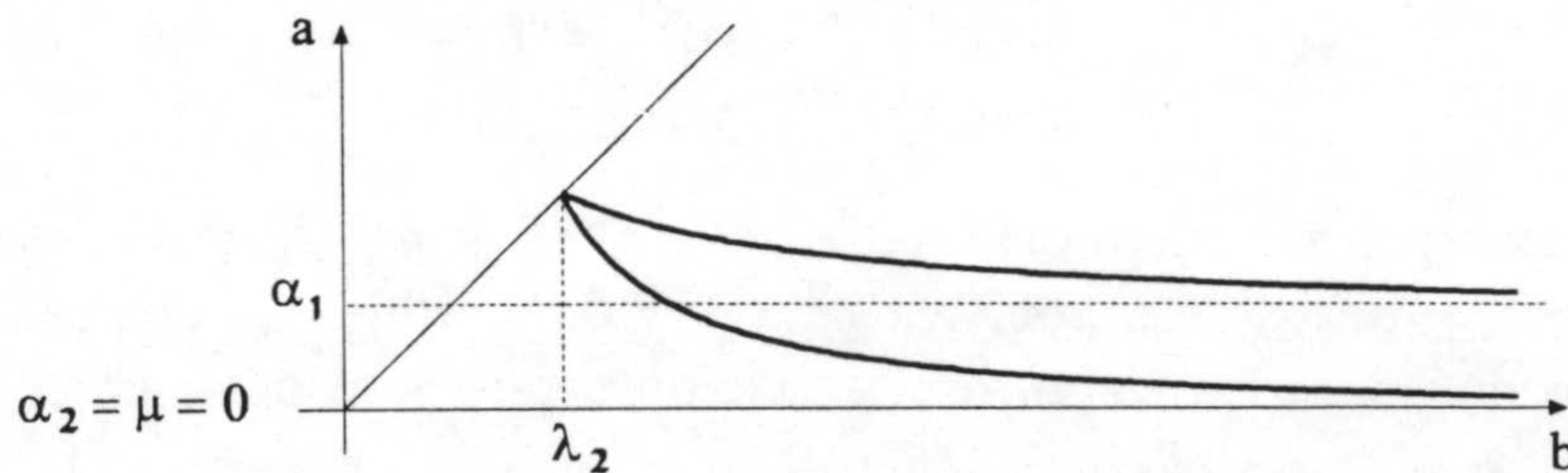
y, por tanto, verifica  $B(0)$ . Esto implicaría que  $\alpha_2$  es un valor propio cuya función propia es positiva. Esta afirmación entra en contradicción con la teoría general de valores propios puesto que  $\lambda_1 = 0$  para este problema de Neumann.

Vamos a hacer a continuación una descripción de los comportamientos asintóticos de las curvas  $C_1^1$  y  $C_1^2$ , cuando  $b$  tiende a infinito (el estudio para  $a \rightarrow \infty$  es semejante), es decir, vamos a calcular los números  $\xi_1^1$  y  $\xi_1^2$ . Empezamos por  $\xi_1^1$ ; para ello, usamos la ecuación

$$J_1(a) = J_2(b),$$

si  $b \rightarrow +\infty$ , por el Teorema 1.23,  $J_2(b) \rightarrow T_2 = 1$  luego por el Teorema 2.2,  $J_1(a) \rightarrow T_2 = 1$ , cuando  $a \rightarrow \xi_1^1$ . Esto obliga a que  $\xi_1^1$  sea  $\alpha_1$ , pues sino, por la continuidad de  $J_1$ ,  $J_1(a)$  tendería a un número  $J_1(\xi_1^1)$  que sería un número en  $(0, 1)$ . Por tanto, tenemos  $\xi_1^1 = \alpha_1$ .

Un razonamiento simétrico permite demostrar que  $\xi_1^2 = \alpha_2$ . Observar que estas propiedades son generales:  $\xi_1^1 = \alpha_1$ ,  $\xi_1^2 = \alpha_2$ , y no dependen de la expresión de las funciones  $J_1$  y  $J_2$ . Con estos comportamientos tenemos la situación  $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0)$





Ha sido probado en [F-G] que la primera curva del espectro de Fučík tiende asintóticamente a la recta  $a = \lambda_1$ . En principio no podemos decir nada de que esta curva  $C_1^2$  sea la curva que describen en [F-G], sin embargo se puede decir que una rama radial también tiende a  $a = \lambda_1$ . También es interesante destacar que en este caso  $C_1^1$  y  $C_1^2$  no tienen ni siquiera el mismo comportamiento asintótico, es decir, el caso  $C_1^1 \equiv C_1^2$  es un caso particular de los problemas escalares.

### Espectro de Fučík radial en una corona.

Dado  $0 < r < 1$  consideramos la corona

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N / r < |x| < 1\}$$

y dado que este abierto es también radial podemos preguntarnos acerca de la existencia de soluciones radiales no triviales al problema

$$\Delta u + au^+ - bu^- = 0 \text{ en } C, \quad (2.10)$$

que verifiquen condiciones de contorno, de Dirichlet ( $u = 0$  en  $\partial C$ ) o de Neumann ( $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  en  $\partial C$ ). Al imponer condiciones de Dirichlet queda un problema equivalente a encontrar una solución no trivial del

$$\begin{cases} (t^N u')' + t^N (au^+ - bu^-) = 0, \\ u(r) = 0 = u(1). \end{cases}$$

En este caso se pueden aplicar todos los resultados obtenidos en la sección anterior (Teoremas 2.2, 2.9, 2.10) pues tenemos dos condiciones de tipo  $D(T_i)$  en dos extremos regulares, que por la Proposición 1.17 y el Teorema 1.22 parte b), son admisibles y regulares.

Cuando se trata de condiciones de Neumann, la situación es muy semejante. En principio buscar soluciones radiales correspondientes al problema de Neumann de la ecuación (2.10) es equivalente a buscar soluciones no triviales de la ecuación



$$\begin{cases} (t^N u')' + t^N (au^+ - bu^-) = 0, & t \in (r, 1), \\ u'(r) = 0 = u'(1), \end{cases}$$

y esta ecuación tiene dos extremos regulares, con lo cual los teoremas 2.2 y 2.9 se aplican para obtener la descripción de las zonas radiales del espectro. Destacar que aquí aparece una separación entre las rectas  $a = 0$  y  $b = 0$  y el resto del espectro.

Para comprobarlo basta observar que  $\alpha_1 > 0$  y  $\alpha_2 > 0$  y dado que cada curva  $C_p^j$  está contenida en el cuadrante  $(\min\{\alpha_1, \alpha_2\}, +\infty)^2$ , existe una franja de separación entre las curvas radiales y las rectas  $a = 0$  y  $b = 0$ . En efecto, supongamos que  $\alpha_1 = 0$  (el otro caso es muy semejante). Sea  $a_n \rightarrow \alpha_1$ ,  $a_n > \alpha_1 = 0$ , entonces, por dependencia continua (ver [Ha]), se tendrá que  $u_{a_n}^1$  tiende a  $u_{\alpha_1}^1(t)$  uniformemente en  $[r, 1]$  (observar que  $u_{a_n}^1$  se puede considerar definido en  $[0, +\infty)$ ).

Además, dado que  $u_{a_n}^1$  se anula en un punto  $J_1(a_n) \in [r, 1]$ , se obtiene que  $u_{\alpha_1}^1$  se anula en un punto de  $[r, 1]$  (aquí se usa la convergencia uniforme de  $u_{a_n}^1$  a  $u_{\alpha_1}^1$ ) y por tanto  $u_{\alpha_1}^1$  se anula en  $[r, 1]$ . Sin embargo  $u_{\alpha_1}^1(t) = 1$  pues  $\alpha_1 = 0$  y tenemos una condición de tipo  $N(1)$ .

Dado que la curva que describen en [F-G] tiende asintóticamente a  $a = \lambda_1 = 0$ , podemos asegurar que, para valores extremos, la curva que presentan en [F-G] está formada por pares  $(a, b)$  para los que la correspondiente un solución no trivial es no radial.

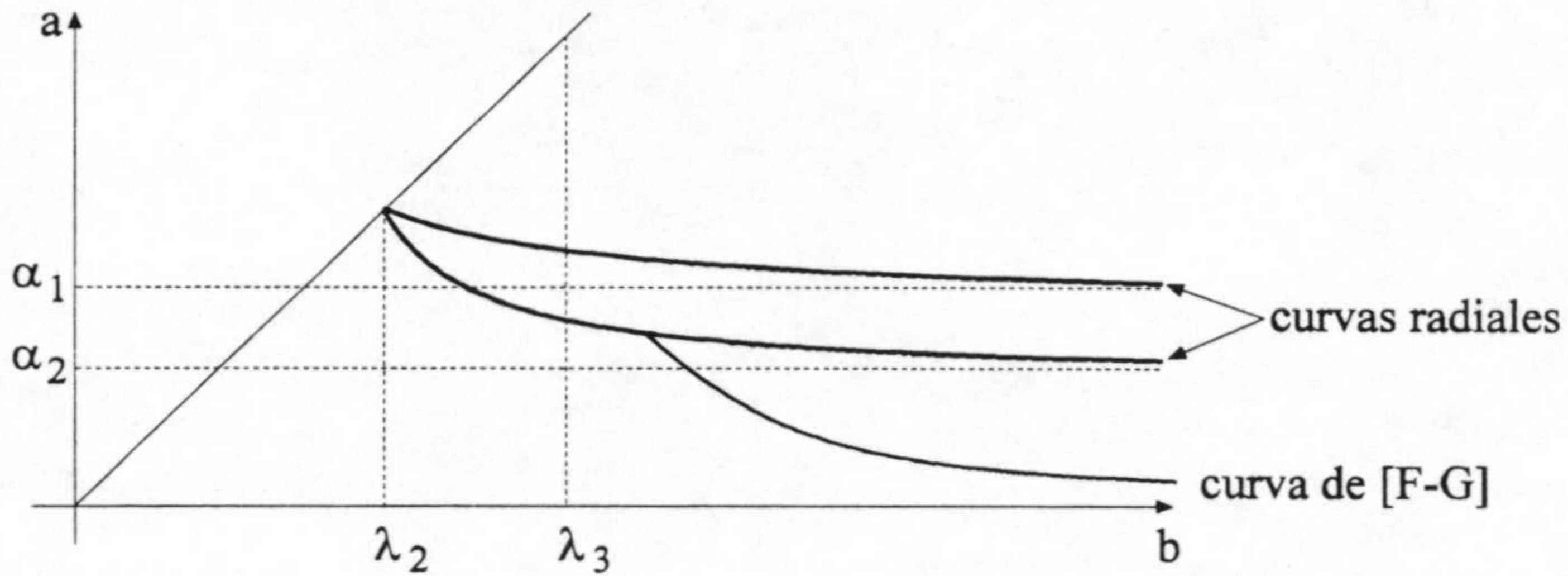
Por otro lado en ciertas dimensiones y cuando la corona es suficientemente ancha ( $r$  cercano a cero), es posible que el segundo valor propio sea radial. Entonces se puede demostrar que la curva de [F-G] es radial en un entorno de la diagonal, ya que, según se deduce de los resultados en [D4],

”Si  $\lambda_2$  es un valor propio radial entonces cualquier solución de



$$\begin{cases} \Delta u + au^+ - bu^- = f, & C, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \partial C, \end{cases}$$

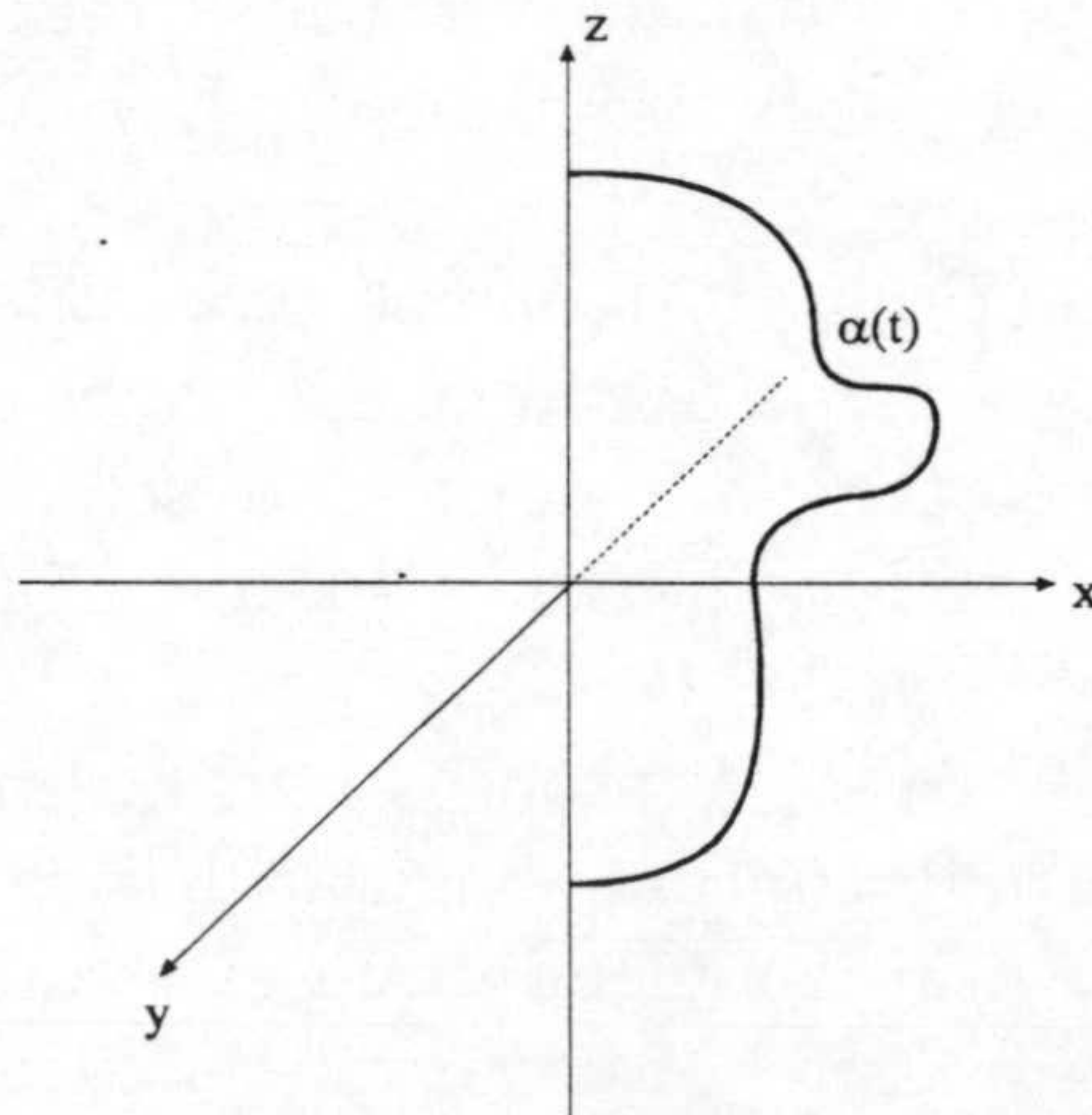
con  $f$  radial y  $a < \lambda_3$ ,  $b < \lambda_3$ , es necesariamente radial".  
En este caso se tiene,



**El operador de Laplace-Beltrami sobre una superficie de revolución.**

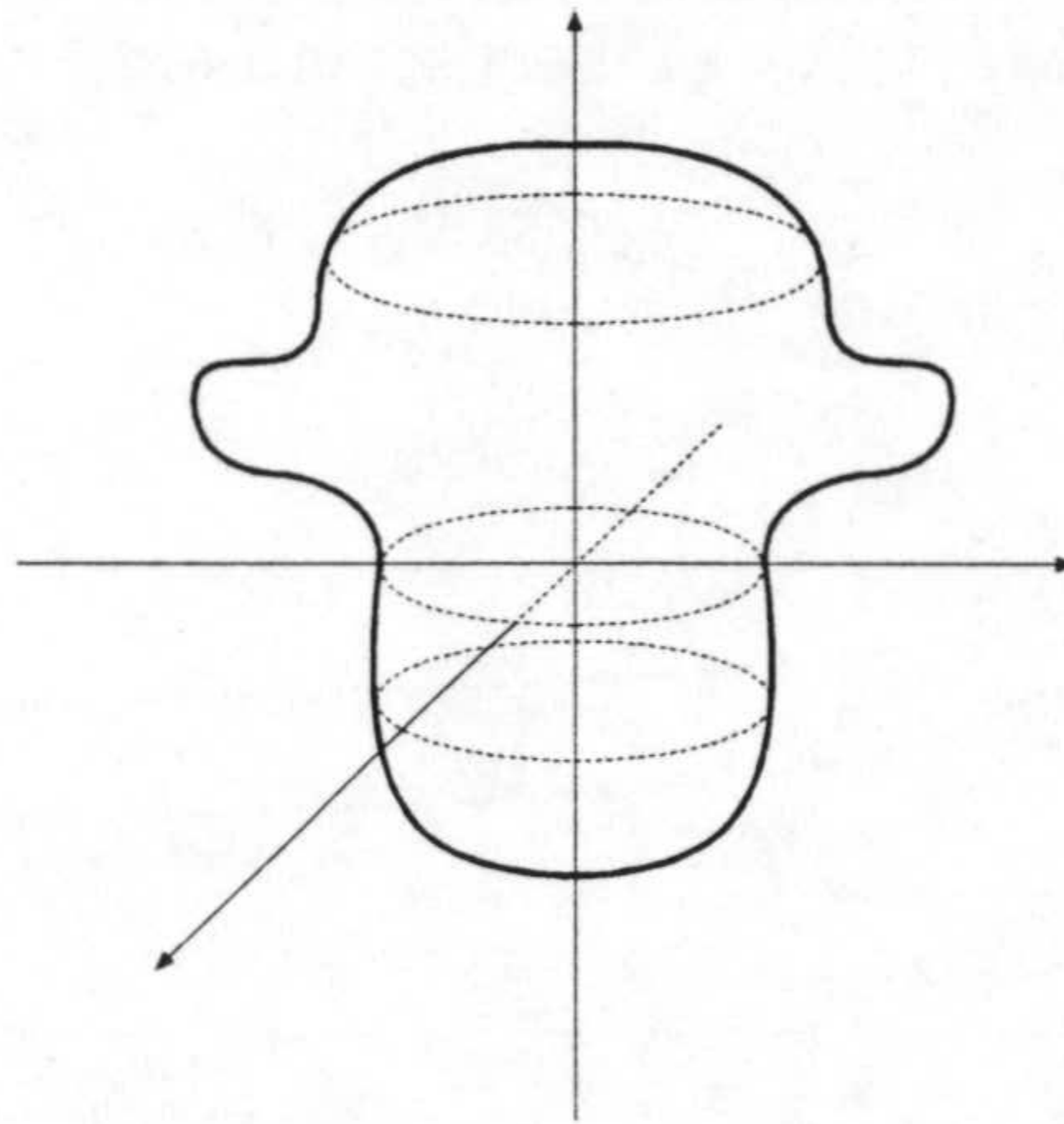
Sea  $\alpha(t)$  una curva analítica regular, ( $\alpha'(t) \neq 0$ ), inyectiva y con imagen contenida en el plano  $XZ$  dentro de  $\mathbb{R}^3$ , y definida en el intervalo  $[T_1, T_2]$  ( $T_1 < T_2$ ). Supongamos además que si  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), 0, \alpha_2(t))$ , entonces  $\alpha_1(t) > 0$  para todo  $t \in (T_1, T_2)$ .

Es decir tenemos la situación





Consideramos ahora la superficie engendrada al girar sobre el eje  $Z$  dicha curva, esto es, la superficie de revolución engendrada por  $\alpha$ ,



y queremos estudiar la ecuación diferencial

$$\Delta u + au^+ - bu^- = 0 \quad (2.11)$$

donde  $\Delta$  denota el operador de Laplace-Beltrami en dicha superficie.

Como en los dos ejemplos anteriores, vamos a restringirnos a un tipo especial de soluciones que nos permita aplicar los resultados de la sección anterior. En este caso, estudiar la existencia de soluciones no triviales que sean constantes a lo largo de las circunferencias que resultan al cortar dicha superficie por planos paralelos a  $XY$ . Consideraremos problemas de Dirichlet y Neumann, pero previamente, hay que hacer las siguientes consideraciones:

1.- Si  $\alpha_1(T_1) = \alpha_1(T_2) = 0$ , tenemos una superficie cerrada que es homeomorfa a una esfera pero que puede tener singularidades en los puntos  $(0, 0, \alpha_2(T_1))$ ,  $(0, 0, \alpha_2(T_2))$ . Por tanto será necesario imponer que los vectores tangente en  $T_1$  y  $T_2$  sean perpendiculares al eje  $Z$  para que la superficie resultante sea de clase 2.

2.- Si  $\alpha_1(T_1) = 0 < \alpha_1(T_2)$ , entonces tenemos una superficie homeomorfa a un disco cerrado con una singularidad en  $(0, 0, \alpha_2(T_1))$  que, al igual que antes, se evita suponiendo que el vector tangente en  $T_1$  sea perpendicular al eje  $Z$ . Es de observar que el caso  $\alpha_1(T_2) = 0 < \alpha_1(T_1)$  es semejante.



3.- Si  $\alpha_1(T_1) > 0 < \alpha_2(T_2)$  entonces la superficie que obtenemos es homeomorfa a un anillo.

Para hacer este estudio vamos a utilizar una expresión local de la ecuación (2.11). Consideramos la parametrización

$$S(t, \theta) = (\alpha_1(t) \cos(\theta), \alpha_1(t) \operatorname{sen}(\theta), \alpha_2(t)).$$

Esta parametrización va bien en todos los puntos salvo en aquellos puntos en donde  $\alpha$  toca al eje  $Z$  que como ya hemos visto son a lo sumo dos. Con esta parametrización obtenemos la expresión local de la ecuación (2.11), y suponiendo para simplificar que  $\alpha$  está parametrizada por arco,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_1^2(t)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + au^+ - bu^- = 0.$$

Dado que sólo vamos a estudiar soluciones que dependan de  $t$  queda la ecuación

$$(\alpha_1(t)'u')' + \alpha_1(t)(au^+ - bu^-) = 0, \quad (2.12)$$

a la que hay que añadir condiciones de frontera. Dichas condiciones pueden provenir del propio problema que estamos considerando (condiciones de Dirichlet o Neumann) o de condiciones de regularidad de la solución en la superficie puesto que la parametrización que estamos usando no tiene por que ser regular en algunos puntos.

Comenzamos considerando el primer caso anteriormente expuesto,

$$\alpha_1(T_1) = 0 = \alpha_1(T_2).$$

Para que la superficie sea regular (de clase  $C^2$ ), es necesario imponer que

$$\alpha_1'(T_1)^2 = \alpha_1'(T_2)^2 = 1.$$

Al igual que en las soluciones radiales en una bola, la regularidad de las soluciones de (2.11) que son constantes a lo largo de las circunferencias que se obtienen al cortar por planos paralelos a  $XY$ , se obtiene al imponer a las soluciones de (2.12) la condición

$$|u(T_1)| < \infty, |u(T_2)| < \infty.$$



Veamos que estas condiciones son admisibles; la regularidad se obtiene a partir de los Teoremas 1.18 y 1.22. Es de observar que aquí no se puede distinguir entre el problema de Dirichlet y Neumann, pues en este caso la superficie no tiene borde.

Vamos a estudiar la admisibilidad de la condición en  $T_1$ , en  $T_2$  es semejante. Además, para simplificar las expresiones, vamos a suponer que  $T_1 = 0$ . Tenemos por tanto que estudiar la admisibilidad en cero de la condición  $|u(0)| < \infty$  para la ecuación

$$u'' + \frac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)}u' + au = 0,$$

sabiendo que  $\alpha_1$  es una función analítica, verificando  $\alpha_1(0) = 0$ ,  $\alpha_1'(0)^2 = 1$ . Vamos a aplicar la teoría de puntos singulares (ver, por ejemplo, [B-N]), para ello, escribimos la ecuación en la forma

$$t^2u'' + t\kappa(t)u' + at^2u = 0$$

donde  $\kappa(t) = \frac{t\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)}$ . Es fácil comprobar que  $\kappa(t)$  es una función analítica verificando que  $\kappa(0) = 1$ . Si escribimos la ecuación indicial nos queda

$$z^2 = 0,$$

con lo cual tenemos dos soluciones, una primera  $\phi_1(t)$  que es una solución analítica verificando  $\phi_1(0) = 1$  y una segunda que se obtiene de la forma

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \ln(t) + \psi(t)$$

donde  $\psi(t)$  es de nuevo una función analítica.

De la estructura de estas dos soluciones se observa que cualquier combinación lineal,

$$l_1\phi_1 + l_2\phi_2,$$

no es acotada entorno a cero a menos que  $l_2 = 0$ . Además como  $\phi_1(0) = 1$ , existe un entorno donde es positiva y los ceros no se acumulan en 0. Queda por ver que dicha función  $\phi_1$  es regular, no sólo como función de  $t$  sino también como función de  $a$ ; (aunque la ecuación indicial no dependa de  $a$  la solución  $\phi_1$  si lo hace).



Para ello vamos a recordar la construcción de la función  $\phi_1$ . Observamos que  $\phi_1(t)$  viene definido por una serie de potencias,

$$\phi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(a)t^n,$$

donde  $\omega_n(a)$  es una expresión polinómica en  $a$ , es decir

$$\phi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \omega_{nj} a^j t^n.$$

Se observa que, de la propia construcción de los  $\omega_{nj}$ , se puede demostrar que esta serie es convergente (vista como serie doble) en un entorno de la forma  $\mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  donde  $\varepsilon$  es el radio de convergencia de la serie de potencias en 0 de la función  $\kappa(t)$ . Tenemos por tanto nuestra función  $u_a^1(t) = \phi_1(t)$  y sabemos que es analítica en  $\mathbb{R} \times (0, \varepsilon)$ , para ver que es analítica en  $\mathbb{R} \times (0, T_2)$  hacemos el siguiente razonamiento:

Sea  $u(t; a, s, x_0, v_0)$  la solución de

$$\begin{cases} u'' + \frac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} u' + au = 0, \\ u(s) = x_0, u'(s) = v_0, \end{cases}$$

entonces dicha función (ya la hemos usado otras veces) es analítica en sus 5 variables, y

$$u_a^1(t) = u\left(t; a, \frac{\varepsilon}{2}, u_a^1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), (u_a^1)'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

luego  $u_a^1(t)$  es analítica en  $\mathbb{R} \times (0, T_2)$ .

Con la admisibilidad de las condiciones en frontera se llega a que la descripción del espectro de Fučík, considerando sólo soluciones que dependan en el parámetro  $t$ , viene dada por los Teoremas 2.2, 2.9, 2.10.

Cuando consideramos los otros casos expuestos, observamos que son superficies con borde, por lo que hay que añadir a la ecuación (2.11) las condiciones de contorno. Al pasar a soluciones que dependan sólo de  $t$ , en la ecuación (2.12), dependiendo de la superficie y del problema que estamos considerando, tenemos los siguientes casos:

◦ Superficie abierta por  $T_2$  y cerrada por  $T_1$  ( $\alpha_1(T_1) = 0 < \alpha_1(T_2)$ ). En este caso al igual que en el anterior es necesario imponer que  $|u(T_1)| < \infty$  y con un razonamiento semejante la admisibilidad en este extremo se



obtiene al imponer que  $\alpha_1'(T_1)^2 = 1$ . La condición de frontera en el otro extremo depende del problema considerado y es  $u(T_2) = 0$ , en el problema de Dirichlet, y  $u'(T_2) = 0$ , en el problema de Neumann. En ambos casos  $T_2$  es ahora un extremo regular y la admisibilidad y regularidad de la condición en frontera se obtiene del Teorema 1.22.

oSuperficie abierta por ambos lados ( $\alpha(T_1)$  y  $\alpha(T_2)$  positivos). En este caso se impone las condiciones  $u(T_1) = u(T_2) = 0$ , en el problema de Dirichlet y  $u'(T_1) = u'(T_2) = 0$ , en el problema de Neumann. En todos los casos son extremos regulares, luego la admisibilidad y regularidad se obtienen de la Proposición 1.17 y del Teorema 1.22.

Obviamente, en todos estos problemas se aplican los Teoremas 2.2 y 2.9, y el Teorema 2.10 en los casos de Dirichlet.

Por último, comentar que si  $\alpha_1(t) = 1$ ,  $\alpha_2(t) = t$  en el intervalo  $(r, R)$ , ( $0 < r < R$ , son dos parámetros reales), es posible tanto para el problema de Neumann como para el problema de Dirichlet, obtener otra gama de soluciones que dependen de  $\theta$ , apareciendo un problema periódico. Es decir además de estas ramas de soluciones que dependen de  $t$ , hay soluciones que dependen sólo de  $\theta$ , obteniendo que el espectro tiene una doble gama de curvas analíticas que se pueden calcular. Aun así no tenemos una descripción completa pues existen valores propios (y de cada valor propio una rama no acotada de espectro, [D3]) para los que existe una función propia que depende de  $t$  y  $\theta$ .

### Espectro de Fučík en una esfera N-dimensional.

Sea  $S^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} / |x| = 1\}$ , y vamos a estudiar la existencia de soluciones no triviales al problema

$$\Delta v + av^+ - bv^- = 0, \text{ en } S^N$$

para que esto tenga sentido se impone que  $N \geq 2$  aunque el caso  $N = 2$  ya a sido tratado, (como antes  $\Delta$  denota el operador de Laplace-Beltrami ahora en una variedad).

Estamos interesados en obtener el conjunto de los pares  $(a, b)$  para los que existe solución no trivial constante en cada paralelo, es decir,

$$v(x) = u(\langle\langle x, \vec{N} \rangle\rangle)$$



donde  $\vec{N} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$  es el Norte de la esfera y  $\ll \gg$  el producto escalar en  $\mathbb{R}^N$ .

En este caso aparece una ecuación semejante a la ecuación de Legendre, con dos condiciones  $B(T_i)$

$$\begin{cases} (1 - t^2)u'' - Ntu' + au^+ - bu^- = 0 \\ |u(-1)| < \infty, |u(1)| < \infty \end{cases}$$

la admisibilidad de dichas condiciones en frontera (la regularidad se obtiene de los Teoremas 1.18 y 1.22) se demuestra por un razonamiento similar al que se ha hecho en el caso de la superficie de revolución. Allí se ha utilizado que la ecuación indicial no depende de  $a$ , en este caso, en ambos extremos la ecuación indicial es

$$z^2 + \frac{N-2}{2}z = 0.$$

Además también se utilizó que la otra solución linealmente independiente es no acotada. La teoría de puntos singulares (ver [B-N]) nos da que existe una única solución analítica en un entorno del extremo correspondiente y una segunda solución que tiene un comportamiento singular como  $(t-T)^{\frac{2-N}{2}}$  o  $(t-T)^{\frac{2-N}{2}} \log |t-T|$ , (cada una de estas posibilidades depende de la paridad de  $N$ ), y  $T = \pm 1$ . El razonamiento para demostrar la analiticidad de las funciones  $u_a^1$  y  $u_a^2$  como función de ambas variables, es el mismo.

Por otro lado, aquí también se pueden considerar las siguientes variedades con borde

$$\{x \in \mathbb{R}^{N+1} / |x| = 1, \ll x, N \gg < R\}$$

o bien

$$\{x \in \mathbb{R}^{N+1} / |x| = 1, r < \ll x, N \gg < R\}$$

( $-1 < r < R < 1$ , son dos parámetros) al considerar estas variedades hay que distinguir entre los problemas de Dirichlet y Neumann quedando las siguientes posibilidades.

$$|u(-1)| < \infty, u(R) = 0,$$

o bien

$$u(r) = 0 = u(R),$$



Juan Campos Rodríguez.

cuando se tienen condiciones de Dirichlet y

$$|u(-1)| < \infty, u'(R) = 0,$$

o

$$u'(r) = 0 = u'(R)$$

cuando las condiciones son de Neumann.

En todos los casos se han sustituido condiciones  $B(T_i)$  por condiciones  $D(T_i)$  o  $N(T_i)$  en un extremo regular.

Se pueden, por tanto, utilizar los Teoremas 2.2 y 2.9 (2.10 para los problemas de Dirichlet) para describir el correspondiente subconjunto del espectro de Fučík para el operador de Laplace-Beltrami sobre  $S^N$  o sobre estas variedades con borde con las condiciones de contorno consideradas.

**Nota.** En todos estos ejemplos no escalares hemos visto que un subconjunto del espectro de Fučík está formado por curvas analíticas que cortan a la diagonal y se comportan de forma análoga a las hipérbolas que aparecen en el problema de Dirichlet o de Neumann para el operador  $u''$ . Sin embargo, como ya hemos dicho, en ninguno de los casos el espectro estudiado es el total. Quedan, por tanto, abiertos todos los problemas planteados en la introducción.



## Capítulo 3

### Un problema no homogéneo.

En este capítulo nos vamos a centrar sobre el estudio del siguiente problema no homogéneo

$$\begin{cases} u'' + au^+ - bu^- = g(t) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $g$  es una función en el espacio  $L^2(0, \pi)$  y  $a, b$  dos parámetros reales.

Esta ecuación se enmarca dentro de las ecuaciones de tipo

$$Lu + N(u) = g(x) \quad (3.2)$$

donde,  $L$  es un operador elíptico autoadjunto definido sobre un subespacio del espacio  $L^2(\Omega)$  ( $\Omega$  abierto acotado, regular de  $\mathbb{R}^N$ ) con valores en el espacio  $L^2(\Omega)$ ,  $g$  una función particular en dicho espacio, y  $N$  es el operador de Nemisky asociado a una función continua  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con un comportamiento asintóticamente lineal, es decir,

$$\lim_{u \rightarrow +(-)\infty} \frac{N(u)}{u} = a(b). \quad (3.3)$$

Antes de empezar a particularizar sobre el problema (3.1), conviene tener en cuenta algunas propiedades generales sobre la ecuación (3.2). Algunas de ellas necesitan ciertas restricciones sobre el operador  $L$ , no obstante nuestro estudio va dirigido a la ecuación (3.1) y este es un caso en donde el operador cumple todas las condiciones necesarias. Sea, por tanto  $L$  un operador "suficientemente bueno" ( tanto como el operador



$u \rightarrow u''$ , definido sobre  $H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)$ ; un ejemplo podría ser el operador de Laplace definido sobre  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

También son necesarias ciertas restricciones de regularidad sobre la función  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , condiciones que en el caso del problema (3.1), no se van a verificar pues la función  $N(u) = au^+ - bu^-$  es únicamente continua, pero sin embargo, usando la forma particular de la función  $N(u)$  en este caso, se podrían obtener resultados bastante semejantes.

Es de observar que, caso de tener regularidad, la condición (3.3) se sustituye por otra más fuerte,

$$\lim_{u \rightarrow +(-)\infty} N'(u) = a(b),$$

la cual tiene sentido si  $N$  es de clase 1 y también en nuestro caso particular. Comenzamos pues con la descripción de los casos simples en la ecuación (3.2), así como de alguna de la abundante bibliografía existente en el tema. Nos limitaremos a los resultados más relevantes y aquellos más próximos a nuestro estudio.

El problema más sencillo es cuando  $a = b$  y  $N$  es lineal. Usando la teoría lineal de operadores compactos, se obtiene que cuando  $a = b \notin \sigma(L) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \dots\}$ , espectro del operador lineal  $L$ , el problema (3.2) tiene una única solución. Si  $a = b \in \sigma(L)$  (3.2) es un problema resonante que se resuelve según la Alternativa de Fredholm (ver por ejemplo [B]).

Cuando  $a \neq b$ , pero la no linealidad no cruza el espectro, en el sentido de que el conjunto  $\{N'(u), u \in \mathbb{R}\}$  no contiene ningún valor propio, el problema (3.2) tiene una única solución. Este es el caso de que  $a$  y  $b$  sean menores que  $\lambda_1$ , o bien exista  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda_k < a, b < \lambda_{k+1}$ .

Cuando la no linealidad cruza el espectro del operador  $L$ , la situación se complica. No obstante, si uno de los valores propios que se cruzan es el primer valor propio, es decir, si  $b < \lambda_1 < a$  ( $a < \lambda_1 < b$  es semejante) la monotonía del operador se combina con técnicas de sub y super-soluciones y se puede obtener una descripción bastante concreta del rango del operador  $L + N$ . Estos resultados fueron obtenidos por Ambrosetti y Prodi en [A-P] cuando sólo se cruza el primer valor propio, es decir,  $b < \lambda_1 < a < \lambda_2$ , ( $N$  además de clase 2 y  $N''(u) > 0$ ) y por Dancer en [D2] cuando se cruzan más valores propios. En estos artículos se demuestra que el



conjunto

$$\{g \in C^{0,\alpha}(\Omega) / (3.2) \text{ tiene exactamente una solución}\}$$

es una hipersuperficie (infinito-dimensional) que divide a  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  en dos abiertos  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  tales que, para cada  $g \in \Lambda_2$ , (3.2) tiene al menos 2 soluciones y para cada  $g \in \Lambda_1$ , (3.2) no tiene solución.

El método para demostrar estos resultados es considerar  $g(x) = f(x) + he_1(x)$ , donde  $e_1(x)$  es la función propia normalizada asociada al primer valor propio y  $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  fija, y se demuestra la existencia de un valor  $h_0 \in \mathbb{R}$  tal que el problema (3.2) tiene una solución si  $h = h_0$ , al menos dos si  $h > h_0$  y ninguna si  $h < h_0$ . Un estudio efectuado por Costa, DeFigueiredo y Srikanth en [C-F-S], muestra que cuando  $b < 1 < k^2 < a < (k+1)^2$ , entonces el problema (3.1) (problema escalar) con  $g(t) = f(t) + h \text{sen}(t)$ , ( $f \in L^2(0, \pi)$  fija) tiene exactamente  $2k$  soluciones para valores  $h$  grandes. Observar que  $\text{sen}(t)$  es la primera función propia para este problema y que la condición sobre  $a$  y  $b$  implica el cruce de exactamente  $k$  valores propios ( $\sigma(L) = \{k^2/k \in \mathbb{N}\}$  en este caso). Su idea es normalizar la ecuación (3.1) dividiendo por  $h > 0$ , obteniendo el problema

$$\begin{cases} v'' + av^+ - bv^- = \text{sen } t + \frac{1}{h}f(t), \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

ahora este problema lo ven como una perturbación del problema

$$\begin{cases} v'' + av^+ - bv^- = \text{sen } t, \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

demuestran que este último problema tiene exactamente  $2k$  soluciones y que los problemas (3.4) y (3.5) tienen el mismo número de soluciones.

Continuando con el problema (3.2) se observa que cuando  $(a, b) \in (\lambda_1, +\infty)^2$ , es decir, cuando la no linealidad cruza otros valores propios y no cruza el primero, el conocimiento del problema (3.2) es escaso. En principio, uno de los factores a tener en cuenta es el espectro de Fučík, pero, como ya hemos dicho, no se tiene una descripción total de dicho conjunto en ningún caso no escalar. Además, es posible la aparición de soluciones que son degeneradas y de otro tipo de patologías. No obstante, existen resultados generales aprovechando el conocimiento del espectro de Fučík en las zonas cerca de la diagonal. Estos estudios fueron hechos



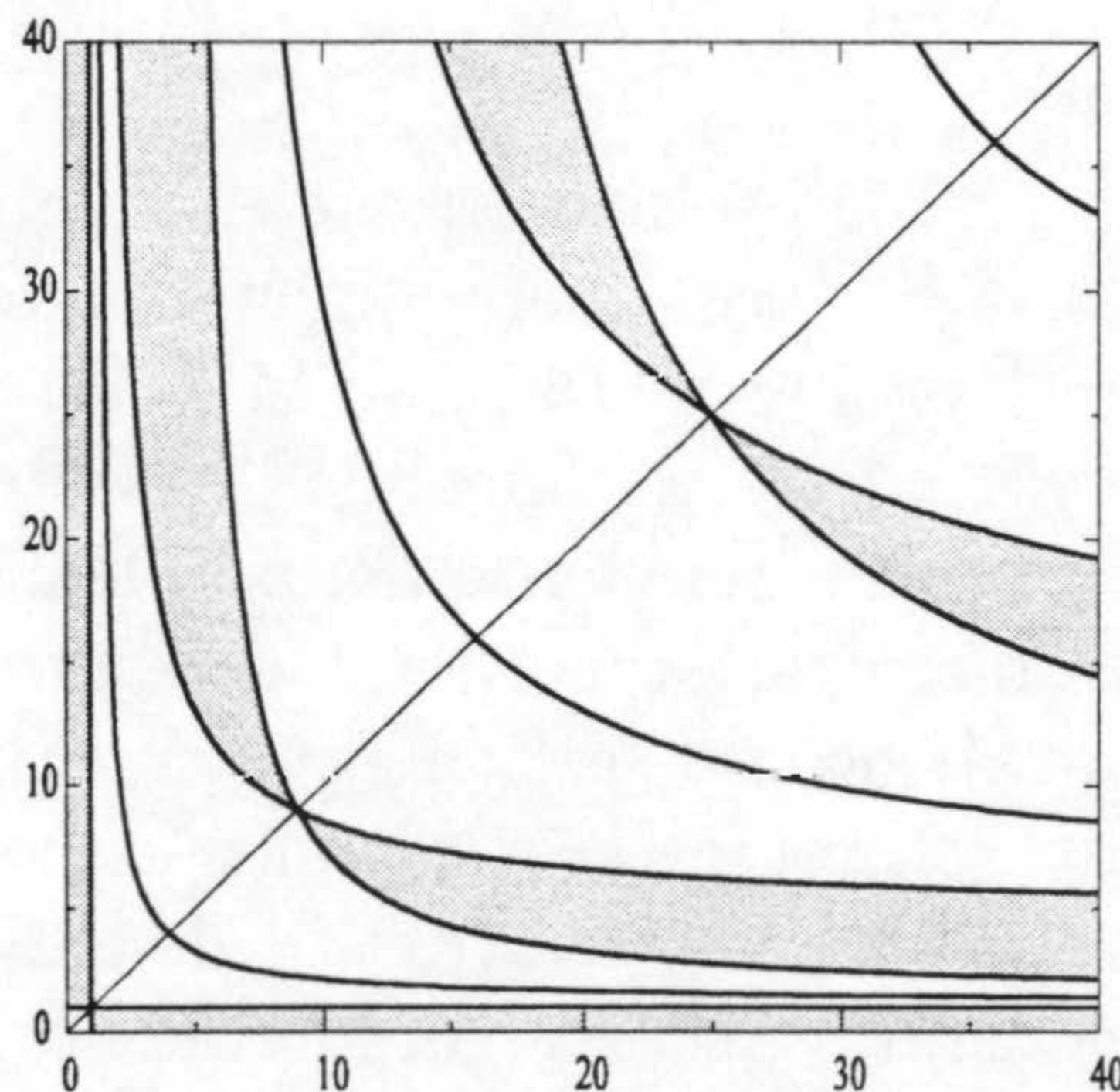
por Ruf, [Ru2] y se limitan al caso de que la no linealidad sólo cruza un valor propio,  $\lambda_{k-1} < a < \lambda_k < b < \lambda_{k+1}$ , y además dicho valor propio es simple.

Para acabar con el problema (3.2) comentar que el caso  $a$  o  $b$  iguales a  $\lambda_1$  es un caso resonante que parece responder mejor a otro tipo de técnicas. (Véase [Ro-L] y las referencias incluidas.)

Cuando estudiamos el problema escalar (3.1), nos encontramos con que en este caso tenemos la descripción del espectro de Fučík, (ver [F]). Comentamos como este conocimiento del conjunto  $\Sigma$  nos ayuda al estudio de (3.1).

En principio, como ya hemos dicho, la existencia de cotas a priori para la ecuación (3.1) está garantizada siempre que el par  $(a, b)$  no esté en el espectro. En estos casos, está definido el grado en una bola suficientemente grande del espacio  $L^2(0, \pi)$ . Además, dicho grado coincide con el índice de la solución  $u \equiv 0$  para la ecuación (3.1) con  $g(t) \equiv 0$ . Con todo esto, se tiene que si el índice de la solución  $u \equiv 0$  del problema homogéneo ( $g \equiv 0$ ) es no cero, (3.1) tiene solución para cualquier  $g \in L^2(0, \pi)$ .

Es conocido que dicho índice es cero en las zonas entre dos ramas que vengan del mismo valor propio de la diagonal principal y es distinto de cero en el resto, ver [D1]. Estas zonas son las zonas sombreadas del dibujo,





En este capítulo vamos a estudiar el siguiente problema no homogéneo

$$\begin{cases} u'' + au^+ - bu^- = f(t) + h, & t \in (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

donde  $f \in L^2(0, \pi)$ ,  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$  (recordar que  $\lambda_1 = 1$  es el primer valor propio para este problema) y  $h \in \mathbb{R}$ .

En el vamos a estudiar la existencia y multiplicidad de soluciones para valores de  $h$  muy grandes ( $h \rightarrow +\infty$ ) o muy pequeños ( $h \rightarrow -\infty$ ). El propósito de este estudio es mostrar la complejidad del rango del operador  $u'' + au^+ - bu^-$  con condiciones de Dirichlet para los distintos pares  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$ .

Vamos a mostrar que el número de soluciones para  $|h|$  suficientemente grande, depende, no sólo de la posición del par  $(a, b)$  respecto del espectro de Fučík, sino también de la posición del par respecto a unas ramas de parámetros para las que existen soluciones degeneradas que vamos a mostrar.

Costa en [C] continuando el trabajo de [C-F-S], realiza un estudio para el problema (3.1) con  $g(t) = f(t) + h \sin t$ . En él se trata también el caso  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$ , dado que el autor no controla totalmente las ramas de bifurcación, sólo puede obtener el número exacto en algunas de las regiones. En otras regiones sólo se pueden dar estimaciones sobre el número de soluciones, en relación a su posición con respecto al espectro de Fučík. Observar que nosotros estamos trabajando con la función constante 1 que no es una función propia.

El estudio de la ecuación (3.6) para valores grandes de  $|h|$  se va a hacer siguiendo la línea de [C-F-S] y [C].

Sea  $u$  solución de (3.6). Si llamamos  $v = hu$ ,  $v$  es solución de la ecuación

$$v'' + av^+ - bv^- = \frac{1}{h}f(t) + 1,$$

si  $h$  es positivo, ó

$$v'' + bv^+ - av^- = \frac{1}{h}f(t) + 1,$$



Juan Campos Rodríguez.

si  $h$  es negativo, y por supuesto  $v(0) = v(\pi) = 0$ . Además, cuando  $|h|$  tiende a infinito,  $\|\frac{1}{h}f\|_{L^2}$  es pequeño. Por tanto vamos a estudiar el número de soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} u'' + au^+ - bu^- = 1 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

así como la persistencia de dichas soluciones frente a pequeñas perturbaciones del término independiente.

En lo sucesivo y para simplificar la notación, vamos a efectuar un cambio en la denominación de los parámetros y vamos a trabajar con la ecuación

$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = f(t) + h \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $f$  y  $h$  son como en (3.6), y al igual que antes  $a$  y  $b$  mayores que 1. Con estos cambios, la ecuación límite anterior queda

$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = 1, \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Nos referiremos al espectro de Fučík  $\Sigma$ , como el conjunto de pares  $a, b > 0$  tales que el problema

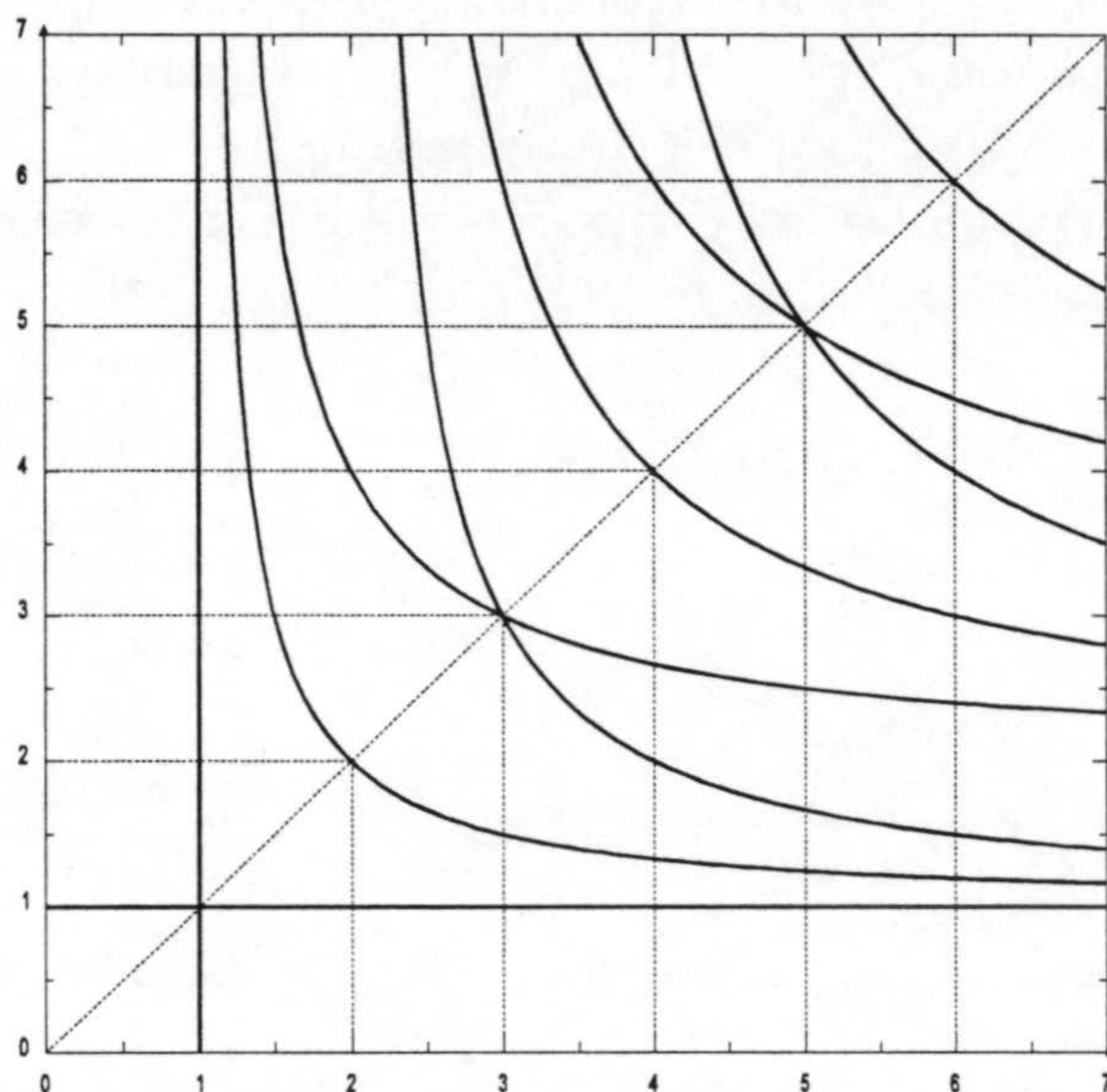
$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

tiene solución no trivial. Tras el cambio de parámetros se obtiene que dicho espectro está compuesto de las hipérbolas

$$\begin{cases} \frac{n}{a} + \frac{n+1}{b} = 1; \\ \frac{n+1}{a} + \frac{n}{b} = 1; \\ \frac{n}{a} + \frac{n}{b} = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , junto con las rectas  $a = 1$  y  $b = 1$ . Por último comentar que los cortes con la diagonal (valores propios) tienen lugar en los números  $n = 1, 2, 3, \dots$  (ver figura siguiente)





Con esta reescalación de los parámetros conseguimos evitar tratar en todo momento con raíces cuadradas.

### 3.1 La ecuación límite.

El propósito de esta sección es estudiar el conjunto de soluciones del problema (3.8) en función de  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$ . En concreto, estamos interesados en caracterizar la existencia de solución de (3.8).

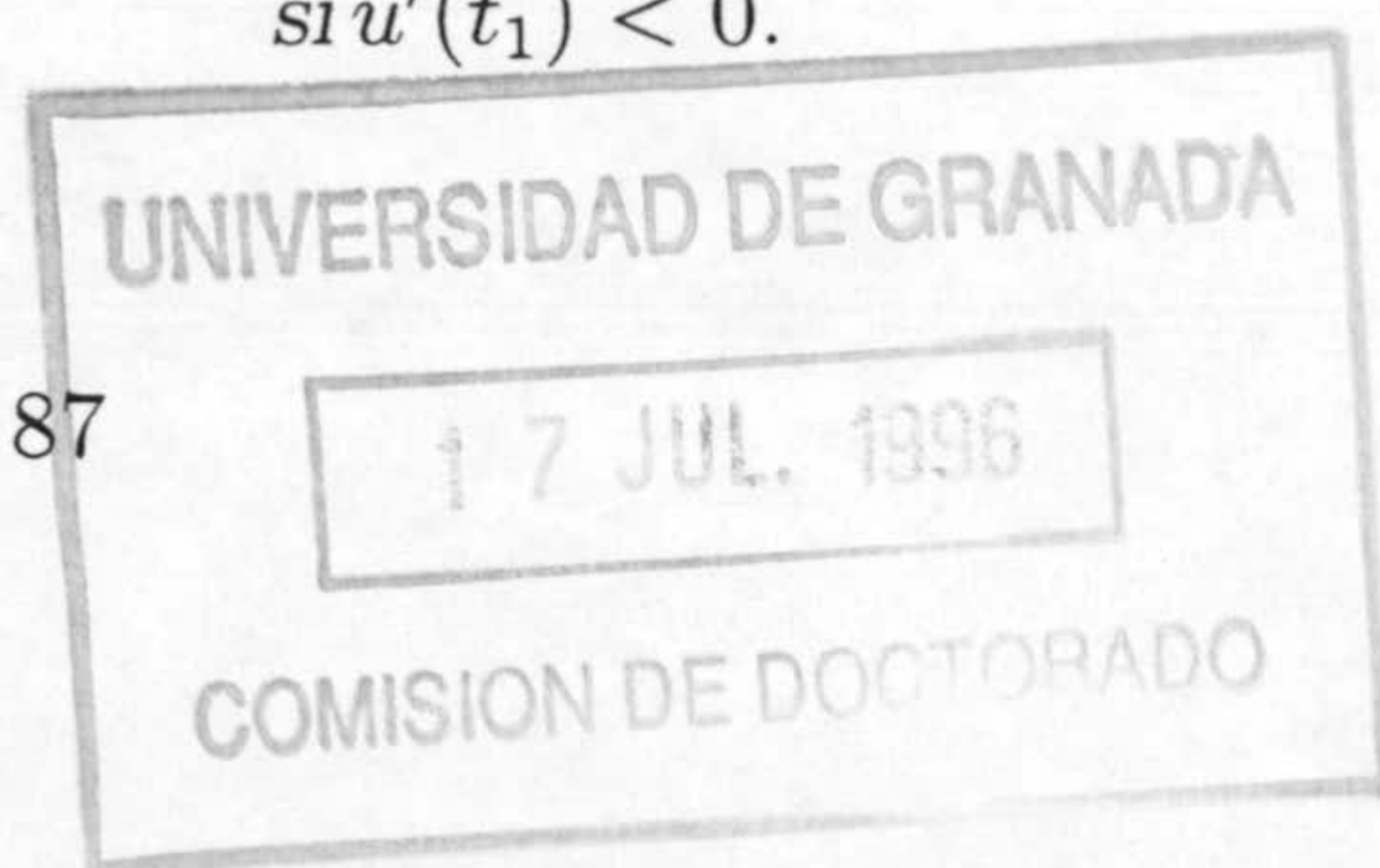
**Proposición 3.1.** *Dada la ecuación*

$$u'' + \lambda^2 u = 1, \quad \lambda > 0,$$

*entonces toda solución que se anule en un punto lo hace en infinitos. Además si  $t_1 < t_2$  son dos ceros consecutivos de una solución  $u(t)$  y  $s = |u'(t_1)|$  entonces*

$$t_2 - t_1 = \begin{cases} \frac{2}{\lambda}(\pi - \operatorname{arctg}(\lambda s)), & \text{si } u'(t_1) \geq 0 \\ \frac{2}{\lambda} \operatorname{arctg}(\lambda s), & \text{si } u'(t_1) < 0. \end{cases}$$

*además  $u'(t_2) = -u'(t_1)$ .*





Juan Campos Rodríguez.

Demostración. Si  $u(t) = 0$ , entonces  $u''(t) = 1$ , luego los ceros de cualquier solución son siempre aislados. Además de la solución general, se obtiene que las soluciones son  $\frac{2\pi}{a}$  periódicas, luego, si una solución de las ecuación anterior se anula en un punto lo hace en infinitos.

Consideremos primeramente que  $u'(t_1) \geq 0$ . Entonces  $u$  verifica  $u(t_1) = 0$  y  $u'(t_1) = s$ , luego necesariamente

$$u(t) = \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos(\lambda(t - t_1))) + \frac{s}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda(t - t_1)).$$

Sea  $\rho > 0$  y  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$  tal que

$$\begin{aligned} \rho \cos(\theta) &= \frac{1}{\lambda^2}, \\ \rho \operatorname{sen}(\theta) &= \frac{s}{\lambda}, \end{aligned}$$

entonces, usando las fórmulas de adición,  $u$  se escribe como

$$\frac{1}{\lambda^2} - \rho \cos(\lambda(t - t_1) + \theta)$$

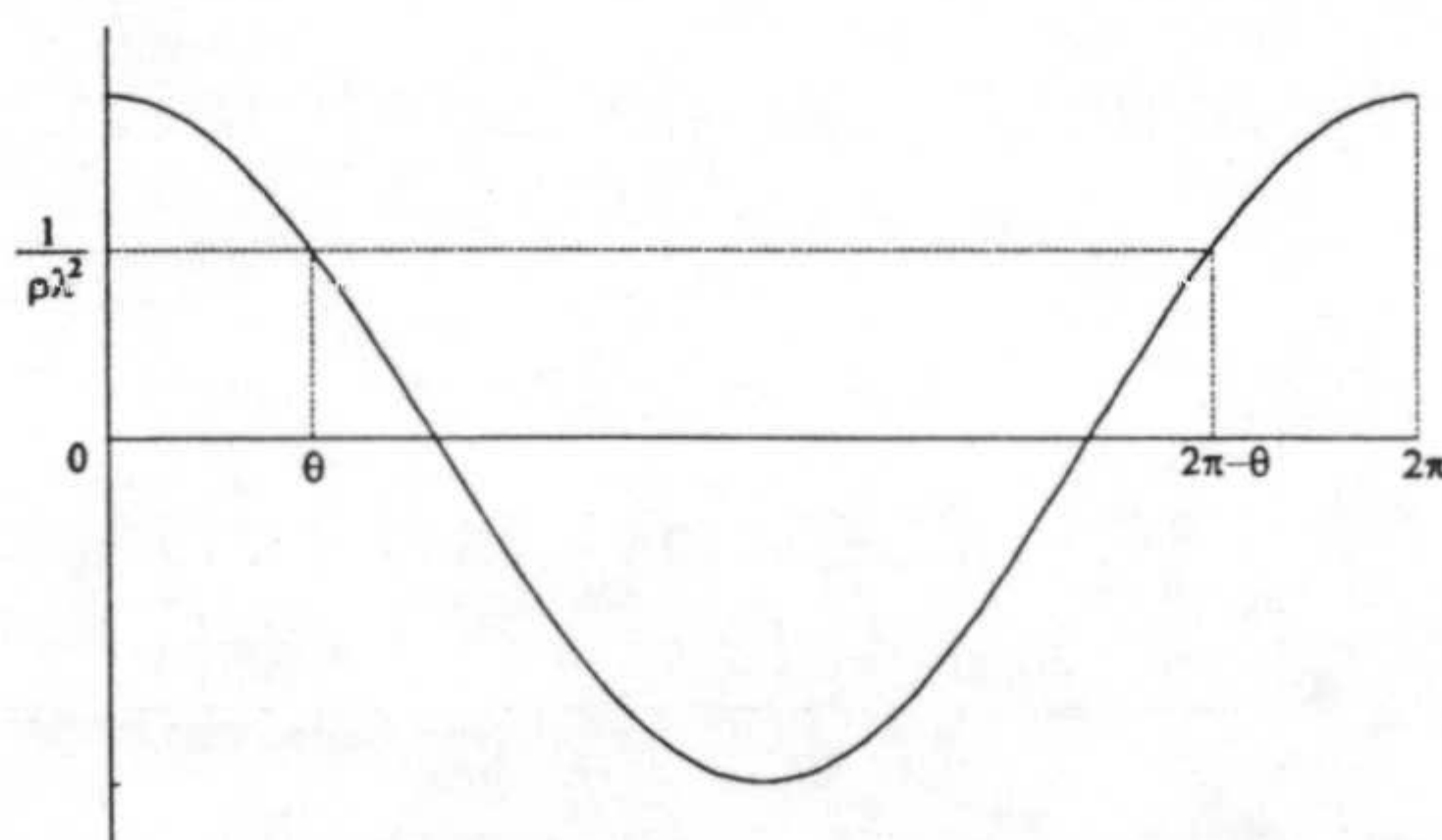
y los ceros están en las soluciones de la ecuación

$$\cos(\lambda(t - t_1) + \theta) = \frac{1}{\rho\lambda^2}.$$

Si  $t = t_1$ ,  $u(t_1) = 0$ , luego

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\rho\lambda^2},$$

representando gráficamente tenemos,





así, la siguiente solución se obtiene cuando

$$\lambda(t - t_1) + \theta = 2\pi - \theta$$

y, por hipótesis es  $t_2$ . Sustituyendo  $t = t_2$  y despejando,

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi - \theta}{\lambda}.$$

Por último, por construcción de  $\theta$ , se obtiene que

$$\operatorname{tg}(\theta) = \lambda s,$$

eso, unido a que  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ , nos dan la tesis de la Proposición.

Si estamos en el otro caso, es decir  $u'(t_1) < 0$  entonces  $u(t_1) = 0$  y  $u'(t_1) = -s$ , luego

$$u(t) = \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos(\lambda(t - t_1))) - \frac{s}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda(t - t_1)),$$

tomando como antes

$$\begin{aligned} \rho \cos(\theta) &= \frac{1}{\lambda^2}, \\ \rho \operatorname{sen}(\theta) &= \frac{s}{\lambda}, \end{aligned}$$

obtenemos ahora que

$$u(t) = \frac{1}{\lambda^2} - \lambda \cos(\lambda(t - t_1) - \theta)$$

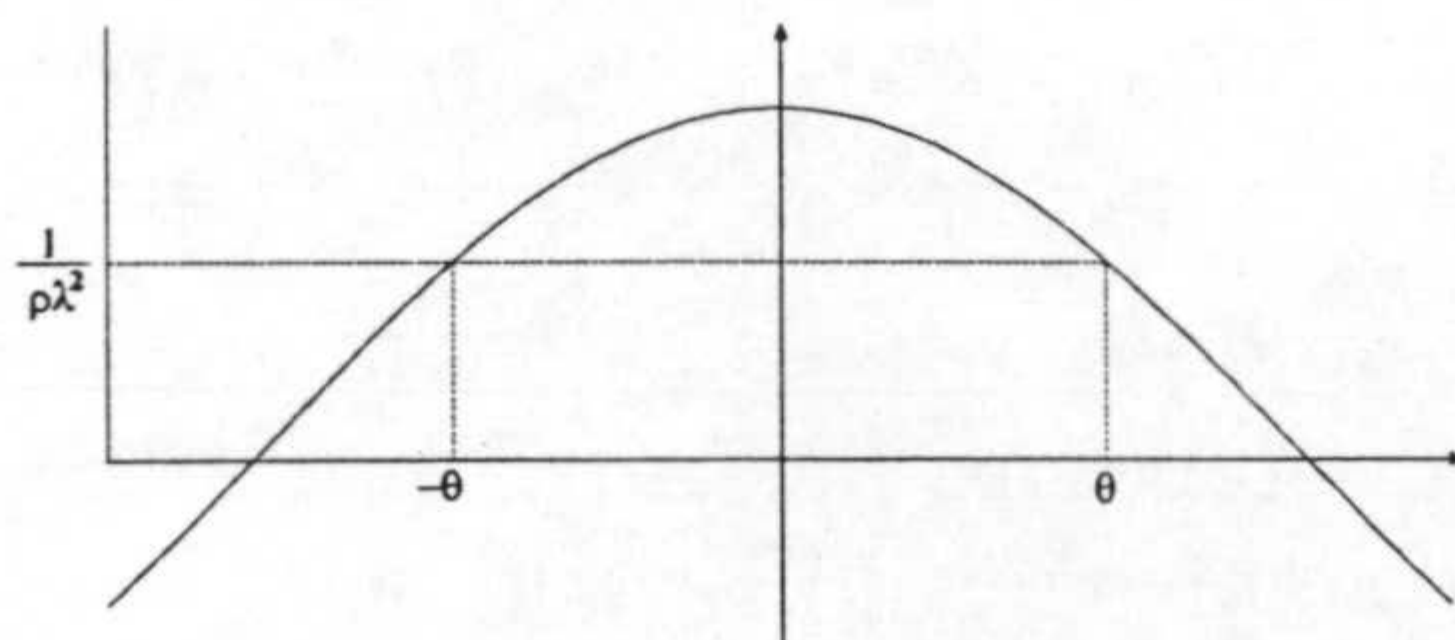
y los ceros de  $u$  son las soluciones de

$$\cos(\lambda(t - t_1) - \theta) = \frac{1}{\rho\lambda^2}.$$

Al igual que antes,  $t = t_1$  es solución, luego

$$\cos(-\theta) = \frac{1}{\rho\lambda^2},$$

ahora gráficamente





Juan Campos Rodríguez.

de donde la siguiente solución se obtiene cuando

$$\lambda(t - t_1) - \theta = \theta.$$

Sustituyendo  $t = t_2$ ,  $\theta = \arctg(\lambda s)$  y despejando se obtiene la tesis de la Proposición.

Por último, usando la expresión de  $u$  como

$$u(t) = \frac{1}{\lambda^2} - \rho \cos(\lambda(t - t_1) \pm \theta),$$

se observa que hay una simetría respecto a la recta  $t = \frac{t_1+t_2}{2}$ , de donde

$$u'(t_1) = -u'(t_2).$$

(♣)

**Definición 3.2.** Se definen las siguientes funciones

$$\begin{aligned}\phi_1(a; s) &= \frac{2}{a}(\pi - \arctg(as)), \\ \phi_2(b; s) &= \frac{2}{b}(\pi - \arctg(bs)).\end{aligned}$$

En principio  $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Con estas funciones vamos a hacer una descripción de la forma de las soluciones de la ecuación

$$u'' + a^2u^+ - b^2u^- = 1. \quad (3.11)$$

Si  $u$  no se anula nunca entonces tiene que ser positiva, pues, caso de ser negativa, se obtendría que  $u''(t) > 0$ , luego sería convexa y una función convexa no puede permanecer siempre debajo de una recta.

Si  $u$  se anula en un punto  $t_0$ , y además  $u'(t_0) = 0$ , por unicidad del problema de valores iniciales,

$$u(t) = \frac{1}{a^2}(1 - \cos(a(t - t_0))),$$

teniendo una solución que se anula en los números  $t_0 + \frac{2n\pi}{\lambda}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entre cada uno de los ceros tenemos una función positiva y en cada uno de los ceros la gráfica corta tangencialmente al eje.



Si en algún  $t_0$ ,  $u(t_0) = 0$  y  $u'(t_0) \neq 0$  entonces, por la Proposición 3.1 vuelve a anularse en un segundo punto  $t_1$  dado por

$$t_1 = \begin{cases} t_0 + \phi_1(a; s), & \text{si } u'(t_0) > 0, \\ t_0 + \phi_2(b; s), & \text{si } u'(t_0) < 0, \end{cases}$$

donde  $s = |u'(t_0)|$ , pero además,  $u'(t_1) = -u'(t_0) \neq 0$ , con lo que volvería a anularse en un punto  $t_2$  pero ahora si  $u'(t_0) > 0$  entonces  $u'(t_1) < 0$  y viceversa. Además,  $s = |u'(t_1)|$  que es el mismo valor, luego

$$t_2 = t_0 + \phi_1(a; s) + \phi_2(b; s).$$

Con este razonamiento vamos a tener una sucesión de ceros

$$\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots$$

en todos ellos  $|u'(t_i)| = |u'(t_0)|$  y además

$$t_{i+1} - t_i = \begin{cases} \phi_1(a; s), & \text{si } u'(t_i) > 0, \\ \phi_2(b; s), & \text{si } u'(t_i) < 0, \end{cases}$$

donde  $s = |u'(t_i)|$ .

Para poder razonar con este tipo de soluciones vamos a hablar en términos de saltos. Sea  $t_1 < t_2$  dos ceros consecutivos de una solución  $u$ , se dice que  $u$  tiene un **salto positivo** en  $(t_1, t_2)$  si  $u(t) > 0$ ,  $\forall t \in (t_1, t_2)$ , esto es equivalente a que  $u'(t_1) \geq 0$ . Se dice que  $u$  en  $(t_1, t_2)$  tiene un salto negativo si  $u(t) < 0$ ,  $\forall t \in (t_1, t_2)$ ; lo que es equivalente a que  $u'(t_1) < 0$ . En virtud de la Proposición 3.1, la longitud de un salto positivo es  $\phi_1(a; s)$  y la longitud de un salto negativo es  $\phi_2(b; s)$ . Además, cualquier solución de (3.11), o tiene todos los saltos positivos, o bien se intercalan saltos positivos con saltos negativos.

Para simplificar la notación  $\phi_1$  y  $\phi_2$  sólo vamos a expresarlas como función de  $s$ , los valores  $a$  y  $b$  se supondrán los correspondientes a la ecuación que se considere en cada momento.

Con toda esta descripción el siguiente Lema es evidente.

**Lema 3.3.** *El problema (3.8) tiene solución con  $n \geq 1$  saltos positivos si y sólo si para algún  $s$  se verifica alguna de las siguientes relaciones*

- 1)  $n\phi_1(s) + (n - 1)\phi_2(s) = \pi$
- 2)  $n\phi_1(s) + n\phi_2(s) = \pi$
- 3)  $n\phi_1(s) + (n + 1)\phi_2(s) = \pi.$



**Notas.** 1. Es fácil mostrar que (3.8) tiene solución negativa en  $(0, \pi)$  si y sólo si  $b \leq 1$ , es decir fuera del cuadrante  $(1, +\infty)^2$  que es la zona en la cual estamos interesados. Por tanto si  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$ , toda solución tiene al menos un salto positivo.

2. Si  $s > 0$  verifica la relación 1) del Lema entonces la correspondiente solución de (3.8) se obtiene al considerar la solución de la ecuación (3.11), verificando

$$u(0) = 0, u'(0) = s.$$

Por otro lado si se verifica la relación 3) del mismo Lema la solución de (3.8) se obtiene partiendo de la condición inicial  $u(0) = 0, u'(0) = -s$ . Sin embargo, si  $s > 0$  verifica la relación 2) de Lema, las dos soluciones de la ecuación diferencial (3.11), cada una de ellas verificando  $u(0) = 0, u'(0) = \pm s$ , son soluciones al problema (3.8).

3. Si  $s = 0$ , verifica alguna de las ecuaciones 1), 2), 3) entonces verifica las tres relaciones y la solución con  $n$  saltos positivos es la misma

$$u(t) = \frac{1}{a^2}(1 - \cos(at)),$$

además esta solución aparece si y sólo si  $a = 2n$ .

### 3.2 Persistencia de las soluciones.

Como ya hemos dicho vamos a analizar la persistencia frente a pequeñas perturbaciones de las soluciones de (3.8). La herramienta a utilizar es el grado de Leray-Schauder. Aunque esta teoría es bien conocida, vamos a concretar algunas definiciones.

Sea  $G : L^2(0, \pi) \rightarrow H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$ , el operador de Green asociado al problema de Dirichlet para el operador diferencial  $Lu = -u''$ , es decir: dado  $f \in L^2(0, \pi)$ , se define  $u = G(f)$  como la solución del problema de Poisson

$$\begin{cases} -u'' = f(t), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

En estas condiciones, el problema

$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = f(t), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$



es equivalente a la ecuación

$$u = G(a^2u^+ - b^2u^- - f).$$

Dado que la función

$$u \rightarrow G(a^2u^+ - b^2u^- - f)$$

vista desde  $H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$  en si mismo es completamente continua, la función

$$H(u) = u - G(a^2u^+ - b^2u^- - f)$$

es de tipo Leray-Schauder y si  $u \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$ , es una solución aislada de la ecuación

$$H(u) = 0, \quad (3.12)$$

se puede hablar del índice de Leray-Schauder de dicha solución,

$$\text{index}_H(u).$$

Este número define la persistencia de las soluciones en el sentido de que si  $H_\lambda$  es una gama continua de operadores de Leray-Schauder con  $\lambda \in \mathbb{R}$  o  $\lambda \in I$  siendo  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ , entonces, si para algún  $\lambda_0$  tenemos una solución  $u_0$  tal que

$$\text{index}_{H_{\lambda_0}}(u_0) \neq 0,$$

existe  $\varepsilon > 0$  tal que para cualquier  $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$  existe  $u_\lambda$  verificando

$$H_\lambda(u_\lambda) = 0,$$

y además

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} u(\lambda) = u_0.$$

Para estimar este índice vamos a utilizar el método de tiro:

Sea  $u(t, s)$  la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = f(t) \\ u(0) = 0, u'(0) = s \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.13)$$

entonces, existe una equivalencia entre las soluciones  $u$  de (3.12) y las soluciones  $s$  de la ecuación

$$P(s) = u(\pi, s) = 0. \quad (3.14)$$

Es fácil observar que  $s$  es una solución aislada de (3.14), si y sólo si  $u(\cdot, s)$  es una solución aislada de (3.12), de hecho se demuestra:



Juan Campos Rodríguez.

**Lema 3.4.** Sea  $s$  una solución aislada de (3.14) y sea  $u = u(\cdot, s)$  la correspondiente solución (necesariamente aislada) de (3.12). Entonces

$$\text{index}_P(s) = \text{index}_H(u)$$

donde el índice de la izquierda es el usual índice de Brouwer en dimensión finita.

La demostración de este Lema se deduce de los resultados en [K-Z]

**Definición 3.5.** Una solución de (3.8) se dirá que es no degenerada si alguno de los índices del Lema anterior son distintos de cero.

**Lema 3.6.** Sea  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$  y  $s_0 > 0$  tales que existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $j \in \{n-1, n, n+1\}$  verificando

$$\begin{aligned} n\phi_1(s_0) + j\phi_2(s_0) &= \pi, \\ \frac{\partial}{\partial s} \{n\phi_1(s) + j\phi_2(s)\}_{s=s_0} &\neq 0. \end{aligned}$$

Entonces, la función  $u$  solución de (3.11) que verifica  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = s_0$ , si  $j = n-1$  ó  $n$ , ó bien  $u'(0) = -s_0$  si  $j = n$  ó  $n+1$  es una solución no degenerada de (3.8).

Demostración. Vamos a suponer que  $j = n-1$  ó  $j = n$  y que  $u$  es solución de (3.11) verificando  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = s_0$ . El otro caso es análogo. Sea  $u(t, s)$  definido por (3.13), para  $s > 0$ . Es trivial que

$$u(n\phi_1(s) + j\phi_2(s), s) = 0 \tag{3.15}$$

pues  $n\phi_1(s) + j\phi_2(s)$  es el  $(n+j)$ -ésimo cero de  $u$ .

De los resultados de dependencia continua respecto a condiciones iniciales se tiene  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, s)$  existe y es continua (ver [Ha]). Además, dada la forma de las soluciones (véase la descripción después de la Proposición 3.1) se obtiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n\phi_1(s) + j\phi_2(s), s) = \pm s$$

Por otro lado,  $\frac{\partial u}{\partial s}(t; s)$  existe y es continua, (ver Teorema A.1 del apéndice), luego derivando la expresión (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(n\phi_1(s) + j\phi_2(s), s) \frac{\partial}{\partial s} \{n\phi_1(s) + j\phi_2(s)\} + \\ + \frac{\partial u}{\partial s}(n\phi_1(s) + j\phi_2(s), s) = 0, \end{aligned}$$



y al aplicar la hipótesis del Lema,

$$P'(s_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\pi, s_0) \neq 0.$$

Por tanto,  $s_0$  es una solución aislada de (3.14) y

$$\text{index}_P(s_0) = \pm 1.$$

(♣)

**Proposición 3.7.** Si  $a = 2n \neq b$ , la solución  $u(t) = \frac{1}{4n^2}(1 - \cos(2nt))$  de (3.8) es no degenerada.

Demostración. Vamos a estimar  $P(s)$  para valores  $s$  próximos a cero, para ello vamos a localizar  $\pi$  entre dos ceros consecutivos, sea  $b < a = 2n$ , el caso  $b > a = 2n$  es muy semejante. Si  $b < a = 2n$ , y  $s > 0$  entonces  $u(t, s)$  tiene dos ceros consecutivos en

$$\begin{aligned} t_1(s) &= n\phi_1(s) + (n-1)\phi_2(s) \\ t_2(s) &= n\phi_1(s) + n\phi_2(s). \end{aligned}$$

Derivando las expresiones y usando que  $b < a$ , se comprueba que para valores  $s$  positivos y próximos a cero,  $t_1(s)$  es estrictamente decreciente y  $t_2(s)$  estrictamente creciente, como además

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} t_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} t_2(s) = \pi,$$

obtenemos que para valores  $s$  positivos y próximos a cero

$$t_1(s) < \pi < t_2(s),$$

luego estamos en medio de un salto negativo y  $P(s) < 0$ .

Si  $s < 0$ , entonces  $\pi$  se encuentra, por un razonamiento similar, entre

$$(n-1)\phi_1(-s) + n\phi_2(-s) < \pi < n\phi_1(-s) + n\phi_2(-s),$$

para valores de  $s$  próximos a cero, luego estamos en medio de un salto positivo y

$$P(s) > 0.$$



Se ha probado que  $s = 0$  es una solución aislada de (3.14) y tiene índice  $-1$ .

(♣)

**Nota.** Es de destacar la diferencia entre las soluciones no degeneradas de (3.8) que se obtienen en el Lema 3.6 y la Proposición 3.7. Una solución  $u$  no degenerada por el Lema 3.6, se puede ver como una solución de (3.12), donde el funcional  $H$  que es de clase 1 en un entorno (en el espacio  $H^2(0, \pi)$ ) de  $u$ , (hay que usar únicamente que los ceros de  $u$  son simples), y en este caso la diferencial  $DH_u$  es un isomorfismo, estas soluciones se llaman **soluciones geoméricamente no degeneradas**.

La solución no degenerada que nos da la Proposición 3.7 verifica que existe  $DH_u$ , en sentido Gateaux, pero no es un isomorfismo, estas soluciones se dirán **topológicamente no degeneradas**.

Ahora vamos a presentar la existencia de soluciones degeneradas. Sea  $n \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3$ , denotamos por  $\psi_n^i(s) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , la función definida por

$$\psi_n^i(s) = n\phi_1(s) + (n + i - 2)\phi_2(s).$$

Vamos a analizar las gráficas de  $\psi_n^i$ . Sea  $n = 2, 3, 4, \dots$ , y  $r$  en el intervalo  $(0, \sqrt{\frac{n-1}{n}})$ , definimos

$$\begin{aligned} a_n(r) &= 2n + \frac{2}{\pi} \left( \frac{n-1}{r} \arctg \left( \frac{r}{\sqrt{n-1-nr^2}} \right) - n \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{n-1-nr^2}} \right) \right) \\ b_n(r) &= ra_n(r). \end{aligned}$$

Sea ahora  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $r \in (\sqrt{\frac{n+1}{n}}, +\infty)$ , definimos

$$\begin{aligned} a^n(r) &= 2n + \frac{2}{\pi} \left( \frac{n+1}{r} \arctg \left( \frac{r}{\sqrt{nr^2-(n+1)}} \right) - n \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{nr^2-(n+1)}} \right) \right) \\ b^n(r) &= ra^n(r). \end{aligned}$$

Con estas funciones hacemos la siguiente descripción. Empezamos por  $\psi_n^1$ .



Capítulo 3. Un problema no homogéneo.

i) Si  $\frac{b}{a} \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ , entonces  $\psi_n^1$  es estrictamente decreciente con derivada negativa, y además

$$\begin{cases} \psi_n^1(0) = \frac{2n\pi}{a}, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_n^1(s) = \frac{n\pi}{a} + \frac{(n-1)n}{b}. \end{cases} \quad (3.16)$$

ii) Si  $\frac{b}{a} < \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ , entonces  $\psi_n^1$  tiene un único extremo en  $s_0 = \frac{1}{\sqrt{(n-1)a^2 - nb^2}}$  y además es un mínimo que toma el valor

$$\psi_n^1(s_0) = \frac{\pi}{a} a_n(r)$$

donde  $r = \frac{b}{a}$ . Observar que si  $n = 1$ , no existe esta posibilidad. Además en este caso también se tienen los valores en los extremos dados en (3.16).

La descripción de  $\psi_n^2$  es muy simple. Si  $a \neq b$ ,  $\psi_n^2$  es estrictamente monótona con derivada no nula, si  $a = b$ , entonces  $\psi_n^2$  es constante, y en cualquiera de los casos se verifica

$$\begin{cases} \psi_n^2(0) = \frac{2n\pi}{a}, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_n^2(s) = n\pi \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \end{cases} \quad (3.17)$$

Por último la función  $\psi_n^3$  verifica:

i) Si  $\frac{b}{a} \leq \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ , entonces  $\psi_n^3$  es estrictamente creciente con derivada no nula, además

$$\begin{cases} \psi_n^3(0) = \frac{2n\pi}{a}, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_n^3(s) = \frac{n\pi}{a} + \frac{(n+1)\pi}{a}. \end{cases} \quad (3.18)$$

ii) Si  $\frac{b}{a} > \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ , entonces  $\psi_n^3$  tiene un único punto crítico en  $s_0 = \frac{1}{\sqrt{nb^2 - (n+1)a^2}}$  y es un máximo que alcanza el valor

$$\psi_n^3(s_0) = \frac{\pi}{a} a^n(r),$$

donde  $r = \frac{b}{a}$ . Además se tienen también los valores en los extremos dados por (3.18).

Con toda esta información, el Lema 3.6 y la Proposición 3.7, se observa que la única posibilidad de existencia de solución degenerada es:



Cuando  $a = b = 2n$ , entonces se obtiene la rama

$$u(t) = \frac{1}{2n^2}(1 - \cos(2nt)) + s \operatorname{sen}(2nt) \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

que no es ni siquiera aislada.

O bien, una solución correspondiente a un valor  $s_0$  que sea un valor crítico de alguna función  $\psi_n^j$ .

En este último caso se observa que si igualamos  $\psi_n^j(s_0) = \pi$ , obtenemos que si  $j = 1$ ,  $a = a_n(\frac{b}{a})$  y  $b = b_n(\frac{b}{a})$  o si  $j = 3$ ,  $a = a^n(\frac{b}{a})$  y  $b = b^n(\frac{b}{a})$ , por tanto, sólo en las ramas del plano

$$\left\{ (a_n(r), b_n(r)) / r \in \left(0, \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) \right\} \cup \left\{ (a^n(r), b^n(r)) / r \in \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}, \infty\right) \right\};$$

pueden aparecer soluciones degeneradas.

**Proposición 3.8.** *La correspondiente solución en este último caso es efectivamente degenerada.*

Demostración. Veamos que cuando  $j = 1$ , dicha solución es degenerada. Cuando  $j = 3$  se razona de forma semejante.

En este caso  $\psi_n^1$  tiene un mínimo estricto en  $s_0$ , luego si  $s$  está próximo a  $s_0$  y es distinto de él,

$$n\phi_1(s) + (n-1)\phi_2(s) > \frac{\pi a(r)}{a}.$$

Además si  $(a, b)$  está en la curva  $(a_n(r), b_n(r))$  queda

$$n\phi_1(s) + (n-1)\phi_2(s) > \pi.$$

El cero anterior a este de la solución de (3.11), está en  $(n-1)\phi_1(s) + (n-1)\phi_2(s)$  y dado que se verifica

$$(n-1)\phi_1(s_0) + (n-1)\phi_2(s_0) < n\phi_1(s_0) + (n-1)\phi_2(s_0) = \pi,$$

para valores  $s$  próximos a  $s_0$  y distintos de él

$$(n-1)\phi_1(s) + (n-1)\phi_2(s) < \pi < n\phi_1(s) + (n-1)\phi_2(s).$$



Así, si  $s$  está próximo a  $s_0$  y es distinto de él,  $\pi$  está en medio de un salto positivo, luego

$$u(\pi, s) > 0$$

y, por tanto,

$$\text{index}_{u(\pi, \cdot)}\{s_0\} = 0.$$

La otra demostración es análoga.

(♣)

**Lema 3.9.** Las funciones  $a_n(r)$  y  $a^n(r)$  verifican

- i)  $2n - 1 < a_n(r) < 2n$ ,  $r \in (0, \sqrt{\frac{n-1}{n}})$ ,
- ii)  $2n < a^n(r) < 2n + 1$ ,  $r \in (\sqrt{\frac{n+1}{n}}, +\infty)$ .

Demostración. Consideramos la función

$$F(n, r) = \frac{n-1}{r} \arctg\left(\frac{r}{\sqrt{n-1-nr^2}}\right) - n \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{n-1-nr^2}}\right)$$

definida en el abierto

$$\left\{ (n, r) \in (2, +\infty) \times (0, +\infty) / r < \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right\}$$

si derivamos  $F(n, r)$  con respecto a  $n$  se obtiene

$$\frac{1}{r} \arctg\left(\frac{r}{\sqrt{n-1-nr^2}}\right) - \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{n-1-nr^2}}\right)$$

usando que  $\frac{1}{r} \arctg(rs) > \arctg(s)$  si  $s > 0$  y  $r < 1$ , se obtiene que  $F$  es estrictamente creciente en  $n$ . Al tomar límite cuando  $n$  tiende a infinito a  $r$  fijo en  $F(n, r)$ , se obtiene cero, luego

$$F(n, r) < 0.$$

Para estimar  $F$  inferiormente, dado que es estrictamente creciente en  $n$ , tenemos que analizar el comportamiento de  $F$  en la frontera inferior del abierto donde está definida, la cual tiene dos partes

$$\left\{ (2, r) / r \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \right\} \cup \left\{ \left(n, \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) / n \geq 2 \right\}.$$



Juan Campos Rodríguez.

En la primera parte de la frontera,

$$F(2, r) = \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \left( \frac{r}{\sqrt{1-2r^2}} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{1-2r^2}} \right),$$

y usando de nuevo que  $\frac{1}{r} \operatorname{arctg}(rs) > \operatorname{arctg}(s)$  si  $s > 0$  y  $r < 1$ , queda

$$F(2, r) > - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{1-2r^2}} \right) > -\frac{\pi}{2}.$$

En el otro caso

$$F \left( n, \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right) = \lim_{(p,r) \rightarrow (n, \sqrt{\frac{n-1}{n}})} F(p, r) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sqrt{n(n-1)} - n}{2} \right)$$

y cuando  $n = 2$

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \pi > -\frac{\pi}{2}.$$

Con esto tenemos

$$-\frac{\pi}{2} < F(n, r) < 0.$$

y la desigualdad 1) es evidente. La otra demostración se obtiene de forma similar.

(♣)

### 3.3 Número exacto de soluciones.

En esta sección vamos a contar el número de soluciones del problema (3.8). En virtud del Lema 3.3, el problema (3.8) tiene solución con  $n$  saltos positivos si y sólo si para algún  $i = 1, 2, 3$ , existe un  $s$  tal que

$$\psi_n^i(s) = \pi. \quad (3.20)$$

Además el problema de determinar el número exacto de soluciones de (3.8), se reduce a determinar, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $i = 1, 2, 3$ , el número de soluciones en  $s$  de la ecuación (3.20) y observar que:

”Si  $a = 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , la solución  $s = 0$  de las ecuaciones (3.20) para  $i = 1, 2, 3$  y  $n = p$  dan la misma solución de (3.8). Si  $s \neq 0$  y  $i = 2$ , cada solución de (3.20) se corresponde con dos soluciones  $u$  distintas de (3.8).”



Vamos a tener también en cuenta cuando las soluciones son o no degeneradas.

Introducimos la siguiente notación. Denotamos por  $Z_p^i$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2$  o  $3$ , las siguientes zonas del cuadrante  $(1, +\infty) \times (1, +\infty)$ :

$$Z_p^i = \{(a, b) \in (1, +\infty)^2 / \text{ existe } s > 0 \text{ tal que } \psi_p^j(s) = \pi\}.$$

Para simplificar el número de casos a considerar, para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ , vamos también a denotar

$$I(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } x < y, \\ \emptyset & \text{si } x = y, \\ (y, x) & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Con estas notaciones se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.10.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , y  $a \in (2n - 1, 2n + 1]$ . Sea  $p \in \mathbb{N}$  con  $p \neq n$ ,  $i = 1, 2, 3$ , entonces

$$(a, b) \in Z_p^i \iff 1 \in I\left(\frac{2p}{a}, \frac{p}{a} + \frac{p+i-2}{b}\right)$$

Además por cada zona  $Z_p^i$  con  $i = 1$  ó  $3$ , en donde esté contenido el par  $(a, b)$  existe exactamente una solución de (3.8) y por cada zona  $Z_p^2$  en donde este contenido  $(a, b)$ , existen exactamente dos soluciones de (3.8). Todas estas son no degeneradas.

Demostración. A la vista de la descripción que tenemos de las funciones  $\psi_p^j$ , se observa que la condición

$$\pi \in I\left(\frac{2p\pi}{a}, \frac{p\pi}{a} + \frac{p+i-2}{b}\pi\right) \quad (3.21)$$

implica la existencia de una única solución de la ecuación (3.20), de donde la implicación de derecha a izquierda así como la última conclusión de la Proposición, son evidentes. Veamos que si

$$\pi \notin I\left(\frac{2p\pi}{a}, \frac{p\pi}{a} + \frac{p+i-2}{b}\pi\right) \quad (3.22)$$

y la ecuación (3.20) tiene solución, entonces  $p = n$ . Si  $i = 2$ , para que se verifique (3.22) y (3.20) para algún  $s$  es necesario que  $a = b$  y  $\psi_p^2(s) = \frac{2p\pi}{a}$



Juan Campos Rodríguez.

constante, por tanto, (3.20) implica que  $a = 2p$  y tal y como se toma  $a$  en  $(2n - 1, 2n + 1]$ , no hay más remedio que  $a = 2n$ , luego  $p = n$ .

Si  $i = 1$ , y se verifica (3.22) junto con (3.20), no hay más remedio, en función de la descripción de  $\psi_p^1$ , que

$$\min_{s \in \mathbb{R}^+} \psi_p^1(s) \leq \pi \leq \min \left\{ \frac{2p\pi}{a}, \frac{p\pi}{a} + \frac{p-1}{b} \pi \right\}, \quad (3.23)$$

luego

$$\frac{\pi}{a} a_p \left( \frac{b}{a} \right) \leq \pi,$$

de donde

$$a_p \left( \frac{b}{a} \right) \leq a.$$

Por el Lema 3.9,  $2p - 1 < a$  y dado que  $a \leq 2n + 1$ , se obtiene

$$2p - 1 < 2n + 1$$

luego

$$p \leq n.$$

Volviendo de nuevo a (3.23),

$$\pi \leq \frac{2p\pi}{a}$$

de donde

$$a \leq 2p$$

y como

$$2n - 1 < a \leq 2p$$

se obtiene que  $n \leq p$ , llegando a  $n = p$ , que es una contradicción. Si  $i = 3$  la demostración es muy semejante.

(♣)

**Nota.** Si  $2n - 1 < a \leq 2n + 1$ ,  $i = 1, 2, 3$  y

$$1 \in I \left( \frac{2n}{a}, \frac{n}{a} + \frac{n+i-2}{b} \right)$$



entonces  $(a, b) \in Z_n^i$ . Además la solución de (3.20) es única y se corresponde con una solución (o soluciones si  $i = 2$ ) no degeneradas de (3.8).

Analizamos el número exacto de soluciones de (3.8). Sea  $(a, b) \in (1, +\infty)^2$ , siempre se puede encontrar  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$2n - 1 < a \leq 2n + 1.$$

Vamos a considerar el caso  $2n - 1 < a < 2n$ . El caso  $a = 2n$  es un caso limite a este en el que hay que considerar dos cosas: primero, que la solución  $s = 0$  a las tres ecuaciones

$$\psi_n^i(s) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

se corresponde con la misma solución de (3.8), y segundo, que cuando  $b = a = 2n$  aparece un continuo de soluciones dado por la expresión (3.19). El caso,  $2n < a \leq 2n + 1$ , tendría un razonamiento similar.

**Caso 1.** Supongamos que

$$\frac{n}{a} + \frac{n-1}{b} < 1.$$

Antes de empezar a subdividir en apartados, vamos a hacer las siguientes consideraciones generales:

Directamente de la Proposición 3.10, se obtiene que

$$(a, b) \notin Z_p^j$$

siempre  $p \leq n - 2$ , o bien  $p = n - 1$  y  $j = 1$  ó  $2$ . Por otro lado, usando la nota después de dicha Proposición, se obtiene

$$(a, b) \in Z_n^1.$$

Entre todas las zonas comprobadas hemos obtenido exactamente una solución. El estudio de las otras zonas dependerá de la posición particular que presente el par  $(a, b)$ , sin embargo se puede decir lo siguiente: Es posible que  $\psi_n^3$  no sea estrictamente monótona, sin embargo no es posible que la ecuación

$$\psi_n^3(s) = \pi,$$



Juan Campos Rodríguez.

nos dé dos soluciones, es decir, que

$$\max \left\{ \frac{2n\pi}{a}, \frac{n}{a} + \frac{n+1}{b} \right\} < \pi < \frac{\pi}{a} a^n \left( \frac{b}{a} \right),$$

pues en ese caso

$$\frac{2n\pi}{a} < \pi$$

y esto es contradictorio.

Por tanto, en todos los casos que restan, para comprobar que  $(a, b) \in Z_p^j$ , sólo hay que comprobar que

$$\pi \in I \left( \frac{2p\pi}{a}, \frac{p\pi}{a} + \frac{(p+i-1)\pi}{b} \right).$$

Con todas estas anotaciones las siguientes estimaciones se reducen a una comprobación.

**1.1.** Si  $\frac{n}{a} + \frac{n-1}{b} < 1 < \frac{n-1}{a} + \frac{n}{b}$ , entonces

$$(a, b) \in Z_{n-1}^3 \cap Z_n^1 \text{ y } (a, b) \notin Z_n^2 \cup Z_n^3 \cup \bigcup_{p>n} (Z_p^1 \cup Z_p^2 \cup Z_p^3),$$

luego tenemos exactamente dos soluciones de (3.8).

**1.2.** Si  $\frac{n-1}{a} + \frac{n}{b} \leq 1 < \frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ , entonces

$$(a, b) \notin Z_{n-1}^3 \cup Z_n^2 \cup Z_n^3 \cup \bigcup_{p>n} (Z_p^1 \cup Z_p^2 \cup Z_p^3),$$

por tanto tenemos exactamente una solución de (3.8) ( $(a, b) \in Z_n^1$ ).

**1.3.** Si existe  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq n$  tal que  $\frac{p}{a} + \frac{p}{b} < 1 \leq \frac{p}{a} + \frac{p+1}{b}$ , entonces

$$(a, b) \in \bigcap_{k=n}^{p-1} (Z_k^1 \cap Z_k^2 \cap Z_k^3) \cap Z_p^1 \cap Z_p^2$$



y

$$(a, b) \notin Z_{n-1}^3 \cup \bigcup_{k>p} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3) \cup Z_p^3$$

por tanto tenemos exactamente  $4(p - n) + 3$  soluciones de (3.8).

1.4.- Si existe  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq n$  tal que  $\frac{p}{a} + \frac{p+1}{b} < 1 \leq \frac{p+1}{a} + \frac{p}{b}$ , entonces

$$(a, b) \in \bigcap_{k=n}^p (Z_k^1 \cap Z_k^2 \cap Z_k^3)$$

y

$$(a, b) \notin Z_{n-1}^3 \cup \bigcup_{k>p} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3)$$

Por tanto (3.8) tiene exactamente  $4(p - n + 1)$  soluciones.

1.5. Si existe  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq n$  tal que  $\frac{p+1}{a} + \frac{p}{b} < 1 \leq \frac{p+1}{a} + \frac{p+1}{b}$ , entonces es fácil comprobar que  $a < 2n < b$ , (de hecho esto es cierto siempre que  $\frac{n-1}{a} + \frac{n}{b} \leq 1$  véase nota después de este caso), por tanto  $\frac{p}{a} + \frac{p+1}{b} < \frac{p}{a} + \frac{p+1}{b}$ , luego

$$(a, b) \in \bigcap_{k=n}^p (Z_k^1 \cap Z_k^2 \cap Z_k^3) \cap Z_{p+1}^1$$

y

$$(a, b) \notin Z_{n-1}^3 \cup Z_{p+1}^2 \cup Z_{p+1}^3 \cup \bigcup_{k>p+1} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3),$$

tenemos exactamente  $4(p - n + 1) + 1$  soluciones de (3.8).

**Nota.** Si  $\frac{n-1}{a} + \frac{n}{b} < 1$ , es decir, quitando el caso 1.1 y usando que  $a < 2n$  obtenemos

$$b > 2 \frac{n^2}{n-1} > 2n$$

luego  $a < b$  y, por tanto, no es posible el subcaso

$$\frac{p+1}{a} + \frac{p}{b} < 1 < \frac{p}{a} + \frac{p+1}{b}.$$



Caso 2. Supongamos que

$$1 \leq \frac{n}{a} + \frac{n-1}{b}. \quad (3.24)$$

En este caso hay que hacer las siguientes consideraciones: de la Proposición 3.10, se obtiene fácilmente que

$$(a, b) \notin \bigcup_{k>n} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3)$$

y

$$(a, b) \in Z_{n-1}^3.$$

Vamos a hacer una primera distinción según las soluciones de  $n$  saltos positivos. En principio usando  $2n-1 < a$  y (3.24) se obtiene que  $b < 2n-1 < a$ , luego  $\psi_3^n$  y  $\psi_2^n$  son siempre estrictamente monótonas y

$$(a, b) \notin Z_n^3 \cup Z_n^2.$$

Por tanto, esta primera distinción se hará por la posición relativa respecto a  $Z_n^1$  que tiene ahora tres partes.

A) Si  $\sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{b}{a}$ , o bien  $\frac{b}{a} < \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ , y  $a_n(\frac{b}{a}) > a$  entonces la ecuación

$$\psi_1^n(s) = \pi,$$

no tiene ninguna solución pues

$$\begin{aligned} \frac{2n\pi}{a} &> \pi, \\ \frac{n\pi}{a} + \frac{(n-1)\pi}{b} &\geq \pi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

que son los valores de  $\psi_1^n$  en 0 y en  $\infty$ , y además, caso de que aparezca un mínimo, es decir,  $\frac{b}{a} < \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ , entonces

$$\min_{s \in \mathbb{R}^+} \psi_1^n(s) = \frac{\pi}{a} a_n\left(\frac{b}{a}\right) > \pi$$

luego la gráfica de  $\psi_1^n$  está siempre por encima de  $\pi$ . Por tanto no existe ninguna solución de (3.8) con  $n$  saltos.

B) Si  $a_n(\frac{b}{a}) = a$ , tenemos un caso muy particular: la función  $\psi_1^n$  toma el valor  $\pi$  exactamente en su valor mínimo, luego tenemos exactamente una solución con  $n$  saltos positivos y por la Proposición (3.8) es degenerada.



C) Si  $a > a_n(\frac{b}{a})$ , entonces

$$\pi > \frac{\pi}{a} a_n\left(\frac{b}{a}\right)$$

que es el valor mínimo de  $\psi_n^1$ , eso unido a (3.25) que siempre es cierto, nos dará que la ecuación

$$\psi_n^1(s) = \pi$$

tiene exactamente dos soluciones, correspondientes a dos soluciones de (3.8), con  $n$  saltos positivos, no degeneradas.

Con estas anotaciones se tienen los casos:

2.1.  $\frac{n-1}{a} + \frac{n-1}{b} \leq 1 \leq \frac{n}{a} + \frac{n-1}{b}$ , entonces

$$(a, b) \notin \bigcup_{k < n-1} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3) \cup Z_{n-1}^1 \cup Z_{n-1}^2.$$

(En  $Z_{n-1}^3$ , sabemos que está.) Entonces tenemos exactamente una solución que no tenga  $n$  saltos luego

- Si  $(a, b)$  verifica (A) existe exactamente una solución de (3.8).
- Si  $(a, b)$  verifica (B) existen dos soluciones (3.8) (una de ellas degenerada).
- Si  $(a, b)$  verifica (C) existen tres soluciones de (3.8).

2.2. Si existe  $p \leq n - 1$  tal que  $\frac{p-1}{a} + \frac{p}{b} \leq 1 < \frac{p}{a} + \frac{p}{b}$ , entonces

$$(a, b) \in Z_p^1 \cap Z_p^2 \cap \bigcap_{k=p+1}^{n-1} (Z_k^1 \cap Z_k^2 \cap Z_k^3),$$

y

$$(a, b) \notin \bigcup_{k < p} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3) \cup Z_p^3,$$

luego tenemos  $4(n - p) - 1$  soluciones de (3.8) que no tengan  $n$  saltos positivos, a estas se añaden las soluciones con  $n$  saltos positivos como en el caso anterior.



Juan Campos Rodríguez.

2.3. Si existe  $p \leq n - 1$  tal que  $\frac{p}{a} + \frac{p-1}{b} \leq 1 < \frac{p-1}{a} + \frac{p}{b}$ , entonces

$$(a, b) \in Z_{p-1}^3 \cap Z_p^2 \cap Z_p^3 \cap \bigcap_{k=p+1}^{n-1} (Z_k^1 \cap Z_k^2 \cap Z_k^3)$$

y

$$(a, b) \notin \bigcup_{k < p-1} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3) \cup Z_{p-1}^1 \cup Z_{p-1}^2 \cup Z_p^1,$$

luego tenemos  $4(n - p)$  soluciones que no tengan  $n$  saltos positivos, más las soluciones con  $n$  saltos positivos, como en los casos anteriores.

2.4. Si existe  $p \leq n - 1$  tal que  $\frac{p-1}{a} + \frac{p-1}{b} \leq 1 < \frac{p}{a} + \frac{p-1}{b}$ , entonces  $b < 2n - 1 < a$  y, por tanto,  $\frac{p}{a} + \frac{p-1}{b} < \frac{p-1}{a} + \frac{p}{b}$ , luego

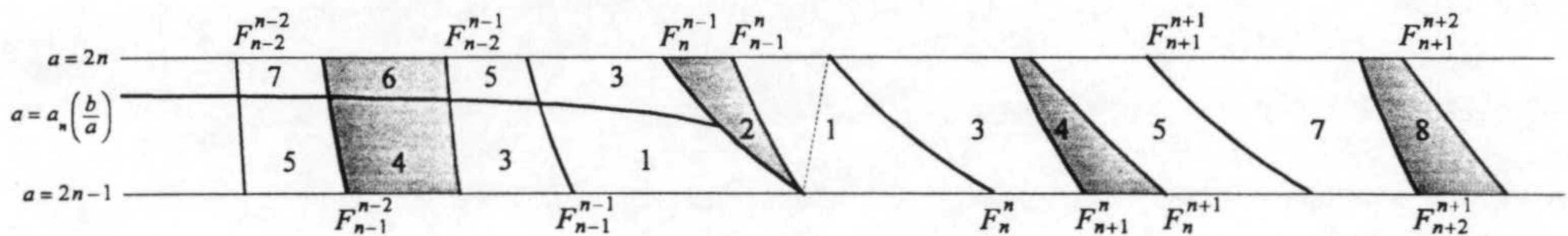
$$(a, b) \in Z_{p-1}^3 \cap \bigcap_{k=p}^{n-1} (Z_k^1 \cap Z_k^2 \cap Z_k^3)$$

y

$$(a, b) \notin \bigcup_{k < p-1} (Z_k^1 \cup Z_k^2 \cup Z_k^3) \cup Z_{p-1}^1 \cup Z_{p-1}^2.$$

Luego tenemos  $4(n - p) + 1$ , soluciones de (3.8) que no tienen  $n$  saltos positivos más la o las posibles soluciones con  $n$  saltos positivos.

Con estos datos se configura el diagrama



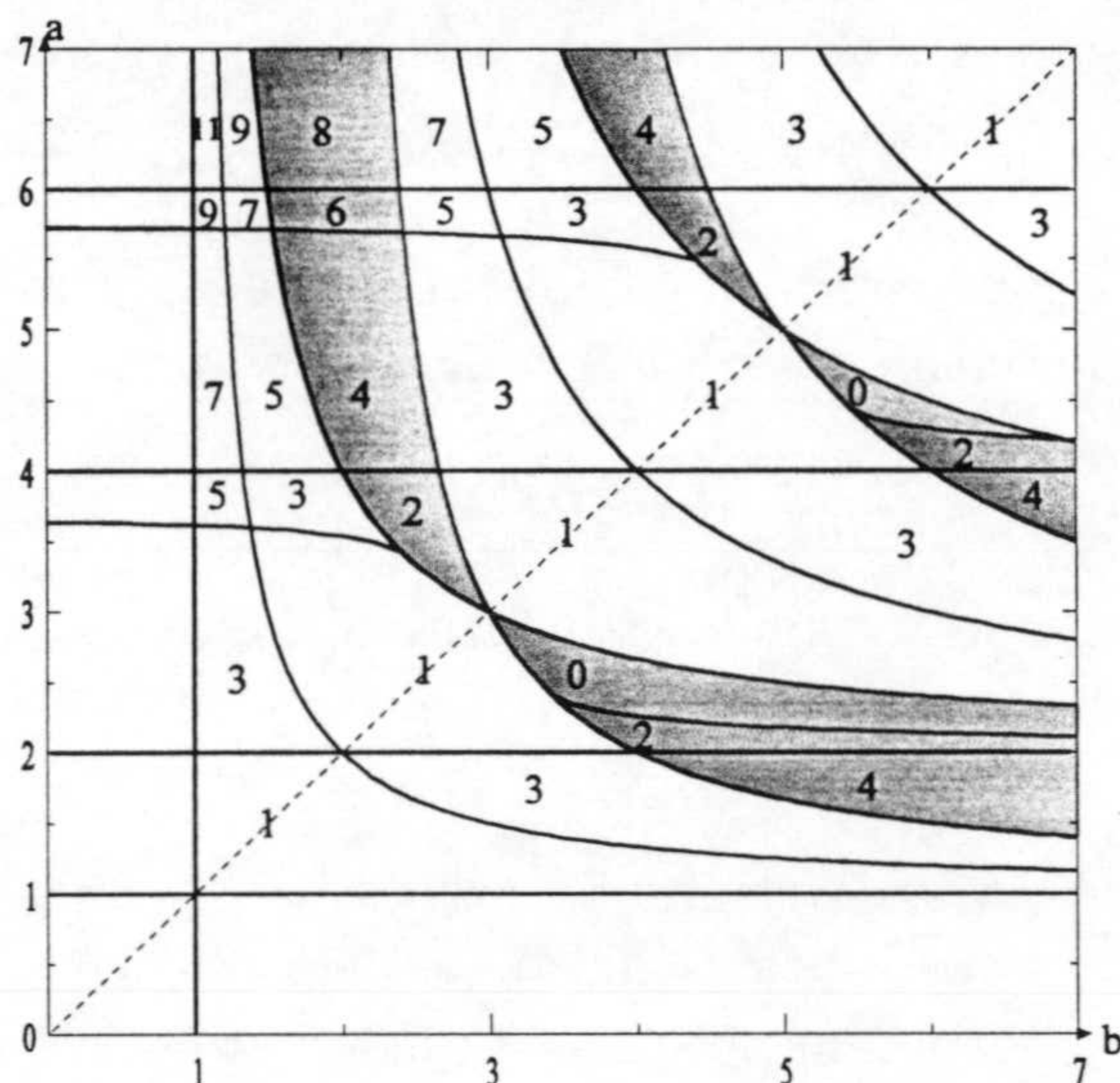
En este dibujo se observa el número de soluciones de la ecuación (3.8). Cada una de las curvas  $F_p^q$  se corresponde con aquella de ecuación

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = 1.$$



La línea de puntos representa la diagonal y las zonas sombreadas son los pares  $(a, b)$  tales que el grado total es cero.

Para acabar vamos a dar el siguiente gráfico, sin demostración acerca del número exacto de soluciones.



### 3.4 Estudio asintótico de una ecuación con un parámetro.

En esta sección vamos a estudiar el número de soluciones de la ecuación (3.7). Como ya hemos dicho, al efectuar el cambio  $v = hu$ , con  $h > 0$ , se obtiene la ecuación

$$\begin{cases} v'' + a^2 v^+ - b^2 v^- = 1 + \frac{1}{h} f(t) \\ v(0) = 0 = v(\pi). \end{cases} \quad (3.26)$$

**Proposición 3.11.** Sea  $(a, b)$  tal que:

- 1.-  $a \neq a_n(\frac{b}{a})$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$
- 2.-  $a \neq a^n(\frac{b}{a})$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
- 3.-  $a \neq 2n$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$
- 4.-  $(a, b) \notin \Sigma$ , (es decir no verifica (3.10),  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ).



Juan Campos Rodríguez.

Entonces, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cualquier  $h \in \mathbb{R}$  con  $|\frac{1}{h}| < \varepsilon_0$ , el problema (3.26) tiene exactamente el mismo número de soluciones que (3.8).

Demostración. Sea  $\mu = \frac{1}{h}$  y sea  $P(s, \mu) = u(\pi, s, \mu)$  donde  $u(t; s, \mu)$  es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = 1 + \mu h(t) \\ u(0) = 0, u'(0) = s. \end{cases} \quad (3.27)$$

Vamos a probar que existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\mu \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ , el número de soluciones en  $s$  de la ecuación

$$P(s, \mu) = 0 \quad (3.28)$$

es el mismo. Vamos a dividir la demostración en tres etapas.

1<sup>o</sup>. (Existencia de cotas a priori) Existen  $\varepsilon_1 > 0$  y  $M > 0$  tal que si  $|\mu| < \varepsilon_1$ , entonces toda solución  $s$  de (3.28) verifica que  $|s| < M$ . Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sucesión de valores  $\mu_n \rightarrow 0$  y  $s_n \rightarrow +\infty$  que son soluciones de la ecuación (3.28). Sea  $u_n(t) = u(t, \mu_n, s_n)$ , sea  $v_n(t) = \frac{1}{s_n}u_n(t)$ . Entonces,  $v_n$  es solución del problema

$$\begin{cases} v'' + a^2v^+ - b^2v^- = \frac{1}{s_n}(1 + \mu_n f(t)) \\ v(0) = 0, v'(0) = 1, \end{cases}$$

además,  $v_n(\pi) = 0$ . Dado que  $s_n \rightarrow \infty$ ,  $\|\frac{1}{s_n}(1 + \mu_n h(t))\|_{L^2} \rightarrow 0$  y tomando límite en la ecuación, se obtiene que  $v_n \rightarrow v$  en  $C^1[0, \pi]$ , donde  $v$  es solución de

$$\begin{cases} v'' + a^2v^+ - b^2v^- = 0 \\ v(0) = 0, v'(0) = 1, v(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

luego  $(a, b) \in \Sigma$  y por tanto tenemos una contradicción.

2<sup>o</sup>. Sean  $s_1, s_2, \dots, s_r$  las soluciones de (3.28) para  $\mu = 0$ , entonces existe un  $\varepsilon_2 > 0$  tal que si  $|\mu| < \varepsilon_2$  se verifica que existe un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}$ ,



conteniendo a  $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$  y funciones  $s_i : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , de forma que para cualquier  $\mu \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ ,  $s_1(\mu), s_2(\mu), \dots, s_r(\mu)$  son las únicas soluciones de (3.28) en  $U$ . (Cada solución  $s_i$  "bifurca" en exactamente una rama de soluciones).

Para demostrar esta etapa, hay que observar que hemos quitado la posibilidad de existencia de soluciones geoméricamente degeneradas, luego en todas ellas se verifica

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s_i, 0) \neq 0.$$

Por otro lado a consecuencia del Teorema A.1 demostrado en el apéndice, la función  $(s, \mu) \rightarrow P(s, \mu)$  es de clase 1, en un abierto conteniendo a los  $(s_i, 0)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Esto nos permite por el Teorema de la Función Implícita, para cada  $i$ , demostrar la existencia de entornos abiertos  $U_i \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , de  $(s_i, 0)$ , tal que la ecuación

$$P(s, \mu) = 0, \quad (s, \mu) \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2), \quad (3.30)$$

define una función  $s_i(\mu)$  de clase 1, además los pares  $(s_i(\mu), \mu)$  son las únicas soluciones de (3.30) en sus respectivos entornos. Tomando  $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$  se completa esta etapa.

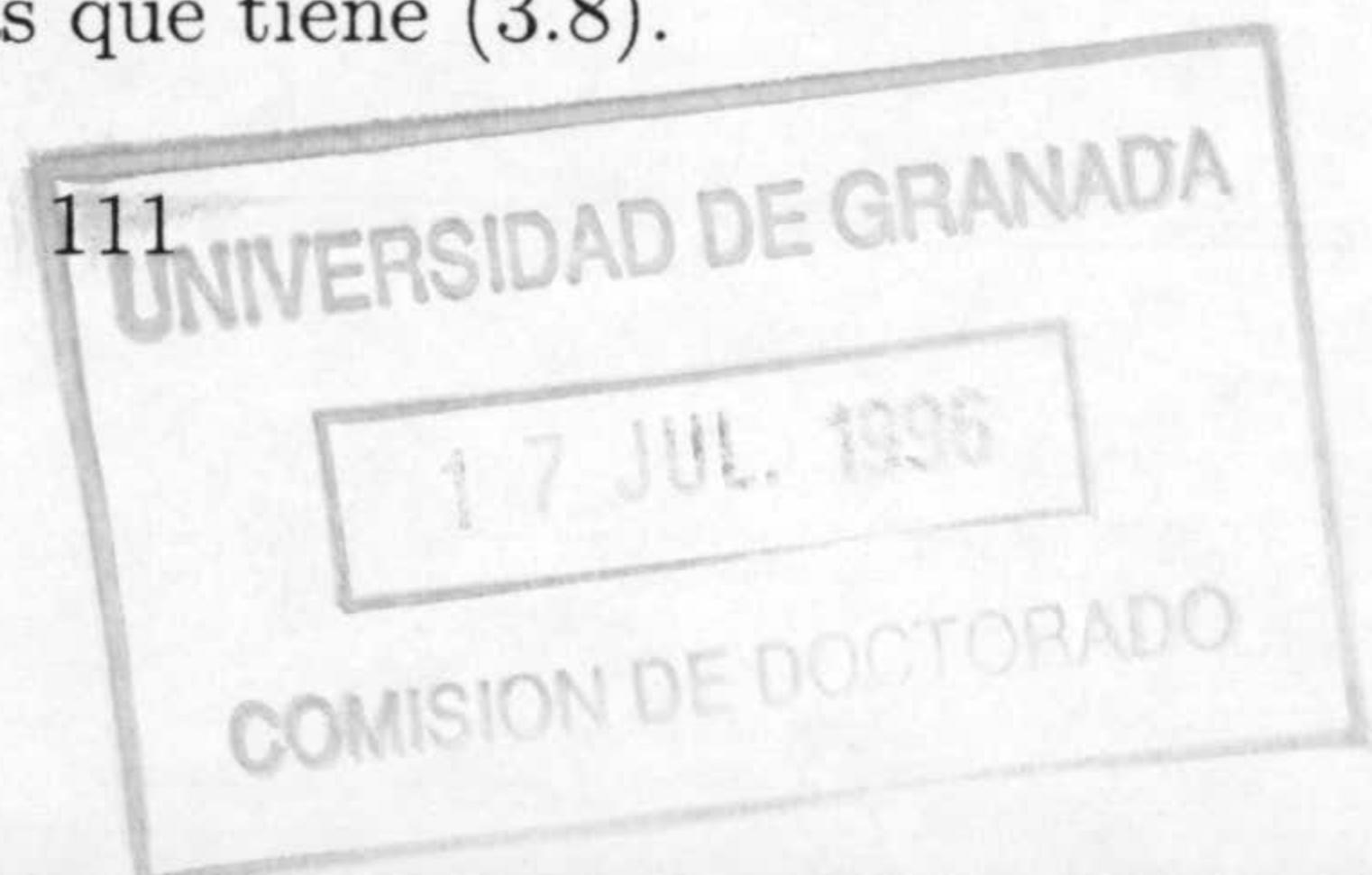
3<sup>o</sup>. Existe  $\varepsilon_3$ , tal que si  $|\mu| < \varepsilon_3$  la ecuación (3.28) no tiene solución si  $s \in B_M(0) \setminus U$ . (Las ramas de bifurcación son las únicas soluciones.)

Esto se deduce de que  $B_M(0) \setminus U$  es compacto y que para  $\mu = 0$ ,  $s_i \in U$ , para cualquier  $i = 1, \dots, r$ .

Combinando los resultados anteriores se obtiene la tesis de la Proposición.

(♣)

**Notas.** Si sólo tomamos las hipótesis 1 y 2 y además  $(a, b) \neq (2n, 2n)$   $n = 1, 2, 3, \dots$ , entonces todas las soluciones de (3.8) son topológicamente no degeneradas y por tanto el número de soluciones de (3.26) para  $|\frac{1}{h}| < \varepsilon_0$  es mayor que el número de soluciones de (3.8). Si sólo imponemos que  $(a, b) \neq (2n, 2n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , entonces sólo puede aparecer a lo más una solución degenerada, luego el número de soluciones de (3.26) para  $|\frac{1}{h}| < \varepsilon_0$ , es al menos una menos de las que tiene (3.8).





Juan Campos Rodríguez.

**Teorema 3.12.** Sea  $1 < b < a$ . Entonces existe  $h_0 \in \mathbb{R}$  tal que si  $h > h_0$ , la ecuación (3.7) tiene al menos una solución.

Demostración. Todo el problema, se reduce a encontrar una solución topológicamente no degenerada de (3.8). Veamos que tal solución existe:

Si  $a = 2n$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la solución nos la proporciona la Proposición 3.7. Sea por tanto  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $2n < a < 2(n+1)$  y ahora:

Si  $\frac{n}{a} + \frac{n+1}{b} > 1$ , entonces fácilmente se obtiene que

$$\frac{2n}{a} < 1 < \frac{n}{a} + \frac{n+1}{b}$$

y por tanto  $(a, b) \in Z_n^3$ .

Si  $\frac{n}{a} + \frac{n+1}{b} \leq 1$ , dado que  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  entonces

$$\frac{n+1}{a} + \frac{n}{b} < 1 < \frac{2(n+1)}{a}$$

y  $(a, b) \in Z_{n+1}^1$ , el que dicha solución es no degenerada se obtiene trivialmente del Lema 3.6.

(♣)

**Teorema 3.13.** Sea  $1 < b < a$  tal que existe  $p \in \mathbb{N}$  de forma que

$$\frac{p+1}{a} + \frac{p}{b} < 1 < \frac{p}{a} + \frac{p+1}{b} \quad (3.31)$$

y

$$\frac{b}{a} > \sqrt{\frac{p}{p+1}} \quad (3.32)$$

entonces existe  $h_0 < h_1$  tal que si  $h > h_1$  el problema (3.7) tiene exactamente dos soluciones y si  $h < h_0$  ninguna solución.

Demostración. Primero vamos a hacer una localización de los parámetros: Tras sustituir unas expresiones en otras se obtiene

$$2p < p + \sqrt{p(p+1)} < b < 2p + 1 \quad (3.33)$$



$$2p + 1 < a < p + \frac{(p + 1)\sqrt{p + 1}}{\sqrt{p}} < 2p + 2 \quad (3.34)$$

y empezamos la demostración.

Para demostrar la existencia de  $h_1$  vamos a utilizar la Proposición 3.11, observar que esta Proposición nos da este número de soluciones cuando  $h > 0$ . Empezamos por comprobar las hipótesis: usando (3.34) y el Lema 3.9 se observa que la única posibilidad de no verificarse alguna de las hipótesis 1 o 2 de la Proposición 3.11 es que

$$a_{p+1} \left( \frac{b}{a} \right) = a,$$

pero esta igualdad no puede darse pues, por (3.32),  $a_{p+1}(\frac{b}{a})$  no está definido. Las hipótesis 3 y 4 son inmediatas usando (3.34) y (3.31). Luego para  $h$  avanzado ( $h \geq h_1$ ) el número de soluciones de (3.7) coincide con el número de soluciones de (3.8), y este caso es el caso estudiado en 2.1 de la sección anterior con  $n = p + 1$ ; como dijimos entonces, (3.8) tiene exactamente una solución.

Para demostrar la existencia de  $h_0$  necesitamos estudiar el comportamiento de (3.7) cuando  $h \rightarrow -\infty$ . Para ello, efectuamos de nuevo el cambio  $v = hu$ , pero ahora con  $h < 0$ , obteniendo la ecuación

$$v'' + b^2v^+ - a^2v^- = 1 + \frac{1}{h}f(t).$$

Se observa que se han cambiado los papeles a  $a$  y  $b$ . Para evitar confusiones sea  $(a', b') = (b, a)$  entonces en función de (3.33) y (3.34) se obtiene

$$2p < a' < 2p + 1 < b' < 2p + 2 \quad (3.35)$$

además las hipótesis del Teorema implican que

$$\sqrt{\frac{p}{p+1}} < \frac{a'}{b'} < 1, \quad (3.36)$$

$$\frac{p}{a'} + \frac{p+1}{b'} < 1 < \frac{p+1}{a'} + \frac{p}{b'}. \quad (3.37)$$

Usando (3.35) y el Lema 3.9 se obtiene ahora que las hipótesis 1 y 2 de la Proposición (3.11) sólo pueden fallar cuando

$$a^p \left( \frac{b'}{a'} \right) = a',$$



pero, en virtud de 3.36, esta última igualdad tampoco es posible. Las hipótesis 3 y 4 de la Proposición 3.11 son triviales usando (3.35) y (3.37), luego en virtud de dicha Proposición, sólo quedaría comprobar que

$$\begin{cases} u'' + (a')^2 u^+ - (b')^2 u^- = 1, \\ u(0) = u'(\pi) = 0, \end{cases}$$

no tiene solución si  $(a', b')$  verifican (3.35), (3.36) y (3.37).

Usando (3.35) y (3.37) se observa que para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$1 \notin I\left(\frac{2k}{a'}, \frac{k}{a'} + \frac{k+i-2}{b'}\right), \quad (3.38)$$

y de la Proposición 3.10 se obtiene que  $(a', b') \notin Z_k^j$ ,  $\forall k \neq p$  y  $k = 1, 2, 3$ . Para el caso  $k = p$ , (3.38) nos dará que  $(a, b) \notin Z_p^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , si la correspondiente función  $\psi_p^j$  es estrictamente monótona, pero esto es siempre cierto para  $j = 2$ ; si  $j = 1$  ó  $3$ , nos lo garantiza (3.36).

(♣)

**Teorema 3.14.** *Sea  $1 < b < a$ , al igual que antes. Supongamos que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\frac{p+1}{a} + \frac{p}{b} < 1 < \frac{p}{a} + \frac{p+1}{b}$$

*y además  $b < 2p$ . Entonces, existe un  $h_0 \in \mathbb{R}$  tal que (3.7) tiene al menos cuatro soluciones si  $|h| > h_0$ .*

Demostración. Tras efectuar el cambio  $v = hu$ , se observa que todo el problema está en encontrar cuatro soluciones no degeneradas a los problemas

$$\begin{cases} v'' + a^2 v^+ - b^2 v^- = 1 \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

y

$$\begin{cases} v'' + b^2 v^+ - a^2 v^- = 1 \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

En el caso del problema (3.39) se obtiene sin dificultad que  $2p + 2 < a$ , luego  $(a, b) \in Z_p^3 \cap Z_{p+1}^2 \cap Z_{p+1}^3$ . Para (3.40) al igual que antes, poniendo  $(a', b') = (b, a)$  se obtiene que

$$\begin{aligned} a' &< 2p, \\ \frac{p}{a'} + \frac{p+1}{b'} &< 1 < \frac{p+1}{a'} + \frac{p}{b'}, \end{aligned}$$



con lo que  $(a', b') \in Z_{p+1}^1 \cap Z_{p+1}^2 \cap Z_{p+1}^3$ .

(♣)

**Notas finales.** 1.-Es de observar que las tesis de los Teoremas 3.13 y 3.14 están hechas sobre pares que verifican la desigualdad

$$\frac{p+1}{a} + \frac{p}{b} < 1 < \frac{p}{a} + \frac{p+1}{b}.$$

Esta es la ecuación de la componente conexa de  $(1, +\infty)^2 \setminus \Sigma$  situada encima de la diagonal y entre las curvas

$$\frac{p+1}{a} + \frac{p}{b} = 1,$$

y

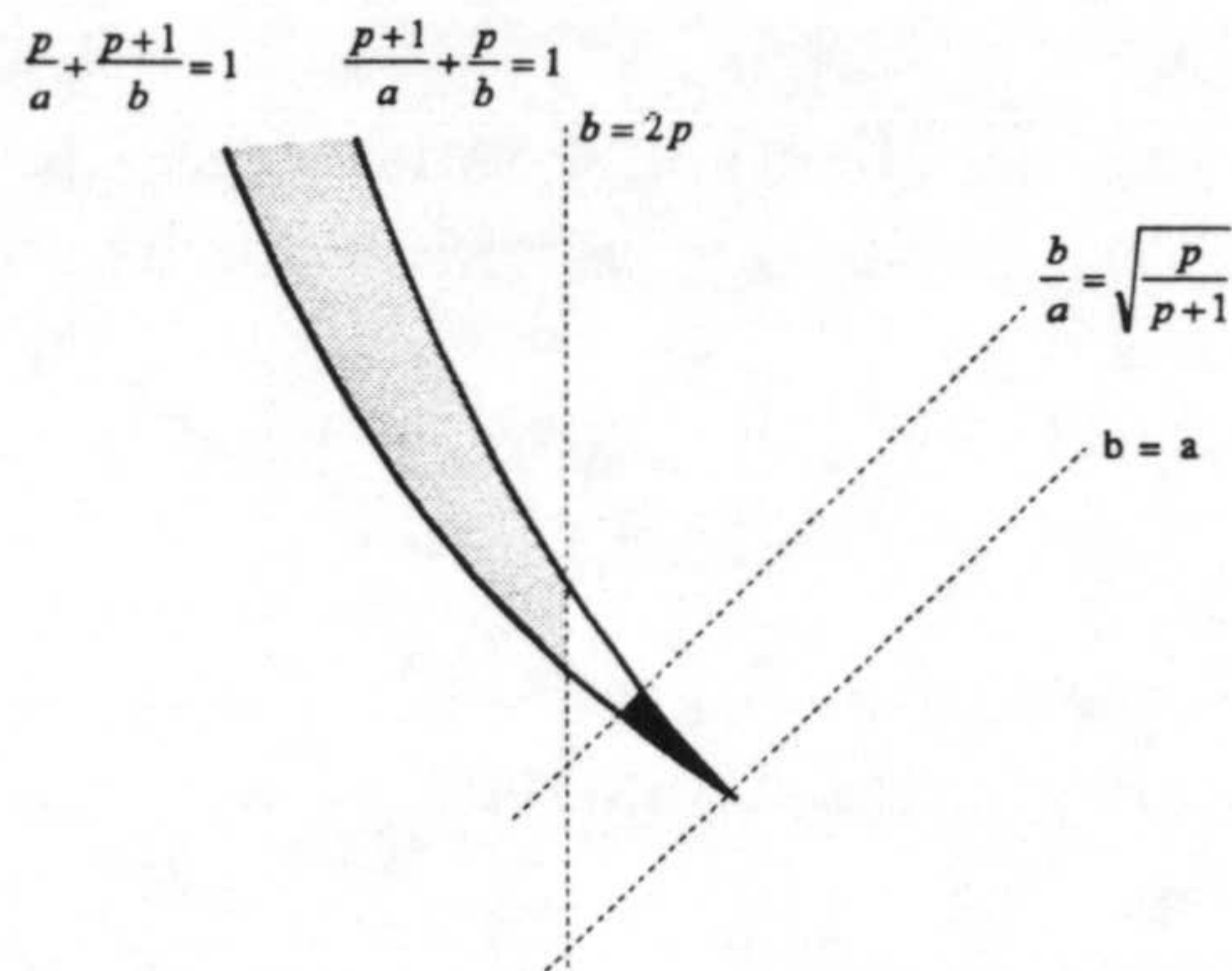
$$\frac{p}{a} + \frac{p+1}{b} = 1$$

que son las dos curvas que vienen del valor propio en la diagonal  $(2p+1, 2p+1)$ . Como ya hemos dicho anteriormente en esta componente conexa el grado total del operador que es el mismo que el índice de la solución  $u \equiv 0$  del problema (3.9), es cero. Sin embargo el comportamiento según el parámetro del problema (3.7) en cada Teorema es diferente.

El comportamiento del Teorema 3.13, se asemeja a los comportamientos de los casos  $b < \lambda_1 < a < \lambda_2$  dados en [A-P] y [D2], también los dados en [Ru2], cuando toma  $g(x) = f(x) + he_2(x)$ , donde  $e_2(x)$  es la segunda función propia. El comportamiento en el Teorema 3.14 se asemeja más al comportamiento dado también en [Ru2] pero cuando toma  $g(x) = f(x) + he_1(x)$ . Es de notar que la zona de parámetros que describe Ruf en [Ru2] es mas pequeña que la zona incluida en la tesis del Teorema 3.13.

En el siguiente dibujo se puede observar la posición en el plano de las zonas descritas en los Teoremas, la zona de sombreado oscuro se corresponde con la tesis del Teorema 3.13 y la zona de sombreado claro con la zona del Teorema 3.14.





2.- No sería difícil extender todos los resultados de la sección 3.4 a una ecuación del tipo

$$u'' + N(t, u) = h$$

donde  $N(t, u)$  es una función regular en  $u$  y de comportamiento asintótico en  $u$  similar a  $N(u) = a^2u^+ - b^2u^-$ , nosotros nos hemos limitado a este tipo particular con la intención de no complicar la ya de por sí enredada situación.



# Apéndice

En este apéndice incluimos un resultado de dependencia continua y diferenciabilidad respecto de condiciones iniciales y parámetros para la ecuación

$$\begin{cases} u'' + a^2u^+ - b^2u^- = 1 + \mu f(t), & t \in (0, \pi) \\ u(0) = 0; u'(0) = s \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

donde  $f$  es una función en el espacio  $L^2(0, \pi)$ , y  $a, b, s$  y  $\mu$ , son parámetros reales (aunque los parámetros  $a$  y  $b$  van a ser dos números estrictamente positivos y fijos, los hemos puesto al cuadrado para respetar el cambio de variable que se hace en el capítulo 3). Aunque el resultado parece claro formalmente, como  $f \in L^2(0, \pi)$  y la función  $u \mapsto a^2u^+ - b^2u^-$  no es de clase 1, dicho resultado no se deduce de la teoría clásica. La demostración que se presenta está hecha según las líneas de la demostración del Lema 2.2 en [L-K].

Sea  $u(t; s, \mu)$  la solución de (A.1), en principio para cada dos valores  $s$  y  $\mu$  de  $\mathbb{R}$ ,  $u(\cdot; s, \mu) \in H^2(0, \pi) \subset C^1[0, \pi]$ .

**Teorema A.1.** *Dado  $\bar{s} > 0$ , existen  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{s})$  y  $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\bar{s})$  tales que  $\frac{\partial u}{\partial s}(t; s, \mu)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \mu}(t; s, \mu)$  existen y son continuas en  $\mathbb{R} \times (\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon) \times (-\tilde{\mu}, \tilde{\mu})$ .*

Antes de demostrar este Teorema veamos la demostración de los siguientes Lemas:

**Lema A.2.** *Si  $s_n \rightarrow s_0$ ,  $\mu_n \rightarrow \mu_0$ ,*

$$\begin{aligned} u(t; s_n, \mu_n) &\rightarrow u(t; s_0, \mu_0) \\ u'(t; s_n, \mu_n) &\rightarrow u'(t; s_0, \mu_0) \end{aligned}$$

*uniformemente en  $[0, \pi]$ .*



Demostración. Dado que la función  $u \mapsto a^2u^+ - b^2u^-$  es Lipschitziana, es bien conocido que las aproximaciones sucesivas o iterantes de Picard para dicha ecuación convergen en cada punto  $(t_0, s_0, \mu_0) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^2$  a la solución del problema (ver [B-N]), además se comprueba fácilmente que dicha convergencia es uniforme en cada compacto de  $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ . Dado que cada una de las iterantes es continua en  $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ , deducimos que la función

$$(t, s, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} u(t; s, \mu) \\ u'(t; s, \mu) \end{pmatrix}$$

es continua. De aquí se obtiene la tesis del Lema.

(♣)

**Lema A.3.** Dado  $s_0 \neq 0$ , existen  $\varepsilon = \varepsilon(s_0)$  y  $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(s_0)$  tales que si  $|s - s_0| < \varepsilon$  y  $|\mu| < \tilde{\mu}$ , la solución  $u(t; s, \mu)$  de (A.1) tiene un número finito de ceros en  $[0, \pi]$ .

Demostración. Como  $u(t; s_0, 0)$  tiene un número finito de ceros, basta probar que si  $u(t; s_0, 0)$  tiene un único cero en  $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ , entonces  $u(t; s, \mu)$  tiene un único cero en  $[\alpha, \beta]$  si  $|s - s_0| < \varepsilon$ ,  $|\mu| < \tilde{\mu}$ .

Supongamos que esta afirmación no es cierta; entonces, existirán  $s_n \rightarrow s_0$ ,  $\mu_n \rightarrow 0$  y  $t_n < \tau_n \in [\alpha, \beta]$  tales que

$$u(t_n; s_n, \mu_n) = 0 = u(\tau_n; s_n, \mu_n)$$

Tomando una subsucesión, si es necesario, se tiene que  $t_n \rightarrow t_0$ ,  $\tau_n \rightarrow \tau_0$ ,  $t_0, \tau_0 \in [\alpha, \beta]$  y, por el Lema A.2,

$$\begin{aligned} 0 &= u(t_n; s_n, \mu_n) \rightarrow u(t_0; s_0, 0), \\ 0 &= u(\tau_n; s_n, \mu_n) \rightarrow u(\tau_0; s_0, 0), \end{aligned}$$

luego  $t_0$  y  $\tau_0$  son ceros de  $u(t; s_0, 0)$  en  $[\alpha, \beta]$ . Como  $u(t; s_0, 0)$  tiene un único cero en  $[\alpha, \beta]$ ,  $t_0 = \tau_0$ .

Ahora bien, como  $u(\cdot; s_n, \mu_n) \in C^1[0, \pi]$ , por el teorema de Rolle, existe  $\zeta_n \in (t_n, \tau_n)$  tal que  $u'(\zeta_n; s_n, \mu_n) = 0$ , luego por el Lema A.2, se tiene que  $u'(t_0; s_0, 0) = 0$ .

Tenemos un valor  $t_0$  tal que  $u(t_0; s_0, 0) = 0 = u'(t_0; s_0, 0)$ , esto es contradictorio pues las soluciones para  $\mu = 0$  de la ecuación las tenemos



descritas en la sección 3.1 y allí se muestra que el valor absoluto de la pendiente en cada cero de la solución es constante luego

$$|u'(t_0; s_0, 0)| = |u'(0; s_0, 0)| = |s_0| \neq 0.$$

(♣)

Demostración del Teorema A.1. Sea  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{s})$  y  $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\bar{s})$  dadas por el Lema A.3. Sea  $(s_0, \mu) \in (\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon) \times (-\tilde{\mu}, \tilde{\mu})$ . Vamos a probar que existe  $\frac{\partial u}{\partial s}(t; s_0, \mu)$ .

Sea  $s_n \rightarrow s_0$  y denotemos por  $u_n(t) = u(t; s_n, \mu)$  y  $u_0(t) = u(t; s_0, \mu)$ . Definimos

$$\Psi_n(t) = \frac{u_n(t) - u_0(t)}{s_n - s_0}; \quad (\text{A.2})$$

entonces  $\Psi_n \in C^1[0, \pi]$ ,  $\Psi_n'' \in L^2(0, \pi)$  y

$$\Psi_n'' + \frac{1}{s_n - s_0} \{a(u_n^+(t) - u_0^+(t)) - b(u_n^-(t) - u_0^-(t))\} = 0, \text{ a.e. } t \in (0, \pi)$$

así

$$|\Psi_n''(t)| \leq m|\Psi_n(t)|, \text{ a.e. } t \in (0, \pi). \quad (\text{A.3})$$

donde

$$m = \max\{a^2, b^2, 1\}. \quad (\text{A.4})$$

Además,  $\Psi_n(0) = 0$  y  $\Psi_n'(0) = 1$ , luego

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \Psi_n'(s) ds; \quad \Psi_n'(t) = 1 + \int_0^t \Psi_n''(s) ds \quad (\text{A.5})$$

de donde

$$|\Psi_n(t)| + |\Psi_n'(t)| \leq 1 + m \int_0^t \{|\Psi_n(s)| + |\Psi_n'(s)|\} ds, \quad t \in [0, \pi],$$

usando el Lema de Gronwall se obtiene

$$|\Psi_n(t)| + |\Psi_n'(t)| \leq e^{mt}, \quad t \in [0, \pi] \quad (\text{A.6})$$

y por tanto,  $\{\Psi_n\}$  y  $\{\Psi_n'\}$  son uniformemente acotadas en  $[0, \pi]$ .

Por otro lado, combinando (A.3) con (A.6), obtenemos que  $\{\Psi_n\}$  y  $\{\Psi_n'\}$ , son equicontinuas. Por el Teorema de Ascolí, existe una parcial,



(que seguimos denotando igual), y  $z \in C^1[0, \pi]$  tal que  $\Psi_n \rightarrow z$  en  $C^1[0, \pi]$  (convergencia uniforme de la propia sucesión de funciones junto con sus derivadas).

Por la elección de  $\varepsilon$  y  $\tilde{\mu}$ ,  $u_0(t)$  tiene un número finito de ceros en  $[0, \pi]$ . Además, como  $u_n \rightarrow u_0$  uniformemente en  $[0, \pi]$  (Lema A.2), si  $u_0(t) > 0$ ,  $u_n(t) > 0$  para  $n$  suficientemente grande y si  $u_0(t) < 0$ ,  $u_n(t) < 0$ , para  $n$  grande luego

$$\frac{a^2(u_n^+(t) - u_0^+(t)) - b^2(u_n^-(t) - u_0^-(t))}{s_n - s_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{a^2\chi(u_0^+) + b^2\chi(u_0^-)\}z(t)$$

a.e.  $t \in [0, \pi]$ , donde  $\chi$  denota

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \Psi_n'(s) ds$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_n'(t) &= 1 + \int_0^t \Psi_n''(s) ds \\ &= 1 - \int_0^t \frac{a^2(u_n^+(\xi) - u_0^+(\xi)) - b^2(u_n^-(\xi) - u_0^-(\xi))}{s_n - s_0} d\xi. \end{aligned}$$

Tomando límites en ambas expresiones y teniendo en cuenta (A.5), se tiene

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t z'(s) ds, \\ z'(t) &= 1 - \int_0^t \{a^2\chi(u_0^+) + b^2\chi(u_0^-)\}z(t) dt. \end{aligned}$$

Luego  $z'$  es absolutamente continua en  $[0, \pi]$  y

$$\begin{cases} z'' + \{a^2\chi(u_0^+) + b^2\chi(u_0^-)\}z(t) = 0 \text{ a.e. } (0, \pi), \\ z(0) = 0; z'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Hemos obtenido que una parcial de  $\Psi_n(t)$  converge uniformemente a  $z$ , la solución de (A.7), dada la arbitrariedad de la sucesión  $s_n$ , es fácil comprobar que es realmente toda la sucesión  $\Psi_n(t)$  la que converge uniformemente a  $z$ , y por tanto

$$z(t) = \frac{\partial}{\partial s} u(t; s_0, \mu).$$



Para demostrar que existe  $\frac{\partial u}{\partial \mu}(t; s, \mu)$  razonamos de forma similar. Sea  $\mu_n \rightarrow \mu_0$  con  $(s, \mu_0) \in (\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon) \times (-\tilde{\mu}, \tilde{\mu})$ . Denotamos  $u_n(t) = u(t; s, \mu_n)$ ;  $u_0(t) = u(t; s, \mu_0)$ . Si

$$\Psi_n(t) = \frac{u_n(t) - u_0(t)}{\mu_n - \mu_0}$$

se obtiene de la ecuación (A.1)

$$|\Psi_n''| \leq m|\Psi_n(t)| + |f(t)| \text{ a.e.}(0, \pi) \quad (\text{A.8})$$

y

$$\Psi_n(0) = 0; \Psi_n'(\pi) = 0.$$

Luego,  $\Psi_n(t) = \int_0^t \Psi_n'(s)ds$ ;  $\Psi_n'(t) = \int_0^t \Psi_n''(s)ds$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Por tanto,

$$|\Psi_n(t)| + |\Psi_n'(t)| \leq \|f\|_{L^1(0, \pi)} + m \int_0^t \{|\Psi_n(s)| + |\Psi_n'(s)|\}ds, \quad t \in [0, \pi]$$

Por el Lema de Gronwall,

$$|\Psi_n(t)| + |\Psi_n'(t)| \leq \|f\|_{L^1} e^{mt}, \quad t \in [0, \pi]$$

Según esto, las sucesiones  $\{\Psi_n\}$  y  $\{\Psi_n'\}$  son uniformemente acotadas, y al igual que en la otra parcial, esta última desigualdad junto con (A.8), nos prueba que son equicontinuas. Aplicando de nuevo el Teorema de Ascolí, existe una parcial que seguiremos denotando  $\{\Psi_n\}$ , y  $z \in C^1[0, \pi]$ , tal que  $\Psi_n \rightarrow z$  en  $C^1[0, \pi]$ .

Ahora bien, como

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \Psi_n'(s)ds,$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_n'(t) &= \int_0^t \Psi_n''(s)ds \\ &= \int_0^t \left\{ f(\xi) - \frac{a^2(u_n^+(\xi) - u_0^+(\xi)) - b^2(u_n^-(\xi) - u_0^-(\xi))}{\mu_n - \mu_0} \right\} d\xi, \end{aligned}$$

razonando como en el caso anterior,  $z$  es solución de

$$\begin{cases} z'' + \{a^2\chi(u_0^+) + b^2\chi(u_0^-)\}z = f(t) \text{ a.e. } t \in (0, \pi), \\ z(0) = 0; z'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$



Juan Campos Rodríguez.

Al igual que antes hemos obtenido que  $\Psi_n(t)$  converge en una parcial a  $z$  solución de (A.9), y como dijimos entonces esto basta para tener que,  $z(t) = \frac{\partial u}{\partial \mu}(t; s, \mu_0)$ .

Para demostrar la continuidad de  $\frac{\partial u}{\partial s}$  y  $\frac{\partial u}{\partial \mu}$ , basta probar que si  $(s_n, \mu_n) \rightarrow (s_0, \mu_0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y si ponemos

$$\begin{aligned} u_n(t) &= (t; s_n, \mu_n), \quad n \geq 0 \text{ y} \\ p_n(t) &= (a^2 \chi(u_n^+) + b^2 \chi(u_n^-))(t), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

y llamamos  $y_n(t)$  a la solución de

$$\begin{cases} z'' + p_n(t)z = 0, \\ z(0) = 0, \quad z'(0) = 1, \end{cases}$$

y  $y^n(t)$  a la solución de

$$\begin{cases} z'' + p_n(t)z = f(t), \\ z(0) = 0 = z'(0), \end{cases}$$

entonces  $y_n(t) \rightarrow y_0(t)$ ,  $y^n(t) \rightarrow y^0(t)$  uniformemente en  $[0, \pi]$ .

Por el Lema A.2,  $u_n(t) \rightarrow u_0(t)$  uniformemente en  $[0, \pi]$ , además como los ceros de  $u_0$  son aislados, obtenemos que  $p_n(t) \rightarrow p_0(t)$  puntualmente a.e.  $t \in (0, \pi)$ , dado que dicha sucesión está acotada, obtenemos que  $p_n \rightarrow p_0$  en  $L^1(0, \pi)$ .

Sea  $v_n(t) = y_n(t) - y_0(t)$ ,  $n \geq 1$ . Entonces

$$\begin{cases} v_n''(t) + p_n(t)v_n(t) = (p_n(t) - p_0(t))y_0(t), \text{ a.e. } t \in (0, \pi), \\ v_n(0) = v_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Como  $v_n(t) = \int_0^t v_n'(s)ds$  y  $v_n'(t) = \int_0^t v_n''(s)ds$ , de la ecuación anterior deducimos que

$$|v_n'(t)| \leq \|p_0 - p_n\|_{L^1} \|y_0\|_{L^\infty} + m \int_0^t |v_n(s)|$$

y de aquí deducimos

$$\begin{aligned} |v_n(t)| + |v_n'(t)| &\leq \|p_0 - p_n\|_{L^1} \|y_0\|_{L^\infty} \\ &+ m \int_0^t \{|v_n(s)| + |v_n'(s)|\} ds, \quad t \in [0, \pi], \end{aligned}$$



(observar que por definición  $m \geq 1$ ).

Por el Lema de Gronwall,

$$|v_n(t)| + |v'_n(t)| \leq \|p_0 - p_n\|_{L^1} \|y_0\|_{L^\infty} e^{mt}, \quad t \in [0, \pi]$$

Por tanto,  $v_n \rightarrow 0$  (y  $v'_n \rightarrow 0$ ) uniformemente en  $[0, \pi]$ .

Si ponemos ahora  $v^n(t) = y^n(t) - y^0(t)$ , se tiene

$$\begin{cases} (v^n)''(t) + p_n(t)v^n(t) = \{p_n(t) - p_0(t)\}y_0(t) \\ v^n(0) = (v^n)'(0) = 0 \end{cases}$$

y la demostración es la misma.

(♣)



*Juan Campos Rodríguez.*



# Bibliografía

- [A-M] A. AMBROSETTI AND G. MANCINI, "*Existence and Multiplicity Results for Nonlinear Elliptic Problems with Linear Part at Resonance. The Case of the Simple Eigenvalue*" J. Diff. Equat. 28 (1978), 220-245.
- [A-P] A. AMBROSETTI AND G. PRODI, "*On the Inversion of some Differential Mappings with Singularities between Banach Spaces.*" Ann. Mat. Pura Appl. 93 (1972), 231-246.
- [A-C1] M. ARIAS AND J. CAMPOS, "*Radial Fučík Spectrum of the Laplace Operator.*" J. of Math. Anal. and Appl. 190 (1995), 654-666.
- [A-C2] M. ARIAS AND J. CAMPOS, "*Fučík Spectrum of a Singular Sturm-Liouville Problem.*" Nonlinear Analysis T.M.A., V. 27, N. 6 (1996), 679-697.
- [A-C3] M. ARIAS AND J. CAMPOS, "*Exact Number of Solutions of a One-dimensional Dirichlet Problem with Jumping Nonlinearities.*" Differential Equations and Dynamical Systems, *por aparecer.*
- [B-N] F. BRAUER AND J. NOHEL, "*Ordinary Differential Equations; A First Course.*" Benjamin, New York, 1985.
- [B] H. BRÉZIS, "*Análisis Funcional*" Alianza Universidad Textos, 1984.
- [C-L] E. CODDINGTON AND N. LEVINSON, "*Theory of Ordinary Differential Equations.*" Mac-Graw Hill, 1985.



Juan Campos Rodríguez.

- [C] D. G. COSTA, "*Morse Index and Exact Number of Solutions for ODE's with Jumping Nonlinearities.*" *Mathematiques Appliees aux Sciences de l'Ingenieur*, Santiago, 1989, 165-175, Cepadues, Toulouse, 1991.
- [C-F-S] D. G. COSTA, D. G. DEFIGUEREDO AND P. N. SRIKANTH, "*The Exact Number of Solutions for a Class of Ordinary Differential Equations though Morse Index Computation.*" *J. Diff. Equat.*, Vol 96, N. 1 (1992), 185-199.
- [F-G] D. G. DEFIGUEIREDO AND J.P. GOSSEZ, "*On the first curve of the Fučík spectrum of an elliptic operator.*" *Differential and Integral Equations* 7 (1994), 1285-1302.
- [F-R] D. G. DEFIGUEREDO AND B. RUF, "*On the periodic Fučík Spectrum and a Superlinear Sturm-Liouville Equation.*" *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Section A, Mathematics*, 123 (1993), N. 1, 95-107.
- [D1] E. N. DANCER, "*On the Dirichlet Problem for Weakly Non-linear Elliptic Partial Differential Equations.*" *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 76A, (1977) 283-300.
- [D2] E. N. DANCER, "*On the Ranges of Certain Weakly Non Linear Elliptic Partial Differential Equations*" *J. Math. Pures et Appl.* 57, (1978), 351-366.
- [D3] E. N. DANCER, "*On the existence of solutions of certain asymptotically homogeneous problems.*" *Math. Z.*, 177 (1981), 33-48.
- [D4] E. N. DANCER, "*Breaking of Symmetries for Forced Equations*" *Math.-Annal.*, 262, N. 4 (1983) 473-486.
- [D5] E. N. DANCER, "*Generic Domain Dependence for Non Smooth Equations and the Open Set Problem for Jumping Nonlinearities.*" *Topol. Meth. in Nonlinear Analysis*, 1(1993), N. 1, 139-150.
- [F] S. FUČIK, "*Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems.*" Reidel, Dordrecht, 1980.



- [G-K] T. GALLOUET AND O. KAVIAN, "*Résultats d'Existence et Nonexistence pour Certains Problèmes Démilinéaires à l'Infini.*" Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., (5)3(1981), 201-246.
- [G-H] M. GAUDENZI AND P. HABETS, "*Fučík Spectrum for a Third Order Equation.*" J. Diff. Equat., *por aparecer.*
- [G-L-K] J. GLOVER, A. C. LACER AND P. J. MCKENNA, "*Existence and Stability of Large Scale Nonlinear Oscillations in Suspension Bridges.*" Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) V. 40 (1989), 172-200.
- [Ha] P. HARTMAN, "*Ordinary Differential Equations*" Wiley, 1964.
- [He] P. HESS, "*On a Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems of the Ambrosetti-Prodi Type.*" Boll. U. M. I. (5), 17-A (1980), 187-192.
- [K-Z] M. A. KRASNOSEL'SKIĬ AND P. P. ZABREĬKO, "*Geometrical Methods of Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications.*" Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [L-K] A. C. LACER AND P. J. MCKENNA, "*Existence, Uniqueness, and Stability of Oscillations in Differential Equations with Asymmetric Nonlinearities.*" Trans. Amer. Math. Soc., V. 315, N. 2, (1989), 721-739.
- [Ma] C. A. MAGALHÃES, "*Semilinear Elliptic Problem with Crossing of Multiple Eigenvalues.*" Commun. in Partial Differential Eq., 15(9) (1990), 1265-1292.
- [Mi] A. M. MICHELETTI, "*A Remark on the Resonance Set for a Semilinear Elliptic Equation.*" Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 124A, (1994), 803-809.
- [O] R. ORTEGA, "*Asimetric Oscillators and Twist Mapping.*" J. London Math. Soc., (2) 53 (1996), 325-342.
- [P] P. J. POPE, "*Solvability of non self-adjoint and higher order differential equations with jumping nonlinearities.*" PhD Thesis, University of New England, Australia (1984).



Juan Campos Rodríguez.

- [Ro-L] S. B. ROBINSON AND E. M. LANDESMAN, "A General Approach to Solvability Conditions for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance" *Differential and Integral Equations*, Vol 8 N. 6 (1995), 1555-1569.
  
- [Ru1] B. RUF, "On Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem with Jumping the nonlinearities." *Ann. Mat. Pura Appl. VI* 128, (1980), 133-151.
  
- [Ru2] B. RUF, "Multiplicity Results for Nonlinear Elliptic Equations." *Nonlinear Analysis, Function spaces and applications*, Vol.3 (Litomysl, 1986), 109-138, Teubner-Texte Math. 93.
  
- [S] M. SCHECHTER, "The Fucik Spectrum." *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 43, No. 4 (1994), 1139-1157.