

**UNIVERSIDAD DE GRANADA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DEPARTAMENTO  
DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**



**Tesis Doctoral**

**REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES DURANTE LAS  
PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA**

María Teresa Castellanos Sánchez

**Granada, 2017**

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autora: María Teresa Castellanos Sánchez  
ISBN: 978-84-9163-623-6  
URI: <http://hdl.handle.net/10481/49019>

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**Facultad de Ciencias de la Educación**

**Departamento de Didáctica de las Matemáticas**

**REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES DURANTE LAS  
PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA**

Memoria de TESIS DOCTORAL, realizada bajo la dirección de los Doctores Pablo Flores Martínez y del Doctor Antonio Javier Moreno Verdejo del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, que presenta D. María Teresa Castellanos Sánchez para optar al grado de Doctor en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación.

Fdo. María Teresa Castellanos Sánchez

Vº Bº de los Directores,

Dr. Pablo Flores Martínez

Dr. Antonio Javier Moreno Verdejo

El trabajo de tesis doctoral inscrita en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, Programa Oficial de Doctorado en Ciencias de la Educación (B.22.56.1), bajo la Norma reguladora RD 99/2011. Investigación dirigida por los Doctores: Pablo Flores Martínez y Antonio Javier Moreno Verdejo, titulada “Reflexión de futuros profesores durante las prácticas de enseñanza”, auspiciado en apoyo a la formación de capital humano, por la Universidad de los Llanos (Colombia, 2012), en el marco del Programa de Calificación y Formación de Recursos Humanos de Alto Nivel a través del Ministerio de Educación de la Pública del Colombia (MEN, 2012) y del Instituto de Investigaciones de la Orinoquia Colombiana (Grupo-Ghema: 2013)



## **AGRADECIMIENTOS**

Gracias a Dios, a mis padres, Arturo y Clara, a mi esposo a mis hijos Marcela y David por su apoyo y espera. Gracias a mis hermanas, hermanos, cuñadas, cuñados, sobrinas y sobrinos, todos ellos por su cariño y ayuda, en especial a Claudia, Rocio, Sara y Nancy por llenar de cariño a mis hijos en mi ausencia.

Gracias a todos los profesores y profesoras que me han formado en esta larga vida, desde Cristina Ordoñez mi maestra inspiradora, hasta los grandes maestros de mi Departamento de Didáctica de las Matemáticas en la UGR, especialmente a mis directores Pablo Flores y Antonio Moreno. Gratitud que extiendo a los profesores, Manuel Fernández, Antonio Bolívar y Cristina Moral, por sus aportaciones y contribuciones. A Carmen Trigueros y Enrique Rivera por conducirme en el arduo trabajo de la investigación cualitativa.

Gracias a todos mis compañeros de posgrado por el apoyo de cerca y a la distancia en todos los momentos, especialmente a Karen, Ana Luz, Emilio, Claudia, Paola, Hilbert, Sonia, Lorelí y José Antonio; junto a los amigos que me abrieron su casa y su corazón Isabel, Angélica, Cupertino, Pamela y Luis.

Gracias a las instituciones colombianas que, con la confianza brindada y el apoyo económico han hecho posible alcanzar esta meta. Con gratitud a la Universidad de los Llanos, a la Gobernación del Meta y a la Fuerza Aérea Colombiana.

Muy especialmente, expreso mi gratitud a todos mis compañeros del programa de licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de los Llanos por su confianza, apoyo y contribución para el logro de este objetivo.

Gracias a los estudiantes de Unillanos, al colectivo de práctica docente y a los profesores de las Instituciones Educativas participantes en el estudio, por la disposición y sinceridad de sus reflexiones, que han enriquecido este trabajo.



## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL.....	7
INTRODUCCION.....	1
LA INVESTIGACIÓN .....	5
Capítulo 1. Planteamiento de la investigación .....	7
1.1 Contextualización y problema de investigación.....	7
1.1.1 Área problemática.....	7
1.1.2 La problemática .....	11
1.1.3 Línea de investigación .....	13
1.2 Pertinencia y justificación de la investigación.....	13
1.3 Objetivos .....	15
1.3.1 Objetivo General .....	15
1.3.2 Objetivos específicos .....	15
MARCO TEÓRICO .....	17
Capítulo 2. La formación de profesores de matemáticas.....	19
2.1 Formación profesores de matemáticas .....	19
2.1.1 Tensiones y presupuesto en la formación de profesores.....	19
2.1.2 Prácticas de enseñanza en la formación de profesores .....	21
2.1.3 Enfoque realista para la formación de profesores.....	23
2.1.4 La reflexión en la formación de profesores de matemáticas.....	26
2.2 Desarrollo profesional del profesor de matemáticas .....	27
2.3 Conocimiento profesional del profesor de matemáticas.....	29
2.3.1 Modelos de conocimiento .....	30
2.3.2 Conocimiento del profesor de matemáticas en formación .....	33
2.3.3 Análisis didáctico .....	35
2.4 Reflexión .....	36
2.4.1 La noción de reflexión.....	37
2.4.2 Características de la reflexión.....	39
2.4.3 Objetos de reflexión: Los Problemas profesionales.....	42
2.4.4 Proceso de reflexión .....	46
2.5 Antecedentes de la investigación.....	51
2.5.1 Investigaciones en formación de profesores.....	51



2.6 Investigaciones sobre reflexión en la formación de profesores .....	54
2.7 Síntesis del capítulo.....	56
Capítulo 3. Referentes del curso de formación .....	59
3.1 Concepciones sobre la enseñanza del álgebra escolar.....	59
3.2 Álgebra escolar.....	60
3.2.1 Álgebra en el currículo colombiano .....	61
3.2.2 Pensamiento algebraico y aprendizaje del álgebra.....	63
3.2.3 Limitaciones del aprendizaje algebraico.....	64
3.2.4 Sentido Estructural.....	66
MARCO METODOLÓGICO .....	68
Capítulo 4. Diseño metodológico .....	69
4.1 Enfoque de investigación.....	69
4.2 El caso del estudio.....	69
4.3 Paradigma de investigación (investigación de diseño) .....	70
4.3.1 Los experimentos de enseñanza.....	70
4.4 Fuentes e instrumentos de análisis de la investigación .....	71
4.5 Tratamiento de los datos recogidos para el análisis.....	73
4.5.1 Los registros conversacionales .....	73
4.5.2 Los segmentos de texto y contenido de tareas formativas.....	74
4.5.3 Las figuras, representaciones y diagramas.....	74
4.6 Análisis y codificación de la información.....	75
4.6.1 Problemas profesionales: variables y categorías de análisis .....	77
4.6.2 Conocimiento profesional: variables y categorías de análisis .....	78
4.6.3 Tareas matemáticas: variables y categorías de análisis. ....	79
4.6.4 Codificación de la información.....	80
Capítulo 5. Configuración del programa de formación .....	83
5.1 Contexto del programa formativo.....	83
5.2 Objetivo del programa formativo.....	83
5.3 Conjeturas .....	84
5.4 Participantes del programa formativo .....	84
5.5 Estructura general del curso de formación .....	85
5.6 Temporalización de las sesiones.....	87
5.7 Las estrategias utilizadas para el desarrollo del módulo .....	87

5.8 Evaluación y seguimiento del aprendizaje .....	88
Capítulo 6. Experimento de enseñanza .....	91
6.1 Módulo Uno: Inducción a la Práctica Profesional Docente .....	91
6.1.1 Planeación del módulo uno.....	92
6.1.2 Implementación del módulo uno .....	93
6.1.3 Revisión y análisis módulo uno.....	96
6.2 Modulo Dos: Contexto y Diagnostico .....	97
6.2.1 Planeación del módulo dos.....	97
6.2.2 Implementación del módulo dos .....	98
6.2.3 Análisis del módulo dos .....	102
6.3 Modulo Tres: Planeación e implementación de la enseñanza.....	103
6.3.1 Planeación del módulo tres.....	103
6.3.2 Implementación del módulo tres .....	105
6.3.3 Revisión y análisis del módulo tres .....	108
6.4 Modulo Cuatro: Balance del aprendizaje escolar. ....	109
6.4.1 Planeación del módulo cuatro.....	109
6.4.2 Implementación del módulo cuatro .....	110
6.4.3 Revisión y análisis del módulo cuatro .....	111
6.5 Síntesis del experimento de enseñanza.....	112
RESULTADOS Y ANÁLISIS RETROSPECTIVO.....	115
Capítulo 7. Ciclo reflexivo C1: Reflexión sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar .....	116
7.1 Fase A1: Partir de la acción o experiencia .....	117
7.1.1 Describir el origen de la situación problema .....	118
7.1.2 Formular la cuestión .....	119
7.2 Fase L1: Mirar hacia atrás en la acción.....	120
7.2.1 Examinar fundamentos en la naturaleza de la problemática.....	120
7.2.2 Verbalizar las ideas que enuncian el objeto de la problemática .....	121
7.2.3 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática .....	123
7.3 Fase a1: Conocimiento de puntos importantes o esenciales .....	124
7.3.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto de la problemática....	125
7.4 Fase C1: Crear buscar y preparar alternativas de actuación .....	127
7.4.1 Evaluar posibles soluciones y alternativas.....	127
7.5 Fase T1: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo C2.....	128

Capítulo 8. Ciclo reflexivo C2: Reflexión sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico.....	130
8.1 Fase A2: Partir de la acción o experiencia .....	131
8.1.1 Describir el origen de la situación problema.....	131
8.1.2 Formular la cuestión.....	132
8.2 Fase L2: Mirar hacia atrás en la acción .....	134
8.2.1 Examinar fundamentos en la naturaleza de la problemática.....	134
8.2.2 Verbalizar las ideas que enuncian el objeto de la situación .....	135
8.2.3 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática.....	137
8.3 Fase a2. Conocimiento de puntos importantes o esenciales.....	139
8.3.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto del problema .....	139
8.4 Fase C2: Crear buscar y preparar alternativas de actuación.....	142
8.4.1 Evaluar posibles soluciones y alternativas .....	143
8.5 Fase T2: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo C3.....	143
Capítulo 9 Ciclo reflexivo C3: Reflexión sobre las tareas matemáticas para el aprendizaje del álgebra escolar .....	145
Parte uno: ciclo reflexivo C3.1 .....	145
9.1 Fase A3.1: Partir de la acción o experiencia. ....	146
9.1.1 Describir el origen de la problemática. ....	146
9.1.2 Formular la cuestión.....	148
9.2 Fase L3.1: Mirar hacia atrás en la acción .....	150
9.2.1 Examinar y representar la naturaleza de la situación problema.....	150
9.2.2 Verbalizar fundamentos del problema.....	152
9.1.1 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática.....	153
9.3 Fase a3.1: Conocimiento de puntos importantes o esenciales.....	155
9.3.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto del problema .....	155
9.4 Fase C3.1: Crear, buscar y preparar alternativas para la acción.....	158
9.5 Fase T3.1. Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo .....	161
Parte dos: Ciclo reflexivo C3.2 Reflexión sobre las tareas.....	162
9.6 Fase A3.2: Partir de la acción o experiencia .....	162
9.6.1 Describir el origen de la situación problema.....	162
9.6.1 Formular la cuestión.....	164
9.7 Fase L3.2: Mirar hacia atrás en la acción .....	165
9.7.1 Examinar y representar la naturaleza de la situación problema.....	165

9.7.2	Verbalizar fundamentos de la problemática .....	167
9.7.3	Identificar concepciones y creencias sobre la problemática .....	167
9.8	Fase a3.2: Conocimiento de puntos importantes o esenciales .....	170
9.8.1	Confrontar y reconocer los conceptos objeto del problema .....	170
9.9	Fase C3.2: Crear buscar y preparar alternativas de actuación .....	173
9.10	Fase T3.2: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo .....	174
	Síntesis de resultados y del análisis retrospectivo .....	176
	CONCLUSIONES .....	179
	Capítulo 10. Conclusiones y aportes de investigación.....	181
10.1	Conclusiones sobre los objetivos de Investigación.....	181
10.2	Conclusiones relativas al objetivo uno.....	182
10.3	Conclusiones relativas al objetivo dos.....	185
10.4	Conclusiones relativas al objetivo tres.....	194
10.5	Limitaciones de este trabajo .....	195
10.6	Líneas abiertas de investigación .....	197
10.7	Conclusión.....	197
	REFERENCIAS .....	199

## INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. <i>Principios de la formación de profesores en el enfoque realista</i> .....	24
Tabla 2.2. <i>Tipología para clasificar el origen de las situaciones problemas</i> .....	43
Tabla 2.3. <i>Rasgos que caracterizan la evolución en la definición del problema profesional</i> .....	44
Tabla 2.4. <i>Caracterización de los problemas que formulan FPM</i> .....	46
Tabla 2.5. <i>Acciones reflexivas en fases del ciclo ALaCT (Korthagen et al., 2001)</i> ...50	
Tabla 4.1. <i>Fuentes e instrumentos de recolección de la información</i> .....	72
Tabla 4.2. <i>Ejemplo de códigos asignado a fuentes de información</i> .....	72
Tabla 4.3. <i>Características en la formulación de problemas profesionales</i> . ....	78
Tabla 4.4. <i>Categorías: Conocimiento del profesor en formación</i> .....	78
Tabla 5.1. <i>Estructura general del programa de formación</i> .....	86
Tabla 6.1. <i>Planeación de la instrucción del módulo uno</i> .....	92
Tabla 6.2. <i>Secuencia de instrucción del módulo uno</i> .....	93
Tabla 6.3. <i>Estrategias de indagación en módulo uno</i> .....	94
Tabla 6.4. <i>Indicadores para la revisión del proceso reflexivo. Adaptado de Korthagen et al., (2001)</i> .....	96
Tabla 6.5. <i>Decisiones al finalizar el módulo uno</i> . ....	97
Tabla 6.6. <i>Planeación de la instrucción del módulo dos</i> .....	98
Tabla 6.7. <i>Secuencia de instrucción del módulo dos</i> .....	98
Tabla 6.8. <i>Estrategia de indagación en módulo dos</i> .....	100
Tabla 6.9. <i>Decisiones al finalizar el módulo dos</i> .....	102
Tabla 6.10. <i>Re diseño de la planeación al finalizar el módulo dos</i> .....	103
Tabla 6.11. <i>Planeación de la instrucción del módulo tres</i> .....	104

Tabla 6.12. <i>Secuencia de instrucción del módulo tres</i> .....	104
Tabla 6.13. <i>Decisiones al finalizar el módulo tres</i> .....	108
Tabla 6.14. <i>Planeación de la instrucción del módulo cuatro</i> .....	109
Tabla 6.15. <i>Secuencia de instrucción del módulo cuatro</i> .....	110
Tabla 6.16. <i>Decisiones al finalizar el módulo cuatro</i> .....	112
Tabla 6.17. <i>Rediseño del programa formativo</i> .....	112
Tabla 7.1. <i>Situación problema del FPM1</i> .....	118
Tabla 7.2. <i>Situación problema del FPM2</i> .....	118
Tabla 7.3. <i>Interrogante planteado por Lina</i> .....	119
Tabla 7.4. <i>Interrogante planteado por Juan</i> .....	119
Tabla 7.5. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A1</i> .....	119
Tabla 7.6. <i>Ideas y Concepciones de FPM2 en relación con la problemática</i> .....	121
Tabla 7.7. <i>Premisas e interrogantes ofrecidas al FPM1</i> .....	123
Tabla 7.8. <i>Premisas e interrogantes ofrecidas al FPM2</i> .....	123
Tabla 7.9. <i>Premisas e interrogantes examinados por FPM2 en L1</i> .....	123
Tabla 7.10. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase L1</i> .....	124
Tabla 7.11. <i>Confrontación entre pares FPM2 y FPM1</i> .....	125
Tabla 7.12. <i>Acuerdos conceptuales: informe de la confrontación entre pares</i> .....	126
Tabla 7.13. <i>Conexiones y síntesis conceptual</i> .....	126
Tabla 7.14. <i>Nueva cuestión planteada por en conjunto los FPM1 y FPM2</i> .....	127
Tabla 7.15. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C1</i> .....	128
Tabla 8.1. <i>Extracto intervención de Lina al identificar los errores</i> .....	131
Tabla 8.2. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A2</i> .....	133
Tabla 8.3. <i>Selección de un aparte del diario reflexivo de Lina en L2</i> .....	137
Tabla 8.4. <i>Selección de un aparte del diario reflexivo de Juan en L2</i> .....	138

Tabla 8.5. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase L2.</i> .....	138
Tabla 8.6. Selección de un aparte del informe de confrontación entre pares.....	139
Tabla 8.7. <i>Acuerdos conceptuales: informe de la confrontación entre pares</i> .....	140
Tabla 8.8. <i>Aspectos importantes considerados para profundizar</i> .....	141
Tabla 8.9. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase a2</i> .....	142
Tabla 8.10. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C2</i> .....	143
Tabla 9.1. <i>Situación problemática descrita por FPM1</i> .....	146
Tabla 9.2. <i>Situación problema descrita por FPM2</i> .....	147
Tabla 9.3 <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A3.1</i> .....	149
Tabla 9.4 <i>Ideas y Concepciones de los FPM en relación con el objeto de la problemática</i> .....	153
Tabla 9.5 <i>Creencias e interrogantes analizadas en L3.1 por los FPM</i> .....	153
Tabla 9.6 <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en la Fase L3.1</i> .....	154
Tabla 9.7 <i>Conexiones y síntesis conceptual resultado de la puesta en común</i> .....	157
Tabla 9.8. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C3.1</i> .....	160
Tabla 9.9. Situación problemática descrita por FPM2: Episodio de clase .....	163
Tabla 9.10. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A3.2</i> .....	164
Tabla 9.11. <i>Concepciones sobre la naturaleza del problema – FPM1: Fase L3.2</i> .	168
Tabla 9.12. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en fase L3.2</i> .....	169
Tabla 9.13. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase a3.2</i> .....	172
Tabla 9.14. <i>Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C3.2</i> .....	174

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2.1.</i> Modelo ALACT (Korthagen et al., 2001) .....	49
<i>Figura 2.2.</i> Equiparación entre fases y acciones reflexivas en la intervención .....	51
<i>Figura 4.1.</i> Tratamiento del registro conversacional: extracto de una transcripción.	74
<i>Figura 4.2.</i> Tratamiento del registro conversacional: video (o audio).....	74
<i>Figura 4.3.</i> Tratamiento de las figuras: mapa conceptual .....	75
<i>Figura 4.4.</i> Análisis de las dimensiones y categorías por episodios. ....	76
<i>Figura 4.5.</i> Características de la reflexión y fases del ciclo reflexivo ALaCT. ....	77
<i>Figura 4.6.</i> Dimensiones, variables y categorías de análisis .....	80
<i>Figura 4.7.</i> Codificación de la información en categorías de análisis.....	81
<i>Figura 4.8.</i> Informe por dimensiones y categorías reunidas en episodios .....	81
<i>Figura 5.1.</i> Estructura General del Curso: módulos formativos y ciclos reflexivos...	85
<i>Figura 5.2.</i> Trayectoria por ciclos de reflexión durante el programa formativo .....	87
<i>Figura 6.1.</i> Organización del proceso de experimentación: ejemplo del módulo uno .....	91
<i>Figura 6.2.</i> Trayectoria de los sub-ciclos C3.1y C3.2 en el nuevo diseño.....	105
<i>Figura 6.3.</i> Acciones para promover procesos de reflexión en la experimentación	113
<i>Figura 7.1.</i> Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo C1. ....	116
<i>Figura 7.2.</i> Reflexión sobre problemas profesionales del álgebra escolar.....	117
<i>Figura 7.3.</i> Mapa análisis de contenido: cuatro sectores resaltados objeto indagación. ....	121
<i>Figura 7.4.</i> Ideas y Concepciones de FPM2 en relación con la problemática.....	122
<i>Figura 7.5.</i> Mapa de proceso de las dimensiones de análisis en Fase a1 .....	127
<i>Figura 8.1.</i> Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo C2 .....	130
<i>Figura 8.2.</i> Reflexión sobre el diagnóstico del aprendizaje del álgebra escolar.....	131



<i>Figura 8.3.</i> Origen de errores organizado por Lina en L2.....	135
Figura 8.4. Origen de errores organizado por Juan en L2.....	136
Figura 9.1. Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo C3.....	145
Figura 9.2. Tarea E1t1: seleccionada por FPM1 en Fase A3.1.....	147
Figura 9.3 Tarea E2t1: diseñada por el FPM2 en la fase A3.1.....	148
<i>Figura 9.4</i> Ruta de la lección examinada por FPM1 en L3.1.....	151
<i>Figura 9.5.</i> Ruta de la lección examinada por FPM2 en L3.1.....	152
Figura 9.6 Confrontación entre pares FPM2 y FPM1 .....	156
<i>Figura 9.7.</i> Mapa de proceso de las dimensiones de análisis en fase a3.1 .....	158
Figura 9.8. Tarea E1t2: parte 1: Rediseño por FPM1 en Fase a3.1.....	159
Figura 9.9. Situación problemática descrita por FPM1: Episodio de clase.....	163
<i>Figura 9.10.</i> Fundamentos del objeto de la problemática – Tarea E2t2.....	167
Figura 9.11 Concepciones sobre la naturaleza del problema FPM2: Fase L3.2...	169
Figura 9.12. Aspectos importantes: Nueva tarea E1t3.....	171
<i>Figura 9.13.</i> Alternativa para abordar la situación: Tarea E1t4 .....	174
<i>Figura 9.14.</i> Estrategia para la acción: Gestión de la tarea E1t4 .....	175

## **ÍNDICE DE ANEXOS**

Anexo 1. Contribuciones derivadas de la investigación

Anexo 2. Protocolos Implementación de Experimento: SP1-SP33

Anexo 3. Tareas Formativas A1-A17

Anexo 4 Transcripciones Caso Lina y Juan

Anexo 5 Actividades y Talleres



## INTRODUCCION

Esta memoria presenta resultados de la investigación enmarcada en el campo de la formación del profesorado de Matemáticas, en particular en la línea del desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En esta investigación nos interesamos en la reflexión y la actuación del futuro profesor de matemáticas (en adelante FPM) cuando transita de la formación universitaria al escenario de la práctica docente; es decir, se pretende atender a la iniciación en su desarrollo profesional.

Partimos de la revisión internacional de investigaciones que demuestran preocupación por las prácticas de enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas (Empson, y Jacobs , 2008). La principal preocupación de los estudios se orienta a la relación entre teoría y práctica (Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013). La articulación de la teoría en la práctica docente, durante años, ha sido objeto de diversos estudios cualitativos en la formación de profesores de matemáticas; en particular, otorgando relevancia a la reflexión para examinar cómo se produce sobre la práctica (Jaworski y 2006); (Korthagen et al., 2010); (Álsina, 2010).

A esta preocupación se suman a nivel internacional organizaciones y proyectos, que, en sus informes en relación con la calidad de la educación, concluyen sobre la pertinencia de vincular los diversos tipos de conocimiento en las prácticas docentes de los profesores de matemáticas (OEI, 2010). Estos informes hacen énfasis en el conocimiento de los docentes para enseñar, y en su responsabilidad para incorporar y significar dicho conocimiento durante su práctica profesional (UNESCO, 2012; 2014). Ya los estudios sobre la forma en que el profesor adquiere conocimiento profesional (Wilson, Shulman, y Richert, 1987), otorgan relevancia a los procesos de razonamiento del profesor, los que nos permiten vincularlos con la acción reflexiva del profesor.

La consideración del profesor como un profesional práctico (Schön, 1992) nos sugiere que la promoción de la reflexión de forma genuina puede impactar en la práctica profesional de los profesores. Entonces se trata de favorecer que los futuros profesores de matemáticas se inicien en su desarrollo profesional que les permita afrontar diversas situaciones que enfrenta un profesor y favorecer procesos reflexivos para que en el futuro pueda comprender y abordar las situaciones problemáticas que aparecerán en la práctica profesional.

Esta idea atiende al inicio de la responsabilidad profesional, mediante el desarrollo de un conocimiento práctico que conjugue una profundización teórica, siempre y cuando le

conceda sentido a esta profundización. Esta acción de requerir nuevo conocimiento, a partir de la acción, y considerándolo útil para resolver problemas percibidos en la práctica, es lo que, en este estudio, entendemos como reflexión. Por tanto, consideramos las prácticas docentes una buena ocasión para el inicio en la reflexión del futuro profesor, lo que le facilitará en su futuro profesional actuar como un docente reflexivo, que aprende de su propia práctica, actuando de manera racional frente a problemas que en ella surjan, incorporando y dando sentido a nuevo conocimiento profesional.

A partir de estos propósitos y de la problemática planteada nos preguntamos: ¿Cómo promover en futuros profesores de matemáticas procesos de reflexión sobre problemas profesionales, durante las prácticas de enseñanza? ¿Cómo evolucionan los problemas profesionales que definen y enfrentan durante los procesos de reflexión? ¿Cómo planean y transforman sus tareas de enseñanza producto de la reflexión? ¿Cómo se relacionan con nuevo conocimiento profesional durante los procesos de reflexión para afrontar los problemas detectados en su práctica docente? ¿Qué características tienen los procesos de reflexión que manifiestan con más claridad los futuros profesores?

Para afrontar la problemática hemos planificado e implementado, durante el año 2014 un programa de formación inicial de prácticas de enseñanza de profesores de matemáticas en la Universidad de los Llanos, en Colombia. El estudio tiene como propósito promover y analizar los procesos de reflexión de futuros profesores de matemáticas y estudiar cómo ellos se inician en su desarrollo profesional, en la medida en que van profundizando y significando su conocimiento profesional para resolver las cuestiones que surjan durante su práctica.

Con este propósito hemos aprovechado el carácter emergente y naturalista que caracteriza el paradigma de la investigación de diseño, para configurar el prácticum del programa de formación inicial como un experimento de enseñanza, conforme a la investigación de diseño, para favorecer a futuros profesores realizar cuatro ciclos reflexivos según el modelo ALACT (Korthagen y Vasalos, 2005)

Organizamos el escrito de esta memoria en tres partes y un capítulo de conclusiones. La primera parte, compuesta por los capítulos 1 al 3, presenta la investigación y el marco teórico en que se sustenta. El Capítulo 1 expone el área problemática del estudio, describiendo el problema de investigación. Se justifica la pertinencia de la investigación desde el contexto internacional y local, ubicándola en el campo de la formación de profesores y el desarrollo profesional, que han manifestado interés por la reflexión. Este capítulo finaliza definiendo el objetivo general y los respectivos objetivos específicos.

El capítulo 2 concreta los referentes teóricos que orientan la investigación, se ubican en torno a cuatro ejes: la formación inicial de profesores de matemáticas, con especial atención en el prácticum; la idea de desarrollo profesional; el conocimiento profesional del profesor de matemáticas; la reflexión en el proceso de formación de profesores. Por último, examinamos aquellas investigaciones relacionadas con nuestra problemática (relación teoría-práctica) que se apoyan en los procesos de reflexión; los elementos y promoción de la reflexión, y el conocimiento y actuación del profesor involucrado durante un proceso reflexivo.

En el capítulo 3 se han ubicado los elementos que han constituido los contenidos formativos del curso de prácticas de enseñanza, el análisis didáctico y la didáctica del álgebra escolar. La segunda parte describe el marco metodológico y formativo empleado, y abarca otros tres capítulos, el 4, 5 y 6. El Capítulo 4 sintetiza la metodología que orienta la investigación; presentamos el enfoque en el que se encuadra el estudio, el paradigma de investigación (investigación de diseño) y las fuentes utilizadas para obtener la información, así como los sujetos de investigación y los instrumentos de análisis de los datos. Finalmente, describimos el proceso seguido para analizar la información, concluyendo con los elementos de rigor procurados durante el proceso de investigación.

El capítulo 5 presenta el diseño del programa de formación denominado: Curso de Práctica Profesional Docente y que se configura en el contexto de las prácticas de enseñanza que realizan futuros profesores de matemáticas durante su formación. Este capítulo describe el contexto, los participantes, los objetivos, la secuencia de instrucción y la evaluación.

El Capítulo 6 exhibirá el experimento de enseñanza, aquí se describe el proceso formativo en dos de las tres etapas de este experimento, las cuales constituyeron el estudio empírico de la investigación: la planificación del experimento y la implementación; hemos dejado el análisis retrospectivo para el siguiente capítulo. En este capítulo la descripción de la segunda etapa involucra los análisis secuenciales con tres pasos: planear el proceso instructivo del módulo, intervención de la instrucción, y la revisión y análisis de lo que aconteció, antes de planificar el siguiente módulo de intervención.

La tercera parte de la memoria expone el análisis retrospectivo, correspondiente a la tercera etapa del experimento de enseñanza, presenta los resultados observados en el grupo de practicantes y se ejemplifica un caso (Lina y Juan) a lo largo de un proceso formativo durante la práctica. Se compone de tres capítulos, en los cuales se describe la reflexión que estos estudiantes llevan a cabo en tres los ciclos reflexivos promovido durante el curso formativo, por lo que se compone de tres capítulos, el 7, 8 y 9.

El capítulo 7 describe cómo los estudiantes cubren las etapas del primer ciclo de reflexión, centrado en los problemas profesionales sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar que han detectado.

El capítulo 8 describe el ciclo de reflexión sobre limitaciones del aprendizaje algebraico, y finalmente el capítulo 9, la reflexión sobre tareas matemáticas escolares para la enseñanza del álgebra escolar. En estas partes se utilizan los problemas profesionales, los conocimientos y las tareas como dimensiones que permiten caracterizar la reflexión del grupo de profesores y de la pareja del caso.

El capítulo 10 resume las conclusiones de la investigación, tanto referidas al funcionamiento del modelo instructivo implementado durante este estudio, como sobre los procesos de reflexión en el prácticum, sintetizando las características de la reflexión de los FPM sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar. Examina el logro de los objetivos planteados, señala los aportes y limitaciones de esta investigación y describe las publicaciones realizadas durante la formación investigadora y la realización de esta tesis.

# LA INVESTIGACIÓN

## **Índice del Capítulo**

Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

- 1.1 Contextualización y problema de investigación
- 1.2 Pertinencia y justificación de la investigación
- 1.3 Objetivos





# Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

El capítulo se compone de cuatro partes; la primera parte ubica el área de investigación en la que se enmarca el problema y describe el contexto en el cual se origina la investigación, la pregunta y las líneas en las cuales se ubica el estudio. En la segunda, se presenta la justificación de la investigación y su pertinencia en el campo de la formación inicial de profesores de matemáticas, en particular en el contexto colombiano. Finalmente, en la tercera parte, se presentan los objetivos de la presente investigación y una síntesis cierra el capítulo.

## 1.1 Contextualización y problema de investigación

A continuación presentamos la problemática de la investigación en el área de la Educación Matemática, el cual se ubica en la línea de formación de profesores de matemáticas. El objeto se centra en la reflexión del futuro profesor de matemáticas cuando transita de la formación universitaria al escenario de la práctica docente y su implicación en la relación teoría práctica. Así el contexto de esta problemática se enmarca además en el campo de la iniciación en el desarrollo profesional de futuros profesores de matemáticas en el contexto de las prácticas de enseñanza.

### 1.1.1 Área problemática

Desde hace más de una década en el área de la Educación Matemática, las directrices y prioridades internacionales que se destacan en las normas profesionales para la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores de matemáticas, refieren entre los factores primordiales para el desarrollo profesional de los profesores la reflexión del profesor sobre el aprendizaje y la enseñanza, la actualización y desarrollo de su conocimiento y la necesidad de la formación continua (NCTM, 1991).

Como se plantea en el International Handbook of Mathematics Teacher Education (Sullivan y Wood, 2008), la investigación sobre la formación y el aprendizaje de los profesores, se ha convertido en un campo de estudio fundamental para la Educación Matemática. Varios estudios abordan inquietudes relativas a las competencias requeridas para un buen desempeño docente. Entre las principales cuestiones que trata este Handbook, destacamos aquellas que giran en torno a la práctica docente (qué es lo que debe hacer un profesor), al conocimiento profesional (qué debe saber) y al currículo (qué se

le debe enseñar). Mencionan que una proporción amplia de esta investigación se ocupa del conocimiento necesario para que el profesor pueda enseñar de manera eficaz los contenidos de matemáticas (Sullivan y Wood 2008) y otra proporción importante demuestra preocupación por las prácticas de enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas (Empson y Jacobs, 2008).

En esta misma área de investigación, organizaciones a nivel internacional han venido otorgando importancia a la formación de profesores (continua e inicial), como un elemento clave para el desarrollo de los sistemas de educación (UNESCO, 2012). Los informes han hecho énfasis en el conocimiento de los docentes para enseñar, en su responsabilidad para incorporar y significar dicho conocimiento en la práctica profesional y en su repercusión sobre la calidad de la educación (UNESCO, 2014). De este modo, la formación de profesores de matemáticas, viene constituyéndose en el principal desafío para lograr una educación matemática de calidad. Muestra de esto se reporta en informes sobre la calidad y prospectiva de los docentes (OEI, 2010).

El Third International Handbook of Mathematics Education (Kieran, Krainer & Shaughnessy, 2013), pone de relieve varias cuestiones sobre la distancia entre la teoría de los investigadores y las prácticas de los profesores, aborda la dualidad dinámica de la investigación y el desarrollo profesional, y ubica la reflexión como uno de los tres aspectos importantes en este campo de investigación para aproximar la teoría y la práctica. Una proporción importante de investigaciones que se dedican al desarrollo profesional (White, Jaworski, Agudelo-Valderrama y Gooya, 2013), observan el equilibrio entre el conocimiento del oficio del maestro (nivel local y particular) y el conocimiento académico (niveles teóricos y generales).

Para la comunidad internacional de investigadores especializados en la línea de la formación de profesores de matemáticas, la relación entre la teoría y la práctica es foco de atención constante, pero sobre todo la búsqueda de un modo para estrechar esa relación, planteando estudios en comunidades de colaboración con proyectos de investigación educativa, en las que existe una muy estrecha colaboración entre profesores de matemáticas (e.g. action research). La profusa investigación da cuenta de este tipo de investigación colaborativa, que toma en consideración las condiciones y restricciones de las prácticas que afectan a los profesores y la enseñanza, principalmente abordando la problemática desde el punto de vista de la formación continua.

En las discusiones académicas en congresos durante los últimos diez años, uno de los principales objetos de investigación en la línea de la formación de profesores de

matemáticas ha sido la reflexión sistemática sobre la práctica, dado que se considera elemento necesario para el desarrollo profesional (Schöenfeld y Kilpatrick, 2008); los estudios resaltan la importancia de la reflexión para conducir al entendimiento de la práctica, el desarrollo de la teoría y el desarrollo profesional (Jaworski, 2006; Climent, y Carrillo, 2003). Otros estudios plantean la importancia de la práctica docente en la formación inicial de profesores de matemáticas para favorecer la vinculación de los diversos tipos de conocimiento de manera explícita (Ball, Hill y Bass, 2005).

Desde hace varios años, en las reuniones celebradas por el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), evidencian preocupación constante en relación con estudio de la reflexión. En el PME-32 (2008) se consideró la reflexión en la formación de profesores de matemáticas desde tres perspectivas: la reflexión sobre la experiencia profesional, que contribuye al desarrollo de los conocimientos en matemáticas y didáctico de los profesores en servicio (Li, Huang y Tang, 2008); el acercamiento del profesor a la reflexión, que conduce a cambios en su práctica (Kwon y Orrill, 2008), y las reflexiones que se dan al interior de una comunidad de práctica sobre el conocimiento del tema y sobre el conocimiento del contenido pedagógico, que ayudan a los profesores a ser reflexivos, motivándolos a discutir críticamente sus experiencias de enseñanza.

Años después varios investigadores, en el PME 38 del 2014, comunicaron la importancia de avanzar en cuestiones relativas al cómo promover la reflexión y del cómo el futuro profesor de matemáticas incorpora el conocimiento profesional durante procesos de reflexión. Caber destacar los informes de investigación que manifiestan la influencia que dichos constructos tienen en el desarrollo profesional y la relevancia para otorgar sentido a la práctica docente (Tuyin, Richardson, Suazo y Yigit, 2014).

En la línea del conocimiento profesional del profesor de matemáticas existe gran interés en estudiar el desempeño de futuros profesores, con el objeto de comprender el conocimiento para la enseñanza que pondrán en juego durante el desarrollo de su tarea profesional. Más recientemente, en el área de la educación matemática, los estudios internacionales desvelan preocupación por la relación y equilibrio entre el conocimiento práctico y el conocimiento académico (Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick y Leung, 2013).

En el International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-33 (2009) se manifestó la preocupación por discutir sobre los modelos que permiten organizar el conocimiento del profesor de matemáticas, se presentaron: Knowledge Quartet (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2005); Mathematical knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008) y Mathematics for teaching (Davis y Simmt, 2006). Este último se

basa en el “estudio conceptual” (concept study), modelo que permite al profesor mejorar la enseñanza y hacer provechosas las experiencias de aprendizaje de los estudiantes, a través, de la comprensión matemática de los conceptos (o contenido) y el análisis de la lección.

Actualmente han surgido espacios de discusión a nivel internacional, al interior de grupos académicos y de la línea de investigación sobre los profesores que giran en torno a tópicos puntales de las matemáticas, como es el caso del álgebra escolar, destacándose los Topic Study Group (TSG) del ICME (International Congress Mathematics Education). La edición del año 2016 centró sus esfuerzos en las discusiones en torno al aprendizaje y enseñanza del álgebra, en particular, el desarrollo curricular, las prácticas docentes y el cambio, dando prioridad a las limitaciones de aprendizaje y a los significados que se da al álgebra en cada etapa escolar.

Los temas enunciados y objetos de investigación considerados: la reflexión y el conocimiento profesional, no han dejado de ser inquietudes en la línea de formación de profesores de matemáticas en las reuniones internacionales de educación matemática. Por ejemplo, en el PME-39, durante la discusión del grupo G02 (formación profesores) se puso de manifiesto la necesaria integración del aprendizaje pedagógico y matemático a lo largo de la formación inicial de profesores de matemáticas. Merrilyn Goos y Jana Visnovska (2015) plantearon la desarticulación entre la formación teórica y la práctica, los modelos curriculares en la formación inicial, que suelen tratar de manera aislada la estructura académica y la estructura práctica.

En el PME 40 celebrado en Hungría el pasado 2016, tuvo lugar una discusión sobre la pertinencia de estos constructos (conocimiento profesional y reflexión), en relación con el desarrollo profesional y el crecimiento profesional (Lin y Rowland, 2016).

Estos antecedentes muestran que en la formación de profesores seguimos preguntándonos cómo interrelacionar la teoría y la práctica (Contreras, 2010). Para afrontar esa problemática los planes de formación inicial de profesores han otorgado relevancia al Prácticum, se confía en que este inicie a los futuros profesores en las situaciones profesionales (Pérez-Gómez, 2010). La problemática es asumida por el enfoque realista (Korthagen, 2010) que trata de superar la ruptura teórico-práctica, buscando que los profesores puedan fundamentar desde la teoría los problemas surgidos en la práctica a través del aprendizaje reflexivo (Korthagen, 2010; Alsina, 2007).

Estos estudios sugieren que el desarrollo profesional del profesor debe entenderse como un proceso de continuo cambio, el cual surge como resultado del sentido que dan a

sus experiencias docentes; sin embargo, este cambio tendrá que ser de manera autónoma y motivado por los propósitos del profesor (Keazer, 2014). De este modo, entendemos necesario abordar en el inicio del desarrollo profesional al futuro profesor, reconociéndolo cómo profesor que reflexiona y que afronta situaciones de la práctica, con capacidad para examinar sus fundamentos conceptuales, tomar conciencia de sus concepciones e ir ganando responsabilidad para profundizar en el conocimiento para otorgar sentido a su práctica docente.

### **1.1.2 La problemática**

Como se vio anteriormente las investigaciones especializadas en el área consideran importante, en los programas de formación inicial de profesores de matemáticas, atender las diferentes “tareas profesionales” que definen la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2007) y entender que el profesor puede conocer desde la práctica de enseñar matemáticas; enfatizando en los procesos de reflexión, como ocasión en la que el estudiante para profesor desarrolla esos conocimientos y habilidades.

Generalmente el inicio de las prácticas de enseñanza en la formación inicial está rodeado de dudas y temores por parte de los practicantes, esto se debe al complejo proceso de enseñar matemáticas; la racionalidad técnica derivada del conocimiento teórico y procedente de su formación, no le basta para enfrentar la diversidad de situaciones profesionales (Schön, 1992).

Sin embargo los futuros profesores conceden importancia a este periodo de formación práctica, y reconocen que las prácticas de enseñanza son un escenario, emocional e intelectualmente desafiante, y al mismo tiempo una oportunidad para vincular diversos tipos de conocimiento de manera explícita, confían encontrar aportes y mayor información para saber el cómo y qué enseñar.

La relevancia que los tutores otorgan a la experiencia de los practicantes, la importancia a la formación didáctica (teórica) y la escasa autonomía que ofrecen a los practicantes, colabora a que muchos de ellos, sientan frustración en su desempeño, reconociendo tener fortalezas del conocimiento de tipo teórico y debilidades del conocimiento en y para la práctica. En palabras de Schön (1992) carecen de “conocimiento en la acción”.

Reconociendo que el prácticum es una ocasión propicia para implicarlos en procesos de reflexión, en este contexto encontramos necesario afrontar la problemática, ayudando a los futuros profesores en las prácticas de enseñanza de la manera más provechosa. Dada

la importancia que este periodo formativo tiene para coordinar la formación teórica universitaria con la formación práctica, se destaca la pertinencia de plantear un programa formativo que permita generar situaciones en las que el estudiante confronte su formación didáctica teórica, con la observación de la actuación del tutor y con su propia apreciación de lo que es la práctica profesional.

La problemática planteada ha dirigido la atención de varios estudios en torno a la reflexión, fundamentalmente, para analizar su naturaleza, las características que permiten identificarla, y el nivel de profundidad que puede ser logrado (Alsina, 2010; Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012) en la formación inicial. Otros estudios se han interesado en promover y estudiar la reflexión en las prácticas (Flores, 2007; Binti, 2010) tratando que los estudiantes se inicien en su desarrollo profesional, y otorguen profundidad a sus conocimientos.

Por tanto, la formación debe involucrar estrategias de formación que permitan entender la práctica como la oportunidad para que los estudiantes puedan relacionarse mejor con el conocimiento profesional, dándole sentido a este en su práctica docente; de este modo, cobran significado los conocimientos teóricos que dan fundamento a las acciones de planificar, evaluar recursos, diseñar y seleccionar tareas para la enseñanza.

Con la problemática planteada nos preguntamos: ¿Cómo promover en futuros profesores de matemáticas procesos de reflexión durante las prácticas? Nos interesa analizar dichos procesos de reflexión que den cuenta de: ¿Cómo evolucionan los problemas profesionales que definen y enfrentan durante los procesos de reflexión? ¿Cómo planean y transforman sus tareas de enseñanza producto de la reflexión? ¿Cómo manifiestan su conocimiento profesional durante los procesos de reflexión para otorgar sentido a las situaciones de su práctica docente? Con esto, concretamos las respuestas al interrogante: ¿Cuáles son los procesos de reflexión que manifiestan con más claridad los futuros profesores?

Cabe mencionar, además, la motivación que da origen a este estudio, en una inquietud de tipo personal, provocada de mi experiencia durante la formación de profesores de matemáticas en el contexto de la Orinoquia Colombiana. En la Universidad de los Llanos, al igual que en otras universidades Colombianas, se desarrollan dos tipos de prácticas de enseñanza en la formación inicial de profesores: las prácticas formativas, incluidas en asignaturas de tipo teórico-prácticas, y las prácticas profesionales docentes desarrolladas al final de la formación como requisito de titulación. En ambos casos los estudiantes, asesorados por un tutor profesional, asisten a Instituciones Educativas para

completar su formación profesional. Nuestro estudio se centra en las prácticas profesionales, más próximas al final de los estudios conducentes a la graduación del estudiante como futuro profesor de matemáticas.

### **1.1.3 Línea de investigación**

En el área de la educación matemática este problema de investigación tiene como objeto el estudio del profesor de matemáticas y su avance como profesional, dentro del campo de Formación y Desarrollo de los Profesores de Matemáticas (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001). Las investigaciones que se abordan en este campo se ubican en dos líneas fundamentales, las que examinan el desarrollo profesional, en la que ubicamos la reflexión, y la que se ocupa del conocimiento profesional, que atiende el estudio de su naturaleza y evolución. Dentro de las dos líneas mencionadas ubicamos el objeto de estudio, la reflexión, que concentra la problemática descrita anteriormente.

## **1.2 Pertinencia y justificación de la investigación**

La investigación encuentra pertinencia en las exigencias y directrices nacionales e internacionales para la formación de profesores, pero también en la realidad colombiana en la formación inicial de profesores de matemáticas

Apoyan su pertinencia las necesidades manifestadas en informes producidos por los comités de capacitación docente de la región de la Orinoquia colombiana, en las conclusiones de los comités de prácticas docentes de la Universidad de los Llanos y en las reflexiones al interior de cursos de formación en la línea de Didáctica de la Matemática. Estas expresiones han brindado la oportunidad para:

- Apreciar la necesidad de crear en los futuros profesores de matemáticas, actitudes y procesos de reflexión durante las prácticas de enseñanza, para iniciarlos en su desarrollo profesional.
- Entender que en la formación inicial no es posible proporcionar todo el bagaje de conocimientos necesario para afrontar las diversas situaciones, las cuales se le presentan a futuros profesores de matemáticas en su labor profesional.
- Comprender que las prácticas de enseñanza de matemáticas requieren una visión más amplia de la enseñanza-aprendizaje, que supere la controlada y tradicional
- Entender que el análisis y la reflexión durante las prácticas de enseñanza dan inicio en la construcción del conocimiento profesional del profesor



- Identificar la necesidad de formar un profesor con hábitos para reflexionar sobre el proceso que se produce en el aula que le permita apoyarse en su conocimiento matemático y su creatividad.

Diferentes colectivos institucionales de la Universidad de los Llanos han coincidido en el interés por desarrollar estrategias que fomenten la reflexión durante las prácticas de enseñanza, manifestando su disposición para observar y acompañar la actuación de los futuros profesores en el contexto de las prácticas de enseñanza, lo cual refuerza la viabilidad del proyecto (Castellanos, Flores. y Moreno, 2014).

La pertinencia de la investigación está soportada en las prioridades y directrices internacionales sobre la formación de profesores, las cuales otorgan importancia a promover la reflexión durante la formación profesional de profesores, para que se inicien en su desarrollo profesional y puedan ser críticos sobre su práctica (NCTM, 1991, 2000).

La pertinencia de esta investigación en el contexto legal de la formación inicial de profesores de matemáticas en Colombia, se justifica por su contribución y coherencia con varios propósitos referidos a las competencias básicas y profesionales del educador colombiano (Resolución 6966 de 2010 y la Resolución 5443 de 2010). En particular contribuye a las bases de transformación en la formación de profesores (Ley 30 de 1992, Ley 115 de 1994) y coincide con las principales finalidades de la formación de profesores en el “desarrollo de una teoría y práctica pedagógica como eje fundamental del saber profesional del profesor” (Decreto 709 de 1996).

La relevancia, del estudio está dada por su implicación desde el modelo formativo resultante, el cual se considera un aporte para el inicio y fortalecimiento del desarrollo profesional del profesor (Decreto 1295 de 2010) y en especial, al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, con lo que se facilita su interpretación en la práctica de aula (MEN, 1998, 2006).

Además de la relevancia anunciada en el contexto internacional, existen investigaciones de autores colombianos que contribuyen a darle una importancia local (Bautista y Salazar, 2008; Agudelo-Valderrama, 2008; Guacaneme, 2013), quienes concluyen que no basta con la formación disciplinar del profesor de matemáticas, se requieren conocimientos profesionales (como los didácticos) para entender la complejidad de la práctica docente en su ejercicio profesional. Y estos conocimientos teóricos tienen que incidir en su práctica profesional, lo que nos anima a proponer la reflexión como procedimiento que facilite la coordinación teoría - práctica.

El estudio se enmarcó en el proyecto de investigación del grupo GHEMA "Formación

en y hacia la práctica docente de futuros profesores de matemáticas de la región de la Orinoquia colombiana" (Colciencias: COL0084588, 2013:2016), que involucró el diseño y ejecución de una propuesta de formación durante el prácticum sobre la base de la promoción de la reflexión sistemática.

Atendiendo las cuestiones explicitadas anteriormente, queda justificada la pertinencia del propósito de esta investigación, por fomentar la actitud reflexiva e interpretar los procesos de reflexión de los futuros profesores para poder ayudarlos a autorregular la capacidad de construir nuevo conocimiento desde la práctica (Flores, 1998), con lo que esperamos comprender mejor la formación de los futuros profesores de matemáticas durante las prácticas de enseñanza.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

Estudiar la reflexión sobre situaciones de la Práctica Profesional Docente en el proceso de iniciación al desarrollo profesional de estudiantes para profesor de matemáticas.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

OE1. Diseñar e implementar un programa de formación durante las prácticas de enseñanza, que favorezca la iniciación de los estudiantes en su desarrollo profesional. Se concreta en:

1.1. Diseñar el curso de práctica docente para que se facilite a los estudiantes atravesar ciclos de reflexión sobre diversos problemas derivados de su práctica.

1.2. Poner en práctica un experimento de enseñanza, cubriendo las etapas de una investigación de diseño, que permita planificar, implementar y revisar cada ciclo antes de pasar al siguiente.

1.3. Describir el desarrollo y el análisis paralelo del diseño instruccional explicando el funcionamiento del experimento y las adaptaciones que informan de los procesos de reflexión seguidos por los participantes, así como las acciones que contribuyen en ello.

OE2. Analizar el proceso de reflexión manifestado por los futuros profesores de matemáticas durante el desarrollo del curso de práctica docente. Se concreta en:

2.1. Estudiar la manifestación de acciones reflexivas que satisfacen las fases de reflexión

2.2. Apreciar cómo ha ocurrido la reflexión a través de:

- a) la evolución en la formulación de problemas profesionales detectados,
- b) la manifestación del conocimiento profesional usado al dar sentido a los problemas
- c) las características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas.

OE.3. Sintetizar algunos elementos que aporta la investigación para el diseño e implementación del curso de prácticas de enseñanza en la formación inicial del profesor de matemáticas en un contexto similar al de estudio.

# MARCO TEÓRICO

## **Índice del capítulo**

### Capítulo 2. La formación de profesores de matemáticas

- 2.1 Formación profesores de matemáticas
- 2.2 Desarrollo profesional del profesor de matemáticas
- 2.3 Conocimiento profesional del profesor de matemáticas
- 2.4 Reflexión
- 2.5 Antecedentes de la investigación
- 2.6 Investigaciones sobre reflexión en la formación de profesores
- 2.7 Síntesis del capítulo

### Capítulo 3. Referentes del curso de formación

- 3.1 Concepciones sobre la enseñanza del álgebra escolar
- 3.2 Álgebra escolar



## **Capítulo 2. La formación de profesores de matemáticas**

Este capítulo, expone en cinco epígrafes las bases teóricas que orientan el estudio. El primero exhibe los presupuestos para la formación inicial de profesores de matemáticas, con especial atención en el contexto colombiano; esboza fundamentos que orientan modelos formativos y plantea nuestra afiliación a la perspectiva del enfoque realista y, finalmente, resalta la reflexión en la formación de profesores y sus implicaciones.

El segundo epígrafe aborda referentes que conciben la idea de desarrollo profesional, valorando aquellos fundamentos que involucran la reflexión como característica de dicho desarrollo. El tercer epígrafe resume los modelos de conocimiento profesional del profesor de matemáticas y presenta nuestra postura desde la perspectiva teórica del análisis didáctico tal como se concibe y desarrolla en el Grupo de Investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. PNA».

El cuarto epígrafe describe las bases teóricas asumidas en el estudio en torno a la reflexión, cómo se concibe, características y rasgos del profesor involucrado en un proceso reflexivo; asimismo profundiza en los referentes que fundamentan la concepción de los problemas profesionales como objeto de reflexión y describe el modelo de reflexión del estudio. El último epígrafe resalta aquellas investigaciones que han abordado la reflexión en la formación de profesores para enfrentar el problema de la relación teoría práctica.

### **2.1 Formación profesores de matemáticas**

La formación inicial de profesores de matemáticas ha tomado importancia en los últimos tiempos, se considera un reto para diferentes naciones (OEI, 2010). Estos informes asocian la calidad de la educación con la formación de los profesores (UNESCO, 2012). Arrancan de la premisa de que el profesor es responsable de incorporar y significar el conocimiento en la práctica profesional (UNESCO, 2014). En consecuencia varios estudios han desenvuelto ideas básicas acerca de la manera en que los profesores de matemáticas deberían ser formados (Goos y Visnovska, 2015; Sánchez, 2011).

#### **2.1.1 Tensiones y presupuesto en la formación de profesores**

Durante varios años se ha cuestionado la llamada “tradicción en la formación docente”, en la cual el conocimiento abstracto es considerado un estándar alto y de más valor que las capacidades relacionadas con la práctica docente de aula y otros papeles profesionales.

En estos modelos se trata de manera aislada la práctica docente de la formación teórica; la instrucción es descriptiva (por explicación) y prescriptiva (repetición de comportamientos). Estos modelos dieron origen a crear una brecha entre la teoría y la práctica (Contreras, 2010). En el campo de la Educación Matemática, se sigue manifestando la necesidad del equilibrio entre el conocimiento del oficio (práctico) y el conocimiento académico procedente de la formación (Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick y Leung, 2013).

Una revisión iniciada por Kessels y Korthagen (1996) deja ver el interés por la problemática en campos como la antropología, la epistemología, la ética y la educación (Schon, 1987; Fenstermacher, 1994). Los autores desarrollaron modelos alternativos y centrados en el conocimiento justificados en dominios filosóficos, abordando la controversia entre las concepciones de racionalidad de Platón y Aristóteles (episteme vs. Phronesis).

En consecuencia de lo anterior se dio la reevaluación del conocimiento de tipo teórico, considerando la existencia del conocimiento que tiene origen en la práctica. Idea que inicialmente vinculada a la dicotomía teoría-práctica, centró su interés en la práctica, con modelos formativos basados en la repetición de actuaciones y en la instrucción dirigida. Posteriormente surge la necesidad de comprender lo que sucede en las aulas (Azcárate, Rodríguez y Rivero, 2007), dando oportunidad de la revisión del conocimiento teórico.

La influencia del enfoque cognitivo en la formación de profesores en matemáticas ha generado programas y estudios que han dado relevancia a los conocimientos, concepciones, creencias y actitudes de quien enseña matemáticas (García y Llinares, 1999). Los modelos formativos bajo esta perspectiva, resaltan el papel del profesor en los procesos de aprendizaje escolar (Walshaw, 2012).

La atención se ha centrado en la forma de interpretar y actuar del profesor, en cómo piensa, en su saber, para con ello intentar comprender lo que sucede en el aula. En ese sentido los planteamientos sobre la reflexión en la formación inicial son relevantes, no sólo por su implicación en la adquisición de habilidades, sino también para conducir la autorregulación de nuevo conocimiento desde la práctica (Flores, 1998).

En el caso colombiano las finalidades de la formación de profesores se enmarcan en el desarrollo dinámico de la teoría y la práctica pedagógica, como parte fundamental del saber profesional del educador (MEN, 1994; 1992).

La formación de profesores asume el reto de orientar las competencias que permitan al futuro profesor dotar de sentido su saber teórico durante su desempeño profesional (Decreto 1295 de 2010). Los fines educativos promueven la relación: docencia -

investigación como parte del desarrollo del profesor como profesional (Decreto 2450 de 2015).

En unísono con las tendencias internacionales, las bases que definen la formación de profesores en Colombia, han considerado con prioridad formar profesores para reflexionar y ser críticos sobre su práctica. Para esto presumen la existencia de actitudes reflexivas, críticas y creativas (Resolución 5443 de 2010).

Para desarrollar las competencias en la formación de docentes, se procura el desarrollo: del saber disciplinar, de las capacidades relativas al saber pedagógico y a la práctica docente, y de otros asuntos profesionales. (Resolución 2041 de 2016). Las disposiciones han sido tímidas para advertir la formación inicial en el ámbito de las prácticas de enseñanza. Sin embargo, resaltan la complejidad de la práctica docente y la necesidad de cualificar para el ejercicio profesional.

A nivel internacional, las premisas anteriores han conllevado apuestas distantes a los enfoques tradicionales de la formación de profesores de matemáticas; es el caso de la formación de profesores vista desde la perspectiva realista, la cual trata de las realidades propias de cada espacio y tiempo para la formación de profesores.

El enfoque realista en la formación docente (Melief, Tigchelaar, Korthagen y Van Rijswijk, 2010) se sustenta en revelaciones de la relación entre el conocimiento y el comportamiento del profesor, es un modelo fundamentado en el “aprender de la práctica”.

### **2.1.2 Prácticas de enseñanza en la formación de profesores**

En la formación inicial de profesores de matemáticas, las prácticas de enseñanza (o prácticum) ocupan lugar destacado, sus características y dinámicas han sido objeto de estudio (Empson y Jacobs, 2008).

El prácticum se plantea como el escenario para favorecer la vinculación de diversos tipos de conocimiento (teórico y práctico) de manera explícita (Ball; Hill y Bass, 2005). Varios estudios se han interesado en la dinámica formativa que le apuestan a la reflexión en y sobre la práctica para favorecer dicha vinculación (White et al., 2013). En Colombia, la noción de práctica docente se concibe como el proceso dinámico a fin de movilizar la praxis en relación con el saber y el desarrollo de los profesores de matemáticas (Bautista y Salazar, 2008).

Desde la perspectiva del futuro profesor de matemáticas (FPM), el prácticum es una experiencia que implica transitar de su rol de estudiante al de profesor y exige un conocimiento que es necesariamente complejo y situado. Este periodo formativo está lleno



de situaciones que, al mismo tiempo, son emocional e intelectualmente desafiantes, en las cuales se ponen en uso los elementos conceptuales que le permiten afrontar la docencia, manifestando la capacidad para construir nuevo conocimiento para la acción (Linares, 2012).

Para el FPM el prácticum, según Contreras (2010), es una situación de novedad, es interrumpir el flujo del sentido común, de lo planeado, es mirar a lo vivido buscando su novedad, diferencia, interpretación, dejándose decir por ella (op. cit. p. 67). En consecuencia, es la oportunidad que tiene para dar sentido a su experiencia como alumno y revisar sus saberes. De este modo, el saber y la experiencia tienen relación directa, el saber nace de lo vivido, de lo pensado como propio (op. cit. p. 68).

Para Azcárate (1999) la práctica docente es el medio que otorga viabilidad al saber de naturaleza práctica, integrador de otros conocimientos que orientan y dirigen su acción. Durante las prácticas de enseñanza, el FPM, aunque no es completamente autónomo, afronta su futura labor profesional. Coincidiendo con la autora, reconocemos que la práctica no es simplemente la actuación, ni aplicación de un saber-hacer irreflexivo o inconsciente.

Para Brubacher, Case y Regan (2005), las prácticas en el aula son el escenario donde se pone en juego las posibilidades del futuro profesor, constituyendo la alternativa de actuación que inicia al desarrollo profesional. Este periodo es un proceso relativamente dinámico, para posibilitar la integración entre teoría y práctica a través de procesos reflexivos.

La práctica docente en la etapa formativa, según Galvao y Reis (2002), es “una experiencia trascendental para iniciar en el desarrollo profesional de los futuros profesores” (p. 166); suscita la construcción de un conocimiento profesional contextualizado, al tiempo que promueve cambios, relacionados con:

- a) el conocimiento profesional,
- b) las concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje,
- c) las satisfacciones y las preocupaciones,
- d) las conductas referentes a sí mismo y los otros.

En concreto las prácticas de enseñanza (o prácticum), es la ocasión para realizar articulación entre los saberes didácticos y matemáticos adquiridos durante la licenciatura, con las exigencias que involucran el desenvolvimiento inmediato frente a los alumnos. Es la oportunidad para involucrar a futuros profesores de matemáticas en procesos de reflexión, de modo que, puedan experimentar y afrontar situaciones que les obligan a desarrollar su

conocimiento práctico, a partir de la reflexión crítica sobre la propia práctica lectiva, con lo que afloran las concepciones personales, su visión sobre las formas de actuar en el aula y comparan sus esquemas con otros (tutor y pares). En consecuencia van otorgando sentido al conocimiento profesional, en la medida que reflexionan durante la práctica docente sobre situaciones de tipo profesional.

### **2.1.3 Enfoque realista para la formación de profesores**

Como mencionamos antes, diversos modelos de formación de profesores tratan de manera diferenciada la formación teórica de la práctica docente, promoviendo procesos instructivos de carácter descriptivo y prescriptivo ampliando la brecha tradicional entre la teoría y la práctica. Estos dos campos deberían influenciarse (Malara y Zan, 2002), ya que si el investigador, generador de conocimiento teórico, atiende a problemas que se alejan demasiado del campo de interés del profesor, sus trabajos corren el riesgo de quedarse en el vacío. Igualmente si el profesor actúa sin fundamentar sus decisiones en teorías que sustenten su práctica, convertirá la docencia en artesanía, donde puede que los profesores artistas triunfen, pero otros pueden limitarse a realizar un trabajo rutinario o a aplicar una tecnología educativa, que no atiende a la dimensión humana de la educación.

Para abarcar esta relación entre conocimiento teórico y práctico, nos posicionamos en la perspectiva formativa del enfoque realista, que promueve la reflexión para lograr acercar dichos campos. Según Melief, Tigchelaar, Korthagen y Van-Rijswijk, (2010), la formación desde el enfoque realista, permite superar los obstáculos de dicha interacción, buscando que los profesores puedan fundamentar desde la teoría los problemas surgidos en la práctica (Alsina, Busquets, Esteve y Torra, 2006).

En esta investigación entendemos el profesor como generador de situaciones de aprendizaje escolar a partir de la realidad de su práctica. Por tanto, nos adherimos a los principios del enfoque realista para la formación de profesores. Valoramos y consideramos del modelo de formación denominado aprendizaje realista, instrumentos y experiencias (Alsina y Planas, 2009). Los principios de este enfoque apuestan de manera implícita a la reconstrucción del conocimiento profesional del profesor (korthagen, 2005). Se fundamenta en la teoría sociocultural del aprendizaje humano (Vygostky, 1978), en la idea del profesional reflexivo (Schön, 1983) y en el enfoque realista del aprendizaje.

#### ***Los principios de la formación realista del profesorado***

La formación realista se basa en cinco principios que en la Tabla 2.1 resumimos, fruto

de la síntesis de diversas fuentes alusivas a dicho enfoque.

Tabla 2.1. *Principios de la formación de profesores en el enfoque realista*

<b>Principio 1:</b>	<i>El punto de partida son las cuestiones que emergen de la práctica y que experimenta el FPM en un contexto real de aula</i>
Se busca en principio relacionar de manera inductiva las experiencias (observaciones sobre situaciones concretas de aula) con las representaciones de los FPM (concepciones, sentimientos, necesidades e intereses). La introducción de referentes (teorías específicas sobre el aprendizaje y la enseñanza) suceden posterior y producto de la confrontación (Alsina, 2009)	
<b>Principio 2:</b>	<i>La formación pretende fomentar la reflexión sistemática.</i>
La reflexión sistemática es un proceso de cinco fases, denominado el ciclo reflexivo ALaCT, recorrer dichas fases se constituye hábito (aprendido de las experiencias), en un proceso natural y casi autónomo (Korthagen et al., 2001)	
<b>Principio 3:</b>	<i>El aprendizaje es un proceso social e interactivo.</i>
Procura la construcción colectiva. La discusión en grupo promueve la reflexión. Recibir retroalimentación lleva a los FPM a descubrir y analizar otras posibles maneras de estructurar sus experiencias, concepciones y habilidades.	
<b>Principio 4:</b>	<i>La formación destaca tres niveles en el aprendizaje</i>
<b>Representación:</b> se reacciona de manera inconsciente ante situaciones de la práctica, obedece a necesidades, valores o expectativas;	
<b>Esquema:</b> se reflexiona sobre una situación, sobre discusiones de ella o sobre situaciones similares; conduce a conceptos y características para describir la práctica.	
<b>Teoría:</b> se construye de manera lógica una teoría coherente a partir de conocimientos subjetivos anteriormente surgidos.	
<b>Principio 5:</b>	<i>Fomenta la autonomía y la construcción autorregulada de la competencia profesional</i>
La formación realista se interesa en el desarrollo de la propia identidad del profesor en formación, la cual es la base para construir y transmitir a otros su potencial.	

### ***El aprendizaje realista en la formación del profesor***

A partir varios estudios empíricos realizados en la formación didáctica y disciplinar de los profesores de matemáticas, Esteve, Melief y Alsina (2009), describen un modelo de formación, denominado “aprendizaje realista”. Con base en los principios que sustentan el enfoque realista para la formación de profesores, los autores concretan la perspectiva formativa en cinco presupuestos: a) Co-construcción de conocimiento; b) Colaboración entre iguales; c) Reflexión individual y grupal; d) Autorregulación; e) Desarrollo de competencias profesionales. En esta perspectiva, se da importancia a la competencia reflexiva en la formación inicial de profesores (Alsina, 2009).

Las bases del aprendizaje realista fueron abordados por Korthagen et al., (2001) en perspectiva de la formación de profesores. El autor exalta la oportunidad que esta visión

ofrece al profesor para: a) conocer diversas maneras de actuar en la práctica; b) saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente; y c) reflexionar sobre ello sistemáticamente. Desde esta perspectiva, el autor sustenta el aprendizaje reflexivo, el cual se constituye el principio general de la formación de profesores surgido del enfoque realista.

### ***El aprendizaje reflexivo***

El aprendizaje reflexivo tiene su origen filosófico en los planteamientos de Platón y Aristóteles (impulsores del diálogo como elemento clave de la reflexión y del pensamiento crítico), pasando por Rousseau y Dewey (máximos representantes del aprendizaje a través de la experiencia), hasta interpretaciones más modernas (Bolton, 2010; Korthagen et al., 2010). El aprendizaje reflexivo se ha definido como una perspectiva formativa que proviene principalmente de contextos de tradición anglosajona (Bolton, 2010; Brockbank y McGill, 1998).

Tal como señala Perrenoud (2001), después de los primeros trabajos de Argyris y Schön (1978) la incorporación de estrategias de aprendizaje reflexivo han inspirado numerosas experiencias de formación en países anglosajones.

Siguiendo las ideas de Schön (1983), se han explorado diferentes aspectos del aprendizaje reflexivo, resaltando la importancia que tiene la reflexión en la formación de los profesores. A partir de este replanteamiento, las habilidades reflexivas son ahora consideradas como esenciales por su papel en la adquisición de habilidades lectivas y en la reformulación del conocimiento, la práctica y la experiencia humana (Korthagen et al., 2010; Perrenoud, 2001; Bolton, 2010).

De este modo, el aprendizaje reflexivo se ha convertido en un propósito del enfoque realista. Por cuanto se da prioridad a las situaciones que surgen del contexto real del aula y que el aprendiz experimenta y cuestiona. En este tipo de aprendizaje, se espera que los aprendices puedan manifestar logros al interactuar con los demás, reflexionar es el motor que conlleva a contrastar para co-construir y reconstruir conocimiento (Álsina, Planas y Calabuig, 2009; Korthagen et al., 2001).

En los estudios reportados en el uso de la Tríada de Enseñanza de Jaworski (Potari y Jaworski, 2002), los autores dan cuenta de la reflexión de profesores en formación continua, explican que la reflexión se da además, en términos del aprendizaje en (y de) la práctica (Jaworski, 2006). Sin mayor profundidad, asocian este hecho con la noción de aprendizaje reflexivo del profesor, con lo cual, se acredita un rasgo que implica el cambio del profesor.

Según Korthagen et al., (2001) La reflexión sistemática, se concreta a través de la puesta en marcha de un ciclo de reflexión inscrito en el modelo ALaCT, Por tanto, el aprendizaje reflexivo en la formación de profesores, busca la alternancia entre “acción” y “reflexión”. Desarrollaremos este modelo de reflexión más adelante, cuando nos detengamos con mayor atención al propio concepto de reflexión.

#### **2.1.4 La reflexión en la formación de profesores de matemáticas**

Los programas de formación inicial presumen del bagaje de conocimiento entregado a los FPM, el necesario para enfrentar la futura labor profesional y ponen de manifiesto su capacidad para relacionar dicho conocimiento y su creatividad (Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012). Sin embargo, la complejidad de la práctica docente pone a prueba los marcos conceptuales de los FPM (Melief, Tigchelaar, y Korthagen, 2010), la racionalidad técnica derivada del conocimiento teórico no basta para enfrentar la diversidad de situaciones profesionales que enfrenta un profesional (Schön, 1992).

En este sentido, y en pro del éxito en la formación matemática de escolares se propone: formar un profesor de matemáticas con visión amplia, que supere la controlada y tradicional tendencia; implica un profesor que reflexione sobre cuestiones de la enseñanza-aprendizaje que se produce en el aula. Por tanto, se infiere que la reflexión puede impactar la red ideológica de teorías y creencias, y determinar el modo en que el profesor da significado al conocimiento teórico y práctico (Korthagen, Loughran y Russell, 2006)

Desde hace varios años se habla de la reflexión como una cualidad deseable del profesor de matemáticas (Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013). La profusa literatura internacional que informa experiencias de reflexión con profesores y que han considerado la reflexión sistemática sobre la práctica como un aspecto prioritario en la formación de los profesores (Schöenfeld y Kilpatrick, 2008), procura con ella el entendimiento de la práctica y el desarrollo de la teoría (Climent y Carrillo, 2003) y el desarrollo profesional (Jaworski, 2006). Otras investigaciones se han apoyado en ciclos, modelos y fases, de reflexión para abordar sus propósitos formativos (Smyth, 1989; Korthagen et al., 2001; Jaworski, 2006; Alsina, 2009; Parada, Figueras y Pluinage, 2009).

Adherirse al argumento de que la calidad y el éxito en la formación matemática de escolares está asociada al conocimiento y a las decisiones del profesor frente a situaciones problemáticas de su práctica, implica reconocer que para abordar esa problemática requiere profundizar en ella, relacionándose críticamente con conocimiento teórico sobre la misma.. Seleccionar este conocimiento teórico, apreciar aspectos que le llevan a

comprender la problemática de manera más precisa, disminuyendo la brecha entre teoría y práctica.

En este sentido, se considera fundamental promover en los profesores de matemáticas, cierto tipo de intervención directa y explícita, a través de características para la formación de profesores (inicial y continua). Lo que conduce a concebir los programas de formación sobre las bases teóricas que, permitan dar cuenta de la reflexión de profesores de matemáticas, del desarrollo de acciones y disposiciones reflexivas.

El reto para la formación consiste en ayudar a futuros profesores a incorporar conocimiento teórico sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de manera reflexiva, para tomar decisiones fundamentadas en sus intervenciones docentes, condición imprescindible si entendemos al profesor de matemáticas como un profesional práctico reflexivo (Flores, 2007).

Remontando a las ideas de Schön (1992), se puede apreciar la idiosincrasia de la epistemología de la práctica, concibiendo que el profesional práctico, tiene que actuar de manera reflexiva, el autor describió al «práctico reflexivo», como el individuo que «reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura» (p. 50).

## **2.2 Desarrollo profesional del profesor de matemáticas**

Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001), señalan que el campo de investigación de la formación de profesores abarca dos grandes líneas, que delimitan los estudios: el conocimiento y el desarrollo profesional. El primero se ocupa de comprender y establecer cuál es el conocimiento que tienen los profesores y les hace considerarse miembros de ese grupo profesional. El segundo cubre la forma en que el profesor se relaciona con su conocimiento, va ganando y siendo consciente de su responsabilidad y adquiriendo la categoría de profesional. Hay discrepancias sobre cuándo comienza el desarrollo profesional de un profesor, especialmente si durante la formación inicial comienza el desarrollo.

En este estudio hemos concebido el prácticum como un escenario que inicia al FPM en su desarrollo profesional, ya que es una ocasión para percibir problemas relacionados con su desempeño, valorar qué papel puede desempeñar el conocimiento recibido en los cursos formativos y contrastarlo con lo necesario para la práctica. En este entendido, conviene exponer nuestra postura sobre lo que asumimos como desarrollo profesional.

La mayoría de estudios sobre la formación de profesores que abordan el desarrollo

profesional a partir de la idea de Eraut (1997).

“proceso natural de crecimiento profesional en que un profesor va adquiriendo gradualmente confianza, ganancias de nuevas perspectivas, incrementando en el conocimiento, descubriendo nuevos métodos y asumiendo nuevos roles” (p. 10).

En esta investigación reconocemos nuestro interés en la noción del autor que refiere a “la ganancia de nuevas perspectivas”, pues permite abordar la idea del conocimiento profesional durante dicho proceso.

El desarrollo profesional para Jaworski (1993), es un proceso gradual y continuo con inicio en la formación inicial. En este proceso, el profesor va creciendo y madurando al enfrentar diferentes problemas y lograr confianza. En tal caso, el profesor se enriquece de nuevas perspectivas, incrementa su conocimiento y asumen nuevos retos. La autora considera el potencial de la reflexión crítica para el desarrollo. La idea del desarrollo profesional está involucrada en el reto de desarrollar la teoría en relación con las prácticas de enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 2006).

En la formación inicial de profesores de matemáticas, Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001) plantean el desarrollo profesional, como un proceso continuo, donde el FPM “va atravesando diversos papeles y momentos”, en ocasión al “tránsito de ser estudiante a ser profesor” (p, 23).

Para Climent (2002) el desarrollo profesional del profesor es “el proceso de aprendizaje continuo como profesional reflexivo y crítico de su práctica” (p. 120). Este proceso con lleva la “toma en consideración progresiva de la complejidad de dicha práctica y del aprendizaje de los alumnos, y el análisis de ella (análisis ligado a la acción), considerando cada vez más elementos y adaptándola al aprendizaje de los alumnos concretos” (p. 119). Esto supone el cuestionamiento continuo de sus conocimientos, el enriquecimiento y la ampliación de éste.

Otras posturas, conciben el desarrollo profesional del profesor, como el cambio que refleja el profesor a partir de su experiencia (Keazer, 2014), el desarrollo significa transitar con éxito por las situaciones y fases que la compleja realidad que la profesión le impone. El cambio lo constituye el sentido que los profesores dan, de manera autónoma, a las experiencias de su práctica.

Por su parte Ponte (2002), sitúa el desarrollo profesional en dos campos profundamente interrelacionados: a) el crecimiento del conocimiento y la competencia profesional, habilitando al profesor a resolver problemas complejos en una variedad de

dominios, y b) la formación y consolidación de la identidad profesional de éste.

Ponte y Chapman (2008), entienden el desarrollo profesional, como el proceso de crecimiento, donde el profesor es el protagonista, el proceso se caracteriza por la evolución continua, marcada por momentos y procesos de reflexión. En esta misma línea, otros autores aluden al conjunto de saberes y experiencias que un profesor posee y del que hace uso en el desarrollo de su trabajo docente y el cual, van construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Chamoso, Caceres y Azcarate, 2012).

En este estudio el desarrollo profesional, se refiere al proceso de aprendizaje continuo y natural de los FPM que involucra la incorporación discente a la dinámica educativa. La evolución ocurre en permanente proceso de revisión mediada por la reflexión de la propia tarea (práctica) que conllevan una evolución personal y en la que incide la elaboración de un conocimiento profesional cada vez más preciso.

### **2.3 Conocimiento profesional del profesor de matemáticas**

En el campo de la Educación Matemática estudios más recientes, consideran el conocimiento del profesor como un elemento que caracteriza el desarrollo profesional, este se refiere, a los dominios que debe poseer un profesor para tener éxito en la enseñanza de las matemáticas (Sosa, 2011p.11).

El conocimiento profesional del profesor según Carrillo (1998), lo constituyen saberes y dominios que otorgan sentido a la propia experiencia. Dicho conocimiento tiene carácter práctico, dinámico y evolutivo. Es un saber reflexivo, que permite abordar nuevas situaciones y es capaz de ofrecer autonomía al profesor. El conocimiento profesional del profesor, se caracteriza por ser personal, contextualizado, integrado, complejo y parcialmente tácito (Climent, 2005), de naturaleza social y crítica. Para algunos autores, como Ponte (1994), el conocimiento profesional es esencialmente conocimiento en acción, basado en el conocimiento teórico, la experiencia y la reflexión sobre la experiencia. En esta misma línea, Azcárate (1999) plantea que el conocimiento profesional se activa y elabora durante la propia intervención práctica (al abordar problemas profesionales). Este conocimiento se sitúa entre el conocimiento académico (naturaleza teórica) y el experiencial (práctica). Por tanto, no basta la experiencia, y cita la reflexión, como una clave para mediar entre teoría y experiencia. Es decir que resulta de la integración consciente entre saberes contextuales (experiencia) y formalizados (academia) Climent (2002).

Asumimos en este estudio que el conocimiento profesional del profesor de



matemáticas, en sus diversas manifestaciones, atraviesa por fases y formas, que vienen favorecidas por la reflexión (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2007). La reflexión sería a la vez contenido y generatriz. Es contenido, en cuanto se incluye en el conocimiento profesional, tomando como referente la práctica reflexiva; es generatriz, en cuanto es uno de los medios a través del cual se evoluciona en el desarrollo profesional, puede considerarse como una estructura que posibilita y sustenta el avance del conocimiento profesional.

Aunque no hay acuerdo unánime sobre el marco teórico que describe el conocimiento para enseñar matemáticas (Tirosh y Even, 2007), desde diversas posturas se viene concretando la naturaleza del conocimiento del profesor de matemáticas, lo que permite su caracterización. En el epígrafe siguiente se resumen algunos modelos que engloban los saberes concretos de un profesor de matemáticas.

### **2.3.1 Modelos de conocimiento**

En lo que sigue se exhiben algunos modelos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Nos centramos en los que han sido utilizados en estudios referidos a la formación inicial de profesores, o bien enmarcados en el enfoque del desarrollo profesional del profesor. Finalmente, presentamos las bases teóricas que orientan el modelo asumido en esta investigación.

Un referente básico para los estudios sobre el conocimiento profesional del profesor, es el aporte de Shulman (1986), quien describe el conocimiento del profesor en siete dominios. Se resalta la importancia en la comprensión del contenido con vistas a poder ser enseñado. Entre estos dominios, incluyó seis categorías: (a) conocimiento didáctico del contenido, (b) conocimiento pedagógico general, (c) conocimiento del currículo (d) conocimiento de los alumnos y de sus características, (e) conocimiento de los fines educativos y f) conocimiento de contextos educativos.

Advirtiendo en la propuesta de Shulman, la carencia de relaciones explícitas entre las componentes del conocimiento, Fennema y Franke (1992) manifiestan la naturaleza dinámica e interactiva del conocimiento de la enseñanza. Los autores incluyen como componentes del conocimiento del profesor: a) el conocimiento matemático, b) el conocimiento pedagógico, c) conocimiento de la cognición de los estudiantes y las creencias del profesor, y además describen sus relaciones.

Conocer cómo piensan y aprenden los estudiantes para profesor, es crucial es una categoría común para llevar a cabo una enseñanza efectiva que subyace de las propuestas de Shulman (1986, 1987) y la de Fenema y Franke (1992).

Posteriormente Bromme (1994) siguiendo presupuestos de Shulman, y en el campo de la Educación Matemática, describe el conocimiento del profesor de matemáticas en cinco componentes: a) conocimiento de la matemática, b) conocimiento de las matemáticas escolares, c) conocimiento de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, d) conocimiento pedagógico general, e) conocimiento didáctico del contenido.

A diferencia de las propuestas anteriores, el modelo de conocimiento denominado "Knowledge Quartet" tiene su origen en la práctica. Hemos destacado este modelo desarrollado, dado que, surge del estudio del conocimiento de profesores de matemáticas en formación. En los estudios de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) identificaron situaciones en las que tal conocimiento se percibe en la práctica de la enseñanza.

*El cuarteto del conocimiento*, involucra cuatro elementos que declaran la relación que el profesor establece con el conocimiento, los elementos son: a) Fundamentación o base (es la formación académica – teórica y las creencias); b) Transformación (conocimientos en la acción); c) Conexión (coherencia entre planificación y la enseñanza) y d) Contingencia (decisiones en la acción). En ampliaciones posteriores se involucra una nueva etapa: la reflexión de los profesores sobre la lección (Rowland (Rowland, Huckstep, Thwaites, 2009).

*El Modelo MKT* (Mathematical Knowledge for Teaching) considera el conocimiento del profesor estrechamente ligado al contenido matemático y evidenciado en situaciones de enseñanza, es decir, interpreta el conocimiento profesional del profesor específico que pone en juego en la enseñanza de la matemática (Hill, Ball, y Schilling, 2008).

La perspectiva presenta el conocimiento en dos dimensiones, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico (o didáctico del contenido), ambas subdivididas en otros subtipos. El conocimiento del contenido involucra los subdominios: conocimiento común del contenido; conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático. El conocimiento didáctico del contenido con los subdominios: Conocimiento del contenido y la enseñanza; Conocimiento del contenido y los estudiantes y Conocimiento del contenido y el currículum.

*La influencia del MKT* en la literatura de investigación en Educación Matemática ha sido amplia, y aún mantiene su vigencia. Sin embargo, algunos autores han apreciado que la clasificación del modelo del MKT es difusa, ya que los límites de los diferentes subdominios no revisten con claridad los tipos de conocimiento. Por ejemplo, se reconocen

limitaciones para distinguir con precisión entre lo que se entiende por conocimiento común y conocimiento especializado. Una de las reacciones a este modelo, es el modelo de conocimiento MTSK.

*En el modelo MTSK surge al concebir que lo que interesa aclarar y comprender es el conocimiento especializado del contenido. Para Climent y Carrillo, (2007), el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, es entendido como la conjunción de todos los saberes y experiencias que posee un profesor y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente; conocimiento que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Climent, 2002).*

En este modelo se distinguen los dominios referidos al conocimiento didáctico del contenido y al conocimiento del contenido matemático, ambos definidos por subdominios de conocimiento. Entre estos dos dominios de conocimiento se presentan las concepciones y creencias que el profesor tiene acerca de la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje. Dichas concepciones y creencias interactúan con todos los subdominios de conocimiento.

El dominio del conocimiento del contenido matemático, involucra los subdominios referidos al conocimiento de: a) los temas de la disciplina, b) la estructura de las matemáticas y c) de las prácticas matemáticas. El dominio del conocimiento didáctico del contenido involucra los subdominios de conocimiento referidos: a) a las características del aprendizaje de las matemáticas, b) a la enseñanza de las matemáticas, c) a los estándares de aprendizaje.

El modelo de conocimiento expuesto por Ponte y Oliveira (2002), que se ha centrado principalmente en el *conocimiento de la práctica educativa*, plantea cuatro dimensiones de conocimiento: a) de las matemáticas para su enseñanza, b) del currículo, c) del alumnado y de sus procesos de aprendizaje y c) de los procesos de trabajo en el aula.

Entre *otros modelos*, ubicamos la propuesta de Schoenfeld y Kilpatrick (2008), que da relevancia a las relaciones intra e inter personales en el aula, viendo el proceso de enseñanza-aprendizaje como una actividad humana y social afectada por interacciones entre los sujetos intervinientes. El modelo está fundamentado en el desempeño experto de la enseñanza de las matemáticas, definiendo un marco conceptual con siete dimensiones referidas a conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas.

Estas dimensiones son: a) Conocimiento profundo y amplio de las matemáticas escolares; b). Conocimiento de la forma en la que piensan los estudiantes; c). Conocimiento de la forma en la que aprenden los estudiantes; d). Diseño experto y gestión de entornos de

aprendizaje; e). Desarrollo de normas en el aula y apoyo del discurso de la clase; f). Construcción de relaciones que apoyen el aprendizaje y g). Reflexión sobre la propia práctica. Esta última dimensión, se centra en pensar cómo se desarrolló una situación en clase y qué se podría hacer para mejorarla. En este modelo el rol del alumno es más importante que en los otros modelos y las interacciones juegan un papel fundamental.

A manera de síntesis, resaltamos dos dimensiones en común que se han considerado en modelos descritos. Los autores, se han volcado en la comprensión de estas dimensiones fundamentales: el Conocimiento del Contenido Matemático y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. Además, han coincidido en que la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas no es único, monolítico o fácil de determinar.

### **2.3.2 Conocimiento del profesor de matemáticas en formación**

La investigación que realizamos se enmarca dentro de los estudios sobre el conocimiento de los estudiantes para profesor. Lo abordamos desde la perspectiva teórica del análisis didáctico tal como se concibe y desarrolla en el Grupo de Investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» y nos apoyamos en los estudios desde esta línea (Rojas y Flores, 2011; Rojas, Flores, Ramos, 2014; Castro-Rodríguez, 2013)

Profundizamos en la postura que se realiza en este grupo sobre los conocimientos que le son necesarios al profesor de matemáticas y que deben ser desarrollados en la formación inicial. Esta perspectiva reconoce en los modelos previos dos campos de conocimiento: el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares (Rico, 2015).

El conocimiento sobre el contenido matemático escolar, se entiende como: “el dominio de los significados matemáticos básicos de un contenido, necesarios para su trabajo profesional” (Rico, 2015, p. 31). En esta perspectiva, el significado de un contenido matemático escolar se establecen atendiendo a la terna: definición-representación-sentido. En este sentido, el profesor en formación logra su conocimiento sobre un contenido matemático escolar en la medida que domina dichos significados y aprende a explicitarlo.

Ello, implica al profesor en formación manifestar capacidad para: ordenar y definir un contenido atendiendo la estructura matemática (hechos, definiciones y estructuras); describir contenidos acorde a tipologías cognitivas (procedimentales, actitudinales, conceptuales); dar organización cognitiva a conceptos involucrados en los contenidos

(razonamientos, estrategias, relaciones); determinar los modos de expresión y regulación de un contenido (simbólico, verbal, gráfico, icónico) y delimitar situaciones que se relacionan con un contenido (fenómenos, problemas) (Rico y Moreno, 2016).

Para estudiar dicho conocimiento resulta conveniente el análisis de contenido (Rico, 2015) para identificar el conjunto de saberes y rasgos que dan cuenta del dominio del significado del contenido. En esta perspectiva, los conocimientos y capacidades que subyacen del análisis de contenido nos han llevado, a identificar rasgos de conocimiento del profesor en formación.

El conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, refiere “aquellos conocimientos teóricos, técnicos y prácticos, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares” (Rico, 2015, p. 32). Este conocimiento exhibe el dominio didáctico sobre un contenido y puede ser observado en diversos ámbitos de la actuación del profesor. Es el conjunto de saberes relativos al aprendizaje, la enseñanza y la evaluación de un contenido matemático escolar. Dicho conocimiento, es puesto de manifiesto por el profesor al diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. El conocimiento didáctico sobre un contenido de las matemáticas escolares “consta del conocimiento sobre su contenido, del conocimiento sobre su enseñanza, del conocimiento sobre su aprendizaje y del conocimiento sobre su evaluación” (op. cit. p.35)

Ello implica, “comprender la complejidad de la enseñanza y del aprendizaje escolar” con lo cual, el profesor exhibe en profundidad cuestiones didácticas para planificar dicho aprendizaje a partir de las decisiones que enmarcan la instrucción.

Durante la formación inicial del profesor de matemáticas, “se trabajan aspectos teóricos del conocimiento profesional especialmente en estos dos campos de conocimiento” (Rico, 2012, p. 51) y en los cuales cobra sentido el rol que tiene el análisis didáctico.

Valoramos el interés y la funcionalidad del análisis didáctico en los ámbitos de la actuación profesional; el análisis didáctico como referente teórico para la formación práctica de profesores, brinda a los futuros profesores el acercamiento con su conocimiento que procede de su formación y que es considerado como teórico (Rico; Lupiañez; Molina, 2013).

Sin pretender enmarcar el análisis didáctico dentro de un modelo referido al conocimiento del profesor, se idéntica la pertinencia y claridad de los cuatro análisis y de las categorías contempladas en el análisis didáctico para el estudio de dicho conocimiento. Según Rico (2012) el análisis didáctico, se concibe a la vez como método y como herramienta propio de la Didáctica de la Matemática.

El análisis didáctico como método, permite profundizar y disponer al investigador de una información más amplia sobre los elementos que puede haber considerado el profesor al diseñar su actuación. En este estudio lo hemos usado en dos sentidos; en primer lugar, al identificar la variedad de conocimientos que requiere un profesor en formación (en el caso del prácticum) y en segunda instancia, para examinar y apreciar el conocimiento de profesores de matemáticas que ponen de manifiesto en el ejercicio de la práctica reflexiva.

### **2.3.3 Análisis didáctico**

El análisis didáctico como herramienta en la educación matemática, concreta su finalidades en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos (Rico, 2012).

El análisis didáctico tal como se concibe en el grupo PNA, surge inicialmente como un procedimiento para abordar las dimensiones del currículo en la preparación y programación de unidades didácticas (Rico, 1997).

Gómez (2007) considera el Análisis Didáctico como una herramienta que le permite al profesor: el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas sobre temas específicos de la matemática escolar. Actualmente, se concreta como “el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferente y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (pp.18).

En consecuencia, el análisis didáctico supone la necesidad práctica del profesor de profundizar en un contenido matemático escolar, favoreciendo el desarrollo de su práctica. Para realizar estas acciones, el análisis didáctico lo constituyen cuatro análisis parciales: análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Rico, Lupiañez y Molina, 2013).Cada uno incluyen componentes y categorías referidas a la naturaleza de los análisis que lo componen.

Para realizar estas acciones, el análisis didáctico se constituyen de cuatro análisis parciales del contenido matemático: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Rico, Lupiañez y Molina, 2013).

El análisis de contenido, tiene por finalidad estudiar y explorar el significado de un concepto matemático (el álgebra, en nuestro caso) en relación a los diversos significados que se le atribuyen, atendiendo a tres dimensiones del significado de un concepto matemático: la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación.

El análisis cognitivo, se ocupa de examinar los aspectos sobre aprendizaje del

contenido, Abarca el estudio de las finalidades educativas en sus diversos grados concretándose en determinar las expectativas (objetivos y competencias), así como las limitaciones de aprendizaje (dificultades y errores) y oportunidades en el aprendizaje escolar (Lupiáñez, 2009).

El análisis de instrucción, examina, selecciona y secuencia las tareas matemáticas escolares que se pondrán en juego en la unidad didáctica.

El análisis de actuación, planifica la evaluación del aprendizaje de los escolares y la forma de llevar a cabo el seguimiento de la instrucción. Este análisis retoma los análisis previos para establecer modificaciones e iniciar nuevamente el ciclo de análisis.

Según Rico 2013, concebir el análisis didáctico como herramienta involucra la reflexión sobre los procesos implicados en los análisis parciales, la cual conduce al profesor de matemáticas de manera “explícita o implícitamente, a la organización, trasmisión y adquisición de conocimientos estructurados” (p.19). Interpretamos algunos rasgos relevantes de esta concepción del análisis didáctico:

- Trabajar sobre las dimensiones curriculares, distinguiendo elementos que sustentan el discurso matemático escolar,
- Fundamentar conceptos matemáticos y didácticos para lograr precisión y dominio,
- Concretar los procesos de análisis para organizar, secuenciar información y tomar decisiones fundadas,
- Profundizar en referentes matemáticos y didácticos para fundamentar con precisión su comprensión,
- Usar los diferentes análisis como una guía para planificar y evaluar las unidades didácticas,
- Predecir desde la investigación y la experiencia para intervenir en la práctica.

## 2.4 Reflexión

En los apartes anteriores, se ha presentado brevemente la implicación de la reflexión en la formación de profesores. En la visión prospectiva que involucra la formación de profesores, la reflexión del profesor sobre su práctica se considera un elemento fundamental en su desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica dentro de un proceso de aprendizaje continuo (Climent y Carrillo, 2003). A continuación nos detenemos en la definición, características y concretamos la implicación de esta en la formación de profesores de matemáticas.

### 2.4.1 La noción de reflexión

La reflexión es un término que se usa desde diferentes acepciones, con múltiples y superficiales conceptos. El propio término reflexión se remonta desde los enfoques filosóficos a educadores clásicos como: Sócrates (diálogo para la reflexión personal.- Mayéutica); Platón (diálogo para la reflexión y el pensamiento crítico) y, más recientemente a Kant. Es desde 1910 cuando se identifican las ideas de Dewey como las fuentes filosóficas que sustentan la utilización de reflexión en el campo de la educación y en particular en la didáctica.

John Dewey (1989), distingue tres tipos de acción: impulsiva (ensayo y error), rutinaria (autoridad y tradición), y la reflexiva, cuestionadora, basada en la voluntad y la intuición, en busca de soluciones lógicas y racionales a los problemas de la práctica. La acción impulsiva y rutinaria ocurre sin pensar y de manera pasiva y, la acción reflexiva implica una consideración activa, persistente y cuidadosa de toda creencia o práctica en relación a sus fundamentos y consecuencias que la orientan.

La acción reflexiva, según Dewey (1989) “implica la consideración activa, persistente y cuidadosa de cualquier creencia o práctica a la luz de las razones que la sustentan y de las consecuencias a las que conduce” (op. cit. p.6). Esto es, un proceso cognitivo que versa sobre la secuencia de ideas interconectadas y tiene en cuenta el conocimiento subyacente. (Zeichner y Liston, 1987) esta idea de reflexión comporta la capacidad de considerar un asunto serio y mentalmente para actuar respecto a él de un modo deliberado e intencional.

Desde la postura cognitiva que definen la reflexión como un proceso, es necesario precisar la idea de pensamiento, entendida como algo más que una actividad mental, el pensamiento guarda relación con los objetos que son propósito de atención en dicho pensamiento; en este sentido, se constituyen en parte integral de éste pensamiento (Radford, 2006). En consecuencia, el pensamiento no se desliga de los aspectos sociales o culturales; por el contrario, los artefactos (culturales, sociales de conocimiento, de comunicación etc.) se corresponden con los focos y fines de dicho pensamiento y suman de algún modo en el aprendizaje o en la construcción de significados. En este sentido, el pensamiento reflexivo trasciende de la acción mental de pensar.

Schön (1983), inspirándose en la acción reflexiva de Dewey, la empleó para caracterizar la actuación de los profesionales. Para ello remarca la importancia del contexto y el tiempo en que tiene lugar la reflexión ligada a la acción y distingue entre la racionalidad técnica (solución de los problemas, selección de los medios técnicos más idóneos para determinados propósitos) y la práctica reflexiva, que supone comprender y perfeccionar la



práctica, la enseñanza o la acción (Zeichner, 1993). Sus trabajos son considerados en la educación al analizar el papel profesional del profesor (Schon, 1992).

Desde hace varias décadas Schön (1983) concibió la reflexión como “una continua interacción entre el pensamiento y la acción” (p. 281). De este modo Schön, concretó su teoría en la práctica reflexiva, la cual busca que un profesional (e.g. el profesor) reflexione de modo permanente sobre su práctica de enseñanza a fin de comprenderla y transformarla.

Schön (1983), conecta la reflexión con la acción, propone dos escenarios para la reflexión: a) La reflexión durante acción (reflection-in-action), rápida, necesaria para afrontar problemas profesionales empleando el conocimiento en acción; y b) La reflexión sobre la acción (reflection-on-action), proceso profundo y duradero que lleva al profesional a replantearse las soluciones y buscar otras alternativas. La actuación retrospectiva, se concreta al detenerse sobre lo que se ha hecho y al describir desde su concepción la naturaleza de dicha acción.

Siguiendo los planteamientos de Schön y Dewey, consideramos que la reflexión implica una representación activa de la realidad, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones que en ellas están implicadas y la toma en consideración de las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas. Coincidimos en que el individuo es gestor del proceso de reflexión, quien identifica y asume un problema de la práctica, lo afronta a través de la revisión de sus creencias, para estar en disposición de entenderlo y replantearse alternativas para asumirlo.

Resumiendo, reconocemos las raíces del término "reflexión", en la acción reflexiva que destacaba Dewey, relacionado con el pensamiento, caracterizador de la forma en que el sujeto afronta un problema, y la inclusión en formación de profesores, debida a Schön, por reconocer que la actuación del profesor profesional (en el sentido aristotélico del término, como indica Contreras), responde a una racionalidad práctica, que recurre a la reflexión como proceso para resolver sus problemas prácticos.

Estas ideas se van a concretar en nuevas características exigidas a la actuación reflexiva, que varían según diversos modelos propuestos para llevar a cabo la reflexión. De las diversas definiciones y marcos teóricos sobre reflexión, rescatamos elementos comunes en los referentes a nuestro interés:

- Surge de la incertidumbre (o duda), la inquietud permite al individuo analizar su experiencia e iniciar la reflexión,

- La reflexión va más allá de la racionalización (como idea de pensamiento), siempre partiendo de que la enseñanza es problemática,
- La acción (práctica docente) es una parte integral del proceso de reflexión y,
- La reflexión es una experiencia tanto individual como compartida.

### 2.4.2 Características de la reflexión

Desde la postura cognitiva, la cual aborda la reflexión como un proceso y un fin, identificamos en los postulados de varios autores, rasgos comunes que permiten caracterizar el concepto de reflexión (Dewey, 1989; Schön, 1998; Perrenoud, 2004; Zeichner, 1993). De los cuales hemos identificado:

- La problematización de los hechos de la propia realidad;
- El distanciamiento de la realidad,
- La toma de conciencia de los propios y nuevos conceptos y
- Las decisiones para la nueva actuación.

Quizás una de las principales características de la reflexión en todas estas posturas, es su fin. En el caso de la Educación, la reflexión se encamina a la comprensión o mejorar la práctica docente (Binti, 2010; Tzur, 2001; Climent, 2002). Por su naturaleza, requiere de acciones y condiciones (fases, instrumentos, conocimientos, disposiciones) para ser puesta en marcha. En consecuencia y sin importar las acciones acogidas en dicho proceso, la reflexión en la formación de profesores, tiene además como propósito significar el conocimiento para la enseñanza (Rico, 2015; Korthagen et al., 2001).

El proceso involucra al que reflexiona, en situación de inquietud, tensión o interés por los hechos de propia práctica. Esta es la característica que da inicio a la reflexión y denominada la problematización de los hechos de la propia práctica (Climent, 2002; Binti, 2010). El profesor en el proceso de reflexión parte por detectar una situación de duda, que hay que describir (Flores, 2007).

La reflexión supone mente abierta de quien reflexiona, por cuanto requiere de la disposición para bosquejar la realidad y reconocer las ideas que para él, dan fundamento a la situación que enfrenta. Esta acción implica un distanciamiento de la realidad (Jaworski 1993; Flores, 2007 p. 145).

Korthagen y Verkuyl (1987), comparten la idea de distanciamiento al manifestar que “una persona reflexiona, cuando está mirando hacia atrás sobre sus experiencias y/o conocimiento y se dedica a establecer por sí mismo una nueva estructura o evaluación de

esas experiencias y/o conocimiento.” (op. cit. p. 4).

Otros autores acuñan la noción de distanciamiento de la realidad como una característica de la reflexión (Cooney, 1994). Según Korthagen, Loughran y Russell (2006) un profesor reflexiona al mirar experiencias pasadas y establece una nueva estructura o evaluación. Por tanto, la reflexión demanda del profesor esfuerzo de consciencia, voluntad y trabajo; esto implica compromiso permanente con el crecimiento, el desarrollo y el perfeccionamiento, pasos esenciales para llegar a ser un profesional reflexivo (Burbacher, Case y Reagan, 2000).

Ello implica de un profesor, estar dispuesto a volver sobre su práctica, para analizarla a fin de significar sus concepciones y conocimientos que le llevan a comprenderla o mejorarla (Zeichner, 1993). Es decir, "transformar los aspectos inconscientes de la enseñanza en conscientes" (Korthagen, 2010, p. 98). Por tanto se constituye en una de las características esenciales de la reflexión (Smyth, 1989; Korthagen et al., 2001).

Según Korthagen & Verkuyl (1987) el distanciamiento caracteriza el proceso reflexivo cuándo el profesor “está mirando hacia atrás sobre sus experiencias y/o conocimiento y se dedica a establecer por sí mismo una nueva estructura o evaluación de esas experiencias y/o conocimiento.” (op. cit. p. 4). Ello, supone apoderarse de realidad y encaminarse a la ruptura de fronteras de principios propios y conlleva a ser partícipes de la creación de nuevo conocimiento; es iniciar en la toma de conciencia (Freire, 1982).

Otra característica de la reflexión, es la toma de conciencia (Flores, 2007). Ocurre cuando el que reflexiona está en disposición de modificar sus esquemas conceptuales (Korthagen et al., 2001). Esto es, la disposición de contrastar las teorías y principios externos, constituyendo un paso significativo en el proceso de desarrollo del individuo, el cual le implica en la imagen de cambio/transformación (Perrenoud, 2004).

Para Freire (1982), la toma de conciencia conlleva a la concienciación. Es la acción de evaluar estrategias a través de las cuales se avanzan más allá de las limitaciones que impone la realidad (Thomas, & Yoon, 2014); es decir, es entender la propia acción y ser conscientes y co-creadores de su conocimiento (Alsina, 2009).

Tomar conciencia tiene significado cuando se realiza desde la confrontación; esta acción lleva al individuo a buscar nuevas formas de contemplar el problema. Esto implica, la acción de conocer y reconocer conocimientos nuevos para inferir acciones de cambio.

Una característica de la reflexión que concreta la toma de conciencia, y permite exhibir la actitud de cambio del que reflexiona, se centra a través de las estrategias para la acción (Dewey, 1989; Schön, 1998). Las estrategias, son la característica de la reflexión

referida a la toma de decisión para la nueva acción (Binti, 2010; Chapman, 2014; Jaworski, 1993).

Otra de las características implícitas en la reflexión, refieren la necesaria disposición y actitud del individuo para adelantar el proceso (Dewey 1989). Se enriquece y se entiende como un proceso colectivo. De manera individual otorga características particulares al desarrollo del individuo, las cuales se exhiben en la relación con el conocimiento y las decisiones (de actuación) sobre los objetos de reflexión.

Flores (2007) resume las características del profesor reflexivo como aquel que tiene disposición para: a) percibir la práctica como problemática, identifica situaciones problemáticas en su actuación docente; b) tomar distancia de ellas, con el fin de analizar los elementos de dichas situaciones; c) identificar, explicitar y eliminar elementos que le condicionan la forma en la que él considera las situaciones, incluidas sus propias creencias y d) buscar otras fuentes a fin de interpretar y responder a las mismas las situaciones.

Desde la visión del desarrollo profesional y extendiendo la idea de Flores, Ramos (2014) añade dos nuevas disposiciones que han sido contempladas por otros autores, e) traspasar los límites de su zona de bienestar; f) dar significado a su acción, tomando conciencia de la complejidad de la práctica y del aprendizaje de sus alumnos, otorgándole sentido a su práctica profesional; g) adaptar su actuación práctica a las condiciones del contexto y h) tener apertura hacia las matemáticas y su disposición a transformar sus concepciones sobre ella, al tiempo que tomar conciencia de la complejidad del conocimiento matemático para su enseñanza.

Con todas estas características, el proceso reflexivo que pretendemos que emprenda un profesor, implica una representación activa de la realidad de su práctica, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones implicadas, confrontar con otros y tomar en consideración las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas o decisiones fundamentadas sobre futuras lecciones. Las posibilidades para concretar acciones reflexivas que favorezcan dicho proceso en un curso de formación inicial, también se ven afectas por estos factores; el éxito de dichas acciones, infiere favorablemente en la evolución del profesor.

Aprovechando la concepción humanística presentada por Dewey y la epistemología de la práctica que aporta, Schön (1992) define el práctico reflexivo, de igual modo, surge la noción de profesor reflexivo (Smyth, 1989,1991; Zeichner, 1993). En esta investigación y con base en las ideas de Dewey (1992) y la de otros autores que lo han seguido,

consideramos la reflexión como un proceso de pensamiento responsable y sistemático que surge de una situación problemática de la práctica y que requiere disposición del profesor para analizar, comprender y actuar ante dichas situaciones; lo cual, implica significar el conocimiento durante un proceso activo, persistente y responsable. La reflexión se considera una característica a tomar en consideración en la formación de profesores (Ponte y Serrazina, 2004), para contribuir a su desarrollo profesional, por cuanto contribuye a que el profesor amplíe su responsabilidad profesional (Brubacher, 2000; Zeichner 1993; Perrenoud, 2004), ya que el profesor, a partir de los problemas de la práctica, otorga significado a su conocimiento profesional para comprender y abordar dichas situaciones de la práctica.

### **2.4.3 Objetos de reflexión: Los Problemas profesionales**

Como se ha señalado, la reflexión arranca de la detección y tratamiento de problemas profesionales. Estudiar la reflexión relacionada con las cuestiones que enfrentan profesores en formación en la prácticas de enseñanza, implica considerar no solo la evolución en la definición de dichos problemas profesionales, sino también el conocimiento allí implicado y exhibido a través de los focos de reflexión involucrados en estas situaciones (e.g. gestión de la clase, limitaciones de aprendizaje escolar, las tareas matemáticas para la enseñanza, etc). En este estudio hemos considerado que estas son algunas de las dimensiones que nos permiten identificar las características de reflexión de FPM.

Dewey (1989) afirma que: el problema del método en la formación de hábitos de pensamiento reflexivo, se identifica con el problema de crear condiciones que despierten y orienten la curiosidad, de establecer, entre las cosas experimentadas las conexiones que promuevan en el futuro el flujo de sugerencias y creen cuestiones y finalidades que favorezcan la coherencia lógica en la sucesión de ideas (op. cit. p.64).

Tal como se señala el enfoque de la formación realista, para dar sentido al conocimiento profesional, hay que arraigarlo en los problemas profesionales que ayudan a resolver. Vamos a examinar qué se entiende por problema profesional, arrancando de los problemas didácticos, para llegar a disponer de categorías que permitan examinar la forma en que plantean y evolucionan los problemas detectados por los futuros profesores.

La idea de problema educativo surge de Bunge (1986,), quien lo define como “una dificultad que no puede resolverse automáticamente sino que requiere una investigación conceptual o empírica” (op. cit. p. 195). Otros autores emplean este término para definir el origen de cuestionamientos en la práctica formativa y los focos de reflexión en torno a

tareas profesionales (Lurduy, 2013; Lampert, 2001).

Otros autores llaman problemas profesionales a cuestiones en los que pueden ser reconocidos y analizados desde la propia experiencia y el conocimiento del profesor (Goffree; Oonk, 1999). De este modo, los problemas profesionales son un punto de partida para entablar un diálogo de saberes, entre diversos sujetos, los pares, las fuentes y formadores o profesores expertos. Los problemas de la profesión han sido abordados por el enfoque realista en términos de situación y son entendidos como el inicio del proceso reflexivo (Korthagen, 2010; Kessels, 1999).

Un término que está relacionado con los problemas es el de incidente crítico que se refiere a las condiciones de incertidumbre que hacen que un acontecimiento se convierta en problema para el sujeto que lo percibe; se reconoce como punto de inflexión que se traduce en cambios en la percepción del éxito de la enseñanza (Tripp, 1993) o como objeto para conducir a decisiones producto de la reflexión (Monereo, 2010).

Schön (1992) recupera de Dewey el término problemática y manifiesta que “el práctico define un problema, cuando lo elige y denomina aquello en lo que va a reparar” (op. cit. p.18). Los problemas de la práctica del profesional, según este autor, no responden a estructuras organizadas, son situaciones que requieren estructuración; para ello, “el práctico selecciona sus puntos de atención y los organiza orientado por el sentido de la situación y en coherencia que guía el conocimiento” (op. cit. p.19). Así, los problemas pueden proceder de diferente origen y de diversa naturaleza (e.g., incierto, único, conflictivo, amplio). La Tabla 2.2, describe una tipología para clasificar el origen de las situaciones problemáticas según el planteamiento de Schön (1992).

Tabla 2.2. *Tipología para clasificar el origen de las situaciones problemáticas*

Situaciones problemáticas	Descripción según la percepción de la resolución y el conocimiento del objeto
Poco definidas, <b>inciertas</b> y desordenadas	Procede de hechos poco definidos y el alcance de la resolución es limitado o poco evidente
De formas <b>variadas</b> , envuelven un mismo tópico	Involucra variados objetos en los hechos y diversas interpretaciones para la solución
Incluyen <b>conflictos</b> éticos y de valores	Exhibe un dilema personal/cultural al denominar el objeto y al otorgar solución
<b>Amplias</b> que incluyen variados tópicos	Origen en hechos se percibe desde múltiples perspectivas. Involucra más de un significado para la solución, con amplio campo conceptual
Limitadas y <b>única</b>	La resolución busca la alternativa que responde a un hecho particular.

Para examinar las tensiones que son foco de reflexión en un sistema de micro

enseñanza Sezen-Barrie et al. (2014) crean un marco que involucra siete categorías: sujeto, objeto, artefactos, normas, comunidad, división del trabajo. Este marco que permite identificar elementos de los problemas detectados por los FPM, se acopla con el expuesto por Van Es y Sherin (2008) para el caso de la Educación Matemática.

Van Es y Sherin (2008) estudian la práctica de enseñanza a partir del análisis de los videos de las lecciones (práctica de enseñanza), con lo cual los profesores en formación prestan atención a situaciones que para ellos son objeto de interés, preocupación y análisis. Las investigadoras han distinguido tres categorías que se complementan en el análisis: actores involucrados en el análisis de las situaciones, el tema y el tipo de análisis realizado, Los análisis se diferencian en descriptivo, evaluativo e interpretativo.

La Tabla 2.3 exhibe algunas características que subyacen a la definición de una situación problemática explorada en los estudios previos y que se consideran en el análisis.

Tabla 2.3. Rasgos que caracterizan la evolución en la definición del problema profesional

Características	Rasgos	Descripción
Origen de la situación. Schön (1992)	Incierto	Procede de realidades poco definidas y de estructuras desordenadas
	Único	Aparece de un caso particular en un contexto situado
	Situado	referido a un déficit
	Conflictivo	Surge de conflictos éticos y/o valores, representa una disyuntiva personal
Objetos y Naturaleza de la situación. Van Es y Sherin (2007)	Variado	Origen en hechos que pueden ser abordadas desde múltiples perspectivas
	Actores	Sujetos sobre los que se da la observación y recae e análisis de la práctica
Sezen-Barrie et al (2014)	Objeto	Temas objeto de reflexión, en los que recae la acción
	Tipo	Profundidad para abordar situaciones de la práctica
	Artefactos	Herramientas objeto de atención para alcanzar el propósito
	Normas	Principios y significados que regulan actividad docente y conocimiento
	Comunidad	Grupo de personas que participa en la reflexión
Planteamiento Lurduy (2013) Peñas y Flores (2005)	División de trabajo	Dinámica de agrupamiento y participación de actores
	Concreto	Formula pregunta en términos de: sujeto, objeto, contexto
	Particular	acción
	General	Intervienen muchos elementos y relaciones en formulación
	Amplio	

Para otros autores en la práctica el FPM debe manifestar su capacidad para construir nuevo conocimiento para la acción (Llinares, 2012). Por tanto implica desarrollar y poner en juego un conocimiento profesional que le permita resolver las tareas profesionales.

Concretar estas ideas han llevado a investigadores a estudiar el desarrollo del conocimiento del profesor y las condiciones que favorecen la resolución de problemas

profesionales percibidos o imaginados de la práctica de enseñanza, durante la formación inicial (Flores, 2000; Peñas y Flores, 2005). Como advertimos antes, el conocimiento profesional también se elabora durante la práctica de enseñar matemáticas. Para ello se requiere percibir su necesidad y reconocer su función; en consecuencia, el profesor debe tomar conciencia del sentido que otorga la resolución de problemas propios de su labor. Esto alude a los problemas profesionales (Azcárate, 1999).

En este sentido entendemos que los problemas profesionales son aquellas situaciones de la práctica de enseñar que requieren atención del profesor, son reconocidos de su experiencia. Son incidentes cuya solución es resultado de integrar conocimientos de distintas fuentes y en la mayoría de los casos, activan nuevos conocimientos para ser enfrentados. Por tanto, la práctica es considerada como la intervención donde se genera conocimiento profesional en la resolución de problemas profesionales (Azcárate, 1999).

De igual modo, las prácticas de enseñanza, se configuran como escenarios para afrontar una acción reflexiva, en la que aflore el saber práctico profesional (en palabras de Azcarate), como producto de la integración de diferentes aspectos que favorecen la producción de conocimientos útiles para resolver problemas profesionales.

Lo anterior alude, a las situaciones que, al mismo tiempo, son emocional e intelectualmente desafiantes para el FPM cuando se incorporan en el prácticum. Si bien es cierto que estas situaciones plantean problemas que favorecen al FPM, ellas demandan establecer relaciones entre el conocimiento teórico sobre Didáctica de las Matemáticas, derivado de su formación previa y el conocimiento práctico que va construyendo el FPM.

Por tanto, implica al FPM durante la formación inicial desarrollar y poner en juego un conocimiento profesional que le permita resolver las tareas profesionales (Flores, 2000) y enfrentar los problema profesionales generados en dicha práctica (Peñas y Flores, 2005).

Tal como hemos mostrado, las prácticas de enseñanza son un escenario emocional e intelectualmente desafiante para los futuros profesores; No obstante, es la oportunidad para que los futuros maestros se cuestionen, identifiquen problemas y situaciones de la profesión docente, reconstruyan sus saberes, los confronten con la realidad y modelen no solo la manera de pensar, sino también la de realizar sus quehaceres en la escuela.

En concreto, los problemas profesionales en su definición conllevan al futuro profesor de matemáticas a explorar los significados del objeto que abordan durante dicha reflexión. Profundizando en una de las tres categorías que se ha propuesto para el análisis de las situaciones en los trabajos de Van-Es y Sherin (2008; 2002) y con el propósito de analizar el uso del conocimiento que futuros profesores ponen en conflicto durante el análisis de las



situaciones de la clase Santagata (2014), precisamos los elementos que caracterizan la naturaleza de situaciones asociadas a las limitaciones del aprendizaje.

A partir de las apreciaciones y conclusiones sobre la naturaleza de los objetos que son observados en las situaciones de las clases en los estudios de Santagata, (2012) y del uso que futuros profesores dan al conocimiento (Santagata, & Guarino, 2011), hemos estimado y particularizando la caracterización para la naturaleza de las situaciones que futuros profesores observan y enfrentan de su práctica; las cuales hemos traducido en Problema profesionales. La Tabla 2.4 resume dicha caracterización.

En la misma tabla extendemos la caracterización estimando la idea de dilemas, acorde con autores que centran la atención la reflexión en problemas que surgen en la práctica (Fantinato y Moreira, 2015; Herbst y Chazan, 2011; Peñas y Flores, 2005).

Los autores aluden a las condiciones que favorecen la reflexión y las decisiones que FPM, deben enfrentar de manera fundamentada, sobre alternativas que resultan ser un dilema a sus concepciones y los estadios en los cuales dichos dilemas se presentan. De la revisión a los referentes subyace nuestra interpretación sobre la percepción de la solución.

Tabla 2.4. *Caracterización de los problemas que formulan FPM*

Subcategoría	Rasgos	Descripción
Naturaleza de la situación problemática Santagata (2012) Van-Es y Sherin (2008).	Compleja	Le pertenecen influencias internas y externas que no reconoce fácilmente (e.g. otros campos de conocimiento). Requiere procesos largos y difíciles para la solución.
	Diversa	Involucra más de un significado para concretar la solución. Enuncia un campo conceptual amplio.
	Dinámica	Sucedan variaciones cuantitativa o cualitativamente a través del tiempo.
Dilemas que involucra el problema Fantinato (2015); Herbst (2011); Peñas y Flores, (2005)	Absoluto	Solo existe una forma de ver la situación, correcta o incorrecta.
	Relativo	Conciencia de la existencia de otras formas de percibir el problema.
	Dinámico	Percepción guiada por el interés innovador, diferentes formas de resolución.
	Personal	Reconoce la responsabilidad en la resolución y el compromiso personal.
Percepción de la solución Santagata, (2010)	Únicas	Las cuestiones se reducen a respuesta: Sí, No
	Conocimiento problemático	Se interesa en comprender y conoce el origen y la existencia de una solución.
	No resolución	No hay visión de la solución.
	Resolución	Se enfrenta y concretan las estrategias de solución.

#### 2.4.4 Proceso de reflexión

Existen varios estudios que describen un ciclo o explícitamente se refieren a un modelo de reflexión, con el fin de describir y representar la estructura del proceso reflexivo.

Bajo este constructo se definen las acciones e intenciones, se explicitan los elementos que lo integran y se conciben las relaciones y roles entre los dichos elementos.

En este sentido hemos asumido de manera semejante la idea de ciclo o modelo reflexivo para concebir dicho proceso. En este estudio interesan aquellos que han sido usados con profesores particularmente, nos referimos a las componentes y los fines de los modelos utilizados en Educación Matemática.

A continuación mencionamos modelos que han sido usados con profesores en formación y en el prácticum de profesores de matemáticas. Con énfasis en el modelo ALaCT, usado en este estudio.

### ***Modelos de reflexión usados en formación de profesores de matemáticas***

Smyth (1989) expone un ciclo de reflexión pensada específicamente para el contexto de la labor del docente. El ciclo buscaba un sistema de perfeccionamiento del profesorado que permitiera su desarrollo profesional dentro de un contexto de reflexión crítica. Las fases de este ciclo son descripción, inspiración, confrontación y reconstrucción.

Este modelo es reportado en investigaciones en la formación de profesores de la matemática y ha sido considerado base para el análisis del proceso de reflexión con profesores de matemáticas en formación en varios estudios (Flores y Fernández, 2001; Flores, 2007; Peñas y Flores, 2005).

Jaworski (1993) propone un proceso cíclico para lograr el proceso reflexivo en la práctica. Tal proceso requiere al profesor partir de acontecimientos de la clase, llevándolo a “salirse del evento” (planteándose preguntas como ¿qué? y ¿cómo?). Esta acción le conduce a un “distanciamiento”, que es necesario para el análisis crítico del acontecimiento (derivado de su intento de explicación).

El distanciamiento le exige al profesor explorar las razones o motivaciones (el ¿por qué? del caso). El análisis crítico conduce a un conocimiento más abierto (afectando decisiones que se toman), conduciendo al cambio de su práctica.

El ciclo de Jaworski posteriormente se concreta en tres elementos para la observación de una clase: a) gestión del aprendizaje, b) aprendizaje de los estudiantes (sensibilidad y reconocimiento), c) desafío matemático (tareas, preguntas procesos meta-cognitivos), y es conocido en la literatura como la Tríada de Enseñanza de Jaworski (Potari y Jaworski, 2002).

Parada, Figueras y Pluinage (2009) presentan resultados de un modelo reflexivo, creado a fin de ayudar al profesor de matemáticas en formación (continua) a reflexionar

sobre la actividad matemática de los escolares. El modelo propone examinar la reflexión del profesor a partir del pensamiento matemático, pedagógico y a la propia actividad matemática puesta en evidencia para, durante y sobre la práctica docente.

El modelo reflexivo ALaCT (Korthagen y Verkuyl, 1987; Korthagen et al, 2001) es propuesto como uno de los principios de la reflexión sistemática en el enfoque realista. El modelo tiene origen en la formación continua de profesores, con el tiempo y los resultados de su implementación, se viene usando y adaptando para la formación inicial de profesores de matemáticas en diferentes estudios (Ramos, 2014; Alsina, 2010).

### ***El modelo de reflexión en el estudio***

En este estudio elegimos el modelo reflexivo ALaCT (Korthagen y Verkuyl, 1987; Korthagen et al., 2001). En Europa este modelo fue configurado en el proyecto Comenius, con el propósito de abordar la interacción entre teoría y práctica en la práctica docente. El modelo ALaCT se identifica como un proceso que de manera cíclica involucra cinco fases.

En la Figura 2.1 se especifica cada fase, incluyendo preguntas que orientan las acciones reflexivas, con el propósito de estimular al FPM a relacionar la práctica y su conocimiento (Tigchelaar, Melief, Rijswijk y Korthagen, 2005). En la educación matemática el modelo reflexivo ALaCT de Korthagen et al., (2001), ha sido utilizado en contextos de formación de profesores. Su notación se identifica con las siglas de las iniciales de su definición (Action, Looking back on the action, awareness of essential aspects, Creating alternative methods of action y Trial).

El modelo se centra en una situación problema detectada por el profesor, y expresa las acciones previstas para llevar a cabo el proceso de reflexión en relación con las situaciones detectadas, los conocimientos del docente, sus actuaciones y a sus fundamentaciones. El modelo ha sufrido varios ajustes en diferentes momentos (Korthagen, 1985; Korthagen et al., 2001; Tigchelaar y otros, 2005). Las cinco fases que se cubren en el modelo están en la Figura 2.1.

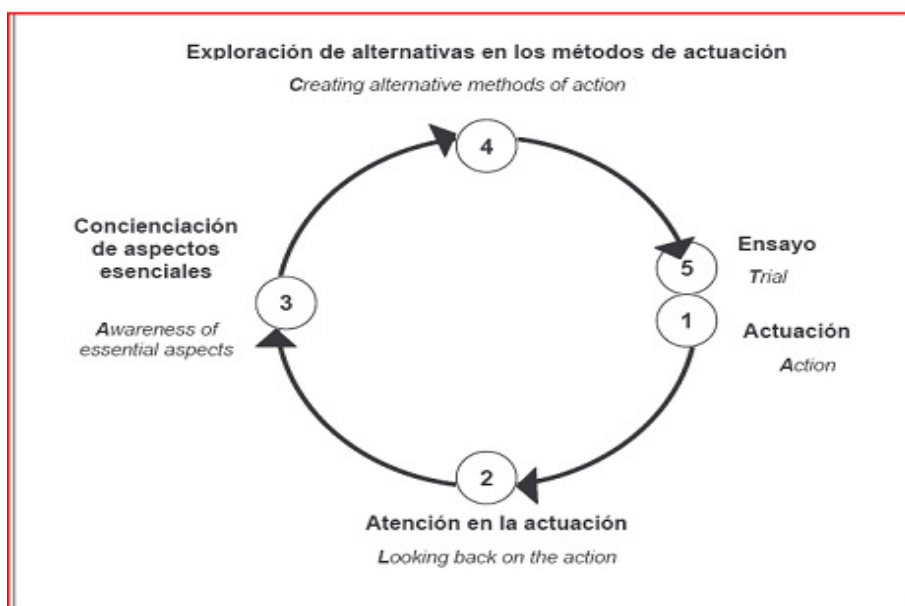


Figura 2.1. Modelo ALACT (Korthagen et al., 2001)

A continuación describimos las cinco etapas que hemos equiparado con acciones para llevar a cabo la reflexión:

- *Acción o experiencia;* Se identifica y analiza una problemática, describiendo los hechos conflictivos y de duda. Esta fase se inicia con la descripción y el planteamiento de una situación que problematiza los hechos observados en la práctica, pretende dar sentido al objeto de reflexión concretando en una cuestión.
- *Mirar hacia atrás en la acción;* Consiste en esbozar una “imagen” de los acontecimientos que han dado lugar a la problemática. En esta fase se revelan los hechos sucedidos. Examinar y exteriorizar el significado de los objetos de reflexión conduce a la mirada distante de la realidad.
- *Conocimiento de puntos importantes o esenciales;* tomar conciencia de la acción. En esta fase se resaltan los elementos importantes de la situación inicial que conducen a la concienciación sobre el conocimiento y profundización objeto de la problemática.
- *Crear, buscar y preparar alternativas para acción;* proponer una solución a la problemática, fruto de las fases anteriores. En esta fase se buscan estrategias para reformular el plan de acción para eventos posteriores.
- *Comprobar en una nueva situación;* aplicar la solución en una nueva situación, e iniciar un nuevo ciclo con la problemática redefinida a partir de esta aplicación.

El proceso reflexivo se apoya en las acciones de “describir, examinar, analizar, evaluar y buscar alternativas a una situación escolar dada” (Korthagen y Vasalos, 2005, p.72). De esta forma se estructuran los pensamientos de los profesores sobre sus experiencias prácticas, a través de reflexiones transformadas por acciones fundamentadas, es decir llevan a la estructuración mental o reestructuración de una experiencia o conocimiento existente (Korthagen et al., 2006).

En el estudio empírico de esta investigación, las preguntas y las acciones reflexivas fueron diseñadas mediante la validación entre el equipo docente y los investigadores del diseño instructivo, llegando a concluir sobre las limitaciones de la versión original para ser implementada en la formación inicial (Castellanos, Flores y Moreno 2017).

La Tabla 2.5 exhibe la articulación entre el proceso de reflexión y los momentos de la sesión de trabajo con los futuros profesores, presentamos los interrogantes que han resultado para cada fase acorde a las acciones reflexivas.

Tabla 2.5. *Acciones reflexivas en fases del ciclo ALaCT (Korthagen et al., 2001)*

<b>Fases</b>	<b>Acción reflexiva</b>	<b>Preguntas orientadoras</b>
A Partir de la acción experiencia	Describir los hechos y o contexto del conflicto. Definir la problemática (en forma de pregunta)	¿Cuáles fueron los acontecimientos? ¿Qué quería conseguir y Qué hizo? ¿Cuál es el contexto del conflicto? ¿Qué inquietud quiero abordar?
L Mirar hacia atrás en la acción.	Esbozar una “imagen” de los acontecimientos y examinar los supuestos o fundamentos que han dado lugar a la problemática	¿Cuáles son las razones que originan los hechos? ¿Qué cree sobre la problemática? ¿Qué dudas le surgen? ¿Qué significa la problemática y Cómo la define? ¿Qué puntos de vista tiene sobre los hechos?
a Tomar conciencia de aspectos importantes de la acción.	Analizar los conceptos que definen la problemática para profundizar	¿Cómo se define y en qué consiste la problemática? ¿Qué conoce sobre la problemáticas?, ¿Cómo abordar la problemática desde otros puntos de vista?
C Crear alternativas para la acción	Evaluar una solución a la situación. Buscar una estrategia para abordar la situación.	¿Qué alternativas de acción hay? ¿Cuál es una posible solución o explicación a la situación?
T Comprobar una situación	Probar en una nueva situación o iniciar otro ciclo	¿Cuál es la pregunta que re-formula el conflicto inicial?

En esta investigación la promoción de la reflexión se ha concebido a través de la puesta en marcha de cuatro ciclos de reflexión ALaCT (Korthagen et al., 2001), para lo cual se concibieron acciones reflexivas y reactivos<sup>1</sup> por cada una de las fases del ciclo. En cada

---

<sup>1</sup> Es la estrategia (suceso o temática) que se facilita para provocar “disposición a”, “aptitud para” Se caracterizan por provocar o motivar el inicio de una fase del ciclo de reflexión.

fases del ciclo se han concretado y validado las acciones reflexivas según los planteamientos de Korthagen y Vasalos, (2005), favoreciendo el tránsito por las fases. La Figura 2.2 muestra la equiparación entre fases y acciones reflexivas desde la intervención.

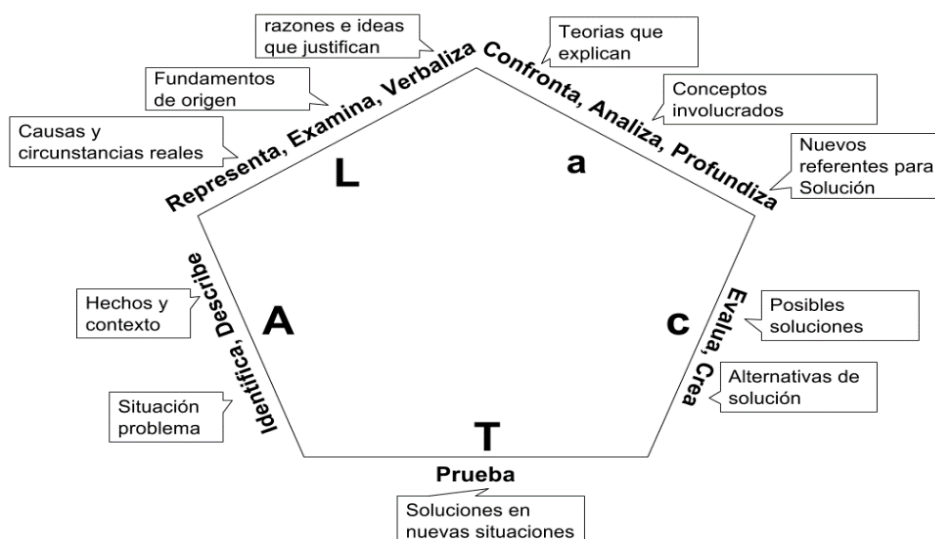


Figura 2.2. Equiparación entre fases y acciones reflexivas en la intervención

Como podemos observar, el proceso reflexivo conlleva de manera implícita una evolución del conocimiento profesional del profesor. En primera, instancia a partir del interés de las propias concepciones y conocimientos asentados en el sujeto que reflexiona. En segunda a través del aporte que ofrece el contenido formativo del experimento. Finalmente las condiciones situadas de la práctica que conllevan a explorar nuevas experiencias y conocimientos próximos a la realidad profesional. Cabe destacar el desarrollo que implícitamente conlleva la realidad compleja o exigente de la práctica, ella en sí misma, ofrece a quien se interesa en hechos de duda o conflictivos, la oportunidad para reflexionar sobre situaciones desafiantes, al mismo tiempo que ofrece herramientas para ampliar su conocimiento profesional y para comprender la práctica.

## 2.5 Antecedentes de la investigación

Nos entramos en primera instancia en investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas, observando distintos modelos y estudios referidos al desarrollo profesional. En segunda instancia, nos centramos en estudios que aluden a la reflexión en el contexto de la formación de profesores y particularmente en las prácticas de enseñanza.

### 2.5.1 Investigaciones en formación de profesores

Los informes sobre prospectiva de la educación (OEI, 2010), enfatizan el conocimiento de los docentes para enseñar su disciplina y su influencia en la calidad de la educación (UNESCO, 2014). En el contexto colombiano, los planes curriculares de la formación inicial de profesores destacan la diversidad de propuestas que aluden a diferentes tipos de conocimiento. Sin embargo entre ellos se advierten líneas curriculares congruentes en: conocimiento matemático; conocimiento curricular y didáctico de las Matemáticas (articula el conocimiento práctico); en conocimiento pedagógico general, y una línea centrada en aspectos comunicativos (Unillanos, 2014).

La investigación sobre formación de profesores llama la atención sobre la desarticulación entre la formación teórica y la práctica docente. Los modelos curriculares suelen tratar de manera aislada la estructura académica y la estructura práctica, al margen de la identidad y el desarrollo profesional (Bolívar, 2007). A partir de esta desarticulación en la formación de profesores emerge la pregunta sobre cómo interrelacionar la teoría y la práctica (Contreras, 2010). Para afrontar esta problemática los planes de formación inicial de profesores han otorgado relevancia al Prácticum (Molina et al., 2004; Villa y Poblete, 2004; Zabalza, 2004), pues se espera que éste inicie a futuros profesores en las situaciones profesionales (Pérez, 2010).

La investigación sobre formación de profesores de matemáticas, ha sido ampliamente desarrollada dentro de la Didáctica de la Matemática, muestra de ello, es la diversidad de estudios notados en siete handbook, que aluden al desarrollo profesional y a la reflexión.

El más reciente, Third International Handbook of Mathematics Education (Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick & Leung (2013), recoge investigaciones en formación inicial y continua de profesores (Bishop, 2013) desde sus perspectivas y retos. La investigación se encara en la relación con las prácticas de enseñanza; en la dualidad dinámica de la investigación y el desarrollo profesional; donde la reflexión ocupa uno de los tres aspectos importantes (Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013). Cabe destacar, la importancia dada al desarrollo profesional mirando el equilibrio entre el conocimiento del oficio del maestro (nivel local y particular) y el conocimiento académico (niveles teóricos y generales) (White, Jaworski, Agudelo-Valderrama y Gooya, 2013).

Resaltamos el Handbook of Mathematics Teacher Education (Wood, 2008), dada la pertinencia en el objeto de esta investigación. El aprendizaje de profesores de matemáticas se examina en todos los niveles y la enseñanza de las matemáticas en diferentes escenarios, el Handbook trata (1) Los conocimientos y creencias en la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo docente; (2) Las herramientas y los procesos en la formación

de profesores de matemáticas; (3) Los participantes en la formación docente (e.g. individuos, equipos, comunidades y redes) y (4) el profesor de matemáticas es un profesional en desarrollo.

La formación de profesores de matemáticas en distintos modelos y estudios entienden al profesor como un profesional en desarrollo, en relación con los conocimientos para la enseñanza (Clarke, 2008), apareciendo la reflexión como una preocupación en investigaciones sobre la formación de profesores y es propósito para el desarrollo profesional. (Sullivan y Wood, 2008). Asimismo las competencias para la enseñanza de las matemáticas constituyen elementos que cobran sentido en el desarrollo profesional del docente (Schöenfeld y Kilpatrick, 2008), siendo otro elemento la reflexión sistemática de la práctica (Empson y Jacobs's, 2008). Se manifiestan diferentes puntos de vista de prácticos, profesionales y teóricos acerca de la promoción de la práctica profesional y la formación docente (Jaworski y Wood, 2008).

Destacamos el segundo Handbook sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del año 2007, por su relación con el objeto de esta investigación. En él se recogen investigaciones sobre el desarrollo de los profesores. Uno de los 10 interrogantes allí planteados es ¿Qué se puede aprender de la investigación sobre el cambio docente?, que aborda el rol que tiene la reflexión del docente en el cambio, mencionando la importancia sobre su práctica y otorga al grado y tipo de reflexión relevancia para describir el cambio docente en estudios sobre enseñanza (Sowder, 2007).

Asimismo, en el Handbook of the Psychology of Mathematics Education- Past Present and Future, se subrayan las investigaciones en formación inicial de maestros, dedicadas a los aspectos profesionales de la enseñanza de las matemáticas, y aquellas investigaciones relacionadas con el conocimientos de profesores y sus prácticas (Gutiérrez y Boero, 2006).

Dos Handbooks, que aportan a esta revisión son: a) International Handbook of Self-Study of Teaching and Teacher, con investigaciones sobre la reflexión; los conocimientos profesionales para la enseñanza; la investigación y la práctica docente (Loughran, Hamilton, LaBoskey y Russell, 2004); b) Second International Handbook of Science Education en la parte II proporciona compendio dedicado a la formación docente y al desarrollo profesional (Fraser, Tobin y McRobbie, 2012). Del primero destacamos las contribuciones de Korthagen y Lunenberg (2004), quienes vinculan la reflexión con la formación del profesorado.

Las principales investigaciones acerca del conocimiento de los profesores se han volcado en la comprensión de dos categorías fundamentales: el Conocimiento del



Contenido Disciplinar y el Conocimiento Didáctico del Contenido, siendo numerosas las que han identificado dominios de conocimiento que un profesor debe tener para desarrollar su profesión (Ponte y Serrazina, 2004; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008).

## **2.6 Investigaciones sobre reflexión en la formación de profesores**

En esta segunda parte se contempla una revisión sobre investigaciones en formación de profesores, teniendo como principal interés observar el papel que desempeña la reflexión y los aportes en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Existen investigaciones relacionadas con la reflexión que se direccionan en pro del desarrollo profesional del profesor de matemáticas basadas en estudios de programas de formación inicial y continua, que consideran que la reflexión es un tema específico (Korthagen, 1988, 1985; Mewborn, 1999). Otras investigaciones emplean el modelo de formación fundamentado en el “aprender a partir de la práctica”, otorgando relevancia a la reflexión y a la reconstrucción del conocimiento profesional (Alsina, 2010; Korthagen, 2005).

En el libro "Linking Practice and Theory in Teacher Education" del año 2001 y en otros artículos de Fred Korthagen, se presenta un análisis de cómo se ha estudiado la reflexión en la literatura, poniendo de manifiesto que dichos estudios se centran en el desarrollo profesional de los docentes, el papel que desempeñan en la educación la reflexión y la relación entre teoría y práctica en la formación docente.

Bárbara Jaworski estudia el potencial que tiene la reflexión crítica para el desarrollo profesional del docente (Jaworski, 1993), y presenta un modelo descriptivo para el ciclo reflexivo basado en su experiencia e ideas de John Mason, estableciendo once conceptos asociados con la vida profesional del docente (las etapas del desarrollo profesional), siendo el cuarto de ellos la reflexión en la práctica profesional (Jaworski, 1998). En otra investigación ejemplifica la noción de “distanciamiento”, a través del análisis de tres docentes en servicio. La autora se plantea el reto de desarrollar la teoría en relación con las prácticas de enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 2006; Jaworski y Gellert, 2003), y da importancia a procesos de desarrollo reflexivo en los que la práctica de investigación conduce a un mejor entendimiento y desarrollo de la teoría.

Frente a esta misma situación Gómez et al. (2011) señala estudios en Colombia, dedicados a la reflexión sobre la práctica, para la innovación práctica y la producción de materiales para el aula de clase. Se resaltan los trabajos de Agudelo-Valderrama (2008, 2007), quien analiza las concepciones de los profesores para abordar la enseñanza del

álgebra y su implicación en el desarrollo profesional a partir de procesos de reflexión. En esta investigación se ha conceptualizado la reflexión como un componente del desarrollo profesional en programas de formación continua.

Otras investigaciones se han interesado en estudiar y promover procesos reflexivos durante la formación inicial de profesores (Alsina et al., 2006), para elevar el nivel de reflexión sobre las tareas profesionales (Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012) o específicamente durante el prácticum (Flores, 2007; Maat y Zakaria, 2010; Peñas y Flores, 2005), tratando con ello que los estudiantes se inicien en su desarrollo profesional, y que aposenten conocimientos. Los estudios emprendidos han permitido apreciar cómo se relacionan los estudiantes con el conocimiento profesional mediante la reflexión.

Otra dimensión que ubicamos son las investigaciones en la línea de la formación de profesores de matemáticas que incluyen modelos y ciclos de reflexión. Los trabajos de Flores (1997, 2000) en los que se utilizaba el ciclo de Smyth en la formación de profesores de matemáticas. La investigación de Peñas (2005), sugiere que para mejorar la comprensión del profesor son útiles las experiencias de reflexión de, y con profesores; muestra evidencias de la reflexión sobre cuestiones surgidas en las prácticas de enseñanza al respecto de situaciones del contexto profesional.

Las investigaciones de Li, Huang y Tang (2008), en el PME (Psicología de la Educación Matemática) en su edición 2008, muestran evidencias de que la reflexión sobre la experiencia profesional contribuye al desarrollo de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores con experiencia.

Kwon y Orrill (2008) realizaron un estudio de comparación acerca de la reflexión de un profesor en dos actividades; los propósitos de la investigación eran entender sí la reflexión del profesor había cambiado su práctica en un cierto plazo e identificar estos cambios.

Destacamos de Hatton y Smith una investigación sobre la reflexión dentro del curso de Licenciatura de Educación en Secundaria de la Universidad de Sydney, Australia (Hatton y Smith, 1995), en la que estudiaron la naturaleza de la reflexión en la enseñanza, con el propósito de definir las formas específicas de reflexión y evaluar qué estrategias de las usadas facilitaban determinados tipos de reflexión en sus estudiantes.

En una tercera dimensión ubicamos los trabajos en los que se involucra directamente la reflexión y las prácticas docentes, en los que cabe nombrar los de Ponte y Serrazina (2004), quienes definen los aspectos que componen esas prácticas profesionales para el desarrollo del pensamiento reflexivo en los profesores de matemáticas. Destacamos las

investigaciones que utilizan el ciclo de reflexión de Korthagen, entre ellas las de Esteve, Melief y Alsina (2010), en las que se muestra la idea de “aprender de las experiencias”, que facilita adquirir conocimientos, actitudes y habilidades con respecto a uno mismo y su entorno, a través de observaciones propias o mediante una reflexión sistemática bajo condiciones de supervisión.

Turner (2008) estudia la reflexión de profesores que inician su práctica profesional en una comunidad. En su trabajo informa acerca de ciertas implicaciones de las reflexiones de los profesores sobre el conocimiento del tema y sobre el conocimiento didáctico del contenido; en sus conclusiones menciona que es posible ayudar a profesores a ser reflexivos motivándolos a discutir críticamente sus experiencias dentro de comunidades de práctica.

Otras investigaciones que abordan las prácticas docentes desde un modelo de reflexión son los estudios de Parada (2009), quien propone un modelo de reflexión para facilitar al maestro analizar aspectos puntuales de su práctica docente. En otra investigación Parada, Figueras y Pluinage (2011) consideran un modelo para ayudar a reflexionar a los profesores sobre la actividad matemática que promueven en sus clases. Más recientemente se han desarrollado estudios que abordan la reflexión sobre los aspectos de la enseñanza del álgebra escolar en programas de formación (Parada y Pluinage, 2014; Ramos, 2011; Solar y Rojas, 2015), con el propósito de ayudar a los profesores en la reflexión sobre la enseñanza.

## **2.7 Síntesis del capítulo**

En este capítulo se han descrito los referentes sobre la formación de profesores de matemáticas principalmente, aquellos desde la perspectiva teórica que enfrenta la brecha entre la teoría y la práctica. Podemos decir que la revisión a las tendencias y retos en la formación de profesores de matemáticas, pone de manifiesto el interés por esta problemática y en varios se dan importancia a la reflexión en los programas formativos, sobre la cual quedan aspectos importantes en los que es necesario indagar.

Los modelos formativos han abordado tres dinámicas, los centrados en el conocimiento abstracto de tipo disciplinar (teórico), los que dan relevancia en la práctica y los que buscan la interacción entre la teoría y la práctica. En esta última postura se ubica el enfoque de la formación realista. A partir de este enfoque se concretan modelos basados en el aprendizaje realista que postulan principios y propósitos formativos. En tal caso el aprendizaje reflexivo desvela la implicación de la reflexión sistemática en el conocimiento

profesional y en la comprensión de la práctica lectiva del profesor en formación.

Se entiende el prácticum, como el escenario que permite al FPM el contacto con la vida profesional y le permite percibir situaciones profesionales con una visión próxima a su desempeño futuro. En este sentido, el FPM inicia su proceso de desarrollo profesional, dado que asume la complejidad de la práctica y considera en (y de) su práctica, cada vez más elementos para comprenderla y adaptarla. En este proceso de evolución, el FPM moviliza y se relaciona con diferentes saberes, los cuales son producto de su aprendizaje continuo como profesional reflexivo.

En este estudio se busca proporcionar evidencias y datos fundados sobre esta cuestión, desde los principios del enfoque realista. Considerado la relevancia de la experiencia y la oportunidad que el prácticum ofrece en la formación de profesores, se destacan concepciones que conceden importancia a este periodo formativo durante el inicio al desarrollo profesional.

En consecuencia de lo anterior, compartimos la preocupación de varios autores por interpretar los saberes de los profesores. Posterior a los aportes de Shulman, el “conocimiento del profesor” se entiende en un sentido holístico integrador de diferentes dimensiones implicadas en su elaboración y, por tanto, en el desarrollo profesional (Ball, Hill y Bass, 2005). Valoramos la profundización que especialistas han desarrollado a partir de los aportes de Shulman (1987), para enfrentar la complejidad del conocimiento del profesor.

Los diversos modelos de conocimiento identifican dos dimensiones del saber, el conocimiento del contenido) y el conocimiento pedagógico o didáctico del contenido. Destacamos la adaptación de Hill, Ball y Schilling (2008), la particularización de Rowland (2005) y en especial la exhaustiva clasificación en modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas de Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013).

En esta investigación, hemos considerado dos campos generales de conocimiento del profesor de matemáticas siguiendo las ideas de Rico (2015) referidos al conocimiento del contenido matemático escolar y al conocimiento didáctico de las matemáticas escolares.

Siguiendo las ideas de Dewey (1992) consideramos la reflexión como un proceso de pensamiento responsable y sistemático que surge de una situación problemática de la práctica y que requiere disposición del profesor para analizar, comprender y actuar ante dichas situaciones; lo cual implica, significar el conocimiento durante un proceso activo, persistente y responsable.

De los referentes y estudios objeto de esta investigación, se destacan como características de la reflexión: la problematización de las situaciones de la práctica, el

distanciamiento, la toma de conciencia, las decisiones y estrategias para abordar dichas situaciones en la práctica. Asimismo se consideran características que dan cuenta de la comprensión de la práctica del docente e implican en su desarrollo profesional.

Los problemas profesionales se asumen como aquellos objetos de reflexión a través de los cuales los profesores en formación se encaminan en su proceso de reflexión. Durante la evolución en el planteamiento y formulación de dichos problemas, los profesores dotan de significado las situaciones de la práctica que enfrentan. Cuando el FPM atraviesa por cada fase de reflexión prevista en el modelo ALaCT se favorece una acción reflexiva con la que se comprende y aborda la problemática en cuestión. En consecuencia, se espera un crecimiento personal (madurez- que brinda la reflexión) que enriquecen su conocimiento profesional y por ende su desarrollo.

## Capítulo 3. Referentes del curso de formación

El programa formativo desarrollado en esta investigación, se configuró de tal manera que futuros profesores abordaran de manera sistemática y directa las problemáticas de la práctica docente. Para tal fin se procuró que los participantes identificaran y definieran problemas profesionales con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar desde diferentes perspectiva.

Hemos dedicado este capítulo a la descripción del curso, en el que se abordan contenidos que giran en torno a cuestiones tales como: “¿Qué necesitan saber los profesores para enseñar álgebra? ¿Qué situaciones y condiciones deben atender los profesores para enseñar álgebra? ¿Cuáles serían los objetos la enseñanza y de aprendizaje del álgebra sobre los que reflexionan? ¿Cuáles son las concepciones que tienen de sobre las formas de enseñar y aprender algebra? Estas son algunas de las cuestiones que intentaremos resolver en el siguiente apartado puntualizando los referentes del curso de formación.

### 3.1 Concepciones sobre la enseñanza del álgebra escolar

El álgebra se ha convertido en los últimos años, en un tema central de estudio. En Colombia es considerado uno de los puntos críticos del plan de estudios de las matemáticas escolares y ello aparecen los diferentes puntos de vista sobre lo que es el álgebra escolar, su enseñanza y su aprendizaje (Agudelo-Valderrama, 2008).

El álgebra escolar, en sí misma es una poderosa herramienta para solución de problemas y modelar situaciones, y también es esencial para el aprendizaje de muchas otras partes de las matemáticas y disciplinas, donde existe la necesidad de conocimientos algebraicos. La enseñanza y el aprendizaje del álgebra, ha demostrado ser una tarea difícil de lograr. Por esta razón, el álgebra se considera a veces la línea fronteriza que separa a los que pueda de los que no pueden aprender matemáticas

Las actuales orientaciones curriculares colombianas (MEN, 1998; 2016, resaltan la necesidad de abandonar tendencias tradicionales de transmisión por una visión centrada en la resolución de problemas y en el aprendizaje significativo, este último como centro la actividad matemática. Sin embargo, varios estudios muestran la persistencia de los enfoques de enseñanza y aprendizaje centrados en la memorización mecánica y la transmisión de conceptos y procedimientos (e.g. Agudelo-Valderrama, 2006, Clarke, 2008).

Los estudios estiman que para lograr un cambio en esta perspectiva se hace necesario promover procesos de formación y desarrollo profesional de los profesores.

Enseñar álgebra, supone orientar a los escolares para pensar algebraicamente, en el contexto del análisis de situaciones de la vida real (MEN, 1998), implica ir más allá de la simple identificación de hechos y la realización de cálculos específicos, requiere del estudio de los aspectos relacionales y de las estructuras matemáticas presentes en dichas situaciones; esta concepción sobre la enseñanza de álgebra, no implica dejar de lado la mirada estructural del álgebra.

Este enfoque, reconoce además las capacidades de los escolares para identificar con habilidad las estructuras matemáticas que gobiernan las relaciones entre las cantidades que se tratan en los problemas contextuales, promueve la habilidad para generalizar y representar dichas relaciones. Varios estudios han manifestado que esta visión no se restringe a niveles iniciales del estudio del álgebra (cf. Roberts, 2002).

Asimismo, entendemos que el avance de la tecnología señala retos a la enseñanza y exige la formación de escolares competentes en álgebra. En consecuencia, surge la necesidad de asumir la enseñanza del álgebra desde enfoques diferentes a los “absolutista” (Lerman, 1990; 2006), a los “instrumentalista” (Ernest, 1989; Skemp, 1976) y a los enfoques “de transmisión” (Heaton, 2000).

De otra parte, el tratamiento y construcción del concepto de variable, ha rondado varios trabajos que se enfocan en el marco de una enseñanza basada en ‘la comprensión y el significado, con el fin de promover ambientes de trabajo que involucran activamente a los escolares en los procesos generativos del concepto de variable desde diferentes escenarios y situaciones. El enfoque profundiza en el uso y significado otorgado a la letra y la considera relevantes por su naturaleza e influencia en el pensamiento algebraico.

### **3.2 Álgebra escolar**

La problemática respecto a la introducción del álgebra escolar es amplia y variada, unos autores apuestan por la generalización, otros por la sustitución formal y otros por la modelización (Ruano, Socas y Palarea, 2008) y en todas esas apuestas se puede integrar las distintas aproximaciones del álgebra utilizadas en la instrucción.

Existen estudios que asocian las problemáticas de la enseñanza con la naturaleza de este campo. Socas et al. (1989) y Usiskin (1987) proponen cuatro interpretaciones del álgebra indicando las concepciones que poseen las variables: aritmética generalizada, en

que las letras se entienden como generalizadoras del modelo aritmético; resolución de ecuaciones, en que las letras son incógnitas específicas; estructural, en que las letras son símbolos abstractos y funcional, en que las letras son argumentos de funciones.

De igual modo, están presentes en las directrices curriculares diferentes enfoques para abordar la introducción y enseñanza del álgebra escolar con posicionamientos distintos. Tomamos como referencia las que interesan en esta investigación para comprender su pertinencia, estructura y significado de los conceptos algebraicos fundamentales.

Kirshner (1996), toma como referencia las actividades propias que realizan los estudiantes y caracteriza el álgebra escolar de acuerdo a tres tipos de tareas: a) tareas de generalizar (expresiones de generalización y ecuaciones de una incógnita); b) tareas de transformar (factorizar, operar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones) y c) tareas globales o de alto nivel (meta-nivel), allí el álgebra se usa como herramienta, si bien las tareas no tienen que ser exclusivas de álgebra, incluye: resolución de problemas, modelización, reconocimiento de estructuras, generalización, justificación, prueba, y predicción.

Drijvers y Hendrikus (2003) consideran los enfoques fenomenológicos en la enseñanza inicial del álgebra, en este enfoque el álgebra logra significado al ser entendida como: a) un medio para resolver problemas; b) un estudio de relaciones entre variables (estudio de las funciones), c) un estudio de la generalización de relaciones y d) estudio de patrones y estructuras.

En la práctica de la enseñanza estas formas de entender el álgebra escolar no tienen que aparecer separadas radicalmente, debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas relacionadas con más de un significado.

Disponer de estos referentes facilitan al futuro profesor, comprender las principales concepciones y posturas en la enseñanza del álgebra. Son referentes útiles para diseñar, implementar y validar entornos para la enseñanza. Asimismo, aportan al entendimiento de las principales dificultades y errores de los alumnos cuando aprenden álgebra.

Abordar los enfoques al respecto de la iniciación y enseñanza del álgebra anunciados anteriormente, son algunas de las principales situaciones que se espera sean provocadoras de reflexión no sólo, en la formación inicial, sino también en ejercicio de la práctica docente del profesor de matemáticas.

### **3.2.1 Álgebra en el currículo colombiano**



El álgebra en el currículo colombiano se incorpora a lo largo de once grados de educación (primaria y secundaria). En los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia (MEN, 2006) uno de los cinco ejes propuestos se denomina pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, lo que muestra una amplia visión del álgebra. Tradicionalmente se han introducido los sistemas algebraicos y analíticos en los primeros grados de la educación secundaria, bajo la primera y segunda interpretación - aritmética generalizada y resolución de ecuaciones -, dejando la visión funcional para grados superiores (15 años). Si bien las funciones se enseñan en 8vo (14 años), se introducen por medio de expresiones algebraicas. No obstante, el pensamiento variacional propone a lo largo de todo el currículo de matemáticas, el estudio de las relaciones, la comprensión de patrones, el uso de modelos y el análisis de fenómenos de cambio (MEN, 1998). Sobresale la concepción de álgebra escolar como la expresión de las generalizaciones, dando uso a los sistemas de símbolos convencionales.

Las directrices curriculares colombianas proponen introducir el álgebra como una aritmética generalizada (MEN, 1998). Se espera que los alumnos logren el conocimiento de la estructura de las operaciones aritméticas y con ello, puedan considerar las expresiones algebraicas como objetos matemáticos, con los cuales se realizan operaciones estructurales como la factorización (Kieran, 1992). Aunque en esta visión, las relaciones matemáticas son el principal objeto que constituye las expresiones algebraicas, en la enseñanza de la aritmética se abandona la comprensión de las relaciones y las estructuras matemáticas, dejando de lado, el reconocimiento y uso de la estructura (Kieran, 1992). En consecuencia, se limita la relación entre los conocimientos aritméticos y los conocimientos algebraicos, por parte de los alumnos (Carpenter., Franke., y Levi, 2003) y se amplía una de las más documentadas dificultades del aprendizaje algebraico: “el tránsito de la aritmética al álgebra”

No obstante, Agudelo-Valderrama (2008) evidencia la existencia de una creciente brecha entre las disposiciones emanadas por el MEN y las prácticas de aula que orientan la enseñanza de las matemáticas, donde intervienen elementos como las actitudes hacia el cambio por parte de los profesores, sus creencias frente a las prácticas en el aula de clase y al conocimiento matemático y sugiere la necesidad de iniciar desde la formación inicial estrategias en donde los futuros profesores se cuestionen frente a sus experiencias de las prácticas formativas y estas reflexiones se conviertan en objeto de estudio común al colectivo.

Un análisis realizado a los componentes curriculares del bloque de álgebra

(competencias, niveles de desempeños y contenidos). Precisamos el enfoque que subyace en el marco curricular de la institución de práctica.

### **3.2.2 Pensamiento algebraico y aprendizaje del álgebra**

Son diferentes los puntos de vista que atribuyen al pensamiento algebraico entre ellos se rescatan las acepciones a pensar aritméticamente (generalizar), pensar internamente (en términos de abstracción), y pensar analíticamente (o pensamiento funcional). Estas acepciones se equiparan con las dimensiones del currículo colombiano y con la postura sobre el álgebra como un sistema algebraico-analítico (MEN; 2006).

Kieran (2004) por ejemplo, aboga por la generalización. Desde esta perspectiva ampliamente aceptada, es fundamental en la comprensión y tratamiento de la estructura matemática. Familiariza al escolar desde una visión general con los procedimientos de manipulación de símbolos y mejora la capacidad del estudiante para tratar de lo general a lo particular (Mason, 1999).

Entender la generalización, como la expresión que da uso a los símbolos (convencionales) y las acciones sobre éstas, es dar curso al pensamiento algebraico de dos tipos: representacional y simbólico, respectivamente (Usiskin, 1987).

Los pensamientos de tipo representacional y simbólico, han sido incorporados desde tres líneas en el álgebra escolar: como estudio de las funciones, las relaciones y la variación (MEN, 2006). La variación es una forma particular de generalizar, en ella se describe la variación sistemática de variables a través de algunos de dominio. Las situaciones donde se describen y analizan las relaciones entre variables, el álgebra toma carácter proporcional.

En el currículo colombiano, la exploración de la variación y el patrón de generalización se configura para conducir al estudio de las funciones y el uso de variables como argumentos (valor dominio de una función) o parámetros (un número en el que otros números dependen). El tratamiento del significado de las fórmulas que describen un patrón entre las variables (e.g. función lineal) puede conducir de manera semejante al pensamiento algebraico.

La idea de pensamiento algebraico se usa también para hacer referencia al aprendizaje del álgebra, sin distinción a raíz del enfoque asumido. Lo anterior, por ejemplo hace referencia, a la idea de pensamiento funcional, tal como lo define Smith (2008, pp. 143), como un tipo de “pensamiento representacional que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables”, dicho pensamiento es específico del aprendizaje del álgebra

y orienta al escolar para establecer relaciones específicas (incidencias individuales) y generalizaciones de esa relación.

### **3.2.3 Limitaciones del aprendizaje algebraico**

En esta investigación destacamos la importancia que tiene para los FPM el conocimiento de los estudiantes. Encontramos necesario hacer uso de distintos conceptos tales como: errores dificultades y obstáculos, en particular en el aprendizaje del algebra.

Un obstáculo según Brousseau, (1986) puede considerarse como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas

Los obstáculos surgen al momento de relacionarnos con una actividad matemática y pueden ser de diversos tipos tal como los define (Socas, 1997): de origen Ontogénico o psicogenéticos (debidos a características del desarrollo); de origen didáctico (debidos a la instrucción) y de origen Epistemológico (debidos al propio concepto). Los obstáculos de carácter didáctico y epistemológico, en la mayoría de las veces constituyen el origen de los errores procedimentales de los estudiantes.

Es necesario realizar una clasificación de las principales dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, tanto en lo procedimental como en lo conceptual, con referencia a lo algebraico. Socas, (1997) examina los orígenes de los errores de los estudiantes al producir expresiones haciendo uso de símbolos (letras) para describir o predecir el comportamiento de una situación.

En este estudio destacamos para el análisis de errores tres ejes no disjuntos, que permiten estudiar los errores en relación con tres orígenes distintos: Obstáculo (cognitivo, didáctico y epistemológico), Ausencia de sentido (semiótico, estructural y autónomo) y Actitudes afectivas (emociones, actitudes y creencias) (Socas, 1997).

La visión estática de álgebra como una simple extensión de la aritmética, trae consigo dificultades de aprendizaje, habida cuenta el bajo desempeño algebraico de los escolares, implica además en el modelo didáctico para la enseñanza del algebra. A menudo se incorporan estrategias que limitan el significado de las estructuras y dejan de lado la interconexión con otros dominios matemáticos (Castellanos y Obando, 2009). El estudio destacó las dificultades de los estudiantes al usar e interpretar paréntesis, tanto en contextos aditivos como multiplicativos, en los aspectos estructurales y operacionales.

En esta perspectiva cabe resaltar las dificultades de los escolares al ver la operatoria

algebraica como operatoria aritmética. Se identifican: (a) la interpretación del signo igual, (b) dificultades en la notación algebraica y, (c) falta de habilidad para expresar métodos y procedimientos para resolver problemas (Kieran y Filloy, 1989).

En los estudios de Socas (1997; 2007), se reconocen tres tipos de dificultades: de origen epistemológico (intrínsecas al objeto a estudiar), debidas a la naturaleza del álgebra, el lenguaje, los elementos que lo componen y las reglas que lo rigen; de origen ontogénico (inherentes al propio sujeto), relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización, y las de origen didáctico (consecuencia de las técnicas de enseñanza), restringida a la visión tradicional sin aporte al sentido del álgebra.

Según Socas (1997), las dificultades son organizadas en cinco grandes categorías que permite describir la procedencia de estas; dos asociadas a la complejidad de los objetos algebraicos; una tercera relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje del álgebra, a la visión tradicional y sin aporte al sentido del álgebra; la cuarta está asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización, y la quinta está asociadas a actitudes afectivas, inherentes al propio sujeto (Socas, 1997).

Vega-Castro (2013) en su trabajo presenta estudios de otros autores que señalan las dificultades asociadas al tratamiento del álgebra simbólica y a las transformaciones de algunos símbolos. Según los estudios dichas dificultades no tienen origen en falta de sentido inherente al hecho simbólico, sino que se deben a la falta de comprensión de la estructura de las expresiones, las propiedades de los sistemas numéricos (ej. las propiedades asociativa o distributiva) y a la comprensión insuficiente de estas (Kirshner, 2001).

Varios estudios en didáctica del álgebra, coincidieron en apreciar la falta de dominio algebraico de los escolares a causa de la exagerada concepción procedimental de las expresiones algebraicas y a la falta de conocimiento conceptual que sustente la ejecución de dichos procedimientos (Castellanos y Obando, 2009); dado que el conocimiento procedimental procura la abstracción del lenguaje algebraico y con el conocimiento conceptual, se hacen las interpretación y se deciden las manipulaciones adecuadas.

Asumiendo estas limitaciones consideramos importante la comprensión de los aspectos estructurales del álgebra en torno a la dualidad objeto-proceso. Esto significa, ver la entidad matemática (expresión algebraica) como un objeto (cosa a manipular como unidad global), y al mismo tiempo considerar dicha entidad como un proceso (algo conformado por una serie de acciones, prestas a ser manipuladas).

El dominio del álgebra para el trabajo con las expresiones algebraicas, demanda a los alumnos comprender dicha dualidad (objeto y proceso) y tener flexibilidad de pensamiento (en términos de abstracción) para transitar entre el objeto y el proceso. Lo que interpretamos como abstracción procedimental y conceptual. Este último hace referencia a la interpretación y decisión sobre las técnicas y manipulaciones a realizar.

Hoch & Dreyfus (2005) refiere dificultades de los estudiantes al transformar expresiones algebraicas (extensión y factorización). En particular, en tareas que involucran expresiones algebraicas complejas que requieran el uso de los productos notables (diferencia de cuadrados). De modo similar, estudia las dificultades con el uso de las técnicas algebraicas en contextos no familiares (no saben “qué, y cuándo hacer”); la percepción de expresiones con la misma estructura (tratamiento y presencia de los paréntesis) y con la estructura algebraica (incapacidad para reconocer la estructura), la cual puede surgir por la falta de comprensión de los conceptos estructurales de la aritmética. Para estos autores las dificultades fueron atribuidas al bajo sentido estructural, es decir, la capacidad para visualizar la expresión algebraica o sentencia como una entidad, antes de proceder con operaciones para transformar dichas expresiones.

### **3.2.4 Sentido Estructural**

El sentido estructural se refiere a desempeños al trabajar con expresiones algebraicas, que son producto de una serie de habilidades y capacidades para reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado como guía para elegir las operaciones a realizar (Hoch & Dreyfus, 2005).

El desempeño del sentido estructural, conlleva reconocer expresiones equivalentes sin realizar procedimientos, reemplazar una expresión por otra según el caso; conocer entre las equivalentes: la más conveniente a utilizar según el caso; identificar la más simple de todas y cuando es conveniente sustituir una por otra; entre otros (Vega-Castro, 2013).

El desempeño del sentido estructural, se puede interpretar con la presencia de determinados descriptores (Hoch & Dreyfus, 2006 y Vega-Castro, 2013). Hoch & Dreyfus (2005) inicialmente plantearon tres niveles en los descriptores:

- SS1. Reconocer una estructura familiar en su forma más simple,
- SS2. Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja,
- SS3. Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

Posteriormente, subdividieron SS2 y SS3 para ver la complejidad de las expresiones

(Hoch y Dreyfus, 2006).

- SS2.a Término compuesto contiene producto o potencia pero no suma/resta,
- SS2.b Término compuesto contiene suma o resta y además es posiblemente producto o potencia,
- SS3.a Donde la estructura está en su forma más simple,
- SS3.b Término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta,
- SS3.c Término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia.

En su trabajo Vega-Castro (2013) aplicó estos descriptores y amplió la caracterización anterior, añadiendo un cuarto descriptor

- SS4.a Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica,
- SS4.b Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas (por ejemplo del numerador y del denominador).

# MARCO METODOLÓGICO

## Índice del Capítulo

### Capítulo 4. Diseño metodológico

- 4.1 Enfoque de investigación
- 4.2 El caso del estudio
- 4.3 Paradigma de investigación (investigación de diseño) [Toc494380068](#)
- 4.4 Fuentes e instrumentos de análisis de la investigación
- 4.5 Tratamiento de los datos recogidos para el análisis
- 4.6 Análisis y codificación de la información

### Capítulo 5. Configuración del programa de formación

- 5.1 Contexto del programa formativo
- 5.2 Objetivo del programa formativo
- 5.3 Conjeturas
- 5.4 Participantes del programa formativo
- 5.5 Estructura general del curso de formación
- 5.6 Temporalización de las sesiones
- 5.7 Las estrategias utilizadas para el desarrollo del módulo
- 5.8 Evaluación y seguimiento del aprendizaje

### Capítulo 6. Experimento de enseñanza

- 6.1 Módulo Uno: Inducción a la Práctica Profesional Docente
- 6.2 Modulo Dos: Contexto y Diagnostico
- 6.3 Modulo Tres: Planeación e implementación de la enseñanza
- 6.4 Modulo Cuatro: Balance del aprendizaje escolar
- 6.5 Síntesis del experimento de enseñanza

## **Capítulo 4. Diseño metodológico**

Este capítulo, describe el diseño metodológico de la investigación, expone el enfoque de investigación respecto al paradigma de investigación elegido, recoge algunas ideas que se fundamentan en la investigación de diseño y en los experimentos de enseñanza, los cuales sustentan el diseño del estudio empírico. Asimismo ilustramos aquellos elementos que caracterizan la investigación: fuentes e instrumentos de la recogida de datos, el tratamiento de estos y, el análisis y codificación de la información.

### **4.1 Enfoque de investigación**

Con el propósito de identificar y describir los aspectos de la reflexión que manifiesta futuros profesores durante el curso de prácticas de enseñanza, usamos métodos cualitativos vinculados al paradigma interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Para comprender el proceso de reflexión que revelan los participantes del estudio, hemos utilizado la descripción crítica de la experiencia, haciendo la reconstrucción analítica del proceso formativo en el contexto (Goetz y LeCompte, 1988).

Considerando que el foco de atención es el estudio de la reflexión de FPM, sin intención de generalizar, hemos elegido el estudio de caso (Stake, 1998). Mediante la observación sistemática del proceso, buscamos realizar una exploración inicial sobre la reflexión de los FPM, de modo que posteriormente, permita desarrollar este tipo de estudios en contextos similares que favorezcan el aporte teórico (Cohen, Manion y Morrison, 2002).

### **4.2 El caso del estudio**

En esta investigación, los ejemplos y evidencias presentados interpretan las actuaciones y producciones en el estudio del caso de una pareja de futuros profesores de manera instrumental (Stake, 1998). El caso está constituido por Lina (FPM1) y Juan (FPM 2), estudiantes de último año de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos- Colombia, ella con 21 años y él con 22 años de edad; los dos FPM han aprobado ocho semestres del programa curricular con buenos promedios académicos y han cursado las prácticas formativas (ayudantía y observación) previas a la práctica docente (prácticum), en la que se realiza este estudio. Lina y Juan se ubicaron durante el año 2014 (segundo semestre) en una Institución educativa de Villavicencio, Colombia, para desarrollar el plan de área del grado octavo, cada uno de ellos, con un grupo diferente del



mismo grado.

### **4.3 Paradigma de investigación (investigación de diseño)**

Esta investigación se configura como un experimento de enseñanza basado en el paradigma de la investigación de diseño. La Investigación de Diseño (Research Based Design o DBR) en el campo de la Educación Matemática ha sido reconocida por su potencial para comprender los fenómenos del aprendizaje y la enseñanza (Molina et al., 2011).

Este paradigma va más allá de generar modelos eficaces de innovación; su meta es generar modelos explicativos. Su aporte consiste en identificar y hacer explícitas las decisiones que se adoptan en el proceso de diseño. La DBR propone comprender dichos fenómenos (aprendizaje/enseñanza) considerando la complejidad de la realidad educativa, y las relaciones entre la teoría y el plan de instrucción diseñado; el análisis preliminar otorga explicación y aporte teórico contextualizado al estudio (Cobb, P. y Gravemeijer, 2008).

La metodología de la Investigación de Diseño trata de los estudios de campo (o de diseños), los cuales tienen las siguientes características: a) hay interdependencia entre instrucción e investigación, b) el análisis y explicación de las intervenciones están fundadas en el conocimiento disciplinario y en una teoría del aprendizaje, c) la configuración de la investigación y el desarrollo del diseño se establece en un ciclo continuo. Esta configuración implica dos niveles de análisis, el primero preliminar, de los datos colectados en la intervención (análisis durante el desarrollo), y el final, el análisis retrospectivo, de toda la información recabada, realizado al terminar todo el desarrollo del diseño (Molina, et al, 2011).

La validez y confiabilidad en la DBR resulta de los instrumentos y métodos que garantizan las relaciones entre el diseño, el desarrollo y los resultados esperados. La calidad de los estudios de diseño se logra valorando: 1) la fiabilidad, alcanzada mediante el análisis sistemático y consistente del diseño, 2) la réplica, es la posibilidad favorable de réplica en contextos similares, 3) la generalización, que implica obtener resultados semejantes en otros contextos y 4) su utilidad, es la posibilidad de adaptar, comprobar y modificar la instrucción.

#### **4.3.1 Los experimentos de enseñanza**

Los estudios de diseño más frecuentes de la DBR, son los experimentos de

enseñanza. Son estudios de naturaleza cualitativa y basados en un diseño instruccional, están orientados hacia la práctica con interés en comprender secuencias particulares de enseñanza, y hacia la teoría con el propósito de validar o generar teorías desde la implementación y estudio de diseños (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

Existen distintos tipos experimentos de diseño, nos acogemos a los experimentos de enseñanza “uno a uno”, en los que un equipo de investigación conduce una trayectoria de enseñanza con un pequeño número de estudiantes; su objetivo es recrear un escenario de aprendizaje más amplio para estudiar con mayor profundidad y detalle (Confrey, 2006; Cobb y Gravemeijer, 2008). Dichos experimentos siguen tres etapas:

- Preparación del experimento, que se inicia con el diseño instruccional (o intervención) en coherencia con los presupuestos de la investigación (conjeturas y objetivos) y se deriva de teorías o investigaciones previas.
- Experimentación, revisión y análisis preliminar, en la que se desarrolla el diseño instruccional y se modelan las condiciones y formas de aprendizaje previstas en los fundamentos teóricos. En esta etapa se desarrollan sucesivas iteraciones de instrucción con tres pasos: planeación del proceso instructivo, implementación de la instrucción y revisión y análisis de lo acontecido, antes de planificar el módulo siguiente (Cobb y Gravemeijer, 2008).
- Análisis retrospectivo, en el que, a partir de los propósitos de la investigación, se consolidan los productos del diseño, se concretan explicaciones (o aportes) teóricos y los desarrollos curriculares.

En este estudio, conforme con la investigación de diseño, la descripción sistemática del experimento consiste en la revisión y análisis secuencial de cada módulo formativo, a lo largo de la trayectoria de instrucción, a la luz de los objetivos, las conjeturas y al modelo teórico basado en la reflexión sistemática, planteado por el enfoque de la enseñanza realista.

El estudio empírico de la investigación se concretó con el desarrollo del experimento de enseñanza, se condujo con el modelo de Korthagen et al., (2001), para promover la reflexión a través del diseño instructivo en la asignatura de Práctica Docente, de la Licenciatura.

#### **4.4 Fuentes e instrumentos de análisis de la investigación**

Los datos se recolectan a través de tres fuentes: tareas formativas en el módulo de trabajo (tareas, diarios e informes); registros durante la experimentación (transcripción de grabaciones) y de la observación participante del colectivo investigador; las notas de la observación participante, aportan al marco explicativo de las argumentaciones y producciones de los participantes. La Tabla 4.1 exhibe la información correspondiente a las producciones de dos FPM (FPM1 y FPM2) durante el experimento.

Tabla 4.1. *Fuentes e instrumentos de recolección de la información*

Tareas formativas	Módulo formativo	M1	M2	M3	M4	Seminarios	Cierre
	Tareas formativas	10	12	20	2	2	2
	Diarios (Reflexión personal)	6	6	6	6	4	6
	Informes de avance del proyecto de práctica	2	2	2	2	2	2
Figuras	Diapositivas, diagramas mapas conceptuales	12	12	24	12	8	5
Registros y observación participante	Transcripción ( audio /video)	5	6	10	6	2	1
	Informes Diario del investigador	1	1	1	1	2	1
	Informe de Protocolos	5	5	10	2	2	1

Las tareas formativas se corresponden con cada una de las sesiones. Las notas y observaciones son recogidas por uno de los integrantes del colectivo de práctica presente en cada sesión.

Los registros (audio y video) llevados a cabo en todas las sesiones, incluyen las puestas en común (gran grupo y pares) y las explicitaciones (de los formadores y FPM). Estas fuentes, se han rotulado con un código compuesto de letras y números (ver Tabla 4.2).

Tabla 4.2. *Ejemplo de códigos asignado a fuentes de información*

Fuente	Código	Descripción
Tarea formativa: actividad (individual)	Tipo A7:FPM2	A7: tarea formativa número siete (actividad) FPM2: estudiante número dos –Juan-
Tarea formativa pares	A7:FPM1-2	Actividad formativa siete desarrollada por FPM1 y FPM2 (una puesta en común entre pares)
Tarea formativa tipo Taller	Tf7: FPM1,2,3	Tarea para el trabajo grupal desarrollada por FPM1, FPM2 y FPM3 (referida a los contenidos)
Observaciones participantes	PS7	Notas y protocolo de la sesión S7
Registros	TS7	Transcripción de los registros de S7 (audio y video)
Extracto de registro (conversacional o contenido)	S7 (L33-45)	Unidad de contenido iniciado en la línea 33 y finalizado en la línea 45, correspondiente al registro de la sesión S7

Como se verá en el siguiente capítulo, el proceso formativo atiende a cubrir los objetivos institucionales del curso, pero mediante una metodología compatible con la

enseñanza realista. Las fuentes de conocimiento profesional se plantean a través de la realización de un análisis didáctico de los contenidos algebraicos (Rico, 2015), dado el carácter funcional que ofrece dicho proceso formativo.

Para favorecer el inicio en el desarrollo profesional de los futuros profesores, y siguiendo indicaciones de la enseñanza realista, los procesos formativos promueven que los participantes recorran cada una de las fases del proceso reflexivo ALaCT. De este modo, la información se agrupa y examina en lo acontecido por cada una de las cinco fases de cada ciclo reflexivo en el experimento.

## **4.5 Tratamiento de los datos recogidos para el análisis**

Siguiendo el paradigma cualitativo, se procesan los datos del estudio mediante un análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Los datos que se examinan y ejemplifican en el informe de resultados son extractos de tres tipos: registro conversacional, figuras o segmentos de contenido, estos se convierten en unidades de análisis (o unidad codificable).

La categorización de la información, permite definir y organizar conceptualmente las unidades de análisis (o unidades de significado) que aluden a una misma idea, concepto o significado. Se categorizan (organizan y procesan) para capturar detalles de las actuaciones de los FPM y de sus acciones reflexivas ocurridas durante la experimentación.

La categorización y la codificación de la información, se apoyó en el uso del software Nvivo-11. Durante la categorización todo dato distingue: fuente, sujeto, categoría de análisis y ubicación en la trayectoria formativa. En lo que sigue describimos la metodología usada en la categorización de la información acorde a su fuente y naturaleza.

### **4.5.1 Los registros conversacionales**

Se procesan de acuerdo a su naturaleza y procedencia. Los extractos que proceden de la explicitación de los participantes se dividieron por líneas para su procesamiento. La división de las líneas en estas conversaciones se realiza, por turnos de palabras (Rodríguez, Gil y García, 1996). Por ejemplo, la Figura 4.1 ilustra un extracto de la transcripción de la sesión S4 (TS4). Resaltamos el dato: [S4:L1-3], un turno de conversación del profesor (P)

Línea	Interlocutor	Unidad de contenido para el análisis
1	P:	¿La factorización es un problema de método o de comprensión?
2		¿Factorizar implica dar sentido a la estructura algebraica?
3		¿La enseñanza del álgebra escolar (factorización de TCP) depende de estrategias eficientes (didácticas)?
4	FPM7	¿Ha contemplado partir de la resolución de problemas o del área para aplicar los TCP?
5	FPM5	¿A qué parte de la expresión algebraica, considera se debe dar más importancia: interna (las operaciones) o la externa (la forma)? ¿Por qué?
6	FPM3	¿Qué piensa tener presente para que los niños comprendan las expresiones y reconozcan la forma del TCP?

Figura 4.1. Tratamiento del registro conversacional: extracto de una transcripción.

En aquellos casos en donde la conversación es muy amplia, o se corresponde con puestas en común (entre pares o en el gran grupo), la división de las líneas cuenta con dos minutos de registro (audio o video). Esta duración se considera una unidad de análisis razonable, pues contiene una cantidad significativa de la conversación sin ocasionar saturación cognitiva. (Sherin y Han, 2002). La Figura 4.2 ilustramos un extracto del registro (video) de la sesión S3. Resaltamos el dato [S3: L0:46.5-1:40.7] en la exposición del FPM2.

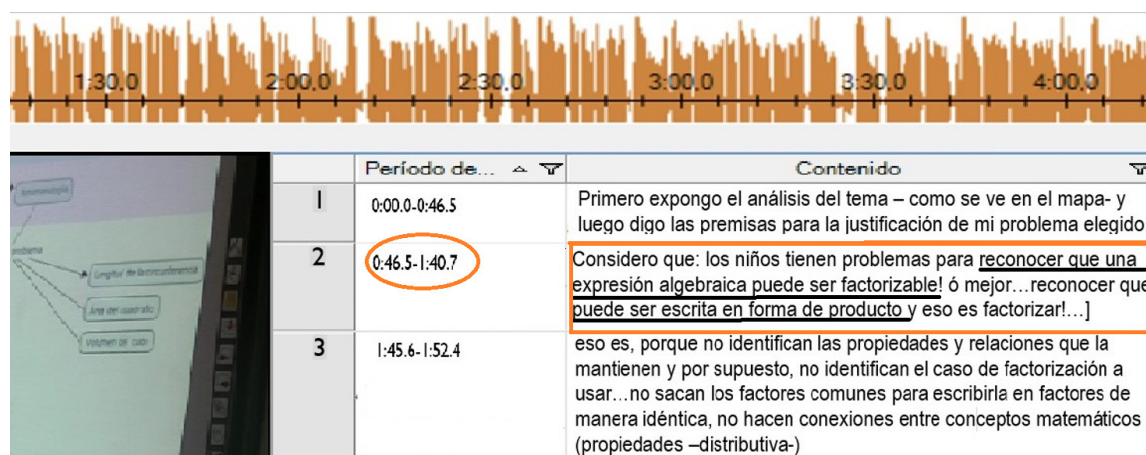


Figura 4.2. Tratamiento del registro conversacional: video (o audio)

#### 4.5.2 Los segmentos de texto y contenido de tareas formativas

Son trozos de textos, procedentes de informes y diarios reflexivos. La unidad la conforman líneas (o párrafos) del texto que contienen una expresión con sentido. Por ejemplo, el trozo de texto ubicado en [A6: L23-24] contiene la expresión: “concluimos que se requieren más que ejercicios de aplicación y ejercitación para aprender la factorización”, extraído de la tarea formativa A6 presentada por los FPM1 y FPM2.

#### 4.5.3 Las figuras, representaciones y diagramas

Las diferentes representaciones (e.g. mapas conceptuales, figuras, diagramas) que proceden de las producciones de los participantes, también se consideraron para extraer unidades de análisis.

El tratamiento se realiza por sectores (o regiones) de las figuras que aportan un contenido relevante para su interpretación. Por ejemplo, en la Figura 4.3 ilustramos la selección de sectores de una figura procedente de la tarea A2 del FPM2. Resaltamos el contenido de la región [A2: 10.20-180.270] en la producción de FPM2.

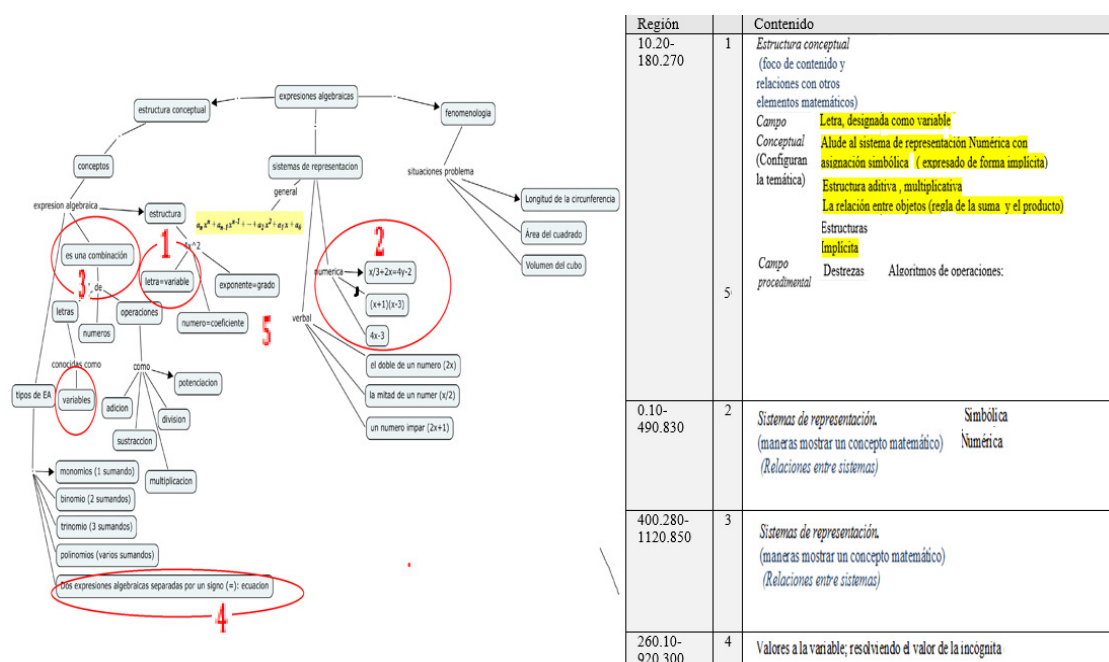


Figura 4.3. Tratamiento de las figuras: mapa conceptual

## 4.6 Análisis y codificación de la información

El análisis de los datos, en primera instancia, aprecia el proceso formativo y las producciones, las cuales dan cuenta de que, los futuros profesores han cubierto las fases del ciclo ALaCT. En este enfoque metodológico toda interpretación se describe con evidencias (datos) que aportan al marco explicativo de los resultados

Aquí, el carácter interpretativo está orientado a la búsqueda del significado de los sucesos, identificamos actuaciones y disposiciones de los FPM que manifiestan las acciones del proceso reflexivo tales como: describir, examinar, analizar, evaluar y poner en marcha alternativas a una situación (Ver §2.4.4).

La fase A, acontece cuando los FPM identifican y formulan una situación problemática relacionada con la propia práctica. La descripción de hechos relativos a un evento

desafiante de la lección (un incidente) y de la percepción de conflictos que inquietan o interesan a FPM.

La fase L se aprecia cuando los FPM verbalizan sus concepciones (o ideas) que enuncian el objeto de la problemática. Los interrogantes y creencias identificadas y examinadas, son otra evidencia de la clarificación de principios, acciones que confirman lo sucedido en la fase L.

La fase "a" se aprecia cuando el FPM toma conciencia de nuevos conocimientos, a fin de avanzar en la solución (o comprensión) de la problemática. Esta fase ocurre con los acuerdos conceptuales, con los referentes que deciden consultar para profundizar y con la clarificación de concepciones para abordar la solución de las problemáticas.

La fase C se aprecia con las alternativas que el FPM crea para su actuación, se manifiesta con las decisiones que toman para abordar la problemática (o la solución).

La fase T se revela a través de nuevas formas de definir la problemática, la conexión que tiene en relación con la formulación de la problemática que dio inicio al ciclo reflexivo.

Para la interpretación de la información, se definieron cinco episodios marcados por cada fase. La Figura 4. 4 representa el análisis por episodios.

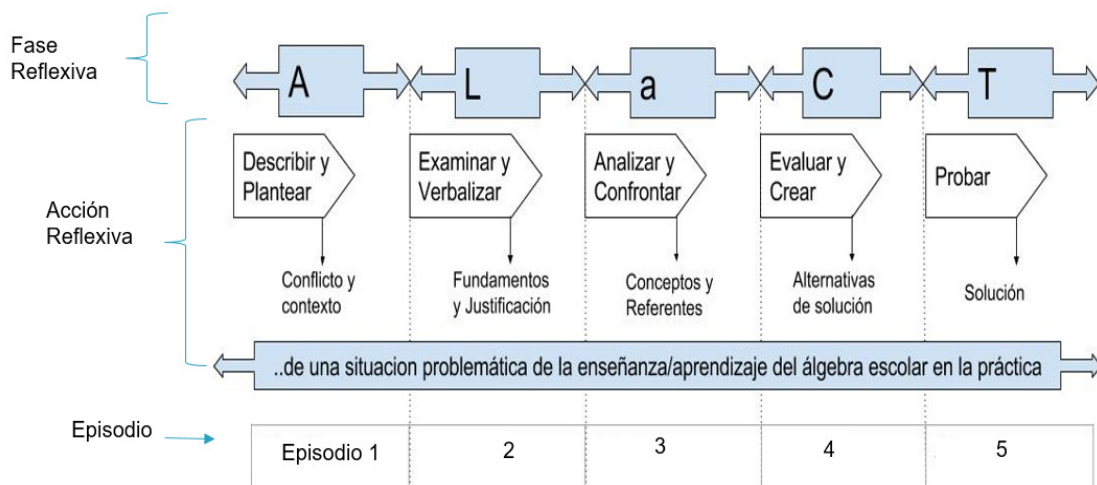


Figura 4.4. Análisis de las dimensiones y categorías por episodios.

En segunda instancia para apreciar las características de la reflexión que han realizado los FPM, se analizan evidencias y producciones (datos) referidas a las acciones reflexivas en cada episodio. De manera abierta y deductiva se codifican los rasgos que caracterizan la reflexión de los FPM a partir de tres dimensiones: problemas profesionales, conocimiento profesional y tareas matemáticas para la enseñanza.

Para apreciar cómo ha ocurrido la reflexión de los FPM en los cuatro ciclos reflexivos, de la investigación nos centramos en: a) la evolución en la formulación de problemas profesionales detectados; b) la manifestación del conocimiento profesional usado al definir dichos problemas y c) las características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas. Las variables a considerar en cada dimensión se distinguen a continuación.

En la tercera parte de este informe, cubriendo los resultados del estudio, se presenta cronológicamente la información en cinco episodios o procesos en los que ocurrió cada fase del ciclo reflexivo. El análisis del episodio describe las acciones reflexivas manifestadas por los FPM en cada fase, ejemplificando y evidenciando la ubicación de la categoría correspondiente en las dimensiones mencionadas. A manera de síntesis se reúnen los principales rasgos por fase reflexiva que dan cuenta de las características de la reflexión: problematización, distanciamiento, toma de conciencia, decisiones. La Figura 4.5, ilustra el emparejamiento que hemos realizado entre las fases del ciclo reflexivo y las características de la reflexión.

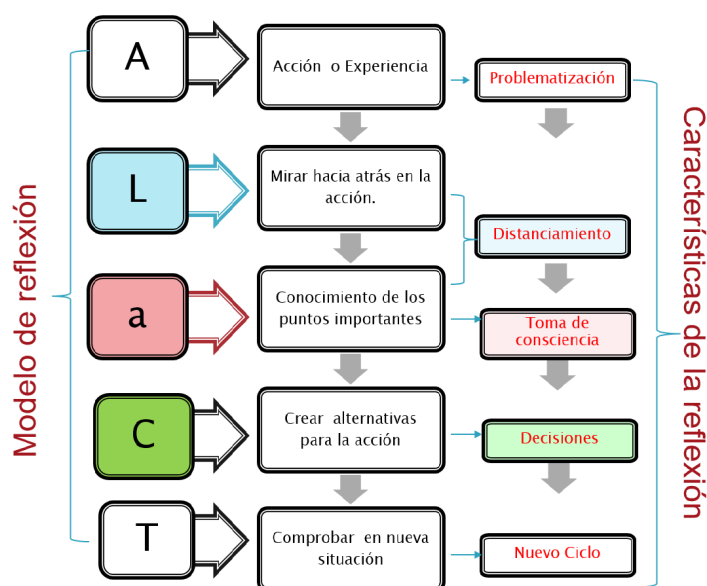


Figura 4.5. Características de la reflexión y fases del ciclo reflexivo ALaCT.

#### 4.6.1 Problemas profesionales: variables y categorías de análisis

Esta dimensión en el estudio atiende a la definición, caracterización y evolución de los problemas profesionales identificados y planteados; apreciamos el grado en que los FPM formulan la problemática a lo largo del ciclo reflexivo.

Para el análisis, nos centramos en las características y rasgos referidos al origen de



la situación, la naturaleza de la problemática, al planteamiento de la cuestión problemática; incluimos los dilemas y la percepción de la resolución.

***Evolución en la formulación de los problemas profesionales: características***

La Tabla 4.3 reúne estas categorías que fueron descritas en el epígrafe 2.4.3 siguiendo diferentes referentes y se alude con su propia denominación. En la descripción de las fases reflexivas por episodios se ilustran dichas características y se ejemplifica con evidencia, se alude a la denominación de cada categoría durante dicha descripción. La naturaleza de la situación problemática abordada y descrita por los FPM (ver §2.43 Figura 2.4) se ilustra a lo largo de los episodios exhibiendo sus características (e.g. Actores, Objeto, Tipo, Artefactos, Normas, Comunidad, División del trabajo).

Tabla 4.3. *Características en la formulación de problemas profesionales.*

Características		Rasgos		
Planteamiento	Amplia	General	Concreta	Particular
Origen	Incierto	Variado	Situado/únicos	Ético/Cultural
Naturaleza	Compleja	Diversa	Dinámica	
Dilema	Absoluto	Relativo	Dinámica	Personal/
Percepción Solución	Únicas	Conocimiento problemático	No resolución	Resolución

**4.6.2 Conocimiento profesional: variables y categorías de análisis**

Las variables que consideramos para apreciar el conocimiento profesional que manifiestan o emplean los FPM durante el proceso reflexivo afectan al contenido matemático escolar y al conocimiento didáctico de las matemáticas escolares (ver §2.3.2). Para la definición operativa de las categorías, acudimos al Análisis Didáctico. La Tabla 4.4 ilustra las categorías, los rasgos y códigos de esta dimensión.

Esta dimensión atiende al conocimiento que aparece en el proceso formativo (o procedente de la formación previa), el cual se refleja en producciones de los FPM y en las decisiones tomadas para profundizar en nuevos referentes al definir el problema profesional.

Tabla 4.4. *Categorías: Conocimiento del profesor en formación*

<b>Conocimiento del contenido matemático escolar</b>
--

Categoría	Rasgos	Código	
Estructura conceptual (Estructuran y organizan el contenido matemático)	Campo Conceptual (Define y conceptual) y Campo procedimental (organiza el contenido procedimental) Actitudinal	Hechos: (Términos, Notación, Resultados) Definiciones: (Conceptos) Estructuras (Implícita, Explícita) Procesos matemáticos: (Destrezas, Razonamiento, Estrategias) Relación entre conceptos Motivación	Ec1
Sistemas de representación (Modos de comunicar un contenido)	de Externas Internas (Relación entre sistemas)	Verbal; Tecnológica; Manipulativa. Gráfica; Simbólica; Numérica; Pictórica	Ec2
Fenomenología. (Cuestiones aplicaciones que dan sentido al contenido)	Contextos y Situaciones Problemas Modos de uso	Educativo, Personal, Científico, Públicas, Sociales, Científicas	Ec3
<b>Conocimiento didáctico del contenido matemático escolar</b>			
Expectativas (Precisión y profundidad de acción para...)	Competencia y Objetivos la Capacidades;	Estándar de competencia Tipos de metas (general, específico) Acción y contenido para la capacidad Finalidades observables-previas	Cg1
Limitaciones del aprendizaje	del Errores dificultades	Tipos y clases de errores Origen de los errores Causa de los errores Clasificación de dificultades	Cg2
Oportunidades de aprendizaje	de Condiciones Demandas cognitivas Retos	Condiciones incentivan aprendizaje Circunstancias del aprendizaje Condiciones curriculares Motivaciones para el aprendizaje	Cg3
Tareas secuencias	y Variables de tarea Funciones Componentes (datos)	Contenido, Situaciones, Complejidad Diagnóstico, auto/regulación, síntesis Meta, formulación, temporización	Ai1.1 Ai1.2 Ai1.3
Organización trabajo en el aula	Complejidad, Creatividad, Organización	Conexión, reproducción, reflexión Formatos Tipo agrupación (individual, grupal)	Ai2
Materiales recursos	y Características y tipos	Criterios clasificación (utilidad, formato)	Ai3
Diseño y modos	Normas y momentos	Fases y etapas de evaluación	Aa1
Aprovechamiento escolar	Criterios instrumentos desempeño	e Evaluación de contenidos (tarea) Complejidad/Criterios de evaluación Evaluación de competencias-	Aa2
Indicadores de evaluación	de Valoraciones	Análisis evaluación generales Informe	Aa3

### 4.6.3 Tareas matemáticas: variables y categorías de análisis.

Con el objeto de estudiar cómo se refleja el conocimiento en la acción, se emplean las características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas, como producto del proceso reflexivo, por lo que también se han considerado como variables del

estudio en particular, observando el diseño (o la selección) de las tareas y su rediseño.

Se examinan las funciones de las tareas, las componentes y las variables de tarea, incluyendo los ajustes y la coherencia que las tareas sufren en su elección y diseño. Dicha variable se describe en el informe por episodios; las interpretaciones a las categorías que definen esta variable (ver §3.3), se ilustran con extractos de las producciones de los FPM y se justifica su implicación en el proceso reflexivo. La Figura 4.6 ilustra la organización y concepción de las variables y categorías presentes en la caracterización de la reflexión en este estudio.

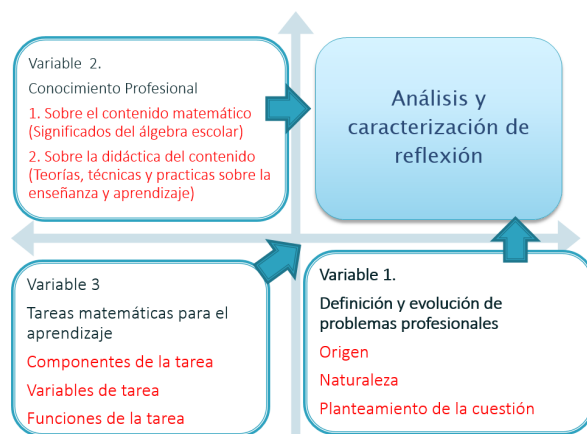


Figura 4.6. Dimensiones, variables y categorías de análisis

#### 4.6.4 Codificación de la información

La metodología siguió más un proceso inductivo que deductivo, para terminar la codificación de todas las fuentes en el árbol de nodos. Al percibir una categoría nueva, se incorporó a los nodos. La codificación atiende las cuestiones de investigación, por tanto, se siguieron las categorías que permiten reflejar el propósito de esta. Los pedazos de información relacionados con las categorías fueron codificados examinando palabras o frases de los participantes y las interpretaciones, o conexiones a los referentes. Los códigos o denominaciones de la categoría se colocaron en la ramificación de los nodos en orden cronológico por cada fase. Figura 4.7 ilustra el procedimiento.

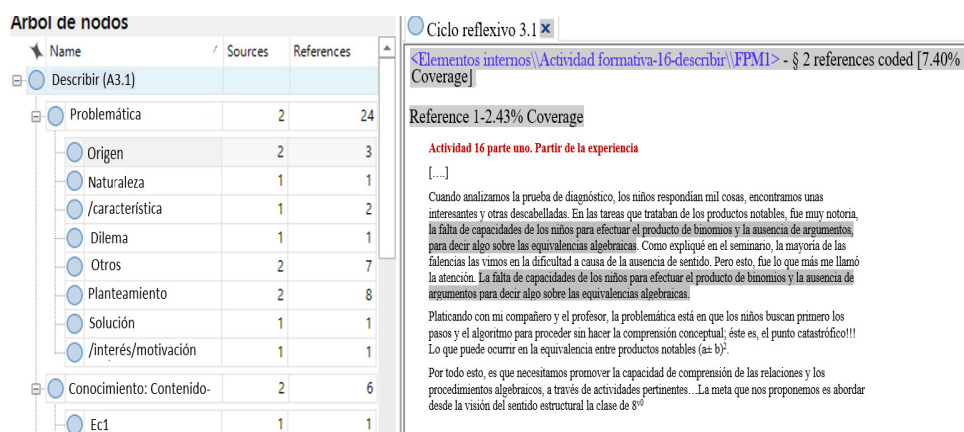


Figura 4.7. Codificación de la información en categorías de análisis

Los trozos ejemplifican la descripción y exponen nuestro marco interpretativo. En el informe se integra a la explicitación e interpretación de los resultados las voces (y/o producciones) de los participantes. La Figura 4.8 ilustra un pedazo de nuestro informe.

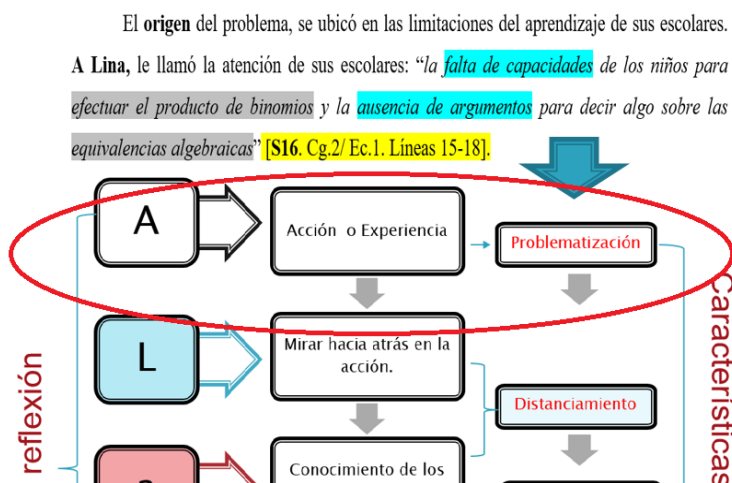


Figura 4.8. Informe por dimensiones y categorías reunidas en episodios

El extracto se ubica en la fase A3.1 de la sesión S16, entre las líneas 15-18. Pertenece a una producción de FPM1, cuando describe la situación problemática que aborda (tarea formativa A16-FPM1).

Interpretamos el origen que caracteriza el problema profesional y ubicamos dos categorías de conocimiento a los que alude, a la estructura conceptual de los binomios cuadrados (Ec1: campo procedimental) y a las dificultades del aprendizaje algebraico (Cg.2: debidas a la complejidad del álgebra y/o a conocimientos previos). Estos datos y los demás recopilados en su conjunto en el episodio permiten concluir al respecto de las características de la reflexión (e.g. Problematización de la práctica) y de las dimensiones

del estudio (e.g. Problemas Profesionales, Conocimiento Profesional)

## Capítulo 5. Configuración del programa de formación

Este capítulo presenta el diseño del programa de formación del Curso de Práctica Profesional Docente. Se desarrolló en el contexto de las prácticas de enseñanza (o prácticum) que los futuros profesores de matemáticas realizan en su formación. Describimos el contexto, los participantes y las decisiones tomadas para configurarlo como un experimento de enseñanza.

### 5.1 Contexto del programa formativo

El curso está enmarcado en el programa curricular de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, Colombia; en la asignatura de las prácticas de enseñanza del último semestre (13 créditos académicos), que tiene un carácter práctico. La asignatura dispone que los Futuros Profesores de Matemáticas (FPM o practicantes) asistan y desarrollen el proyecto de Práctica Profesional Docente en instituciones educativas<sup>2</sup> (en adelante IE o centros educativos), tutelados por un profesional-docente titular del curso (tutor), y supervisados por un asesor académico docente de la universidad (asesor).

Acorde con el Proyecto de Práctica<sup>3</sup>, los FPM asumen el reto de diseñar, implementar y realizar balance del proceso de enseñanza de las matemáticas sobre tópicos determinados, en concordancia con el currículo de la Institución Educativa donde realizan la práctica.

### 5.2 Objetivo del programa formativo

El objetivo formativo de la asignatura de prácticas es complementar la formación de los FPM a través de la integración de sus saberes con su quehacer, de tal manera que el FPM logre contrastar la teoría y la práctica a lo largo de este periodo formativo (Castellanos y Flores, 2015). En esta ocasión, y siguiendo la enseñanza realista, el curso ha planteado además: facilitar a los futuros profesores de matemáticas realizar ciclos de reflexión sobre diversos problemas derivados de su práctica docente.

---

<sup>2</sup> Institución Educativa se refiere a los centros escolares de educación básica primaria y secundaria en el cual se inserta el FPM para realizar su PPD

<sup>3</sup> El Proyecto de Práctica Docente, solicita al FPM, realizar un diagnóstico de las dificultades del aprendizaje de los escolares de la IE de práctica y, posteriormente, implementar un plan de intervención para mejorar la problemática identificada en esa realidad

El programa de formación concreta los objetivos formativos en coherencia con los propósitos de la asignatura de prácticas de la Licenciatura en:

- Favorecer relación del conocimiento teóricos (proveniente de su formación) con las experiencias de la práctica lectiva durante el desarrollo del proyecto de práctica.
- Proporcionar conocimientos teóricos y herramientas prácticas relacionadas con: el análisis didáctico y la didáctica del álgebra para el diseño, implementación y evaluación de la enseñanza del álgebra escolar.
- Promover ciclos de reflexión a partir de experiencias y situaciones problemáticas vividas por los FPM durante las prácticas de enseñanza.

### **5.3 Conjeturas**

El programa de formación siguiendo la Investigación de Diseño se orienta a partir de las siguientes conjeturas, definidas a priori desde el problema que orienta la investigación:

- El FPM a través de los procesos de reflexión identifica y formula problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar.
- El FPM a través del uso del análisis didáctico: identifica significados de un contenido (álgebra) y organiza la planeación de la enseñanza de éste.
- El FPM a través de los procesos de reflexión se inicia en el desarrollo profesional, al relacionarse de manera funcional y crítica con el conocimiento profesional durante la práctica docente, en particular, al tomar decisiones para planear la enseñanza de un contenido de álgebra.

### **5.4 Participantes del programa formativo**

Los participantes fueron estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, quienes matricularon la asignatura de Práctica Docente y a quienes también denominamos practicantes o FPM. El curso inició con 12 practicantes que durante los meses de junio a diciembre del 2014 fueron ubicados en seis instituciones educativas de Secundaria, en el grado octavo, con escolares que oscilan entre 13 y 15 años de edad. Los practicantes asumen la enseñanza de un tópico del eje curricular álgebra (MEN, 1998)

Los sujetos de este estudio, realizan exclusivamente el prácticum en el último semestre de la licenciatura, durante 480 horas, intercalando el proceso formativo en las instituciones (aproximadamente 368 horas entre trabajo en las aulas y la elaboración del

proyecto de prácticas), con 33 sesiones de supervisión desde la universidad (seminarios de prácticas, de 132 horas, trabajo colectivo con los compañeros, asesorías con tutores).

Para atender a los practicantes se cuenta el colectivo de práctica (C.P). Este grupo está integrado por el coordinador de la PPD, la investigadora-docente; los asesores de práctica (internos y externos) y los colaboradores externos. Existen dos tipos de asesores en el proceso formativo con roles diferentes: los tutores o asesores externos<sup>4</sup>, son los profesores titulares de las IE y reciben a los practicantes, supervisan la docencia de los practicantes acorde con las finalidades educativas del área de matemáticas. Los asesores internos son los profesores universitarios que orientan el proceso de formación durante la práctica y son responsables de la evaluación de su desempeño del curso de las prácticas (o prácticum).

Durante la planeación y desarrollo del curso formativo el colectivo de práctica: colabora con el seguimiento y análisis del plan formativo, contribuye a la revisión de cada sesión en las diferentes etapas del curso, comparte apreciaciones y sugerencias de las sesiones con la investigadora y colaboradores (externos), y concilia durante la intervención los ajustes para las siguientes sesiones. Los aportes de este colectivo se registran y siguen protocolos e instrumentos institucionales ajustados para la investigación (Anexo 2).

## 5.5 Estructura general del curso de formación

El curso está estructurado en cuatro módulos formativos denominados: 1. Inducción (con 9 sesiones<sup>5</sup>); 2. Contexto (con 8 sesiones); 3. Implementación (con 12 sesiones); y 4. Balance (con 5 sesiones), que se cubren en 18 semanas (Figura 5.1).

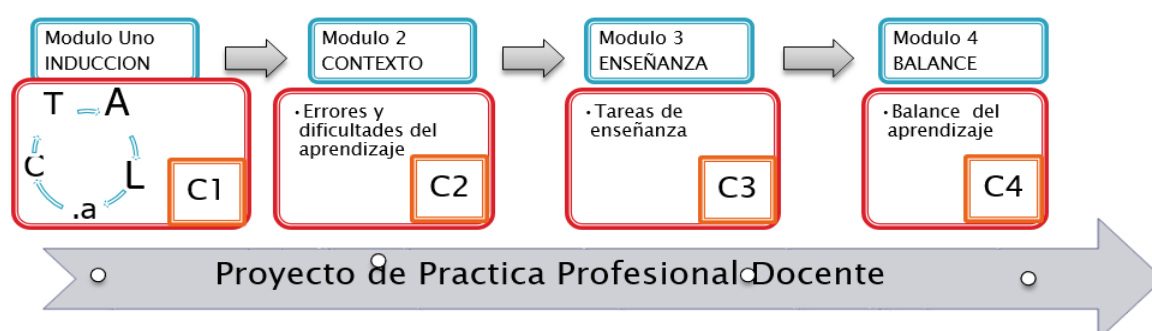


Figura 5.1. Estructura General del Curso: módulos formativos y ciclos reflexivos

4 Los profesores asesores externos o tutores, no tienen vinculación laboral con la Universidad, son responsable del aprendizaje de los escolares en las Instituciones Educativas.

5 Cada sesión de trabajo tiene una duración de 4 horas.



Los contenidos formativos del módulo de Inducción son dedicados al álgebra escolar y a la introducción del Análisis Didáctico. Los contenidos del módulo Contexto, abordan el currículo de las matemáticas, el pensamiento algebraico y el aprendizaje del algebra. Los contenidos del módulo Implementación abordan las estrategias de enseñanza y la planeación de la enseñanza del álgebra. El último módulo denominado Balance se dedica a la evaluación y seguimiento de la enseñanza y a los resultados del Proyecto de Práctica Docente.

El programa formativo ha previsto la promoción de cuatro ciclos reflexivos, un ciclo por módulo formativo, los cuales se ponen en marcha a lo largo de la intervención de los contenidos. La Tabla 5.1 ilustra la planeación de la instrucción por sesiones, los contenidos, objetivos y muestra el ciclo reflexivo incluido en cada módulo formativo.

Tabla 5.1. *Estructura general del programa de formación*

Módulo	Sesión	Ciclo	Contenido Formativo	Expectativas de aprendizaje	Reactivos para a reflexión
Inducción	S1 a S8	C1	Normativa de PPD Análisis Didáctico Lineamientos curriculares	Realiza análisis didáctico a un tópico del álgebra escolar Define problemática del proyecto PPD	Problema que define el proyecto de PPD.
Contexto y aprendizaje	S9 a S15	C2	Currículo de matemáticas: álgebra escolar	de Reconoce errores y dificultades del aprendizaje del álgebra de los escolares.	Diagnóstico del aprendizaje de los escolares.
Enseñanza	S16 a S27	C3	Secuencias didácticas Estrategias de enseñanza	Diseña la planeación de la enseñanza. de Implementa secuencias didácticas.	Tareas escolares para la clase
Balance	S28 a S33	C4	Evaluación del aprendizaje y enseñanza	del Evalúa alternativas y enseñanza Sustenta resultados del Proyecto de PPD.	de Alternativas y re-diseño de secuencias didácticas.

Para dar curso a los ciclos reflexivos se han previsto cuatro reactivos, que estimulan a los practicantes para realizar tareas formativas por cada una de las fases de los ciclos de reflexión, de acuerdo al modelo ALaCT (Korthagen, 2010). La Figura 5.2 muestra los ciclos reflexivos en cada uno de los módulos formativos y el número de sesiones dedicadas a cada uno de ellos, a lo largo de las 18 semanas del programa formativo.

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Sesiones	S1-S8			S9-S14			S15	S16-S27						S28-S32			S33	
Reactivo	Problemática y proyecto PPD			Diagnóstico			Primera Sustentación del proyecto PPD	Planeación						Re-diseño			Sustentación de resultados e Informe del proyecto	
Ciclos	Ciclo Uno ALaCT1			Ciclo Dos ALaCT2				Ciclo Tres ALaCT3						Ciclo Cuatro ALaCT4				
Módulos	Inducción			Contexto				Implementación - Aula						Balance				

Figura 5.2. Trayectoria por ciclos de reflexión durante el programa formativo

## 5.6 Temporalización de las sesiones

Se realizan 33 sesiones. Las sesiones S1 a S8 del módulo 1 (Inducción) ocurren en la Universidad de los Llanos a manera de seminario, los practicantes se dedican a definir el Proyecto de Práctica y al estudio de referentes para el diseño de las planeaciones de clase. Las sesiones S9 a la S33, son desarrolladas en las IE donde se ubican los practicantes, a través de asesorías de 4 horas. En las sesiones S15 y S33 se efectúan dos reuniones generales de práctica docente, asiste el colectivo de práctica y todos los FPM, allí se comparten avances del Proyecto de Práctica

En las sesiones S9 a S14 del módulo 2 (Contexto y Diagnóstico) los FPM ajustan el Proyecto de Práctica con los resultados del diagnóstico del aprendizaje escolar, al tiempo que, inician la planeación de la instrucción. Al finalizar el módulo 2, en la sesión S15 se da la primera reunión general de práctica docente, los FPM presentan el propósito que configura el Proyecto de Práctica y comparten los resultados de diagnóstico del aprendizaje escolar.

El módulo 3, ocurre entre las sesiones S16 a la S27, tiene como escenario el aula de clase de matemáticas en las IE, donde ocurre la implementación de las tareas matemáticas para el aprendizaje del álgebra. Las sesiones se dedican a la planeación e implementación de la instrucción. El módulo 4, comprendido entre las sesiones S28 a la S33 se dedica al balance, rediseño y comunicación de resultados de práctica, se culmina en las IE con la segunda reunión general de práctica, los FPM sustentan resultados del Proyecto de Práctica.

## 5.7 Las estrategias utilizadas para el desarrollo del módulo

El diseño instructivo, combina el desarrollo de quince tareas formativas a lo largo de las treinta y tres sesiones. En este estudio se han adoptado las tareas formativas del

programa formativo, en correspondencia con la naturaleza de las tareas definidas en la asignatura de práctica docente de la licenciatura. Por lo tanto, nos referimos a dos tipos de tareas formativas: a) los talleres, involucran tareas formativas individuales y grupales, relacionadas con los contenidos formativos del curso; b) las actividades<sup>6</sup>, son las tareas propias que realiza un practicante de manera individual durante cada fase de reflexión, en ellas se solicita la producción de documentos y exposiciones asociadas a los reactivos de reflexión (Tabla 5.1).

Otra estrategia es el diario de campo<sup>7</sup>, el cual los FPM plasman relatos, representan situaciones y experiencias. Los pares de practicantes en las instituciones educativas de práctica, establecen reuniones para observar las situaciones de la clase, hacer puestas en común, intercambiar experiencias y verbalizar conjeturas. Los encuentros del colectivo de práctica configuran un espacio para compartir ideas, cuestionar y recibir aportes.

## 5.8 Evaluación y seguimiento del aprendizaje

La evaluación se ajusta de acuerdo a los objetivos de la asignatura de Prácticas de Enseñanza y a la norma institucional<sup>8</sup> que se basa en los siguientes criterios para observar el desempeño y aprovechamiento del practicante durante la docencia:

- Conocimiento adecuado de los conceptos básicos.
- Capacidad para establecer relaciones acertadas entre los conocimientos teóricos y prácticos.
- Aplicación de los conceptos en la resolución de talleres formativos.
- Disposición y actitud para emprender actividades encaminadas a la reflexión y auto evaluación de la práctica docente.

La evaluación valora los créditos, tanto teóricos como prácticos del curso, por medio de las producciones de los practicantes, entre ellas:

- Producción de registros de la práctica docente consignados en el diario de campo.

---

6 Se acordó entender “las actividades como conjuntos organizados y orientados de tareas escolares, realizadas por los alumnos o el profesor” y las tareas como el “conjunto de acciones coordinadas y orientadas en función de la actividad de la que forman parte” (Luna, 2007, pp.100)

7 La estrategia que agrupa los registros, evidencias e informes de los practicantes, sigue estructura e indicaciones definidas en el reglamento de PPD

8 Unillanos Lineamientos de Práctica Resolución 036 de 2012, en lo concerniente al capítulo 5

- Planeación y re-diseño de secuencias de enseñanza reunidas en la memoria del proyecto de práctica docente.
- Diagnóstico, seguimiento y evaluación del aprendizaje a escolares reunidos en la memoria del proyecto de práctica docente.
- Presentación y sustentación de avances e informes de prácticas.
- Realización de talleres y actividades formativas durante asesorías y seminarios.

A manera de síntesis, mencionamos la pertinencia del diseño instruccional del programa formativo, en términos de su contribución a la formación inicial del profesores de matemáticas durante las prácticas de enseñanza. El programa formativo atiende los presupuestos de la teoría del aprendizaje realista; con lo cual la trayectoria de instrucción en cada uno de los cuatro módulos formativos, prevé tareas formativas para la realización de un ciclo reflexivo bajo el modelo ALaCT.

El diseño del programa se configura y se valida en el curso de prácticas de enseñanza del último año de la Licenciatura. El diseño instruccional parte de las expectativas de formación de los FPM y atiende a las necesidades de los practicantes que, a su vez, desarrollan su trabajo de grado, el cual se reconoce como el proyecto de práctica PPD.

La trayectoria de instrucción, considera las limitaciones del aprendizaje y las carencias reveladas por los practicantes, de este modo se organizan los contenidos y las estrategias en los módulos formativos, las cuales les brindan a los FPM herramientas para abordar y fundamentar los problemas profesionales relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar durante las prácticas de enseñanza.



## Capítulo 6. Experimento de enseñanza

Este capítulo describe los cuatro módulos formativos del curso de Práctica Profesional Docente, el cual configuró el experimento de enseñanza de este estudio. El experimento tiene como objetivo promover la reflexión en los FPM para que inicien su desarrollo profesional y aposenten sus conocimientos.

Para cada uno de los módulos exponemos la descripción de las tres etapas del proceso de experimentación: planeación del módulo formativo, implementación del mismo y análisis y/o evaluación de lo acontecido. La etapa de planeación del módulo formativo señala los objetivos instruccionales, los contenidos formativos, las tareas formativas para ser resueltas por los FPM. La etapa de implementación de la instrucción, describe el desarrollo del plan previsto y destaca los elementos relevantes en relación con las tareas formativas y los propósitos de la investigación. La etapa de revisión y análisis, examina lo acontecido, resalta las decisiones en relación con la planeación del módulo siguiente. La Figura 6.1 ejemplifica el trabajo planeado, ilustra de manera paralela la programación de los contenidos y de las acciones reflexivas.

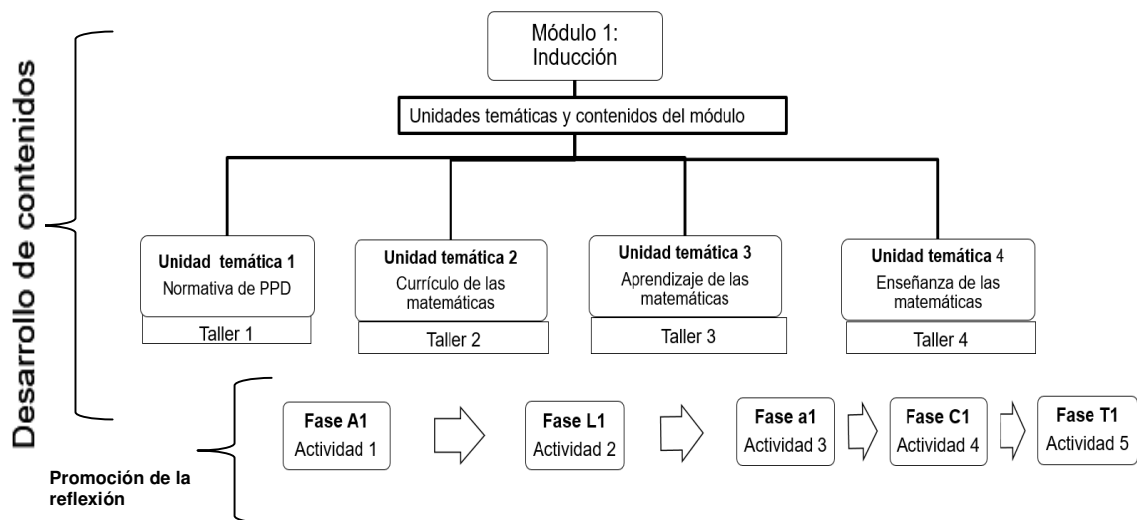


Figura 6.1. Organización del proceso de experimentación: ejemplo del módulo uno

### 6.1 Módulo Uno: Inducción a la Práctica Profesional Docente

El módulo uno utiliza elementos formativos y metodológicos del seminario de inducción a la práctica docente, que se venía desarrollando en el programa de licenciatura, ajustando contenidos y tareas formativas para garantizar el propósito de la investigación.

La instrucción y las tareas formativas de este módulo orientan al practicante durante el ciclo reflexivo C1, para identificar y plantearse problemas profesionales sobre la enseñanza/aprendizaje del álgebra, que definen su proyecto de práctica docente.

### 6.1.1 Planeación del módulo uno

La instrucción se estructuró atendiendo a las características de los FPM, la mayoría con buena formación en matemáticas, pero con escasa experiencia práctica (Tabla 6.1).

Tabla 6.1. *Planeación de la instrucción del módulo uno*

<b>Objetivos instruccionales</b>
<p><b>Oi1.</b> Formula la problemática derivada de sus preocupaciones y/o experiencias de enseñanza, para dar origen al proyecto de práctica.</p> <p><b>Oi2.</b> Aplica el primer componente del Análisis Didáctico (Análisis de Contenido) para planear un tópico de álgebra.</p> <p><b>Oi3.</b> Cubre las acciones reflexivas previstas para un ciclo de reflexión basado en los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar.</p>
<b>Unidades temáticas y contenidos</b>
<p><b>Ut1.</b> Práctica Docente: Reglamento de la práctica docente y el rol del practicante; Lineamientos de Práctica Docente; Resolución Superior 039 (Unillanos, 2012)</p> <p><b>Ut2.</b> Lineamientos Curriculares: Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos (MEN, 1998); generalidades del Análisis Didáctico y análisis de contenido.</p> <p><b>Ut3.</b> Aprendizaje de las Matemáticas. Estándares básicos de competencia (MEN, 2006); pensamiento algebraico e indicadores de desempeño; generalidades del análisis cognitivo</p> <p><b>Ut4.</b> Enseñanza de las Matemáticas: elementos del análisis de instrucción y actuación; estrategias de enseñanza; tareas y problemas matemáticos; evaluación-aprendizaje (MEN, 1295).</p> <p><b>Ut5.</b> Proyecto de Práctica Docente (PPD): Aspectos administrativos de la práctica docente; criterios de evaluación del PPD; elementos del Proyecto Educativo Institucional (PEI)</p>
<b>Tareas formativas</b>
<p><b>1. Talleres para el desarrollo de los contenidos:</b></p> <p><b>Tf1.</b> ¿Qué es Práctica Docente? Inquietudes y expectativas de los practicantes.</p> <p><b>Tf2.</b> El álgebra escolar y el currículo de las matemáticas.</p> <p><b>Tf3.</b> Análisis Didáctico, parte uno: análisis de contenido y análisis cognitivo.</p> <p><b>Tf4.</b> Análisis Didáctico, parte dos: análisis de instrucción y análisis de actuación.</p> <p><b>2. Actividades para la promoción de la reflexión:</b></p> <p><b>A1.</b> Observar un conflicto de la enseñanza y/o el aprendizaje.</p> <p><b>A2.</b> Examinar la situación problema.</p> <p><b>A3.</b> Analizar los elementos relevantes del problema.</p> <p><b>A4.</b> Socializar entre pares posibles alternativas de solución.</p> <p><b>A5.</b> Revisar el proceso y re-formular la problemática</p>

### **Secuencia y temporalización del módulo uno**

La trayectoria de instrucción se cubre en tres semanas a lo largo de ocho sesiones, cada sesión comporta 4 horas presenciales en la Universidad y 4 horas de trabajo independiente del estudiante. Por la configuración del experimento se alternaron las

sesiones con espacios de 2 días. La Tabla 6.2, describe la planificación de la instrucción siguiendo los presupuestos antes descritos en cada sesión.

Tabla 6.2. *Secuencia de instrucción del módulo uno*

Sesión	Fecha	Unidad temática	Tareas formativas	Recursos básicos
S1	14-06-2014	Ut1	Tf1 y A1	Lineamientos de PPD Directrices curriculares (MEN,1998) Videos
S2	16-07-2014	Ut2	Tf2	Documentos de referencia
S3	21-07-2014		A2	Estándares de competencia (MEN, 2006)
S4	23-07-2014	Ut3	Tf3	Malla curricular de la IE
S5	26-07-2014		A3	Documentos de referencia. Bases de datos y buscadores Link de consultas
S6	28-07-2014	Ut4	Tf4	Normativa evaluación (MEN,1295)
S7	30-08-2014		A4	Instrumentos de evaluación (ejemplos de la IE) Planes de mejoramiento de la IE
S8	1-08-2014	Ut5	A5	Lineamientos de Proyecto PPD Formatos de seguimiento a la PPD PEI de las Instituciones

### 6.1.2 Implementación del módulo uno

El módulo uno fue desarrollado entre los días 14 de junio y 1 de agosto de 2014. Las sesiones 1, 2, 4 y 6 fueron dedicadas a la explicación de los contenidos formativos, incluyendo el desarrollo de cuatro talleres. El proceso formador procuró la promoción de las fases de reflexión del primer ciclo reflexivo C1 en las sesiones 1, 3 y 5 a través de cinco actividades. Describimos la implementación de las unidades temáticas en lo que sigue.

#### ***Implementación de Ut1***

Durante la sesión S1 del 14 de Julio los FPM participaron en el Taller Tf1, en el cual manifestaron expectativas y concepciones sobre lo que es la práctica docente. En esta sesión S1 se desarrolló la Actividad A1, observaron un vídeo de clase y describieron su experiencia.

Los FPM identificaron incidentes generales, aludieron a problemáticas sobre diversos aspectos del aula y de la Institución Educativa (Anexo 2-SP1); la mayoría necesitó delimitar la problemática sobre aspectos de la enseñanza/aprendizaje del álgebra. La Tabla 6.3 reúne las estrategias de indagación usadas por el grupo formador para ayudar a los FPM. Asimismo, para concretar la fase reflexiva A1, fue necesario solicitar a los FPM la redacción de la problemática en forma de interrogante, se recomendó la estructura: ¿Cómo/Qué... el sujeto...la acción...el tópico?



Tabla 6.3. *Estrategias de indagación en módulo uno*

Interrogantes para orientar la descripción	Interrogantes para concretar la cuestión
¿Cuáles fueron los acontecimientos?	¿Quiénes son los sujetos del problema?
¿Qué quería conseguir?	¿Qué inquietud quiere abordar?
¿Qué hizo?	¿Cuál es el contexto del conflicto?
¿Qué pensaba?	¿Cuál es el contexto temático del conflicto?
¿Qué ocurrió durante el desarrollo de la clase?	

### **Implementación de Ut 2**

En la sesión S2 del día 16 de julio se trató el Análisis Didáctico, presentando las componentes, funciones y alcances. Posterior a la explicación de los contenidos de la Ut2, los FPM se reunieron en parejas y realizaron el Taller Tf2, allí dieron respuestas a los interrogantes: ¿Qué, Por qué y Cómo incluir la enseñanza del álgebra en el ciclo básico secundario? Las respuestas de los FPM al Tf2, mostraron las diferentes ideas sobre lo que es planear la enseñanza.

La discusión de los grupos durante el desarrollo del Tf2 se centró sobre la distinción entre conocimiento procedimental y conceptual, la mirada funcional y estructural del álgebra escolar y el tratamiento de la variable para modelar situaciones del contexto (Anexo 2-SP2). Se discutieron los lineamientos curriculares (MEN, 1998). Los FPM mencionaron el carácter pre-algebraico expuesto en estos y la vinculación del sistema simbólico con la aritmética.

En esta misma sesión S2 dos grupos expusieron el análisis de contenido del tópico elegido; el equipo formador comparte aportes e invita a profundizar para una posterior presentación (Anexo 2-SP2). La sesión S2 se amplió en fecha adicional y los grupos presentaron versiones más elaboradas de los mapas conceptuales, aun así pocos se aproximaron a la fenomenología y a las representaciones, manifestaron no haber realizado este análisis en cursos anteriores.

En la sesión S3 los FPM desarrollaron la actividad A2 de manera individual, examinaron nuevamente el video y usaron parcialmente la estrategia de indagación (Tabla 6.3). La mayoría considero nuevamente el problema. Fue necesario solicitar a los FPM expresar las preguntas que les surgieron; en algunos casos aclararon sus dudas y mostraron posturas individuales (Anexo 2-SP3). Algunos manifestaron las causas de los hechos a partir de sus ideas y otros manifestaron las razones que dan justificación al problema; prepararon la presentación de la problemática identificada y la expusieron.

Los FPM presentaron los fundamentos que definen las problemáticas, la mayoría atendió las dudas del colectivo y pocos justificaron las ideas que definen su problema. La formadora recomendó examinar el problema con las componentes del Análisis de

Contenido y preparar las razones que sustentan la situación, ubicando el contexto curricular y conceptual objeto de la problemática (Anexo 2-SP3).

### ***Implementación de Ut.3***

Se inicia en la sesión S4 del día 23 de Julio del 2014, los FPM desarrollaron el Taller 3, sobre las expectativas para el aprendizaje de un tópico de álgebra, realizando apreciaciones personales, aunque otros (FPM 5, 2, 1) las tomaron de los estándares de competencia (MEN, 2006); a partir de estas respuestas se abordaron las generalidades del Análisis Cognitivo. Al tratar las limitaciones del aprendizaje surgió de FPM3 interés por conocer las diferencias entre error y dificultad. Los formadores usaron ejemplos para precisar la diferencia y recomendaron bibliografía.

Esta unidad continuó en la sesión S5 del día 26 de julio, los FPM realizaron la actividad A3, analizaron sus ideas y las creencias explicitadas por el grupo. Entre pares confrontaron las concepciones y listaron en orden de importancia los temas o cuestiones que necesitaban profundizar. Pocos de los FPM consultaron y analizaron documentos pertinentes a su problemática (Anexo 2-SP5); algunos grupos aprovecharon el desarrollo del taller 3, que solicitó usar el análisis cognitivo, para profundizar en aspectos importantes del problema y continuar rumbo a una alternativa.

### ***Implementación de Ut4***

Inició su desarrollo en la sesión S6 del 28 de julio, se dedicó a explicación de las generalidades del análisis de instrucción, aunque este contenido fue el de mayor expectativa al inicio del curso y solo se abordó de manera general. En la sesión S6 pocos practicantes avanzaron en el Análisis Cognitivo o de Instrucción (FPM 1, 2, 4, 5), la mayoría requirió más tiempo para completar el Análisis de Contenido. Los formadores explicaron con ejemplos los elementos del Análisis de Instrucción, otorgaron prioridad a las tareas para el aprendizaje.

El análisis de actuación previsto para la sesión 7 del día 30 de agosto del 2014, no se desarrolló de manera explícita. Todos los FPM participaron en el foro virtual (del Tf4), interpretaron la idea de evaluación presente en los estándares de competencias (MEN, 2006); FPM12 y FPM9 comentaron sobre la evaluación externa de calidad para grado

noveno –SABER9-. En su mayoría los FPM en Tf4 esbozaron las tareas para el diagnóstico del aprendizaje algebraico necesario para iniciar el módulo dos.

Los FPM en la actividad A4, empleando algunos elementos del análisis instrucción, expresaron una alternativa con visión a la reformulación del problema. La mayoría de los FPM plantearon la alternativa como una estrategia de enseñanza. (Anexo 2-SP7).

### **Implementación de Ut5**

En ella se abordaron algunas componentes del proyecto de PPD. Todos los FPM presentaron la formulación de la problemática objeto del proyecto y describieron la justificación, los fundamentos y algunas apreciaciones personales (FPM 4, 5,10).

La Actividad 5 dio la oportunidad a los FPM de realizar una mirada personal a la problemática abordada, siguiendo consignas de la Tabla 6.4, para esto revisaron el proceso reflexivo llevado hasta el momento (Anexo 2-SP8).

Tabla 6.4. *Indicadores para la revisión del proceso reflexivo. Adaptado de Korthagen et al., (2001).*

<b>Indicadores para revisar el proceso reflexivo cursado en C1</b>
<p><b>1. Interrogantes en relación con la problemática de la enseñanza/aprendizaje del álgebra</b></p> <p>¿Cuál es la pregunta que re-formula el conflicto inicial?                      ¿Qué es lo que se quiere hacer y puede hacer de otra forma durante práctica docente?                      ¿Cuál es la problemática y fundamentos que orientan el proyecto de práctica?</p>
<p><b>2. Observar la situación problemática inicial, describir el conflicto y el propósito (problema/conflicto).</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Representar lo ocurrido y verbalizar la problemática (reconstruir y examinar el problema)</li> <li>• Analizar y notar lo importante al reconstruir la problemática (profundizar y confrontar con otros)</li> <li>• Preparar una alternativa, significa ver la solución (formular solución o alternativa a la situación)</li> <li>• Probar la alternativa o definir la nueva situación problemática (iniciar un nuevo ciclo)</li> </ul>

### **6.1.3 Revisión y análisis módulo uno**

Después de cada sesión, los profesores encargados realizaron un análisis de los logros de cada sesión y registraron las decisiones en los protocolos **PS1 al PS8 (Anexo 2)** de cara al rediseño de las planeaciones de los módulos siguientes.

### **Decisiones para la planificación de los siguientes módulos**

El análisis se realizó con los datos recogidos al finalizar la sesión ocho. La Tabla 6.5

---

9 SABER, prueba de evaluación externa que el ICFES realiza anualmente para medir las competencias en el área de matemáticas para los grados 3, 5, 9 y 11 de educación básica y media en Colombia

muestra el análisis realizado a este módulo, dicho análisis en conjunto favoreció la vigilancia a las conjeturas del experimento y permitió registrar sucesos para la toma de decisiones.

Tabla 6.5. *Decisiones al finalizar el módulo uno.*

<b>Decisiones en relación con el funcionamiento del diseño instruccivo</b>
<p><b>1. Ajustar la secuencia de instrucción para:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Abordar los enfoques de la enseñanza del álgebra,</li> <li>2. Trasladar los componentes restantes del análisis didáctico a los módulos posteriores,</li> <li>3. Completar el análisis didáctico del tópico algebraico,</li> <li>4. Aportar referentes y ejemplos sobre errores y dificultades del aprendizaje algebraico,</li> <li>5. Ampliar la idea de pensamiento algebraico,</li> <li>6. Incluir la actividad matemática en el contexto del álgebra,</li> <li>7. Profundizar en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos</li> </ol> <p><b>2. Adecuar tareas formativas para:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Involucrar en los talleres referentes de consulta.</li> <li>2. Concretar las solicitudes de los talleres a los contenidos desarrollados.</li> <li>3. Rediseñar el Tf4 en dos apartados (Tf4.1 tareas matemáticas y Tf4.2 evaluación)</li> </ol>
<b>Decisiones que implican la promoción de la reflexión</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Involucrar nuevas acciones para concretar la fase L del ciclo reflexivo.</li> <li>2. Solicitar explicar oralmente y por escrito los fundamentos conceptuales de la problemática</li> <li>3. Solicitar examinar fundamentos de la problemática para confrontar con ideas iniciales.</li> <li>4. Incluir la verbalización de las razones que definen la problemática (fase L).</li> <li>5. Utilizar las concepciones explicitadas por FPM para elegir y aportar en la confrontación.</li> <li>6. Crear interrogantes para ampliar la indagación y superar las dificultades (en fases a y L)</li> <li>7. Usar los interrogantes contruidos como estrategia en los módulos siguientes.</li> <li>8. Solicitar realizar, entre pares, análisis de los aspectos que dan origen a la problemática.</li> <li>9. Motivar a FPM para profundizar en referentes que les permitan avanzar en la solución</li> </ol>

## 6.2 Modulo Dos: Contexto y Diagnostico

El módulo partió del estudio del contexto y del diagnóstico del aprendizaje de los escolares, estudio que los FPM deben realizar al incorporarse a las Instituciones Educativas. Este módulo se centra en reconocer y profundizar en las limitaciones del aprendizaje del álgebra escolar, para delimitar la situación problema identificada en el ciclo reflexivo C1 y darle continuidad en el ciclo reflexivo C2.

### 6.2.1 Planeación del módulo dos

La programación de la instrucción atiende las decisiones y ajustes derivadas del análisis del módulo anterior (Tabla 6.6). Este módulo se planea para seis sesiones (S9 a S15

Tabla 6.6. *Planeación de la instrucción del módulo dos*

<b>Objetivos instruccionales</b>
<p><b>Oi1.</b> Identifica errores y dificultades del aprendizaje algebraico.</p> <p><b>Oi2.</b> Aplica el segundo componente del análisis didáctico (análisis cognitivo) a un tópico de álgebra, para planear su clase.</p> <p><b>Oi3.</b> Profundiza en las limitaciones del aprendizaje del pensamiento algebraico.</p>
<b>Unidades temáticas y Contenidos formativos</b>
<p><b>Ut1.</b> Pensamiento algebraico: enfoque de la enseñanza del álgebra escolar (MEN, 1998). Pensamiento algebraico y variacional.</p> <p><b>Ut2.</b> Expectativas de aprendizaje: Estándares básicos de competencia (MEN, 2006). Procesos matemáticos y noción de actividad algebraica. Lenguaje algebraico, razonamiento algebraico.</p> <p><b>Ut3.</b> Limitaciones del aprendizaje: errores, dificultades de aprendizaje del álgebra escolar</p> <p><b>Ut4.</b> Oportunidades de aprendizaje: caminos de aprendizaje. Tareas para el aprendizaje.</p>
<b>Tareas formativas</b>
<p><b>1. Talleres para el desarrollo de los contenidos:</b></p> <p><b>Tf4.</b> Parte dos: Cuestionario para la prueba del diagnóstico del aprendizaje algebraico.</p> <p><b>Tf5.</b> Coherencia: Competencias, objetivos y capacidades a un foco conceptual de álgebra</p> <p><b>2. Actividades para la promoción de la reflexión:</b></p> <p><b>A6.</b> Identificar y describir la problemática de las limitaciones del aprendizaje algebraico.</p> <p><b>A7.</b> Encontrar argumentos para justificar origen y naturaleza de los errores.</p> <p><b>A8.</b> Analizar las causas de los errores y organizar dificultades asociadas a la problemática.</p> <p><b>A9.</b> Crear alternativas y estrategias abordar las dificultades del aprendizaje algebraico.</p> <p><b>A10.</b> Diseñar actividades y tareas para abordar en el aula, la problemática.</p>

### ***La secuencia y la temporización del módulo dos.***

El esquema del módulo dos incluye seis sesiones de S9 a la S14. La Tabla 6.7 ilustra la secuencia; con sesiones de cuatro horas con encuentros (formadores, tutor y practicantes) en las Instituciones Educativas de práctica.

Tabla 6.7. *Secuencia de instrucción del módulo dos*

Sesión	Fecha	Unidad Temática	Tareas Formativas	Metodología
S9	4-08-2014	Ut1	Tf4 y A6	Exposición y trabajo de FPM
S10	8-08-2014	Ut2	Tf4.2	Exposición de los FPM; Encuentro-asesoría
S11	11-08-2014		A7	Encuentro, Asesoría; Exposición de los FPM
S12	15-08-2014	Ut3	Tf5	Exposición y Trabajo de los FPM
S13	18-08-2014	Ut4	Tf5.2	Puesta en común entre pares. Encuentro-asesoría
S14	20-08-2014		A9	Encuentro, Asesoría; Exposición de los FPM
S15	22-08-2014		A10	Exposición de FPM en gran grupo

### **6.2.2 Implementación del módulo dos**

Se desarrolló del 4 al 22 de agosto del 2014 en Instituciones Educativas de Villavicencio-Colombia dispuestas para la práctica. En este módulo los practicantes trabajaron de dos maneras: individual (en sus respectivas aulas de clase) y por grupo de pares (puestas en común) en las Instituciones de práctica; los grupos de FPM asumieron

retos y se mostraron dispuestos al encuentro con el colectivo una vez por semana; en los encuentros informaron sobre el desarrollo de las tareas formativas, manifestaron sus preguntas y presentaron sus posturas ante el cuestionamientos del colectivo. Todos los asesores (profesores de la universidad) acudieron a las Instituciones de práctica para el desarrollo de encuentros y asesorías con FPM.

Los resultados de la prueba diagnóstico del aprendizaje de los escolares favorecieron la concientización de los FPM en relación con las expectativas del Proyecto de Práctica y la realidad escolar; en la mayoría de los casos delimitaron la problemática con objetos particulares de la enseñanza/aprendizaje de un tópico del álgebra escolar. El colectivo de práctica, en los encuentros y asesorías, brindó orientaciones, ayudó a confrontar con la teoría, orientó y aportó referentes. En adelante describimos los principales hechos ocurridos durante la experimentación en relación con la planeación establecida, las dificultades evidenciadas y las decisiones tomadas.

### ***Implementación de Ut1***

Se realizó en la sesión S9 del 4 de agosto del 2014. Todos los FPM ubicaron la dimensión curricular asociada los sistemas algebraicos y analíticos (MEN, 1998; 2006) y revisaron mallas curriculares de las respectivas Instituciones. La lectura y discusión los aproximó al concepto de sistema, como un conjunto que involucra objeto, relación y operación. Los FPM observaron la contribución de los sistemas -algebraicos y analíticos- en el desarrollo del pensamiento –algebraico y variacional-. En la puesta en común del taller Tf4 algunos FPM manifestaron la importancia de considerar el álgebra como aritmética generalizada (FPM 1, 2, 5), otros expresaron la importancia del álgebra en la modelación para interpretar los fenómenos de variación y cambio (FPM 7, 12, 9) y otros apreciaron la importancia de la representación simbólica de los fenómenos físicos mediante las expresiones algebraicas (FPM 1, 6, 8).

Durante la actividad 6 surgió resistencia de los FPM para tratar la prueba diagnóstico, que, en sí misma se convirtió en un hecho<sup>10</sup> relevante de la práctica docente. Los FPM necesitaron ajustar el cuestionario y concretar las tareas, situación que requirió de más de una sesión (Anexo 2 PS9). Una vez aplicada la prueba, identificar y describir los errores propios de la actividad algebraica y las problemáticas asociadas a ellos, fue tarea difícil

---

<sup>10</sup> Hecho de la práctica de tipo relevante que merece ser analizado y reportar su evolución, el colectivo decidió otorgarle importancia para ser profundizado en los módulos siguientes (diseño de pruebas)

para los FPM.

En la mayoría de los casos las descripciones se refirieron a detalles y valoraciones de tipo cuantitativo; para lo cual el colectivo de práctica orientó la asesoría a través de la estrategia de indagación (Tabla 6.8), mostrando al FPM la importancia por ir más allá de la calificación cuantitativa de la prueba y la necesidad de atribuir dificultades del aprendizaje a un tópico particular del álgebra.

Tabla 6.8. *Estrategia de indagación en módulo dos*

Interrogantes para orientar la descripción de errores y dificultades en la solución de una tarea algebraica	Interrogantes para afrontar expectativas de aprendizaje de un tópico del álgebra
¿En qué se equivocan los escolares al solucionar las tareas algebraicas?	¿Cuáles son las capacidades o desempeños a evidenciar por los alumnos en el aprendizaje del álgebra?
¿Cuáles son los errores observados en la solución de tareas algebraicas?	¿Cuáles son los objetivos o competencias para el desarrollo del pensamiento algebraico referido al tópico?
¿Por qué cree se pueden equivocar al resolver una tarea algebraica?	¿Cómo apoyar a los alumnos con dificultades del pensamiento algebraico?
¿Cuáles son las razones de los errores cometidos en aprendizaje de un tema del álgebra?	
¿Cómo aprenden los alumnos el álgebra escolar?	

### **Implementación de Ut2**

Se continúa el 8 de agosto del 2014, profundizando en el análisis cognitivo. Los practicantes con anterioridad a la asesoría estudiaron los referentes y documentos y profundizaron en las ideas: expectativas de aprendizaje, procesos matemáticos involucrados en el aprendizaje del álgebra (e.g. razonar, generalizar, modelar, simbolizar, convertir y transformar- algebraicamente).

En la primera parte de la sesión S10, los FPM aclararon dudas respecto a los contenidos formativos de esta sesión, redactaron a manera de ejemplo expectativas de aprendizaje. En algunos casos entendieron que las expectativas de aprendizaje van más allá de simples recetas de redacción; en otros casos fue necesario generar un escenario de indagación que cuestionó sobre los objetivos y las capacidades del aprendizaje del álgebra.

La segunda parte de la asesoría en S11 abordó el desarrollo de la actividad A7, en la cual los FPM retoman nuevamente la prueba diagnóstico y buscan razones para entender los resultados y las situaciones encontradas. La mayoría de los FPM necesitaron varias revisiones a la prueba para buscar respuestas al origen de los errores; cada practicante de manera individual encontró razones para justificar las dificultades establecidas a la luz de los errores identificados; posteriormente verbalizaron los resultados de sus pruebas, expusieron su experiencia y compartieron una representación (o ejemplo) de los errores observados.

En la puesta en común se interrogó sobre: ¿Cuáles son los factores de tipo conceptual, cognitivo y de instrucción que originan las dificultades en el aprendizaje del álgebra? Con justificaciones cortas, algunos entendieron y tomaron conciencia de la particularidad y características que tienen los diferentes conceptos del álgebra escolar y con ellos sus dificultades.

### ***Implementación de Ut3***

La sesión S12 se desarrolló el 11 de agosto de 2014, se inició con un diálogo sobre las limitaciones del aprendizaje; en esta sesión se explicó este organizador y su coherencia con las expectativas de aprendizaje. Los FPM en la exposición y presentación de la actividad 8 (Anexo 2. PS12) destacaron los aspectos más sobresalientes de los resultados del diagnóstico del aprendizaje, pocos clasificaron el origen de errores al examinar las respuestas de los escolares. Fue necesario la intervención del colectivo de práctica y de los demás FPM para aclarar a los FPM las limitaciones del aprendizaje.

Analizar en profundidad la solución de los escolares a las tareas brindó al FPM la oportunidad para confrontar los errores establecidos inicialmente en la prueba, con los estudios que tratan de las dificultades del aprendizaje del álgebra escolar. Pares y asesores actuaron de manera externa para ayudar a cada estudiante a examinar las teorías, dudas y creencias que subyacen al problema de práctica y que se hace explícito ahora.

La sesión S13 se desarrolló el día 15 de agosto 2014, con la exposición del Taller 5, en el que los FPM examinaron la coherencia entre objetivos, capacidades y errores. La mayoría compartió una tabla de comparación.

### ***Implementación de Ut4***

El día 18 de agosto 2014 se experimentó la S13, en la que los FPM pusieron en común los referentes y consultas realizadas respecto a las limitaciones de aprendizaje, tipos de errores asociados a las principales dificultades del aprendizaje y las estrategias para superar las dificultades. Usando las planeaciones entregadas por el tutor y las mallas curriculares de la Institución Educativa, se orientó la construcción de la trayectoria de aprendizaje (reconocida con el término secuencia didáctica).

En la sesión S14 se concretó el ciclo de reflexión y se buscó re-construir nuevas estrategias para superar dificultades evidenciadas en el diagnóstico del aprendizaje de los escolares. La actividad 9 solicitó a los FPM crear una alternativa o propuesta para abordar un tópico del álgebra y restringir al máximo los errores y dificultades.



La última sesión S15 de este módulo ocurrió el día 22 de agosto, el propósito fue dejar el diseño de las situaciones o tareas incluidas en una secuencia para abordar en el aula. En esta sesión los practicantes trabajaron orientados por el interrogante: ¿Cómo elegir tareas adecuadas para que nuestros alumnos superen las dificultades?

### 6.2.3 Análisis del módulo dos

El análisis en su conjunto consistió en la revisión de la secuencia de instrucción que se registró en los protocolos PS9-SP15 (Anexo 2), dando cuenta del análisis realizado a la programación de la instrucción en todo el módulo. El análisis atiende a las decisiones tomadas durante la implementación y a los ajustes que implican el diseño instruccional del experimento.

#### ***Decisiones a la planificación de los siguientes módulos***

La revisión de las sesiones y de los objetivos de instrucción da curso a las principales adecuaciones y decisiones a la planeación del módulo. En la Tabla 6.9 resumimos aquellas decisiones que afectaron el diseño de la instrucción.

Tabla 6.9. *Decisiones al finalizar el módulo dos*

<b>Decisiones en relación con el funcionamiento del diseño de instrucción</b>
<p><b>1. Ajustar la secuencia de instrucción para:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Profundizar en conceptos matemáticos: función, series y sucesiones</li> <li>2. Precisar conceptos y contenidos relacionados con el análisis cognitivo</li> <li>3. Explicitar fundamentos y lineamientos de las Pruebas SABER</li> <li>4. Considerar otros contenidos en el siguiente módulo (estrategias de enseñanza; TIC)</li> </ol> <p><b>2. Adecuar tareas formativas para:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Involucrar a los FPM en el estudio de la visión estructural y funcional del álgebra</li> <li>2. Concretar las demandas de la tarea formativa Tf5</li> <li>3. Incluir la estrategia de indagación en las tareas formativas.</li> <li>4. Aportar citas, referencias y direcciones electrónicas con recursos para la consulta temáticas</li> </ol>
<b>Decisiones que implican la promoción de la reflexión</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ampliar la estrategia de indagación</li> <li>2. Solicitar al grupo de FPM explicitar creencia e interrogantes en fase L2</li> <li>3. Solicitar usar el diario reflexivo (o diario de campo)</li> <li>4. Solicitar el uso del análisis cognitivo (en la fase a) para determinar aspectos importantes de la problemática</li> <li>5. Involucrar a FPM en la representación de los fundamentos que definen la problemática.</li> </ol>

#### ***Decisiones para la planificación de los siguientes módulos***

El análisis en su conjunto y las decisiones se concretan en el ajuste a la planeación

del diseño inicial. En la Tabla 6.10 se ilustran y resaltan los ajustes al diseño.

Tabla 6.10. *Re diseño de la planeación al finalizar el módulo dos.*

Reflexión	Módulo	Ciclo	Contenidos formativos	Expectativas de aprendizaje
Para la acción	<b>Inducción</b>	C1	<i>Álgebra escolar.</i> <i>Análisis didáctico.</i> Normativa de PPD.	Ubica principales concepciones sobre: Qué y Cómo enseñar álgebra. <i>Realiza análisis contenido.</i>
		<b>Contexto y aprendizaje</b>	C2	<i>Análisis Cognitivo.</i> <i>Enfoques álgebra escolar.</i> Pensamiento algebraico.
En la acción	<b>Enseñanza</b>	C3.1	<i>Análisis de Instrucción.</i>	<i>Realiza análisis instrucción.</i>
			<i>Tareas de enseñanza.</i>	<i>Diseña y selecciona tareas algebraicas para una secuencia didáctica.</i>
		C3.2	<i>Tareas de enseñanza.</i>	Implementa las tareas de la secuencia didáctica diseñada

### 6.3 Módulo Tres: Planeación e implementación de la enseñanza

En este módulo se consideró como principal contenido el Análisis de Instrucción, se procuró la puesta en marcha de la intervención planeada para abordar la situación problemática definida, adecuándose a las realidades institucionales e individuales.

#### 6.3.1 Planeación del módulo tres

El módulo tres planteó 12 sesiones S16 a S27. Cada practicante llevó a término la implementación del plan de clase previamente negociado con su tutor. El módulo facilitó referentes y contenidos formativos a los FPM para el diseño de una secuencia didáctica, procurando abordar desde diferentes ámbitos las actividades de enseñanza, en coherencia con la programación institucional. La planeación de actividades y el diseño de tareas para el aprendizaje, constituyeron el reactivo del ciclo de reflexión que se protagonizó en este módulo tres. Atendiendo al análisis del módulo 2 (Anexo 2) el ciclo reflexivo lo constituyeron dos subciclos.

El primer subciclo reflexivo ALaCT se denominó ciclo de reflexión C3.1, entre las sesiones S16–S24 y el otro sub-ciclo reflexivo ALaCT se denominó Ciclo de reflexión C3.2 entre S24 y S27. El primero tiene como propósito la planeación e implementación de una clase y el segundo el re-diseño e implementación de una nueva clase; en los dos casos las actividades que se eligen y diseñan incluyen tareas para atender la situación problema que los FPM formularon. La Tabla 6.11 describe la planeación de este módulo.

Tabla 6.11. *Planeación de la instrucción del módulo tres*

<b>Objetivos instruccionales</b>
<p><b>Oi1.</b> Selecciona y diseña tareas para la enseñanza de un contenido (álgebra) que sean coherentes con la situación problemática definida para el PPD.</p> <p><b>Oi2.</b> Aplica el segundo componente del análisis didáctico (análisis instrucción) a un tópico de álgebra, para planear su clase.</p> <p><b>Oi3.</b> Realiza ajustes a la secuencia de tareas e implementa en una nueva lección</p>
<b>Unidades temáticas y Contenidos formativos</b>
<p><b>Ut1.</b> Elementos del análisis de instrucción: las tareas matemáticas (variables, componentes, tipos), secuencia didáctica.</p> <p><b>Ut2.</b> Condiciones de la instrucción: organización de la clase; el rol del alumno y del profesor, gestión y comunicación de la clase.</p> <p><b>Ut3.</b> Recursos y materiales: análisis de los recursos y materiales, para enseñar álgebra</p>
<b>Tareas formativas</b>
<p>1. Talleres para el desarrollo de los contenidos:</p> <p><b>Tf6.</b> Variables y componentes de las tareas para enseñar un tópico de álgebra.</p> <p><b>Tf7.1</b> Organización de la enseñanza (secuencias de tareas y funciones)</p> <p><b>Tf7.2</b> Los recursos para enseñar álgebra (simuladores, materiales y herramientas virtuales).</p> <p>2. Actividades para la promoción de la reflexión:</p> <p><b>A11.</b> Identificar y describir situaciones conflictivas sobre la selección y diseño de tareas</p> <p><b>A12.</b> Reconstruir la clase implementada mirando atrás en lo ocurrido</p> <p><b>A13.</b> Determinar elementos importantes de la lección y estimar conceptos a profundizar</p> <p><b>A14.</b> Crear alternativas de rediseño o diseño de nuevas tareas</p> <p><b>A15.</b> Poner en marcha en una nueva clase las nuevas tareas (o rediseños)</p>

### **La secuencia y temporalización del módulo tres**

La secuencia se programó para doce sesiones S16 a la S2, de cuatro horas en las I.E y dos reuniones del colectivo de práctica, la Tabla 612, muestra el detalle.

Tabla 6.12. *Secuencia de instrucción del módulo tres*

Sesión	Fecha	Unidad Temática	Tareas Formativas	Recursos
S16	1-09-2014	Ut1	Tf6 A11	Matriz curricular de la Institución Planeación anual del curso
S17	4 09-2014		A12	Documentos de referencia Resultados diagnóstico del aprendizaje
S18	8 09-2014			Videos diarios de campo del FPM Documentos de referencia
S19	11 09-2014	Ut2	TF7	Formatos de seguimiento y observación Plan de mejoramiento del área
S20	15 09-2014		A13	Tareas, ejemplos y problemas matemáticos Documentos de referencia
S21	22-09-2014	Ut3	A14	Planeación de la unidad didáctica Planes de mejoramiento del área
S22	25 09-2014		TF7.2 A15	Buscadores, Tics y Link de consultas Documentos de referencia
S23 al S27	29 09-2014 8 11-2014		A11 a A15 Parte dos	Planeación de la unidad didáctica Matriz curricular de la Institución Planeación anual del curso Documentos de referencia

### 6.3.2 Implementación del módulo tres

Este apartado describe la implementación de las sesiones del módulo tres que transcurrió entre el 1 de septiembre y el 8 de noviembre del año 2014. Las primeras cuatro sesiones explicitaron los fundamentos del análisis de instrucción. Para promover la reflexión este módulo incorporó dos partes del ciclo de reflexión C3; la primera parte (ciclo C3.1) dedicado a planear e implementar una clase, se desarrolló entre las sesiones S16 y S22; la segunda parte (C3.2) es dedicado a re-diseñar e implementar una nueva clase, se promovió entre las sesiones S23 y S28. Las dos partes siguen las mismas actividades para promover los sub-ciclos AlaCT. La Figura 6 2 ilustra la trayectoria de los sub-ciclos.

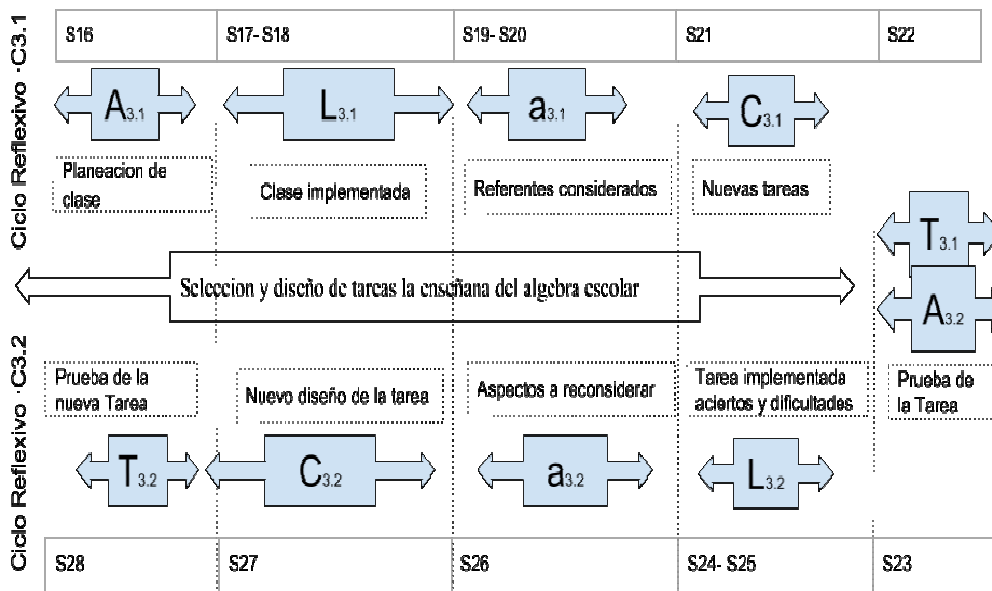


Figura 6 2. Trayectoria de los sub-ciclos C3.1y C3.2 en el nuevo diseño

La sesión S22 se dedicó al seminario general de práctica docente, todos los FPM acuden a la universidad a exponer, discutir y compartir avances del Proyecto de Práctica Docente al colectivo y demás FPM.

#### Implementación de Ut1

La unidad temática uno de este módulo abordó la planeación de la clase. En la sesión S16, al desarrollar el Tf6, algunos FPM asociaron la idea de “esquema de las clases” a la idea de secuencia de tareas (FPM 1, 7); con este punto de partida, se explicitaron algunos elementos del análisis de instrucción, concretamente las tareas matemáticas.

En la puesta en común del Tf6 se protagonizó una discusión en torno a las diferencias entre tarea y actividad; ante esto fue necesario aclarar las definiciones. Se acordó entender “las actividades como conjuntos organizados y orientados de tareas escolares, realizadas por los alumnos o el profesor” y las tareas como el “conjunto de acciones coordinadas y orientadas en función de la actividad de la que forman parte” (Luna, 2007: p100). Aclarando estas ideas se explicitaron las variables de tarea y los FPM se encaminaron en la planeación de la clase que incluyera actividades con tareas acordes a las situaciones problemáticas formuladas en el proyecto PPD (Anexo 2-SP16).

Para promover la reflexión, en la misma sesión S16 se desarrolló la actividad 11, en la que los FPM describieron la planeación de la clase y plantearon las situaciones conflictivas en torno a la selección y diseño de las tareas. Algunos FPM tuvieron presente en la descripción el análisis del contenido matemático (FPM 2, 9, 5), otros se basaron en las expectativas de aprendizaje (FPM 6, 3, 10) y algunos ubicaron la problemática en las limitaciones de aprendizaje (Anexo 2-SP16). Con esta actividad se dio inicio al ciclo reflexivo C3.1 involucrado en este módulo.

La sesión S17 se continuó con la explicitación de los componentes del análisis de instrucción. Se dio curso a la Actividad 12, en la que los FPM implementaron la clase planeada con su grupo de alumnos, registraron el desarrollo de la misma y los hallazgos en el desempeño de sus escolares (Anexo 2-SP17).

Posteriormente, en la sesión S18, los FPM aprovecharon los videos y diarios para reconstruir la clase implementada mirando atrás en lo ocurrido, justificaron las razones de las situaciones y finalizaron verbalizando sus posturas (Anexo 2-SP 18). La mayoría de los FPM interpretaron la planeación de clase como una estructura que se elabora para organizar la lección y está conformada por actividades. Mientras que conciben que las tareas siguen formatos institucionales ya configurados (FPM 3, 7, 2).

### ***Implementación de Ut2***

En la sesión S19 se explicitaron los demás elementos del análisis de instrucción (e.j. gestión de la clase, comunicación). Fue necesario adelantar elementos del análisis de actuación, la formadora explicitó y ejemplificó el uso de los instrumentos que la práctica concibe para el seguimiento y registro de la lección (diario y formato).

En la sesión 20 se desarrolló la actividad 13, los FPM analizaron la clase implementada y realizaron la puesta en común entre pares, determinando los elementos

importantes de la lección. Los FPM expresaron la pertinencia de analizar las tareas para establecer secuencias didácticas acordes con las finalidades de aprendizaje planteadas, al igual que los aspectos requeridos para superar las limitaciones de aprendizaje (Anexo 2-SP19). Posteriormente en la puesta en común con el colectivo de práctica, los FPM confrontaron aquellos elementos importantes de las situaciones analizadas para estimar los conceptos que deberían aclarar y los conocimientos a profundizar (Anexo 2-SP20).

Producto de la reunión y puestas en común con diferentes grupos, el colectivo de práctica convocó un seminario general al finalizar la sesión 20, en el que los grupos compartieron los avances del proyecto de PPD y expresaron dudas referentes al rediseño de las nuevas actividades y tareas de la secuencia didáctica. Siguiendo los lineamientos de la práctica, al final del seminario se acordó: entender la actividad como la unidad funcional y usual a la hora de planear la clase y que las tareas forman parte de las actividades. Las tareas serán elegidas de manera coordinada y pensada para orientar la finalidad de la instrucción. Las actividades, por su parte, conforman la secuencia didáctica y se constituyen en segmentos para analizar la dinámica del aula.

### ***Implementación de Ut 3***

En esta unidad temática los practicantes consultaron referencias y exploraron los recursos aportados por el equipo formador (Taller 7). En todos los casos se mostraron interesados por incorporar nuevos recursos como alternativas en los re-diseños (o nuevos diseños) de las tareas. Por ejemplo, los grupos que orientaron la temática de factorización (FPM, 1, 2), encontraron útil el uso del algebra-geométrica y los manipulables en el diseño de nuevas tareas. Geogebra y otros recursos de uso gratuito fueron alternativas que los grupos que trabajaron la función, consideraron en la revisión de tareas, en especial al involucrar el concepto variable y variación. Los recursos digitales (de tipo Ovas y MEC) y virtuales (simuladores), fueron opciones acogidas por el grupo que se desempeñó en el tema de ecuaciones (ej. balanza para tratar igualdad).

En la sesión S21 los FPM a través de la actividad 14, se encaminaron al diseño de nuevas tareas para una nueva clase. La mayoría de las alternativas para el rediseño de las tareas fueron conducidas para abordar la problemática formulada en el proyecto de práctica (Anexo 2-SP21).

En la S22 a través de la actividad 15 los FPM incorporaron en la secuencia didáctica los re-diseños y nuevas tareas. Una vez ajustada la secuencia didáctica pusieron en

marcha las nuevas tareas y probaron la alternativa en una nueva clase, dando origen a la segunda parte del ciclo 3 con una nueva planeación para la instrucción que continúa.

Las sesiones S23 a la S27 se dedicaron a promover la segunda parte del ciclo de reflexión tres (ciclo C3.2), procuraron nuevas experiencias en el re-diseño de tareas que abordaran la problemática del proyecto PPD. En algunos casos los practicantes lograron llevar a cabo toda la segunda parte del ciclo 3; en otros casos la fecha por la que atravesó este ciclo ocasionó dificultades, dada la finalización del curso escolar.

### 6.3.3 Revisión y análisis del módulo tres

La revisión y análisis preliminar siguió el registro de los protocolos **PS26 al PS27 (Anexo 2)**. El análisis consistió en la revisión de la secuencia de instrucción, para reformular la planeación inicial del diseño instructivo. A continuación se exponen algunos de estos elementos revisados.

#### ***Decisiones para la planificación de los siguientes módulos***

En la Tabla 6.13 resumimos las decisiones consideradas a lo largo de las sesiones implementadas; en particular, aquellas que implicaron en el logro de los objetivos de instrucción y la promoción de la reflexión.

Tabla 6.13. *Decisiones al finalizar el módulo tres*

<b>Decisiones en relación con el funcionamiento del diseño instructivo</b>
<b>1. Ajustar la secuencia de instrucción para:</b> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Ampliar las sesiones dedicadas al conocimiento y uso de recursos y materiales</li><li>2. Ajustar la programación en correspondencia con los calendarios y disposiciones de las instituciones de práctica.</li><li>3. Considerar no dar curso al ciclo cuatro en algunos grupos y favorecer un tercer sub-ciclo para permitir conseguir el rediseño de la tarea inicial.</li></ol>
<b>2. Adecuar tareas formativas para:</b> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Ampliar el taller Tf6 para resolver dudas sobre las componentes de las tareas</li><li>2. Presentar referentes para profundizar en los problemas matemáticos según demandas previstas en directrices curriculares y las pruebas externas (SABER).</li></ol>
<b>Decisiones que implican la promoción de la reflexión</b>
<ol style="list-style-type: none"><li>1. Interrogar al FPM sobre sus conceptos (matemáticos y didácticos) para ayudar a la toma de conciencia (Fase a).</li><li>2. Motivar a FPM para explicitar por escrito la manera de plantearse, afrontar y buscar soluciones a los problemas que surgen en los retos de la práctica docente (Fase C).</li><li>3. Solicitar diligenciar en el diario aquellos eventos donde fue necesario impregnarse de la realidad de la práctica (Fase A).</li></ol>

## 6.4 Módulo Cuatro: Balance del aprendizaje escolar.

En este módulo se abordaron elementos de la evaluación del aprendizaje del álgebra escolar como contenido. Se promovió un ciclo de reflexión referido al balance del aprendizaje de los escolares, que denominamos C4.

### 6.4.1 Planeación del módulo cuatro

La trayectoria de instrucción (Tabla 6.14), se concreta en 6 sesiones, abordando elementos del análisis de instrucción. La programación se cubre entre las sesiones S28 y S32. El módulo finaliza en la sesión S33 dedicada a la presentación de los resultados de los proyectos de práctica en las Instituciones Educativas.

Tabla 6.14. *Planeación de la instrucción del módulo cuatro*

<b>Objetivos instruccionales</b>
<b>Oi1.</b> Aplica el análisis de actuación en la evaluación del aprendizaje escolar <b>Oi2.</b> Elige y ajusta tareas para la evaluación del aprendizaje escolar acorde a las directrices institucionales <b>Oi3.</b> Realiza balance del aprendizaje algebraico de los escolares de su clase.
<b>Unidades temáticas y Contenidos formativos</b>
<b>Ut1.</b> Análisis de actuación: Propósitos, fundamentos y elementos del análisis de actuación. <b>Ut2.</b> Evaluación del aprendizaje: Momentos, criterios e instrumentos de la evaluación del aprendizaje escolar; planes de mejoramiento y tareas <b>Ut3.</b> Balance y rediseño: Valoraciones, análisis de la evaluación general e informe.
<b>Tareas formativas</b>
<p style="text-align: center;"><b>1. Talleres para el desarrollo de los contenidos:</b></p> <b>Tf8.</b> Evaluación del aprendizaje escolar.
<p style="text-align: center;"><b>2. Actividades para la promoción de la reflexión:</b></p> <b>A16.</b> Identificar y plantear situaciones observadas en la resolución de las tareas por alumnos <b>A17.</b> Examinar los resultados de pruebas y buscar causas del fracaso escolar. <b>A18.</b> Confrontar con tutor y pares los resultados de la evaluación y analizar los elementos importantes para afrontar la problemática <b>A19.</b> Esbozar una alternativas para cambiar la instrucción y atender las dificultades de los escolares.

### ***La secuencia y la temporización del módulo cuatro***

En seis sesiones se cubre este módulo cada una con duración de 4 horas. La primera sesión S28 desarrolló la mayor parte del contenido formativo y la última sesión se dedicó a la sustentación e informe de los resultados del proyecto de práctica en las instituciones



educativas, con una duración de 5 horas. La Tabla 6.15, describe por sesión, la temporalización de los contenidos, actividades formativas, materiales y recursos usados por lección, se relacionan las fases de reflexión de C4.

Tabla 6.15. *Secuencia de instrucción del módulo cuatro.*

Sesión	Fecha	Unidad temática	Tareas formativas	Recursos
S28	11-11-2014	Ut1	Tf8 y A16	Plan de mejoramiento del área Documentos de referencia
S29	14-11-2014	Ut2	A17	Informe de evaluación (mes anterior) Instrumentos de evaluación
S30	18-11-2014		A18	Planes de mejoramiento del bimestre Malla de logro y evidencias
S31	25-11-2014	Ut3	A19	Documentos de referencia Formatos e informes
S32	02-12-2014		A20	Informe del proyecto de practica Unidades didácticas

### 6.4.2 Implementación del módulo cuatro

La trayectoria de instrucción se ejecutó entre el 11 de noviembre y 2 de diciembre del año 2014. La planeación de esta intervención consideró no profundizar en el análisis de actuación como se había planeado al inicio del curso. Se dio prioridad al estudio de la evaluación del aprendizaje (criterios, momentos e instrumentos). El ciclo reflexivo C4 inscrito en este módulo formativo procuró abordar los resultados de aprendizaje y la pertinencia de las tareas implementadas en las lecciones. A continuación se describe la implementación de las sesiones S28 a la S32 en las que ocurrió el módulo cuatro.

#### ***Implementación de Ut1:***

Se desarrolló en la sesión S28, con la explicación de los elementos del análisis de instrucción. En el desarrollo del Taller 8 los FPM discutieron los fundamentos de la evaluación en la IE donde realizaba la práctica, trataron las preguntas relacionadas con los criterios, momentos e instrumentos de evaluación de cada institución, los cuales fueron abordados por formadores, aportando referentes al respecto. Una vez finalizada la sesión S28 algunos de los FPM mostraron disposición para concluir el taller Tf8 diseñando las tareas para la evaluación del aprendizaje de sus escolares.

En la sesión S28 se programó un foro con la actividad 16, los FPM describieron los resultados del aprendizaje, algunos plantearon las dificultades enmarcadas en el qué y el cómo evaluar y otros formularon cuestiones en torno al logro del aprendizaje de los escolares durante la resolución de las tareas.

### ***Implementación de Ut2:***

En esta unidad los practicantes se interesaron por el impacto de las actividades que conforman el proceso de enseñanza, En la continuación del Taller T8 algunos manifestaron su interés por las tareas dedicadas a la resolución de problemas, en ellas notan actitudes favorables de sus escolares para el aprendizaje de los conceptos. En la sesión 29 se dio curso a la actividad 17, la cual favoreció que los FPM examinaran los resultados de la evaluación y buscaran la causa del fracaso escolar. La mayoría de los FPM observaron nuevamente los resultados en su conjunto y percibieron los bajos niveles de desempeño de sus escolares; resultaron varias dudas al respecto a la causa de esta problemática, expresaron su necesidad por aclarar las ideas y asumir una postura. En la sesión S30 algunos FPM lograron realizar la confrontaron entre pares, analizaron las causas del fracaso escolar en los resultados de la evaluación, durante la puesta en común con el colectivo de practica analizaron los elementos importantes para afrontar la problemática.

### ***Implementación de UT3***

Esta unidad temática se abordó en su mayoría en el foro virtual, fue necesario profundizar en la evaluación del aprendizaje y en su importancia para la toma decisiones sobre la instrucción, se explicitaron las concepciones y propósitos de la evaluación del aprendizaje de las matemáticas (MEN, 2012). Respecto a la fase reflexiva asociada a esta unidad temática, pocos practicantes lograron culminar la Actividad 19, aquellos que esbozaron una alternativa para afrontar la problemática del aprovechamiento escolar, la escribieron a manera de recomendación en su informe, dadas la tareas profesionales que los ocuparon al final del curso.

#### **6.4.3 Revisión y análisis del módulo cuatro**

Para la revisión y análisis del módulo cuatro se utilizó el registró de los protocolos **PS28 al PS33 (Anexo 2)**. El módulo cierra el curso con la presentación de los resultados del proyecto de práctica PPD en las seis Instituciones Educativas. En consecuencia, los ajustes a próximas sesiones no se dan, se consideran a manera de recomendación.

### ***Decisiones para la planificación***

En la Tabla 6.16 resumimos las principales consideraciones y ajustes que se realizaron sobre la marcha a la planeación del módulo cuatro.

Tabla 6.16. *Decisiones al finalizar el módulo cuatro*

<b>Decisiones en relación con el funcionamiento del diseño instructivo</b>
<p><b>Ajustar la secuencia de instrucción para:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Atender las necesidades formativas de los FPM</li> <li>2. Incluir referentes de evaluación externa y fundamentos de las pruebas internacionales.</li> <li>3. Brindar aportaciones relacionadas con concepción de la evaluación del aprendizaje</li> </ol> <p><b>Adecuar tareas formativas para:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Dar curso a las condiciones en la finalización del curso escolar.</li> <li>2. Apoyar a los FPM que lograron emprender aquellas actividades planeadas, aun cuando no se concluyan del todo el ciclo reflexivo</li> </ol>
<b>Decisiones que implican la promoción de la reflexión</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Promover acciones reflexivas hasta donde se pueda completar el ciclo C4.</li> <li>2. Procurar en las fase A y L del ciclo reflexivo C4 en todos los casos</li> <li>3. Motivar a los FPM a culminar las actividades planeadas a través del foro virtual</li> </ol>

## 6.5 Síntesis del experimento de enseñanza

La síntesis se concreta con la revisión y el análisis del proceso instructivo a lo largo de las 33 sesiones que orientaron el proceso instructivo. El análisis se realizó conforme a los presupuestos que orientaron la investigación y a los objetivos formativos planteados. El registro y la revisión de los protocolos al finalizar cada módulo formativo ha permitido analizar el funcionamiento del diseño instructivo y decidir sobre los ajuste de dicho diseño. La Tabla 6. 17 ilustra el rediseño del programa formativo.

Tabla 6.17. *Rediseño del programa formativo.*

Reflexión	Módulo	Ciclo	Contenidos formativos	Expectativas de aprendizaje
Para la acción	Inducción	C1	<i>Álgebra escolar.</i> <i>Análisis didáctico.</i> Normativa de PPD.	Ubica principales concepciones sobre enseñar del álgebra. <i>Realiza análisis contenido.</i>
	Contexto y aprendizaje	C2	<i>Enfoques álgebra escolar.</i> <i>Análisis Cognitivo.</i> Pensamiento algebraico.	Reconoce errores y dificultades del aprendizaje del álgebra <i>Realiza análisis cognitivo.</i>
En la acción	Enseñanza	C3.1	<i>Análisis de Instrucción.</i> <i>Estrategias de enseñanza.</i>	<i>Realiza análisis instrucción.</i> Diseña y selecciona tareas escolares
		C3.2	<i>Tareas de enseñanza.</i> <i>Actividad matemática-álgebra.</i>	Implementa secuencia didácticas
Sobre la acción	Balance	C4	Evaluación de los aprendizajes <i>Análisis de actuación.</i> <i>Pruebas Externas -SABER.</i>	<i>Realiza análisis de Actuación.</i> Evalúa alternativas de enseñanza
				<i>Rediseño de unidades didácticas.</i>
Simposio 1	En S15	Al finalizar C2	<i>Problema del proyecto PPD</i>	Sustenta resultados del estudio de diagnostico del aprendizaje
Simposio 2	En S33	Al finalizar C4	Condiciones de la Memoria	Sustenta resultados y limitaciones del Proyecto PPD

La planeación de la secuencia de instrucción ha tenido en cuenta los propósitos y

fundamentos de la investigación; con lo cual, para promover la reflexión se programan veinte actividades que involucran las acciones reflexivas: describir, examinar, analizar, evaluar y proponer alternativa (Korthagen y Vasalos, 2005). Producto de la experimentación y las decisiones tomadas, hemos articulado dichas acciones con las sesiones de trabajo planeadas para promover un ciclo reflexivo, dando operatividad durante la instrucción. La Figura 6.3 ilustra dicho articulación.



Figura 6.3. Acciones para promover procesos de reflexión en la experimentación



# RESULTADOS Y ANÁLISIS RETROSPECTIVO

## Índice del Capítulo

Capítulo 7. Ciclo reflexivo C1: Reflexión sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar

- 7.1 Fase A1: Partir de la acción o experiencia
- 7.2 Fase L1: Mirar hacia atrás en la acción
- 7.3 Fase a1: Conocimiento de puntos importantes o esenciales
- 7.4 Fase C1: Crear buscar y preparar alternativas de actuación
- 7.5 Fase T1: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo C2

Capítulo 8. Ciclo reflexivo C2: Reflexión sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico

- 8.1 Fase A2: Partir de la acción o experiencia
- 8.2 Fase L2: Mirar hacia atrás en la acción
- 8.3 Fase a2: Conocimiento de puntos importantes o esenciales
- 8.4 Fase C2: Crear buscar y preparar alternativas para la actuación
- 8.5 Fase T2: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo C3

Capítulo 9 Ciclo reflexivo C3: Reflexión sobre las tareas matemáticas para el aprendizaje del álgebra escolar

Parte uno: ciclo reflexivo C3.1

- 9.1 Fase A3.1: Partir de la acción o experiencia
- 9.2 Fase L3.1: Mirar hacia atrás en la acción
- 9.3 Fase a3.1: Conocimiento de puntos importantes o esenciales
- 9.4 Fase C3.1: Crear, buscar y preparar alternativas para la acción
- 9.5 Fase T3.1: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo

Parte dos: Ciclo reflexivo C3.2 Reflexión sobre las tareas

- 9.6 Fase A3.2: Partir de la acción o experiencia
- 9.7 Fase L3.2: Mirar hacia atrás en la acción
- 9.8 Fase a3.2: Conocimiento de puntos importantes o esenciales
- 9.9 Fase C3.2: Crear, buscar y preparar alternativas para la acción
- 9.10 Fase T3.2: Comprobar en una nueva situación: Iniciar un nuevo ciclo

Síntesis de resultados y análisis retrospectivo

## Capítulo 7. Ciclo reflexivo C1: Reflexión sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar

En este análisis se procedió a observar los alcances conseguidos durante el primer ciclo reflexivo, en el cual los FPM: Identifican y definen la problemática derivada de sus preocupaciones y/o experiencias de enseñanza, la cual formulara para su proyecto de práctica. El FPM a través de su reflexión va modificando, adaptando y redefiniendo a la dinámica de su práctica. Para este ciclo las secuencias de tareas formativas atendieron las acciones reflexivas del modelo ALaCT (Korthagen et al., 2001) a lo largo de 8 sesiones (cada una de 2 h de duración) como se ilustran en la Figura 7.1.

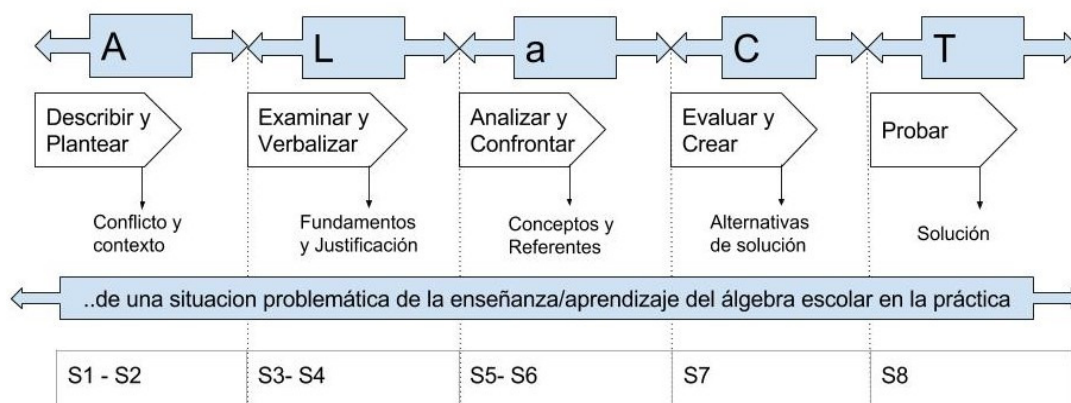


Figura 7.1. Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo C1.

La descripción del proceso reflexivo lo hemos estructurado cronológicamente a lo largo de cinco episodios conforme ocurrió el ciclo ALaCT, atendió a la evolución en la definición de los problemas profesionales, formulados por FPM.

A efecto de configurar un esquema en la caracterización de la reflexión, cada fase del ciclo reflexivo C1 se constituyó en una unidad objeto de estudio (por episodio). La Figura 7.2 representa el proceso reflexivo en los cinco episodios y las características involucradas en cada uno referido a los problemas profesionales.

En este informe pretendemos no tanto una síntesis, como si la interpretación en la que comparamos el análisis de la información considerada conjuntamente (todos los instrumentos) y los momentos constituyentes del mismo episodio, desde esta perspectiva dicha comparación se convirtió en la estrategia analítica de base para representar la

trayectoria reflexiva de los FPM.

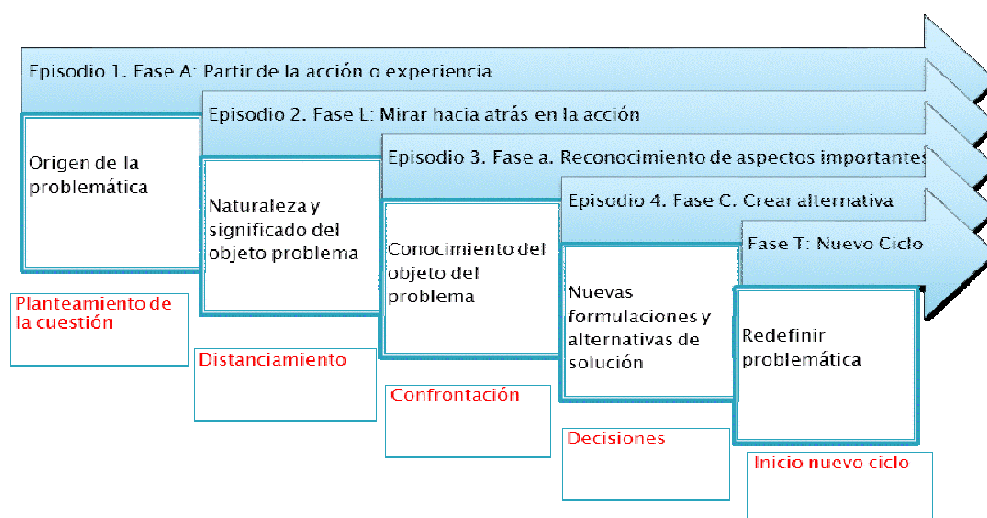


Figura 7.2. Reflexión sobre problemas profesionales del álgebra escolar

Explicamos cómo y por qué ocurrieron los procesos y los efectos en la reflexión de FPM, apoyados en los análisis e informes parciales de los cinco episodios (Anexo 3). Exponemos recortes de los análisis realizados, junto a fragmentos de las reflexiones, las que muestran, no sólo el uso de las herramientas y contenidos trabajados, sino también, descripciones e interpretaciones fundamentadas.

A continuación presentamos el caso de Lina (FPM1) y Juan (FPM 2), mostrando cronológicamente la información en cinco episodios en los que ocurrió cada fase del ciclo reflexivo. Para este caso se presentan ejemplos y evidencias que justifican y permiten interpretar las actuaciones y producciones de la pareja de futuros profesores de manera instrumental (Stake, 1998). Primero se describe una síntesis del episodio con la respectiva intervención; después se presenta el análisis del episodio, en el que ubican las interpretaciones en la categoría correspondiente de las variables.

## 7.1 Fase A1: Partir de la acción o experiencia

El episodio [1] da inicio con la descripción de las situaciones problema que han detectado los FPM en la enseñanza del álgebra, formuladas en forma de interrogante.

Para analizar el episodio [1] nos centramos en la descripción de los problemas planteados por los dos FPM, indicando el contexto en que aparecen cada problema, el sujeto al que afecta, y la acción a la que corresponde, finalizando con un interrogante de la



siguiente estructura: ¿Cómo/Qué... el sujeto...la acción...el tópico? (Fase A1 en Figura 7.1)

### 7.1.1 Describir el origen de la situación problema

Lina describe la situación problemática en relación con la enseñanza del álgebra escolar con estudiantes de grado 8v0. La Tabla 7.1 presenta una selección de la descripción de Lina (FPM1) cuando identifica su problemática, que se refiere a los hechos de su práctica al enseñar las expresiones algebraicas (suma de polinomios).

Tabla 7.1. *Situación problema del FPM1*

Lina:	Me tocó dictar clase en octavo. Inicié con la suma de polinomios. Yo había enseñado a sumar términos semejantes con expresiones algebraicas. Cuando entregué el taller para el trabajo en grupo, me di cuenta de que algunos niños, al margen de la hoja, hacían cálculos y le daban valores a la "X". Me dio risa cuando escuché que una niña le dijo a otra, [... este método es diferente! No hay que buscar el valor de la "X"].
P1:	¿Y cuál es la situación problemática, según tú?
Lina:	Yo tengo como preocupación indagar acerca de cómo hacen la interpretación del símbolo "X" los estudiantes y me interesa saber qué metodología usar al momento de enseñar las operaciones algebraicas (la factorización) en el grado octavo, para saber cómo ayudar a que los alumnos lo hagan de manera correcta.

A Lina, le llama la atención que su alumna calcule el valor numérico de la expresión algebraica dándole valores a la letra, cuando se está trabajando la suma de polinomios. Presumimos que esto alerta de un incidente que alude a la interpretación del símbolo "X". La situación problema que percibe la expresa abiertamente en dos preocupaciones: indagar acerca de cómo hacen la interpretación del símbolo "X" y diseñar estrategias didácticas para enseñar de manera comprensiva y dinámica.

La problemática de Lina, se puede identificar como identificación de una dificultad de aprendizaje de los alumnos relacionados con el significado que atribuyen a la letra y un déficit de conocimiento para enfrentar la enseñanza.

Juan se centró en el sentido que los escolares dan al procedimiento de la factorización. La Tabla 7.2 muestra la transcripción de Juan (FPM2) al exponer su problemática.

Tabla 7.2. *Situación problema del FPM2*

P1:	¿Cuál es la situación problema?
Juan:	Yo realicé dos clases, con niños de octavo. Les expliqué muchas veces, muy despacio y paso por paso cómo factorizar Trinomios Cuadrados Perfectos TCP. Les mostré y expliqué la forma del TCP. El problema está en la factorización, no le dan sentido al procedimiento, no reconocen el caso de factorización que deben usar para escribir la expresión en forma de factores usando dos corchetes. Además, la mayoría tiene problemas con las propiedades de la potenciación. El problema está en diseñar

estrategias didácticas para enseñar de manera efectiva álgebra de 8vo

Juan identifica el origen de su problemática en el cálculo algebraico con polinomios, la factorización. Espera que los alumnos reconozcan qué caso de factorización tienen que usar. De manera explícita manifiesta una posible razón por la cual los alumnos no resuelvan la factorización, su escasa comprensión de las propiedades de la potenciación. La expresión: “no le dan sentido al procedimiento”, hemos interpretado que se refiere al procedimiento de factorización.

### 7.1.2 Formular la cuestión

Lina formuló el interrogante de su problemática con foco en el ámbito didáctico, haciendo alusión a las estrategias didácticas, y en el matemático, en las operaciones de polinomios. Formula la cuestión planteando un déficit de conocimiento para enfrentar la enseñanza. La Tabla 7.3 detalla la cuestión formulada por Lina.

Tabla 7.3. *Interrogante planteado por Lina*

P1:	Entonces ¿cuál será el interrogante que define la situación problema?
Lina:	¿Cómo diseñar estrategias didácticas para enseñar de manera comprensiva y dinámica las operaciones de polinomios?

Juan centró su preocupación en el ámbito didáctico, manifestando un déficit de su conocimiento para la instrucción. La Tabla 7.4 muestra el interrogante formulado para la situación de su problemática.

Tabla 7.4. *Interrogante planteado por Juan*

Profesor:	Entonces ¿cuál será el interrogante que define la situación problema?
Juan:	¿Cómo enseñar la factorización de manera práctica y comprensiva en 8vo?

Desglosamos a continuación (Tabla 7.5) el conocimiento profesional que aparece en la Fase A1, realizando un análisis del mismo.

Tabla 7.5. *Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A1*

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Sujetos:</b> niños de (13-14) años, del 8vo grado de secundaria del sistema colombiano</p> <p><b>Objeto:</b> suma de expresiones algebraicas</p> <p><b>Origen de la situación:</b> interpretación del símbolo “X”</p> <p><b>Acción:</b> enseñar de manera comprensiva</p> <p><b>El déficit</b> del FPM se manifiesta en la necesidad de conocer estrategias para enseñar</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entiende suma de polinomios como procedimiento que lleva a la reducción de términos semejantes.</li> <li>• Alude al símbolo “X”, apreciando al menos dos sentidos (hay que para darle valores en uno pero aquí no procede)</li> <li>• Implícitamente hace referencia a significados de la letra</li> </ul>

	<b>Cuestión:</b> ¿Cómo diseñar estrategias didácticas para enseñar de manera comprensiva y dinámica las operaciones de polinomios?	
JUAN	<p><b>Sujetos:</b> escolares de 8vo grado (13-14) años de edad.</p> <p><b>Objeto:</b> la factorización</p> <p><b>Origen de la situación:</b> procedimiento para reconocer un caso de factorización</p> <p><b>Acción:</b> enseñar de manera practica</p> <p><b>El déficit</b> del FPM está en la necesidad de conocimiento didáctico para enseñar</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo enseñar la factorización de manera práctica y comprensiva?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El concepto factorización está referido a la transformación de una expresión algebraica entera en el producto de sus factores primos</li> <li>• Alude a estructura algebraica que caracteriza la forma del trinomio cuadrado perfecto, ejemplo de casos de factorización</li> <li>• Reconoce factorización como un proceso algorítmico que involucra la identificación de los casos</li> <li>• Explicita limitaciones del aprendizaje, en errores en propiedades de potenciación</li> </ul>

---

## 7.2 Fase L1: Mirar hacia atrás en la acción

Diferenciamos dos fases en este episodio. En la primera parte, siguiendo la trayectoria del experimento (fase L, Figura 7.1), los FPM profundizan sobre el significado del álgebra, identificando el empleado hasta el momento, realizando un mapa conceptual.

Interpretamos los fundamentos y los conceptos examinados por lo FPM, los cuales se encuentran involucrados en la definición de las problemáticas, al tiempo atendemos a los significados que relacionan y conectan con las ideas que enuncian el objeto de la situación.

### 7.2.1 Examinar fundamentos en la naturaleza de la problemática

Una vez que Lina y Juan exponen el mapa conceptual sobre la expresión algebraica, y justifican cada nivel y conexión, los demás FPM y el colectivo de práctica cuestionan algunos sectores del mapa (Figura 7.3) y dan sugerencias en torno a elementos sobre el significado de las letras en álgebra, situándola como constante, variable y para operaciones. Surge la necesidad de precisar los términos igualdad y variable. Comentan las relaciones entre los elementos que forman la expresión algebraica y resaltan que los polinomios son expresiones algebraicas, con solo tres operaciones, suma, resta y multiplicación.

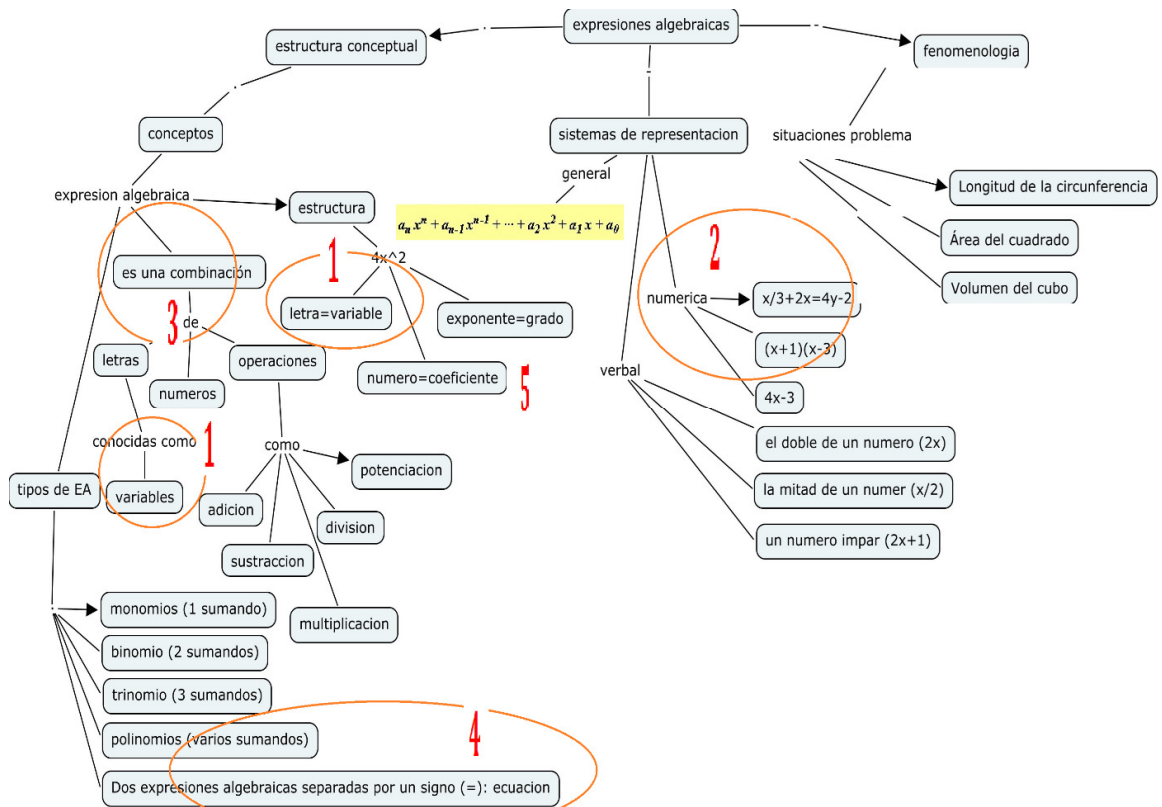


Figura 7.3. Mapa análisis de contenido: cuatro sectores resaltados objeto indagación.

### 7.2.2 Verbalizar las ideas que enuncian el objeto de la problemática

Siguiendo el esquema del proceso formativo (Figura 7.1) los FPM explicitan fundamentos para identificar su forma de concebir los elementos matemáticos y cómo influye o determina los problemas planteados. La Tabla 7.6, es un extracto de la transcripción, contiene las ideas presentadas por Lina.

Tabla 7.6. Ideas y Concepciones de FPM2 en relación con la problemática

Lina:	A mi parecer, los niños no logran identificar todas las definiciones que tiene la "X" ...deberían tener en cuenta que [la letra] puede ser indeterminada ...que no siempre es un valor que satisface una igualdad. Yo considero que no usamos las estrategias didácticas para que [As] comprendan los símbolos en los polinomios.
-------	--

Interpretamos que Lina alude a los diferentes significados que tiene la letra. Distingue la letra "X" como incógnita y como "Indeterminada". A partir de este último significado, define el rol de la "X" en los polinomios. Para ella la "comprensión de los símbolos en la operación de polinomios" radica en las "estrategias didácticas para enseñar de las operaciones entre polinomios".

Juan examinó la naturaleza de la problemática y justificó sus ideas. La Figura 7.4, es copia de la transcripción, contiene las ideas presentadas por el FPM2.



Figura 7.4. Ideas y Concepciones de FPM2 en relación con la problemática

Las ideas que persisten en varios apartes permiten interpretar que Juan aboga por reconocer la estructura algebraica. Parece inclinarse por una interpretación procedimental en la que los casos de factorización son herramientas útiles que los escolares deben usar. Para Juan la factorización es un procedimiento matemático que hay que enseñar y que los escolares deben aprender. Supone que identificando la “forma” de la expresión algebraica y aplicando los “casos de factorización” se aprende a factorizar. Por tanto la enseñanza es problemática en términos de eficacia personal. Necesita saber cómo enseñar álgebra escolar, lo que supone una premisa que está en la base de la problemática que justifica su práctica.

En la segunda parte del episodio [2], otros practicantes le plantean interrogantes que invitan a Juan a reconsiderar sus ideas y a redefinir la problemática. La intervención del equipo formador requiere a los demás que expresen las concepciones de Juan y Lina, dándole un mayor nivel de profundización a la interpretación del álgebra con visión estructural e indicando la visión de las letras como símbolos abstractos.

### 7.2.3 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática

Lina recibe del colectivo formador y pares las creencias y cuestionamientos que le invitan a reconsiderar sus ideas y a redefinir la problemática (Tabla 7.7).

Tabla 7.7. Premisas e interrogantes ofrecidas al FPM1

P1	¿La comprensión de los símbolos algebraicos se debe a las estrategias de enseñanza?
P2	¿A qué se refiere con todas las definiciones que tiene la "X"?
FPM7	¿Ha contemplado la abstracción que debe hacer un niño para entender la simbología?

Juan es invitado por el resto de FPM y el equipo de práctica a reconsiderar sus ideas y a redefinir la problemática (Tabla 7.8).

Tabla 7.8. Premisas e interrogantes ofrecidas al FPM2

Profesor:	¿La factorización es un problema de método o de comprensión? ¿Factorizar implica dar sentido a la estructura algebraica? ¿La enseñanza del álgebra escolar (factorización de TCP) depende de estrategias eficientes (didácticas)?
FPM7	¿Ha contemplado partir de la resolución de problemas o del área para aplicar los TCP?
FPM5	¿A qué parte de la expresión algebraica, considera se debe dar más importancia: interna (las operaciones) o la externa (la forma)? ¿Por qué?
FPM3	¿Qué piensa tener presente para que los niños comprendan las expresiones y reconozcan la forma del TCP?

Tras examinar las premisas e interrogantes externos, Lina percibe necesario considerar la abstracción algebraica, manifestó haber "percibido en la abstracción algebraica una posible causa de la problemática". Juan manifiesta no haberse percatado de algunos de estos asuntos y que se ha planteado interrogantes en relación con la actividad algebraica (ver Tabla 7.9). Se considera consciente de que el propósito de la enseñanza del álgebra no es solo un entrenamiento para los siguientes cursos de matemáticas.

Tabla 7.9. Premisas e interrogantes examinados por FPM2 en L1

<b>Selección de un aparte del diario reflexivo de FPM2</b>	
....respondiendo a las preguntas, he observado que la actividad algebraica (interpretación, conversión, transformación) es necesaria en la factorización; pero que puede ser enseñada desde lo conceptual.	
...Se puede conducir la interpretación de las propiedades y el sentido que guardan las relaciones en la estructura (interna y externa), más que fijarnos en los meros algoritmos.	
...Por esto, en mi PPD quiero responder a ¿Cómo enseñar los trinomios cuadrados perfectos con una estrategia didáctica que les permita identificar y comprender la factorización y aplicarla correctamente?	

A manera de síntesis rescatamos dos ámbitos entre los que transitaban las ideas del FPM2. Por un lado la importancia que concede a los algoritmos para operar con expresiones algebraicas. Por otro su necesidad de estrategias de enseñanza para que los

alumnos lleguen a identificar y comprender las entidades matemáticas, los “casos factorización”.

En la Tabla 7.10 sintetizamos la evolución en la problemática de los FPM y el conocimiento que subyace de este proceso.

Tabla 7.10. *Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase L1*

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
JUAN	<p><b>Origen:</b> identificar propiedades y relaciones de la expresión algebraica a factorizar.</p> <p><b>Déficit:</b> de conocimiento didáctico de métodos de enseñanza que lleve a interpretación y comprensión</p> <p><b>Se percibe</b> un dilema entre el tratamiento procedimental y el conceptual para la enseñanza del álgebra</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo enseñar los trinomios cuadrados perfectos con una estrategia didáctica que les permita identificar y comprender la factorización y aplicarla correctamente?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece relaciones entre propiedades de operaciones y la implicación de las entidades matemáticas (casos).</li> <li>• Reconoce en los procedimientos la actividad matemática (e.g., interpretación, representación simbólica y transformación).</li> <li>• Concreta las limitaciones del aprendizaje de alumnos en no conectar conceptos matemáticos y sus usos.</li> <li>• Busca en las expectativas de aprendizaje la comprensión de las relaciones matemáticas involucradas en los procesos algorítmicos</li> <li>• Valora la instrucción en términos de una secuencia de estrategias para el tratamiento del álgebra escolar.</li> </ul>
LINA	<p><b>Origen:</b> incógnitas que no siempre son objetos matemáticos concretos (e.g., valores numéricos), pueden ser relaciones que se establecen entre estos.</p> <p><b>Acción:</b> enseñar de manera comprensiva los símbolos</p> <p>Déficit del FPM en la necesidad de conocimiento para enseñar</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo diseñar estrategias didácticas para enseñar de manera comprensiva los símbolos en la operación de polinomios?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Amplían los conceptos de expresión algebraica, tipos y elementos de las expresiones</li> <li>• Establece la letra X como “Indeterminada” para definir los polinomios, así los polinomios tienen una estructura algebraica muy similar a la estructura del conjunto Z</li> <li>• Advierte la estructura de los polinomios que se corresponde con <math>(R +, x)</math></li> <li>• Destrezas necesarias: algoritmos de operaciones y uso del lenguaje algebraico</li> <li>• Los contextos aparecen en las matemáticas e involucran áreas y perímetros</li> </ul>

### 7.3 Fase a1: Conocimiento de puntos importantes o esenciales

Episodio [3]. Siguiendo el esquema del experimento, en primera instancia se guía la confrontación y argumentación entre pares y posteriormente se pone en común con el gran grupo. El propósito es que les ayuden a analizar los aspectos importantes de los objetos de reflexión para conocerlos con profundidad.

Durante este proceso los participantes del grupo destacan la importancia que tiene examinar "Qué", "Por qué" y "Cómo" incluir la enseñanza de expresiones algebraicas en la secundaria.

### 7.3.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto de la problemática

Juan y Lina centraron la discusión en estudiar la naturaleza del proceso de enseñanza-aprendizaje de la factorización. La Tabla 7.11 selecciona algunos apartes de los diálogos durante la confrontación de posturas entre pares.

Tabla 7.11. *Confrontación entre pares FPM2 y FPM1*

---

Juan:	Primero les muestro como factorizar 15. Les explico el porqué de $15 = (2+3) \times 3$ . Trato que analicen las propiedades y operaciones que tiene la expresión (el trinomio), recalco que la hace idéntica a otra expresión que está escrita como producto de factores primos
Lina:	Yo tengo un método. Inicio con el caso de factorización por pasos: primero, les muestro las características del caso, para que ellos lo identifiquen y que puedan establecer la forma de la expresión [que se da], luego ejercitan el procedimiento para hallar los factores de las expresiones
Juan:	Supongo que si los alumnos se aprenden las fórmulas de cada caso, de memoria, no están aprendiendo, están simplemente manipulándolas.
Lina:	Pero creo que logran factorizar cuando con otros ejercicios mecanizan el procedimiento. Por eso busco algo dinámico que no los deje olvidar.
Juan:	Me refiero a que también deben ser competentes para reconocer el caso que aprende durante la clase y que no, lo olviden fácilmente.
Lina:	Yo en casos, ejemplifico dónde se puede aplicar este procedimiento en problemas de área o perímetro.
Juan:	La representación es buena. Yo les hago un diagrama con la forma que tiene ese caso y la estructura deben reconocer y aplicar. Por supuesto, debemos saber cómo hacer la explicación de las propiedades y mostrar las relaciones que la rigen para que logren comprender la estructura, y luego si, lo demás de la manipulación.

---

Destacamos los elementos conceptuales que identifican del proceso de factorizar y las posturas en torno a la enseñanza del álgebra, en la que identificamos un enfoque instrumentalista y de transmisión. Lina aprecia como “mecánica”, la enseñanza basada prioritariamente en la descripción de las reglas (casos de factorización) y la resolución de ejercicios. Juan no abandona la visión estructural, pero es consciente de que el sesgo procedimental aporta al aprendizaje solo una parte. Para él tiene sentido en la factorización la comprensión de relaciones matemáticas involucradas en los algoritmos.

### 7.3.2 Análisis de nuevos referentes y aspectos importantes de la problemática

En una segunda interpretación partimos de los puntos de acuerdo que determinaron aspectos importantes para profundizar. La Tabla 7.12 muestra el informe que dio origen de dicha conexión.



Tabla 7.12. *Acuerdos conceptuales: informe de la confrontación entre pares*

<b>Comparación de posturas, conexión de conocimientos y acuerdos</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Acordamos que enseñar factorización no debe ser un tema separado; es una forma de saber si se comprende la multiplicación; y que puede aprovechar otros temas como el cálculo de área o volúmenes, etc.</li> <li>• Destacamos que los niños puedan entender la factorización, si comprenden el porqué del caso a usar, reconocen las formas de los casos, las características y las propiedades que los rigen (estructura: interna y externa)</li> <li>• Concluimos que se requieren más que ejercicios de aplicación y ejercitación para aprender la factorización. Se debe procurar que den sentido al proceso de factorización.</li> </ul>

El análisis del informe de síntesis (Tabla 7.13) reveló la evaluación que el grupo realizó a las conexiones conceptuales (e.g., lenguaje algebraico, actividad algebraica, sistema simbólico y su vinculación con la aritmética).

Tabla 7.13. *Conexiones y síntesis conceptual*

<b>Síntesis conceptual</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es importante conocer con profundidad las teorías que tratan las relaciones entre algoritmos y formas del lenguaje algebraico.</li> <li>• Nos hemos decidido a profundizar y consultar las formas y procesos involucrados en las expresiones y estructuras algebraicas básicas</li> </ul>
<b>Aspectos a Consultar</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Profundizaremos los temas que tenemos en desacuerdo (estructura algebraica y la manipulación simbólica del álgebra).</li> <li>• Buscaremos experiencias y guías para la enseñanza de la factorización con material tangible y con problemas.</li> <li>• Hemos encontramos en la consulta de referentes teóricos, dos temáticas para avanzar el proyecto: una, con las características de la estructura algebraica (Kieran, 1989) y otro con el sentido estructural (Vega-Castro, 2012)</li> </ul>

El mapa de proceso de la Figura 7.5, muestra acciones que se realizan en la fase a1 que implican transformación en las variables. Los practicantes confrontaron sus ideas en torno a la evidencia de sus experiencias. Este proceso les llevó a considerar sus concepciones y a evaluar los aspectos importantes de la situación problemática elegida. Ubican como puntos de convergencia conceptual para afrontar la problemática el sentido estructural, al que consideran el aspecto teórico estratégicamente necesario que les permite profundizar.

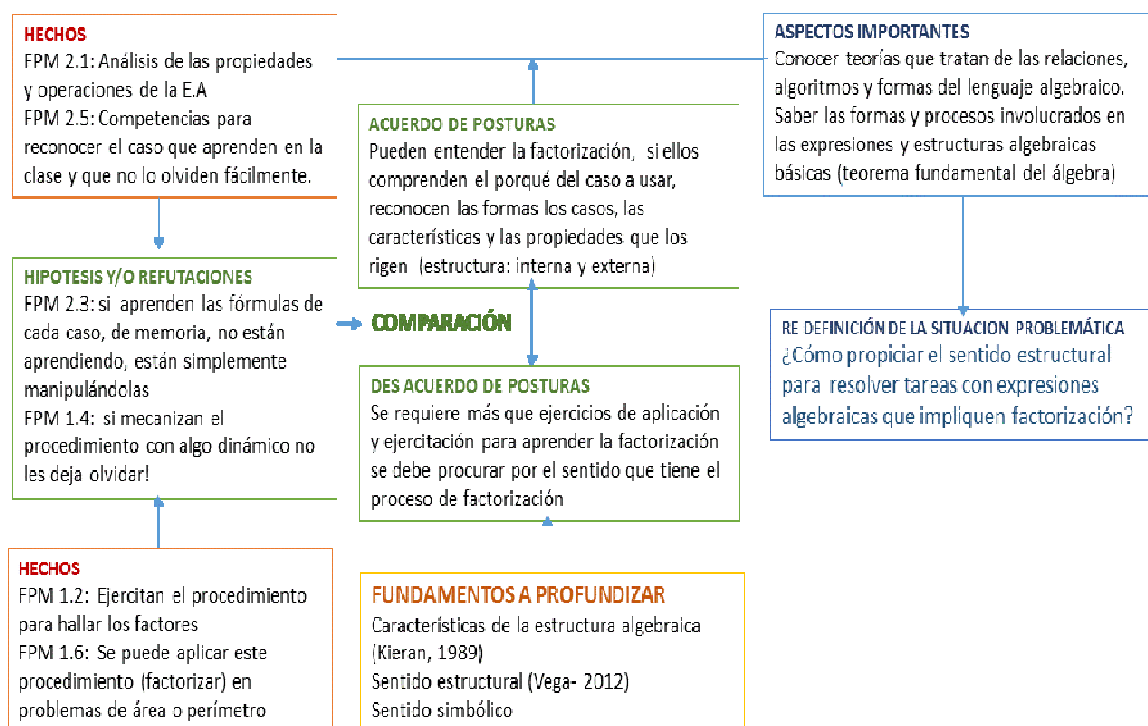


Figura 7.5. Mapa de proceso de las dimensiones de análisis en Fase a1

## 7.4 Fase C1: Crear buscar y preparar alternativas de actuación

Episodio [4]. Los practicantes han profundizado en los referentes considerados en la fase anterior (Figura 7.5) y de forma consciente, exponen alternativa que delimitan su propuesta de acción, para afrontar su problemática cuando sea desarrollada en el prácticum.

### 7.4.1 Evaluar posibles soluciones y alternativas

Lina y Juan se apoyaron en algunos elementos del conocimiento didáctico del contenido para establecer con precisión la nueva formulación de la problemática. Sobresale el acuerdo e interés de los FPM por abordar el sentido estructural. La Tabla 7.14 refleja la nueva cuestión que cada uno de los FPM plantea referida al contenido del álgebra escolar que abordó y basados en los nuevos referentes consultados.

Tabla 7.14. Nueva cuestión planteada por en conjunto los FPM1 y FPM2

Juan	Cuestión planteada: ¿Cómo propiciar el sentido estructural en escolares de grado 8vo al resolver tareas con expresiones algebraicas que impliquen factorización?
Lina	¿Qué dificultades tienen los estudiantes operaciones con expresiones algebraicas?

La Tabla 7.15 describe las decisiones que han tomado los FPM durante los cuatro episodios descritos hasta el momento. Incluye redefinir el interrogante y justificar su viabilidad cuando realicen su proyecto PPD.

Tabla 7.15. *Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C1*

Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Delimita el objeto de reflexión a la factorización de los trinomios cuadrados perfectos</li> <li>• Formula la problemática desde sentido estructural.</li> <li>• Considera como dilema la dualidad procedimental y conceptual del álgebra.</li> <li>• Ubica el origen de la problemática en la comprensión algebraica, sin limitar el campo procedimental en la resolución de la situación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Define aspectos conceptuales asociados al proceso de simplificación y factorización de las expresiones algebraicas.</li> <li>• Resalta el sentido estructural para la enseñanza de la factorización.</li> <li>• Involucra la actividad algebraica como elemento importante en el diseño de tareas (e.g, transformación y conversión).</li> <li>• Otorga importancia a la estructura algebraica y a la comprensión de las relaciones matemáticas que se involucran en los procesos algorítmicos.</li> <li>• Conecta el uso de la X como “Variable”, con el tratamiento como “Función polinómica”, y el uso de la X como “Incógnita” con las “Ecuaciones polinómicas o Raíz de un polinomio”.</li> <li>• Identifica la estructura sintáctica y semántica del álgebra, dándole un carácter global, que permite considerarla como un todo para crear entidades (factorización).</li> </ul>

## 7.5 Fase T1: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo C2

El episodio [5] da inicio con la descripción de nueva reformulación a la situación problema que han puede ser detectada por los FPM en la enseñanza del álgebra. Los participantes definen la situación problema y presentan el nuevo interrogante, hacen explícito el contexto, los sujetos objeto de observación, y la acción propósito del conflicto. Dando inicio con esta fase al siguiente ciclo reflexivo “C2”

De la descripción proporcionada por Lina para la nueva problemática subyacen las posibles limitaciones (errores y dificultades) del aprendizaje de las expresiones algebraicas, centrando su atención en las operaciones con polinomios.

La nueva problemática que Juan describe informa los hechos de su práctica que le han permitido notar errores y dificultades de los escolares al resolver tareas de factorización de TCP en una prueba destinada al diagnóstico del aprendizaje. De este modo, Lina y Juan dan inicio al ciclo reflexivo C2. De igual manera los FPM presentan el propósito de las tareas para el diagnóstico del aprendizaje que abordaran en C2: reconocer y generar formas equivalentes de las expresiones algebraicas y comprender su significado.



## Capítulo 8. Ciclo reflexivo C2: Reflexión sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico

El ciclo reflexivo C2 ocurrió en la etapa del prácticum dedicada al diagnóstico del aprendizaje del grupo de los alumnos asignados en la práctica. La Figura 8.1 describe la trayectoria de acciones reflexivas seguida por los FPM en el ciclo C2.

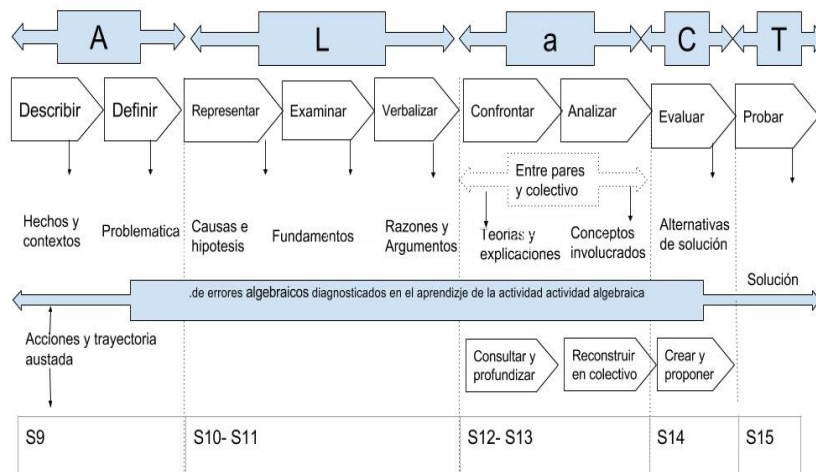


Figura 8.1. Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo C2

La Figura 8.2 es el esquema seguido para describir las fases de reflexión de los sujetos. Interpretamos las situaciones problemáticas que identifican y formulan a partir del diagnóstico del aprendizaje de sus escolares. Examinamos el tipo y origen de los errores identificados, la naturaleza y significado atribuido a estos y el conocimiento de las dificultades asociadas.

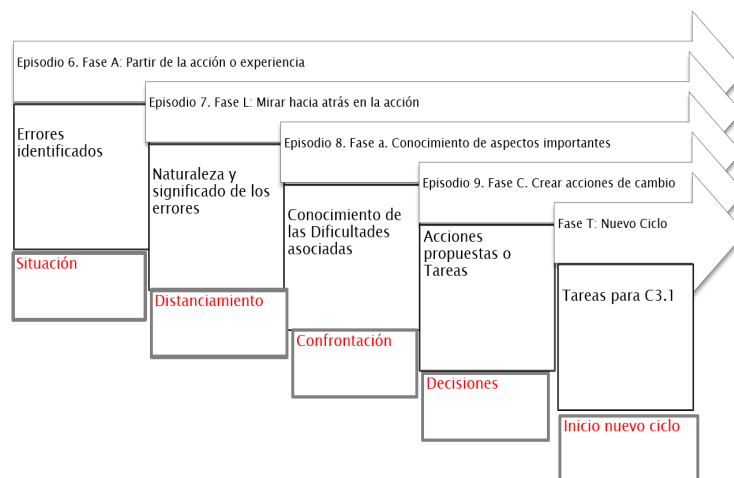


Figura 8.2. Reflexión sobre el diagnóstico del aprendizaje del álgebra escolar

## 8.1 Fase A2: Partir de la acción o experiencia

Episodio [1]. Siguiendo la trayectoria del experimento (fase A2, Figura 8.1), los FPM describen los resultados de la prueba destinada al diagnóstico del aprendizaje del álgebra, e identifican los errores que sus escolares cometen al responder a las tareas. Cada uno de los FPM formula cuestiones relativas al aprendizaje algebraico.

Analizamos las situaciones problemáticas que Lina y Juan describieron relacionadas con el aprendizaje de sus escolares; examinamos especialmente, aquellas cuestiones o incidentes que mencionan o dan sentido a las limitaciones del aprendizaje.

### 8.1.1 Describir el origen de la situación problema

Lina describe una situación problemática que alude a los procedimientos incorrectos de sus escolares al resolver tareas de la prueba, mostró interés en “saber en qué se equivocan”, se fijó en el “sentido que dan, a las expresiones algebraicas cuando realizan operaciones”. La Tabla 8.1 es un extracto de la descripción del problema de Lina. [S9. Cg.2. Líneas 4-9].

Tabla 8.1. Extracto intervención de Lina al identificar los errores

P1	¿Cuál es la situación problemática?
Lina	...los errores en las respuestas de los niños y las falencias que tienen en los preconceptos
P2	¿Cuál es la preocupación? ¿En qué se quería centrar?
Lina	Primero...los errores que tienen con las propiedades y en las operaciones...luego viendo los preconceptos que no tienen y que necesitamos para desarrollar la temática.
P2:	Entonces ¿qué ocurrió?
Lina	Tienen “falencias en los preconceptos”, tienen problemas con la letra, fallan al expresar el área del cuadrado y se equivocan con los procedimientos algorítmicos...Ah! También...los despistes o respuestas descabelladas...tenemos [lista] [S9. Cg.2/Ec1. Líneas 17-24].

Para Lina el origen de la problemática obedece a las carencias de los escolares de conocimiento procedentes de cursos anteriores, a los cuales denominó: “falencias en los preconceptos”. Además describió hechos relativos al fracaso de los escolares cuando efectúan el producto de las expresiones de la forma  $(a \pm b)x(a \pm b)$ . Aunque ella ubicó su preocupación en los errores relacionados “con las propiedades y...las operaciones”, los dominios a los que alude como errores proceden de hechos poco definidos y sin claridad en la causa que los produce. Lina manifestó “poca experiencia para identificar los errores” y

expresó su “interés para abordar el reto” (cfr. Anexo A6-FPM1).

Juan describió su preocupación para “diagnosticar el sentido estructural que están dando a las transformaciones con las expresiones que definen los TCP”. Fijó su atención en cómo sus escolares “hacen uso equivocado de símbolos y, como efectúan operaciones sintácticas incorrectas” [S9. Cg.2. Líneas 27-33].

Atribuye la problemática del aprendizaje algebraico a errores por ausencia de sentido. No fue explícito en su distinción, entendemos que se trata de errores con origen en la complejidad del lenguaje y de los procedimientos algebraicos (cfr. Anexo A6-FPM2). Juan plantea su inquietud en “interpretar las estrategias exitosas, con las que puedan abordar con habilidad la factorización los chicos” [S9. Cg.2. Líneas 34-37].

### 8.1.2 Formular la cuestión

Lina, estimaba que el diagnóstico del aprendizaje le “guiaría para enseñar el cuadrado de los binomios y propiciar el sentido sobre estas estructuras” [S9. Cg1. Líneas 43-47].

En consecuencia de lo anterior, formuló la siguiente cuestión:

¿Qué dificultades tienen los estudiantes para hacer uso de sus conocimientos en la solución de productos con expresiones algebraicas? [S9. Cg2. Líneas 51-52]

Aunque Lina formuló la cuestión con foco en las operaciones con expresiones algebraicas, su planteamiento sigue siendo general; deja ver una preocupación profesional, alude a las dificultades del aprendizaje que manifiestan sus escolares, para las cuales requiere conocer. Desciframos que tiene inquietud didáctica, pretendiendo conocer las dificultades del aprendizaje de algunas identidades notables.

Juan, se inquietó por obtener información matemática relativa a características de las expresiones, y relacionarlas con “las habilidades que tienen los estudiantes”, enfocándose en razonamientos necesarios para “hacer uso eficiente de los procedimientos algebraicos”. [S9. Cg2 Líneas 55-57]. Juan formuló la cuestión:

¿En qué características de las expresiones prestan atención los jóvenes, cuando proceden con ellas? [S9. Ag1. Líneas 63-71].

Juan identificó el origen de la problemática en aspectos matemáticos (casos) y su correspondiente “desempeño de razonamientos, destrezas y en la comprensión del significado de los casos [técnicas algebraicas] para la factorización”. Para esto espera aclarar los casos y que los alumnos reconozcan las características de las expresiones algebraicas. Al igual que Lina, Juan manifestó su inquietud como un déficit de

conocimiento, pero en este caso en relación con las situaciones matemáticas, con las estrategias de factorización (casos), con lo que tendría información para interpretar el desempeño de sus escolares.

Las situaciones formuladas por los FPM, relativas al diagnóstico del aprendizaje, nos permiten interpretar una vez más, los eventos y situaciones de la práctica que perciben los FPM y los problemas profesionales sobre los que tienen que decidir.

La Tabla 8.2 sintetiza algunos rasgos que dan cuenta del conocimiento profesional involucrado por los FPM al describir y formular la cuestión del problema profesional.

Tabla 8.2. Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A2

Caso	Definición de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Sujetos:</b> Escolares (12-13 años)  <b>Objeto:</b> Expresiones algebraicas  <b>Foco:</b> Operaciones con expresiones que involucran producto de binomios  <b>Origen:</b> Carencia de los escolares relativos a conocimiento anteriores  <b>Naturaleza:</b> Los errores ocurren por deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos previos al resolver tareas  <b>Acción:</b> Identificar dificultades de aprendizajes algebraico  <b>Cuestión:</b> ¿Qué dificultades tienen los estudiantes para hacer uso de sus conocimientos en la solución de productos con expresiones algebraicas?  <b>Déficit:</b> Necesidad de conocer las dificultades del aprendizaje algebraico  <b>Percepción de la solución:</b> hay una respuesta que indica cuales son las dificultades.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alude a expectativa de aprendizaje en términos del dominio procedimental</li> <li>• Reconoce el significado y uso de la letra como parámetro</li> <li>• Manifiesta relación entre sistemas de presentación (S-G) para expresar el cuadrado del binomio</li> <li>• Identifica errores por la falta de atención en procedimientos, “despistes”</li> <li>• Clasifica las respuestas erróneas en relación a los contenidos algebraicos.</li> <li>• Reconoce el error como fuente de información para la planeación</li> <li>• Reconoce la existencia de errores y dificultades en el tratamiento de expresiones de tipo <math>(a\pm b)\times(a\pm b)</math>.</li> </ul>
JUAN	<p><b>Sujetos:</b> Escolares (13-14 años)  <b>Objeto:</b> Expresiones algebraicas Trinomios cuadrados perfectos TPC  <b>Foco:</b> Uso de técnicas para factorizar  <b>Origen:</b> Habilidad para hacer uso eficiente de procedimientos algebraicos  <b>Naturaleza:</b> Los errores provienen de la ausencia de sentido de los escolares al efectuar procedimientos algebraicos  <b>Acción:</b> Identificar aciertos y errores en las estrategias de resolución de tareas  <b>Cuestión:</b> ¿En qué características de las expresiones prestan atención cuando proceden con ellas?  <b>El déficit:</b> necesidad de conocimiento para interpretar desempeño de escolares.  <b>Percepción de la solución:</b> Se requiere conocer las estrategias y justificaciones</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concibe los TCP como expansión sintáctica del cuadrado de un binomio</li> <li>• Identifica razonamientos y destrezas involucrados en la equivalencia entre las expresiones que definen los TCP</li> <li>• Identifica y describe errores algebraicos producidos por la notación y el lenguaje algebraico.</li> <li>• Ubica errores procedentes de la ausencia de sentido.</li> <li>• Acudió a las propiedades y relaciones de los Reales para identificar errores</li> <li>• Plantea capacidades y expectativas de aprendizaje para la factorización de TCP.</li> <li>• Identifica el sentido estructural como habilidad para proceder e identificar características de las expresiones</li> </ul>



	usadas al solucionar a las tareas	algebraicas eficientemente
--	-----------------------------------	----------------------------

## 8.2 Fase L2: Mirar hacia atrás en la acción

En la primera parte del episodio [2], los FPM retomaron las tareas matemáticas de la prueba (Figura 8.1), examinando en los argumentos ofrecidos por los escolares los errores identificados y explicitando con ejemplos cómo éstos implican en la problemática planteada.

Interpretamos el origen y la naturaleza de los errores identificados por los FPM, los cuales justifican la definición de las problemáticas, a la vez examinamos los fundamentos que asocian a las dificultades del aprendizaje y que conectan con el objeto de la problemática.

### 8.2.1 Examinar fundamentos en la naturaleza de la problemática

Lina retoma la tarea del centro comercial para ubicar el origen de errores, aludiendo a ejemplos para la “forma incorrecta como [As] expresaron simbólicamente el área de un cuadrado”; supone que estos errores obedecen a la imposibilidad para abstraer información de una figura geométrica [cuadrado] y, en algunos casos, a la falta de claridad del concepto: área (Cfr. A7-FPM1). Al tiempo que reconoció la “falta de precisión [As] para identificar características de las expresiones algébricas cuando sustituyen propiedades matemáticas”, atribuye la causa de estos errores a conocimientos procedentes de otros cursos. Considera que el conocimiento de las propiedades matemáticas y de las características de las expresiones “son claves para el éxito del aprendizaje del producto con binomios” [S10. Ec2/Ag1. Líneas 19-23].

Juan dedicó tiempo a percibir cómo los escolares logran “reconocer una estructura idéntica a una dada”, mostró interés por “ver cómo reconocían la equivalencia sintáctica entre las expresiones”; manifestó su frustración ante los resultados, observó pocos casos exitosos. Juan justificó haber requerido una segunda parte para la tarea en la que solicitó “emplear conceptos algebraicos para encontrar errores a un conjunto de ejercicios solucionados” y demandaba de los escolares “hacer uso eficiente de las técnicas algebraicas en las transformaciones requeridas para justificar las respuestas”. [S10. Cg2/Ec1. Líneas 26-34].

Lina y Juan al examinar el origen de los errores percibieron la “necesidad de contemplar la organización cognitiva de los conceptos”; ubicaron dos focos que se

convirtieron en objeto de exploración profunda relativos al “origen de los errores debidos a la falta de conocimientos previos a la complejidad de los procedimientos involucrados en las tareas”. [Lina-S10. Cg1. Líneas 38-41].

Interpretamos que Juan y Lina para alcanzar la interpretación del pensamiento algebraico y de los procesos conceptuales de sus escolares, requerían conectar su conocimiento del contenido con un conocimiento didáctico más profundo. En tal caso retomaron las metas y la complejidad cognitiva de las tareas y completaron el análisis cognitivo (Cfr. Anexo A7 FPM1-FPM2).

### 8.2.2 Verbalizar las ideas que enuncian el objeto de la situación

Lina explicitó el origen de los errores cometidos por sus escolares, usando extractos y comentarios, organizó y fundamentó su exposición. La Figura 8.3 representa un ejemplo.

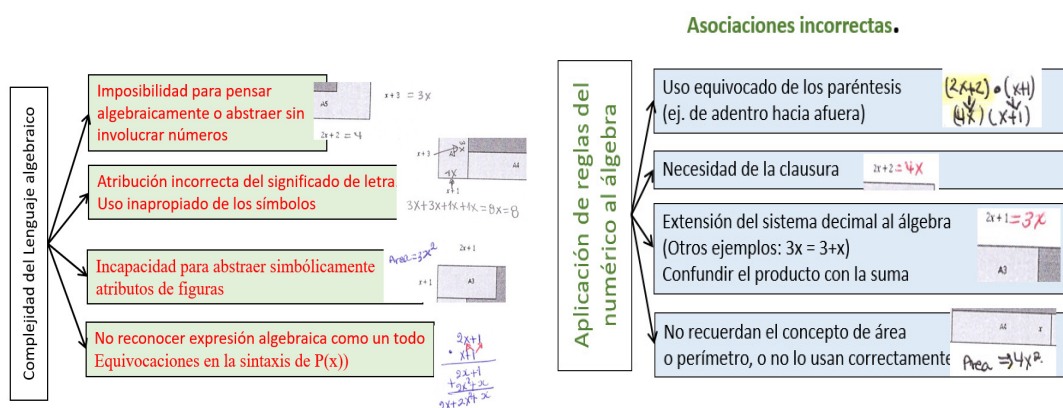


Figura 8.3. Origen de errores organizado por Lina en L2

Lina retomó los errores denominados “despistes”, apreciando “procedimientos que son heredados de la aritmética” (cfr. Figura 8.3-derecha); ejemplificó “la aplicación en álgebra de las reglas y conceptos que traen del sistema numérico”. [S10. Cg1 Líneas 42-44].

Al examinar los errores que inicialmente habían denominado como “falencias de preconceptos”, Lina manifestó que estos errores, pueden ocurrir porque “los niños aún son incapaces para proceder algebraicamente”, abogando por “las incapacidades [de As] para asumir conceptos más abstractos que los números” [S10. Cg2. Líneas 46-49].

Lina apreció errores por carencias de “sentido [atribuido] a la forma y a la notación de la expresión algebraica...[y], al concepto [significado] de la letra”. Explicó que se trató de

“situaciones de traducción incorrecta del lenguaje simbólico”, interpretó su origen en “la incapacidad del estudiante para pensar algebraicamente” (Cfr. Figura 8.3 izquierda). En palabras de Lina “la problemática” del aprendizaje algebraico está en “la abstracción algebraica que debe hacer el niño” [S10. Ec2/Cg2. Líneas 56-63].

Juan retomó las respuestas y estrategias de solución de sus escolares y examinó el origen de los errores; destacó el caso de la propiedad distributiva, manifestó haber observado “la tendencia lineal [As] al usar esta propiedad”, que identifica explícitamente como errores por ausencia de sentido. Se percató de las “reglas no lógicas que les surgen [As], pero válidas en otros casos particulares” (Figura 8.4 derecha). Juan, apoyado en esta premisa, sugiere que la ausencia de sentido “se crea cuando [los As] deben resistirse a calcular o cuando ellos siguen apegados a propiedades usadas en aritmética” (Figura 8.4 izquierda); citó ejemplos y justificó un conjunto de errores con origen en la aritmética [S10. Cg2 Líneas 67-71].

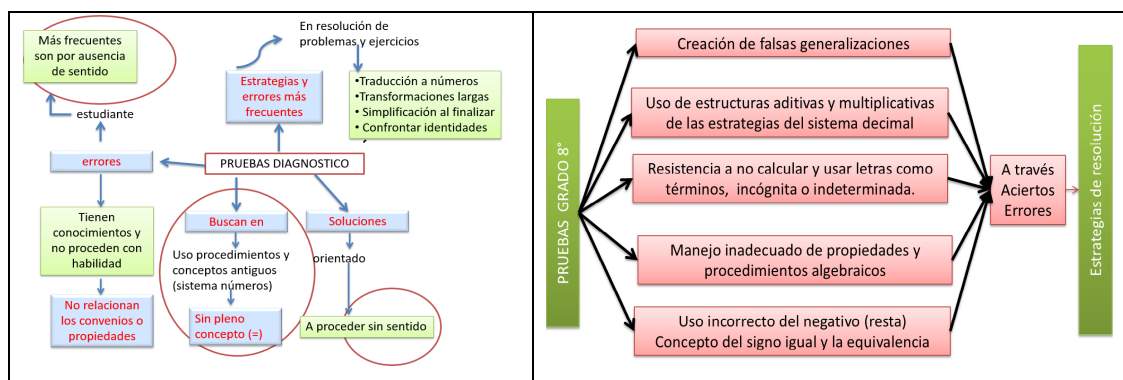


Figura 8.4. Origen de errores organizado por Juan en L2

De igual modo manifestó su “preocupación por el concepto que los [As] tienen del signo igual”, ya que “no diferencian entre igualdad e identidad”. Alude a la equivalencia sintáctica entre expresiones algebraicas, como la principal causa de error en el aprendizaje de la factorización” [S10. Ec2. Líneas 75-78].

Las concepciones de Juan, sustentadas en sus explicaciones, permiten apreciar que defiende el sentido que escolares dan a la estructura algebraica. Es evidente su inclinación por el sentido procedimental del álgebra, reconoce que la falta de comprensión sintáctica se convierte en una dificultad. Juan planteó que “la mayoría de errores para manipular símbolos se corresponde con el reconocimiento de las propiedades de las operaciones usadas en las transformaciones”. [S10. Ec1 Líneas 81-83].

Posterior a la exposición de Juan y Lina, el colectivo de práctica y compañeros ofrecieron algunas precisiones sobre las situaciones que dan origen a los errores

algebraicos, a fin de conectar con las dificultades del aprendizaje algebraico.

En la segunda parte del episodio [2] se realizó la puesta en común, en la que los FPM recibieron por parte del equipo formador y demás practicantes creencias y preguntas a fin de examinar sus ideas y reconsiderar sus planteamientos para encontrar una clarificación relacionada con el problema profesional.

Interpretamos a continuación las precisiones que los FPM han realizado para enfrentar sus ideas; además destacamos apreciaciones que les han permitido percibir de manera distante sus planteamientos sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico.

### 8.2.3 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática

Juan y Lina examinaron las creencias e interrogantes ofrecidos por los demás practicantes y el equipo formador. Las principales creencias e interrogantes aluden a la comprensión de las relaciones involucradas en las estructuras aritméticas, tratan la abstracción simbólica y la madurez cognitiva de escolares (Cfr. Anexo A8, FPM1), pretendían llamar la atención de Lina sobre la precisión de las dificultades del aprendizaje algebraico.

Lina, sin ocultar la dificultad que encontró para examinar la procedencia de los errores, reconoce que existe una complejidad implícita en la estructura algebraica, la cual es la causa de varios errores, enfatizó las dificultades asociadas a la notación simbólica. Argumentó: “el significado que dan [As] a la letra está condicionado por su apego al pensamiento numérico”, limitando su abstracción y uso. La Tabla 8.5 recoge un extracto con algunas precisiones de Lina, posteriores a la explicitación de creencias y preguntas.

Tabla 8.3. Selección de un aparte del diario reflexivo de Lina en L2

---

...le he dado vueltas a la resistencia de los niños, al usar las letras. Ya se me convirtió en una obsesión entender por qué los niños no comprenden y usan correctamente las letras. Por qué no logran éxito al trabajar con expresiones algebraicas  
...Creo que existe conexión entre los procedimientos usados en la aritmética y la forma como piensan en algebra...esto me ha puesto a recapacitar, en los errores a causa de operaciones mal empleadas y no en las falencias de conocimientos... Lo saben hacer con números y no con expresiones [Cfr A8. Cg2.Líneas 12-26].

---

Lina declaró con entusiasmo haber percibido el origen de algunos errores, que ubica en el tránsito de la aritmética al álgebra, pues los procesos seguidos por sus escolares habían actuado como un detonante para ella, notó la herencia de la aritmética como causa de error.

Para Juan fue de gran impacto haber encontrado que varios de sus escolares

dominaban los algoritmos para realizar productos con binomios, pero “no podían identificar los cambios que una expresión algebraica [transformación sintáctica] puede tener dentro del mismo sistema simbólico”; pues, como él mismo explicó, “en las clases de álgebra se promueven un aprendizaje mecánico basado en la aplicación de procedimientos”. Los fragmentos de la Tabla 8.4, ejemplifican las consideraciones que le llevaron a esta precisión.

Tabla 8.4. Selección de un aparte del diario reflexivo de Juan en L2

...He pensado en aquellos jóvenes que dominan el procedimiento, muchos dejan de lado interpretar la estructura de las expresiones para acudir al uso del algoritmo, usan caminos largos. ...Por eso considero que no se trata sólo de habilidad para proceder, es comprensión. [Cfr A8. Ec1. 38].  
 ...Me pregunto por ¿Cuáles son los procedimientos que usan para transformar con éxito las expresiones algebraicas? y ¿Cómo reconocen la equivalencia sintáctica entre expresiones? [Cfr. A8 Ec.1. Líneas 47-49].

Juan y Lina reconocen la complejidad que implica distinguir entre los errores y las dificultades. La Tabla 8.5 resume los principales rasgos que dan cuenta del conocimiento profesional usado por los FPM al precisar la naturaleza del objeto que define el problema profesional relativo a las limitaciones del aprendizaje algebraico.

Tabla 8.5. Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase L2.

Caso	Definición de la problemática	Conocimiento profesional
Lina	<p><b>Objeto:</b> Expresiones algebraicas  <b>Foco:</b> Producto entre dos binomios  <b>Origen:</b> Abstracción algebraica  <b>Naturaleza:</b> Escolares continúan con esquemas heredados de la aritmética al tratar expresiones algebraicas  <b>Acción:</b> Conocer e identificar dificultades asociadas al tratamiento de expresiones  <b>Déficit:</b> Conocimiento para encontrar causas y justificar los errores en las dificultades del aprendizaje algebraico  <b>Cuestión:</b> ¿Por qué los niños no comprenden y usan correctamente las letras?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contempla el uso y significado de la letra para analizar origen de los errores</li> <li>• Involucra la sustitución de propiedades matemáticas y la transformación sintáctica en las tareas del diagnóstico</li> <li>• Usa la noción de equivalencia entre expresiones, para identificar dificultades</li> <li>• Define metas y demandas cognitivas en tareas de diagnóstico del aprendizaje</li> <li>• Describe algunas dificultades asociadas a la complejidad de los objetos algebraicos</li> <li>• Describe errores inducidos por la complejidad de lenguaje y la notación</li> <li>• Describe elementos de las competencias involucradas en el estudio de productos notables</li> </ul>
Juan	<p><b>Objeto:</b> Trinomios cuadrados perfectos  <b>Foco:</b> Transformación de expresiones que definen los TCP [factorización]  <b>Origen:</b> Equivalencia sintáctica entre las expresiones que definen los TCP  <b>Naturaleza:</b> la dualidad semántica-sintáctica que se involucra en la</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica subestructuras involucradas en la definición de los TCP</li> <li>• Considera transformaciones sintácticas de expresiones del tipo <math>a^2+2ab+b^2</math></li> <li>• Plantea diferencia entre igualdad y equivalencia para el tratamiento del símbolo igual (=)</li> <li>• Define la meta en las tareas</li> </ul>

<p>complejidad de las transformaciones algebraicas</p> <p><b>Acción:</b> Conocer de las limitaciones del aprendizaje de los escolares y de las estrategias de solución en tareas algebraicas</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo reconocen la equivalencia sintáctica entre expresiones algebraicas?</p> <p><b>Déficit:</b> conocimiento interpretativo de las actuaciones de los escolares (procedimientos)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Plantea nivel de complejidad de las tareas</li> <li>• Reconoce dificultades asociadas a la complejidad de los procedimientos algebraicos</li> <li>• Identifica el significado de equivalencia entre expresiones algebraicas como dificultad de la factorización</li> <li>• Identifica el origen de los errores en la ausencia de sentido</li> <li>• Precisa demandas cognitivas y metas en tareas para el diagnóstico del aprendizaje</li> </ul>
--	---

### 8.3 Fase a2. Conocimiento de puntos importantes o esenciales

El episodio [3] en primera instancia guía la confrontación entre pares sobre los aspectos importantes del conocimiento de la problemática, siguiendo la trayectoria del experimento (fase a2, Figura 8.1). Posteriormente los formadores, en la puesta en común, le ayudan a consultar teorías que subyacen al problema, conduciendo a profundizar sobre ellas.

Examinamos a continuación las posturas que confrontan e interpretamos los fundamentos que destacaron al analizar los aspectos esenciales del conocimiento de la problemática.

Nos detenemos en los argumentos que subyacen al analizar las cuestiones: ¿Cuál es la naturaleza del aprendizaje algebraico? ¿Cuáles son las principales dificultades que se presentan en el aprendizaje?

#### 8.3.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto del problema

Lina y Juan identifican elementos importantes de la problemática sobre las limitaciones del aprendizaje; especialmente discuten las transformaciones algebraicas referidas a la factorización de  $a^2+2ab+b^2$  y a la expansión de  $(a+b)^2$ , destacando dos objetos de análisis: uno referido a la “comprensión y sentido de las expresiones algebraicas”, y el otro al “significado de las relaciones y operaciones entre ellas”. La Tabla 8.6 contiene un extracto del informe que evidencia la confrontación.

Tabla 8.6. Selección de un aparte del informe de confrontación entre pares

Juan:	Los problemas están en el sentido de las operaciones algebraicas, sin dejar de lado la comprensión de propiedades que estructuran dichas operaciones en la expresión (orden, equivalencia, etc.)
Lina:	Por eso es importante considerar los modos posibles de comprensión que existen para

	cada concepto, por ejemplo las estrategias visuales basadas en las representaciones geométricas
Juan:	Pero a largo plazo es importante habilidad y comprensión para simplificar fracciones algebraicas.
Lina:	En relación con las conversiones de lo geométrico a lo simbólico, allí también existen dificultades.
Juan:	También en el mismo registro. Por ejemplo, hay dificultades para relacionar subestructuras al interpretar equivalencias tales como: $(a+b)^2$ con $(a+b)(a+b)$ , y con $a^2+2ab+b^2$ . Aún con las propiedades sencillas, $c(a+b)$ , equivalente con $ca+cb$ , no la reconocen en $(a+b)c$ . Otra: $(a+b+d)c$ .
Lina:	También merece atención la relación entre todas las formas que no se explican y luego se evalúan.
Juan:	Especialmente la transformación de $(a+b)(a-b)$ en su expansión y equivalencias, tener en cuenta, no se demuestra en clase como resultan los TCP de la expansión de binomios cuadrados. [Cfr. Anexo A9- FPM1-2]

Interpretamos que Juan y Lina resaltan el conocimiento de las equivalencias correspondientes a las transformaciones sintácticas invariantes de  $(a \pm b)^2$ . Otorgaron importancia a las formas de representar dichas expresiones para la comprensión del significado de las mismas, desde dos ámbitos: cuando la forma de la expresión puede cambiar (transformaciones sintácticas) en el mismo sistema, o cuando la expresión es convertida de un sistema a otro.

Juan defendió su postura relacionada con las transformaciones sintácticas y la comprensión semántica implicadas en la factorización de TCP. En tanto que Lina se muestra consciente de la comprensión algébrica en términos de “la conversión entre sistemas de representación” y concretó su inquietud en ¿Cómo aprovechar los sistemas de representación para enseñar las transformaciones y equivalencias sintácticas que definen la forma  $(a \pm b)^2$ ? [Cfr. Anexo A9- FPM1-2].

Juan y Lina, en las conversaciones con los formadores, comparten la importancia que tiene el desarrollo cognitivo de los escolares asociado a la edad, haciendo explícitas las limitaciones del aprendizaje necesarias para la abstracción simbólica y la sustitución formal. Recibieron aportes teóricos que les permitieron profundizar en la interpretación de las dificultades del aprendizaje algebraico, debidas al tránsito desde la aritmética. La Tabla 8.7 muestra un extracto del informe de síntesis que dio origen a los acuerdos conceptuales.

Tabla 8.7. *Acuerdos conceptuales: informe de la confrontación entre pares*

<b>Comparación de posturas, conexión de conocimientos y acuerdos</b>
--

Acuerdo: más que el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el interés está en los elementos esenciales que conducen el aprendizaje significativo del álgebra escolar. A nuestro juicio es relevante atender a la similitud de los algoritmos aritméticos y los algebraicos. Esta similitud puede dotar de sentido a las operaciones con expresiones algebraicas, siempre y cuando se atienda en la instrucción a las particularidades en el campo algebraico y se aproveche para generalizar estructuras [Cfr. Anexo A9- FPM1-2]

Lina reconoció la complejidad de los objetos algebraicos y por ende, de los procedimientos implicados, y se muestra consciente de las “limitaciones del aprendizaje asociadas a los conflictos conceptuales al inicio del aprendizaje algebraico”. Juan hizo precisiones sobre “la simultaneidad en el tratamiento de las estructuras aritméticas y algebraicas” y es consciente de que “las reglas sintácticas utilizadas en álgebra tienen rol diferente a las normas sintácticas usadas en la aritmética”, por cuanto advierte del adecuado uso de dicha simultaneidad, para disminuir las dificultades en la comprensión de la expresión algebraica.

Los FPM aluden a la variedad de referentes que les orientan sobre cómo clasificar los errores resaltando los constructos que guían la definición de la problemática. En el Anexo A9 se exhibe el mapa conceptual que representa la profundización y consulta realizada sobre las limitaciones de aprendizaje algebraico (Socas, 2007; 1997), Finalmente los FPM precisaron otros referentes y consultas oportunas para la comprensión estructural y procedimental que rigen los binomios del tipo  $(a \pm b)^2$ . La Tabla 8.8 resume aspectos importantes del conocimiento del problema considerados para profundizar.

Tabla 8.8. Aspectos importantes considerados para profundizar

<b>Síntesis</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Continuar estudiando el sentido de lo estructural.</li> <li>• Ahondar en el álgebra geométrica, de cara al diseño de tareas</li> <li>• Profundizar en las dificultades de la factorización y al tratamiento de productos notables</li> <li>• Explorar ideas sobre sentido y/o razonamiento algebraico y comparar con el estructural</li> </ul>
<b>Referentes y aspectos a consultar</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algunas referencias concretas para consultar son:                      Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. <i>Números</i>. 71. 57-74.                      Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización formal y modelización en álgebra. <i>Simposio de la SEIEM</i>. Granada.                      Aké, L. P., Godino, J. D., Fernández, T., &amp; Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. <i>AIEM</i>, 5, 25 - 48.                      Castellanos, M.T y Obando, J. (2009) Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico. <i>ASOCOLME</i>,</li> </ul>

Las producciones analizadas han revelado que los FPM ponen de manifiesto



aspectos relativos a la integración de dos concepciones del álgebra, la procedimental y la estructural.

La Tabla 8.9 resume rasgos que permiten distinguir el conocimiento profesional involucrado por FPM en la definición del problema profesional durante la Fase a2

Tabla 8.9. *Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase a2*

Caso	Definición de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Objeto:</b> Productos notables <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Foco:</b> Resultado de la extensión del binomio cuadrado <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Origen:</b> Conflictos conceptuales al inicio del aprendizaje algebraico</p> <p><b>Naturaleza:</b> Dificultades asociadas a la asimilación y abstracción de los procedimientos del álgebra escolar</p> <p><b>Acción:</b> Usar SR para enseñar las equivalencia y transformaciones entre expresiones que se definen en <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo aprovechar los sistemas de representación para enseñar transformaciones y equivalencias de producto notable de la forma <math>(a \pm b)^2</math>?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece las relaciones entre los campos conceptual y procedimental que definen <math>(a \pm b)^2</math></li> <li>• Establece las conversiones entre diferentes sistemas de representación como elemento que otorga significado a <math>(a \pm b)^2</math></li> <li>• Identifica el origen de los errores que proceden de un obstáculo epistemológico [cognitivo]</li> <li>• Destaca la relevancia del aprendizaje significativo del álgebra escolar</li> <li>• Asocia la abstracción simbólica y la sustitución formal como dificultades del aprendizaje algebraico.</li> <li>• Identifica la abstracción simbólica como dificultad del aprendizaje de las E.A</li> </ul>
JUAN	<p><b>Objeto:</b> Trinomios cuadrados perfectos (TCP)</p> <p><b>Foco:</b> Factorización de TCP</p> <p><b>Origen:</b> las reglas sintácticas utilizadas en álgebra que difieren de las normas sintácticas usadas en la aritmética.</p> <p><b>Naturaleza:</b> simultaneidad en el tratamiento de estructuras aritméticas y algebraicas</p> <p><b>Acción:</b> Conocer actuación de escolares frente al sentido estructural</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo abordan el sentido estructural en tareas con expresiones algebraicas que implican la factorización de TCP?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alude al origen de errores en la comprensión de las propiedades que estructuran las operaciones de la expresión <math>a^2 + 2ab + b^2</math></li> <li>• Plantea la conversión en el mismo sistema simbólico para dar significado a las transformaciones sintácticas de los TCP</li> <li>• Identifica dificultades asociadas al tratamiento de identidades notables</li> <li>• Identifica dificultades en la expansión y factorización de binomio cuadrado</li> <li>• Utiliza la representación de la propiedad distributiva para ejemplificar equivalencia y generalizar a más de dos sumandos. <math>(a+b+d)c</math></li> <li>• Identifica dificultades del aprendizaje de las E.A asociadas a las normas sintácticas</li> </ul>

## 8.4 Fase C2: Crear buscar y preparar alternativas de actuación

En el episodio [4] los FPM, de forma consciente, exponen alternativas que delimitan su propuesta de acción para ser desarrollada en el prácticum. A continuación informamos de las estrategias que han decidido los FPM para poner en marcha y describimos las decisiones que han tomado.

### 8.4.1 Evaluar posibles soluciones y alternativas

Una vez que Juan y Lina profundizaron en las limitaciones del aprendizaje algebraico, consideran pertinente poner en marcha una “estrategia” para “analizar cómo los estudiantes abordan las transformaciones sintácticas de los TCP” (Anexo A10 FPM1-2). Los FPM proponen para esto “observar los conceptos, procedimientos y propiedades exhibidas en la solución de tareas”; esperan con esta estrategia obtener información relativa a “los errores de los escolares y al sentido estructural” que ponen de manifiesto [S14. E.C1 Líneas 31-44].

Acordaron que Lina en su grupo tratara “tareas que involucren las transformaciones y la conversión entre SR de los productos notables  $(a \pm b)^2$ , haciendo énfasis en la expansión”. Juan crearía tareas que involucren transformaciones sintácticas, con énfasis en la factorización.

Juan y Lina se dan cuenta de la pertinencia que tiene la comprensión de las equivalencias que rigen las transformaciones sintácticas de los TCP. Por tanto se concretan en observar cómo abordar el sentido estructural en tareas que implican transformaciones sintácticas.

La Tabla 8.10 sintetiza la evolución en la definición de la problemática sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico y el conocimiento profesional implicado.

Tabla 8.10. *Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C2.*

Definición de la problemática	Conocimiento profesional
<p><b>Objeto:</b> Productos notables y TCP</p> <p><b>Foco:</b> Transformaciones sintácticas que rigen las subestructuras de TCP</p> <p><b>Origen:</b> la comprensión de las relaciones, procedimientos que rigen las subestructuras de <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Naturaleza:</b> la ausencia de sentido está asociada a la interpretación de la equivalencia entre las transformaciones sintácticas</p> <p><b>Acción:</b> obtener información sobre errores y sentido estructural en tareas de transformación sintáctica.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo [As] abordan el sentido estructural en tareas que implican transformaciones sintácticas?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Da prioridad a la comprensión de las limitaciones del aprendizaje para establecer alternativas de instrucción</li> <li>• Reconoce las relaciones entre errores y dificultades del aprendizaje algebraico</li> <li>• Comprende que las limitaciones del aprendizaje algebraico brindan ventajas para alcanzar los objetivos de aprendizaje</li> <li>• Considera las subestructuras de los binomios del tipo <math>(a \pm b)^2</math> para observar los errores procedentes de la ausencia de sentido implicado en las equivalencias.</li> <li>• Utiliza la estructura conceptual para observar el sentido de las expresiones algebraicas</li> <li>• Otorga rol a las dificultades del aprendizaje para el diseño de planes de mejoramiento de los escolares</li> </ul>

## 8.5 Fase T2: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo C3

El episodio [5] da inicio a una nueva situación de práctica aplicando las estrategias

anteriores, en él redefinen la problemática que vienen tratando y presentan el nuevo interrogante.

Examinamos a continuación la descripción de los resultados logrados por los FPM al aplicar las alternativas y cómo reformularon la problemática.

Los FPM usaron la estrategia creada en la fase anterior y con ella analizaron las demás tareas de la prueba, confirmaron algunos presupuestos manifestados (e.g. la mayoría de los errores tiene origen en la herencia de la aritmética), con un “listado más real de los errores y las dificultades para diagnosticar estado cognitivo de los alumnos” (cfr. Anexo A11-FPM1-2).

En los resultados subyacen elementos que le dan argumentos a los FPM para planificar la instrucción de las temáticas. Para ello precisaron los errores y dificultades de aprendizaje que están asociados al eje temático objeto de la problemática, al mismo tiempo buscaron coherencia entre las competencias y los objetivos de la secuencia didáctica, e hilaron con las capacidades implicadas (Cfr. Anexo A11-FPM1-2).

La figura 8.5 esquematiza los focos temáticos establecidos por los FPM e involucrados en la secuencia didáctica planeada para dos grupos de 8vo, referida a una tarea expuesta por Lina y que daría continuidad en el ciclo reflexivo C3.1.

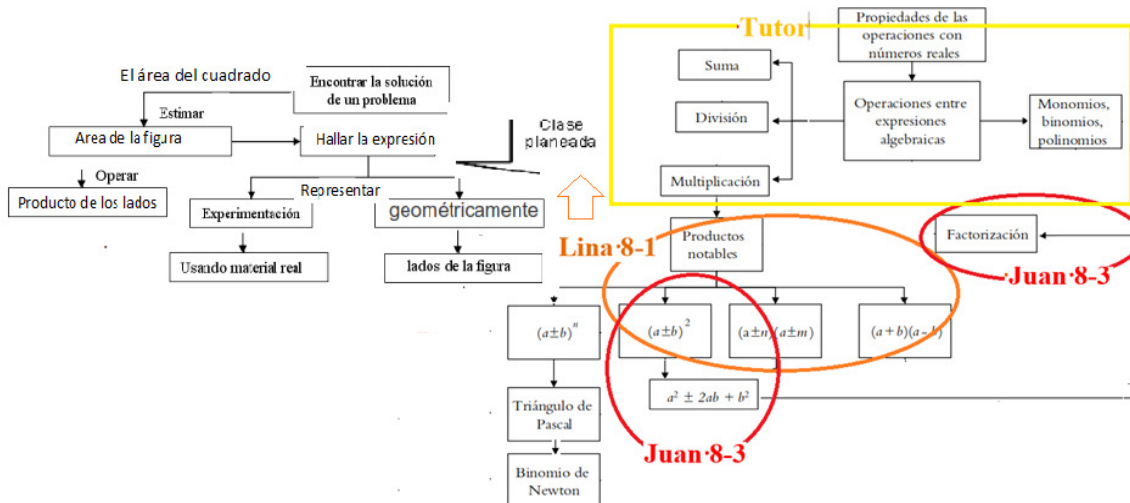
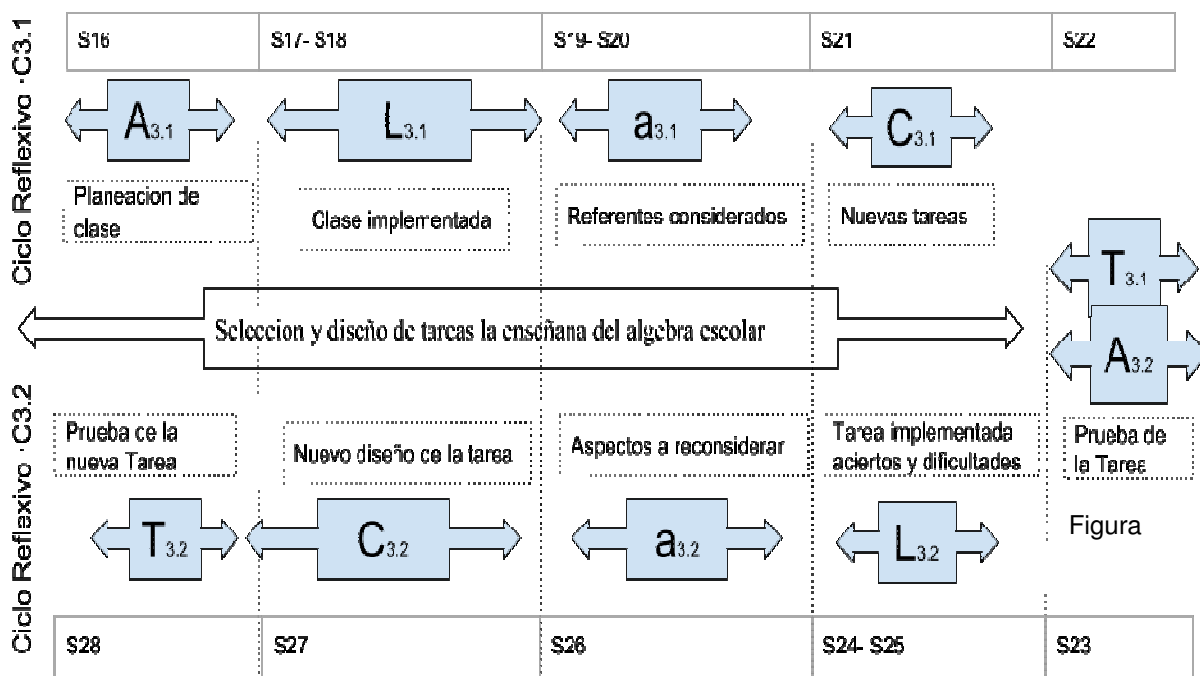


Figura 8.10. Alternativa para abordar problemática en Fase C2

La fase T2 se cerró con la reformulación de la pregunta, que no sufre transformaciones mayores: ¿Cómo abordar el sentido estructural con los alumnos en tareas que involucran la factorización de TCP y el trabajo con los binomios del tipo  $(a \pm b)^2$ ?

## Capítulo 9 Ciclo reflexivo C3: Reflexión sobre las tareas matemáticas para el aprendizaje del álgebra escolar

La reflexión en el ciclo reflexivo C3 tiene como reactivo las tareas matemáticas para la clase de álgebra, en coherencia con la problemática que vienen formulando los FPM, en términos del sentido estructural. El ciclo reflexivo C3 se cubrió en dos sub-ciclos reflexivos. En el primer sub-ciclo C3.1 (Figura 9.1 parte superior), los FPM planean e implementan una clase que aborda la temática en cuestión. En el segundo sub-ciclo C3.2 (Figura 9.1 parte inferior) los FPM rediseñan e implementan una nueva clase ajustando las tareas escolares.



9.1. Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo C3

### Parte uno: ciclo reflexivo C3.1

En el análisis del subciclo reflexivo C3.1 interpretamos las situaciones problemáticas que identifican y formulan los FPM a partir de la planeación y puesta en marcha de una clase para el plan de aula. Examinamos los ajustes que las tareas escolares sufren en su elección y diseño; nos centramos a lo largo del ciclo ALaCT en las variables de tarea, funciones y componentes que han sufrido cambio, producto de las acciones reflexivas.

## 9.1 Fase A3.1: Partir de la acción o experiencia.

Episodio [1]. Los FPM describen hechos o situaciones conflictivas que surgen de su práctica al planear una clase de álgebra que pondrá en marcha (fase A3.1 Figura 9.1). Ellos formularon cuestiones en torno a los propósitos y pertinencia de las tareas.

Se analizó la descripción de las situaciones que inquietan a Juan y Lina en relación con la instrucción del contenido algebraico. Para interpretar las características de la situación problematizada, se examinaron las cuestiones referidas al diseño de tareas y a la coherencia de estas con el propósito de la instrucción.

### 9.1.1 Describir el origen de la problemática.

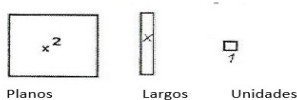
En el caso de Lina, observamos que percibe como dificultades del aprendizaje, una falta de conexión que aborda en la planeación de su clase. La Tabla 9.1 muestra un extracto de la descripción que Lina plantea de la problemática. La situación tiene origen en “la promoción de conexiones entre los procedimientos y las relaciones matemáticas” que define la expresión algebraica  $(a \pm b)^2$ . Para ella, “dichas conexiones están en relación directa con la comprensión”, que interpretamos que se refiere a la idea de comprensión algebraica de Kieran (1992) [S16. Ec.1. Líneas 7-12].

Tabla 9.1. *Situación problemática descrita por FPM1*

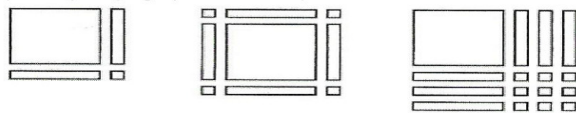
FPM1	...es necesario promover la conexión entre las relaciones matemáticas y los procedimientos, a través de actividades pertinentes...La meta que nos proponemos es abordar, desde la visión del sentido estructural, la clase de 8v0
P1	¿En qué te querías centrar?
FPM 1	En actividades que tengan en cuenta...la poca capacidad que tienen [As] para ver en profundidad (o comprender) los $(a \pm b)^2$ y por ende, las estructuras que se definen en sus transformaciones
P1	¿Qué querías concretamente?
FPM 1	...planear una clase que fuera diferente y motivara al estudiante a trabajar y participar. Basada en la conversión de lo gráfico a lo algebraico... para mostrar los binomios $(a \pm b)^2$ y explicar la extensión

Lina describió cuatro tareas para la planeación de su clase; analizamos en detalle las tareas en el Anexo A11-FPM1, examinando sus componentes y su función. Nos centramos en la tarea E1t1, con la cual Lina abordó la problemática (Figura 9.2). En la tarea E1t1, Lina dejó ver su confianza e interés para: “propiciar la percepción de  $(a+b)^2$  a través de la visualización de diferentes representaciones”; esperando con ello, “hacer más comprensible el tema” y “abordar el sentido de la estructura” [S16. Cg1. Líneas 19-21].

1. Observe con atención las figuras geométricas (fichas del puzle: planos, largos, unidades) y las expresiones algebraicas que definen el área de cada figura (notación), indicadas a continuación



2. Use las fichas para construir las siguientes figuras y describa cómo quedó constituida cada figura (nombre planos, largos y unidades usadas)



3. Use la notación de las fichas y escriba la expresión algebraica del área formada en una cada de las composiciones creadas
4. Observe con atención la forma (o estructura externa) de la expresión algebraica. ¿Qué puede decir al respecto?
5. ¿Qué puede decir de las relaciones involucradas en la estructura que usted escribió?

Figura 9.2. Tarea E1t1: seleccionada por FPM1 en Fase A3.1

La tarea E1t1 se ubicó en el contexto educativo, “acudiendo a la igualdad de cuadrados en función de la idea de áreas”. Aunque la formulación de E1t1 es general, se aprecia su aporte al objetivo: “deducir de manera geométrica las identidades notables que originan la extensión del binomio  $(a \pm b)^2$ ”. La tarea es un ejercicio cerrado, con instrucciones y datos que conducen a una estrategia de solución única (cfr. Anexo A11-FPM1).

Interpretamos que Lina usa el puzle como recurso para representar  $(a+b)^2$ , siguiendo su preocupación por las limitaciones del aprendizaje y por la necesidad de elegir tareas que den sentido a las expresiones, con lo que repercuten en la "conexión" que expresaba en la formulación de su problemática. Muestra su interés en la “deducción” de  $(a-b)^2$  sin detenerse en otros conceptos y en la confrontación con las dificultades del aprendizaje de este contenido.

En el caso de Juan, la problemática que identifica (Cfr. Tabla 9.2), describe dos fenómenos del ámbito didáctico que le inquietan, “el sentido estructural que dan los alumnos a las tareas de factorización” y las “dificultades del aprendizaje.” [S16. Cg.2. Líneas 22-23].

Tabla 9.2. Situación problema descrita por FPM2

FPM2 :	Mi afán está en la factorización de TCP, el sentido estructural que dan los jóvenes, preparar [As] para que tengan buen desempeño... y entiendan lo que hacen y por qué proceden así.
P:	Entiendo la expectativa, pero ¿Cuál es la situación problema?
FPM2	... se sienten inhábiles para dar sentido a los conceptos, no reconocen una estructura interna familiar, involucrada en la expresión dada. Me explico: $m^2+6m+9$ tiene la estructura interna de un binomio cuadrado, ósea $(m+3)^2$ . Entonces, encubren sus dificultades en rutinarias para lograr una respuesta. No logran ver cómo (o por qué) transformar la expresión [S16. Cg.2. Líneas 21-23].

Juan, ha identificado como foco de inquietud la factorización de TCP. Para esto, los alumnos deben reconocer la identidad notable involucrada en las expresiones algebraicas

de la forma TCP. Aludió a las dificultades de los escolares para “comprender la estructura interna de la expresión dada y reconocer en ella, una estructura familiar<sup>11</sup>”. Juan identifica la importancia de este hecho, para el sentido estructural. Interpretamos que se apoya en fundamentos estudiados en ciclos anteriores; es decir, en el primer descriptor del sentido estructural (Horch y Dreyfuss, 2006) [S16.Cg.2. Líneas 25-27].

En la figura 9.3 se muestra la tarea E2t1 que Juan creó para su clase. Se compone de cinco ejercicios y, al igual que las demás tareas de la planeación (Cfr. Anexo A11-FPM2), contiene una formulación instrumental, en contexto puramente matemático, dejando claras las instrucciones y los datos. Juan esperaba lograr la conexión de conceptos, usando algunas preguntas con las que obtener variadas estrategias de solución y su justificación.

PRUEBA	TALLER	LECTURA	EVALUACIÓN	GLOBAL	GUÍA TALLER
OBJETIVO: Identificar los conocimientos sobre simplificación de fracciones algebraicas.					
RECOMENDACIONES: Lea detenidamente y siga las instrucciones indicadas.					
VALORACION DE LA EVALUACION: VALORACION CADA PUNTO: 2.0 Vo.Bo. Jefe Area:					

1. Observe con atención las siguientes expresiones algebraicas. ¿Qué puede decir de ellas, de su forma?
  - o  $m^2 + m + m + 1$
  - o  $a^2 + 3a + 3a + 9$
  - o  $x^2 + (2)(4x) + 16$
2. Observe el segundo y tercer término de cada expresión ¿Qué puede decir de estos términos? ¿Qué relación guardan con el primer término? ¿Qué relación guardan con el cuarto?
3. Analizar la expresión  $x^2 + (2)(4x) + 16$ . Observe el tercer termino ¿Qué puede decir? ¿Qué relación guarda con el segundo y con el primero?

Figura 9.3 Tarea E2t1: diseñada por el FPM2 en la fase A3.1

La tarea E2t1, al tener instrucciones guiadas, pretende llegar a una solución determinada de antemano, consistente en “reconocer las relaciones entre los términos de la expresión” y su simplificación, para “ayudar a dar sentido a la estructura (interna) de dichas expresiones” [S16. Ai1 Líneas 32-35].

### 9.1.2 Formular la cuestión

En el caso de Lina identificamos que el planteamiento señala un déficit de sus escolares para comprender las estructuras que rigen los binomios de la forma  $(a \pm b)^2$ . Interpretamos que Lina espera encontrar una solución didáctica para abordar el sentido estructural en tareas que impliquen las transformaciones definidas en  $(a \pm b)^2$ . Lina formuló la siguiente cuestión:

<sup>11</sup> Estructura familiar: referida a los “casos de factorización” o fórmulas que indican cómo, dada la estructura externa específica del polinomio, se establece el procedimiento para expresarlo como producto de dos o más factores. En esta ocasión arrancan de las identidades notables basadas en cuadrados del binomio.

¿Qué tareas pueden conducir a la definición y tratamiento de los binomios cuadrados de la forma  $(a \pm b)^2$ ?

En el caso de Juan, el planteamiento tiene origen en las tareas que consideran las dificultades de aprendizaje descritas. Intuye la solución de la problemática en “acciones [tareas] para orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización”. En la formulación de la cuestión se identifica un déficit de actuación, que focaliza en “orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización” [S16. Cg.1 Líneas 42-46]. Su problemática queda formulada

¿Cómo involucrar a estudiantes en el sentido estructural que conlleva la factorización de TCP?

La Tabla 9.3 sintetiza el conocimiento profesional involucrado por los FPM en la Fase A3.1 al problematizar la práctica en términos de la planeación de una clase, obtenido a partir del análisis de las intervenciones y trabajos presentados durante esta fase (Anexo 11 FPM1 y FPM2).

Tabla 9.3 Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A3.1

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Sujetos:</b> niños de (13-14) años, del 8vo grado</p> <p><b>Objeto:</b> Cuadrado del binomio de forma <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Origen de la situación:</b> transformaciones (extensión) implicadas en el binomio <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Acción:</b> Actividades apropiadas para instrucción</p> <p><b>Déficit</b> del FPM se manifiesta en la necesidad de elegir actividades (tareas) para la clase.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Qué tareas pueden conducir a la definición y tratamiento de los binomios cuadrados de la forma <math>(a \pm b)^2</math>?</p> <p><b>Percepción de la solución:</b> Existe tareas adecuadas, que garantizan dar sentido al <math>(a \pm b)^2</math>, se requiere conocer</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprecia la relación de equivalencia de áreas rectangulares para dar sentido al cuadrado de un binomio</li> <li>• Reconoce necesario la deducción geométrica de las identidades notables resultado de la extensión de <math>(a \pm b)^2</math></li> <li>• Establece coherencia entre metas de las tareas y contenidos (ej. establece igualdades entre E.A).</li> <li>• Identifica limitaciones del aprendizaje y atiende a ellas para la selección de tareas.</li> <li>• Alude implícitamente a tres variables de tarea (contenido, complejidad y situaciones)</li> <li>• Establece la función y fases de secuencia de las tareas, acorde a un plan de clase del área</li> </ul>
JUAN	<p><b>Sujetos:</b> Jóvenes de 8<sup>vo</sup> grado (13-14) años</p> <p><b>Objeto:</b> Factorización de TCP</p> <p><b>Origen:</b> dificultad para reconocer una estructura familiar (identidad notable) en una expresión dada</p> <p><b>Acción:</b> orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización de TCP</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce dificultades asociadas a tratamiento y reconocimiento de la estructura interna de TCP.</li> <li>• Considera las relaciones conceptuales y procedimentales del contenido necesarias en la organización cognitiva de las tareas</li> <li>• Reconoce la simplificación de fracciones</li> </ul>



	<p><b>El déficit</b> del FPM está en la necesidad de actuación</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo involucrar a estudiantes en el sentido estructural que conlleva la factorización?</p> <p><b>Percepción de la solución:</b> Existen acciones para orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización</p>	<p>algebraicas como un contexto que dan sentido a la factorización</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Valora las dificultades asociadas a la conexión de procedimientos y relaciones como oportunidad para el diseño de tareas</li> <li>• Explicita las expectativas de aprendizaje involucradas en la tarea.</li> <li>• Alude implícitamente a las variables (complejidad y contenido).</li> </ul>
--	--	---

## 9.2 Fase L3.1: Mirar hacia atrás en la acción

En la primera parte del episodio [2], los FPM ponen en marcha las tareas planeadas y, posteriormente, reconstruyen la clase (Figura 9.1); para ello, preparan un esquema de lo ocurrido (usan videos/diarios), a fin de explicitar los fundamentos de sus acciones.

Analizamos la naturaleza de la problemática enunciada, a partir de la ruta (esquema) de la lección examinada por los FPM y de las respuestas a la pauta de indagación (§ 6.5). Interpretamos los fundamentos (o razones) que ofrecen para justificar la problemática.

### 9.2.1 Examinar y representar la naturaleza de la situación problema.

En el caso de Lina, ella examinó la ruta que siguió su lección (Figura 9.4) cuestionando su actuación, en relación con su propósito para “-hacer visible- de manera gráfica el binomio al cuadrado” y apreció la actuación de sus escolares ante la tarea E1t1.

Lina reconoció que “no se trata de estrategias chéveres o que le motiven”, la naturaleza del problema obedece a “la relación entre la estructura extendida y la factorizada que define la expresión  $(a \pm b)^2$ ”. Ella notó que para los alumnos, “estas dos cuestiones, son completamente independientes cuando se trabaja de forma mecánica” [S17. Ec2.1 L.9-16].

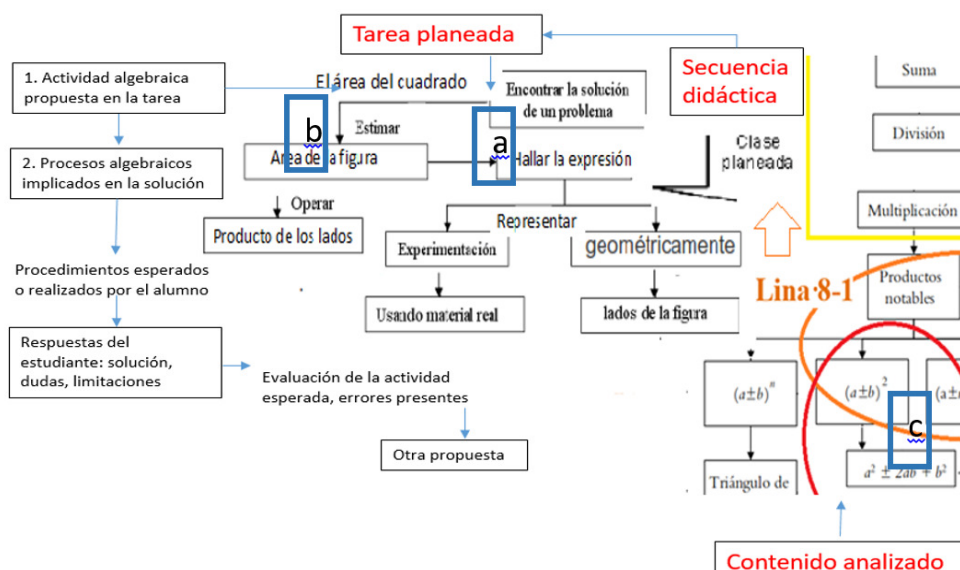


Figura 9.4 Ruta de la lección examinada por FPM1 en L3.1

En la figura 9.4 resaltamos precisiones que Lina evidenció, relativas al origen y naturaleza de la problemática durante el desarrollo de E1t1, entre ellas:

- En los intentos por “mostrar el uso y las características sintácticas de las representaciones simbólicas (convenciones “X”, “X<sup>2</sup>”, 1 en la tarea)”, Lina apresuró a los escolares para “crear la expresión que representa el área de los rectángulos” y, de manera inconsciente, “abandonó el significado del cuadrado del binomio”.
- Ante las variadas e inesperadas “interpretaciones que hacen [As] con la gráfica para mostrar la expresión algebraica”, Lina apreció que no había ofrecido a los escolares instrucciones precisas para conducir la abstracción de información de la figura.
- Examinando diversas estrategias que los escolares pueden abordar en “la composición de las áreas de rectángulos y cuadrados”, Lina consideró necesario, sobre la marcha, retomar el producto de un binomio de forma  $(x + a)(x + b)$ , que no había sido contemplado en la clase. (Anexo A12-FPM1).

En el caso de Juan, la Figura 9.5 resume los aspectos en los que se fijó para examinar su lección; se centró en su actuación y en los errores que cometen los escolares ante las acciones que implican dar sentido a la estructura de una expresión algebraica.

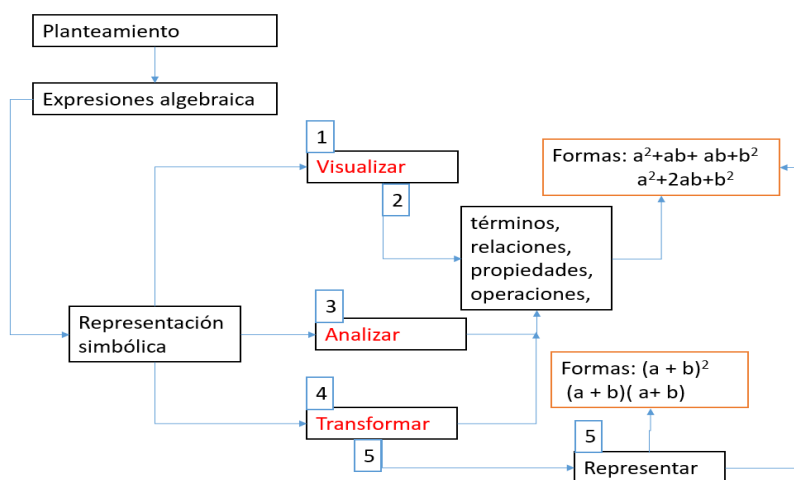


Figura 9.5. Ruta de la lección examinada por FPM2 en L3.1

Juan percibe una insistente demanda “de los jóvenes por el algoritmo a seguir”, e interpreta que “para conducir a la comprensión de la expresión algebraica” se requiere, en primera instancia, “alejarse del proceso algorítmico” (Figura 9.5 ítem 1 y 2) para visualizar y analizar la estructura (interna y externa) de la expresión algebraica. Por cuanto es necesario “considerar la expresión algebraica como un todo” (Figura 9.5), precisando en el significado dual del álgebra (objeto-proceso) [S17. Ec.1 L.18-26].

Juan en su informe aprecia un razonamiento interesante de uno de sus escolares, “no me esperaba algunas estrategias de solución – del alumno Varela -, acude a cálculos numéricos, para dotar de significado las expresiones y poder llegar a la solución”. Juan reconoció no tener “sesgo ante el cálculo numérico pero además, no haber pensado en el uso de estructuras aritméticas” (cfr. Anexo A12- FPM2).

Las precisiones que Juan y Lina logran al explicitar la realidad que ocurre en su lección, les permiten, como señala Flores (2007), distanciarse de sus presupuestos iniciales. Para confirmar esta apreciación consideramos pertinente examinar los aportes ofrecidos por los demás FPM, quienes comentan las tareas implementadas por Lina y Juan, resaltan la coherencia con los objetivos del aprendizaje, haciéndoles recomendaciones para precisar la noción de actividad algebraica (generacional y global) y las variables de tareas (situaciones y complejidad).

### 9.2.2 Verbalizar fundamentos del problema

Lina explicitó sus apreciaciones sobre la naturaleza de la problemática y su forma de concebir la instrucción del  $(a \pm b)^2$ . Juan por su parte, en el caso del alumno Varela no se

detuvo en la problemática, sino que interpretó tal incidente como una oportunidad para la instrucción. La Tabla 9.4 contiene algunas de estas ideas que sostienen los FPM.

Tabla 9.4 *Ideas y Concepciones de los FPM en relación con el objeto de la problemática*

<b>Ideas y Concepciones de Lina</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los errores en el aprendizaje algebraico se superan al interpretar correctamente los símbolos. (ej. equivalencia –asociado al símbolo igual; noción de valor indeterminado asociado a “X”).</li> <li>• Un modo para mostrar la equivalencia entre las transformaciones de <math>(a \pm b)^2</math> es usar las representaciones (ej. gráfico- geométrica).</li> <li>• Trabajando con objetos concretos (Puzle) se evita conducir al niño en la idea de reducción. (ej., obtener al otro lado del signo igual, un procedimiento).</li> </ul>
<b>Ideas y Concepciones de Juan</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Un contexto para dar sentido a la factorización está en las fracciones algebraicas (simplificación)</li> <li>• El cálculo aritmético y el uso de estructuras aritméticas pueden conducir a la comprensión semántica: TCP</li> </ul>

En la segunda parte del episodio [2] el equipo formador y demás FPM expresaron las creencias que, a su juicio, subyacen en las ideas verbalizadas por los FPM estudiados. Otros practicantes plantean interrogantes invitando a reconsiderar sus premisas, en relación a la problemática formulada.

Analizamos las preguntas y creencias que Juan y Lina han considerado e interpretamos las precisiones que han realizado para enfrentar sus ideas.

### 9.1.1 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática

La descripción de sus compañeros de algunas creencias de los FPM conduce a un mayor nivel de profundización en relación con la fundamentación de la problemática. La tabla 9.5 resume algunas premisas que Juan y Lina han examinado que les permitieron percibir de manera más objetiva sus propias ideas.

Tabla 9.5 *Creencias e interrogantes analizadas en L3.1 por los FPM*

<b>Creencia/interrogante examinados</b>	
<b>LINA</b>	<b>JUAN</b>
Cree indispensable re conceptualizar la igualdad para dar significado al uso de los símbolos en álgebra	¿Ha pensado en uso del cálculo aritmético para probar o reconocer patrones relacionales presentes en la estructura interna-TCP? (¿en el uso de la calculadora?)
Cree que usar los modos de representación del contenido, significa ilustrar la formulación de la tarea	Cree que reconocer una identidad notable en la estructura interna de una expresión algebraica dada, conduce al sentido estructural

Lina examinó la idea de “prestar atención al signo igual” al revisar las respuestas de los escolares, ya que presumía que la formulación de la tarea E1t1 “evitaba la interpretación asimétrica del signo igual” . Asimismo examinó “el uso de las representaciones” para introducir el contenido y aludió a la “limitada función ilustrativa de la representación” que ella utilizó en la tarea E1t1 [S18. Ec2/Cg2. Líneas 18-24].

Interpretamos que Lina avanza en la forma de concebir la problemática, en relación con las tareas matemáticas para la enseñanza del álgebra, hacia una visión más funcional de las matemáticas, tal como expresa la nueva formulación “¿Cómo involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas que representan el  $(a \pm b)^2$ ?” [S18. Ai.1. Líneas 28-34].

Juan percibió la visión relacional del cálculo aritmético en la comprensión de las estructuras internas de las expresiones. Consideró además necesario trabajar los TCP más allá de las actividades algebraicas de tipo transformacional (e.g. generalizar las expresiones algebraicas interpretando las relaciones que se definen en una expresión aritmética) y precisó necesario enunciar en estos términos la problemática referida al sentido estructural, para hacer uso de la estructura de forma correcta y eficiente [S18. Ec1 Líneas 34-41].

En síntesis, las ideas de los FPM transitaron en dos ámbitos. Por un lado, la importancia de la visión relacional (capturada desde la estructura aritmética) para generalizar e interpretar la estructura interna de una expresión algebraica dada. Por otro lado, el modo funcional de introducir los contenidos en la tarea. Los FPM reconocen que las tareas deberían plantear un reto al escolar, que lo lleve a usar conceptos en otros escenarios diferentes a los inicialmente aprendidos. En este sentido los FPM perciben y se hacen conscientes de sus propias formas de concebir los fundamentos que definen la problemática. A manera de síntesis la Tabla 9.6 resume el análisis del conocimiento implicado en la formulación de la problemática.

Tabla 9.6 *Síntesis de las dimensiones de análisis en la Fase L3.1*

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Origen de la situación:</b> representación y transformación del cuadrado de un binomio.</p> <p><b>Naturaleza de problema:</b> Dificultades [As] para relacionar la estructura extendida y la factorizada que define la expresión <math>(a \pm b)^2</math>.</p> <p><b>Acción:</b> uso de representaciones (simbólicas-gráficas y figurativas) para favorecer el significado de <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>El déficit:</b> Necesidad de actuación para conducir</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprecia las conexiones entre elementos de la estructura conceptual y las variables de tarea.</li> <li>• Otorga relevancia de las relaciones entre sistemas de representación (simbólico – gráfico-figurativo) para introducir el contenido matemático de la tarea.</li> <li>• Formula tareas contextualizadas en el ámbito matemático (geométrico).</li> <li>• Precisa capacidades involucradas en la</li> </ul>

	<p>a la comprensión de la transformación del <math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo involucrar a estudiantes en la resolución de problemas que representan <math>(a \pm b)^2</math>?”</p> <p><b>Percepción de la solución:</b> Existen diferentes dimensiones de la actividad algebraica que conducen el significado de <math>(a \pm b)^2</math>.</p>	<p>tarea para concretar la complejidad (conexión).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Advierte diferencias entre los modos funcional e instrumental para introducir el contenido en una tarea.</li> <li>• Precisa el uso de las representaciones en la formulación de las tareas.</li> </ul>
JUAN	<p><b>Origen:</b> Dificultades [As] reconocer una identidad notable en una expresión algebraica.</p> <p><b>Naturaleza:</b> Encasillamiento transformacional para el tratamiento de la factorización.</p> <p><b>Acción:</b> Promover el sentido para hacer uso de la estructura de forma correcta y eficiente.</p> <p><b>El déficit</b> del FPM: necesidad de actuación.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Qué implicación tiene la comprensión de la estructura interna de expresiones aritméticas en la promoción del sentido estructural?</p> <p><b>Percepción de la solución:</b> Existen orientaciones para conducir el sentido estructural.</p> <p><b>Se percibe un dilema</b> entre la actividad algebraica de tipo transformacional y la de tipo generacional.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce descriptores del sentido estructural de la teoría para atender en la instrucción.</li> <li>• Utiliza los errores y las dificultades del aprendizaje en formulación de las tareas.</li> <li>• Explicita algunas variables de tarea (complejidad, contenido).</li> <li>• Identifica la actividad algebraica implicada en la formulación de tareas.</li> <li>• Identifica el rol del algoritmo de equivalencia, orden y operaciones, en el significado de la factorización.</li> <li>• Reconoce en la simplificación de fracciones algebraicas un contexto que da sentido uso de la factorización.</li> <li>• Da organización cognitiva a la secuencia de tareas</li> </ul>

### 9.3 Fase a3.1: Conocimiento de puntos importantes o esenciales

Episodio [3]. Siguiendo la trayectoria formativa (Figura 9.1), en primer lugar se guía la confrontación y argumentación entre pares y, posteriormente, la retroalimentación con los formadores y el gran grupo, con el propósito de analizar los aspectos importantes de las tareas.

#### 9.3.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto del problema

Juan y Lina pusieron en común hechos relevantes de su lección y confrontaron sus perspectivas para abordar la enseñanza del  $(a+b)^2$ . La Figura 9.6 resalta los aspectos importantes considerados por los FPM en la solución de E1t1.

Solución de la tarea E1t1 por un estudiante de Lina	
<b>Demanda:</b> escribir la expresión algebraica del área de la figura (Cfr. Figura 9.1)	
<b>Solución:</b> expresa la medida de los lados y de las áreas <b>correctamente</b> .	
<b>Objeto discusión:</b> escribe la expresión solicitada y suma áreas correctamente, aunque <b>no construye el cuadrado esperado</b> .	
<b>Elementos esenciales</b> <b>Usa la representación</b> para escribir la expresión extendida de $(a+b)^2$ que define el TCP. <b>Reconoce y organiza los elementos figurativos</b> relacionados con la factorización del TCP <b>Crea una solución correcta, no esperada!</b>	
<b>Importante:</b> Es esencial considerar la idea del <b>cubrimiento de la superficie (rectangular)</b> <b>Usar las representaciones</b> para introducir el concepto de $(a+b)^2$ (transformación extendida y factorizada) <b>Involucrar la noción de equivalencia</b> para demostrar las identidades notables (valor de la medida del área) <b>Permitir que los alumnos descubran que no todas las expresiones polinómicas cuadráticas pueden ser factorizada a partir de su representación geométrica.</b>	

Figura 9.6 Confrontación entre pares FPM2 y FPM1

Para los FPM es relevante la “relación entre los sistemas de representación, aludiendo a la comprensión de las transformaciones sintácticas que se definen en  $(a \pm b)^2$ ”; resaltan la pertinencia de las “nociones área y superficie para conectar y dar sentido al teorema del factor y del residuo de la factorización –TCP–”. Con estas premisas, concretan elementos del rediseño de las tareas para atender prioritariamente, a la “equivalencia de las forma polinómica y factorizada resultado de las transformaciones de  $(a \pm b)^2$ ” [S19. Ec2/Cg2 Líneas 15-24].

Después de la puesta en común con asesores y tutores, los FPM coinciden en apreciar aspectos relevantes de los componentes de la tarea para conducir a posibles transformaciones: “la gestión de la enseñanza, la función de los sistemas de representación en el propósito de la tarea y la contextualización de la tarea” (Cfr. Anexo A13 FPM1-2).

Los FPM compararon sus posturas y llegaron a acuerdos, resaltando la intención de “abandonar el diseño de tareas con tendencia tradicional” basadas en el “manejo algorítmico y rutinario de ejercicios”. Percibimos que toman conciencia sobre el modo funcional de introducir el contenido, en tanto que reconocen “la importancia de las situaciones problema para abordar el contenido”. Otorgan relevancia a “los errores en la solución de tareas para retroalimentar conceptos e institucionalizar nuevos” [S19. Ai1 Líneas 29-31].

Al cierre de la fase a3.1 Juan y Lina evaluaron los elementos conceptuales del objeto del problema para la reformulación de las tareas, conectándolos con los componentes de las mismas. Los FPM tomaron consciencia de tres ámbitos importantes: a) el sistema de representación simbólico de  $(a \pm b)^2$  y su vinculación con la aritmética; b) la fenomenología del  $(a \pm b)^2$  y la conexión con la noción de equivalencia y c) la relación de los

campos procedimental y conceptual con el sentido estructural. (Anexo A13-FPM1-2). La Tabla 9.7 muestra un extracto de la conexión conceptual en el informe de síntesis posterior a la puesta en común.

Tabla 9.7 *Conexiones y síntesis conceptual resultado de la puesta en común*

<b>Síntesis</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Incluir las representaciones como meta en la tarea: favorecer la representación del concepto binomio cuadrado y la comprensión de las operaciones que se emplean para factorizar un trinomio cuadrático.</li> <li>• Involucrar tareas de autorregulación con expresiones numéricas y buscar la percepción de la estructura de TCP.</li> <li>• Prever la simplificación de fracciones algebraicas y la solución de ecuaciones cuadráticas para dar sentido a la factorización.</li> <li>• Aprovechar estructuras (internas y externas) de expresiones aritméticas para trabajar la noción estructural de equivalencia de las expresiones con el binomio cuadrado en el contexto de la resolución de problemas</li> </ul>
<b>Referentes y aspectos a consultar</b>
<p><b>Aspectos a profundizar</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Profundizar en tareas que promuevan habilidades para el reconocimiento de la estructura interna de una estructura familiar en su forma simple (identidad notable).</li> <li>• Consultar estudios sobre el sentido estructural, que traten la equivalencia de las identidades notables.</li> <li>• Buscar experiencias que involucren diferentes mediaciones y profundicen en la resolución de problemas.</li> </ul> <p><b>Referentes concretados y elegidos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Descriptores del sentido estructural explicitados en Vega-Castro (2012).</li> <li>• Características de la actividad algebraica (generacional, transformacional, global) en Kieran (2004).</li> <li>• Sugerencias para la enseñanza y tratamiento del álgebra propuestas por (Barreto, 2009).</li> </ul>

Lina y Juan ubicaron como punto de convergencia para afrontar la problemática (Figura 9.7) “la resolución de situaciones contextualizadas”. Ellos consideran los contextos de la geometría y la aritmética para concretar la temática, pero ven la necesidad de ubicar otros contextos más cercanos a los escolares (Cfr. Tabla 9.7). La formulación de la problemática se concreta en ¿Qué situaciones permiten dar sentido estructural a la expresión  $(a \pm b)^2$ ? Concretamente, para resolver tareas que impliquen la extensión y factorización.

La Figura 9.7 recoge el mapa de progreso de los conocimientos importantes involucrados en la definición del problema y que los FPM han ido resaltando para enfrentar el rediseño de tareas.



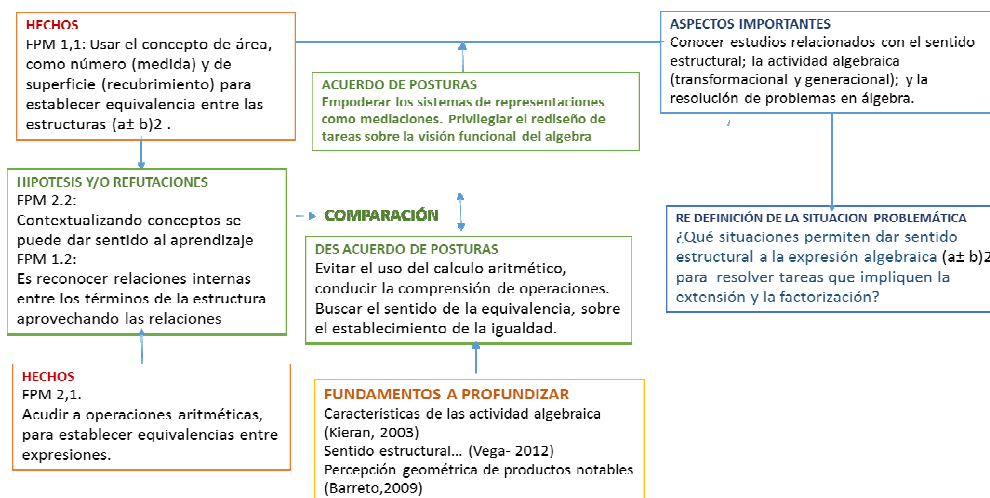


Figura 9.7. Mapa de proceso de las dimensiones de análisis en fase a3.1

## 9.4 Fase C3.1: Crear, buscar y preparar alternativas para la acción

Episodio [4]. Siguiendo el experimento (Figura 9.1), Lina y Juan, de forma consciente, presentan el nuevo diseño de la tarea para afrontar su problemática en una nueva lección.

A continuación interpretamos las decisiones y alternativas presentadas por los FPM sobre cómo abordar la problemática, que se concretó en el diseño de las nuevas tareas E1t2 y E2t2 y en consecuencia de los descubrimientos logrados en la fase anterior.

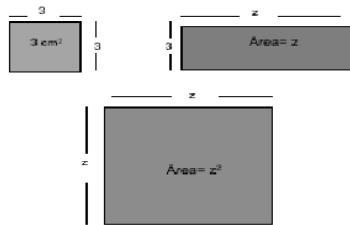
En el caso de Lina, destacó la pertinencia de la representación figurativa para ilustrar el contenido; en consecuencia, consideró nuevamente este recurso en el diseño de la tarea E1t2 (Figura 9.8), usando la representación gráfica (geométrica) para explicar la extensión del cuadrado del binomio” (Cfr. Figura 9.8 izquierda).

Lina diseñó la tarea E1t2 para el desarrollo de su enseñanza, esperaba que los escolares logran “Usar diferentes sistemas de representación para expresar el contenido”. Percibimos que la tarea E1t2 busca regular “errores y el dominio de conceptos y procedimientos del contenido”. Asimismo pretendía la autorregulación para a) la apropiación de conceptos previos (ej. traducción geométrica a simbólica, a partir de la notación del área de las figuras rectangulares); b) la construcción de nuevos conocimientos (ej. deducción de la forma estándar del trinomio ( $x^2 + bx + c$ )) y c) identificar la relación entre parámetros (a, b y c) (cfr. anexo A14-E1).

**Instrucciones**

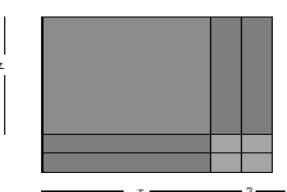
**Recursos:**

2 cuadrados de lado  $z$  ( $14 \times 14$  cm)  
 12 tiras (rectángulos) de lado  $z$  ( $14 \times 23$  cm)  
 16 cuadrados ( $3 \times 3$  cm)  
 Como se muestra en la figura 1



Para empezar:

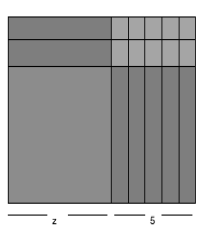
Como puedes ver, con las regletas que tenemos se pueden construir diferentes rectángulos, como el que aparece en la figura de abajo. El área de esta figura se puede expresar algebraicamente como:



$A = z^2 + 2z + 2z + 4$   
 $A = z^2 + 4z + 4$

**Consideremos lo siguiente.**

Con las regletas anteriores se ha representado gráficamente el área de un rectángulo (ver figura), cuya expresión algebraica del trinomio es:  $z^2 + 7z + 10$



**1. Trabajo individual**

¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base del rectángulo?

---

¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la altura de este rectángulo?

---

Si se sabe que el área del rectángulo es  $54 \text{ cm}^2$ .

Completa la ecuación que tienes que resolver para encontrar el valor de  $z$ , sin realizar medición alguna.

Ecuación: \_\_\_\_\_ = 54

¿Cuántos centímetros mide  $z$ ? \_\_\_\_\_

Figura 9.8. Tarea E1t2: parte 1: Rediseño por FPM1 en Fase a3.1

Para Lina era esencial el significado de las letras. Por tanto, la formulación de E1t2, se caracterizó por el uso de la letra  $Z$  para “permitir que los niños reconozcan que la literal no se restringe en el uso de la letra  $X$ ” y para “evitar la complejidad de la notación innecesaria y las técnicas específicas” [S21. Cg2 Líneas 25-33].

De cara a la definición del problema profesional, Lina decidió retomar las nociones de área y superficie, para deducir la equivalencia de las expresiones factorizada y polinómica de las identidades notables, que resultan de  $(a \pm b)^2$ , es decir, demostrar la equivalencia de sus estructuras internas. Para ello Lina incluyó la resolución de un problema, en el que necesitaba la expresión simbólica de las dimensiones de la figura y de su área (Cfr. Figura 9.8 derecha).

Interpretamos que Lina plantea un reto al estudiante al pedirle formular la ecuación para el cálculo del área. Esperaba que los estudiantes relacionaran la solución de la situación problema con la generalización de los factores para este tipo de expresiones (Figura 9.8). (cfr. Anexo A14-E1).

En el caso de Juan, el rediseño para afrontar el problema profesional dio origen a la tarea E2-t2, encaminada al objetivo “interpretar conceptualmente la factorización del TCP”. Al resolver la tarea E2t2, el alumno lograba “reconocer en la estructura interna de los TCP una estructura familiar –identidad notable-”. Interpretamos que Juan se inclinó por poner de

manifiesto la reversibilidad del producto de dos binomios, mostrando “la factorización de los TCP como proceso que se trata de deshacer la multiplicación” [S21. Ai1/Ec1 Líneas 41-47].

Juan diseñó E2-t2 como una sentencia de ejercicios, basados en el estudio de Vega-Castro (2012), involucrando las estrategias de “verificar equivalencias, completar expresiones conservando la estructura”. La alternativa para la nueva lección recurrió además al cálculo aritmético para reconocer patrones relacionales y generalizar la estructura de los TCP.

Juan apreció ventajas y desventajas de los componentes de la tarea, conocimientos involucrados y circunstancias de aplicación (cfr. Tabla 9.8). Destacó los retos que suponen al estudiante “reconocer la equivalencia de expresiones aritméticas con estructuras externas particulares e identificar las relaciones de dichas expresiones” [S21. Cg.1. Líneas 57-62].

Juan destacó “lo útil que resulta la factorización para resolver problemas de simplificación de fracciones algebraicas”. Interpretamos que con tal utilidad se refiere a que la factorización adquiere interés para la simplificación de fracciones algebraicas, es decir “su utilidad se centra en resolver un problema” (Douady,1986). En palabras de Vega-Castro (2012), se otorga sentido al usar dicho concepto en un contexto diferente al aprendido inicialmente.

La Tabla 9.8 sintetiza el conocimiento profesional involucrado durante la evolución en la definición de la problemática referida al sentido estructural.

Tabla 9.8. Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C3.1

Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
<p><b>Delimita el objeto de reflexión:</b> transformaciones de binomios cuadrados: extensión y factorización.</p> <p><b>Formula la problemática:</b> Uso de los diferentes sistemas de representación para comprender la estructura (interna y externa) de la expresión <math>(a \pm b)^2</math>.</p> <p><b>Reconoce la naturaleza del objeto problema</b> Comprensión de las relaciones matemáticas que se involucran en la estructura de la expresión algebraica.</p> <p><b>Considera como dilema:</b> Dualidad funcional e instrumental del álgebra para su instrucción.</p> <p><b>Ubica el origen de la problemática:</b> equivalencia entre las estructuras polinómica y factorizada que se define</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Define aspectos conceptuales relacionados con la factorización y los productos notables (teorema del residuo – factores primos – propiedades)</li> <li>• Reconoce las estructuras a las que pertenece un polinomio de orden dos (anillo con operaciones suma, producto) y características adjuntas.</li> <li>• Resalta la existencia de más de un descriptor para el sentido estructural.</li> <li>• Atribuye la comprensión conceptual de la factorización, al reconocimiento de una estructura interna familiar en su forma simple.</li> <li>• Involucra las dimensiones de la actividad algebraica en el diseño de tareas (ej., transformación, generalización).</li> <li>• Otorga importancia a la equivalencia entre sub-estructuras que definen el binomio cuadrado.</li> <li>• Alude a la reversibilidad de la multiplicación de binomios para definir el proceso de factorización de TCP.</li> <li>• Identifica el sentido que escolares dan al igual en diferentes casos.</li> <li>• Identifica la dualidad del álgebra en términos de proceso y objeto,</li> </ul>

<p>en la transformación de <math>(a \pm b)^2</math>.</p> <p><b>Reconoce una alternativa de actuación o solución</b> En el diseño de tareas para abordar el sentido estructural.</p>	<p>dándole un carácter de entidad.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce la importancia de comprender la estructura interna de una expresión aritmética particular, para conducir a la generalización de expresiones algebraicas con estructuras equivalentes.</li> <li>• Concibe el tratamiento simbólico a través del uso de CAS para promover el sentido estructural en la factorización.</li> <li>• Reconoce limitaciones del aprendizaje para el diseño de las tareas.</li> </ul>
---	--

### 9.5 Fase T3.1. Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo

Episodio [5]. En la S22 Juan y Lina se disponen a implementar las tareas E1t2 y E2t2 respectivamente, en una nueva clase. Abordando la problemática dan curso al ciclo C3.2.

Interpretamos las situaciones que describen los FPM durante el desarrollo de la nueva lección; examinamos los hechos en la primera fase A3.2 del siguiente ciclo.

Destacamos la disposición de los FPM para rediseñar e implementar una nueva lección y su responsabilidad para motivar a los escolares en el estudio de la factorización. Durante la misma mostrarán interés en la historia del álgebra, especialmente en “la notación de magnitudes indeterminadas y las variables en las expresiones algebraicas mediante letras”. Con lo anterior comprendemos la preocupación de los FPM por mostrar los usos y sentidos de la factorización [S22. Ec.1. Líneas 7-12].

## Parte dos: Ciclo reflexivo C3.2 Reflexión sobre las tareas

Los FPM en el subciclo reflexivo anterior C3.1, han reconocido que las realidades de la práctica van más allá de sus presupuestos iniciales. Lina y Juan, con base en este hecho, se motivan y ven la necesidad de mejorar los diseños de sus clases. En las diferentes fases del subciclo C3.2 (Figura 9.1: Parte inferior), los FPM asumen con actitud positiva y responsabilidad la reflexión sobre las tareas y su reformulación.

### 9.6 Fase A3.2: Partir de la acción o experiencia

Episodio [1]. Comenzó en la sesión S23 (Figura 9.1 Fase A3.2). Los FPM formularon situaciones problema observadas durante la implementación de la nueva tarea, formulada en la Fase T3.1 del ciclo anterior y finalizó con el planteamiento de cuestiones le causaban inquietud.

A continuación describimos las situaciones, interpretando el origen y las características de los incidentes identificados y las cuestiones que de allí resultan.

#### 9.6.1 Describir el origen de la situación problema

En el caso de Lina, la nueva tarea E1t2 sigue el plan de clase del curso, involucrando el estudio de las expresiones  $(a+b)^2$  y  $(x+a)x(x+b)$ , organizando la tarea en dos partes. Resaltamos en la figura 9.9, algunos incidentes que Lina describió como problemáticos durante el trabajo de escolares en la tarea E1t2.

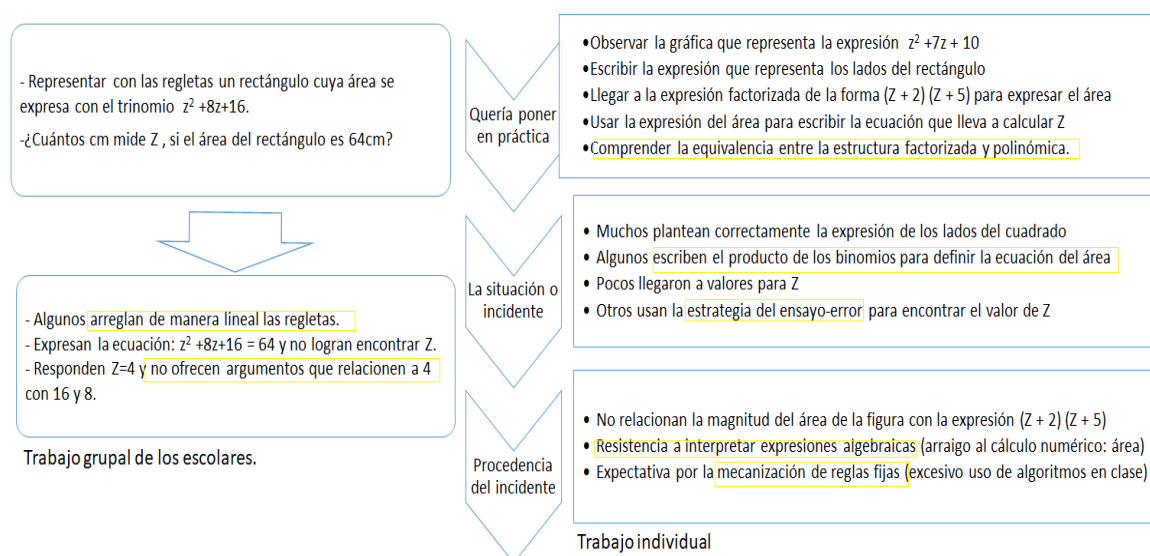


Figura 9.9. Situación problemática descrita por FPM1: Episodio de clase

Durante la explicación de la primera parte de la tarea E2t2, Lina identificó las “dificultades de muchos [As] para abstraer información de la gráfica”, al deducir la expresión  $z^2+4z+4$ . Indicando que “No fue suficiente indicar que las regletas representaban el área de un rectángulo”, vio la “necesidad de abordar la idea de cubrimiento de una superficie” y, con ello, “mostrar la noción de equivalencia entre las expresiones  $(z+2)x(z+2) = z^2 +4z+4$ ”. Durante el trabajo individual de los escolares, le llamó la atención “la frustración cuando no pueden llegar a la expresión factorizada”, implicando el abandono de la resolución. [S23. Ec.2. Líneas 6-13].

Interpretamos que Lina problematizó su práctica en dos ámbitos: El primero tiene una base curricular, en el que reconoce una tendencia tradicional, aludiendo “a la prioridad en el uso de algoritmos”. El segundo atiende a las expectativas de los escolares, aludiendo a “la frustración y resistencias ante las tareas”. Lina se centró en las dificultades para “relacionar la expresión del trinomio cuadrado en su forma polinómica y factorizada” y le inquieta que sus escolares “no logran comprender la equivalencia entre estas estructuras” [S23. Ec.2. Líneas 17-20].

En el caso de Juan fueron focos de atención de su clase la “disposición de los escolares” y la gestión de la tarea (E2t2). Juan identificó la “pertinencia de usar expresiones aritméticas con estructura externa equivalente al TCP”, pero manifestó su frustración por los “escasos razonamientos que exhiben los escolares”. La tabla 9.9 muestra un extracto de la intervención en la que Juan identificó la problemática durante su clase. [S23. Ec.2. Líneas 26-29]

Tabla 9.9. Situación problemática descrita por FPM2: Episodio de clase

FPM2:	Primer Caso: No se percatan del error. En la expresión $25 + (2)(3)(b) + b^2$ escribían que se trataba de un TCP. a) Algunos establecieron la equivalencia $(5+b)^2 = (5+b) (5+b)$ . Sin ningún raciocinio.
	Segundo Caso: Buscaban la equivalencia haciendo cálculos y no ofrecen argumentos. En la expresión $25+30+9y^2 = (5+3y)^2$ o en la expresión $25 + 9y^2+ (2)(15)y = (5+3y)(5+3y)$ a) No expresaban de manera general la relación entre 30 y los otros términos. b) No identificaban los términos que son cuadrado perfectos. c) No escribían los factores de 30 en términos de 3 y 5
P1:	Entonces ¿Cuál es la situación problema?
FPM2:	El desempeño del sentido estructural. Pocos jóvenes comprendían la estructura interna que define los TCP. Muchos eran hábiles al realizar productos notables, pero no identificaban las relaciones entre los términos que definen la expresión.

A Juan le llamó la atención “el trabajo de los escolares con el objeto y no con su significado”; describió las limitadas habilidades de los escolares para “reconocer estructuras algebraicas conocidas y usarlas al factorizar los TCP”. Con ello mostró su interés por observar algunos descriptores del sentido estructural. Interpretamos que Juan problematizó su práctica principalmente en el ámbito didáctico, en términos del desempeño escolar.

### 9.6.1 Formular la cuestión

Lina formuló la cuestión problemática en términos de los modos para introducir el contenido en la formulación de las tareas escolares, concretando su pregunta así:

¿Qué tipo de situaciones problema conducen a la interpretación y aplicación de los productos notables que resultan de  $(a \pm b)^2$ ?... ¿Cuáles son las [situaciones-problema] más convenientes?

La formulación se enfocó en los productos notables que resultan de  $(a \pm b)^2$ ,

concretando su duda sobre la pertinencia de las situaciones-problema. Interpretamos que el planteamiento conlleva implícitamente la necesidad de una elección y de criterios para determinar la pertinencia de la misma.

Juan, formuló la cuestión problemática como un déficit de desempeño de los escolares. Para tener éxito en la factorización, tienen que realizar razonamientos y habilidades algebraicas de manera eficientemente.

¿Cómo desempeñan el sentido estructural [As] en tareas que involucran la factorización de TCP?

La tabla 9.10 sintetiza el análisis de las dimensiones en la fase A3.2, siguiendo la interpretación realizada.

Tabla 9.10. *Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A3.2*

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<b>Objeto:</b> Productos notables que resultan	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica dificultades asociadas a la equivalencia entre expresiones.</li> </ul>

<p><math>(a \pm b)^2</math></p> <p><b>Origen:</b> Relacionar la expresión del trinomio cuadrado en su forma polinómica y factorizada.</p> <p><b>Naturaleza</b> Equivalencia entre las estructuras.</p> <p><b>Acción:</b> Elegir Situaciones problema para conducir la enseñanza del contenido.</p> <p><b>Déficit:</b> [FPM1] Conocer los tipos de Situaciones problemas.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Qué tipo de situaciones problema conducen a la interpretación y aplicación de los productos notables que resultan de</p> <p><math>(a \pm b)^2?</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Percibe las situaciones problemáticas como una forma de introducir el contenido.</li> <li>• Destaca la necesidad de situaciones y contextos para dar sentido al <math>(a \pm b)^2</math>.</li> <li>• Percibe relevante en la deducción de <math>(a \pm b)^2</math> la relación entre los sistemas de representación.</li> </ul>
<p>JUAN</p> <p><b>Objeto:</b> Factorización de TCP.</p> <p><b>Origen:</b> reconocimiento de la estructura interna del TCP, en una expresión dada.</p> <p><b>Acción:</b> Identificar el desempeño del sentido estructural de los escolares.</p> <p><b>Déficit</b> Conocer habilidades y limitaciones de los escolares al factorizar.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo desempeñan el sentido estructural [As] en tareas que involucran la factorización de TCP?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica errores que caracterizan el tratamiento de expresiones numéricas y algebraicas con estructuras idénticas.</li> <li>• Advierte la pertinencia de abandonar el cálculo para superar el obstáculo en el tránsito de la aritmética al álgebra.</li> <li>• Destaca el reconocimiento de la estructura interna de un TCP como elemento que describe el sentido estructural en un primer nivel.</li> </ul>

## 9.7 Fase L3.2: Mirar hacia atrás en la acción

En la primera parte del episodio [2], los FPM reconstruyen la clase (videos) y examinan las producciones de sus escolares al trabajar la tarea E1t2, explicitando sus fundamentos y justificando las situaciones.

Analizamos la naturaleza de la problemática enunciada a partir de los aspectos la lección examinada por los FPM y de las respuestas a la pauta de indagación (§ 6.5). Interpretamos los fundamentos (o razones) que ofrecen para justificar la problemática.

### 9.7.1 Examinar y representar la naturaleza de la situación problema



Lina, en la formulación de la tarea, valoró la relación de “las representaciones (manipulativa, y grafica) con las subestructuras del producto notable  $(a\pm b)^2$ ”, pero aprecia

que el contexto de las áreas rectangulares “no para todos los niños, es un estímulo que facilite su aprendizaje” y en tal caso, “puede aumentar las dificultades del aprendizaje”. Lina precisó esta consideración con el ejemplo del cuadrado de la diferencia. [S24. Cg.2. Líneas 11-15].

Lina se percató de su “marcada tendencia por la instrucción de secuencias”. En su lección dio prioridad a “la conducción de la solución de la tarea en términos instructivos”. Interpretamos que Lina valoró la función que cumplió la tarea E1t2, aludiendo que pocos alumnos se apropiaron de manera autónoma de la equivalencia de  $[(z+2)(z+2) = (z^2+4z+4)]$  valiéndose de la representación gráfica. De esta forma le surgió la necesidad de precisar lo que significa para el estudiante comprender la equivalencia entre las estructuras polinómica y factorizada de  $(a\pm b)^2$ , dado que “los estudiantes construyen estructuras equivalentes a las

expresiones dadas, sin comprender su significado”. Interpretamos que para Lina, este fenómeno es una característica relevante de la problemática [S24. Cg2 Líneas 17-21].

Juan examinó las respuestas de los escolares, notó que algunos jóvenes identifican cada objeto particular de la expresión (aritmética) con los objetos generales de la fórmula (Figura 9.10 a y b). Sin embargo se pregunta si el escolar “¿distingue el cuadrado perfecto y lo factoriza, o su respuesta se basa en el trabajo de los términos extremos?”. Esta duda le surge al examinar los “errores del mismo joven, cuando debe establecer relaciones entre los términos del TCP” (Figura 9.10 d y e). Conjetura que se trata de un problema de naturaleza algebraica y cognitiva, al apreciar que el alumno debe conocer la identidad e identificar cada objeto particular de la estructura con los objetos generales de la regla a usar [S24. Cg1 Líneas 29-37].

Algunas respuesta interesantes de los chicos:

- a) la expresión  $(100)2 + (2) (100) b + b^2$  **es equivalente** a la expresión  $(100 + b)(100+b)$ .
- b) la expresión  $4x^2 - 12x + 9$  **es equivalente** con  $(2x - 3)^2$
- c)  $4x^2 - 12x + 9$  **es equivalente** con  $2x^2 - 6x - 6x + 9$
- d)  $4x^2 - 12x + 9$  **no es equivalente** con  $2x(2x - 3) - 3(2x - 3)$
- e) la expresión  $36a^2 + 12ab + b^2$  y, la expresión  $(b + 6a)(6a + b)$  **no son equivalentes**, el orden de los términos internos altera el significado, pero en número si da igual (asigna valores a la letra b y a)

Figura 9.10. Fundamentos del objeto de la problemática – Tarea E2t2

Para Juan es pertinente usar expresiones aritméticas con estructuras semejantes a las estructuras algebraicas generales del TCP. Estimó necesario a tal fin, promover procesos reiterativos de relación entre dicha representaciones (simbólica y numérica).

Juan precisó que “la expresión aritmética debe ser usada en dos vías: para conducir al análisis estructural y al análisis operatorio”; Justificó esta apreciación aludiendo a “los eficientes cálculos usados por jóvenes y los argumentos equivocados aportados al demostrar la equivalencia entre expresiones” [S24. Ec1 Líneas 41-46].

### 9.7.2 Verbalizar fundamentos de la problemática

Lina y Juan examinaron la tarea puesta en marcha y se detuvieron en el propósito en relación con la problemática planteada. Se percataron de otros aspectos que caracterizan la problemática, tales como las limitaciones del aprendizaje (ej. reconocer la equivalencia entre expresiones algebraicas), la gestión del contenido y la comunicación (ej. dar significado a la variable como número generalizado) y se plantean involucrar situaciones para dar sentido al concepto (Cfr. Anexo A15-FPM1-2).

Los FPM recibieron realimentación y revisaron, en la formulación de la tarea, el modo de incluir el contenido y el uso de los sistemas de representación. Examinaron las tareas para estudiar su coherencia y complejidad. Lina se plantea sobre la contribución de la tarea al logro de las expectativas de aprendizaje. Juan estimó necesario continuar con sentencias para descubrir y probar generalizaciones a partir de expresiones aritméticas, las cuales contribuyen a la superación de dificultades. [S25. Ai1 Líneas 21-26].

### 9.7.3 Identificar concepciones y creencias sobre la problemática

Lina concibe que la naturaleza de la problemática se centra en el uso del concepto cuadrado del binomio. Reconoce el sentido del aprendizaje en la resolución de problemas,

sin dejar de lado la contribución del sentido estructural. La tabla 9.11, muestra las creencias examinadas por Lina y aquellas premisas que le surgen, de cara al rediseño de tareas.

Tabla 9.11. *Concepciones sobre la naturaleza del problema – FPM1: Fase L3.2*

FPM	Creencias expresadas por el Grupo	Interrogantes que le surgen a Lina
	Usted... cree que...	
FPM 5	¿Promover el sentido estructural da sentido al concepto del cuadrado, es igual?	Aclarar: sentido conceptual del cuadrado de un binomio y el sentido estructural del mismo.
P1	Demostrar geoméricamente el cuadrado de un binomio da sentido a este concepto.	Precisar en las tareas: la resolución de problemas que impliquen aplicar el concepto del $(a\pm b)^2$ .
FPM 7	¿El contexto geométrico es familiar para el estudiante?	¿Qué contextos y situaciones dan sentido a $(a\pm b)^2$ ?

Lina, tras examinar las creencias que le asignaron sus compañeros (Tabla 9.11), distingue entre “sentido conceptual y el sentido estructural”, el primero “referido al significado del concepto de  $(a\pm b)^2$ , sus aplicaciones y situaciones”, y el segundo al “sentido

estructural propiamente dicho, al tratar la expresión  $(a\pm b)^2$ ” [S25. Ec3 Líneas 37-41].

En el caso de Juan, tras examinar nuevamente su lección y las creencias explicitadas, precisó la naturaleza del problema (Figuran 9.11), aludiendo al “significado que dan [As] al uso de las técnicas en la factorización”. Con este fin se detuvo en examinar el propósito de la tarea.

¿El propósito de la tarea contribuye a...?

- Percibir la expresión como unidad (objeto TCP).
- Reconocer en la expresión dada; la estructura interna de una expresión familiar más simple ( $SS_1$  y afinando la idea de proceso)
- Valorar técnicas para establecer la equivalencia entre las expresiones.
- Usar eficiente y correctamente técnicas y operaciones algebraicas al factorizar ( $SS_3$  Sentido estructural)
- Hallar generalizaciones a partir de situaciones particulares
- Retar y motivar en el desempeño del sentido estructural.

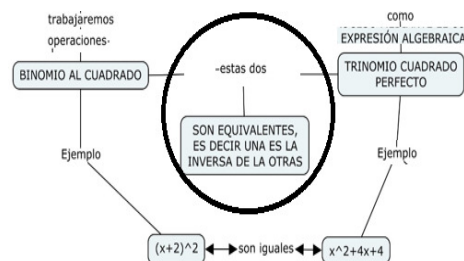


Figura 9.11 Concepciones sobre la naturaleza del problema FPM2: Fase L3.2

Juan logró ver que “el problema depende por lo menos parcialmente de las tareas”, aclarando que estas, “deben tener propósitos claros, es decir, contribuir al aprendizaje del contenido”. Reconoció necesario trascender la reproducción de los algoritmos. Conscientemente aboga por la “comprensión de la dualidad objeto-proceso involucrada en definición de las expresiones algebraicas” (Figura 9.11 izquierda). Manifestó su interés por dicho propósito y concretó la cuestión: ¿Cómo manifiestan el sentido estructural los escolares en tareas que involucran factorizar TCP? [S25. Ai1 Líneas 47-51].

Interpretamos que Juan y Lina tomaron distancia de sus ideas previas y precisaron sus concepciones respecto a la naturaleza dual (objeto-proceso) de la actividad algebraica, considerando que “estas ideas son complementarias y necesarias para el desempeño del sentido estructural”. Interpretamos que los FPM asientan sus ideas en la dualidad involucrada en una misma noción algebraica: estática -como un todo- y dinámica – operacional- propuestas por Kieran (1992). Reconstruir su lección y examinar sus creencias les ha permitido a Juan y Lina considerar y tomar distancia de las ideas que inicialmente intervenían en la problemática. La tabla 9.12 sintetiza el análisis de la Fase L3.2.

Tabla 9.12. Síntesis de las dimensiones de análisis en fase L3.2

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Objeto:</b> Productos notables de la forma <math>(a\pm b)^2</math>.</p> <p><b>Origen:</b> Usos y situaciones que dan sentido al concepto de <math>(a\pm b)^2</math>.</p> <p><b>Acción:</b> Conducir la resolución de problemas que involucren aplicar el</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Precisa la relación entre los sistemas de representación y las subestructuras que define el <math>(a\pm b)^2</math> para dar significado a las equivalencias sintácticas.</li> <li>• Percibe el concepto <math>(a\pm b)^2</math> ligado a un contexto numérico, procurando significar la variable como número generalizado.</li> </ul>

	<p>concepto <math>(a\pm b)^2</math></p> <p><b>Dilema:</b> Importancia del sentido estructural</p> <p>y del sentido del concepto <math>(a\pm b)^2</math> al transformarla.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Qué contextos y situaciones problemas otorgan sentido al aprendizaje del concepto <math>(a\pm b)^2</math>?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alude a la concepción del álgebra desde la solución de problemas.</li> <li>• Considera reformular la tarea acorde al aporte a los objetivos.</li> </ul>
<p>JUAN</p>	<p><b>Objeto:</b> Aprendizaje: factorización del TCP</p> <p><b>Origen:</b> Dualidad conceptual-procedimental involucrada en la noción factorización.</p> <p><b>Acción:</b> permitir el desempeño del sentido estructural a través de tareas algebraicas.</p> <p><b>El déficit:</b> De escolares para reconocer la dualidad objeto-proceso en la factorización.</p> <p><b>Cuestión:</b> ¿Cómo manifiestan el sentido estructural los escolares al factorizar un TCP?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprecia la concepción estructural (objeto) y procedimental (proceso) para significar una misma expresión algebraica –TCP-.</li> <li>• Percibe la relación entre el propósito del PPD y la formulación de las tareas.</li> <li>• Alude a la concepción estructural del álgebra como aritmética generalizada.</li> <li>• Precisa la demanda cognitiva de la tarea para el desempeño del sentido estructural.</li> <li>• Estima aporte de tareas a las dificultades.</li> </ul>

## 9.8 Fase a3.2: Conocimiento de puntos importantes o esenciales

Episodio [3]. Siguiendo el experimento (Figura 9.1 fase a3.2), los FPM argumentaron y confrontaron los elementos relevantes en la reformulación de la tarea.

Analizamos los conceptos esenciales que los FPM analizar y acuerdan, interpretamos aquellos significados en los que deciden profundizar.

### 9.8.1 Confrontar y reconocer los conceptos objeto del problema

En la puesta en común, Juan y Lina consideraron “importante detenerse en el sentido del aprendizaje algebraico”. La discusión discurrió en torno a la idea de ejercitación de un algoritmo, pues para ellos fue importante dar sentido a la aplicación de un concepto, ya sea en las mismas matemáticas o en otros contextos. (Anexo A13 FPM1).

Lina resaltó su disposición para “trascender del mero uso de los algoritmos”, se inclinó por construir el contenido usando los conocimientos previos de los escolares (ej. áreas rectangulares). Para Lina el contexto geométrico favorece evidenciar conceptos que en la matemática formal no son tangibles [S26. Ec1 Líneas 08-11].

Juan confronta las ideas de Lina relativas a la percepción, manifestando que no todos los conceptos algebraicos son visuales de manera evidente, advierte la instrumentalización en la que se puede caer cuando se usan como un fin las representaciones (geométricas manipulativas tecnológicas) y no como una estrategia (Anexo A14-2).

Juan se inclinó por la concepción del álgebra como “aprendizaje de las estructuras y como aritmética generalizada”. Apreciamos su responsabilidad para atender las dificultades asociadas a la abstracción algebraica. Destacamos su disposición para conducir a los escolares en la autorregulación del conocimiento previo en relación con la generalización de nuevos. Resaltamos la toma de consciencia sobre la pertinencia de promover la actividad algebraica de meta-nivel. Interpretamos la intención de Juan de alejarse del enfoque instrumentalista presente en el plan del aula de su clase, proponiendo el reconocimiento de las similitudes entre objetos y métodos [S26. Ai1/Ec3 Líneas 19-26].

Aunque reconocen que “la visión tradicional del aprendizaje algebraico puede ser válida”, sin embargo se reafirman en sus intenciones y como mostraron disposición a reformular las tareas para que atiendan a la naturaleza de la problemática. Para esto crearon una nueva tarea E1t3, siguiendo sus presupuestos (Figura 9.12)

**Consigna.** Con las siguientes figuras (Fig. A, Fig. B y Fig. C) se pueden formar cuadrados cada vez más grandes, ver por ejemplo el cuadrado 1, el cuadrado 2 y el cuadrado 3. Con base en esta información completen la tabla que aparece enseguida.

Núm. de cuadrado	Medida de un lado	Escribir la expresión que representa el producto de los lados del cuadrado	Escribir la expresión algebraica anterior como una potencia	Escribir la expresión algebraica al resolver el producto de los lados
1	$x + 1$	$(x+1)(x+1)$	$(x+1)^2$	$x^2+x+x+1 = x^2+2x+1$
2	$x+2$			
3				
4				
5				
6				
A	$x + a$	$(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$		

Para calcular el área de cada cuadrado, en todos los casos se elevó al cuadrado una suma de dos números y en todos los casos el resultado final, después de simplificar términos semejantes, son tres términos. ¿Cómo se obtienen esos tres términos sin hacer la multiplicación? \_\_\_\_\_

Figura 9.12. Aspectos importantes: Nueva tarea E1t3

En la puesta en común con expertos, Lina y Juan analizaron la pertinencia de la tarea en relación con sus problemáticas y consideraron aspectos importantes en “las componentes de la tarea” (Figura 2a y 2b). Los FPM reconocieron pertinente evaluar los recursos (Tecnológicos) que se incluyen en E1t3, contemplaron importante hacer que las

situaciones puedan ser familiares a los escolares, a tal fin valoraron el tipo de tarea, dando protagonismo a “la solución de problemas”. Además acordaron profundizar en los descriptores del sentido estructural para incluirlos en la formulación.

Finalmente resaltaron la “pertinencia de las representaciones usadas (simbólica y grafica) en la formulación” y consideraron adecuada la demanda cognitiva de la tarea. Los FPM tomaron consciencia de que la tarea se dirigía a la “percepción de patrones relacionales (equivalencias) y su generalización en una estructura familiar”. Mostraron disposición para contrastar sus fundamentos con los principios de un externo (tutor). En consecuencia van tomando consciencia de la importancia de dar sentido al problema, llevándoles a considerar las cuestiones de forma más precisa y responsable que las cuestiones iniciales (por ejemplo, pasar de "cómo conducir el aprendizaje..." a "¿Por qué y para qué aprender el cuadrado del binomio de forma  $(a\pm b)^2$ ?").

Para Juan dicho problema también depende parcialmente del sentido que tiene aprender las transformaciones sintácticas implicadas en las expresiones algebraicas, resaltando además las habilidades para percibir las identidades notables y anticipar las transformaciones que son apropiadas y eficientes al factorizar [S26. Ai1/Ec1 Líneas 27-31].

De este modo toma mayor consciencia de las tareas que le permiten abordar la problemática del sentido estructural. Para Juan “se puede dar sentido a la factorización desde la actividad de tipo transformacional en el contexto de las matemáticas y de otras ciencias”, lo cual requiere de “la comprensión y uso de las estructuras algebraicas”. Se plantea la cuestión ¿Qué sentido tiene aprender las transformaciones e identidades? [S26. Ai1/Ec3 Líneas 34-37]. La Tabla 9.13 resume los conocimientos y la evolución que ha tenido la reformulación de las tareas escolares para abordar el problema referido al sentido estructural.

Tabla 9.13. *Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase a3.2*

Caso	Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<p><b>Objeto:</b> Productos notables de la forma <math>(a\pm b)^2</math>.</p> <p><b>Origen:</b> Usos y situaciones que dan sentido</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Precisa elementos de la fenomenología del contenido.</li> <li>• Identifica niveles de las demandas cognitivas en las tareas.</li> <li>• Aprecia el modo funcional de introducir el contenido algebraico.</li> </ul>

	<p>al concepto de <math>(a\pm b)^2</math>.</p> <p><b>Acción:</b> Conducir la resolución de problemas que involucren aplicar el concepto <math>(a\pm b)^2</math>.</p> <p><b>Dilema:</b> Importancia del aprendizaje del álgebra.  <b>Cuestión:</b> ¿Por qué y para que aprender el concepto <math>(a\pm b)^2</math>?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alude a la concepción del álgebra desde la solución de problemas.</li> <li>• Considera la organización cognitiva de los contenidos.</li> </ul>
JUAN	<p><b>Objeto:</b> Aprendizaje: Factorización del TCP.  <b>Origen:</b> Dualidad habilidad y sentido de las reglas de factorización.  <b>Acción:</b> Observar el sentido estructural.  <b>El déficit:</b> Reconocer el sentido y uso de las entidades notables en la factorización.  <b>Cuestión:</b> ¿Qué sentido tiene aprender las transformaciones e identidades notables?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprecia la concepción del álgebra como aritmética generalizada.</li> <li>• Advierte la generalización de patrones relacionales como una actividad algebraica de tipo global.</li> <li>• Aprecia en simplificación de las fracciones algebraicas contextos que dan sentido a la factorización del TCP</li> </ul>

## 9.9 Fase C3.2: Crear buscar y preparar alternativas de actuación

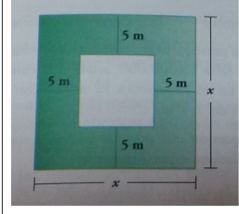
Episodio [4]. En la sesión S27 los FPM, de forma consciente, exponen la alternativa para afrontar la problemática y delimitan la estrategia de acción para la gestión de la tarea.

Analizamos las decisiones adoptadas sobre las tareas para abordar el objeto, y la naturaleza la problemática definida.

Para atender esta alternativa diseñaron nuevas tareas que aparecen a continuación. La figura 9.13 ejemplifica la tarea E1t4 analizada y seleccionada por Lina, quien procuró involucrar contextos y situaciones que den sentido al cuadrado del binomio, a la factorización de las expresiones cuadráticas y, a las equivalencias implicadas.



Consigna: Una capilla de forma cuadrada, esta construida en el centro de un terreno de forma cuadrada de lado  $x$ , y esta rodeada por una terraza de 5m de ancho.



¿Cómo se puede escribir la expresión que representa el área A de la terraza?  
A= \_\_\_\_\_

¿Es correcto decir: El área A de la terraza se representa con la expresión algebraica  $10(2X-10)$  ?

¿Existe otra expresión algebraica que represente el área de la terraza?

¿Cómo le explicarías con tus palabras al jardinero, la forma de calcular el área de la terraza que requiere adoquinar?

Figura 9.13. Alternativa para abordar la situación: Tarea E1t4

Juan diseñó la tarea E2t4, precisó las habilidades encaminadas a apreciar la estructura de las expresiones algebraicas, en las tareas que piden factorizar para establecer la equivalencia entre expresiones algebraicas inclinándose por trabajar con expresiones más complejas que involucran subestructuras. La intención de las mismas es identificar la estructura como un todo y reconocer en ella posibles conexiones y transformaciones (Anexo E2t4). La Tabla 9.14 resume los conocimientos involucrados en la reformulación de las tareas para abordar la problemática. [S26. Ai1/Ec3 Líneas 17-25].

Tabla 9.14. Síntesis de las dimensiones de análisis en Fase C3.2

Formulación de la problemática	Conocimiento profesional
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Delimita el objeto a la equivalencia entre expresiones algebraicas.</li> <li>• Formula la problemática: en el sentido que tiene aprender <math>(a \pm b)^2</math></li> <li>• Considera como dilema la concepción instrumental y funcional del aprendizaje algebraico.</li> <li>• Ubica el origen de la problemática en el sentido que pueden otorgar los contextos y las situaciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resalta estrategias y resultados de la factorización para establecer la equivalencia de expresiones algebraicas.</li> <li>• Considera expresiones con términos que involucran sub estructuras</li> <li>• Otorga importancia a la estructura algebraica como objeto, al demandar en la tarea identificar la expresión algebraica como un todo.</li> <li>• Resalta la estructura interna al demandar en la tarea establecer las conexiones y transformaciones posibles para dar solución.</li> <li>• Distingue en el currículo recomendado, el enfoque instrumental del álgebra y sin marcar postura radical reconoce su oportunidad.</li> <li>• Conecta las componentes de las tareas con el propósito de formulación y en coherencia con la problemática definida.</li> </ul>

### 9.10 Fase T3.2: Comprobar en una nueva situación: Nuevo ciclo

En el episodio [5] los FPM implementan las nuevas tareas en clase y se disponen a identificar los efectos de las mismas, dando inicio a un nuevo ciclo.

La descripción de la lección es objeto de un nuevo análisis, centrándose en las situaciones de clase, lo que les lleva a considerar pertinente examinar las problemáticas que surgen al poner en marcha las nuevas tareas.

En la descripción proporcionada para la nueva clase subyacen “situaciones asociadas al aprovechamiento de los escolares y a las dificultades superadas”. La problemática tiene origen en “el aprendizaje de los escolares”. Los hechos de la clase que informaron los FPM, dejan ver las decisiones que requirieron tomar sobre la marcha. Los FPM aprovecharon los instrumentos ofrecidos en su módulo formativo para la gestión de la lección. La Figura 9.14, recopila la estrategia puesta en marcha en clase, para mitigar las dificultades relacionadas con la abstracción algebraica en la solución de la tarea (E1t4).

<p>Estrategia de indagación puesta en marcha para la gestión de la tarea E1t4</p> <p>¿De qué otra forma se puede esquematizar la situación y las variables indicadas?                  ¿Cómo se puede expresar la magnitud de un lado del terreno completo?                  ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del terreno completo?                  ¿Cómo se puede expresar la magnitud de un lado de la capilla? (En función de los lados del terreno completo)                  ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la capilla?                  ¿La expresión <math>10x^2 - (x-10)^2</math> representa el área de la terraza? ¿Qué justifica su respuesta?                  ¿Qué puede decir de la expresión <math>10(2x-10)</math>, Qué representa?</p>
--

Figura 9.14. Estrategia para la acción: Gestión de la tarea E1t4

Juan y Lina identificaron relevante “el significado que sus estudiantes están dando a los conceptos de álgebra”. Percibieron en las acciones de generalización y construcción de expresiones algebraicas equivalentes, una oportunidad para abordar el sentido estructural; prestaron atención a las estrategias que emplearon los escolares al obtener las transformaciones y apreciar la validez de expresiones equivalentes, y reconocieron la necesidad de seguir abordando tareas que involucren seleccionar o reconocer procedimientos para transformar eficientemente las expresiones en función de su equivalencia [S27. Ai1/Ec3 Líneas 17-21].

Los FPM mostraron disposición para entender las exigencias que establece o sugiere la institución educativa en que se encuentran. Fueron conscientes de hechos de la propia práctica, y de que no es fácil poner en marcha propuestas para abordar las problemáticas identificadas, dada la complejidad que caracteriza los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Los FPM no se apartaron de su planteamiento relativo a la naturaleza del aprendizaje algebraico, a la manera como los estudiantes pasan de la aritmética al estudio del álgebra. Consideraron pertinente comenzar su enseñanza trabajando el significado y uso de las letras, arrancar de los conocimientos previos de los alumnos y usar representaciones (y/o generalizaciones) de relaciones matemáticas, especialmente llevando a cabo traducciones y relaciones entre diferentes sistemas de representaciones (Anexo A15-2).

Para los FPM el estudiante debe comprender el cómo y cuándo usar un contenido; saber para qué y por qué transformar expresiones en expresiones equivalentes, debe aprender sus reglas de uso y manipulación, pero sobre todo, debe interpretar expresiones en términos del contexto, y debe usarlas para resolver problemas.

## **Síntesis de resultados y del análisis retrospectivo**

Podemos decir que los FPM han completado los ciclos reflexivos, cubriendo las tareas y expectativas del proceso formativo; han reflexionado sobre los problemas de la enseñanza del álgebra, dando curso a diferentes versiones en la formulación.

Las actuaciones y producciones de los FPM dan cuenta de la puesta en práctica de cada una de las fases de reflexión. Las evidencias de las actuaciones y las decisiones de los FPM, revelan el acercamiento a la praxis, el inicio de la formulación reflexiva (problematización), el distanciamiento y la toma de conciencia durante cada ciclo reflexivo.

Lina y Juan plantean, inicialmente, problemas profesionales relativos al aprendizaje de expresiones algebraicas, que ambos formulan manifestando un déficit metodológico (cómo enseñar). Justifican el origen de las situaciones problemas en deficiencias de los alumnos, que llevan a confundir el papel de la letra, en un caso, y a no tener destrezas de factorización, en el otro. En los siguientes ciclos se interesan por el sentido que tiene enseñar álgebra y finalmente, el problema referido a la instrucción cobra importancia en las tareas escolares con visión funcional

Completan las fases A de los ciclos manifestando un conocimiento sobre el álgebra escolar de carácter procedimental. Por tanto, se puede considerar que al precisar el foco y los elementos conceptuales de los objetos de reflexión y al advertir su pertinencia en el planteamiento, los FPM van organizando sus conocimientos teóricos y estos van tomando relevancia frente a una situación propia de la práctica que inicialmente puede ser percibida como amplia o incierta y que a lo largo de los ciclos se hace más concreta.

Los FPM transitan en las fases L reconociendo sus ideas y analizando sus creencias. La justificación del origen de los problemas les permite abordar los significados del objeto de reflexión de manera más precisa. La explicitación de argumentos relativos a la naturaleza de los problemas profesionales les lleva a examinar sus ideas y posturas.

*La fase a, en todos los ciclos se lleva a cabo trabajos conjuntos y puestas en común con otros compañeros del curso haciendo que la evolución posterior encierre con reflexiones más precisas y concretas. La confrontación con expertos les lleva a apreciar*

aspectos conceptuales del álgebra, dando sentido a las operaciones mediante problemas usados en cursos posteriores, como los cálculos algebraicos de áreas y volúmenes. Las ideas que dieron fundamento a la situación y que explicaron la naturaleza, permitieron a los FPM identificar un enfoque instrumentalista y de transmisión respecto a la enseñanza del álgebra escolar, basada en la descripción de algoritmos y en la resolución de ejercicios. La toma de conciencia en relación a la presencia de esta postura en la tradición de la enseñanza, en algunos manuales y en las directrices curriculares de las instituciones de práctica, Los FPM se plantean la necesidad de abordar la instrucción desde tareas basadas en la resolución de problemas para orientar las transformaciones sintácticas de las expresiones algebraicas

La obligación de aclarar sus problemas, junto con las lecturas didácticas recomendadas le llevan a adoptar el "sentido estructural" como una forma de concebir el álgebra que, sin olvidar las preocupaciones originales, les permite conectar aspectos conceptuales y procedimentales del álgebra escolar. Igualmente, examinar los papeles que desempeña la letra en álgebra, les lleva a organizar ideas, apreciando cómo se relacionan los campos de trabajo del álgebra con los usos de las letras, la actividad algebraica y la resolución de problemas contextualizados. Por tanto, examinar los constructos que fundamentan las situaciones objeto de reflexión les conduce a estructurar la naturaleza del objeto del problema, interpretando conceptos que le ayudan a ajustar su forma de pensar y a establecer razones para dar significado a dichos objetos.

El conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra que manifiestan los FPM emerge de manera intuitiva en los ciclos iniciales. Este conocimiento avanza cuando han apreciado *su carácter eminentemente procedimental* (factorizar); a lo largo de los diferentes ciclos han ido incorporando situaciones que le dan sentido al álgebra, para hacer que los alumnos no se limiten a aplicar, sino que aprecien la relación con otros cálculos aritméticos o su empleo en problemas de aplicación; con esta situación de dilema, aparece la idea de sentido estructural, aprecian elementos conceptuales de las expresiones algebraicas.

La evolución que Lina y Juan dan al problema profesional, pasa de un planteamiento inicial en términos de un déficit de conocimiento didáctico, a una formulación que da cuenta de su necesidad por profundizar los significados de los contenidos del álgebra escolar tratados. La definición al final de los ciclos, manifiesta la disposición de los FPM por apreciar referentes relacionados con el sentido estructural y el interés por desarrollarlo en sus alumnos. Se advierte que el propósito de los FPM es aproximarse a una tendencia más

funcional que algorítmica del álgebra escolar. Hemos identificado, en la reflexión de Juan y Lina, la pertinencia de la indagación sistemática y la confrontación de conceptos teóricos para conducir a la concienciación que fundamenta los hechos de la práctica, evolucionando de lo complejo a lo mejor organizado.

La evolución de en el primer ciclo formativo cubre las fases ALaCT, arrancando de los problemas profesionales referidos a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. En el siguiente ciclo aprecian el uso del error en la instrucción y la necesidad de abordar las limitaciones del aprendizaje de los escolares. La confrontación con la actuación práctica docente en los centros de enseñanza, da sentido a la reflexión sobre las tareas escolares, y con ello los FPM reconocen nuevos aspectos de la naturaleza práctica del conocimiento.

## CONCLUSIONES

### **Índice de capítulo**

Capítulo 10. Conclusiones y aportes de investigación

- 10.1 Conclusiones sobre los objetivos de Investigación
- 10.2 Conclusiones relativas al objetivo uno
- 10.3 Conclusiones relativas al objetivo dos
- 10.4 Conclusiones relativas al objetivo tres
- 10.5 Limitaciones de este trabajo
- 10.6 Líneas abiertas de investigación
- 10.7 Conclusión



## Capítulo 10. Conclusiones y aportes de investigación

Este capítulo presenta en tres apartados el cierre de la investigación. La primera parte presenta conclusiones de la investigación en relación con los objetivos planteados en el capítulo 1 y describe simultáneamente las principales aportaciones. La segunda parte expone las limitaciones del estudio. La última parte resume en líneas abiertas la prospectiva de la investigación. El capítulo cierra expresando la conclusión general en relación con el estudio y el método utilizado.

Consideramos que con el estudio realizado respondemos en gran parte a los interrogantes propuestos y a los objetivos planteados, no obstante aún quedan considerables líneas abiertas que permitirán continuar investigando en esta temática.

### 10.1 Conclusiones sobre los objetivos de Investigación

Esta investigación se formuló con el propósito general de estudiar la reflexión sobre situaciones de la práctica docente en el proceso de iniciación al desarrollo profesional de FPM.

En consecuencia de lo anterior se plantearon tres objetivos a los cuales dimos respuesta luego de estudiar, preparar e implementar un modelo de reflexión en el contexto del prácticum de FPM, para lo que aplicamos una investigación de diseño. En tres partes enunciamos las conclusiones a estos objetivos.

La primera, presentan las conclusiones con las cuales se da respuesta a la cuestión ¿Cómo promover en futuros profesores de matemáticas procesos de reflexión durante las prácticas? Con esta cuestión se aborda el primer objetivo de la investigación:

**OE1.** Diseñar e implementar un programa de formación durante las prácticas de enseñanza, que favorezca la iniciación de los estudiantes en su desarrollo profesional.

La segunda presenta las conclusiones que dan respuesta al interrogante: ¿Cuáles son los procesos de reflexión que manifiestan con más claridad los futuros profesores? Con esta cuestión se responde de manera general y en relación con las categorías de análisis al segundo objetivo de la investigación:

**OE.2.** Analizar el proceso de reflexión manifestado por los futuros profesores de matemáticas durante el desarrollo del curso de práctica docente.



La tercera resume la reestructuración del programa formativo diseñado, después de ser aplicado y analizado, con esta parte se responde al tercer objetivo:

**OE.3.** Sintetizar algunos elementos que aporta la investigación para el diseño e implementación del curso de prácticas de enseñanza en la formación inicial del profesor de matemáticas en un contexto similar al de este estudio.

### 10.2 Conclusiones relativas al objetivo uno

El primer objetivo OE1 se abordó mediante un trabajo conjunto de formadores que habían participado en ocasiones anteriores en el prácticum en la Universidad de Los Llanos, más fundamentado mediante el trabajo de revisión bibliográfica realizada con anterioridad, y planteando un experimento de enseñanza que guió la elaboración, puesta en práctica y análisis del curso de práctica docente. El objetivo se subdividió en tres objetivos parciales para concretar el planteamiento:

**O.E.1.1** *Diseñar el curso de práctica docente para que se facilite a los FPM atravesar ciclos de reflexión sobre diversos problemas derivados de su práctica.*

Para el logro del objetivo se diseñó el experimento de enseñanza que involucró un proceso formativo para abordar las prácticas de enseñanza del último semestre de la licenciatura (en el prácticum). Este programa de formación se propone iniciar el desarrollo profesional de los futuros profesores, al ser la oportunidad para desenvolverse en un periodo de tiempo y con un alto nivel de implicación personal y de compromiso con la institución educativa. En el capítulo 5, hemos expuesto las generalidades del programa formativo.

Los fundamentos para el diseño del programa formativo siguieron de manera rigurosa las ideas que concibe al profesor como profesional práctico reflexivo (Flores, 2007; Liston y Zeichner, 2003), iniciando a partir de la identificación de una situación problemática para cada FPM, que arranque de su experiencia práctica docente. El diseño rescata la revisión de los fundamentos teóricos del modelo ALaCT (Korthagen et al., 2001), aprovechando aquellas acciones reflexivas que ofrecieran aporte al diseño de las tareas formativas.

La estructura del curso (parte en la universidad, antes de asistir a las instituciones educativas), así como los objetivos formativos abordados en el programa, llevaron a diseñar cuatro partes, cada una de ellas destinada a provocar un ciclo de reflexión, inspirado en el

modelo ALaCT, para lo cual se estructuraron dos tipos de tareas formativas , las actividades y los talleres.

Elegir como principal objeto de reflexión los problemas profesionales ha permitido dar sentido al conocimiento profesional, planteándolo de manera funcional, con vistas a comprender mejor los problemas planteados y, con ello, ahondar en el origen, fundamento y la naturaleza de algunas de las cuestiones que plantea la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Esto ha conllevado la profundización en el conocimiento profesional de los FPM y de manera menos evidente, a la percepción de diferentes concepciones sobre la enseñanza del álgebra.

Arrancar de problemas sentidos por los estudiantes y darles iniciativa para seleccionar aportes teóricos que le fueran significativos ha contribuido a mejorar la relación teoría-práctica. El diseño aprovechó tres circunstancias para promover la reflexión: la planificación (reflexión para), la actuación con los alumnos (reflexión en) y la participación en los seminarios de evaluación y nuevo diseño (reflexión sobre la acción), (Schön (1992)). Para facilitar esta secuencia, en el diseño final los contenidos formativos se organizaron en cuatro módulos, orientados de manera progresiva y en correspondencia con los componentes que conforman el Análisis Didáctico, para profundizar en el significado del álgebra (análisis de contenido), sistematizar los fines y limitaciones de aprendizaje (análisis cognitivo), diseñar tareas formativas (análisis de instrucción) y examinar logros de aprendizaje (análisis de actuación). Durante cada módulo se involucran contenidos relativos a la didáctica del álgebra correspondientes a cada uno de estos análisis, que corresponden con las expectativas de aprendizaje del prácticum.

**O.E.1.2** *Poner en práctica un experimento de enseñanza, cubriendo las etapas de una investigación de diseño, que permita planificar, implementar y revisar cada ciclo antes de pasar al siguiente.*

Para el cumplimiento de este objetivo partimos de la fase empírica de una investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), que nos ha guiado en la planeación, puesta en práctica y análisis de las intervenciones en el escenario de las prácticas de enseñanza de FPM (o prácticum). Esta metodología aportó sistematicidad a cuatro módulos formativos denominados: Inducción; Contexto; Enseñanza y 4. Balance y permito responder a presupuestos de la investigación.

La planificación tomó como referencia las características de la reflexión (§ 2.4.2) y de las acciones reflexivas que involucra el proceso reflexivo (§ 2.4.4), las cuales se consideran base fundamental en las variables que intervienen en las tareas formativas planeadas y que resultaron adecuadas para delimitar de esta parte del experimento.

Las tareas formativas cuya ejecución hizo posible la puesta en marcha de cada una de las fases reflexivas de los cuatro ciclos conformaron una colección de veinte actividades que involucran a los FPM en la complejidad la práctica docente y por ende, su responsabilidad profesional. Para llevar a cabo fases de distanciamiento y toma de conciencia sobre los problemas planteados, se concibieron talleres para aportar a la dinámica el trabajo colectivo, el contraste de formas de apreciar los problemas, y posteriormente la puesta en común, para obligar a aclarar las posturas de cada futuro profesor.

La implementación consistió en la puesta en marcha de la trayectoria de instrucción. El Análisis Didáctico en este experimento además de ser un contenido formativo en cada módulo, se constituye en un instrumento que influye en la reflexión de los FPM, brinda la oportunidad de examinar y afinar observaciones al identificar, formular y abordar una situación de la práctica docente y le permite contar con elementos al actuar o decidir sobre la misma con fundamento.

La revisión y análisis preliminar al final de la instrucción en cada módulo formativo reflejó el ajuste gradual de las tareas formativas, con vistas a lograr los objetivos del curso.

Se considera que la metodología ha sido apropiada en este estudio. Ha permitido ubicar en los fundamentos teóricos elementos esenciales para el diseño formativo inicial; ha facilitado análisis parciales y elementos explicativos para poner en marcha el experimento de enseñanza en relación a los objetivos formativos, e incluso ha permitido hacer apreciaciones sobre la reflexión, considerando resultados a lo largo de las diferentes etapas del estudio, lo que nos ha llevado a apreciar algunos aspectos que han favorecido a priori la aparición de las fases de reflexión (Castellanos, Flores, Moreno, 2017b).

**O.E.1.3.** *Describir el desarrollo y el análisis paralelo del diseño instruccional explicando el funcionamiento del experimento y las adaptaciones que informan de los procesos de reflexión seguidos por los participantes, así como las acciones que contribuyen en ello.*

Para el logro de este objetivo se realizó la revisión y análisis secuencial, módulo a módulo posterior a la intervención, tomando decisiones que han contribuido a transformar el diseño en dos sentidos diferentes: en relación con las dinámicas del experimento y con la trayectoria de instrucción.

En relación con la dinámica del experimento se consideró adecuado: ajustar los temas y problemáticas según las condiciones y el contexto de la práctica; incorporar preguntas de indagación y ficha de auto-reflexión como herramientas que aportan a la promoción de la reflexión; ajustar las tareas formativas para realzar y notar las fases de los ciclos reflexivos; y espaciar las sesiones de la trayectoria, para favorecer el impacto de la intervención y disminuir el aprendizaje mecánico. Confirmamos que la dinámica del experimento requiere disponer de tiempo entre una y otra sesión para analizar la información recolectada allí y ajustar con ello el diseño de las siguientes sesiones.

En relación con la trayectoria de instrucción para atender a las expectativas de aprendizaje de los practicantes, se espació y se incorporaron nuevos contenidos, se aportaron referentes para las temáticas relacionadas con los problemas seleccionados, se ampliaron las sesiones de instrucción y se concretaron los contenidos, sin dejar de lado los pre-establecidos.

Después de planear, implementar y analizar la primera versión del diseño instruccional al final del módulo uno, surge una segunda versión mejorada del programa formativo para perseguir los objetivos de la asignatura. Este segundo prototipo incorporó las acciones complementarias como: interrogar, representar, verbalizar y confrontar. El diseño final es resultado de este proceso y atiende a las decisiones del colectivo de práctica e investigadores para proponer un esquema más cercano a la formación inicial de profesores en el contexto de intervención.

Los alcances anteriores permitieron comprender la pertinencia del diseño instruccional y el aporte a la investigación. Al igual que en otros estudios cualitativos, el diseño fue el contexto para la investigación y, a su vez, el análisis secuencial informa sobre la intervención, sus propósitos y sus ajustes manteniendo las restricciones que se enmarcan desde de la investigación (Cobb y Gravemeijer, 2008).

### **10.3 Conclusiones relativas al objetivo dos**

El segundo objetivo OE2, da prioridad a interpretaciones relacionadas con la reflexión manifestada por los FPM durante el prácticum.

Para analizar dicho proceso hemos prestado atención a las acciones reflexivas que evidencian que ha ocurrido una fase del ciclo y a las dimensiones que son objeto del proceso reflexión y permiten describir la forma como ha ocurrido dicha reflexión. En consecuencia, atendemos a dos objetivos parciales, que en adelante se responden.

***O.E.2.1. Estudiar la manifestación de acciones reflexivas que satisfacen las fases de reflexión.***

El estudio empírico evidenció que a través de las acciones reflexivas aparentemente sencillas, damos cuenta de manera total y satisfactoria del acontecimiento de las fases del proceso reflexivo a lo largo del programa formativo. En efecto, las fases ALaCT ocurrieron; algunas con mayor evidencia que otras y, en otras fases, con requerimientos adicionales para su concreción; esto lo apreciamos en dos de los participantes que estudiamos en el caso. En lo que sigue lo iremos evidenciando.

La fase A, acontece cuando los FPM identifican y formulan una situación problemática relacionada con la propia práctica.

En efecto partir de los hechos de la propia práctica le sugiere de manera natural al FPM, percibir un evento desafiante de la lección (un incidente) y describir los conflictos que inquietan o interesan. La fase A, se da al formular dicha problemática en una cuestión (interrogante), conllevando al FPM a concretar el contexto (temático y escolar) y a fijar la acción que demanda algún tipo de actuación por su parte.

El estudio mostró que no siempre los FPM poseen los elementos que le permitan verse realmente involucrados con las situaciones de la práctica. Con el pasar del primer ciclo reflexivo, el estudio ha proporcionado pruebas de la reflexión de FPM iniciada sobre cuestiones particulares de la práctica docente, ha demostrado que los FPM aprovechan las acciones que promueven esta fase reflexiva. Los FPM del caso tardan y requieren apoyo para identificar y formular situaciones problemáticas sobre la enseñanza del álgebra escolar; las limitaciones del aprendizaje algebraico y las tareas matemáticas para el aprendizaje.

La primera fase advierte de la importancia que tiene hacer una selección afortunada de la problemática, para sacar el máximo provecho durante el proceso reflexivo; con lo cual se inicia el camino reflexivo que promueve aperturas y rupturas frente al conocimiento

preexistente y la consciencia de actitudes de permanente búsqueda para asumir el reto que impone el rol docente; esto es, problematizar la propia práctica.

La fase L se aprecia a partir de la forma en que los FPM reconstruyen la realidad para justificar la problemática y en las apreciaciones de sus propias concepciones, imprecisiones y principios al enunciar la problemática.

Reconstruir la realidad se manifiesta cuando el FPM retoma los episodios de la propia práctica y esboza (o ejemplifica) de manera objetiva los hechos; lo cual le implica examinar los fundamentos en la naturaleza de la problemática y abordar las concepciones que definen los objetos de reflexión.

Apreciar imprecisiones y principios propios no ha sido cuestión fácil en el proceso, solamente logra evidencia cuando los FPM verbalizan ante sus pares sus concepciones (o ideas) que enuncian el objeto de la problemática o cuando ofrecen las razones que la justifican.

El estudio observó en los FPM las resistencias (y conflictos) que exhiben al formular sus problemáticas; las cuales son regidas por el propio sistema educativo, y por algunas creencias arraigadas, que en ocasiones, les limita y obstaculiza para asumir dicha problemática.

Al igual que en los estudios de Korthagen et al., (2001), se confirmó que esta fase se concreta con dificultad; por cuanto es igual de necesario e importante procurar la transición entre la “fase L” y la “fase a”, en el proceso de reflexión, a fin de examinar las discrepancias que enmarcan los problemas en la enseñanza. En consecuencia para revelar dichas resistencias los FPM requerían identificar concepciones (y creencias) sobre la problemática, por cuanto el estudio consideró acertado involucrar dichas acciones en la fase L para lograr esta transición.

El estudio determinó que en la fase L, las puestas en común entre pares y la reflexión compartida en colectivo de práctica, encamina a los FPM en el reconocimiento de sus propias concepciones (ideas). Los interrogantes y creencias identificadas y examinadas de manera individual y en privado por los FPM posteriores a la puesta en común, son evidencia de la clarificación de principios, tanto implícitos (detectados por sus compañeros) como los explícitos. Para reconocer las propias concepciones, el FPM requiere compromiso y disposición al cambio, lo que da cuenta del distanciamiento que los FPM hacen de sus propias formas de concebir la problemática.

La fase "a" se aprecia cuando el FPM toma conciencia de nuevos conocimientos, procedente de la confrontación y del aporte de un experto o de su propia consulta, a fin de avanzar en la solución (o comprensión) de la problemática.

La toma de conciencia de nuevos conocimientos se aprecia en el análisis que realizan los FPM de manera conjunta (entre pares) sobre los aspectos esenciales que fundamentan la problemática. Esta fase tiene evidencia en los acuerdos conceptuales, la indagación y la explicitación de posturas; asimismo, en los referentes que deciden consultar para profundizar, dar claridad o abordar la solución de las problemáticas.

Otros hechos que da cuenta de esta fase tienen asiento en la puesta en común con el colectivo de práctica. La confrontación con el experto convocó al FPM al contraste de ideas (sobre la enseñanza, aprendizaje y la propia práctica), desvelando el análisis profundo y consciente de las propias concepciones (o creencias) y la exploración de nuevos conocimientos que tienen que considerar.

En esta fase reflexiva el conocimiento que van incorporando los FPM, si bien es consecuencia del programa formativo, dado que este ofrece nuevos fundamentos y conocimientos para ampliar sus herramientas profesionales, el debate y la libertad que ha imperado en el curso, da lugar a que el FPM seleccione solo aquellos aportes que le son significativos en relación a su forma de apreciar el problema, lo que le da una perspectiva profesional para interpretar las situaciones que definen los problemas profesionales.

La fase C aprecia las alternativas que el FPM crea para su actuación. Crear alternativas de actuación implica evaluar las posibles estrategias. Dicha evaluación se manifiesta con las decisiones que toman para abordar la problemática (o la solución).

La fase T se manifiesta a través de la delimitación y puesta en marcha de la nueva acción. Esta fase se revela a través de nuevas propuestas (una nueva forma de definir la problemática) y la evolución y conexión que tiene en relación con la formulación de la problemática que dio inicio al ciclo reflexivo.

En conclusión, podemos decir que se manifiestan las fases ALaCT, cuando ocurren actuaciones de los FPM relativas a las acciones de: identificar, describir, examinar, verbalizar, confrontar, evaluar, crear; con las cuales se puede apreciar: la formulación de cuestiones; las precisiones logradas sobre la naturaleza y el origen de la problemática, los principios y fundamentos que se ofrecen para justificar la problemática, las creencias e

inquietudes que se examinan; los nuevos referentes conceptuales que se consultan y profundizan; las estrategias que se crean y las intenciones formativas que se delimitan.

**O.E.2.1.** Apreciar cómo ha ocurrido la reflexión

Para responder a este objetivo en los capítulos 7,8 y 9, describimos la reflexión manifestada por los FPM; interpretamos dicha reflexión en las producciones de los FPM a partir de rasgos implícitos y explícitos para las dimensiones: problemas profesionales; conocimiento profesional y las tareas matemáticas para el aprendizaje. De estos análisis extraemos las conclusiones que exponemos a continuación.

**a) La evolución en la formulación de problemas profesionales detectados**

En este objetivo se analiza la reflexión de los FPM a través de los problemas profesionales relacionados con la enseñanza/aprendizaje del álgebra escolar identificados, formulados y abordados en los ciclos reflexivos. La reflexión vista desde esta dimensión, informa del cómo va evolucionando la formulación del problema.

Para analizar la evolución de un problema profesional a lo largo de los ciclos reflexivos, en el capítulo 2 desarrollamos un marco basado en tres características para su formulación: el origen de la situación, la naturaleza objeto de la situación problema y el planteamiento de la cuestión; las categorías encontradas en las producciones y explicaciones relativas a dichas características las consideramos como un aporte de esta investigación.

El estudio mostró que la reflexión sobre los problemas profesionales desvela la importancia que le otorgan los FPM en relación con su desarrollo profesional. El planteamiento de la cuestión manifiesta inicialmente la preocupación por la visión técnica, plasmada en una descripción de la situación problemática planteada en forma de déficit metodológico. La cuestión avanza hasta formular una necesidad profesional en términos de capacitación y profundización de conocimientos. Finalmente la cuestión evoluciona de un planteamiento en términos de las limitaciones del aprendizaje de los escolares, a una formulación que implica la responsabilidad profesional del FPM para dar sentido al aprendizaje del álgebra. Aunque no podemos asegurar que exista evolución de la racionalidad, si evidenciamos en el planteamiento una intención formativa que preocupa a los FPM.

Determinamos que la precisión de la cuestión planteada atraviesa por diferentes momentos de reformulación (espontáneos o conducidos), como consecuencia del avanzar



de los ciclos reflexivos, siempre con la intención de concretar y delimitar los objetos, normas, contextos, actores y acciones involucradas. La precisión de la cuestión también obedece a la reflexión conjunta, se aprecia con mayor énfasis en las fases L y a, a través de la interpretación y confrontación de los aspectos conceptuales que definen los objetos de la cuestión (e.g. álgebra escolar).

Confirmamos que a medida que se van incorporando y organizando los conocimientos teóricos con relevancia a la situación problemática identificada, el foco y los elementos de la naturaleza de la situación se delimitan y particularizan, en consecuencia de lo anterior, la cuestión del problema profesional evoluciona de un planteamiento amplio (o general) a una formulación concreta que se particulariza en términos del aprendizaje del álgebra escolar.

Determinar el origen de la situación repercute en la profundidad del problema profesional; por tanto, la formulación se asocia al dominio y conocimiento de las causas y fundamentos que describen los objetos de reflexión.

El origen descrito en las situaciones planteadas al inicio del ciclo C1, en su mayoría, procede de realidades poco definidas (origen incierto). Los FPM perciben conflictos con foco en el ámbito pedagógico social o psicológico; en tal evento, el proceso reflexivo conduce a los FPM a concretar el fenómeno que causa la problemática. Encontramos que el origen de la problemática en el caso de estudio, pasa de una situación percibida con origen en variadas perspectivas del ámbito didáctico para plantear el conflicto, a una situación con origen en un fenómeno situado en eficiencia de la enseñanza.

Concluimos que los FPM han logrado identificar con mayor precisión el origen de la situación problemática al final de C1, la mayoría de incidentes consideran el origen de la problemática en una experiencia particular de la enseñanza o del aprendizaje de un tópico del álgebra escolar. La profundización y consulta de fundamentos que definen la situación problemática (objetos y origen), conducen a los FPM a estructurar la naturaleza de la situación problema, evolucionando de lo complejo a lo más organizado.

Aunque los FPM perciben las limitaciones del enfoque instrumental y de transmisión de la enseñanza del álgebra escolar, consideramos que se requieren de un proceso reflexivo de mayor aliento para notar su implicación en las intenciones formativas de los FPM respecto a la tendencia funcional para la enseñanza del álgebra.

### ***b) La manifestación del conocimiento usado al dar sentido a los problemas***

Para responder a este objetivo se han tenido en cuenta las categorías definidas en el capítulo 4 (§ 4.6.2) según nuestra postura de conocimiento profesional (§ 2.3.2). El estudio que realizamos mostró que el análisis de la estructura conceptual ha permitido a los FPM delimitar el contenido algebraico que da fundamento a la naturaleza de los problemas profesionales. Para definir origen y causas del problema profesional, profundizan en las relaciones entre los elementos del campo procedimental y conceptual de la factorización del TCP; permitiéndoles con esto, afrontar el dilema procedimental-conceptual de la enseñanza del álgebra escolar.

En especial, notamos el aumento y uso del vocabulario específico, en la acción de verbalizar los fundamentos que definen el objeto del problema profesional y evidenciamos que la puesta en común convocó la precisión de la terminología específica y el uso de los convenios. Es notable el interés por fundamentar epistemológicamente algunas nociones (e.g. variable; factorización). Concluimos que los FPM han evolucionado en conocimiento para definir un contenido, tomando en cuenta algunos elementos de la estructura matemática y cuando han descrito los contenidos en relación con el campo procedimental y conceptual. En los primeros ciclos se aproximan a organizar los conceptos involucrados en los contenidos y progresivamente van apreciando estructuras conceptuales y relacionándolos con los sistemas de representación. Durante esta evolución han tenido más dificultades para caracterizar la fenomenología del contenido algebraico.

Podemos decir que los FPM manifiestan claridad para reconocer las dificultades del aprendizaje, en tanto que tienen dominio de los significados matemáticos básicos del contenido, a medida que van avanzando en los ciclos de reflexión; con lo cual requieren organizar de manera cognitiva los conceptos involucrados en los TCP; como consecuencia de lo anterior, confirman (o rechazan) el origen de los errores en la comprensión de las estrategias algebraicas.

El problema profesional referido al sentido estructural toma relevancia cuando los FPM se comprometen en determinar los modos de expresión (simbólico, verbal, gráfico, icónico). Profundizar en este constructo exigió al FPM evidenciar la existencia de tres equivalencias entre los TCP (subestructuras). La confrontación con expertos conllevó a precisar que dichas equivalencias se corresponden con las transformaciones sintácticas de los TCP, dando significado a la definición de estructura interna y externa de una expresión.

Constamos que el sentido estructural, como perspectiva para abordar el problema profesional (solución), requirió de los FPM mejorar el dominio de los sistemas de

representación y por ende, la comprensión de las transformaciones entre las estructuras algebraicas (internas y externas), condición que fue necesaria a raíz de la profundización de nuevos constructos y referentes (descriptores del sentido estructural). Concluimos que los significados que los FPM otorgan a los contenidos algebraicos muestra una creciente responsabilidad profesional del FPM.

Los FPM se apoyan en sus conocimientos didácticos del contenido para describir los hechos de los que tratan el problema. Se percibe un despertar, no exento de dificultades, a una mayor conciencia de las implicaciones para el futuro de los desempeños escolares y a la gestión del error como oportunidad de aprendizaje. El aporte del experto y la profundización de nuevo conocimiento didáctico, permiten dar sus frutos que se aprecian en la planeación de clase, en las que es más claro la descripción de las expectativas de aprendizaje, precisando las capacidades enunciadas (fase a.2), pasaron de enunciar capacidades poco precisas o muy generales a definir capacidades más elaboradas y puntuales, formulando la realización de acciones o a la expresión de conductas (fase A3.1).

Las acciones del proceso de reflexión, especialmente las vinculadas a la fase L y la fase a, provocan en los FPM la reorganización de su conocimiento profesional. El distanciamiento y la toma de conciencia conllevan apreciar nuevas forma de verla la problemática, dándole mayor significado al conocimiento. El conocimiento didáctico del contenido cobra sentido para la enseñanza, abordando una perspectiva más profunda (distante de la mirada técnica). Ocurre lo mismo con los objetos de reflexión en los que prestan atención, se traslada el interés por aprender técnicas para enseñar, a la preocupación por el aprendizaje de los escolares, sobre sus limitaciones y oportunidades.

Por su parte, las acciones de analizar y confrontar desarrolladas entre pares y colectivo de práctica, favorecen la construcción colectiva de conceptos (matemáticos y didácticos). Ambas acciones promovidas a través de la reflexión podrían representar uno de los ámbitos de mayor influencia para el desarrollo del conocimiento profesional del practicante, pues la toma de conciencia de su conocimiento implica otorgar sentido a su práctica.

Aproximaciones cualitativas en otros estudios han mostrado evidencia de una mejor conciencia en relación con los conocimientos didácticos en la medida en que los practicantes logran distanciarse de sus concepciones iniciales y dan apertura a nuevas interpretaciones (Flores, 2007). Otros estudios demuestran que la interacción (practicantes

y colectivo) puede provocar concienciación durante el aprendizaje reflexivo y promover la co-construcción de nuevos conocimientos (Alsina, 2007).

***c) Las características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas.***

Abordamos esta dimensión para analizar el proceso de reflexión manifestado por los FPM, con base en las categorías que se han considerado en el capítulo 2.

Nuestra forma de poner en marcha los ciclos reflexivos sobre las limitaciones del aprendizaje en C2 y sobre la enseñanza en C3 a través del problema profesional considerado y formulado por los FPM, dio paso a la reflexión sobre el análisis y diseño de las tareas matemáticas para implementar la enseñanza.

En estos ciclos reflexivos se hizo posible desvelar de forma natural los dominios básicos del conocimiento didáctico para los FPM. Especialmente nos enfocamos en los aspectos fundamentales de las tareas: funciones, características y variables para el diseño e implementación de una lección.

Como balance de los resultados sobre las funciones de las tareas, constatamos que una vez superadas las carencias en la secuenciación de los contenidos (en fase L.2), los FPM lograron precisar un orden lógico para dichos contenidos y fueron creando tareas más precisas, prácticas y coherentes en la secuencia al iniciar A3.1. Aclarar las funciones de las tareas y su relación con los objetivos de aprendizaje logró clarificar la fase L3.1 a través de la confrontación entre pares y, salvando las dificultades para dar organización cognitiva a las transformaciones sintácticas de los TCP.

Los resultados del análisis a las componentes de la tarea desvelan que la formulación de las tareas atraviesa por tres grandes momentos a consecuencia de los procesos reflexivos asumidos por los FPM. En el primero la tarea se formula en contextos matemáticos, sin involucrar situaciones o problemas contextualizados para conducir la comprensión del contenido (Fase C.2). El segundo momento, que es posterior a la puesta en común entre pares (Fase L3.1), produce nuevas formulaciones, en las que el contenido se aborda a través de situaciones contextualizadas (representadas usando la geometría) y exhibiendo las demandas cognitivas al escolar. El tercer momento se da en la fase a3.2, y en él se aprecia la importancia por formular tareas que involucren los contenidos a partir de la solución de situaciones reales, no sólo contextualizadas. Con ello interpretamos que se produce una identificación de que su la responsabilidad profesional explícita del FPM, tiene

que llevarle a introducir el contenido de manera funcional (resolución de problemas), sin haber podido constatar fielmente esta intuición.

Otro aspecto de especial importancia en los resultados son las variables de tarea. Hemos podido evidenciar que los FPM inicialmente plantearon tareas cerradas y que solo involucraban demandas cognitivas de reproducción. Con el pasar de los procesos reflexivos y la precisión lograda en el análisis cognitivo las adaptaron de manera progresiva a demanda superiores. Los FPM valoran los aportes externos y deciden asumir algunos como referencia. En el caso descrito los descriptores del sentido estructural interpretados en el estudio de Vega-Castro (2012), fueron asumidos para observar el desempeño de los escolares al resolver tareas que involucraban la factorización, sin considerarlos para planear la enseñanza.

Como hemos podido observar y evidenciar, aunque los FPM al iniciar el C3.1 habían realizado el análisis de contenido, al diseñar las tareas sólo mostraron algunos de los elementos que integran la estructura conceptual del contenido. Hubo que esperar algunas fases del ciclo reflexivo y haber profundizado en los descriptores del sentido estructural, para que se re-plantearan la necesidad del razonamiento de tipo inductivo (inferir la generalización de estructuras numéricas) y el figurativo (representar superficies cuadradas) en especial, para formular tareas que demandan la comprensión de la estructura interna y externa al factorizar, habilidad considerada fundamental en el desempeño del sentido estructural (Vega-Castro, 2013).

Concluimos que la organización del contenido proporcionará un camino para dar sentido a la enseñanza de un contenido, en este caso y confirmando las posturas de algunos autores el FPM dispone de elementos para elegir las tareas que realizará en el proceso de enseñanza (Rojas, Flores y Ramos, 2013).

Un logro que destacamos a partir de los resultados es la disposición de FPM1 y FPM2 para asumir su rol docente al poner en marcha las tareas en la clase y la diversidad de formas en que los FPM reformularon, ajustaron o reestructuraron el contenido en las tareas para hacerlo comprensible a los escolares, así como la atención que dedican a otras variables de tarea (situaciones) y a los demás componentes (materiales y agrupamiento).

### **10.4 Conclusiones relativas al objetivo tres**

El objetivo OE.3 sintetiza algunos elementos que aporta la investigación para el diseño e implementación del curso de prácticas de enseñanza en la formación inicial del profesor de matemáticas, en un contexto similar al de estudio.

El diseño formativo resultado del experimento ofrece aportes a la formación en el prácticum, se considera una experiencia para los programas de formación de profesores en contextos similares a este estudio.

Brinda una alternativa fundamentada al proceso de iniciación al desarrollo profesional, a través de tareas formativas aquí validadas que conducen actuaciones para movilizar los conocimientos matemáticos de los FPM, desafiando sus saberes, demandando decisiones y posibles actuaciones frente a un problema profesional.

Es importante enfatizar que los caminos a la reflexión en la formación de profesores se constituyen en un proceso dinámico y continuo y que no se pueden esperar cambios de la noche a la mañana por parte de los maestros.

El diseño del programa formativo expuesto, si bien no resuelve todos los problemas relacionados con la brecha entre la teoría y la práctica, se concreta en un aporte más que hace que la teoría se ubique en momentos que corresponden a las necesidades que suscita la práctica, especialmente si se arrancan de la definición de problemas profesionales que las sugieran.

Resaltamos que las reflexiones resultantes de la experimentación de este diseño, en el caso de estudio, se consideran una palanca que inicia a los FPM en un cambio y muy seguramente, conllevará un impacto positivo en este momento de su desarrollo personal y en sus aulas de clase en un futuro.

Así, el programa aporta para resolver uno de los retos de la formación de profesores especialmente, ayuda en la deconstrucción de las ideas y los conceptos erróneos que los FPM traen consigo, a través de la reflexión y fundamentación de sus experiencias de la práctica.

## **10.5 Limitaciones de este trabajo**

El informe que presentamos en esta memoria ha conferido minuciosidad y rigor para el análisis juicioso y exhaustivo de la información, dando pasos para dar validez a las interpretaciones. No obstante es necesario reconocer algunas consideraciones y limitaciones que surgieron en el estudio.

La recolección de los datos ha proporcionado una amplia cantidad de información, con lo cual el análisis sistemático de los mismos ha requerido dedicar atención en particularidades y categorías puntuales, pero consideramos que aún se puede profundizar sobre estos. En consecuencia de lo anterior el informe se enfocó sobre los datos de un caso, examinando individualmente el comportamiento de los FPM y el trabajo colectivo entre pares, con el objeto de ver si se han producido las cinco fases reflexivas de los cuatro ciclos y cómo ha sido su reflexión a lo largo del programa formativo a través de las dimensiones. Sería conveniente estudiar el proceso llevado a cabo por los demás compañeros del curso.

Respecto a los contenidos que son objeto de reflexión por parte de los FPM, si bien todos se enmarcaban en bloque del álgebra escolar, resultaron muy variados dadas las condiciones naturales del currículo de las instituciones de práctica. Esto nos hizo limitar el análisis a un caso particular: “las expresiones algebraicas del tipo TCP que involucran las transformaciones de factorización y extensión”, con el objeto de conciliar significados y acuerdos conceptuales entre la pareja de FPM del caso.

En relación con el programa formativo, probablemente un diseño más pausado mejore y agilice las condiciones del análisis sistemático, presumimos que un diseño con mayor distancia entre las sesiones en el tiempo puede favorecer en los FPM aposentar de forma paulatina y constante el nuevo conocimiento profesional que resulta del proceso reflexivo.

A pesar de que el análisis de actuación se incluyó en la programación del diseño formativo y se emprendió durante el desarrollo del módulo cuatro, la información lograda en parte del estudio, no la incluimos en este informe ya que el análisis de la reflexión sobre la evaluación del aprendizaje, requería mayor información de las fases puestas en práctica, que ningún grupo concluyó.

El estudio intento controlar las variables que intervienen en el experimento, pero al ser desarrollada en el contexto natural del prácticum, se presentaron variables que afectaron a la programación, algunas referidas a las condiciones de las instituciones de práctica; referidas a la motivación y frustración de los FPM por el cambio de paradigma formativo y otras debidas a las condiciones del contexto social de los escolares. Convendría tener en cuenta estas condiciones en estudios más amplios, para hacer el estudio más coherente con la realidad que sucede en los procesos formativos.

## 10.6 Líneas abiertas de investigación

A partir del estudio empírico y las limitaciones que se han considerado en este estudio, resultan actuaciones que consideramos pueden ser líneas de investigación futuras.

Implementar en las demás asignaturas del prácticum tareas formativas basadas en las acciones de actuación, derivadas de este estudio, y acomodarlas a un contenido particular como objeto de reflexión. Con ello pretendemos profundizar en el conocimiento profesional de los FPM y potenciar la relación teoría-práctica no solo al final del programa curricular de la licenciatura.

El proceso formativo hizo a los FPM explicitar sus creencias durante la fase L, conduciendo a la que tomaran conciencia de las mismas. Queda pendiente el estudio de la identidad a través de la reflexión, llevándolos a organizar sus creencias iniciales para poder emprender con otra mirada un proceso de evolución e identificación de su compromiso profesional como profesor de matemáticas.

Si bien consideramos pertinente emplear el análisis didáctico para estudiar el conocimiento del profesor en formación, queda pendiente examinar qué papel juega cada tipo de análisis en relación a las fases del proceso reflexivo.

## 10.7 Conclusión

En esta investigación se considera acertado para el prácticum la promoción de procesos reflexivos basados en el ciclo ALaCT (Korthagen et al., 2001), que permiten a un futuro profesor llevar a cabo procesos similares a los que afrontará en su práctica profesional autónoma (detectar situaciones problemáticas de su práctica, profundizar en la misma mediante distanciamiento, toma de conciencia y relación con conocimiento teórico que trate dicha cuestión), para poner en marcha el desarrollo profesional requerido para desempeñar el compromiso que requiere la profesión docente, a lo largo de su vida profesional. Las ideas precedentes son consistentes con las aportaciones de autores como Ball, Hill y Bass, (2005) al destacar la importancia la práctica docente para favorecer la vinculación de diferentes tipos de conocimientos en la formación de profesores.

El estudio ha proporcionado pruebas para indicar que los FPM abordan las fases de un ciclo reflexivo para reflexionar sobre su propia práctica, se disponen y aprovechan las acciones formativas promovidas en beneficio del propio proceso y de su desarrollo.



El análisis didáctico en esta investigación permitió en primera instancia, configurar fundamentos y contenidos del diseño formativo; posteriormente, como procedimiento sistemático nos aportó para organizar la información y obtener resultados parciales a partir del análisis de las tareas formativas durante el experimento. Finalmente, en el análisis retrospectivo, las componentes del análisis han permitido evidenciar las manifestaciones del conocimiento que es involucrado y usado durante los procesos de reflexión promovidos en los FPM.

Consideramos el análisis didáctico como una metodología útil para evidenciar y describir la evolución en el diseño de tareas matemáticas para la enseñanza y en la formulación y definición de los problemas profesionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de un contenido específico, máxime cuando estos son objeto de reflexión.

Un logro de esta investigación es la adaptación de las acciones que definen el proceso reflexivo del modelo teórico ALaCT y la articulación con el programa formativo para su promoción. Particularmente destacamos la utilidad dentro de este trabajo de cada una de dichas acciones reflexiva para estudiar la reflexión.

Confirmamos que la implementación del modelo manifestó evidencias en el proceso reflexivo de los FPM, los cuatro ciclos reflexivos en el caso de estudio reflejaron actuaciones más objetivas y precisas, aunque hay que aceptar que la reflexión requiere de constancia y práctica de más larga duración, además de la disposición y la actitud de los FPM

## REFERENCIAS



- Aké, L.P., Godino, J.D., Fernandez, T. y Gonzato, M. (2014) Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *AIEM*, 5, 25-48.
- Agudelo-Valderrama, C. (2006). The growing gap between Colombian education policy, official claims and classroom realities: Insights from mathematics teachers' conceptions of beginning algebra and its teaching purpose. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(3), 513-544.
- Agudelo-Valderrama, C. (2007). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 5 (1), 43-62.
- Agudelo-Valderrama, C. (2008). The power of Colombian mathematics teachers' conceptions of social institutional factors of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (1), 37-54.
- Alsina, A. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 22(1), 149-166.
- Álsina, Á. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 19(1), 99-126.
- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.
- Alsina, A., Busquets, O., Esteve Ruescas, O. y Torra-Bitlloch, M. (2006). La reflexió sobre la pròpia pràctica: una eina per progressar en l'ensenyament de les matemàtiques. *Biaix*, 25.
- Álsina, A., Planas, N. y Calabuig, M. (2009). El aprendizaje reflexivo en la formación del profesorado de matemáticas. En J. Álvarez, N. Pellín y M. T. Tortosa (Eds.), *VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria: la calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio* (pp. 52-257). Alicante: Universidad de Alicante.

- Argyris, C. & Schön, D. (1978). *Theory in practice: Increasing professional effectiveness*, San Francisco: Jossey-Bass.
- Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Cuadrante*, 8, 111-138.
- Azcárate, P., Rodríguez, A., y Rivero, A. (2007). Los profesores noveles de matemáticas ante el análisis de su práctica. *Investigación en la escuela*, (61), 37-51.
- Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-22.
- Ball D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Bautista, M y Salazar, C. (2008). Memorias Del Tercer Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas, Bogotá: Universidad pedagógica Nacional.
- Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *Números*, 71, 57-74.
- Binti, S. (2010). An exploration of mathematics teachers' reflection on their teaching practices. *Asian Social Science*, 6(5). 65-71
- Bishop, A. (2013). Mathematics Education as a Field of Study. In M. Clements (Ed.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 265-271). New York: Springer.
- Bolívar, A. (2007). La formación inicial del profesorado de secundaria y su identidad profesional. *Estudios sobre Educación*, 12, 13-30.
- Bolton, G. (2010). *Reflective practice. Writing and Professional Development*. London: Sage
- Burbacher, J., Case, Ch. y Reagan, T. (2005). *Cómo ser un docente reflexivo*. Barcelona: Gedisa.
- Brockbank, A. y McGill, I. (1998). *Facilitating Reflective Learning in Higher Education*. Buckingham: Society for Research into Higher Education and Open University Press.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech: Klu.

- 
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7, (2), 33-115.
- Bunge, M. (1986). *La Investigación Científica. Su estrategia y su filosofía*. Barcelona: Ariel.
- Cardeñoso, J., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico. (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 33-44.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.
- Castellanos, M. T., Flores, P., & Moreno, A. (2017). Reflections on Future Mathematics Teachers about Professional Issues Related to the Teaching of School Algebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 408-429.
- Castellanos, M.T, Flores, P., Moreno, A. The reflection on practicum: A teaching experiment with Colombian students. (Revista profesorado en prensa)
- Castellanos, M.T., Flores, P., Moreno, A. (2014). Reflexión de futuros profesores de matemáticas durante las prácticas de enseñanza. En: Rodríguez, J.; Urieles, A.; VillareaL, A. (Eds.), *Conferencia Latino Americana De Educación Matemática*, (pp. 158-168). Bogotá: CLAME.
- Castellanos, M., Flores, P., Moreno, A. (2015). Iniciación al desarrollo profesional de futuros profesores de matemáticas y reflexión durante las prácticas de enseñanza. *Revista*

- Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 27-31.
- Castellanos, M. y Obando, J. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico. *Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.
- Castro-Rodríguez, E., Castro, E. y Torralbo, M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 141-160). Granada: Comares.
- Chamoso, J., Cáceres, M. & Azcàrate, P. (2012). La reflexión como elemento de formación. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 13-51.
- Chapman, O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. In J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest & SpringerLink (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 295-309). New York Dordrecht London: Springer.
- Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. New York, NY: Teachers College, Columbia University.
- Chazan, D., Sela, H., & Herbst, P. (2012). Is the role of equations in the doing of word problems in school algebra changing? Initial indications from teacher study groups. *Cognition and Instruction*, 30(1), 1–38.
- Clarke, D. (2008). The mathematics Teachers as Curriculum Make: Developing Knowledge for Enacting Curriculum. In D. Tirosh, & T. Wood (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, 1 (pp.118-133). Rotterdam: Sense Publishers.
- Clements, M. K., Bishop, A.J., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. K. (Eds.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York: Springer.
- Climent, N. (2002). El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso. (Trans. The professional development of the primary school teacher with respect to mathematics teaching. A case study) Doctoral Thesis. Huelva: Universidad de Huelva.
- Climent, N. (2005). El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la

- enseñanza de la matemática: un estudio de caso. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva. Huelva, España.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 387-404.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, 61, 23-35.
- Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, In Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.
- Cochran-Smith, M. & Zeichner, K. M. (Eds.) (2005). *Studying teacher education: The report of the Panel on Research and Teacher Education*. Washington, DC: American Educational Research Association/Mahwah: Erlbaum.
- Cohen, L., & Manion, L. (Eds) (2002) *Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: The role, for the didactician, of a heightened listenin. *ZDM The International Journal on Mathematics Education Mathematics Education*, 46, 267–278.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as me- methodology, en Sawyer, R.K. (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, (pp. 135-152), Nueva York: Cambridge University Press.
- Contreras, J. (2010). Ser y saber en la formación didáctica del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 68 (24,2), 61-81.
- Cooney, T. J. (1994) Research and teacher education: in search of common ground. *Journal for research in Mathematics Education*, 25 (6), pp. 608-636
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics for teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293–319.



- Day, C. (1999). Professional development and reflective practice: Purposes, processes and partnerships. *Pedagogy, Culture and Society*, 7(2), 221–233.
- De Simone, C. (2008). Problem-based learning: A framework for prospective teachers' pedagogical problem solving. *Teacher Development*, 12(3), 179–191.
- Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona: Paidós.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Drijvers, P. & Hendrikus, M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter. Tesis doctoral. Utrecht. Universidad de Utrecht.
- Empson, S. & Jacobs, V. (2008) Learning to Listen to Children's Mathematics. In D. Tirosh, & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Tools and processes in Mathematics Teachers Education*, 2, (pp. 257-282). Rotterdam: Sense Publishehrs.
- Eraut, M. (1977). Strategies for Promoting Teacher Development. *British Journal of in service Education*, 4(12), 95-99.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
- Esteve, O., Melief, K. & Alsina A. (Cord.) (2010). *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional Del profesorado*. Barcelona: Octaedro, S.L.
- Fantinato, C. & Moreira, D. (2012). Desafios de formadores de “Matemática para a Vida” do Processo RVCC. *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*.
- Fantinato, M y Moreira, D. (2016) Formadores de adultos: dilemas e práticas profissionais na área de matemática. *Educação e Pesquisa*, 42 (1), 67-82.
- Fennema, E. & Franke, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York, NY: Macmillan.
- Fenstermacher, G. D. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching. In L. Darling-Hammond (Ed.), *Review of research in education*, 20 (pp. 3-56). Washington, DC: American Educational Research Association.

- Flores, P. (1998) Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos, UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17, 37-48.
- Flores, P. (1997) El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En M.I. Berenguer (Eds.), *Investigación en el aula de matemática* (pp.13-27). Granada: THALES y Departamento de Didáctica de la matemática.
- Flores, P. (2000) Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza. *Revista EMA*, 5(2), 113-138.
- Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1(4), 139-158.
- Flores, P. y Fernández, F. (2001). Reflexiones sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del álgebra. En Perales, F. (Ed.), *Congreso nacional de didácticas específicas* (pp. 1781-1800). Granada: GEU.
- Fraser, B. J., Tobin, K. G., & McRobbie, C. J. (Eds.), (2012). *Second international handbook of science education* (pp. 1191-1239). Dordrecht: Springer.
- Freire, P. (1982). *La educación como práctica de la libertad*. México: Siglo XXI.
- Galvão, C. & Reis, P. (2002). Um olhar sobre o conhecimento profissional dos professores: o estágio de Sofia. *Revista de Educação*, 11 (2), 165-178.
- García, M. y Llinares, S. (1999). Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño. *Cuadrante*, 8, 61-84.
- Goffree, F. & Oonk, W. (1999). Teacher education around the world educating primary school mathematics teachers in the Netherlands: back to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(2), 207-214.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Marín, A., Molina, M., Restrepo, A. y Romero, I. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. Trabajo presentado en Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM, Salamanca

- González, M. & Pedroza, G. (1999). Reflexiones sobre aspectos claves del algebra escolar. *Revista EMA - Investigación e innovación en educación matemática*, 5(1), 87-91.
- Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Goos, M. & Visnovska, J. (2015). Integrating pedagogical and mathematical learning in preservice teacher education. In K. Beswick, T. Muir, & J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 123-127). Hobart, Australia: PME.
- Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M, Shahan, E. & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, 111(9), 2055–2100.
- Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D. & Villa-Ochoa. J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia.
- Gutiérrez, A. & Boero, P. (Eds.). (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Sense publishers.
- Hatton, N. & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education*, 11(1), 33-49.
- Heaton, R. M. (2000). *Teaching mathematics to the new standards*. New York: Teachers College Press
- Herbst, P. & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. *For the learning of Mathematics*, 23(1), 2-14.
- Herbst, P., Chazan, D., Chen, C. L., Chieu, V. M. & Weiss, M. (2011). Using comics-based representations of teaching, and technology, to bring practice to teacher education courses. *ZDM*, 43(1), 91-103.
- Herbst, P., Nachlieli, T. & Chazan, D. (2011). Studying the practical rationality of mathematics teaching: What goes into “installing” a theorem in geometry? *Cognition and Instruction*, 29(2), 218–255.
- Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010.). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

- 
- Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Reston, VA: NCTM.
- Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 145-152)*. Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3, pp. 305-312)*. Praga, República Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.
- Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L. & Shahan, E. (2013). Exploring relationships between complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussion in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(4), 646–682.
- Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. *British Journal of In-service Education*, 19, 37-42.
- Jaworski, B. (1998). Mathematics Teacher Research: Process Practice and the Development of Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3-31.
- Jaworski, B. (2006). Theory & practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 9, 187–211.
- Jaworski, B. & Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practicing teachers. In A. Bishop et al. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Jaworski, B. & Wood, T. (2008). The mathematics teacher educator as a developing professional. In D. Tirosh, & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of*

- Mathematics Teacher Education: Tools and processes in Mathematics Teachers Education*, 4, 157-22. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Keazer, L. (2014). Teachers' Learning Journeys Toward Reasoning and Sense Making. In J.J. Lo, Jane-Jane Lo, K. R. Leatham y L. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education, Research in Mathematics Education*. Switzerland: Springer International Publishing
- Kelly, A.E. (2004). Design research in education: yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 115-128.
- Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R. & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal*, 49(3), 568-589.
- Kessels, J. P. & Korthagen, F. A. (1996). The relationship between theory and practice: Back to the classics. *Educational Researcher*, 25, 17-22.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol 4, pp.33-56). Hillsdale: Erlbaum.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*, 271-290. Sevilla, España: S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240. Traducción castellana de Luis Puig.
- Kieran, C., Krainer, K. & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers

---

as key stakeholders in mathematics education research. In M. K. Clements (Ed.), *Third international handbook of mathematics education*, 2, 361-392. Springer New York.

Kirshner (1989). The Visual Syntax of Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education* 1989. 20(3), 274-287.

Korthagen, F. (1985). Reflective Teaching and Preservice Teacher Education in the Netherlands. *Journal of Teacher Education*, 36(5), 11-15.

Korthagen, F. (1988). The influence of learning orientations on the development of reflective teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Teachers' professional learning* (pp. 35-50). London: Falmer Press.

Korthagen, F. A., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. & Wubbels, T. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates

Korthagen, F. (2005). Practice, theory, and person in life-long professional learning. In D. Beijaard., P. C. Meijer., G. M. Dersheimer. & H. Tillema. (Eds.), *Teacher professional development in changing conditions* (pp. 79-94). Dordrecht: Springer.

Korthagen, F. & Vasalos. (2005). Practice, theory, and person in life-long professional learning. In D. Beijaard, P. Meijer, G-Morine, Dersheimer & H. (Eds.), *Teacher professional development in changing conditions* (págs. 79-94). Dordrecht: Springer.

Korthagen, F., Loughran, J. & Russell, T. (2006). Developing fundamental principles for teacher education programs and practices. *Teaching and teacher education*, 22(8), 1020-1041.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 68 (24,2), 83-102.

Korthagen, F. & Verkuyl, H. S. (1987). *Supply and Demand: Towards Differentiation in Teacher Education, Based on Differences in Learning Orientations*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington.

Korthagen, F. & Lunenberg, M. (2004). Links between Self-Study and Teacher Education Reform. In J. J. Loughran (Ed.), *International Handbook of Education: of Self-Study of Teaching and Teacher Education Practices*, 12, 421-449. Springer Netherlands.

- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11- 16*. London: John Murray.
- Kwon, N & Orrill, Ch. (2008). A comparison study of a teacher's reflection. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME, 1* (pp. 352).
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale university Press. M.L. Lampert, & M.E. Blunk (Eds) (1998) *Talking mathematics in school: Studies of teaching learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lerman, S. (1990). Alternative Perspectives of the Nature of Mathematics and their Influence on the Teaching of Mathematics. *British Educational Research Journal*, 16(1), 53-62.
- Lerman, S. (2006). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 38(1), 8–13.
- Li, Y., Huang, R. & Tang, C. (2008). Elementary teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME, 1*, (p. 287).
- Lin, F-L. & Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. In A. Gutierrez, G. C. Leder, & P. Boero. *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.483-520). Rotterdam, The Netherlands: SENSE.
- Liston, D. y Zeichner, K. (2003). *Formación del profesorado y Condiciones sociales de la escolarización*. España: Morata.
- Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas . En Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo

- profesional. *Conferencia invitada en la XII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas-JAEM.*
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. Uno. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53-70. España.
- Loughran, J., Hamilton, M., LaBoskey, V. &, Russell, T. (Eds). (2004). *International handbook of self-study of teaching and teacher education practices* (pp. 7-30). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Lurduy, O. (2013). Conceptualización y evaluación de las competencias de análisis, reflexión y semiosis didáctica en EPM. *Revista Científica*, 16(2), 87-108.
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada. España.
- Luna, M. (2007). Caracterización del modelo didáctico del profesorado innovador de Ciencias de Secundaria. Tres estudios de caso. Tesis Doctoral Inédita. Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Sevilla.
- Maat, S. & Zakaria, E. (2010). An exploration of mathematics teachers' reflection on their teaching practices. *Asian Social Science*, 6,(5), p. 147-152.
- Malara, N. & Zan, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In English, L.D. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (pp. 553-579). Mahwah, London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mason, J. H. (1999). Incitación al Estudiante para que Use su Capacidad Natural de Expresar Generalidad: Las Secuencias de Tunja. *Revista EMA - Investigación e innovación en educación matemática*, 4(3), 232-246.
- Melief, K., Tigchelaar, A., Korthagen, F. y Van Rijswijk, M. (2010). Aprender de la práctica. En O. Esteve, K. Melief y A. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión: una propuesta para el desarrollo del profesorado* (pp. 39-64). Barcelona: Editorial Octaedro.
- Mewborn, D. S. (1999). Reflexive thinking among preservice elementary mathematics



- teachers. *Journal For Research Mathematics Education*, 30(3), 316-341.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1992). *Ley 30 Por la cual se organiza el servicio público de la educación superior*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1994). *Ley 115 de Febrero 8 de 1994. Por la cual se expide la ley general de educación*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). *Dereto 2450 Condiciones de calidad de los programas de licenciatura y los enfocados a educación* Bogotá, Colombia
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Resolucion 2041 Características específicas de calidad de los programa de Licenciatura*. Bogotá, Colombia
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2010). *Decreto número 1295 reglamenta el registro calificado de que trata la Ley 1188 de 2008*. Bogotá, Colombia
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2010). Resolución número 5443. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio
- Molina, E., Bolívar, A., Burgos, A., Domingo, J., Fernández, M., Gallego, M. J., Iranzo, P., León, M.J., López, M.C., Molina, M.A., Pérez, P. y Ponce, C. (2004). La Mejora del practicum, esfuerzo de colaboración. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, 8(2), 1-24.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Monereo, C. (2010). La formación del profesorado: una pauta para el análisis e intervención a través de incidentes críticos. *Revista Iberoamericana de educación*, 52(149-178).
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional standards for*

- teaching mathematics*. Reston, VA: Autor
- Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación la Ciencia y la Cultura (OEI). (2010). *Metas educativas 2021: la educación que queremos para la generación de los bicentenarios*.
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2014). *Enseñanza y aprendizaje: lograr la calidad para todos*. Paris: Autor.
- UNESCO. (2012). Challenges in basic mathematics education. United Nations. In *Scientific and Cultural Organization*. Paris.
- Parada, S. (2009). Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases. Trabajo de Maestría, Departamento de Matemática Educativa Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, México.
- Parada, S. y Pluinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México*, 17(1) 83-113.
- Parada, S., Figueras, O. y Pluinage, F. (2011) Un modelo para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus clases. *Revista de educación y pedagogía. Facultad de Educación*. Medellín, Colombia. 59, 85-102.
- Pastells, À. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática*.
- Pedro, J., & Ponte, D. (2008). Investigar A Nossa Própria Prática: Uma Estratégia De Formação E De Construção Do Conhecimento Profissional. *PNA*, 2(4), 153–180.
- Peñas, M. y Flores, P. (2005). Procesos de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 5-16.
- Perez-Gomez, A (2010). Aprender a educar: Nuevos Desafíos para la Formación de docentes. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 24(2), 37-60.
- Perrenoud, P. (2002). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona: Graó.
- Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar Profesionalización y razón pedagógica*. Barcelona: Graó.

- Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In J.P. Ponte & F Matos (Eds.) *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa: Portugal.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 5-28.
- Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' Knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225- 236). New York, NY: Routledge.
- Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13 (2), 51-74.
- Ponte, J. P. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145-163.
- Potari, D. & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education* 53(5), 13-80.
- Pourshafie, T. & Murray-Harvey, R. (2013). Facilitating problem-based learning in teacher education: Getting the challenge right. *Journal of Education for Teaching: International Research and Pedagogy*, 39(2), 169–180.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, número especial, 103-129
- Ramos, E. (2011). Reflexión de Docentes Sobre la Enseñanza del Álgebra en un Programa Formativo. 209f. Trabajo fin de Máster: (Máster en Didáctica de la Matemática) - Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.
- Ramos, E. (2014). Reflexion docente sobre la enseñanza del algebra en un curso de formacion continua. Tesis doctoral: Universidad de Granada. Granada, España.
- Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.

- 
- Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En L. Rico, P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina., M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rico L. y Moreno, A (2017). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. España: Piramide.
- Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 17-28). Granada, España: Departamento. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Rojas, N., Flores, P y Ramos, E. (2014). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 191-208). Granada, España: Universidad de Granada.
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 11-27.
- Roberts, R. E. (2002). A Study of the Cognitive and Affective Characteristics of High and Low achievers in Year 10 Algebra. PhD thesis, Queensland University of Technology, Australia
- Rodriquez, Gil y Garcia (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.
- Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Ruano, R.; Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y

- modelización en álgebra. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(2), 61-74.
- Ruano, R.; Socas, M. y Palarea, M. (2003). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización formal y modelización en álgebra*. Simposio de la SEIEM Granada.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Santagata, R. & Angelici, G. (2010). Studying the impact of the lesson analysis framework on preservice teachers' abilities to reflect on videos of classroom teaching. *Journal of Teacher Education*, 61(4), 339-349.
- Santagata, R. & Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching effectiveness: Evidence from a video-and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(6), 491-514.
- Santagata, R. & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 43, 133–145.
- Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.
- Schön, D.A. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.
- Schön, D. (1987). *Formación de profesionales reflexivos*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schöenfeld, H. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. In D. Tirosh, & T.Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Tools and processes in mathematics teacher education*, 2, (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publisehrs.
- Sezen-Barrie, A., Tran, M. D., McDonald, S. P. & Kelly, G. J. (2014). A cultural historical activity theory perspective to understand preservice science teachers' reflections on and tensions during a microteaching experience. *Cultural Studies of Science Education*, 9(3), 675-697.
- Sherin, M. & Van Es, E. (2002). Using video to support teachers' ability to interpret classroom interactions. In *In Society for Information Technology & Teacher Education International Conference (pp.2532-2536)*. Association for the Advancement of

Computiny.

- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L.S. (1987). *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Smyth, J. (1989). Developing and Sustaining Critical Reflection in Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, 40, 2-9.
- Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación*, 294, 275-300.
- Solar, H. Y Rojas, F. (2015). Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional del álgebra escolar. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 10(1), 14-33.
- Socas, M. et.al. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. 1. ed. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.
- Sowder J. T. (2007). The mathematics education and development of teachers. In Lester, F.K.Jr (Ed.), *Second handbook on research on mathematic teaching and learning*, 1 (pp.157-224). Charlotte: Information Age Publishing y National council of teachers of mathematics.
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona, Morata.
- Sullivan, P. & Wood, T. (Eds). (2008). Knowledge and beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development. En D. Tirosh, & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education*, 1(pp. 2-13). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and*

- science education*, (pp. 267-306).
- Thanheiser, E. (2015). Developing prospective teachers' conceptions with well-designed tasks: Explaining successes and analyzing conceptual difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 18 (2) 141-172.
- Thomas, M. & Yoon, C. (2014). The impact of conflicting goals on mathematical teaching decisions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17 (3), 227-243.
- Tigchelaar, A., Melief, K., Rijswijk, M. y Korthagen F.A.J. (2005). *Elementos de una posible estructura de aprendizaje reflexivo en la formación inicial y permanente de profesores. Proyecto Aprender de la práctica*, Comenius 2.1. Descargado de: [http://www.xtec.net/formacio/practica\\_reflexiva/base/aprendre/comenius\\_elements.pdf](http://www.xtec.net/formacio/practica_reflexiva/base/aprendre/comenius_elements.pdf)
- Tirosh, D. & Even, R. (January, 2007). Teachers' Knowledge of Students' mathematical learning: An Examination of a commonly held assumption. *Seminar Series on Mathematical Knowledge in Teaching (First seminar)*. Cambridge, UK.
- Tirosh, D. & Wood, T. (Eds.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education (Vol. 2)*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Tripp, D. (1993). *Critical Incidents in Teaching: developing professional judgement*. 1. ed. (p. 194). Nueva York: Routledge
- Turner, F. (2008). Growth in teacher knowledge: Individual reflection and community participation. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME*, 4, (pp. 353-360).
- Univerisidad de los Llanos (Unillanos). (2014). Documento de Condiciones Minimas de Calidad: Licenciatura en Matematicas: Acreditación.
- Univerisidad de los Llanos (Unillanos) (2012) Resolución 036 Reglamento y Lineamientos de Practica Docente: Consejo Académico
- Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher*, 80, 428-438.
- Van Es, E. A. (2012). Examining the development of a teacher learning community: The case of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 28(2), 182–192.

- Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.
- Van Es, E., Tunney, J., Goldsmith, L. & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education*, 65(4), 340–356.
- Van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers “learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and teacher education*, 24(2), 244-276.
- Van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers’“learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and teacher education*, 24(2), 244-276.
- Vega-Castro, D. C. (2013). Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas. Universidad de Granada.España.
- Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 233-258.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The development of the higher psychological processes*. Harvard University Press: London
- Villa, A. y Poblete, M. (2004). Prácticum y evaluación de competencias. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 8(2), 1-19.
- Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(3), 181-185.
- Wilson, S. M., Shulman, L. S. & Richert, A. E. (1987). “150 different ways” of knowing: Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teacher Thinking* (pp. 104-124). Londres: Cassell.
- White, A. L., Jaworski, B., Agudelo-Valderrama, C. & Gooya, Z. (2013). Teachers Learning from Teachers. In Third *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 393-430). Springer New York.
- Wood, T. (Serie Ed.), Jaworski, B., Krainer, K., Sullivan, P., & Tirosh, D. (Vol. Eds.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education* Rotterdam. The Netherlands: Sense Publishers.



- Zabalza, M. (2004). Condiciones para el desarrollo del practicum. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 8(2), 5-1.
- Zeichner, K. & Liston, D. (1987). Teaching Student Teachers to Reflect. *Harvard Educational Review*, 57(1), 23-49.
- Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de Pedagogía*, 220, 44-49.